

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

José André Lourenço

QUANTIZAÇÃO DO MODELO DE  
JACKIW–TEITELBOIM  
NO *GAUGE* TEMPORAL  
VIA O FORMALISMO DE LAÇOS

VÍTORIA  
2009

JOSÉ ANDRÉ LOURENÇO

QUANTIZAÇÃO DO MODELO DE JACKIW-TEITELBOIM  
NO *Gauge* TEMPORAL  
VIA O FORMALISMO DE LAÇOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Olivier Piguet

Co-orientador: Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis

VITÓRIA  
2009

*Dedico esta tese a todos, os meus irmãos brasileiros que indiretamente, tornaram esta obra possível.*

# Agradecimentos

A Deus, fundamento último de toda existência, pela alegria de viver e poder estudar alguns aspectos da criação.

Ao meu orientador, Prof. Olivier Piguet, pelo seu cuidado e zelo em me ensinar muitos aspectos de física teórica, incluindo física matemática, teoria quântica de campos, mecânica quântica e muitos tópicos de relatividade geral. Ainda, por me motivar a trabalhar em *loop quantum gravity*. Obrigado por sua honestidade, respeito e companheirismo.

Ao meu co-orientador Prof. Clisthenis P. Constatinidis, que sempre me deu boas sugestões de leitura e estudo, me mostrando as direções mais promissoras para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Galen M. Sotkov, pelas inúmeras discussões acerca de assuntos relacionados à minha tese. Seus questionamentos várias vezes me fizeram repensar sobre o significado de uma teoria quântica da gravitação.

Ao Prof. Daniel H. T. Franco, meu amigo, companheiro. Obrigado, por me ajudar a dar os primeiros passos em teoria quântica de campos axiomática.

À minha esposa Daylamara, minha adjuntora fiel e sem dúvida a principal incentivadora ao longo destes quatro anos de doutoramento.

À minha família, pela educação inicial desde a minha meninice.

Aos meus grandes amigos e colegas, um sincero agradecimento, por tudo, pelas discussões e críticas, e por criarem um ambiente acadêmico bastante agradável, no qual pude desenvolver minha pesquisa. Em particular gostaria de citar: Gabriel Luchini, Luiz Ivan Morales, Alex Rios, Raphael Fracalossi, Luiz Henrique Renoldi, Ulysses Camara da Silva, Adriano Mesquita, Juliano Pereira Campos, Deborah Faragó, Manuel Eleutério e Stéphane Houndjo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo financiamento que tornou possível a realização deste trabalho.

À Fundação de Apoio à Ciência e Tecnologia do Espírito Santo - FAPES e o CNPq pelos auxílios fornecidos através de um projeto PRONEX.

“O conhecimento de todas as ciências não passa de fumaça quando separado da ciência celestial.”

*João Calvino (1509 – 1564).*

# Resumo

Neste trabalho estudamos o modelo de Jackiw-Teitelboim (modelo JT), como um modelo que tem a estrutura de uma teoria topológica do tipo BF. Em duas dimensões de espaço-tempo, a gravitação pode ser vista como uma teoria de *gauge* caracterizada pelo grupo de Poincaré  $ISO(1, 1)$ . Como este grupo não admite uma forma quadrática invariante e não degenerada, o modelo JT trabalha com o grupo (Anti)-de Sitter “(A)dS”, o grupo  $SO(2, 1)$ , que contém o grupo de Lorentz como subgrupo e corresponde a uma teoria de gravitação com constante cosmológica. Vemos então, que o grupo (A)dS, tomado como um grupo de *gauge*, contém naturalmente a simetria de difeomorfismo. Nesta linha investigamos a formulação canônica do modelo JT afim de quantizá-lo via o formalismo da gravidade quântica de laços (LQG). Seguindo o programa de quantização canônica de Dirac aplicado ao formalismo de laços, obtemos um espaço de configuração quântico a partir da compatificação de Bohr da linha real, construímos o respectivo espaço de Hilbert cinemático e definimos de forma consistente o operador de volume. Finalmente, tratamos da dinâmica do modelo a nível quântico via a implementação dos vínculos oriundos da teoria clássica do modelo JT no *gauge* temporal em um espaço de Hilbert adequado.

# Abstract

In this work we study the Jackiw-Teitelboim model (JT model), as a model that has the structure of a topological theory of the BF type. In two dimensional space-time, gravitation can be seen as a gauge theory characterized by the Poincaré group  $ISO(1,1)$ . As this group, doesn't admit an invariant and nondegenerate quadratic form, the JT model is based on the (Anti)- de Sitter group "(A)dS", the group  $SO(2,1)$ , which contains the Lorentz group as a subgroup and corresponds to a gravitation theory with a cosmological constant. We see then, that the (A)dS group, taken as a gauge group, contains naturally the diffeomorphism symmetry. In this line we investigate the canonical formulation of the JT model in order to quantize it through the formalism of loop quantum gravity (LQG). Following Dirac's program of canonical quantization applied to the loop formalism, we obtain a quantum configuration space starting from the Bohr compactification of the real line, we build the respective kinematic Hilbert space and we define in a consistent way the volume operator. Finally, we treat the dynamics of the model at the quantum level through the implementation of the constraints originating from the classical theory of the JT model in the temporal gauge in an appropriate Hilbert space.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Introdução à gravidade quântica</b>	<b>13</b>
2.1	Gravidade Quântica: Motivação . . . . .	13
2.2	O Propósito da Gravidade Quântica de Laços ( <i>Loop Quantum Gravity - LQG</i> ) . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Fundamento Clássico</b>	<b>18</b>
3.1	Formalismo Lagrangiano . . . . .	18
3.2	Formalismo Hamiltoniano . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Aspectos Estruturais da Gravidade Quântica de Laços - LQG</b>	<b>28</b>
4.1	Espaço de Configuração Quântico . . . . .	28
4.2	Funções Cilíndricas sobre o Espaço de Configuração Quântico . . . . .	32
4.3	O Espaço de Hilbert Cinemático . . . . .	34
4.4	Decomposição em Redes de Spin do Espaço de Hilbert Cinemático . . . . .	37
4.5	Geometria Quântica . . . . .	44
4.6	Implementação dos Vínculos Quânticos: Um breve comentário . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Gravitação em duas dimensões</b>	<b>49</b>
5.1	Teoria de <i>Gauge</i> da Gravitação . . . . .	49
5.2	O Modelo de Jackiw-Teitelboim . . . . .	50
5.3	O Modelo BF . . . . .	51
5.3.1	O Grupo de <i>Gauge</i> . . . . .	51
5.3.2	A Ação do Modelo BF . . . . .	53
5.4	Formulação Canônica . . . . .	58
5.4.1	Momentos Canonicamente Conjugados . . . . .	59
5.4.2	Vínculos Secundários . . . . .	61
5.4.3	Álgebra dos Vínculos . . . . .	63
5.5	Resultados em Termos das Componentes . . . . .	65
5.5.1	Equações de Movimento . . . . .	65
5.5.2	A Hamiltoniana e a Álgebra dos Vínculos . . . . .	66
5.5.3	Transformações Gerais de Coordenadas – Difeomorfismos . . . . .	68

5.6	Fixação Parcial do <i>Gauge</i> : <i>Gauge</i> Temporal . . . . .	70
5.6.1	<i>Gauge</i> Canônico . . . . .	70
5.6.2	<i>Gauge</i> Temporal . . . . .	71
5.6.3	A Álgebra de Vínculos . . . . .	73
5.6.4	Redefinição dos Vínculos . . . . .	74
5.6.5	Tratamento dos Vínculos de Segunda Classe . . . . .	76
5.6.6	Colchetes de Dirac . . . . .	77
5.6.7	Simetria de <i>Gauge</i> e Difeomorfismos . . . . .	78
5.6.8	Hamiltoniano Final . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Preliminares para a Quantização em duas dimensões</b>	<b>82</b>
6.1	Representação de Polímeros . . . . .	83
6.1.1	A formulação do espaço dos Momentos . . . . .	83
6.1.2	Do espaço dos momentos ao espaço de configuração: uma digressão . . . . .	85
6.2	O espaço de configuração . . . . .	87
6.2.1	O espaço de configuração quântico visto como um grupo compacto . . . . .	87
6.2.2	Representação de polímeros no espaço de configuração . . . . .	89
6.3	Aspectos Projetivos . . . . .	91
6.3.1	O espaço de configuração quântico visto como um limite projetivo . . . . .	91
6.3.2	Funções Cilíndricas e alguns aspectos teóricos da medida . . . . .	93
6.4	$\overline{\mathbb{R}}$ visto como o espectro da $C^*$ -álgebra das funções <i>almost</i> -periódica em $\mathbb{R}$ . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Quantização do Modelo JT</b>	<b>99</b>
7.1	Espaço de Configuração Quântico . . . . .	100
7.1.1	Notação de Dirac e Operadores . . . . .	105
7.2	O Operador de Volume . . . . .	107
7.2.1	Definição do Operador de Volume . . . . .	107
7.2.2	Consistência cilíndrica . . . . .	109
7.2.3	Interpretação geométrica dos estados de <i>Spin-scalar-network</i> em relação ao operador de volume . . . . .	110
7.3	Implementação dos vínculos ao nível quântico . . . . .	110
7.3.1	Preparação para a implementação do vínculo de Difeomorfismo quântico . . . . .	111
7.3.2	Dinâmica Quântica . . . . .	113
7.3.3	Regularização dos vínculos $\mathcal{G}_0$ e $\mathcal{G}_1$ . . . . .	114
7.3.4	Quantização de $\mathcal{G}_0$ e $\mathcal{G}_1$ . . . . .	118
7.3.5	Removendo o regulador . . . . .	119
7.3.6	Álgebra dos vínculos quânticos . . . . .	120
7.3.7	Ambiguidades . . . . .	123

<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>124</b>
<b>A</b>	<b>Variedades</b>	<b>127</b>
A.1	Espaço Topológico . . . . .	127
A.2	Variedades Diferenciáveis . . . . .	128
A.3	Vetores . . . . .	128
A.4	Vetores Duais (Um-Formas) . . . . .	129
A.5	Formas Diferenciais . . . . .	130
A.6	Derivada Exterior . . . . .	130
A.7	Bases Não-Coordenadas: Formalismo de Primeira Ordem . . . . .	131
<b>B</b>	<b>Grupo e Álgebra de Lie</b>	<b>137</b>
B.1	Álgebras de Lie . . . . .	137
	B.1.1 Matrizes da Representação Adjunta . . . . .	139
B.2	Forma de Killing . . . . .	140
B.3	Grupo de Sitter e anti-de Sitter ( <b>A</b> )dS . . . . .	141
<b>C</b>	<b>Formalismo de Dirac para Campos Vínculados</b>	<b>142</b>
C.1	Princípio da Ação . . . . .	143
C.2	Colchetes de Poisson . . . . .	145
C.3	Condições de Consistência . . . . .	147
	C.3.1 Vínculos de Primeira e Segunda Classe . . . . .	149
	C.3.2 Vínculos de Primeira Classe como Geradores das Transformações de Calibre	150
	C.3.3 Vínculos de Segunda Classe. Colchetes de Dirac . . . . .	151
<b>D</b>	<b>Análise detalhada da ação do operadores regularizados <math>\widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N)</math> e <math>\widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1)</math> sobre os estados <math> \Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle</math></b>	<b>154</b>
	<b>Referências</b>	<b>159</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo deste trabalho é mostrar a possibilidade da quantização da gravitação em duas dimensões utilizando as técnicas da Gravidade Quântica de Laços (Loop Quantum Gravity - LQG) [12, 13, 23, 87, 88].

Do ponto de vista da teoria da Relatividade Geral (RG), a gravitação em duas dimensões é problemática, visto que, a ação de Einstein-Hilbert se reduz a um termo topológico (a característica de Euler-Poincaré). A esta ação pode-se acrescentar um termo cosmológico envolvendo a constante cosmológica. A única dependência métrica das integrais de caminho da gravitação é dada através do termo cosmológico. Portanto, é preciso que consideremos extensões não-triviais da RG. Um exemplo interessante é o modelo de Jackiw-Teitelboim [80, 89–94], o qual será o principal objeto de estudo neste trabalho. Pois será neste modelo que vamos aplicar as técnicas da LQG, afim de quantizá-lo. Em particular, fizemos a escolha de trabalharmos em duas dimensões espaço-temporais, por se tratar, na verdade, de um *toy model*, onde a maioria dos problemas presentes na teoria física em quatro dimensões espaço-temporais, desaparecem ou são substituídos por outros, as vezes mais fáceis de se resolver. Assim sendo, este trabalho é fruto do esforço de se aplicar as técnicas da LQG, usualmente bem conhecidas e aplicadas com eficiência em  $3 + 1$  e  $2 + 1$  dimensões, no modelo bidimensional de Jackiw-Teitelboim.

No capítulo 2, fazemos uma breve exposição da motivação de se estudar gravidade quântica e as implicações desta. Também de forma breve discutimos o propósito da gravidade quântica de laços (LQG), que se apresenta como uma teoria quântica de campos independente do fundo (*background independent*).

No Capítulo 3 fazemos uma breve revisão dos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano. Este capítulo trata das formulações que emprestam à gravitação o papel de teoria de *gauge*, o que no caso métrico não é óbvio. Este capítulo na verdade nos prepara classicamente para a quantização da teoria em  $(3 + 1)$  dimensões.

O Capítulo 4 trata de forma precisa e criteriosa, porém, resumida, dos aspectos estruturais da LQG. Cremos que este capítulo é de vital importância, pois o leitor interessado, através dele, pode obter informações precisas sobre vários aspectos importantes da LQG, por exemplo, a construção do espaço de configuração quântico, a construção do espaço de Hilbert cinemático, os operadores geométricos, etc. É imprescindível que o leitor estude (ou leia criteriosamente) este capítulo antes de se aventurar nos capítulos 6 e 7.

No Capítulo 5 o modelo de Jackiw-Teitelboim (modelo JT) é apresentado como um modelo que tem a estrutura de uma teoria topológica do tipo BF. Em duas dimensões a gravitação pode ser vista como uma teoria de *gauge* caracterizada pelo grupo de Lorentz  $SO(1, 1)$ . Contudo, temos um pequeno problema, neste grupo não temos formas quadráticas invariantes e não degeneradas [95]. Uma solução deste problema é introduzir o grupo (Anti)-de Sitter “(A)dS”, para definir uma ação cuja métrica de Killing é não degenerada. Veremos que o grupo (A)dS, tomado como um grupo de *gauge*, contém naturalmente a simetria de difeomorfismo. Nesta linha investigaremos a formulação canônica do modelo JT como apresentada em [103–105] como uma preparação para a quantização do modelo via o formalismo de laços da LQG.

No Capítulo 6 apresentamos uma revisão resumida, porém, objetiva da representação de polímeros, da compactificação de Bohr e sua estrutura, da caracterização do espaço de configuração quântico nesta estrutura, etc. Muitos aspectos matemáticos são apresentados e discutidos. A importância deste capítulo reside no fato de que ele nos fornece uma base sólida para construirmos um espaço de configuração quântico para o modelo JT, seguindo de perto a representação de polímeros para campos escalares [63, 64].

Por fim, no Capítulo 7, tratamos da quantização do modelo JT. Neste capítulo, obtemos um espaço de configuração quântico a partir da compactificação de Bohr da linha real, construimos o respectivo espaço de Hilbert cinemático, definimos de forma consistente o operador de volume. Finalmente, tratamos da dinâmica do modelo ao nível quântico via a implementação dos vínculos oriundos da teoria clássica do modelo JT no *gauge* temporal em um espaço de Hilbert adequado. É bom destacarmos, que a implementação dos vínculos ao nível quântico é

um trabalho difícil e ainda inacabado em  $3 + 1$ -dimensões [12]. Em nosso caso, não é diferente.

## Capítulo 2

# Introdução à gravidade quântica

### 2.1 Gravidade Quântica: Motivação

A visão atual em Física é a de que existe quatro interações fundamentais: a interação forte, a interação fraca, a interação eletromagnética e a interação gravitacional. A descrição quântica destas três primeiras interações é bem conhecida no famoso Modelo Padrão da física de partículas. As interações são transmitidas através da troca de partículas intermediadoras. Porém, a última interação, a interação gravitacional, é descrita pela teoria de Einstein da relatividade geral, que é uma teoria clássica que descreve o campo gravitacional como um campo tensorial métrico suave sobre uma variedade, isto é, a geometria do espaço-tempo quadridimensional. Nesta descrição da interação gravitacional não temos  $\hbar$ , e conseqüentemente, não há uma estrutura quântica do espaço-tempo. Assim, há uma inconsistência fundamental em nossa descrição atual do mundo físico. Se aceitarmos a suposição de que nosso mundo é quantizado amplamente em um nível fundamental, todas as interações deveriam ser descritas fundamentalmente a partir dos conceitos, bem estabelecidos, da mecânica quântica. Como resultado, o campo gravitacional também deveria ter uma “estrutura de quântica”.

Ao longo do último século, a nossa compreensão da Natureza melhorou consideravelmente partindo da macroescala para a microescala, incluindo os fenômenos moleculares, atômicos, subatômicos, chegando na escala das partículas elementares. O Modelo Padrão de física das partículas concorda com todos os testes experimentais feitos em laboratório até o presente momento (veja por exemplo, [1]). Infelizmente, devido à grande quantidade de energia exigida, ne-

nhum teste experimental que envolva processos próximos a escala de Planck ( $l_{\text{Planck}} \equiv \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33}\text{cm}$  e  $t_{\text{Planck}} \equiv \sqrt{G\hbar/c^5} \sim 10^{-43}\text{s}$ ) pode ser feito. A escala de Planck aparece naturalmente em todas as tentativas de formularmos uma teoria quântica da gravitação, sendo  $l_{\text{Planck}}$  e  $t_{\text{Planck}}$  dadas em termos de combinações únicas da velocidade da luz  $c$ , a constante de Planck  $\hbar$ , e a constante gravitacional  $G$ , tendo respectivamente, as dimensões de comprimento e tempo. Argumentos dimensionais sugerem que na escala de Planck a estrutura suave do espaço-tempo seja rugosa e cheia de fraturas, dessa forma a teoria quântica de campos usual se torna inválida nesta escala, uma vez que a teoria quântica de campos depende de um espaço de fundo suave e fixo a priori. Neste sentido, acredita-se que deveríamos ir além do Modelo Padrão para explorarmos uma nova física perto da escala de Planck que poderia ser, uma teoria quântica de campos independente do espaço-tempo de fundo, e esta teoria quântica deve incluir necessariamente a gravidade. Espera-se então que uma teoria quântica da gravidade resolva pelo menos, as seguintes dificuldades fundamentais.

- Gravitação Clássica - Inconsistência com a quantização da matéria

A equação relacionando a matéria e o campo gravitacional é a famosa equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}R(g)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}(g), \quad (2.1)$$

onde o lado esquerdo da equação está relacionado com a geometria do espaço-tempo, o qual possui uma estrutura clássica, enquanto que o lado direito da equação está relacionado com o campo de matéria, descrito fundamentalmente pela mecânica quântica no modelo padrão de partículas elementares. Na teoria quântica de campos o tensor energia-momento do campo de matéria pode ser descrito em termos do operador  $\hat{T}_{\mu\nu}$ . Uma possível forma de manter a geometria clássica consistente com a quantização da matéria é trocarmos  $T_{\mu\nu}(g)$  pelo valor esperado  $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$  em relação a um dado estado quântico da matéria sobre um espaço-tempo fixo a priori. Contudo, na solução desta equação o fundo  $g_{\mu\nu}$  será modificado devido ao fato de  $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$  não se anular. Assim, devemos introduzir uma nova métrica na definição do valor esperado do vácuo. O resultado destas interações sucessivas em geral não converge [2]. Por outro lado, existem alguns argumentos que mostram que o tratamento semiclássico pode violar o princípio de superposição em mecânica quântica [3]. Estas inconsistências nos motivam a quantizar a geometria de fundo na esperança de obtermos uma descrição consistente em termos de um operador para o lado esquerdo da equação (2.1).

- Singularidade na Relatividade Geral

A teoria de Einstein da Relatividade Geral é considerada uma das teorias mais elegantes do século 20. Muitos testes experimentais confirmaram a teoria no domínio clássico [4]. Porém, Penrose e Hawking mostraram que singularidades são inevitáveis em espaços-tempos gerais na presença de matéria satisfazendo determinadas condições (um bom resumo pode ser encontrado em [5,6]). Desse modo, a relatividade geral fratura certas regiões do espaço-tempo de um modo geral. Naturalmente, esperamos que em domínios de campo gravitacionais fortes, próximos às singularidades, a teoria clássica da gravidade possa ser substituída por uma teoria quântica da gravidade, ainda desconhecida.

- Infinitos em Teoria Quântica de Campos

É bem conhecido que há problemas de infinitudes em teoria quântica de campos no espaço-tempo de Minkowski [7–9]. No espaço-tempo curvo, o problema de divergências ultravioletas é um pouco mais complicado, os processos de renormalização no espaço-tempo curvo são ambíguos. Embora muitos progressos tenham sido feitos nos esquemas de renormalização aplicados à teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo [10,11], uma teoria fundamentalmente satisfatória ainda está longe de ser obtida. Assim, esperamos que alguma teoria quântica da gravitação na escala de Planck (escala fundamental) possa fornecer um regulador natural que cure as infinitudes que aparecem na teoria quântica de campos usual. A situação da teoria quântica de campos sobre um espaço-tempo fixo a priori, pode ser vista como a mecânica quântica para partículas em um campo eletromagnético antes do estabelecimento da eletrodinâmica quântica, onde a partícula (o ator) é quantizada, mas o campo eletromagnético de fundo é clássico (o palco). A história nos sugere que tal situação semiclássica seja apenas uma aproximação de uma teoria mais fundamental.

## 2.2 O Propósito da Gravidade Quântica de Laços (*Loop Quantum Gravity - LQG*)

A pesquisa em gravidade quântica é muito ativa. Muitos programas de quantização para gravidade estão sendo levados a cabo (para um resumo veja, por exemplo, [12]). Entre as diferentes abordagens, a ideia da gravidade quântica encontra suas raízes em pesquisas feitas pela co-

munidade de relatividade geral. Como consequência, ao seguirmos de perto as motivações da relatividade geral, temos o nascedouro de uma teoria quântica independente de fundo. A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria de campo independente do fundo, *par excellence*. Grosseiramente falando, a gravidade quântica de laços é uma tentativa de se construir uma teoria quântica da gravidade quadridimensional, matematicamente rigorosa, não-perturbativa e independente do fundo. O projeto da gravidade quântica de laços herda a ideia básica de Einstein de que a gravidade é fundamentalmente uma teoria da geometria do espaço-tempo. Neste ponto acreditamos que a teoria quântica da gravidade é uma teoria quântica da geometria do espaço-tempo com a invariância de difeomorfismo (para uma discussão sobre o assunto ver, [12,13]). No processo de quantização, primeiramente lançamos mão da relatividade geral no formalismo Hamiltoniano como uma teoria de campos de *gauge* de Yang-Mills invariante de difeomorfismo com um grupo (interno) de *gauge* compacto. Dessa forma, a construção da gravidade quântica de laços pode ser aplicada a todas as teorias de campos de *gauge* independentes do fundo. Portanto, é justo dizermos que a gravidade quântica de laços é uma teoria quântica de campos de *gauge* independente do fundo.

Todas as teorias de campos clássicas, diferentes do campo gravitacional, estão definidas em um espaço-tempo fixo, o qual provê um cenário adequado para a quantização perturbativa no espaço de Fock. Porém, a relatividade geral está definida somente sobre uma variedade, e portanto, ela é uma teoria de campos clássica independente do fundo, desde que a gravidade é, ela mesma, o seu fundo. Vemos então, que a gravidade é muito diferente de outros campos por construção [13,14], isto é, a gravidade não é só o palco de fundo, mas é também o ator principal. Isto conduz a muitas dificuldades no entendimento da relatividade geral e sua quantização, uma vez que não podemos seguir as mesmas estratégias utilizadas na teoria quântica de campos usual. Contudo, um resultado surpreendente na gravidade quântica de laços, é que este programa sendo independente de fundo pode nos ajudar a evitar muitas dificuldades que naturalmente surgem na teoria quântica de campos usual. Na teoria quântica de campos perturbativa no espaço-tempo curvo, a definição de algumas quantidades físicas básicas, como o valor esperado do tensor energia-momento, é ambíguo e é difícil calcular a *back-reaction* dos campos quânticos no espaço-tempo de fundo. A partir disto, podemos especular que a dificuldade está relacionada ao fato de que a formulação da teoria quântica de campos usual é dependente do fundo. Por exemplo, o estado de vácuo de um campo quântico está relacionado à estrutura do espaço-tempo que assume um papel essencial na descrição da teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo e nos esquemas de renormalização desta. Contudo, se o programa de quantização por construção

é independente do fundo e não-perturbativo, pode ser possível resolver estes problemas. Na gravidade quântica de laços não assumimos a priori uma métrica de fundo, todos os campos, o campo gravitacional e os campos de matéria são acoplados e flutuam naturalmente um com respeito ao outro sobre uma variedade comum.

Nas seções seguintes faremos uma breve revisão da construção básica da gravidade quântica de laços, a qual é completamente diferente da teoria quântica de campos usual.

# Capítulo 3

## Fundamento Clássico

### 3.1 Formalismo Lagrangiano

Na tentativa de quantizarmos canonicamente a gravidade clássica, precisamos fazer uma análise canônica (Hamiltoniana), afim de obtermos um formalismo canônico adequado para a teoria clássica em questão, que possa ser representado de modo consistente sobre um dado espaço de Hilbert. Um formalismo canônico da relatividade geral bem conhecido, é o formalismo ADM (geometrodinâmica) derivado a partir da ação de Einstein-Hilbert [6, 15], o qual apresenta inconsistências ao nível quântico. Outro formalismo famoso em relatividade geral é o formalismo de Palatini, onde a tetrada e a conexão são consideradas variáveis dinâmicas independentes. Porém, a dinâmica derivada da ação de Palatini envolve as mesmas dificuldades que aparecem no momento da quantização, como no caso de Einstein-Hilbert [16, 17]. Em 1986, Ashtekar apresentou um formalismo dinâmico da conexão para a relatividade geral no qual havia um vínculo Hamiltoniano relativamente simples, e isto acabou por abrir a porta para aplicação de técnicas de quantização inspiradas na teoria de campos de *gauge* [18–20]. Porém, uma desvantagem do formalismo apresentado por Ashtekar, é que as variáveis canônicas eram complexas, e assim, condições de realidade complicadas precisavam ser implementadas para se representar a relatividade geral. Além disso, a quantização baseada na conexão complexa não podia ser levada a cabo rigorosamente, visto que o grupo de *gauge* interno é não-compacto. Em 1995, Barbero modificou as variáveis de Ashtekar obtendo um sistema de variáveis reais canônicas para a teoria dinâmica das conexões [21]. Holst então, construiu a ação de Palatini generalizada (que mais tarde ficou conhecida como ação de Holst) para dar suporte à dinâmica das conexões

reais de Barbero [22]. Embora haja um parâmetro livre (parâmetro de Barbero-Immirzi  $\gamma$ ) na ação de Palatini generalizada e o vínculo Hamiltoniano seja mais complicado que o de Ashtekar, o Hamiltoniano generalizado com conexões reais, é muito usado nos programas de quantização. Deste modo, toda a análise que se segue, será fundamentada no formalismo de Palatini generalizado (formalismo de Holst).

Considere uma quadrivariidade,  $\mathcal{M}_4$ , sobre a qual as variáveis dinâmicas básicas no formalismo de Palatini são a tetrada  $e_I^\mu$  e uma conexão  $\omega_\mu^{IJ}$  valorada na álgebra de Lie  $so(1,3)$ , onde os índices latinos  $I, J, \dots$  referem-se ao grupo interno  $SO(1,3)$  e os índices gregos  $\mu, \nu, \dots$  referem-se aos índices do espaço-tempo. Um tensor com ambos os índices de espaço-tempo e índices internos será chamado tensor generalizado. O espaço interno é equipado com a métrica de Minkowski  $\eta_{IJ}$  (de assinatura  $-, +, +, +$ ), de modo que a métrica do espaço-tempo é dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J, \quad (3.1)$$

onde  $e_\mu^I$  é a tetrada inversa.

A ação de Palatini generalizada, a qual nós faremos uso é dada por [23]:

$$S_P[e_K^\nu, \omega_\mu^{IJ}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \, e e_I^\mu e_J^\nu \left( \Omega_{\mu\nu}^{IJ} + \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{KL}^{IJ} \Omega_{\mu\nu}^{KL} \right), \quad (3.2)$$

onde  $e$  é o determinante de  $e_\mu^I$  (a raiz quadrada do determinante da métrica  $g_{\mu\nu}$ ),  $\epsilon_{KL}^{IJ}$  é o símbolo de Levi-Civita interno,  $\gamma$  é o parâmetro real de Immirzi-Barbero, e a curvatura 2-forma  $\Omega_{\mu\nu}^{IJ}$  valorada na álgebra de Lie  $so(1,3)$  é dada por:

$$\Omega_{\mu\nu}^{IJ} := 2D_{[\mu} \omega_{\nu]}^{IJ} = \partial_\mu \omega_\nu^{IJ} - \partial_\nu \omega_\mu^{IJ} + \omega_\mu^{IK} \wedge \omega_{\nu K}^J, \quad (3.3)$$

onde  $D_\mu$  é a derivada covariante em relação a  $\omega_\mu^{IJ}$ . Notemos que a ação de Palatini generalizada recai na ação usual de Palatini quando  $\frac{1}{\gamma} = 0$  e obtemos o formalismo de Ashtekar auto-dual (anti-dual) quando  $\frac{1}{\gamma} = \pm i$ . Além disso, além das transformações de difeomorfismo do espaço-tempo, a ação é também invariante sob as rotações de  $SO(1,3)$ :

$$(e, \omega) \mapsto (e', \omega') = (b^{-1}e, b^{-1}\omega b + b^{-1}db), \quad (3.4)$$

para uma dada função  $b$  valorada em  $SO(1,3)$  sobre  $\mathcal{M}_4$ . As equações de campo gravitacional são obtidas através da variação da ação em relação a  $e_I^\mu$  e  $\omega_\mu^{IJ}$ . Primeiramente, vamos estudar

a variação da ação em relação à conexão  $\omega_\mu^{IJ}$ . Assim,

$$\delta\Omega_{\mu\nu}^{IJ} = (d\delta\omega^{IJ})_{\mu\nu} + \delta\omega_\mu^{IK} \wedge \omega_{\nu K}^J + \omega_\mu^{IK} \wedge \delta\omega_{\nu K}^J = 2D_{[\mu}\delta\omega_{\nu]}^{IJ}. \quad (3.5)$$

Desta forma obtemos,

$$\begin{aligned} \delta S_P &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \, ee_I^\mu e_J^\nu \left( \delta\Omega_{\mu\nu}^{IJ} + \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{KL}^{IJ} \delta\Omega_{\mu\nu}^{KL} \right) = \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{M}_4} \left( \delta\omega_\nu^{IJ} + \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{KL}^{IJ} \delta\omega_\nu^{KL} \right) D_\mu [e_I^\mu e_J^\nu], \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde usamos o fato que  $D_\mu \lambda^\mu = \partial_\mu \lambda^\mu$  para toda densidade tensorial de peso +1 e negligenciamos o termo de superfície. Então, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$D_\mu [ee_I^\mu e_J^\nu] = -\frac{1}{4} D_\mu [\tilde{\eta}^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_\rho^K e_\sigma^L] = 0, \quad (3.7)$$

onde  $\tilde{\eta}^{\mu\nu\rho\sigma}$  é o símbolo de Levi-Civita espaço-temporal. Esta equação é equivalente à primeira equação de Cartan (condição de torção nula):

$$D_{[\mu} e_{\nu]}^I = 0, \quad (3.8)$$

a qual implica que  $\omega_\mu^{IJ}$  é completamente determinada pela tetrada  $e_I^\mu$ . Como resultado, o segundo termo da ação (3.2) pode ser calculado como:

$$ee_I^\mu e_J^\nu \epsilon^{IJKL} \Omega_{\mu\nu KL} = \eta^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.9)$$

o qual desaparece, por causa, das propriedades simétricas do tensor de Riemann. Assim, a ação de Palatini generalizada recai na ação de Palatini que nos fornece a equação de campo de Einstein.

## 3.2 Formalismo Hamiltoniano

Afim de fazermos a análise Hamiltoniana da ação (3.2), supomos que o espaço-tempo  $\mathcal{M}_4$  é topologicamente equivalente a  $\Sigma_3 \times \mathbb{R}$ , sendo  $\Sigma_3$  uma variedade compacta tridimensional sem bordo. Introduzimos uma foliação parametrizada por uma função suave  $t$  e um campo vetorial  $t^\mu$ , tal que,  $t^\mu(dt)_\mu = 1$  em  $\mathcal{M}_4$ , onde  $t^\mu$  pode ser decomposto em relação ao vetor normal

unitário  $n^\mu$  de  $\Sigma_3$ , da seguinte forma,

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu, \quad (3.10)$$

onde  $N$  é chamado função de lapso e  $N^\mu$  o vetor de *shift* [6, 15]. O vetor normal interno é definido como  $n^I \equiv n^\mu e_\mu^I$ . É conveniente fazermos uma fixação de *gauge* parcial, isto é, fixamos o campo vetorial interno  $n^I$  com  $\eta_{IJ}n^In^J = -1$ . Podemos ver que esta fixação de *gauge* não impõe nenhuma restrição real a dinâmica <sup>1</sup>. Desse modo, o espaço vetorial interno  $V$ ,  $3 + 1$ -dimensional, pode ser decomposto em um subespaço tridimensional  $W$  ortogonal a  $n^I$ , o qual é um espaço interno sobre  $\Sigma$ . Em relação ao campo vetorial normal interno  $n^I$  e ao campo vetorial normal espaço-temporal  $n^\mu$ , os mapeamentos (projeções), interno e espaço-temporal são chamados de  $q_i^I$  e  $q_a^\mu$ , respectivamente, onde usamos os índices  $i, j, k, \dots$  como índices do espaço interno tridimensional e os índices  $a, b, c, \dots$  como índices do espaço  $\Sigma$ . Assim, a métrica reduzida interna  $\delta_{ij}$  e a métrica reduzida espacial sobre  $\Sigma$ ,  $q_{ab}$ , são obtidas através destes dois mapeamentos. Estas duas métricas são relacionadas por:

$$q_{ab} = \delta_{ij}e_a^ie_b^j, \quad (3.11)$$

onde a cotriada ortonormal em  $\Sigma$  é definida por  $e_a^i := e_\mu^I q_I^i q_a^\mu$ . Agora, o grupo de *gauge* interno  $SO(1, 3)$  é reduzido ao subgrupo  $SO(3)$ , o qual deixa  $n^I$  invariante. Finalmente, os dois símbolos de Levi-Civita, são definidos como:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &:= q_i^I q_j^J q_k^K n^L \epsilon_{LIJK}, \\ \eta_{abc} &:= q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho t^\sigma \eta_{\sigma\mu\nu\rho}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde o símbolo de Levi-Civita interno  $\epsilon_{ijk}$  é um isomorfismo da álgebra de Lie  $so(3)$ . Agora, usando a conexão 1-forma  $\omega_\mu^{IJ}$ , podemos definir duas 1-formas sobre  $\Sigma$ , valoradas na álgebra de Lie  $so(3)$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_a^i &:= \frac{1}{2} q_a^\mu q_I^i \epsilon_{KL}^{IJ} n_J \omega_\mu^{KL}, \\ K_a^i &:= q_I^i q_a^\mu \omega_\mu^{IJ} n_J, \end{aligned} \quad (3.13)$$

---

<sup>1</sup>Contudo, há alguns argumentos de que tal fixação é um modo não-natural de se quebrar a simetria de Lorentz interna (ver, por exemplo, [24])

onde  $\Gamma$  é a conexão de spin sobre  $\Sigma$  e  $K$  está relacionado à curvatura extrínseca de  $\Sigma$ . Depois de fazermos a decomposição  $3 + 1$  e a transformação de Legendre, a ação (3.2) pode ser escrita como [22]:

$$S_P = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^3x \left[ \tilde{P}_i^a \mathcal{L}_t A_a^i - \mathcal{H}_{total} \left( A_a^i, \tilde{P}_j^b, \Lambda^i, N, N^c \right) \right], \quad (3.14)$$

a partir da qual, a estrutura simplética sobre o espaço de fase é obtida como,

$$\left\{ A_a^i(x), \tilde{P}_j^b(y) \right\} = \delta_j^i \delta_a^b \delta(x - y), \quad (3.15)$$

onde a variável de configuração e momento conjugado são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} A_a^i &:= \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \\ \tilde{P}_i^a &:= \frac{1}{2\kappa\gamma} \eta^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k = \frac{1}{\kappa\gamma} \sqrt{|\det q|} e_i^a, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $\det q$  é o determinante da métrica tridimensional  $q_{ab}$  sobre  $\Sigma$ , e portanto,  $\det q = (\kappa\gamma)^3 \det P$ . Na definição da variável de configuração  $A_a^i$ , devemos enfatizar que a conexão de spin  $\Gamma_a^i$  é completamente determinada pela triada  $e_i^a$  (condição de torção nula) (Para uma análise mais detalhada ver, [22]). No formalismo Hamiltoniano partimos dos campos  $(A_a^i, \tilde{P}_i^a)$ , então, as variáveis básicas e os parênteses de Poisson dessas variáveis não dependem do parâmetro de Barbero-Immirzi  $\gamma$ . Porém, para o caso da gravidade clássica pura, as teorias com diferentes  $\gamma$  estão relacionadas por transformações canônicas. Contudo, o espectro dos operadores geométricos são modificados para diferentes valores de  $\gamma$ . Por exemplo, o cálculo não-perturbativo da entropia do buraco negro é compatível com a fórmula de Bekenstein-Hawking para um valor específico de  $\gamma$ , no caso  $\gamma = \ln 2 / \pi \sqrt{3}$  [13, 25]. Em adição ao que foi dito, tem sido discutido se efeitos físicos oriundos do parâmetro de Barbero-Immirzi  $\gamma$  podem ser observados, quando o campo gravitacional é acoplado a férmions [26].

Na ação (3.14), a densidade Hamiltoniana  $\mathcal{H}_{total}$  é uma combinação linear de vínculos:

$$\mathcal{H}_{total} = \Lambda^i G_i + N^a C_a + NC, \quad (3.17)$$

onde  $\Lambda^i \equiv -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_t^{jk}$ ,  $N$  e  $N^a$  (funções de lapso e *shift*, respectivamente) são os multiplicadores

de Lagrange. Os três vínculos acima são dados por [23]:

$$\begin{aligned}
G_i &= D_a \tilde{P}_i^a := \partial_a \tilde{P}_i^a + \epsilon_{ij}{}^k A_a^j \tilde{P}_k^a, \\
C_a &= \tilde{P}_i^b F_{ab}^i - \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} K_a^i G_i, \\
C &= \frac{\kappa \gamma^2}{2\sqrt{|\det q|}} \tilde{P}_i^a \tilde{P}_j^b [\epsilon_k{}^{ij} F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j] \\
&\quad + \kappa(1 + \gamma^2) \partial_a \left( \frac{\tilde{P}_i^a}{\sqrt{|\det q|}} \right) G^i,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde a variável de configuração  $A_a^i$  toma a forma de uma conexão valorada na álgebra de Lie  $so(3)$  sobre  $\Sigma$  e  $F_{ab}^i$  é uma 2-forma (curvatura de  $A_a^i$ ),

$$F_{ab}^i := 2D_{[a} A_{b]}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}{}^i A_a^j A_b^k. \tag{3.19}$$

Em um sistema dinâmico com vínculos, a análise dos vínculos é essencialmente importante, porque ela reflete a invariância de *gauge* do sistema. A partir dos vínculos (3.18), nós podemos conhecer a invariância de *gauge* da teoria. O vínculo de Gauss  $G_i = 0$  tem uma importância crucial na formulação da relatividade geral com relação a teoria dinâmica das conexões. O funcional correspondendo ao vínculo  $G_i$ ,

$$\mathcal{G}(\Lambda) := \int_{\Sigma} d^3x \Lambda^i G_i(x), \tag{3.20}$$

gera as seguintes transformações sobre o espaço de fase,

$$\begin{aligned}
\{A_a^i(x), \mathcal{G}(\Lambda)\} &= -D_a \Lambda^i(x), \\
\{\tilde{P}_i^a, \mathcal{G}(\Lambda)\} &= \epsilon_{ij}{}^k \Lambda^j(x) \tilde{P}_k^a,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde temos, justamente, as versões infinitesimais da transformação de *gauge* para a conexão 1-forma  $\mathbf{A}$  e a rotação interna para o campo vetorial densitizado  $\tilde{\mathbf{P}}$ ,

$$(\mathbf{A}_a, \tilde{\mathbf{P}}^b) \mapsto (g^{-1} \mathbf{A}_a g + g^{-1} (dg)_a, g^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^b g). \tag{3.22}$$

Afim de compreendermos a ação do vínculo  $C_a = 0$ , consideremos o funcional,

$$\mathcal{V}(\vec{N}) := \int_{\Sigma} d^3x (N^a \tilde{\mathbf{P}}_i^b F_{ab}^i - (N^a A_a^i) G_i). \quad (3.23)$$

Ele gera as transformações de difeomorfismos espaciais na direção do campo vetorial  $N^a$  sobre  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \{A_a^i(x), \mathcal{V}(\vec{N})\} &= \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(x), \\ \{\tilde{P}_i^a(x), \mathcal{V}(\vec{N})\} &= \mathcal{L}_{\vec{N}} \tilde{P}_i^a(x). \end{aligned} \quad (3.24)$$

O vínculo escalar suavizado (funcional escalar) é fracamente equivalente ao seguinte funcional,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(N) &:= \int_{\Sigma} d^3x N(x) \tilde{C}(x) \\ &= \frac{\kappa \gamma^2}{2} \int_{\Sigma} d^3x N \frac{\tilde{P}_i^a \tilde{P}_j^b}{\sqrt{|\det q|}} \left[ \epsilon^{ij} F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ele gera a evolução temporal infinitesimal de  $\Sigma$ . A álgebra dos vínculos, isto é, os parênteses de Poisson entre estes vínculos desempenham um importante papel no programa de quantização. Assim, a partir de 3.18 temos a seguinte álgebra:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}(\Lambda), \mathcal{G}(\Lambda')\} &= \mathcal{G}([\Lambda, \Lambda']), \\ \{\mathcal{G}(\Lambda), \mathcal{V}(\vec{N})\} &= -\mathcal{G}(\mathcal{L}_{\vec{N}} \Lambda) \\ \{\mathcal{G}(\Lambda), \mathcal{S}(N)\} &= 0, \\ \{\mathcal{V}(\vec{N}), \mathcal{V}(\vec{N}')\} &= \mathcal{V}([\vec{N}, \vec{N}']), \\ \{\mathcal{V}(\vec{N}), \mathcal{S}(N)\} &= -\mathcal{S}(\mathcal{L}_{\vec{N}} M), \\ \{\mathcal{S}(N), \mathcal{S}(M)\} &= -\mathcal{V}((N \partial_a M - M \partial_b N) q^{ab}) \\ &\quad -\mathcal{G}((N \partial_b M - M \partial_b N) q^{ab} A_a) \\ &\quad - (1 + \gamma^2) \mathcal{G} \left( \frac{[\tilde{P}^a \partial_a N, \tilde{P}^b \partial_b M]}{|\det q|} \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $|\det q| q^{ab} = \kappa^2 \gamma^2 \tilde{P}_i^a \tilde{P}_j^b \delta^{ij}$ . Note que todos os vínculos são de primeira classe. Ainda, a evolução dos vínculos é consistente, desde que a Hamiltoniana  $H = \int_{\Sigma} d^3x \mathcal{H}_{\text{total}}$  é uma

combinação linear dos funcionais dos vínculos. As equações que nos fornecem a evolução do par canônico básico, são:

$$\mathcal{L}_t A_a^i = \{A_a^i, H\}, \quad \mathcal{L}_t \tilde{P}_i^a = \{\tilde{P}_i^a, H\}. \quad (3.27)$$

Junto com as equações de vínculos, essas equações são completamente equivalentes às equações de campo de Einstein. Assim, a relatividade geral pode ser vista como uma teoria dinâmica das conexões com uma estrutura de grupo compacto <sup>2</sup>.

- Transformação Canônica

A construção que fizemos anteriormente pode ser formulada em termos das transformações canônicas, desde que o espaço de fase das conexões dinâmicas seja o mesmo da tríade. No formalismo de tetradas o par conjugado básico consiste da tríade densitizada  $\tilde{E}_i^a = \gamma \tilde{P}_i^a$  e a curvatura extrínseca  $K_a^i$ . O Hamiltoniano e os vínculos são dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{total}} &= \Lambda^i G'_i + N^a C_a + NC, \\ G'_i &= \epsilon_{ij}{}^k K_a^j \tilde{E}_k^a, \\ C_a &= \tilde{E}_j^b \nabla_{[a} K_{b]}^j, \\ C &= \frac{1}{\sqrt{|\det q|}} \left[ \frac{1}{2} |\det q| R + \tilde{E}_i^{[a} \tilde{E}_j^{b]} K_a^i K_b^j \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde  $\nabla_a$  é operador derivada generalizado compatível com a tríade  $e_i^a$  e  $R$  é o escalar de curvatura. Desde que,  $\tilde{E}_i^a$  é um vetor de peso 1, temos

$$\nabla_a \tilde{E}_i^a = \partial_a \tilde{E}_i^a + \epsilon_{ij}{}^k \Gamma_a^j \tilde{E}_k^a = 0. \quad (3.29)$$

Podemos construir a lei de Gauss desejada como,

$$\begin{aligned} G_i &:= \frac{1}{\gamma} \nabla_a \tilde{E}_i^a + G'_i \\ &= \partial_a \tilde{P}_i^a + \epsilon_{ij}{}^k (\Gamma_a^j + \gamma K_a^j) \tilde{P}_k^a, \end{aligned} \quad (3.30)$$

a qual é fracamente zero<sup>3</sup> por construção. Isto nos motiva a definir a conexão  $A_a^i = \Gamma_a^i +$

---

<sup>2</sup>Para uma discussão rigorosa sobre este e outros assuntos relacionados, encorajamos o leitor a estudar o livro de T. Thiemann [12].

<sup>3</sup>Dizemos que uma quantidade é fracamente zero, isto é,  $\phi \approx 0$ , quando a igualdade forte  $\phi = 0$  for verdadeira sobre uma hipersuperfície de vínculos do espaço de fase.

$\gamma K_a^i$ . Além disso, pode-se provar que a transformação do par  $(\tilde{E}_i^a, K_b^j)$  no par  $(\tilde{P}_i^a, A_b^j)$  é uma transformação canônica [12, 21], isto é, a álgebra de Poisson das variáveis dinâmicas básicas é preservada sob esta transformação,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_i^a &\mapsto \tilde{P}_i^a = \frac{\tilde{E}_i^a}{\gamma}, \\ K_b^j &\mapsto A_b^j = \Gamma_b^j + \gamma K_b^j,\end{aligned}\tag{3.31}$$

como,

$$\begin{aligned}\{\tilde{P}_i^a(x), A_b^j(y)\} &= \{\tilde{E}_i^a(x), K_b^j(y)\} = \delta_b^a \delta_i^j \delta(x-y), \\ \{A_a^i(x), A_b^j(y)\} &= \{K_a^i(x), K_b^j(y)\} = 0, \\ \{\tilde{P}_i^a(x), \tilde{P}_j^b(y)\} &= \{\tilde{E}_i^a(x), \tilde{E}_j^b(y)\} = 0.\end{aligned}\tag{3.32}$$

- Preparação para a Quântização

A vantagem de uma teoria dinâmica das conexões é que esta é conveniente para a quantização levando em conta a independência de fundo. No procedimento de quantização a álgebra quântica dos observáveis elementares será gerada pelas *holonomias*, isto é, a integral da conexão sobre uma dada curva, e o *fluxo elétrico*, isto é, a integral da triade sobre uma dada superfície bidimensional. Assim, a informação acerca da geometria de fundo não é necessária para definir a álgebra quântica. A partir de agora, trabalharemos com o grupo SU(2) em vez do grupo SO(3). Uma das razões está no fato que ao trabalharmos com o grupo SU(2) podemos acoplar férmions à teoria. Esta mudança não danifica a teoria, visto que, a álgebra de Lie de SU(2) é a mesma de SO(3). Devido as propriedades do grupo compacto SU(2), tais como, a medida de Haar e o teorema de Peter-Weyl, podemos obter uma representação independente do fundo da álgebra quântica e a decomposição em redes de spin do espaço de Hilbert cinemático [12].

