

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Diego César Monteiro de Mendonça

**QUANTIZAÇÃO DE LAÇOS NO
MODELO BF EM $2+1$ DIMENSÕES**

VITÓRIA
2010

DIEGO CÉZAR MONTEIRO DE MENDONÇA

**Quantização de Laços no
Modelo BF em 2+1 dimensões**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Olivier Piguet

VITÓRIA
2010

“Quantização de Laços no Modelo BF em 2+1 dimensões”

DIEGO CÉZAR MONTEIRO DE MENDONÇA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Olivier Piguet
Departamento de Física - UFES
Orientador

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis
Departamento de Física - UFES
Co-Orientador

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga
DCNN - CEUNES - UFES

Prof. Dr. José Helayël Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

*Às mulheres da minha vida.
Amo vocês.*

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus, o maestro da natureza, sem Ele não teríamos o que estudar e nem motivos para fazê-lo.

Ao meu professor orientador Olivier Piguet, por ter sido uma guia valoroso nesta jornada completamente inédita para mim de física teórica. Não consigo imaginar alguém mais honesto, paciente e absolutamente capaz de lecionar sobre um universo de coisas. Muito obrigado pela confiança que depositou em mim.

Ao professor Clisthenis P. Constantinidis e aos demais colegas do grupo de gravitação quântica, pela companhia, pelos questionamentos e pelas valiosas dicas de estudo, cada reunião com vocês é um privilégio.

À minha noiva Alexandra, não sei mais como passar pela vida sem você. Obrigado pelo apoio incondicional durante todo o mestrado e outras tantas *cositas*...

À minha família, pelo apoio e por terem me educado desde que eu me entendo por gente.

Aos meus colegas de pós-graduação e graduação pelo privilégio da sua companhia, pelo esforço e perseverança ao longo de nossa formação. Em especial, agradeço a: Hugo Leonardo Louzada, Gláuber Dorsch, Paulo Oliveira, Leandro Amorim, Zui Almaraz, Alex Rios Costa, Luiz Ivan Morales, Rodrigo Martins Barbosa e a minha turma de graduação lá na UFMG.

Ao colega Gabriel Luchini por me ajudar com o $\text{T}_\text{E}\text{X}$ e com as ilustrações do trabalho.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo financiamento que viabilizou este trabalho.

“Viver no mundo sem tomar consciência do seu significado é como vagar por uma imensa biblioteca sem tocar os livros.”

Manly P. Hall

Resumo

O objetivo deste trabalho é servir como um texto introdutório aos seguintes assuntos: quantização canônica, quantização de laços e modelo BF. Para tal, desenvolvemos ferramentas matemáticas apropriadas para se tratar uma teoria de calibre topológica do tipo Yang-Mills em geral, para formular uma ação covariante e estudar suas simetrias via o método de quantização canônica de Dirac, também conhecido como método hamiltoniano vinculado. Este método é desenvolvido extensamente, embora mantenha o caráter introdutório, para o caso do modelo BF de 2+1 dimensões, que em seguida quantizamos via laços e encontramos identificações de todo este processo com a teoria da relatividade geral expressa como uma teoria de calibre. Por último, nós veremos como se desenvolve a mecânica quântica destas teorias de calibre descrevendo a base para nossas funções de estado que é chamada de rede de spin, bem como a dinâmica destas teorias quantizadas por laços que é descrita pelo formalismo dos *spin foams* e ainda o cálculo de alguns observáveis associados a nossos estados.

Abstract

The main goal of this work is to serve as an introductory review on the following subjects: canonic quantization, loop quantization and BF model. To achieve it we develop the proper mathematical tools to study a topologic Yang-Mills gauge theory in general, to formulate a covariant action and study its simetries via Dirac's canonical quantization method, also known as constrained hamiltonian method. This method is extensely developed, although at an introductory level, for the case of 2+1 dimentional BF model, which then we quantized via loops and we find analogies with the general relavity theory expressed as a gauge theory. Finally, we'll see how develops the quantum mechanics of these gauge theories describing the basis for our state functions that is called spin networks, as well as the dynamics of these quantized loop theories which is described by the formalism of spin foams and still the calculation of some observables related to our states.

Sumário

1	Introdução	14
2	O Modelo BF	17
2.1	Definições e Convenções	18
2.1.1	Índices	18
2.1.2	A Derivada Covariante	18
2.1.3	A curvatura de Yang-Mills F	21
2.1.4	A derivada de um tensor e as identidades de Bianchi	22
2.2	Construindo o modelo BF	23
2.2.1	O campo B e a invariância sobre difeomorfismos	23
2.2.2	A invariância de calibre	24
2.3	As invariâncias de calibre das variáveis dinâmicas	25
2.3.1	As simetrias de calibre	26
2.3.2	As equações de movimento do modelo BF	27
3	Quantização Canônica	29
3.1	Visão geral	29
3.1.1	O formalismo lagrangiano	30
3.1.2	A notação simplética	30
3.1.3	Sistemas vinculados	31
3.1.4	O algoritmo de Dirac-Bergmann	31
3.1.5	O princípio da correspondência	33
3.2	O formalismo lagrangiano do Modelo BF	34
3.3	O método hamiltoniano	36
3.3.1	Os vínculos primários	36
3.3.2	A hamiltoniana canônica	38
3.4	A estabilidade dos vínculos	38
3.4.1	O algoritmo de Dirac-Bergmann aplicado ao modelo BF	38
3.4.2	A estabilidade dos vínculos secundários	41
3.4.3	A Hamiltoniana total	43
3.5	Colchetes de Dirac	44

3.5.1	Troca de base dos vínculos	45
3.5.2	A definição do colchete de Dirac	48
3.5.3	A estrutura simplética	49
3.6	O problema da quantização	50
3.6.1	A hamiltoniana completamente vinculada	50
3.6.2	As transformações infinitesimais geradas pela hamiltoniana	50
3.6.3	A álgebra dos geradores de transformações	53
3.6.4	O problema do produto escalar	54
4	Quantização de Laços	56
4.1	Regularização de uma rede versus redes de <i>spin</i>	56
4.2	As holonomias de A	58
4.2.1	O transporte paralelo	59
4.2.2	A fatoração de uma holonomia	60
4.2.3	A holonomia infinitesimal	61
4.2.4	A holonomia como um objeto invariante	62
4.3	A construção do espaço de Hilbert cinemático	63
4.3.1	As funções cilíndricas	64
4.3.2	O produto escalar de funções cilíndricas	65
4.4	A construção de uma base ortonormal	68
4.4.1	O teorema de Peter-Weyl para um <i>loop</i>	69
4.4.2	A generalização para um grafo qualquer	70
4.4.3	Redes de <i>spin</i>	71
4.5	A aplicação do vínculo de Gauss	72
4.5.1	A diferenciação de uma holonomia	72
4.5.2	As transformações de \mathcal{G} sobre um loop	74
4.6	Invariância dos vértices: os <i>intertwinners</i>	75
4.6.1	Vértices bivalentes	75
4.6.2	Vértice Trivalente	76
4.6.3	Vértices (n-m)-valentes	78
4.7	Uma nova base para as redes de <i>spin</i>	78
4.7.1	Exemplo de mudança de base	78
4.7.2	Como construir o espaço de Hilbert físico	79
5	A Relatividade Geral e o Modelo BF	81
5.1	O formalismo de primeira ordem	81
5.1.1	A ação de Einstein-Hilbert	81
5.1.2	A variedade \mathcal{M} na vizinhança de um ponto P	83
5.1.3	Transformações do grupo de Lorentz	84

5.1.4	Transformações gerais de coordenadas	86
5.1.5	A ação de Palatini	86
5.2	A construção da ação de Palatini em 4 dimensões	88
5.2.1	Montando a ação de Palatini-Holst	88
5.2.2	As equações de movimento	90
5.2.3	Variáveis de Ashtekar	92
5.3	Quantização canônica da RG	93
5.3.1	O formalismo hamiltoniano	94
5.3.2	Fixação de calibre parcial	95
5.3.3	Quebra da simetria do grupo de Lorentz	96
5.3.4	O método hamiltoniano	97
5.4	Quantização de laços da RG	99
5.4.1	Aplicação do vínculo de Gauss \mathcal{G}	99
5.4.2	Redes de Spin e estados físicos	100
6	Operadores e Observáveis	101
6.1	Modelo BF: O operador curvatura	102
6.1.1	O estados invariantes de transformações infinitesimais	102
6.1.2	A construção do projetor P	102
6.1.3	A base dos coeficientes de $T(x)$	105
6.1.4	A introdução de uma regularização	106
6.1.5	As transformações geradas por \mathcal{F}	107
6.2	Os operadores e observáveis do modelo BF 2+1 dimensional	108
6.2.1	O operador comprimento \mathcal{L}	109
6.2.2	O espectro do operador \mathcal{L}_c	110
6.2.3	O operador área \mathcal{A}	111
6.2.4	O espectro do operador \mathcal{A}_S	113
6.3	RG: O operador vetorial e o escalar	115
6.3.1	Os vínculos remanescentes	115
6.3.2	O vínculo C_{dif}	116
6.3.3	Análise dos difeomorfismos	117
6.3.4	O espaço das distribuições temperadas	119
6.3.5	O projetor generalizado P_{dif}	120
6.3.6	Comentário sobre o vínculo escalar C	122
6.4	Os operadores e observáveis parciais para a RG 3+1 dimensional	124
6.4.1	A construção do operador área $\hat{\mathcal{A}}$	124
6.4.2	A área que vamos calcular	125
6.4.3	Os grafos como redes de <i>spin</i>	127

6.4.4	Determinação do parâmetro de Immirzi	129
6.4.5	Quantização do volume \mathcal{V}	130
6.5	Introdução ao formalismo dos <i>spin foams</i>	131
6.5.1	A dinâmica dos estados quânticos	131
6.5.2	<i>Spin foams</i> no modelo BF 2+1 dimensional	133
6.5.3	Os operadores de <i>loops</i>	134
6.5.4	Comentários sobre <i>spin foams</i> na gravitação 3+1 dimensional . . .	137
7	Conclusões e Perspectivas	139
A	Revisão de Geometria Diferencial	142
A.1	Grupos de Lie	142
A.1.1	Alguns de grupos de Lie	143
A.1.2	A álgebra do grupo $SU(2)$	143
A.1.3	Homeomorfismos de $SU(2)$	145
A.2	Formas diferenciais e vetores	145
A.2.1	Representação adjunta para formas e vetores	145
A.2.2	Formas, vetores e tensores em uma variedade diferenciável	145
A.2.3	O espaço tangente T_P e o espaço dual T_P^*	147
A.2.4	Multiplicação de formas diferenciais	149
A.2.5	Derivação de uma forma	151
A.2.6	Integração de uma forma	152
A.3	Outros operadores derivadas	153
A.3.1	A antiderivada	153
A.3.2	A derivada de Lie	154
A.4	Invariância sobre difeomorfismos	156
A.4.1	Integrais invariantes	156
A.4.2	Comutadores de formas diferenciais	158
A.4.3	Regra de Integração por partes	158
B	Complementos sobre Quantização Canônica	160
B.1	A quantização do campo de Schrödinger	160
B.1.1	A ação de Schrödinger	160
B.1.2	O Algoritmo de Dirac-Bergmann	162
B.1.3	A hamiltoniana total	163
B.1.4	A classe de um vínculo	164
B.1.5	Os colchetes de Dirac	165
B.2	Construção do espaço de Hilbert cinemático	167
B.2.1	O espaço de fase clássico	167

B.2.2	O espaço de Hilbert na MQ	167
B.2.3	Um espaço de estados físicos	168

C Casos particulares **170**

C.1	O modelo BF em $(1 + 1)$ dimensões	170
C.1.1	As simetrias do caso bidimensional	170
C.1.2	O método hamiltoniano	171
C.1.3	O espaço de Hilbert cinemático invariante	172
C.1.4	A construção de observáveis sobre os estados físicos	173
C.1.5	A aplicação dos observáveis T e L	175

Capítulo 1

Introdução

Grande parte dos frutos colhidos da física estudada no último século tem sido cultivados em duas teorias fundamentais: a mecânica quântica (MQ) [1], [2], [3] e a relatividade geral (RG) [4], [5], [6]. Mas além do progresso científico, estas duas teorias também trouxeram desarmonia à estrutura da física pré-relativística clássica, uma vez que ambas teorias foram formuladas sobre conceitos que são contraditos na outra teoria! A MQ é formulada utilizando uma variável temporal externa (o t que aparece na equação de Schrodinger) ou ainda como um espaço-tempo de *background* fixo (o espaço-tempo definido na teoria quântica de campos), e ambos os conceitos são incompatíveis com a RG. Por sua vez, a RG é formulada em termos da geometria Riemanniana aonde a métrica é um campo dinâmico determinístico. Ora, mas na MQ todos os campos dinâmicos são quantizados, isto é, em escalas pequenas temos *quantas* discretos regidos por leis probabilísticas.

Sendo assim, é de se esperar que em escalas pequenas exista um *quantum* de espaço e um *quantum* de tempo, superposição de espaços, etc. uma vez que tenhamos uma gravitação quântica [7], [8], [9], [10], [11]. Formular esta teoria que combina a MQ e a RG é um dos maiores desafios da física fundamental atualmente. O objetivo deste trabalho de dissertação é construir uma teoria de calibre topológica tipo Yang-Mills (YM) [12], [13] conhecida como modelo BF [7], [14], [15] em 2+1 dimensões e desenvolver para este modelo o método de quantização canônica culminando na aplicação das técnicas de quantização

de laços, discutir brevemente a estrutura da teoria quântica obtida por este processo bem como sua dinâmica e estudar alguns operadores e observáveis dos nossos estados quânticos, e finalmente, mostrar que todos estes resultados para o modelo BF em 2+1 dimensões podem ser generalizados para a teoria da gravitação tridimensional – que de fato pode ser expressa como um modelo BF particular.

No capítulo 2 veremos as bases para a formulação e construção do modelo BF, cuja principal característica é ser uma teoria de calibre topológica, por consequência independente de *background*, isto é, uma teoria independente de métrica. O modelo BF também possui outras propriedades interessantes por ser uma teoria de calibre (*gauge theory*), como invariância sobre transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos ativos) e invariância sobre transformações de calibre locais sobre o grupo de representações indicado (enfocaremos o grupo $SU(2)$), que no caso de uma teoria tipo YM é um grupo não-abeliano.

No capítulo 3 está uma das principais contribuições deste trabalho que é o desenvolvimento do método de quantização canônica para o modelo BF em 2+1 dimensões, método que foi proposto por Dirac [16], [17] para resolver sistemas cuja transformada de Legendre não é trivial, por existirem relações entre as coordenadas e os momentos generalizados chamadas de vínculos. Historicamente o método foi desenvolvido para que se pudesse quantizar pelo método hamiltoniano a teoria eletrodinâmica, que é uma teoria de calibre com o grupo de representação $U(1)$. A partir dos resultados da quantização canônica obtemos as grandezas clássicas (variáveis dinâmicas, vínculos e multiplicadores de Lagrange) que posteriormente se transformam em operadores ou parâmetros de evolução de calibre. Com o método de quantização de laços introduzido no capítulo 4 podemos descrever um espaço de Hilbert cinemático para estes operadores derivado do espaço de configurações clássico e descrever os estados quânticos no formalismo das redes de *spin*. [18], [19], [20], [21]

No capítulo 5, fica clara a razão para a escolha de trabalhar com o modelo BF de 2+1 dimensões com grupo de representação $SU(2)$, que é devido à semelhança que o modelo BF escrito nestes parâmetros têm com a teoria da Gravitação descrita pela Relatividade Geral em 3 dimensões expressa pelo formalismo ADM. [22], [23] De fato, mostramos que

nestas condições as duas teorias são isomórficas, logo todos estes resultados obtidos nos capítulos anteriores podem ser generalizados para a teoria da Gravitação 3D – pelo menos na sua versão Euclidiana. Seguimos com uma breve revisão de RG analisando a ação de Palatini-Holst, que nada mais é do que a ação de Einstein-Hilbert escrita como uma equação de primeira ordem devido à uma mudança de base nas variáveis dinâmicas.

Esta revisão é uma introdução para uma discussão sobre as simetrias que prevalecem na teoria quântica, isto é, a implementação dos vínculos canônicos na teoria quântica, e como estas simetrias afetam a estrutura das nossas teorias de calibre quantizadas é um dos assuntos abordados no capítulo 6, assim como outra grande contribuição deste trabalho, que é a discussão de casos aonde temos observáveis [24] e transição entre estados de rede de *spin*, dinâmica estudada pelo formalismo dos *spin foams*. [7], [18], [25], [26] Vale a pena ressaltar que esta dinâmica em uma teoria de calibre topológica nada mais é do que a soma das histórias de uma transição de amplitude de estados e que a implementação completa dos vínculos é uma tarefa árdua e ainda não concluída em 3+1 dimensões!

Capítulo 2

O Modelo BF

O modelo BF é uma teoria de campos topológica que quando quantizada se torna uma teoria quântica de campos topológica. Na sigla BF, como vamos ver adiante, B e F são as variáveis que aparecem na ação da teoria. O modelo BF é o que conhecemos como *toy model*, ou modelo de brinquedo, devido ao fato de ser uma teoria construída apenas para estudar a aplicação da quantização de laços em uma teoria de campos topológica.

Contudo, o modelo BF tridimensional possui uma semelhança notável com a teoria da relatividade geral tridimensional formulada via o formalismo de primeira ordem, e no decorrer do trabalho vamos ver que a menos do grupo de calibre (que é $SU(2)$ para o modelo BF e $SO(1, 2)$ para a RG) estas duas teorias são análogas.

Nota: O leitor que não está familiarizado com as notações, conceitos e propriedades da geometria diferencial é convidado a visitar o Apêndice A antes de prosseguir!

2.1 Definições e Convenções

2.1.1 Índices

É conveniente adotar uma notação para os índices que aparecem nas variáveis, campos e formas ao longo do texto. Considerando que $\dim(D) = 2 + 1$:

- Os índices gregos (μ, ν, ρ, \dots) assumem valores $(0, 1, 2)$ ou $(t, 1, 2)$;
- Os índices latinos minúsculos (a, b, \dots) assumem valores $(1, 2)$;
- Os índices latinos maiúsculos (I, J, K, \dots) são índices de grupo e os valores que estes assumem dependem do grupo de calibre G em questão. (Por exemplo, $G = SU(2) \rightarrow (1, 2, 3)$)

2.1.2 A Derivada Covariante

O modelo BF também é uma teoria topológica, então possui invariância de calibre local. Isto é, dado um campo $\psi(\vec{x}) \in G$, onde os valores de $\psi(\vec{x})$ são elementos do grupo:

$$\psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x})g(\vec{x}) \quad (2.1)$$

Também queremos que a derivada deste campo se transforme da mesma maneira que o campo, o que nos leva a definição de derivada covariante:

$$\partial_\mu \psi'(\vec{x}) = \partial_\mu \psi(\vec{x})g(\vec{x}) + \psi(\vec{x})\partial_\mu g(\vec{x}) \quad (2.2)$$

Para calcularmos a derivada covariante levamos em consideração um grupo de Lie não-abeliano (faremos o cálculo para $G = SU(2)$). Então, consideramos o caso de um campo

$\psi \in SU(2)$, e queremos $(D_\mu \psi(\vec{x}))' = D_\mu \psi(\vec{x})g(\vec{x})$ então fazemos um Ansatz:

$$\begin{cases} D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \psi A_\mu \\ A'_\mu = g^{-1} \partial_\mu g + g^{-1} A_\mu g \end{cases} \quad (2.3)$$

E verificamos que com esta solução $(D_\mu \psi)'$ se transforma de maneira covariante:

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi)' &= \partial_\mu \psi g + \psi \partial_\mu g - \psi g (g^{-1} \partial_\mu g + g^{-1} A_\mu g) \\ &= \partial_\mu \psi g + \psi \partial_\mu g - \psi \partial_\mu g - \psi A_\mu g \\ &= (\partial_\mu \psi - \psi A_\mu) g = (D_\mu \psi) g \end{aligned} \quad (2.4)$$

Então, tomamos g infinitesimal para determinar a transformação infinitesimal de A_μ :

$$\begin{aligned} g &\approx 1 + \omega \\ g^\dagger = g^{-1} &\approx 1 - \omega \\ A'_\mu &= (1 - \omega) \partial_\mu \omega + (1 - \omega) A_\mu (1 + \omega) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Escrevendo os termos lineares em ω :

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu \omega + [A_\mu, \omega] \\ \delta A_\mu &= \partial_\mu \omega + [A_\mu, \omega] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Com este resultado e a álgebra dos geradores de $SU(2)$ descritos na equação (A.9), já temos o necessário para definir nossa derivada covariante e escrevemos novamente a equação (2.6) passando da notação matricial para a notação em componentes¹:

$$\delta A_\mu^I T_I = \partial_\mu \omega^I T_I + [A_\mu^J T_J, \omega^K T_K] \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &= \partial_\mu \omega^I T_I + f_{JKI} T_I A_\mu^J \omega^K \\ \delta A_\mu^I &= \partial_\mu \omega^I + f_{JKI} A_\mu^J \omega^K \\ &= (\partial_\mu \delta^{IK} - f_{IKJ} A_\mu^J) \omega^K = (D_\mu \omega)^I \end{aligned} \quad (2.8)$$

¹Ver apêndice A para notações e definições.

Renomeando alguns índices livres, é fácil ver que:

$$\boxed{\delta A_\mu^I = (\delta^{IJ} \partial_\mu - f_{IJK} A_\mu^K) \omega^J \equiv D_\mu^{IJ} \omega^J = (D_\mu \omega)^I} \quad (2.9)$$

Chamamos D^{IJ} de matriz derivada covariante, ou só derivada covariante.

Da definição das formas diferenciais² podemos escrever nossos campos, operadores e tensores na representação adjunta, apenas multiplicando nossas equações pela direita com a forma dx^μ :

$$A'_\mu = g^{-1} \partial_\mu g + g^{-1} A_\mu g \mid dx^\mu \Rightarrow A' = g^{-1} dg + g^{-1} Ag \quad (2.10)$$

$$D_\mu \chi = \partial_\mu \chi + A_\mu \chi \mid dx^\mu \Rightarrow D\chi = d\chi + A\chi \quad (2.11)$$

Sobre um campo $\chi \in G$ na representação adjunta. Pode-se que mostrar que, se $\chi' = g^{-1} \chi$, então:

$$(D\chi)' = g^{-1} D\chi \quad (2.12)$$

Isto é, nossa derivada exterior é covariante. Note que a lei de transformação utilizada para χ' é diferente da utilizada para ψ' (equação 2.1). Pode-se mostrar que as duas leis de transformações são equivalentes para a mesma lei de transformação de A .

Agora vamos calcular a derivada covariante de um tensor X arbitrário que está na representação adjunta, então seja X uma p-forma cuja derivada exterior se escreve como:

$$DX = dX + [A, X] \quad (2.13)$$

Então queremos verificar que se $X' = g^{-1} X g$ então:

$$(DX)' = g^{-1} DX g \quad (2.14)$$

Verificação:

$$(DX)' = d(g^{-1} X g) + [g^{-1} dg + g^{-1} Ag, g^{-1} X g] \quad (2.15)$$

²Ver apêndice A.

Precisamos conhecer dg^{-1} . Note que usamos $g^{-1}g = 1$:

$$\begin{aligned} d(g^{-1}g) = 0 &= dg^{-1}g + g^{-1}dg |g^{-1} \\ dg^{-1} &= -g^{-1}dgg^{-1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Daí:

$$\begin{aligned} (DX)' &= d(g^{-1}Xg) + [g^{-1}dg + g^{-1}Ag, g^{-1}Xg] \\ &= dg^{-1}Xg + g^{-1}dXg + g^{-1}Xdg + g^{-1}dgg^{-1}Xg - g^{-1}Xgg^{-1}dg \\ &\quad + g^{-1}Agg^{-1}Xg - g^{-1}Xgg^{-1}Ag \\ &= g^{-1}(dX + [A, X])g = g^{-1}DXg \end{aligned} \quad (2.17)$$

Se X está na representação adjunta, também DX está na representação adjunta.

2.1.3 A curvatura de Yang-Mills F

Definimos também a curvatura de Yang-Mills:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.18)$$

$$F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + f_{IJK} A_\mu^J A_\nu^K \quad (2.19)$$

Podemos escrever a curvatura na notação de forma diferencial tomando o tensor $F_{\mu\nu}$ de *rank* 2 e o multiplicando por uma 2-forma, e utilizamos a antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \Big| \left(\frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{1}{2} [A_\mu, A_\nu] dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$F = \partial_\mu A_\nu dx^\mu dx^\nu + A_\mu A_\nu dx^\mu dx^\nu$$

$$F = dA + A^2 \quad (2.21)$$

Não é difícil mostrar que a atuação do grupo sobre F é a adjunta: $F' = g^{-1}Fg$. Comparando (2.11) com (2.21), fica evidente que a curvatura F pode ser chamada de derivada da conexão A .

Uma relação importante entre as derivadas covariantes e a curvatura de YM pode ser obtida considerando um campo X na representação adjunta $X' = g^{-1}Xg$, quando conveniente e que temos um comutador graduado para as formas diferenciais (vide apêndice A.4.2):

$$D^2X = (d + A)(d + A)X \quad (2.22)$$

$$= d(dX + [A, X]) + [A, dX] + [A, [A, X]]$$

$$= [dA, X] + [A^2, X] = [F, X] \quad (2.23)$$

Este resultado pode ser escrito como:

$$[D_\mu, D_\nu]X = [F_{\mu\nu}, X] \quad (2.24)$$

Essa relação (2.24) entre o comutador das derivadas covariantes e a curvatura tem um análogo na Relatividade Geral, onde F é a curvatura de Riemann. Uma consequência importante desta relação no modelo BF, observado que neste caso uma das equações de movimento é $F = 0$, é que as derivadas covariantes comutam – se as equações de movimento estão satisfeitas.

2.1.4 A derivada de um tensor e as identidades de Bianchi

Como F é adjunto, também deve ser DF . Mas vamos ver que DF é de fato nulo. Com efeito:

$$DF = d(dA + A^2) + [A, dA + A^2] \quad (2.25)$$

Usando a regra de Leibniz generalizada para calcular o termo dA^2 :

$$dA^2 = d(A \wedge A) = dA \wedge A - A \wedge dA = [dA, A] \quad (2.26)$$

$$DF = [dA, A] + [A, dA] + AA^2 - A^2A$$

$$DF = 0 \quad (2.27)$$

Esta equação (2.27) é chamada de Identidade de Bianchi, e aparece também na Relatividade Geral.

2.2 Construindo o modelo BF

Para começarmos a construção do modelo BF (considerando *a priori* o caso D dimensional), temos que definir os objetos presentes na teoria.

Então temos:

- Uma 1-forma conexão (do espaço dual $T_P^*\mathcal{M}$) A_μ^I não-abeliana, onde $(\mu = 0, \dots, D-1)$;
- Uma $(D-2)$ -forma campo (do espaço dual $T_P^*\mathcal{M}$) $B_{\mu_1 \dots \mu_{D-2}}^I$ (antissimétrico);
- Um grupo de calibre G , G sendo um grupo de Lie.

Não definimos nenhuma métrica pois o modelo BF é independente do *background*, portanto independente de métrica. E também introduzimos a curvatura de Yang-Mills (2.18), que é o nosso “ F ” da sigla “BF”, como veremos mais adiante.

2.2.1 O campo B e a invariância sobre difeomorfismos

O “ F ” do modelo BF já foi introduzido na seção anterior, então vamos introduzir agora o campo “ B ”. A idéia do modelo BF é termos uma teoria de curvatura nula, isto é, $F = 0$.

Ao mesmo tempo, F tem que estar representado na ação e esta tem que ser consistente com o princípio variacional e gerar uma densidade lagrangiana consistente afim de realizarmos o método de quantização canônica de Dirac. Como precisamos construir uma integral invariante sob difeomorfismos, precisamos que o integrando seja uma D-forma então, na ação deve-se introduzir um termo multiplicador de Lagrange (D-2)-forma sobre F que também possa ser definido no espaço tangente dual $T_P^*(\mathcal{M})$, para a princípio garantir estas condições de invariância e consistência.

2.2.2 A invariância de calibre

Queremos também que nossa ação seja invariante de calibre, então temos que buscar um B na representação adjunta onde o produto $B \wedge F$ seja invariante de calibre. Seja $X = g^{-1}Xg$ e $Y = g^{-1}Yg$ D-formas adjuntas, então pelas propriedades do traço:

$$\text{Tr}(X'Y') = g^{-1}Xgg^{-1}Yg = g^{-1}XYg = \text{Tr}(XY) \quad (2.28)$$

Então $\text{Tr}(XY)$ é um invariante de calibre. Se B é uma forma se transformando na representação adjunta como $B = g^{-1}Bg$, então a ação S_{BF} pode ser escrita como invariante de difeomorfismos e também invariante de calibre da seguinte maneira:

$$\boxed{S_{BF} = \text{Tr} \int_{\mathcal{M}_D} B \wedge F(A)} \quad (2.29)$$

Agora vamos escrever B em termos de componentes $B = B^I T_I$ utilizando as propriedades

que definimos de (A.1) a (A.5) para o grupo $SU(2)$:

$$\begin{aligned}
B' &= (1 - \omega)B(1 + \omega) = B - [\omega, B] \\
\delta B &= -[\omega, B] \\
(\delta B^I)T_I &= -\omega^J B^K [T_J, T_K] = -\omega^J B^K f_{JK}^I T_I \\
\delta B^I &= -\omega^J B^K f_{JK}^I \equiv \omega^J \delta_J B^I \\
\delta_J B^I &= -B^K f_{JK}^I
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\delta_J B^I = -B^K f_{JK}^I \tag{2.31}$$

E B escrito em componentes é:

$$B = \frac{1}{(D-2)!} B^I_{\mu_1 \dots \mu_{D-2}} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{D-2}} \tag{2.32}$$

2.3 As invariâncias de calibre das variáveis dinâmicas

Vimos na seção anterior que podemos tomar uma ação (2.29) tal que esta seja invariante de calibre e invariante de difeomorfismos:

$$\delta_{\text{gauge}} \text{Tr} \left(\int_{\mathcal{M}} BF \right) = 0 \tag{2.33}$$

$$\delta_{\text{dif}} \text{Tr} \left(\int_{\mathcal{M}} BF \right) = 0 \tag{2.34}$$

Escrevendo a ação na forma de coordenadas, vale lembrar que:

$$\text{Tr}(BF) = B^I F^J \overbrace{\text{Tr}(T_I T_J)}^{-\frac{1}{2} \delta_{IJ}} = -\frac{1}{2} B^I F^I \tag{2.35}$$

Então:

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}} B^I F^I = -2 \text{Tr} \int_{\mathcal{M}} BF \tag{2.36}$$

Agora vamos escrever todas as invariâncias de calibre do nosso sistema, isto é, as transformações sobre os campos que levam à invariâncias do modelo BF.

