

# **Favor citar a fonte**

**Dúvidas e esclarecimentos sobre o trabalho:** danilofisico@yahoo.com.br  
**Questions and clarifications about the work:** danilofisico@yahoo.com.br

## **Dados para referência bibliográfica:**

Barbosa, Danilo de Almeida. **Análise de movimentos periódicos em sistemas com vibro-impacto harmonicamente.** 2009. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal do Espírito Santo.

Após fazer a citação, por favor, entre em contato, com os dados do material citado, incluindo título e autor.

## **REPRODUÇÃO AUTORIZADA PELO AUTOR.**

Apenas peço-lhe que não se esqueça de citar a fonte.

**Outubro de 2009**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DANILO DE ALMEIDA BARBOSA**

**ANÁLISE DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS EM SISTEMAS COM  
VIBRO-IMPACTO HARMONICAMENTE EXCITADOS**

VITÓRIA – ES  
2009

**DANILO DE ALMEIDA BARBOSA**

**ANÁLISE DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS EM SISTEMAS COM  
VIBRO-IMPACTO HARMONICAMENTE EXCITADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Sistemas Mecânicos

Professor Orientador:  
Dr. Márcio Coelho de Mattos

Professor Co-Orientador:  
Dr. Vladimir Ivanovitch Dynnikov

VITÓRIA – ES

2009

**DANILO DE ALMEIDA BARBOSA**

**ANÁLISE DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS EM SISTEMAS COM VIBRO-  
IMPACTO HARMONICAMENTE EXCITADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Aprovada em 16 de Outubro de 2009.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Profº Dr. Márcio Coelho de Mattos – Orientador  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Profº Dr. Vladimir Ivanovitch Dinnykov – Examinador Interno  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Profº Dr. Fransergio Leite da Cunha – Examinador Externo  
Faculdade do Centro Leste - UCL

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

B238a Barbosa, Danilo de Almeida, 1979-  
Análise de movimentos periódicos em sistemas com vibro-  
impacto harmonicamente excitados / Danilo de Almeida Barbosa.  
– 2009.  
93 f. : il.

Orientador: Márcio Coelho de Mattos.  
Co-Orientador: Vladimir Ivanovitch Dynnikov.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Espírito  
Santo, Centro Tecnológico.

1. Oscilações. 2. Vibração. 3. Impacto. 4. Choque (Mecânica).  
5. Colisões (Física). 6. Vibro-impacto. I. Mattos, Márcio Coelho  
de. II. Dynnikov, Vladimir Ivanovitch. III. Universidade Federal do  
Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 621

---

## DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho a todos àqueles que acordam cedo, preparam a refeição do meio-dia para levar ao trabalho, e que não fogem a “labuta” e acreditam na força da educação para o crescimento profissional e humano.*

*Consagro esta literatura a estes seres humanos que se espremem em conduções lotadas e sem conforto, muitas vezes antes mesmo do amanhecer e aos ex-colegas de lavoura que ao final do expediente ainda encontram forças para encarar mais três ou quatro horas de estudos, pois acreditam que aquela condição sub-humana a qual lhe foi imposta, sob herança, só irá se alterar quando conseguirem extinguirem a ignorância do peito.*

*Da mesma forma elevo esta dedicatória aos ex-colegas camelôs, que são alvos do preconceito difundido através da propaganda de eliminação desta classe da sociedade pela burguesia que faz uso da mídia, injetando hipocrisias naqueles cuja verdadeira informação está ausente.*

*E a mais importante das dedicatórias é a todos estes mesmos trabalhadores que sofrem e abdicam da felicidade em pró da felicidade de seus filhos, os educando e com o sonho de que suas crias não passem pelas humilhações os quais foram obrigados.*

*Espero que o resultado deste consiga injetar rendimentos a República Federativa do Brasil, e que a mesma tenha em seus Governos seres HUMANOS competentes e com habilidade suficiente para distribuir as receitas, de forma justa, com todos aqueles que ainda não tiveram a mesma sorte que eu.*

*A todos nordestinos e*

*Ao Dr. Vladmimir, como todos àqueles que estão à frente de seu tempo.*

*“O ato de sonhar dá direito ao Homem de  
poder progredir”.*

*Danilo de Almeida Barbosa*

## AGRADECIMENTOS

É engraçado que em algumas notas de agradecimento colocam-se os nomes dos homenageados por ordem de importância. Mas imaginemos o seguinte: vamos construir cinco casas em regime de mutirão. Temos cinco trabalhadores: um engenheiro, uma arquiteta, um pintor, um pedreiro e um ajudante, pois o pedreiro não tem condição de carregar muito peso. O engenheiro e a arquiteta e o pintor não sabem “bater massa” – preparar o cimento. É fácil imaginar que o pedreiro e nem o ajudante possuem a mesma perícia adequada que o engenheiro e a arquiteta. E dos cinco há apenas uma pessoa com habilidades em tintas.

Uma pessoa com muito excremento cerebral logo acredita que os personagens mais importantes nesta história são o engenheiro e a arquiteta. Contudo, vê-se racionalmente que não há casa sem pedreiro. Da mesma forma não há decoração se não houver pintor e o pedreiro não trabalharia sem seu ajudante.

O que quero dizer com esta história que criei é que se por algum motivo alguém ficar de fora do grupo, todos ficarão sem CASA.

Assim é o meu trabalho, todos são extremamente importantes e na mesma ordem de grandeza, digamos  $10^{999999}$ . Não haveria trabalho se não houvesse a colaboração dos meus homenageados.

À minha maior patrocinadora, a Cientista Social e “Doutora em Fraternidade com ênfase em Solidariedade Crônica,” Maria Aparecida de Almeida - que se apresenta em minha vida como principal orientadora - a qual comumente eu minhas irmãs chamamos de MÃE, que abdicou de seus sonhos em pró dos meus.

Agradeço a Rita Couto Domingues que mesmo me conhecendo tão pouco demonstrou acreditar em minha prosperidade

E mais ainda agradeço àqueles que não acreditaram - que por diversas vezes me colocaram na posição de um sonhador que não têm os pés no chão - já que inconscientemente acabaram me motivando ainda mais, pois com isso tomei a descrença como um desafio.



Ainda neste contexto declaro minha gratidão a duas pessoas que empregaram total confiança nesta pesquisa: o Sr. Evandro Valiense Araujo e a Cientista Social Sra. Vânia Fernandes Dal Bem que também foram patrocinadores ao emprestarem um bem valioso: o próprio nome. “OBRIGADO PELA CONFIANÇA NÃO DESPERDIÇADA”!

É sabido que antes de alcançar este andar, precisei galgar degraus. Durante este processo obtive ajuda do “Doutor em Humanitarismo com ênfase em Humildade”, cujo título o concedo pela experiência de vida, que atende pelo nome de Genival Rodrigues Barbosa ou simplesmente de PAI.

Ainda no período em que seguiu minha graduação em Bacharelado em Física, pela Universidade Estadual de Santa Cruz, tive a sorte de conhecer pessoas como Thiago Nascimento Barbosa e sua família – Tia Zéza, Tia Jeane, que me deram atenção e distribuíram amor como se seu filho fosse. Ao Sr. Adriano que desta mesma família tornou-se amigo.

Não poderia deixar de agradecer a Tia Marlene que por muitas vezes cuidou de minhas enfermidades e mostrou-se uma amiga de coração imenso (como uma mãe estende a mão ao seu filho).

Ao Dr. Alejandro Dimarco e ao Dr. André Ribeiro por contribuírem em minha formação acadêmica e por me recomendarem a este programa.

Um eterno agradecimento ao Professor Dr. Vladimir, pessoa que abriu a porta deste mestrado e me deu uma oportunidade (não desperdiçada).

Ao Prof. Márcio Coelho de Mattos que dispôs parte de seu tempo com dedicação na orientação e revisão deste trabalho. Muito obrigado Professor.

Não poderia esquecer as duas pessoas que certamente são as que mais aparecem em notas de agradecimento - e vale lembrar que muito merecidamente - que são Celina e a Maria José ( Zezé). Obrigado pela prestabilidade e solidariedade.

E também aos professores Dr. Juan Romero, Dr. Carlos Loeffler pelas consultorias.

A Iury e Elisa, que por vezes me auxiliaram e foram pacientes ao ouvirem meus lamentos.

Agradeço ao auxílio dos colegas de mestrado João Paulo, Eduardo Magno, Diego Calvin, Breno Dornelas, Rafael Lopes, Zerbine, Alchaar, Alex Santana, Leonardo Caputo, Flávio Costalonga, Jonas Carvalho e ao companheiro Charles o qual mantenho uma alta estima.

Ainda tomo gratidão à agência de Fomento FAPES/FUNCITEC que foi agente pagador das minhas despesas relacionadas à pesquisa.

A minha Diva, Caroline Couto Domingues, que demonstrou toda crença em minha vitória e que tenho certeza que sempre estará ao meu lado tanto nas derrotas como agora em mais este TRIUNFO. Esta mesma pessoa me ensinou que O **AMOR** nunca falha.

E agradeço a **DEUS** por me conceder o direito de poder agradecer.

*“Se Deus NÃO existe e você acredita n’Ele você não perderá NADA por acreditar. Mas se DEUS existe e você NÃO acredita n’Ele você perderá TUDO por não acreditar”.*

*Blaise Pascal*

## RESUMO

À medida que os sistemas mecânicos tornam-se mais flexíveis novos fenômenos da dinâmica de sistemas, antes menos importantes por causa da baixa probabilidade de sua ocorrência, ganham relevância. Entre estes estão os sistemas com vibro-impactos. É que os sistemas mais flexíveis terminam por amplificar os fenômenos que ocorrem nos impactos e há participação destes fenômenos na dinâmica global dos sistema.

O trabalho apresenta um estudo sobre sistemas com vibro-impacto, tomando como objeto de estudo particular um sistema massa-mola-amortecedor com excitação pela base cujo movimento é limitado lateralmente por obstáculos contra os quais a massa em movimento colide. O sistema é analisado na sua forma adimensional onde nossa pesquisa se concentra na busca de condições de existência e estabilidade de certos tipos de movimento. A busca exaustiva da existência e estabilidade de muitos padrões de movimento não é o objetivo do trabalho. Por ora estamos buscando apenas à descrição detalhada da técnica e à estruturação de ferramentas computacionais que facilitem este trabalho. Vencida esta etapa, apresentam-se algumas análises para os padrões de movimento mais comuns com resultados satisfatórios que podem nos trazer interessantes questionamentos para expansão deste, o que na verdade aparece como sugestão para trabalhos futuros.

**Palavras-Chave:** Oscilações, vibrações, vibro-Impacto,  
balanço harmônico

## ABSTRACT

As mechanical systems become more flexible new phenomena of dynamic systems, before less important because of the low probability of its occurrence, gain importance. Among these are systems with vibro-impacts.

Is that the Systems more flexible end up amplifying the phenomena that occur during the impacts and there is contribution these phenomena in the dynamics of the global system.

This paper presents a study on systems with vibro-impact, taking as an object of particular study a mass-spring-damper excited by the base, whose movement is laterally limited by obstacles against which the moving mass collides.

The system is analyzed in its dimensionless form where our research focuses on studying the conditions of existence and stability of certain types of movement.

The exhaustive search of the existence and of the stability of many standard of movement is not the objective this your work. We will only describe in detail the technical and computational tools that can facilitate work like is. After this step, we present some analysis to the movement patterns most common, with interesting conclusions.

**Keywords:** *Oscillations, vibration, vibro-Impact, harmonic balance*

## Lista de Figuras

### 1 INTRODUÇÃO

1.1: *Sistema cujos movimentos são objeto de estudo* - consiste de uma base oscilante na qual se movimenta um bloco, este conectado à base por um suporte visco-elástico. 15

### 2 MODELAGEM DO SISTEMA

2.1: Movimento de  $S'$  em relação à  $S$  com velocidade relativa  $v = -s'_0 p \text{Sen}(pt)$ , onde  $s'_0$  é amplitude do movimento do ponto e  $p$  é a excitação devido a uma força perturbadora  $F$ . 22

2.2: *Sistema cujos movimentos são objeto de estudo* – gera através de algebrismo, elaborando diagrama do corpo livre ao visualizar a figura, o resultado do equilíbrio dinâmico das forças atuante sobre o corpo rígido de massa  $m$  quando este se desloca entre os dois batentes 24

2.3: *Fluxograma do algoritmo da solução temporal da equação de movimento* – Algoritmo que representa a resposta temporal obtida a partir das soluções das respostas em cada lapso temporal de resposta linear relacionada com a com o diagrama da figura 2.1. 30

2.4: *Movimento com período de ordem 1 e 3 impactos por período - Resposta para  $\omega = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  e  $\xi = 0.05$ .* 33

2.5: *Resposta para  $\omega = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  e  $\xi = 0.05$ .* Resposta muito bem comportada, apresentando período de primeira ordem, isto é, igual ao da excitação, com três impactos por período. 33

2.6: Mudanças no parâmetro relativo à folga podem levar a respostas de topologia diferenciada. 34

2.7: Repara-se que, em  $\varepsilon \approx 0.313$ , o movimento, embora permaneça com período de ordem 1, passa a apresentar apenas 2 impactos por período. 34

2.8: movimento com período de ordem 1 e dois impactos período, que ocorre quando a folga está muito próxima à amplitude do oscilador harmônico forçado que caracteriza o sistema quando não há colisões,	35
2.9: <i>Resposta para <math>\omega = 0.5</math>, <math>\varepsilon = 0.09</math> e <math>\xi = 0.05</math>. Aparente movimento quase-periódico que não se confirma ao longo do tempo.</i>	35
2.10: <i>Movimento não periódico. Notam-se <math>\approx 20</math> impactos por lapso de <math>3T</math>.</i>	36
2.11: <i>Resposta para <math>\omega = 0.5</math>, <math>\varepsilon = 0.091391</math> e <math>\xi = 0.05</math>. <math>\xi = 0.05</math>. Movimento não periódico na transição até ao movimento periódico com período de ordem 1, apresentado na figura.</i>	36
2.12: <i>Resposta para <math>\omega = 0.5</math>, <math>\varepsilon = 0.21601</math></i>	36
2.13: Condensa o que ocorre para $\varepsilon = 0.21604$ . Na figura podem ser identificados três lapsos temporais distintos.	37
2.14: Parte da resposta temporal ampliada	37
2.15: <i>Aparente movimento com amplitudes moduladas que não se confirma no futuro.</i>	38
2.16: <i>Movimento não periódico, conforme mostrado na figura 2.11.</i>	38
2.17: Início da migração de período de ordem 2 para período de ordem 1 quando $\varepsilon \approx 0.2305$ .	39
2.18: <i>Movimento com período de ordem 2 e 10 impactos por período.</i>	39
2.19: <i>Movimento com período de ordem 1 e 5 impactos por período</i>	39
2.20: Passa por uma janela de movimento não periódico.	40
2.21: Término como movimento periódico com dois impactos por período	40
2.22: Padrões de movimento diversos para variações da folga quando $\omega = 1$ e $\xi = 0.05$ .	41
2.23: <i>Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período</i>	41

2.24: Movimento com período de ordem 3 e 4 impactos por período	41
2.25: Resposta Á $\omega = 1.0$ $\varepsilon = 2.0$ $\xi = 0.05$ $x_0 = 0$ $v_0 = 0$	42
2.26: Resposta Á $\omega = 1.0$ $\varepsilon = 2.5$ $\xi = 0.05$ $x_0 = 0$ $v_0 = 0$	42
2.27: Movimento com período de ordem 2 e 2 impactos por período	42
2.28: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período	43
2.29: Possibilidade de movimentos periódicos de freqüência fundamental muito mais baixa que a da excitação.	43
2.30: Movimento com período de ordem 2 e 2 impactos por período.	43
2.31: apresenta mais um caso movimento periódico de período de ordem seis, resultando um movimento de freqüência fundamental bem mais baixa que a excitação	44

### 3 EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE PADRÕES DE MOVIMENTO

3.2: Representação esquemática de movimentos com dois impactos por período igualmente espaçados no tempo.	53
3.3: Movimento não periódico	55
3.4: Movimento quase periódico	55
3.5: Movimento periódico com período de primeira ordem e 2 impactos por período.	55
3.6: Movimento periódico após 3700 colisões: 1ª ordem e 2 impactos por período.	58
3.7: Amplitude do sistema linear e indicação da região de impactos.	61
3.8: Valor crítico de $\eta$ em função de $\omega$ .	63
3.9: Identificação das freqüências em que $\eta_{cr} \rightarrow 1^-$	63
3.10: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.	64
$\omega = 1.0$ $\varepsilon = 1.5$ $\xi = 0.05$ $x_0 = \varepsilon$ $v_0 = -0.7771$	
3.11: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.	64

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 2.0 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = \varepsilon \quad v_0 = -0.7711$$

3.12: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

65

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 3.0 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = \varepsilon \quad v_0 = -0.7529$$

3.13: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

66

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 4.0 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = \varepsilon \quad v_0 = -0.7255$$

Figura 3.14: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

66

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 4.5 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = \varepsilon \quad v_0 = -0.7081$$

3.15: Período de ordem 2 e 2 impactos por período (resposta após 30.000 colisões)

67

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 4.5 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

3.10: Estado do sistema após colisões (computo após 30.000 colisões)

67

4.1: Comparação entre balanço harmônico e simulação direta

80

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.24 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = v \quad v_0 = -0.783299$$



## Lista de Símbolos

### Capítulo 1

$\Delta$  = Folga dada em unidade de comprimento, distância entre o bloco e o batente

$\varepsilon$  = Representa a folga adimensional, relação  $\frac{\Delta}{y_0}$

$m$  = Massa do corpo

$k$  = Constante elástica ou rigidez da mola

$c$  = Constante viscosa que em algumas bibliografias aparece como “b”.

$z = z(t)$ , que é uma função temporal que governa o movimento da massa em relação a base que se movimenta com uma função horária cossenoidal  $y = y_0 \cos pt$ .

$p$  = Freqüência perturbadora ou excitatória

$y_0$  = Amplitude máxima

$t$  = Tempo em segundos

### Capítulo 2

$v = \dot{s}$  = velocidade de deslocamento da base em relação a um referencial fixo

$F_{atrito}$  = Força de atrito

$P$  = Posição do corpo num instante  $t$  qualquer

$x'_b = s$  = Deslocamento da base em relação a um referencial fixo.

$x'_o = s'_o = s_o$  = Amplitude referente ao deslocamento cossenoidal da base

$\omega_o$  = Freqüência fundamental

$\xi$  = Fator de amortecimento

$\tau$  = Tempo adimensional

$x$  = Deslocamento adimensionalizado

$\omega$  = Razão entre as frequências

$f = f(\tau)$  = uma função genérica

### Capítulo 3

$$A_c = A \cos \phi$$

$$A_s = A \sin \phi$$

$A$  = coeficiente a determinar

$\hat{\tau}$  = Instante final da colisão

$\tau_i$  = Instante em que o estado do sistema é conhecido, onde  $i$  é o número de colisões

$\mathbf{J}$  = Matriz que rege a transferência de momento linear entre os estados anterior e posterior à colisão

$\tau^+$  e  $\tau^-$  indicam os instantes infinitesimalmente antes e após o instante da colisão.

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	
1.1	Descrição do Problema e Objetivos	15
1.2	Revisão Bibliográfica	18
1.3	Organização da Dissertação	21
<b>2</b>	<b>MODELAGEM DO SISTEMA SELECIONADO PARA ESTUDO</b>	
2.1	Modelo Físico e Modelo Matemático – Equação do Movimento	22
2.2	Algoritmo de Solução da Resposta Temporal	29
2.3	Resultados da Simulação: Alguns Padrões Resposta de Movimento	32
<b>3</b>	<b>EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE PADRÕES DE MOVIMENTO</b>	
3.1	Análise da Equação de Movimento	47
3.2	Condições para Movimento Periódico com dois Impactos por Período e Igualmente Distribuídos no Período.	51
3.3	Dependência da Resposta Permanente às Condições Iniciais do Movimento	55
3.4	Região de Existência do Movimento com Período de Ordem 1 e Dois Impactos por Período, Uniformemente Distribuídos	60
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO DO MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO</b>	
4.1	Descrição de Método	69
4.2	Cálculo dos Coeficientes	72
4.3	Algoritmo para a Implementação da Solução por Balanço Harmônico	81
<b>5</b>	<b>ANÁLISE E CONCLUSÕES</b>	
5.1	Conclusão e Trabalhos Futuros	83
	<b>Referências</b>	85
	<b>Anexo I</b>	88

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Uma importante parte dos sistemas dinâmicos é representada por aqueles sistemas cujo movimento se dá durante interações impactantes entre massas do mesmo sistema, ou seja, no intervalo ínfimo duração do impacto - instante. Estes sistemas são conhecidos como vibro-impactantes e a maioria são considerados como sistemas não-lineares. (RAGULSKIENE, 1974 p. 320).

Muitos destes são regidos por equações próprias de movimentos periódicos e que podem gerar uma funcional – que alguns afirmam ser uma função dentro de outra função – mantendo uma periodicidade que pode vir a ser manipulada.

O citado acima pode ser visto em várias correntes de estudos que envolvem vibrações. No nosso caso estaremos analisando um corpo movimentando-se sobre uma base móvel.

Embora haja muitas aplicações importantes de vibrações livres, a classe mais importante de problemas de vibração é aquela na qual o movimento é continuamente excitado por uma força de perturbação (MERIAM 1999), o que sugeriria a utilização do método da perturbação para resolução de problemas que envolvem estes sistemas. Contudo os métodos numéricos de aproximação como o Balanço Harmônico (ou equilíbrio harmônico) são simples e sistemáticos, o que viabiliza a sua implementação e melhora o desempenho computacional em relação aos métodos analíticos como o método da perturbação (LEWANDOWSKI, 1992).

Em relação ao nosso problema, consideremos o sistema apresentado na figura 1.1, que consiste de uma base oscilante na qual se movimenta um bloco, este conectado à base por um suporte visco-elástico. O movimento corpo é limitado pelos batentes da base oscilante, contra os quais o sistema massa-mola-amortecedor impacta repetidamente.

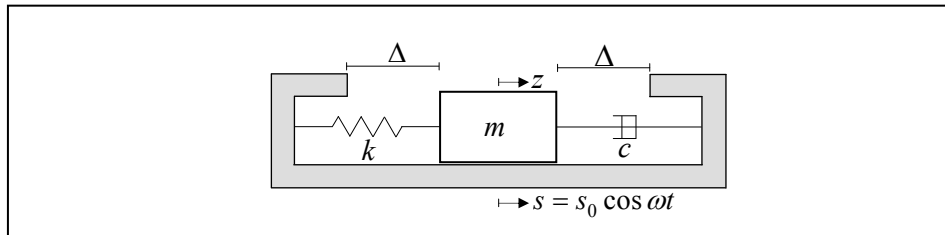


Figura 1.1: Sistema cujos movimentos são objeto de estudo, em que “ $z=z(t)$ ” que é uma função temporal que governa o movimento da massa em relação à base que se movimenta com uma função horária cossenoidal  $y = y_0 \cos \omega t$ .

O sistema apresentado pode ser analisado sob diferentes prismas como, por exemplo:

- a) Resposta dinâmica global do sistema massa-mola-amortecedor e suas particularidades como dependência do conjunto de parâmetros que o caracterizam, isto é, como dependência da frequência natural do sistema linear associado, do amortecimento, da folga e de sua assimetria, da excitação e das condições iniciais do movimento;
- b) Dinâmica global do sistema massa-mola-amortecedor + base oscilante e suas particularidades como dependência do conjunto de parâmetros que caracterizam o sistema;
- c) Efeitos de desgaste dos impactos e sua dependência com os parâmetros que caracterizam o sistema;
- d) Características das ondas sonoras geradas pelos impactos e sua dependência com os padrões de movimento do sistema;
- e) Distribuição espectral de energia como dependência dos padrões de movimento do sistema;

Cada item anterior pode ser ainda, desdobrado, em diversos subitens. No caso da resposta dinâmica global (item a), pode-se destacar, por exemplo:

- a.1) Condições de ressonância não linear, isto é, de energia máxima na resposta com energia mínima na excitação;
- a.2) Análise de movimento para diversos modelos de contato na região de impacto;
- a.3) Condições de existência e estabilidade de movimentos periódicos;
- a.4) Condições para ocorrência de caos;

a.5) Relação entre a dissipação de energia no movimento macro, viscosa, e a dissipação de energia no impacto;

O presente trabalho está focado no estudo de condições de existência e estabilidade de movimentos periódicos, fixando-se, obviamente, algumas características do sistema, a saber:

- a) O elemento que conecta a massa à base oscilante é visco-elástico e responde linearmente, isto é, a mola e o amortecedor viscoso são lineares;
- b) O impacto entre a massa e o batente será considerado frontal, de forma que o movimento oscilatório da massa será sempre unidirecional;
- c) O movimento  $y(t)$  da base oscilante é prescrito e não sofre perturbação do movimento da massa  $m$ , nem mesmo das colisões.

Pode-se questionar a suposição de que o movimento da base oscilante não sofre interferência do movimento do corpo a ela conectado, nem mesmo nos instantes do impacto. Não deve ser enxergada nenhuma estranheza nesta hipótese, sobretudo para quem considera razoável a aplicação de uma força harmônica de amplitude preestabelecida, por exemplo, em sistemas, lineares ou não, amplamente explorados na literatura, Hartog (1985), Nayfeh (1973), Mook (1976), Strogatz (2000). Na verdade, a hipótese implica apenas em uma fonte de energia mecânica o bastante robusta para, compensando todas as perturbações externas a ela, inclusive as do movimento do corpo de massa  $m$  e suas colisões contra a base oscilante, manter sob controle o movimento prescrito.

É o problema, já abordado por Mook (1976), dos sistemas ditos ideais, em contraposição aos sistemas reais não ideais. A dinâmica da fonte de energia, quando não garantida seu comportamento ideal deve ser levado em conta no equacionamento do problema. Neste, estaremos considerando a fonte de energia que garante o movimento da base oscilante como ideal, ou garante a energia necessária para a garantia do movimento descrito.

Esta é exatamente a mesma suposição que fica por trás do modelo de uma força de amplitude preestabelecida: A fonte que produz esta força é suficientemente robusta

para mantê-la. Utilizam-se muitas vezes, aliás, sistemas retroalimentados para a garantia de que a força excitadora obedeça às características desejadas.

O objetivo geral é a modelagem e análise dos possíveis movimentos do sistema constante da figura 1.1, o qual depende das muitas possíveis combinações de parâmetros. Sabe-se, todavia, que, na prática a resposta em frequência assume importância fundamental porque se mostra importante tanto como parâmetro de projeto quanto como estratégia de controle. Como objetivos específicos, têm-se:

- a) Análise da existência de determinados padrões de movimento;
- b) Análise da estabilidade destes padrões de movimento;

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Estudos sobre sistemas com vibro-impacto ganharam muita importância na última década, e comporta hoje várias linhas internas de pesquisa, entre as quais:

- Projeto e otimização de amortecedores de vibração por impacto
- Próteses de joelhos humanas
- Comportamento de fluidos betuminosos
- Análise de padrões de movimentos e estudo de sua estabilidade;

Luo et al. (2008) estudaram a ressonância 1:4 num sistema de dois graus de liberdade com vibro-impacto, analisando bifurcações em torno desta ressonância através de mapas de Poincaré e derivação no sistema linearizado. Uma ressonância 1:4 é uma ressonância que ocorre em um quarto da frequência de excitação.

TIPLER (1999 p.226) afirma que em uma colisão, dois objetos interagem fortemente em tempo muito curto. Neste instante as forças externas são muito menores que as forças de interação entre os corpos.