- Análise da Álgebra dos Vínculos

A álgebra clássica dos vínculos (3.26) é uma álgebra de Poisson de dimensão infinita. Infelizmente, ela não é uma álgebra de Lie desde que o parêntese de Poisson entre dois vínculos escalares tem uma função que depende das variáveis dinâmicas. Isto causa problemas quando tentamos resolver os vínculos quânticamente. Por outro lado, podemos ver a partir de (3.26) que a álgebra gerada pelos vínculos de Gauss forma não somente uma subálgebra, mas também

um *ideal* na álgebra completa dos vínculos. Assim, podemos resolver primeiro os vínculos de Gauss independentemente dos demais. É conveniente encontrarmos uma álgebra quociente em relação à subálgebra gerada pelos vínculos de Gauss, como

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(\vec{N}), \mathcal{V}(\vec{N}')\} &= \mathcal{V}([\vec{N}, \vec{N}']), \\ \{\mathcal{V}(\vec{N}), \mathcal{S}(N)\} &= -\mathcal{S}(\mathcal{L}_{\vec{N}}M), \\ \{\mathcal{S}(N), \mathcal{S}(M)\} &= -\mathcal{V}((N\partial_a M - M\partial_b N)q^{ab}),\end{aligned}\tag{3.33}$$

a qual, desempenha um papel crucial na resolução dos vínculos quânticamente. A subálgebra gerada pelos vínculos de difeomorfismo não pode formar um *ideal*. Conseqüentemente, os procedimentos para se resolver o vínculo de difeomorfismo e o vínculo escalar (Hamiltoniano) estão entrelaçados um no outro. Isto conduz a certas ambigüidades na construção do operador Hamiltoniano (vínculo escalar quântico) [27, 28]. Felizmente, Thiemann em seu *Master Constraint Programme* aborda estes problemas como um todo, através da introdução de uma nova álgebra clássica dos vínculos [28]. Esta nova álgebra é uma álgebra de Lie onde os vínculos de difeomorfismos formam um *ideal*. Contudo, a despeito deste e de outros esforços, estamos longe de resolver completamente e consistentemente o problema da implementação do vínculo escalar [12].

Para finalizarmos este capítulo, indicamos a referência [29] como uma boa introdução sobre a análise canônica para pedestres.

# Capítulo 4

## Aspectos Estruturais da Gravidade Quântica de Laços - LQG

### 4.1 Espaço de Configuração Quântico

Em mecânica quântica, o espaço de Hilbert cinemático é  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ , onde  $\mathbb{R}^3$  é o espaço de configuração clássico de uma partícula livre com finitos graus de liberdade, e  $d^3x$  é a medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}^3$ . Em teoria quântica de campos, é esperado que o espaço de Hilbert cinemático seja  $\mathcal{L}^2$  sobre o espaço de configuração dos campos (que é de dimensão infinita), em relação a uma dada medida de Borel. Porém, é frequentemente árduo definir uma concreta medida de Borel sobre o espaço de configuração clássico, visto que a teoria de integração envolve espaços de dimensão infinita [30,31]. Assim, precisamos introduzir o conceito de espaço de configuração quântico como uma extensão satisfatória do espaço de configuração clássico de forma que uma medida de dimensão infinita, frequentemente chamada medida cilíndrica, possa ser definida. Um exemplo para o campo escalar pode ser encontrado em [23,32]. Para a gravidade quântica, deve-se enfatizar que a construção do espaço de configuração quântico deve ser independente de fundo. Felizmente, a RG tem sido formulada como uma teoria dinâmica das conexões  $SU(2)$ , o que é de vital importância no desenvolvimento da LQG.

O espaço de configuração clássico para o campo gravitacional, o qual denotaremos por  $\mathcal{A}$ , é o conjunto de todas as conexões (1-forma)  $su(2)$ -valoradas suavemente distribuídas sobre  $\Sigma$ . A ideia da construção do espaço de configuração quântico é devida ao conceito de holonomia.

**Definição 4.1.1** *Dada uma conexão suave  $A_a^i$  e uma curva analítica  $c$  com parâmetro  $s \in [0, 1]$  com suporte sobre um subconjunto (suporte compacto) de  $\Sigma$ , a correspondente holonomia é definida pela solução da equação de transporte paralelo [33],*

$$\frac{d}{ds}h(c, s) = -[A_a^i \dot{c}^a \tau_i]h(c, s), \quad (4.1)$$

*com valor inicial  $h(c, 0) = 1$ , onde  $\dot{c}^a$  é o vetor tangente à curva  $c$  e  $\tau_i \in su(2)$  constitui uma base ortonormal com respeito à métrica de Killing-Cartan  $\eta(\xi\zeta) := -2Tr(\xi\zeta)$ , que satisfaz  $[\tau_i, \tau_j] = \epsilon^k{}_{ij}\tau_k$ . Desta forma, a holonomia é um elemento de  $SU(2)$ , o qual é expresso como,*

$$h(c) = \mathcal{P} \exp\left(-\int_0^1 [A_a^i \dot{c}^a \tau_i] ds\right), \quad (4.2)$$

*onde  $h(c) \in SU(2)$  e  $\mathcal{P}$  é um operador de ordenamento ao longo de  $c$  (ver nota de rodapé na página 382 em [33]).*

A definição (4.1.1) pode ser estendida para o caso de curvas analíticas por partes via a relação:

$$h(c_1 \circ c_2) = h(c_1)h(c_2), \quad (4.3)$$

onde  $\circ$  é um símbolo padrão para a composição de duas curvas. É fácil ver que a holonomia é invariante sob reparametrização e covariante sob a mudança da orientação, isto é,

$$h(c^{-1}) = h(c)^{-1}. \quad (4.4)$$

Agora podemos formular as propriedades da holonomia em termos do conceito de classes de equivalência de curvas.

**Definição 4.1.2** *Duas curvas analíticas  $c$  e  $\tilde{c}$  são equivalentes se, e somente se, elas têm o mesmo ponto inicial  $s(c)$  e o mesmo ponto final  $t(c)$ , e as holonomias das duas curvas são idênticas, isto é,  $h(c) = h(\tilde{c}) \forall A \in \mathcal{A}$ . Um classe de equivalência de curvas analíticas é definida como sendo um edge, e um caminho analítico por partes é uma composição de edges.*

Para resumirmos, a holonomia é, na verdade, definida sobre o conjunto  $\mathcal{P}$  dos caminhos analíticos por partes com suporte compacto. As duas propriedades (4.3) e (4.4) implicam que a holonomia para cada conexão em  $\mathcal{A}$  é um homomorfismo a partir de  $\mathcal{P}$ , o qual é chamado

grupóide [34], no grupo de *gauge* compacto  $SU(2)$ . A transformação de *gauge* interna e o difeomorfismo espacial atuam covariantemente sobre a holonomia como,

$$h(e) \mapsto g(t(e))^{-1}h(e)g(s(e)) \quad \text{e} \quad h(e) \mapsto h(\varphi \circ e), \quad (4.5)$$

onde  $g$  é uma função no grupo  $SU(2)$  (dizemos  $SU(2)$ -valorada) sobre  $\Sigma$  e  $\varphi$  é um difeomorfismo espacial. Toda a discussão que fizemos até aqui foi sobre as conexões suaves clássicas em  $\mathcal{A}$ . Pois bem, o espaço de configuração quântico para a gravidade quântica de laços (*Loop Quantum Gravity*) pode ser construído através da extensão do conceito de holonomias, desde que não necessitemos de uma estrutura de fundo extra. Assim, obtemos um espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{A}}$  da seguinte forma,

**Definição 4.1.3** *O espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{A}}$  é o conjunto de todas as conexões quânticas, as quais são homomorfismos algébricos a partir de uma coleção de caminhos analíticos por partes (sem a suposição de continuidade),  $\mathcal{P}$ , sobre  $\Sigma$ , no grupo de gauge compacto  $SU(2)$ , isto é,  $\overline{\mathcal{A}} := \text{Hom}(\mathcal{P}, SU(2))^1$ . Assim, para um  $h \in \overline{\mathcal{A}}$  qualquer e um edge  $e$  em  $\mathcal{P}$ ,*

$$h(e_1 \circ e_2) = h(e_1)h(e_2) \quad \text{e} \quad h(e^{-1}) = h(e)^{-1}. \quad (4.6)$$

*As transformações das conexões quânticas sob as transformações de gauge internas e os difeomorfismos são definidas pela equação (4.5).*

As discussões feitas acerca das conexões suaves mostra que o espaço de configuração clássico  $\mathcal{A}$  pode ser entendido como um subconjunto no espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{A}}$ . Além disto, o teorema de Giles [35], mostra precisamente que uma conexão suave pode ser reobtida a partir de suas holonomias variando o comprimento e a posição dos caminhos.

Por outro lado, foi mostrado em [12, 34] que o espaço de configuração quântico pode ser construído via a técnica de limites projetivos [31, 36, 38] e que o mesmo admite uma topologia naturalmente definida. Afim de tornarmos a discussão mais precisa, necessitamos de algumas definições:

**Definição 4.1.4** [12]

---

<sup>1</sup>É fácil ver que a definição de  $\overline{\mathcal{A}}$  não depende da escolha da seção local no  $SU(2)$ -fibrado, desde que as transformações de *gauge* internas deixam  $\overline{\mathcal{A}}$  invariante.

1. Um conjunto finito de edges  $\{e_1, \dots, e_N\}$  é dito ser independente se, e somente se, os edges  $e_i$  interceptam-se unicamente nos pontos iniciais  $s(e_i)$  e nos pontos finais  $t(e_i)$ .

2. Um grafo  $\Gamma$  é uma coleção de um conjunto finito  $\{e_1, \dots, e_N\}$  de edges e seus vértices, isto é, seus pontos iniciais  $s(e_i)$  e finais  $t(e_i)$ . Nos chamaremos de  $E(\Gamma)$  e  $V(\Gamma)$ , respectivamente, o conjunto dos edges e de vértices de um grafo finito  $\Gamma$ . Sendo  $N_\Gamma$  o número de elementos de  $E(\Gamma)$ .

3.  $\mathfrak{L}$  é o conjunto de todos os grafos  $\Gamma$ .

Podemos equipar  $\mathfrak{L}$  com uma relação de ordem parcial  $\prec$ <sup>2</sup>, definida por  $\Gamma \prec \Gamma'$  se, e somente se,  $\Gamma$  é um subgrafo de  $\Gamma'$ . Obviamente, para dois subgrafos  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  em  $\mathfrak{L}$ , existe um  $\Gamma'' \in \mathfrak{L}$ , tal que  $\Gamma, \Gamma' \prec \Gamma''$ , por exemplo,  $\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$ . Definimos  $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma \equiv \text{Hom}(\Gamma, \text{SU}(2)^{N_\Gamma})$  como o conjunto de todos homomorfismos a partir do grafo  $\Gamma$  no grupo produto  $\text{SU}(2)^{N_\Gamma} = \otimes^{N_\Gamma} \text{SU}(2)$ . Note que um elemento  $h_\Gamma \in \overline{\mathcal{A}}_\Gamma$  é completamente determinado pelos elementos  $h(e)$  do grupo  $\text{SU}(2)$ , onde  $e \in E(\Gamma)$ , de modo que temos uma bijeção natural  $\lambda : \overline{\mathcal{A}}_\Gamma \rightarrow \text{SU}(2)^{N_\Gamma}$ , a qual induz uma topologia sobre  $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma$ , tal que,  $\lambda$  é um homomorfismo topológico. Para um dado par  $\Gamma \prec \Gamma'$ , podemos definir uma projeção sobrejetiva (mapeamento sobrejetivo)  $P_{\Gamma\Gamma'} = \overline{\mathcal{A}}_{\Gamma'} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_\Gamma$  através da restrição do mapeamento  $h_{\Gamma'}$  de  $\Gamma'$  no subgrafo  $\Gamma$ . Estas projeções satisfazem a condição de consistência  $P_{\Gamma\Gamma'} \circ P_{\Gamma'\Gamma''} = P_{\Gamma\Gamma''}$ . Assim, a família projetiva  $\{\overline{\mathcal{A}}_\Gamma, P_{\Gamma\Gamma'}\}_{\Gamma \prec \Gamma'}$  é obtida através das construções feitas anteriormente. Com isto, o limite projetivo  $\lim_\Gamma(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma)$  é naturalmente obtido [12].

#### Definição 4.1.5 Limite Projetivo

O limite projetivo  $\lim_\Gamma(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma)$  da família projetiva  $\{\overline{\mathcal{A}}_\Gamma, P_{\Gamma\Gamma'}\}_{\Gamma \prec \Gamma'}$ , é um subconjunto do espaço produto direto  $\overline{\mathcal{A}}_\infty := \prod_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \overline{\mathcal{A}}_\Gamma$ , definido por

$$\lim_\Gamma(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma) := \{ \{h_\Gamma\}_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \mid P_{\Gamma\Gamma'} h_{\Gamma'} = h_\Gamma, \forall \Gamma \prec \Gamma' \}. \quad (4.7)$$

Devemos observar que a projeção  $P_{\Gamma\Gamma'}$  é sobrejetiva e contínua em relação à topologia de  $\text{SU}(2)^{N_\Gamma}$ . Nós podemos equipar o espaço produto direto  $\overline{\mathcal{A}}_\infty := \prod_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \overline{\mathcal{A}}_\Gamma$  com a topologia de

<sup>2</sup>Uma relação de ordem parcial em  $\mathfrak{L}$ , é dita ser uma relação de ordem em  $\mathfrak{L}$ , se as seguintes condições forem satisfeitas: reflexividade ( $\Gamma \prec \Gamma$ ), simetria ( $\Gamma \prec \Gamma', \Gamma' \prec \Gamma \Rightarrow \Gamma = \Gamma'$ ) e transitividade ( $\Gamma \prec \Gamma', \Gamma' \prec \Gamma'' \Rightarrow \Gamma \prec \Gamma''$ ). Deve-se notar que nem todos os pares em  $\mathfrak{L}$  necessitam ter uma relação de ordem.

Tychonov [12, 39, 41]. Desde que,  $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma$  é um espaço de Hausdorff compacto, pelo teorema de Tychonov [12, 39, 41, 42],  $\overline{\mathcal{A}}_\infty$  também é um espaço de Hausdorff compacto. Diante deste fato, pode-se provar que o limite projetivo,  $\lim_\Gamma(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma)$ , é um subconjunto fechado em  $\overline{\mathcal{A}}_\infty$ , e portanto, um espaço de Hausdorff compacto em relação à topologia induzida a partir de  $\overline{\mathcal{A}}_\infty$ . Podemos encontrar uma relação entre o limite projetivo e o espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{A}}$  construído a priori. Na verdade, existe uma bijeção  $\Theta$  entre  $\overline{\mathcal{A}}$  e  $\lim_\Gamma(\overline{\mathcal{A}})$  [12]:

$$\begin{aligned}\Theta : \overline{\mathcal{A}} &\rightarrow \lim_\Gamma(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma); \\ h &\rightarrow \{h|_\Gamma\}_{\Gamma \in \mathcal{E}},\end{aligned}$$

onde  $h|_\Gamma$  é uma restrição do domínio do mapeamento  $h \in \overline{\mathcal{A}} = \text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2))$ . Como resultado, o espaço de configuração quântico pode ser identificado com o espaço limite projetivo, e portanto, equipado com uma topologia. Deste modo, o espaço de configuração quântico construído é um espaço topológico compacto de Hausdorff.

## 4.2 Funções Cilíndricas sobre o Espaço de Configuração Quântico

Dado uma família projetiva  $\{\overline{\mathcal{A}}_\Gamma, P_{\Gamma\Gamma'}\}_{\Gamma \prec \Gamma'}$ , a função cilíndrica sobre o limite projetivo  $\overline{\mathcal{A}}$  desta família pode ser definida como se segue.

### Definição 4.2.1 Funções Cilíndricas

Seja  $C(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma)$  o conjunto de todas as funções complexas sobre  $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma$ . Diz-se que duas funções  $f_\Gamma \in C(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma)$  e  $f_{\Gamma'} \in C(\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma'})$  são equivalentes, ou cilíndricamente consistentes,  $f_\Gamma \sim f_{\Gamma'}$ , se, e somente se,  $P_{\Gamma\Gamma''}^* f_\Gamma = P_{\Gamma'\Gamma''}^* f_{\Gamma'}$ ,  $\forall \Gamma'' \succ \Gamma, \Gamma'$ , onde  $P_{\Gamma\Gamma''}^*$  é o pull-back [30] induzido a partir de  $P_{\Gamma\Gamma''}$ . Então, o espaço  $\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$  das funções cilíndricas sobre o limite projetivo  $\overline{\mathcal{A}}$  é definido como o espaço das classes de equivalência  $[f]$ , isto é,

$$\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}}) := [\cup_\Gamma C(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma)] / \sim. \quad (4.8)$$

**Proposição 4.2.1** Todas as funções contínuas  $f_\Gamma$  sobre  $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma$  são automaticamente cilíndricas, desde que elas possam gerar uma classe de equivalência  $[f_\Gamma]$  via o pull-back  $P_{\Gamma\Gamma'}^*$ ,  $\forall \Gamma' \succ \Gamma$ , e a

dependência de  $P_{\Gamma'}^* f_{\Gamma}$  sobre os grupos associados aos edges em  $\Gamma'$  (mas, não em  $\Gamma$ ) é trivial, isto é,

$$(P_{\Gamma'}^* f_{\Gamma})(h(e_1), \dots, h(e_{N_{\Gamma'}}), \dots, h(e_{N_{\Gamma}})) = f_{\Gamma}(h(e_1), \dots, h(e_{N_{\Gamma}})), \quad (4.9)$$

onde  $N_{\Gamma}$  é o número de edges independentes do grafo  $\Gamma$ . Por outro lado, por definição, dada uma função cilíndrica  $f \in \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$ , existe um grafo  $\Gamma$ , tal que  $f = [f_{\Gamma}]$ , de modo que  $f$  pode ser identificada com  $f_{\Gamma}$ . Além disto, dada duas funções cilíndricas  $f, f' \in \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$ , pela definição das funções cilíndricas e pela propriedade do mapeamento projetivo, existe um grafo comum  $\Gamma$  e  $f_{\Gamma}, f'_{\Gamma} \in C(\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma})$ , tal que,  $f = [f_{\Gamma}]$  e  $f' = [f'_{\Gamma}]$ .

Seja  $f, f' \in \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$ , tal que,  $f = [f_{\Gamma}]$  e  $f' = [f'_{\Gamma}]$ , então as seguintes operações são bem definidas

$$f + f' := [f_{\Gamma} + f'_{\Gamma}], \quad ff' := [f_{\Gamma} f'_{\Gamma}], \quad zf := [zf_{\Gamma}], \quad \bar{f} := [\bar{f}_{\Gamma}],$$

onde  $z \in \mathbb{C}$  e  $\bar{f}$  é o conjugado complexo de  $f$ . Desta forma, construímos  $\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$  como uma  $*$ -álgebra abeliana. Além disto, existe um elemento identidade na álgebra, pois  $\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$  contém funções constantes. Ainda, podemos definir a norma do supremo para  $f = [f_{\Gamma}]$ , como sendo

$$\|f\| := \sup_{h_{\Gamma} \in \overline{\mathcal{A}}_{\Gamma}} |f_{\Gamma}(h_{\Gamma})|, \quad (4.10)$$

que satisfaz a propriedade  $C^* \|f\bar{f}\| = \|f\|^2$ . Então,  $\overline{\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})}$  é uma  $C^*$ -álgebra unitária, depois de fazermos o completamento em relação à norma do supremo.

Um dos resultados conhecidos da teoria das  $C^*$ -álgebras é que uma  $C^*$ -álgebra abeliana unitária é idêntica ao espaço das funções contínuas sobre o seu espaço espectral via um isomorfismo isométrico, chamado transformação de Gel'fand [12]. Para encerrarmos esta seção apresentamos o seguinte teorema [36, 38],

**Teorema 4.2.1** *Espaço de configuração quântico*

(1) O espaço  $\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$  tem a estrutura de uma  $C^*$ -álgebra unitária abeliana, após fazermos o completamento do mesmo, em relação à norma do supremo. Obtem-se assim,  $\overline{\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})}$ .

(2) O espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{A}}$  é o espaço espectral de  $\overline{\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})}$ , de modo que  $\overline{\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})}$  é idêntico ao espaço das funções contínuas  $C(\overline{\mathcal{A}})$  sobre  $\overline{\mathcal{A}}$ .

### 4.3 O Espaço de Hilbert Cinemático

O propósito principal desta seção é o de construir um espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  para a gravidade quântica de laços, o qual é um espaço  $\mathcal{L}^2$  sobre o espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{A}}$  em relação a uma medida  $d\mu$ . Existe uma medida de probabilidade para a gravidade quântica de laços bem definida sobre  $\overline{\mathcal{A}}$ , obtida a partir da medida de Haar sobre o grupo compacto  $\text{SU}(2)$ , a qual é chamada de *medida de Ashtekar-Isham-Lewandowski*. Consideremos então, o caso onde um grafo  $\Gamma$  possui apenas um edge  $e$ . Então, o espaço de configuração quântico correspondente  $\overline{\mathcal{A}}_e$ , é idêntico ao grupo  $\text{SU}(2)$ . As funções contínuas sobre  $\overline{\mathcal{A}}_e$  estão contidas em  $\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$ . Devido a compacidade de  $\text{SU}(2)$ , existe uma única medida de probabilidade, medida de Haar, sobre o mesmo, a qual é invariante sob translações a direita e a esquerda e ao inverso dos elementos do grupo.

#### Teorema 4.3.1 [48]

Dado um grupo compacto  $G$  e um automorfismo  $\varphi : G \rightarrow G$  sobre ele, existe uma única medida  $d\mu_H$  sobre  $G$ , chamada medida de Haar, tal que:

$$\int_G d\mu_H = 1, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \int_G f(g)d\mu_H &= \int_G f(hg)d\mu_H = \int_G f(gh)d\mu_H \\ &= \int_G f(g^{-1})d\mu_H = \int_G f \circ \varphi(g)d\mu_H, \end{aligned} \quad (4.12)$$

para todas as funções contínuas  $f$  sobre  $G$  e para todo  $h \in G$ .

Assim, equipamos  $\overline{\mathcal{A}}_e$  com a medida  $\mu_e \equiv \mu_H$ . Similarmente, a medida de probabilidade pode ser definida sobre um dado grafo  $\Gamma$  com um número finito de edges através do produto direto da medida de Haar, uma vez que  $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma = \text{SU}(2)^{N_\Gamma}$ . Então, dado um grafo  $\Gamma$ , o espaço de Hilbert é definido sobre  $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma$  como  $\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma, d\mu_\Gamma) = \otimes_{e \in \Gamma} \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{A}}_e, d\mu_e)$ . Além disto, a família de medidas  $\{\mu_\Gamma\}_{\Gamma \in \mathcal{E}}$  definida sobre a família projetiva  $\{\overline{\mathcal{A}}_\Gamma, P_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}\}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}$  é cilíndricamente

consistente,

$$\begin{aligned}
& \int_{\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma'}} (P_{\Gamma\Gamma'}^* f_{\Gamma}) d\mu_{\Gamma'} = \\
&= \int_{\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma'}} (P_{\Gamma\Gamma'}^* f_{\Gamma})(h(e_1), \dots, h(e_{N_{\Gamma}}), \dots, h(e_{N_{\Gamma'}})) d\mu_{e_1} \cdots d\mu_{e_{N_{\Gamma}}} \cdots d\mu_{e_{N_{\Gamma'}}} \\
&= \int_{\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma'}} f_{\Gamma}(h(e_1), \dots, h(e_{N_{\Gamma}})) d\mu_{e_1} \cdots d\mu_{e_{N_{\Gamma}}} \\
&= \int_{\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma'}} f_{\Gamma} d\mu_{\Gamma},
\end{aligned}$$

onde utilizamos as equações (4.9) e (4.11). Dada uma família de medidas cilíndricamente consistentes  $\{\mu_{\Gamma}\}_{\Gamma \in \mathcal{E}}$ , a medida de probabilidade  $d\mu$  é única e bem definida no espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{A}}$  [36], a qual é descrita precisamente pelo seguinte

**Teorema 4.3.2** [12]

Dada a família projetiva  $\{\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma}, P_{\Gamma\Gamma'}\}_{\Gamma \prec \Gamma'}$ , cujo o limite projetivo é  $\overline{\mathcal{A}}$ , e a família de medidas cilíndricamente consistentes  $\{\mu_{\Gamma}\}_{\Gamma \in \mathcal{E}}$  construída a partir da medida de Haar sobre o grupo compacto  $SU(2)^{N_{\Gamma}}$ , existe uma única medida de probabilidade de Borel regular  $d\mu$  sobre o limite projetivo  $\overline{\mathcal{A}}$ , tal que

$$\int_{\overline{\mathcal{A}}} f d\mu = \int_{\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma}} f_{\Gamma} d\mu_{\Gamma}, \quad \forall f = [f_{\Gamma}] \in \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}}), \quad (4.13)$$

que é garantido pela proposição 4.2.1.

Desta forma,  $\overline{\mathcal{A}}$  é equipado com a medida de Ashtekar-Isham-Lewandowski  $d\mu$  e torna-se um espaço de medida topológico [36,37]. Esta única medida define essencialmente um estado sobre a álgebra de holonomia-fluxo para a teoria de Yang-Mills, o qual é chamado de *estado de Ashtekar-Isham-Lewandowski* na linguagem da construção GNS [12]. Além disto, as propriedades da medida de Ashtekar-Isham-Lewandowski são satisfatórias para a teoria de campos de *gauge* invariante de difeomorfismos.

**Teorema 4.3.3** A medida de Ashtekar-Isham-Lewandowski é invariante sob as transformações de *gauge* internas  $g(x)$  e sob difeomorfismos espaciais  $\varphi$ , isto é,

$$\int_{\overline{\mathcal{A}}} g \circ f d\mu = \int_{\overline{\mathcal{A}}} f d\mu \quad e \quad \int_{\overline{\mathcal{A}}} \varphi \circ f d\mu = \int_{\overline{\mathcal{A}}} f d\mu, \quad (4.14)$$

$\forall f \in \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$ .

**Prova:**

(1) (Invariância de *gauge* interna)

$$\int_{\overline{\mathcal{A}}} g \circ f d\mu = \int_{\overline{\mathcal{A}}_\Gamma} g \circ f_\Gamma d\mu_\Gamma = \int_{\overline{\mathcal{A}}_\Gamma} f_\Gamma d\mu_\Gamma = \int_{\overline{\mathcal{A}}} f d\mu, \quad (4.15)$$

$\forall f = [f_\Gamma] \in \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$ , onde usamos

$$g \circ f_\Gamma(h(e_1), \dots, h(e_{N_\Gamma})) = f(g(t(e_1))^{-1}h(e_1)g(s(e_1)), \dots, g(t(e_{N_\Gamma}))^{-1}h(e_{N_\Gamma})g(s(e_{N_\Gamma}))),$$

levando em conta que a medida de Haar é invariante sob translações a direita e a esquerda e ao inverso dos elementos do grupo.

(2) (Invariância de difeomorfismo)

$$\int_{\overline{\mathcal{A}}} \varphi \circ f d\mu = \int_{\overline{\mathcal{A}}_{\varphi \circ \Gamma}} f_{\varphi \circ \Gamma} d\mu_{\varphi \circ \Gamma} = \int_{\overline{\mathcal{A}}_\Gamma} f_\Gamma d\mu_\Gamma = \int_{\overline{\mathcal{A}}} f d\mu, \quad (4.16)$$

onde  $f_{\varphi \circ \Gamma} \equiv f_\Gamma(h(\varphi \circ e_1), \dots, h(\varphi \circ e_{N_\Gamma}))$  e  $h(\varphi \circ e_i) \mapsto h(e_i)$  ■.

Com a construção de uma medida sobre  $\overline{\mathcal{A}}$ , o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  é obtido diretamente como,

$$\mathcal{H}_{\text{cin}} := \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{A}}, d\mu). \quad (4.17)$$

Afim de encerrarmos esta seção, vamos fazer algumas observações acerca das propriedades de  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ .

• *Produto interno cinemático*

Dado duas funções cilíndricas  $f = [f_\Gamma]$ ,  $f' = [f'_\Gamma] \in \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$ , o produto interno  $\mathcal{L}^2$  entre elas é definido como

$$\langle f | f' \rangle_{\text{cin}} := \int_{\overline{\mathcal{A}}_{\Gamma''}} (P_{\Gamma''}^* f_\Gamma)(P_{\Gamma''}^* f'_\Gamma) d\mu_{\Gamma''} \quad (4.18)$$

para um grafo  $\Gamma''$ , tal que,  $\Gamma, \Gamma' \prec \Gamma''$ . Esta expressão é consistente com o produto interno definido em (4.17) através da proposição (4.2.1). Devemos notar que as funções cilíndricas em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  são densas em relação ao produto interno  $\mathcal{L}^2$ , do mesmo modo que elas são densas em  $C(\overline{\mathcal{A}})$  em relação à norma do supremo. Como resultado, o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  pode ser visto como o completamento de  $\text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$  em relação ao produto interno (4.18), isto é,

$$\mathcal{H}_{\text{cin}} = \langle \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}}) \rangle = \langle \cup_{\Gamma \in \mathcal{L}} \mathcal{H}_{\Gamma} \rangle, \quad (4.19)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  significa o completamento em relação ao produto interno (4.18). Na próxima seção mostraremos que  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  é um espaço de Hilbert não-separável.

- *Independência de fundo e unicidade*

É importante notarmos que todas as construções feitas anteriormente são independentes de fundo. Além disto, a medida de Ashtekar-Isham-Lewandowski sobre  $\overline{\mathcal{A}}$  é a única invariante de *gauge* e invariante de difeomorfismo [43]. Portanto, o espaço de Hilbert cinemático (na representação de Ashtekar-Isham-Lewandowski)  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  é único, tal que, as transformações de *gauge* e de difeomorfismo podem ser representadas como operadores unitários sobre ele.

## 4.4 Decomposição em Redes de Spin do Espaço de Hilbert Cinemático

Nas seções anteriores vimos que o espaço de Hilbert da gravidade quântica de laços é bem definido. Nesta seção nós pretendemos mostrar que  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  pode ser decomposto numa soma direta de subespaços ortogonais unidimensionais. Isto nos permite definir uma base, chamada base de redes de spin [44, 45], no espaço de Hilbert que consiste de um número não-enumerável de elementos, o que implica na não-separabilidade de  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Vamos mostrar essa decomposição em três passos [46].

- Decomposição em redes de spin sobre um único edge

Dado um grafo consistindo de um único edge  $e$ , o qual está naturalmente associado com o grupo  $\text{SU}(2) = \overline{\mathcal{A}}_e$ , os elementos de  $\overline{\mathcal{A}}_e$  são conexões quânticas que tomam valores não-triviais sobre o edge  $e$ . Assim, consideramos a decomposição do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_e = \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{A}}_e, d\mu_e) \simeq$

$\mathcal{L}^2(\mathrm{SU}(2), d\mu_H)$ , o qual nada mais é, que o espaço das funções de quadrado integrável sobre o grupo compacto  $\mathrm{SU}(2)$  com o produto interno ordinário. É natural definirmos vários operadores sobre  $\mathcal{H}_e$ . Em primeiro lugar, vamos definir o operador de configuração  $\hat{f}(h(e))$  cuja atuação sobre um dado  $\psi$  no domínio denso de  $\mathcal{L}^2(\mathrm{SU}(2), d\mu_H)$  nada mais é que a multiplicação pela função  $f(h(e))$ , isto é,

$$\hat{f}(h(e))\psi(h(e)) := f(h(e))\psi(h(e)), \quad (4.20)$$

onde  $h(e) \in \mathrm{SU}(2)$ . Em segundo, dado um vetor  $\xi \in \mathfrak{su}(2)$ , ele gera um campo vetorial invariante à esquerda  $L^{(\xi)}$  e um campo vetorial invariante à direita  $R^{(\xi)}$  sobre  $\mathrm{SU}(2)$  por,

$$\begin{aligned} L^{(\xi)}\psi(h(e)) &:= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi(h(e) \exp(t\xi)), \\ R^{(\xi)}\psi(h(e)) &:= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi(\exp(-t\xi)h(e)), \end{aligned}$$

para uma dada função  $\psi \in C(\mathrm{SU}(2))$ . Então, podemos definir os operadores de momento sobre um único edge por,

$$\hat{J}_i^{(L)} = iL^{(\tau_i)} \quad \text{e} \quad \hat{J}_i^{(R)} = iR^{(\tau_i)}, \quad (4.21)$$

onde os geradores  $\tau_i \in \mathfrak{su}(2)$  constituem uma base ortonormal em relação à métrica de Killing-Cartan. Os operadores de momento têm relações de comutação conhecidas a partir das relações de comutação dos operadores de momento angular da mecânica quântica:

$$[\hat{J}_i^{(L)}, \hat{J}_j^{(L)}] = i\epsilon^{kij} \hat{J}_k^{(L)}, \quad [\hat{J}_i^{(R)}, \hat{J}_j^{(R)}] = i\epsilon^{kij} \hat{J}_k^{(R)}, \quad [\hat{J}_i^{(L)}, \hat{J}_j^{(R)}] = 0. \quad (4.22)$$

Terceiro, o operador Casimir sobre  $\mathcal{H}_e$  pode expresso como,

$$\hat{J}^2 := \delta^{ij} \hat{J}_i^{(L)} \hat{J}_j^{(L)} = \delta^{ij} \hat{J}_i^{(R)} \hat{J}_j^{(R)}. \quad (4.23)$$

A decomposição de  $\mathcal{H}_e = \mathcal{L}^2(\mathrm{SU}(2), d\mu_H)$  é garantida pelo teorema de Peter-Weyl.

#### **Teorema 4.4.1** [47, 48]

*Dado um grupo compacto  $G$ , o espaço  $\mathcal{L}^2(G, d\mu_H)$  pode ser decomposto como a soma direta dos espaços de Hilbert (ortogonais) de dimensão finita, e os elementos de matriz das classes de equivalência das representações irredutíveis de dimensão finita de  $G$  formam uma base ortogonal*

em  $\mathcal{L}^2(G, d\mu_H)$ .

Note que uma representação irredutível de dimensão finita de  $G$  pode ser considerada uma função sobre  $G$ , assim, os elementos de matriz são funções sobre  $G$ . Usando o teorema (4.4.1), podemos encontrar a seguinte decomposição do espaço de Hilbert:

$$\mathcal{L}^2(SU(2), d\mu_H) = \oplus_j [\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j^*], \quad (4.24)$$

onde  $j$ 's (semi-inteiros), caracterizam as representações irredutíveis de  $SU(2)$ ,  $\mathcal{H}_j$  é o espaço que carrega a representação  $j$  de dimensão  $2j + 1$  e  $\mathcal{H}_j^*$  o seu espaço dual. A base  $\{\mathbf{e}_m^j \otimes \mathbf{e}_n^j\}$  em  $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j^*$  mapeia um elemento do grupo  $g \in SU(2)$  em uma matriz  $\{\pi_{mn}^j(g)\}$ , onde  $m, n = -j, \dots, j$ . Assim, o espaço  $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j^*$  é varrido linearmente pelas funções  $\pi_{mn}^j$  das representações  $j$  equivalentes.

#### Proposição 4.4.1 [49]

*O sistema de funções de redes de spin sobre  $\mathcal{H}_e$ , que consiste de todos os elementos de matriz  $\{\pi_{mn}^j\}$  nas representações irredutíveis de dimensão finita, indexadas pelos semi-inteiros  $\{j\}$ , satisfaz*

$$\hat{J}^2 \pi_{mn}^j = j(j+1) \pi_{mn}^j, \quad \hat{J}_3^{(L)} \pi_{mn}^j = m \pi_{mn}^j, \quad \hat{J}_3^{(R)} \pi_{mn}^j = n \pi_{mn}^j, \quad (4.25)$$

onde  $j$  é um número quântico chamado momento angular de spin e  $m, n = -j, \dots, j$  são os números quânticos magnéticos. As funções normalizadas  $\{\sqrt{2j+1} \pi_{mn}^j\}$  formam uma base ortonormal em  $\mathcal{H}_e$  pelo teorema (4.4.1) e

$$\int_{\overline{\mathcal{A}}_e} \overline{\pi_{m'n'}^{i'}} \pi_{mn}^j d\mu_e = \frac{1}{2j+1} \delta^{i'j} \delta_{m'm} \delta_{n'n}, \quad (4.26)$$

a qual é chamada de base de redes de spin sobre  $\mathcal{H}_e$ . Deste modo, o espaço de Hilbert sobre um único edge foi decomposto em subespaços unidimensionais.

Note que o sistema de operadores  $\{\hat{J}^2, \hat{J}_3^{(L)}, \hat{J}_3^{(R)}\}$  forma um conjunto completo de operadores comutantes em  $\mathcal{H}_e$ . Existe um estado de vácuo cíclico no espaço de Hilbert, o qual é uma representação  $j = 0$ ,  $\Omega_e = \pi^{j=0} = 1$ , que representa a ausência de geometria sobre o edge  $e$ .

- Decomposição em redes de spin sobre um grafo finito

Dado um grafo  $\Gamma$  com  $N_\Gamma$  edges orientados  $e_i$  e  $M$  vértices  $\nu$ , pode-se definir operadores de configuração sobre o espaço de Hilbert correspondente  $\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{A}}_\Gamma, d\mu_\Gamma) \simeq \mathcal{L}^2(\text{SU}(2), d\mu_H)$ , através de

$$\hat{f}(h(e_i))\psi(h(e_1), \dots, h(e_{N_\Gamma})) := f(h(e_i))\psi(h(e_1), \dots, h(e_{N_\Gamma})). \quad (4.27)$$

Os operadores de momentum  $\hat{J}_i^{(e,\nu)}$  associado ao edge  $e$  conectado ao vértice  $\nu$  são definidos como,

$$\hat{J}_i^{(e,\nu)} := (1 \otimes \dots \otimes \hat{J}_i \otimes \dots \otimes 1), \quad (4.28)$$

onde  $\hat{J}_i = \hat{J}_i^{(L)}$  se  $\nu = s(e)$ , onde  $s(e)$  é o ponto inicial de  $e$ , e  $\hat{J}_i = \hat{J}_i^{(R)}$  se  $\nu = t(e)$ , onde  $t(e)$  é o ponto final de  $e$ . Ainda,  $\hat{J}_i^{(e,\nu)} = iX_i^{(e,\nu)}$ . Note que  $\hat{J}_i^{(e,\nu)}$  atua não-trivialmente somente sobre o espaço de Hilbert associado ao edge  $e$ . Deste modo, podemos definir um operador de vértice associado ao vértice  $\nu$  em completa analogia com o operador de momento angular,

$$[\hat{J}^\nu]^2 := \delta^{ij} \hat{J}_i^\nu \hat{J}_j^\nu, \quad (4.29)$$

onde,

$$\hat{J}_i^\nu := \sum_{(e,\nu)} \hat{J}_i^{(e,\nu)}. \quad (4.30)$$

Obviamente,  $\mathcal{H}_\Gamma$  pode ser decomposto pelas representações em cada edge  $e$  de  $\Gamma$  como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\Gamma &= \otimes_e \mathcal{H}_e = \otimes_e [\oplus_{\mathbf{j}} [\mathcal{H}_j^e \otimes \mathcal{H}_j^{e*}]] = \oplus_{\mathbf{j}} [\otimes_e [\mathcal{H}_j^e \otimes \mathcal{H}_j^{e*}]] \\ &= \oplus_{\mathbf{j}} [\otimes_{\nu} \mathcal{H}_{\mathbf{j}(s)}^{\nu=s(e)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{j}(t)}^{\nu=t(e)}], \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{j} := (j_1, \dots, j_{N_\Gamma})$  indexa a cada edge  $e$  uma representação irredutível de  $\text{SU}(2)$ . Os espaços de Hilbert associados a cada edge  $e$  são alocados de acordo com os vértices onde os edges se interceptam, de forma que para cada vértice  $\nu$ ,

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}(s)}^{\nu=s(e)} \equiv \otimes_{s(e)=\nu} \mathcal{H}_j^e \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{\mathbf{j}(t)}^{\nu=t(e)} \equiv \otimes_{t(e)=\nu} \mathcal{H}_j^{e*}. \quad (4.32)$$

O grupo de transformações de *gauge*  $g(\nu) \in \text{SU}(2)$  em cada vértice estão representadas redutivelmente no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathbf{j}(s)}^{\nu=s(e)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{j}(t)}^{\nu=t(e)}$  de um modo natural. Assim, este espaço

de Hilbert pode ser decomposto como uma soma direta dos espaços das representações irreduzíveis via a decomposição de Clebsch-Gordan:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}(s)}^{\nu=s(e)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{j}(t)}^{\nu=t(e)} = \oplus_l \mathcal{H}_{\mathbf{j}(\nu),l}^{\nu}. \quad (4.33)$$

Como resultado,  $\mathcal{H}_\Gamma$  pode ser decomposto como:

$$\mathcal{H}_\Gamma = \oplus_{\mathbf{j}} [\otimes_{\nu} (\oplus_l \mathcal{H}_{\mathbf{j}(\nu),l}^{\nu})] = \oplus_{\mathbf{j}} [\oplus_l (\otimes_{\nu} \mathcal{H}_{\mathbf{j}(\nu),l}^{\nu})] \equiv \oplus_{\mathbf{j}} [\oplus_l \mathcal{H}_{\Gamma,\mathbf{j},l}]. \quad (4.34)$$

Ele também pode ser visto como a decomposição do espaço dos autovetores dos operadores comutantes  $[\hat{J}^2]$  (com autovalor  $l(l+1)$ ) e  $[\hat{J}^e]^2 \equiv \delta^{ij} \hat{J}_i^e \hat{J}_j^e$ . Note que  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_M)$  indexa a cada vértice de  $\Gamma$  uma representação irreduzível de  $SU(2)$ . Nós podemos aumentar o conjunto de operadores comutantes para refinarmos a decomposição do espaço de Hilbert. O subespaço de  $\mathcal{H}_\Gamma$  com  $\mathbf{l} = 0$  é invariante de *gauge*, uma vez que a representação das transformações de *gauge* são triviais.

- A decomposição em redes de spin de  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$

Uma vez que  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  tenha a estrutura  $\mathcal{H}_{\text{cin}} = \langle \cup_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \mathcal{H}_\Gamma \rangle$ , podemos construí-lo como a soma direta dos espaços  $\mathcal{H}_\Gamma$  cancelando apenas as componentes que se sobrepõem. Esta construção é descrita de forma precisa pelo seguinte teorema.

#### **Teorema 4.4.2** [46]

*Considere os  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_N)$  indexados aos edges de um dado grafo  $\Gamma \in \mathfrak{L}$  e os  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_M)$  indexados aos vértices. A representação  $\mathbf{j}$  é não-trivial sobre cada edge, e a representação  $\mathbf{l}$  é não-trivial em cada vértice espúrio<sup>3</sup>, a menos que, ele seja um ponto base de uma curva analítica fechada (analytic loop). Seja  $\mathcal{H}'_\Gamma$  o espaço de Hilbert composto pelos subespaços  $\mathcal{H}_\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{l}$  de acordo com a equação (4.34). Então,  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  pode ser decomposto como a soma direta dos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}'_\Gamma$ , isto é,*

$$\mathcal{H}_{\text{cin}} = \bigoplus_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \mathcal{H}'_\Gamma. \quad (4.35)$$

Uma vez que existe um número não-enumerável de grafos sobre  $\Sigma$ , o espaço de Hilbert ci-

<sup>3</sup>Um vértice é chamado de espúrio se ele é bivalente e se  $e \circ e'$  é um edge analítico com  $e$  e  $e'$  se encontrando em  $\nu$ .

nemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  é não-separável. Denotaremos uma base de redes de spin em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  por  $\Pi_s$ ,  $s = (\Gamma(s), \mathbf{j}_s, \mathbf{m}_s, \mathbf{n}_s)$  e o vácuo  $\Omega_{\text{cin}} \equiv \Pi_0 = 1$ , onde

$$\Pi_s := \prod_{e \in E(\Gamma(s))} \sqrt{2j_e + 1} \pi_{m_e n_e}^{j_e} \quad (j_e \neq 0), \quad (4.36)$$

que forma uma base ortonormal com  $\langle \Pi_s | \Pi_{s'} \rangle_{\text{cin}} = \delta_{ss'}$ . Ainda,  $\text{Cyl}_{\Gamma}(\overline{\mathcal{A}}) \subset \text{Cyl}(\overline{\mathcal{A}})$  é a varredura linear<sup>4</sup> das funções de redes de spin  $\Pi_s$  para  $\Gamma(s) = \Gamma$ .

A base de redes de spin é usada para construirmos a chamada representação de redes de spin na gravidade quântica de laços.

**Definição 4.4.1** *A representação de redes de spin é o espaço vetorial  $\tilde{\mathcal{H}}$  das funções a valores complexos,*

$$\tilde{\Psi} : S \rightarrow \mathbb{C}; \quad s \mapsto \tilde{\Psi}(s),$$

onde  $S$  é o conjunto de todos os  $s$  que indexam os estados de redes de spin.  $\tilde{\mathcal{H}}$  é equipado com o seguinte produto escalar,

$$\langle \tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}' \rangle := \sum_{s \in S} \overline{\tilde{\Psi}(s)} \tilde{\Psi}'(s),$$

onde os  $\tilde{\Psi}$ 's são funções de quadrado integrável.

A relação entre os espaços de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}$  e  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  fica clara através da seguinte proposição [12].

**Proposição 4.4.2** *A transformação*

$$T : \mathcal{H}_{\text{cin}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}; \quad \Psi \mapsto \tilde{\Psi}(s) := \langle \Pi_s, \Psi \rangle_{\text{cin}} \quad (4.37)$$

*é uma transformação unitária com a inversa*

$$T^{-1}\Psi = \sum_{s \in S} \tilde{\Psi}(s) \Pi_s. \quad (4.38)$$

---

<sup>4</sup>Seja  $C \subset V$  um conjunto de vetores. A varredura linear de  $C$ , denotado por  $\text{span}(C)$  é o conjunto de todos os vetores de  $V$  que podem ser escritos como uma combinação linear finita de elementos de  $C$ .

Assim, levamos a representação de conexões na representação das redes de spin e vice-versa, via a “transformada de Fourier” entre uma e outra representação, onde o papel de núcleo da integral é feito pela base de redes de spin. No espaço de Hilbert invariante de *gauge* da gravidade quântica de laços, a transformada de Fourier em relação a base de redes de spin invariante de *gauge* é chamada de *loop transform* [13, 50].

Para concluirmos esta seção, vamos mostrar de forma explícita a representação dos observáveis elementares sobre o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . A ação do operador momento canônico  $\hat{P}_f(\mathcal{S})$ , onde  $\mathcal{S}$  é uma superfície orientada com o vetor normal  $n_a$ , sobre as funções cilíndricas  $\psi_\Gamma \in \text{Cyl}_\Gamma(\bar{\mathcal{A}})$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \hat{P}_f(\mathcal{S})\psi_\Gamma(\{h(e)\}_{e \in E(\Gamma)}) &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\nu \in V(\Gamma \cap \mathcal{S})} f^i(\nu) \left[ \sum_{(e, \nu)} \kappa(\mathcal{S}, e) \hat{J}_i^{(e, \nu)} \right] \psi_\Gamma(\{h(e)\}_{e \in E(\Gamma)}) \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\nu \in V(\Gamma \cap \mathcal{S})} f^i(\nu) [\hat{J}_{i(u)}^{(\mathcal{S}, \nu)} - \hat{J}_{i(d)}^{(\mathcal{S}, \nu)}] \psi_\Gamma(\{h(e)\}_{e \in E(\Gamma)}), \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde

$$\kappa(\mathcal{S}, e) = \begin{cases} 0, & \text{se } e \cap \mathcal{S} = \emptyset, \text{ ou se } n_a \dot{e}^a|_p = 0, \\ 1, & \text{se } e \cap \mathcal{S} = p \text{ e } n_a \dot{e}^a|_p > 0, \\ -1, & \text{se } e \cap \mathcal{S} = p \text{ e } n_a \dot{e}^a|_p < 0, \end{cases} \quad (4.40)$$

com  $\dot{e}^a|_p$  sendo o vetor tangente de  $e$  no ponto  $p$ . Ainda,

$$\begin{aligned} \hat{J}_{i(u)}^{(\mathcal{S}, \nu)} &\equiv \hat{J}_i^{(e_1, \nu)} + \dots + \hat{J}_i^{(e_u, \nu)}, \\ \hat{J}_{i(d)}^{(\mathcal{S}, \nu)} &\equiv \hat{J}_i^{(e_{u+1}, \nu)} + \dots + \hat{J}_i^{(e_{u+d}, \nu)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

para os edges  $e_1, \dots, e_u$  com  $n_a \dot{e}^a|_p > 0$  e  $e_{u+1}, \dots, e_{u+d}$  com  $n_a \dot{e}^a|_p < 0$ .

Pode-se mostrar ainda, que o operador  $\hat{P}_f(\mathcal{S})$  é um operador essencialmente autoadjunto sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  [12]. Além disto, podemos construir o operador de configuração através das funções de redes de spin:

$$\hat{\Pi}_s \psi_\Gamma(\{h(e)\}_{e \in E(\Gamma)}) := \Pi_s(\{h(e)\}_{e \in E(\Gamma(s))}) \psi_\Gamma(\{h(e)\}_{e \in E(\Gamma)})$$

onde podemos ver que  $\hat{\Pi}_s$  modifica o grafo, isto é,

$$\hat{\Pi}_s : \text{Cyl}_\Gamma(\overline{\mathcal{A}}) \rightarrow \text{Cyl}_{\Gamma \cup \Gamma(s)}(\overline{\mathcal{A}}).$$

Estes operadores elementares da cinemática quântica estão bem definidos sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ .

## 4.5 Geometria Quântica

A cinemática quântica bem estabelecida tem o mesmo status da geometria Riemanniana antes do aparecimento da relatividade geral, fornecendo uma fundamentação matemática e um ambiente dinâmico para as equações de Einstein. Em vez de quantidades geométricas clássicas como, o comprimento, a área, o volume etc., as quantidades na geometria quântica são operadores sobre o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ , e seus espectros servem como possíveis valores das quantidades medidas. Os operadores quânticos geométricos construídos propriamente na gravidade quântica de laços incluem o operador de comprimento [51], o operador de área [12, 52, 53], dois diferentes operadores de volume [12, 52, 54], o operador  $\hat{Q}$  [55], etc.. Recentemente, a consistência do operador de volume tem sido checada para várias regularizações diferentes [56, 57]. Diante do que já foi comentado vamos definir de forma resumida mas precisa, os operadores de área e volume que desempenham um papel importante na gravidade quântica de laços<sup>5</sup>.