2.3.1 As simetrias de calibre

O primeiro conjunto de transformações que deixa a ação invariante já é conhecido, são as transformações do tipo Yang-Mills:

$$\begin{cases} \delta A = d\omega + [A, \omega] \\ \delta B = [B, \omega] \end{cases} \quad (2.37)$$

O segundo conjunto de transformações vêm da identidade de Bianchi $DF = 0$:

$$\begin{cases} \delta A = 0 \\ \delta B = D\eta = d\eta + [A, \eta] \end{cases} \quad (2.38)$$

Repare que se B é uma (D-2)-forma, η vai ser uma (D-3)-forma, isto é, têm a paridade oposta à de B . Temos que ter cuidado com o comutador generalizado $[A, \eta]$ nesta situação, pois este é um comutador graduado. Deste segundo conjunto de transformações, se $\delta F = 0$ então:

$$\delta \text{Tr} \int BF = \text{Tr} \int \delta BF = \text{Tr} \int D\eta F = (-1)^{D-2} \text{Tr} \int \eta DF + \overbrace{\text{Tr} \int d(\eta F)}^{=0} \quad (2.39)$$

Onde aplicamos a regra de integração por partes que está mostrada no apêndice A.4.3.

Nossa teoria possui outras invariâncias além das já mostradas, como a invariância por difeomorfismos, isto é, sob as transformações:

$$\begin{cases} \delta A = \mathcal{L}_\xi A \\ \delta B = \mathcal{L}_\xi B \end{cases} \quad (2.40)$$

Que é óbvia, mas é interessante ver que ela é consequência das duas invariâncias de calibre definidas acima. No capítulo seguinte discutiremos melhor estas transformações.

2.3.2 As equações de movimento do modelo BF

Vamos agora analisar as equações de movimento da teoria, deduzidas da estacionariedade da ação sob variações arbitrárias δA e δB . Uma variação δB arbitrária gera a equação:

$$\begin{aligned} \delta S = -2 \operatorname{Tr} \int \delta B F &= 0 \quad \forall \delta B \quad \therefore \\ F &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

E para uma variação δA arbitrária:

$$\begin{aligned} \delta F = \delta(dA + A^2) &= d\delta A + \delta A A + A \delta A \\ &= d\delta A + [A, \delta A] = D\delta A \end{aligned} \quad (2.42)$$

Utilizando a regra de integração por partes encontramos:

$$\begin{aligned} \delta S = -2 \operatorname{Tr} \int BD\delta A = 2 \operatorname{Tr} \int DB\delta A &= 0 \quad \forall \delta A \quad \therefore \\ DB &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Vamos estudar primeiramente a equação de movimento (2.41). Tomamos um ansatz para a solução desta equação como sendo uma conexão do tipo “puro *gauge*” $A = e^{-\phi} de^{\phi}$, onde ϕ é uma 0-forma tal que $e^{\phi} = h$ e $e^{-\phi} \in G$, que podemos verificar:

$$dA = dh^{-1}dh = -h^{-1}dhh^{-1}dh = -A^2 \quad \therefore \quad F = 0$$

Mas $A = e^{-\phi} de^{\phi}$ não é solução geral, da mesma forma que para $F = dA \rightarrow A = d\phi$ também não vale em espaços não-triviais, como um toróide. Contudo, o lema de Poincaré não-abeliano diz que localmente (em um aberto $U \subset \mathcal{M}$) vai existir um $h(x) \in G$ tal que $A = h^{-1}dh$. Isto significa que a solução A é, localmente, a transformada de calibre da

conexão nula. Com efeito, fazendo uma transformação de calibre com $g = h^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 A' &= g^{-1}dg + g^{-1}Ag \\
 &= hdh^{-1} + hAh^{-1} = hdh^{-1} + hh^{-1}dhh^{-1} \\
 &= hh^{-1}dhh^{-1} + dhh^{-1} = 0
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Estudando a equação de movimento (2.43), que com $A = 0$ se escreve $dB = 0$, e considerando que uma forma fechada é localmente uma forma exata, então segue que:

$$B = d\hat{B} = D\hat{B} \tag{2.45}$$

Isto nada mais é do que a transformação de calibre de tipo (2.38), com $\eta = \hat{B}$, do campo $B = 0$. Esta discussão mostra que, localmente, a solução das equações de movimento é dada pela solução trivial $A = B = 0$ a menos das transformações de calibre.

Vamos voltar a discutir as equações de movimento após formularmos o Hamiltoniano da teoria. Para tal, precisamos desenvolver um método para a partir da ação do modelo BF sermos capazes de escrever a Lagrangiana e convertê-la para uma Hamiltoniana, e aí sim estudar estas equações “de movimento” no espaço de fase apropriado. Este método será discutido no capítulo 3.

Capítulo 3

Quantização Canônica

A quantização canônica é uma das várias maneiras na física de se quantizar uma teoria clássica. A palavra canônica se refere à estrutura clássica que é preservada na teoria quântica, que chamamos de estrutura simplética. Historicamente, a quantização canônica foi o método utilizado por Dirac (que o denomina de método hamiltoniano) para se construir pela primeira vez a formulação de Mecânica Quântica mais conhecida e utilizada hoje, mostrando que a MQ das funções de onda de Schrödinger é a mesma MQ das matrizes de Heisenberg. Os passos desta construção para os campos de Schrödinger estão no Apêndice B.1 e são uma boa introdução à quantização canônica.

3.1 Visão geral

Antes de tratar o caso da quantização canônica do modelo BF em 2+1 dimensões vamos enumerar brevemente os passos do método para um sistema mecânico com um número finito de coordenadas. A generalização para infinitas coordenadas é trivial e será tratada no caso do modelo BF.

3.1.1 O formalismo lagrangiano

Seja um sistema físico com coordenadas generalizadas q^i onde $i = 1, \dots, d$. Primeiramente, vamos escrever uma lagrangiana $L(q, \dot{q})$, integrante de uma ação S , e a partir do princípio variacional encontramos as equações de movimento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_n} \quad (3.1)$$

Vamos definir os momentos conjugados às coordenadas generalizadas q^i como sendo:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (3.2)$$

Se estes momentos são tais que podem ser resolvidos para as velocidades generalizadas \dot{q}^i como funções de q^i e P_i , a transformada de Legendre é inversível e a hamiltoniana é obtida de forma trivial:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q, P) \quad (3.3)$$

$$H(q, P) = [P_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q})]_{\dot{q}=\dot{q}(q, P)} \quad (3.4)$$

3.1.2 A notação simplética

Utilizamos o formalismo dos Colchetes de Poisson para expressar as equações do nosso sistemas nas variáveis q^i, P_i de forma mais sucinta e algebricamente vantajosa para a quantização:

$$\{F(q, P), G(q, P)\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \quad (3.5)$$

E os colchetes entre as coordenadas generalizadas e os momentos são:

$$\{q^i, q^j\} = 0 \quad ; \quad \{P_i, P_j\} = 0 \quad ; \quad \{q^k, P_p\} = \frac{\partial q^k}{\partial q^i} \frac{\partial P_p}{\partial P_i} = \delta_i^k \delta_p^i = \delta_p^k \quad (3.6)$$

3.1.3 Sistemas vinculados

Uma vez que temos a lagrangiana e os momentos conjugados, tentamos definir $H(q, P)$ e as equações de movimento de Hamilton fazendo uma transformada de Legendre, o que nem sempre funciona em sistemas que são vinculados (caso onde as equações (3.2) não podem ser resolvidos para as velocidades $\dot{q}^i(q^i, P_i)$), como é o caso do modelo BF, onde temos que analisar os vínculos, que chamamos de funções $\phi_m(q, P)$, antes de escrever $H(q, P)$. Veremos que verificar a estabilidade dos vínculos e garantir que a hamiltoniana seja bem definida não é uma tarefa trivial para o modelo BF (e para teorias de calibre em geral). Este procedimento é conhecido como algoritmo de Dirac-Bergmann.

3.1.4 O algoritmo de Dirac-Bergmann

Primeiro, vamos escrever a hamiltoniana adicionada de uma combinação linear de ϕ 's, o que determina unicamente a hamiltoniana numa teoria vinculada. Escrevemos então H_c :

$$H_c = P_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}) + u_m \phi_m \quad (3.7)$$

Onde os coeficientes u_m são multiplicadores de Lagrange. As equações de movimento de Hamilton valem também para sistemas vinculados e utilizamos o formalismo dos colchetes de Poisson para escrevê-las. Seja uma função $F(q, P)$ qualquer (neste trabalho consideramos que $F(q, P)$ não tem dependência explícita em t):

$$\dot{F}(q, P) = \{F, H_c\} \quad (3.8)$$

Então, começamos o Algoritmo de Dirac-Bergmann verificando as condições de consistência dos vínculos, tomando a equação (3.8) e trocando F por cada um dos ϕ 's, que chamamos de vínculos primários. Um vínculo é dito consistente ou estável quando este não evolui no tempo, isto é, colocando $\dot{F} = 0$ e $F = \phi_m$, temos *a priori* que fazer m

verificações:

$$\{\phi_m, H\} + u_{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0 \quad (3.9)$$

Aonde o símbolo \approx representa a igualdade fraca, o que significa que os vínculos são considerados como valores não-nulos durante o processo de quantização canônica mas que serão tomados nulos quando resolvidos no final. É possível que estas verificações levem a uma inconsistência, como achar um resultado do tipo $1 = 0$. Se isto acontecer, significa que nossa lagrangiana é tal que as equações de movimento de Euler-Lagrange são inconsistentes, o que possivelmente significa um erro ao construir a ação da teoria e que a lagrangiana não pode ser arbitrária. Nesta situação, as equações (3.9) podem ser divididas em 3 tipos:

1. O primeiro tipo de equações (3.9) se reduz a $0 = 0$, isto é, é identicamente satisfeito com a ajuda dos vínculos primários;
2. O segundo tipo de equações (3.9) se reduz a uma equação independente dos u 's envolvendo apenas os q 's e P 's, isto é, uma equação da forma $\chi(q, P) = 0$. Estas equações devem ser independentes dos vínculos primários para não se reduzirem a equações do primeiro tipo.

Chamamos estas equações de vínculos secundários, que só se diferem dos vínculos primários na maneira de como chegamos até eles, pois os vínculos primários são obtidos da definição dos momentos (3.2) e os vínculos secundários só aparecem quando utilizamos as equações de movimento (3.8). Os vínculos secundários geram outras condições de consistência para a teoria (estes também devem ser estáveis) e também devem ser verificados pelo algoritmo, isto é, devem ser tratados em pé de igualdade com os vínculos primários, podendo inclusive gerar mais outros vínculos secundários.

3. O terceiro tipo de equações (3.9) não devem se reduzir em nenhuma das duas maneiras postas anteriormente, isto é, gera uma equação que impõe uma condição sobre os u 's.

Uma vez que esgotamos nossas verificações e todos os vínculos primários e secundários são consistentes, o algoritmo encerra e como resultado obtemos tantos vínculos secundários $\chi(q, P)$ e outros tantos coeficientes u e podemos escrever a hamiltoniana total, levando em consideração estes resultados.

3.1.5 O princípio da correspondência

Por fim, uma vez que temos nossa hamiltoniana resolvida podemos aplicar sobre a equação (3.8) o princípio da correspondência da MQ, que afirma que o comportamento de sistemas descritos pela mecânica quântica reproduzem o comportamento de sistemas clássicos no limite de números quânticos muito grandes. Uma vez aplicado o princípio da correspondência concluímos o método de quantização canônica e temos o seguinte quadro:

- Todas as coordenadas generalizadas q^i , momentos P_i e funções $F(q, P)$ são agora operadores \hat{q} , \hat{P} , \hat{F} num certo espaço de Hilbert;
- Podemos substituir o colchete de Poisson $\{X, Y\}$ pelo comutador $[\hat{X}, \hat{Y}] = i\hbar[\widehat{X}, \widehat{Y}]$. Em particular $[\hat{q}^i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_j^i$;
- Podemos construir um espaço de Hilbert contendo uma representação da álgebra dos operadores \hat{q}^i, \hat{P}_i .

Sendo assim, a equação (3.8) se torna a equação de Heisenberg, que descreve a evolução de um operador no tempo:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}] \quad (3.10)$$

Sobre a qual pode ser deduzido o teorema de Ehrenfest, que é o análogo quântico da segunda lei de Newton uma vez que tomamos os valores esperados dos operadores relacionados.

3.2 O formalismo lagrangiano do Modelo BF

Na seção passada definimos os passos para a quantização canônica para um sistema mecânico de coordenadas finitas e agora vamos aplicá-los sobre o nosso modelo BF. Note que por não termos definido nenhuma métrica, não temos nenhuma receita para manipular os índices de “espaço” e de grupo (que são índices discretos e finitos) e as coordenadas da variedade (índices contínuos (\vec{x})), exceto pelas relações canônicas destas variáveis que serão definidas adiante.

Então seja a ação S_{BF} dada pela equação (2.29):

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}} B^I F^I &= \int_{\mathcal{M}} d^D x \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \frac{D!}{(D-2)!} B_{\mu_1 \dots \mu_{D-2}} \frac{1}{2} F_{\mu_{D-1} \mu_D} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \underbrace{\int_{\mathcal{M}_{D-1}} d^{D-1} x \mathcal{L}(t, x)}_L \end{aligned} \quad (3.11)$$

Onde as coordenadas generalizadas no caso do modelo BF são:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow A, B \\ \dot{q} &\rightarrow \partial_t A, \partial_t B \end{aligned}$$

As equações de Euler-Lagrange são dadas por (2.41) e (2.43). Vamos escrever a ação em $2 + 1$ dimensões:

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \varepsilon^{\mu\nu\rho} d^3 x [B_\mu^I \underbrace{(\partial_\nu A_\rho^I - \partial_\rho A_\nu^I + f_{IJK} A_\nu^J A_\rho^K)}_{F_{\nu\rho}^I}] \quad (3.12)$$

Quando definimos a lagrangiana estamos gerando sobre o espaço uma restrição topológica, que é a hipótese de existência de uma dimensão temporal e calculamos a lagrangiana sobre as demais dimensões. *A priori*, na nossa teoria de calibre topológica não há nenhuma dimensão privilegiada mas introduzimos o conceito de tempo para realizarmos o método de quantização canônica. Esperamos poder recuperar na teoria já quantizada esta liberdade

de calibre para a dimensão temporal. Em suma, restringimos nossa variedade a ser uma foliação:

$$\mathcal{M}_D = \mathbb{R} \times \Sigma \quad (3.13)$$

$$\mathbb{R} : -\infty < t < \infty \quad (3.14)$$

$$x^a \in \Sigma \quad (3.15)$$

Aonde $a = 1, 2$ e \mathbb{R} é uma dimensão não-compacta, então t é uma direção privilegiada. O “espaço” Σ é uma variedade de dimensão 2. Todas as folhas Σ_t (Fig. 3.1) possuem a topologia de Σ .

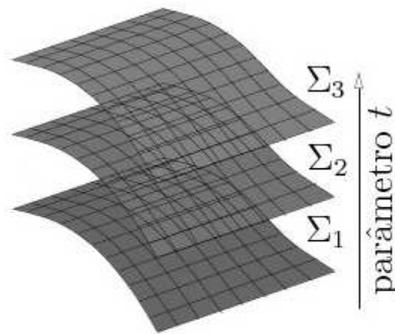


Figura 3.1: Foliação de uma variedade $\mathcal{M} = \mathbb{R} \otimes \Sigma$ que mostra a decomposição da variedade em várias “folhas” Σ_t

Assim, a “evolução temporal” preserva a topologia do espaço, de forma que possamos montar nossa estrutura canônica independente do valor de t . Sendo assim, separamos a ação em partes temporal e espacial, onde usamos $0 = t$ e $a, b = 1, 2$. Temos:

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [\varepsilon^{0ab} (B_t^I F_{ab}^I) + \varepsilon^{b0a} (B_b^I F_{ta}^I) + \varepsilon^{ab0} (B_a^I F_{bt}^I)]$$

Note que $\varepsilon^{0ab} = \varepsilon^{b0a} = \varepsilon^{ab0} = \varepsilon^{ab}$ então:

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [\varepsilon^{ab} (B_t^I F_{ab}^I) + \varepsilon^{ab} (B_b^I F_{ta}^I) + \varepsilon^{ab} (B_a^I F_{bt}^I)] \quad (3.16)$$

Note que os tensores ε^{ab} e F_{ab}^I são antissimétricos e o primeiro termo reescreve-se: $B_t^I (\varepsilon^{ab} F_{ab}^I) = B_t^I (\varepsilon^{12} F_{12} + \varepsilon^{21} F_{21}) = 2B_t^I F_{12}^I$ e o segundo termo pode se combinar com o terceiro, de

forma que S_{BF} fica:

$$S_{BF} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [B_t^I F_{12}^I + \varepsilon^{ab} (B_b^I F_{ta}^I)] \quad (3.17)$$

Escrevendo o tensor F_{ta}^I explicitamente e reagrupando os termos:

$$S_{BF} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [B_t^I F_{12}^I + \partial_t A_a^I \varepsilon^{ab} B_b^I - \varepsilon^{ab} B_b^I \partial_a A_t^I + \varepsilon^{ab} B_b^I f_{IJK} A_t^J A_a^K]$$

Utilizamos a definição de Derivada covariante (2.9) nos dois últimos termos da integral acima:

$$S_{BF} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [B_t^I F_{12}^I + \partial_t A_a^I \varepsilon^{ab} B_b^I - \varepsilon^{ab} B_b^I D_a^{IJ} A_t^J]$$

Fazemos uma integral por partes (A.79) no terceiro termo e a integral da ação S_{BF} é:

$$S_{BF} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [B_t^I F_{12}^I + \partial_t A_a^I \varepsilon^{ab} B_b^I + \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} B_b^J A_t^I] \quad (3.18)$$

E podemos escrever a Lagrangiana do nosso sistema simplesmente como:

$$L = \int_{\Sigma} d^2x [B_t^I F_{12}^I + \partial_t A_a^I \varepsilon^{ab} B_b^I + A_t^I \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} B_b^J] \quad (3.19)$$

3.3 O método hamiltoniano

3.3.1 Os vínculos primários

Então, começamos o método hamiltoniano convertendo esta lagrangiana para uma hamiltoniana. Para passar para o formalismo hamiltoniano introduzimos os momentos Π con-

jugados aos campos A_μ^I, B_μ^I , definidos por:

$$\begin{aligned}
{}^A\Pi_I^a(\vec{x}) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_a^I(\vec{x}))} = \varepsilon^{ab} B_b^I \\
{}^B\Pi_I^a(\vec{x}) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B_a^I(\vec{x}))} = 0 \\
{}^A\Pi_I^t(\vec{x}) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_t^I(\vec{x}))} = 0 \\
{}^B\Pi_I^t(\vec{x}) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B_t^I(\vec{x}))} = 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Cujos colchetes com as coordenadas generalizadas formam uma estrutura simplética:

$$\{A_\mu^I(\vec{x}), {}^A\Pi_J^\nu(\vec{y})\} = \delta_J^I \delta_\mu^\nu \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad \{B_\mu^I(\vec{x}), {}^B\Pi_J^\nu(\vec{y})\} = \delta_J^I \delta_\mu^\nu \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.21}$$

E todos os demais são nulos:

$$\{A_\mu^I(\vec{x}), A_\nu^J(\vec{y})\} = \{{}^A\Pi_I^\mu(\vec{x}), {}^A\Pi_J^\nu(\vec{y})\} = \{A_\mu^I(\vec{x}), B_\nu^J(\vec{y})\} = \dots = 0 \tag{3.22}$$

Este resultado é preocupante, pois quando consideramos $L(q, \dot{q})$, os momentos conjugados são independentes das velocidades \dot{q} e esperamos poder escrever as velocidades também como função dos momentos, o que não é possível aqui: temos então um sistema vinculado.

As equações (3.20) são vínculos, como definidos na seção 3.1.3:

$$\phi_{1I}^a \equiv {}^A\Pi_I^a - \varepsilon^{ab} B_b^I \approx 0 \tag{3.23}$$

$$\phi_{2I}^a \equiv {}^B\Pi_I^a \approx 0 \tag{3.24}$$

$$\phi_{3I} \equiv {}^A\Pi_I^t \approx 0 \tag{3.25}$$

$$\phi_{4I} \equiv {}^B\Pi_I^t \approx 0 \tag{3.26}$$

Que chamamos ϕ_m , para $m = 1, 2, 3, 4$, como sendo uma forma de agrupar as equações (3.23) a (3.26), as 4 famílias de vínculos ϕ .

3.3.2 A hamiltoniana canônica

Levando estes vínculos em consideração, podemos agora escrever a hamiltoniana como a integral $H = \int \mathcal{H}(\vec{x}) d^2x$ da densidade hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(\vec{x}) = {}^A\Pi_I^a \partial_t A_a^I - \mathcal{L} = -A_t^I \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} B_b^J - B_t^I F_{12}^I \quad (3.27)$$

Só que esta hamiltoniana não é unicamente determinada porque podemos adicionar qualquer combinação linear de ϕ 's, que são zero. Escrevemos então H_c :

$$H_c(\vec{x}) = \int_{\Sigma} d^2x' [\mathcal{H}(\vec{x}') + \lambda_{1a}^I(\vec{x}') \phi_{1I}^a(\vec{x}') + \lambda_{2a}^I(\vec{x}') \phi_{2I}^a(\vec{x}') + \lambda_3^I(\vec{x}') \phi_{3I}(\vec{x}') + \lambda_4^I(\vec{x}') \phi_{4I}(\vec{x}')] \quad (3.28)$$

Onde as funções arbitrárias $\lambda(x)$ são multiplicadores de Lagrange. Usando o formalismo dos colchetes de Poisson podemos escrever, conforme a equação (3.8), a derivada temporal de um funcional g das coordenadas generalizadas e momentos conjugados:

$$\dot{g} = \{g, H_c\} = [g, \int_{\Sigma} d^2y' (\mathcal{H} + \sum_{m=1}^4 \lambda_m \phi_m)] \quad (3.29)$$

3.4 A estabilidade dos vínculos

3.4.1 O algoritmo de Dirac-Bergmann aplicado ao modelo BF

Começamos o Algoritmo de Dirac-Bergmann verificando as condições de consistência dos vínculos, tomando a equação (3.29) e trocando g por cada um dos ϕ 's. Um vínculo é dito consistente ou estável quando este não evolui no tempo, isto é, colocando $\dot{g} = 0$ e $g = \phi_m$:

$$\int_{\Sigma} d^2y' \{ \phi_{mI}^{\mu}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}') \} + \int_{\Sigma} d^2x \lambda_{m'\mu}^I(\vec{y}') \{ \phi_{mI}^{\mu}(\vec{x}), \phi_{m'I}^{\mu}(\vec{y}') \} \approx 0 \quad (3.30)$$

Observe que devemos ter cuidado com a notação μ , pois $\mu = a$ para ϕ_1 e ϕ_2 e $\mu = t$ para

ϕ_3 e ϕ_4 , então temos *a priori* que fazer $m = 4$ verificações de estabilidade. Note que essas verificações envolvem o cálculo de todos os colchetes de Poisson ($m' = 1, 2, 3, 4$) entre os vínculos e faremos este exercício primeiro:

Para simplificar a notação: $\Lambda_{12} = \{\phi_{1I}^a(\vec{x}), \phi_{2J}^c(\vec{y})\}$, etc.

$$\begin{aligned}\Lambda_{12} &= \{^A\Pi_I^a(\vec{x}) - \varepsilon^{ab}B_b^I(\vec{x}), ^B\Pi_J^c(\vec{y})\} = -\varepsilon^{ac}\delta_J^I\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ \Lambda_{21} &= \{^B\Pi_J^c(\vec{y}), ^A\Pi_I^a(\vec{x}) - \varepsilon^{cd}B_d^J(\vec{y})\} = \varepsilon^{ca}\delta_I^J\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \Lambda_{12} \\ \Lambda_{13} &= \{^A\Pi_I^a(\vec{x}) - \varepsilon^{ab}B_b^I(\vec{x}), ^A\Pi_J^t(\vec{y})\} = 0 \\ \Lambda_{14} &= \{^A\Pi_I^a(\vec{x}) - \varepsilon^{ab}B_b^I(\vec{x}), ^B\Pi_J^t(\vec{y})\} = 0\end{aligned}\tag{3.31}$$

Segue diretamente da estrutura simplética que $\Lambda_{23} = 0$, $\Lambda_{24} = 0$ e $\Lambda_{34} = 0$.

Voltando a verificação da estabilidade dos vínculos, fazendo $\dot{\phi}_{1I}^a(\vec{x}) = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{1I}^a(\vec{x}) &= \int_{\Sigma} d^2y (\{\phi_{1I}^a(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y})\} + \lambda_{2c}^J(\vec{y})\{\phi_{1I}^a(\vec{x}), \phi_{2J}^c(\vec{y})\}) \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \{^A\Pi_I^a(\vec{x}) - \varepsilon^{ab}B_b^I(\vec{x}), -A_t^J(\vec{y})\varepsilon^{cd}(\delta^{JK}\partial_c^y B_d^K(\vec{y}) - f_{JKL}A_c^L(\vec{y})B_d^K(\vec{y})) \\ &\quad - \frac{B_t^J(\vec{y})}{2}\varepsilon^{cd}F_{cd}^J(\vec{y})\} + \int_{\Sigma} d^2y (-\lambda_{2c}^I(\vec{y})\varepsilon^{ac}\delta^2(\vec{x} - \vec{y})) \\ &= \int_{\Sigma} d^2y (A_t^J(\vec{y})\varepsilon^{ad}f_{IJK}B_d^K(\vec{y})\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + B_t^I(\vec{y})\varepsilon^{ca}\partial_c^y\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + \\ &\quad B_t^J(\vec{y})\varepsilon^{ca}f_{IJK}A_c^K(\vec{y})\delta^2(\vec{x} - \vec{y})) + \int_{\Sigma} d^2y (-\lambda_{2c}^I(\vec{y})\varepsilon^{ac}\delta^2(\vec{x} - \vec{y})) = 0\end{aligned}\tag{3.32}$$

Depois de uma integração por partes (A.79) no termo com a derivada parcial, reescrevemos a última equação como:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ac}\lambda_{2c}^I(\vec{x}) &= \varepsilon^{ad}f_{IJK}A_t^J(\vec{x})B_d^K(\vec{x}) - \varepsilon^{ca}\partial_c B_t^I(\vec{x}) + \varepsilon^{ca}f_{IJK}A_c^K(\vec{x})B_t^J(\vec{x}) \\ \lambda_{2c}^I(\vec{x}) &= f_{IJK}A_t^J(\vec{x})B_c^K(\vec{x}) + D_c^{IJ}B_t^J(\vec{x})\end{aligned}\tag{3.33}$$

Caímos no caso onde $\dot{\phi}_1 = 0$ determina λ_2 . O vínculo ϕ_1 é consistente.

Agora, fazendo $\dot{\phi}_{2I}^a(\vec{x}) = 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{2I}^a(\vec{x}) &= \int_{\Sigma} d^2y \{ \phi_{2I}^a(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} + \lambda_{1c}^J(\vec{y}) \{ \phi_{2I}^a(\vec{x}), \phi_{1J}^c(\vec{y}) \} \\
&= \int_{\Sigma} d^2y \{ {}^B\Pi_I^a(\vec{x}), -A_t^J \varepsilon^{cd}(\vec{y}) (\delta^{JK} \partial_c^y B_d^K(\vec{y}) - f_{JKL} A_c^L(\vec{y}) B_d^K(\vec{y})) \} + \\
&\quad \int_{\Sigma} d^2y (\lambda_{1c}^I(\vec{y}) \varepsilon^{ca} \delta^2(\vec{x} - \vec{y})) \\
&= \int_{\Sigma} d^2y (A_t^I(\vec{y}) \varepsilon^{ca} \partial_c^y \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) - A_t^J(\vec{y}) \varepsilon^{ca} f_{JIL} A_c^L(\vec{y}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y})) + \\
&\quad \int_{\Sigma} d^2y (\lambda_{1c}^I(\vec{y}) \varepsilon^{ca} \delta^2(\vec{x} - \vec{y})) = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\varepsilon^{ca} \lambda_{1c}^I(\vec{x}) = \varepsilon^{ca} \partial_c A_t^I(\vec{x}) - \varepsilon^{ca} f_{IJJL} A_c^L(\vec{x}) A_t^J(\vec{x}) = D_c^{IJ} A_t^J(\vec{x}) \tag{3.35}$$

Caímos no caso onde $\dot{\phi}_2 = 0$ determina λ_1 e o vínculo ϕ_2 é consistente. Agora estudaremos a consistência dos vínculos ϕ_3 e ϕ_4 .