Antes e depois da colisão a interação entre os dois objetos é pequena comparada com a interação durante a colisão. Para os menos atentos vamos lembrar que quando a energia cinética calculada após a colisão é igual ao que havia

anteriormente – tudo isso em módulo (valor numérico) – dizemos que a colisão é perfeitamente elástica (TIPLER 1999 p. 231).

Este processo de colisão acaba por promover uma área de interesse voltada para o comportamento do corpo durante sucessivas colisões e em que ponto e/ou instante todo um sistema, que está sob a ação de uma força excitatória e externa, alcançará a estabilidade.

BRÂNDEU (2000 p. 2494) alega que para o estudo da estabilidade,

[...] devemos considerar também o movimento perturbado do sistema, o que o difere de um movimento puramente periódico para um certo número de colisões, os parâmetros de movimento têm outros valores além dos períodos no movimento. Devido a estas perturbações, também no intervalo de tempo entre as duas sucessivas colisões, as leis do movimento são perturbadas ou sofrem variações.

E é muito feliz ao postular que

[...] a ocorrência de movimentos perturbados que diferem de movimentos periódicos é resultado de pequenas perturbações iniciais nos parâmetros dos movimentos periódicos. Suponhamos que as perturbações são pequenas e decrescentes – em determinado momento – onde neste intervalo elas tendam assintoticamente a zero. Neste caso o movimento periódico é considerado assintoticamente estável (BRÂNDEU 2000 p. 2494).

É comum ao estudar este tipo de fenômeno verificar que as ferramentas matemáticas mais eficientes para análise de resultados de sistemas complexos que envolvem uma série de repetições sejam as Séries de Taylor e Séries de Fourier. Esta segunda possui uma particularidade que para o nosso estudo o torna mais agradável do ponto de vista econômico, por que nos reduz o tempo computacional ao fazermos análise de frequência ao passo que acabaremos utilizando também a transformada de Fourier.

Na mesma linha, Pinto (2006) afirma que o objetivo da análise de Fourier é conseguir representar uma função na variável tempo usando outra base que não os eixos cartesianos. A nova base é constituída por funções seno e cosseno.

O Manual de Simulação de Circuitos via Projeto Avançado de Sistemas<sup>1</sup> apresenta

---

<sup>1</sup> Agilent ADS Circuit Simulation Manual, Chap. 7, Harmonic Balance.



uma boa definição para o citado:

[...]Equilíbrio harmônico é uma técnica de análise de frequência-domínio para simulações de sistemas lineares e não-lineares. Baseia-se na suposição que para uma dada excitação sinusoidal ( $S(t) = A_0 = k_1.Cos(\omega t + \phi)$  – eq. genérica) existe uma solução para o estado-permanente (steady-state) com uma aproximação bastante satisfatória por meio de séries finitas de Fourier.

No mesmo contexto encontramos no trabalho de MACDONALD (1993 p. 6368) uma afirmativa em que a rotina para aplicação do Método de Balanço Harmônico para aproximação de soluções periódica com equações diferenciais ordinárias não lineares, segue os seguintes passos:

- 1 - Selecionar uma parte da solução que está em uma série de Fourier truncada, ou condicionando apenas termos  $a_n \cos(n\omega t)$ , tendo  $n$  até  $N$ , ou com ambos os termos seno e cosseno, conforme o caso. Inserir esta solução da equação, e ignorar quaisquer harmônicos superiores (termos com  $n > N$ ) gerados pelas condições não-lineares.
- 2 - Reduzir a zero os coeficientes do harmônico retido, obtendo assim um conjunto de equações não lineares acopladas para a frequência  $\omega$  e as amplitudes da parte da solução escolhida e em seguida, resolve-las.

WOO et al. (2005) nos trás uma informação preciosa quando afiança que, quando o método de equilíbrio harmônico é aplicado a um sistema não-linear, normalmente, apenas certo número de condições harmônicas é retido, conseqüentemente a série de Fourier truncada determina o erro. Isto vem do fato de que a solução exata de um sistema não-linear arbitrário existe na forma de uma série de Fourier infinita.

SMITH (2008) durante suas Análises de Movimentos Periódicos faz uso deste método descritivo de uma função (também chamado de método do balanço harmônico), já que o mesmo utiliza técnicas de domínio da frequência (séries de Fourier) para investigar o comportamento cíclico em sistemas não lineares, dado que método envolve uma aproximação, porém, toda via, freqüentemente toma uma predição (do que pode ocorrer) segura a respeito do limite do comportamento cíclico.

O Manual de Simulação de Circuitos via Projeto Avançado de Sistemas, já referenciado na página anterior, informa que o método de equilíbrio harmônico é iterativo. Está baseado na suposição que para uma determinada excitação senoidal existe uma solução de estado permanente que pode ser aproximada a precisão satisfatória por meio de umas séries de Fourier finitas.

Daí, podemos citar OGATA (2003 p 401), que diz que o termo resposta em frequência significa a resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal, o que estabelece que se a entrada  $x(t)$  for um sinal senoidal a saída em regime permanente também será um sinal senoidal com a mesma frequência, mas possivelmente o módulo e o ângulo de fase serão diferentes.

Neste trabalho analisam-se condições de existência e estabilidade de movimentos regulares em sistemas com vibro-impacto e harmonicamente excitados.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está assim organizada:

- Este primeiro capítulo situa e contextualiza o problema estudado;
- O capítulo 2 apresenta modelagem do sistema estudado e os resultados de algumas simulações;
- O capítulo 3 apresenta a análise de existência e estabilidade do movimento com período de ordem 1 e dois impactos por período, uniformemente distribuídos;
- O capítulo 4 apresenta a análise do movimento com período de ordem 1 através do método do balanço harmônico;
- O capítulo 5 apresenta a análise do trabalho e as conclusões;

## 2 MODELAGEM DO SISTEMA

### 2.1 MOVIMENTO RELATIVO

Inicialmente temos dois referenciais inerciais:  $S'$  - que pode ser representado por  $(O',x',y',z',t')$  - inerente ao movimento do objeto localizado no ponto P e um segundo referencial  $S$ , dado por um observador externo centrado em O, o qual nós representaremos por  $(O,x,y,z,t)$ .

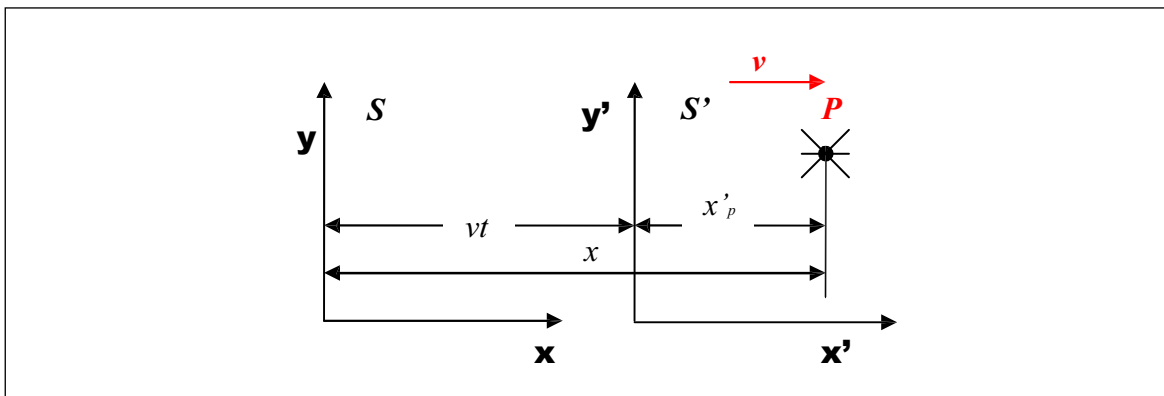


Figura 2.1. Movimento de  $S'$  em relação à  $S$  com velocidade relativa  $v = -s'_0 p \text{Sen}(pt)$ , onde  $s'_0$  é amplitude do movimento do ponto e  $p$  é a excitação devido a uma força perturbadora  $F$

Suponhamos que o movimento de P (observar que este P refere-se à localização de um corpo no espaço num instante  $t$  e este nada tem a ver com oscilação perturbadora  $p$ ) ocorra devido ao movimento de  $S'$  e que o sistema seja inercial e sem atrito estático e sem atrito dinâmico em relação à base (na horizontal,  $F_{\text{atrito}} = 0$ ).

Fazemos então:

$x'_p$  = deslocamento de  $O'$  em relação a ponto P e

$x'_b$  = deslocamento da base em relação a O. Onde a base corresponde ao sistema  $S'$ .

Façamos o seguinte experimento mental: Moveremos a base para trás. Como não há atrito, qualquer corpo situado em P continuará parado. Para que o movimento de P esteja vinculado ao movimento da base colocaremos uma haste ligando a extremidade em  $O'$  até o corpo localizado em P. Desta forma se trazermos a base

para esquerda iremos por meio de tração mover o corpo também para esquerda.

Vamos agora trocar a haste por uma corda ou cordão. Trazendo a base para esquerda e cessando o movimento da base teremos uma colisão entre o corpo e a parede esquerda da base, pois de acordo com a primeira lei, todo corpo tende a manter seu movimento inicial (retilíneo e uniforme ou em repouso) desde que não haja forças externas agindo sobre o mesmo. Lembrando que não estamos admitindo a força de atrito.

Faremos agora uma nova alteração na nossa bancada de experimento mental. Trocaremos o cordão por uma mola ideal.

Como se trata de uma mola ideal, devemos lembrar que  $F = -kx = -ks$  é uma força restauradora. Bom, para não ficarmos enjoados, vamos puxar a base para direita, teremos no primeiro instante que o movimento do corpo ligado obedecerá ao movimento da base. No momento que cessamos o movimento da base, o corpo tende a manter seu movimento inicial. Porém neste momento surge um intruso que tem o propósito de alterar o estado inicial do corpo. Aparece a força restaurada intrínseca da mola, que tende a fazer com que o corpo ligado a mola retorne a posição de onde começou o movimento.

Contudo se base retomar o movimento para trás (esquerda) instantaneamente teremos um deslocamento relativo de P em relação a O da seguinte maneira:

$$x'_b = x - x'_p \quad (1.1)$$

deslocamento do corpo amarrado a mola ( $x'_p$ ) + deslocamento da base ( $x'_b$ ) = distancia entre O e P (ponto onde está situado o corpo no instante t) =  $x$

Mas qual é o deslocamento de S' em relação à S?

Fazendo uma relação entre as coordenadas e tomando v como velocidade da base relativa à S, temos:

$$x'_p = x - vt \quad \text{OU} \quad x = x'_p + vt \quad (2.2a \text{ e } 2.2b)$$

cujo movimento da base em nosso caso (particularidade do problema) é governado por :

$$x'_b = x'_0 \text{Cos}(pt) \quad (2.3)$$

Porém a partir de agora chamaremos  $x'_b = s$  e  $x'_0 = s'_0 = s_0$

Essa exposição associada ao estudo do diagrama do corpo livre justifica a equação 2.4 que vem a seguir.

## 2.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

O sistema a ser modelado é o descrito na seção 1.1, repetido na figura 2.1, com apenas alteração na variável “ $Y$ ” que passaremos usar “ $S$ ”. O equilíbrio dinâmico das forças atuante sobre o corpo rígido de massa  $m$  quando este se desloca entre os dois batentes, resulta na seguinte equação diferencial:

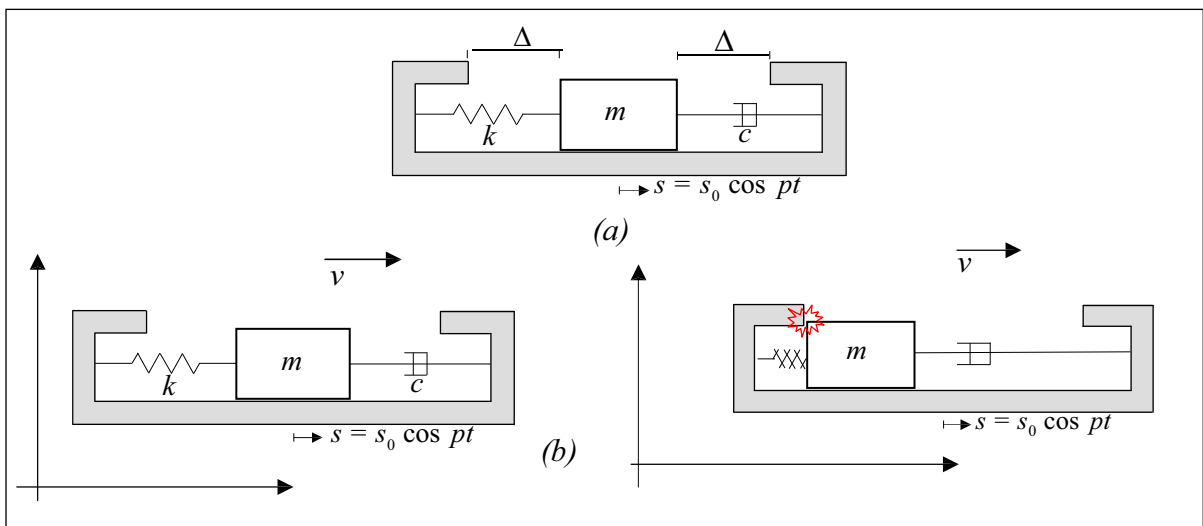


Figura 2.2: Sistema cujos movimentos são objeto de estudo, onde  $v$  é a velocidade da base. Em (a) representação da folga  $\Delta$  como elemento fixo com valor constante determinado arbitrariamente. Em (b) colisão do bloco com anteparo devido ao movimento da base durante um determinado período.

$$m\ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{s}) + k(z - s) = 0 \quad (2.4)$$

Onde  $c$  é a constante viscosa e  $k$  é a constante da mola e  $m$  é a massa do bloco.

Definindo  $y = z - s$ , com  $s = s_0 \cos pt$  e lembrando que  $p$  é a excitação devido a uma força perturbadora  $\mathbf{F}$ , podemos escrever

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{s} \quad (2.5)$$

de modo que, levando em consideração a função temporal preestabelecida para a coordenada  $s$ , tem-se:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = mp^2 s_0 \cos pt \quad (2.6)$$

A equação 2.6 vale apenas enquanto o movimento ocorre no intervalo entre os dois batentes. Quando o corpo atinge um dos batentes, inicia-se um processo de colisão que deve ser adequadamente modelado. Neste trabalho vamos aplicar o modelo de colisão convencional (BRACH 1991, p.6) no qual:

- a) O lapso temporal da colisão será considerado nulo, que na verdade torna nosso sistema ideal, já que haverá conversão de energia (entre cinética e potencial), bem como dissipação, num intervalo de tempo zero.
- b) Como consequência da suposição anterior, a perda de energia durante a colisão será representada por um coeficiente de reconstituição, que é função das energias cinéticas no final e no início do processo de colisão.
- c) O impulso produzido pela força de colisão é muito maior que os impulsos das demais forças durante a colisão.

Não obstante as hipóteses acima parecerem muito restritivas em relação aos sistemas reais, elas têm sido aplicadas por diversos autores na modelagem de sistema com impactos (BRACH 1991 p.48).

Para expressar a dinâmica do sistema numa forma adimensional definimos:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \tau = \omega_o t \quad f' = \frac{df}{d\tau} \quad x = \frac{y}{y_o} \quad \omega = \frac{p}{\omega_o}, \text{ onde } f = f(\tau) \quad (2.7)$$

Fazendo  $y' = \frac{d(y)}{d\tau} = \frac{d(y)}{d(\omega_o t)}$ , podemos então dizer que  $y' = \frac{1}{\omega_o} \frac{dy}{dt}$ , conseqüentemente

$$y'' = \frac{1}{\omega_o^2} \frac{d^2 y}{dt^2}, \text{ desta forma } \omega_o y' = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \text{ e } \omega_o^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y} \text{ então } m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{s}$$

$$\text{fica: } m\omega_o^2 y'' + c\omega_o y' + ky = -ms''$$

e fazendo uso das equações 2.7, com  $x' = \frac{dx}{dt}$  e  $x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}$  temos :

$$\frac{m\omega_o^2}{y_o} x'' + \frac{2k\xi}{y_o} x' + \frac{kx}{y_o} = -m\omega_o^2 s'' \Rightarrow x'' + 2k\xi x' + x = -y_o s'', \text{ pois } \frac{x''}{y_o} = y''$$

Recordando que  $s = s_o \cos p\tau = s_o \cos \omega\tau$  tem-se  $\ddot{s} = -\omega^2 s_o \cos(\omega\tau)$ , de forma que

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = \omega^2 y_o s_o \cos \omega\tau \quad (2.8)$$

Adotando

$$y_o = \frac{1}{s_o} = \text{ termo de adimensionalização da equação 2.8} \quad (2.9)$$

tem-se a equação na forma adimensional:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = \omega^2 \cos \omega\tau \quad (2.10)$$

A equação 2.10 é a forma adimensional da equação 2.6.

Sabendo que o deslocamento  $y$ , na equação 2.6, equivale à folga  $\Delta$ , podemos

definir a folga adimensional conforme a relação  $\varepsilon = \frac{\Delta}{y_o}$

De forma que a equação 2.10 é válida para  $-\varepsilon < x < +\varepsilon$ , devendo-se proceder à atualização do estado nos instantes de impacto, isto é, quando  $x = \pm\varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é nossa forma adimensional da folga.

Com a hipótese de lapso temporal na colisão, a solução da equação (2.10) pode ser expressa, no intervalo de validade, em função do estado do sistema ao fim da colisão, isto é, em função da posição e da velocidade ao fim do processo de colisão. Obviamente que, considerando-se estas condições como a condições de início do movimento, o tempo será também contado a partir do instante final da colisão.

Denominando-se este instante por  $\hat{\tau}$ , a respectiva velocidade por  $\hat{v}$ , a respectiva posição por  $\hat{x}$  e supondo que o sistema não é criticamente amortecido ( $\xi \neq 1$ ) tem-se

$$\begin{aligned} x &= a_1 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} + a_2 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} + A \cos \phi \cos \omega \tau + A \sin \phi \sin \omega \tau \\ \dot{x} &= a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} + a_2 \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} - A \omega \cos \phi \sin \omega \tau + A \omega \sin \phi \cos \omega \tau \\ \ddot{x} &= a_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1(\tau-\hat{\tau})} + a_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2(\tau-\hat{\tau})} - A \omega^2 \cos \phi \cos \omega \tau - A \omega^2 \sin \phi \sin \omega \tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\xi - j\sqrt{1-\xi^2} & \lambda_2 &= -\xi + j\sqrt{1-\xi^2} \\ A \cos \phi &= \frac{\omega^2(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2} & A \sin \phi &= \frac{\omega^2(2\xi\omega)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2} \\ a_1 &= \frac{\lambda_2(\hat{x} - A \cos \phi \cos \omega \hat{\tau} - A \sin \phi \sin \omega \hat{\tau}) - (\hat{v} + A \omega \cos \phi \sin \omega \hat{\tau} - A \omega \sin \phi \cos \omega \hat{\tau})}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ a_2 &= \frac{-\lambda_1(\hat{x} - A \cos \phi \cos \omega \hat{\tau} - A \sin \phi \sin \omega \hat{\tau}) + (\hat{v} + A \omega \cos \phi \sin \omega \hat{\tau} - A \omega \sin \phi \cos \omega \hat{\tau})}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Assim, conclui-se que:



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \\
 \cos \phi &= \frac{1-\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \\
 \text{sen } \phi &= \frac{(2\xi\omega)}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

e

$$x(\hat{\tau}) = a_1 + a_2 + A \cos \phi \cos \omega \hat{\tau} + A \text{sen } \phi \text{sen } \omega \hat{\tau} = \hat{x}$$

$$x'(\hat{\tau}) = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 - A \omega \cos \phi \text{sen } \omega \hat{\tau} + A \omega \text{sen } \phi \cos \omega \hat{\tau} = \hat{v}$$

de modo que a resposta satisfaz as condições iniciais do problema.

Por fim tem-se

$$\begin{aligned}
 x'' + 2\xi x' + x &= a_1 \cdot (\lambda_1^2 + 2\xi\lambda_1 + 1) \cdot \exp[\lambda_1(\tau - \hat{\tau})] + a_2 \cdot (\lambda_2^2 + 2\xi\lambda_2 + 1) \cdot \exp[\lambda_2(\tau - \hat{\tau})] + \\
 &\quad A \cos \omega \tau \cdot [(1-\omega^2) \cos \phi + 2\xi\omega \text{sen } \phi] + A \text{sen } \omega \tau \cdot [(1-\omega^2) \text{sen } \phi - 2\xi\omega \cos \phi]
 \end{aligned}$$

Das equações (2.12) vem

$$\lambda_1^2 + 2\xi\lambda_1 + 1 = \lambda_2^2 + 2\xi\lambda_2 + 1 = 0$$

$$(1-\omega^2) \cos \phi + 2\xi\omega \text{sen } \phi = \frac{\omega^2}{A}$$

$$(1-\omega^2) \text{sen } \phi - 2\xi\omega \cos \phi = 0$$

Logo se tem  $x'' + 2\xi x' + x = \omega^2 \cos \omega \tau$ , como explicitado na equação do movimento.

## 2.2 ALGORITMO DE SOLUÇÃO DA RESPOSTA TEMPORAL

O sistema representado na figura 2.1 é dito linear por intervalos, mas sua dinâmica global é não linear. A resposta temporal pode ser obtida a partir das soluções das respostas em cada lapso temporal de resposta linear, desde que o estado no início do intervalo seja conhecido. A figura 2.3 apresenta o fluxograma do algoritmo de solução.

O fluxograma apresenta três blocos principais de comandos, a saber:

- O bloco 1 estabelece as condições iniciais do movimento antes da primeira colisão e controla as condições de finalização da simulação;
- O bloco 2 procura um intervalo temporal no qual se possa garantir a ocorrência de uma colisão. Não se determina precisamente neste bloco o instante da colisão, mas apenas os limites dentro dos quais se garanta a ocorrência dela;
- O bloco 3 utiliza as condições limites da saída do bloco 2 e, por um processo de biseção, determina, com a melhor exatidão que o processador do computador e o sistema operacional permitirem, o instante da colisão.

Uma vez determinado o instante da colisão, as condições para o movimento até à próxima colisão são determinados, retornando ao bloco 1 para verificação de término. Não satisfeita a condição de término, vai-se ao bloco 2 para procura de nova colisão, repetindo-se as rotinas.

Prefere-se aplicar a resposta exata em cada intervalo à aplicação de uma integração numérica, como Runge-Kutta (ENCICLOPÉDIA LIVRE, 2009), por exemplo, porque a aproximação da solução ocorrerá apenas no instante da colisão, razão pela qual a resposta será menos perturbada. Isto é particularmente importante quando se deseja analisar fenômenos como bifurcações e transição para o caos (Ibrahim-2009).

Como todo o movimento entre dois impactos é regido por uma equação linear, é possível aplicar ferramentas de análise considerando apenas os instantes de impactos para a descrição, qualitativa e quantitativa, dos fenômenos não lineares. Assim, a exatidão para a determinação de tais instantes de impacto é, se a análise for numérica, crucial.

No algoritmo aplicado neste trabalho, a exatidão utilizada na determinação do instante do impacto é a melhor possível determinada pela precisão da máquina utilizada. Assim, se as condições de software e hardware permitirem uma mantissa com maior número de casas decimais, automaticamente o algoritmo determinará o instante com a exatidão correspondente.

O programa computacional que representa o algoritmo da figura 2.1 é apresentado no Anexo I.

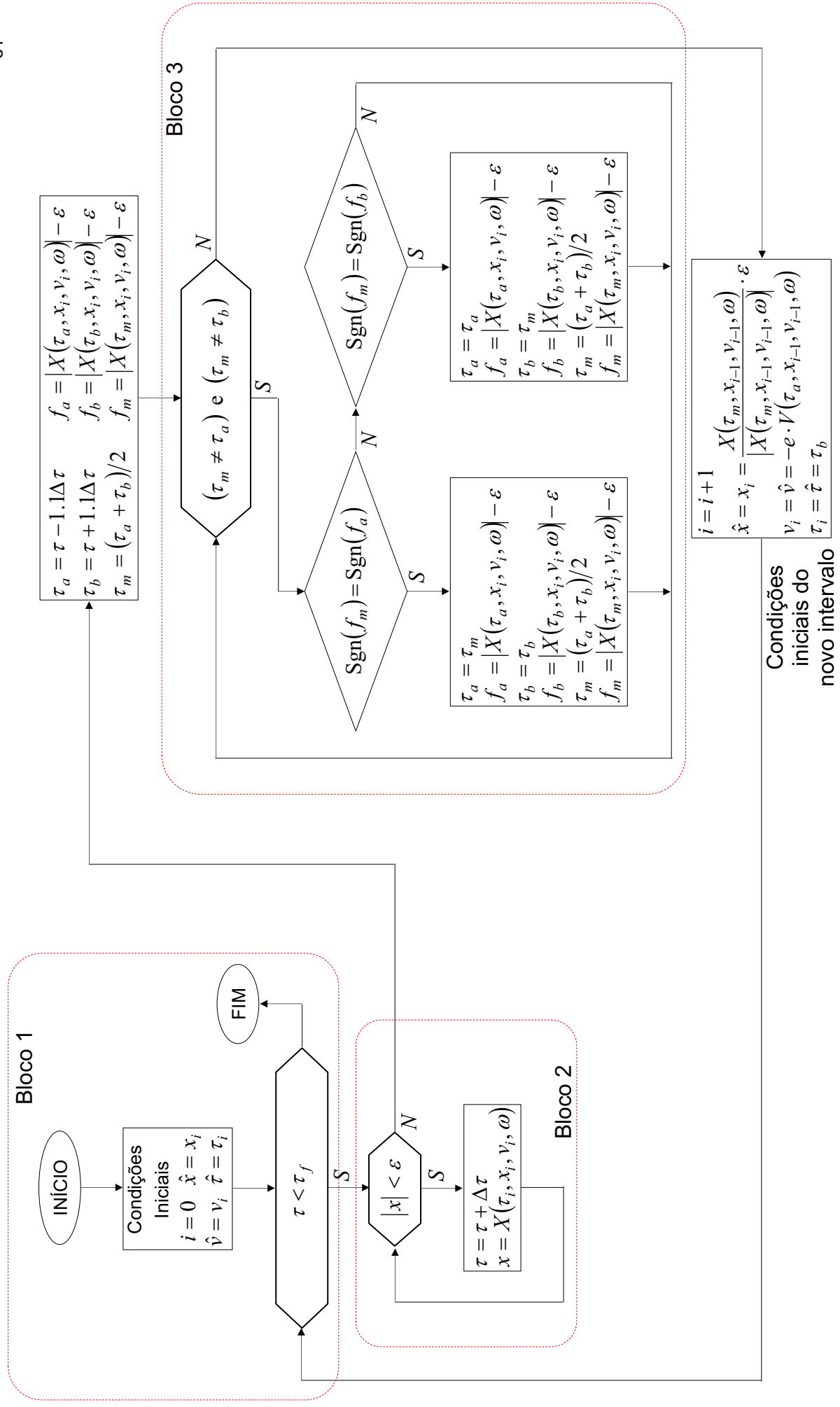


Figura 2.3: Fluxograma do algoritmo da solução temporal da equação de movimento

### 2.3 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO: ALGUNS PADRÕES DE RESPOSTA

As figuras apresentadas nesta seção são resultam do programa computacional desenvolvido, apresentado no Anexo I. O objetivo é discutir vários dos padrões de resposta apresentados pelo sistema, dependendo dos parâmetros, da frequência de excitação e da folga.