Primeiramente, definimos o operador de área com respeito a uma superfície bidimensional  $\mathcal{S}$  por meio dos operadores elementares. Dada uma superfície fechada ou uma superfície sem bordo, dividimos a mesma em um número  $N$ , muito grande, de pequeninas células de área  $\mathcal{S}_I$ . Levando em conta a expressão clássica da área, tomamos a área de uma superfície bidimensional  $\mathcal{S}$  como o limite da soma de Riemann

$$A_{\mathcal{S}} := \lim_{N \rightarrow \infty} [A_{\mathcal{S}}]_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \kappa \gamma \sum_{I=1}^N \sqrt{P_i(\mathcal{S}_I) P_j(\mathcal{S}_I) \delta^{ij}}.$$

Desta forma, podemos obter um operador de área quântico sem ambiguidades a partir do operador de momento canônico  $\hat{P}_i(\mathcal{S})$  suavizado<sup>6</sup> por meio de funções constantes. Dada um função cilíndrica  $\psi_\Gamma \in \text{Cyl}_\Gamma(\overline{\mathcal{A}})$ , a ação do operador de área sobre  $\psi_\Gamma$  é definida no limite

<sup>5</sup>Para uma definição rigorosa dos operadores de área e volume encorajamos o leitor a estudar o livro de T. Thiemann [12].

<sup>6</sup>Usamos o termo suavizado no âmbito da teoria das funções generalizadas ou distribuições [58].

assumindo que cada célula de área contenha no máximo um ponto de interseção  $\nu$  com o grafo  $\Gamma$ , assim

$$\hat{A}_S \psi_\Gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} [\hat{A}_S]_N \psi_\Gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \kappa \gamma \sum_{I=1}^N \sqrt{\hat{P}_i(\mathcal{S}_I) \hat{P}_j(\mathcal{S}_I)} \delta^{ij} \psi_\Gamma.$$

O regulador  $N$  é facilmente removido, uma vez que o resultado da atuação de  $\hat{P}_i(\mathcal{S}_I)$  não muda quando  $\mathcal{S}_I$  é contraído a um ponto. Desde que, o refinamento da partição não afeta o resultado da ação de  $[\hat{A}_S]_N$  sobre  $\psi_\Gamma$ , o operador de área  $\hat{A}_S$  (que é autoadjunto [12, 53]) é bem definido sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  e tem a seguinte expressão:

$$\hat{A}_S \psi_\Gamma := 4\pi\gamma l_P^2 \sum_{\nu \in V(\Gamma \cap \mathcal{S})} \sqrt{(\hat{J}_{i(u)}^{(\mathcal{S}, \nu)} - \hat{J}_{i(d)}^{(\mathcal{S}, \nu)})(\hat{J}_{i(u)}^{(\mathcal{S}, \nu)} - \hat{J}_{i(d)}^{(\mathcal{S}, \nu)})} \delta^{ij} \psi_\Gamma, \quad (4.42)$$

onde  $\hat{J}_{i(u)}^{(\mathcal{S}, \nu)}$  e  $\hat{J}_{i(d)}^{(\mathcal{S}, \nu)}$  foram definidos em (4.41). Isto mostra que as combinações lineares finitas das redes de spin em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  diagonalizam  $\hat{A}_S$  com autovalores dados por somas finitas,

$$a_S = 4\pi\gamma l_P^2 \sum_{\nu} \sqrt{2j_\nu^{(u)}(j_\nu^{(u)} + 1) + 2j_\nu^{(d)}(j_\nu^{(d)} + 1) - j_\nu^{(u+d)}(j_\nu^{(u+d)} + 1)}, \quad (4.43)$$

onde  $j^{(u)}$ ,  $j^{(d)}$  e  $j^{(u+d)}$  são semi-inteiros arbitrários obedecendo a seguinte condição

$$j^{(u+d)} \in \{|j^{(u)} - j^{(d)}|, |j^{(u)} - j^{(d)}| + 1, \dots, j^{(u)} + j^{(d)}\}. \quad (4.44)$$

Consequentemente, o espectro do operador de área é fundamentalmente, e puramente, discreto, enquanto que sua aproximação para o contínuo melhora exponencialmente para autovalores grandes. Todavia no nível fundamental, a área é discretizada, bem como a geometria quântica. Ainda, podemos ver que o autovalor de  $\hat{A}_S$  não se anula, nem sequer no caso em que somente um edge do grafo intercepta a superfície em um único ponto, consequentemente a geometria quântica têm um caráter distribucional.

A forma do operador de volume de Ashtekar e Lewandowski foi introduzida primeiramente em [38], suas propriedades foram discutidas em [54]. Porém, uma descrição rigorosa e precisa deste operador se acha em [12].

Dada uma região  $\mathcal{R}$  com um sistema de coordenadas  $\{x^a\}_{a=1,2,3}$  fixado nela, podemos introduzir uma partição de  $\mathcal{R}$ , dividindo  $\mathcal{R}$  em pequenas células de volume  $C$ , de tal forma que cada célula  $C$  é um cubo de coordenada de volume menor que  $\epsilon$  e duas células diferentes somente

compartilham os pontos sobre os seus bordos. Em cada célula  $C$ , introduzimos três superfícies bidimensionais  $s = (\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3)$ , de modo que  $x^a$  é constante sobre  $\mathcal{S}^a$ . Esta partição  $(C, s)$  é comumente denotada de  $\mathcal{P}_\epsilon$ . Assim, o volume de uma região  $\mathcal{R}$  pode ser expresso classicamente como,

$$V_{\mathcal{R}}^s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_C \sqrt{|q_{C,s}|},$$

onde

$$q_{C,s} = \frac{(\kappa\gamma)^3}{3!} \epsilon^{ijk} \eta_{abc} P_i(\mathcal{S}^a) P_i(\mathcal{S}^b) P_i(\mathcal{S}^c).$$

Isto nos motiva a definir o operador de volume ingenuamente trocando  $P_i(\mathcal{S}^a)$  por  $\hat{P}_i(\mathcal{S}^a)$ :

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\mathcal{R}}^s &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_C \sqrt{|\hat{q}_{C,s}|}, \\ \hat{q}_{C,s} &= \frac{(\kappa\gamma)^3}{3!} \epsilon^{ijk} \eta_{abc} \hat{P}_i(\mathcal{S}^a) \hat{P}_i(\mathcal{S}^b) \hat{P}_i(\mathcal{S}^c). \end{aligned}$$

Repare que dada uma função cilíndrica  $\psi_\Gamma \in \text{Cyl}_\Gamma(\overline{\mathcal{A}})$ , os vértices do grafo  $\Gamma$  devem ter uma interseção não-vazia com os pontos da tripla de superfícies bidimensionais  $s = (\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3)$  nas correspondentes células. O operador  $\hat{V}_{\mathcal{R}}^s$  existe trivialmente devido a mesma razão já discutida no caso do operador de área. Contudo, o operador definido aqui depende da escolha das orientações para a tripla de superfícies  $s = (\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3)$ , ou essencialmente da escolha do sistema de coordenadas. Desta forma, ele não é unicamente definido. Desde que, para todas as escolhas de  $s = (\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3)$ , os operadores resultantes tem um limite semi-clássico correto, resolvemos o problema imediatamente anterior, calculando a média dos diferentes operadores indexados por  $s$  [54]. Este processo de calcularmos a média remove a liberdade na definição do operador de volume introduzindo uma constante global  $\kappa_0$ . O resultado da ação do operador de volume (autoadjunto) sobre uma dada função cilíndrica  $\psi_\Gamma \in \text{Cyl}_\Gamma(\overline{\mathcal{A}})$  é, então, dado por,

$$\hat{V}_{\mathcal{R}} \psi_\Gamma = \kappa_0 \sum_{\nu \in V(\Gamma)} \sqrt{|\hat{q}_{\nu,\Gamma}|} \psi_\Gamma, \quad (4.45)$$

onde

$$\hat{q}_{\nu,\Gamma} = (8\pi\gamma l_{\text{P}}^2)^3 \frac{1}{48} \sum_{(e,e',e'',\nu)} \epsilon^{ijk} \epsilon(e, e', e'') \hat{j}_i^{(e,\nu)} \hat{j}_j^{(e',\nu)} \hat{j}_k^{(e'',\nu)}, \quad (4.46)$$

onde  $\epsilon(e, e', e'') \equiv \text{ sinal}(\epsilon_{abc} \dot{e}^a \dot{e}'^b \dot{e}''^c)|_\nu$  com  $\dot{e}^a$  sendo o vetor tangente do edge  $e$  e  $\epsilon_{abc}$  a orientação de  $\Sigma$ . O único ponto insatisfatório na definição do operador de volume é a escolha ambígua de  $\kappa_0$ . Todavia, discussões recentes tem mostrado que a constante global indeterminada  $\kappa_0$  pode ser fixada como sendo  $\sqrt{6}$  através da consistência entre o operador de volume e o operador de triade [56, 57].

## 4.6 Implementação dos Vínculos Quânticos: Um breve comentário

Depois de construímos consistentemente o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  da gravidade quântica de laços devemos implementar os vínculos neste espaço, afim de obtermos o espaço de Hilbert físico que encerra completamente toda informação da dinâmica da relatividade geral quântica, sendo o Hamiltoniano da relatividade geral uma combinação de vínculos. Recordando os vínculos (3.18) no formalismo Hamiltoniano e a álgebra de Poisson dos mesmos (3.26), lembramos que a subálgebra gerada pelos vínculos de Gauss  $\mathcal{G}(\Lambda)$  forma uma álgebra de Lie e um *ideal* na álgebra dos vínculos. Na prática resolvemos primeiramente os vínculos de Gauss independentemente dos demais e encontramos como solução o espaço  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^G \subset \mathcal{H}_{\text{cin}}$ , o qual é constituído por estados quânticos invariantes de *gauge* (transformações internas). Todos os operadores invariantes de *gauge* são bem definidos sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^G$ . Porém, a condição da ação sobre os estados invariantes de *gauge* frequentemente muda a estrutura do espectro dos operadores geométricos quânticos. No caso do operador de área, o espectro depende de certas propriedades globais da superfície  $\mathcal{S}^7$ . A mesma técnica utilizada para encontramos o espaço  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^G$  é em análogo utilizada na obtenção do espaço de Hilbert dos estados invariantes de difeomorfismo  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^D$ . Porém, em razão das órbitas de difeomorfismos não serem compactas, os estados invariantes de difeomorfismos não estão contidos em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Em relação a  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^D$  estes estados tem um caráter distribucional. Ainda, a subálgebra gerada pelos vínculos de difeomorfismo não é um *ideal* na álgebra quântica e como consequência os vínculos de difeomorfismo e escalar estão de certa forma entrelaçados. Já a implementação do vínculo escalar é tecnicamente e conceitualmente mais difícil do que os vínculos de Gauss e difeomorfismos, pois o vínculo escalar é fortemente não-linear, a álgebra de Dirac não é uma álgebra de Lie devido as funções de estrutura. Desta forma os vínculos de difeomorfismo e o vínculo escalar devem ser resolvidos por meio de uma

---

<sup>7</sup>Veja [23, 53] para maiores esclarecimentos.

técnica conveniente. Portanto, encorajamos o leitor a estudar o livro de T. Thiemann [12], onde a implementação destes vínculos é feita de forma cuidadosa e rigorosa.

## Capítulo 5

# Gravitação em duas dimensões

Neste capítulo investigamos a formulação canônica do modelo Jackiw-Teitelboim (modelo JT) como apresentada em [103–105], levando em conta algumas modificações (redefinições), como uma preparação para a quantização do modelo JT via o formalismo de laços da LQG.

### 5.1 Teoria de *Gauge* da Gravitação

Uma teoria de *gauge* pode ser pensada como uma teoria na qual as variáveis dinâmicas são especificadas com respeito a um sistema de coordenadas (sistema de referência), escolhido de forma arbitrária em cada instante. As variáveis fisicamente relevantes são aquelas que não dependem do sistema de coordenadas local escolhido. As transformações das variáveis induzidas por uma troca do sistema de coordenadas são chamadas de transformações de *gauge*.

A teoria da gravitação é uma teoria de covariância geral, isto é, invariante sob transformações gerais de coordenadas. Deixando de lado alguns detalhes, podemos pensar num difeomorfismo como sendo uma troca geral de coordenadas, desse modo dizemos que a teoria da gravitação é uma teoria invariante sob as transformações de difeomorfismo, cujos parâmetros são funções do espaço-tempo, precisamente como em uma teoria de *gauge* local. Como consequência, podemos formular a teoria da gravitação como uma teoria de *gauge*. Para tratarmos a teoria da gravitação como uma teoria de *gauge*, necessitamos de um formalismo adequado. Utilizaremos assim o formalismo de primeira ordem, no qual, a teoria, não é escrita em termos do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , mas sim em termos das variáveis de Einstein-Cartan, o *D-bein* (para o caso bidimensional,

$D = 2$ , o *zweibein*)  $e_\mu^I$  e a conexão de spin  $\omega_\mu^{IJ}$ , que são os campos dinâmicos da teoria, os quais são vistos como quantidades independentes<sup>1</sup>. Este formalismo, é chamado de formalismo de primeira ordem, pois a ação contém derivadas dos campos até a primeira ordem. A relação entre  $e_\mu^I$  e  $\omega_\mu^{IJ}$  é dada pela equação de movimento da teoria, a qual nos leva naturalmente ao formalismo de segunda ordem da gravitação.

Assim o modelo da gravitação em duas dimensões pode ser formulado como uma teoria invariante de *gauge*. Teorias do tipo Einstein em (1+1)-dimensões proporcionam um cenário adequado para o estudo de temas ainda não entendidos na gravitação em (3 + 1)-dimensões. Porém, em (1 + 1)-dimensões, as equações dinâmicas não estão baseadas sobre o tensor de Einstein ( $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ ), já que em duas dimensões este anula-se identicamente e a ação usual de Einstein-Hilbert ( $\int d^2x\sqrt{-g}R$ ) é um termo de superfície (uma constante), um invariante topológico, a característica de Euler, e não conduz a equações de movimento. Dado este problema, Jackiw e Teitelboim propõem incluir um campo escalar a mais para resolver este incômodo [89,90,92,93]. Esta teoria, assim como as teorias de gravitação em relatividade geral, é independente de fundo, no sentido de que a própria geometria do espaço-tempo é dinâmica.

## 5.2 O Modelo de Jackiw-Teitelboim

Devido à trivialidade da gravitação pura em duas dimensões, devemos buscar uma teoria adequada para escrevermos uma ação para a gravitação bidimensional. Neste caso uma teoria bastante adequada é a teoria de Liouville [90, 98]. A teoria de Liouville clássica é invariante sob as transformações conformes [99], e permitiu a Jackiw e Teitelboim propor a equação de Liouville em substituição da equação de Einstein.

Introduzindo a constante cosmológica  $\Omega$  na equação de Einstein, teremos para a gravitação pura,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Omega g_{\mu\nu} = 0. \quad (5.1)$$

Como em 2-dimensões o tensor de Einstein se anula ( $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$ ), podemos ver facilmente a partir de (5.1) que a métrica desaparece para  $\Omega \neq 0$  e é totalmente indeterminada quando

---

<sup>1</sup>Os índices  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, D - 1$  referem-se às coordenadas de espaço-tempo (“índices universo”). Os índices  $I, J, \dots = 0, 1, \dots, D - 1$  referem-se à coordenada do espaço-tempo tangente na base definida pelo *D-bein*. (Ver apêndice A).

$\Omega = 0$ .

A equação de Liouville

$$R - 2\Omega = 0 \tag{5.2}$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura, pode ser escolhida como uma boa alternativa para substituir (5.1). Tomando (5.2) em substituição à equação de Einstein em duas dimensões, Jackiw e Teitelboim sugeriram uma ação, para substituir a ação de Einstein-Hilbert, da qual a equação de Liouville (5.2) pode ser derivada [80,89,90,93]. Esta ação se escreve

$$S_{\text{JT}} = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \psi (R - 2\Omega) \tag{5.3}$$

onde  $\psi$  é um campo escalar, o qual atua como um multiplicador de Lagrange. Esta ação é conhecida como a ação de Jackiw-Teitelboim [80,89] e é invariante sob os difeomorfismos espaço-temporais.

Além da eq. (5.2), implicando numa curvatura constante, a ação (5.3) nos dá a equação de movimento para  $\psi$ :

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \psi + \Omega g_{\mu\nu} \psi = 0, \tag{5.4}$$

onde  $\nabla_\mu$  é a derivada covariante definida pela métrica [93].

## 5.3 O Modelo BF

### 5.3.1 O Grupo de *Gauge*

Em qualquer dimensão a gravitação pode ser vista como uma teoria tipo BF com vínculos [100]. No formalismo de segunda ordem a gravitação bidimensional pura é representada pela ação de Jackiw-Teitelboim (5.3). Como veremos, ela também pode ser obtida, a partir do formalismo de primeira ordem, através de uma ação do tipo BF sem vínculos [90–92,94], sendo então uma teoria topológica.

Uma conexão, que é uma 1-forma, tomada na álgebra de Lie de um grupo de Lie, é escrita

como

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad A_\mu = A_\mu^i J_i,$$

onde os  $J_i$  são geradores e formam uma base da álgebra de Lie.

A formulação BF da gravitação em duas dimensões é descrita em termos da conexão, 1-forma valorada na álgebra de Lie do grupo constituído pelos geradores das translações espaço-temporais,  $P_I$ , ( $I = 0, 1$ ), e pelo gerador  $\Lambda$ , o *boost* de Lorentz:

$$A(x) = e^I(x)P_I + \omega(x)\Lambda, \quad (5.5)$$

onde  $e^I$  e  $\omega$  são as 1-formas *zweibein* e a conexão de spin, respectivamente (ver o parágrafo A.7 do Apêndice A). Deste modo, o grupo de *gauge* da teoria é o grupo de Poincaré, ISO(1,1), cujos geradores satisfazem a álgebra de Poincaré bidimensional:

$$[\Lambda, P_I] = \epsilon_I^J P_J, \quad [P_I, P_J] = 0. \quad (5.6)$$

No caso onde existe uma constante cosmológica  $\Omega$  não-nula, esta álgebra deve ser estendida na álgebra de (anti-)de Sitter (A)dS, SO(2,1) (ou SO(1,2))<sup>2</sup>:

$$[\Lambda, P_I] = \epsilon_I^J P_J, \quad [P_I, P_J] = \Omega \epsilon_{IJ} \Lambda, \quad (5.7)$$

com  $\Omega$  positivo ou negativo, respectivamente.

O grupo (A)dS (ver parágrafo B.3 do apêndice B) define a teoria de *gauge* mais conveniente, visto que, existe neste caso, uma forma quadrática invariante não-degenerada, o que não ocorre no caso de ISO(1,1). Com efeito, esta álgebra está equipada pela métrica de Killing  $k_{ij}$  não-degenerada

$$(k_{ij}) = \begin{pmatrix} \Omega \eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

---

<sup>2</sup>O tensor antisimétrico  $\epsilon_{IJ}$  é definido pela convenção  $\epsilon_{01} = 1$ . Os índices  $I, J, \dots$  são abaixados e levantados pela métrica do espaço tangente  $\eta_{IJ}$  (A.11) e seu inverso  $\eta^{IJ}$ .

onde introduzimos os índices  $i, j = 0, 1, 2$  e definimos os geradores da álgebra de (A)dS como

$$\{J_i\} = \{J_0, J_1, J_2\} = \{P_0, P_1, \Lambda\}. \quad (5.9)$$

A métrica de Killing define uma forma bilinear invariante não-degenerada  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , o “traço”, (ver (B.2) do Apêndice B), tal que,

$$\langle J_i, J_j \rangle = k_{ij} \quad \text{ou} \quad \langle P_I, P_J \rangle = \Omega \eta_{IJ}, \quad \langle \Lambda, \Lambda \rangle = 1, \quad \langle P_I, \Lambda \rangle = 0. \quad (5.10)$$

A álgebra de Lie (5.7) pode ser escrita de forma compacta como<sup>3</sup>:

$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k = \Omega \epsilon_{ijl} k^{lk} J_k. \quad (5.11)$$

A relação entre forma de Killing e constantes de estrutura (B.11) [90–92] é dada por

$$k_{ij} = -\frac{\sigma}{2} f_{ik}{}^l f_{jl}{}^k. \quad (5.12)$$

De (5.11), obtemos que as constantes de estrutura não-nulas são:

$$f_{01}{}^2 = \Omega = -f_{10}{}^2, \quad f_{12}{}^0 = \sigma = -f_{21}{}^0, \quad f_{20}{}^1 = 1 = -f_{02}{}^1. \quad (5.13)$$

É fácil vermos que, com as identificações (5.9), as eqs. (5.7) e (5.11) são equivalentes.

### 5.3.2 A Ação do Modelo BF

A ação clássica da teoria BF, invariante de *gauge*, não degenerada, no espaço-tempo bidimensional [90–92, 94, 97, 100] é dada por:

$$S_{\text{BF}}[A, \phi] = \int \langle \phi, F \rangle = \frac{1}{2} \int d^2x \phi^i F_{\mu\nu}^j k_{ij} \epsilon^{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

a qual podemos reescrever como:

$$S_{\text{BF}}[A, \phi] = \int dt L_{\text{BF}}, \quad L_{\text{BF}} = \int dx (\phi_i \partial_t A_x^i + A_t^i D_x \phi_i), \quad (5.15)$$

---

<sup>3</sup>O tensor completamente antissimétrico  $\epsilon_{ijk}$  é definido pela convenção  $\epsilon_{012} = +1$

onde fizemos uma integração por partes em  $x$  para obtermos a última expressão. Aqui, o “traço”  $\langle X, Y \rangle = \langle J_i, J_j \rangle X^i Y^j = k_{ij} X^i Y^j$ , com  $X$  e  $Y$  sendo elementos da álgebra de Lie, representa a forma bilinear de Killing invariante, não-degenerada da álgebra de Lie do grupo de *gauge* (A)dS, ver equação (5.10), e  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o tensor de Levi-Civita bidimensional<sup>4</sup>. Os  $\phi^i$  são campos escalares e os  $F_{\mu\nu}^i$  os campos de força de Yang-Mills, todos pertencendo à representação adjunta do grupo de *gauge*. Explicitamente, temos:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^i J_i \equiv \phi^I P_I + \psi \Lambda, \\ A &= A^i J_i = A_\mu^i dx^\mu J_i \equiv e^I P_I + \omega \Lambda, \\ F &= dA + A \wedge A = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i dx^\mu dx^\nu J_i = F^i J_i \\ &\equiv F^I P_I + F^2 \Lambda,\end{aligned}$$

onde  $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + f_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k$ .

Variando a ação (5.14) com respeito aos campos  $A$  e  $\phi$ , obtemos

$$\begin{aligned}\delta S_{BF}[A, \phi] &= \int (\langle \delta\phi, F \rangle + \langle \phi, \delta F \rangle) = \int \langle \delta\phi, F \rangle + \int \langle \phi, d\delta A + \delta A \wedge A + A \wedge \delta A \rangle \\ &= \int \langle \delta\phi, F \rangle + \int \langle \delta A, d\phi + [A, \phi] \rangle = \int (\langle \delta\phi, F \rangle + \langle \delta A, D\phi \rangle),\end{aligned}$$

onde usamos a identidade,

$$\begin{aligned}\langle \phi, \delta(A \wedge A) \rangle &= \langle \phi, \delta A \wedge A \rangle + \langle \phi, A \wedge \delta A \rangle \\ &= k_{ij} f_{kl}^j \phi^i \delta A^k \wedge A^l = f_{kli} \delta A^k \wedge A^l \phi^i \\ &= f_{lik} \delta A^k \wedge A^l \phi^i = 2 \langle \delta A, [A, \phi] \rangle.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\delta S_{BF}[A, \phi] = \int k_{ij} (\delta\phi^i F^j + \delta A^i D\phi^j) = \int (\delta\phi_i F^i + \delta A^i D\phi_i). \quad (5.16)$$

Como as equações de movimento definem-se por:

$$\frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta\phi_i} = 0, \quad \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta A^i} = 0,$$

<sup>4</sup> $\epsilon^{\mu\nu}$  é definido pela convenção ( $\epsilon^{tx} = +1$ ). Os índices de coordenadas  $\mu, \nu, \dots$  tem os valores 0 e 1, também denotados por  $t$  e  $x$ .

temos:

$$\frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta \phi_i} = F^i = 0, \quad \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta A^i} = D\phi_i = 0.$$

Como a ação para uma teoria da gravitação deve ser invariante sob as transformações de difeomorfismo, o que aqui significa transformações gerais de coordenadas, é importante verificarmos que a ação (5.14) é invariante de difeomorfismo, o que é uma consequência da invariância de *gauge*. Sob uma transformação de *gauge* infinitesimal, o campo de *gauge*  $A$  e o campo escalar  $\phi$  transformam-se como

$$\begin{aligned} \delta_{gauge} A &= d\epsilon + [A, \epsilon] \equiv D\epsilon, \quad \epsilon = \epsilon^i J_i, \\ \delta_{gauge} \phi &= [\phi, \epsilon]^i = f_{jk}^i \epsilon^j \phi^k. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Sob um difeomorfismo infinitesimal,  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu(x)$ , as transformações do campo de *gauge*  $A$ , e do campo escalar  $\phi$  são dadas em termos da derivada de Lie na direção do campo vetorial  $\xi^\mu$ :

$$\mathcal{L}_\xi A = (i_\xi d + di_\xi)A, \quad \mathcal{L}_\xi \phi = i_\xi d\phi,$$

onde  $i_\xi$  é a derivada interior associada ao campo vetorial  $\xi^\mu$ . Essas transformações podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi A &= i_\xi(dA + A^2) + di_\xi A - i_\xi A^2 = i_\xi F + D(i_\xi A) \\ &= i_\xi \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta \phi} + D(i_\xi A) = i_\xi \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta \phi} + D\epsilon, \\ \mathcal{L}_\xi \phi &= (i_\xi d + di_\xi)\phi = i_\xi d\phi = i_\xi D\phi - i_\xi [A, \phi] \\ &= i_\xi \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta A} + [\phi, i_\xi A] = i_\xi \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta A} + [\phi, \epsilon], \end{aligned}$$

as quais possuem, a menos das equações de movimento, a forma de transformações de *gauge* com parâmetro infinitesimal  $\epsilon = i_\xi A = \xi^\mu A_\mu$ . Isto significa que a invariância sob os difeomorfismos já está contida na invariância de *gauge* se as equações de movimento são satisfeitas. Este resultado é típico de uma teoria de *gauge* topológica [83, 100], tal qual, a presente formulação de *gauge* da gravitação.

Escrevendo a ação (5.14) em termos das componentes  $i = I, 2$ , ( $I = 0, 1$ ), obtemos

$$S_{BF}[A, \phi] = \int (k_{IJ} \phi^I F^J + k_{22} \phi^2 F^2) = \int (\Omega \eta_{IJ} \phi^I F^J + \phi^2 F^2). \tag{5.18}$$

As componentes da curvatura em termos de  $(e^I, \omega)$  são dadas por,

$$F^I \equiv T^I = dA^I + f_{jk}^I A^j \wedge A^k = de^I + \omega^I_J \wedge e^J, \quad (5.19)$$

$$F^2 = dA^2 + \frac{1}{2} f_{jk}^2 A^j \wedge A^k = d\omega + \frac{\Omega}{2} e^I \wedge e^J \epsilon_{IJ}, \quad (5.20)$$

com  $T^I$  sendo a torsão.

As equações de movimento são dadas por:

$$d\omega + \frac{\Omega}{2} e^I \wedge e^J \epsilon_{IJ} = 0, \quad (5.21)$$

$$T^I = de^I + \omega^I_J e^J = 0, \quad (5.22)$$

$$D\phi^i = 0. \quad (5.23)$$

A Equação (5.22) é a condição de torsão nula para a conexão de spin. Supondo que o *zweibein* seja inversível, essa condição permite determinar algebricamente a conexão de spin, unicamente, como função das componentes de  $e^I$  e de suas derivadas [13, 78]. Com efeito, (5.22) implica em,

$$2\partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + \omega^I_{J\mu} e_{\nu}^J - \omega^I_{J\nu} e_{\mu}^J = 0. \quad (5.24)$$

Multiplicando esta última equação por  $e^{\nu I}$  duas vezes<sup>5</sup> teremos:

$$2e^{\mu K} e^{\nu L} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + e^{\mu K} \omega^I_{J\mu} \delta_L^J - e^{\nu L} \omega^I_{J\nu} \delta_K^J = 0 \quad (5.25)$$

$$\xi^I_{KL} + \omega^I_{LK} - \omega^I_{KL} = 0 \quad (5.26)$$

onde introduzimos as notações

$$\xi^I_{KL} = 2e^{\mu K} e^{\nu L} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^I, \quad \text{e} \quad \omega^I_{LK} = \omega^I_{L\mu} e_{\mu K}^I. \quad (5.27)$$

Levando em consideração que<sup>6</sup>

$$\xi_{JKL} = \xi^I_{KL} \eta_{IJ}, \quad (5.28)$$

---

<sup>5</sup> $e^{\nu I}$  é a matriz inversa de  $e_{\nu}^I$ ; para ver as propriedades dos *D-bein* e para a manipulação dos índices, ver o parágrafo A.7 do Apêndice A.

<sup>6</sup>Aqui o colchete [ ] nas expressões acima indicam antissimetria nos índices dentro dele.

reescrevemos (5.26) como

$$\omega_{JKL} - \omega_{JLK} = \xi_{JKL}. \quad (5.29)$$

Agora, fazendo permutações cíclicas dos índices,

$$\omega_{KLJ} - \omega_{KJL} = \xi_{KLJ} \quad (5.30)$$

$$\omega_{LJK} - \omega_{LKJ} = \xi_{LJK}, \quad (5.31)$$

somando (5.29) com (5.30) e subtraindo (5.31), e também usando a propriedade  $\omega_{IJK} = -\omega_{JIK}$ , temos que:

$$\omega_{JKL} = \frac{1}{2}(\xi_{JKL} + \xi_{KLJ} - \xi_{LJK}). \quad (5.32)$$

Nesta última equação, manipulando os índices e substituindo as Eqs. (5.27) e (5.28) temos finalmente como solução da eq. (5.22):

$$\begin{aligned} \omega^{IJ}{}_{\mu}[e] &= e^{\alpha J} \partial_{[\alpha} e_{\mu]}^I + e^{\beta I} \partial_{[\mu} e_{\beta]}^J - e_{\mu M} e^{\alpha I} e^{\beta J} \partial_{[\alpha} e_{\beta]}^M \\ &= 2e^{\alpha[I} \partial_{[\nu} e_{\alpha]}^{J]} + e_{\mu M} e^{\alpha I} e^{\beta J} \partial_{[\beta} e_{\alpha]}^M. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ainda, a equação (5.21) relaciona o escalar de curvatura

$$R[\omega] = \frac{2\sigma}{e} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} \omega_{\nu}, \quad e = \det(e^I{}_{\mu}) \quad (5.34)$$

com a constante cosmológica da seguinte forma:

$$R[\omega] = -2\sigma\Omega,$$

que é a equação de Liouville (5.2) no caso Lorentziano  $\sigma = -1$  [80, 90].

Uma ação do tipo (5.18) apareceu escrita pela primeira vez por Fukawa e Kamimura [92], como uma descrição teórica de *gauge* do modelo Jackiw-Teitelboim [98] da gravidade bidimensional.

Agora, substituindo<sup>7</sup> a condição de torsão nula (5.22) na ação (5.18), obtemos

$$\begin{aligned} S_{\text{BF}}[A, \phi] &= \int \phi_2 F^2 = \int \psi F^2 = \int \psi \left( d\omega + \frac{\Omega}{2} \epsilon_{IJ} e^I \wedge e^J \right) \\ &= \int d^2x \psi \left( \partial_\mu \omega_\nu + \frac{\Omega}{2} \epsilon_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J \right) \epsilon^{\mu\nu} = \frac{\sigma}{2} \int d^2x \sqrt{\sigma g} \psi (R[\omega] + 2\sigma\Omega) \end{aligned}$$

nesta última substituindo  $\sigma = -1$  (o que indica que estamos no espaço Lorentziano) temos que

$$S_{\text{BF}}[A, \phi] = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \psi (R[\omega] - 2\Omega) = -S_{\text{JT}}.$$

Reconhecendo assim, a ação de Jackiw-Teitelboim (5.3) como um resultado derivado da ação BF (5.18), a menos de um sinal irrelevante. Logo, com a substituição de  $\omega$  por  $\omega(e)$ , a ação (5.18) reduz-se à ação de segunda ordem (5.3), o que mostra a equivalência entre as duas teorias.

## 5.4 Formulação Canônica

Na formulação canônica da gravitação em duas dimensões, veremos que a dinâmica é definida inteiramente através de vínculos, como na gravitação em quatro dimensões. Alguns destes vínculos manifestam-se quando fazemos a transformação de Legendre para definir a Hamiltoniana. Estes são chamados de vínculos primários. Ao requerer que estes vínculos sejam preservados pela evolução, ou seja, durante o fluxo dinâmico, aparecem novos vínculos, chamados de vínculos secundários, os quais devem também ser preservados pela evolução. Existem diferenças entre estes vínculos; dizemos que estes são de primeira classe se os colchetes de Poisson entre eles são combinações lineares de vínculos, caso contrário são chamados de vínculos de segunda classe. Vamos encontrar ambos os tipos e usaremos o procedimento dos colchetes de Dirac para os de segunda classe, convertendo o conjunto de vínculos de segunda classe em vínculos cujos colchetes de Dirac com qualquer campo são nulos. O tratamento Hamiltoniano de sistemas vinculados foi tratado por Dirac [81]. Para uma revisão rápida deste formalismo, ver Apêndice C e mais profundamente as referências [12, 50, 81–84].

O efeito de ter vínculos numa teoria, é restringir a dinâmica numa subvariedade do espaço de fase, chamada de hipersuperfície vinculada. A trajetória dinâmica nesta hipersuperfície não

---

<sup>7</sup>O que é legítimo visto que a solução da equação de torsão nula é puramente algébrica.

está unicamente determinada. Cada evolução dinâmica é representada por uma família infinita de trajetórias que são fisicamente equivalentes. As trajetórias de uma família são equivalentes de *gauge* e definem um espaço de fase reduzido [12, 50, 81, 83, 84].

A ação (5.14) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_{BF}[A, \phi] &= \frac{1}{2} \int \langle \phi, F_{\mu\nu} \rangle dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \int \langle \phi, \partial_t A_x - \partial_x A_t + [A_t, A_x] \rangle d^2x \\
&= \int \langle \phi, \partial_t A_x \rangle d^2x + \int \langle A_t, D_x \phi \rangle d^2x \\
&= \int k_{ij} (\partial_t A_x^i \phi^j + A_t^i D_x \phi^j) d^2x \\
&= \int dt L,
\end{aligned}$$

onde

$$L = \int dx (\partial_t A_x^i \phi_i + A_t^i D_x \phi_i) \equiv \int dx \mathcal{L}, \quad \text{com } \phi_i = k_{ij} \phi^j. \quad (5.35)$$

Para chegarmos neste resultado usamos a identidade de Jacobi (B.13). Podemos identificar as variáveis dinâmicas com os campos  $A_x^i$  e os  $\phi_i$ , enquanto que, os  $A_t^i$  serão interpretados como multiplicadores de Lagrange, dado que eles aparecem linearmente e sem suas derivadas temporais.

Devemos notar que, no formalismo Hamiltoniano, privilegiamos a coordenada temporal  $t$ . Isto não prejudicará a covariância geral da teoria, visto que a invariância de difeomorfismo será mantida através da aplicação dos correspondentes vínculos, dentro do formalismo de Dirac.

### 5.4.1 Momentos Canonicamente Conjugados

Aplicamos aqui o formalismo Hamiltoniano descrito no Apêndice C.

O ponto de partida para o formalismo Hamiltoniano é a definição dos momentos canônicos conjugados. Tomando como coordenadas generalizadas as componentes da conexão  $A_\mu^i(x, t)$ , consideradas como funções da coordenada espacial  $x$ , os momentos canonicamente conjugados

são definidos como as derivadas funcionais<sup>8</sup>

$$\pi_i^{A_\mu}(x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_\mu^i(x))}.$$

Então,

$$\pi_i^{A_x}(x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_x^i(x))} = k_{ij}\phi^j = \phi_i, \quad (5.36)$$

$$\pi_i^{A_t}(x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_t^i(x))} = 0. \quad (5.37)$$

Esta última eq. (5.37), representa três vínculos o que indica que a Lagrangiana (5.35) que descreve a teoria é uma lagrangiana singular, o que significa que nem todas as velocidades podem ser escritas em termos dos momentos e dos campos; temos então que  $\partial_t A_x^i(x)$  pode ser escrito em termos dos momentos e dos campos  $A_x^i(x)$ ,  $A_t^i(x)$  e  $\psi$ , mas isto não é possível para  $\partial_t A_t^i(x)$ , por conseguinte devemos usar o procedimento de Dirac [81] (ver o apêndice C), para a transformação de Legendre de teorias singulares. De acordo com a terminologia de Dirac estes vínculos (5.37) são chamados de “vínculos primários”.

Recorrendo à transformação de Legendre, (C.7), definimos a Hamiltoniana

$$H = \int dx \mathcal{H},$$

onde a densidade Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  é dada por,

$$\mathcal{H} = \phi_i \partial_t A_x^i + \pi_i^{A_t}(x) \partial_t A_t^i - \mathcal{L} = \pi_i^{A_t}(x) \partial_t A_t^i - A_t^i D_x \phi_i.$$

Assim, a Hamiltoniana é

$$H = \int dx (\pi_i^{A_t}(x) \partial_t A_t^i - A_t^i D_x \phi_i) = \int dx (\pi_i^{A_t}(x) \partial_t A_t^i - \langle A_t, D_x \phi \rangle). \quad (5.38)$$

---

<sup>8</sup>Aqui, somente a dependência na coordenada espacial, denotada  $x$ ,  $y$ , etc., é explicitada. Todos os campos são tomados no mesmo valor  $t$  da coordenada temporal.

### 5.4.2 Vínculos Secundários

Da definição dos colchetes de Poisson (ver Apêndice C) na mecânica clássica, em particular para coordenadas generalizadas  $q^n, p_n$ , temos:

$$\{q^n, p_m\} = \delta_m^n, \quad \{q^n, q^m\} = 0 = \{p_n, p_m\}. \quad (5.39)$$

No caso de dois funcionais  $F[A, \pi]$  e  $G[A, \pi]$ , temos

$$\{F, G\} = \int dx \left( \frac{\delta F}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi_i^{A_\mu}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_i^{A_\mu}(x)} \frac{\delta G}{\delta A_\mu(x)} \right). \quad (5.40)$$

E para os campos elementares, obtemos:

$$\begin{aligned} \{A_x^i(x), \phi_j(y)\} &= \delta_j^i \delta(x-y) = \{A_t^i(x), \pi_j^{A_t}(y)\}, \\ \{A_\mu^i(x), A_\nu^j(y)\} &= 0, \\ \{\pi_i^{A_t}(x), \pi_j^{A_t}(y)\} &= \{\phi_i(x), \phi_j(y)\} = 0, \end{aligned} \quad (5.41)$$

com todas as equações dadas num mesmo tempo  $t$ .

A eq. (5.37) implica que temos três vínculos primários<sup>9</sup>,

$$\pi_i^{A_t}(x) \approx 0. \quad (5.42)$$

Por questão de consistência, estes vínculos não devem evoluir temporalmente, ou seja, os vínculos primários devem ser preservados durante o fluxo dinâmico, a restrição inicial do espaço de fase dada por (5.42) deve ser mantida para qualquer tempo. Sendo a derivada temporal definida pelo colchete de Poisson com a Hamiltoniana, devemos impor que os colchetes dos vínculos primários com a Hamiltoniana sejam fracamente nulos (ver Apêndice C para maiores esclarecimentos)

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} \approx 0.$$

---

<sup>9</sup>(Apêndice C). Os vínculos decorrentes diretamente das relações de momento são chamados de vínculos primários  $\phi_m(q, p) \approx 0$ . Aqui estamos usando a notação de Dirac “ $\approx$ ” que significa igualdade “fraca”. Isto quer dizer que só no final dos cálculos imporemos as igualdades fortes “=” para os vínculos. Mais precisamente, dizemos que duas quantidades são fracamente iguais, isto é,  $\phi \approx \chi$ , quando a igualdade forte  $\phi = \chi$  for verdadeira sobre uma hipersuperfície de vínculos do espaço de fase.

Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}_i^{A_t} &= \{ \pi_i^{A_t}(x), H \} = \int \{ \pi_i^{A_t}(x), \pi_i^{A_t}(x) \partial_t A_t^i - A_t^j(y) D_y \phi_j(y) \} dy \\
&= \int \{ \pi_i^{A_t}(x), A_t^j(y) \} D_y \phi_j(y) dy \\
&= D_x \phi_i(x) = \partial_x \phi_i + f_{ij}{}^k A_x^j \phi_k \\
&\equiv \mathcal{G}_i(x)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Assim devemos impor os vínculos secundários,

$$\mathcal{G}_i(x) = D_x \phi_i(x) \approx 0. \tag{5.44}$$

Por uma questão de comodidade, podemos escrever os vínculos na forma integral,

$$\mathcal{P}(\alpha) = \int dx \alpha^i(x) \pi_i^{A_t}(x), \tag{5.45}$$

$$\mathcal{G}(\epsilon) = \int dx \epsilon^i(x) \mathcal{G}_i(x), \tag{5.46}$$

onde os  $\epsilon^i(x)$  e os  $\alpha^i(x)$  são parâmetros infinitesimais locais, que podem ser escolhidos como “funções teste” suaves<sup>10</sup>. Reciprocamente,

$$\pi_i^{A_t}(x) = \frac{\delta \mathcal{P}(\alpha)}{\delta \alpha^i(x)}, \quad \mathcal{G}_i(x) = \frac{\delta \mathcal{G}(\epsilon)}{\delta \epsilon^i(x)}. \tag{5.47}$$

Explicitamente para  $\mathcal{G}_i$  temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\epsilon) &= \int dx \epsilon^i(x) (\partial_x \phi_i(x) + f_{jki} A_x^j \phi^k) \\
&= \int dx (-\phi_i(x) \partial_x \epsilon^i(x) + \epsilon^i(x) f_{ij}{}^k A_x^j \phi_k)
\end{aligned}$$

Podemos ver que a Hamiltoniana (5.38) tem precisamente a forma de um vínculo integral, com as funções  $\epsilon^i$  substituídas pelas componentes temporais  $-A_t^i$  e  $\partial_t A_t^i$  da conexão, que fazem o papel de multiplicadores de Lagrange. Isto já era esperado, pois uma Hamiltoniana de puro vínculo é uma característica de teorias que apresentam covariância geral [83, 84], que é o caso da relatividade geral.

Os vínculos primários  $\pi_i^{A_t}(x)$  podem ser resolvidos trivialmente  $\pi_i^{A_t}(x) = 0$ . Por outro lado, os

---

<sup>10</sup>Funções do espaço  $\mathcal{S}$  de Schwartz, as quais são funções  $\mathcal{C}^\infty$  que decaem no infinito mais rapidamente que qualquer potencia de  $x$ , bem como todas suas derivadas.

campos  $A_t^i$  tornam-se funções completamente arbitrárias. Então a Hamiltoniana (5.38) toma a seguinte forma:

$$H = - \int dx A_t^i D_x \phi_i. \quad (5.48)$$

### 5.4.3 Álgebra dos Vínculos

Devemos verificar agora quais propriedades devem satisfazer os vínculos  $\mathcal{G}_i(x)$ , eq. (5.44), principalmente quanto a seus colchetes de Poisson. O colchete de Poisson de dois vínculos quaisquer tem que ser uma combinação linear dos vínculos (propriedade dos vínculos de primeira classe<sup>11</sup>). Isto garante a preservação dos vínculos durante a evolução do sistema. Do cálculo dos colchetes de Poisson dos  $\mathcal{G}_i(x)$  podemos concluir facilmente que os  $\mathcal{G}_i(x)$  são vínculos de primeira classe:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}(\epsilon), \mathcal{G}(\eta)\} &= \int \int dx dy (\{-D_x \epsilon^k \phi_k, \eta^m f_{mn}{}^p A^n \phi_p\} + \\ &\quad \{\epsilon^i f_{ij}{}^k A^j \phi_k, -D_y \eta^p \phi_p\}) \\ &= - \int dx f_{ij}{}^k (\eta^j D_x \epsilon^i + \epsilon^i D_x \eta^j) \phi_k \\ &= - \int dx D_x (f_{ij}{}^k \epsilon^i \eta^j) \phi_k \\ &= - \int dx D_x [(\epsilon \times \eta)^k] \phi_k \\ &= \int dx (\epsilon \times \eta)^k D_x \phi_k \\ &= \mathcal{G}(\epsilon \times \eta), \end{aligned}$$

onde definimos

$$(\epsilon \times \eta)^k = f_{ij}{}^k \epsilon^i \eta^j.$$

Para os vínculos avaliados localmente:

$$\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} = \frac{\delta^2}{\delta \epsilon^i(x) \delta \eta^j(y)} \{\mathcal{G}(\epsilon), \mathcal{G}(\eta)\}$$

---

<sup>11</sup>Ver os parágrafos (C.3.1) e (C.3.2) do apêndice (C)

então

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} &= \frac{\delta^2}{\delta\epsilon^i(x)\delta\eta^j(y)} \left( \int dz f_{kl}{}^n \epsilon^k \eta^l \mathcal{G}_n(z) \right) \\ &= f_{ij}{}^k \delta(x-y) \mathcal{G}_k(x).\end{aligned}\quad (5.49)$$

Vemos assim, que os vínculos  $\mathcal{G}_i(x)$  formam uma álgebra de Lie, fechada, com o produto de Lie sendo dado pelo colchete de Poisson. Como a Hamiltoniana é uma combinação linear de vínculos, deduzimos que os colchetes destes últimos com a Hamiltoniana são fracamente nulos. Os vínculos são, portanto, de primeira classe de acordo com a terminologia de Dirac. Os vínculos secundários  $\mathcal{G}_i(\epsilon)$  são os geradores das transformações de *gauge* da teoria. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}(\epsilon), A_x^p(x)\} &= \left\{ \int dy (-\phi_i(y) \partial_y \epsilon^i(y) + \epsilon^i(y) f_{ij}{}^k A_x^j(y) \phi_k(y)), A_x^p(x) \right\} \\ &= \int dy (-\partial_y \epsilon^i \{\phi_i(y), A_x^p(x)\} + \\ &\quad \epsilon^i(y) f_{ij}{}^k A_x^j(y) \{\phi_k(y), A_x^p(x)\}) \\ &= \partial_x \epsilon^p + f_{ji}{}^p A_x^j \epsilon^i = D_x \epsilon^p,\end{aligned}\quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}(\epsilon), \phi_p(x)\} &= \left\{ \int dy (-\phi_i(y) \partial_y \epsilon^i(y) + \epsilon^i(y) f_{ij}{}^k A_x^j(y) \phi_k(y)), \phi_p(x) \right\} \\ &= \int dy \epsilon^i(y) f_{ij}{}^k \phi_k(y) \{A_x^j(y), \phi_p(x)\} \\ &= -f_{pi}{}^k \epsilon^i \phi_k = -[\epsilon, \phi]_p = [\phi, \epsilon]_p.\end{aligned}\quad (5.51)$$

Localmente, temos

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}_i(x), A_x^p(y)\} &= \{D_x \phi_i(x), A_x^p(y)\} \\ &= \{\partial_x \phi_i(x) + f_{ij}{}^k A_x^j(x) \phi_k(x), A_x^p(y)\} \\ &= -\partial_x \delta(x-y) \delta_i^p - f_{ij}{}^p A_x^j(x) \delta(x-y),\end{aligned}\quad (5.52)$$

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}_i(x), \phi_m(y)\} &= \{D_x \phi_i(x), \phi_m(y)\} \\ &= f_{im}{}^k \phi_k(x) \delta(x-y).\end{aligned}\quad (5.53)$$

O fato dos vínculos formarem uma álgebra de Lie, ver (5.49), corresponde ao fato das transformações de *gauge* formarem um grupo de Lie.