Fazendo $\dot{\phi}_{3I}(\vec{x}) = 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{3I}(\vec{x}) &= \int_{\Sigma} d^2y \{ \phi_{3I}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} = \int_{\Sigma} d^2y \{ {}^A\Pi_I^t(\vec{x}), -A_t^J(\vec{y}) \varepsilon^{cd} D_c^{JK} B_d^K(\vec{y}) \} \\
&= \int_{\Sigma} d^2y \varepsilon^{cd} D_c^{IK} B_d^K(\vec{y}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \varepsilon^{cd} D_c^{IK} B_d^K(\vec{x}) = \varepsilon^{cd} (D_c B_d)^I(\vec{x})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Este resultado $\dot{\phi}_{3I} = \varepsilon^{cd} D_c^{IK} B_d^K$ gera um vínculo secundário:

$$\phi_{5I} \equiv \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} B_b^J \approx 0 \tag{3.37}$$

Fazendo $\dot{\phi}_{4I}(\vec{x}) = 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{4I}(\vec{x}) &= \int_{\Sigma} d^2y \{ \phi_{4I}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} = \int_{\Sigma} d^2y \{ {}^B\Pi_I^t(\vec{x}), -B_t^J(\vec{y}) F_{12}^J(\vec{y}) \} \\
&= \int_{\Sigma} d^2y (-F_{12}^J(\vec{y}) \{ {}^B\Pi_I^t(\vec{x}), B_t^J(\vec{y}) \}) = \int_{\Sigma} d^2y F_{12}^I(\vec{y}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= F_{12}^I(\vec{x})
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Este resultado $\dot{\phi}_{4I} = F_{12}^I$ também gera um vínculo secundário:

$$\phi_{6I} \equiv \frac{\varepsilon^{ab}}{2} F_{ab}^I \approx 0 \quad (3.39)$$

3.4.2 A estabilidade dos vínculos secundários

Alguns vínculos primários geram vínculos secundários, e estes ainda precisam ser estáveis para que seus geradores também o sejam. Logo, o algoritmo se estende aos vínculos secundários, então devemos fazer também a verificação da estabilidade dos vínculos ϕ_{5I} e ϕ_{6I} .

Fazendo $\dot{\phi}_{5I}(\vec{x}) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{5I}(\vec{x}) &= \int_{\Sigma} d^2y (\lambda_{1c}^L(\vec{y}) [\phi_{5I}(\vec{x}), \phi_{1L}^c(\vec{y})] + \lambda_{2c}^L(\vec{y}) [\phi_{5I}(\vec{x}), \phi_{2L}^c(\vec{y})]) \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \{ -\lambda_{1c}^L(\vec{y}) \varepsilon^{ab} f_{IJK} B_b^J(\vec{x}) \delta_a^c \delta_L^K \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + \varepsilon^{ab} \lambda_{2c}^L(\vec{y}) D_a^{IJ} \delta_b^c \delta_L^J \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \} \\ &= -\lambda_{1c}^K(\vec{x}) \varepsilon^{cb} f_{IJK} B_b^J(\vec{x}) - \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} \lambda_{2b}^J(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

De (3.33) e (3.35), podemos escrever (3.40) como:

$$\dot{\phi}_{5I} = -\varepsilon^{cb} D_c^{KL} A_t^L f_{IJK} B_b^J - \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} D_b^{JM} B_t^M - \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} B_b^N f_{JMNA_t^M} \quad (3.41)$$

Ao analisar os três termos acima, encontramos que cada um deles é fracamente nulo:

1. $-\varepsilon^{cb} f_{IJK} D_c^{KL} A_t^L B_b^J = (f_{IJL} A_t^L) \phi_{5J} \approx 0$
2. $-\varepsilon^{ab} D_a^{IJ} D_b^{JM} B_t^M = -\varepsilon^{ab} (D_a D_b B_t)^I = -(\{D_1, D_2\} B_t)^I = -\{F_{12}, B_t\}^I$
 $= -f^{IJM} \phi_{6J} B_t^M \approx 0$
3. $-\varepsilon^{ab} D_a^{IJ} B_b^N f_{JMNA_t^M} = \phi_{5N} (-f_{JMNA_t^M}) \approx 0$

No segundo termo utilizamos a relação (2.23). Então ϕ_{5I} , e conseqüentemente ϕ_{3I} são estáveis.

Finalmente, fazendo $\dot{\phi}_{6I}(\vec{x}) = 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{6I}(\vec{x}) &= \int_{\Sigma} d^2y \lambda_{1c}^L(\vec{y}) \{\phi_{6I}(\vec{x}), \phi_{1L}^c(\vec{y})\} \\
&= \varepsilon^{ac} \partial_a^x \int_{\Sigma} d^2y \lambda_{1c}^I(\vec{y}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + \varepsilon^{ac} f_{IJL} A_a^J \int_{\Sigma} d^2y \lambda_{1c}^L(\vec{y}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= \varepsilon^{ac} (\partial_a \lambda_{1c}^I - f_{IJK} A_a^K \lambda_{1c}^J)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

De (3.35), podemos escrever (3.42) como:

$$\varepsilon^{ac} (\delta_I^J \partial_a - f_{IJK} A_a^K) \lambda_{1c}^J = \varepsilon^{ac} D_a^{IJ} D_c^{JK} A_t^K = \{\phi_6, A_t\}^I \approx 0 \tag{3.43}$$

O que mostra que ϕ_{6I} e ϕ_{4I} são consistentes e nenhum vínculo secundário gera mais vínculos, então o algoritmo encerra.

Calculamos agora os colchetes de Poisson entre os vínculos restantes: Λ_{m5} , Λ_{m6} e Λ_{56} , com $m = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_{15}^{IJ} &= [\phi_{1I}^a, \phi_{5J}] = [{}^A\Pi_I^a - \varepsilon^{ab} B_b^I, \varepsilon^{cd} D_c^{JK} B_d^K] = [{}^A\Pi_I^a, \varepsilon^{cd} f_{JKL} A_c^L B_d^K] \\
\Lambda_{15}^{IJ} &= -\varepsilon^{ad} f_{IJK} B_d^K \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \Lambda_{51}^{IJ}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\Lambda_{25}^{IJ} = [\phi_{2I}^a, \phi_{5J}] = [{}^B\Pi_I^a, \varepsilon^{cd} D_c^{JK} B_d^K] = -\varepsilon^{ac} D_c^{xIJ} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \Lambda_{52}^{IJ} \tag{3.45}$$

Observe que $\Lambda_{35} = \Lambda_{45} = \Lambda_{56} = 0$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_{16}^{IJ} &= [\phi_{1I}^a, \phi_{6J}] = [{}^A\Pi_I^a - \varepsilon^{ab} B_b^I, F_{12}^J] = [{}^A\Pi_I^a, \frac{\varepsilon^{cd}}{2} (\partial_c A_d^J - \partial_d A_c^J + f_{JKL} A_c^K A_d^L)] \\
\Lambda_{16}^{IJ} &= -\varepsilon^{ac} (\delta_I^J \partial_c^x - f_{IJK} A_c^K) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = -\varepsilon^{ac} D_c^{IJ} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \Lambda_{61}^{IJ}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

E $\Lambda_{26} = \Lambda_{36} = \Lambda_{46} = 0$.

Resumo dos vínculos:

Vínculos Primários	Vínculos Secundários
$\phi_{1I}^a : {}^A\Pi_I^a \approx \varepsilon^{ab} B_b^I$	
$\phi_{2I}^a : {}^B\Pi_I^a \approx 0$	$\phi_{5I} : \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} B_b^J \approx 0$
$\phi_{3I} : {}^A\Pi_I^t \approx 0$	$\phi_{6I} : F_{12}^I \approx 0$
$\phi_{4I} : {}^B\Pi_I^t \approx 0$	

3.4.3 A Hamiltoniana total

Antes de escrever novamente a hamiltoniana, note que os vínculos ϕ_{3I} e ϕ_{4I} são vínculos que comutam fracamente com todos os outros¹, então uma vez definida a hamiltoniana nós tomamos as igualdades fortes ${}^A\Pi^t = 0$ e ${}^B\Pi^t = 0$, o que define A_t e B_t como funções arbitrárias. No caso do modelo BF conseguimos determinar explicitamente $\lambda_{1a}^I(\vec{x})$ (3.35) e $\lambda_{2a}^I(\vec{x})$ (3.33) e os demais λ são multiplicadores de Lagrange arbitrários. Com isto, a hamiltoniana total se escreve como:

$$H_T = \int_{\Sigma} d^2x - A_t^I \varepsilon^{ab} (D_a B_b)^I - B_t^I F_{12}^I + (D_a A_t)^I \phi_{1I}^a + (f_{IJK} A_t^J B_a^K + (D_a B_t)^I) \phi_{2I}^a \quad (3.47)$$

Note que os dois primeiros termos são os vínculos ϕ_{5I} e ϕ_{6I} da teoria, então esta expressão da hamiltoniana identifica os multiplicadores de lagrange λ_5^I e λ_6^I .

Com esta hamiltoniana podemos aplicar o princípio da correspondência sobre a teoria canônica. Na teoria quântica correspondente, onde A, B são operadores, os vínculos ϕ_m também são operadores que restringem o funcional de onda ψ , gerando condições do tipo:

$$\hat{\phi}_m \psi = 0, \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \hat{H} \psi = 0 \quad (3.48)$$

Só que quando temos alguns vínculos que não comutam entre si (chamados de segunda classe) aparecem alguns $\Lambda_{mn} \neq 0$, tais como (3.31), etc.

Se tomássemos estes colchetes como ponto de partida para a quantização, teríamos por

¹Também conhecidos como vínculos de primeira classe. Ver apêndice B.1.4.

exemplo:

$$[\hat{\phi}_{1I}^a(\vec{x}), \hat{\phi}_{2J}^c(\vec{y})] = -i\hbar\varepsilon^{ac}\delta_J^I\delta^2(\vec{x} - \vec{y})$$

Mas este comutador é inconsistente com $\hat{\phi}_1\psi = 0$ e $\hat{\phi}_2\psi = 0$, pois:

$$[\hat{\phi}_{1I}^a(\vec{x}), \hat{\phi}_{2J}^c(\vec{y})]\psi = -i\hbar\varepsilon^{ac}\delta_J^I\delta^2(\vec{x} - \vec{y})\psi \neq 0 \quad (3.49)$$

Neste caso não podemos construir uma teoria quântica a partir destes comutadores. Então seguimos o procedimento proposto por Dirac, de redefinirmos os colchetes de Poisson em colchetes de Dirac.

3.5 Colchetes de Dirac

Os colchetes de Dirac nada mais são que os colchetes de Poisson subtraídos dos graus de liberdade não-físicos de um sistema. Para definirmos o colchete de Dirac escrevemos os colchetes entre os vínculos como sendo elementos de uma matriz M_Λ , isto é, as linhas e colunas desta matriz são representadas pelos vínculos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6$:

$$M_\Lambda \approx \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^{ac}\delta_J^I\delta^2 & 0 & 0 & -\varepsilon^{ad}f_{IJK}B_d^K\delta^2 & -\varepsilon^{ac}D_c^{IJ}\delta^2 \\ -\varepsilon^{ac}\delta_J^I\delta^2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon^{ac}D_c^{IJ}\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon^{ad}f_{IJK}B_d^K\delta^2 & -\varepsilon^{ac}D_c^{IJ}\delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon^{ac}D_c^{IJ}\delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

A partir desta matriz podemos realizar uma troca de base dos vínculos com um procedimento de diagonalização em blocos, o que simplifica bastante a definição dos colchetes de Dirac, como veremos a seguir.

3.5.1 Troca de base dos vínculos

Podemos aproveitar a possibilidade de que os vínculos $\phi_j \approx 0$ possam ser substituídos por combinações lineares deles – o que constitui uma troca de base no espaço dos vínculos. Vamos escolher uma base de maneira que tenhamos quantos vínculos forem possíveis escritos como vínculos de primeira classe, isto é, escritos como vínculos que comutam fracamente com todos os outros. Os vínculos secundários \mathcal{G}_I e \mathcal{F}_I ($\mathcal{G}_I = \phi_5$ e $\mathcal{F}_I = \phi_6$) podem ser combinados com os vínculos χ_i ($\chi_1 = \phi_1$ e $\chi_2 = \phi_2$):

$$\begin{aligned}\mathcal{G}'_I &= \mathcal{G}_I + \tilde{a}_a^{IJ} \chi_J^a \\ \mathcal{F}'_I &= \mathcal{F}_I + \tilde{b}_a^{IJ} \chi_J^a\end{aligned}\tag{3.51}$$

Onde \tilde{a} e \tilde{b} são constantes. Podemos utilizar a notação matricial para calcularmos a combinação, primeiro dividimos M_Λ em blocos. Se $\psi = (\mathcal{G}, \mathcal{F})$ e $\chi = (\phi_1, \phi_2)$, simbolicamente:

$$M_\chi = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\chi, \chi\} & \{\chi, \psi\} \\ \{\psi, \chi\} & \{\psi, \psi\} \end{pmatrix}\tag{3.52}$$

M_χ é a matriz formada pelas linhas e colunas não-nulas de M_Λ (1, 2, 5, 6). Reescrevemos as equações (3.51) de uma maneira um pouco mais geral:

$$\psi'_I = \alpha^{IJ} \psi_J + \beta_a^{IJ} \chi_J^a\tag{3.53}$$

$$\chi'^a_I = \chi^a_I\tag{3.54}$$

Note que α e β são matrizes. A matriz M'_χ na nova base fica:

$$M'_\chi = \begin{pmatrix} X & \{\chi, \alpha\psi\} + \{\chi, \beta\chi\} \\ \{\alpha\psi, \chi\} + \{\beta\chi, \chi\} & \{\alpha\psi, \beta\chi\} + \{\beta\chi, \alpha\psi\} + \{\beta\chi, \beta\chi\} \end{pmatrix}\tag{3.55}$$

Note que a submatriz $X \equiv \Delta_\chi$ é inversível. Então para diagonalizar a matriz queremos $Y' = 0$, e encontramos os α em função dos β :

$$Y' = \alpha Y + \beta X = 0 \quad (3.56)$$

$$\alpha Y + \beta X = 0 \quad |X^{-1} \quad (3.57)$$

$$\beta = -\alpha Y X^{-1} \quad (3.58)$$

Substituindo em (3.53):

$$\psi' = \alpha(\psi - Y X^{-1} \chi) \quad (3.59)$$

Escolhendo α como a matriz unidade, e escrevendo ψ e ψ' explicitamente²:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}' \\ \mathcal{F}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{F} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{ac} f_{IJK} B_c^K & \varepsilon^{ac} D_c^{IJ} \\ \varepsilon^{ac} D_c^{IJ} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{ca} \chi_{2J}^c \\ \varepsilon_{ca} \chi_{1J}^c \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$\mathcal{G}'_I = \mathcal{G}_I + f_{IJK} B_c^K \chi_{2J}^c + D_c^{IJ} \chi_{1J}^c \quad (3.61)$$

$$\mathcal{F}'_I = \mathcal{F}_I + D_c^{IJ} \chi_{2J}^c \quad (3.62)$$

Para verificar este resultado vamos calcular os colchetes entre os χ_i , \mathcal{G}' e \mathcal{F}' :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}'_I(\vec{x}), \chi_{1L}^c(\vec{y})\} &= \{\mathcal{G}_I(\vec{x}) + f_{IJK} B_a^K(\vec{x}) \chi_{2J}^a(\vec{x}) + D_a^{IJ} \chi_{1J}^a(\vec{x}), \chi_{1L}^c(\vec{y})\} \\ &\approx \varepsilon^{cb} f_{IJK} B_b^J(\vec{x}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) - \varepsilon^{ca} f_{IKL} B_a^K(\vec{x}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + \varepsilon \chi_{1J}^a(\vec{x}) \approx 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}'_I(\vec{x}), \chi_{2L}^c(\vec{y})\} &= \{\mathcal{G}_I(\vec{x}) + f_{IJK} B_a^K(\vec{x}) \chi_{2J}^a(\vec{x}) + D_a^{IJ} \chi_{1J}^a(\vec{x}), \chi_{2L}^c(\vec{y})\} \\ &= -\varepsilon^{ac} D_c^{xIL} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + \varepsilon^{ca} D_a^{xIL} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + \varepsilon \chi_{2J}^a(\vec{x}) \approx 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

²Cometemos um leve abuso de notação com os índices de grupo de X^{-1} , mas que não afeta os comutadores que seguem nem o resultado final.

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{F}'_I(\vec{x}), \chi_{1L}^c(\vec{y})\} &= \{\mathcal{F}_I(\vec{x}) + D_a^{IJ} \chi_{2J}^a(\vec{x}), \chi_{1L}^c(\vec{y})\} \\
&= -\varepsilon^{ac} D_c^{IL} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + D_a^{IJ} \varepsilon^{ca} \delta_J^L \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + \propto \chi_{2J}^a(\vec{x}) \approx 0 \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\{\mathcal{F}'_I(\vec{x}), \chi_{2L}^c(\vec{y})\} = \{\mathcal{F}_I(\vec{x}) + D_a^{IJ} \chi_{2J}^a(\vec{x}), \chi_{2L}^c(\vec{y})\} = \{F_{12}^I(\vec{x}), \chi_{2L}^c(\vec{y})\} = 0 \quad (3.66)$$

E temos que verificar se $[\psi', \psi'] \approx 0$, isto é, se a troca de base mantém os colchetes de Poisson dos ψ fracamente nulos entre si. Note que devido aos colchetes calculados acima (3.63) a (3.66), precisamos verificar apenas os colchetes $[\psi', \psi]$:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{G}'_I(\vec{x}), \mathcal{G}_L(\vec{y})] &= [\mathcal{G}_I(\vec{x}) + \underbrace{f_{IJK} B_a^K(\vec{x}) \chi_{2J}^a(\vec{x})}_{\propto \mathcal{G}_K \approx 0} + D_a^{IJ} \chi_{1J}^a(\vec{x}), N_L(\vec{y})] \\
&= -f_{ILK} \underbrace{\varepsilon^{ac} (D_a B_c)^K}_{\propto \mathcal{G}_K \approx 0} \delta^2 - f_{ILK} \underbrace{\varepsilon^{ad} (D_a B_d)^K}_{\propto \mathcal{G}_K \approx 0} \delta^2 \approx 0 \quad (3.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathcal{G}'_I(\vec{x}), \mathcal{F}_L(\vec{y})] &= [\mathcal{G}_I(\vec{x}) + \underbrace{f_{IJK} B_a^K(\vec{x}) \chi_{2J}^a(\vec{x})}_{\propto \mathcal{F}_J \approx 0} + D_a^{IJ} \chi_{1J}^a(\vec{x}), \mathcal{F}_L(\vec{y})] \\
&= -\varepsilon^{ac} \underbrace{D_a^{IJ} D_c^{JL}}_{\propto \mathcal{F}_J \approx 0} \delta^2 \approx 0 \quad (3.68)
\end{aligned}$$

$$[\mathcal{F}'_I(\vec{x}), \mathcal{F}_L(\vec{y})] = [\mathcal{F}_I(\vec{x}) + D_a^{IJ} \chi_{2J}^a(\vec{x}), \mathcal{F}_L(\vec{y})] = 0 \quad (3.69)$$

Então os novos vínculos \mathcal{G}' e \mathcal{F}' são vínculos de primeira classe, enquanto os vínculos $\chi_i = (\phi_1, \phi_2)$ são vínculos de segunda classe. Um resumo dos nossos vínculos de acordo com a classe e origem na nova base:

Vínculo	Primário	Secundário
Primeira Classe	$\phi_{3I} : {}^A \Pi_I^t \approx 0$ $\phi_{4I} : {}^B \Pi_I^t \approx 0$	$\mathcal{G}'_I : \mathcal{G}_I + f_{IJK} B_a^K \chi_{2J}^a + D_a^{IJ} \chi_{1J}^a$ $\mathcal{F}'_I : \mathcal{F}_I + D_a^{IJ} \chi_{2J}^a$
Segunda Classe	$\chi_{1I}^a : {}^A \Pi_I^a - \varepsilon^{ab} B_b^I \approx 0$ $\chi_{2I}^a : {}^B \Pi_I^a \approx 0$	

3.5.2 A definição do colchete de Dirac

Chamamos Δ_χ de matriz dos vínculos de segunda classe χ_s remanescentes:

$$\Delta_\chi = \{\chi_{sI}^a(\vec{x}), \chi_{s'J}^c(\vec{y})\} = -\varepsilon^{ac}\delta_J^I \varepsilon^{ss'} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon^{ac}\delta_J^I \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.70)$$

Invertendo³ a matriz:

$$\Delta_\chi^{-1} = -\varepsilon_{ca}\delta_I^J \delta^2(\vec{y} - \vec{x}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Com esta matriz Δ_χ^{-1} podemos definir os colchetes de Dirac:

$$\boxed{\{\xi, \eta\}_D = \{\xi, \eta\} - \{\xi, \chi_s\} \Delta_\chi^{-1} \{\chi_{s'}, \eta\}} \quad (3.72)$$

Que definimos com o símbolo $\{ , \}_D$. Neste novo colchete, podemos colocar os $\chi_s = 0$, uma vez que, sendo g uma função qualquer dos campos A e B :

$$\begin{aligned} \{g, \chi_s\}_D &= \{g, \chi_s\} - \{g, \chi_s\} \Delta_\chi^{-1} \{\chi_{s'}, \chi_s\} \\ &= \{g, \chi_s\} - \{g, \chi_s\} \Delta_\chi^{-1} \cdot \Delta_\chi \\ &= \{g, \chi_s\} - \{g, \chi_s\} = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Então as equações $\chi_s = 0$ podem ser consideradas igualdades fortes. Definimos também, para simplificar a notação, o *dual* de B :

$$\tilde{B}^{Ia} \equiv \varepsilon^{ab} B_b^I \quad (3.74)$$

Então:

$$\chi_1 = 0 \rightarrow {}^A \Pi_I^a = \tilde{B}^{Ia} \quad (3.75)$$

$$\chi_2 = 0 \rightarrow {}^B \Pi_I^a = 0 \quad (3.76)$$

³No sentido da álgebra de convolução para os índices contínuos (\vec{x}) e (\vec{y}): $(g*f)(x) = \int dy g(y)f(x-y)$.

Como ${}^A\Pi_I^a \propto B$ e ${}^B\Pi_I^a = 0$, excluimos os momentos ${}^A\Pi_I^a$ e ${}^B\Pi_I^a$ da teoria e passamos a considerar (3.75) como o momento da variável A_a^I .

3.5.3 A estrutura simplética

Os colchetes de Dirac fundamentais na nova definição são:

$$\begin{aligned}
\{A_a^I(\vec{x}), A_b^J(\vec{y})\} &= \{A_a^I(\vec{x}), A_b^J(\vec{y})\} - \sum_{ss'} \int d^2x' d^2y' \{A_a^I(\vec{x}), \chi_s(\vec{y}')\} \Delta_{\chi}^{-1} \{\chi_{s'}(\vec{x}'), A_b^J(\vec{y}')\} \\
&= 0 - \int d^2x' d^2y' \{A_a^I(\vec{x}), \chi_1(\vec{y}')\} \Delta_{12}^{-1} \overbrace{\{\chi_2(\vec{x}'), A_b^J(\vec{y}')\}}^{=0} \\
&\quad - \int d^2x' d^2y' \overbrace{\{A_a^I(\vec{x}), \chi_2(\vec{y}')\}}^{=0} \Delta_{21}^{-1} \{\chi_1(\vec{x}'), A_b^J(\vec{y}')\} = 0
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\{B_a^I(\vec{x}), B_b^J(\vec{y})\} = 0 \quad (\text{análogo}) \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
\{A_a^I(\vec{x}), B_b^J(\vec{y})\} &= \{A_a^I(\vec{x}), B_b^J(\vec{y})\} - \sum_{ss'} \int d^2x' d^2y' \{A_a^I(\vec{x}), \chi_s(\vec{y}')\} \Delta_{\chi}^{-1} \{\chi_{s'}(\vec{x}'), B_b^J(\vec{y}')\} \\
&= 0 - \int d^2x' d^2y' \{A_a^I(\vec{x}), \chi_1(\vec{y}')\} \Delta_{12}^{-1} \{\chi_2(\vec{x}'), B_b^J(\vec{y}')\} \\
&\quad - \int d^2x' d^2y' \overbrace{\{A_a^I(\vec{x}), \chi_2(\vec{y}')\}}^{=0} \Delta_{21}^{-1} \{\chi_1(\vec{x}'), B_b^J(\vec{y}')\} \\
&= -\varepsilon_{ba} \delta_I^J \delta^2(\vec{y} - \vec{x})
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Onde suprimimos o índice D do colchete de Dirac. Note que o último colchete fica bem mais simples na notação *dual* de B :

$$\{A_a^I(\vec{x}), \tilde{B}^{cJ}(\vec{y})\} = -\varepsilon^{cb} \varepsilon_{ba} \delta_I^J \delta^2(\vec{y} - \vec{x}) = \delta_a^c \delta_I^J \delta^2(\vec{y} - \vec{x}) \tag{3.80}$$

3.6 O problema da quantização

Nas subseções seguintes escreveremos a hamiltoniana total resolvida e veremos como as nossas variáveis dinâmicas se comportam em relação à esta, e depois aplicaremos o princípio da correspondência sobre as variáveis do nosso modelo BF.

3.6.1 A hamiltoniana completamente vinculada

A Hamiltoniana total (3.47) do nosso sistema agora fica:

$$H_T = \int_{\Sigma} d^2x (-A_t^I \varepsilon^{ab} D_a^{IJ} B_b^J - B_t^I F_{12}^I) \quad (3.81)$$

Como os campos $-A_t^I$ e $-B_t^I$ são multiplicadores de Lagrange para os vínculos $\phi_{5I} = \mathcal{G}_I$ e $\phi_{6I} = \mathcal{F}_I$, podemos reescrever a hamiltoniana total como:

$$H_T = \int_{\Sigma} d^2x (\lambda_5^I \mathcal{G}_I + \lambda_6^I \mathcal{F}_I) \quad (3.82)$$

E encontramos esta hamiltoniana completamente vinculada, que é o que esperávamos de uma teoria de calibre topológica.

3.6.2 As transformações infinitesimais geradas pela hamiltoniana

Pela definição de vínculos de primeira classe (B.21), podemos ver que estes geram transformações de calibre. Então vamos agora calcular os colchetes de Dirac destes termos da hamiltoniana (vínculos) com as variáveis A e B , para descobrir os parâmetros das transformações infinitesimais de calibre associadas aos termos da hamiltoniana, e uma vez que H é um invariante sobre as transformações geradas por estes vínculos, estas

transformações são simetrias do sistema:

$$\delta_{(i)}g(\vec{x}) = \{g(\vec{x}), \int_{\Sigma} d^2y \lambda_i \phi_i(\vec{y})\} \quad (3.83)$$

Escrevemos agora a transformação $\delta_{(5)}$, que age sobre as variáveis A_a^I e \tilde{B}^{aI} , fazendo uso da integração por partes (A.79) e da definição de derivada covariante (2.9):

$$\begin{aligned} \delta_{(5)}A_a^I(\vec{x}) &= \{A_a^I(\vec{x}), \int_{\Sigma} d^2y \lambda_5^J(\vec{y}) D_b^{yJK} \tilde{B}^{bK}(\vec{y})\} \\ &= - \int_{\Sigma} d^2y D_b^{yJK} \lambda_5^K(\vec{y}) \delta_I^J \delta_a^b \delta^2(\vec{y} - \vec{x}) = -D_a^{IK} \lambda_5^K(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \delta_{(5)}\tilde{B}^{aI}(\vec{x}) &= \{\tilde{B}^{aI}(\vec{x}), \int_{\Sigma} d^2y \lambda_5^J(\vec{y}) D_b^{yJK} \tilde{B}^{bK}(\vec{y})\} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \lambda_5^J(\vec{y}) f_{JKL} \delta_L^I \delta_b^a \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \tilde{B}^{bK}(\vec{y}) = f_{IJK} \lambda_5^J(\vec{x}) \tilde{B}^{aK}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Escrevendo estas transformações na notação matricial $A_a = A_a^I T_I$, etc.:

$$\begin{cases} \delta_{(5)}A_a = \partial_a \lambda + [A_a, \lambda] \\ \delta_{(5)}\tilde{B}^a = [\tilde{B}^a, \lambda] \end{cases} \quad (3.86)$$

Onde escrevemos $\lambda = -\lambda_5$. Ou seja, \mathcal{G} ou $\delta_{(5)}$ gera as transformações de calibre tipo YM espaciais.

Agora, escrevemos a transformação $\delta_{(6)}$, que age sobre a variável \tilde{B}^{aI} , fazendo uso da integração por partes (A.79) e da antissimetria dos tensores ε^{ab} e f_{IJK} :

$$\delta_{(6)}A_a^I(\vec{x}) = 0 \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \delta_{(6)}\tilde{B}^{aI}(\vec{x}) &= \{\tilde{B}^{aI}(\vec{x}), \int_{\Sigma} d^2y \lambda_6^J(\vec{y}) \frac{\varepsilon^{bc}}{2} F_{bc}^J(\vec{y})\} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \varepsilon^{ba} (\partial_b \lambda_6^I(\vec{y}) - f_{IJK} A_b^K(\vec{y}) \lambda_6^J(\vec{y})) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = -\varepsilon^{ab} D_b^{IJ} \lambda_6^J(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{cases} \delta_{(6)}A_a = 0 \\ \delta_{(6)}\tilde{B}^a = D_b\eta^{ab} \end{cases} \quad (3.89)$$

Onde escrevemos $\eta = -\lambda_6$. \mathcal{F} ou $\delta_{(6)}$ gera o segundo tipo de transformações de calibre do modelo BF, chamadas de tipo 2.