Antes de comentar os padrões de resposta é preciso ter em mente que qualquer resposta periódica tem período necessariamente igual ou múltiplo do período correspondente à função excitadora, isto é:

$$\frac{T\omega}{2\pi} \in \mathbb{N}, \mathbb{N} = \text{conjunto dos números naturais} \quad (2.14)$$

A demonstração de que tal assertiva é verdade vem da superposição de funções periódicas, usada na própria série de Fourier. Por definição, uma função temporal  $f(t)$  periódica satisfaz a equação

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por conseqüência:

$$f[t+nT] = f[t+(n-1)T] = f[t+(n-2)T] = \dots = f[t+T]f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (2.15)$$

Suponhamos agora a superposição de duas funções temporais periódicas

$$h(t) = f(t) + g(t)$$

sendo  $T_f$  e  $T_g$  os períodos respectivos de cada função. Ora, para que  $h(t)$  seja periódica deve-se observar

$$h(t+T) = f(t+T) + g(t+T) = h(t) \quad (2.16)$$

Ora, se  $T$  for simultaneamente múltiplo de  $T_f$  e de  $T_g$ , a equação (2.15) garante a

veracidade da equação 2.16. Mais que, isto: se  $T$  for múltiplo de um dos períodos ( $T_f$  ou  $T_g$ ), a periodicidade da função  $h(t)$  só será verdadeira se  $T$  for também múltiplo do outro.

Suponhamos que  $T$  não seja múltiplo nem de  $T_f$  nem de  $T_g$ . Nesta situação, a equação (2.16) pode ser escrita na forma

$$h(t+T) = f(t+T_f + \Delta t_f) + g(t+T_g + \Delta t_g) = f(t+T_f) + g(t+T_g) + \Delta f + \Delta g = h(t) \quad (2.17)$$

Ora, como  $f(t+T_f) = f(t)$  e  $g(t+T_g) = g(t)$  segue que

$f(t+T_f) + g(t+T_g) = h(t)$ , de forma que a periodicidade da equação (2.17) exigiria:

$$\Delta f + \Delta g = 0 \quad (2.18)$$

Obedecer à igualdade 2.18 em um único instante não implica nenhuma consequência maior. No entanto, obedecê-la para todos os instantes, exigirá que as diferenças  $\Delta f$  e  $\Delta g$ , tomadas em relação a funções periódicas, sejam sempre simétricas, o que implicará a própria periodicidade das diferenças  $\Delta f$  e  $\Delta g$ . Mais do que isto, os períodos de  $\Delta f$  e  $\Delta g$  deverão ter um múltiplo comum, implicando que  $T_f$  e  $T_g$  também deverão ter um múltiplo comum.

Vê-se, portanto, a partir das equações 2.15 a 2.18, que a periodicidade de uma função que é a superposição de duas outras funções exige que os períodos das funções superpostas tenham um período mínimo igual ao mínimo múltiplo comum dos períodos das funções superpostas.

No caso da resposta do sistema sob estudo, vê-se, na equação 2.11, que a resposta é superposição de uma função periódica excitatória, de período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  e de uma resposta da equação homogênea, naturalmente não periódica, mas oscilante na frequência natural do sistema, e que deverá se tornar globalmente periódica por causa dos impactos. A “frequência” adimensional  $\omega$  já representa a razão entre a

freqüência da excitação e da freqüência natural do sistema, razão pela qual, em qualquer caso, o período no “tempo” adimensional  $\tau$  será sempre múltiplo de  $T$ , como estabelecido na equação 2.14. Quando o período da resposta for o mesmo da excitação, dir-se-á que o período é de ordem 1, será dito de ordem 2 se for o dobro, de ordem 3 se for o triplo, e assim sucessivamente.

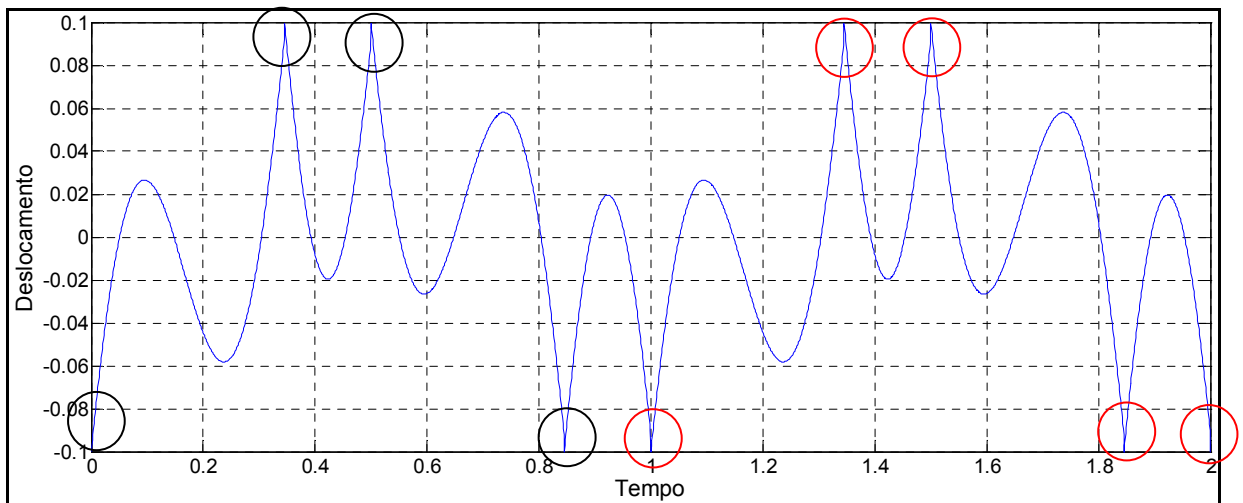


Figura 2.4: Movimento com período de ordem 1 e 4 impactos por período, onde vimos nas equações 2.7 que os parâmetros abaixo são adimensionais, assim como o tempo e o deslocamento – os círculos indicam as regiões de impacto. O período recomeça no ponto em que se encontra o primeiro círculo vermelho.  $\omega = 0.5 \quad \varepsilon = 0.1 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$

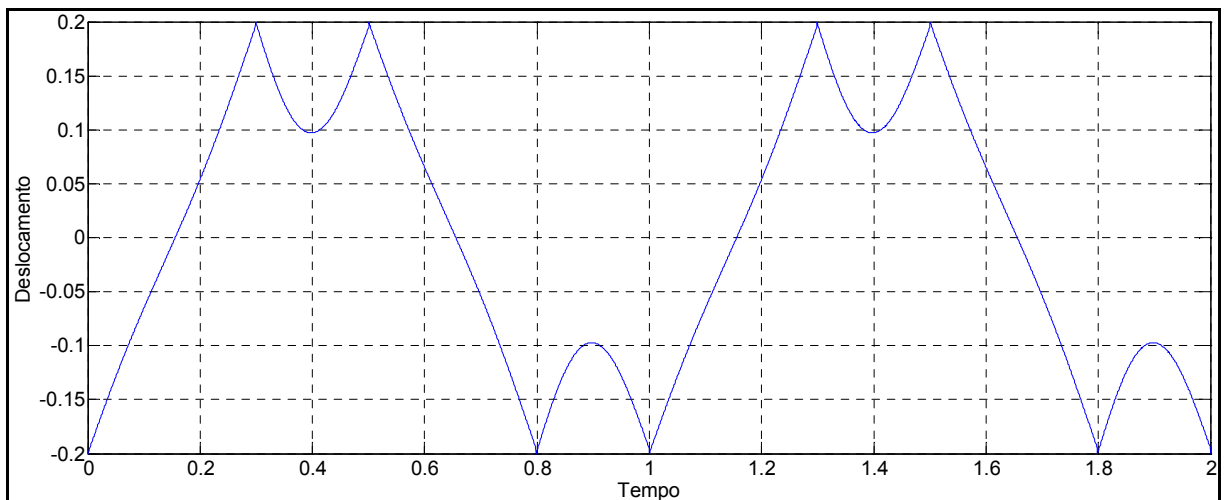


Figura 2.5: Movimento com período de ordem 1 e 4 impactos por período – observe que os impacto ocorrem em  $\varepsilon = |0.2|$   $\omega = 0.5 \quad \varepsilon = 0.2 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$

As figuras (2.4) e (2.5) mostram períodos de ordem 1, com resposta muito bem comportada, apresentando período de primeira ordem, isto é, igual ao da excitação,

com três impactos por período. Vê-se, no entanto, que mudanças no parâmetro relativo à folga podem levar a respostas de topologia diferenciada, como mostram as figuras (2.6) e (2.7). Repara-se que, em  $\varepsilon \approx 0.313$ , o movimento, embora permaneça com período de ordem 1, passa a apresentar apenas 2 impactos por período.

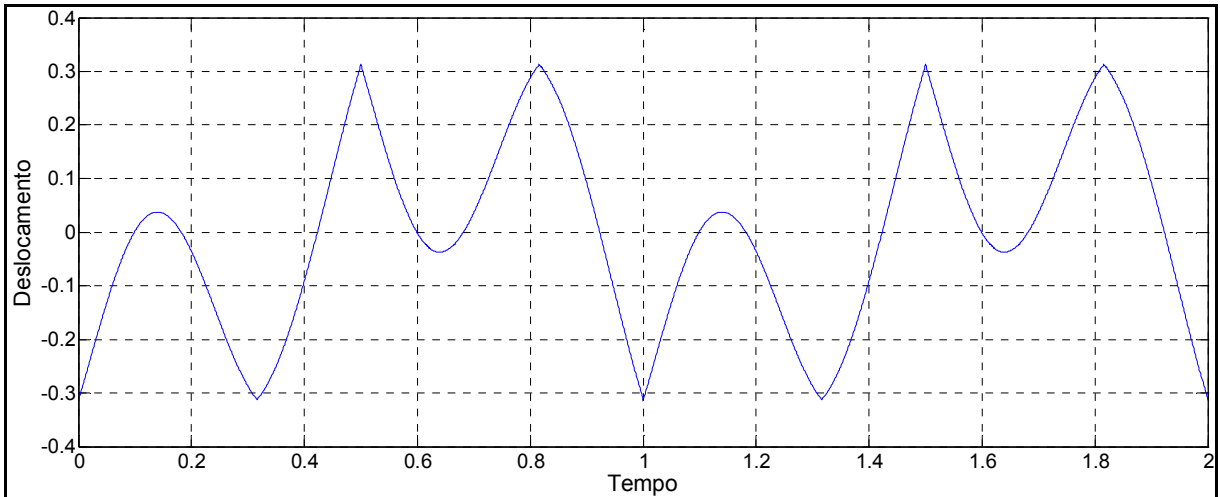


Figura 2.6: Movimento com período de ordem 1 e 4 impactos por período

$$\omega = 0.5 \quad \varepsilon = 0.3122905376553790 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

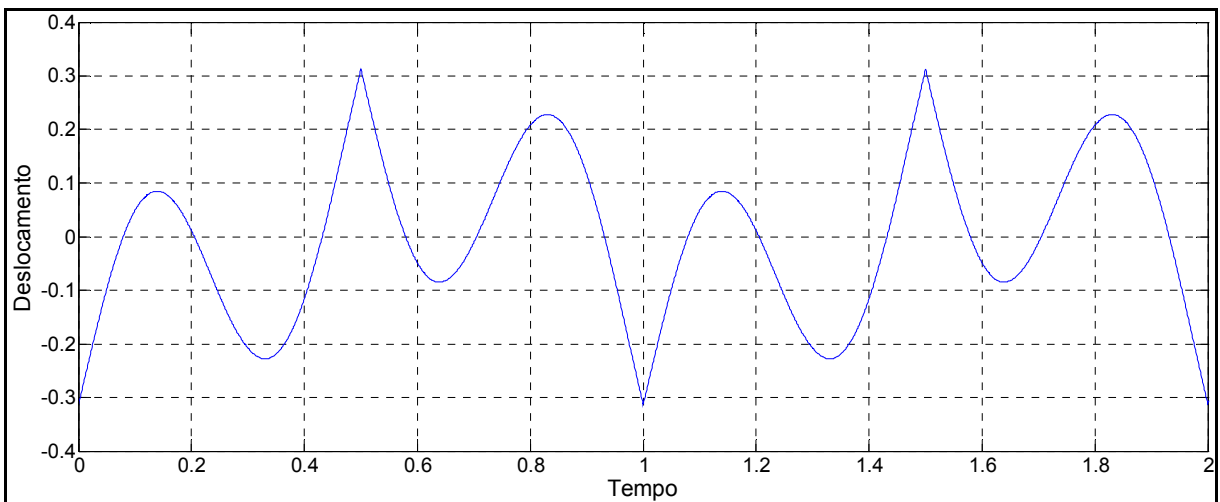


Figura 2.7: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período

$$\omega = 0.5 \quad \varepsilon = 0.3122905376553791 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

A figura (2.8) apresenta um movimento com período de ordem 1 e dois impactos por período, que ocorre quando a folga está muito próxima à amplitude do oscilador harmônico forçado que caracteriza o sistema quando não há colisões. Para o valor de  $\xi$  escolhido, o valor desta amplitude é 0.332595.



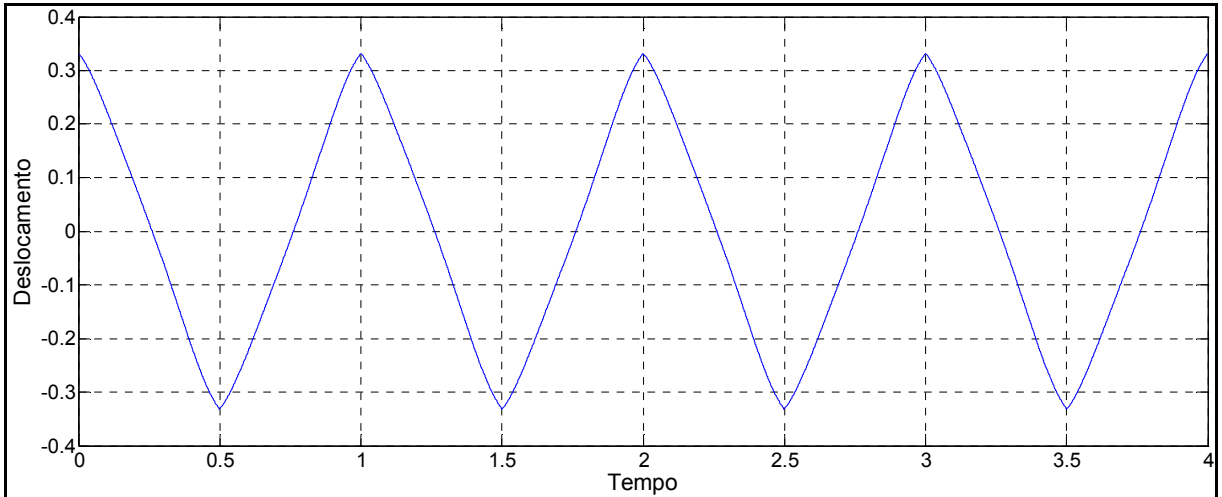


Figura 2.8: *Movimento com a folga próxima à amplitude do movimento linear*

$$\omega = 0.5 \quad \varepsilon = 0.332 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

Nas folgas menores ocorrem fenômenos mais interessantes. A figura (2.9), por exemplo, apresenta um movimento quase-periódico com período aparente de ordem 3. Para esta folga, a cada três períodos da função excitadora ocorrem 19, 20 ou 21 impactos. Já a figura (2.10) apresenta um movimento não periódico na transição até ao movimento periódico com período de ordem 1, apresentado na figura (2.11). A transição ocorre para  $\varepsilon \approx 0.091390$ .

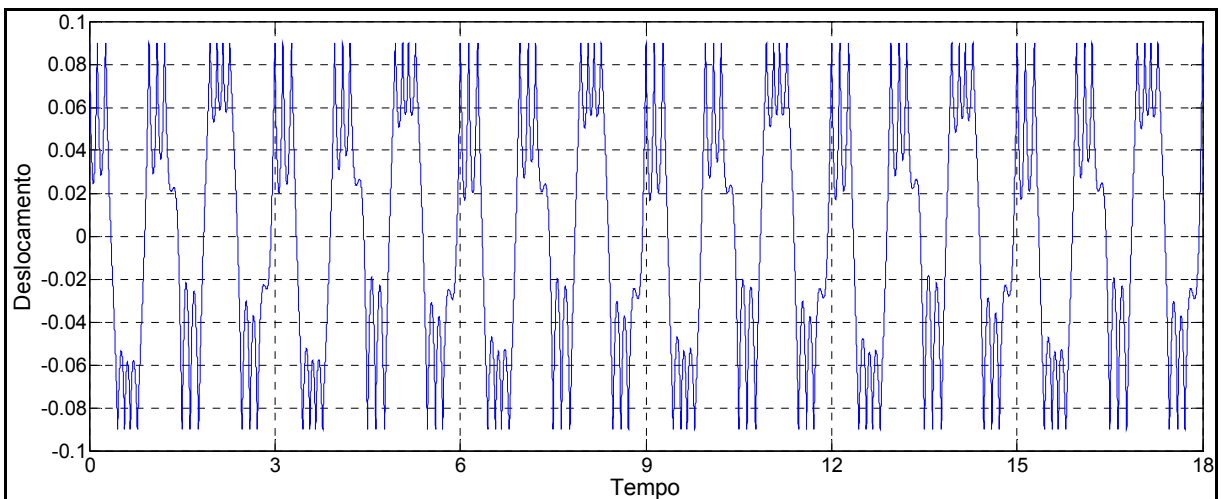


Figura 2.9: *Movimento quase-periódico na ordem 3.  $\approx 20$  impactos por período aparente.*

$$\omega = 0.5 \quad \varepsilon = 0.09 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

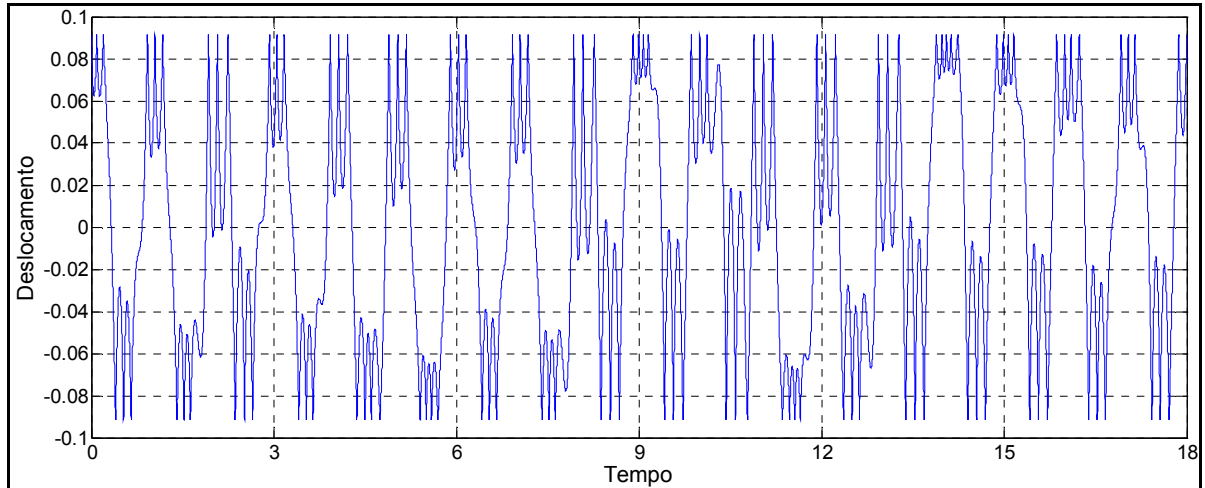


Figura 2.10: Movimento não periódico. Notam-se  $\approx 20$  impactos por lapso de  $3T$ .

$$\omega = 0.5 \quad \varepsilon = 0.091390 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

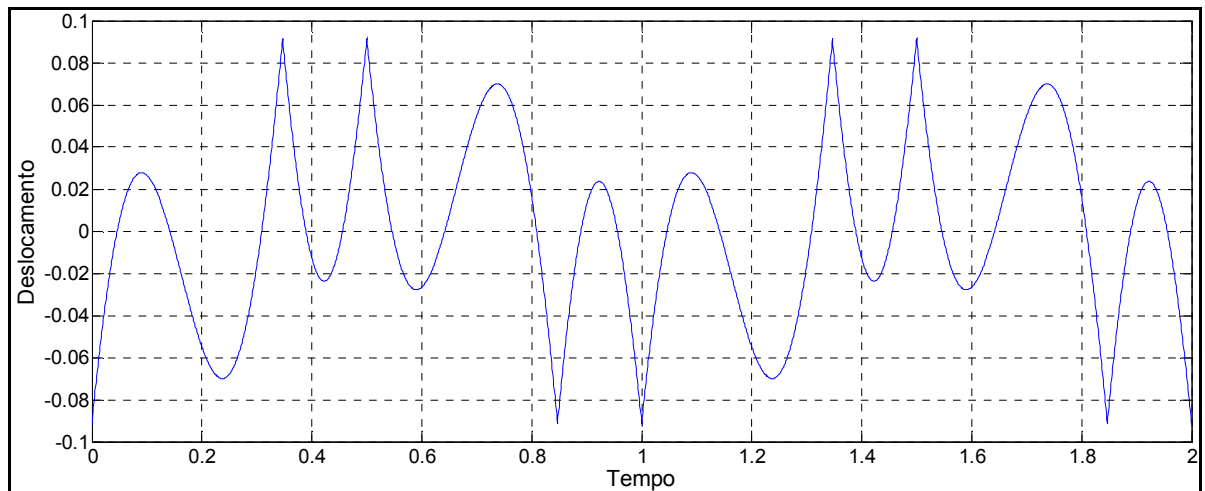


Figura 2.11: Movimento com período de ordem 1 e 4 impactos por período

$$\omega = 0.5 \quad \varepsilon = 0.091391 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

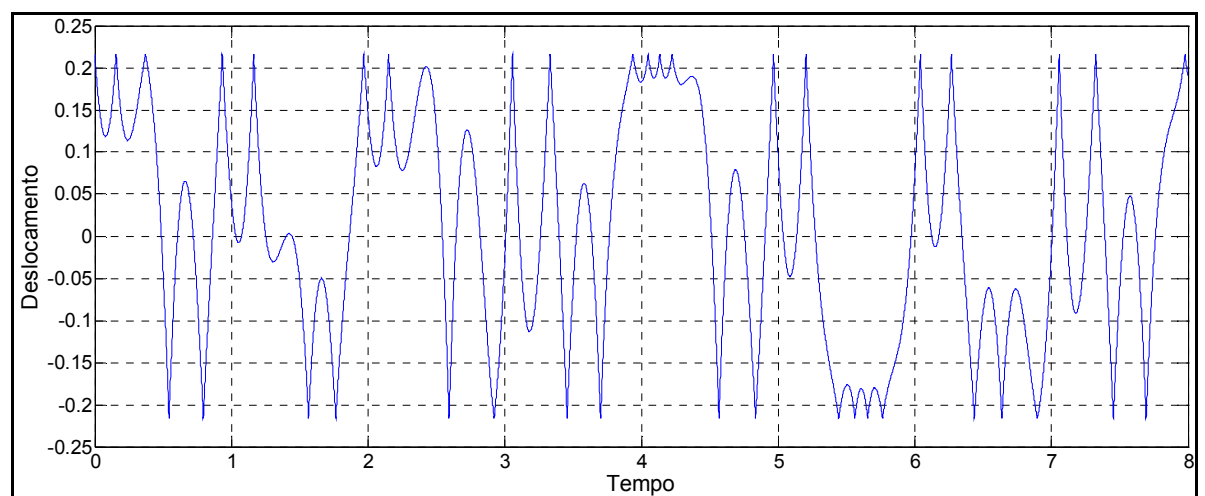


Figura 2.12: Movimento não periódico

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.21601 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

As figuras (2.12) a (2.16) apresentam mudanças dinâmicas que ocorrem, para  $\omega=1.0$  e  $\xi=0.05$ , em alguns intervalos de  $\varepsilon$ . As figuras (2.12) a (2.15), para  $\varepsilon \approx 0.216$ , mostram a existência de movimento não periódico que, dependendo do intervalo de observação, pode ser confundido com movimento quase periódico.

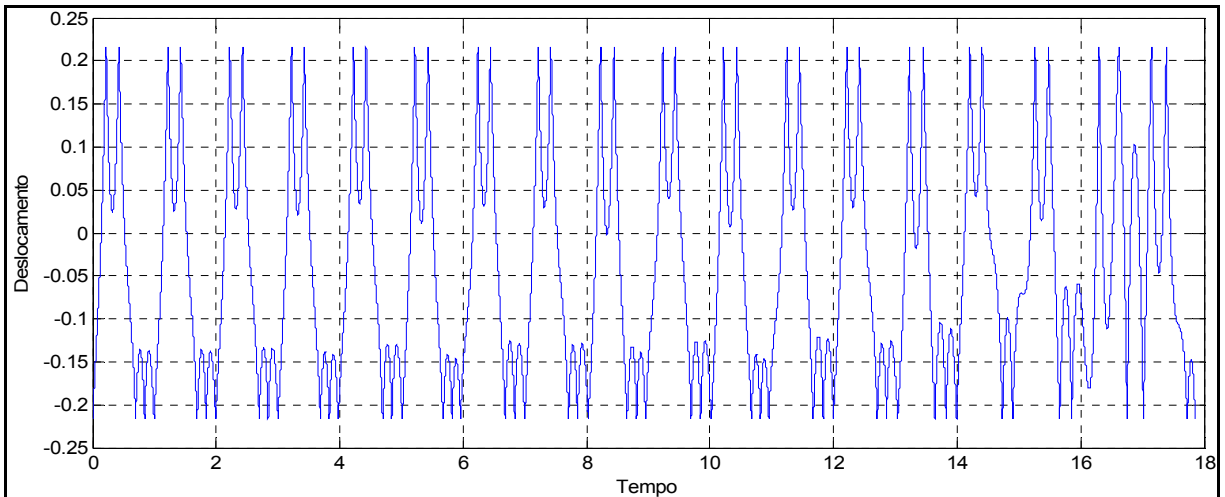


Figura 2.13: *Transição de quase periódico para não periódico.*

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.21604 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

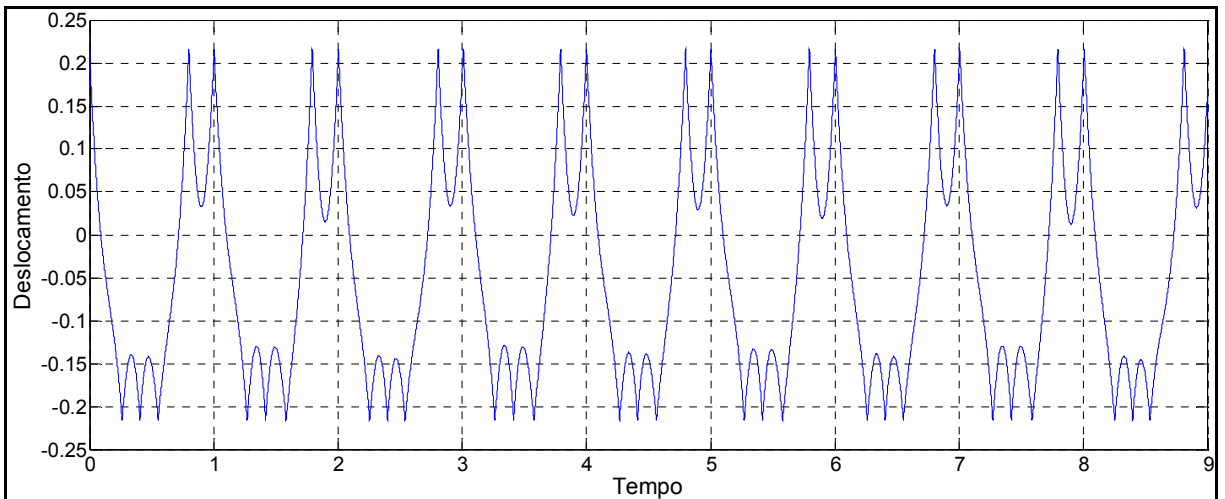


Figura 2.14: *Aparente movimento quase-periódico que não se confirma no futuro.*

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.21604 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

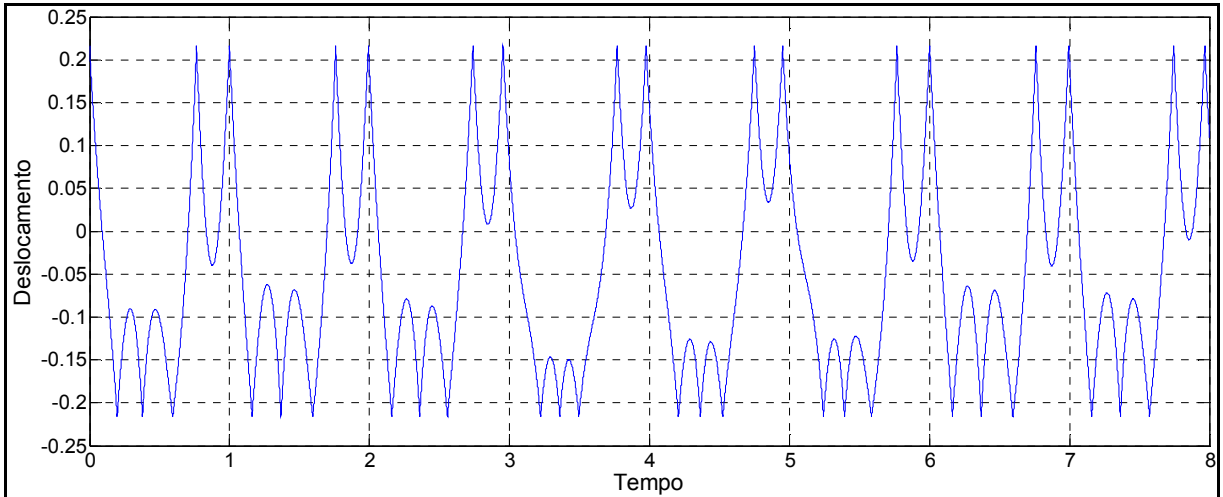


Figura 2.15: Aparente movimento com amplitudes moduladas que não se confirma no futuro.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.21604 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

A figura (2.13) condensa o que ocorre para  $\varepsilon = 0.21604$ . Na figura podem ser identificados três lapsos temporais distintos, a saber:

- a) No início da janela a resposta é quase-periódica. Esta parte da resposta temporal é ampliada na figura (2.14);
- b) Na porção central da janela temporal, ampliada na figura (2.11), repara-se uma espécie de modulação dos máximos não relacionamentos diretamente aos impactos, mas que, como mostra a figura (2.13), não se confirma.
- c) Mais ao final da janela, vê-se uma resposta graficamente muito diferente das duas anteriores. Como destacado na figura (2.13), trata-se de movimento não periódico, que é a característica da dinâmica global no caso.