## 5.5 Resultados em Termos das Componentes

### 5.5.1 Equações de Movimento

Conhecendo a ação (5.14), podemos determinar as equações de movimento que descrevem nossa teoria; um método para determinar estas equações é o princípio de mínima ação. Aplicando este princípio a ação (5.14), obtemos a expressão (5.16) que pode ser escrita como,

$$\delta S_{\text{BF}}[A_\mu^i, \phi] = \int (\delta\phi_i F^i + \delta A^i D\phi_j) = \int \left( \frac{1}{2} \delta\phi_i F^i{}_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} + D_\mu \phi_j \delta A_\nu^i \epsilon^{\mu\nu} \right) d^2x. \quad (5.54)$$

As equações de movimento são dadas por:

$$\frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta\phi_i} = \frac{1}{2} F^i{}_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} = \partial_t A_x^i - \partial_x A_t^i + f_{jk}{}^i A_t^j A_x^k = 0, \quad (5.55)$$

$$\frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta A_\nu^i} = D_\mu \phi_i \epsilon^{\mu\nu} = 0. \quad (5.56)$$

Introduzindo as notações, para o *zweibein* e o campo escalar,

$$\begin{pmatrix} N & \chi \\ N^1 & e_x^1 \end{pmatrix} \equiv (e_\mu^I) = \begin{pmatrix} e_t^0 & e_x^0 \\ e_t^1 & e_x^1 \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi) \equiv (\phi_i) = (\phi_0, \phi_1, \phi_2), \quad (5.58)$$

respectivamente, podemos escrever as componentes da conexão como

$$A_x^i = (e_x^I, \omega_x) = (e_x^0, e_x^1, \omega_x) = (A_x^0, A_x^1, A_x^2) = (\chi, e_x^1, \omega_x), \quad (5.59)$$

$$A_t^i = (e_t^I, \omega_t) = (e_t^0, e_t^1, \omega_t) = (A_t^0, A_t^1, A_t^2) = (N, N^1, \omega_t).$$

Em função da notação para os campos escalares introduzida em (5.58) e (5.59), e dos valores das constantes de estrutura da álgebra de Lie dados por (5.13), as equações de movimento para os campos escalares (5.55) serão:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta\varphi_0} &= \partial_t \chi - \partial_x N - \sigma(e_x^1 \omega_t - \omega_x N^1), \\ \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta\varphi_1} &= \partial_t e_x^1 - \partial_x N^1 - \omega_x N + \chi N^1, \\ \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta\psi} &= \partial_t \omega_x - \partial_x \omega_t - \Omega(\chi N^1 - e_x^1 N). \end{aligned} \quad (5.60)$$

De (5.56), seguem as equações para  $A_t^i(x)$ ;

$$\frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta A_t^i} = D_x \phi_i = \partial_x \phi_i + f_{ij}^k A_x^j \phi_k. \quad (5.61)$$

As quais são

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta N} &= D_x \varphi_0 = \partial_x \varphi_0 + \Omega e_x^1 \psi - \omega_x \varphi_1, \\ \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta N^1} &= D_x \varphi_1 = \partial_x \varphi_1 + \sigma \omega_x \varphi_0 - \Omega \chi \psi, \\ \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta \omega_t} &= D_x \psi = \partial_x \psi + \chi \varphi_1 - \sigma \omega_x \varphi_0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Reconhecemos aqui os vínculos secundários (5.44).

Finalmente, para  $A_x^i(x)$ :

$$\frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta A_x^i} = -D_t \phi_i = -(\partial_t \phi_i + f_{ij}^k A_t^j \phi_k),$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta \chi} &= -D_t \varphi_0 = -(\partial_t \varphi_0 + \Omega N^1 \psi - \omega_t \varphi_1), \\ \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta e_x^1} &= -D_t \varphi_1 = -(\partial_t \varphi_1 + \sigma \omega_t \varphi_0 - \Omega N \psi), \\ \frac{\delta S_{\text{BF}}[A, \phi]}{\delta \omega_x} &= -D_t \psi = -(\partial_t \psi + N \varphi_1 - \sigma N^1 \varphi_0). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Temos assim um total de 9 equações de movimento, três das quais, (5.62), são vínculos secundários da teoria.

## 5.5.2 A Hamiltoniana e a Álgebra dos Vínculos

Já sabemos que, uma das características de uma teoria com covariância geral é a Hamiltoniana ser de puro vínculo, como pode ser visto na eq. (5.48). Escrevendo (5.48) em termos de componentes, temos:

$$H = - \int dx (A_t^0 D_x \phi_0 + A_t^1 D_x \phi_1 + A_t^2 D_x \phi_2). \quad (5.64)$$

Substituindo (5.58) e (5.59) na Hamiltoniana, obtemos:

$$H = - \int dx (ND_x\varphi_0 + N^1D_x\varphi_1 + \omega_t D_x\psi), \quad (5.65)$$

onde  $D_x\varphi_0(x)$ ,  $D_x\varphi_1(x)$  e  $D_x\psi(x)$  são dadas por (5.62), e a forma geral, dado por (5.61). Os momentos conjugados são dados por:

$$\pi_i^{A_x}(x) = \phi_i(x); \quad \text{em componentes : } \begin{cases} \pi_0^X(x) = \varphi_0(x), \\ \pi_1^{e^1_x}(x) = \varphi_1(x), \\ \pi_2^{\omega_x}(x) = \psi(x), \end{cases} \quad (5.66)$$

$$\pi_i^{A_t}(x) = 0; \quad \text{em componentes : } \begin{cases} \pi_0^N(x) \approx 0, \\ \pi^{N^1}(x)_1 \approx 0, \\ \pi^{\omega_t}(x)_2 \approx 0. \end{cases} \quad (5.67)$$

Da eq. (5.49) para os vínculos secundários, vemos que estes formam uma álgebra de Lie fechada sob os colchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(y)\} &= f_{12}^0 \delta(x-y) \mathcal{G}_0(x) = \sigma \delta(x-y) \mathcal{G}_0(x), \\ \{\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_0(y)\} &= f_{20}^1 \delta(x-y) \mathcal{G}_1(x) = \delta(x-y) \mathcal{G}_1(x), \\ \{\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_1(y)\} &= f_{01}^2 \delta(x-y) \mathcal{G}_2(x) = \Omega \delta(x-y) \mathcal{G}_2(x). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Finalmente escrevemos os colchetes de Poisson dos vínculos secundários com cada um dos campos, representando assim as transformações de *gauge* infinitesimais dos mesmos. Utilizando

os colchetes de (5.52) para as componentes da conexão, obtemos:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_0(x), e_x^0(y)\} &= -\partial_x \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_0(x), e_x^1(y)\} &= \omega(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_0(x), \omega(y)\} &= -\Omega e_x^1(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_1(x), e_x^0(y)\} &= -\sigma \omega(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_1(x), e_x^1(y)\} &= -\partial_x \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_1(x), \omega(y)\} &= \Omega \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_2(x), e_x^0(y)\} &= \sigma e_x^1(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_2(x), e_x^1(y)\} &= -e_x^0(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_2(x), \omega(y)\} &= -\partial_x \delta(x-y).
\end{aligned} \tag{5.69}$$

De (5.53), deduzimos os colchetes de Poisson dos vínculos com campos escalares:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_0(x), \varphi_0(y)\} &= 0, \\
\{\mathcal{G}_0(x), \varphi_1(y)\} &= \Omega \psi(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_0(x), \psi(y)\} &= -\varphi_1(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_1(x), \varphi_0(y)\} &= -\Omega \psi(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_1(x), \varphi_1(y)\} &= 0, \\
\{\mathcal{G}_1(x), \psi(y)\} &= \sigma \varphi_0(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_2(x), \varphi_0(y)\} &= \varphi_1 \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_2(x), \varphi_1(y)\} &= -\sigma \varphi_0(x) \delta(x-y), \\
\{\mathcal{G}_2(x), \psi(y)\} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

### 5.5.3 Transformações Gerais de Coordenadas – Difeomorfismos

Como vimos na seção 5.4, as transformações de *gauge* contêm as transformações gerais de coordenadas, isto é, as transformações de difeomorfismos. Estas atuam sobre os campos, infinitesimalmente, através da derivada de Lie  $\mathcal{L}$ . A derivada de Lie na direção do campo vetorial

$\xi$ , é definida como:

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi d + di_\xi,$$

onde  $i_\xi$  é a derivada interior ou contração, e  $d$  a derivada exterior. Então o difeomorfismo para um campo escalar  $\varphi$  é dado por,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \varphi &= (i_\xi d + di_\xi)\varphi = (i_\xi d)\varphi \\ &= \xi^\mu \partial_\mu \varphi. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Para a conexão  $A$  que é uma 1-forma temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi A &= (\xi^\mu \partial_\mu A_\nu + (\partial_\nu \xi^\mu) A_\mu) dx^\nu \\ &= (\mathcal{L}_\xi A_\nu) dx^\nu, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_\xi A_\nu = \xi^\mu \partial_\mu A_\nu + (\partial_\nu \xi^\mu) A_\mu. \quad (5.72)$$

No caso bidimensional, a derivada de Lie  $\mathcal{L}_\xi$ , que gera um difeomorfismo na direção do vetor  $\xi = (\xi^t, \xi^x)$ , pode ser decomposta numa derivada de Lie temporal (que gera um difeomorfismo temporal) e numa derivada de Lie espacial (que gera um difeomorfismo espacial):

$$\mathcal{L}_{(\xi^t, \xi^x)} = \mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} + \mathcal{L}_{(0, \xi^x)}. \quad (5.73)$$

Na última equação,  $\mathcal{L}_{(\xi^t, 0)}$  representa o difeomorfismo temporal, enquanto que,  $\mathcal{L}_{(0, \xi^x)}$  representa o difeomorfismo espacial.

Então em termos de componentes, utilizando a eq. (5.71), escrevemos as transformações de difeomorfismos para os campos escalares (5.58), como sendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} \varphi_0 &= \xi^t \partial_t \varphi_0 \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} \varphi_0 = \xi^x \partial_x \varphi_0, \\ \mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} \varphi_1 &= \xi^t \partial_t \varphi_1 \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} \varphi_1 = \xi^x \partial_x \varphi_1, \\ \mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} \psi &= \xi^t \partial_t \psi \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} \psi = \xi^x \partial_x \psi. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Para a conexão  $A_t^i$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} A_t^i &= \partial_t(\xi^t A_t^i), \\ \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} A_t^i &= \xi^x \partial_x A_t^i + \partial_t \xi^x A_x^i.\end{aligned}\tag{5.75}$$

Então, usando (5.75) e (5.59), as transformações de difeomorfismos para as componentes de  $A_t^i$  serão:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} N &= \partial_t(\xi^t N) \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} N = \xi^x \partial_x N + \partial_t \xi^x \chi, \\ \mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} N^1 &= \partial_t(\xi^t N^1) \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} N = \xi^x \partial_x N^1 + \partial_t \xi^x e_x^1, \\ \mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} \omega_t &= \partial_t(\xi^t \omega_t) \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} \omega_t = \xi^x \partial_x \omega_t + \partial_t \xi^x \omega_x.\end{aligned}\tag{5.76}$$

Analogamente,  $A_x^i$  transforma-se como,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} A_x^i &= \xi^t \partial_t A_x^i + (\partial_x \xi^t) A_t^i, \\ \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} A_x^i &= \partial_x(\xi^x A_x^i).\end{aligned}\tag{5.77}$$

Fazendo uso da eq. (5.77) e da notação (5.59), as transformações de difeomorfismo para as componentes de  $A_x^i$  serão:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} \chi &= \xi^t \partial_t \chi + (\partial_x \xi^t) N \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} \chi = \partial_x(\xi^x \chi), \\ \mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} e_x^1 &= \xi^t \partial_t e_x^1 + (\partial_x \xi^t) N^1 \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} e_x^1 = \partial_x(\xi^x e_x^1), \\ \mathcal{L}_{(\xi^t, 0)} \omega_x &= \xi^t \partial_t \omega_x + (\partial_x \xi^t) \omega_t \quad , \quad \mathcal{L}_{(0, \xi^x)} \omega_x = \partial_x(\xi^x \omega_x).\end{aligned}\tag{5.78}$$

## 5.6 Fixação Parcial do *Gauge*: *Gauge* Temporal

### 5.6.1 *Gauge* Canônico

A presença dos vínculos de primeira classe e das simetrias de *gauge* associadas, indicam a existência de mais de um conjunto de variáveis canônicas que correspondem a um mesmo estado físico.

Com a fixação de *gauge* (fixação parcial em nosso caso) que vamos implementar, estaremos trazendo vínculos de segunda classe (ficando ainda, alguns de primeira classe, já que a fixação

será apenas parcial). Depois desta fixação de *gauge* e do surgimento de vínculos de segunda classe passaremos a trabalhar com os colchetes de Dirac para eliminarmos tais vínculos, obtendo assim, uma teoria livre de vínculos de segunda classe, no sentido que estes, serão considerados como identidades expressando algumas variáveis dinâmicas em termos de outras, e poderão ser resolvidos de maneira consistente.

### 5.6.2 *Gauge* Temporal

Para exemplificarmos, vamos começar apresentando a fixação de calibre temporal no caso do espaço-tempo quadridimensional. Seja  $A$  a conexão do grupo de *gauge*, se transformando como:

$$A' = g^{-1}dg + g^{-1}Ag.$$

Restringindo-nos a sistema de coordenadas onde os vetores  $\partial_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) são tangentes à variedade espaço  $\mathcal{M}_3$  (então, as coordenadas  $x^a$  são também coordenadas de  $\mathcal{M}_3$ ). Impomos a condição de *gauge*

$$e_a^0(x) = 0, \tag{5.79}$$

para qualquer ponto  $p$  da variedade  $\mathcal{M}_3$ , o que fixa parcialmente a invariância de Lorentz local. Com a restrição acima sobre a escolha do sistema de coordenadas, essa condição é equivalente a  $e_i^t = 0$ , ou seja, com  $e_i = e_i^\mu \partial_\mu = e_i^a \partial_a$ , os três vetores de base de tipo espaço do espaço-tempo,  $e^i$ , tangentes a  $\mathcal{M}_3$ .

A condição (5.79) deixa a invariância de *gauge* residual  $SO(3)$ , que diz respeito às rotações do espaço tridimensional tangente a  $\mathcal{M}_3$ .

No caso bidimensional,  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \times \mathbb{R}$ , a condição de *gauge* escreve-se

$$e_x^0 \equiv \chi \approx 0, \tag{5.80}$$

onde usamos a notação de igualdade fraca, visto que a condição será implementada através de um vínculo. Introduzindo, portanto, o campo  $B(x, t)$  como multiplicador de Lagrange,

completamos a ação (5.14)-(5.15),

$$S = \int d^2x (\phi_i F^i + B \chi) = \int dt L, \quad (5.81)$$

$$L = \int dx ((\partial_t A_x^i) \phi_i + A_t^i D_x \phi_i + B \chi). \quad (5.82)$$

Fizemos isto com o intuito de implementarmos a formulação ADM da gravitação [12].

Os momentos conjugados de  $A_x^i$  são dados por

$$\pi_i^{A_x}(x) = \phi_i(x); \quad \text{em componentes : } \begin{cases} \pi_0^\chi(x) = \varphi_0(x), \\ \pi_1^{e_x^1}(x) = \varphi_1(x), \\ \pi_2^{\omega_x}(x) = \psi(x), \end{cases}$$

e os correspondentes colchetes de Poisson por

$$\{A_x^i(x), \phi_j(y)\} = \delta_j^i \delta(x-y); \quad \text{em componentes : } \begin{cases} \{\chi(x), \varphi_0(y)\} = \delta(x-y), \\ \{e_x^1(x), \varphi_1(y)\} = \delta(x-y), \\ \{\omega(x), \psi(y)\} = \delta(x-y). \end{cases}$$

Além disso, temos

$$\{B(x), \pi^B(y)\} = \delta(x-y), \quad \{\pi_j^{A_t}(x), A_t^i(y)\} = \delta_j^i \delta(x-y). \quad (5.83)$$

E ainda, quatro vínculos primários, que são

$$\pi_i^{A_t} \approx 0, \quad \pi^B \approx 0.$$

Agora, fazendo a transformação de Legendre da Lagrangiana, temos

$$H = - \int dx (A_t^i D_x \phi_i + B \chi). \quad (5.84)$$

A preservação dos vínculos primários durante a evolução no tempo (fluxo dinâmico), significa que a derivada temporal dos momentos conjugados das variáveis  $A_t^i$  e  $B$  deve ser fracamente

zero; obtemos assim

$$\dot{\pi}_i^{A_t} = \{\pi_i^{A_t}, H\} = D_x \phi_i \equiv \mathcal{G}_i \approx 0, \quad (i = 0, 1, 2), \quad (5.85)$$

$$\dot{\pi}^B = \{\pi^B, H\} = \chi \equiv \mathcal{G}_3 \approx 0. \quad (5.86)$$

Estas expressões  $\mathcal{G}_i$ ,  $\mathcal{G}_3$  são os chamados vínculos secundários. Os vínculos  $\mathcal{G}_i$  são os mesmos do Cap. 5.4. O novo vínculo,  $\mathcal{G}_3$ , representa a fixação de *gauge* temporal.

### 5.6.3 A Álgebra de Vínculos

Usando os colchetes de Poisson canônicos (5.6.2) e (5.83), os colchetes dos vínculos são dados por

$$\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} = f_{ij}{}^n \delta(x-y) \mathcal{G}_n(x) \approx 0, \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= \{D_x \phi_i(x), \chi(y)\}, \\ &= \{\partial_x \phi_i(x) + f_{ij}{}^k A_x^j(x) \phi_k(x), \chi(y)\}, \\ &= -\delta_{i0} \partial_x \delta(x-y) - f_{ij}{}^0 A_x^j(x) \delta(x-y). \end{aligned} \quad (5.88)$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= -\partial_x \delta(x-y) \quad , \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_0(y)\} = -\partial_x \delta(x-y), \\ \{\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= -\sigma \omega \delta(x-y) \quad , \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_1(y)\} = \sigma \omega \delta(x-y), \\ \{\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= \sigma e_x^1 \delta(x-y) \quad , \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_2(y)\} = -\sigma e_x^1 \delta(x-y). \end{aligned} \quad (5.89)$$

Então os colchetes de Poisson, para estes vínculos integrados com parâmetros locais  $\epsilon(x)$  e  $\eta(x)$ , têm a forma:

$$\{\mathcal{G}_\alpha(\epsilon), \mathcal{G}_\beta(\eta)\} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}(\epsilon, \eta) \approx \int dx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \eta \partial_x \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \epsilon \eta \omega \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \epsilon \eta e_x^1 \\ \eta \partial_x \epsilon & \sigma \epsilon \eta \omega & -\sigma \epsilon \eta e_x^1 & 0 \end{pmatrix},$$

com  $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ ; e são avaliados localmente:

$$\{\mathcal{G}_\alpha(x), \mathcal{G}_\beta(y)\} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}(x, y) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma\omega \\ 0 & 0 & 0 & \sigma e_x^1 \\ -\partial_x & \sigma\omega & -\sigma e_x^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \quad (5.90)$$

Calculando o determinante da matriz  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}(x, y)$ , eq. (5.90), obtemos que  $\det(\mathcal{C}_{\alpha\beta}) = 0$ , o que implica na existência de pelo menos um vínculo de segunda classe entre os  $\mathcal{G}_\alpha(x)$ . Como não podemos distinguir claramente os vínculos de primeira classe dos vínculos de segunda classe, vamos redefiní-los, na tentativa de podermos distingui-los após a determinação da álgebra dos mesmos.

#### 5.6.4 Redefinição dos Vínculos

Redefinimos nossos vínculos com  $\mathcal{G}_\alpha \rightarrow \mathcal{G}'_\alpha$ , começando com

$$\mathcal{G}'_0 = a\mathcal{G}_0 + b\mathcal{G}_2 + c\partial_x\mathcal{G}_2,$$

para o qual vamos impor que se cumpra a condição  $\{\mathcal{G}'_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} \approx 0$ :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}'_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= \{a\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} + \{b\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\} + \{c\partial_x\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\}, \\ &\approx a\{\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} + b\{\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\} + c\{\partial_x\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\}, \\ &\approx -a\partial_x\delta(x-y) + b\sigma e_x^1\delta(x-y) + c\partial_x(\sigma e_x^1\delta(x-y)) \approx 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos,

$$b = -a\sigma \frac{\partial_x e_x^1}{(e_x^1)^2} \quad ; \quad c = a \frac{\sigma}{e_x^1}.$$

Tomando  $a = 1$ , temos,

$$\mathcal{G}'_0(x) = \mathcal{G}_0(x) - \sigma \frac{\partial_x e_x^1}{(e_x^1)^2} \mathcal{G}_2(x) + \frac{\sigma}{e_x^1} \partial_x \mathcal{G}_2(x). \quad (5.91)$$

Analogamente,

$$\mathcal{G}'_1(x) = d_1\mathcal{G}_1(x) + d_2\mathcal{G}_2(x),$$

para o qual impomos  $\{\mathcal{G}'_1(x), \mathcal{G}_3(y)\} \approx 0$ , o que implica em

$$d_2 = d_1 \omega(x) / e_x^1(x).$$

Tomando  $d_1 = 1$ , temos

$$\mathcal{G}'_1(x) = \mathcal{G}_1(x) + \frac{\omega(x)}{e_x^1(x)} \mathcal{G}_2(x). \quad (5.92)$$

Finalmente, assumimos

$$\mathcal{G}'_2(x) = \mathcal{G}_2(x) \quad ; \quad \mathcal{G}'_3(x) = \mathcal{G}_3(x). \quad (5.93)$$

Uma vez redefinidos os vínculos, determinamos sua álgebra

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_0(\eta)\} &\approx 0, \\ \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\} &\approx 0, \\ \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_2(\eta)\} &\approx 0, \\ \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_3(\eta)\} &\approx 0, \\ \{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\} &\approx 0, \\ \{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_2(\eta)\} &\approx 0, \\ \{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_3(\eta)\} &\approx 0, \\ \{\mathcal{G}'_2(\epsilon), \mathcal{G}'_2(\eta)\} &= 0, \\ \{\mathcal{G}'_2(\epsilon), \mathcal{G}'_3(\eta)\} &= \int dx \epsilon \eta \sigma e_x^1(x), \\ \{\mathcal{G}'_3(\epsilon), \mathcal{G}'_3(\eta)\} &= 0. \end{aligned}$$

Escrevemos a matriz destes vínculos, tomados localmente,

$$\mathcal{C}'_{\alpha\beta}(x, y) = \{\mathcal{G}'_\alpha(x), \mathcal{G}'_\beta(y)\} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma e_x^1 \\ 0 & 0 & -\sigma e_x^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (5.94)$$

ou,

$$\mathcal{C}'_{\alpha\beta}(x, y) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}'_{ab}(x, y) \end{pmatrix} \delta(x - y),$$

com a submatriz ( $a, b = 2, 3$ ):

$$\mathcal{C}'_{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma e_x^1 \\ -\sigma e_x^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y),$$

cujo inverso, no sentido da convolução, é

$$(\mathcal{C}'_{ab}(x, y))^{-1} = \mathcal{C}'^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma/e_x^1 \\ \sigma/e_x^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y).$$

Inverso no sentido da convolução significa, explicitamente que:

$$\int dz \mathcal{C}'^{ab}(x, z) \mathcal{C}'_{bc}(z, y) = \delta_c^a \delta(x - y).$$

Notemos que  $\mathcal{C}'_{\alpha\beta}$  é uma matriz antisimétrica inversível sobre a superfície de vínculos.

A redefinição dos vínculos permite que a matriz (5.90) seja diagonalizada em blocos, o que torna possível distinguir os vínculos de primeira classe dos de segunda classe na eq. (5.94). Concluimos que  $\mathcal{G}'_0$  e  $\mathcal{G}'_1$  são os vínculos de primeira classe, enquanto que,  $\mathcal{G}'_2$  e  $\mathcal{G}'_3$  são vínculos de segunda classe. Chegamos a esta conclusão inspecionando a matriz (5.94), observando que ela é fracamente de *rank* 2, e que a submatriz  $2 \times 2$  inversível  $\mathcal{C}'_{ab}$  é aquela dos colchetes de  $\mathcal{G}'_2(x)$  e  $\mathcal{G}'_3(x)$ .

### 5.6.5 Tratamento dos Vínculos de Segunda Classe

Ao contrário dos vínculos de primeira classe, que geram invariâncias de *gauge*, definindo, portanto, o setor físico da teoria, os vínculos de segunda classe indicam a presença de graus de liberdade não físicos, pelo fato de existirem colchetes de Poisson não-fracamente nulos com os demais vínculos. Deste modo eles mapeiam estados físicos sobre estados não-físicos, gerando inconsistências na teoria quantizada.

### 5.6.6 Colchetes de Dirac

Dada a existência de vínculos de segunda classe na teoria é preciso trabalhar com os colchetes de Dirac para fazermos a quantização canônica. Os colchetes de Dirac estão definidos como,

$$\begin{aligned} \{A(t, x), B(t, y)\}_D &= \{A(t, x), B(t, y)\} - \\ &\int d^3 z_1 d^3 z_2 \{A(t, x), \mathcal{G}'_a(t, z^1)\} \mathcal{C}'^{ab}(z_1, z_2) \{\mathcal{G}'_b(t, z_2), B(t, y)\}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Aqui  $A, B$  são funcionais dos campos,  $e_x^1, \omega, \varphi_0, \varphi_1, \psi$ . Calculando os colchetes de Dirac, obtemos, para  $A$  e  $B = e_x^1, \omega, \varphi_1, \psi$  (mas não  $\varphi_0$ ):

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\}. \quad (5.96)$$

Explicitamente, para os colchetes não-nulos temos:

$$\begin{aligned} \{e_x^1(x), \varphi_1(y)\}_D &= \{e_x^1(x), \varphi_1(y)\} = \delta(x - y), \\ \{\omega(x), \psi(y)\}_D &= \{\omega(x), \psi(y)\} = \delta(x - y). \end{aligned} \quad (5.97)$$

E para  $B = \varphi_0$ ,

$$\begin{aligned} \{A(x), \varphi_0(y)\}_D &= \{A(x), \varphi_0(y)\} - \{A(x), \mathcal{G}'_a(z^1)\} \mathcal{C}'^{ab}(z_1, z_2) \{\mathcal{G}'_b(z_2), \varphi_0(y)\}, \\ &= \{A(x), \varphi_0(y)\} - \{A(x), \mathcal{G}'_2(y)\} \frac{\sigma}{e_x^1(y)} - \{A(x), \mathcal{G}'_3(y)\} \frac{\sigma \varphi_1(y)}{e_x^1(y)}. \end{aligned}$$

Os colchetes de Dirac dos vínculos de segunda classe com uma função  $A$  qualquer do espaço de fase se anulam:

$$\{A(x), \mathcal{G}'_b(y)\}_D = 0; \quad (\forall A(x), b = 2, 3). \quad (5.98)$$

Esta propriedade permite impor, de maneira consistente, as igualdades fortes

$$\mathcal{G}'_2 = 0 \quad ; \quad \mathcal{G}'_3 = \chi = 0. \quad (5.99)$$

De (5.99), a segunda equação é a condição de *gauge*, e a primeira permite eliminar o campo  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0 = \sigma \frac{\partial_x \psi}{e_x^1}. \quad (5.100)$$

$\mathcal{G}'_0$  e  $\mathcal{G}'_1$ , definidos por (5.91) e (5.92), tornam-se

$$\begin{aligned}\mathcal{G}'_0(x) &= \mathcal{G}_0(x) = \partial_x \varphi_0 + \Omega e_x^1 \psi - \omega \varphi_1 \\ &= \sigma \partial_x \left( \frac{\partial_x \psi}{e_x^1} \right) + \Omega e_x^1 \psi - \omega \varphi_1,\end{aligned}\tag{5.101}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}'_1(x) &= \mathcal{G}_1(x) = \partial_x \varphi_1 + \sigma \omega \varphi_0 \\ &= \partial_x \varphi_1 + \omega \frac{\partial_x \psi}{e_x^1},\end{aligned}\tag{5.102}$$

com  $\varphi_0$  dado por (5.100).

Depois de usarmos os colchetes de Poisson para distinguirmos os vínculos de primeira classe dos vínculos de segunda classe, todas as equações da teoria devem ser formuladas em termos dos colchetes de Dirac, com os vínculos de segunda classe convertendo-se em identidades fortes (5.99), o que permite substituir  $\chi$  por 0, e a variável  $\varphi_0$  pela expressão (5.100) em termos das outras variáveis canônicas.

### 5.6.7 Simetria de *Gauge* e Difeomorfismos

Tomando em conta as igualdades fortes (5.99) podemos calcular a álgebra de Dirac para os vínculos  $\mathcal{G}_0$  e  $\mathcal{G}_1$ , obtendo:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}_0(\epsilon), \mathcal{G}_0(\eta)\}_D &= \sigma \int dx (\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon) \frac{\mathcal{G}_1(x)}{e_x^1}, \\ \{\mathcal{G}_0(\epsilon), \mathcal{G}_1(\eta)\}_D &= \int dx \frac{\eta \partial_x \epsilon}{e_x^1} \mathcal{G}_0(x), \\ \{\mathcal{G}_1(\epsilon), \mathcal{G}_1(\eta)\}_D &= - \int dx (\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon) \frac{\mathcal{G}_1(x)}{e_x^1},\end{aligned}\tag{5.103}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\{\mathcal{G}_0(\epsilon), \mathcal{G}_0(\eta)\}_D &= \sigma \mathcal{G}_1 \left( \frac{1}{e} [\epsilon, \eta] \right), \\ \{\mathcal{G}_0(\epsilon), \mathcal{G}_1(\eta)\}_D &= \mathcal{G}_0 \left( \frac{1}{e} \eta \partial \epsilon \right), \\ \{\mathcal{G}_1(\epsilon), \mathcal{G}_1(\eta)\}_D &= -\mathcal{G}_1 \left( \frac{1}{e} [\epsilon, \eta] \right),\end{aligned}\tag{5.104}$$

onde,  $[\epsilon, \eta] = (\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon)$ . O que confirma  $\mathcal{G}_0(x)$  e  $\mathcal{G}_1(x)$  como vínculos de primeira classe. As transformações de *gauge* infinitesimais geradas por eles são dadas por:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_0(\epsilon), \varphi_1(x)\}_D &= \sigma \frac{\partial_x \epsilon(x) \partial_x \psi(x)}{e_x^1{}^2} + \Omega \epsilon(x) \psi(x) \\ &= \xi^x \mathcal{G}_1(x) + \xi^t \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta e_x^1} - \frac{\sigma}{e_x^1} \lambda \partial_y \psi \\ &\quad + \mathcal{L}_{(\xi^t, -\xi^x)} \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_0(\epsilon), \psi(x)\}_D &= -\epsilon(x) \varphi_1(x) \\ &= \xi^t \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta \omega} + \mathcal{L}_{(\xi^t, -\xi^x)} \psi(x), \end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_0(\epsilon), e_x^1(x)\}_D &= \epsilon(x) \omega(x) \\ &= -\xi^t \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta \varphi_1} + \mathcal{L}_{(\xi^t, -\xi^x)} e_x^1(y), \end{aligned} \quad (5.107)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_0(\epsilon), \omega(x)\}_D &= -\sigma \partial_x \left( \frac{\partial_x \epsilon(x)}{e_x^1(x)} \right) - \Omega \epsilon(x) e_x^1(x) \\ &= -\xi^t \frac{\delta S_{BF}[A, \phi]}{\delta \psi} + \sigma \partial_y \lambda + \mathcal{L}_{(\xi^t, +\xi^x)} \omega(x). \end{aligned} \quad (5.108)$$

Aqui,

$$\lambda = -N \partial_x \left( \frac{\epsilon}{e_x^1 N} \right) - \epsilon \frac{\partial_x e_x^1}{(e_x^1)^2}, \quad (5.109)$$

$$\xi^t = \frac{\epsilon}{N}, \quad (5.110)$$

$$\xi^x = \frac{\epsilon N^1}{e_x^1 N}, \quad (5.111)$$

e, para  $\mathcal{G}_1$ :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_1(\eta), \varphi_1(x)\}_D &= -\frac{\eta(x)}{[e_x^1(x)]^2} \omega \partial_x \psi(x) = \frac{\omega(x)}{e_x^1(x)} \mathcal{L}_{(0, \zeta)} \psi(x), \\ \{\mathcal{G}_1(\eta), \psi(x)\}_D &= \frac{\eta(x)}{e_x^1(x)} \partial_x \psi(x) = \mathcal{L}_{(0, \zeta)} \psi(x), \\ \{\mathcal{G}_1(\eta), e_x^1(x)\}_D &= \partial_x \eta(x) = \mathcal{L}_{(0, \zeta)} e_x^1(x), \\ \{\mathcal{G}_1(\eta), \omega(x)\}_D &= \partial_x \left( \frac{\eta(x)}{e_x^1(x)} \omega(x) \right) = \mathcal{L}_{(0, \zeta)} \omega(x), \end{aligned} \quad (5.112)$$

onde,  $\zeta(x) = \frac{\eta(x)}{e_x^1(x)}$ .

Nas expressões (5.105–5.108), o símbolo  $\mathcal{L}_{(\zeta^t, \zeta^x)}$  representa a derivada de Lie na direção do vetor  $(\zeta^t, \zeta^x)$ , gerando os difeomorfismos temporais e espaciais. Podemos interpretar esse resultado da maneira seguinte: a condição de *gauge* temporal (5.80), que quebra a invariância de *gauge*,

deixa duas simetrias locais residuais. A primeira consiste na invariância sob os difeomorfismos espaciais, parametrizados pela função  $\zeta = \frac{\eta}{e_x^1}$ , gerados pelo vínculo  $\mathcal{G}'_1(\eta)$  (ver (5.112)), enquanto a segunda simetria gerada por  $\mathcal{G}'_0(\epsilon)$ , a menos de equações de movimento<sup>12</sup> e dos vínculos, é a invariância sob uma certa combinação de difeomorfismos temporais e espaciais, de parâmetros  $\xi^t$  e  $\xi^x$ , com uma transformação de Lorentz local de parâmetro  $\lambda$ , (ver as eq. (5.105–5.108)). Esta última transformação de Lorentz é compensatória, isto é, reestabelece a condição de *gauge* temporal quebrada pelos difeomorfismos temporais.

### 5.6.8 Hamiltoniano Final

Aplicando a teoria de Dirac podemos analisar a teoria de maneira consistente. Essencialmente, a formulação de Dirac permitiu eliminar os vínculos de segunda classe, os quais geravam inconsistências na teoria. A Hamiltoniana final é dada apenas em função dos vínculos de primeira classe, que são os geradores das transformações de *gauge*. Assim,

$$H_F = - \int dx (\mathcal{N}^0(x) \mathcal{G}_0(x) + \mathcal{N}^1(y) \mathcal{G}_1(x)) , \quad (5.113)$$

onde  $\mathcal{N}^0$  e  $\mathcal{N}^1$  são funções arbitrárias.

As equações de movimento para uma variável física  $\mathcal{F}$  podem ser determinadas mediante a equação de Hamilton-Dirac,

$$\dot{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}, H_F\}_D . \quad (5.114)$$

Determinamos as equações de movimento para os campos independentes após a fixação, isto é, a dinâmica dos campos  $e_x^1$ ,  $\omega_x$ ,  $\varphi_1$  e  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \partial_t e_x^1(x) &= \{e_x^1(x), H\}_D = \int dy \{ \mathcal{N}^0(y) \mathcal{G}_0(y) + \mathcal{N}^1(y) \mathcal{G}_1(y), e_x^1(x) \}_D \\ &= \int dy (\mathcal{N}^0(y) \{ \mathcal{G}_0(y), e_x^1(x) \}_D - \mathcal{N}^1(y) \{ \mathcal{G}_1(y), e_x^1(x) \}_D) \\ &= \int dy (\mathcal{N}^0(y) \omega_x(x) \delta(y-x) + \partial_y \mathcal{N}^1(y) \delta(y-x)) \\ &= \mathcal{N}^0(x) \omega_x(x) + \partial_x (\mathcal{N}^1(x)) , \end{aligned} \quad (5.115)$$

---

<sup>12</sup>As derivadas funcionais  $\delta S_{\text{BF}}[A, \phi] / \delta \varphi$  e  $\delta S_{\text{BF}}[A, \phi] / \delta A_x^i$  são da ação original (5.14), correspondendo às equações de movimento (5.60) ou (5.63).

$$\begin{aligned}\partial_t \omega_x(x) &= -\{H, \omega(x)\}_D \\ &= -\sigma \partial_x \left( \frac{\partial_x \mathcal{N}^0(x)}{e_x^1(x)} \right) + \partial_x \left( \frac{N^1(x)}{e_x^1(x)} \omega_x(x) \right) - \Omega \mathcal{N}^0(x) e_x^1(x),\end{aligned}\quad (5.116)$$

$$\partial_t \varphi_1(x) = \sigma \frac{\partial_x \mathcal{N}^0(x) \partial_x \psi(x)}{(e_x^1)^2} + \Omega \mathcal{N}^0(x) \psi(x) - \mathcal{N}^1(x) \omega(x) \frac{\partial_x \psi(x)}{(e_x^1)^2}, \quad (5.117)$$

$$\partial_t \psi(x) = -\mathcal{N}^0(x) \varphi_1(x) + \mathcal{N}^1(x) \frac{\partial_x \psi(x)}{e_x^1(x)}. \quad (5.118)$$

Estas quatro equações de movimento são equivalentes às equações de movimento originais (5.60), (5.62) e (5.63) quando  $\chi = 0$ ,  $\varphi_0 = \sigma \partial_x \psi / e_x^1$ , substituindo  $\omega_t$  em função dos outros campos usando a primeira das equações (5.60):

$$\omega_t = -\sigma \frac{\partial_x N}{e_x^1} + \frac{N^1}{e_x^1} \omega_x, \quad (5.119)$$

com os multiplicadores de Lagrange  $\mathcal{N}^0$  e  $\mathcal{N}^1$  sendo substituídos por  $N$  e  $N^1$ , respectivamente. Fazendo isto nas equações (5.115 – 5.118) teremos:

$$\partial_t e_x^1(x) = \omega_x(x) N(x) + \partial_x N^1(x),$$

$$\partial_t \omega_x(x) = \partial_x \omega_t - \Omega N(x) e_x^1(x),$$

$$\partial_t \varphi_1(x) = -\sigma \omega_t(x) \varphi_0(x) + \Omega N(x) \psi(x),$$

$$\partial_t \psi(x) = -N(x) \varphi_1(x) + \frac{N^1(x)}{e_x^1(x)} \partial_x \psi(x),$$

que são as equações originais, como era de se esperar.

## Capítulo 6

# Preliminares para a Quantização em duas dimensões

Neste capítulo exploramos de forma sucinta vários aspectos do espaço conhecido como a compactificação de Bohr <sup>1</sup> da linha real, caracterizado-o como o espaço de configuração na representação de polímeros. Como é bem conhecido na literatura [59–61] o espaço de configuração quântico da Cosmologia Quântica de Laços (*Loop Quantum Cosmology* - LQC) também é caracterizado como sendo a compactificação de Bohr. Analogias com a Gravidade Quântica de Laços (*Loop Quantum Gravity* - LQG) são exploradas, nos dando uma introdução à parte da sua estrutura matemática em um contexto técnico simplificado. A compactificação de Bohr da linha real, a qual denotaremos de  $\overline{\mathbb{R}}$ , é um espaço bem conhecido da comunidade matemática, com muitas caracterizações [62]. Não é surpresa que estas caracterizações são análogas às caracterizações do espaço das conexões generalizadas  $\overline{\mathcal{A}}$  <sup>2</sup>, como o espaço de configuração quântico em LQG. Neste capítulo providenciamos uma revisão compacta de todos os aspectos do espaço de configuração quântico  $\overline{\mathbb{R}}$ , junto com a construção explícita do espaço de configuração na representação de polímeros.

A importância deste capítulo está no fato de que ele nos fornecerá uma base sólida para construirmos um espaço de configuração quântico para o nosso modelo (modelo JT), seguindo de perto a representação de polímeros para campos escalares [63, 64].

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Na seção 6.1 fazemos uma revisão da represen-

---

<sup>1</sup>Harald August Bohr (1887-1951) irmão de Niels Henrik David Bohr (1885-1962).

<sup>2</sup>Para mais detalhes sobre a construção de  $\overline{\mathcal{A}}$  ver [12].

tação de polímeros como usada, por exemplo, em LQC [59]. Nesta seção surgem a compatificação de Bohr e sua estrutura. A seção 6.2.1 descreve  $\overline{\mathbb{R}}$  como o espaço dos homomorfismos. Até certo ponto, isto corresponde a uma caracterização similar de  $\overline{\mathcal{A}}$ . Porém,  $\overline{\mathbb{R}}$  é um grupo, ele também é equipado com mais estruturas, e em particular com a medida de Haar. O espaço de configuração na representação de polímeros é então, apresentado na seção 6.2.2. Na seção 6.3 discutimos a caracterização projetiva de  $\overline{\mathbb{R}}$ , que está diretamente relacionada a uma importante estrutura em LQG. Na seção 6.4 o espaço  $\overline{\mathbb{R}}$  é visto como sendo o espectro da álgebra de configuração clássica, correspondendo à construção original de  $\overline{\mathcal{A}}$ . Várias referências são dadas ao longo do capítulo, esperamos que o leitor consulte tais referências para uma exposição mais detalhada.

## 6.1 Representação de Polímeros

### 6.1.1 A formulação do espaço dos Momentos

Vamos considerar o espaço de fase  $T^*\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$  de uma partícula na linha, de coordenadas  $(x, p)$ , onde  $x$  é a variável de configuração e  $p$  a variável momento canônico. Definiremos a representação de polímeros associada às relações de Weyl, utilizando a formulação do espaço dos momentos como segue.

Seja  $\mathcal{H}_p$  o espaço de Hilbert não-separável varrido linearmente pelos vetores de base  $|p\rangle$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , tal que,  $\langle p|p'\rangle = \delta_{pp'}$ , onde  $\delta_{pp'}$  é o delta de Kronecker. Um dado elemento de  $\mathcal{H}_p$  pode ser escrito na seguinte forma,

$$\sum_{p \in \mathbb{R}} \psi(p) |p\rangle, \quad \sum_{p \in \mathbb{R}} |\psi(p)|^2 < \infty. \quad (6.1)$$

Desta forma, o espaço dos polímeros pode ser descrito como espaço das funções complexas sobre  $\mathbb{R}$  que são de quadrado integrável em relação a uma medida discreta. Necessariamente, a função de onda  $\psi(p)$  é não nula somente sobre um subconjunto enumerável de  $\mathbb{R}$ .

O operador de momento  $\hat{p}$  é definido nesta representação como,

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad \text{ou} \quad \hat{p}\psi(p) = p\psi(p). \quad (6.2)$$

Desde que a medida discreta seja invariante sob translações, podemos definir operadores unitários  $\hat{U}(k)$  implementando as translações no espaço dos momentos:

$$\hat{U}(\lambda)|p\rangle = |p + \lambda\rangle, \quad \text{ou} \quad \hat{U}(\lambda)\psi(p) = \psi(p - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

A exponenciação do operador  $\hat{p}$ , junto com os operadores  $\hat{U}(\lambda)$  nos fornece uma representação das relações de Weyl que são, além disso, irredutíveis. Porém, a representação de  $\mathbb{R}$  dada por  $\lambda \mapsto \hat{U}(\lambda)$  é claramente não contínua. Na realidade, para  $\lambda$  arbitrariamente pequeno, um vetor  $|p\rangle$  é mapeado por  $\hat{U}(\lambda)$  em um vetor ortogonal  $|p + \lambda\rangle$ . Assim, o gerador que corresponderia ao operador de configuração  $\hat{x}$  não é definido.

Os operadores  $\hat{U}(\lambda)$  podem ser vistos, não obstante, como dando a quantização das funções clássicas de configuração  $e^{i\lambda x}$ . As condições de realidade são satisfeitas, desde que,  $\hat{U}(\lambda)^\dagger = \hat{U}(-\lambda)$ . Desta forma, a representação de polímeros nos fornece uma quantização, no sentido usual de Dirac, da álgebra de Poisson das funções do espaço de fase que são combinações lineares das funções  $p$  e  $e^{i\lambda x}$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Em particular,

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \sum_j c_j e^{i\lambda_j x}, \quad (6.4)$$

onde a soma em  $j$  é finita, sendo os  $\lambda_j$  números reais arbitrários e  $c_j$  coeficientes complexos. O conjunto das funções (6.4), claramente pontos separados em  $\mathbb{R}$ , isto é, dados  $x, x' \in \mathbb{R}$ , onde  $x \neq x'$ , podemos encontrar uma função  $f$ , de modo que,  $f(x) \neq f(x')$ . Na realidade, duas funções,  $e^{i\lambda_1 x}$  e  $e^{i\lambda_2 x}$  são pontos separados se a razão  $\lambda_1/\lambda_2$  é um número irracional.

Nesta representação, o espectro do operador momento  $\hat{p}$  é a linha real, mas cada ponto de  $\mathbb{R}$  pertence a um espectro discreto, em vez do espectro contínuo, desde que os autovetores  $|p\rangle$  existam. Neste sentido, o *espaço de configuração quântico* na representação de polímeros pode ser visto como sendo a reta  $\mathbb{R}$  equipada com a topologia discreta. Note que se trocarmos os papéis das variáveis de configuração e momento, obteremos uma representação não-equivalente, onde a compatificação de Bohr da linha real  $\mathbb{R}$  [65, 66], corresponde ao espaço dos momentos. Com a variável  $x$  correspondendo às conexões e  $p$  às tríades, a representação de polímeros usada em cosmologia quântica de laços [59], é a mesma descrita anteriormente.

No caso da gravidade quântica de laços as funções  $x \mapsto e^{i\lambda x}$  fazem o papel das holonomias, indexadas pelo número real  $\lambda$ , que corresponde aos edges.

### 6.1.2 Do espaço dos momentos ao espaço de configuração: uma digressão

Na representação de polímeros, nós podemos ver as variáveis de configuração (6.4) como operadores de multiplicação, de tal modo, a obtermos uma representação equivalentemente unitária. Note que o espaço linear das variáveis de configuração (6.4), é na verdade, uma  $*$ -álgebra com a identidade [12], em relação à multiplicação das funções e a conjugação complexa. Chamaremos esta álgebra de  $\mathcal{C}$ , ela será representada em termos de operadores limitados em  $\mathcal{H}_P$ . Além disto, a representação é cíclica, isto é, existe um vetor, por exemplo,  $|0\rangle \in \mathcal{H}_P$ , tal que, a ação da representação de  $\mathcal{C}$  sobre  $|0\rangle$  produz um conjunto denso.

Vamos agora tirar proveito da teoria das  $C^*$ -álgebras comutativas [67, 68]. Em nosso caso, podemos obter uma  $C^*$ -álgebra completando nossa  $*$ -álgebra em uma norma apropriada. No presente caso, já temos uma representação, assim a coisa mais óbvia a fazermos é considerar a norma do operador na representação de polímeros e a correspondente  $C^*$ -álgebra dos operadores limitados gerados pelos  $\hat{U}(k)$ . Esta álgebra coincide com a álgebra de Bohr das funções *almost*-periódicas [65], isto é, a álgebra das funções limitadas e contínuas em  $\mathbb{R}$  obtida a partir do completamento de  $\mathcal{C}$  em relação a norma do supremo. Nós denotamos esta  $C^*$ -álgebra por  $\overline{\mathcal{C}}$ , correspondendo a álgebra da holonomias em LQG. Os resultados gerais da teoria das  $C^*$ -álgebras [67, 68] nos dizem que uma  $C^*$ -álgebra comutativa (com a identidade)  $\mathcal{B}$  pode ser descrita como a álgebra  $C(\Delta)$  de todas as funções contínuas sobre o espaço compacto  $\Delta$ , chamado de espectro da álgebra. O isomorfismo que mapeia os elementos de  $\mathcal{B}$  em funções no espectro é chamado de transformação de Gel'fand. Quando, como no presente caso, a álgebra  $\mathcal{B}$  é uma álgebra das funções em dado espaço  $\mathcal{S}$ , e a álgebra separa pontos, a transformação de Gel'fand também nos dá um mapeamento injetivo  $\mathcal{S} \rightarrow \Delta$ , cuja imagem é um conjunto denso. A compatificação de Bohr pode ser vista como um caso particular desta compatificação de Gel'fand. No nosso caso, o espectro da álgebra  $\overline{\mathcal{C}}$  é o espaço  $\overline{\mathbb{R}}$ , a compatificação de Bohr da linha real, que contém  $\mathbb{R}$  como um subconjunto denso.

Finalmente, uma representação cíclica da álgebra das funções contínuas  $C(X)$  sobre um espaço compacto  $X$  pode ser naturalmente realizada no espaço de Hilbert  $\mathcal{L}^2(X, \mu)$  das funções de quadrado integrável com respeito a uma medida normalizada  $\mu$  sobre  $X$ .

Diante de tudo o que dissemos, fica garantido existir uma medida  $\mu_0$  sobre  $\overline{\mathbb{R}}$ , tal que, a representação de polímeros de  $\overline{\mathcal{C}}$  é unitariamente equivalente à representação em  $\mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}}, \mu_0)$ ,

com os elementos de  $\overline{\mathcal{C}}$  atuando como operadores de multiplicação.

Podemos ainda, ver que o conhecimento do espectro da álgebra não tem muito a nos dizer acerca do espaço de configuração quântico para uma determinada representação. Este é determinado através do suporte da medida correspondente. No caso da representação de polímeros a extensão a partir do espaço clássico  $\mathbb{R}$  no espaço  $\overline{\mathbb{R}}$  é, na realidade, essencial. Esta situação é típica de teoria quântica de campos, incluindo a LQG.

Como em LQG, uma descrição projetiva de  $\overline{\mathbb{R}}$  pode ser dada. Esta descrição está relacionada à estrutura indutiva da álgebra  $\mathcal{C}$  (6.4). Esta estrutura é fornecida pela família das  $*$ -subálgebras finitamente geradas, cuja união é a álgebra  $\mathcal{C}$ . De modo natural, o espectro de (o complemento de) cada uma destas álgebras é um toro, sendo sua dimensão igual ao número de geradores. Como nós consideramos subálgebras cada vez maiores, nós podemos ver o espectro de  $\overline{\mathbb{R}}$  como o limite de uma família de toros de dimensões crescentes.