Então os conjuntos de simetria $\delta_{5,6}$ são nada mais que transformações de calibre da teoria. Na teoria quântica, $\phi_{5,6}$ serão promovidos a operadores $\hat{\phi}_{5,6}$, geradores do grupos de simetria. Os estados $|\psi\rangle$ que obedecem $\hat{\phi}_{5,6}|\psi\rangle = 0$ vão ser estados físicos e invariantes sobre as transformações de calibre.

A invariância sobre as transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos), é uma consequência das invariâncias sobre transformações de calibre (3.86) e (3.89). Para vermos isto, consideramos um campo vetorial espacial $v = v^a\partial_a$ com o qual definimos os parâmetros:

$$\begin{cases} \lambda^I(v) = v^a A_a^I \\ \eta^{abI}(v) = \tilde{B}^{aI} v^b \end{cases} \quad (3.90)$$

Verificamos facilmente que um difeomorfismo infinitesimal dado pela derivada de Lie ao longo do campo vetorial v pode ser expresso como uma transformação de calibre com os parâmetros 3.90:

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_v A)_a^I = \delta_{\lambda(v)} A_a^I \\ (\mathcal{L}_v \tilde{B})^{aI} = \delta_{\lambda(v)} \tilde{B}^{aI} + \delta_{\eta(v)} \tilde{B}^{aI} \end{cases} \quad (3.91)$$

É o resultado (2.40) anunciado no capítulo 2.

3.6.3 A álgebra dos geradores de transformações

Na seção anterior escrevemos a hamiltoniana do modelo BF completamente vinculada e mostramos que estes vínculos geram as transformações de calibre da teoria. Vamos então analisar a álgebra dos vínculos da hamiltoniana do modelo BF, escritos como transformações de calibre:

$$\mathcal{G}(\lambda) = \int d^2x \lambda^I(x) D_a \tilde{B}_I^a(x) \quad (3.92)$$

$$\mathcal{F}(\eta) = \frac{1}{2} \int d^2x \eta_I(x) \varepsilon^{ab} F_{ab}^I(x) \quad (3.93)$$

E os colchetes não-nulos são de fato os colchetes entre os vínculos \mathcal{G} e \mathcal{F} que fazem parte da hamiltoniana, embora sejam fracamente nulos:

$$\{\mathcal{G}(\lambda_1), \mathcal{G}(\lambda_2)\} = \mathcal{G}(\lambda_1 \times \lambda_2) \quad (3.94)$$

$$\{\mathcal{G}(\lambda), \mathcal{F}(\eta)\} = \mathcal{F}(\lambda \times \eta) \quad (3.95)$$

Onde $(\epsilon_1 \times \epsilon_2)^I = f_{JK}^I \epsilon_1^J \epsilon_2^K$ e $(\epsilon \times \eta)_I = f_{IJ}^K \epsilon^J \eta_K$, lembrando que em $SU(2)$ $f = \varepsilon$ (tensor antissimétrico) e $(\epsilon \times \epsilon)$ é um produto vetorial. Logo, a álgebra dos vínculos é fechada.

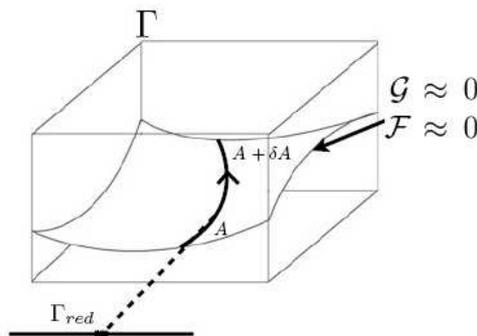


Figura 3.2: Esboço do espaço de fase cinemático, onde há um subespaço dos pontos que obedecem os vínculos.

Podemos pensar nos vínculos da hamiltoniana também como sendo equações que restringem o espaço de fase a uma hipersuperfície vinculada, como a Fig. 3.2, e nesta

hipersuperfície todas as variáveis dinâmicas evoluem arbitrariamente. Reescrevendo a hamiltoniana como:

$$H = \mathcal{G}(\lambda) + \mathcal{F}(\eta) \quad (3.96)$$

Deixa manifesto que a dinâmica da teoria na verdade é uma evolução arbitrária dada pelas transformações de calibre gerada pelos vínculos.

3.6.4 O problema do produto escalar

Antes de abordar a quantização desta teoria no formalismo de laços no capítulo 4 faremos algumas considerações, em um nível mais formal.

Primeiramente devemos definir o funcional de onda $\Psi = \Psi[A_a^I]$ sobre o espaço de configurações das conexões A_a^I . Devemos também definir os operadores \hat{A} e \hat{B} , que devem obedecer às relações de comutação:

$$[\hat{A}_a^I(\vec{x}), \hat{B}_j^b(\vec{y})] = i\hbar \delta_a^b \delta_j^I \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.97)$$

Os operadores atuam em $\Psi[A]$ da seguinte forma:

$$\hat{A}_a^I \Psi = A_a^I \Psi \quad (3.98)$$

$$\hat{B}_I^a \Psi = -i\hbar \frac{\delta \Psi}{\delta A_a^I(\vec{x})} \quad (3.99)$$

Note que o operador \hat{A}_a^I é autoadjunto e \hat{B}_I^a não é autoadjunto. Dirac começou a estudar a quantização da gravitação com este esquema tomando A como a métrica e B como o conjugado da métrica.

Agora vamos definir o produto escalar. Na mecânica quântica, o produto escalar é:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int d^n q \psi^*(q) \phi(q) \quad (3.100)$$

onde q representa as coordenadas generalizadas. Este produto escalar pode ter uma forma mais geral:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int d\mu(q) \psi^*(q) \phi(q) \quad (3.101)$$

onde $d\mu$ é uma medida de integração. O produto escalar no modelo BF teria a forma:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int \mathcal{D}A (\Psi[A])^* \Phi[A] \quad (3.102)$$

onde $\mathcal{D}A$ é uma medida de integração no espaço de configuração das conexões $A_a^I(\vec{x})$. Não é difícil de ver que esta medida de integração corresponde à medida num espaço muito maior que os espaços de Hilbert das teorias quânticas usuais para partículas e campos, o que torna sua definição difícil.

Para construir um espaço com produto interno bem definido, substituiremos o espaço de configurações dos $A_a^I(\vec{x})$ pelo espaço das holonomias $U[A, \gamma]$, que é o primeiro passo para a quantização de *loops*. Estudaremos a construção deste espaço no próximo capítulo.

Capítulo 4

Quantização de Laços

4.1 Regularização de uma rede versus redes de *spin*

Um exemplo do desenvolvimento para definir o produto escalar pode ser encontrado em Teoria Quântica de Campos e em outras teorias da física, que é aproximar o contínuo por uma rede, o que constitui uma regularização. Em TQC temos a integral funcional de Feynmann, a partir da qual podem ser desenvolvidas as séries de perturbação de Feynmann, e também construções não-perturbativas baseadas na regularização de rede. Na regularização de rede, em vez de considerarmos todos os pontos dentro de um volume V consideramos apenas os vértices da rede, separados por uma distância ϵ .

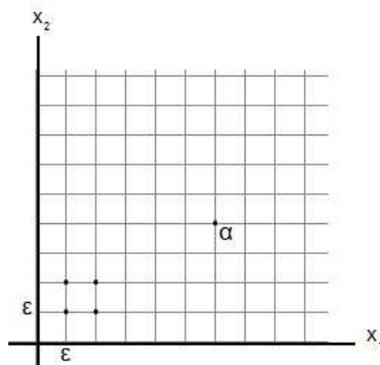


Figura 4.1: Espaço de Minkowski (mostrados apenas x_1 e x_2) com uma rede que gera uma restrição na qual o volume finito contém um número finito de pontos.

Então nosso contínuo pode ser substituído por um conjunto de pontos x_α , $\alpha = 1, \dots, N$ e a integral funcional será uma integral ordinária:

$$\int \mathcal{D}A f(A) = \left(\prod_{\alpha=1}^N dA(x_\alpha) \right) f(x_1, \dots, x_\alpha) \quad (4.1)$$

Existem teoremas sobre aproximações de rede, para achar o limite para quando $\epsilon \rightarrow 0$, que em TQC já foi resolvido rigorosamente para espaços-tempo de dimensão até 3 e por meio de integrações numéricas para dimensão 4 [3], cujos resultados podem ser aplicados no cálculo de parâmetros fundamentais dos quarks. Uma construção da integração funcional deste tipo pode ser aplicada à definição do produto escalar.

Em teorias independentes de *background* como o nosso modelo BF, geralmente adota-se um outro esquema, baseado na noção de redes de *spin* que discutiremos em mais detalhes nas seções seguintes, mas vale a pena apontar algumas analogias do procedimento de regularização de rede com a construção da rede de *spin*.

Então, considerando uma variedade \mathcal{M} , vamos trabalhar com objetos chamados grafos orientados (como o da figura 4.2), que são objetos formados por curvas orientadas $e_\alpha \in \mathcal{M}$ na variedade e vértices $v_\beta \in \mathcal{M}$, que são pontos da variedade aonde estas curvas se interceptam.

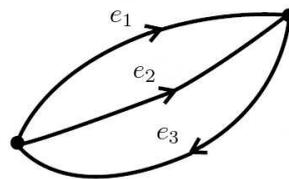


Figura 4.2: Um exemplo de grafo orientado, composto por três linhas e_1 , e_2 e e_3 e dois vértices.

A cada linha e_α de um grafo, definimos um novo funcional de A , a holonomia de A ao longo desta linha:

$$h_{e_\alpha}[A] = \mathcal{P}e^{\int_{e_\alpha} dx^a A_a^I T_I} \quad (4.2)$$

Onde \mathcal{P} é o operador de ordenação a ser definido na seção seguinte e a integral no expoente é uma integral de linha sobre e_α . Também mostraremos que as holonomias são elementos do grupo de calibre e que isto é uma das motivações para se trabalhar com as holonomias, pois elas possuem leis de transformação mais simples o que facilita a construção de invariantes.

Consideraremos funcionais de onda definidos como funções dessas holonomias – os chamados funcionais “cilíndricos”. Observamos que se um tal funcional cilíndrico está definido sobre um conjunto finito de linhas (grafo), então ele depende só dos valores da conexão nestas linhas, e não dos valores da conexão no espaço inteiro, análogo ao caso da substituição do contínuo por pontos x_α no caso da regularização de rede. Poderemos assim construir um produto escalar a partir de uma medida de integração definida num espaço muito menor que o espaço de todas as conexões.

4.2 As holonomias de A

Então, o primeiro passo para construir um espaço com produto interno bem definido é substituir o espaço de configurações dos $A_a^I(\vec{x})$ pelo espaço das holonomias $U[A, \gamma]$. Note que utilizamos de forma indiscriminada notações diferentes para holonomias, ora $h_\gamma[A]$, ora $U[A, \gamma]$.

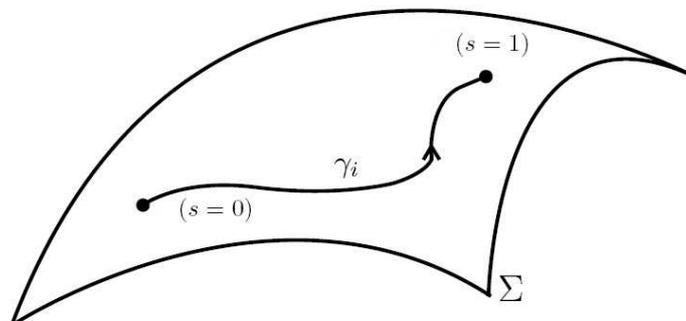


Figura 4.3: A curva γ_i em $\Sigma = \mathcal{M}_{D-1}$ parametrizada na variável s .

As equações paramétricas de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ são:

$$x^a = x^a(s) \quad (4.3)$$

$$\dot{x}^a = \frac{dx^a}{ds} \quad (4.4)$$

Aonde $a = 1, \dots, D-1$, $x^a(0) = x^a_{(i)}$ e $x^a(1) = x^a_{(f)}$. A holonomia é o transporte paralelo ao longo da curva γ .

4.2.1 O transporte paralelo

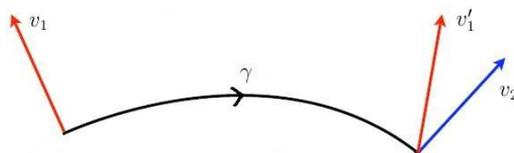


Figura 4.4: Holonomia como transporte paralelo, onde v'_1 é o vetor v_1 transportado para o subespaço de v_2 .

Seja v_1 e v_2 dois vetores definidos nos extremos de uma curva γ . Como eles não fazem parte do mesmo espaço vetorial, para compará-los é preciso transportar v_1 para o espaço de v_2 . Se o deslocamento é infinitesimal, o transporte é calculado pela derivada covariante. A holonomia é a generalização disso, pois $U[A, \gamma](s)$, $s \in [0, 1]$ é o transporte paralelo de x_i a $x(s)$. Então, se $U[A, \gamma](0) = \mathbb{1}$ e $U[A, \gamma](1) = U[A, \gamma]$:

$$\frac{d}{ds}U[A, \gamma](s) - \dot{x}^a(s)A_a(x(s))U[A, \gamma](s) = 0 \quad (4.5)$$

$$dU[A, \gamma](s) = dAU[A, \gamma](s) \quad (4.6)$$

Onde $A = A_a^I dx^a T_I$ e $ds\dot{x}^a = dx^a$, então a solução para $U[A, \gamma]$ é simplesmente:

$$U[A, \gamma] = \mathcal{P}e^{\pm \int_0^1 ds \dot{x}^a(s) A_a^I(x(s)) T_I} = \mathcal{P}e^{\pm \int_\gamma A} \quad (4.7)$$

Onde \mathcal{P} é um operador que ordena por valores crescentes de s se o sinal da exponencial é positivo e ordena por valores decrescentes de s se o sinal da exponencial for negativo (*path ordering*).

4.2.2 A fatoração de uma holonomia

Se γ vai de $i \rightarrow f$, podemos definir γ^{-1} que vai de $f \rightarrow i$, isto é, a mesma curva porém orientada no sentido oposto, então:

$$U[A, \gamma^{-1}]U[A, \gamma] = \mathbb{1} \quad (4.8)$$

A menos de uma operação de ordenação. Expandindo a exponencial dada em (4.7):

$$\mathcal{P} \left(\frac{1}{n!} \left(\int_0^1 A(x(s)) \right)^n \right) = \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \dot{x}(s_1) \vec{A}(s_1) \cdots \dot{x}(s_n) \vec{A}(s_n) \quad (4.9)$$

O truque para ordenar é mudar os limites de integração reduzindo-os para manter os termos sempre decrescentes. O caso abeliano é óbvio pois não há problema de ordem.

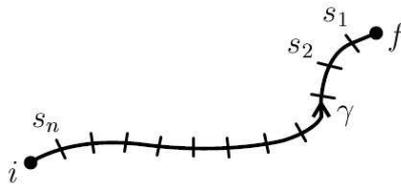


Figura 4.5: Decomposição de uma curva γ em segmentos $\bar{s}_{(k)(k+1)}$.

Por causa dos s maiores alocados perto de f e os menores perto de i , temos uma propriedade de fatoração. Podemos, por exemplo, fatorar esta holonomia em duas curvas γ :

$$U[A, \gamma] = U[A, \gamma_2]U[A, \gamma_1] \quad (4.10)$$

$$U(\bar{s}_2, \bar{s}_1) = U[A, \gamma_{21}] = \sum_{r=0}^{\infty} \int_{\bar{s}_1}^{\bar{s}_2} ds_1 \int_{\bar{s}_1}^{s_1} ds_2 \cdots \quad (4.11)$$

Note que esta fatoração vale até para curvas contínuas por pedaços.

4.2.3 A holonomia infinitesimal

Agora que temos uma propriedade de fatoração, vamos considerar a holonomia infinitesimal δU :

$$\delta U = e^{\int_s^{s+\delta s} ds' \dot{x}^a(s') A_a^I(s') T_I} \equiv U_{s, s+\delta s} \quad (4.12)$$

$$\delta U \simeq \mathbb{1} + \int_s^{s+\delta s} ds' \dot{x}^a(s') A_a^I(s') T_I + \mathcal{O}(\delta s^2) \quad (4.13)$$

Como δs é muito pequeno, note que não temos \mathcal{P} e a integral sobre este pequeno intervalo é uma integral de Riemann, aonde $x(s + \delta s) \equiv x(s) + \delta x$:

$$\delta U \simeq \mathbb{1} + \delta x^a A_a^I(s) T_I + \mathcal{O}(\delta s^2) \quad (4.14)$$

Agora vamos tentar descobrir como se transforma uma holonomia infinitesimal, então fazemos agora uma transformação de calibre. Lembrando que $A' = g^{-1} A g + g^{-1} dg$:

$$\begin{aligned} (\delta U)' &= \mathbb{1} + g^{-1}(x) \delta x^a A_a(x) g(x) + (g^{-1}(x + \delta x) - g^{-1}(x)) g(x) \\ &= g^{-1}(x + \delta x) g(x) + g^{-1}(x + \delta x) \delta x^a A_a(x) g(x) \\ &= g^{-1}(x + \delta x) [1 + \delta x^a A_a(x)] g(x) + \mathcal{O}((\delta x)^2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Considerando as aproximações da expansão em série de potências e da integral de Riemann a transformação de calibre de $(\delta U)'$ pode ser escrita como:

$$(\delta U)' = g^{-1}(x(s + \delta s)) e^{\int_s^{s+\delta s} ds' \dot{x}^a(s') A_a^I(s') T_I} g(x(s)) + \mathcal{O}((\delta s)^2) \quad (4.16)$$

Lembrando que quando consideramos intervalos maiores temos que utilizar o operador de ordenação \mathcal{P} . Vamos decompor agora uma holonomia completa em N intervalos para ver

como ela se transforma:

$$\begin{aligned}
 U[A, \gamma] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N U_{s_{k+1}, s_k} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} U_{1, s_{N-1}} \cdot U_{s_{N-1}, s_{N-2}} \cdots U_{s_N, 0}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 U'[A, \gamma] &= \lim_{N \rightarrow \infty} g^{-1}(x_f) U_{1, s_{N-1}} g(x(s_{n-1})) \cdot g^{-1}(x(s_{n-1})) U_{s_{N-1}, s_{N-2}} g(x(s_{n-2})) \\
 &\quad \cdots g^{-1}(x(s_1)) U_{s_N, 0} g(x_i)
 \end{aligned}$$

$$U'[A, \gamma] = g^{-1}(x_f) U[A, \gamma] g(x_i) \tag{4.18}$$

4.2.4 A holonomia como um objeto invariante

Agora, supomos que temos um campo $\phi(x)$, que se transforma como $\phi'(x) = g^{-1}(x_i)\phi(x_i)g(x_i)$ e queremos transportar este campo $\hat{\phi}(x_f, x_i) = U[A, \gamma]\phi(x_i)$. Vamos ver como isto se transforma:

$$\begin{aligned}
 (\hat{\phi}(x_f, x_i))' &= g^{-1}(x_f) U[A, \gamma] g(x_i) g^{-1}(x_i) \phi(x_i) g(x_i) \\
 &= g^{-1}(x_f) \hat{\phi}(x_f, x_i) g(x_i)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Estes objetos se transformam como holonomias e são covariantes, então as holonomias são objetos que realmente podem descrever nossa teoria, que tem campos covariantes. Então podemos construir os invariantes desta teoria, então tomamos o traço, lembrando que $Tr(XY) = Tr(YX)$:

$$Tr U[A, \gamma] = W[A, \gamma] \tag{4.20}$$

onde γ é uma curva fechada, e W são as holonomias que conhecemos como Laços de Wilson. A transformação de um laço é invariante:

$$\begin{aligned}
 W'[A, \gamma] &= Tr(U'[A, \gamma]) = Tr(g^{-1}(x_i) U[A, \gamma] g(x_i)) \\
 &= Tr(U[A, \gamma] g(x_i) g^{-1}(x_i)) = W[A, \gamma]
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

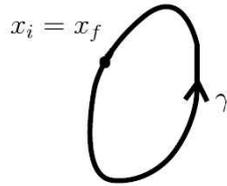


Figura 4.6: Laço γ , obtido tomando $x_i = x_f$.

Os laços de Wilson foram utilizados na primeira tentativa de quantizar a gravidade com grafos. $W[A, \gamma]$ são os laços e A é a conexão de Ashtekar, que é relacionada à conexão do campo gravitacional.

4.3 A construção do espaço de Hilbert cinemático

Começamos escrevendo nosso funcional de onda $\Psi[A]$ como uma função $\Psi[h_\gamma[A]]$ que depende de um número finito de holonomias, lembrando que $A \equiv A_a^I$, com $a = 1, 2$ e $I = 1, 2, 3$ ($SU(2)$). Como vamos calcular transformações de calibre queremos objetos que se transformam de maneira mais simples, então trocamos o funcional de A pelo funcional das holonomias de A .

A priori, as holonomias de A são uma restrição em nosso espaço, uma vez que as holonomias só estão definidas sobre as curvas γ . A idéia é tomar todas as curvas possíveis, em vez de todos os pontos do espaço de configurações de A .

Algumas propriedades do espaço cinemático \mathcal{H}_k e do espaço das funções de onda $\psi(q)$, onde q é uma coordenada generalizada, criados a partir de um procedimento de quantização canônica podem ser revistas no Apêndice B.2.

4.3.1 As funções cilíndricas

Definimos então um grafo como sendo um conjunto de um número finito de curvas e vértices:

$$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\} \oplus \{e_1, \dots, e_p\} \quad (4.22)$$

E nosso funcional de onda pode ser expresso como:

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = f(h_{\gamma_1}[A], \dots, h_{\gamma_p}[A]) \quad (4.23)$$

Onde $f : \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_{p \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{C}$. Agora vamos fazer uma restrição sobre os grafos Γ .

Vamos tomar apenas grafos fechados e conexos, isto é, grafos onde as linhas são todas juntas e fechadas.

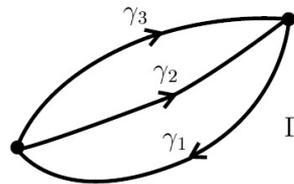


Figura 4.7: Grafo Γ fechado e conexo.

Chamamos então $\Psi_{\Gamma, f}[A]$ de função cilíndrica. O espaço vetorial cilíndrico Cyl são todas as combinações finitas de funcionais $\Psi_{\Gamma, f}$:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \sum_{k=i}^k c_{ik} \Psi_{\Gamma_i, f_k}[A] \quad (4.24)$$

Este espaço de Hilbert cinemático Cyl é infinito, assim como o espaço de Hilbert cinemático na Mecânica Quântica. Contudo, estes espaços são muito diferentes, pois o espaço da MQ é enumerável e o espaço Cyl não é, pois para cada ponto x podemos tomar infinitos *loops* que passam sobre este ponto cujas holonomias são diferentes (A varia em cada ponto).

Estes *loops* não podem ser contados pois não temos como contar todos os γ que passam por x .

4.3.2 O produto escalar de funções cilíndricas

Um grupo de Lie G define o espaço dos parâmetros, que podemos chamar de uma variedade G , que possui uma integral:

$$\int_G d_\mu(g) f(g) \quad (4.25)$$

Onde $g \in G$, a medida $d_\mu(g)$ é invariante sobre transformações do grupo G :

$$\int_G d_\mu(g) f(g') = \int_G d_\mu(g) f(g) \quad (4.26)$$

Onde $g' = hg$ ou $g' = gh$, com $h \in G$. A medida invariante é chamada de medida de Haar, que define a integral de grupos topológicos localmente compactos.

Vamos considerar o grupo de Lie $G = SU(2)$. Um elemento $g \in SU(2)$ depende de 4 números complexos, ou 8 parâmetros reais:

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Consideramos agora as duas propriedades do grupo:

1. $g^\dagger g = \mathbb{1}$: (U) Unitário (4 equações)
2. $\det(g) = 1$: (S) Especial (1 equação)

Que geram 5 equações. Então, temos 3 parâmetros livres, cuja solução é:

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4.29)$$

Como α e β são números complexos, a solução de (4.29) é uma esfera \mathcal{S}^3 , ou seja, $SU(2) = \mathcal{S}^3$. Os parâmetros de \mathcal{S}^3 são θ, φ, ν . Então, a integral de Haar é dada por:

$$\int_{\mathcal{S}^3} d_\mu f(\theta, \varphi, \nu) = \int_0^\pi d\nu \sin^2 \nu \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\theta, \varphi, \nu) \quad (4.30)$$

E a medida de Haar é o ângulo sólido invariante de rotação $3D$. Consideramos novamente o espaço Cyl , que é o espaço das combinações lineares finitas de $\Psi_{\Gamma, f}[A]$:

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = f(U_{e_1}, U_{e_2}, \dots) \quad (4.31)$$

Onde $U_{e_1} \in G$. Agora vamos introduzir a notação de *brackets* para estes funcionais:

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = \langle A | \Gamma, f \rangle \quad (4.32)$$

Vamos primeiro escrever o produto interno de Ψ 's diferentes mas do mesmo grafo: $\Psi_{\Gamma, f}$, $\Psi_{\Gamma, f'}$:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma, f | \Gamma, f' \rangle &= \int d_\mu(g_1) \int d_\mu(g_2) \cdots (\Psi_{\Gamma, f}[A])^* (\Psi_{\Gamma, f'}[A]) \\ &= \int d_\mu(g_1) \int d_\mu(g_2) \cdots (f(g_1, g_2, \dots))^* f'(g_1, g_2, \dots) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Este produto está definido num espaço Cyl_Γ que é vetorial. Agora vamos escrever o produto interno em grafos diferentes, onde $\hat{\Gamma} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}$.

$$\langle \Gamma, f | \Gamma', f' \rangle = \int d_\mu(g_1) \cdots d_\mu(g_6) \cdot (f(g_1, g_2, g_3))^* f'(g_3, g_4, g_5, g_6) \quad (4.34)$$

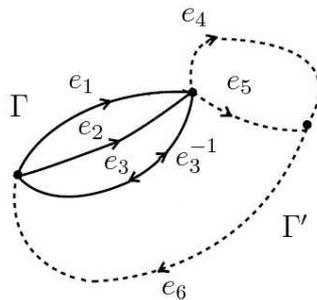


Figura 4.8: Grafos Γ e Γ' distintos. Note que neste caso $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$.

No caso $\Gamma = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\Gamma' = \{e_3^{-1}, e_4, e_5, e_6\}$ o produto escalar fica:

$$\langle \Gamma, f | \Gamma', f' \rangle = \int d_\mu(g_1) \cdots d_\mu(g_6) \cdot (f(g_1, g_2, g_3))^* f'(g_3^{-1}, g_4, g_5, g_6)$$

Podemos fazer a seguinte proposição:

$$\int d_\mu(g) f(g^{-1}) = \int d_\mu(g) f(g) \quad (4.35)$$

Mas note que a orientação relativa ainda é importante $\Gamma \leftrightarrow \Gamma'$. O produto escalar também é linear:

$$\langle \alpha \Psi_1 + \beta \Psi_2 | \gamma \Psi_3 \rangle = \gamma (\alpha^* \langle \Psi_1 | \Psi_3 \rangle + \beta^* \langle \Psi_2 | \Psi_3 \rangle) \quad (4.36)$$

Note que as definições dadas acima também valem para grafos disjuntos: $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$ e $\hat{\Gamma} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Agora com o um produto escalar bem definido, podemos definir uma norma:

$$\|\Psi_{\Gamma, f}\|^2 = \int d_\mu(g_1) \cdots d_\mu(g_n) |f(g_1, \dots, g_n)|^2 = \langle \Gamma, f | \Gamma, f \rangle \quad (4.37)$$

E queremos que f seja quadrado integrável. Com a norma, podemos escrever a completude de Cyl dada por $\overline{Cyl} = \mathcal{H}_k = \{ \text{conjunto das seqüências de Cauchy de } Cyl \}$, de forma que o espaço Cyl seja denso em \mathcal{H}_k . Uma seqüência de Cauchy $\{|\Psi_1\rangle, \dots, |\Psi_k\rangle\}$ é tal que

a norma da diferença entre os $|\Psi\rangle$ tem o limite:

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\Psi_n - \Psi_m\| = 0 \quad (4.38)$$

Logo, \mathcal{H}_k é completo $\forall \{\Psi \in \mathcal{H}_k, n = 1, \dots, \infty\}$ tal que $\lim \|\Psi_n - \Psi_m\| = 0$. O que chamamos de critério de convergência forte é quando existe um $\Psi \in \mathcal{H}_k$ tal que $\lim \|\Psi - \Psi_m\| = 0$.

4.4 A construção de uma base ortonormal

O produto interno das funções cilíndricas é completamente invariante, uma vez que temos:

1. Invariância de calibre: Invariância da medida de Haar;
2. Invariância de difeomorfismos: Independência da parametrização dos grafos.

Então, Seja a transformação de calibre $h \in G$, onde hg é uma transformação unitária.

Então:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma, f | \Gamma', f' \rangle_h &= \int d_\mu(hg_1) \cdots (f(hg_1, \dots))^* f'(hg_1, \dots) \\ &= \int d_\mu(g_1) \cdots (f(g_1, \dots))^* f'(g_1, \dots) = \langle \Gamma, f | \Gamma', f' \rangle \end{aligned} \quad (4.39)$$

Existe também um estado particular $|\phi\rangle$ onde $\Gamma = \emptyset$.

$$\begin{cases} \langle A | \phi \rangle = \Psi_\emptyset[A] = 1 \\ \|\Psi_\emptyset\|^2 = \langle \phi | \phi \rangle = 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

Agora vamos tentar achar uma base utilizando o teorema de Peter-Weyl para $G = SU(2)$.

Vamos considerar a representação irredutível de G :

Espaço vetorial $v^{(j)}$, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ de $\dim(2j + 1)$ com vetores de base $|j, m\rangle$, onde $-j \leq m \leq j$. $g \in G$ é representado pela matriz $R_{mm'}^{(j)} = R_\alpha^{(j)\beta}$, onde $R^{(j)}$ são matrizes de rotação.