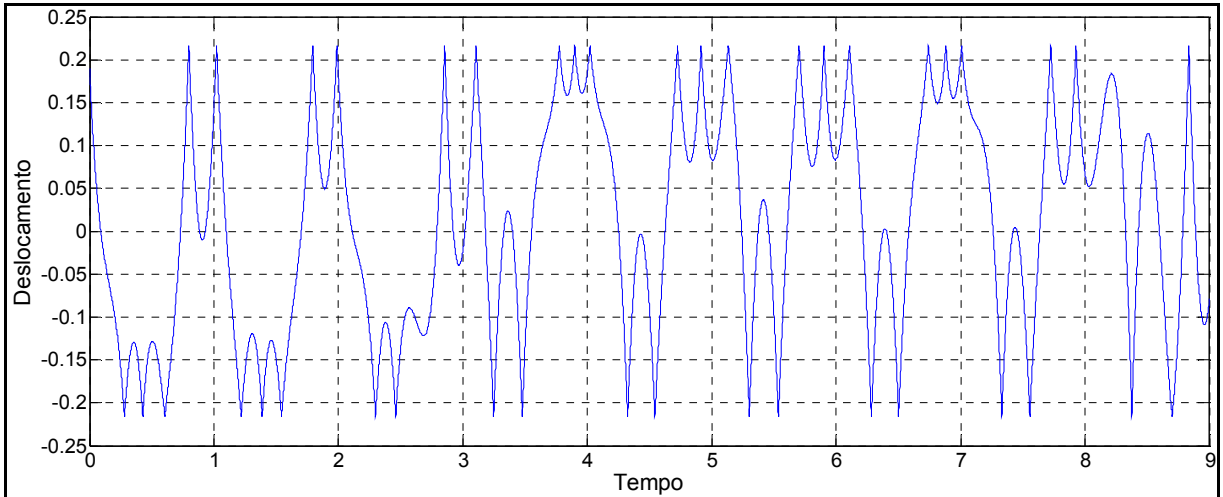


Figura 2.16: Movimento não periódico, conforme mostrado na figura 2.11

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.21604 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

As figuras (2.16) e (2.17) mostram que, provavelmente, ocorre em  $\varepsilon \approx 0.216$  a migração de movimento não periódico para movimento com período de ordem 2 (figura 2.16) para ordem 1 (figura 2.17). Já as figuras (2.18) e (2.19) mostram a migração de período de ordem 2 para período de ordem 1 quando  $\varepsilon \approx 0.2305$ .

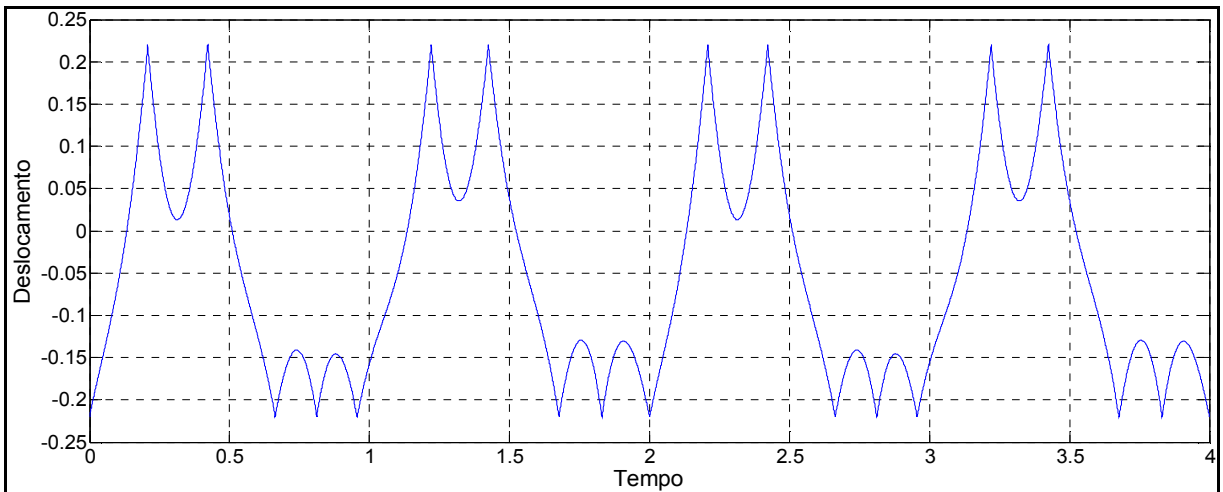


Figura 2.17: Movimento com período de ordem 2 e 10 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.22 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

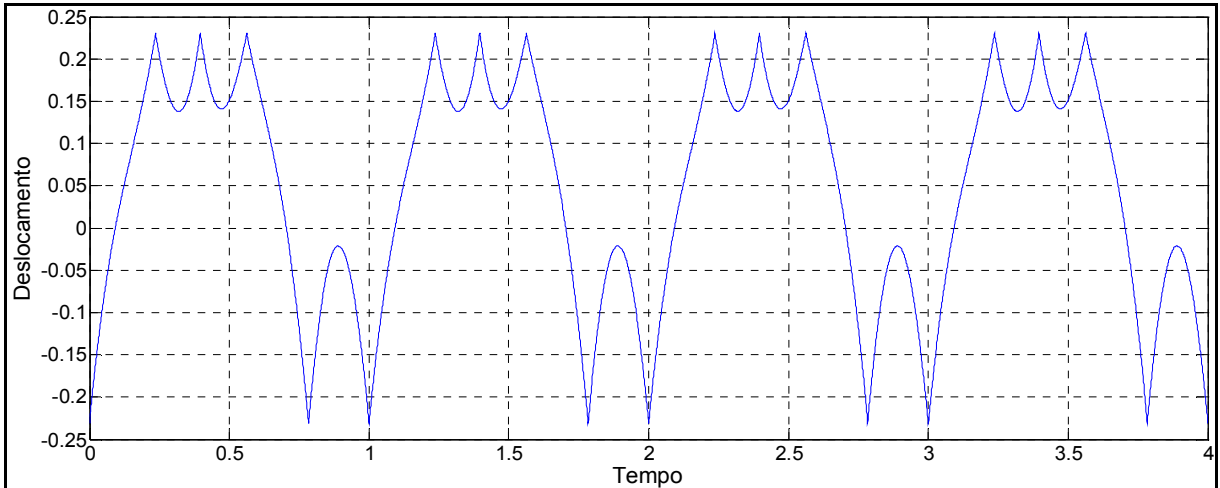


Figura 2.18: Movimento com período de ordem 2 e 10 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.2305 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

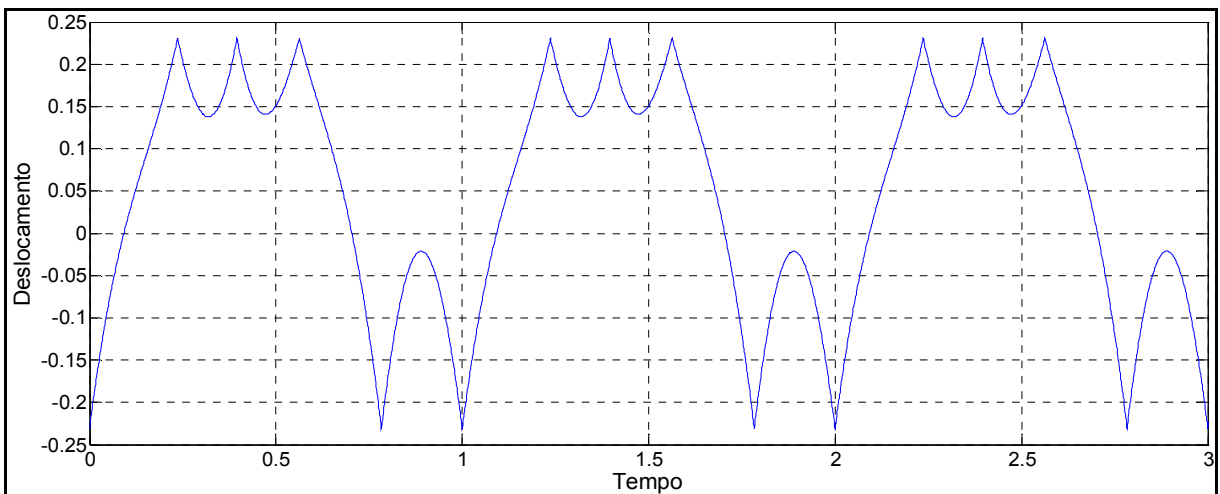


Figura 2.19: Movimento com período de ordem 1 e 5 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.2383 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

Nova transição ocorre em  $\varepsilon \approx 0.2385$ , como mostram as figuras (2.19) a (2.21), região na qual o movimento muda de período de ordem 1 com cinco impactos por período (figura 2.19), passa por uma janela de movimento não periódico (figura 2.20) e termina como movimento periódico com dois impactos por período (figura 2.21).

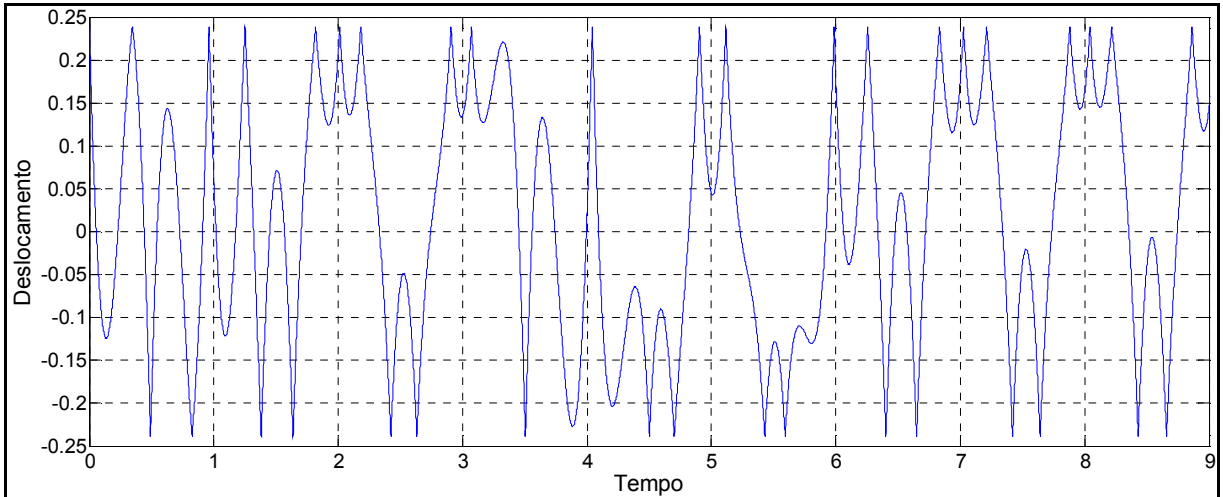


Figura 2.20: Movimento não periódico.  $\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.2384 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$

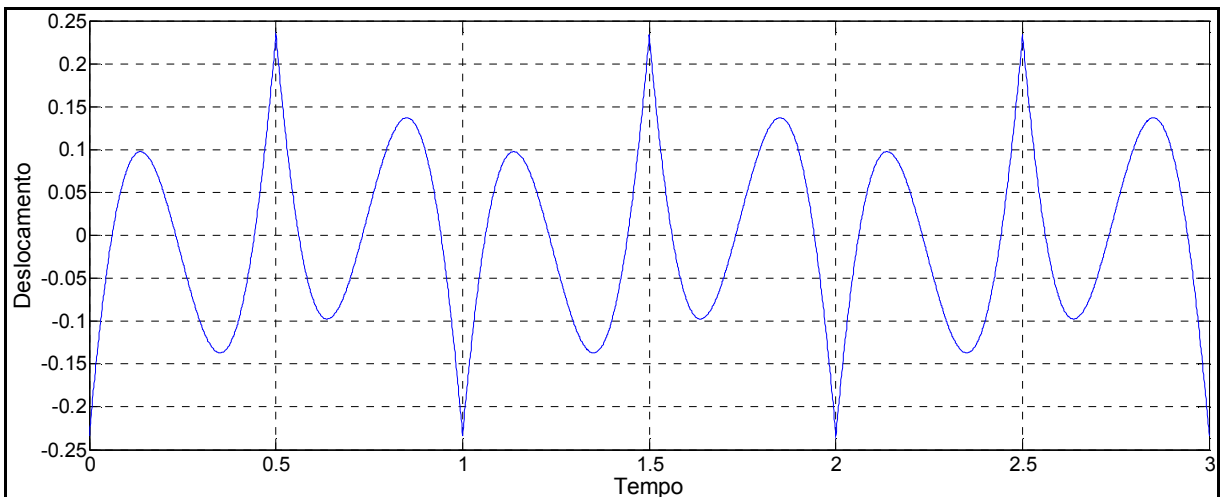


Figura 2.21: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.2386 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

As figuras (2.22) a (2.30) apresentam padrões de movimento diversos para variações da folga quando  $\omega = 1$  e  $\xi = 0.05$ , sem preocupação em precisar as regiões de transição. Vale chamar a atenção para a possibilidade de movimentos periódicos de frequência fundamental muito mais baixa que a da excitação, como, por exemplo, o caso da figura (2.29), para  $\varepsilon = 4$ , caso em que o período é de ordem seis, com oito impactos por período. Vê-se que as mudanças de características do movimento não guardam nenhuma tendência com a folga, podendo mudar radicalmente a topologia. Reparemos, por exemplo, as drásticas mudanças entre as respostas:

a) Para  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon = 1.5$ ;

- b) Para  $\varepsilon = 2.5$  e  $\varepsilon = 3.0$ ;  
 c) Para  $\varepsilon = 3.5$  e  $\varepsilon = 4.0$ ;

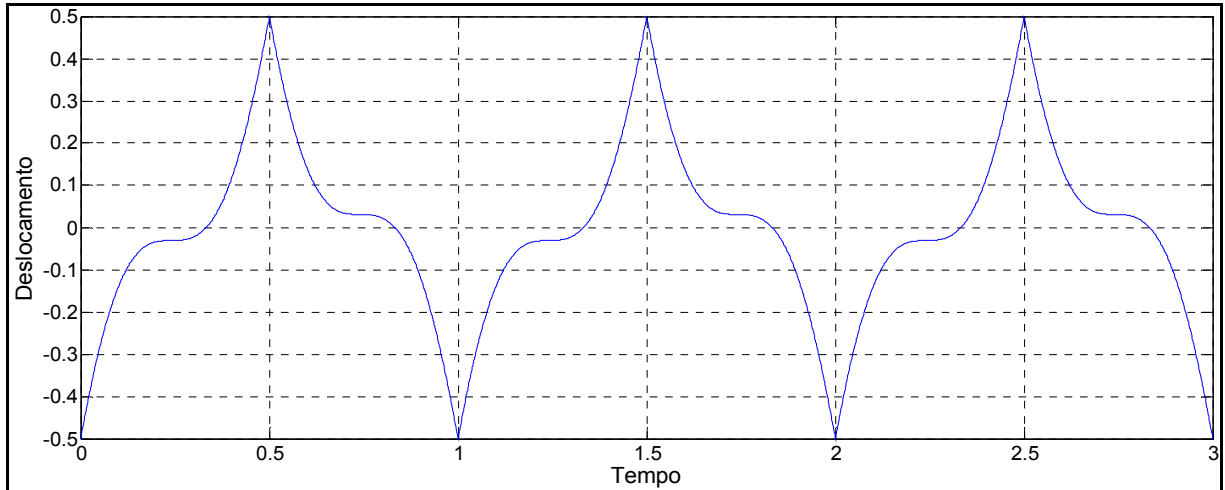


Figura 2.22: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.5 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

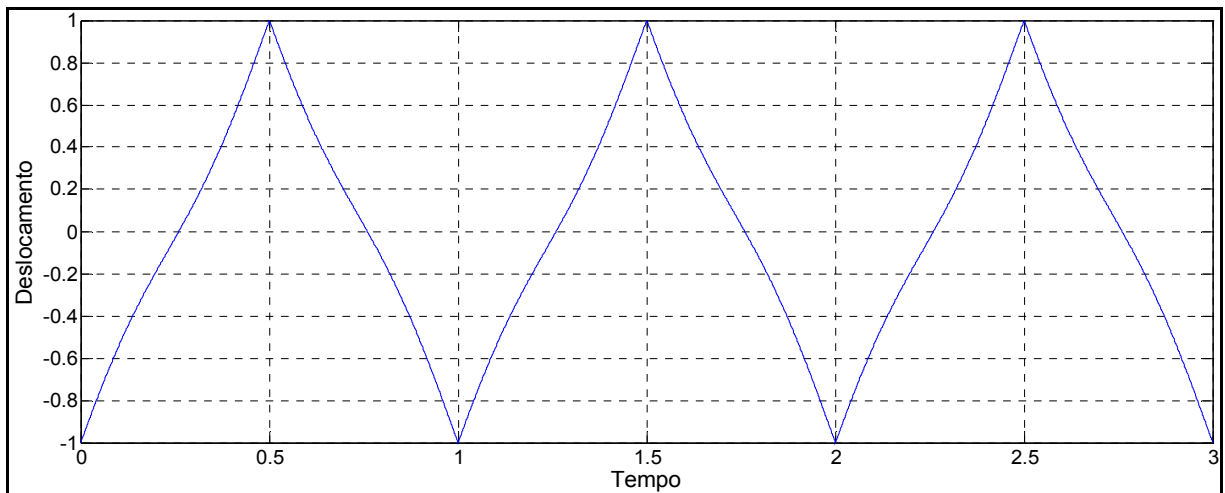


Figura 2.23: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 1.0 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$



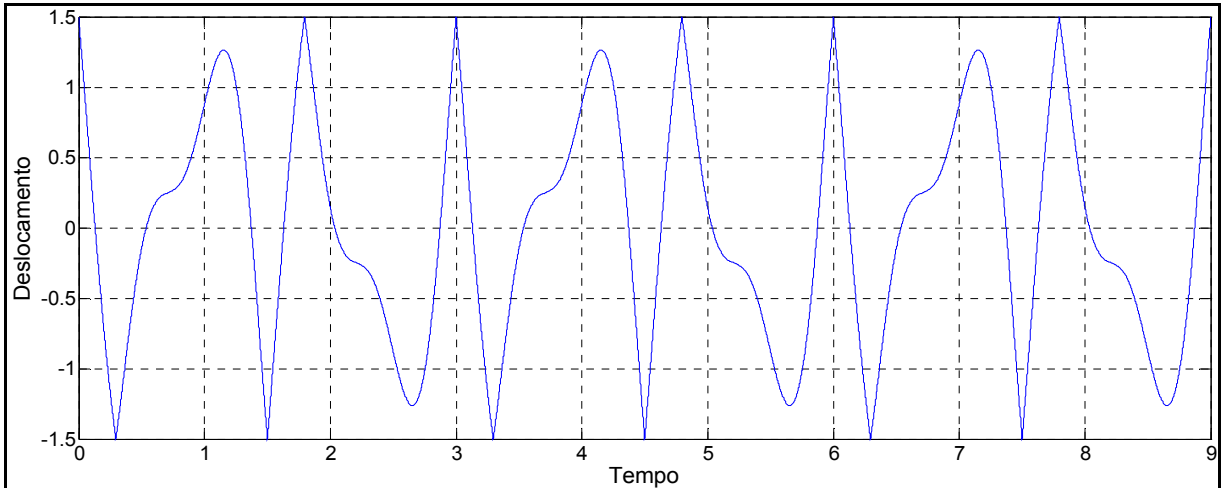


Figura 2.24: Movimento com período de ordem 3 e 4 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 1.5 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

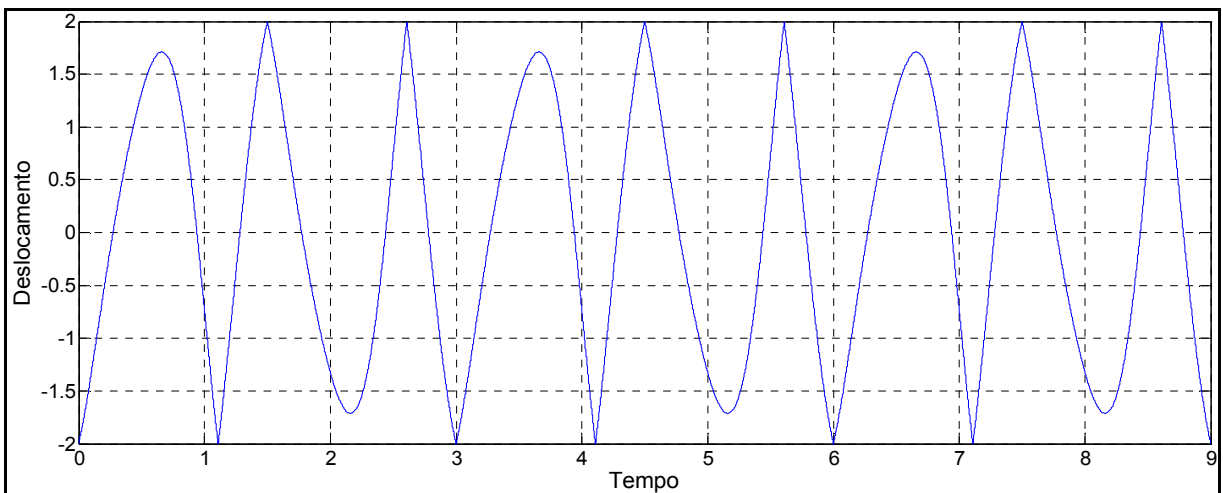


Figura 2.25: Movimento com período de ordem 3 e 4 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 2.0 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

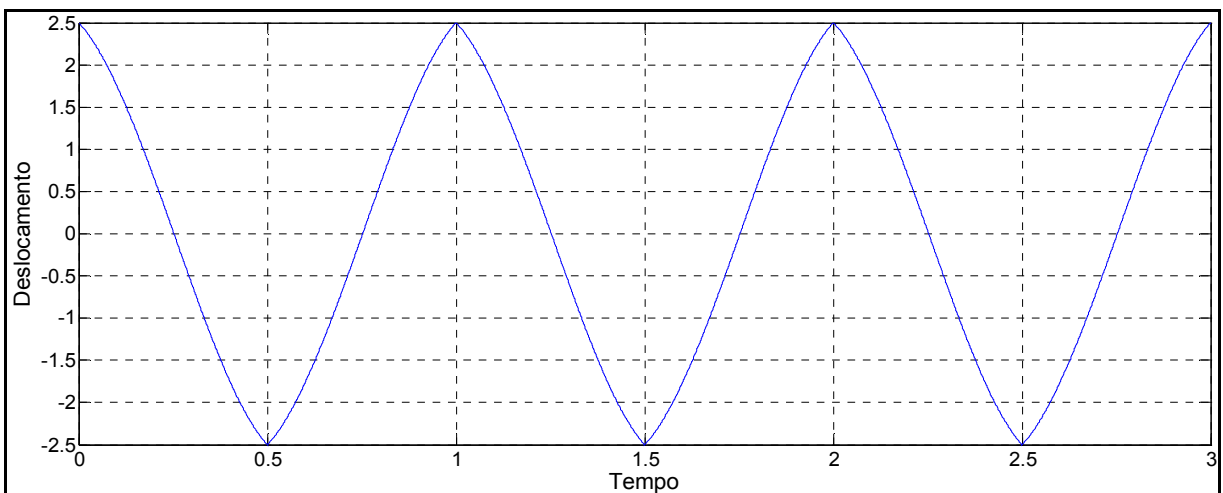


Figura 2.26: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 2.5 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

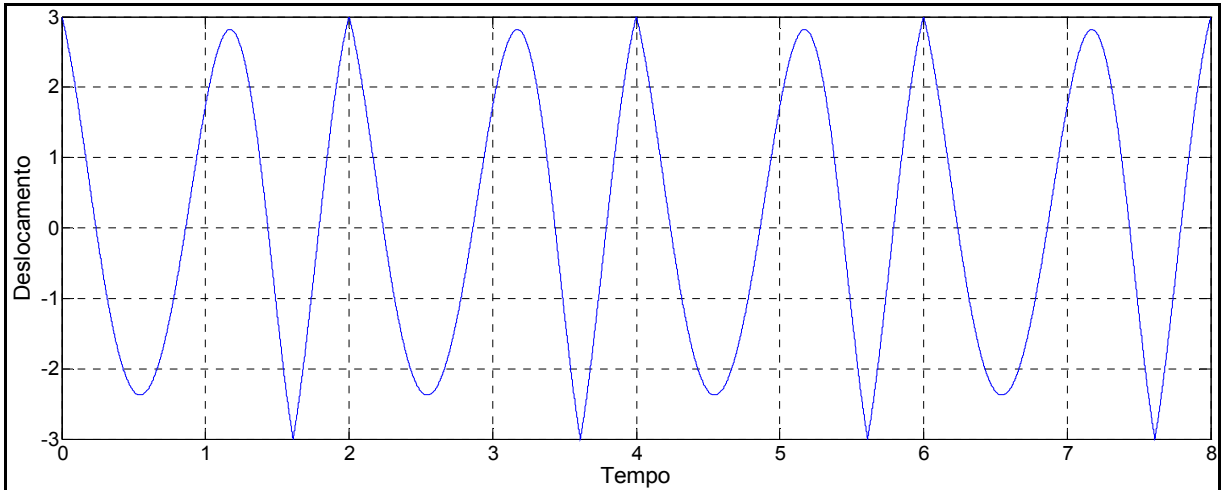


Figura 2.27: Movimento com período de ordem 2 e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 3.0 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