Do ponto de vista algébrico, uma caracterização natural de  $\overline{\mathbb{R}}$  está relacionada às propriedades dos elementos básicos de  $\mathcal{C}$ , normalmente, funções exponenciais. Estes elementos são indexados pelos números reais  $\lambda$  e definem homomorfismos de  $\mathbb{R}$  no círculo unitário em  $\mathbb{C}$ , os quais em particular são contínuos. Pode-se mostrar que  $\overline{\mathbb{R}}$  coincide com o conjunto de todos os homomorfismos não necessariamente contínuos de  $\mathbb{R}$  no círculo unitário.

Esta caracterização de  $\overline{\mathbb{R}}$  é bem conhecida em análise harmônica [66], onde  $\overline{\mathbb{R}}$  é visto como sendo o grupo dual do grupo discreto  $\mathbb{R}$ . A relação com a abordagem via  $C^*$ -álgebra, é que  $\overline{\mathcal{C}}$  é essencialmente gerada pelo grupo discreto  $\mathbb{R}$ . Assim, em particular,  $\overline{\mathbb{R}}$  é um grupo compacto comutativo, equipado com a medida de Haar, que é precisamente a medida  $\mu_0$  correspondendo à representação de polímeros. Desta perspectiva, a transformação unitária de  $\mathcal{H}_P$  em  $\mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}}, \mu_0)$  é uma transformada de Fourier.

Embora esta estrutura de grupo não esteja presente no espaço das conexões generalizadas  $\overline{\mathcal{A}}$  em LQG [12], sua caracterização como um conjunto de homomorfismos é, na realidade, uma das três caracterizações conhecidas. Assim, esta descrição tem um análogo também em LQG.

Podemos notar que introduzindo a medida  $\mu_0$  através das técnicas projetivas-indutivas (correspondendo a introdução da medida de Ashtekar-Isham-Lewandowski em LQG), embora possível, aqui não é natural. Então, começamos com uma dada medida de Haar em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Por outro lado, o que fizemos anteriormente confirma explicitamente que o espectro de Gelfand de  $\overline{\mathcal{C}}$  coincide

com o dual do grupo discreto  $\mathbb{R}$ . Em particular, concernente às subálgebras geradas finitamente (que é a essência do argumento), esta discussão nos dá um fácil exemplo da compatificação de Gel'fand em dimensões finitas.

## 6.2 O espaço de configuração

O espaço  $\overline{\mathbb{R}}$  é introduzido como o conjunto de todos os homomorfismos correspondendo à similar caracterização de  $\overline{\mathcal{A}}$ . O papel do grupóide dos caminhos [12], é aqui desempenhado pelo grupo discreto  $\mathbb{R}$ . O grupo  $SU(2)$  é trocado por  $T$ , o círculo unitário no plano complexo  $\mathbb{C}$ .

Como mencionado, a caracterização de  $\overline{\mathbb{R}}$  é precisamente a mesma que a de um grupo dual. Embora não insistirmos nisto, a estrutura de  $\overline{\mathbb{R}}$  é introduzida desde o começo. Além disto, alguns resultados básicos da análise harmônica [62, 66] necessariamente surgirão, em particular na seção (6.2.2), onde uma versão do espaço de configuração na representação de polímeros é apresentada.

### 6.2.1 O espaço de configuração quântico visto como um grupo compacto

Consideremos a linha real  $\mathbb{R}$  equipada com uma estrutura de grupo comutativo dada pela adição dos números reais. A compatificação de Bohr  $\overline{\mathbb{R}}$  [12] pode ser descrita como sendo o conjunto  $\text{Hom}[\mathbb{R}, T]$  de todos os homomorfismos, não necessariamente contínuos a partir do grupo  $\mathbb{R}$  no grupo multiplicativo  $T$  de unitários em  $\mathbb{C}$ .

Um elemento genérico de  $\overline{\mathbb{R}}$  será denotado por  $\chi$ . Assim, todo  $\chi \in \overline{\mathbb{R}}$  é um mapeamento,  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow T$ , tal que,

$$\chi(0) = 1 \text{ e } \chi(\lambda_1 + \lambda_2) = \chi(\lambda_1)\chi(\lambda_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Desde de que  $T$  é um grupo multiplicativo, fica evidente que

$$\chi\chi'(\lambda) := \chi(\lambda)\chi'(\lambda) \quad (6.6)$$

define uma estrutura de grupo sobre  $\overline{\mathbb{R}}$ , que é naturalmente comutativa. O grupo  $\overline{\mathbb{R}}$  é um subgrupo do grupo de todos os mapeamentos (não necessariamente homomorfismos) de  $\mathbb{R}$  em  $T$ . Desde que, este grupo possa ser identificado com o grupo produto  $\times_{\lambda \in \mathbb{R}} T$ , e  $T$  é compacto, ele carrega a topologia produto de Tychonoff [12, 39, 41, 42], em relação a qual,  $\times_{\lambda \in \mathbb{R}} T$  se torna um grupo compacto de Hausdorff. Essa estrutura é herdada pelo subgrupo  $\overline{\mathbb{R}}$ , fazendo com que ele seja um grupo topológico. Além disso, a partir do fato que  $\overline{\mathbb{R}}$  contém somente homomorfismos, podemos ver ele como um subconjunto fechado de  $\times_{\lambda \in \mathbb{R}} T$ . Portanto,  $\overline{\mathbb{R}}$  é compacto.

Assim,  $\overline{\mathbb{R}}$  é um grupo compacto comutativo em relação a operação (6.6) e a topologia de Tychonoff. Uma descrição mais explícita desta topologia seria a seguinte. Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , consideramos a função  $\mathcal{F}_\lambda : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow T$  definida por,

$$\mathcal{F}_\lambda(\chi) = \chi(\lambda). \quad (6.7)$$

As funções (6.7) são contínuas e na realidade, a topologia de Tychonoff em  $\overline{\mathbb{R}}$  é precisamente uma topologia fraca, de modo que, todas as funções (6.7),  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , são contínuas.

Como em LQG, no caso das conexões, existe um mapeamento natural a partir do espaço de configuração clássico no espaço de configuração quântico, aqui vamos chamá-lo de  $\Theta$ , definido como (veremos na seção 6.4 que  $\Theta$  é, na verdade, a compatificação de Gel'fand-Bohr):

$$\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad y \mapsto \chi_y; \quad \chi_y(\lambda) := e^{iy\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6.8)$$

Desde que, este mapeamento é injetivo, o conjunto  $\overline{\mathbb{R}}$  pode ser visto como uma extensão de  $\mathbb{R}$ . Assim, o espaço de configuração clássico se comporta como o subespaço dos homomorfismos contínuos do espaço de todos os homomorfismos em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Em adição a isso, a imagem de  $\Theta(\mathbb{R})$  é um subconjunto denso. É bom mencionarmos que a injeção  $\Theta$  é contínua, mas ela não é um homeomorfismo em sua imagem. A topologia induzida sobre  $\mathbb{R}$  como um subconjunto de  $\overline{\mathbb{R}}$ , a qual pode ser vista como uma topologia fraca, de modo que todas as funções  $x \mapsto e^{i\lambda x}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , são contínuas, é mais fraca que a topologia usual.

É importante notarmos que, desde que reconheçamos  $\overline{\mathbb{R}}$ , como sendo o espectro da  $C^*$ -álgebra  $\overline{\mathcal{C}}$ , fica garantido que qualquer função *almost*-periódica em  $\mathbb{R}$  [12, 62, 65] pode ser estendida a partir do conjunto denso  $\Theta(\mathbb{R})$  em funções contínuas em  $\overline{\mathbb{R}}$  (esta é a transformação de Gelfand, neste caso). Em particular, as funções  $\mathcal{F}_\lambda$  correspondem à funções exponenciais  $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{i\lambda x}$ . Porém, especialmente na introdução da medida que define a representação, essa correspondência será

vista no contexto de operadores, isto é, quando considerada como um operador de multiplicação, no qual,  $\mathcal{F}_\lambda$  corresponde à função clássica  $e^{i\lambda x}$ , dando, na verdade, sua quantização.

## 6.2.2 Representação de polímeros no espaço de configuração

Sendo um grupo compacto,  $\overline{\mathbb{R}}$  é equipado com uma medida invariante (sob operações do grupo) normalizada  $\mu_0$ , a medida de Haar. A medida de Haar nos dá precisamente a representação de polímeros do espaço de configuração, como podemos ver adiante.

Consideremos o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável  $\mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}}, \mu_0)$ , o qual chamaremos de  $\mathcal{H}_0$ . Desde que, as funções  $\mathcal{F}_\lambda$  (6.7) são contínuas, elas são em particular integráveis. Como já era esperado elas formam uma base ortonormal em  $\mathcal{H}_0$ . Pode-se ver facilmente a partir da invariância da medida  $\mu_0$ , que esta base é ortonormal. De fato, para todo  $\chi \in \overline{\mathbb{R}}$  temos:

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{F}_\lambda(\chi' \chi) d\mu_0(\chi) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{F}_\lambda(\chi) d\mu_0(\chi), \quad (6.9)$$

o que nos leva a,

$$(1 - \chi'(\lambda)) \int_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{F}_\lambda d\mu_0 = 0. \quad (6.10)$$

Desde que, isto seja verdade para  $\forall \chi' \in \overline{\mathbb{R}}$ , concluímos que

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{F}_\lambda d\mu_0 = \delta_{\lambda,0}, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{R}}, \quad (6.11)$$

onde  $\delta_{\lambda,0}$  é o delta de Kronecker. A partir de  $\mathcal{F}^*_\lambda = \mathcal{F}_{-\lambda}$  e  $\mathcal{F}_\lambda \mathcal{F}_{\lambda'} = \mathcal{F}_{\lambda+\lambda'}$  segue que  $\{\mathcal{F}_\lambda, \lambda \in \overline{\mathbb{R}}\}$  é uma base ortonormal completa. É fácil confirmar que esta base é completa, desde que, o espaço das combinações lineares finitas das funções  $\mathcal{F}_\lambda$  é uma \*-subálgebra da álgebra de todas as funções contínuas  $C(\overline{\mathbb{R}})$ , que contém a função identidade, e pontos separados em  $\overline{\mathbb{R}}$ . O teorema de Stone-Weierstrass [12, 69, 70] nos assegura que este espaço linear é denso em  $C(\overline{\mathbb{R}})$  em relação a norma do supremo. Alternativamente, este espaço linear corresponde a  $\mathcal{C}$ , o qual é denso em  $\overline{\mathcal{C}}$  por construção. Seguindo argumentos padrões pode-se mostrar que ele é necessariamente denso em relação a norma  $\mathcal{L}^2$ <sup>3</sup>.

Deste modo, o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_0$  é isomórfico ao espaço dos polímeros  $\mathcal{H}_P$ , sendo a trans-

<sup>3</sup>Para um conjunto compacto  $X$ ,  $C(X)$  é  $\mathcal{L}^2$  denso para uma dada medida de Borel. Por outro lado, convergência uniforme implica em convergência  $\mathcal{L}^2$ .

formação unitária  $\mathcal{I} : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_0$  dada pelo mapeamento entre as bases:

$$\mathcal{I} : |p \rangle \mapsto \mathcal{F}_p, \quad \forall p \in \mathbb{R}. \quad (6.12)$$

O espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_0$  providencia-nos uma representação da  $C^*$ -álgebra  $C(\overline{\mathbb{R}})$ , a qual é fidedigna, desde que a medida invariante de Haar o é (isto é, todo conjunto não-vazio tem uma medida não-nula). Em particular, tomando o representante de  $\mathcal{F}_\lambda \in C(\overline{\mathbb{R}})$  por  $\Pi(\lambda)$ , temos:

$$\Pi(\lambda)\psi(\chi) = \mathcal{F}_\lambda(\chi)\psi(\chi), \quad \psi(\chi) \in \mathcal{H}_0. \quad (6.13)$$

Em adição a isto, desde que, a medida de Haar é invariante, ela é particularmente invariante sob a ação do subgrupo clássico  $\Theta(\mathbb{R})$ . Define-se naturalmente o grupo unitário a um parâmetro  $\Upsilon(y)$ :

$$\Upsilon(y)\psi(\chi) = \psi(\chi_y\chi), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \psi(\chi) \in \mathcal{H}_0. \quad (6.14)$$

Pode-se ver facilmente que a transformação unitária  $\mathcal{I}$  mapeia os operadores  $\hat{U}(\lambda)$  em  $\Pi(\lambda)$  e  $e^{iy\hat{p}}$  em  $\Upsilon(y)$ . A quantização da variável momento pode ser definida sobre o subspaço das combinações lineares finitas das funções  $\mathcal{F}_\lambda$ , por

$$\Pi(p)\mathcal{F}_\lambda = \lambda\mathcal{F}_\lambda. \quad (6.15)$$

A representação  $\mathcal{H}_0$  definida por (6.13) e (6.14) é então, uma versão unitariamente equivalente da representação de polímeros.

É interessante observarmos que a irreduzibilidade é alcançada na representação de configuração, apesar do fato de termos somente um operador de momento. Isto é possível, devido a densidade de órbitas da ação do grupo clássico  $\Theta(\mathbb{R})$ . Assim, não existe uma função não-trivial em  $\overline{\mathbb{R}}$  que permaneça invariante sob a ação do grupo clássico  $\Theta(\mathbb{R})$  e portanto, o operador de configuração não comuta com  $\Pi(p)$ .

Finalmente, as combinações lineares finitas da forma  $\sum c_\lambda \mathcal{F}_\lambda(\chi) = \sum c_\lambda \chi(\lambda)$ , podem ser vistas como elementos de  $\mathcal{H}_0$  que dependem somente dos valores de  $\chi$  sobre um conjunto finito de pontos, estas combinações lineares finitas são chamadas funções cilíndricas.

## 6.3 Aspectos Projetivos

Apresentamos agora a caracterização projetiva de  $\overline{\mathbb{R}}$ , correspondendo de modo semelhante a estrutura projetiva em LQG [36, 38, 71]. Já mencionamos que esta estrutura está diretamente relacionada à família das  $*$ -subálgebras geradas finitamente da  $*$ -álgebra de configuração  $\mathcal{C}$  (6.4).

### 6.3.1 O espaço de configuração quântico visto como um limite projetivo

Para  $n \in \mathbb{N}$  ( $n$  arbitrário), um conjunto finito de números reais  $\gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  é dito ser independente se  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são algebricamente independentes em relação ao grupo aditivo (operação) em  $\mathbb{R}$ , isto é, se a condição

$$\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = 0, \quad m_j \in \mathbb{Z} \quad (6.16)$$

implica em  $m_j = 0, \quad \forall j$ . O conjunto de todos os  $\gamma$  independentes será denotado por  $\Gamma$  [12]. Uma relação de ordem parcial fazendo com que  $\Gamma$  seja um conjunto direcionado, pode ser introduzida da seguinte forma: Seja  $G_\gamma$  um subgrupo de  $\mathbb{R}$  livremente gerado pelo conjunto  $\gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ :

$$G_\gamma := \left\{ \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j, \quad m_j \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (6.17)$$

Um conjunto  $\gamma'$  é dito ser maior que  $\gamma$ , e escrevemos  $\gamma' \succeq \gamma$ , se  $G_\gamma$  é um subgrupo de  $G_{\gamma'}$ . É claro que dado  $\gamma$  e  $\gamma'$ , podemos sempre encontrar um  $\gamma''$ , tal que,  $\gamma'' \succeq \gamma$  e  $\gamma'' \succeq \gamma'$ , e assim,  $\Gamma$  se torna um conjunto direcionado. Além disso,  $\Gamma$  não possui elemento maximal.

Dito isso, podemos descrever agora a estrutura projetiva de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Para cada  $\gamma \in \Gamma$ , consideremos o espaço (além disso, um grupo)  $\mathbb{R}_\gamma$  de todos os homomorfismos de  $G_\gamma$  em  $T$ ,

$$\mathbb{R}_\gamma := \text{Hom}[G_\gamma, T]. \quad (6.18)$$

Para um dado par  $\gamma, \gamma'$ , tal que,  $\gamma' \succeq \gamma$  existe uma projeção sobrejetiva,

$$P_{\gamma\gamma'} : \mathbb{R}_{\gamma'} \rightarrow \mathbb{R}_{\gamma} \quad (6.19)$$

definida por restrições, isto é, um elemento  $\chi \in \mathbb{R}_{\gamma'}$  é mapeado em sua restrição em  $G_{\gamma} \subset G_{\gamma'}$ . As projeções (6.19) claramente satisfazem a condição de consistência

$$P_{\gamma\gamma''} = P_{\gamma\gamma'} \circ P_{\gamma'\gamma''}, \quad \forall \gamma'' \succeq \gamma' \succeq \gamma. \quad (6.20)$$

Cada família de espaços e projeções, indexadas por um conjunto direcionado, é chamado de família projetiva  $\{\mathbb{R}_{\gamma}, P_{\gamma\gamma'}\}_{\gamma' \succeq \gamma}$ .

Desde que, cada  $G_{\gamma}$  é livremente gerado por um conjunto independente  $\gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , cada  $\mathbb{R}_{\gamma}$  é essencialmente um espaço da forma  $T^n$ , onde  $n$  é a cardinalidade correspondente ao conjunto  $\gamma$ . De fato, todo elemento  $\chi_{\gamma}$  de  $\mathbb{R}_{\gamma}$  é unicamente determinado pelas imagens dos geradores, e assim, temos uma bijeção entre  $\mathbb{R}_{\gamma}$  e  $T^n$  dada por  $\chi_{\gamma} \mapsto (\chi_{\gamma}(\lambda_1), \dots, \chi_{\gamma}(\lambda_n))$ . A partir de agora, identificaremos cada  $\mathbb{R}_{\gamma}$  com o correspondente espaço  $T^n$  com a topologia padrão, ou com o  $n$ -toro  $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ . Não faremos distinção entre os dois, isto é, a correspondência  $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \ni x \leftrightarrow e^{ix} \in \mathbb{C}$ , será livremente utilizada. Cada espaço  $\mathbb{R}_{\gamma}$  é, então, um espaço compacto, e ainda, as projeções (6.19) são contínuas e a família projetiva  $\{\mathbb{R}_{\gamma}, P_{\gamma\gamma'}\}_{\gamma' \succeq \gamma}$  é portanto, uma família projetiva compacta.

Temos ainda, como em LQG, a noção de limite projetivo de uma família de espaços, o qual no caso de uma família compacta é também um espaço compacto. O limite projetivo da família projetiva  $\{\mathbb{R}_{\gamma}, P_{\gamma\gamma'}\}_{\gamma' \succeq \gamma}$  é um subconjunto do produto cartesiano  $\times_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{R}_{\gamma}$  dos elementos  $(\chi_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$  que satisfazem a condição de consistência,

$$P_{\gamma\gamma'} \chi_{\gamma'} = \chi_{\gamma}, \quad \forall \gamma' \succeq \gamma. \quad (6.21)$$

Não é surpresa, a existência de uma bijeção entre o limite projetivo da família projetiva  $\{\mathbb{R}_{\gamma}, P_{\gamma\gamma'}\}_{\gamma' \succeq \gamma}$  e o conjunto  $\overline{\mathbb{R}} \equiv \text{Hom}[\mathbb{R}, T]$ , dado por

$$\overline{\mathbb{R}} \ni \chi \mapsto (\chi|_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}, \quad (6.22)$$

onde  $\chi|_{\gamma}$  denota a restrição de  $\chi$  no subgrupo  $G_{\gamma}$ . Além disso, a topologia natural sobre o

limite projetivo, topologia fraca, tal que, todas as projeções

$$P_\gamma : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_\gamma, \quad \chi \mapsto \chi|_\gamma, \quad (6.23)$$

são contínuas, coincide com a topologia de Tychonoff introduzida na seção 6.2.1.

Assim, o espaço compacto  $\overline{\mathbb{R}}$  é naturalmente homeomórfico ao limite projetivo da família projetiva  $\{\mathbb{R}_\gamma, P_{\gamma\gamma'}\}_{\gamma' \supseteq \gamma}$ . Desde que, cada espaço  $\mathbb{R}_\gamma$  é homeomórfico ao toro, nós podemos ver o espaço compacto  $\overline{\mathbb{R}}$  como o limite de uma família de toros de dimensões crescentes.

Embora, a descrição projetiva do espaço de configuração quântico, feita aqui, seja análoga à descrição feita em LQG (com os toros  $T^n$  correspondendo às variedades  $SU(2)^n$ ), existe uma diferença relacionada ao fato de termos aqui, um espaço de configuração clássico unidimensional, enquanto que, os espaços  $\mathbb{R}_\gamma$  são multidimensionais. Além disto, a projeção  $P_\gamma \Theta(\mathbb{R})$  em um  $\mathbb{R}_\gamma$  genérico (por exemplo, com  $\gamma$  contendo apenas dois elementos) da imagem  $\Theta(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathbb{R}}$  não cobre  $\mathbb{R}_\gamma$ . A imagem de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_\gamma$  é, não obstante, densa. Na realidade, escrevendo  $\gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  e usando a identificação de  $\mathbb{R}_\gamma$  com o toro  $T^n$ ,  $\mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ , nós podemos ver que  $\mathbb{R}$  é mapeado em  $T^n$  como:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (\lambda_1 x, \dots, \lambda_n x) \in T^n. \quad (6.24)$$

Portanto, obtemos um mapeamento  $P_\gamma \Theta : \mathbb{R} \rightarrow T^n \cong \mathbb{R}_\gamma$  com imagem densa, desde que, as frequências  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  sejam algébricamente independentes.

### 6.3.2 Funções Cilíndricas e alguns aspectos teóricos da medida

Agora, iremos considerar o *pull-back* [30] das projeções (6.23). Para um dada  $\gamma$  e uma dada função contínua  $f \in C(\mathbb{R}_\gamma)$ , o *pull-back*  $P_\gamma^* f(\chi) = f(P_\gamma \chi)$  nos dá uma função em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Desde que, as projeções são contínuas e sobrejetivas, a função  $P_\gamma^* f$  é também contínua e o mapeamento  $P_\gamma^* : C(\mathbb{R}_\gamma) \rightarrow C(\overline{\mathbb{R}})$  é injetivo. Assim, funções dadas sobre  $\mathbb{R}_\gamma$ , ou o correspondente toro, são fielmente mapeadas em funções em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Estas funções, chamadas funções cilíndricas, são funções em  $\overline{\mathbb{R}}$  que vivem essencialmente sobre um toro. Além disto, o conjunto de todas estas funções, para todo  $\gamma \in \Gamma$ , é denso em  $C(\overline{\mathbb{R}})$ , e portanto,  $\mathcal{L}^2$ -denso. Claramente, nós não podemos parar em um dado  $\gamma$  fixo, mas note que para combinações lineares finitas de funções cilíndricas correspondendo a diferentes  $\gamma$ 's, digamos  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , estas podem ser vistas como funções sobre

um toro de dimensões elevadas, desde que, exista um  $\gamma'$ , tal que,  $\gamma' \succeq \gamma_1, \dots, \gamma' \succeq \gamma_n$ .

Além disto, o *pull-back* estende o mapeamento entre funções contínuas a um mapeamento entre espaços  $\mathcal{L}^2$ . Para vermos isto, vamos introduzir algumas noções simples a partir da teoria de medida [12, 31, 70, 72, 73].

Desde que,  $\overline{\mathbb{R}}$  pode ser projetado em todo espaço  $\mathbb{R}_\gamma$ , a medida de Haar  $\mu_0$  define uma medida  $\mu_{0\gamma}$  sobre cada espaço  $\mathbb{R}_\gamma$ . Explicitamente, cada medida  $\mu_{0\gamma}$  é definida pelo *push-forward* [30] de  $\mu_0$ , em relação a projeção  $P_\gamma : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_\gamma$ , isto é,

$$\mu_{0\gamma}(M) = \mu_0(P_\gamma^{-1}M), \quad \forall \text{ conjunto de medida } M \subset \mathbb{R}_\gamma, \quad (6.25)$$

onde  $P_\gamma^{-1}M$  é a imagem inversa do conjunto de medida  $M$ . Uma definição equivalente de  $\mu_{0\gamma}$  pode ser dada em termos da integração das funções contínuas, naturalmente  $\mu_0$  pode ser definido por

$$\int_{\mathbb{R}_\gamma} f d\mu_{0\gamma} = \int_{\overline{\mathbb{R}}} P_\gamma^* f d\mu_0, \quad \forall f \in C(\mathbb{R}_\gamma). \quad (6.26)$$

Como já era esperado, a medida  $\mu_{0\gamma}$  coincide com a medida de Haar sobre os espaços (grupos)  $\mathbb{R}_\gamma$ , ou ainda, com a medida (Haar-Lebesgue) sobre o correspondente toro<sup>4</sup>. Isto pode ser facilmente visto a partir de (6.26).

Podemos então, construir espaços de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_\gamma, \mu_{0\gamma})$ , os quais são essencialmente os espaços de Hilbert usuais das funções de quadrado integrável sobre o toro. Fica claro, a partir de (6.26) que para cada  $\gamma$ , o *pull-back* define uma transformação unitária entre  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_\gamma, \mu_{0\gamma})$  e o subespaço de Hilbert separável  $\mathcal{H}_{0\gamma} := P_\gamma^* \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_\gamma, \mu_{0\gamma})$  de  $\mathcal{H}_0$ .

Em particular, consideremos a restrição da representação de polímeros em um dado  $\mathcal{H}_{0\gamma}$ , com  $\gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Os operadores  $\Pi(\lambda)$  (6.13) com  $\lambda$  fora do grupo  $G_\gamma$  já não atuam sobre  $\mathcal{H}_{0\gamma}$ , mas os que atuam, isto é, para  $\lambda = \sum m_j \lambda_j$ , corresponde à usual quantização das funções  $\exp(i \sum m_j \lambda_j x_j)$  sobre o toro  $T^n$ . Por outro lado, o operador de momento  $\Pi(p)$  (6.15) é definido sobre cada  $\mathcal{H}_{0\gamma}$ , e corresponde à derivação ao longo da direção do toro definido por  $P_\gamma \Theta(\mathbb{R})$ .

<sup>4</sup>A medida de Ashtekar-Isham-Lewandowski em LQG [74] é introduzida, de fato ao contrário, usando uma família de medidas de Haar adequadamente compatível sobre os espaços de dimensão finita de uma família projetiva para se definir uma medida sobre o limite projetivo  $\overline{\mathcal{A}}$ . Este é o procedimento geral para se introduzir medidas em limites projetivos (espaços) com nenhuma estrutura adicional. Em casos mais agradáveis, como teorias de campo lineares e LQG, expressões como (6.25), vistas como a definição da medida sobre o limite projetivo, na verdade, nos conduz às próprias medidas  $\sigma$ -aditivas [31, 72, 73]. No caso de famílias compactas o formalismo da teoria da representação das  $C^*$ -álgebras [67], correspondendo a (6.26), é também muito útil.

Finalmente, vemos que a imagem  $\Theta(\mathbb{R})$  do espaço de configuração clássico é um conjunto de medida (medida de Haar) nula em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Isto é particularmente fácil de ver no presente caso, sendo que, isto já acontece para  $\mathbb{R}_\gamma$  genérico. Consideremos então, o conjunto  $\gamma = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  com dois elementos (ou mais), de forma que o espaço  $\mathbb{R}_\gamma$  pode ser visto como o toro  $T^2$  (ou  $T^n$ ,  $n \geq 2$ ). Desde que, o número de vezes em que a linha  $\mathbb{R}$  é enrolada em torno do toro é claramente enumerável, a medida do conjunto  $P_\gamma\Theta(\mathbb{R})$  é nula. Segue imediatamente de (6.25) que  $\Theta(\mathbb{R})$  é um conjunto de medida de Haar nula em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Como uma consequência, a restrição de um elemento genérico de  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}}, \mu_0)$  em  $\Theta(\mathbb{R})$  não é definido. É verdade, que ele é definido para funções contínuas, mas  $C(\overline{\mathbb{R}})$  não é completo na norma  $\mathcal{L}^2$ . Neste sentido o completamento de  $\mathcal{C}$  (6.4) em relação ao produto interno  $\langle e^{i\lambda x}, e^{i\lambda' x} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}$  se torna um espaço de funções em  $\overline{\mathbb{R}}$ <sup>5</sup>. Assim, a extensão do espaço de configuração a partir de  $\mathbb{R}$  em  $\overline{\mathbb{R}}$  é essencial na representação de polímeros.

## 6.4 $\overline{\mathbb{R}}$ visto como o espectro da $C^*$ -álgebra das funções *almost*-periódica em $\mathbb{R}$

Veremos agora explicitamente, que  $\overline{\mathbb{R}}$  é de fato o espectro da  $C^*$ -álgebra das funções *almost*-periódicas em  $\mathbb{R}$ . Esta caracterização do espaço de configuração quântico corresponde a introdução original do espaço das conexões generalizadas  $\overline{\mathcal{A}}$  como o espectro da álgebra de holonomias [37, 71].

Consideremos, novamente, a  $*$ -álgebra  $\mathcal{C}$  de configuração das funções dadas pela combinações lineares finitas,

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \sum_j c_j e^{i\lambda_j x}, \quad (6.27)$$

e seu  $C^*$ -completamento  $\overline{\mathcal{C}}$ , em relação à norma do supremo,  $\|f(x)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

O espectro  $\Delta(\overline{\mathcal{C}})$  da álgebra  $\overline{\mathcal{C}}$  é o conjunto de todos o funcionais lineares multiplicativos não-

---

<sup>5</sup>Em outras palavras, as funções não-contínuas  $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \delta_{\lambda 0}$  não são a transformada de Fourier de uma medida em  $\mathbb{R}$ , mas em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

nulos sobre  $\overline{\mathcal{C}}$ , isto é, funcionais lineares não-nulos  $\varphi : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g), \quad \forall f, g \in \overline{\mathcal{C}}. \quad (6.28)$$

Tais funcionais são necessariamente contínuos. Podemos facilmente verificar que  $\varphi(e^{i\lambda x})$  toma valores em  $T$ ,  $\forall \varphi \in \Delta(\overline{\mathcal{C}})$ ,  $\forall \lambda$  e segue que  $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \varphi(e^{-i\lambda x})$  determina um elemento de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Existe assim, um mapeamento injetivo de  $\Delta(\overline{\mathcal{C}})$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Reciprocamente, um dado elemento  $\chi \in \overline{\mathbb{R}}$  define um funcional linear multiplicativo não-nulo sobre  $\mathcal{C}$  através de  $e^{i\lambda x} \mapsto \chi(\lambda)$ .

Mesmo estabelecendo uma bijeção entre  $\Delta(\overline{\mathcal{C}})$  e  $\overline{\mathbb{R}}$  resta ainda provar que estes funcionais podem ser estendidos a funcionais sobre  $\overline{\mathcal{C}}$ , para isto é suficiente mostrar que estes funcionais são contínuos sobre  $\mathcal{C}$ .

Vamos agora falar um pouco sobre a estrutura indutiva da álgebra de  $\mathcal{C}$  [75]. Para cada  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , seja  $\mathcal{C}_\gamma \subset \mathcal{C}$  a  $*$ -subálgebra gerada pelo conjunto  $\{e^{i\lambda_1 x}, \dots, e^{i\lambda_n x}\}$ , cujos elementos são combinações lineares das seguintes funções

$$f(x) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} e^{i\lambda x}, \quad \text{com } \lambda \in G_{\gamma}. \quad (6.29)$$

É claro que  $\mathcal{C}_\gamma$  é uma subálgebra de  $\mathcal{C}_{\gamma'}$ , sempre que,  $\gamma' \succeq \gamma$ . Além disso, qualquer elemento de  $\mathcal{C}$  pertence a alguma subálgebra  $\mathcal{C}_\gamma$ . De fato, desde que o número de diferentes frequências  $\lambda_j$  em (6.27) é finito  $\forall f \in \mathcal{C}$ , todos eles pertencem a algum grupo  $G_\gamma$ . Deste modo, a álgebra  $\mathcal{C}$  é a união de todas as subálgebras  $\mathcal{C}_\gamma$ .

Seja então,  $f(x) = \sum_j c_j e^{i\lambda_j x}$  um elemento arbitrário de  $\mathcal{C}$ , e  $\gamma = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$  um conjunto independente, tal que,  $\lambda_j \in G_\gamma$ ,  $\forall j$ , isto é,

$$\lambda_j = \sum_l^n m_j^l \rho_l, \quad \forall j, \quad (6.30)$$

para  $m_j^l$  inteiro. Assim, temos

$$\|f(x)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_j c_j \prod_{l=1}^n (e^{i\rho_l x})^{m_j^l} \right|. \quad (6.31)$$

Para cada valor de  $x$ ,  $(e^{i\rho_1 x}, \dots, e^{i\rho_n x})$  é um elemento de  $T \cong \mathbb{R}_\gamma$ , e a imagem de  $\mathbb{R}$  através

deste mapeamento é um conjunto denso. Desde de que, as funções em  $T^n$  da forma

$$T^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_j c_j \prod_{l=1}^n (e^{ix_l})^{m_l^j} \quad (6.32)$$

são contínuas (levando em conta o fato de que as somas são finitas), podemos ver que o supremo em (6.31) pode ser trocado pelo supremo em  $T^n$ . Assim,

$$\|f(x)\| = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in T^n} \left| \sum_j c_j \prod_{l=1}^n (e^{ix_l})^{m_l^j} \right|. \quad (6.33)$$

Agora, é fácil ver que os funcionais lineares sobre  $\mathcal{C}$  definidos através dos elementos de  $\overline{\mathbb{R}}$  são contínuos. Seja então,  $\varphi_\chi$  o funcional definido por  $\varphi_\chi(e^{i\lambda x}) = \chi(\lambda)$ ,  $\forall \chi \in \overline{\mathbb{R}}$ . Assim, nós obtemos

$$\varphi_\chi(f(x)) = \sum_j c_j \chi(\lambda_j) = \sum_j c_j \prod_{l=1}^n \chi(\rho_l)^{m_l^j}, \quad (6.34)$$

o qual é simplesmente o valor da função que aparece em (6.33), no ponto  $(\chi(\rho_1), \dots, \chi(\rho_n)) \in T^n$ . Portanto,  $|\varphi_\chi(f(x))| \leq \|f(x)\|$ ,  $\forall f(x) \in \mathcal{C}$ , provando que os funcionais  $\varphi_\chi$  são contínuos. Por conseguinte, é estabelecida uma bijeção entre o espectro  $\Delta(\overline{\mathcal{C}})$  e  $\overline{\mathbb{R}}$ . Além disto,  $\Delta(\overline{\mathcal{C}})$  e  $\overline{\mathbb{R}}$  são homeomórficos. Neste caso, a topologia sobre o espectro  $\Delta(\overline{\mathcal{C}})$ , chamada topologia de Gel'fand [12], definida como topologia fraca [75], de modo que, todos os mapeamentos

$$\Delta(\overline{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(f), \quad f \in \overline{\mathcal{C}}, \quad (6.35)$$

são contínuos, corresponde a topologia de Tychonoff em  $\overline{\mathbb{R}}$  introduzida na seção 6.2.1. Também é claro que a compactificação de Gel'fand [12],  $\mathbb{R} \rightarrow \Delta(\overline{\mathcal{C}})$ , dada por  $y \mapsto \varphi_y$ , tal que,  $\varphi_y(e^{i\lambda x}) = e^{i\lambda y}$ , corresponde ao mapeamento  $\Theta$  (6.8).

Finalmente, vamos mostrar a relação entre a estrutura indutiva e a estrutura projetiva, de modo mais explícito.

Considerando os completamentos  $\overline{\mathcal{C}}_\gamma$  das álgebras  $\mathcal{C}_\gamma$ , é verdade que  $\overline{\mathcal{C}}_\gamma \subset \overline{\mathcal{C}}_{\gamma'}$  para  $\gamma' \succeq \gamma$ , mas a união  $\cup_\gamma \mathcal{C}_\gamma$  não é um espaço completo. A família  $\{\overline{\mathcal{C}}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ , com inclusões naturais, é um caso particular de uma família indutiva de  $C^*$ -álgebras. O completamento da união  $\cup_\gamma \mathcal{C}_\gamma$ , neste caso,  $\overline{\mathcal{C}}$ , é chamado neste contexto (das  $C^*$ -álgebras) de limite indutivo. Levando em conta que o conjunto das funções (6.32) é denso em  $C(T^n)$ , os argumentos imediatamente anteriores levam

à conclusão de que cada álgebra  $\mathcal{C}_\gamma$  é isomórfica à álgebra  $C(\mathbb{R}_\gamma)$ . Em outras palavras,  $\mathbb{R}_\gamma$  é o espectro de  $\overline{\mathcal{C}}_\gamma$ . Como tomamos o limite sobre o conjunto  $\Gamma$ , encontramos que  $\overline{\mathbb{R}}$  é o espectro de  $\overline{\mathcal{C}}$ <sup>6</sup>.

Resumindo, do ponto de vista das  $C^*$ -álgebras, a  $C^*$ -álgebra de configuração  $\overline{\mathcal{C}}$  e a álgebra  $C(\mathbb{R})$  das funções contínuas em  $\overline{\mathbb{R}}$  são um e a mesma álgebra.

---

<sup>6</sup>Existe uma perfeita dualidade entre as famílias projetivas compactas e as famílias indutivas das  $C^*$ -álgebras com o elemento identidade, no sentido de que existe uma correspondência (Gelfand) um-a-um e o limite projetivo compacto é o espectro do correspondente limite indutivo [36].

## Capítulo 7

# Quantização do Modelo JT

De acordo com a teoria da quantização de Dirac [101] dos sistemas Hamiltonianos completamente vinculados, supõe-se que a Hamiltoniana vinculada  $\hat{H}$ , atuando sobre o estado  $|\Psi\rangle$  anula-o,

$$\hat{H}|\Psi\rangle = 0. \quad (7.1)$$

Esta equação que define  $|\Psi\rangle$  como um estado *físico*,  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{phys}}$ , é conhecida como equação de Wheeler-DeWitt [102] ou equação de Einstein quântica, da gravitação quântica canônica. Ela se assemelha à equação de Schrödinger sem o termo  $\partial|\Psi\rangle/\partial t$ .

Isto nos motiva a quantizarmos o modelo JT seguindo o programa de Dirac aplicado a sistemas com covariância geral utilizando as técnicas usuais empregadas na LQG [12, 13]. O programa de Dirac [81, 83] aplicado a sistemas com covariância geral consiste nos seguintes passos:

- (i) Encontrar uma representação das variáveis do espaço de configuração clássico da teoria como operadores no espaço de Hilbert cinemático (auxiliar)  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  satisfazendo às relações de comutação padrão, isto é,  $\{ , \} \rightarrow -i/\hbar [ , ]$  (Princípio de correspondência).
- (ii) Promover os vínculos a operadores (autoadjuntos) em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . No caso da gravitação temos sete vínculos a quantizar,  $G_i(A, E)$ ,  $C_a(A, E)$  e  $C(A, E)$ . Porém, em nosso modelo temos apenas dois vínculos,  $\mathcal{G}_0(x)$  e  $\mathcal{G}_1(x)$ .
- (iii) Caracterizar o espaço das soluções dos vínculos e definir o correspondente produto interno

que carrega a noção de probabilidade física. Definindo-se assim, o espaço de Hilbert físico que será denotado por  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ .

(iv) Encontrar um conjunto (completo) de observáveis invariantes de *gauge*, isto é, operadores que comutam com os vínculos.

Iniciando este programa, introduziremos a quantização independente de fundo do nosso modelo, seguindo de perto a representação de polímeros para o campo escalar como descrita em [63,64]. Para isto, faremos uso de alguns fatos estruturais analisados no capítulo 6.

## 7.1 Espaço de Configuração Quântico

Além de utilizar o princípio de correspondência para substituir os campos clássicos por seus respectivos operadores quânticos, o programa de quantização canônica requer a escolha do conjunto das variáveis de configuração elementares sobre o espaço de configuração clássico da teoria em questão, afim de encontrarmos uma representação no espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Com os campos  $e_x^1(x), \omega(x)$  e os momentos conjugados  $\varphi_1(x), \psi(x)$ , temos quatro possibilidades para escolher um conjunto máximo de variáveis básicas que comutam [87, 105] como argumentos da “função de onda  $\Psi$ ”. Estas escolhas são

$$\begin{aligned} \Psi [e_x^1, \omega_x] & \text{ com, } \hat{\varphi}_1(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta e_x^1(x)}, \hat{\psi}(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \omega_x(x)}; \\ \Psi [e_x^1, \psi] & \text{ com, } \hat{\varphi}_1(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta e_x^1(x)}, \hat{\omega}_x(x) = i\hbar \frac{\delta}{\delta \psi(x)}; \\ \Psi [\varphi_1, \psi] & \text{ com, } \hat{e}_x^1(x) = i\hbar \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x)}, \hat{\omega}_x(x) = i\hbar \frac{\delta}{\delta \psi(x)}; \\ \Psi [\varphi_1, \omega_x] & \text{ com, } \hat{e}_x^1(x) = i\hbar \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x)}, \hat{\psi}(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \omega_x(x)}. \end{aligned}$$

A última representação, foi escolhida em [87, 105], onde  $\Psi$  é um funcional dos campos  $\varphi_1(x)$  e  $\omega(x)$ . Aqui, vamos escolher a representação  $\Psi[\varphi_1, \psi]$ . Esta escolha particular tem uma justificativa, ela simplifica em muito a forma final dos vínculos de nossa teoria clássica que em uma certa altura serão promovidos a operadores quânticos.

Em nosso programa de quantização, imitando a representação de polímeros para campos escalares, a álgebra quântica dos observáveis elementares da teoria será gerada pelas *holonomias pontuais*, isto é, as exponenciais dos campos escalares  $\varphi_1(x)$  e  $\psi(x)$  em cada ponto de  $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{R}$ ,

e os funcionais de  $e_x^1(x)$  (fluxo elétrico no caso unidimensional) e  $\omega(x)$  no intervalo  $I \subset \mathcal{M}_1$ , os quais serão definidos mais tarde. Aqui, vamos tomar  $e_x^1(x)$  e  $\omega(x)$  como os momentos conjugados de  $\varphi_1(x)$  e  $\psi(x)$ , respectivamente. Ainda, os parênteses de Dirac elementares são

$$\{\varphi_1(x), e_x^1(y)\}_{\text{D}} = -\delta(x - y) \quad \text{e} \quad \{\psi(x), \omega(y)\}_{\text{D}} = -\delta(x - y).$$

Para os campos escalares de nosso interesse, o espaço de configuração clássico  $\mathcal{U}$ , é o espaço de todas as funções suaves (campos clássicos)  $\varphi_1(x)$  que tomam valores sobre  $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{R}$ , enquanto que,  $\mathcal{V}$  é o espaço de configuração clássico de todas as funções suaves (campos clássicos)  $\psi(x)$  que também tomam valores sobre  $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{R}$ . Seguindo a terminologia usada no formalismo de laços (veja a seção 4.1 do capítulo 4), introduziremos as funções holonomias sobre  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  que constituirão as variáveis de configuração elementar da teoria quântica.

Agora, vamos definir a noção de grafo. Chamaremos de grafo a um conjunto  $\{x_i\}$  que consiste de um número finito de pontos sobre a linha real  $\mathbb{R}$ . No caso do espaço de configuração clássico  $\mathcal{U}$ , um grafo será dado por  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  no qual, cada ponto  $x_i$  será chamado de “edge” em analogia com a LQG. A cada edge de  $X$  associaremos um número real arbitrário não-nulo,  $\lambda$ , diremos assim, que  $X$  é um grafo colorido, ou uma rede de spin (*spin-network*),  $X(\vec{\lambda})$ , onde  $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \ni \lambda_j$  é o análogo do spin  $j_k$  na LQG. Já no caso de  $\mathcal{V}$ , o grafo será dado por  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ , ao qual, a cada ponto associaremos também, um número real arbitrário não-nulo  $\mu$ . De modo análogo ao que dissemos anteriormente, diremos que  $Y$ , agora, é um grafo colorido ou (utilizando um barbarismo) uma rede de escalar (*scalar-network*),  $Y(\vec{\mu})$ , onde  $\vec{\mu} \equiv (\mu_1, \dots, \mu_m)$ . A diferença entre os termos *rede de spin* e *rede de escalar* não é irrelevante, já que o campo clássico  $\varphi_1$  está diretamente associado ao setor geométrico da teoria, enquanto que,  $\psi$  não.

Para uma dada rede de spin  $X(\vec{\lambda})$ , definimos uma classe de equivalência, na qual, dois campos escalares  $\varphi_1$  e  $\varphi'_1 \in \mathcal{U}$ , são equivalentes,  $\varphi_1 \sim \varphi'_1$ , se e somente se,  $\exp[-i\lambda_j\varphi_1(x_j)] = \exp[-i\lambda_j\varphi'_1(x_j)]$  para todo  $x_j \in X$  e para todo número real  $\lambda_j$ . A partir daí (veja as seções 6.2 e 6.3 do capítulo 6), podemos obter uma bijeção natural  $\tau : \overline{\mathcal{U}}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_X$ , onde  $\overline{\mathcal{U}}_X := \mathcal{U}_X / \sim$  e  $\overline{\mathbb{R}}_X$  pode ser visto como  $n$  cópias da compatificação de Bohr da linha real  $\mathbb{R}$  [76], a qual induz uma topologia sobre  $\overline{\mathcal{U}}_X$ , tal que  $\tau$  é um homomorfismo topológico. Para um dado par  $X \prec X'$ , podemos definir uma projeção sobrejetiva  $P_{XX'} = \overline{\mathcal{U}}_{X'} \rightarrow \overline{\mathcal{U}}_X$  através da restrição do mapeamento  $\mathcal{N}_{X'} : \varphi_1 \longrightarrow \prod_{x_j \in X'} \exp[-i\lambda_j\varphi_1(x_j)]$  de  $X'$  no subgrafo  $X$ . Estas projeções satisfazem a condição de consistência  $P_{XX'} \circ P_{X'X''} = P_{XX''}$ . Assim, podemos definir uma família

projetiva  $\{\overline{\mathcal{U}}_X, P_{XX'}\}_{X \prec X'}$ , com relação ao grafo  $X$  (grafo para os campos escalares  $\varphi_1$ ). Com isto, o limite projetivo  $\lim_X(\overline{\mathcal{U}}_X)$ , que é um espaço topológico compacto, pode ser identificado com o espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{U}}$  do campo escalar  $\varphi_1$ , onde  $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}$ . Seguindo o mesmo procedimento para  $\mathcal{V}$ , obtemos também o equivalente para o campo escalar  $\psi$ , ou seja, o seu respectivo espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{V}}$ , onde  $\mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}}$ .

Denotamos por  $\text{Cyl}_{X(\vec{\lambda})}(\overline{\mathcal{U}})$  o espaço vetorial gerado pelas combinações lineares finitas das seguintes funções *almost*-periódicas<sup>1</sup> de  $\varphi_1$ :

$$\mathcal{N}_{X(\vec{\lambda})}(\varphi_1) = \prod_{x_j \in X} \exp[-i\lambda_j \varphi_1(x_j)], \quad (7.2)$$

onde  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  são números reais arbitrários não-nulos tomados em cada ponto de  $x_j$  de  $X$ , como já foi mencionado. É importante observarmos que  $\text{Cyl}_{X(\vec{\lambda})}(\overline{\mathcal{U}})$  tem a estrutura de uma \*-álgebra abeliana. O espaço vetorial de todas as funções cilíndricas sobre  $\overline{\mathcal{U}}$  é definido como,

$$\text{Cyl}(\overline{\mathcal{U}}) = \bigcup_{X(\vec{\lambda})} \text{Cyl}_{X(\vec{\lambda})}(\overline{\mathcal{U}}). \quad (7.3)$$

O complemento de  $\text{Cyl}(\overline{\mathcal{U}})$  em relação à norma do supremo é uma  $C^*$ -álgebra unitária abeliana (comutativa)  $\overline{\text{Cyl}(\overline{\mathcal{U}})}$ . Assim, podemos usar a construção GNS [12, 68, 75] afim de obtermos suas representações cíclicas. Um funcional linear positivo  $f_0$  sobre  $\overline{\text{Cyl}(\overline{\mathcal{U}})}$  é definido como,

$$f_0(\mathcal{N}_{X(\vec{\lambda})}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda_j = 0 \quad \forall j \\ 0 & \text{se não,} \end{cases}$$

o qual define uma medida de Borel  $\eta$  invariante de difeomorfismo sobre  $\overline{\mathcal{U}}$  como

$$\int_{\overline{\mathcal{U}}} d\eta(\mathcal{N}_{X(\vec{\lambda})}) := f_0(\mathcal{N}_{X(\vec{\lambda})}). \quad (7.4)$$

Desta forma, obtemos um espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{RG} := \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{U}}, d\eta)$ , sendo  $\mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{U}}, d\eta)$  o espaço das funções de quadrado integrável sobre um espaço de medida topológico compacto  $\overline{\mathcal{U}}$

---

<sup>1</sup>Na língua portuguesa seria mais adequado dizer “quase-periódicas”, porém, essa nomenclatura é frequentemente usada (na literatura matemática) em várias línguas para designar um certo subconjunto de funções de AP( $\mathbb{R}$ ) (espaço das funções ditas *almost*-periódicas em  $\mathbb{R}$ ). Por isso optamos pelo barbarismo *almost*-periódicas.

em relação a  $\eta$ . O produto interno em relação a um dado grafo  $X$  pode se expresso como:

$$(\mathcal{N}_{X(\vec{\lambda})}, \mathcal{N}_{X(\vec{\lambda}')} )_{\text{cin}} = \int_{\vec{u}_X} d\eta_X \overline{\mathcal{N}}_{X(\vec{\lambda})} \mathcal{N}_{X(\vec{\lambda}')} = \delta_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}'} = \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} \cdots \delta_{\lambda_n \lambda'_n}.$$

Agora, tomando  $X \prec X'$  e  $X \prec X''$ ,  $X' \prec X''$ , podemos estender o produto interno em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{RG}$  para grafos diferentes,

$$(\mathcal{N}_{X(\vec{\lambda})}, \mathcal{N}_{X'(\vec{\lambda}')} )_{\text{cin}} = \int_{\vec{u}_{X''}} d\eta_{X''} (P_{XX''}^* \overline{\mathcal{N}}_{X(\vec{\lambda})}) (P_{X'X''}^* \mathcal{N}_{X'(\vec{\lambda}')} ) = \delta_{XX'} \delta_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}'},$$

onde o grafo  $X''$  contém ambos  $X$  e  $X'$ , e  $P_{XX''}^*$  é o *pull-back* de  $P_{XX''}$ . Note que  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{RG}$  não é um espaço de Hilbert separável.