4.4.1 O teorema de Peter-Weyl para um *loop*

Enunciamos agora o teorema de Peter-Weyl, considerando as holonomias sobre um grafo fechado de uma linha, um *loop*.

1. Seja a integral:

$$\int d_\mu(g) (R_\alpha^{(j)\beta}(g))^* R_{\alpha'}^{(j')\beta}(g) = (2j + 1) \delta^{jj'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta^{\beta\beta'} \quad (4.41)$$

A partir desta parte do teorema, podemos calcular o nosso produto escalar conhecendo j e g , que pode ser escrito como:

$$\langle \Gamma, j, \alpha, \beta | \Gamma, j', \alpha', \beta' \rangle (2j + 1) = (2j + 1) \delta^{jj'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta^{\beta\beta'} \quad (4.42)$$

Onde Γ é uma linha fechada.

2. $\forall f(g)$ de valores complexos, $f(g)$ pode ser expandida na base descrita em (1):

$$f(g) = \sum_j \sum_{\alpha=-j}^{+j} \sum_{\beta=-j}^{+j} c_{j,\alpha,\beta} R_\alpha^{(j)\beta}(g) \quad (4.43)$$

Então os $|\Gamma, j, \alpha, \beta\rangle$ formam uma base ortonormal do espaço Cyl_Γ , onde Γ é uma linha fechada.

4.4.2 A generalização para um grafo qualquer

A generalização do teorema de Peter-Weyl para quaisquer grafos segue da definição:

$$R_{\alpha_1}^{(j_1)\beta_1}(U[A, e_1]) \cdots R_{\alpha_n}^{(j_n)\beta_n}(U[A, e_n]) := \Psi_{\Gamma, j, \alpha, \beta}[A] \equiv \langle A | \Gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \quad (4.44)$$

Onde os R são multiplicados por um fator de normalização que depende de G . O teorema de Peter-Weyl para grafos quaisquer se escreve:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma, j, \alpha, \beta | \Gamma, j', \alpha', \beta' \rangle &= \delta^{jj'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta^{\beta\beta'} \\ \langle \Gamma, j, \alpha, \beta | \Gamma, j', \alpha', \beta' \rangle &= (?) \int d_\mu(g_1) \cdots d_\mu(g_n) (R_{\alpha_1}^{(j_1)\beta_1}(g_1) \cdots)^* (R_{\alpha'_1}^{(j'_1)\beta'_1}(g_1) \cdots) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Onde (?) é um fator de normalização que depende do grupo de representação G . Agora, se $\Gamma \neq \Gamma'$, temos que considerar $\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$.

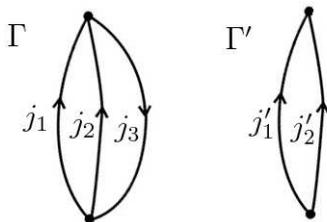


Figura 4.9: Exemplo de grafos Γ e Γ' .

Então, neste exemplo o produto vai ser:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma, j, \alpha, \beta | \Gamma', j', \alpha', \beta' \rangle &= \int d_\mu(g_1) d_\mu(g_2) d_\mu(g_3) (R_{\alpha_1}^{(j_1)\beta_1}(g_1) R_{\alpha_2}^{(j_2)\beta_2}(g_2) R_{\alpha_3}^{(j_3)\beta_3}(g_3))^* \cdot \\ &\quad (R_{\alpha'_1}^{(j'_1)\beta'_1}(g_1) R_{\alpha'_2}^{(j'_2)\beta'_2}(g_2)) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Podemos comparar com a situação onde podemos substituir Γ' com Γ , então:

$$\Psi_{\Gamma, j, \alpha, \beta}[A] = R_{\alpha_1}^{(j_1)\beta_1}(g_1) R_{\alpha_2}^{(j_2)\beta_2}(g_2) R^{(0)}(g_3) \quad (4.47)$$

Mas $R^{(0)}(g_3) = 1$, então os vetores deste exemplo são iguais do exemplo acima. Então temos duas versões do mesmo vetor, isto é, vamos ter uma infinidade de funcionais

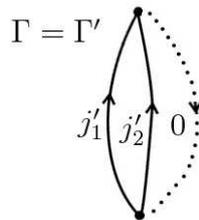


Figura 4.10: O grafo Γ' como um caso particular do grafo Γ .

idênticos para grafos diferentes, pois podemos adicionar quantas linhas *spin* 0 quanto quisermos. Então, para evitar este problema de redundância, apagamos as linhas com *spin* 0.

4.4.3 Redes de *spin*

Nossa função cilíndrica pode ser expressa como uma combinação linear destes vetores de base que encontramos com o teorema de Peter-Weyl, base que chamamos de redes de *spin*, ou *spin networks*.

$$\boxed{|\Psi\rangle = \sum_k \sum_j c_{\Gamma_k, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}} |\Gamma_k, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle \in Cyl} \quad (4.48)$$

Onde as somas acima são somas finitas e $j \neq 0$. Em particular, podemos considerar $|\Psi\rangle$'s sobre um mesmo grafo Γ :

$$|\Psi\rangle_\Gamma = \sum_j \sum_{\alpha, \beta} c_{\vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}} |\Gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle \in Cyl(\Gamma) \quad (4.49)$$

Onde $j \neq 0$. Veremos que o produto escalar entre Ψ 's de grafos diferentes vai ser nulo.

Tomamos como exemplo os grafos Γ e Γ' anteriores:

$$\langle \Gamma, j_1, j_2, j_3, \alpha \dots, \beta \dots | \Gamma', j'_1, j'_2, 0, \alpha' \dots, \beta' \dots \rangle = \delta^{j_1 j'_1} \delta^{j_2 j'_2} \overbrace{\delta^{j_3 0}}{=0} \delta_{\alpha_1 \alpha'_1} \dots = 0 \quad (4.50)$$

Em geral, ${}_{\Gamma}\langle\Psi|\Psi\rangle_{\Gamma'} = 0$ se $\Gamma \neq \Gamma'$, ou seja, $Cyl(\Gamma) \perp Cyl(\Gamma')$. O espaço Cyl pode então ser escrito como uma soma direta dos subespaços $Cyl(\Gamma)$:

$$Cyl = \bigoplus_{\Gamma} Cyl(\Gamma) \quad (4.51)$$

É interessante notar que tanto Cyl quanto sua completude $\overline{Cyl} = \mathcal{H}_k$ são conjuntos infinitos e não-enumeráveis. Contudo, os subespaços $Cyl(\Gamma)$ são conjuntos infinitos enumeráveis (\aleph_0), então $Cyl(\Gamma)$ pode formar um espaço vetorial separável. Existem ainda casos particulares aonde Cyl pode ser separável, isto é, podemos escolher uma topologia onde os grafos vão ser definidos apenas pelos seus vértices.

4.5 A aplicação do vínculo de Gauss

Agora que já temos uma base completamente invariante para expressar nossos Ψ 's, vamos aplicar nossos vínculos sobre os estados cinemáticos para selecionar quais Ψ são estados físicos. Neste final de capítulo realizaremos a aplicação do vínculo de Gauss \mathcal{G} e a aplicação do vínculo \mathcal{F} será discutida posteriormente.

4.5.1 A diferenciação de uma holonomia

Então vamos primeiro aplicar o vínculo de Gauss \mathcal{G} (3.92):

$$\hat{\mathcal{G}}(\epsilon) = \int d^3x D_a \epsilon^I \hat{B}_I^a = \int d^3x (\partial_a \epsilon^I - \epsilon^{IJK} A^J \epsilon^K) \hat{B}_I^a \quad (4.52)$$

Onde $\hat{B}^a = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \hat{A}_a^I}$. A aplicação deste vínculo é basicamente diferenciar uma holonomia, isto é:

$$\int d^3x X_b^J(y) \frac{\delta}{\delta \hat{A}_b^J(y)} h_e[A] = \int_0^1 dt h_{(1,t)} X^J T_J h_{(t,0)} \quad (4.53)$$

Onde $X(s) = X^I(s = t)T_I$ foi inserido na curva e . A ação esperada deste operador é transformar um vetor de forma que o vetor resultante passe a ser definido em duas curvas, isto é, n curvas $\rightarrow 2n$ curvas, então:

$$\hat{\mathcal{G}}(\epsilon)h_e[A] = -i\hbar \int_0^1 dt h_{(1,t)}\dot{x}^a(t)D_a\epsilon^I(x(t))T_I h_{(t,0)} \quad (4.54)$$

Onde $\epsilon(t) = \epsilon^I(t)T_I$.

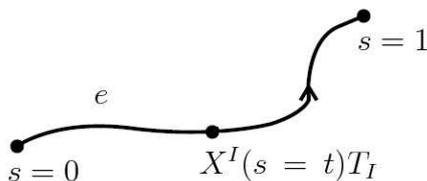


Figura 4.11: Aplicação de $\hat{\mathcal{G}}$ sobre uma curva e .

Usamos que $D\epsilon = dx^a D_a\epsilon = dt\dot{x}^a D_a\epsilon(t)$ para escrever nosso vínculo na notação matricial:

$$\hat{\mathcal{G}}(\epsilon)h_{(1,0)}[A] = -i\hbar \int_0^1 h_{(1,t)}(d\epsilon + [A, \epsilon])(t)h_{(t,0)} \quad (4.55)$$

Para calcular esta integral, precisamos saber como o campo A se relaciona com as holonomias de A , então diferenciamos a holonomia em relação ao parâmetro da curva:

$$\frac{d}{dt}h_{(t,0)} = \frac{d}{dt}\mathcal{P}e^{-\int_0^t ds\dot{x}^a(s)A_a(s)} = -\dot{x}^a(s)A_a(s)h_{(t,0)} \quad (4.56)$$

Note que esta expressão relaciona A e as holonomias de A . Multiplicando pela esquerda os dois lados da expressão um valor dt :

$$dt \left| \frac{d}{dt}h_{(t,0)} \right. = -dt\dot{x}^a(s)A_a(s)h_{(t,0)} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} dh_{(t,0)} &= -dx^a(s)A_a(s)h_{(t,0)} \\ &= -A(t)h_{(t,0)} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Ou para uma holonomia $h_{(t,t_0)}$:

$$dh_{(t,t_0)} = -A(t)h_{(t,t_0)} \quad (4.59)$$

Para a holonomia inversa $h_{(t_0,t)}$ temos a seguinte propriedade (lembrando que $h_{(t_0,t_0)} = \mathbb{1}$):

$$dh_{(t_0,t)} = dh_{(t,t_0)}^{-1} = -h_{(t,t_0)}^{-1} \underbrace{dh_{(t,t_0)}}_{-A(t)h_{(t,t_0)}} h_{(t,t_0)}^{-1} = h_{(t_0,t)} A(t) \quad (4.60)$$

Então agora podemos calcular (4.55):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}(\epsilon)h_{(1,0)} &= -i\hbar \int_0^1 h_{(1,t)}(d\epsilon + [A, \epsilon])(t)h_{(t,0)} \\ &= -i\hbar \int_0^1 (h_{(1,t)}d\epsilon(t)h_{(t,0)} + dh_{(1,t)}\epsilon(t)h_{(t,0)} + h_{(1,t)}\epsilon(t)dh_{(t,0)}) \\ &= -i\hbar \int_0^1 dt \frac{d}{dt}(h_{(1,t)}\epsilon(t)h_{(t,0)}) = -i\hbar(h_{(1,t)}\epsilon(t)h_{(t,0)})\Big|_0^1 \\ \hat{\mathcal{G}}(\epsilon)h_{(1,0)} &= -i\hbar(\epsilon(1)h_{(1,0)} - h_{(1,0)}\epsilon(0)) \end{aligned} \quad (4.61)$$

A equação (4.61) é a transformação infinitesimal da holonomia $h_{1,0}$, ou seja, o operador $\mathcal{G}(\epsilon)$ gera transformações de calibre da teoria. Apenas após calcularmos o segundo vínculo, o vínculo \mathcal{F} (equação (3.93)), que poderemos afirmar se \mathcal{G} gera todas as transformações de calibre da teoria.

4.5.2 As transformações de \mathcal{G} sobre um loop

Uma vez que definimos as transformações infinitesimais sobre as holonomias, vamos tentar escrevê-las de forma a tornar-las invariantes sobre estas transformações. Note que estas transformações inserem um ponto sobre a curva separando-a em duas, e a única possibilidade de um grafo sob esta transformação se manter invariante é ser um grafo fechado.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}(\epsilon(x))h_e[A] &= -i\hbar(\epsilon(x)h_e[A] - h_e[A]\epsilon(x)) \\ &= -i\hbar[\epsilon(x), h_e[A]] \end{aligned} \quad (4.62)$$

Então, vamos considerar agora funcionais de holonomias sobre loops $\Psi \in Cyl(\Gamma)$:

$$\Psi_{\Gamma,j,\alpha,\beta}[A] = R_\alpha^{(j)\beta}(U[A, e]) \quad (4.63)$$

Que se transformam sobre a ação de um $g(x) = e^{\epsilon(x)}$ como:

$$\Psi_{\Gamma,j,\alpha,\beta}^g[A] = (R^{(j)}g(x))^{-1\gamma} R_{\alpha}^{(j)\beta}(U[A, e]) (R^{(j)}g(x))_{\delta}^{\beta} \quad (4.64)$$

Note que $(R^{(j)}g^{-1}(x)) = (R^{(j)}g(x))^{-1}$ e $x = x_f = x_i$. Para esta transformação ser invariante ela tem que ser independente da escolha da base do laço (x) e para tal, tomamos o traço:

$$Tr \Psi_{\Gamma,j}^g = Tr \Psi_{\Gamma,j} \quad (4.65)$$

Pois o traço permite que façamos permutações cíclicas em um produto de holonomias. Então, a operação Tr implica em $\alpha = \beta$.

4.6 Invariância dos vértices: os *intertwinners*

Com a operação de traço, temos que multiplicar os parâmetros α e β associados às extremidades das curvas, na formação de um vértice. Os *intertwinners* são quantidades definidas nos vértices que assumem valores tais que mantêm o grafo com as invariâncias definidas acima, de forma a definirem uma álgebra para a representação de spins das curvas, $(\vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

4.6.1 Vértices bivalentes

Vamos começar analisando o caso dos vértices bivalentes, presentes nos *loops*:

Onde $v_{\alpha_2}^{\beta_1}$ é uma representação para o vértice, onde os índices são formados pelos índices livres. Para multiplicarmos α_1 e β_2 (operação de traço), precisamos de $j_1 = j_2$, isto é, que sejam matrizes com $dim(2j_1 + 1) = dim(2j_2 + 1)$. Então tomamos o traço:

$$Tr R^{(j)} = \sum_{\alpha} R_{\alpha}^{(j)\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} R_{\alpha}^{(j)\beta} \quad (4.66)$$

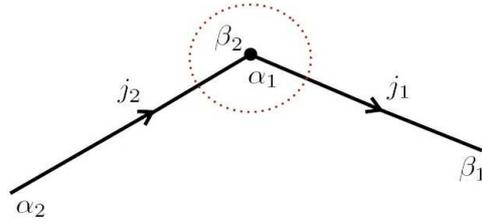


Figura 4.12: Vértice bivalente $v_{\alpha_2}^{\beta_1}$.

Onde δ_β^α é o tensor invariante da representação do grupo $G = SU(2)$, um caso particular de *intertwiner*.

$$\delta_\beta^{\alpha'} = R_\beta^{-1\beta'} \delta_{\beta'}^{\alpha'} R_{\alpha'}^\alpha = R_\beta^{-1\alpha'} R_{\alpha'}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \quad (4.67)$$

Então a invariância sobre traços em vértices bivalentes implica em $j_1 = j_2$.

4.6.2 Vértice Trivalente

Vamos analisar agora outro caso, um vértice trivalente $v_{\alpha_2, \alpha_1}^{\beta_3}$, onde os índices de $v_{\alpha_2, \alpha_1}^{\beta_3}$ são formados pelos índices livres.

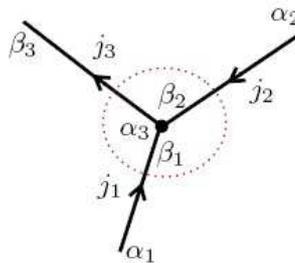


Figura 4.13: Vértice trivalente $v_{\alpha_2, \alpha_1}^{\beta_3}$.

Então:

$$v_{\alpha_2, \alpha_1}^{\beta_3} = h_{\alpha_3}^{(j_3)\beta_3} \cdot h_{\alpha_2}^{(j_2)\beta_2} \cdot h_{\alpha_1}^{(j_1)\beta_1} \cdot v_{\beta_2, \beta_1}^{\alpha_3} \quad (4.68)$$

Onde $v_{\beta_2, \beta_1}^{\alpha_3}$ é o *intertwiner* que queremos inserir para garantir a invariância. Vejamos

como o vértice se transforma sob uma transformação $g(x)$:

$$v_{\alpha_2, \alpha_1}^{g\beta_3} = R_{\alpha_1}^{-1\alpha'_1}(g(x))R_{\alpha_2}^{-1\alpha'_2}(g(x))R_{\beta'_3}^{\beta_3}(g(x))h_{\alpha'_3}^{(j_3)\beta'_3} \cdot h_{\alpha'_2}^{(j_2)\beta'_2} \cdot h_{\alpha'_1}^{(j_1)\beta'_1} \cdot R_{\alpha_3}^{-1\alpha'_3}(g(x))R_{\beta'_2}^{\beta_2}(g(x))R_{\beta'_1}^{\beta_1}(g(x)) \cdot v_{\beta_2, \beta_1}^{\alpha_3} \quad (4.69)$$

Para garantir a invariância no vértice x , impomos:

$$R_{\beta'_2}^{\beta_2}R_{\beta'_1}^{\beta_1}v_{\beta_2, \beta_1}^{\alpha_3}R_{\alpha_3}^{-1\alpha'_3} = v_{\beta'_2, \beta'_1}^{\alpha'_3} \quad (4.70)$$

Pela lei de transformação de um tensor, $v_{\beta_2, \beta_1}^{\alpha_3}$ é um tensor invariante. No caso do vértice trivalente, temos uma analogia com a teoria de combinação (adição) de momento angulares $j_3 \rightarrow (j_1, j_2)$, pois o estado final vai ser:

$$j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2| + 1 \oplus \cdots \oplus |j_1 + j_2| \quad (4.71)$$

É uma expansão de Clebsch-Gordan, que pode ser escrita como $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$. Os *intertwinners* $v_{\beta_2, \beta_1}^{\alpha_3}$ são coeficientes de Clebsch-Gordan.

Se nossos R 's sobre o vértice são da forma $R_m^{(j)m'}$, analogamente:

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_3, m_3 \rangle \quad ; \quad m_3 = m_1 + m_2 \quad (4.72)$$

No caso do vértice trivalente, ainda existem casos particulares aonde todas as linhas estão entrando ou saindo. Nesta situação, os *intertwinners* não são coeficientes de Clebsch-Gordan, entretanto existem representações mesmo nestes casos (como a representação adjunta).

4.6.3 Vértices (n-m)-valentes

Em geral, temos vértices (n-m)-valentes, cujos *intertwinners* são da forma:

$$v_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = R_{\beta_1}^{\beta'_1} \dots R_{\beta_n}^{\beta'_n} \cdot v_{\beta'_1 \dots \beta'_n}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m} \cdot R_{\alpha'_1}^{-1\alpha_1} \dots R_{\alpha'_m}^{-1\alpha_m} \quad (4.73)$$

Cuja construção é análoga à dos casos anteriores.

4.7 Uma nova base para as redes de *spin*

Podemos construir uma nova base para as redes de spin levando em consideração as invariâncias dos *links* e vértices à transformações infinitesimais geradas por \mathcal{G} . É mais simples de explicar esta troca de base com um exemplo.

4.7.1 Exemplo de mudança de base

Seja o vetor $|s\rangle$, um vetor de base da rede de spin, definida sobre um grafo como o da Figura 4.14.

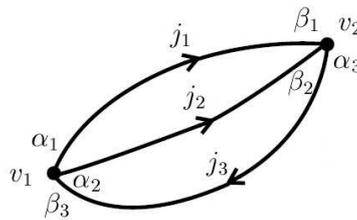


Figura 4.14: Grafo Γ associado ao vetor $|s\rangle$ da base de rede de *spin*.

Ao considerarmos *intertwinners* diferentes aparecem condições de invariância diferentes para os j_i , então $|s\rangle$ depende dos j_i e dos v_p .

$$\begin{aligned} \Psi_s[A] &\equiv \langle A|s\rangle \\ &= NR_{\beta_1}^{(j_1)\alpha_1} R_{\beta_2}^{(j_2)\alpha_2} R_{\beta_3}^{(j_3)\alpha_3} \dots v_{1\alpha_1\alpha_2}^{(j_1j_2j_3)\beta_3} v_{2\alpha_3}^{(j_1j_2j_3)\beta_1\beta_2} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Onde N é um fator de normalização. Note que todos os índices estão somados, então Ψ_s é invariante e $|s\rangle$ é a base de um espaço $\mathcal{H}_0 : |\Gamma, j_1 \dots j_n; v_1 \dots v_p\rangle$ ortonormal e diagonal nos spins:

$$\langle \Gamma, \vec{j}, \vec{v} | \Gamma', \vec{j}', \vec{v}' \rangle = 0 \quad (4.75)$$

Se $\Gamma \neq \Gamma'$ ou $\vec{j} \neq \vec{j}'$, isto é, a base é diagonalizada nos grafos e nos spins. Com Γ e \vec{j} fixados, podemos diagonalizar em \vec{v} e no final podemos gerar uma base ortonormal. Tomamos novamente o grafo do exemplo anterior, utilizando $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ e $j_3 = 1$, então nos vértices:

$$\begin{aligned} \text{vértice } v_2 & : j_1 \otimes j_2 = j_3 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 + \underline{1} \\ \text{vértice } v_1 & : j_3 = j_1 \otimes j_2 \end{aligned}$$

Então o *intertwiner* no vértice v_1 fica:

$$v_{(1)\alpha_1\alpha_2}^{\beta_3} = v_{(1)\alpha_1\alpha_2}^i = \sigma_{\alpha_1\alpha_2}^i \quad (4.76)$$

Onde $\sigma_{\alpha_1\alpha_2}^i$ são as matrizes de Pauli escritas como tensores de 3 coordenadas. As matrizes de Pauli são invariantes nesta representação. O outro vértice pode ser resolvido de maneira análoga. Com esta nova base para a rede de spin $|\Gamma, \vec{j}, \vec{v}\rangle$ definida em \mathcal{H}_0 , temos uma base para os nossos funcionais $\Psi_s[A]$ que já é invariante sobre transformações infinitesimais sobre holonomias, ou seja, é uma base onde o vínculo $\mathcal{G}(\epsilon)$ já está aplicado.

4.7.2 Como construir o espaço de Hilbert físico

Nosso próximo passo é aplicar o segundo vínculo da teoria, \mathcal{F} , sobre $\Psi_s[A]$ escrito na base de rede de spin invariante, para então reduzirmos nosso espaço de fase \mathcal{H}_0 em um espaço físico \mathcal{H}_{fis} , ou seja, o vínculo \mathcal{F} aplicado sobre um $\Psi \in \mathcal{H}_0$ é análogo a uma projeção:

$$P \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_{fis} \quad (4.77)$$

Onde $\mathcal{H}_{fis} = \{|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_0 \text{ t.q. } \hat{\mathcal{F}}[A]|\Psi\rangle = 0\}$.

Como esta construção é razoavelmente complicada, vamos considerá-la nos capítulos seguintes. No Apêndice C o leitor pode encontrar o caso de 1 + 1 dimensões do modelo BF, ou seja, o caso com apenas 1 dimensão espacial aonde não temos o vínculo \mathcal{F} (e nem curvatura!) e podemos construir um espaço de Hilbert físico e alguns operadores observáveis de maneira bem direta.

Capítulo 5

A Relatividade Geral e o Modelo BF

Antes de continuar com a aplicação do vínculo \mathcal{F} no modelo BF 2+1 dimensional, vamos revisar brevemente a teoria da RG desenvolvendo-a em um formalismo hamiltoniano covariante conhecido como formalismo ADM, e vamos escrever este formalismo como uma ação de primeira ordem apontando as semelhanças desta teoria com o modelo BF, discutido nos capítulos anteriores. A ação de primeira ordem é a reformulação da Relatividade Geral utilizando a base dos *vierbeins* e a conexão de spin ω , que são definidos adiante.

5.1 O formalismo de primeira ordem

5.1.1 A ação de Einstein-Hilbert

Começamos a nossa revisão de RG escrevendo uma grandeza que é invariante sobre transformações de coordenadas, um intervalo ds^2 no espaço-tempo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (5.1)$$

Na RG temos a conexão de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, que define a derivada covariante ∇_μ e o tensor de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ que representa a curvatura no espaço-tempo, que pode ser definido todo

em função da conexão de Christoffel:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (5.2)$$

O tensor de curvatura define o espaço, de forma que uma vez que $R = 0$ em um sistema de coordenadas, vamos ter $R = 0$ em todos eles (definição de tensor). Podemos escrever ainda:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (5.3)$$

$$R = R^\mu{}_\mu \quad (5.4)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (5.5)$$

Onde (5.3) é o tensor de Ricci, (5.4) é o escalar de Ricci e (5.5) é a equação de Einstein, aonde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, que obedece à equação de continuidade $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Então, o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ também deve satisfazer esta relação:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (5.6)$$

Da ação de Einstein-Hilbert que podemos derivar as equações de campo de Einstein (5.5) pelo princípio da ação mínima. A ação se escreve:

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} R + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} + \dots \quad (5.7)$$

Onde $g = \det(g_{\mu\nu})$, R é o escalar de Ricci. O primeiro termo desta ação corresponde ao campo gravitacional e os demais termos correspondem a campos de matéria, onde um deles foi escrito explicitamente. Consideraremos por simplicidade apenas a parte puramente gravitacional da ação na revisão que se segue.

5.1.2 A variedade \mathcal{M} na vizinhança de um ponto P

Vamos agora analisar como nossa teoria se comporta na vizinhança de um ponto P da variedade. Na vizinhança de um ponto P podemos tomar o plano tangente que é uma aproximação linear da variedade que funciona bem para valores suficientemente próximos de P , o que significa que podemos tratar esta vizinhança com as regras da Relatividade Restrita.

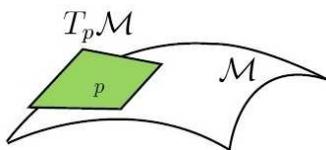


Figura 5.1: Espaço tangente em P de uma variedade \mathcal{M}_4 .

Uma possível base de coordenadas de T_P são os vetores ∂_μ , ou seja, nesta base os índices gregos μ, ν são índices vetoriais. Então, em T_P usaremos a Relatividade Restrita e para tal introduzimos uma base ortonormal de Minkowski $e_I, I = 0, 1, 2, 3$.

$$e_I = e_I^\mu \partial_\mu \quad (5.8)$$

$$e_I \cdot e_J = g_{\mu\nu}(x) e_I^\mu e_J^\nu = \eta_{IJ} \quad (5.9)$$

Onde η_{IJ} é a métrica de Minkowski. Esta base é chamada de *tetrad* ou de *vierbeins*.

Definimos agora o espaço cotangente T_P^* com base de coordenadas dx^μ (formas diferenciais). O produto destas formas com os vetores de T_P obedece a ortogonalidade entre os espaços:

$$dx^\mu \cdot \partial_\nu = \delta_\nu^\mu \quad (5.10)$$

Na base de *vierbeins*:

$$e^I \cdot e_J = \delta_J^I \quad (5.11)$$

Ou seja, I, J são índices tangentes devido à métrica de Minkowski. Algumas propriedades

e resultados desta base:

1.

$$e_I^\mu \cdot e_\nu^I = \delta_\nu^\mu \quad (5.12)$$

$$e_\mu^I \cdot e_J^\mu = \delta_J^I \quad (5.13)$$

2.

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^I(x)e_\nu^J(x)\eta_{IJ} \quad (5.14)$$

3.

$$(g^{\mu\nu}) \equiv (g_{\mu\nu})^{-1} \quad (5.15)$$

Se $\eta^{IJ} = \eta_{IJ}^{-1}$.

5.1.3 Transformações do grupo de Lorentz

A troca de base de *vierbeins* que preserva a ortonormalidade é uma transformação de Lorentz:

$$e'^I = \Lambda_J^I e^J \quad (5.16)$$

$$e'_I = \Lambda_I^J e_J \quad (5.17)$$

Onde Λ são os geradores das transformações de Lorentz. O grupo de transformações de Lorentz mantém invariante a métrica de Minkowski $\Lambda_I^J = \eta_{IK}\eta^{JL}\Lambda_L^K = \Lambda_I^K\Lambda_J^L\eta_{KL} = \eta_{IJ}$. Então localmente (em cada ponto P) vamos ter um grupo de calibre (Lorentz) associado, isto é, o espaço tangente T_P possui um feixe fibrado de $G = SO(1,3)$. Vamos procurar invariantes sobre as transformações de Lorentz locais. Seja o campo vetorial $v(x) : v =$

$v^\mu \partial_\mu = v^I e_I$, que possui a seguinte relação entre as bases:

$$v^\mu = e_I^\mu v^I \quad (5.18)$$

$$v^I = e_\mu^I v^\mu \quad (5.19)$$

Fazendo uma transformação de Lorentz:

$$v'^I(x) = \Lambda_J^I(x) v^J(x) \quad \rightarrow \quad v' = \Lambda v \quad (5.20)$$

$$\partial_\mu v' = \Lambda \partial_\mu v + \partial_\mu \Lambda v \quad (5.21)$$

Vai existir uma conexão $\omega : \omega_{J\mu}^I dx^\mu$ que faz com que esta derivada seja covariante. ω é conhecido como conexão de spin, ou apenas conexão:

$$(D_\mu v)^I = \partial_\mu v^I + \omega_{J\mu}^I v^J \quad (5.22)$$

A conexão ω se transforma como:

$$\omega'_\mu = \Lambda^{-1} \partial_\mu \Lambda + \Lambda^{-1} \omega_\mu \Lambda \quad (5.23)$$

Ou seja, ω se transforma como uma forma diferencial. Escrevendo nossa derivada covariante apenas com índices latinos, usando a notação de forma para a conexão:

$$Dv^I = dv^I + \omega_J^I v^J \quad (5.24)$$

Note ainda que este objeto possui apenas índices latinos, então ele é invariante sobre transformações gerais de coordenadas. Um objeto que só possua índices gregos é invariante sobre transformações de Lorentz.