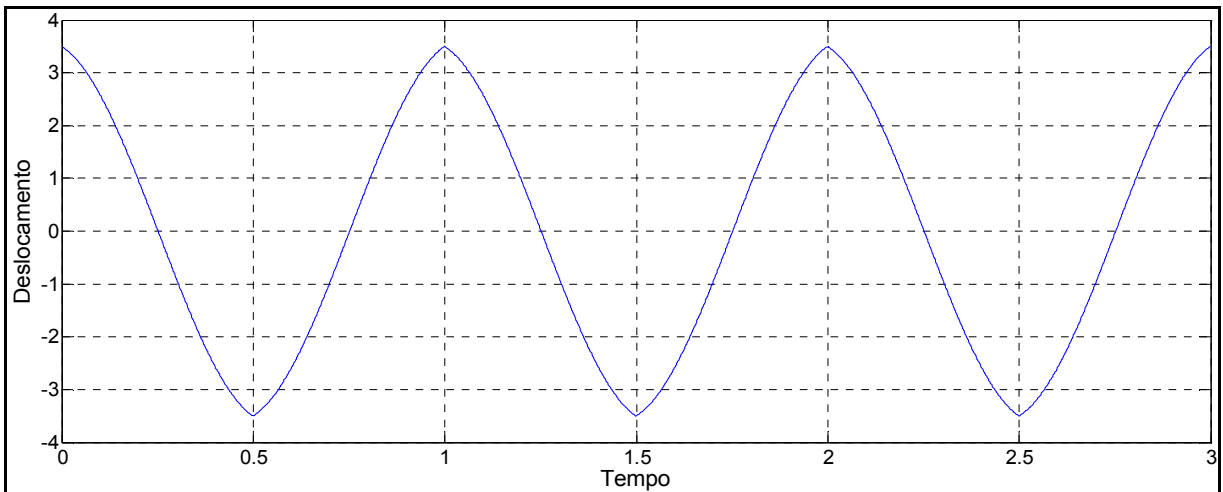


Figura 2.28: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 3.5 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

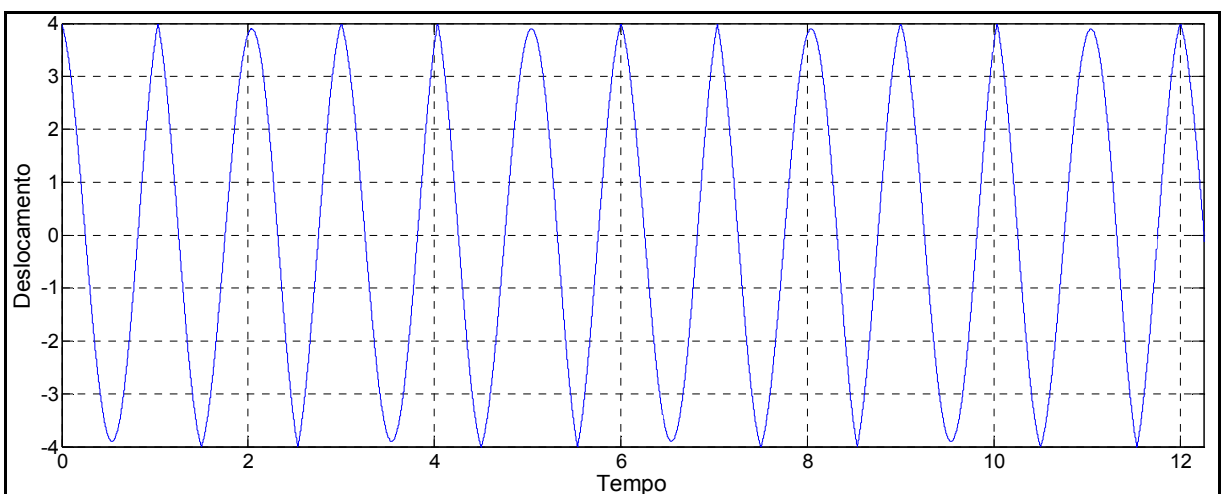


Figura 2.29: Movimento com período de ordem 6 e 8 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 4.0 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

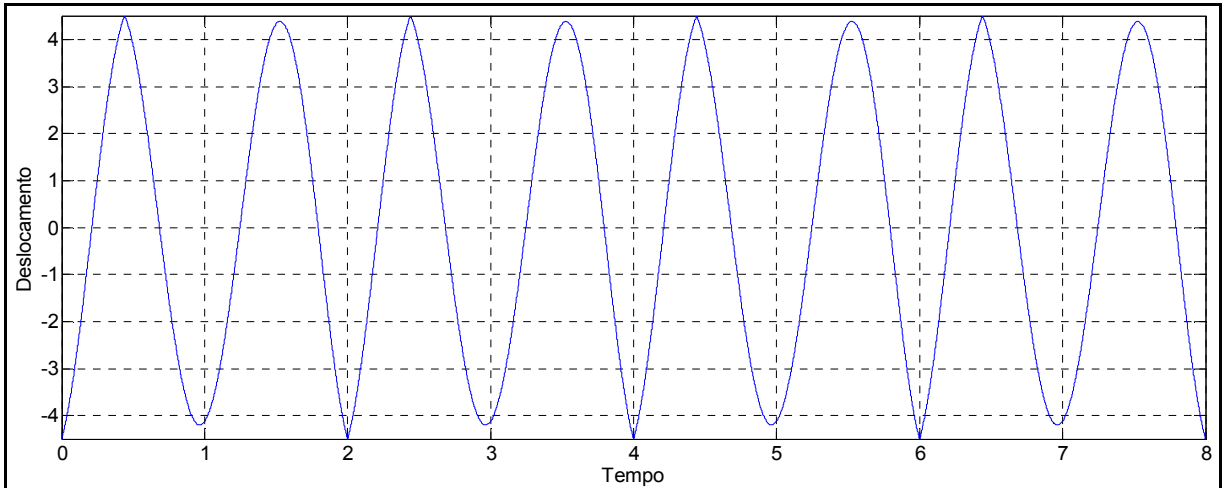


Figura 2.30: Movimento com período de ordem 2 e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 4.5 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

Por fim, a figura 2.30 apresenta mais um caso movimento periódico de período de ordem seis, resultando um movimento de frequência fundamental bem mais baixa que a excitação. Não resta dúvida, no entanto, de que a energia presente num sinal com estas características é maior na frequência de ordem seis, isto é, o coeficiente da harmônica de ordem seis terá magnitude preponderante em relação aos demais.

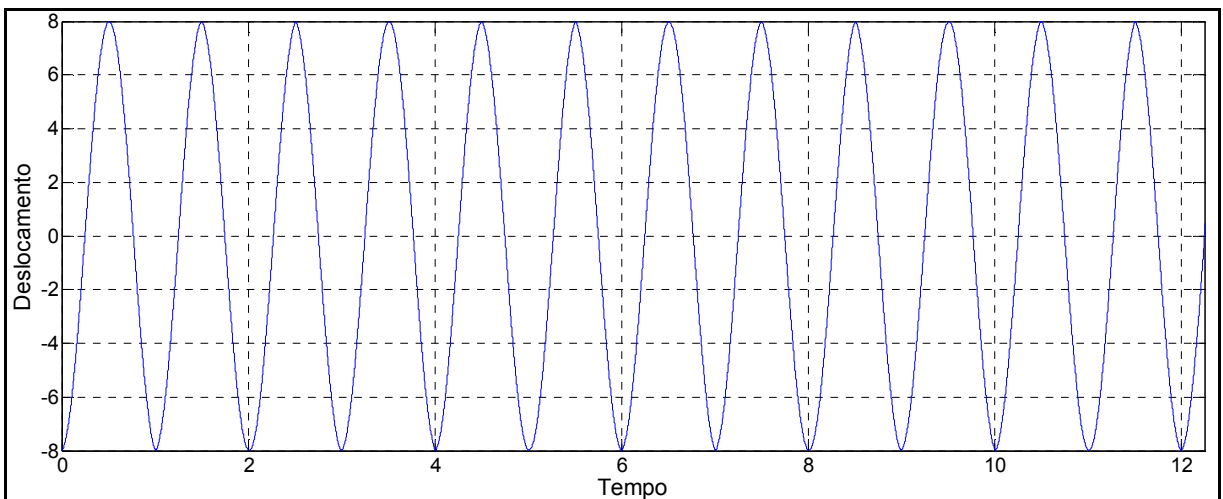


Figura 2.30: Movimento com período de ordem 6 e 12 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 8 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

### 3 EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE PADRÕES DE MOVIMENTO

#### 3.1 ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

O sistema analisado está reproduzido na figura 3.1, com a equação de movimento adimensional na equação 3.1. Neste capítulo propõe-se analisar a existência e estabilidade de certos padrões de movimento.

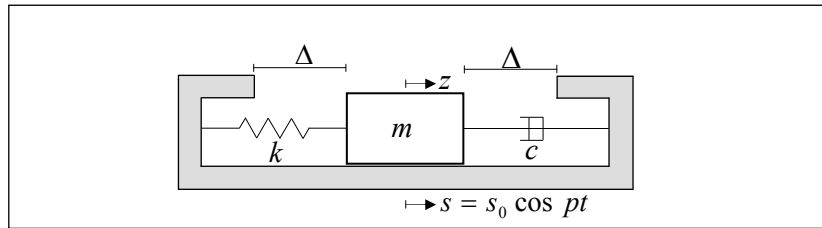


Figura 3.1: Sistema cujos movimentos são objeto de estudo

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = \omega^2 \cos \omega\tau \quad (3.1)$$

onde

$$x = \frac{z-s}{s_0} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \tau = \omega_0 t \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau} \quad \omega = \frac{p}{\omega_0} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Consideremos a resposta constante da equação 2.8, a saber:

$$x = ae^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} + be^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} + A_c \cos \omega\tau + A_s \sin \omega\tau$$

$$\dot{x} = a\lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} + b\lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - A_c \omega \sin \omega\tau + A_s \omega \cos \omega\tau$$

Supondo que o estado do sistema no instante  $\tau_i$  seja conhecido. Assim, enquanto o anteparo não for atingido, o estado futuro pode ser determinado pelas equações

$$x = a_i e^{\lambda_a(\tau-\tau_i)} + b_i e^{\lambda_b(\tau-\tau_i)} + A_c \cos \omega\tau + A_s \sin \omega\tau$$

(3.2)

$$\dot{x} = a_i \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\tau_i)} + b_i \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\tau_i)} - A_c \omega \sin \omega\tau + A_s \omega \cos \omega\tau$$

onde, de acordo com as equações (2.9):

$$\begin{aligned}\lambda_a &= -\xi - j\sqrt{1-\xi} & \lambda_b &= -\xi + j\sqrt{1-\xi} \\ A_c &= A \cos \phi = \frac{\omega^2(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2} & A_s &= A \sin \phi = \frac{\omega^2(2\xi\omega)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$a_i = \frac{\lambda_b[x_i - A_c \cos \omega\tau_i - A_s \sin \omega\tau_i] - [v_i + A_c\omega \sin(\omega\tau_i) - A_s\omega \cos(\omega\tau_i)]}{\lambda_b - \lambda_a}$$

$$b_i = \frac{-\lambda_a(x_i - A_c \cos \omega\tau_i - A_s \sin \omega\tau_i) + (v_i + A_c\omega \sin \omega\tau_i - A_s\omega \cos \omega\tau_i)}{\lambda_b - \lambda_a}$$

O estado futuro, representado pelo vetor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{bmatrix}$ , pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{x}(\hat{\tau}) + \tilde{\mathbf{B}}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\hat{\tau} \\ \sin \omega\hat{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau \\ \sin \omega\tau \end{bmatrix}, \text{ onde}\tag{3.4}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} \lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} & e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \\ \lambda_a \lambda_b \cdot (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) & \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \end{bmatrix}\tag{3.4-a}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_c & A_s \\ \omega A_s & -\omega A_c \end{bmatrix}\tag{3.4-b}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{bmatrix} \text{ com}\tag{3.4-c}$$

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11} = -A_c(\lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) - \omega A_s(e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{12} = -A_s(\lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) + \omega A_c(e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{21} = A_c \lambda_a \lambda_b (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) - \omega A_s(\lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{22} = -A_s \lambda_a \lambda_b (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) - \omega A_c(\lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) \end{cases}\tag{3.4-c}$$

Repara-se, todavia, que

$$\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot (-\mathbf{B}) = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} \lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} & e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \\ \lambda_a \lambda_b \cdot (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) & \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A_c & -A_s \\ -\omega A_s & +\omega A_c \end{bmatrix}$$

$$\therefore -\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} \end{bmatrix} \text{ com}$$

$$\begin{cases} \hat{b}_{11} = -A_c (\lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) - \omega A_s (e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) = \tilde{b}_{11} \\ \hat{b}_{12} = -A_s (\lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) + \omega A_c (e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) = \tilde{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} = A_c \lambda_a \lambda_b (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) - \omega A_s (\lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) = \tilde{b}_{21} \\ \hat{b}_{22} = -A_s \lambda_a \lambda_b (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) - \omega A_c (\lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) = \tilde{b}_{22} \end{cases}$$

Assim, pode-se escrever  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot (-\mathbf{B})$ , de forma a resposta do sistema pode ser expressa na forma

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{x}(\hat{\tau}) - \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \hat{\tau} \\ \text{sen } \omega \hat{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

É fácil mostrar que  $\mathbf{A}(\hat{\tau}, \hat{\tau}) = \mathbf{I}$ , de forma que a equação trivial  $\mathbf{x}(\hat{\tau}) = \mathbf{x}(\hat{\tau})$  facilmente se observa na equação (3.5).

O modelo adotado para o processo de colisão, já explicado no capítulo 2, envolve uma transferência de momento linear entre o corpo cujo movimento se analisa e a base oscilante à qual é fixado, e pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(\tau^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau^-) \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz que rege a transferência de momento linear entre os estados anterior e posterior à colisão e  $\tau^+$  e  $\tau^-$  indicam os instantes infinitesimalmente antes e após o instante da colisão.

A resposta num instante  $\tau$ , após  $i$  colisões, pode ser obtida do seguinte modo:

(a) Seja  $\mathbf{x}(\tau_0) = [x_0 \quad v_0]^T$  a condição inicial do movimento e, até a primeira colisão, ter-se-á:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_0) \cdot \mathbf{x}(\tau_0) - \mathbf{A}(\tau, \tau_0) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_0 \\ \text{sen } \omega \tau_0 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix}$$

(b) Seja  $\tau_1$  o instante da primeira colisão e, até a colisão seguinte, ter-se-á

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_1) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_1^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_1) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \text{sen } \omega \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{x}(\tau_1^-)$  indica que o estado referido é computado com a equação do item anterior (a), substituindo-se  $\tau$  por  $\tau_1$ .

De fato, para  $\tau = \tau_1^+$  tem-se

$$\mathbf{x}(\tau_1^+) = \mathbf{A}(\tau_1, \tau_1) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_1^-) - \mathbf{A}(\tau_1, \tau_1) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \text{sen } \omega \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \text{sen } \omega \tau_1 \end{bmatrix}$$

Levando em conta que  $\mathbf{A}(\tau_1, \tau_1) = \mathbf{I}$ , vem  $\mathbf{x}(\tau_1^+) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_1^-)$ , que é exatamente o que se espera.

(c) Seja  $\tau_2$  o instante da segunda colisão e ter-se-á

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_2) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_2^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_2) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_2 \\ \text{sen } \omega \tau_2 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix}$$

d) Seja  $\tau_i$  o instante da  $i$ -ésima colisão e ter-se-á:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix}$$

Seguindo a sistemática apresentada, pode escrever que na  $(i+1)$ -ésima colisão, que ocorrerá no instante  $\tau_{i+1}$ , observar-se-á:

$$\mathbf{x}(\tau_{i+1}^-) = \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Multiplicando a equação (3.7) por  $\mathbf{J}$ , podemos escrever

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_{i+1}^-) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Seja  $\mathbf{x}_i = [x_i \quad v_i]^T$  o estado do sistema imediatamente após a  $i$ -ésima colisão.

Assim, pode-se escrever que  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) = \begin{bmatrix} x_i \\ v_i \end{bmatrix}$ , de forma que a equação (3.8) fica:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\Delta \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\Delta \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_{i+1} \\ \text{sen } \omega \tau_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde  $\Delta \tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  e as matrizes  $\mathbf{A}(\Delta \tau)$  e  $\mathbf{B}$  são as apresentadas nas equações (3.4-a) e (3.4-b), respectivamente.

### 3.2 CONDIÇÕES PARA MOVIMENTO PERIÓDICO COM DOIS IMPACTOS POR PERÍODO E IGUALMENTE DISTRIBUÍDOS NO PERÍODO.

Suponhamos que se queira analisar o padrão de movimento periódico no qual ocorram dois impactos por período, com igual lapso de tempo entre eles. São condições necessárias e suficientes para a existência deste padrão de movimento:

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} &= \tau_i + \frac{T}{2} & \tau_{i+2} &= \tau_i + T \\ x_{i+2} &= x_i & v_{i+2} &= v_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde  $T$  é o período do movimento. Observemos que o padrão de movimento descrito pode ser obtido para duas condições no instante  $\tau_{i+1}$ , conforme ilustra esquematicamente a figura 3.2, a saber:  $x_{i+1} = -x_i$  ou  $x_{i+1} = +x_i$ .



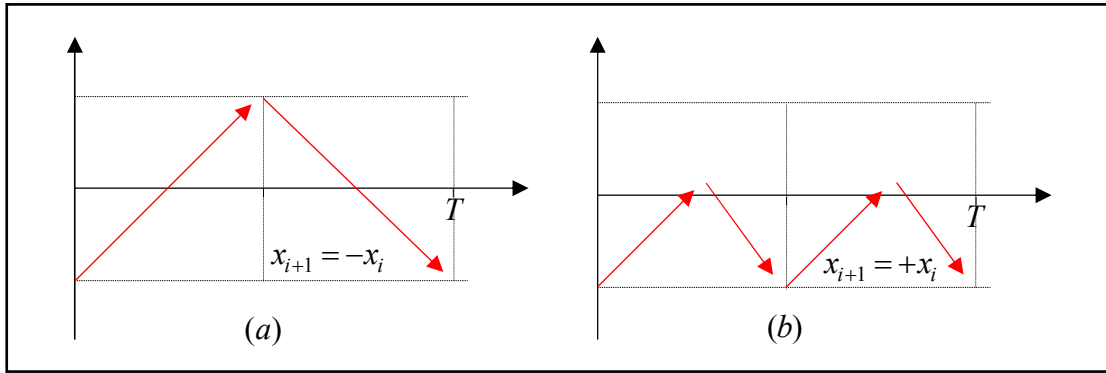


Figura 3.2: Representação esquemática de movimentos com dois impactos por período igualmente espaçados no tempo.

Assim, ter-se-á:

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} &= \tau_i + \frac{T}{2} & \tau_{i+2} &= \tau_i + T \\ x_{i+2} &= x_i & x_{i+1} &= \pm x_i & v_{i+2} &= v_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como visto no capítulo 2, o período do movimento, que é, a cada intervalo, a superposição de uma função oscilante na frequência natural (unitária para o sistema adimensional) e na frequência da excitação ( $\omega$ ), será, no mínimo, o MMC dos períodos das duas funções superpostas. De toda forma, será um múltiplo do valor do valor da frequência da excitação, de forma que se pode escrever:

$$T = n \frac{2\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.11)$$

Assim, combinando as equações (3.8), (3.10) e (3.11), podemos escrever

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Apenas para simplificar a escrita, a partir de agora, nesta seção, utilizaremos a notação mais simplificada e escreveremos simplesmente  $\mathbf{A}$  em vez de  $\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right)$ . Assim,

tem-se

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i + \check{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{i+1} - \check{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} \quad (3.14-a)$$

onde

$$\check{\mathbf{B}} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{B} \quad (3.14-b)$$

A soma das equações (3.13, membro a membro), resulta

$$\therefore \mathbf{x}_{i+2} + \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i)$$

Recordando que, para as condições de periodicidade estabelecidas (equação 3.10), deve-se ter  $\mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{x}_i$ , vem:

$$\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i)$$

A igualdade anterior só é possível quando

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{não diz respeito ao problema físico} \\ \text{ou } |\mathbf{I} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}| = 0 \quad \text{não é solução do problema real} \\ \text{ou } \mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \text{solução procurada} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{i+2} = -\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i \end{array}$$

Ora fica, portanto, descartada a hipótese de ocorrência de movimento com a topologia esquematizada na figura (3.2-b), já que a periodicidade com dois impactos por período igualmente espaçados no tempo exige  $\mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{x}_i$ .

Voltando à equação (3.14), escrevemos

$$-\mathbf{x}_i = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i + \check{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} \Rightarrow \therefore \mathbf{x}_i = -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \check{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix}, \text{ e} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2 \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2]^{-1} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Obviamente a equações (3.15) e (3.16) exigem que

$$[\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2]^{-1} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) = -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}$$

o que certamente ocorre, como se mostra abaixo

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2]^{-1} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) &= -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \rightarrow [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2]^{-1} = -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} \rightarrow \\ [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2]^{-1} &= -[(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})]^{-1} \rightarrow [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2]^{-1} = -[(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2 - \mathbf{I}]^{-1} \rightarrow \\ [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2]^{-1} &= [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})^2]^{-1} \quad \dots \text{cqnd} \end{aligned}$$

Isto mostra que as equações (3.14) não independentes e basta, agora, tomar uma delas para determinar as condições de existência do movimento em análise.

O que estaria mesmo impondo a equação (3.15)? Nada mais que as condições de fase entre a resposta e a excitação para que exista o estado  $\mathbf{x}_i$  que permita o padrão de movimento desejado. Reparemos que não há, na equação (3.15), nenhuma restrição com relação ao parâmetro folga, que determina a posição em que os impactos ocorrem. Para saber se determinado movimento pode ocorrer, em uma determinada frequência, para uma determinada folga, dados os demais parâmetros do sistema, deve-se impor:

$$\mathbf{x}_i = -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

O que estabelece a equação (3.17)? Nada mais que as condições de fase e a velocidade necessária ao final da colisão para que a próxima colisão ocorra na posição e instante tais que assegurem o padrão de movimento.

E se estas condições não puderem ser satisfeitas? A conclusão é que o padrão de

movimento estipulado não pode ocorrer.

Como determinar as condições de fase e a velocidade? Para responder a esta pergunta, retornemos à equação (3.17) e façamos

$$\mathbf{P} = -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \quad (3.18)$$

de forma que a equação pode ser escrita como

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} p_{11} \cos \omega \tau_i + p_{12} \sin \omega \tau_i &= \varepsilon & \text{(a)} \\ p_{21} \cos \omega \tau_i + p_{22} \sin \omega \tau_i &= v_i & \text{(b)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

A solução da equação 3.18-a leva à seguinte solução para a fase

$$\begin{aligned} \cos \omega \tau_i &= \alpha \cdot \eta \pm \beta \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \\ \sin \omega \tau_i &= \beta \cdot \eta \mp \alpha \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \end{aligned}, \text{ onde} \quad (3.20-a)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_{11}^2 + p_{12}^2}} \quad \alpha = \frac{p_{11}}{\sqrt{p_{11}^2 + p_{12}^2}} \quad \beta = \frac{p_{12}}{\sqrt{p_{11}^2 + p_{12}^2}} \quad (3.20-b)$$

Repare-se que a condição de existência do padrão de movimento indicado passa pelo termo  $(1 - \eta^2)$ , que deve ser maior ou igual a zero para que  $\cos \omega \tau_i$  e  $\sin \omega \tau_i$ , necessariamente reais, existam. Também a condição necessária  $\sin^2 \omega \tau_i + \cos^2 \omega \tau_i = 1$  é satisfeita independentemente de  $\eta$ . Então, para que o movimento estudado exista, a condição (necessária, mas não suficiente) deve ser satisfeita:

$$\eta^2 \leq 1 \quad (3.21)$$

De posse das condições de fase na equação (3.20-a), a equação (3.20-b) fornecerá a velocidade necessária, completando as condições de existência do padrão de movimento, de forma que podemos escrever:

$$v_i = (\alpha \cdot p_{21} + \beta \cdot p_{22}) \cdot \eta + (\pm \beta \cdot p_{21} \mp \alpha \cdot p_{22}) \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \quad (3.22)$$

### 3.3 DEPENDÊNCIA DA RESPOSTA PERMANENTE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS DO MOVIMENTO

As figuras (3.3) a (3.5) apresentam o movimento do sistema para as mesmas frequência, folga e amortecimento, diferenciando apenas a velocidade inicial do movimento. A escala de tempo está devidamente transladada para evidenciar a ordem do período do movimento periódico (se houver). A resposta é tomada após um grande número de colisões (no caso, após 5.000 colisões).