Ainda, denotando  $\text{Cyl}_{Y(\vec{\mu})}(\overline{\mathcal{V}})$  o espaço vetorial gerado pelas combinações lineares finitas das seguintes funções *almost*-periódicas de  $\psi$ :

$$\mathcal{N}_{Y(\vec{\mu})}(\psi) = \prod_{y_k \in Y} \exp[-i\mu_k \psi(x_k)], \quad (7.5)$$

onde  $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  são números reais arbitrários não-nulos tomados em cada ponto de  $y_k$  de  $Y$ . O espaço vetorial de todas as funções cilíndricas sobre  $\overline{\mathcal{V}}$  é definido como,

$$\text{Cyl}(\overline{\mathcal{V}}) = \bigcup_{Y(\vec{\mu})} \text{Cyl}_{Y(\vec{\mu})}(\overline{\mathcal{V}}). \quad (7.6)$$

Como no caso de  $\overline{\mathcal{U}}$ , o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{KG} := \mathcal{L}^2(\overline{\mathcal{V}}, d\nu)$ , é o espaço das funções de quadrado integrável sobre o espaço de medida topológico compacto  $\overline{\mathcal{V}}$  em relação a medida de Borel  $\xi$  invariante de difeomorfismo. O produto interno em relação a um dado grafo  $Y$  pode ser expresso como:

$$(\mathcal{N}_{Y(\vec{\mu})}, \mathcal{N}_{Y(\vec{\mu}')} )_{\text{cin}} = \int_{\overline{\mathcal{V}}_Y} d\xi_Y \overline{\mathcal{N}}_{Y(\vec{\mu})} \mathcal{N}_{Y(\vec{\mu}')} = \delta_{\vec{\mu}\vec{\mu}'} = \delta_{\mu_1 \mu'_1} \delta_{\mu_2 \mu'_2} \cdots \delta_{\mu_m \mu'_m}.$$

Note que com isto,  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{KG}$  é um espaço de Hilbert não separável.

De um modo mais específico, por exemplo, para um grafo de um único ponto  $X_0 \equiv \{x_0\}$ ,  $\text{Cyl}_{X_0}(\overline{\mathcal{U}})$  é o espaço de todas as funções *almost*-periódicas sobre a linha real  $\mathbb{R}$  (dadas pela classes de equivalência de  $\varphi_1(x)$ , onde  $\varphi_1 \sim \varphi'_1$  se elas tem o mesmo valor em  $x_0$ ). O espectro de Gel'fand da correspondente  $C^*$ -álgebra  $\overline{\text{Cyl}}_{X_0}(\overline{\mathcal{U}})$  é a compactificação de Bohr  $\overline{\mathbb{R}}_{X_0}$  da linha

real  $\mathbb{R}$ . O qual, é um espaço topológico compacto de modo que  $\overline{\text{Cyl}_{X_0}(\overline{\mathcal{U}})}$  é a  $C^*$ -álgebra de todas as funções contínuas sobre  $\overline{\mathbb{R}_{X_0}}$ . Desde que,  $\mathbb{R}$  é densamente embebido em  $\overline{\mathbb{R}_{X_0}}$ ,  $\overline{\mathbb{R}_{X_0}}$  pode ser visto como um completamento de  $\mathbb{R}$ . No ponto  $x_0$  onde os campos clássicos tomam os valores  $\varphi_1(x_0)$  em  $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{R}$ , os campos quânticos tomam valores em  $\overline{\mathbb{R}_{X_0}}$ . Assim, o espaço de configuração clássico  $\mathcal{U}$  é estendido ao espaço de configuração quântico  $\overline{\mathcal{U}}$  consistindo de todas as funções  $\overline{\mathbb{R}}$ -valoradas (arbitrariamente descontínuas).

É claro a partir de (7.4) que uma base ortonormal em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{RG}$  é dada em termos do “vácuo”  $\mathcal{N}_0(\varphi_1) = 1$  e das funções de redes de spin  $\mathcal{N}_{X(\vec{\lambda})}(\varphi_1)$ . O mesmo pode ser dito em relação a  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{KG}$ , onde a base ortonormal é dada em termos do vácuo  $\mathcal{N}_0(\psi) = 1$  e das funções rede de escalar  $\mathcal{N}_{Y(\vec{\mu})}(\psi)$ .

Dado o grafo colorido  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \equiv X(\vec{\lambda}) \cup Y(\vec{\mu})$ , chamaremos  $\text{Cyl}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} \equiv \text{Cyl}_{X(\vec{\lambda})}(\overline{\mathcal{U}}) \otimes \text{Cyl}_{Y(\vec{\mu})}(\overline{\mathcal{V}})$  o espaço vetorial gerado por todas as combinações lineares finitas das seguintes funções *almost*-periódicas

$$\mathcal{N}_{\Gamma}[\varphi_1, \psi] = \mathcal{N}_{X(\vec{\lambda})}(\varphi_1) \otimes \mathcal{N}_{Y(\vec{\mu})}(\psi), \quad (7.7)$$

que chamaremos funções de redes spin-escalar (*spin-scalar-network*). Sendo o espaço vetorial de todas as funções cilíndricas definido como,

$$\text{Cyl} = \bigcup_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} \text{Cyl}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}. \quad (7.8)$$

Seguindo as mesmas ideias anteriores, podemos ver que o espaço de Hilbert cinemático total  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  é o produto direto do espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{RG}$  relacionado ao espaço  $\overline{\mathcal{U}}$  e o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{KG}$  relacionado ao espaço  $\overline{\mathcal{V}}$ , isto é,  $\mathcal{H}_{\text{cin}} := \mathcal{H}_{\text{cin}}^{RG} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{KG}$ .

Devemos notar que, nem sempre os pontos de  $X(\vec{\lambda})$  coincidem com os pontos de  $Y(\vec{\mu})$ . É direto vermos que uma base ortonormal em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  é dada em termos do “vácuo escalar”  $\mathcal{N}_0(\varphi_1, \psi) = 1$  e das funções *spin-scalar-network*  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi)$ . Neste contexto dizemos que um estado *spin-scalar-network* é uma função cilíndrica sobre o grafo colorido (rede spin-escalar)  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ . Note que  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  não é um espaço de Hilbert separável, sendo o produto interno expresso por

$$(\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}, \mathcal{N}_{\Gamma'(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} )_{\text{cin}} = \delta_{\Gamma\Gamma'} \delta_{\vec{\lambda}\vec{\lambda}'} \delta_{\vec{\mu}\vec{\mu}'} = \delta_{\Gamma\Gamma'} (\delta_{\lambda_1\lambda'_1} \delta_{\lambda_2\lambda'_2} \cdots \delta_{\lambda_n\lambda'_n}) (\delta_{\mu_1\mu'_1} \delta_{\mu_2\mu'_2} \cdots \delta_{\mu_m\mu'_m}).$$

### 7.1.1 Notação de Dirac e Operadores

Usando a notação de Dirac, podemos representar as funções  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) = \langle \varphi_1, \psi | \Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu} \rangle$  através dos estados  $| \Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu} \rangle = | X, \vec{\lambda} \rangle \otimes | Y, \vec{\mu} \rangle$ , que chamaremos de estados de redes spin-escalar. Seguindo esta notação,

$$\begin{aligned} \text{Cyl} &= \text{span} \left\{ | \Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu} \rangle \right\} \\ &= \left\{ | \Psi \rangle \in \text{Cyl}, | \Psi \rangle = \sum_{\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}} c(\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) | \Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu} \rangle, c(\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

onde somente consideramos combinações lineares finitas.

O espaço de Hilbert cinemático total  $\mathcal{H}_{\text{cin}} = \otimes_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$ , é definido como sendo o completamento de Cyl,

$$\mathcal{H}_{\text{cin}} := \overline{\text{Cyl}} = \overline{\text{span} \left\{ | \Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu} \rangle \right\}},$$

em relação ao produto interno discreto,

$$\langle \Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu} | \Gamma', \vec{\lambda}', \vec{\mu}' \rangle = \delta_{\Gamma\Gamma'} \delta_{\vec{\lambda}, \vec{\lambda}'} \delta_{\vec{\mu}, \vec{\mu}'}. \quad (7.9)$$

Desta forma os estados  $| \Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu} \rangle$  fornecem uma base ortornormal para  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ .

Dados os pares  $(x_0, \lambda_0)$  e  $(x_0, \mu_0)$ , existe uma configuração elementar para os campos escalares  $\varphi_1$  e  $\psi$ , chamada holonomia pontual,

$$h_{\lambda_0}(x_0) := \exp[-i\lambda_0\varphi_1(x_0)], \quad (7.10)$$

$$g_{\mu_0}(y_0) := \exp[-i\mu_0\psi(y_0)]. \quad (7.11)$$

Elas correspondem aos operadores de configuração  $\hat{h}_{\lambda_0}(x_0)$  e  $\hat{g}_{\mu_0}(y_0)$ , os quais agem sobre uma dada função cilíndrica  $\Psi[\varphi_1, \psi] \in \text{Cyl}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\overline{\mathcal{A}})$  por,

$$\hat{h}_{\lambda_0}(x_0)\Psi[\varphi_1, \psi] = h_{\lambda_0}(x_0)\Psi[\varphi_1, \psi],$$

$$\hat{g}_{\mu_0}(y_0)\Psi[\varphi_1, \psi] = g_{\mu_0}(y_0)\Psi[\varphi_1, \psi].$$

Seguindo a notação de Dirac, temos

$$\hat{h}_{\lambda_0} |\Gamma, \lambda, \mu\rangle = |\Gamma, \lambda + \lambda_0, \mu\rangle, \quad (7.12)$$

$$\hat{g}_{\mu_0} |\Gamma, \lambda, \mu\rangle = |\Gamma, \lambda, \mu + \mu_0\rangle, \quad (7.13)$$

onde  $|\Gamma, \lambda, \mu\rangle = |X, \lambda\rangle \otimes |Y, \mu\rangle$  e  $X = \{x_0\}$ ,  $Y = \{y_0\}$ .

Todos estes operadores são unitários. Contudo o mapeamento  $\lambda_0 \mapsto h_{\lambda_0}$  não é contínuo. De fato, para um  $\lambda_0$  arbitrariamente pequeno, o estado  $|\Gamma, \lambda, \mu\rangle$  é mapeado em um estado  $|\Gamma, \lambda + \lambda_0, \mu\rangle$ , ortogonal a ele. Assim, o operador  $\hat{\varphi}_1$ , bem como o operador  $\hat{\psi}$  não existem em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ .

Os funcionais de  $e_x^1(x)$  e  $\omega(x)$  (1-formas) sobre o intervalo  $I \subset \mathcal{M}_1$  são definidos naturalmente como,

$$e(I) := \int_I dx e_x^1(x), \quad \omega(I) := \int_I dx \omega(x). \quad (7.14)$$

O parêntese de Poisson entre o funcional de  $e(I)$  e a holonomia pontual de  $\varphi_1$  é

$$\{e(I), h_\lambda(x)\} = -i\lambda\chi_I(x)h_\lambda(x), \quad (7.15)$$

enquanto que,

$$\{\omega(I), h_\mu(x)\} = -i\mu\chi_I(x)U_\mu(x), \quad (7.16)$$

onde  $\chi_I(x)$  é a função característica do intervalo  $I$ ,

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I, \\ 0 & \text{se } x \notin I. \end{cases} \quad (7.17)$$

O operador  $\hat{e}(I)$  pode ser definido de modo consistente através de sua atuação sobre as funções *spin-scalar-network*  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi)$  como,

$$\hat{e}(I)\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) := i\hbar \left\{ e(I), \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) \right\} = \hbar \left[ \sum_{x_j \in X} \lambda_j \chi_I(x_j) \right] \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi), \quad (7.18)$$

onde  $\hat{e}(I)$  é o análogo do operador de fluxo elétrico no caso da LQG em  $3 + 1$  dimensões. Note que  $\hat{e}(I)$  é um operador essencialmente autoadjunto. Seus autovetores são simplesmente  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi)$ , e seus autovalores dados por  $\lambda_I \equiv \hbar \left[ \sum_{x_j \in X} \lambda_j \chi_I(x_j) \right]$ , onde os  $\lambda_j$  são os análogos contínuos dos “fluxons” ou “spins da geometria quântica” [63].

Do mesmo modo, definimos os operador  $\hat{\omega}(I)$ , através de

$$\hat{\omega}(I) \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) := i\hbar \left\{ \omega(I), \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) \right\} = \hbar \left[ \sum_{y_k \in Y} \mu_k \chi_I(y_k) \right] \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi), \quad (7.19)$$

onde temos que,  $\hat{\omega}(I)$  é um operador essencialmente autoadjunto.

Seguindo a notação de Dirac, temos

$$\hat{e}(I) | \Gamma, \lambda, \mu \rangle = \hbar \left[ \sum_{x_j \in X} \lambda_j \chi_I(x_j) \right] | \Gamma, \lambda, \mu \rangle, \quad (7.20)$$

$$\hat{\omega}(I) | \Gamma, \lambda, \mu \rangle = \hbar \left[ \sum_{y_k \in Y} \mu_k \chi_I(y_k) \right] | \Gamma, \lambda, \mu \rangle. \quad (7.21)$$

Ainda,

$$[\hat{e}(I), \hat{h}_{\lambda_0}(x_0)] = \hbar \lambda_0 \hat{h}_{\lambda_0}(x_0),$$

$$[\hat{\omega}(I), \hat{g}_{\mu_0}(y_0)] = \hbar \mu_0 \hat{g}_{\mu_0}(y_0).$$

## 7.2 O Operador de Volume

### 7.2.1 Definição do Operador de Volume

O volume  $V(I)$  de um intervalo espacial  $I \subset \mathcal{M}_1$  é definido classicamente como

$$V(I) := \int_I dx |e_x^1(x)|, \quad (7.22)$$

onde na verdade,  $V(I)$  é o comprimento do intervalo  $I$ .

Dado um intervalo  $I$ , particionamos o mesmo em um número  $N$  muito grande de pequeninos

intervalos  $I_k$ . Levando em conta a expressão clássica do volume de um intervalo  $I$  (7.22), tomamos o limite da soma de Riemann,

$$V(I) = \lim_{N \rightarrow \infty} [V(I)]_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_k^N \sqrt{e(I_k)e(I_k)}, \quad (7.23)$$

com

$$[V(I)]_N := \sum_k^N \sqrt{e(I_k)e(I_k)}, \quad (7.24)$$

onde  $e(I_k)$  é definido conforme a equação (7.18).

Desta forma, obtemos um operador de volume quântico sem ambiguidades a partir do operador  $\hat{e}(I)$  (7.18). Dada uma função cilíndrica  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) \in \text{Cyl}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$ , a ação do operador de volume sobre  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi)$  é definido no limite, assumindo que cada intervalo  $I_k$  contenha no máximo um ponto de interseção com o grafo  $X \subset \Gamma$ , assim

$$\begin{aligned} \hat{V}(I)\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} [\hat{V}(I)]_N \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_k^N \sqrt{\hat{e}(I_k)\hat{e}(I_k)} \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi). \end{aligned} \quad (7.25)$$

O regulador  $N$  pode ser facilmente removido, uma vez que o resultado da ação de  $\hat{e}(I_k)$  não muda no limite em que  $I_k$  é contraído a um ponto. Desde que, o refinamento da partição não afeta o resultado da ação de  $[\hat{V}(I)]_N$  sobre  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi)$ , o operador de volume  $\hat{V}(I)$ , que é autoadjunto, é bem definido sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  e tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \hat{V}(I)\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) &= \hbar \left[ \sum_{x_j \in \mathcal{E}(X \cap I)} \sqrt{(\lambda_j)^2} \right] \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi) \\ &= \hbar \left[ \sum_{x_j \in \mathcal{E}(X \cap I)} |\lambda_j| \right] \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi), \end{aligned} \quad (7.26)$$

onde  $\mathcal{E}(X \cap I)$  é o conjunto enumerável finito dos pontos de interseção entre o grafo  $X$  e o intervalo  $I$ . Ainda, esta expressão mostra que as redes spin-escalar em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  diagonalizam o operador  $\hat{V}(I)$ ,  $\forall I$ , com autovalores dados por somas finitas,

$$v_I = \hbar \left[ \sum_{x_j \in \mathcal{E}(X \cap I)} |\lambda_j| \right], \quad (7.27)$$

onde  $\lambda_j$  são números reais arbitrários e o espectro do operador de volume, denotado por  $\sigma(\hat{V})$ , é discreto, no sentido em que temos uma base ortonormal (não-enumerável) que diagonaliza  $\hat{V}(I)$ .

De uma forma direta poderíamos ter definido a ação do operador de volume  $\hat{V}$  sobre os estados *spin-scalar-network* através da seguinte expressão:

$$\hat{V}(I)\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})}(\varphi_1,\psi) := i\hbar \left\{ V(I), \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})}(\varphi_1,\psi) \right\} = \hbar \left[ \sum_{x_j \in \mathcal{E}(X \cap I)} |\lambda_j| \right] \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})}(\varphi_1,\psi). \quad (7.28)$$

Na notação de Dirac, temos

$$\hat{V}(I) | \Gamma, \lambda, \mu \rangle = v_I | \Gamma, \lambda, \mu \rangle, \quad (7.29)$$

onde  $v_I$  é dado pela expressão (7.27).

### 7.2.2 Consistência cilíndrica

Na verdade o que obtemos a partir de (7.26) é uma família de operadores  $\left\{ \hat{V}(I)_X, \mathcal{D}_X \right\}_{X \in \mathfrak{X}}$ , onde  $\mathcal{D}_X$  é o domínio denso em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  de  $\hat{V}(I)_X$ , onde  $\hat{V}(I)_X$  é a restrição do operador  $\hat{V}(I)$  ao grafo  $X$  e  $\mathfrak{X}$  é o conjunto de todos grafos  $X$ . Não obstante, seria preciso mostrarmos que o limite projetivo desta família projetiva cilíndrica é um operador linear sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Porém, basta notarmos que sempre que  $X' \succ X$ , temos

(a)  $P_{XX'}^* \mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}_{X'}$ , onde  $P_{XX'}$  é a restrição a partir de  $X'$  em  $X$ . Esta condição assegura que o operador definido sobre grafos maiores pode ser aplicado em funções definidas sobre grafos menores.

(b)  $(\hat{V}(I)_{X'})|_X = \hat{V}(I)_X$ , esta é a condição de consistência cilíndrica e nos diz que o operador definido sobre grafos maiores é igual ao operador sobre grafos menores quando restringido por funções.

Claramente, o domínio denso em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  para  $\hat{V}(I)_X$  pode ser dado por  $\mathcal{D}_X := \text{Cyl}_X(\overline{\mathcal{U}})$ . Esta escolha natural satisfaz o requerimento (a), desde que, as funções (na restrição) não dependam de todos os seus argumentos, por exemplo, no caso em que um edge  $x'_j$  de  $X'$  não é um edge

de  $X$ . Neste caso, não existe nenhum termo na restrição  $(\mathcal{D}(\hat{V})_{X'})|_X$  que corresponda ao edge  $x'_j$ , ou seja,  $(\mathcal{D}(\hat{V})_{X'})|_X = \mathcal{D}(\hat{V})_X$  (condição de consistência cilíndrica).

A partir destas considerações podemos inferir a existência de um operador  $\hat{V}(I)$  sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ , o qual é densamente definido sobre  $\mathcal{D} = \text{Cyl}(\bar{\mathcal{U}})$ , lembrando que,  $\text{Cyl}(\bar{\mathcal{U}}) = \bigcup_X \text{Cyl}(\bar{\mathcal{U}})_X$ .

Deste modo, concluímos que as propriedades gerais do operador de volume são:

- (i) Os estados *spin-scalar-network* são autoestados de  $\hat{V}(I)$ ;
- (ii) O espectro do operador de volume é discreto;
- (iii) Os edges com  $\lambda$  nulo são aniquilados pelo operador de volume.

### 7.2.3 Interpretação geométrica dos estados de *Spin-scalar-network* em relação ao operador de volume

As propriedades do operador de volume nos fornecem uma interpretação geométrica bastante simples dos estados de *spin-scalar-network*. Os edges (os pontos  $x_j$  de  $X$ ) carregam os quantas de volume. Esta interpretação é completamente *background independent* e implica que a informação geométrica armazenada no estado quântico da geometria é intrinsecamente invariante de difeomorfismo. O sistema de coordenadas que nós escolhemos para trabalharmos com o grafo da *spin-scalar-network* não carrega nenhuma informação física. Toda a informação sobre os graus de liberdade da geometria, está contida nos aspectos intrínsecos de cada grafo e nos quanta de volume.

## 7.3 Implementação dos vínculos ao nível quântico

Depois de termos construído consistentemente o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  para o nosso modelo (modelo JT), devemos implementar os vínculos  $\mathcal{G}_0(x)$  (5.101) e  $\mathcal{G}_1(x)$  (5.102) a nível quântico, afim de obtermos o espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$  que encerra toda a informação acerca da dinâmica do nosso modelo a nível quântico. Nesta seção nos dedicamos à tarefa de implementarmos tais vínculos em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  por meio de técnicas convenientes na esperança de analisarmos num quadro mais simples, alguns problemas que aparecem em LQG [12, 13].

### 7.3.1 Preparação para a implementação do vínculo de Difeomorfismo quântico

Nesta seção veremos que não podemos definir um operador para o vínculo de difeomorfismo quântico como sendo o gerador infinitesimal das transformações de difeomorfismos sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Porém, imporemos a invariância da teoria quântica sob os difeomorfismos finitos [23]. Deste modo, na tentativa de implementarmos o vínculo de difeomorfismo em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ , faremos uso da técnica conhecida como *group averaging*, particularmente, utilizada em LQG, a qual descreveremos abaixo.

A representação de difeomorfismos finitos é uma família de operadores unitários  $\hat{D}_\phi$  que agem sobre uma função cilíndrica da seguinte forma,

$$\hat{D}_\phi \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} = \Psi_{\phi \circ \Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} = (\phi \circ X(\vec{\lambda}), \phi \circ Y(\vec{\mu})), \quad (7.30)$$

para um dado difeomorfismo espacial  $\phi$  sobre  $\mathcal{M}_1$ . Um subgrupo a um parâmetro,  $\phi_t$ , no grupo dos difeomorfismos espaciais, pode ser representado como um grupo unitário a um parâmetro  $\hat{D}_{\phi_t}$  sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Contudo,  $\hat{D}_{\phi_t}$ , não é fracamente contínuo, desde que os subespaços  $\mathcal{H}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  e  $\mathcal{H}_{\phi_t \circ \Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  são ortogonais para  $t$  arbitrariamente pequeno. Assim, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} | \langle \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} | \hat{D}_{\phi_t} | \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} \rangle_{\text{cin}} - \langle \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} | \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} \rangle_{\text{cin}} | = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} | \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} \rangle_{\text{cin}} \neq 0. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Portanto, o gerador infinitesimal de  $\hat{D}_{\phi_t}$  não existe, e como isto teremos de impor a invariância da teoria quântica sob os difeomorfismos finitos. Nestas circunstâncias, para implementarmos o vínculo de difeomorfismo, vamos empregar a técnica conhecida pelo nome de *group averaging* [12, 111–113].

Primeiramente, dado um grafo colorido  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$  e uma função cilíndrica sobre ele, podemos definir o grupo de simetrias de  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ , o qual denotaremos por  $\text{GS}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$ , através da expressão,

$$\text{GS}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} := \text{Diff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} / \text{TDiff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}, \quad (7.32)$$

onde  $\text{Diff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  é o grupo de todos os difeomorfismos que deixam  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$  invariante, e  $\text{TDiff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$

é o grupo de todos os difeomorfismos<sup>2</sup> que agem trivialmente sobre  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ . Definimos então, uma projeção através da média em relação a  $\text{GS}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  para obtermos um subespaço de  $\mathcal{H}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  que é invariante sobre as transformações de  $\text{GS}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$ :

$$\hat{P}_{\text{Diff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}} \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} := \frac{1}{n_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}} \sum_{\phi \in \text{GS}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}} \hat{D}_\phi \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}, \quad (7.33)$$

para todas as funções cilíndricas  $\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} \in \mathcal{H}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$ , onde  $n_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  é o número de elementos de  $\text{GS}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$ , o qual é finito. Em nosso caso  $n_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} = 2$ . Em segundo lugar, tomamos a média em relação a todos os difeomorfismos restantes<sup>3</sup> que movem o grafo colorido  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ . Para cada função cilíndrica  $\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} \in \mathcal{H}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$ , existe um elemento  $(\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})})|$  associado a  $\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  no espaço dual algébrico  $\text{Cyl}^*$  de  $\text{Cyl}$ , isto é, o espaço vetorial das formas lineares que atuam sobre as funções cilíndricas arbitrárias  $|\Phi_{\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} \rangle \in \text{Cyl}$ <sup>4</sup>, como

$$(\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})})| \Phi_{\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} \rangle := \sum_{\phi \in \text{Diff}(\mathcal{M}_1)/\text{Diff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}} \langle \hat{D}_\phi \hat{P}_{\text{Diff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}} \Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})} | \Phi_{\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} \rangle_{\text{cin}}. \quad (7.34)$$

Essa expressão é bem definida, desde que, para um dado  $\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')$ , a soma acima tem apenas um número finito de termos diferentes de zero. Contudo, não existe o vetor  $\Upsilon$  em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  de modo que,  $\langle \Upsilon | \Phi_{\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} \rangle$  seja igual ao lado direito equação (7.34),  $\forall \Phi_{\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} \in \text{Cyl}$ . Assim,  $(\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})})|$  é uma genuína distribuição. Devido a invariância de difeomorfismo do produto escalar em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ , é fácil verificarmos que  $\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})})$  é invariante sob a ação do grupo  $\text{Diff}(\mathcal{M}_1)$ :

$$\begin{aligned} \left[ (\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}) \hat{D}_\phi \right] | \Phi_{\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} \rangle &:= (\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}) \left[ \hat{D}_\phi | \Phi_{\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} \rangle \right] = \\ &= (\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}) | \Phi_{\Gamma(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} \rangle, \quad \forall \phi \in \text{Diff}(\mathcal{M}_1). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Assim, acabamos de definir um mapeamento  $\Upsilon : \text{Cyl} \rightarrow \text{Cyl}_{\text{Diff}}^*$ , que mapeia toda função cilíndrica em um invariante de difeomorfismo. Porém, é importante observarmos que o mapeamento  $\Upsilon$  não é uma projeção, pois ele mapeia  $\text{Cyl}$  em um espaço diferente, no caso  $\text{Cyl}_{\text{Diff}}^*$ .

O espaço vetorial  $\text{Cyl}_{\text{Diff}}^*$  é varrido linearmente pelos vetores *spin-scalar-network*  $\left( \Upsilon(\mathcal{N}_{\vec{\Gamma}(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}) \right)$

<sup>2</sup> $\text{Diff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  e  $\text{TDiff}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}$  são subgrupos do grupo dos difeomorfismos que atuam sobre  $\mathcal{M}_1$ ,  $\text{Diff}(\mathcal{M}_1)$ .

<sup>3</sup>O conjunto destes difeomorfismos é enorme.

<sup>4</sup>Aqui temos a seguinte tripla de Gel'fand  $\text{Cyl} \subset \mathcal{H}_{\text{cin}} \subset \text{Cyl}^*$ . A razão de procurarmos soluções em  $\text{Cyl}^*$  é que os difeomorfismos são bem definidos e têm uma realização não trivial. A realização trivial é representada pelo “estado vácuo”, o qual é definido em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ , mas também é comum ao subespaço  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ . De fato, o estado de vácuo é o único elemento de  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  invariante de difeomorfismo. Assim, os estados invariantes de difeomorfismos são bem definidos como elementos de  $\text{Cyl}^*$ .

associados com as classes de difeomorfismos  $\tilde{\Gamma}(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$  de  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ . Portanto, podemos definir o produto interno Hermitiano sobre  $\text{Cyl}_{\text{Dif}}^*$  através de

$$(\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}) | \Upsilon(\Phi_{\Gamma'(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')})) := (\Upsilon(\Psi_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}) | \Phi_{\Gamma'(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')} > . \quad (7.36)$$

que não depende da escolha de  $\Phi_{\Gamma'(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')}.$

O espaço de Hilbert invariante de difeomorfismo  $\mathcal{H}_{\text{Dif}}$  é definido como completamento de Cauchy de  $\text{Cyl}_{\text{Dif}}^*$  em relação ao produto interno (7.36). Os vetores *spin-scalar-network*  $\left( \Upsilon(\mathcal{N}_{\tilde{\Gamma}(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}) \right)$  invariantes de difeomorfismos formam uma base ortonormal em  $\mathcal{H}_{\text{Dif}}$ . Consequentemente, os estados em  $\mathcal{H}_{\text{Dif}}$  relacionados a grafos diferentes, isto é, não relacionados por difeomorfismos,  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \neq \phi \circ \Gamma'(\vec{\lambda}', \vec{\mu}')$ , são mutuamente ortogonais. Note ainda que o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{\text{Dif}}$  é não-separável<sup>5</sup>.

Porém, depois de tudo o que fizemos, devemos lembrar que as relações de comutação entre os vínculos de difeomorfismo, no nosso caso  $\mathcal{G}_1(x)$  (5.102), não são de uma subálgebra de Lie. O parêntese de Dirac entre dois vínculos  $\mathcal{G}_1(x)$  é dado por,

$$\{\mathcal{G}_1(\epsilon), \mathcal{G}_1(\eta)\}_{\text{D}} = -\mathcal{G}_1\left(\frac{1}{e}[\epsilon, \eta]\right), \quad (7.37)$$

e o aparecimento de  $1/e_x^1$  no lado direito de (7.37) pode levar ao aparecimento de anomalias quânticas<sup>6</sup>. Estes fatos implicam que o operador (vínculo) de difeomorfismo não pode ser definido diretamente sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  de modo consistente. Contudo, vamos implementar o vínculo de difeomorfismo quântico utilizando o *group averaging* aliado a um esquema de regularização, o qual discutiremos na próxima seção.

### 7.3.2 Dinâmica Quântica

Nesta seção nós discutiremos a dinâmica quântica do nosso modelo. O caminho natural seria implementaremos o vínculo escalar  $\mathcal{G}_0$  (5.101) como um operador no espaço de Hilbert invariante de difeomorfismo  $\mathcal{H}_{\text{Dif}}$ , na esperança de encontrarmos o espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$  ao

<sup>5</sup>Para discussão cuidadosa sobre os problemas oriundos da não-separabilidade de  $\mathcal{H}_{\text{Dif}}$ , ver as referências [12, 23, 114].

<sup>6</sup>Em [103, 104] encontramos uma redefinição de  $\mathcal{G}_1(x)$  ( $\mathcal{G}'_1(x) = e_x^1 \mathcal{G}_1(x)$ ) de modo que  $\{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\} = -\mathcal{G}'_1([\epsilon, \eta])$ , porém esta redefinição introduz uma dificuldade técnica do ponto de vista da regularização, a expressão regularizada de  $\mathcal{G}'_1(\epsilon)$  é divergente no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

resolvermos completamente o vínculo escalar quântico. Contudo, sabemos de antemão que dificuldades aparecerão. Primeiramente, as relações de comutação entre os vínculos escalares não são de uma subálgebra de Lie. Com efeito,

$$\{\mathcal{G}_0(\epsilon), \mathcal{G}_0(\eta)\}_D = \sigma \mathcal{G}_1 \left( \frac{1}{e} [\epsilon, \eta] \right), \quad (7.38)$$

e, portanto, devemos usar com cautela a técnica de *group averaging* diretamente sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  para o vínculo escalar. Em segundo lugar, como no caso de  $\mathcal{G}_1$ , o aparecimento de  $1/e_x^1$  no lado direito de (7.38) pode levar ao aparecimento de anomalias quânticas. Estes fatos implicam que o vínculo escalar quântico, assim como, o vínculo de difeomorfismo quântico, não podem ser definidos diretamente sobre  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$  de modo consistente, utilizando apenas o *group averaging*. Devemos então, procurar uma técnica conveniente associada ao *group averaging* para implementarmos o vínculo escalar quântico em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . A ideia é tomarmos como base o esquema de regularização proposto por Thiemann em [12] e adaptarmos este esquema ao nosso caso.

### 7.3.3 Regularização dos vínculos $\mathcal{G}_0$ e $\mathcal{G}_1$

Nesta seção vamos utilizar um esquema de regularização na tentativa de implementarmos os operadores  $\hat{\mathcal{G}}_0$  e  $\hat{\mathcal{G}}_1$  em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$  de modo consistente. A ideia é construirmos versões suavizadas dos vínculos clássicos  $\mathcal{G}_0(x)$  e  $\mathcal{G}_1(x)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(N) &= \int_{\mathcal{M}_1} dx N(x) \mathcal{G}_0(x) = \\ &= \int_{\mathcal{M}_1} dx N(x) \left( \sigma \partial_x \left( \frac{\partial_x \psi(x)}{e_x^1(x)} \right) + \Omega \psi(x) e_x^1(x) - \varphi_1(x) \omega(x) \right), \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(N^1) &= \int_{\mathcal{M}_1} dx N^1(x) \mathcal{G}_1(x) = \\ &= \int_{\mathcal{M}_1} dx N^1(x) \left( \partial_x \varphi_1(x) + \omega(x) \frac{\partial_x \psi(x)}{e_x^1(x)} \right), \end{aligned} \quad (7.40)$$

onde  $N(x)$  e  $N^1(x)$  são funções testes convenientes. Podemos ver claramente, que tanto  $\mathcal{G}_0$ , quanto  $\mathcal{G}_1$ , apresentam termos não-lineares, os quais na quantização estarão relacionados ao aparecimento de divergências e ambiguidades.

Seguindo as ideias de Thiemann ([12], [115], [116]), propomos uma simplificação crucial para contornarmos os problemas acima. A ideia é reescrevermos  $\mathcal{G}_0$  e  $\mathcal{G}_1$  em termos da combinação dos parênteses de Poisson entre as variáveis que podem ser representadas como operadores

sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Depois, trocaremos os parênteses de Poisson pelos comutadores canônicos entre os respectivos operadores. Em tal simplificação, usaremos o parêntese de Dirac, entre o volume funcional (7.22) e o holonomia ponto  $h_\alpha(x)$ ,

$$\{V(I), h_\alpha(x)\}_D = -i\alpha h_\alpha(x) \text{sinal}(e_x^1(x)), \quad (7.41)$$

onde  $h_\alpha(x) = e^{-i\alpha\varphi_1(x)}$  e  $\text{sinal}(e_x^1(x))$  é o sinal de  $e_x^1(x)$  no intervalo  $I$  contendo unicamente o ponto  $x$ . Note que  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais arbitrariamente escolhidos.

Uma identidade clássica chave que utilizaremos é a seguinte,

$$\frac{\text{sinal}(e_x^1(x))}{V^{\frac{1}{2}}(I)} = \frac{2i}{\alpha} h_\alpha^{-1}(x) \left\{ V^{\frac{1}{2}}(I), h_\alpha(x) \right\}_D. \quad (7.42)$$

**Demostração:** Classicamente, temos

$$\begin{aligned} \{V(I), h_\alpha(x)\}_D &= V^{\frac{1}{2}}(I) \left\{ V^{\frac{1}{2}}(I), h_\alpha(x) \right\}_D + \left\{ V^{\frac{1}{2}}(I), h_\alpha(x) \right\}_D V^{\frac{1}{2}}(I) = \\ &= 2V^{\frac{1}{2}}(I) \left\{ V^{\frac{1}{2}}(I), h_\alpha(x) \right\}_D = \\ &= -i\alpha \chi_I(x) h_\alpha(x) \text{sinal}(e_x^1(x)) \implies \\ &\implies \frac{\text{sinal}(e_x^1(x)) \chi_I(x)}{V^{\frac{1}{2}}(I)} = \frac{2i}{\alpha} h_\alpha^{-1}(x) \left\{ V^{\frac{1}{2}}(I), h_\alpha(x) \right\}_D, \end{aligned}$$

onde  $I$  é um intervalo qualquer de  $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{R}$  e  $\chi_I(x)$  a função característica do intervalo  $I$ .

Ainda, reescrevendo (7.39) e (7.40), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(N) &= \int_{\mathcal{M}_1} dx N(x) \left( \sigma \partial_x^2 \psi(x) \frac{1}{e_x^1(x)} - \sigma \partial_x \psi(x) \partial_x e_x^1(x) \frac{1}{(e_x^1(x))^2} + \right. \\ &\quad \left. + \Omega \psi(x) e_x^1(x) - \varphi_1(x) \omega(x) \right), \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\mathcal{G}_1(N^1) = \int_{\mathcal{M}_1} dx N^1(x) \left( \partial_x \varphi_1(x) e_x^1(x) + \partial_x \psi(x) \omega(x) \right) \frac{1}{e_x^1(x)}. \quad (7.44)$$

O fato de reescrevermos  $\mathcal{G}_0$  e  $\mathcal{G}_1$  acima com esta ordem particular dos fatores, não tem nenhuma relevância classicamente, mas veremos que quânticamente esta forma facilita, e muito, as coisas.

Agora, afim de obtermos uma versão regularizada de  $\mathcal{G}_0$  e  $\mathcal{G}_1$  nós utilizaremos a noção de segmentação, através da decomposição da reta real  $\mathbb{R}$  como a união disjunta de intervalos semiabertos.

**Definição 7.3.1** *Em nosso contexto, uma segmentação  $S$  é uma decomposição da linha real, de modo que,*

$$\mathbb{R} = \cup_{I_l \in S} I_l, \quad (7.45)$$

onde  $I_l = [L_l, R_l)$ , e impomos ao conjunto de vértice  $\{L_{l+1} = R_l\}_{I_l \in S}$  não ter nenhum ponto de acumulação.

Aqui, é importante observarmos que a segmentação  $S$  será adaptada ao grafo  $\Gamma$  associado a função *spin-scalar network*  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi)$ , à qual aplicaremos os operadores quânticos que estamos por construir.

Dado um intervalo  $I_l$  de coordenadas de comprimento infinitesimal  $\epsilon$ , impomos que infinitesimalmente  $I_l$  contenha apenas o ponto  $L_l$ . Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \frac{\text{sinal}(e_{L_l})}{V_{I_l}^{\frac{1}{2}}} &= \frac{2i}{\alpha} h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{I_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_{\text{D}} \implies \\ \implies \text{sinal}(e_{L_l}) &= \frac{2i}{\alpha} h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{I_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_{\text{D}} V_{I_l}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} V_{I_l} &= \int_{I_l} dx |e_{L_l}| \approx \epsilon |e_{L_l}| = \epsilon e_{L_l} \text{sinal}(e_{L_l}) \implies \\ \implies \frac{1}{e_{L_l}} &\approx \frac{\epsilon \text{sinal}(e_{L_l})}{V_{I_l}} = \epsilon \frac{\text{sinal}(e_{L_l})}{V_{I_l}^{\frac{1}{2}}} \frac{\text{sinal}(e_{L_l})}{V_{I_l}^{\frac{1}{2}}} \text{sinal}(e_{L_l}) \implies \\ \implies \frac{1}{e_{L_l}} &\approx \epsilon \left( \frac{2i}{\alpha} h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{I_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_{\text{D}} \right)^3 V_{I_l}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} \omega_{I_l} &= \int_{I_l} dx \omega(x) \approx \epsilon \omega_{L_l} \implies \\ \implies \omega_{L_l} &\approx \frac{\omega_{I_l}}{\epsilon}, \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned}
\partial_x e_x^1(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (e_{L_{l+1}} - e_{L_l}) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} (\text{sinal}(e_{L_{l+1}})V_{L_{l+1}} - \text{sinal}(e_{L_l})V_{L_l}) = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{2i}{\alpha} \left( h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{L_{l+1}}^{\frac{1}{2}}, h_{L_{l+1}} \right\}_D V_{L_{l+1}}^{\frac{3}{2}} - h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{L_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_D V_{L_l}^{\frac{3}{2}} \right), \quad (7.49)
\end{aligned}$$

$$\partial_x \varphi_1(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\beta} \frac{1}{\epsilon} h_{L_l}^{-1} (h_{L_{l+1}} - h_{L_l}), \quad (7.50)$$

$$\partial_x \psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\beta} \frac{1}{\epsilon} g_{L_l}^{-1} (g_{L_{l+1}} - g_{L_l}), \quad (7.51)$$

$$\partial_x^2 \psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\beta} \frac{1}{\epsilon^2} \left[ g_{L_l}^{-1} (g_{L_{l+2}} - 2g_{L_{l+1}} + g_{L_l}) + (g_{L_l}^{-1} (g_{L_{l+1}} - g_{L_l}))^2 \right], \quad (7.52)$$

onde,  $h_{L_l} = e^{-i\alpha\varphi_1 L_l}$ ,  $g_{L_l} = e^{-i\beta\psi L_l}$  e  $\text{sinal}(e_{L_l})$ ,  $V_{L_l}$  são respectivamente, o sinal de  $e_{L_l}$  e o volume do intervalo  $I_l$ .

Assim, obtemos a versão regularizada de  $\mathcal{G}_0$  e  $\mathcal{G}_1$  com respeito a uma dada segmentação  $S(\epsilon)$  de  $\mathcal{M}_1$  trocando as integrais em (7.43) pela soma de Riemann sobre todos os segmentos de coordenada de comprimento  $\epsilon$  e escrevendo  $\varphi_1$  e  $\psi$  em termos de suas respectivas holonomias.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0(N) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_l N_l \left[ \frac{i\sigma}{\beta} \left( g_{L_l}^{-1} (g_{L_{l+2}} - 2g_{L_{l+1}} + g_{L_l}) + (g_{L_l}^{-1} (g_{L_{l+1}} - g_{L_l}))^2 \right) \cdot \right. \\
&\cdot \left. \left( \frac{2i}{\alpha} h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{L_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_D \right)^3 V_{L_l}^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sigma}{\alpha\beta} U_{L_l}^{-1} (U_{L_{l+1}} - U_{L_l}) \cdot \right. \\
&\cdot \left. \left( h_{L_{l+1}}^{-1} \left\{ V_{L_{l+1}}^{\frac{1}{2}}, h_{L_{l+1}} \right\}_D V_{L_{l+1}}^{\frac{3}{2}} - h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{L_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_D V_{L_l}^{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left( \frac{2i}{\alpha} h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{L_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_D \right)^6 V_{L_l} + \right. \\
&\left. - \frac{\Omega}{\alpha\beta} (g_{L_l} - g_{L_l}^{-1}) \cdot h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{L_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_D V_{L_l}^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2\alpha} (h_{L_l} - h_{L_l}^{-1}) \omega_{I_l} \right], \quad (7.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(N^1) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_l N_l^1 \frac{8}{\alpha^3} \left[ \frac{2i}{\alpha^2} h_{L_l}^{-1} (h_{L_{l+1}} - h_{L_l}) h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{L_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_D V_{L_l}^{\frac{3}{2}} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{\beta} g_{L_l}^{-1} (g_{L_{l+1}} - g_{L_l}) \omega_{I_l} \right] \cdot \left( h_{L_l}^{-1} \left\{ V_{L_l}^{\frac{1}{2}}, h_{L_l} \right\}_D \right)^3 V_{L_l}^{\frac{1}{2}}, \quad (7.54)
\end{aligned}$$

onde  $\alpha\varphi_1$ ,  $\beta\psi \ll 1$  para todo ponto  $L_l$ . Note que não temos nenhuma dependência explícita de  $\epsilon$ .

### 7.3.4 Quantização de $\mathcal{G}_0$ e $\mathcal{G}_1$

A ideia agora, é promovermos as expressões regularizadas (7.53) e (7.54) a operadores: devemos notar que as expressões (7.53) e (7.54) envolvem as holonomias pontuais e o volume funcional, ambos bem definidos como operadores sobre  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ .

Dada uma função *spin-scalar network*  $\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})}(\varphi_1, \psi)$  para assegurar que os operadores finais serão cilíndricamente consistentes, faremos uma segmentação  $S(\epsilon)$  adaptada ao grafo  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ , seguindo a estratégia que foi desenvolvida em [116].

Em nosso caso, bastante particular, a segmentação  $S(\epsilon)$  (ver definição 7.3.1), tem a propriedade simples:

*O grafo  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$  está embebido em  $S(\epsilon)$  para todo  $\epsilon$ , de modo que todo edge de  $\Gamma$  (em nosso caso os pontos  $x_k$ ) coincide com algum vértice  $L_l$  da segmentação  $S(\epsilon)$ . Então, cada intervalo  $I_l$  de  $S(\epsilon)$  contém no máximo um edge de  $\Gamma$ .*

Assim, operadores  $\widehat{\mathcal{G}}_0(N)$  e  $\widehat{\mathcal{G}}_1(N^1)$ , podem ser formalmente escritos como <sup>7</sup>,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{G}}_0(N) &= \frac{8i\sigma}{\alpha^3\beta\hbar^3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k N_k \left[ \left( \hat{g}_{L_k}^{-1}(\hat{g}_{L_{k+2}} - 2\hat{g}_{L_{k+1}} + \hat{g}_{L_k}) + (\hat{g}_{L_k}^{-1}(\hat{g}_{L_{k+1}} - \hat{g}_{L_k}))^2 \right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \hat{M}_{L_k}^3 \hat{V}_{I_k}^{\frac{1}{2}} - \frac{16}{\alpha^4\hbar^4} \hat{g}_{L_k}^{-1}(\hat{g}_{L_{k+1}} - \hat{g}_{L_k})(\hat{M}_{L_{k+1}} \hat{V}_{I_{k+1}}^{\frac{3}{2}} - \hat{M}_{L_k} \hat{V}_{I_k}^{\frac{3}{2}}) \cdot \hat{M}_{L_k}^6 \hat{V}_{I_k} + \\ &\quad \left. + \frac{\Omega\alpha^2\hbar^2\sigma}{8}(\hat{g}_{L_k} - \hat{g}_{L_k}^{-1}) \cdot \hat{M}_{L_k} \hat{V}_{I_k}^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha^2\beta\sigma\hbar^3}{16}(\hat{h}_{L_k} - \hat{h}_{L_k}^{-1})\hat{\omega}_{I_k} \right], \end{aligned} \quad (7.55)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{G}}_1(N^1) &= \frac{16i}{\alpha^5\hbar^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k N_k^1 \left[ \hat{h}_{L_k}^{-1}(\hat{h}_{L_{k+1}} - \hat{h}_{L_k}) \cdot \hat{M}_{L_k} \hat{V}_{I_k}^{\frac{3}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2\hbar}{2\beta} \hat{g}_{L_k}^{-1}(\hat{g}_{L_{k+1}} - \hat{g}_{L_k}) \hat{\omega}_{I_k} \right] \cdot \hat{M}_{L_k}^3 \hat{V}_{I_k}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

onde,  $\hat{h}_{L_k}$  e  $\hat{g}_{L_k}$  são os operadores de configuração (holonomias pontuais) no ponto  $x_k$ ,  $\hat{V}_{I_k}$  o operador de volume relativo ao intervalo  $I_k$  que contém unicamente o ponto  $x_k$  e  $\hat{M}_{L_k} := \hat{h}_{L_k}^{-1}[\hat{V}_{I_k}^{\frac{1}{2}}, \hat{h}_{L_k}]$ .

Agora, para obtermos uma definição rigorosa de  $\widehat{\mathcal{G}}_0(N)$  e  $\widehat{\mathcal{G}}_1(N^1)$  nós precisamos mostrar que os limites em (7.55) e (7.56) existem num certo espaço de Hilbert.

<sup>7</sup>Seguindo o esquema de quantização de Dirac faremos a seguinte substituição  $\{ \ , \ } \rightarrow -i/\hbar [ \ , \ ]$ .

É importante descrevermos algumas características quantitativas do argumento do limite em (7.55), o qual chamaremos de *vínculo escalar quântico regulado* e denotaremos por,  $\widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N)$ . Podemos ver que o vínculo escalar quântico atua sobre todos os edges da *scalar-spin-network* com  $\lambda$ 's e  $\mu$ 's não-nulos,

$$\widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N)\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})}(\varphi_1,\psi) = \sum_k N_k \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon,k} \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})}(\varphi_1,\psi), \quad (7.57)$$

onde  $\widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon,k}$  atua nos edges  $x_k \in \Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})$  que são selecionados pela ação operador de volume  $\widehat{V}(I)$  (7.26) e pela ação do operador  $\widehat{\omega}(I)$  (7.19), sendo  $N_k$  o valor da função  $N(x)$  em  $x_k$ . Devido a ação dos operadores de configuração  $\widehat{h}_{L_k}$  e  $\widehat{g}_{L_k}$ , o vínculo escalar quântico modifica as *scalar-spin network*, através da inserção de novos edges a partir dos antigos, cujos detalhes dependem da ação do operador de volume e do operador  $\widehat{\omega}(I)$ .