5.1.4 Transformações gerais de coordenadas

Vamos verificar os difeomorfismos (transformações gerais de coordenadas), que são as transformações que atuam sobre os índices μ, ν . Então, um escalar de difeomorfismo é dado por $\delta\phi(x) = \xi^\mu(x)\partial_\mu\phi(x)$, uma vez que $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$. Seja um tensor t_ν^μ , vejamos como ele se transforma e a partir dele vamos ver como nossas quantidades se transformam sobre um difeomorfismo:

$$\delta t_\nu^\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda t_\nu^\mu - \partial_\mu \xi^\lambda t_\nu^\lambda + \partial_\nu \xi^\lambda t_\lambda^\mu \quad (5.25)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\mu\lambda} \quad (5.26)$$

$$\delta e_\mu^I = \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} \quad (5.27)$$

E também temos em cada termo da ação um termo $|e| = \sqrt{|g|}$:

$$\delta\sqrt{-g} = \partial_\mu(\xi^\mu\sqrt{-g}) \quad (5.28)$$

$$\delta(\sqrt{-g}X) = \partial_\mu(\xi^\mu\sqrt{-g})X + \sqrt{-g}\xi^\mu\partial_\mu X = \partial_\mu(\xi^\mu\sqrt{-g}X) \quad (5.29)$$

Então o termo $|e| = \sqrt{|g|}$ é quem garante que a integral é invariante de difeomorfismos, isto é, $\sqrt{|g|}$ é uma densidade escalar pois obedece a invariância sobre transformações gerais de coordenadas $\eta(x) : \delta\eta = \partial_\mu(\xi^\mu\eta)$.

5.1.5 A ação de Palatini

Então agora vamos estudar a ação de Einstein-Hilbert $S_{EH}[g]$ no formalismo de primeira ordem. Os objetos que vamos usar para construir a ação são os seguintes:

- $e^I(x) = e_\mu^I(x)dx^\mu$ a base de *vierbeins*;
- $\omega_J^I = \omega_{J\mu}^I(x)dx^\mu$ a conexão de spin;
- $g_{\mu\nu} = \eta_{IJ}e_\mu^I e_\nu^J$ a relação entre $g_{\mu\nu}$ e η_{IJ} ;

Temos também as transformações de Lorentz locais:

$$e'^I(x) = \Lambda_J^I(x)e^J(x) \quad (5.30)$$

$$\omega_J'^I = (\Lambda^{-1}d\Lambda)_J^I + (\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_J^I \quad (5.31)$$

Onde e^I é um campo vetorial e $d\Lambda_J^I = \partial_\mu \Lambda_J^I dx^\mu$.

Note que a maneira como e e ω se transformam sobre o grupo de Lorentz é análoga à maneira que B e A se transformam sobre o grupo de calibre $SU(2)$ no modelo BF. Tanto que tomando a dimensão $D = 3$, temos:

$$S = Tr \int BF$$

Onde $F = dA + A^2$ e B é uma 1-forma. Para o caso da gravitação, podemos fazer:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \omega_J^I \\ B &\rightarrow e^I \end{aligned}$$

Uma diferença aparece na posição dos índices, pois no modelo BF sempre trabalhamos com a constante de estrutura do grupo e não definimos nenhuma operação específica para levantar e abaixar índices, mas estas estão bem definidas no grupo de Lorentz com η_{IJ} . Podemos introduzir particularmente no caso 3D a forma diferencial $\tilde{e}_{IJ} = \varepsilon_{IJK}e^K$ e introduzir a curvatura $R_J^I = d\omega_J^I + \omega_K^I\omega_J^K$ que é um tensor antissimétrico e se transforma como $R' = \Lambda^{-1}R\Lambda$. Então:

$$S_P = Tr \int \tilde{e}_J^I R_K^J = \int \tilde{e}_J^I R_I^J \quad (5.32)$$

É a ação de Palatini. Tomando $\eta_{IJ} = [- + +]$ vemos que S_P se reduz a S_{EH} :

$$S_P = \int \tilde{e}_J^I R_I^J = \int \eta^{IL} \varepsilon_{LJK} e^K R_I^J = \int \varepsilon_{LJK} e^L R^{JK} = \int d^3x \sqrt{|-g|} R \quad (5.33)$$

Cabe lembrar que no caso tridimensional a teoria é topológica, isto é, não tem graus de liberdade locais. Na gravitação $3D$, isto significa que esta ação não leva em consideração as ondas gravitacionais ou o transporte de energia. Podemos ainda acrescentar mais um termo na ação de forma que:

$$S = S_P + S_\Lambda \quad (5.34)$$

Onde S_Λ é o termo de Holst, que no caso particular de $3D$ pode ser escrito como:

$$S_\Lambda = \Lambda \int \varepsilon_{IJK} e^I e^J e^K \quad (5.35)$$

Que é um termo invariante pois ε_{IJK} é invariante e o produto das formas também é invariante sobre difeomorfismos $\Lambda_L^I \Lambda_M^J \Lambda_N^K \varepsilon_{IJK} = \varepsilon_{LMN}$.

5.2 A construção da ação de Palatini em 4 dimensões

A razão para revisarmos aqui o caso da ação quadridimensional da teoria da gravitação de primeira ordem é introduzir as bases para a melhor compreensão dos operadores e observáveis que serão discutidos no capítulo seguinte. A quantização canônica desta teoria mediante a uma fixação de calibre gera as mesmas simetrias que encontramos no modelo BF utilizando o grupo de representações $SU(2)$, e a mesma estrutura de redes de *spin* mediante a uma quantização de *loops*.

5.2.1 Montando a ação de Palatini-Holst

Temos vários jeitos de escrever uma 4-forma, combinando e^I (1-forma) e R^{IJ} (2-forma). Escrevendo a ação já com as constantes apropriadas:

$$S_P = \frac{\sigma}{4\kappa} \int \varepsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge R^{KL} \quad (5.36)$$

Onde σ é a assinatura da métrica e $\kappa = 8\pi G$. Esta teoria deve ser capaz de descrever campos fracos, e para determinados valores de κ temos analogia com a dinâmica gravitacional newtoniana. A assinatura σ da métrica é uma constante onde:

$$\sigma[\eta_{IJ}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

então se $\sigma = -1$ a variedade é lorentziana, e se $\sigma = 1$ a variedade é riemanniana. Vamos trabalhar na RG com a variedade lorentziana, pois no caso riemanniano não temos estrutura causal, então a variedade não é um espaço físico. Um termo desta ação foi “descoberto” recentemente, que envolve outra maneira de escrever uma 4-forma:

$$S_{\text{Holst}} = -\frac{\sigma}{2\kappa\gamma} \int e^I e^J R_{IJ} \quad (5.38)$$

Onde γ é o parâmetro de Immirzi. Note que S_{Holst} não é topológico, isto é, não contribui para as equações de movimento. Este termo foi inventado para introduzir o parâmetro de Immirzi já na ação clássica, uma vez que este parâmetro é importante para a teoria quantizada.

Ainda podemos escrever uma 4-forma sem usar o R , que vai gerar termos S_Λ (da constante cosmológica) e termos de matéria $S_{\text{matéria}}$, e podemos escrever a ação completa:

$$S = S_P + S_{\text{Holst}} + S_\Lambda + S_{\text{Matéria}} \quad (5.39)$$

É suficiente para a nossa discussão nos atermos apenas aos dois primeiros termos da ação (5.39).

5.2.2 As equações de movimento

Vamos começar calculando as variações da parte S_P :

$$S_P = \frac{\sigma}{4\kappa} \int \varepsilon_{IJKL} e^I e^J R^{KL} \quad (5.40)$$

1. $\delta\omega$:

$$\delta S = \frac{\sigma}{4\kappa} \delta \int (d\omega_J^I + (\omega^2)_J^I) \underbrace{\varepsilon_{IKL}^J e^K e^L}_{\equiv X_I^J} \quad (5.41)$$

Onde X_I^J é uma 2-forma, então $d(\omega X) = d\omega X - \omega dX$. Escrevendo δS em termos de ω e X :

$$\delta S = \frac{\sigma}{4\kappa} \delta \text{Tr} \int (d\omega + \omega^2) X = \frac{\sigma}{4\kappa} \int \delta\omega (dX + [\omega, X]) \quad (5.42)$$

Então:

$$\frac{\delta S}{\delta\omega} = \frac{\sigma}{4\kappa} (dX + [\omega, X]) = \frac{\sigma}{4\kappa} \varepsilon_{IKL}^J (De^K e^L - e^K De^L)$$

Onde $De^K e^L - e^K De^L = 2De^K e^L$, então:

$$\frac{\delta S_P}{\delta\omega^{IJ}} = \frac{\sigma}{2\kappa} \varepsilon_{IJKL} T^K e^L \quad (5.43)$$

Onde $T^K = De^K$, que é a torção.

2. δe :

$$\begin{aligned} \delta S_P &= \frac{\sigma}{4\kappa} \cdot 2 \int \varepsilon_{IJKL} \delta e^I e^J R^{KL} \\ \frac{\delta S_P}{\delta e^I} &= \frac{\sigma}{2\kappa} \varepsilon_{IJKL} e^J R^{KL} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Agora vamos considerar a ação S com a parte S_{Holst} :

$$S = S_P + S_{\text{Holst}} = \frac{\sigma}{4\kappa} \int \varepsilon_{IJKL} e^I e^J R^{KL} - \frac{\sigma}{2\kappa\gamma} \int e^I e^J R_{IJ} \quad (5.45)$$

Podemos ver que a variação de S_{Holst} em relação a ω vai ser análoga à variação calculada em S_P , a saber:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\delta S}{\delta \omega^{IJ}} &= \sigma \frac{\delta S_P}{\delta \omega^{IJ}} - \frac{1}{2\kappa\gamma} D(e^I e^J) \\ &= \frac{1}{2\kappa} (\varepsilon_{IJKL} T^K e^L - \frac{1}{\gamma} \underbrace{(T_I e_J - T_J e_I)}_{X_{IJ}}) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Onde $X_{IJ} \equiv T_I e_J - T_J e_I$ e note que $\varepsilon_{IJKL} T^K e^L$ é uma contração de X^{KL} :

$$\varepsilon_{IJKL} T^K e^L = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJKL} \underbrace{(T^K e^L - T^L e^K)}_{X^{KL}} \equiv *X_{IJ} \quad (5.47)$$

Onde $*X_{IJ}$ é o dual de X_{IJ} . Podemos definir o dual do dual de X :

$$(*(*X)_{IJ})^{KL} = \frac{1}{2} \varepsilon^{KLIJ} (*X)_{IJ} = \frac{1}{4} \varepsilon^{KLIJ} \varepsilon_{IJMN} X^{MN} = \frac{\sigma}{2} (\delta_M^K \delta_N^L - \delta_N^K \delta_M^L) X^{MN} = \sigma X^{KL} \quad (5.48)$$

Isto é, o dual do dual é uma operação idempotente, com assinatura σ . Então, tomando $\frac{\delta S}{\delta \omega^{IJ}} = 0$, temos:

$$(*X)_{IJ} - \frac{1}{\gamma} X_{IJ} = 0 \quad (5.49)$$

Se $\gamma \rightarrow \infty$, $(*X) = 0$ e temos as equações de Palatini.

Considerando γ finito podemos montar um sistema de equações:

$$\begin{cases} *X - \frac{1}{\gamma} X = 0 \\ \sigma X - \frac{1}{\gamma} *X = 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

Onde utilizamos o fato da operação $**$ ser idempotente para obter:

$$(\sigma\gamma - \frac{1}{\gamma})X = 0 \quad (5.51)$$

Então, fazemos uma hipótese sobre o valor de γ , conhecida como hipótese de Ashtekar [27], que é tomar $\gamma \neq \sigma$ e então $X = 0$ ou $*X = 0$. Com $\gamma \neq \sigma$, $\varepsilon_{IJKL}T^K e^L = 0$, isto é, independe de γ . Se $X = 0$:

$$\begin{aligned} X_{IJ} = 0 &= T_I e_J - T_J e_I = T_{IMN} e^M e^N e_J - T_{JMN} e^M e^N e_I \\ &= e^M e^N e^P (T_{IMN} \eta_{PJ} - T_{JMP} \eta_{PI}) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Onde $T_{IMN} \eta_{PJ} - T_{JMP} \eta_{PI}$ é a parte antissimétrica em MNP . Então, tomando T completo ficamos com $T_{IMN} = 0$ ou $T^I = 0$, isto é, uma das equações de movimento indica que o sistema é livre de torção.

5.2.3 Variáveis de Ashtekar

Vamos considerar a ação S utilizando as variáveis de Ashtekar:

$$S = \frac{\sigma}{2\kappa} \int e^I e^J ((*R)_{IJ} - \frac{1}{\gamma} R_{IJ}) \quad (5.53)$$

Onde $** = \sigma$, $\sigma = 1$, $\gamma = 1$, o que simplifica bastante nossas equações de movimento:

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_{IJ}} = 0 \quad (5.54)$$

Que gera:

$$T^I = 0 \quad (5.55)$$

$$\omega_\mu^{IJ} = \omega_\mu^{IJ} (e_\mu^I, \partial_\lambda e_\mu^I) \quad (5.56)$$

Onde e e ω são variáveis independentes, assim como na formulação canônica do modelo BF onde B e A são variáveis independentes. A segunda equação de movimento é de primeira ordem em ω e segunda ordem em e :

$$\frac{\delta S}{\delta e^\lambda_I} = R_I^\lambda - \frac{1}{2} e^\lambda_I \mathcal{R} = 0 \quad (5.57)$$

Note que podemos tomar a variação do primeiro termo para obter as identidades de Bianchi:

$$\frac{\delta}{\delta e^I} \cdot \frac{1}{2} \int e^I e^J R_{IJ} = e^J R_{IJ} (= DT_I = 0) \quad (5.58)$$

Que são consequência de ($d^2 = 0$). Então temos:

$$T^I = de^I + \omega^I_J e^J \quad (5.59)$$

$$R^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega^I_K \omega^{KJ} = d\omega + \omega^2 \quad (5.60)$$

$$dT^I = d\omega^I_J e^J - \omega^I_J de^J = d\omega e - \omega T + \omega \omega e = -\omega T + Re \quad (5.61)$$

Lembrando que $DT^I = dT^I + \omega^I_J T^J = R^I_J e^J$ então:

$$dT = -\omega T + Re \quad \rightarrow \quad DT = dT + \omega T = Re \quad (5.62)$$

$$dR = d\omega\omega - \omega d\omega = R\omega - \omega^2\omega - \omega R - \omega\omega^2 \quad \rightarrow \quad DR = dR + [\omega, R] = 0 \quad (5.63)$$

E $DR^I_J = dR^I_J + \omega^I_K R^K_J - R^I_K \omega^K_J = 0$.

5.3 Quantização canônica da RG

As simetrias da ação (5.39) construída acima são:

1. Lorentz local (calibre): $\delta_{\text{Lor}} e^I = \epsilon^I_J(x) e^J$
2. Transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos): $\delta e = \mathcal{L}_\xi e$, $\delta \omega = \mathcal{L}_\xi \omega$, etc.

5.3.1 O formalismo hamiltoniano

Para realizarmos o formalismo canônico, precisamos resolver o problema de toda teoria relativística: introduzir o tempo t . De forma análoga à quantização realizada para o modelo BF, faremos uma restrição topológica sobre a variedade por meio das seguintes hipóteses.

Hipótese: Não existem curvas tipo tempo fechadas, isto é, podemos sempre num sistema de coordenadas definir $t : -\infty < t < \infty$, para $t \in \mathbb{R}$.

Como consequência, o espaço-tempo é uma foliação $\mathcal{M}_4 = \mathbb{R} \times \mathcal{M}_3$.

Hipótese: As folhas Σ conservam as formas topológicas $\Sigma(t) = \mathcal{M}_3$, isto é, preserva a topologia da variedade.

Na RG, o espaço pode ser deformado por difeomorfismos e estas transformações gerais de coordenadas escondem a estrutura de foliação da variedade. Como consequência desta hipótese, existe um sistema de coordenadas tal que t parametriza \mathbb{R} e t caracteriza a folha $\Sigma(t)$.

Então $(x^1, x^2, x^3) = (\vec{x})$ são coordenadas de \mathcal{M}_3 arbitrárias e (t, x^1, x^2, x^3) são coordenadas de \mathcal{M}_4 . Podemos separar em partes temporal e espaciais nossos *vierbeins*. Escrevendo como uma matriz de blocos o *vierbein* forma:

$$e_{\mu}^I = \begin{bmatrix} e_t^0 & e_a^0 \\ e_t^i & e_a^i \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

E o *vierbein* vetor:

$$e_I^{\mu} = \begin{bmatrix} e_0^t & e_i^t \\ e_0^a & e_i^a \end{bmatrix} = (e_{\mu}^I)^{-1} \quad (5.65)$$

Desenvolvendo o método de Dirac, encontramos vínculos secundários complicados de

tratar matematicamente. Uma saída para este problema é utilizar as variáveis de Ashtekar e fazer uma fixação parcial de calibre, isto é, vamos fazer uma fixação de calibre “temporal”: $e_I^t = 0$. Este desenvolvimento canônico é conhecido como formulação ADM, ou formalismo hamiltoniano.

5.3.2 Fixação de calibre parcial

A fixação de calibre temporal escrita como vetor é $e_I^t = 0$. A condição equivalente para formas é $e_a^0 = 0$. Aproveitamos para introduzir uma nova notação para algumas componentes do *vierbein*:

$$e_t^0 = N^0(x) = N(x) \quad (5.66)$$

$$e_t^i = N^i(x) \quad (5.67)$$

Onde N é chamado de *lapse* (lapso) e N^i é chamado de *shift* (desvio). Com a fixação de calibre, agora nossos *vierbeins* são matrizes de blocos triangulares, cujo cálculo da matriz inversa é trivial:

$$e_\mu^I = \begin{bmatrix} N & 0 \\ N^i & e_a^i \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

E o *vierbein* vetor:

$$e_I^\mu = (e_\mu^I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ -\frac{N^a}{N} & e_i^a \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Onde $N^a \equiv e_I^a N^I = e_0^a N + e_I^a N^I$. Então, as componentes de base dos *vierbeins* vão ser:

$$\begin{cases} e_0 = N^{-1} \partial_t - N^{-1} N^a \partial_a \\ e_I = e_I^a \partial_a \end{cases} \quad (5.70)$$

Note que como resultado da escolha de calibre, a componente ∂_t não aparece nos e_I , logo $e_I \in T_P(\mathcal{M}_3) \subset \mathcal{M}_3$, isto é, T_P é uma hipersuperfície a t constante. Note que é relativamente simples expressar o intervalo ds^2 na formulação ADM, uma vez que $g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}$ e $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 dt^2 + (N^i dt + e_a^I dx^a)(N^i dt + e_b^I dx^b) \\ ds^2 &= e_a^I e_b^I dx^a dx^b \end{aligned} \quad (5.71)$$

Onde ds^2 foi tomado a t constante. O intervalo é a métrica de \mathcal{M}_3 .

5.3.3 Quebra da simetria do grupo de Lorentz

Entretanto, com esta fixação de calibre ocorre um problema: o grupo de simetria de Lorentz está quebrado, isto é, perdemos a invariância de Lorentz completa uma vez que ao transformar os *vierbeins* de maneira geral os e_I saem do espaço tangente.

Ficamos então com a invariância de calibre residual, que são as rotações em e_I em cada ponto P (rotações locais). Para descrever estas rotações locais, podemos usar tanto os grupos de simetria $SO(3)$ quanto $SU(2)$, e escolhemos $SU(2)$ por este ser um grupo compacto e análogo ao grupo G que escolhemos no modelo BF. Lembrando que a medida de Haar do grupo $SU(2)$ é finita:

$$\left| \int_{SU(2)} d\mu(g) \right| < \infty \quad (5.72)$$

Um vez que integramos sobre os parâmetros de $SU(2)$, que são ângulos com domínio limitado. Exemplo de rotação:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -y \cos \theta + x \sin \theta \end{cases} \quad (5.73)$$

Já no caso de Lorentz temos o *boost*:

$$\begin{cases} t' = t \cosh \eta + x \sinh \eta \\ x' = t \sinh \eta + x \cosh \eta \end{cases} \quad (5.74)$$

Onde o parâmetro de Lorentz η : $-\infty < \eta < \infty$ e o grupo não tem medida de Haar:

$$\left| \int_{Lor} d\mu(g) \right| = \infty \quad (5.75)$$

A medida de Haar finita é a razão principal para a introdução de $SU(2)$.

5.3.4 O método hamiltoniano

Então, temos um método de quantização canônica análogo ao desenvolvido para o modelo BF, os resultados para a formulação ADM são:

$$S = \int dt \mathcal{L}(t) \quad (5.76)$$

$$\mathcal{L}(t) = \int_{\mathcal{M}_3(t)} d^3x [P_I^a \partial_t A_a^I] - H(A_a^I, P_I^a, \Lambda^I, N^a, N, \omega_a^{0I}) \quad (5.77)$$

$$A_a^I = \omega_a^I - \gamma \sigma \omega_a^{0I} \quad (5.78)$$

$$P_I^a = -\frac{\sigma}{2\kappa\gamma} \varepsilon^{abc} \varepsilon_{IJK} e_b^J e_c^K = -\frac{\sigma}{\kappa\gamma} e_{(3)}^a e_I^a \quad (5.79)$$

$$\Lambda^I = -\left(\frac{1}{2} \varepsilon_{JK}^I \omega_t^{JK} - \gamma \sigma \omega_t^{0I} \right) \quad (5.80)$$

Onde A_a^I é a conexão de Ashtekar [28], $\omega_a^I = \frac{1}{2} \varepsilon^{IJK} \omega_a^{JK} \equiv \Gamma_a^I$, P_I^a é o momento conjugado de A_a^I , Λ^I é um parâmetro de transformação, $N^a = N^I e_I^a$, $N^I = e_t^I$, $N = e_t^0$ e $\omega_a^{0I} \equiv K_a^I$, que chamamos de curvatura extrínseca. Para escrever a hamiltoniana H em detalhes, temos que aplicar o algoritmo de Dirac-Bergman, que se desenvolve de maneira análoga ao método aplicado no modelo BF. Primeiro, analisando a equação de movimento $T^I = 0$ (que implica em $\omega = \omega(e, \partial e)$) vemos que esta equação pode ser separada em equações de

variáveis “dinâmicas” T_{ta}^I e variáveis “não-dinâmicas” T_{ab}^I . Escrevemos T_{ab}^I :

$$T_{ab}^I = de^I + \varepsilon_{JK}^I \Gamma^J e^K = 0 \quad (5.81)$$

$$\Gamma^I = \Gamma_a^I dx^a = \Gamma_a^I(e_a^I, \partial e_a^I) dx^a \quad (5.82)$$

Note que A e K se juntam de forma que $A \propto \Gamma - K$. A consequência disso é que as variáveis independentes são:

$$A_a^I, P_I^a, \Lambda^I, N^a, N$$

Onde A e P são um par conjugado e Λ^I, N^a, N são multiplicadores de Lagrange. As variáveis não-independentes são:

$$\Gamma_a^I(e, \partial e), K_a^I \equiv \omega_a^{0I} = -\frac{\sigma}{\gamma}(A_a^I - \Gamma_a^I), e_a^I = -\sigma\kappa\gamma \frac{1}{e_{(3)}} P_I^a$$

Encontramos uma hamiltoniana completamente vinculada:

$$H(t) = \int_{\mathcal{M}_3(t)} d^3x (\Lambda^I \mathcal{G}_I(A, P) + N^a C_a(A, P, K) + NC(A, P, K)) \quad (5.83)$$

Onde os vínculos são:

$$\mathcal{G}_I(A, P) = D_a P_I^a = \partial_a P_I^a - \varepsilon^{IJK} A_a^I P_K^a \quad (5.84)$$

$$C_a = P_I^b F_{ab}^I + \frac{\gamma^2 - \sigma}{\gamma\sigma} K_a^I \mathcal{G}_I^a \quad (5.85)$$

$$C = \frac{\kappa\gamma^2}{2e_{(3)}} P_I^a P_J^b [\varepsilon_K^{IJ} F_{ab}^K - 2(\gamma^2 - \sigma) K_a^I K_b^J + (\gamma^2 - \sigma)\kappa\partial_a(\frac{P_I^a}{e_{(3)}}) \mathcal{G}^I] \quad (5.86)$$

E $F_{ab}^I = \partial_a A_b^I - \partial_b A_a^I + \varepsilon_{JK}^I A_a^J A_b^K$. Estes vínculos secundários são estáveis, isto é, geram uma álgebra de Poisson fechada e são de primeira classe, isto é, geram um grupo de simetria de calibre.

5.4 Quantização de laços da RG

Já temos as informações suficientes para fazer a quantização da teoria. Tomamos A como variável de configuração para descrever as funções de onda $\Psi[A]$, que são funções das holonomias de A :

$$h_e[A] = \mathcal{P}e^{-\int_e A} = \mathcal{P}e^{-\int_0^1 ds \dot{x}^a(s) A_a^I(\vec{x}(s)) T_I} \quad (5.87)$$

Que já foram estudadas de forma extensiva no caso do modelo BF.

5.4.1 Aplicação do vínculo de Gauss \mathcal{G}

Então vamos estudar os vínculos na teoria quântica, a começar pelo vínculo de Gauss \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}(\Lambda) = \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \Lambda^I(x) \mathcal{G}_I(x) = \int d^3x \Lambda^I D_a P_I^a = - \int d^3x D_a \Lambda^I P_I^a \quad (5.88)$$

Cuja álgebra é fechada:

$$\{\mathcal{G}(\Lambda_1), \mathcal{G}(\Lambda_2)\} = \mathcal{G}(\Lambda_1 \times \Lambda_2) \quad (5.89)$$

E $(\Lambda_1 \times \Lambda_2)^I = \varepsilon_{JK}^I \Lambda_1^J \Lambda_2^K$, que é a álgebra de Lie do grupo de calibre $SU(2)$. Este vínculo é complementamente análogo ao vínculo de Gauss que encontramos anteriormente na hamiltoniana do modelo BF. Então:

$$\{\mathcal{G}_I(\Lambda), A_b^J(y)\} = D_b \Lambda^J(y) \quad (5.90)$$

$$\{\mathcal{G}_I(\Lambda), P_L^b(y)\} = -\varepsilon_{LIK} P_I^a \Lambda^K \quad (5.91)$$

A aplicação deste vínculo em uma holonomia gera uma transformação infinitesimal sobre a holonomia:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}(\Lambda)h_e[A] &= \int_0^1 dt h_{t,1}\dot{x}^a(t)D_a\Lambda(x(t))h_{t,0} \\ \hat{\mathcal{G}}(\Lambda)h_{1,0}[A] &= -i\hbar(\Lambda(1)h_{1,0}[A] - h_{1,0}\Lambda(0)[A])\end{aligned}\quad (5.92)$$

5.4.2 Redes de Spin e estados físicos

Temos no caso da RG uma base idêntica à base definida na seção 4.7, onde Ψ_s é um estado invariante sobre transformações infinitesimais e $|s\rangle$ é a base de um espaço \mathcal{H}_0 : $|\Gamma, j_1 \dots j_n; v_1 \dots v_p\rangle$ ortonormal e diagonal nos spins:

$$\langle \Gamma, \vec{j}, \vec{v} | \Gamma', \vec{j}', \vec{v}' \rangle = 0 \quad (5.93)$$

Se $\Gamma \neq \Gamma'$ ou $\vec{j} \neq \vec{j}'$, isto é, a base é diagonalizada nos grafos e nos spins. Com Γ e \vec{j} fixados, podemos diagonalizar em \vec{v} e no final podemos gerar uma base ortonormal que já é invariante sobre transformações infinitesimais sobre holonomias, ou seja, é uma base onde o vínculo $\mathcal{G}(\epsilon)$ já está aplicado.

No capítulo seguinte vamos estudar a construção dos estados físicos na teoria quântica. Já discutimos esta construção para um caso mais direto (vide Apêndice C) que é o caso do modelo BF de 1+1 dimensões. Trataremos o caso do vínculo \mathcal{F} do modelo BF 2+1 dimensões e o caso do vínculo vetorial C_a para a RG em 3+1 dimensões.

Capítulo 6

Operadores e Observáveis

Neste capítulo vamos analisar a estrutura do espaço de Hilbert físico das nossas teorias, isto é, o espaço aonde estão definidos os funcionais de onda que obedecem os vínculos canônicos geradores de simetrias, tais como \mathcal{G} e \mathcal{F} no modelo BF em 2+1 dimensões, ou ainda \mathcal{G} , $C_a(\vec{N})$ e $C(N)$ no caso da RG 3+1 dimensional expressa nas variáveis de Ashtekar.

Nos capítulos anteriores ambas as teorias foram desenvolvidas até a construção dos estados de base $|s\rangle = |\Gamma, \vec{j}, \vec{v}\rangle \in \mathcal{H}_0$, onde $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_{\text{kin}}$ e $\Psi_s = \langle A|s\rangle$ são funcionais de onda invariantes de transformações de calibre infinitesimais, geradas por \mathcal{G} .