Nota-se a dependência da resposta do estado permanente às condições iniciais do movimento. Assim, as condições de periodicidade obtidas, por exemplo, na seção anterior, estão sujeitas ainda a outro condicionamento, a saber: a região do espaço

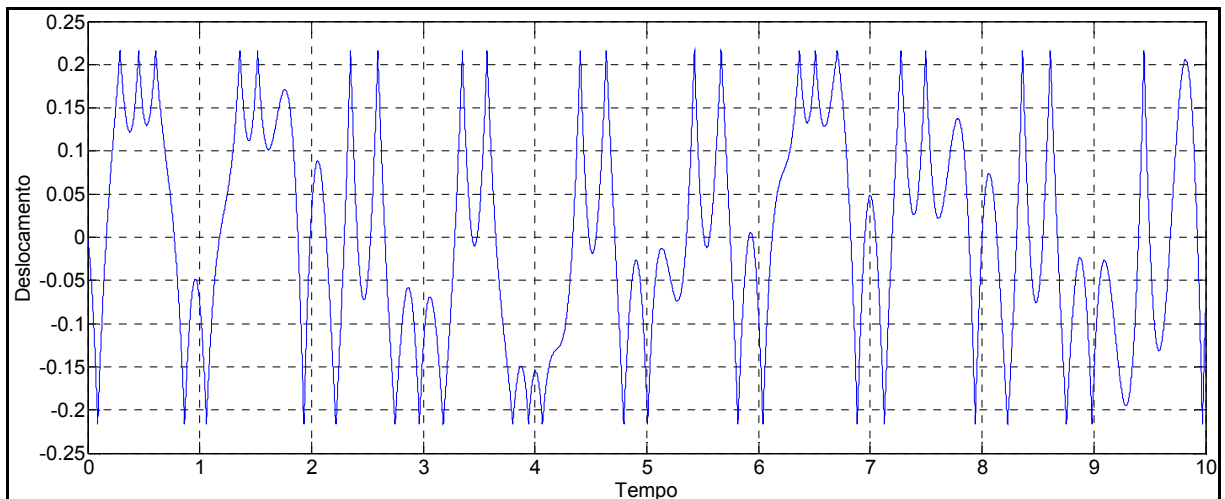


Figura 3.3: Movimento não periódico  $\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.21604 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0.05$

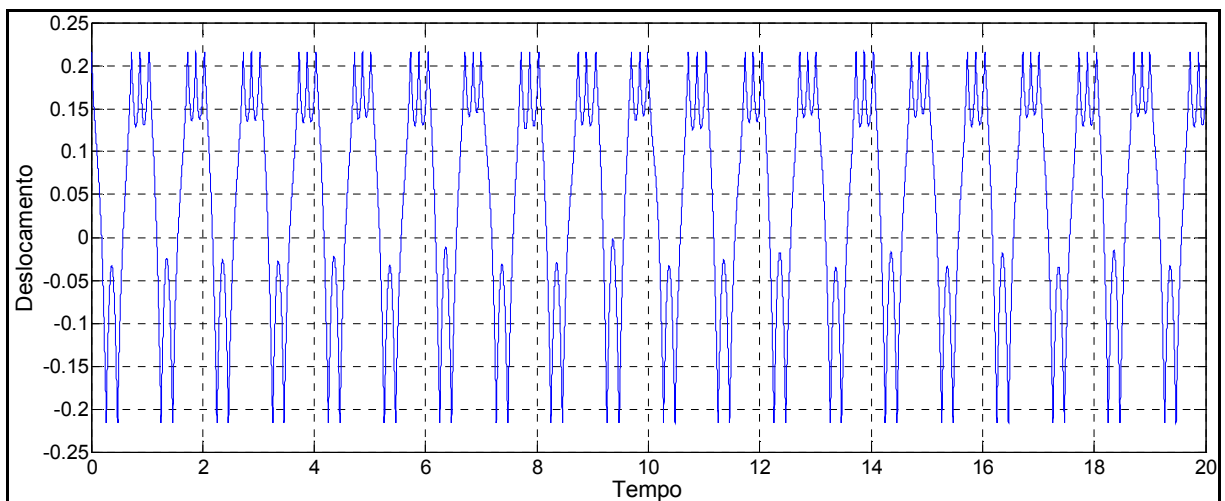


Figura 3.4: Movimento quase periódico  $\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.21604 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0.075$

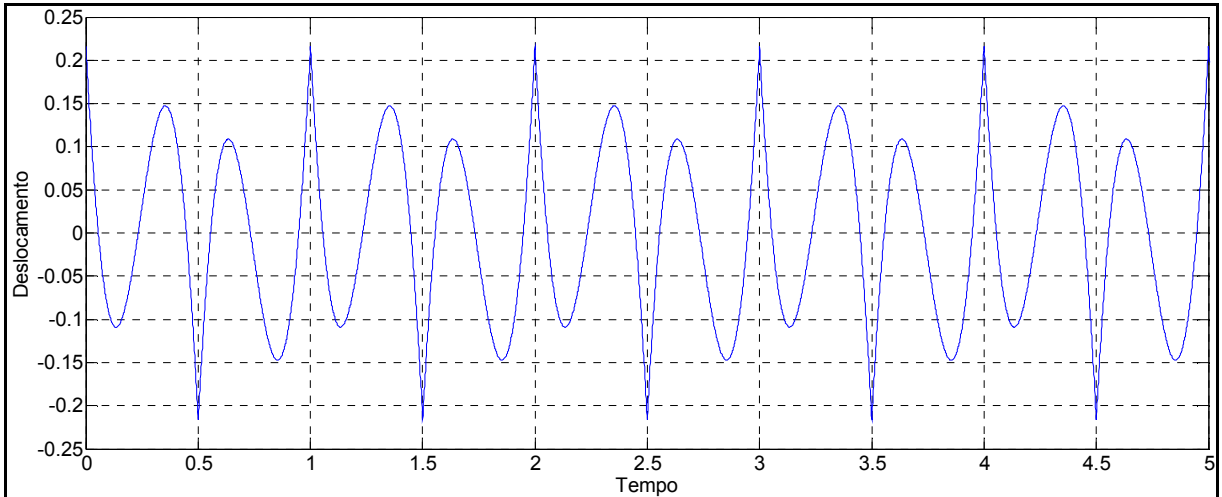


Figura 3.5: Movimento periódico com período de primeira ordem e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.21604 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0.10$$

de solução do problema onde o movimento começa. Pode acontecer, por exemplo, dependendo das condições iniciais, que o estado permanente de movimento periódico seja estabelecido após poucos impactos ou após um número muito grande de impactos, a depender das condições iniciais do movimento.

As figuras (3.6) a (3.7) apresentam a situação para duas condições quando o movimento ocorre na ressonância e a folga esta fixada em 0.24. O lapso temporal até ao estado permanente pode variar muito a depender das condições iniciais do movimento. Isto é um problema quando as medições analisadas se referem uma janela temporal muito pequena, pois pode ser necessário muito tempo para que haja

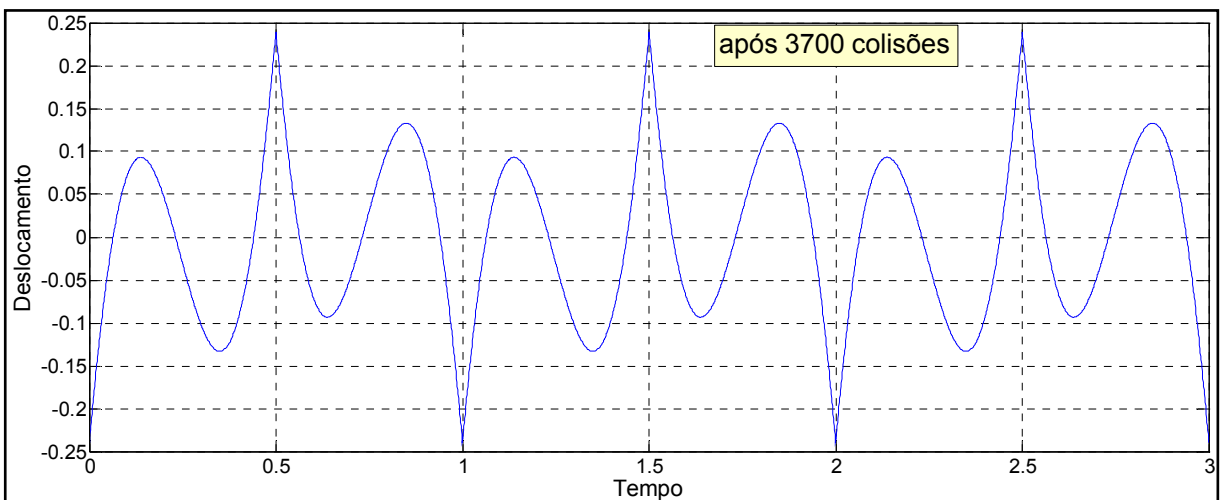


Figura 3.6: Movimento periódico após 3700 colisões: 1ª ordem e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.24 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$$

a supressão de efeitos de certas perturbações, por exemplo. A figura (3.8) apresenta a resposta, para as mesmas condições da figura (3.6), mas após 370 colisões, em vez de 3700.

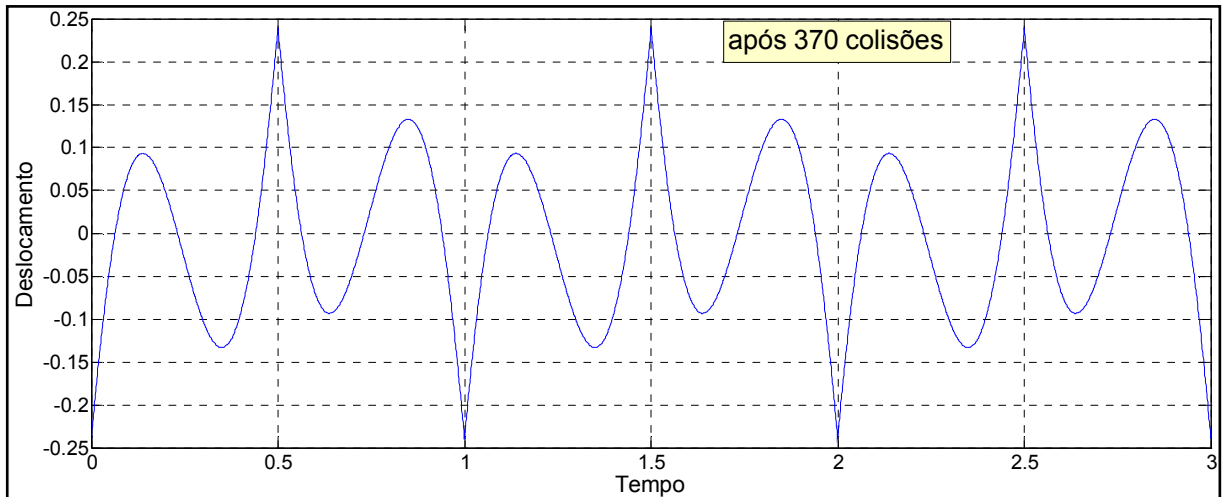


Figura 3.7: Movimento periódico após 370 colisões: 1ª ordem e 2 impactos por período.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.24 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0.10$$

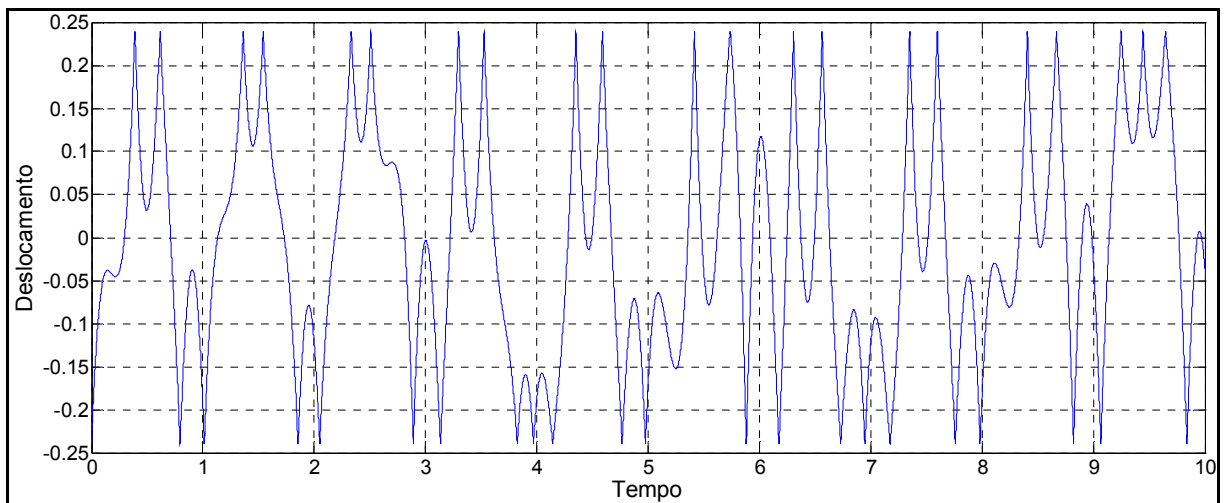


Figura 3.6: Movimento após 370 colisões: não periódico nesta janela temporal.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.24 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0.0$$

Uma vez obtido, das equações (3.19) e (3.20), o estado que deve ser observado ao fim de cada colisão para que o movimento seja periódico nas condições estabelecidas, é possível determinar, pela equação (3.5) qual deve ser a condição inicial para que, já ao final da primeira colisão, aquele estado seja alcançado. De fato, observemos que, considerando o estado  $\mathbf{x}_i$  computado na equação (3.20) como aquele estabelecido logo após a primeira colisão, isto é,  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_1$  e  $\tau_i = \tau_1$  pode-

se aplicar a equação (3.5) para obter as condições iniciais que permitam tal condição. Nesta situação, tem-se

$$\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}(\tau_1, 0) \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{A}(\tau_1, 0) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \sin \omega \tau_1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

de forma que

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(\tau_1, 0)^{-1} \cdot \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{A}(\tau_1, 0)^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \sin \omega \tau_1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Tomemos, por exemplo, o caso da figura (3.6), no qual o movimento periódico foi estabelecido após 3700 colisões. A equação (3.19) resulta que, para o movimento periódico com período de ordem 1 e dois impactos por período, o estado após as colisões deve ser, para  $\varepsilon = 0.24$  :

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} +2.4000000000000000e-001 \\ -7.832994343137028e-001 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +9.988044945680058e-001 \\ -4.888334717212606e-002 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Assim, a condição inicial que, logo após o primeiro impacto, resulta a condição de movimento periódico é:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.791032138e-001 \\ 8.155860770e-001 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Repare que o deslocamento inicial teria de ser maior que a própria folga. O que isto indica? Que não é possível que o movimento seja periódico logo após a primeira colisão com as condições de fase (determinadas a priori) entre resposta e excitação. Isto pode ser resolvido por uma translação da função excitadora que, em vez de ser escrita como  $\omega^2 \cos \omega t$ , poderia ser escrita como  $\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$ , de forma que o parâmetro  $\varphi$  pudesse ser adequadamente ajustado para que a condição inicial fosse fixada dentro dos limites da folga, ou até mesmo fixada numa posição determinada (zero, por exemplo), ajustando-se, então, apenas a velocidade.



Mais importante, todavia, que determinar uma condição exata, sempre de fácil manipulação num código computacional, é verificar as condições de existência do padrão de movimento para uma determinada frequência e folga que será feito na próxima seção.

### 3.4 REGIÃO DE EXISTÊNCIA DO MOVIMENTO COM PERÍODO DE ORDEM 1 E DOIS IMPACTOS POR PERÍODO, UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS

Para o movimento periódico estudado na seção 3.2, tem-se

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_a - \lambda_b} \begin{bmatrix} \lambda_b e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - \lambda_a e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} & e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \\ \lambda_a \lambda_b \left( e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \right) & \lambda_b e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - \lambda_a e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_c & A_s \\ -\omega A_s & \omega A_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix}$$

de forma que, pelas equações (3.14-b) e (3.18) tem-se

$$\mathbf{P} = \frac{\lambda_b - \lambda_a}{\Delta} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \text{ com} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & \begin{bmatrix} \frac{\lambda_b}{\lambda_a} e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} & e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \\ \lambda_a \lambda_b \left( e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \right) & \lambda_b e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - \lambda_a e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \end{bmatrix} \\ & + e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_b}{\lambda_a} e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} & e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \\ \lambda_a \lambda_b \left( e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \right) & \lambda_b e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - \lambda_a e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \end{bmatrix} \\ & + e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_b}{\lambda_a} e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} & e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \\ \lambda_a \lambda_b \left( e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \right) & \lambda_b e^{-\lambda_a \frac{\pi}{\omega}} - \lambda_a e^{-\lambda_b \frac{\pi}{\omega}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Sabendo que

$$\lambda_a = -\xi - j\sqrt{1-\xi} \quad \lambda_b = -\xi + j\sqrt{1-\xi}$$

$$A_c = A \cos \phi = \frac{\omega^2(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2} \quad A_s = A \sin \phi = \frac{\omega^2(2\xi\omega)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2} \quad (3.28)$$

é possível construir um mapa que mostre as regiões onde a condição  $\eta^2 \leq 1$  não é satisfeita. A figura (3.7) mostra o mapa no plano  $(\omega, \varepsilon)$  para os valores de  $\xi = 0$  e  $e = 1$ . A região em que a folga não excede a amplitude do movimento do sistema linear, situação em que há impactos no regime permanente, é indicada na figura.

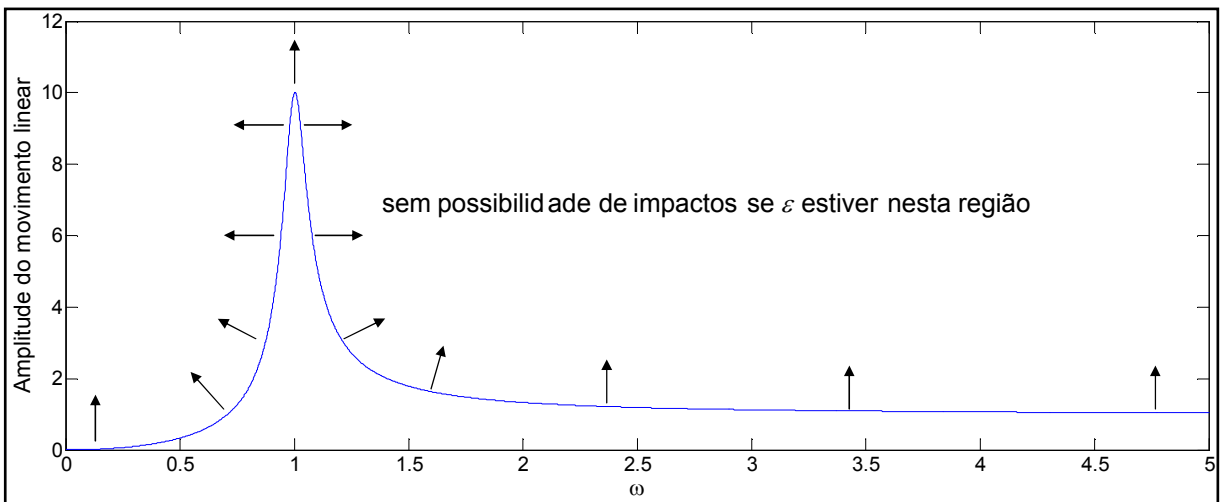


Figura 3.7: Amplitude do sistema linear e indicação da região de impactos.  $\xi = 0.05$

Há, portanto, um valor crítico de  $\eta$  correspondente ao limite entre as regiões. Se o valor crítico não ultrapassar a unidade, o padrão de movimento em estudo é possível, nesta frequência, para qualquer valor da folga. O valor crítico de  $\eta$  depende apenas de  $\xi$  e de  $\omega$ . Levando em conta que a amplitude do sistema linear é

$$A = \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \quad (3.29)$$

tem-se

$$\eta_{cr} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_{11}^2 + p_{12}^2}} \quad (3.30)$$

de modo que, substituindo as equações (3.28) e (3.29) na equação (3.27), vem:

$$\begin{aligned} h_{cr} = & -4 + 8e^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{3x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} - 8e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{3x\dot{p}\ddot{p}}{w}} e x \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} \\ & + 2w^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} + 16e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} e x^2 - 4e e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} \\ & - 2e^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} + 4e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x^2 \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} - 2e^2 w^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} \\ & + 4e w^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} + 8e e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} + 4x^2 - 12e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} e \\ & - 4e^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{4x\dot{p}\ddot{p}}{w}} - 2e^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} + 4e^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{4x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x^2 - 8e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x^2 \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} \\ & - 2e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} + 8e e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{x\dot{p}\ddot{p}}{w}} \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} - 8e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} \\ & - 2w^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} - 8e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{3x\dot{p}\ddot{p}}{w}} e x^2 \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} + 8e^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{3x\dot{p}\ddot{p}}{w}} \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} \\ & - 8e e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x^2 \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} - 4e^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\alpha}{\zeta} \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} \\ & - 2e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} - 8e^2 e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{3x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x^2 \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} \\ & + 8e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{3x\dot{p}\ddot{p}}{w}} e \cos \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} + 4e^{\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{2x\dot{p}\ddot{p}}{w}} x \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\alpha}{\zeta} \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{p}}{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 e^2 w^2 e^{\frac{\omega - 2x p \ddot{\theta}}{w}} \cos \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{\theta}}{w} - 4 w^2 e^{\frac{\omega - 2x p \ddot{\theta}}{w}} e^{\frac{\omega - 2\sqrt{1-x^2} p \ddot{\theta}}{w}} \\
& + 4 e^2 e^{\frac{\omega - 2x p \ddot{\theta}}{w}} x^2 \cos \frac{2\sqrt{1-x^2} p \ddot{\theta}}{w} + 8 e^{\frac{\omega - x p \ddot{\theta}}{w}} \cos \frac{\sqrt{1-x^2} p \ddot{\theta}}{w}
\end{aligned}$$

A figura (3.8) apresenta a variação de  $\eta_{cr}$  quando  $\xi = 0.05$ . Repara-se que o valor de  $\eta_{cr}$  é menor que a unidade para qualquer valor de  $\omega$ , razão pela qual não será possível, para nenhum valor de  $\varepsilon$  que permita colisão, que  $\eta$  ultrapasse a unidade.

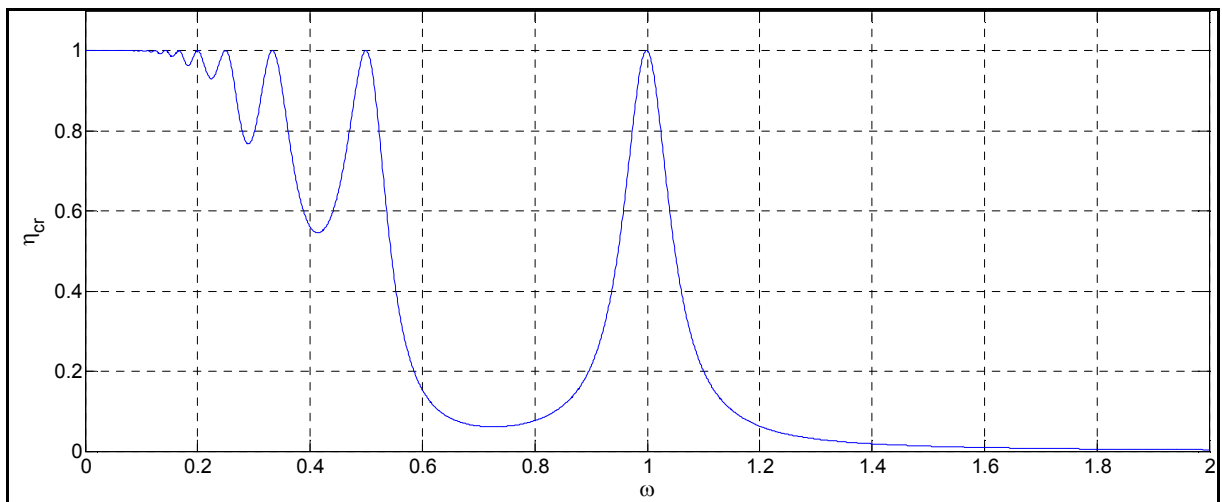


Figura 3.8: Valor crítico de  $\eta$  em função de  $\omega$ .  $\xi = 0.05$

A figura (3.9) apresenta uma ampliação da figura (3.8), com escalas modificadas, quando  $\omega$  é inferior à frequência de ressonância. Notam-se as frequências para as quais  $\eta_{cr}$  se aproxima da unidade, mas sem excedê-la, observando-se que isto ocorre nas divisões inteiras da frequência natural amortecida, isto é,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ , etc. A consequência das figuras (3.8) e (3.9) é que o movimento com período de ordem 1 e dois impactos simetricamente localizados no período é sempre possível no sistema. Isto não significa que outros movimentos não sejam possíveis, como se verá.

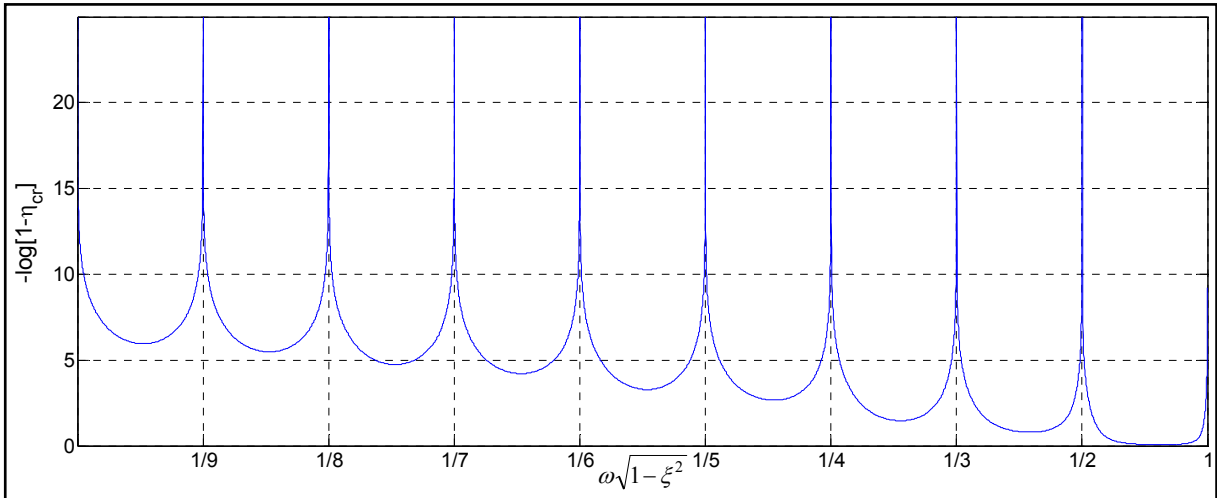


Figura 3.9: Identificação das frequências em que  $\eta_{cr} \rightarrow 1^-$ .  $\xi = 0.05$

As figuras (3.10) a (3.14) apresentam o movimento para valores de folga já utilizados no capítulo 2, na frequência natural do sistema ( $\omega = 1$ ), mas para condições iniciais diferentes da utilizadas anteriormente. Como já se mostrou na seção 3.3, não há unicidade de respostas no estado permanente. A figura (3.15) mostra o movimento da figura  $\omega = 1$  e  $\varepsilon = 3$ , quando  $\xi = 0.05$ , mas para condições iniciais nulas. É a mesma condição da figura 2.25, mas para um número de colisões muito maior (30.000 colisões). Vê-se que o movimento com período de ordem 2 se mantém como estado permanente. A tabela 3.1 apresenta o estado após cada colisão, confirmando que aquele movimento é periódico. Portanto, ao menos duas topologias de movimento são possíveis quando  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon = 3$  e  $\xi = 0.05$ .

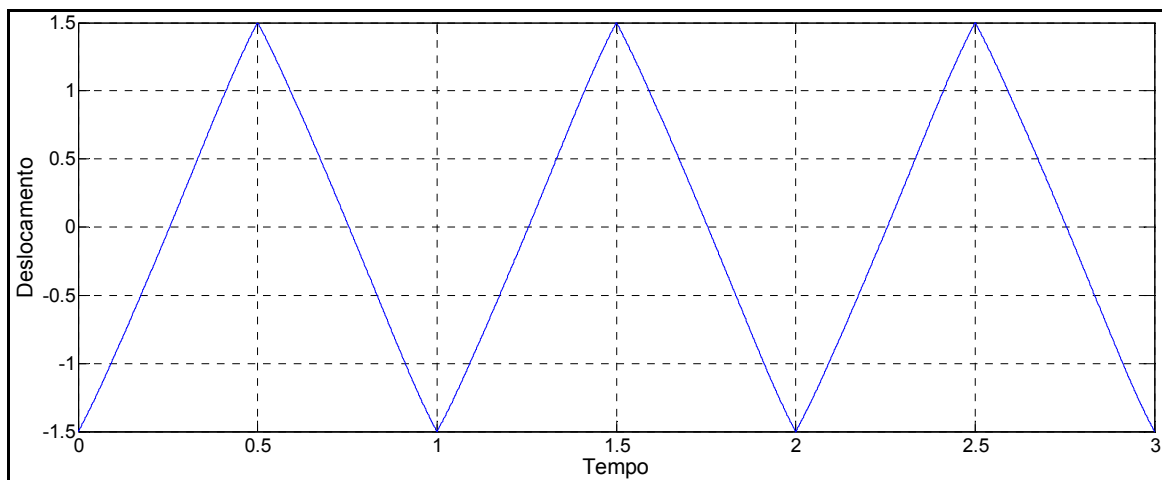


Figura 3.10: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$\omega = 1.0$   $\varepsilon = 1.5$   $\xi = 0.05$   $x_0 = \varepsilon$   $v_0 = -0.7771$ . Compare com a figura 2.22.