Fazendo a mesma análise para o argumento do limite em (7.56), o qual denotaremos por  $\widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1)$ , podemos ver que o *vínculo de difeomorfismo quântico regulado* atua somente sobre os edges da *scalar-spin-network* com  $\lambda$ 's não-nulos,

$$\widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1)\mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})}(\varphi_1,\psi) = \sum_k N_k^1 \widehat{\mathcal{G}}_1^{\epsilon,k} \mathcal{N}_{\Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})}(\varphi_1,\psi), \quad (7.58)$$

onde  $\widehat{\mathcal{G}}_1^{\epsilon,k}$  atua somente nos edges  $x_k \in \Gamma(\vec{\lambda},\vec{\mu})$  que são selecionados pelo ação do operador de volume  $\widehat{V}(I)$  (7.26) e  $N_k^1$  é o valor da função  $N^1(x)$  em  $x_k$ . Aqui também, como em (7.57), o vínculo de difeomorfismo quântico modifica a *scalar-spin network* devido a ação dos operadores de configuração  $\widehat{h}_{L_k}$  e  $\widehat{g}_{L_k}$ , inserindo novos edges a partir dos antigos, cujos detalhes, neste caso, dependem exclusivamente da ação do operador de volume e das características locais de cada edge.

Para uma análise detalhada da ação dos operadores  $\widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N)$  e  $\widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1)$  sobre os estados  $|\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle$  ver o apêndice D.

### 7.3.5 Removendo o regulador

Agora nós analisamos a remoção do regulador. Desde que, temos apenas uma dependência implícita em  $\epsilon$  devido a presença dos edges extras nos estados *scalar-spin network* resultantes da aplicação de (7.55) e (7.56). O limite  $\epsilon \rightarrow 0$  que não pode ser definido no espaço de

Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ , é contudo, definido no espaço de Hilbert dos estados invariantes de difeomorfismo  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ . A propriedade chave é que no contexto da invariância de difeomorfismo a posição dos novos edges é irrelevante. Portanto, dado um estado invariante de difeomorfismo  $(\Upsilon(\varphi)| \in \mathcal{H}_{\text{Diff}} \subset \text{Cyl}^*$ , como definido em (7.34), os operadores duais definidos em  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ ,

$$\left[ (\Upsilon(\varphi)| \widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N) \right] |\psi \rangle := (\Upsilon(\varphi)| \left[ \widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N) |\psi \rangle \right], \quad (7.59)$$

$$\left[ (\Upsilon(\varphi)| \widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1) \right] |\psi \rangle := (\Upsilon(\varphi)| \left[ \widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1) |\psi \rangle \right], \quad (7.60)$$

são bem definidos e independentes de  $\epsilon$ . Em outras palavras os limites,

$$\left[ (\Upsilon(\varphi)| \widehat{\mathcal{G}}_0(N) \right] |\psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Upsilon(\varphi)| \left[ \widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N) |\psi \rangle \right], \quad (7.61)$$

$$\left[ (\Upsilon(\varphi)| \widehat{\mathcal{G}}_1(N^1) \right] |\psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Upsilon(\varphi)| \left[ \widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1) |\psi \rangle \right], \quad (7.62)$$

existem trivialmente para todo  $|\psi \rangle \in \mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Uma análise correspondente para a LQG, pode ser encontrada em [12].

Ainda, na teoria quântica de campos (TQC) usual, a teoria é recuperada quando a distância entre os espaçamentos da rede tendem a zero, isto é, quando tomamos o *cut-off* no seu limite contínuo. Porém, isto levará às famosas infinidades em TQC. No nosso caso, vemos que os operadores  $\widehat{\mathcal{G}}_0(N)$  e  $\widehat{\mathcal{G}}_1(N^1)$  são bem definidos, no sentido de que quando tomamos o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  de modo que a segmentação vai para o contínuo, as expressões (7.61) e (7.62) são bem definidas, sem a necessidade de introduzirmos contratermos adequados. A razão por trás disto, é que o *cut-off* é essencialmente inofensivo devido a invariância de difeomorfismo de nossa teoria. Isto implica na não existência de divergências ultravioletas, resultado já esperado em uma teoria de campos de *gauge* independente de fundo com invariância de difeomorfismo.

### 7.3.6 Álgebra dos vínculos quânticos

Uma tarefa importante é conferirmos se a álgebra dos comutadores (álgebra dos vínculos quânticos) entre os operadores quânticos correspondentes aos vínculos clássicos  $\mathcal{G}_0(N)$  e  $\mathcal{G}_1(N^1)$ , é compatível com a álgebra clássica dos parênteses de Dirac, sem anomalia.

Como vimos na seção 7.3.1, em se tratando da teoria quântica, temos que trabalhar na repre-

sentação  $\hat{D}_\phi$  dos difeomorfismos finitos  $\phi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$  em  $\mathcal{H}_{\text{cin}}$ , onde

$$\hat{D}_\phi \mathcal{H}_{\text{Diff}} = \mathcal{H}_{\text{Diff}}.$$

Em primeiro lugar vamos reescrever o parêntese de Dirac

$$\{\mathcal{G}_1(N^1e), \mathcal{G}_0(N)\}_{\text{D}} = -\mathcal{G}_0(N^1\partial N), \quad (7.63)$$

em termos de difeomorfismos finitos.

Tomando  $D_\phi \equiv e^{\mathcal{G}_1(N^1e)}$  (classicamente) como um difeomorfismo finito  $\phi$  de parâmetro  $N^1$ , temos

$$\begin{aligned} \{D_\phi, \mathcal{G}_0(N)\}_{\text{D}} &= \{e^{\mathcal{G}_1(N^1e)}, \mathcal{G}_0(N)\}_{\text{D}} \\ &= \{\mathcal{G}_1(N^1e), \mathcal{G}_0(N)\}_{\text{D}} e^{\mathcal{G}_1(N^1e)} \\ &= -\mathcal{G}_0(N^1\partial N) = -\mathcal{G}_0(\phi^*N), \end{aligned} \quad (7.64)$$

onde definimos o *pull-back*  $\phi^*N = N^1\partial N$ . Portanto, esperamos que quânticamente no espaço  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ , tenhamos

$$\hat{D}_\phi^{-1} \hat{\mathcal{G}}_0(N) \hat{D}_\phi = \hat{\mathcal{G}}_0(\phi^*N). \quad (7.65)$$

Vejamos então, para qualquer função cilíndrica (função teste)  $|\psi_\Gamma\rangle \in \mathcal{H}_{\text{cin}}$  associada a um grafo  $\Gamma$  e as segmentações  $S(\epsilon)$  adaptadas a  $\Gamma$ , sendo as segmentações  $S(\phi \circ \epsilon) \equiv \phi \circ S(\epsilon)$  compatíveis com o grafo  $\phi \circ \Gamma$ , temos

$$\begin{aligned} \left[ (\Upsilon(\varphi) | \hat{D}_\phi^{-1} \hat{\mathcal{G}}_0(N) \hat{D}_\phi | \psi_\Gamma \rangle \right] &= \left[ (\Upsilon(\varphi) | \hat{\mathcal{G}}_0(N) | \psi_{\phi \circ \Gamma} \rangle \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k N_{\phi \circ k} (\Upsilon(\varphi) | \left[ \hat{\mathcal{G}}_0^{\phi \circ \epsilon, \phi \circ k}(N) | \psi_{\phi \circ \Gamma} \rangle \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k N_{\phi \circ k} (\Upsilon(\varphi) | \left[ \hat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k}(N) | \psi_\Gamma \rangle \right] \\ &= \left[ (\Upsilon(\varphi) | \hat{\mathcal{G}}_0(\phi^*N) | \psi_\Gamma \rangle \right], \end{aligned} \quad (7.66)$$

onde na primeira linha da equação (7.66) utilizamos o fato que  $\left[ (\Upsilon(\varphi) | \hat{D}_\phi^{-1} | \psi_\Gamma \rangle \right] = (\Upsilon(\varphi) | \psi_\Gamma \rangle$ ,

para todo  $(\Upsilon(\varphi)| \in \mathcal{H}_{\text{Diff}} \subset \text{Cyl}^*$  e  $\hat{D}_\phi|\psi_\Gamma \rangle = |\psi_{\phi \circ \Gamma} \rangle$ . Já na segunda e terceira linha do lado direito de (7.66), utilizamos o esquema de regularização descrito nas seções 7.3.3 e 7.3.4 e a expressão (7.61). Assim, concluímos que, não existe nenhuma anomalia nesta parte da álgebra.

Em segundo lugar vamos calcular o comutador entre dois operadores  $\widehat{\mathcal{G}}_0(N)$ , lembrando que vimos na seção 7.3.5, que tal expressão só é bem definida em  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ . Utilizando o método de regularização empregado nas seções 7.3.3 e 7.3.4, temos

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathcal{G}}_0(N), \widehat{\mathcal{G}}_0(M)]|\psi_\Gamma \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \left( M_k \widehat{\mathcal{G}}_0(N) - N_k \widehat{\mathcal{G}}_0(M) \right) \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k} |\psi_\Gamma \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \sum_{k'} \left( M_k N_{k'} - N_k M_{k'} \right) \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon', k'} \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k} |\psi_\Gamma \rangle, \end{aligned}$$

onde o somatório em  $k'$  está relacionado aos pontos  $x_{k'} \in \Gamma'$ , sendo  $\Gamma'$  o grafo mudado devido a ação de  $\widehat{\mathcal{G}}_0(N)$  ou  $\widehat{\mathcal{G}}_0(M)$  ao inserir novos edges no grafo  $\Gamma$ .  $S(\epsilon)$  é a segmentação adaptada ao grafo  $\Gamma$  e  $S(\epsilon')$  a segmentação adaptada ao grafo  $\Gamma'$ . Ainda, como  $k \neq k'$ , temos

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathcal{G}}_0(N), \widehat{\mathcal{G}}_0(M)]|\psi_\Gamma \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k \neq k'} \left( M_k N_{k'} - N_k M_{k'} \right) \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon', k'} \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k} |\psi_\Gamma \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{k \neq k'} (M_k N_{k'} - N_k M_{k'}) (\widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon', k'} \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k} - \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k} \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon', k'}) |\psi_\Gamma \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{k \neq k'} (M_k N_{k'} - N_k M_{k'}) [(\hat{D}_{\phi_{k'k}} - \hat{D}_{\phi_{kk'}}) \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon', k'} \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k}] |\psi_\Gamma \rangle \end{aligned} \tag{7.67}$$

onde usamos o fato que  $[\widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k}, \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon', k'}] = 0$  para  $k \neq k'$  e a existência do difeomorfismo  $\phi_{kk'}$ , tal que,  $\widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k'} \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k} = \hat{D}_{\phi_{k'k}} \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon', k'} \widehat{\mathcal{G}}_0^{\epsilon, k}$ . Assim, é direto ver que

$$\left[ (\Upsilon(\varphi)| [\widehat{\mathcal{G}}_0(N), \widehat{\mathcal{G}}_0(M)] \right] |\psi_\Gamma \rangle = 0, \tag{7.68}$$

para todo  $(\Upsilon(\varphi)| \in \mathcal{H}_{\text{Diff}} \subset \text{Cyl}^*$  e para todo  $|\psi_\Gamma \rangle \in \mathcal{H}_{\text{cin}}$ . Como podemos ver na expressão clássica (7.38), o parêntese de Dirac entre os vínculos  $\mathcal{G}_0(N)$  e  $\mathcal{G}_0(M)$  é dado pelo gerador das transformações de difeomorfismo. Portanto, ele é consistente com a expressão clássica, na qual dois operadores de vínculo escalar comutam sobre os estados invariantes de difeomorfismo.

Contudo, ainda não está claro se a álgebra dos vínculos quânticos, especialmente o comutador entre dois vínculos escalares quânticos pode ser construído de maneira consistente com álgebra

clássica (7.38) em um subespaço de  $\text{Cyl}^*$  maior que  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ , isto é, um subespaço contendo estados não-invariantes de difeomorfismos. Ainda, muitos trabalhos sobre análise semiclássica tentam testar o limite clássico da equação (7.67) e a relação de comutação (7.38). A idéia para fazermos isto é procurar estados semiclássicos afim de calcularmos o limite clássico dos operadores em relação a estes estados. Mas devido a propriedade do operador de vínculo escalar de mudar o grafo, a análise semiclássica para o operador de vínculo escalar e a álgebra quântica dos vínculos continua em aberto. Por estas e outras razões restringimos nossa análise apenas ao espaço  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ .

### 7.3.7 Ambiguidades

Nas expressões (7.55) e (7.56) temos o aparecimento explícito dos parâmetros reais  $\alpha$  e  $\beta$ , introduzidos na regularização dos campos  $\varphi_1$  e  $\psi$  e suas respectivas derivadas. Estes parâmetros representam ambiguidades quânticas. Notamos que, na construção do operador de vínculo Hamiltoniano em LQG é gerada uma ambiguidade semelhante devido a escolha das representações  $j$  dos edges adicionados por sua ação [12]. Uma ambiguidade parecida também aparece na dinâmica da LQC [59]. É claro que, além destas ambiguidades existem outras implícitas em (7.55) e (7.56), por exemplo, devido a escolha do ordenamento<sup>8</sup> dos operadores feita de modo a evitar complicações técnicas e ao fato de que o esquema de regularização utilizado por nós afim de obtermos os operadores  $\widehat{\mathcal{G}}_0(N)$  e  $\widehat{\mathcal{G}}_1(N^1)$  exibe uma grande liberdade de escolha em relação aos reguladores. Isto mostra que existem em nossa quantização, ambiguidades próprias da dinâmica quântica para a gravitação as quais permanecem como um problema em aberto [12].

Concluimos esta seção definindo o espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{\text{phys}} \in \mathcal{H}_{\text{Diff}}$  como sendo o espaço dos estados  $(\Upsilon(\varphi)|$  de modo que,

$$\left[ (\Upsilon(\varphi)|\widehat{\mathcal{G}}_0(N) \right] |\psi_{\Gamma}\rangle = 0, \quad (7.69)$$

onde uma das possíveis soluções pode ser dada em termos de  $|\psi_{\Gamma}\rangle = \sum c(\Gamma, \vec{\mu}) |\Gamma, \vec{0}, \vec{\mu}\rangle$  (ver Apêndice D.3).

---

<sup>8</sup>Contudo, restaria mostrar que esta escolha é única, o que está além dos nossos propósitos neste trabalho.

# Capítulo 8

## Conclusão

Apesar do modelo de Jackiw-Teitelboim, um modelo de gravitação em duas dimensões espaço-temporais, não ser um modelo real para o nosso universo, ele serve como um *toy model* que nos permite, de certa forma, entender melhor algumas dificuldades que surgem em modelos de gravitação em  $3 + 1$ -dimensões espaço-temporais.

Neste trabalho, ao nível clássico, construímos uma teoria matemática e fisicamente consistente seguindo as referências [103–105]. Vimos que a presente teoria é completamente vinculada, ou seja, descrita por uma Hamiltoniana de puro vínculos. Estes vínculos (de primeira classe) são os geradores das transformações de *gauge* da teoria, sendo que estas transformações de *gauge* contêm as transformações de difeomorfismo da teoria. Após fazermos a fixação parcial do *gauge* no *gauge* temporal e do surgimento de vínculos de segunda classe devido a fixação de *gauge*, através dos colchetes de Dirac e da resolução explícita dos vínculos de segunda classe, vimos que as simetrias de *gauge* se reduzem às simetrias de difeomorfismos temporais e espaciais geradas pelos vínculos de primeira classe  $\mathcal{G}_0$  e  $\mathcal{G}_1$ . Particularmente, no caso de  $\mathcal{G}_0$  (vínculo Hamiltoniano), as simetrias de *gauge* se reduzem a uma certa combinação de simetrias de difeomorfismos espaço-temporais (a menos de equações de movimento), vínculos e uma transformação de Lorentz local compensatória, necessária para manter a fixação de *gauge* temporal. Por sua vez, o vínculo  $\mathcal{G}_1$  gera os difeomorfismos espaciais.

Tendo construído de modo consistente a teoria clássica, iniciamos o programa de Dirac aplicado a sistemas com covariância geral utilizando as técnicas usuais empregadas na LQG. Desta forma a partir do espaço de configuração clássico obtivemos o espaço de configuração quântico, carac-

terizado como a compatificação de Bohr da linha real, a partir do qual construímos o espaço de Hilbert cinemático. Assim, encontramos uma representação das variáveis do espaço de configuração clássico do modelo JT como operadores no espaço de Hilbert cinemático satisfazendo as relações de comutação padrão. Obtivemos de modo consistente o operador de volume em uma dimensão que classicamente corresponde ao comprimento de um dado intervalo. Este operador desempenha um papel importantíssimo na quantização dos vínculos escalar e de difeomorfismo. Feito isto, implementamos os vínculos  $\mathcal{G}_0$  e  $\mathcal{G}_1$  seguindo o procedimento canônico, impomos os vínculos como uma condição extra a ser satisfeita pelo funcional de onda. Afim de implementarmos os difeomorfismos, utilizamos o método conhecido como *group averaging* que nos permitiu encontrarmos o espaço de Hilbert invariante de difeomorfismos  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ , ou seja, o espaço dos funcionais invariantes de difeomorfismos. Depois, via um método de regularização apropriado, implementamos os vínculos quânticos regularizados em  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ , sendo os mesmos bem definidos neste espaço dual. Assim, obtivemos o espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$  como um subespaço de  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ , no qual todos os estados invariantes de difeomorfismo são aniquilados por  $\mathcal{G}_0$ . Vimos também que a álgebra dos vínculos quânticos é consistente matematicamente e fisicamente em  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ . Porém, ainda não está claro se a álgebra dos vínculos quânticos pode ser construída em um subespaço maior que  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$  contendo estados não-invariantes de difeomorfismos. Não está claro se o vínculo escalar quântico produz a dinâmica quântica correta com o limite clássico correto. Ainda, falta mostrar se o produto interno em  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$  pode ser empregado na construção do produto interno em  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ .

Vimos também, que nas expressões regularizadas dos vínculos quânticos aparecem parâmetros que representam ambiguidades quânticas, bem como, ambiguidades implícitas devido a escolha do ordenamento dos operadores e do esquema de regularização, o qual exhibe uma grande liberdade de escolha em relação aos reguladores. Deste modo a nossa teoria não é livre das ambiguidades próprias da dinâmica quântica para a gravitação as quais permanecem como um problema em aberto, também em LQG [12].

Ainda, vimos que em comparação com a LQG, existe uma relação entre a regularização e a independência de fundo da teoria. Uma primeira observação é que as coordenadas espaciais não têm um significado físico. A localização física de um objeto é uma localização em relação a um outro objeto e não em relação a um sistema de coordenadas. A invariância de difeomorfismo de nossa teoria incorpora esta essencial característica da relatividade geral. A segunda observação é que as excitações da teoria são quantizadas, isto fica evidente quando observamos a estrutura dos estados quânticos.

Uma das perspectivas futuras deste trabalho é encontrarmos o espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$  de modo explícito, utilizando o programa de vínculo mestre introduzido por Thiemann em [28]. A ideia central é construirmos uma álgebra clássica alternativa através de uma redefinição apropriada dos vínculos da teoria (chamada de vínculos mestres), que depois de solucioná-los, corresponda ao mesmo espaço de fase físico clássico, e que seja uma álgebra de Lie. Associado a este programa temos a perspectiva de utilizarmos a gravidade quântica algébrica, que conforme Giesel e Thiemann em [117–120] apresenta uma arena ideal para fazermos a análise semiclássica da dinâmica quântica.

# Apêndice A

## Variedades

A experiência indica que o espaço-tempo é um contínuo 4-dimensional, no sentido que este requer quatro números – as coordenadas  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$  – para caracterizar um evento. Na relatividade especial assume-se que isto é verdadeiro globalmente, isto é, todo evento no espaço-tempo pode ser colocado numa correspondência um a um com os pontos de  $\mathbb{R}^4$ . No entanto na relatividade geral onde a geometria do espaço-tempo é dinâmica, certas propriedades globais não triviais da estrutura do espaço-tempo podem aparecer. Para isto é necessário trabalhar com um conjunto no qual a vizinhança de cada ponto veja-se como  $\mathbb{R}^4$ , tendo porém, propriedades globais completamente diferentes.

Para a formulação matemática da Relatividade Geral é necessário conhecer algumas propriedades básicas sobre as variedades. Uma variedade  $\mathcal{M}$   $n$ -dimensional é, um conjunto que tem uma estrutura diferenciável localmente homeomórfica a  $\mathbb{R}^n$ .

### A.1 Espaço Topológico

Um *Espaço Topológico*  $(X, \mathcal{C})$  consiste de um conjunto  $X$  junto com uma coleção  $\mathcal{C}$  de subconjuntos – os abertos – de  $X$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\emptyset \in \mathcal{C}$  e  $X \in \mathcal{C}$ .
2. Para qualquer subconjunto finito ou infinito  $\{U_i\}$  a união satisfaz  $\bigcup_i U_i \in \mathcal{C}$ .

3. para qualquer subconjunto finito  $\{U_1, \dots, U_n\}$  a interseção satisfaz  $\bigcap_i U_i \in \mathcal{C}$ .

## A.2 Variedades Diferenciáveis

Uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  é um espaço topológico, que localmente é visto como sendo  $\mathbb{R}^n$  porém, não necessariamente na sua extensão global. Mais exatamente, uma variedade  $\mathcal{M}$   $n$ -dimensional é um conjunto satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\mathcal{M}$  é um espaço topológico.
2. Existe uma família de pares  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  onde os  $U_\alpha$  são abertos de  $\mathcal{M}$  e cada  $\psi_\alpha$  é um homeomorfismo (mapeamento um-um e contínuo)  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ ,  $V_\alpha$  sendo um aberto de  $\mathbb{R}^n$ .
3. Cada ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$  está contido em ao menos um dos  $U_\alpha$ .
4. Se dois abertos  $U_\alpha$  e  $U_\beta$  tem uma intersecção não-nula, o mapeamento  $\varphi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow V_\alpha \cap V_\beta$  é um difeomorfismo (um-um e  $C^\infty$ )

Cada tripla  $(U_\alpha, V_\alpha, \psi_\alpha)$  é chamada de carta, cada função  $\psi_\alpha$  representa um sistema de coordenadas [6, 33, 78].

## A.3 Vetores

Na relatividade especial, o espaço-tempo é o de Minkowski. Na relatividade geral ele será um espaço-tempo Riemanniano.

Em geral, a cada ponto  $p$  no espaço-tempo está associado um conjunto de vetores localizados naquele ponto; este conjunto é conhecido como *espaço tangente* em  $p$  e é denotado por  $T_p$ . Um vetor pode ser decomposto em componentes com relação a algum conjunto de vetores base. Uma base é qualquer conjunto máximo de vetores linearmente independentes. Para qualquer espaço vetorial existe um número infinito de possíveis bases, cada uma consistindo do mesmo

número de vetores. Este número  $n$  sendo a dimensão do espaço-tempo. Então qualquer vetor pode ser escrito como uma combinação de vetores-base  $\hat{e}_{(a)}$

$$V = V^a \hat{e}_{(a)}. \quad (\text{A.1})$$

Uma base particular é a base de coordenadas:

$$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu, \quad \mu = 0, \dots, n-1. \quad (\text{A.2})$$

Nesta base, um vetor escreve-se

$$V = V^\mu \partial_\mu. \quad (\text{A.3})$$

onde  $V^\mu$  são as componentes do vetor.

## A.4 Vetores Duais (Um-Formas)

Dado um ponto  $p$  do espaço-tempo ao qual está associado um espaço tangente, é possível associar a este um outro espaço vetorial conhecido como *espaço vetorial dual*. Este espaço dual do espaço tangente  $T_p$ , é usualmente denotado por  $T_p^*$ . O espaço dual é o espaço de todos os mapeamentos lineares do espaço vetorial original para os números reais: as formas. Se  $\omega \in T_p^*$  é um vetor dual, então este atua como um mapeamento tal que,

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \mathbb{R},$$

onde  $V$  e  $W$  são vetores e  $a, b$  são escalares.

Definimos a base de coordenadas dual  $dx^\mu$ , de modo que

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (\text{A.4})$$

Os funcionais lineares são chamados de vetores duais, vetores cotangentes ou formas. O efeito de aplicar as 1-formas  $dx^\mu$  a um vetor  $X$  é selecionar sua  $\mu$ -ésima componente, isto é,

$$dx^\mu(X) = X^\nu dx^\mu(\partial_\nu) = X^\nu \delta_\nu^\mu = X^\mu. \quad (\text{A.5})$$

Então,

$$\omega(X) = X^\nu \omega_\mu dx^\mu (\partial_\nu) = X^\mu \omega_\mu .$$

## A.5 Formas Diferenciais

Com a definição da 1-forma pode-se escrever formas de ordem superior: uma 2-forma é definida pelo produto tensorial antissimétrico ou produto exterior “ $\wedge$ ” de 1-formas.

$$\omega = \frac{1}{2!} \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu .$$

Mais geralmente uma  $r$ -forma é dada pelo produto exterior de  $r$  1-formas:

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} . \quad (\text{A.6})$$

Aqui

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \text{ sinal}(P) dx^{\mu_{p_1}} \wedge dx^{\mu_{p_2}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p_r}} ,$$

com  $P$  sendo uma permutação arbitrária de  $1, \dots, r$ , e  $\text{ sinal}(P)$  a paridade da permutação de  $1, \dots, r \rightarrow p_1, \dots, p_r$ .

Assim,

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} = \text{ sinal}(P) \omega_{\mu_{p_1} \dots \mu_{p_r}} . \quad (\text{A.7})$$

## A.6 Derivada Exterior

Uma maneira de se obter uma  $(r+1)$ -forma a partir de uma  $r$ -forma  $\omega$  é através da derivada exterior, definida por

$$d\omega := \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} ,$$

o fator  $dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$  implica em uma antissimetrização dos  $(r+1)$ -índices  $\nu, \mu_1, \dots, \mu_r$  o que implica em um fator extra de  $1/(r+1)!$ .

A derivada exterior satisfaz a propriedade de que atuando duas vezes sobre uma  $r$ -forma  $\omega$ ,

$$d^2\omega = d(d\omega) = \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right) dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0, \quad (\text{A.8})$$

que ocorre devido à contração dos dois índices simétricos na derivada segunda com os dois antissimétricos em  $dx^\lambda \wedge dx^\nu$ .

## A.7 Bases Não-Coordenadas: Formalismo de Primeira Ordem

A partir de agora suponhamos uma variedade do espaço-tempo equipada por uma métrica  $g$ , definindo o produto interno dos vetores: na base de coordenadas, o produto de dois vetores  $V_1$  e  $V_2$  é dado por:

$$g(V_1, V_2) = g_{\mu\nu}(x) V_1^\mu(x) V_2^\nu(x). \quad (\text{A.9})$$

Como bases naturais para o espaço tangente  $T_p$  num ponto  $p$ , temos tomado a derivada parcial com respeito as coordenadas naquele ponto,  $\partial_\mu$ . Similarmente a base de coordenadas no espaço cotangente  $T_p^*$  é dada pelas 1-formas  $dx^\mu$ . Mas isto não impede o uso de qualquer outra base. Imaginemos que em cada ponto da variedade introduzimos um conjunto de vetores base  $E_I, (E_I \in T_p)$  (indicadas pelas letras latinas maiúsculas para lembrar que eles não estão relacionados a qualquer sistema de coordenadas). Escolhemos estes vetores base como "ortonormais": seja que o produto interno destes vetores base dado por

$$g(E_I, E_J) = \eta_{IJ}, \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\begin{aligned} (\eta_{IJ}) &= \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \eta_{00} &= \sigma; \quad \eta_{ii} = 1, (i = 1, \dots, D-1); \quad \eta_{IJ} = 0, (I \neq J) \\ \text{com } \sigma &= \begin{cases} +1 : & \text{espaço-tempo Riemanniano,} \\ -1 : & \text{espaço-tempo Lorentziano.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Assim  $\eta_{IJ}$  no espaço-tempo Lorentziano representa a métrica de Minkowski, ao passo que no caso Riemanniano, a métrica  $\eta_{IJ}$  é Euclidiana. O conjunto de vetores  $E_I$  da base “ortonormal” é conhecido como *vielbein*. Em diferentes números de dimensões estes são o vierbein (quatro), dreibein (três), zweibein (dois), em D-dimensões (D-bein), etc.

Dado que temos uma base, qualquer vetor pode ser expresso como uma combinação linear dos elementos desta base. Especialmente pode-se expressar os antigos vetores base  $\partial_\mu$  em termos dos novos:

$$\partial_\mu = e_\mu{}^I E_I \quad (\text{A.12})$$

As componentes  $e_\mu{}^I$  formam uma matriz  $n \times n$  inversível. Denotemos a inversa por  $E^\mu{}_I$ ,

$$E^\mu{}_I = \eta_{IJ} g^{\mu\nu} e_\nu{}^J, \quad (\text{A.13})$$

a qual satisfaz

$$E^\mu{}_I e_\nu{}^I = \delta_\nu^\mu, \quad e_\mu{}^I E^\mu{}_J = \delta_J^I, \quad (\text{A.14})$$

os  $E^\mu{}_J$  são as componentes do vetor  $E_I$  na base de coordenadas:

$$E_I = E^\mu{}_I \partial_\mu$$

Em termos dos vielbein (A.10) fica

$$g_{\mu\nu} E^\mu{}_I E^\nu{}_J = \eta_{IJ} \quad (\text{A.15})$$

ou equivalentemente

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu{}^I(x) e_\nu{}^J(x) \eta_{IJ} \quad (\text{A.16})$$

De (A.15) vemos que as componentes do tensor métrico na base ortogonal são aquelas do tensor da métrica plana,  $\eta_{IJ}$ . Então podemos subir e baixar os índices latinos com a métrica plana  $\eta_{IJ}$  e sua inversa  $\eta^{IJ}$ .

Quando expressamos a métrica através do D-bein, temos mais graus de liberdade para descrever a mesma geometria, assim temos redundâncias, o tensor métrico tem  $D(D+1)/2$  componentes

independentes, enquanto o  $D$ -bein  $e_\mu^I$  tem  $D^2$  componentes. Isso significa que muitos  $D$ -bein descrevem a mesma métrica, e eles estão relacionados uns aos outros por transformações locais – ou de *gauge*. Desta maneira temos

$$e^I(x) \rightarrow e'^I(x) = (\Lambda^{-1})^I{}_J(x)e^J(x) = \Lambda_J^I(x)e^J(x), \quad (\text{A.17})$$

$$E^I(x) \rightarrow E'^I(x) = \Lambda^I{}_J(x)E^J(x), \quad (\text{A.18})$$

$\forall x \in \mathcal{M}$ . Definimos as 1-formas de  $D$ -bein por

$$e^I = e_\nu^J dx^\nu, \quad (\text{A.19})$$

aqui  $E^I = \eta^{IJ}E_J$  e  $\Lambda_J^I = \eta_{JK}\eta^{IL}\Lambda^K{}_L$ .

Escrevemos para posteriores fins a identidade,

$$d\Lambda\Lambda^{-1} + \Lambda d(\Lambda^{-1}) = 0, \quad (\text{A.20})$$

obtida pela diferenciação de  $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$ .

Visto que a métrica do espaço-tempo deve ficar invariante sob essas transformações, a matriz  $\Lambda^I{}_J$  deve satisfazer,

$$\eta_{IJ}\Lambda^I{}_K\Lambda^J{}_L = \eta_{KL}$$

o que implica em

$$\Lambda^I{}_J \in \begin{cases} \text{SO}(D) & , \text{ se } (\mathcal{M}, g) \text{ é Riemanniano} \\ \text{SO}(D-1, 1) & , \text{ se } (\mathcal{M}, g) \text{ é Lorentziano} \end{cases}$$

Assim o grupo de *gauge* é o grupo de Lorentz. Sob essas transformações de *gauge* os índices de espaço-tempo são deixados invariantes enquanto que os índices internos são rodados. Assim, o  $D$ -bein define um sistema de coordenadas (pseudo-)ortonormal no espaço tangente em cada ponto do espaço-tempo, cujas bases podem ser rodadas livremente.

Similarmente, podemos considerar uma base ortonormal de um-formas em  $T_p^*$ . Em particular,  $e^I$ , definida por (A.19) fornece uma destas bases. Com efeito esta é a base dual de  $E_I$ , pois usando (A.14) verificamos que,

$$e^I(E_J) = \delta_J^I. \quad (\text{A.21})$$

O inverso da Equação (A.19) é dado por

$$dx^\mu = e^\mu_I e^I \quad (\text{A.22})$$

Um tensor “de Lorentz”,  $T^{I_1 \dots I_m}_{J_1 \dots J_n}(x)$ , é definido por transformar-se como:

$$\begin{aligned} T^{I_1 \dots I_m}_{J_1 \dots J_n}(x) &= \Lambda^{I_1}_{K_1}(x) \dots \Lambda^{I_m}_{K_m}(x) \Lambda_{J_1}^{L_1}(x) \dots \\ &\dots \Lambda_{J_n}^{L_n}(x) T^{K_1 \dots K_m}_{L_1 \dots L_n}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

sob as transformações de *gauge*. O *D*-bein é um exemplo (ver (A.18)). Qualquer outro vetor pode ser expresso em termos de seus componentes na base ortonormal. Se o vetor  $V$  é escrito na base de coordenada,  $V = V^\mu \partial_\mu$ , e na base *D*-bein,  $V = V^I E_I$ , as componentes estão relacionadas por:

$$V^I = e_\mu^I V^\mu, \quad V^\mu = E^\mu_I V^I.$$

Assim os vielbein nos permite passar dos índices gregos para os latinos e vice-versa.

Os tensores também podem ser definidos com uma mescla de componentes, como exemplo,

$$V^I_J = e_\mu^I V^\mu_J = E^\mu_J V^I_\mu = e_\mu^I E^\nu_J V^\mu_\nu$$

As bases dos sistemas não-coordenados, podem ser trocadas independentemente das coordenadas. A única restrição é que (A.10) seja preservada.

Além das transformações locais, temos também as transformações gerais de coordenadas – os difeomorfismos

$$x'^\mu = x'^\mu(x),$$

sob os quais um tensor espaço-tempo  $T^{\mu_1 \dots \nu_1 \dots}$  transforma-se como

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\alpha_m}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}(x). \quad (\text{A.24})$$

Os difeomorfismos atuam nos índices gregos  $\mu, \nu, \dots$ , ao passo que as transformações de Lorentz locais atuam nos índices latinos  $I, J, \dots$ .

Num espaço-tempo com coordenadas cartesianas a derivada covariante de um tensor do tipo (A.24) é dada por suas derivadas parciais, porém para um tensor numa variedade Riemanniana

em geral, um termo de conexão é necessário, um para cada índice envolvendo a conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . Um procedimento análogo vale para uma base não coordenada, porém substituindo os coeficientes de conexão ordinária  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  pela conexão de spin, denotada por  $\omega_\mu^I{}_J$ . Para cada índice latino tem-se uma contribuição da conexão de spin, e a derivada covariante escreve-se por exemplo, como:

$$DX^I{}_J = dX^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge X^K{}_J - \omega^K{}_J \wedge X^I{}_K. \quad (\text{A.25})$$

A derivada covariante é definida pela propriedade de  $DX$  ser um tensor de Lorentz se  $X$  é um tensor de Lorentz. Como consequência, a conexão  $\omega$  se transforma sob o grupo de Lorentz como

$$\omega'^I{}_J = \Lambda^I{}_K \omega^K{}_L (\Lambda^{-1})^L{}_J + \Lambda^I{}_K (d\Lambda^{-1})^K{}_J. \quad (\text{A.26})$$

A conexão de spin pertence à álgebra de Lie do grupo de Lorentz, o que significa que

$$\omega^{IJ} = -\omega^{JI}, \quad \text{onde} \quad \omega^{IJ} = \eta^{JK} \omega^I{}_K. \quad (\text{A.27})$$

Chega-se nesta expressão assumendo que a métrica  $\eta^{IJ}$  seja invariante, isto é

$$D\eta^{IJ} = d\eta^{IJ} + \omega^I{}_k \eta^{kJ} + \omega^J{}_k \eta^{Ik} = 0$$

dado que  $\eta^{IJ}$  é uma constante então  $d\eta^{IJ} = 0$ . A partir de (A.27) pode-se escrever, no caso em que a dimensão é igual 2,

$$\omega^{IJ} = \omega \epsilon^{IJ}, \quad (\text{A.28})$$

onde  $\epsilon^{IJ}$  é o tensor de Levi-Civita.

Qualquer tensor com um certo número de índices gregos inferiores antissimétricos e um certo número de índices latinos podem ser pensados como uma forma diferencial. Vejamos as expressões da torção e da curvatura neste formalismo, pois estes dois tensores caracterizam qualquer conexão dada.

As relações que definem a torção e curvatura são respectivamente:

$$T^I = De^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J, \quad (\text{A.29})$$

$$R^I_J = d\omega^I_J + \omega^I_K \wedge \omega^K_J. \quad (\text{A.30})$$

Estas duas ultimas equações são chamadas de equações de estrutura de Cartan, onde  $R^I_J$  simboliza a 2-forma de curvatura de Riemann. Lembre-se que a base  $e^I$  e a conexão  $\omega^I_J$ , ambas 1-formas, são definidas por:

$$e^I = e_\mu^I dx^\mu, \quad (\text{A.31})$$

$$\omega^I_J = \omega_\mu^I{}_J dx^\mu. \quad (\text{A.32})$$

Então os tensores torção e curvatura escritos em componentes são dadas pelas relações:

$$T^I = \frac{1}{2} T^I_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (\text{A.33})$$

$$R^I_J = \frac{1}{2} R^I_{J\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (\text{A.34})$$

onde

$$T^I_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu^I - \partial_\nu e_\mu^I + \omega_\mu^I{}_J e_\nu^J - \omega_\nu^I{}_J e_\mu^J \quad (\text{A.35})$$

$$R^I_{J\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu^I{}_J - \partial_\nu \omega_\mu^I{}_J + \omega_\mu^I{}_K \omega_\nu^K{}_J - \omega_\nu^I{}_K \omega_\mu^K{}_J \quad (\text{A.36})$$

Os coeficientes  $T^I_{\mu\nu}$  são as componentes do tensor torção e  $R^I_{J\mu\nu}$  são as componentes do tensor de curvatura de Riemann.

# Apêndice B

## Grupo e Álgebra de Lie

### B.1 Álgebras de Lie

Usando o fato de que os grupos de Lie são variedades diferenciáveis, pode-se aproximar a vizinhança de qualquer ponto do grupo de Lie  $G$  por um espaço vetorial, tangente ao grupo de Lie naquele ponto particular. Esse espaço tangente possui a estrutura de uma álgebra de Lie.

Um espaço vetorial  $\mathcal{G}$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , se chama álgebra de Lie sobre  $\mathbb{K}$  se existe uma operação bilinear (chamada operação de colchetes)  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ . Mais precisamente, uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  é um espaço vetorial sobre um campo  $\mathbb{K}$  equipado de um produto  $(x, y) \rightarrow [x, y]$  com as seguintes propriedades:

1. Antissimétrico, isto é  $[x, y] = -[y, x]$  (o que implica  $[x, x] = 0$ ),
2. é bilinear,  $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$ ,
3. Satisfaz a identidade de Jacobi,  $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ .

$$\forall x, y, z \in \mathcal{G}; a, b \in \mathbb{K}.$$

A dimensão desse espaço vetorial é igual a dimensão do grupo de Lie. Denotemos por  $J_a$  ( $a = 1, \dots, \dim(G)$ ) uma base da álgebra de Lie; num ponto do grupo  $G$ , eles satisfazem

$$[J_a, J_b] = f_{ab}^c J_c, \tag{B.1}$$

se nos movermos de um ponto de  $G$  a outro, esta relação não altera-se, conseqüentemente as quantidades  $f_{ab}{}^c$  são independentes. Por esta razão elas são chamados de *constantes de estrutura* do grupo de Lie  $G$ . Os geradores  $J_a$  satisfazem em particular a identidade de Jacobi

$$[J_a, [J_b, J_c]] + [J_c, [J_a, J_b]] + [J_b, [J_c, J_a]] = 0. \quad (\text{B.2})$$

De (B.1) e (B.2) pode-se ver que as constantes de estrutura satisfazem:

$$f_{ab}{}^c = -f_{ba}{}^c, \quad (\text{B.3})$$

$$f_{ad}{}^e f_{bc}{}^d + f_{cd}{}^e f_{ab}{}^d + f_{bd}{}^e f_{ca}{}^d = 0, \quad (\text{B.4})$$

a primeira delas é devida a antissimetria do colchete e a segunda à identidade de Jacobi. Usando o mapeamento exponencial, os elementos  $g$  da parte de  $G$  conectada à identidade<sup>1</sup> podem ser escritas como

$$g = \exp(\epsilon^a J_a) \quad (\text{B.5})$$

onde os  $\epsilon^a$  são parâmetros do grupo de Lie. Se conjugarmos elementos da álgebra de Lie com elementos do grupo de Lie obtemos elementos da álgebra de Lie. Se  $L$  e  $J$  são elementos da álgebra de Lie temos que

$$\begin{aligned} e^L T e^{-L} &= J + [L, J] + \frac{1}{2!} [L, [L, J]] + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\text{ad}_L)^n J, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde  $\text{ad}_L J \equiv [L, J]$ . Os termos no lado direito de (B.6) são elementos da álgebra de Lie, portanto a conjugação  $gJg^{-1}$  define uma transformação da álgebra em si mesma. Em adição, se  $g'' = g'g$ , vemos que a composição das transformações associadas a  $g'$  e  $g$  dá uma transformação associada a  $g''$ . Estas transformações definem então uma representação do grupo  $G$ , sendo o espaço da representação a própria álgebra de Lie de  $G$ . Esta representação é chamada de *representação adjunta* do grupo de Lie.

---

<sup>1</sup>Os grupos de Lie que consideramos neste trabalho sendo conexos, essa propriedade valerá para todo elemento  $g$  de  $G$ .

### B.1.1 Matrizes da Representação Adjunta

Definimos as matrizes  $d(g)$  por

$$gJ_a g^{-1} J_b d^b{}_a(g), \quad (\text{B.7})$$

estas matrizes são de dimensão  $n(= \dim(G))$ , e elas formam uma representação de  $G$ . Tomando os elementos  $g_1$  e  $g_2$ , calculamos

$$\begin{aligned} J_b d^b{}_a(g_1 g_2) &= g_1 g_2 J_a (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 J_a g_2^{-1} g_1^{-1} \\ &= g_1 J_c d^c{}_a(g_2) g_1^{-1} = g_1 J_c g_1^{-1} d^c{}_a(g_2) \\ &= J_a d^d{}_c(g_1) d^c{}_a(g_2). \end{aligned}$$

Visto que os geradores  $J_a$  são linearmente independentes, temos:

$$d(g_1 g_2) = d(g_1) d(g_2).$$

Se  $g$  é um elemento de  $G$  infinitesimalmente próximo à identidade, podemos escrever:

$$g = 1 + \epsilon^a J_a.$$

com  $\epsilon^a$  infinitesimalmente pequeno. De (B.7) temos

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon^a J_a) J_b (1 - \epsilon^c J_c) &= J_c d^c{}_b (1 + \epsilon^a J_a) \\ &= J_c (\delta_b^c + \epsilon^a d^c{}_b(J_a)) = J_b + \epsilon^a [J_a, J_b] \\ &= J_b + \epsilon^a f_{ab}{}^c J_c. \end{aligned}$$

Visto que os parâmetros infinitesimais são arbitrários, obtemos

$$d^c{}_b(J_a) = f_{ab}{}^c, \quad (\text{B.8})$$

por conseguinte, na representação adjunta, as matrizes que representam os geradores são dadas pelas constantes de estrutura da álgebra. Isto define a representação matricial da álgebra de Lie na representação adjunta. Mais geralmente, cada vez que se tem uma representação matricial do grupo de Lie, adquirimos através do mapeamento exponencial uma representação matricial

da correspondente álgebra de Lie [106].

## B.2 Forma de Killing

Dada qualquer álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  com elementos  $x, y \in \mathcal{G}$ , definimos a forma quadrática  $k(x, y) = \text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad } y)$ , onde  $\text{ad } x$  é uma matriz que denota  $x$  na representação adjunta. Então,  $k$  é uma forma bilinear sobre  $\mathcal{G}$ , chamada a Forma de Killing. Também  $k$  é associativa no sentido que  $k([xy], z) = k(x, [yz])$ . Isto segue-se da identidade  $\text{Tr}([x, y]z) = \text{Tr}(x[y, z])$ . Uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  sobre o campo  $\mathbb{K}$  é dita semi-simples se sua forma de Killing  $k(x, y)$  é não degenerada, e um grupo de Lie se chama semi-simples se sua álgebra de Lie é degenerada. Serão estes os tipos de grupos que estudaremos [107, 108].

Consideremos tensores  $M_{ijk\dots}$ , ( $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, D$ ), numa representação de dimensão  $D$ . Os geradores são representados por matrizes  $J_a$ , ( $a = 1, 2, \dots, d$  dimensão do grupo), com elementos  $J_{ai}{}^j$ . As transformações infinitesimais do tensor  $M_{ijk\dots}$  são dadas por

$$\delta M_{ijk\dots} = \epsilon^a (J_{ai}{}^m M_{mjk\dots} + J_{aj}{}^m M_{imk\dots} + J_{ak}{}^m M_{ijm\dots} + \dots); \quad (\text{B.9})$$

para um tensor  $M_{mjk\dots}$  invariante, cumpre-se a relação;

$$J_{ai}{}^m M_{mjk\dots} + J_{aj}{}^m M_{imk\dots} + J_{ak}{}^m M_{ijm\dots} + \dots = 0. \quad (\text{B.10})$$

Os índices da constante de estrutura são levantados e abaixados com a métrica Killing  $k_{ab}$

$$f_{abc} = k_{ce} f_{ab}{}^e$$

$k_{ab}$  é um tensor invariante e simétrico, na representação adj. ( $J_a \rightarrow f_{ab}{}^c$ ):

$$f_{ac}{}^e k_{eb} + f_{ab}{}^e k_{ce} = f_{acb} + f_{abc} = 0.$$

Então

$$f_{abc} = -f_{acb},$$

e de (B.3) sabemos que  $f_{abc} = -f_{bac}$ , podemos concluir desta maneira que a constante de estrutura é completamente antissimétrica com respeito a seus três índices, isto é,  $f_{abc} = f_{[abc]}$ .

A forma de Killing em função das constantes de estrutura escrevem-se como

$$k_{ab} = -\frac{\sigma}{2} f_{ac}{}^d f_{bd}{}^c, \quad (\text{B.11})$$

onde  $\sigma = \pm 1$  (+1 para o espaço Euclidiano e  $-1$  para o espaço Lorentziano). Esta forma de Killing define uma forma quadrática invariante sobre a álgebra de Lie:

$$\langle A, B \rangle = k_{ab} A^a B^b = \langle B, A \rangle \quad (\text{B.12})$$

onde  $A^a$  e  $B^b$  são as componentes de  $A$  e  $B$  na base  $\{J_a\}$ ,  $A = A^a J_a$ ,  $B = B^a J_a$ . Podemos provar uma importante identidade de permutação cíclica

$$\langle A, [B, C] \rangle = \langle [A, B], C \rangle = \langle C, [A, B] \rangle, \quad (\text{B.13})$$

com efeito;

$$\begin{aligned} \langle A, [B, C] \rangle &= k_{ab} A^a [B, C]^b = k_{ab} A^a [B^d J_d, C^e J_e]^b \\ &= A^a B^d C^e k_{ab} f_{de}{}^b = A^a B^d C^e f_{dea} = A^a B^d C^e f_{ade} \\ &= [A, B]_e C^e = k_{ef} [A, B]^f C^e = \langle [A, B], C \rangle = \langle C, [A, B] \rangle. \end{aligned}$$

Mudanças de sinais ocorrem em (B.12) e (B.13) se alguns dos  $A, B, \dots$ , são formas de grau ímpar.

### B.3 Grupo de Sitter e anti-de Sitter (A)dS

O grupo de Sitter e anti-de Sitter (**A**)dS são grupos semi-simples. Grupos semi-simples são preferidos como grupos de *gauge* porque eles tem um invariante no grupo, conhecido como a métrica de Killing, o qual é usado para definir termos cinéticos para os campos de *gauge*.

Grupos que não são semi-simples contêm subgrupos invariantes abelianos, e os geradores dos grupos abelianos comutam entre eles. O fato de que eles sejam subgrupos invariantes implica que muitas das constantes de estrutura da álgebra de Lie sejam nulas; o que implicaria que a métrica de Killing adquiriria autovalores iguais a zero impedindo sua inversibilidade.

## Apêndice C

# Formalismo de Dirac para Campos

## Vínculados

A construção de uma teoria quântica para um sistema com muitas variáveis é em geral complicada de formular. A teoria poderia ser mais simples se fôssemos na correspondente mecânica clássica, a qual poderia-se descrever por variáveis com interações simples entre eles. Porém é possível que isto não seja adequado para descrever a natureza. Para tratar este problema com variáveis mais gerais, usualmente constroem-se uma teoria Lagrangiana em forma de campos. Logo, usando algumas regras estabelecidas (transformação de Legendre) podemos colocar a teoria clássica em forma Hamiltoniana, assim obtendo uma formulação generalizável à teoria quântica. Geralmente este procedimento produz, além da Hamiltoniana dinâmica, um conjunto de vínculos que os campos devem obedecer – como pode ocorrer já na mecânica quântica.

Em nosso trabalho tratamos de uma teoria completamente vinculada. Não há Hamiltoniana dinâmica, mas somente vínculos. O problema de desenvolver a dinâmica de uma Hamiltoniana clássica consistente correspondendo a tal sistema Lagrangiana singular foi primeiramente atacado por Dirac [96] depois Anderson e Bergmann [109], Bergmann e Goldberg [110] entre outros.