Uma vez construídos estes funcionais de onda que pertencem ao espaço dos estados físicos da teoria, é conveniente definirmos alguns observáveis e analisarmos a dinâmica da teoria, como faremos para o modelo BF em 2+1 dimensões. Em teorias como a RG 3+1 dimensional que revisamos no capítulo passado, temos várias maneiras de tentar construir nossos estados físicos, contudo este ainda é um problema em aberto na física da atualidade. Vamos mostrar rapidamente o tratamento do vínculo vetorial $C_a(\vec{N})$, cuja aplicação gera um subespaço aonde temos observáveis parciais e a dinâmica similar ao caso do modelo BF 2+1 dimensional!

6.1 Modelo BF: O operador curvatura

6.1.1 O estados invariantes de transformações infinitesimais

Seja $\Psi_s[A] = \langle A|\Psi\rangle_s \in \mathcal{H}_0$ o funcional associado às holonomias $U[A, e]$ escritas na base de uma rede de *spin* $|s\rangle$, composta de i linhas e p vértices:

$$\Psi_s[A] = NR_{\beta_1}^{(j_1)\alpha_1} \dots R_{\beta_i}^{(j_i)\alpha_i} \dots v_{1\vec{\alpha}_1}^{(j_1 \dots j_i)\vec{\beta}_1} \dots v_{\vec{\alpha}_p}^{(j_1 \dots j_i)\vec{\beta}_p} \quad (6.1)$$

E que possui um produto escalar bem definido:

$$\langle \Psi|\Phi\rangle = \int \mathcal{DA}(\Psi_s[A, \Gamma])^* \Phi_s[A, \Gamma'] = \langle \Gamma, \vec{j}, \vec{v}|\Gamma', \vec{j}', \vec{v}'\rangle \quad (6.2)$$

Que é ortogonal sobre os grafos Γ e diagonal nos *spins* \vec{j} , uma vez que consideramos já aplicado o vínculo de Gauss sobre $\Psi_s[A]$:

$$\langle A|\hat{\mathcal{G}}|\Psi\rangle_s = 0 \quad (6.3)$$

O que resulta na condição de termos estados $|\Psi\rangle = \Psi_s[A]$ invariantes sobre transformações de calibre infinitesimais.

6.1.2 A construção do projetor P

Então tomamos este $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_0$ para aplicarmos o segundo vínculo da teoria, que é o vínculo da curvatura espacial nula:

$$\varepsilon^{ab} F_{ab}|\Psi\rangle = 0 \quad (6.4)$$

Como a teoria com ambos os vínculos já aplicados deve possuir apenas estados físicos, é conveniente definir a atuação do operador $\hat{\mathcal{F}}$ sobre $|\Psi\rangle$ como sendo a atuação de um

projeter P sobre nosso espaço \mathcal{H}_0 :

$$P\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_{\text{fis}} \quad (6.5)$$

Onde $\mathcal{H}_{\text{fis}} = \{|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_0 \text{ t.q. } \hat{\mathcal{F}}[A]|\Psi\rangle = 0\}$. Esta condição sobre o funcional Ψ pode ser calculada explicitamente com o auxílio da teoria das distribuições. [29] Seja uma distribuição $T(x)$:

$$(x - a)T(x) = 0$$

Cuja solução geral é $T(x) = c\delta(x - a)$. Este resultado não pode ser análogo a nossa condição sobre Ψ pois $F[A]$ é um funcional de A . Vamos analisar:

$$f(x)T(x) = 0 \quad (6.6)$$

Consideramos agora x_i os zeros de f e que os zeros das funções f são zeros simples:

$$f(x_i) = 0 \quad (6.7)$$

$$\forall f(x_1) = 0 \quad \exists \quad f'(x_1) \neq 0 \quad (6.8)$$

Só exigimos que $f(x)$ possua zeros e que as derivadas nestes zeros sejam não nulas, logo:

$$(x - x_1)T(x) = 0$$

$$T(x) = c\delta(x - x_1)$$

Voltando a $f(x)T(x)$, fatorando um dos zeros $f(x) = (x - x_1)f_1(x)$ e a princípio supondo

degenerescência nula, encontramos:

$$(x - x_1)f_1(x)T(x) = 0$$

$$f_1(x)T(x) = c'\delta(x - x_1) \quad (6.9)$$

$$T(x) = \frac{c'}{f_1(x_1)}\delta(x - x_1) \quad (6.10)$$

Observe que $f(x) = (x - x_1)f_1(x) \rightarrow f'(x_1) = f_1(x_1)$. A equação acima é uma solução particular de (6.9), que podemos verificar por substituição:

$$f_1(x)T_{\text{part}}(x) = c' \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)}\delta(x - x_1) = c'\delta(x - x_1)$$

Queremos construir uma solução geral para $T = T_{\text{part}} + \tilde{T}_2$, onde \tilde{T}_2 é a solução de $f_1(x)\tilde{T}_2(x) = 0$:

$$\tilde{T}_2(x) = \frac{c'_2}{f_2(x_2)}\delta(x - x_2) + \tilde{T}_3 \quad (6.11)$$

Onde \tilde{T}_3 é solução geral de $f_2(x)\tilde{T}_3 = 0$. Enunciamos agora um lema para definir a forma de $T(x)$:

Lema: Seja $g(x)$ tal que $g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) \neq 0$. A solução geral de $g(x)T(x) = 0$ é tal que:

$$T(x) = \frac{c'}{\underbrace{g_0(x_0)}_{=g'(x_0)}}\delta(x - x_0) + \tilde{T} \quad (6.12)$$

Onde \tilde{T} é a solução geral de $g_0(x)\tilde{T}(x) = 0$ e g_0 é definido por $g(x) = (x - x_0)g_0(x)$. Então temos que $T(x)$ é uma série:

$$g(x)T(x) = 0 \rightarrow T(x) = \sum c_i\delta(x - x_i) \quad (6.13)$$

A fórmula geral de $T(x)$ para o caso de um zero x_i de ordem n_i é:

$$T(x) = \sum_i \sum_{k=0}^{n_i-1} c_{ik} \delta^{(k)}(x - x_i) \quad (6.14)$$

Note que tanto no caso de degenerescência nula ou nos casos degenerados, os coeficientes c_i são completamente arbitrários.

6.1.3 A base dos coeficientes de $T(x)$

Contudo, se analisarmos da construção de $\hat{\mathcal{F}}[A]|\Psi\rangle = 0$ veremos que estes coeficientes não são arbitrários de fato, pois se $T(x)$ é nosso funcional de onda ele deve representar valores projetados $\hat{\mathcal{F}}[A]$ no espaço físico \mathcal{H}_{fis} , então estes coeficientes vão ser elementos do grupo de representação, e formam uma base para o nosso funcional. Então, escrevemos $T(x)$ como sendo:

$$T(x) = c\delta(f(x)) = c \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (6.15)$$

Note que esta propriedade cria uma restrição para os coeficientes c_i , de forma que $\frac{c_i}{c_j} = \left| \frac{f'(x_j)}{f'(x_i)} \right|$. Podemos representar a função delta como a transformação de Fourier de uma constante:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_i) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x_i)} \\ T(x) &= \sum_i c_i \int dk e^{ik(x-x_i)} \end{aligned} \quad (6.16)$$

E agora a solução particular de $fT = 0$ na representação de Fourier fica:

$$T(x) = c\delta(f(x)) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikf(x)} \quad (6.17)$$

Onde k é a base gerada pelos coeficientes de $T(x)$, isto é, temos a solução de $fT = 0$ para um ponto x em particular. Para considerarmos a solução em toda a variedade

vamos tomar uma regularização para o espaço, como fizemos anteriormente para definir o produto interno no espaço das conexões A .

6.1.4 A introdução de uma regularização

Voltamos a considerar nossa teoria de calibre aonde f é o funcional $F[A]$, definido em um espaço cujos pontos são vértices de *links* v_α :

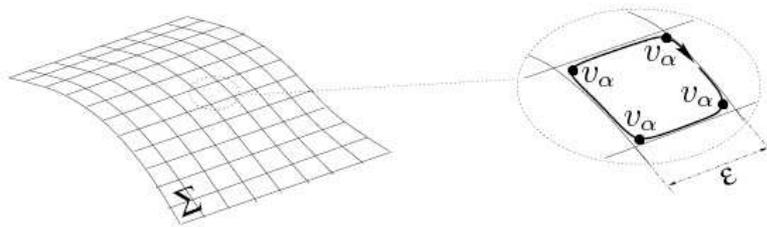


Figura 6.1: Espaço do funcional $F[A] \rightarrow F(A_1, \dots, A_\Omega)$ que é um espaço finito e enumerável $\alpha = 1, \dots, \Omega$ e $A_\alpha = A(\vec{x}_\alpha)$.

Sendo ϵ a menor unidade de comprimento neste espaço, a derivação em relação a x_1 , por exemplo, vai ser:

$$\partial_1 A(x_\alpha^1, x_\alpha^2) \cong \frac{1}{\epsilon} (A(x_\alpha^1 + \epsilon_1 x_\alpha^2) - A(x_\alpha^1, x_\alpha^2)) \quad (6.18)$$

Temos então um vínculo em cada ponto, o que é um sistema de Ω equações:

$$F_{(x)}(A)\Psi[A] = 0 \quad \forall x \quad (6.19)$$

$$F(A_\alpha)\Psi(A_1, \dots, A_\Omega) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, \Omega \quad (6.20)$$

Então temos que resolver ponto a ponto. Para $\alpha = 1$, $\Psi_1[A]$ independe de A_1 :

$$\begin{aligned} \Psi(A_1, A_2, \dots) &= \sum_i \delta(A_1 - A_{1,i}) \Psi_i^\dagger(A_2, \dots, A_\Omega) \\ &= \int dN_1 e^{iN_1 F(A_1)} \Psi^\dagger(A_2, \dots) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Onde Ψ_i^\dagger é uma constante de integração que depende dos outros parâmetros. Tomamos

agora o ponto $\alpha = 2$:

$$\begin{aligned}
F(A_2)\Psi &= 0 \rightarrow F(A_2)\Psi_i^{\check{1}} = 0 \\
\Psi(A_1, A_2, \dots) &= \sum_i \sum_j \delta(A_1 - A_{1,i})\delta(A_2 - A_{2,j})\Psi_{ij}^{\check{1}\check{2}}(A_3, \dots) \\
&= \int dN_1 dN_2 e^{i(N_1 F(A_1) + N_2 F(A_2))} \Psi^{\check{1}\check{2}}(A_3, \dots)
\end{aligned} \tag{6.22}$$

E $\Psi^{\check{1}\check{2}}$ independe de A_1 e A_2 , então em geral:

$$\Psi[A] = \prod_x \delta(F_x(A)) = \int \prod_{\alpha=1}^{\Omega} dN_{\alpha} e^{i \sum_{\alpha} N_{\alpha} F(A_{\alpha})} \tag{6.23}$$

Onde N_{α} é um gerador do grupo de simetrias associado a este operador.

6.1.5 As transformações geradas por \mathcal{F}

Tomando todos os \vec{x}_{α} do espaço ($\epsilon \rightarrow 0$) e considerando uma integração funcional em \mathcal{DN} :

$$\Psi[A] = \underbrace{\int \prod_x dN_x}_{\int \mathcal{DN}} e^{i \sum_x N_x F_x} = \int \mathcal{DN} e^{i \int_{\epsilon} d^{(D-1)}x N_x F_x} \tag{6.24}$$

É a solução de $F(A)\Psi[A] = 0$ que define o projetor $P \cong \delta(F(A))$. Para definirmos o projetor P formalmente, consideramos então o vínculo F integrado, gerador de uma transformação:

$$\hat{\mathcal{F}}(\eta) = \int d^2x \eta(x) F(A) \tag{6.25}$$

Que age sobre as variáveis dinâmicas A e B como vimos nas transformações (3.89) do modelo BF tipo 2:

$$\begin{cases} \delta_{(6)} A_a = 0 \\ \delta_{(6)} \tilde{B}^a = D_b \eta^{ab} \end{cases} \tag{6.26}$$

Considerando os estados $\Psi \in \mathcal{H}_{\text{fis}}$ invariantes sobre estas transformações e também invariantes sobre as transformações (3.86) tipo YM espaciais geradas pelo vínculo de Gauss, podemos dizer que estes estados são invariantes sobre transformações de calibre infinitesimais e também invariantes de difeomorfismos.

Uma vez que operador F age sobre todo o espaço podemos escrever então o projetor P , que projeta o espaço cinemático invariante de calibre em um espaço físico $P : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_{\text{fis}}$ como sendo:

$$\hat{P}|\Psi\rangle = \int \mathcal{D}\mathcal{N} e^{i \int NF} |\Psi\rangle \quad (6.27)$$

6.2 Os operadores e observáveis do modelo BF 2+1 dimensional

No Apêndice C discutimos sobre os operadores e observáveis para o modelo BF em 1+1 dimensões, que como vimos é um modelo bem simplificado por não possuir o operador curvatura $\hat{\mathcal{F}}$ nem as simetrias associadas a ele.

Contudo, na seção anterior definimos o operador curvatura $\hat{\mathcal{F}}$ para o caso 2+1 dimensional, e agora podemos discutir sobre os operadores observáveis nesta teoria, uma vez que aplicados os operadores $\hat{\mathcal{G}}$ e $\hat{\mathcal{F}}$ temos um projetor \hat{P} que age sobre os estados $|\Psi\rangle_s$ escritos na base de uma rede de spin $|s\rangle$ em estados físicos (6.27):

$$\hat{P}|\Psi\rangle_s = \int \mathcal{D}\mathcal{N} e^{i \int NF} |\Psi\rangle_s = |\Psi\rangle_{\text{fis}} \quad (6.28)$$

Cabe comentar que estamos estudando o modelo BF de 2+1 dimensões no grupo de representações $SU(2)$, cuja assinatura é euclidiana. Poderíamos ter tomado um grupo $SU(1, 1)$ de assinatura lorentziana sem prejuízo à formulação canônica previamente desenvolvida, mas quanticamente existirão diferenças notáveis como foi mostrado por Freidel et al [30]

que o espectro de autovalores do observável comprimento $\hat{\mathcal{L}}$ vai ser contínuo no caso lorentziano em vez de discreto, como veremos no caso euclidiano ($SU(2)$), devido ao operador Casimir de cada uma destas representações.

Outro detalhe em relação ao caso 1+1 dimensional é que lá estudamos os observáveis T (operador traço) e L (comprimento). No nosso caso 2+1 dimensional não temos como definir um operador T , uma vez que nosso campo B agora é uma 1-forma e devido ao produto *wedge* de formas o traço do produto $B \wedge B$ se anula.

6.2.1 O operador comprimento \mathcal{L}

Classicamente, o comprimento de uma curva $c : s \in [0, 1] \rightarrow c(s) \in \Sigma$ é dado por:

$$L_c = \int_{[0,1]} ds \sqrt{\dot{c}^a(s)\dot{c}^b(s)\tilde{B}^{aI}(c(s))\tilde{B}^{bI}(c(s))} \quad (6.29)$$

O operador quântico que representa o comprimento clássico é obtido substituindo o campo $\tilde{B}^{aI}(x)$ pelo operador correspondente $\hat{B}^{aI}(x)$. Vamos então estudar a ação deste operador de comprimento em estados de uma rede de *spin*, de forma análoga ao operador de área na quantização de laços em 3+1 dimensões (como veremos na seção 6.4).

Então consideramos a curva c e o grafo Γ da base da rede de *spin*, e por simplicidade consideramos que a curva c só intercepta o grafo em suas linhas e apenas uma vez por linha, e que também não corta nenhum vértice.

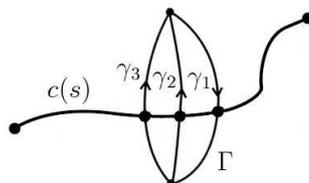


Figura 6.2: Curva $c(s)$ interceptando um grafo Γ da base de rede de *spin*.

Estas hipóteses podem parecer restritivas, contudo as holonomias definidas sobre um grafo podem sempre ser decompostas em produto de holonomias, de forma que sempre podemos

ter apenas uma interseção com a curva por linha. O caso da interseção com vértices será discutido na próxima subseção.

A construção deste operador que se segue faz uso da diferenciação de uma holonomia definida na seção 4.5.1 e é análoga à construção de L realizada no apêndice C.1.5, isto é, a ação de $\hat{B}^{aI}(x)$ sobre um estado da rede de *spin* insere um gerador $T_I^{(j)}$ (da representação $SU(2)$) dentro do estado. Chamamos de γ as linhas da rede de *spin* que interceptam a curva c , e p os pontos onde ocorrem as interseções, para então escrever:

$$\hat{\mathcal{L}}_c|\Psi\rangle = \hbar \left[\int_c ds \int_\gamma dp \varepsilon_{ab} \dot{c}^a(s) \frac{d\gamma^b}{dp} \delta^2(\gamma(p) - c(s)) \sqrt{-\sum_I T_I^{(j)} T_I^{(j)}} \right] |\Psi\rangle \quad (6.30)$$

O que mostra que estados de rede de *spin* são autovetores do operador comprimento. Definimos o número de interseção ϵ como sendo:

$$\epsilon = \int_c ds \int_\gamma dp \left| \varepsilon_{ab} \dot{c}^a(s) \frac{d\gamma^b}{dp} \delta^2(\gamma(p) - c(s)) \right| \quad (6.31)$$

Que é o número de interseções entre a curva c e uma linha γ do grafo da rede de *spin* Γ , uma vez que $\varepsilon_{ab} \dot{c}^a(s) \frac{d\gamma^b}{dp}$ é o jacobiano da transformação entre as coordenadas ortonormais (x_1, x_2) e as coordenadas locais (s, p) . Note que se a curva c e a linha γ forem tangentes, o operador $\hat{\mathcal{L}}_c$ se anula.

6.2.2 O espectro do operador \mathcal{L}_c

Tomando $\epsilon = 1$, o operador comprimento se reduz à:

$$\hat{\mathcal{L}}_c|\Psi\rangle = \hbar \sqrt{-\sum_I T_I^{(j)} T_I^{(j)}} |\Psi\rangle \quad (6.32)$$

E temos que $\sum_I T_I^{(j)} T_I^{(j)} = (T_I^{(j)})^2 = -j(j+1)\mathbb{1}$ é o operador Casimir na representação de *spin* $j \in SU(2)$, o que dá o espectro do observável comprimento como sendo discreto:

$$\hat{\mathcal{L}}_c|\Psi\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1)} |\Psi\rangle \quad (6.33)$$

6.2.3 O operador área \mathcal{A}

O operador área do modelo BF em 2+1 dimensões guarda analogia com o operador volume na quantização de laços de 3+1 dimensões, como veremos na seção 6.4. Para definirmos o operador área $\hat{\mathcal{A}}$ é conveniente definirmos o vetor densidade normal \tilde{B}_I para o campo \tilde{B}^{aI} conjugado da conexão, como sendo:

$$\tilde{B}_I = \frac{1}{2} f_{IJK} \varepsilon_{ab} \tilde{B}^{aJ} \tilde{B}^{bK} \quad (6.34)$$

Agora consideramos uma superfície \mathcal{S} contida em uma folha Σ (fechada e orientável) da variedade $\mathcal{M}_3 = \mathbb{R} \times \Sigma$. A área desta superfície \mathcal{S} vai ser dada pelo produto de dois vetores:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} d^2s \sqrt{\delta^{IJ} \tilde{B}_I \tilde{B}_J} \quad (6.35)$$

Escrita em termos do vetor densidade normal. Para analisar o operador associado a esta grandeza, cabe lembrar que quando o operador $\hat{B}^{aI}(x)$ age sobre uma rede de *spin*, a atuação do operador só vai gerar um resultado não-nulo somente se x pertencer ao grafo. Quando x está no meio de uma linha, a atuação do operador gera um valor proporcional à tangente da linha $\dot{\gamma}^a(s)T_I$ como vimos na seção passada.

A atuação do operador vetor densidade normal \hat{B}_I vai gerar um resultado do tipo $\varepsilon_{ab} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b = 0$ então os únicos pontos aonde \hat{B}_I vai ter uma atuação não-nula são os vértices do grafo, isto é, o operador área é composto apenas de contribuições dos vértices da rede de *spin*.

Para calcular a atuação do operador área $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ em um estado da rede de *spin*, nós regularizamos a superfície em porções pequenas \mathcal{S}_n que contenham no máximo um vértice v da rede de *spin*.

Por simplicidade, vamos tomar uma superfície elementar \mathcal{S}_n que contenha um vértice v_n trivalente da rede de *spin*. O caso (n, m) -valente é muito bem apresentado em (ref Thiemann 2+1). Para definir o operador área precisamos definir uma orientação para Σ ,

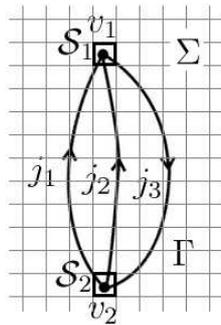


Figura 6.3: O grafo Γ definido sobre uma área Σ regularizada. As contribuições não-nulas vêm dos elementos de superfície \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 .

o que significa definir uma ordem para contar as linhas incidentes sobre o vértice.

Sendo assim, tomando um vértice v_n que tem 3 linhas incidentes γ_i , onde $i = 1, 2, 3$, com representação $j_i \in SU(2)$, calculamos a ação de \hat{B}_I sobre o vértice com a inserção de alguns geradores T_I^j :

$$\hat{B}_I \Psi_{v_n}^{j_1 j_2 j_3} = -\frac{\hbar^2}{2} \epsilon_{\gamma\gamma'} \epsilon_I^{JK} T_J^{(j_\gamma)} T_K^{(j_{\gamma'})} \Psi_{v_n}^{j_1 j_2 j_3} \quad (6.36)$$

Onde γ, γ' são duas linhas quaisquer se encontrando no vértice v_n e $\epsilon_{\gamma\gamma'}$ registra a orientação relativa entre as linhas. Esta expressão pode ser completada considerando a simetria da representação $\vec{T}^{(j_1)} + \vec{T}^{(j_2)} + \vec{T}^{(j_3)} = 0$ e considerando todos os termos possíveis com os pares de (γ, γ') . Então:

$$\begin{aligned} \hat{B}_I \Psi_v^{j_1 j_2 j_3} &= -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{\gamma, \gamma'} \int ds dt \overbrace{\delta^2(x - \gamma(s)) \delta^2(x - \gamma'(t)) |\epsilon_{ab} \gamma^a(s) \gamma'^b(t)|}^{\alpha(x, v)} \\ &\quad \cdot \epsilon_{\gamma\gamma'} \epsilon_I^{JK} T_J^{(j_\gamma)} T_K^{(j_{\gamma'})} \Psi_v^{j_1 j_2 j_3} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Onde $\alpha(x, v)$ é chamado de fator geométrico, que ao ser regularizado vemos que é justamente proporcional à $\delta^2(x - v_n)$. Então, o operador de área $\hat{\mathcal{A}}_S$ agindo sobre um estado da rede de *spin* vai ser:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_S \Psi^{j_1 j_2 j_3} &= \sqrt{\delta^{II'} \hat{B}_I \hat{B}_{I'} \Psi^{j_1 j_2 j_3}} \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \sqrt{\delta^{II'} \epsilon_I^{JK} \epsilon_{I'}^{J'K'} T_J^{(j_1)} T_{K'}^{(j_2)} T_{J'}^{(j_1)} T_{K'}^{(j_2)}} \Psi^{j_1 j_2 j_3} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Note que ao contrário do caso 3+1 dimensional com o operador volume $\hat{\mathcal{V}}$, os vértices trivalentes (e os bivalentes) contribuem para o operador de área $\hat{\mathcal{A}}$ em 2+1 dimensões. Este operador é essencialmente auto-adjunto, positivo semi-definido e tem o espectro completamente discreto.

6.2.4 O espectro do operador $\hat{\mathcal{A}}_S$

Para fazer uma análise espectral deste operador precisamos considerar a estrutura dos vértices e seus *intertwinners*, que no caso trivalente vão obedecer a teoria de Clebsch-Gordan. Nesta situação, existem dois casos não triviais para as linhas de v , e ambos os casos podem ser mostrados com um pouco de álgebra entre os geradores do grupo. Para simplificar a notação, definimos Δ_i como sendo:

$$\Delta_i = -j_i(j_i + 1) = (\vec{T}^{(j_i)})^2 \quad (6.39)$$

O operador Casimir associado à linha γ_i de *spin* j_i . Então analisamos os casos separadamente:

1. Duas das três linhas $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ não tem tangentes colineares em v : Nesta situação, $\epsilon_{\gamma\gamma'} = 1$ com $(\gamma, \gamma') = (1, 2) = (2, 3) = (3, 1)$, isto é, nós tomamos a multiplicação cruzada das linhas no sentido anti-horário do vértice, de forma que $\vec{B}_v = \vec{T}^{(j_1)}\vec{T}^{(j_2)} + \vec{T}^{(j_2)}\vec{T}^{(j_3)} + \vec{T}^{(j_3)}\vec{T}^{(j_1)}$. Com isto, escrevemos $\hat{\mathcal{A}}_S$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_S \Psi^{j_1 j_2 j_3} &= \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \frac{9}{4} [2(\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2 \Delta_3 + \Delta_3 \Delta_1) - (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \right\}^{\frac{1}{2}} \Psi^{j_1 j_2 j_3} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Este autovalor é estritamente positivo a menos que $j_1 = j_2 = j_3 = 0$, caso onde o operador se anula. Para vermos isto, lembramos que j_1, j_2, j_3 não são arbitrários, isto é, respeitam a álgebra de Clebsch-Gordan. Então, podemos assumir sem perda

de generalidade que $j_2 \geq j_1$ de forma que $j_3 \in \{j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, j_2 - j_1\}$

$$\begin{aligned} f(\Delta_3) &= 2(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_2\Delta_3 + \Delta_3\Delta_1) - (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) \\ &= 4\Delta_1\Delta_2 - (\Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2)^2 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Em termos de autovalores, o valor mais baixo ocorre no máximo da função $|\Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2|$ e $-\Delta_3$ é uma função crescente de j_3 . Para dados $j_2 \geq j_1$ quaisquer, os extremos da função são dados quando $j_3 = j_2 \pm j_1$ e são $|2j_1j_2|$ e $|-2j_1(j_2 + 1)|$ respectivamente. Então, (6.41) mostra que $f(\Delta_3) \geq 4j_1(j_2 + 1)(j_2 - j_1) \geq 0$.

No caso de um vértice bivalente, podemos tomar $\Delta_3 = 0$ e $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ para encontrar um resultado extremamente simples:

$$\hat{\mathcal{A}}_S \Psi^{j_1 j_2} = \frac{\hbar^2}{2} \sqrt{-\Delta} \Psi^{j_1 j_2} = \frac{\hbar^2}{2} \sqrt{j(j+1)} \Psi^{j_1 j_2} \quad (6.42)$$

2. Duas delas, digamos γ_1, γ_2 tem tangentes colineares em v mas γ_1, γ_3 e γ_2, γ_3 não tem.

Nesta situação, chamamos as linhas com tangentes colineares de γ_1, γ_2 , de forma que $\epsilon_{\gamma_1 \gamma_2} = 0$ e $\epsilon_{\gamma_1 \gamma_3} = 1$, $\epsilon_{\gamma_3 \gamma_2} = 1$. Então $\vec{B}_v = \vec{T}^{(j_1)} \vec{T}^{(j_3)} + \vec{T}^{(j_3)} \vec{T}^{(j_2)}$. Com isto, escrevemos $\hat{\mathcal{A}}_S$:

$$\hat{\mathcal{A}}_S \Psi^{j_1 j_2 j_3} = \frac{\hbar^2}{2} \sqrt{[2(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_2\Delta_3 + \Delta_3\Delta_1) - (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)] - \Delta_3} \Psi^{j_1 j_2 j_3} \quad (6.43)$$

Que é positivo a menos que $\Delta_3 = 0$, caso aonde o operador se anula.

6.3 RG: O operador vetorial e o escalar

6.3.1 Os vínculos remanescentes

Agora vamos estudar os vínculos C_a (vínculo vetorial) e C (vínculo escalar). Os vínculos C_a e C podem ser escritos como uma combinação de vínculos do tipo $C_a = C'_a + (\dots)\mathcal{G}_I$, $C = C' + (\dots)\mathcal{G}_I$ então podemos redefini-los:

$$C_a = P_I^b F_{ab}^I \quad (6.44)$$

$$C = \frac{\kappa\gamma^2}{2e_{(3)}} P_I^a P_J^b [\varepsilon^{IJ}{}_K F_{ab}^K - 2(\gamma^2 - \sigma) K_a^I K_b^J] \quad (6.45)$$

E os escrevemos como geradores de transformações:

$$C_{\text{dif}}(\vec{N}) = \int_{\Sigma} d^3x N^a(x) C_a(\vec{x}) \quad (6.46)$$

$$C(N) = \int_{\Sigma} d^3x N(x) C(x) \quad (6.47)$$

Com a seguinte álgebra entre os vínculos, lembrando que $\{\mathcal{G}(\Lambda_1), \mathcal{G}(\Lambda_2)\} = \mathcal{G}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$:

$$\{\mathcal{G}(\Lambda), C_{\text{dif}}(\vec{N})\} = \mathcal{G}(\mathcal{L}_{\vec{N}}\Lambda) \quad (6.48)$$

$$\{C_{\text{dif}}(\vec{N}_1), C_{\text{dif}}(\vec{N}_2)\} = C_{\text{dif}}([\vec{N}_1, \vec{N}_2]) \quad (6.49)$$

Onde $\mathcal{L}_{\vec{N}}\Lambda = N^a \partial_a \Lambda$ é um difeomorfismo gerado por um escalar e o colchete de Lie $[\vec{N}_1, \vec{N}_2]^a = N_1^b \partial_b N_2^a - N_2^b \partial_b N_1^a$ é um difeomorfismo gerado por um vetor. Ainda temos o vínculo $C(N)$:

$$\{\mathcal{G}(\Lambda), C(N)\} = 0 \quad (6.50)$$

$$\{C_{\text{dif}}(\vec{N}), C(M)\} = -C(\mathcal{L}_{\vec{N}}M) \quad (6.51)$$

$$\{C(N_1), C(N_2)\} = \kappa^2 \gamma^2 \sigma (C_{\text{dif}}(\vec{S}) + \mathcal{G}(S^a A_a)) + (\sigma - \gamma^2) \mathcal{G} \left(\frac{[P^a \partial_a N, P^b \partial_b N]}{e_{(3)}} \right) \quad (6.52)$$

Onde $S^a = (N_1 \partial_b N_2 - N_2 \partial_b N_1) \frac{P^a}{P^I B} e_{(3)}$ e $P^a = P^a T^I$. Isto é, $C(N)$ tem todos os índices somados então é invariante de calibre. A última transformação depende dos campos, então não temos mais combinações lineares de vínculos, e a álgebra de $C(N)$ não é fechada. Isto é, se conseguimos resolver $\{C(N_1), C(N_2)\}|\Psi\rangle = 0$, teremos problema de ordem, isto é, $\{C(N_2), C(N_1)\}|\Psi\rangle \neq 0$.