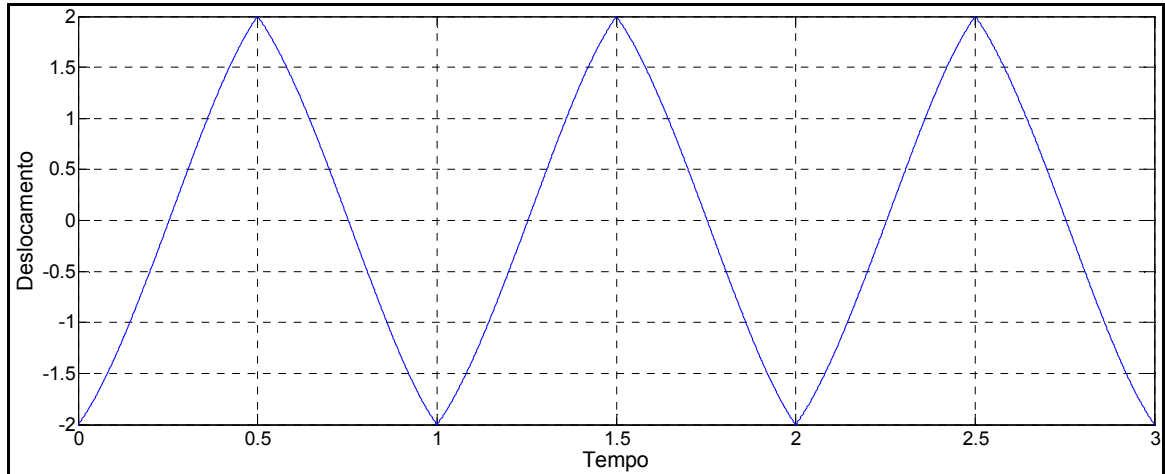


Figura 3.11: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$\omega = 1.0$   $\varepsilon = 2.0$   $\xi = 0.05$   $x_0 = \varepsilon$   $v_0 = -0.7711$ . Compare com a figura 2.23.

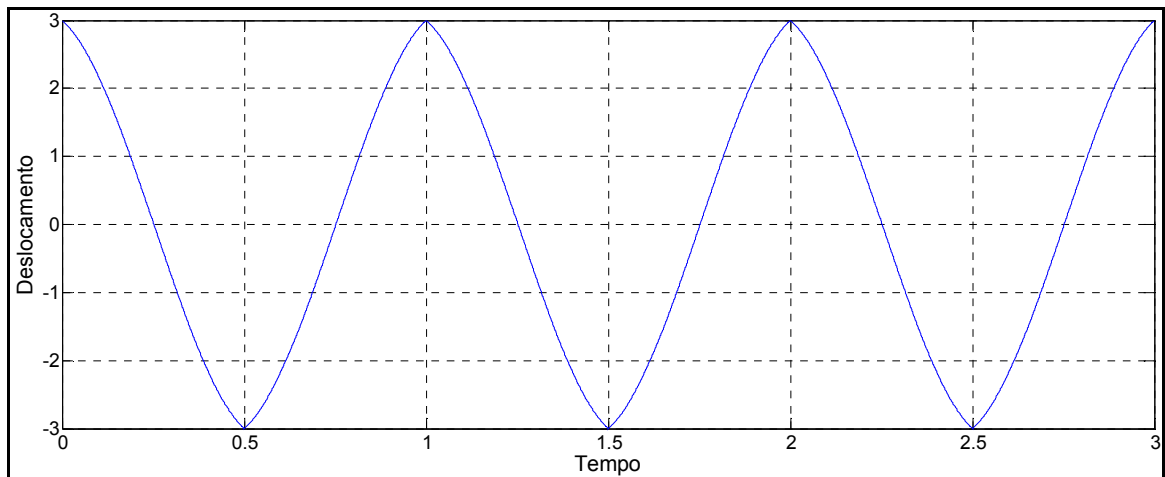


Figura 3.12: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$\omega = 1.0$   $\varepsilon = 3.0$   $\xi = 0.05$   $x_0 = \varepsilon$   $v_0 = -0.7529$ . Compare com a figura 2.25.

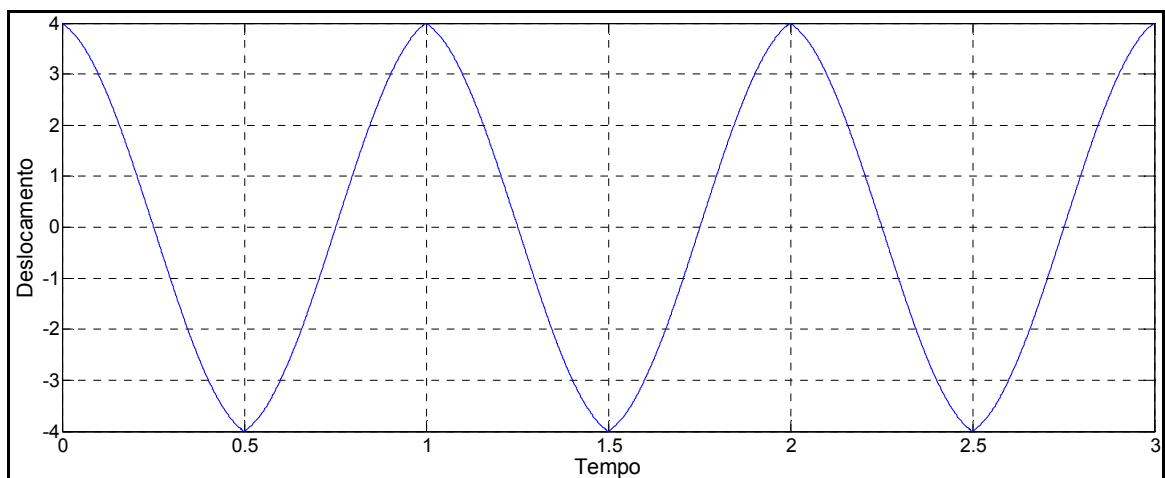


Figura 3.13: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$\omega = 1.0$   $\varepsilon = 4.0$   $\xi = 0.05$   $x_0 = \varepsilon$   $v_0 = -0.7255$ . Compare com a figura 2.27.

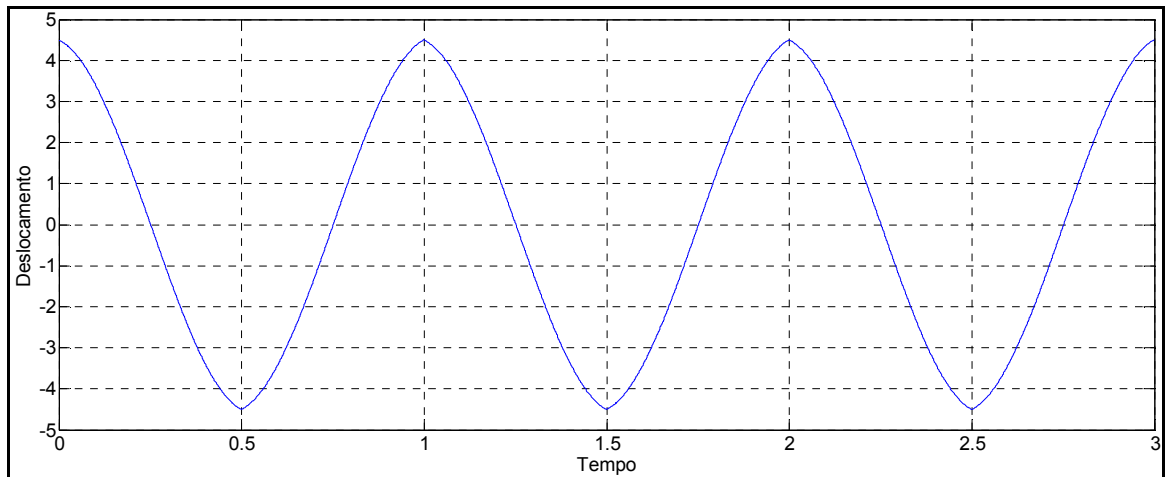


Figura 3.14: Movimento com período de ordem 1 e 2 impactos por período.

$\omega = 1.0$   $\varepsilon = 4.5$   $\xi = 0.05$   $x_0 = \varepsilon$   $v_0 = -0.7081$ . Compare com a figura 2.28.

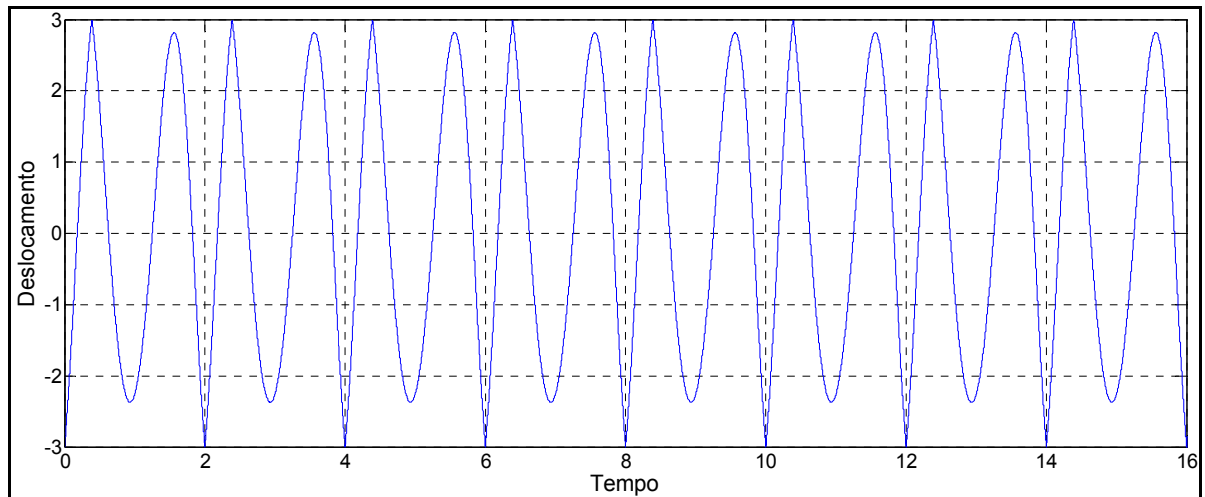


Figura 3.15: Período de ordem 2 e 2 impactos por período (resposta após 30.000 colisões)

$\omega = 1.0$   $\varepsilon = 4.5$   $\xi = 0.05$   $x_0 = 0$   $v_0 = 0$ . Compare com a figura 3.12.



Tempo	Lapso temporal (em períodos)	Posição	Velocidade
1.88382266E+05	0.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00
1.88392387E+05	1.61081665427	-3.00000000E+00	1.94245784E+00
1.88394833E+05	2.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00
1.88404954E+05	3.61081665427	-3.00000000E+00	1.94245784E+00
1.88407399E+05	4.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00
1.88417520E+05	5.61081665427	-3.00000000E+00	1.94245784E+00
1.88419965E+05	6.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00
1.88430087E+05	7.61081665427	-3.00000000E+00	1.94245784E+00
1.88432532E+05	8.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00
1.88442653E+05	9.61081665427	-3.00000000E+00	1.94245784E+00
1.88445098E+05	10.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00
1.88455219E+05	11.61081665427	-3.00000000E+00	1.94245784E+00
1.88457665E+05	12.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00
1.88467786E+05	13.61081665427	-3.00000000E+00	1.94245784E+00
1.88470231E+05	14.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00
1.88480352E+05	15.61081665427	-3.00000000E+00	1.94245784E+00
1.88482797E+05	16.0000000000	3.00000000E+00	-1.22086355E+00

Figura 3.16: Estado do sistema após colisões (computo após 30.000 colisões)

## 4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO

A solução de equações diferenciais por séries é uma técnica muito comum (Hartog 1985). Quando se esperam, como solução, funções periódicas, as séries de Fourier surgem como solução natural (WEAVER 1974 p 521). Neste caso, solucionar a equação de movimento é encontrar os coeficientes da Série de Fourier que fazer a série convergir para a solução do problema. Todavia, em sistemas com não linearidades fortes, como os sistemas com vibro-impactos, a convergência desta série pode exigir critérios mais rigorosos que em outros problemas, já que a topologia da solução pode mudar a depender das condições do movimento e estas condições, na solução procurada, podem ser perturbadas pelos critérios de exatidão estabelecidos.

Muitas vezes não é possível determinar os coeficientes de forma direta, mas a própria determinação dos coeficientes é feita por um processo incremental adequado (LEGRAND 2006). Neste caso, não apenas o número de termos da série de Fourier determina a exatidão da solução, mas também a própria exatidão com que são computados os coeficientes da série, já que fruto de processo incremental.

Neste capítulo vamos analisar aplicar o método do balanço harmônico ao movimento com período de ordem 1 e dois impactos uniformemente distribuídos dentro do período. Como mostrado no capítulo 3, este tipo de movimento é possível para todo o intervalo de folga onde é possível haver impactos, para qualquer freqüência.

O método descritivo de uma função (também chamado de método do balanço harmônico) utiliza técnicas de domínio de freqüência (séries de Fourier) para investigar o comportamento cíclico em sistemas não lineares. O método envolve uma aproximação para a qual, todavia, freqüentemente tomamos uma predição (daquilo que pode ocorrer) segura a respeito do limite do comportamento cíclico (SMITH 2008).

O método de equilíbrio harmônico é iterativo. Está baseado na suposição que para uma determinada excitação senoidal existe uma solução de estado permanente que

pode ser aproximada a precisão satisfatória por meio de umas séries de Fourier finitas (TECHNOLOGY, AGILENT 2005).

Quando o método de equilíbrio harmônico é aplicado a um sistema não-linear, o número de harmônicos que faz a solução prevista convergir para a solução exata tende ao infinito (WOO 2006). No entanto, só um certo número de condições harmônicas é normalmente retido, de modo que a ordem na qual a série de Fourier é truncada determina o erro.

Supondo que o movimento, representado pela função  $x(\tau)$  seja periódico com período  $T$ , então o movimento pode ser representado pela equação 4.1 (Hartog 1985):

$$x(\tau) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) + B_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) \quad (4.1)$$

onde

$$A_0 = \int_0^T x(\tau) d\tau \quad A_k = \int_0^T x(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad B_k = \int_0^T x(\tau) \sin\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad (4.2)$$

Adaptando as equações 4.1 e 4.2 para o caso específico do sistema analisado e com o movimento descrito, podemos escrever:

$$A_0 = \int_{\tau_i}^{\tau_i+T} x(\tau) d\tau \quad A_k = \int_{\tau_i}^{\tau_i+T} x(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad B_k = \int_{\tau_i}^{\tau_i+T} x(\tau) \sin\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad (4.3)$$

Levando em conta que existem dois impactos por período, uniformemente distribuídos no tempo, tem-se

$$A_0 = \int_{\tau_i}^{\tau_i+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1}+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau \quad (4.4-a)$$

$$A_k = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{T}{2}} x(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1} + \frac{T}{2}} x(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad (4.4-b)$$

$$B_k = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{T}{2}} x(\tau) \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1} + \frac{T}{2}} x(\tau) \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad (4.4-c)$$

Ora, se o deslocamento é periódico, a velocidade também é, de forma que também se pode escrever

$$v(\tau) = \tilde{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) + \tilde{B}_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right), \text{ onde} \quad (4.5)$$

$$\tilde{A}_0 = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{T}{2}} v(\tau) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1} + \frac{T}{2}} v(\tau) d\tau \quad (4.6-a)$$

$$\tilde{A}_k = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{T}{2}} v(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1} + \frac{T}{2}} v(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad (4.6-b)$$

$$\tilde{B}_k = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{T}{2}} v(\tau) \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1} + \frac{T}{2}} v(\tau) \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad (4.6-c)$$

Pode-se tratar diretamente o estado, e tem-se  $\mathbf{x}(\tau + T) = \mathbf{x}(\tau + T)$ , onde  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{bmatrix}$ .

Relembrando, do capítulo 3, que, após a  $i$ -ésima colisão tem-se:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \operatorname{sen} \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \operatorname{sen} \omega \tau \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

então, poder-se-á escrever:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) + \mathbf{B}_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right), \text{ onde} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{a}_0 = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{T}{2}} \mathbf{x}(\tau) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1} + \frac{T}{2}} \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (4.8-a)$$

$$\mathbf{a}_k = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{T}{2}} \mathbf{x}(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1} + \frac{T}{2}} \mathbf{x}(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad (4.8-b)$$

$$\mathbf{b}_k = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{T}{2}} \mathbf{x}(\tau) \sin\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1} + \frac{T}{2}} \mathbf{x}(\tau) \sin\left(\frac{2k\pi}{T} \tau\right) d\tau \quad (4.8-c)$$

#### 4.1 CÁLCULO DO COEFICIENTE $\mathbf{a}_0$

Considerando a equação 3.17 devemos ter para o movimento em estudo,

$$\mathbf{x}_i = -(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_i \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

de forma que  $\mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{x}_i$  (veja demonstração à página 48).

Assim, tem-se ( $\tau_{i+1} = \tau_i + \frac{\pi}{\omega}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 = & \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \left\{ \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \right\} d\tau + \\ & \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \left\{ -\mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} -\cos \omega \tau_i \\ -\sin \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \right\} d\tau \end{aligned}$$

A equação anterior pode ser reagrupada na seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_0 &= \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i d\tau - \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i d\tau + \\
&\int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} d\tau - \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} d\tau \\
&\int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} d\tau + \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} d\tau
\end{aligned}$$

Para mostrar que  $\mathbf{a}_0 = [0 \ 0]^T$ , devemos considerar que

$$\int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} d\tau + \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} d\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de forma que a última linha da equação resulta valor nulo.

Com relação às outras integrais, deve-se reparar da equação 3.4 que o conteúdo da matriz  $\mathbf{A}(\tau, \tau_i)$  é função apenas dos parâmetros do sistema  $(\lambda_1, \lambda_2)$  e do lapso temporal  $\tau - \tau_i$ . Definindo

$$\begin{aligned}
\sigma &= \tau - \tau_i && \text{na integral do intervalo} [\tau_i, \tau_{i+1}] \\
\sigma &= \tau - \tau_{i+1} && \text{na integral do intervalo} [\tau_{i+1}, \tau_{i+2}]
\end{aligned}$$

$\mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot d\tau = \mathbf{A}(\sigma) \cdot d\sigma = \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot d\tau$  de modo que

$$\int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i d\tau - \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cdot \mathbf{x}_i d\sigma - \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cdot \mathbf{x}_i d\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} d\tau - \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} d\tau = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} d\sigma - \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, pode-se afirmar

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_i \end{bmatrix} = -(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

## 4.2 CÁLCULO DOS COEFICIENTES $\mathbf{a}_k$

Para os termos  $\mathbf{a}_k$ , levando em conta a equação 4.9, ter-se-á  $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k = & \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i \cos(k\omega\tau) d\tau - \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i \cos(k\omega\tau) d\tau + \\ & \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} \cos(k\omega\tau) d\tau - \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} \cos(k\omega\tau) d\tau \quad (4.11) \\ & \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \cos(k\omega\tau) d\tau + \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \cos(k\omega\tau) d\tau \end{aligned}$$

A primeira integral da equação 4.11 resulta  $(\sigma = \tau - \tau_i)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 = & \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i \cos(k\omega\tau) d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cdot \mathbf{x}_i \cos[k\omega(\sigma + \tau_i)] d\sigma = \\ & \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \cos(k\omega\tau_i) \cdot \mathbf{x}_i - \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \text{sen}(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \text{sen}(k\omega\tau_i) \cdot \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

Analogamente, para a segunda integral, tem-se  $(\sigma = \tau - \tau_{i+1})$ :

$$\mathbf{I}_2 = \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i \cos(k\omega\tau) d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cdot \mathbf{x}_i \cos[k\omega(\sigma + \tau_{i+1})] d\sigma =$$

$$\left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \cos(k\omega\tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i - \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \sin(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \sin(k\omega\tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i$$

Assim tem-se:

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \cos(k\omega\tau_i) \cdot \mathbf{x}_i - \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \sin(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \sin(k\omega\tau_i) \cdot \mathbf{x}_i -$$

$$\left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \cos(k\omega\tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i + \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \sin(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \sin(k\omega\tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i$$

Ora, se  $\tau_{i+1} = \tau_i + \frac{\pi}{\omega}$ , tem-se

$$\cos(k\omega\tau_{i+1}) = \cos(k\omega\tau_i + k\pi) = -\cos(k\omega\tau_i)$$

$$\sin(k\omega\tau_{i+1}) = \sin(k\omega\tau_i + k\pi) = -\sin(k\omega\tau_i), \text{ de modo que}$$

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = \left\{ 2\cos(k\omega\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma - 2\sin(k\omega\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \sin(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \mathbf{x}_i \quad (4.11-a)$$

A terceira e quarta equações têm a mesma estrutura das duas primeiras exceto pela presença do termo constante  $\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau_i \\ \sin \omega\tau_i \end{bmatrix}$ . Estas integrais podem ser manipuladas da mesma forma que as duas primeiras e o resultado é:

$$\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 = -2 \cdot \left\{ \cos(k\omega\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma - \sin(k\omega\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \sin(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau_i \\ \sin \omega\tau_i \end{bmatrix} \quad (4.11-b)$$

Sendo assim, as duas últimas integrais da equação 4.11 resultam:



$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_5 - \mathbf{I}_6 &= \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \cos(k\omega \tau) d\tau + \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \cos(k\omega \tau) d\tau = \\
&\mathbf{B} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \cos(k\omega \tau) d\tau = \\
&\mathbf{B} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \cos \omega \tau_i - \text{sen } \omega \sigma \text{sen } \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \sigma \cos \omega \tau_i + \cos \omega \sigma \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} (\cos k\omega \sigma \cos k\omega \tau_i - \text{sen } k\omega \sigma \text{sen } k\omega \tau_i) d\sigma = \\
&\mathbf{B} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \mathbf{G}_1(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \cos k\omega \sigma \\ \text{sen } \omega \sigma \text{sen } k\omega \sigma \end{bmatrix} + \mathbf{G}_2(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \text{sen } k\omega \sigma \\ \text{sen } \omega \sigma \cos k\omega \sigma \end{bmatrix} \right\} d\sigma
\end{aligned} \tag{4.11-c}$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{G}_1(\tau_i) = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \cos k\omega \tau_i & \text{sen } \omega \tau_i \text{sen } k\omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \cos k\omega \tau_i & -\cos \omega \tau_i \text{sen } k\omega \tau_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2(\tau_i) = \begin{bmatrix} -\cos \omega \tau_i \text{sen } k\omega \tau_i & -\text{sen } \omega \tau_i \cos k\omega \tau_i \\ -\text{sen } \omega \tau_i \text{sen } k\omega \tau_i & \cos \omega \tau_i \cos k\omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{C}_1(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.11-d}$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_k &= \left\{ 2 \cos(k\omega \tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega \sigma) d\sigma - 2 \text{sen}(k\omega \tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \text{sen}(k\omega \sigma) d\sigma \right\} \cdot \mathbf{x}_i - \\
&\left\{ 2 \cos(k\omega \tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega \sigma) d\sigma - 2 \text{sen}(k\omega \tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \text{sen}(k\omega \sigma) d\sigma \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} + \\
&\mathbf{B} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \mathbf{G}_1(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \cos k\omega \sigma \\ \text{sen } \omega \sigma \text{sen } k\omega \sigma \end{bmatrix} + \mathbf{G}_2(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \text{sen } k\omega \sigma \\ \text{sen } \omega \sigma \cos k\omega \sigma \end{bmatrix} \right\} d\sigma
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Recordando que veja equação 3.4-a

$$\mathbf{A}(\sigma) = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} \lambda_b e^{\lambda_a \sigma} - \lambda_a e^{\lambda_b \sigma} & e^{\lambda_b \sigma} - e^{\lambda_a \sigma} \\ \lambda_a \lambda_b \cdot (e^{\lambda_a \sigma} - e^{\lambda_b \sigma}) & \lambda_b e^{\lambda_b \sigma} - \lambda_a e^{\lambda_a \sigma} \end{bmatrix} \text{ tem-se:}$$

$$\mathbf{C}_k = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma = \frac{1}{(\lambda_b - \lambda_a)(\lambda_a^2 + k^2\omega^2)(\lambda_b^2 + k^2\omega^2)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \text{ com} \quad (4.12-a)$$

$$\begin{cases} c_{11} = \lambda_a \lambda_b \left\{ (\lambda_a^2 + \lambda_b^2) + (-1)^k \left[ \exp\left(\frac{\pi\lambda_a}{\omega}\right) \cdot (\lambda_b^2 + k^2\omega^2) - \exp\left(\frac{\pi\lambda_b}{\omega}\right) \cdot (\lambda_a^2 + k^2\omega^2) \right] \right\} \\ c_{12} = \lambda_a (\lambda_b^2 + k^2\omega^2) - \lambda_b (\lambda_a^2 + k^2\omega^2) + (-1)^k \left[ \lambda_b \exp\left(\frac{\pi\lambda_b}{\omega}\right) \cdot (\lambda_a^2 + k^2\omega^2) - \lambda_a \exp\left(\frac{\pi\lambda_a}{\omega}\right) \cdot (\lambda_b^2 + k^2\omega^2) \right] \\ c_{21} = -\lambda_a \lambda_b c_{12} \\ c_{22} = k^2\omega^2 (\lambda_a^2 - \lambda_b^2) + (-1)^k \left[ \lambda_b^2 \exp\left(\frac{\pi\lambda_b}{\omega}\right) \cdot (\lambda_a^2 + k^2\omega^2) - \lambda_a^2 \exp\left(\frac{\pi\lambda_a}{\omega}\right) \cdot (\lambda_b^2 + k^2\omega^2) \right] \end{cases}$$

De forma análoga escreve-se:

$$\mathbf{S}_k = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \sen(k\omega\sigma) d\sigma = \frac{1}{(\lambda_b - \lambda_a)(\lambda_a^2 + k^2\omega^2)(\lambda_b^2 + k^2\omega^2)} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \text{ com} \quad (4.12-b)$$

$$\begin{cases} s_{11} = -k\omega \left\{ \lambda_a (\lambda_a^2 + k^2\omega^2) \cdot \left[ 1 - (-1)^k \exp\left(\frac{\pi\lambda_b}{\omega}\right) \right] - \lambda_b (\lambda_b^2 + k^2\omega^2) \cdot \left[ 1 + (-1)^k \exp\left(\frac{\pi\lambda_a}{\omega}\right) \right] \right\} \\ s_{12} = -k\omega \left\{ (\lambda_b^2 - \lambda_a^2) + (-1)^k \left[ \exp\left(\frac{\pi\lambda_b}{\omega}\right) (\lambda_a^2 + k^2\omega^2) - \exp\left(\frac{\pi\lambda_a}{\omega}\right) (\lambda_b^2 + k^2\omega^2) \right] \right\} \\ s_{21} = -\lambda_a \lambda_b s_{12} \\ s_{22} = -k\omega \left\{ \lambda_a (\lambda_b^2 + k^2\omega^2) - \lambda_b (\lambda_a^2 + k^2\omega^2) + (-1)^k \left[ \lambda_b \exp\left(\frac{\pi\lambda_b}{\omega}\right) (\lambda_a^2 + k^2\omega^2) - \lambda_a \exp\left(\frac{\pi\lambda_a}{\omega}\right) (\lambda_b^2 + k^2\omega^2) \right] \right\} \end{cases}$$

De posse da equação 4.12-b e seus termos, calculam-se:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{G}_1(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\sigma \cos k\omega\sigma \\ \sen \omega\sigma \sen k\omega\sigma \end{bmatrix} d\sigma = \mathbf{G}_1(\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \begin{bmatrix} \cos \omega\sigma \cos k\omega\sigma \\ \sen \omega\sigma \sen k\omega\sigma \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12-c)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{G}_2(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\sigma \sen k\omega\sigma \\ \sen \omega\sigma \cos k\omega\sigma \end{bmatrix} d\sigma = \mathbf{G}_2(\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \begin{bmatrix} \cos \omega\sigma \sen k\omega\sigma \\ \sen \omega\sigma \cos k\omega\sigma \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12-d)$$

Assim, pode-se escrever

$$\mathbf{a}_k = 2 \cos(k\omega\tau_i) \cdot \left\{ \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau_i \\ \sin \omega\tau_i \end{bmatrix} \right\} - 2 \sin(k\omega\tau_i) \cdot \left\{ \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau_i \\ \sin \omega\tau_i \end{bmatrix} \right\} \quad (4.13)$$

onde as matrizes  $\mathbf{C}_k$  e  $\mathbf{S}_k$  são dadas pelas equações 4.12-a e 4.12-b, respectivamente, e a matriz  $\mathbf{B}$  é dada pela equação 3.4-b.