O tratamento de teorias singulares baseado no método de Dirac [81], é muito aplicado na física de altas energias, especialmente em teorias de calibre [82–84]. Com a presença destes vínculos na teoria temos que ter cuidado ao aplicar o formalismo de Dirac, especialmente quando surgem os vínculos de primeira e de segunda classe, já que só os de primeira classe são geradores de

transformações de calibre, os de segunda classe devendo ser eliminados. Os graus de liberdade de calibre associados aos vínculos de primeira classe devem ser fixados por “condições de calibre” apropriadas, o que pode produzir novos vínculos de segunda classe, que deverão também ser eliminados.

## C.1 Princípio da Ação

Assumindo que existe uma integral de ação  $S$  e que este dada por:

$$S[q(\tau), \dot{q}(\tau)] = \int dt L(q^a, \dot{q}^a),$$

onde o integrando  $L(q^a, \dot{q}^a)$  é a Lagrangiana,  $q^a(\tau)$  as coordenadas canônicas e  $\dot{q}^a(\tau) := dq^a/d\tau$  as velocidades canônicas. Conhecendo  $L$ , podemos obter uma Hamiltoniana e determinando a Hamiltoniana teremos dado o primeiro passo para obter uma teoria quântica.

Consideramos  $L = L(q^a, \dot{q}^a)$  com um número finito de graus de liberdade sob uma variedade  $\mathcal{M}$  de dimensão  $m$ , (isto pode também ser generalizado para um sistema com número infinito de graus de liberdade).

Da variação da integral da ação obtemos a equação de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Para ir ao formalismo Hamiltoniano introduzimos o momento canônico  $p_a$ , definido por

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}. \quad (\text{C.2})$$

Na teoria dinâmica usual, supõe-se que os momentos são funções inversíveis das velocidades. Queremos ter a possibilidade de que estes momentos não sejam todos funções inversíveis das velocidades, isto é, que não existe uma única solução  $\dot{q}^a$  que expresse as velocidades em termos das coordenadas e momentos canônicos; quando isto acontece dizemos que estamos tratando com Lagrangianas singulares.

Mais precisamente, uma Lagrangiana é chamada de singular se o determinante da matriz hes-

siana é nulo, isto é:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Supondo que a ordem da matriz (C.3) seja  $m - r$  com  $0 < r \leq m$ . Então podemos resolver (ao menos localmente)  $m - r$  velocidades  $\dot{q}^A$ ,  $A = 1, \dots, m - r$  para  $m - r$  momentos  $p_A$ , permanecendo  $r$  velocidades  $\dot{q}^i$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

$$p_A = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^A} \Rightarrow \dot{q}^A = \dot{q}^A(q^a, p_A, \dot{q}^i), \quad (\text{C.4})$$

onde as equações restantes,  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ , não devem depender dos  $\dot{q}^i$  consideremos as equações que definem os momentos  $p_i$ ,

$$\pi_i(q^a, p_A) := p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i}, \quad (\text{C.5})$$

deduzimos que os  $p_a$  não são independentes uns dos outros. As funções

$$\phi_i(q^a, p_a) := p_i - \pi_i(q^a, p_A) = 0, \quad (\text{C.6})$$

são chamadas de *vínculos primários*, que decorrem unicamente da Lagrangiana. Esta terminologia é devida a Bergmann e Dirac [81].

Consideremos a quantidade

$$\tilde{H}(q^a, p_a, v^i) := (p_a v^a - L(q^a, p_a))_{\dot{q}^A = \dot{q}^A(q^a, p_A, v^i)}, \quad v^i = \dot{q}^i, \quad (\text{C.7})$$

(que é a transformação de Legendre), chamada de Hamiltoniana primária correspondendo a  $L$ . A Hamiltoniana é linear em  $v^i$  com coeficientes  $\phi_i$ . Com efeito, diferenciando com respeito a  $v^i$  a expressão

$$\tilde{H}(q^a, p_a, v^i) = p_A \dot{q}^A(q^a, p_B, v^i) + p_i v^i - L(q^a, \dot{q}^A(q^a, p_B, v^i), v^j)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial v^i} &= \left[ p_A - \left( \frac{\partial L(q^a, v^a)}{\partial \dot{q}^A} \right)_{\dot{q}^A} \right] \frac{\partial \dot{q}^A}{\partial v^i} + \left[ p_i - \left( \frac{\partial L(q^a, v^a)}{\partial v^i} \right)_{\dot{q}^A} \right] \\ &= p_i - \pi_i(q^a, p_A) = \phi_i(q^a, p_a). \end{aligned}$$

Isto indica que (C.7) pode ser escrito como

$$\tilde{H}(q^a, p_a) = H_0(q^a, p_a) + v^i \phi_i(q^a, p_a), \quad (\text{C.8})$$

onde  $H_0$ , o qual independe dos  $v^i$  é a Hamiltoniana canônica<sup>1</sup>. Com a extensão dos vínculos (C.6), as equações de Hamilton da teoria definida pela Hamiltoniana  $\tilde{H}$  podem ser escritas como

$$\dot{q}^a = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_a} = \frac{\partial H_0}{\partial p_a} + v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial p_a}, \quad (\text{C.9})$$

$$-\dot{p}^a = -\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^a} = \frac{\partial H_0}{\partial q^a} + v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial q^a}, \quad (\text{C.10})$$

e

$$\phi^i(q, p) = 0. \quad (\text{C.11})$$

Estas são as equações de movimento mais gerais da teoria, e são equivalentes às equações de Euler-Lagrange (C.1). Assim o espaço de fase está dado por  $q^a$  e  $p_a$  enquanto que os  $v^i$  são *multiplicadores de Lagrange*, os quais são completamente arbitrários. Para tratar estas equações é conveniente introduzir o formalismo dos colchetes de Poisson.

## C.2 Colchetes de Poisson

Se temos duas funções dos  $q^a$  e  $p_a$ ,  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$ , o colchete de Poisson para estas funções é definido por:

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a}. \quad (\text{C.12})$$

Com esta definição temos:

$$\{p_a, q^b\} = \delta_a^b, \quad \{q^a, q^b\} = \{p_a, p_b\} = 0.$$

Seguindo a definição os colchetes de Poisson tem as propriedades:

---

<sup>1</sup> $H_0$  representa a Hamiltoniana sem vínculos e as equações de Hamilton para esta são:  $\dot{q}^A = \frac{\partial H_0}{\partial p_A}$  e  $\dot{p}^A = -\frac{\partial H_0}{\partial q_A}$

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ , é antissimétrico,
- $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$ , é linear,
- $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$ , lei do produto,
- $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ , identidade de Jacobi.

Com ajuda dos colchetes de Poisson (C.12) e as equações de Hamilton (C.9) e (C.10), as equações de movimento, para qualquer função  $g = g(q, p)$ , podem ser reescritas como:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q^n} \dot{q}^n + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p}_n = \{g, H_0\} + v^i \{g, \phi_i\}. \quad (\text{C.13})$$

Suponhamos que (C.13) escreve-se como:

$$\dot{g} = \{g, H_0 + v^i \phi_i\}. \quad (\text{C.14})$$

Os coeficientes  $v^i$  não são funções de  $q^a$  e  $p_a$ , assim (C.12) não pode ser usado para determinar o colchete de Poisson (C.14). Entretanto podemos usar as propriedades dos colchetes de Poisson, obtendo

$$\dot{g} = \{g, H_0\} + \{g, v^i\} \phi_i + v^i \{g, \phi_i\}. \quad (\text{C.15})$$

Aqui o colchete  $\{g, v^i\}$  não é bem definido, porém ele é multiplicado por algo que anula-se,  $\phi_i$ , assim (C.13) e (C.14) concordam. Aqui temos que ter cuidado em não usar estes vínculos antes de trabalhar com os colchetes de Poisson, caso contrário poderíamos obter um resultado errado. Para lembrar desta regra no formalismo de Poisson, escrevemos (C.6) como equações com um símbolo diferente de igualdade “ $\approx$ ”. Assim (C.6) é escrita como

$$\phi_i \approx 0. \quad (\text{C.16})$$

O símbolo “ $\approx 0$ ” significa “*fracamente igual a zero*” (terminologia introduzida por Dirac), o que significa que  $\phi_i$  poderia ter colchetes de Poisson com algumas variáveis canônicas que não se anulam. Assim nossa equação de movimento pode ser consistentemente escrita como:

$$\dot{g} = \left\{ g, \tilde{H} \right\}, \quad (\text{C.17})$$

onde

$$\tilde{H} = H_0 + v^i \phi_i \quad (\text{C.18})$$

é chamado de Hamiltoniana total.

### C.3 Condições de Consistência

Vejam as conseqüências das equações de movimento. Os vínculos primários forçam o sistema a uma subvariedade do espaço de fase definida por  $\phi_i = 0$ , ( $i = 1, \dots, r$ ). Isto é consistente com a dinâmica se, e somente se, aquela variedade é invariante, isto é, se (C.13) ou (C.17) com  $g = \phi_i$ , se anulam. Então, deveríamos ter por consistência

$$\dot{\phi}_i = \left\{ \tilde{H}, \phi_i \right\} = \{H_0, \phi_i\} + v^j \{\phi_j, \phi_i\} = 0, \quad (\text{C.19})$$

sobre a superfície de vínculos  $\bar{\mathcal{M}} := \mathcal{M}_\phi$  do espaço de fase. Temos três possibilidades:

1. com ajuda dos vínculos primários as equações valem identicamente;
2. as equações reduzem-se às equações independentes dos  $v^i$ , assim envolvendo unicamente os  $q$  e  $p$ . Tais equações poderiam ser independentes dos vínculos primários, sendo da forma

$$\dot{\phi}_i = \chi(q^a, p_a) = 0;$$

3. se (C.19) não se reduz ao 1º ou 2º caso, então impõem-se condições sobre os  $v^i$ .

O caso 1 não tem problemas; o 2º indica que temos novos vínculos  $\chi(q^a, p_a)$  sobre os  $q$ 's e  $p$ 's. Vínculos que aparecem desta forma são chamados de *vínculos secundários*. Estes diferem dos primários já que os vínculos primários são simplesmente conseqüência da definição das variáveis momento (C.2). Enquanto isso os vínculos secundários fazem uso das equações de movimento de Euler-Lagrange (ou Equações de movimento de Hamilton).

Se temos vínculos secundários aparecendo na teoria estes devem ser juntados aos vínculos originais (C.6) fornecendo outras condições de consistência:

$$\dot{\chi} = \{\chi, H_0\} + v^i \{\chi, \phi_i\} \approx 0.$$

Com estas equações repete-se novamente o processo até que todos os vínculos independentes e as condições sobre os  $v^i$  sejam encontradas. Se resultam  $r'$  novos vínculos ( $\phi_{r'} \approx 0$ ,  $r' = r + 1, \dots, r + l$ ) adicionaremos estes aos  $r$  vínculos primários; aqui  $l$  é o número total de vínculos secundários. Tanto os vínculos primários como os secundários são trabalhados da mesma maneira, então todos estes vínculos podem ser escritos juntos como

$$\phi_k \approx 0, \quad k = 1, \dots, r + l \equiv f. \quad (\text{C.20})$$

Quanto ao 3º caso temos que observar que condições devem ser impostas sobre os coeficientes  $v^i$ . Estas condições são dados por as equações

$$\{\phi_j, H_0\} + v^i \{\phi_j, \phi_i\} \approx 0, \quad (i = 1, \dots, r \text{ e } j = 1, \dots, f) \quad (\text{C.21})$$

que darão as condições sobre os coeficientes  $v^i$ .

Suponhamos que os  $v^i$  são desconhecidos, e que em (C.21) tenhamos um número de equações lineares não-homogêneas, com funções dos  $q$  e  $p$  como coeficientes dos  $v^i$ , e que as soluções para estes  $v^i$  sejam denotadas por:

$$v^i = V^i(q^a, p_a). \quad (\text{C.22})$$

Tais soluções devem existir, caso contrário significaria que as equações de movimento de Euler-Lagrange seriam inconsistentes. À estas soluções particulares é preciso acrescentar a solução geral do sistema homogêneo  $v^i \{\phi_j, \phi_i\} \approx 0$  associado a (C.21). Então as soluções mais gerais possíveis de (C.21) são

$$v^i = V^i + u^a U_a^i \quad (\text{C.23})$$

onde os  $U_a^i$ 's representam as soluções do sistema homogêneo e os  $u^a$ 's são coeficientes arbitrários. Substituindo em (C.18) temos uma nova Hamiltoniana total

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= H_0 + V^i \phi_i + u^a U_a^i \phi_i, \\ &= H' + u^a \phi_a.\end{aligned}\tag{C.24}$$

com  $H' = H_0 + V^i \phi_i$  e  $\phi_a = U_a^i \phi_i$ . O número de coeficientes  $u^a$  é usualmente menor que o número de coeficientes  $v^i$ . Os  $v^i$  têm que satisfazer condições de consistência, ao passo que os  $u^a$ 's são coeficientes arbitrários. Poderia-se tomar os  $u^a$ 's como funções arbitrárias do tempo e, ainda assim, todos os requerimentos da teoria seriam satisfeitos. Como resultado, as variáveis dinâmicas não são completamente determinadas em qualquer tempo. Observamos finalmente que qualquer combinação linear dos  $\phi$  é um vínculo.

### C.3.1 Vínculos de Primeira e Segunda Classe

Uma classificação mais útil que a distinção entre vínculos primários e secundários é o conceito de vínculos de primeira e segunda classe. Qualquer variável dinâmica  $R$ , função dos  $q$  e  $p$ , é chamada de *primeira classe* se seus colchetes de Poisson com todos os  $\phi$  são fracamente zero:

$$\{R, \phi_i\} \approx 0, \quad i = 1, \dots, f.\tag{C.25}$$

De outra maneira  $R$  será de *segunda classe*. Se  $R$  é de primeira classe, então  $\{R, \phi_i\}$  tem que ser fortemente igual a uma combinação linear dos  $\phi$ 's, os quais são fracamente zero. Assim

$$\{R, \phi_i\} = r_{ii'} \phi_{i'}.\tag{C.26}$$

Um fato importante das propriedades das funções de primeira classe é que os colchetes de Poisson de duas destas funções é de primeira classe. Em particular  $H'$  na Equação (C.24) é de primeira classe.

### C.3.2 Vínculos de Primeira Classe como Geradores das Transformações de Calibre

A presença das funções arbitrárias  $u^a$  ( $a = 1, \dots, l$ ) na Hamiltoniana total (C.24) indica que nem todos os  $p$  e  $q$  são observáveis, isto é, existe mais de um conjunto de valores das variáveis canônicas representando um mesmo estado físico dado. Porém a teoria tem que ser independente destas funções. O fato dos coeficientes  $u^a$  serem funções arbitrárias do tempo, significa que uma variável canônica em um instante qualquer poderia ter mais de um valor; ou melhor, dado um conjunto inicial de variáveis canônicas em um tempo  $t_1$  definindo completamente um estado físico, espera-se determiná-lo completamente em qualquer outro tempo. Agora os coeficientes  $u^a$  são funções arbitrárias, o que significa que os valores das variáveis canônicas em um tempo posterior  $t_2$  dependem da escolha dos  $u^a$ 's. Considerando em particular  $t_2 = t_1 + \delta t$ , a diferença entre os valores que toma uma variável dinâmica  $A$  no tempo  $t_2$  correspondente a duas escolhas  $u^a$  e  $\tilde{u}^a$ , com a Hamiltoniana (C.24):

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \{A, \tilde{H}\} = \{A, H' + u^a \phi_a\} = \{A, H'\} + u^a \{A, \phi_a\} \\ \delta \dot{A} &= (u^a - \tilde{u}^a) \{A, \phi_a\}\end{aligned}$$

de onde temos que

$$\delta A = (u^a - \tilde{u}^a) \delta t \{A, \phi_a\} = \delta u^a \{A, \phi_a\}, \quad (\text{C.27})$$

com  $\delta u^a = (u^a - \tilde{u}^a) \delta t$ . A transformação (C.27) não deve alterar o estado físico em  $t_2$ . Então estendendo a terminologia usada em teoria de campos de calibre conclui-se que os vínculos geram transformações de calibre. As transformações que não mudam o estado físico, as “transformações de calibre”, formam um grupo contínuo (grupo de Lie), o que implica que as transformações infinitesimais formam uma álgebra de Lie (com o colchete de Poisson). Então os colchetes de Poisson dos vínculos  $\phi$  gerando essas transformações devem ser iguais a combinações lineares dos tais vínculos. Em outras palavras, os  $\phi$  que geram transformações de calibre são de primeira classe. Em geral as transformações (C.27) não são as únicas que não fazem mudar o estado físico. De fato temos:

1. O colchete de Poisson de dois vínculos de primeira classe  $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$  gera uma transformação de calibre.

2. O colchete de Poisson de quaisquer vínculos de primeira classe  $\phi_a$  com a Hamiltoniana de primeira classe  $H'$ ,  $\{\phi_a, H'\}$  gera uma transformação de calibre.

O número de funções arbitrárias é igual ao número de valores que toma o sufixo “a”. E é o número de transformações de calibre independentes.

As funções de primeira classe formam uma subálgebra sobre  $\mathcal{M}$ . Agora todos os vínculos (C.20) podem ser divididos em dois conjuntos, um consistente com os *vínculos de primeira classe*, com base de vínculos linearmente independentes

$$\psi_i(q, p) \approx 0 \quad i = 1, \dots, I, \quad (\text{C.28})$$

e os demais que ficam,  $N = f - I$  de *vínculos, de segunda classe*, com base

$$\varphi_\alpha(q, p) \approx 0 \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (\text{C.29})$$

Os  $\psi_i$  e  $\varphi_\alpha$  poderiam incluir vínculos primários como também vínculos secundários.

### C.3.3 Vínculos de Segunda Classe. Colchetes de Dirac

Os vínculos de segunda classe dão origem à matrizes  $N \times N$  dos colchetes de Poisson, não singulares, denotados como

$$C_{\alpha\beta} = \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}. \quad (\text{C.30})$$

Dado que o determinante de uma matriz antissimétrica anula-se se sua dimensão for ímpar, pode-se concluir que o número  $N$  de vínculos de segunda classe deve ser par. Posto que  $C_{\alpha\beta}$  é não singular sua inversa  $C_{\alpha\beta}^{-1}$  existe e satisfaz

$$C_{\alpha\beta} C_{\beta\gamma}^{-1} = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (\text{C.31})$$

Agora construímos, para qualquer variável dinâmica  $A$ , uma nova variável  $A'$  que tenha colchetes que se anulam com todos os vínculos de segunda classe.  $A'$  é dada por

$$A' = A - \{A, \varphi_\alpha\} C_{\alpha\beta}^{-1} \varphi_\beta. \quad (\text{C.32})$$

Com efeito ,

$$\begin{aligned}\{A', \varphi_\gamma\} &= \{A, \varphi_\gamma\} - \{A, \varphi_\alpha\} C_{\alpha\beta}^{-1} C_{\beta\gamma} \\ &= \{A, \varphi_\gamma\} - \{A, \varphi_\alpha\} \delta_{\alpha\gamma} = 0.\end{aligned}\tag{C.33}$$

Aqui  $\{A', \psi_i\}$  não necessariamente é zero,  $\psi_i$  sendo um vínculo de primeira classe.

Agora postulamos que os colchetes de Poisson de duas quantidades  $A$  e  $B$  sejam substituídos pelos colchetes de Poisson das variáveis  $A'$  e  $B'$ ,

$$\{A, B\} \rightarrow \{A', B'\} = \{A, B\} - \{A, \varphi_\alpha\} C_{\alpha\beta}^{-1} \{\varphi_\beta, B\}.\tag{C.34}$$

Apesar que  $A' \approx A, B' \approx B$ , o colchete de Poisson  $\{A', B'\}$  não é fracamente igual a  $\{A, B\}$ . Então definem-se os colchetes de Dirac como

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \varphi_\alpha\} C_{\alpha\beta}^{-1} \{\varphi_\beta, B\},\tag{C.35}$$

verifica-se que (fracamente)

$$\{A, B\}_D \approx \{A', B'\} \approx \{A', B\} \approx \{A, B'\}.\tag{C.36}$$

Se todos os colchetes de Poisson são substituídos pelos colchetes de Dirac, a equação (C.36) nos diz que estamos escolhendo tratar unicamente de vínculos de primeira classe. Todos os vínculos de segunda classe podem ser estabelecidos como iguais a *zero fortemente*, já que os colchetes de Dirac de qualquer função com vínculos de segunda classe é zero:

$$\{A, \varphi_\gamma\}_D = \{A, \varphi_\gamma\} - \{A, \varphi_\alpha\} C_{\alpha\beta}^{-1} C_{\beta\gamma} = 0.\tag{C.37}$$

De (C.36) e da definição (C.32) pode-se ver que  $\{A, \{B, C\}_D\}_D \approx \{A', \{B', C'\}\}$ , assim a identidade de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}_D\}_D + \{B, \{C, A\}_D\}_D + \{C, \{A, B\}_D\}_D \approx 0\tag{C.38}$$

é satisfeita pelos colchetes de Dirac fracamente.

Ademais de (C.38) as propriedades que satisfazem os colchetes de Dirac são:

- $\{A, B\}_D = -\{B, A\}_D$  ;
- $\{A, BC\}_D = \{B, A\}_D C + B \{A, C\}_D$  ;
- $\{\varphi_\alpha, A\}_D = 0$  ,  $\forall A(p, q)$ , e  $\varphi_\alpha$  vínculos de segunda classe ;
- $\{A, B\}_D \approx \{A, B\}$ , para  $B$  de primeira classe e  $A$  arbitrário .
- $\{A, \{B, C\}_D\}_D \approx \{A, \{B, C\}\}$  para  $B$  e  $C$  de primeira classe e  $A$  arbitrário.

Depois dos colchetes de Poisson terem servido a seu propósito de distinguir os vínculos de primeira classe dos de segunda classe, todas as equações da teoria são formuladas em termos dos colchetes de Dirac e os vínculos de segunda classe são convertidos em identidades expressando algumas variáveis canônicas em termos de outras.

## Apêndice D

### Análise detalhada da ação do operadores regularizados $\widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N)$ e $\widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1)$ sobre os estados $|\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle$

Como discutido na seção 7.3.4, dado um estado  $|\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle$ , fazemos uma segmentação  $S(\epsilon)$  de  $\mathcal{M}_1$  suficientemente fina, de modo que todo edge  $x_k$  de  $\Gamma(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$  esteja contido exatamente em um segmento  $I_l$  da segmentação  $S(\epsilon)$ , mais precisamente, coincida com a extremidade  $L_l$  de  $I_l$ , lembrado que,  $I_l = [L_l, R_l)$ .

Primeiro, vamos começar com exemplos bem simples, para no final estabelecermos fórmulas gerais.

(i)  $|\Gamma, \vec{0}, \vec{0}\rangle = |\emptyset\rangle$  (estado de vácuo na notação de Dirac), onde  $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

$$\widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N)|\emptyset\rangle = 0, \quad (\text{D.1})$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1)|\emptyset\rangle = 0. \quad (\text{D.2})$$

Pois  $\widehat{V}_{I_k}|\emptyset\rangle = 0$  e  $\widehat{\omega}_{I_k}|\emptyset\rangle = 0$ .

(ii)  $|\Gamma, \vec{0}, \vec{\mu}\rangle$ , onde  $\vec{\lambda} = (0, 0, \dots, 0)$  e  $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \widehat{\mathcal{G}}_0^\varepsilon(N) |\Gamma, \vec{0}, \vec{\mu}\rangle &= -\frac{\alpha^2 \beta \sigma \hbar^3}{16} \sum_k^m N_k \mu_k \left( |\Gamma, 0, \dots, \alpha_k, \dots, 0, \vec{\mu}\rangle - |\Gamma, 0, \dots, -\alpha_k, \dots, 0, \vec{\mu}\rangle \right) = \\
 &= -\frac{\alpha^2 \beta \sigma \hbar^3}{16} \left[ N_1 \mu_1 \left( |\Gamma, \alpha_1, 0, \dots, 0, \vec{\mu}\rangle - |\Gamma, -\alpha_1, 0, \dots, 0, \vec{\mu}\rangle \right) + \right. \\
 &+ N_2 \mu_2 \left( |\Gamma, 0, \alpha_2, 0, \dots, 0, \vec{\mu}\rangle - |\Gamma, 0, -\alpha_2, 0, \dots, 0, \vec{\mu}\rangle \right) + \\
 &\left. \dots + N_m \mu_m \left( |\Gamma, 0, 0, \dots, \alpha_m, \vec{\mu}\rangle - |\Gamma, 0, 0, \dots, -\alpha_m, \vec{\mu}\rangle \right) \right], \tag{D.3}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \widehat{\mathcal{G}}_1^\varepsilon(N^1) |\Gamma, \vec{0}, \vec{\mu}\rangle = 0, \tag{D.4}$$

onde  $\widehat{V}_{I_k} |\Gamma, \vec{0}, \vec{\mu}\rangle = 0$  e  $\alpha_k = \alpha \forall k \in \mathbb{N}$ .

(iii)  $|\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{0}\rangle$ , onde  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e  $\vec{\mu} = (0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}
& \bullet \widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N) |\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{0}\rangle = \sum_k^n N_k \left[ a_k^3 |\lambda_k|^{\frac{1}{2}} \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1}, \mu_{k+2} + \beta_{k+2}, \right. \right. \\
& \mu_{k+3}, \dots, \mu_m \rangle - 4 |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1} + \beta_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_m \rangle + \\
& \left. \left. + |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - 2\beta_k, \mu_{k+1} + 2\beta_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_m \rangle + 2 |\Gamma, \vec{\lambda}; \vec{\mu} \rangle \right) + \right. \\
& - \frac{16a_k^6 |\lambda_k|}{\alpha^4 \hbar^4} \left( \overbrace{|\lambda_{k+1}|^{\frac{3}{2}} a_{k+1}}^{0 \Leftrightarrow k=n} - |\lambda_k|^{\frac{3}{2}} a_k \right) \times \\
& \times \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1} + \beta_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_m \rangle + \right. \\
& \left. - |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_m \rangle \right) + \\
& + \frac{\Omega \alpha^2 \hbar^2 \sigma}{8} |\lambda_n|^{\frac{3}{2}} a_n \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k + \beta_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_m \rangle + \right. \\
& \left. - |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_m \rangle \right) \Big] = \\
& = N_1 \left[ a_1^3 |\lambda_1|^{\frac{1}{2}} \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; -\beta_1, 0, \beta_3, 0, \dots, 0 \rangle - 4 |\Gamma, \vec{\lambda}; -\beta_1, \beta_2, 0, \dots, 0 \rangle + \right. \right. \\
& \left. \left. + |\Gamma, \vec{\lambda}; -2\beta_1, 2\beta_2, 0, \dots, 0 \rangle + 2 |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, 0, \dots, 0 \rangle \right) \right. \\
& - \frac{16a_1^6}{\alpha^4 \hbar^4} \left( |\lambda_1| |\lambda_2|^{\frac{3}{2}} a_2 - |\lambda_1|^{\frac{5}{2}} a_1 \right) \times \left( |\vec{\lambda}; -\beta_1, \beta_2, 0, \dots, 0 \rangle - |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, 0, \dots, 0 \rangle \right) + \\
& \left. + \frac{\Omega \alpha^2 \hbar^2 \sigma}{8} a_1 \left( |\vec{\lambda}; \beta_1, 0, \dots, 0 \rangle - |\Gamma, \vec{\lambda}; -\beta_1, 0, \dots, 0 \rangle \right) \right] + \dots \\
& \dots + N_n \left[ a_n^3 |\lambda_n|^{\frac{1}{2}} \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, \dots, 0, -\beta_n, 0, \beta_{n+1} \rangle - 4 |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, \dots, 0, -\beta_n, \beta_{n+1} \rangle + \right. \right. \\
& \left. \left. + |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, \dots, 0, -2\beta_n, 2\beta_{n+1} \rangle + 2 |\vec{\lambda}; 0, 0, \dots, 0 \rangle \right) + \right. \\
& - \frac{16a_n^6 |\lambda_n|}{\alpha^4 \hbar^4} \left( \overbrace{|\lambda_{n+1}|^{\frac{3}{2}} a_{n+1}}^0 - |\lambda_n|^{\frac{3}{2}} a_n \right) \times \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, \dots, 0, -\beta_n, \beta_{n+1} \rangle - |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, 0, \dots, 0 \rangle \right) + \\
& \left. + \frac{\Omega \alpha^2 \hbar^2 \sigma}{8} |\lambda_n|^{\frac{3}{2}} a_n \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, \dots, 0, \beta_n \rangle - |\Gamma, \vec{\lambda}; 0, \dots, 0, -\beta_n \rangle \right) \right], \tag{D.5}
\end{aligned}$$

- $$\widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1)|\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{0}\rangle = \sum_k^n N_k^1 |\lambda_k|^2 a_k^4 \left( |\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k - \alpha_k, \lambda_{k+1} + \alpha_{k+1}, \lambda_{k+2}, \lambda_n; 0, \dots, 0\rangle + \right. \\ \left. -|\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; 0, 0, \dots, 0\rangle \right) = N_1^1 |\lambda_1|^2 a_1^4 \left( |\Gamma, \lambda_1 - \alpha_1, \lambda_2 + \alpha_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n; 0, 0, \dots, 0\rangle + \right. \\ \left. -|\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; 0, 0, \dots, 0\rangle \right) + N_2^1 |\lambda_2|^2 a_2^4 \left( |\Gamma, \lambda_1, \lambda_2 - \alpha_2, \lambda_3 + \alpha_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n; 0, 0, \dots, 0\rangle + \right. \\ \left. -|\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; 0, 0, \dots, 0\rangle \right) + \dots + N_n^1 |\lambda_n|^2 a_n^4 \left( |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n - \alpha_n, \alpha_{n+1}; 0, 0, \dots, 0\rangle + \right. \\ \left. -|\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; 0, 0, \dots, 0\rangle \right), \quad (\text{D.6})$$

onde  $a_n := |\lambda_n + \alpha|^{\frac{1}{2}} - |\lambda_n|^{\frac{1}{2}}$  e  $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots = 0$ .

No caso geral, temos

$|\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle$ , onde  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e  $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$

- $$\widehat{\mathcal{G}}_0^\epsilon(N)|\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle = \sum_k^n N_k \left[ a_k^3 |\lambda_k|^{\frac{1}{2}} \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1}, \mu_{k+2} + \beta_{k+2}, \mu_{k+3}, \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots, \mu_m \rangle - 4|\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1} + \beta_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_m \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. +|\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - 2\beta_k, \mu_{k+1} + 2\beta_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_m \rangle + 2|\Gamma, \vec{\lambda}; \vec{\mu}\rangle \right) + \right. \\ \left. -\frac{16a_k^6 |\lambda_k|}{\alpha^4 \hbar^4} \left( \overbrace{|\lambda_{k+1}|^{\frac{3}{2}} a_{k+1} - |\lambda_k|^{\frac{3}{2}} a_k}^{0 \Leftrightarrow k=n} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1} + \beta_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_m \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. -|\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_m \rangle \right) + \right. \\ \left. +\frac{\Omega \alpha^2 \hbar^2 \sigma}{8} |\lambda_n|^{\frac{3}{2}} a_n \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k + \beta_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_m \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. -|\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_m \rangle \right) \right] + \\ -\frac{\alpha^2 \beta \sigma \hbar^3}{16} \sum_k^m N_k \mu_k \left( |\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + \alpha_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n; \vec{\mu}\rangle \right. \\ \left. -|\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k - \alpha_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n; \vec{\mu}\rangle \right), \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \widehat{\mathcal{G}}_1^\epsilon(N^1)|\Gamma, \vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle = & \sum_k^n N_k^1 |\lambda_k|^{\frac{1}{2}} a_k^3 \left[ |\lambda_k|^{\frac{3}{2}} a_k \left( |\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k - \alpha_k, \lambda_{k+1} + \alpha_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \dots, \lambda_n; \vec{\mu}\rangle - |\Gamma, \vec{\lambda}; \vec{\mu}\rangle \right) + \frac{\alpha^2 \hbar}{2\beta} \mu_k \left( |\Gamma, \vec{\lambda}; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - \beta_k, \mu_{k+1} + \beta_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \dots, \mu_m \rangle - |\Gamma, \vec{\lambda}; \vec{\mu}\rangle \right) \right], \tag{D.8}
\end{aligned}$$

onde  $a_k := |\lambda_k + \alpha|^{\frac{1}{2}} - |\lambda_k|^{\frac{1}{2}}$  e  $\lambda_{n+k} = \mu_{m+k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields I, II, III”, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [2] E. E. Flanagan and R. M. Wald, “Does backreaction enforce the average null energy condition in semiclassical gravity”, *Phys. Rev. D* 54, 6233 (1996).
- [3] S. Carlip, “Quantum Gravity: a progress report”, *Rept. Prog. Phys.* 64, 885 (2001).
- [4] C. M. Will, “The Confrontation between general relativity and experiment”, *Living Rev. Relativity* 4 (2001), 4.
- [5] S. W. Hawking, and G. F. R. Ellis, “The Large scale structure of spacetime”, Cambridge University Press 1973.
- [6] Robert M. Wald, “General Relativity”, The University of Chicago, 1984.
- [7] J. Zinn-Justin, “Quantum Field Theory and Critical Phenomena”, Clarendon Press, Oxford University Press, 1993.
- [8] J. Collins, “Renormalization”, Cambridge University Press, 1985.
- [9] Olivier Piguet and Silvio P. Sorella, “Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [10] S. Hollands, R. M. Wald, “On the renormalization group in curved spacetime”, *Commun. Math. Phys.* 237 123 (2003).
- [11] R. Wald, “Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics”, The University of Chicago Press, 1984.
- [12] T. Thiemann, “Modern Canonical Quantum General Relativity”, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2007.
- [13] C. Rovelli, “Quantum Gravity”, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2004.
- [14] C. Kiefer, “Quantum Gravity”, International Series of Monographs on Physics, Oxford University Press, 2007.
- [15] C. Liang, “Introductory differential geometry and general relativity I, II”, Beijing Normal University Press, 2000.
- [16] A. Ashtekar, “Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity”, World Scientific, Singapore, 1991.

- [17] M. Han, Y. Ma, Y. Ding, and L. Qin, “Hamiltonian Analysis of n-dimensional Palatini Gravity with Matter”, *Mod. Phys. Lett. A* 20 725 (2005), (preprint: gr-qc/0503024).
- [18] A. Ashtekar, “New variables for classical and quantum gravity”, *Phys. Rev. Lett.* 57, 2244 (1986).
- [19] A. Ashtekar, “New Hamiltonian formulation of general relativity”, *Phys. Rev. D* 36, 1587 (1987).
- [20] C. Rovelli and L. Smolin, “Loop representation for quantum general relativity”, *Nucl. Phys. B* 331, 80 (1990).
- [21] J. Barbero, “Real Ashtekar variables for Lorentzian signature spacetimes”, *Phys. Rev. D* 51, 5507 (1995).
- [22] S. Holst, “Barbero’s Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action”, *Phys. Rev. D* 53, 5966 (1996) (preprint: gr-qc/9511026).
- [23] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski, “Background Independent Quantum Gravity: A Status Report.”, *Class. Quant. Grav.* 21: R53,2004., [arXiv:gr-qc/0404018].
- [24] J. Samuel, “Is Barbero’s Hamiltonian formulation a gauge theory of Lorentzian gravity?”, *Class. Quantum Grav.* 17, L141 (2000), (Preprint: gr-qc/0005095).
- [25] M. Domagala and J. Lewandowski, “Black hole entropy from quantum gravity”, *Class. Quantum Grav.* 21, 5233 (2004).
- [26] A. Perez and C. Rovelli, “Physical effects of the Immirzi parameter”, *Phys. Rev. D* 73, 044013 (2006).
- [27] T. Thiemann, “Quantum Spin Dynamics (QSD)”, *Class. Quantum Gravity.* 15, 839 (1998) [preprint: gr-qc/9606089].
- [28] T. Thiemann, “The phoenix project: Master constraint programme for loop quantum gravity”, *Class. Quantum Gravity.* 23, 2211 (2006) (Preprint: gr-qc/0305080).
- [29] Gabriel Luchini, dissertação de mestrado: “Sobre a Quantização de Laços de Teorias Topológicas em 2 + 1 Dimensões: Gravitação e Chern-Simons”, Departamento de Física - UFES - Brasil, 2009.
- [30] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, M. Dillard-Bleick, “Analysis, Manifold, and Physics”, North-Holland Publishing Company, 1977.
- [31] Y. Yamasaki, “Measures on Infinite Dimensional Spaces”, World Scientific, 1985.
- [32] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourão, and T. Thiemann, “A manifest gauge invariant approach to quantum theories of gauge fields”, (preprint: hep-th/9408108).
- [33] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, Second Edition, Institute of Physics Publishing, 2003.
- [34] J. M. Velhinho, “A groupoid approach to spaces of generalized connections”, *J. Geom. Phys.* 41, 166 (2002).
- [35] R. Giles, Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops, *Phys. Rev. D* 24, 2160 (1981).

- [36] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Projective techniques and functional integration, *J. Math. Phys.* 36, 2170 (1995).
- [37] A. Ashtekar and C. J. Isham, “Representation of the holonomy algebras of gravity and non-Abelian gauge theories”, *Class. Quantum Grav.* 9, 1433 (1992).
- [38] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Differential geometry on the space of connections via graphs and projective limits, *J. Geom. Phys.* 17, 191 (1995).
- [39] B. K. Driver, “MATH 240B LECTURES NOTES: TOPOLOGY AND FUNCIONAL ANALYSIS”, Departament of Mathematics, 0112, University of California, San Diego (2001).
- [40] T. Thiemann and O. Winkler, “Gauge field theory coherent states (GCS): III. Ehrenfest theorems”, *Class. Quantum Grav.* 18, 4629, (2001).
- [41] C. S. Höning, “Aplicações da Topologia à Análise”, IMPA, Projeto Euclides, 1976.
- [42] L. Nachbin, “The Haar Integral”, Van Nostrand, 1965.
- [43] J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann, T. Thiemann, Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy-flux algebras, [preprint:gr-qc/0504147].
- [44] J. Baez, “Spin networks in non-pertubative quantum gravity”, In *Interface of Knots and Physics*, L. Kauffman (ed.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996. [preprint: gr-qc/9504036]
- [45] R. Penrose and W. Rindler, “Spinors and Spacetime I, II”, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [46] M. Han, W. Huang and Y. Ma, “Fundamental structure of loop quantum gravity”. [preprint: gr-qc/0509064]
- [47] N. J. Vilenkin, “Special Functions and the Theory of Group Representations”, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.
- [48] T. Bröcker and T. Dieck, “Representations of Compact Lie Group”, Springer-Verlag, 1985.
- [49] M. Carmeli and S. Malin, “Theory of Spinor: An Introduction”, World Scientific, 2000.
- [50] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin, “Loops Knots Gauge Theory and Quantum gravity”, Cambridge University, 1996.
- [51] T. Thiemann, “A length operator for canonical quantum gravity”, *J. Math. Phys.* 39, 3372 (1998).
- [52] C. Rovelli and L. Smolin, “Discreteness of area and volume in quantum gravity”, *Nucl. Phys. B* 442, 593, (1995).
- [53] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Quantum theory of geometry I: Area operators”, *Class. Quantum Grav.* 14, A55 (1997), [preprint: gr-qc/9602046].
- [54] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Quantum theory of geometry II: Volume operators”, *Adv. Theor. Math. Phys.* 1, 388 (1997), [preprint: gr-qc/9711031].
- [55] Y. Ma and Y. Ling, “ $\hat{Q}$  operator for canonical quantum gravity”, *Phys. Rev. D* 62, 104021 (2000).

- [56] K. Giesel and T. Thiemann, “Consistency check on volume and triad operator quantisation in loop quantum gravity I”, [preprint: gr-qc/0507036].
- [57] K. Giesel and T. Thiemann, “Consistency check on volume and triad operator quantisation in loop quantum gravity II”, [preprint: gr-qc/0507037].
- [58] L. Hörmander, “The Analysis of Linear Partial Differential Operators I”, Springer Verlag, Second Edition, 1990.
- [59] A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski, “Mathematical structure of loop quantum cosmology”, *Adv. Theor. Math. Phys.* 7 233 (2003).
- [60] M. Bojowald, “Loop quantum cosmology”, *Living Rev. Rel.* 8 11 (2005).
- [61] A. Ashtekar, “An Introduction to Loop Quantum Gravity Through Cosmology”, Preprint gr-qc/0702030 (2007).
- [62] E. Hewitt and K. A. Ross, “Abstract Harmonic Analysis I”, Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [63] A. Ashtekar, J. Lewandowski, and H. Sahlmann, “Polymer and Fock representations for a scalar field”, *Class. Quantum Grav.* 20, L11 (2003).
- [64] W. Kaminski, J. Lewandowski and M. Bobiński, “Background independent quantizations: the scalar field I”, (preprint: gr-qc/0508091).
- [65] C. Corduneanu, “Almost Periodic Functions”, Interscience Publishers - John Wiley Sons (1968).
- [66] Yitzhak Katznelson, “An Introduction to Harmonic Analysis”, Dover Publications (1978).
- [67] O. Bratteli and D. W. Robinson. “Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I”, Springer Verlag 1979.
- [68] R. Haag, “Local Quantum Physics”, Second edition. Berlin Heidelberg: Springer Verlag (1996).
- [69] Kôzaku Yosida, “Functional Analysis”, Sixth edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1980).
- [70] M. Reed and B. Simon, “Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis”, Academic Press, New York and London, (1980).
- [71] A. Ashtekar and J. Lewandowski (1994) Representation Theory of Analytic Holonomy  $C^*$  Algebras, in *Knots and Quantum Gravity* ed. Baez J (Oxford U. Press, Oxford).
- [72] W. Rudin, “Real and Complex Analysis”, (MacGraw-Hill, New York, 1987).
- [73] A. Armando de Castro Jr., “Curso de teoria da medida”, IMPA, Projeto Euclides, 2004.
- [74] D. Marolf and J. Mourão, “On the support of the Ashtekar-Lewandowski measure”, *Commun. Math. Phys.* 170 583 (1995).
- [75] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, “Fundamentals of the Theory of Operators Algebras Vol. I,II”, Academic Press, London, (1993).
- [76] S. Sternberg, “Group Theory and Physics”, (Cambridge University Press, 1994).

- [77] R. Utiyama, “Invariant Theoretical Interpretation of Interaction”, *Phys. Rev.* 101, (1956) 1597-1607.
- [78] Reinhold A. Bertlmann, “Anomalias in Quantum Field Theory”, Clarendon Press-Oxford, 1996.
- [79] Peter Peldán, “Actions for gravity, with generalizations: A Review”, *Class. Quant. Grav.* 11:1087-1132, 1994, [arXiv:gr-qc/9305011]
- [80] R. Jackiw, “Diverse Topics in Theoretical and Mathematic physics – Gauge Theories and Gravity”, World Scientific, Singapore 1995.
- [81] P.A.M. Dirac, “Lectures on Quantum Mechanics”, Belfer graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.
- [82] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, “Constrained Hamiltonian Systems”, *Academia Nazionale dei Lincei*, Roma, 1976.
- [83] M. Henneaux and C. Teitelboim, “Quantization of Gauge Systems”, Princeton University Press, 1991.
- [84] D.M. Gitman and I.V. Tyutin, “Quantization of Fields with Constraints”, Springer-Verlang Series in Nuclear and Particle Physics, Berlin Heidelberg, 1990.
- [85] Arnowitt R., Deser S. and Misner C. W., “The Dynamics General Relativity in Gravitation: An Intoduction to Current Reseach”, ed. L. Witten (New York: Wiley), 1962.
- [86] A. Corichi, and D. Nunez, “Introduction to The ADM Formalism” (in spanish), *Rev. Mex. Fis.* 37, 720-747 (1991).
- [87] Clisthenis P. Constantinidis, José André Lourenço, Olivier Piguet e Wesley Spalenza, “Quantização da Gravidade em Duas Dimensões via o Formalismo de Laços”, apresentado em “XXVII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos” de 24-28 de setembro de 2006, SP-Brasil. e “XIII Escola de Verão Jorge André Swieca de Partículas e Campos”, de 22-28 de Janeiro de 2007, SP-Brasil.
- [88] Clisthenis P. Constantinidis, José André Lourenço, Olivier Piguet, em preparação, Departamento de Física-UFES-Brasil-2007.
- [89] Roman Jackiw, “Two Lectures on Two-Dimensional Gravity”, LASSF II, Caracas, Venezuela, October 1995,[arXiv:gr-qc/9511048].
- [90] M. Weis, “Topological Aspect of Quantun Gravity”, [arXiv:hep-th/9806179].
- [91] K. Isler and C.A. Trugenberger, “Gauge Theory of Two-Dimensional Quantum Gravity”, *Phy. Rev. Lett.* 63 (1989) 834.
- [92] T. Fukuyama and K. Kamimura, “Gauge Theory of Two-Dimensional Gravities”, *Phy. Lett.* 160B (1985) 259.
- [93] Marc Henneaux, “Quantum Gravity in Two-Dimension: Exact Solution of Jackiw Model”, *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985) 959.
- [94] A. H. Chamseddine and D. Wyler, “Gauge Theory of Topological Gravities in (1+1) Dimensions”, *Phy. Lett. B* 228(1989) 75.

- [95] Edward Witten, “(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System”, Nucl. Phys. B311, 46, 1988.
- [96] P.A.M. Dirac, *Canad. J. Math.* 2, 129 (1950); P.A.M. Dirac, *Canad. J. Math.* 3, 1 (1951).
- [97] E. R. Livine, Alejandro Perez and Carlo Rovelli, “2d Manifold-Independence Spinfoam Theory”, [arXiv:gr-qc/0102051].
- [98] R. Jackiw, “Liouville Field Theory: A Two-Dimensional Model For Gravity?”, ed. S Christens, Hilgar, Bristol, p403-420, 1984.
- [99] R. Jackiw, Gauge Covariant Conformal Transformations, *Phy. Rev. Lett.* 41 (1978) 1635.
- [100] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G.T. Thompson, “Topological Field Theory”, *Phys.Rept.* 209:129-340,1991. M. Blau and G. Thompson, “Topological Gauge Theories of Antisymmetric Tensor Field”, *Ann. Phys.* 205(1991) 130-172.
- [101] P.A.M. Dirac, *Phys. Rev.* 73(1948)1092; P.A.M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* 21(1949)392
- [102] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* 160(1967)1113; B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* 162(1967)1195; B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* 162 (1967) 1239.
- [103] C. P. Constantinidis, J. A. Lourenço, I. Morales, O. Piguet and A. Rios, “Canonical analysis of the Jackiw-Teitelboim model in the temporal gauge: I. The classical theory”, *Class. Quantum Grav.* 25 (2008) 125003.
- [104] Luis Ivan Morales Bautista, dissertação de mestrado: “Formalismo Hamiltoniano do Modelo de Jackiw-Teitelboim no Calibre Temporal”, Departamento de Física - UFES - Brasil, 2007.
- [105] Alex Rios Costa, dissertação de mestrado: “Uma Revisão da Gravitação Bidimensional do Ponto de Vista da Gravitação Quântica de Loops”, Departamento de Física - UFES - Brasil, 2007.
- [106] Luiz Agostinho Ferreira, “Lecture Notes in Lie Algebras and Lie Grups”, IFT/UNESP (2000).
- [107] James E. Humphreys, “Introduction to Lie Algebras and Representation”, Spring-Verlag New York, 1972.
- [108] Chan Hong-Mo, Tsou Scheung Tsun, “Some Elementary Gauge Theory Concepts”, *World Scientific Lectures Notes in Physics-Vol. 47*, 1993.
- [109] J. L. Anderson and Peter G. Bergmann, “Constraints Covariant Field Theories”, *Phys. Rev.* 83 (1951) 1018.
- [110] Peter G. Bergmann and I. Goldberg, “Dirac Bracket Transformation in Phase Space”, *Phys. Rev.* 98 (1955) 531.
- [111] D. Giulinia, “Group Averaging and Refined Algebraic Quantization”, 2000,[arXiv:gr-qc/0003040].
- [112] D. Marolf, “Group Averaging and Refined Algebraic Quantization: Where are we now?”, 2000, [arXiv:gr-qc/0011112].
- [113] D. Marolf and Ian A. Morrison, Group Averaging of massless scalar fields in 1 + 1 de Sitter, 2008, [arXiv:gr-qc/08082174].

- [114] W. Fairbairn and C. Rovelli, “Separable Hilbert space in loop quantum gravity”, *J. Math. Phys.* 45, 2802 (2004).
- [115] T. Thiemann. “Anomaly-free formulation of non-perturbative, four-dimensional lorentzian quantum gravity”, *Phys. Lett. B*, 380:257, 1996.
- [116] T. Thiemann. “Quantum Spin dynamics (qsd). *Class. Quant. Grav.*, 15:839-873, 1998.
- [117] K. Giesel and T. Thiemann, “Algebraic quantum gravity (AQG) I. Conceptual setup”, [preprint: gr-qc/0607099].
- [118] K. Giesel and T. Thiemann, “Algebraic quantum gravity (AQG) II. Semiclassical analysis”, [preprint: gr-qc/0607100].
- [119] K. Giesel and T. Thiemann, “Algebraic quantum gravity (AQG) III. Semiclassical perturbation theory”, [preprint: gr-qc/0607101].
- [120] K. Giesel and T. Thiemann, “Algebraic Quantum Gravity (AQG) IV. Reduced Phase Space Quantisation of Loop Quantum Gravity”, [arXiv:0711.0119] [gr-qc].