### 4.3 CÁLCULO DOS COEFICIENTES $\mathbf{b}_k$

Para os termos  $\mathbf{b}_k$ , levando em conta a equação 4.9, ter-se-á  $\left( \omega = \frac{2\pi}{T} \right)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_k = & \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i \sin(k\omega\tau) d\tau - \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i \sin(k\omega\tau) d\tau + \\ & \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_{i+1}) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau_i \\ \sin \omega\tau_i \end{bmatrix} \sin(k\omega\tau) d\tau - \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau_i \\ \sin \omega\tau_i \end{bmatrix} \sin(k\omega\tau) d\tau \\ & \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau \\ \sin \omega\tau \end{bmatrix} \sin(k\omega\tau) d\tau + \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau \\ \sin \omega\tau \end{bmatrix} \sin(k\omega\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.14)$$

A primeira integral da equação 4.14 resulta  $(\sigma = \tau - \tau_i)$ :

$$\mathbf{I}_1 = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i \sin(k\omega\tau) d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cdot \mathbf{x}_i \sin[k\omega(\sigma + \tau_i)] d\sigma =$$

$$\left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \sin(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \cos(k\omega\tau_i) \cdot \mathbf{x}_i + \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \sin(k\omega\tau_i) \cdot \mathbf{x}_i$$

Analogamente, para a segunda integral, tem-se  $(\sigma = \tau - \tau_{i+1})$ :

$$\mathbf{I}_2 = \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i \operatorname{sen}(k\omega\tau) d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cdot \mathbf{x}_i \operatorname{sen}[k\omega(\sigma + \tau_{i+1})] d\sigma =$$

$$\left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \operatorname{sen}(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \cos(k\omega\tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i + \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \operatorname{sen}(k\omega\tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i$$

Assim tem-se:

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \operatorname{sen}(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \cos(k\omega\tau_i) \cdot \mathbf{x}_i + \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \operatorname{sen}(k\omega\tau_i) \cdot \mathbf{x}_i -$$

$$\left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \operatorname{sen}(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \cos(k\omega\tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i - \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \operatorname{sen}(k\omega\tau_{i+1}) \cdot \mathbf{x}_i$$

Se  $\tau_{i+1} = \tau_i + \frac{\pi}{\omega}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \cos(k\omega\tau_{i+1}) &= \cos(k\omega\tau_i + k\pi) = -\cos(k\omega\tau_i) \\ \operatorname{sen}(k\omega\tau_{i+1}) &= \operatorname{sen}(k\omega\tau_i + k\pi) = -\operatorname{sen}(k\omega\tau_i) \end{aligned}, \text{ de modo que}$$

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = \left\{ 2\cos(k\omega\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \operatorname{sen}(k\omega\sigma) d\sigma + 2\operatorname{sen}(k\omega\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \mathbf{x}_i \quad (4.14-a)$$

A terceira e quarta equações têm a mesma estrutura das duas primeiras exceto pela presença do termo constante  $\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau_i \\ \operatorname{sen} \omega\tau_i \end{bmatrix}$ . Estas integrais podem ser manipuladas da mesma forma que as duas primeiras e o resultado é:

$$\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 = -2 \cdot \left\{ \cos(k\omega\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \operatorname{sen}(k\omega\sigma) d\sigma + \operatorname{sen}(k\omega\tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega\sigma) d\sigma \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega\tau_i \\ \operatorname{sen} \omega\tau_i \end{bmatrix} \quad (4.14-b)$$

Manipulando as duas últimas integrais da equação 4.11 teremos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_5 - \mathbf{I}_6 &= \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \text{sen}(k\omega \tau) d\tau + \int_{\tau_i + \frac{\pi}{\omega}}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \text{sen}(k\omega \tau) d\tau = \\
&\mathbf{B} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_i + \frac{2\pi}{\omega}} \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \text{sen } \omega \tau \end{bmatrix} \text{sen}(k\omega \tau) d\tau = \\
&\mathbf{B} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \cos \omega \tau_i - \text{sen } \omega \sigma \text{sen } \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \sigma \cos \omega \tau_i + \cos \omega \sigma \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} (\text{sen } k\omega \sigma \cos k\omega \tau_i + \cos k\omega \sigma \text{sen } k\omega \tau_i) d\sigma = \\
&\mathbf{B} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \mathbf{H}_1(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \cos k\omega \sigma \\ \text{sen } \omega \sigma \text{sen } k\omega \sigma \end{bmatrix} + \mathbf{H}_2(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \text{sen } k\omega \sigma \\ \text{sen } \omega \sigma \cos k\omega \sigma \end{bmatrix} \right\} d\sigma
\end{aligned} \tag{4.14-c}$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1(\tau_i) = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \cos k\omega \tau_i & \text{sen } \omega \tau_i \text{sen } k\omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \cos k\omega \tau_i & -\cos \omega \tau_i \text{sen } k\omega \tau_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_2(\tau_i) = \begin{bmatrix} -\cos \omega \tau_i \text{sen } k\omega \tau_i & -\text{sen } \omega \tau_i \cos k\omega \tau_i \\ -\text{sen } \omega \tau_i \text{sen } k\omega \tau_i & \cos \omega \tau_i \cos k\omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{C}_1(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.14-d}$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_k &= \left\{ 2 \text{sen}(k\omega \tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega \sigma) d\sigma + 2 \cos(k\omega \tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \text{sen}(k\omega \sigma) d\sigma \right\} \cdot \mathbf{x}_i - \\
&\left\{ 2 \text{sen}(k\omega \tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \cos(k\omega \sigma) d\sigma + 2 \cos(k\omega \tau_i) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{A}(\sigma) \text{sen}(k\omega \sigma) d\sigma \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} + \\
&\mathbf{B} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \mathbf{H}_1(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \cos k\omega \sigma \\ \text{sen } \omega \sigma \text{sen } k\omega \sigma \end{bmatrix} + \mathbf{H}_2(\tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \sigma \text{sen } k\omega \sigma \\ \text{sen } \omega \sigma \cos k\omega \sigma \end{bmatrix} \right\} d\sigma
\end{aligned} \tag{4.15}$$

As integrais já foram calculadas na seção 4.2 e se pode escrever

$$\mathbf{b}_k = 2 \text{sen}(k\omega \tau_i) \cdot \left\{ \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} \right\} + 2 \text{sen}(k\omega \tau_i) \cdot \left\{ \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \text{sen } \omega \tau_i \end{bmatrix} \right\} \tag{4.16}$$

onde as matrizes  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{S}_k$  e  $\mathbf{B}$  têm as formas já conhecidas.

#### 4.4 ALGORITMO PARA A IMPLEMENTAÇÃO DA SOLUÇÃO POR BALANÇO HARMÔNICO

As equações 4.10, 4.13 e 4.16 fornecem o cálculo dos coeficientes da série de Fourier da função que representa o movimento periódico do sistema em uma determinada folga e frequência. Nota-se, porém, que as expressões ainda têm, explicitamente, a informação de fase, presente nas funções  $\cos \omega \tau_i$  e  $\sin \omega \tau_i$ .

Deve-se reparar, todavia, que, uma vez fixados os parâmetros do sistema e a folga, as equações 3.19 e 3.20 fornecem a velocidade e a fase necessárias para que o movimento ocorra, de forma que, após esta determinação, todas as informações necessárias para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier ficam disponíveis.

O algoritmo de computação dos coeficientes da série de Fourier pode ser assim resumido:

- a) Fixam-se os parâmetros do sistema e da excitação: no caso,  $\omega$  e  $\xi$ .
- b) Computam-se as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$ .
- c) Computa-se a matriz  $\mathbf{P} = -(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}}$
- d) Determinam-se as informações de velocidade e fase pelas equações 3.20):  
 $v_i$ ,  $\cos \omega \tau_i$  e  $\sin \omega \tau_i$
- e) Determina-se  $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix}$ ,  $\cos k \omega \tau_i$  e  $\sin k \omega \tau_i$
- f) Determinam-se os coeficientes  $\mathbf{a}_k$  e  $\mathbf{a}_k$  através das equações 4.13) e 4.16);

Tomemos, por exemplo, o caso em que  $\omega = 1$ ,  $\xi = 0.05$ , e  $\varepsilon = 0.24$ . Este é o exemplo explorado na figura 3.6. De acordo com a equação 3.25, tem-se para o caso:

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} +2.4000000000000000e-001 \\ -7.832994343137028e-001 \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.999995831053260e-001 \\ +9.131205693597398e-004 \end{bmatrix}$$

A figura 4.1 apresenta a comparação da solução simulada com a resposta exata em

cada intervalo (com a solução do balanço harmônico). Nesta comparação a série foi truncada com 20 harmônicas só existem as de ordem ímpar).

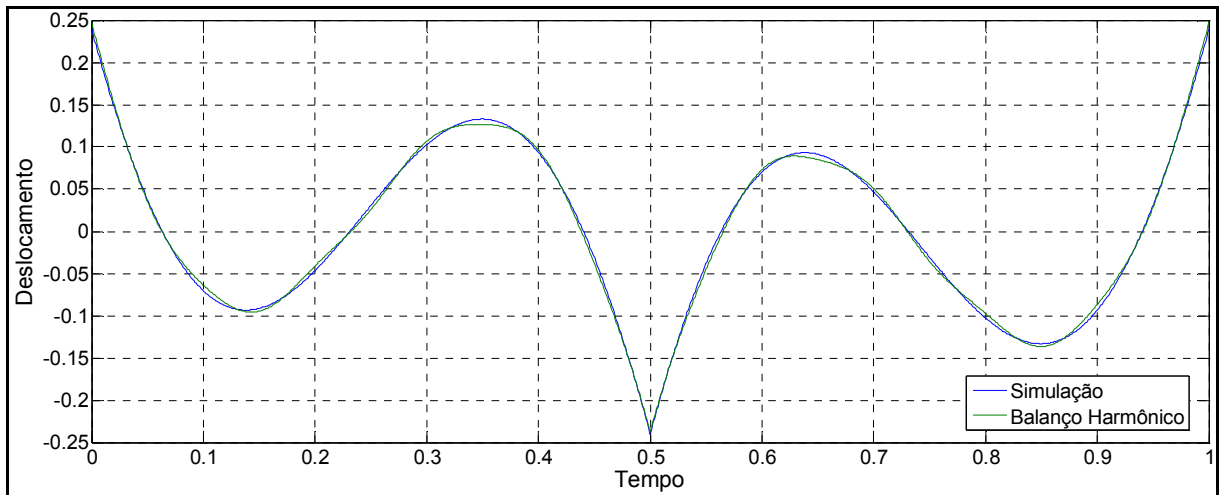


Figura 4.1: Comparação entre balanço harmônico e simulação direta.

$$\omega = 1.0 \quad \varepsilon = 0.24 \quad \xi = 0.05 \quad x_0 = \varepsilon \quad v_0 = -0.783299$$

## 5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

O trabalho apresenta a análise de um sistema com vibro-impacto e explora algumas particularidades do sistema para auxiliar a interpretação da solução da equação de movimento.

Inicialmente mostra-se que o movimento pode apresentar topologias diversas, a depender, principalmente, da frequência da excitação e da folga que limita o movimento do corpo. Mostra-se a existência de movimentos com períodos de ordem diversa da excitação, podendo inclusive existir períodos de ordem elevada. Neste trabalho, mostrou-se a possibilidade de movimento com períodos de até, sexta ordem, isto é, a frequência fundamental do movimento é  $1/6$  da frequência de excitação.

Uma técnica de mapeamento entre os estados na colisão foi aplicada para analisar a possibilidade de existência de movimentos de determinado padrão. Por ser o padrão comumente esperado em sistemas lineares, o movimento com período de ordem 1 e simétrico foi o candidato para o estudo. A técnica de mapeamento empregada permitiu descartar uma das características que, em tese, o movimento poderia também apresentar.

Salienta-se que o mapeamento empregado foi quase completamente desenvolvido neste trabalho, e abre possibilidade de mapeamento rápido de padrões de resposta e das regiões, no conjunto de parâmetros, onde o movimento é possível. No caso do padrão selecionado, mostrou-se que ele é possível em toda a faixa de frequência e folga onde impactos são podem ocorrer. Este também é um resultado não comentado na literatura consultada.

Na esteira da análise do movimento periódico de ordem 1, comprovou-se a não unicidade da resposta permanente do sistema que, a despeito da existência do amortecimento, passa a depender das condições iniciais do movimento. Mostrou-se, todavia, que é sempre possível estabelecer uma condição inicial que leve ao movimento com período de ordem 1.



O mapeamento completo dos padrões de movimento associados a uma ampla faixa de condições iniciais foi deixada para um trabalho futuro. O mesmo acontece com padrões interessantes de movimentos com período de ordem 2 e 3, comuns em sistemas mecânicos não lineares, mas não mapeados neste trabalho.

A derivação do método do balanço harmônico diretamente no espaço estado traz consequências interessantes, além de permitir a análise isolada da contribuição de cada conjunto de termos, inclusive das condições de fase. Este também é um ponto a ser explorado em trabalhos futuros. Embora a forma do equacionamento permita o cálculo direto dos coeficientes tanto para o deslocamento quanto para a velocidade, permitindo maior eficiência e exatidão, algo indica que as equações (4.13) e (4.16) ainda podem ser exploradas para conclusões mais profundas sobre o comportamento do sistema antes mesmo da simulação de sua resposta.

Ressalta-se que o algoritmo apresentado no capítulo 4 para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier resulta, no fundo, na solução da equação de movimento em forma de série. Embora isto não tenha sido explorado, é claro que a série, tal como computada, implica numa série que converge para a solução exata da equação de movimento quando o padrão é estabelecido. Deve-se reparar que isto é diferente do balanço harmônico incremental, no qual a exatidão dos coeficientes é ajustada para a convergência da solução. Aqui o cálculo dos coeficientes é sempre exato e apenas o número de termos da série é ajustado. Isto é muito mais eficiente. Esta via, até onde se pôde observar, foi pouco explorada na literatura.

Ainda como indicação de trabalhos futuros, aponta-se a análise de um sistema com dois graus de liberdade e impactos em uma das coordenadas. Outro problema interessante é a análise do sistema quando a folga for assimétrica.

## REFERÊNCIAS

BRACH, R.M. **Mechanical impact dynamics: Rigid Body Collisions** ed. John Wiley & Sons, New York, Interscience Publication -1991 c.3 p.48.

BRÎNDEU, L. Stability of the periodic motions of the vibro-impact systems. **Chaos, Solitons and Fractals** - Politechnica University of Timisoara, Romania. 2000. 2493-2503

ENCICLOPÉDIA LIVRE, Wikipedia. **Método de Runge–Kutta**. Categoria: Equações diferenciais numéricas. Disponível em:

<[http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_Runge-Kutta](http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta)>, modificada pela última vez às 09h46min de 6 de setembro de 2009 - Acesso em 21 de Setembro 2009.

HARTOG, Den. Mechanical Vibrations. **Mineola**. New York: Dover, 1985. 436 p. ISBN 0486647854.

LEGRAND, M.; ROQUES, S.; PIERRE, C.; PESEUX, B.; CARTRAUD, P. n-dimensional Harmonic Balance Method Extended to Non-Explicit Nonlinearities. **Revue Européenne de Mécanique Numérique** 15, 1-2-3. 2006. p.269-280.

LEWANDOWSKI, R. Non-linear, steady-state vibration of structures by harmonic balance/finite element method. In: \_\_\_\_\_ **WORLD CONGRESS OF COMPUTATIONAL MECHANICS**, 2ND, Universitaet Stuttgart, Germany, Aug. 27-31, 1990, Selected Papers. A92-54242 23-39, *Computers & Structures* (ISSN 0045-7949), vol. 44, no. 1-2, July 3, 1992, p. 287-296. Research supported by Polish Academy of Sciences. Elsevier Science, Oxford, ROYAUME-UNI, 1992.

LIANG, W.; XU, W.; LI, Y. Dynamical behaviour of a Controlled Vibro-impact System. **Chinese Physics Society**. 2008. p.17-07 e p. 2246-2250.

LUO, G.; ZHANG, J.; ZHANG, Y.; XIE, J. Periodic-impact Motions and Bifurcations of Vibro-impact Systems Near 1:4 Strong Resonance Point. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**. 2008. p. 1002–1014.

MACNDONALD, N. Choice in the harmonic balance technique. **Journal Phys. A: math.Gen** 26 .1993. p. 6367-6377. Printed in the UK . Copyright ©1993 IOP Publishing Ltd

MANEVITCH, L. I.; GENDELMAN, O. V. Oscillatory models of Vibro-impact Type for Essentially Non-linear Systems. **Journal Mechanical Engineering Science**. 222 Part C. 2007 p. 2007-2043. ISSN 4062 2041-2983.

MOOK, D.; NAYFEH, A. **Nonlinear Oscillations**. ed. John Wiley & Sons Wiley New York: Interscience; 1976. p.571

NARABAYASHI, T.; SHIBAIKE, K.; ISHIZAKA A.; Ozaki K. Effects of Key Parameters on Energy Distribution and Kinetic Characteristics in Collision of Bar and Beam. **Journal of Sound and Vibration** 308. 2007. p. 548–562.

NAYFEH, Ali. **Perturbation Methods**. New York: Wiley Interscience. 1973. p.425

OGATA, Katsuhiko-1 – Engenharia de Controle Moderno, In:\_\_\_\_\_. **Análise de Resposta em Frequência**. Trad. Paulo Álvaro Maya; revisão técnica Fabrício Leonardi...[et al.]- 4 ed. – São Paulo 2003 – cap.8 p.401

OTSUKA, T.; OKADA, T; IKENO, T.; SHIOMI, K.; OKUMA, M. Force Identification of an Outboard Engine by Experimental Means of Linear Structural Modeling and Equivalent Force Transformation. **Journal of Sound and Vibration**. 308. 2007. p. 541–547.

PAOLI, L. Time discretization of vibro-impact. JStor.**The Royal. Society**. Lond. A 2001 359, p. 2405-2428.

PENG, Z.K.; LANG, Z.Q; BILLINGS, S.A.; TOMLINSON, G.R. Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. **Journal of Sound and Vibration**. 311. 2008. p.56–73.

PINTO,P. F. **Introdução às Telecomunicações**. Disponível em:  
<[http://tele1.dee.fct.unl.pt/it\\_2003\\_2004/folhas/apresentacao.pdf](http://tele1.dee.fct.unl.pt/it_2003_2004/folhas/apresentacao.pdf) > Acesso em: 13 out. 2008.

RAGULSKIENE, V. **Vibro-shock system**. Vilnius: Mintis, 1974, p. 320 -in Russian.

SODRÉ, U. **Notas de Aulas - 6 de Maio de 2003**. Disponível em:  
<<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica>> Acesso em: 13 out. 2008-Copyright  
©2002.

SOKOLOV, I.; BABITSKY, V.I.; HALLIWELL, N.A. Autoresonant Vibro-Impact System with Electromagnetic Excitation. **Journal of Sound and Vibration**. 308. 2007. p. 375–391. ISSN 0022-460X

SOSNOVSKIY, L.; SHERBAKOV, S.S. Vibro-impact in Rolling Contact. **Journal of Sound and Vibration**. 308. 2007. p. 489–503.

SMITH, M.C.; MACIEJOWSKI, J.M - Engineering Tripos Part IIB - **Nonlinear and Predictive Control: Handout 3: Describing Functions - Harmonic balance**. (2008) Disponível em: < <http://www-control.eng.cam.ac.uk/jmm/4f3/handout3.pdf> > Acesso em: 20 out. 2008.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. Perseus Books, Cambridge, 1994. ISBN 0-201-54344-3

TECHNOLOGY, AGILENT. **ADS Circuit Simulation Manual, Harmonic Balance: The Simulation Process**. August 2005, Chap. 7. Disponível em:  
<[http://www.ece.uprm.edu/~rafaelr/inel5325/ADS\\_Harmonic\\_Balance\\_w03.pdf](http://www.ece.uprm.edu/~rafaelr/inel5325/ADS_Harmonic_Balance_w03.pdf) >  
Acesso em: 13 out. 2008

TIPLER, A.; MOSCA, G. Physics For Scientist and Engineers. In:\_\_\_\_\_. **Collision**. W. H. Freeman & Company, Electronic version developed using WiZeUp®. 5.ed. Copyright ©1999, c.8-6 , p. 226-233.

WEAVER, W.; TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D. H. **Vibration Problems in Engineering**. New York: Wiley Interscience; 1974. p. 521 ISBN 0471632287.

WOO, K.; RODGER, A. A.; NEILSON, R. D.; WIERCIGROCH, M. **Phase Shift Adjustment for Harmonic Balance Method Applied**. Meccanica. Ed. Springer, v. 41: 269–282, 2006.

## ANEXO I

### Algoritmo de Simulação da Resposta Temporal do Sistema

```

% ***** Definição de parâmetros do sistema *****

epsilon = 0.24;
e = 1;
xi = 0.05;
w = 1;

% *****

T = 2*pi/w;
lambda_1 = -xi - sqrt(-1)*sqrt(1 - xi^2);
lambda_2 = -xi + sqrt(-1)*sqrt(1 - xi^2);
s_phi = 2*xi*w/sqrt((1 - w^2)^2 + (2*xi*w)^2);
c_phi = (1-w^2)/sqrt((1 - w^2)^2 + (2*xi*w)^2);
H = w^2/sqrt((1 - w^2)^2 + (2*xi*w)^2);

A_s = H*s_phi;
A_c = H*c_phi;

N = 10000;
i = 1;
Matriz_Impactos = zeros(N+1,3);

% ***** Definição das condições iniciais do movimento *****

t_0 = E(1);
x_0 = E(2);
v_0 = E(3);

% *****

while (i <= N+1),
    Matriz_Impactos(i,1) = t_0;
    Matriz_Impactos(i,2) = x_0;
    Matriz_Impactos(i,3) = v_0;
    s_0 = sin(w*t_0);
    c_0 = cos(w*t_0);
    dt = T/1000;
    if (abs(v_0) < 5e-2),
        dt = dt/10;
    end;

    t = t_0 + dt/10;

    a_1 = ( lambda_2*(x_0 - H*c_phi*c_0 - H*s_phi*s_0) - (v_0 + H*w*c_phi*s_0 -
        H*w*s_phi*c_0) )/(lambda_2 - lambda_1);

```

```

a_2 = ( -lambda_1*(x_0 - H*c_phi*c_0 - H*s_phi*s_0) + (v_0 + H*w*c_phi*s_0 -
      H*w*s_phi*c_0) )/(lambda_2 - lambda_1);

x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t-t_0)) );
x_p = H*c_phi*cos(w*t) + H*s_phi*sin(w*t);
x = x_h + x_p;

while ( (abs(x) < epsilon) && (t-t_0) <= 10*T ),
    t = t + dt;
    x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t-t_0)) );
    x_p = H*c_phi*cos(w*t) + H*s_phi*sin(w*t);
    x = x_h + x_p;
end;

if ( (t-t_0) > 10*T ),
    flag = 1;
else
    flag = 0;
end;

t_a = t - dt;
x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t_a-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t_a-t_0)) );
x_p = H*c_phi*cos(w*t_a) + H*s_phi*sin(w*t_a);
x_a = x_h + x_p;

t_b = t + dt;
x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t_b-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t_b-t_0)) );
x_p = H*c_phi*cos(w*t_b) + H*s_phi*sin(w*t_b);
x_b = x_h + x_p;

t_m = (t_a + t_b)/2;
x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t_m-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t_m-t_0)) );
x_p = H*c_phi*cos(w*t_m) + H*s_phi*sin(w*t_m);
x_m = x_h + x_p;

while ( (t_m ~= t_a) && (t_m ~= t_b) && (abs(x_m) ~= epsilon) ),
    if ( sign( abs(x_m) - epsilon) == sign( abs(x_a) - epsilon) ),
        t_a = t_m;
    else
        if ( sign( abs(x_m) - epsilon) == sign( abs(x_b) - epsilon) ),
            t_b = t_m;
        end;
    end;
end;

t_m = (t_a + t_b)/2;

x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t_a-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t_a-t_0)) );
x_p = H*c_phi*cos(w*t_a) + H*s_phi*sin(w*t_a);
x_a = x_h + x_p;

```

```

x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t_b-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t_b-t_0)) );
x_p = H*c_phi*cos(w*t_b) + H*s_phi*sin(w*t_b);
x_b = x_h + x_p;

x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t_m-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t_m-t_0)) );
x_p = H*c_phi*cos(w*t_m) + H*s_phi*sin(w*t_m);
x_m = x_h + x_p;
end;

x_0 = round(x_m/abs(x_m))*epsilon;
v_anterior = real( a_1*lambda_1*exp(lambda_1*(t_m-t_0)) +
                  a_2*lambda_2*exp(lambda_2*(t_m-t_0)) ) - H*w*c_phi*sin(w*t_m) +
                  H*w*s_phi*cos(w*t_m);
v_0 = -e*v_anterior;
t_0 = t_m;
i = i + 1;
end;

NC = input('impactos: '); % Determina quantas colisões serão plotadas
k = N-NC+1;
dt = min([T/1024 (Matriz_Impactos(N-1,1)-Matriz_Impactos(N-2,1))/512]);
t = [Matriz_Impactos(k,1):dt:Matriz_Impactos(N,1)]';
t = zeros(length(t)+NC+1,1);
x = zeros(length(t),1);
j = 1;
t(j) = Matriz_Impactos(k,1);

while( t(j) <= Matriz_Impactos(N,1) ),
    t_0 = Matriz_Impactos(k,1);
    x_0 = Matriz_Impactos(k,2);
    v_0 = Matriz_Impactos(k,3);
    s_0 = sin(w*t_0);
    c_0 = cos(w*t_0);
    a_1 = ( lambda_2*(x_0 - H*c_phi*c_0 - H*s_phi*s_0) - (v_0 + H*w*c_phi*s_0 -
        H*w*s_phi*c_0) )/(lambda_2 - lambda_1);
    a_2 = ( -lambda_1*(x_0 - H*c_phi*c_0 - H*s_phi*s_0) + (v_0 + H*w*c_phi*s_0 -
        H*w*s_phi*c_0) )/(lambda_2 - lambda_1);

    while ( t(j) < Matriz_Impactos(N,1) && t(j) < Matriz_Impactos(k+1,1) ),
        x_h = real( a_1*exp(lambda_1*(t(j)-t_0)) + a_2*exp(lambda_2*(t(j)-t_0)));
        x_p = H*c_phi*cos(w*t(j)) + H*s_phi*sin(w*t(j));
        x(j) = x_h + x_p;
        j = j + 1; t(j) = t(j-1) + dt;
    end;
    k = k + 1;
end;

[p1 p2] = min(t(2:length(t)));
t = t(1:p2-1);
x = x(1:p2-1);
t = ( t - t(1) )/T;
plot(t,x); xlabel('Tempo'); ylabel('Deslocamento'); grid

```