6.3.2 O vínculo C_{dif}

Como vamos ver, podemos desenvolver a quantização de C_{dif} aplicado sobre holonomias e vamos encontrar as bases para desenvolver o formalismo de *spinfoam*, que também aparecem de forma análoga ao modelo BF com o desenvolvimento da quantização de \mathcal{F} .

Então, consideramos os Ψ_{kin} , que são os Ψ que já obedecem o vínculo de Gauss $\mathcal{G}|\Psi_{\text{kin}}\rangle = 0$. Como $\{C_{\text{dif}}, C_{\text{dif}}\} \propto C_{\text{dif}}$ então se $C_{\text{dif}}|\Psi\rangle = 0$, também teremos $\{C_{\text{dif}}, C_{\text{dif}}\}|\Psi\rangle = 0$. Ou seja, podemos escolher uma ordem para os geradores da transformação de C_{dif} :

$$\hat{C}_{\text{dif}}(\vec{N}) = \int_{\Sigma} d^3x N^a(\vec{x}) \hat{C}_a(\vec{x}) \quad (6.53)$$

Onde escolhemos $\hat{C}_a = \hat{F}_{ab}^I \hat{P}_i^b$. Então:

$$\hat{C}_{\text{dif}}(\vec{N})\Psi[A] = -i\hbar \int_{\Sigma} d^3x N^a(\vec{x}) \hat{F}_{ab}^I(x) \frac{\delta}{\delta A_b^I(x)} \Psi[A] \quad (6.54)$$

Vamos começar a calcular por $\hat{C}_{\text{dif}}(\vec{N})A_c^J(y)$:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\text{dif}}(\vec{N})A_c^J(y) &= -i\hbar N^a(y) F_{ac}^J(y) = -i\hbar N^a (\partial_a A_c^J - \partial_c A_a^J + \varepsilon_{KL}^J A_a^L A_c^K) \\ &= -i\hbar \underbrace{(N^a \partial_a A_c^J + \partial_c N^a A_c^J)}_{\mathcal{L}_{\vec{N}} A_c^J} - \partial_c \underbrace{(N^a A_a^J)}_{\phi^J} - \varepsilon_{LK}^J A_a^K \underbrace{N^a A_a^L}_{\phi^L} \\ &= -i\hbar (\mathcal{L}_{\vec{N}} A_c^J - D_c(N^a A_a^J)) \end{aligned} \quad (6.55)$$

Onde $D_c(N^a A_a^J) = \delta_{\phi}^{\text{calibre}} A_c^J$. Então, o vínculo C_{dif} gera transformações de calibre e transformações de difeomorfismo na RG assim como o vínculo \mathcal{F} no modelo BF.

6.3.3 Análise dos difeomorfismos

Queremos analisar apenas os difeomorfismos contidos em C_{dif} , então fazemos uma troca de base de vínculos:

$$\tilde{C}_{\text{dif}}(\vec{N}) = C_{\text{dif}}(\vec{N}) + \mathcal{G}(N^a A_a) \quad (6.56)$$

E então $\tilde{C}_{\text{dif}}(\vec{N})A_a^I(x) = \mathcal{L}_{\vec{N}}A_a^I(x)$ é um difeomorfismo espacial, como era de se esperar do vínculo vetorial. Por fim, sob algumas condições podemos dizer também que o vínculo $C(N)$ gera os difeomorfismos temporais e toda a teoria é invariante de difeomorfismos.

Agora vamos calcular $\tilde{C}_{\text{dif}}(\vec{N})\Psi[A]$:

$$\tilde{C}_{\text{dif}}(\vec{N})\Psi[A] = \int d^3x \mathcal{L}_{\vec{N}}A_a^I(x) \frac{\delta}{\delta A_a^I(x)} \Psi[A] \neq 0 \quad (6.57)$$

Se $|\Psi\rangle = |\Gamma, \vec{j}, \vec{n}\rangle = |\Gamma, s\rangle$, um difeomorfismo ϕ (finito) vai ser:

$$|\Gamma, s\rangle = |\phi\Gamma, s\rangle \quad (6.58)$$

Então os difeomorfismos que mantêm os grafos invariantes são uma classe muito restrita de difeomorfismos, pois um difeomorfismo infinitesimal ϕ aplicado sobre o grafo já torna o estado ortogonal.

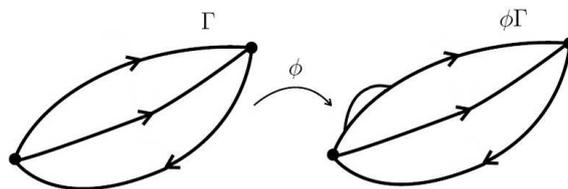


Figura 6.4: O difeomorfismo ativo ϕ agindo sobre um grafo Γ .

Seja L o gerador de difeomorfismos infinitesimais:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\phi(\epsilon) - \mathbb{1}) \quad (6.59)$$

$$\langle \Upsilon | L | \Psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \langle \Upsilon | \Psi \rangle - \frac{1}{\epsilon} \langle \Upsilon | \phi(\epsilon) | \Psi \rangle \right) \quad (6.60)$$

No caso $\Upsilon = \Psi$, considerando estados normalizáveis $\|\Psi\|^2 = 1$:

$$\langle \Psi | L | \Psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \|\Psi\|^2 - \frac{1}{\epsilon} \overbrace{\langle \Psi | \phi(\epsilon) | \Psi \rangle}^{=0} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} = \infty \quad (6.61)$$

Então não podemos fazer $\tilde{C}_{\text{dif}}(\vec{N})\Psi[A] = 0$, isto é, não podemos quanticamente fazer transformações de difeomorfismos infinitas, então vamos estudar os difeomorfismos finitos ϕ . Seja o produto escalar para N links:

$$\langle \Gamma, f | \Gamma, f' \rangle = \int d_\mu(g_1) \cdots d_\mu(g_N) f^*(g_1, \dots, g_N) f'(g_1, \dots, g_N) \quad (6.62)$$

Onde $d_\mu(g)$ são as medidas de Haar. Este produto é invariante sobre deformações nos grafos, isto é, invariante sobre difeomorfismos espaciais. Seja então uma transformação unitária (que preserva o produto escalar) $U_\phi^\dagger = U_\phi^{-1}$:

$$U_\phi |\Gamma, f\rangle = |\phi\Gamma, f\rangle \quad (6.63)$$

$$U_\phi \Psi_{\Gamma, f}[A] = \Psi_{\phi\Gamma, f}[\phi^{*-1}A] \quad (6.64)$$

Queremos uma solução do tipo $U_\phi |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$, $\forall \phi$ e vamos utilizar uma técnica conhecida como *group averaging*, ou média sobre o grupo dos difeomorfismos, que a partir de um $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}$ temos $|\Psi\rangle_{\text{inv}} = \sum_\phi U_\phi |\Psi\rangle$ que funciona bem no caso finito:

$$\begin{aligned} U_{\phi_0} |\Psi\rangle_{\text{inv}} &= \sum_\phi U_{\phi_0} U_\phi |\Psi\rangle = \sum_\phi U_{\phi_0 \phi} |\Psi\rangle \\ &= \sum_{\phi'} U_{\phi'} |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{\text{inv}} \end{aligned} \quad (6.65)$$

Onde fizemos uma troca de variáveis $\phi' = \phi_0 \phi \leftrightarrow \phi = \phi_0^{-1} \phi'$. Então, as dificuldades para este tipo de implementação no nosso caso são:

1. Temos um número infinito de elementos geradores de difeomorfismos;
2. A solução de $U_\phi |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ não pode sair do espaço, isto é, $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}$.

6.3.4 O espaço das distribuições temperadas

Vamos introduzir um espaço maior, ou espaço um espaço de distribuições análogo ao de Fourier que chamamos de espaço das distribuições temperadas. Para tal, escrevemos o triplo de Gelfand:

$$\mathcal{S} \subset L_2 \subset \mathcal{S}' \quad (6.66)$$

Onde \mathcal{S} é o espaço de Schwartz que é denso em L_2 , que é o espaço de funções de decaimento rápido (fazem a integral da distribuição convergir) que chamamos de funções teste C^∞ e \mathcal{S}' é o dual, que é o espaço dos funcionais lineares destas funções teste. Então seja a distribuição temperada $T \in \mathcal{S}'$ um funcional linear $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ que para um $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle T, \varphi \rangle \equiv \int dx T(x)\varphi(x) \quad (6.67)$$

Se $\Psi(x) \in L_2$ podemos escrever uma distribuição:

$$\langle \Psi, \varphi \rangle \equiv \int dx \Psi(x)\varphi(x) \quad (6.68)$$

Então vamos tomar as funções teste de \mathcal{H}_{kin} , $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}_{\text{kin}}$ que vamos chamar de funções cilíndricas $|\Psi\rangle_{\text{cyl}}$:

$$|\Psi\rangle_{\text{cyl}} = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha |\Gamma_\alpha, f_\alpha\rangle \quad (6.69)$$

Onde identificamos $\mathcal{H}_{\text{kin}} = \bar{\mathcal{S}}$ que é a completção de Cauchy do espaço \mathcal{S} para satisfazer o teorema de convergência de Cauchy. Então, o dual \mathcal{S}' é composto por formas lineares dos vetores de \mathcal{S} (funções cilíndricas).

Vamos ver se em \mathcal{S}' existem invariantes de difeomorfismo, e se daí podemos definir um produto escalar. Seja $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}$, a distribuição $\langle \Phi$, será definida por:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{S} \quad (6.70)$$

A atuação de um difeomorfismo ϕ sobre uma distribuição $\langle \Phi$, então vai ser:

$$\langle \Phi, \quad \mapsto \quad \langle \Phi U_\phi, \quad (6.71)$$

Logo, $\forall |\Psi\rangle \in \mathcal{S}$ a distribuição $\langle \Phi$, é invariante:

$$\langle \Phi U_\phi, \Psi \rangle \equiv \langle \Phi, U_\phi |\Psi\rangle = \langle \Phi |\Psi\rangle (6.72)$$

Então, para um grupo finito, com N elementos:

$$|\Psi\rangle_{\text{inv}} = \underbrace{\sum_{\phi} U_\phi |\psi\rangle}_{=P} (6.73)$$

Onde P é um projetor (obedece $P^2 = P$):

$$P = \frac{1}{N} \sum_{\phi} U_\phi |\Psi\rangle (6.74)$$

6.3.5 O projetor generalizado P_{dif}

Vamos introduzir então um projetor generalizado $P_{\text{dif}} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}'$ proposto por Rovelli, onde:

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{S} \quad \rightarrow \quad P_{\text{dif}} |\Psi\rangle \in \mathcal{S}' (6.75)$$

Tal que $P|\Psi\rangle$ seja invariante sobre difeomorfismos. Seja Ψ e $\Psi' \in \mathcal{S}$, P_{dif} vai ser:

$$\langle P_{\text{dif}} \Psi, \Psi' \rangle = \sum_{|\Psi''\rangle} \langle \Psi'' | \Psi' \rangle \quad \forall |\Psi'\rangle \in \mathcal{S} (6.76)$$

Onde $|\Psi''\rangle = U_\phi |\Psi\rangle$. Se $|\Psi''\rangle \rightarrow \Gamma$, temos que considerar todos os $\phi\Gamma$ possíveis, o que é uma soma infinita. Contudo, $\langle \Psi'' | \Psi' \rangle = 0$ a não ser que $\phi\Gamma = \Gamma'' = \Gamma'$ pois como vimos anteriormente, qualquer deformação sobre o grafo ortogonaliza os estados. Então sobre a

ação de P_{dif} nos $\Psi \in \mathcal{S}$ só temos os difeomorfismos que preservam o grafo. Seja então ϕ_0 um difeomorfismo que preserva o grafo, então $\forall \phi : \phi = \tilde{\phi}\phi_0$ ou $\phi\phi_0^{-1} = \tilde{\phi}$.

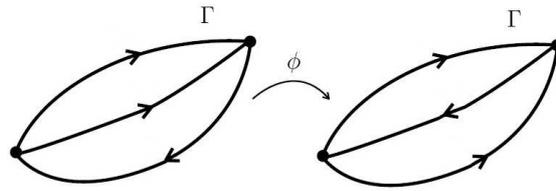


Figura 6.5: Difeomorfismo finito ϕ que preserva o grafo e age apenas sobre as orientações relativas entre os *links*.

Como $\tilde{\phi}\Gamma' = \Gamma'$ então $\tilde{\phi} \in G_{\Gamma'}$ que é o espaço dos difeomorfismos que preservam Γ' , a ação de $\tilde{\phi}$ modifica as orientações e/ou a ordem dos *links*/vértices. Como $G_{\Gamma'}$ é finito, a somatória é finita. Então $\langle P_{\text{dif}}\Psi, \Psi' \rangle$ é linear em Ψ' e $\langle P_{\text{dif}}\Psi \in \mathcal{S}' \rangle$ é invariante sobre difeomorfismos.

$$\mathcal{S}'_{\text{inv}} = \{ \langle \Phi, \mid \langle \Phi, = \langle P_{\text{dif}}\Psi, \text{ com } \Psi \in \mathcal{S} \} \quad (6.77)$$

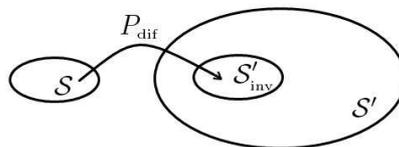


Figura 6.6: A imagem de \mathcal{S} dentro de \mathcal{S}'

Este mapeamento não é invertível, isto é, podem haver vetores fisicamente equivalentes (difeomórficos) que pertencem ao *kernel* de P_{dif} . O produto escalar tem que levar em conta que podemos substituir $|\Psi_1\rangle$ por um $|\Psi_2\rangle$ equivalente. Só que isto é simplesmente reordenar a somatória no caso do *group averaging*, logo o produto escalar é independente da escolha de $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ nas classes de equivalência correspondentes.

Logo, temos um produto escalar bem definido e que podemos completar o espaço de Hilbert invariante sobre difeomorfismos, a saber:

$$\mathcal{H}_{\text{dif}} = \overline{\mathcal{S}'_{\text{inv}}} \quad (6.78)$$

Este espaço de Hilbert é separável.

6.3.6 Comentário sobre o vínculo escalar C

Aqui vamos apenas comentar sobre o último vínculo a ser resolvido, o vínculo escalar C , que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} C(N) &= \int_{\Sigma} d^3x N \frac{\kappa\gamma^2}{2e^{(3)}} P_I^a P_J^b [\varepsilon^{IJ} F_{ab}^K - 2(\gamma^2 - \sigma) K_a^I K_b^J] \\ &= S^E(N) - 2(\gamma^2 - \sigma) T(N) \end{aligned} \quad (6.79)$$

Aonde fizemos uma separação conveniente, chamamos $S^E(N)$ de contribuição Euclidiana:

$$S^E(N) = \int_{\Sigma} d^3x N \frac{P_I^a P_J^b}{\sqrt{\det(P)}} \varepsilon^{IJ} F_{ab}^K \quad (6.80)$$

E $T(N)$ é a contribuição restante:

$$T(N) = \int_{\Sigma} d^3x N \frac{P_I^a P_J^b}{\sqrt{\det(P)}} K_a^I K_b^J \quad (6.81)$$

Estes termos são de fato muito complicados devido à não-linearidade, o que traz problemas para a quantização relacionados à regularização, normalização e ordenação dos fatores e ainda possui termos proporcionais a $\frac{1}{\det(P)}$ e à curvatura extrínseca K_a^I . A simplificação adotada para tratar deste problema vem das idéias de Thiemann [10,31], que introduz o funcional do espaço de fase \bar{K} :

$$\bar{K} = \int_{\Sigma} K_a^I P_I^a \quad (6.82)$$

E seguem as seguintes propriedades:

1.

$$K_a^I = \gamma^{-1} (A_a^I - \Gamma_a^I) = \frac{1}{\kappa\gamma} \{A_a^I, \bar{K}\} \quad (6.83)$$

2.

$$\bar{K} = \frac{1}{\gamma^2} \{S^E(1), V\} \quad (6.84)$$

Onde $V = \int \sqrt{\det(P)}$ é o volume de Σ (que é um operador que vamos discutir na próxima seção);

3.

$$\frac{P_I^a P_J^b}{\sqrt{\det(P)}} \varepsilon^{IJK} \varepsilon_{abc} = \frac{4}{\kappa\gamma} \{A_a^K, V\} \quad (6.85)$$

Com isto, podemos escrever os termos do vínculo escalar como colchetes de Poisson entre grandezas que são mais simples de quantizar. A saber, a contribuição Euclidiana agora se escreve:

$$S^E(N) = \int_{\Sigma} d^3x N \varepsilon^{abc} \delta_{IJ} F_{ab}^I \{A_c^J, V\} \quad (6.86)$$

E o termo $T(N)$ se torna:

$$T(N) = \int_{\Sigma} d^3x \frac{N}{\kappa^2 \gamma^3} \varepsilon^{abc} \varepsilon_{IJK} \{A_a^I, \{S^E(1), V\}\} \{A_b^J, \{S^E(1), V\}\} \{A_c^K, V\} \quad (6.87)$$

Escritos desta maneira, vemos que podemos quantizar este vínculo ao tomar os colchetes de Poisson como comutadores e tomarmos as grandezas volume, conexão e curvatura como operadores para obter nossa teoria quântica relativística, considerando nossos funcionais de onda Ψ como sendo invariantes de calibre e de difeomorfismos. Contudo, fica claro em (6.86) que vão surgir ambiguidades relacionadas a problemas de ordenação e de escolha da regularização para a quantização de A_a^I e F_{ab}^I , e em vez de termos uma única teoria temos infinitas teorias que são matematicamente consistentes, e ainda é um problema em aberto se alguma destas teorias é suficiente para reproduzir a relatividade geral no limite contínuo clássico.

6.4 Os operadores e observáveis parciais para a RG 3+1 dimensional

Faremos para a RG 3+1 dimensional a análise do operador de área $\hat{\mathcal{A}}$, que guarda analogia com o operador comprimento $\hat{\mathcal{L}}$ que encontramos para o modelo BF em 2+1 dimensões, assim como o operador volume $\hat{\mathcal{V}}$ na RG é análogo ao operador área $\hat{\mathcal{A}}$ que definimos no modelo BF 2+1 dimensional. Um estudo mais profundo sobre estes observáveis parciais na RG 3+1 dimensional podem ser encontrados nos textos de Rovelli [7,32], Perez [18,24,33], e outros já citados [23].

6.4.1 A construção do operador área $\hat{\mathcal{A}}$

Uma vez que temos uma base invariante de calibre e de difeomorfismos espaciais, podemos calcular alguns observáveis parciais. Vamos então montar o operador área e calcular a área de uma superfície $\mathcal{A}(\Sigma)$.

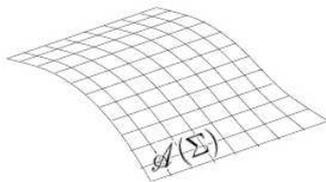


Figura 6.7: Superfície $\mathcal{A}(\Sigma) \in \mathcal{M}$.

Primeiro calculamos a área classicamente tomando uma superfície $\Sigma : x^a = x^a(\sigma^1, \sigma^2)$ parametrizada por dois parâmetros, então:

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int d^2s = \int d^2\sigma \sqrt{\det(u_\alpha u_\beta)} \quad (6.88)$$

Onde $u_\alpha^I = e^I_a \frac{dx^a}{d\sigma^\alpha}$ e o determinante é:

$$\det(u_\alpha u_\beta) = \begin{vmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 \end{vmatrix} \quad (6.89)$$

A área formada por estes dois vetores é um produto vetorial. Agora vamos tentar formular o operador área. Nossas variáveis dinâmicas são a conexão $A_a^I(\vec{x})$ e o campo clássico $P_I^a(\vec{x}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{IJK}\varepsilon^{abc}e_b^J e_c^K$ ou ainda $P^{aI} = \det(e)e^{aI}$. Os operadores gerados por estas grandezas:

$$\hat{A}_a^I(\vec{x}) = A_a^I(\vec{x}) \quad (6.90)$$

$$\hat{P}_J^b(\vec{y}) = -i\hbar 8\pi G \gamma \frac{\delta}{\delta A_b^J(\vec{y})} \quad (6.91)$$

$$[\hat{A}_a^I(\vec{x}), \hat{P}_J^b(\vec{y})] = i\hbar \kappa \gamma \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_J^I \delta_a^b \quad (6.92)$$

Onde $\kappa = 8\pi G$. Ainda classicamente podemos escrever a área $\mathcal{A}(\Sigma)$ como:

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d^2\sigma |P| \quad (6.93)$$

Onde $|P| = \sqrt{P_I P_I}$, $P_I(\sigma) = P_I^a \eta_a$ e $\eta_a = \varepsilon_{abc} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2} = \varepsilon_{abc} u_1^b u_2^c$ é um produto vetorial. Agora vamos considerar uma holonomia $U_{\gamma}[A]$, onde a derivada desta em relação a A :

$$\frac{\delta}{\delta A_a^I(\vec{x})} U_{\gamma}[A] = \int_0^1 ds \dot{x}^a(s) U_{\gamma_1}[A] T_I U_{\gamma_2}[A] \delta^3(x(s) - x) \quad (6.94)$$

Onde $A^I T_I = A_a^I \dot{x}^a(s) ds T_I$ e $\frac{\delta A_b^J(x(s))}{\delta A_a^I(x)} = \delta_I^J \delta_b^a \delta^3(x(s) - x)$. Então o operador $\hat{P}_I(\Sigma)$ pode ser escrito como:

$$\hat{P}_I(\Sigma) = -i\hbar \int_{\Sigma} d^2\sigma \eta_a(\sigma) \frac{\delta}{\delta A_a^I(\vec{x}(\sigma))} \quad (6.95)$$

Onde $\eta_a(\sigma)$ é uma função de teste. Então trocamos a integral no espaço todo por uma integral na superfície.

6.4.2 A área que vamos calcular

Vamos fazer agora duas hipóteses sobre a área que vamos calcular:

1. A curva γ só intercepta Σ em um ponto p . Note que a curva γ de uma holono-

mia sempre pode ser fatorada em segmentos menores, então esta hipótese não gera restrição sobre nosso operador;

2. O ponto p não é uma das extremidades de γ . Se a curva γ de uma holonomia compõe um grafo, podemos mostrar que este vértice gera um volume \mathcal{V} , e não uma área.

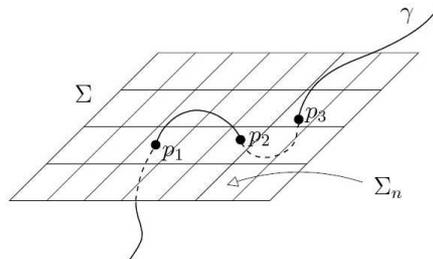


Figura 6.8: A curva γ interceptando a área Σ em três pontos. Podemos fatorar γ em 3 curvas que interceptam Σ uma única vez.

Então, a aplicação de $\hat{P}_I(\Sigma)$ em U_γ :

$$\hat{P}_I(\Sigma)U_\gamma[A] = i\hbar \int_{\Sigma} d\sigma^1 d\sigma^2 \int_0^1 ds \varepsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\sigma)}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\sigma)}{\partial \sigma^2} \delta^3(\vec{x}(\sigma) - \vec{x}(s)) \frac{\partial x^c(s)}{\partial s} U_{\gamma_1} T_I U_{\gamma_2} \quad (6.96)$$

Para resolver, temos que fazer uma troca de variáveis $\sigma^1, \sigma^2, s \rightarrow x^a(\sigma^1, \sigma^2) + x^a(s) \equiv x^a(\sigma^1, \sigma^2, s)$ e podemos escolher o ponto p como a origem deste sistema de coordenadas.

$$\begin{cases} x^a(s_p) = 0 \\ x^a(\sigma_p^1, \sigma_p^2) = 0 \end{cases} \quad (6.97)$$

E calculamos o jacobiano $J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2, s)}$ destas coordenadas:

$$J = \varepsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^c}{\partial s} \quad (6.98)$$

Que é exatamente o que aparece no integrando de (6.96), então:

$$\begin{aligned} \hat{P}_I(\Sigma)U_\gamma[A] &= \pm i\hbar \int d^3x \delta^3(\vec{x}) U_{\gamma_1} T_I U_{\gamma_2} \\ &= \epsilon i\hbar U_{\gamma_1} T_I U_{\gamma_2} \end{aligned} \quad (6.99)$$

Onde o sinal \pm vem do jacobiano, que depende da orientação relativa entre as coordenadas originais. Definimos $\epsilon = \pm 1$, que é um índice de orientação, ou índice de interseção.

6.4.3 Os grafos como redes de *spin*

Agora vamos considerar que a curva γ possui *spin*, isto é, possui uma representação $T_I^{(j)}$, cujo operador Casimir associado é:

$$T_I^{(j)}T_I^{(j)} = -j(j+1) \quad (6.100)$$

Tomamos então um grafo Γ e vamos aplicar \hat{P}_I duas vezes, $\hat{P}_I(\Sigma)\hat{P}_I(\Sigma) \equiv \hat{P}^2(\Sigma)$. Note que como os vértices estão fora de Σ , não precisamos nos preocupar com os *intertwinners*. Vamos tomar primeiro $\hat{P}^2(\Sigma)|s_1\rangle$, onde s_1 tem apenas 1 linha em interseção com Γ . Logo:

$$\hat{P}^2(\Sigma_1)|s\rangle = -\hbar^2 j(j+1)|s\rangle \quad (6.101)$$

Pois $U_{\gamma'_1}T_I^2U_{\gamma''_1}U_{\gamma_2}U_{\gamma_3} = -j(j+1)U_{\gamma_1}U_{\gamma_2}U_{\gamma_3}$. Para calcularmos áreas maiores, isto é, que interceptam mais linhas, temos que introduzir uma regularização de forma que dividimos Σ em N células e tomamos N grande de forma que cada célula só contenha um ponto de interseção p_k .

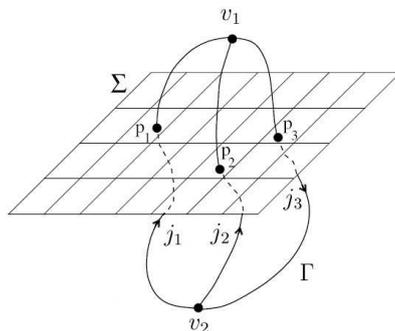


Figura 6.9: Grafo Γ interceptando a superfície Σ . Note que cada célula Σ_N só contém um ponto de interseção p_k .

Então $\mathcal{A}(\Sigma)$ pode ser escrito como:

$$\hat{\mathcal{A}}(\Sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{-\hat{E}^2(\Sigma_n)} \quad (6.102)$$

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathcal{A}(\Sigma_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_{\Sigma_n} E^2 \quad (6.103)$$

Aonde $\mathcal{A}(\Sigma)$ é o limite clássico de $\hat{\mathcal{A}}(\Sigma)$. Lembrando que $\hat{P}_a^I = -i\hbar 8\pi G\gamma \frac{\delta}{\delta A_a^I}$, então:

$$\hat{\mathcal{A}}(\Sigma) = 8\pi G\gamma \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{-\hat{E}^2(\Sigma_n)} \quad (6.104)$$

Temos que verificar se o limite (6.104) existe, então aplicamos o operador sobre um estado da rede de spin $|s\rangle$. Lembrando que os “elementos de área” Σ_n que não interceptam com γ são nulos e os que interceptam são dados por \sum_{p_k} , então o valor de $\hat{\mathcal{A}}(\Sigma)$ não depende explicitamente do N da regularização se a malha é suficientemente pequena para incluir apenas um ponto por elemento de área Σ_n . Logo, o limite existe e $|s\rangle$ são autovetores do operador $\hat{\mathcal{A}}(\Sigma)$.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}(\Sigma)|s\rangle &= 8\pi G\gamma \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \hbar \sum_{p_k} \sqrt{j_k(j_k + 1)}|s\rangle \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ &= 8\pi G\gamma \hbar \sum_{p_k} \sqrt{j_k(j_k + 1)}|s\rangle \\ \hat{\mathcal{A}}(\Sigma)|s\rangle &= 8\pi\gamma l_{\text{Planck}}^2 \sum_{p_k} \sqrt{j_k(j_k + 1)}|s\rangle \end{aligned} \quad (6.105)$$

Onde $l_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ é o comprimento de Planck. Deste resultado podemos ver que a menor unidade de área possível é quando apenas uma linha de *spin* $\frac{1}{2}$ atravessa a superfície.

$$\hat{\mathcal{A}}(\Sigma_{\text{Min}}) = 8\pi\gamma l_{\text{Planck}}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 10^{-69} \text{ m}^2 \quad (6.106)$$

Se $\gamma = \mathcal{O}(1)$.

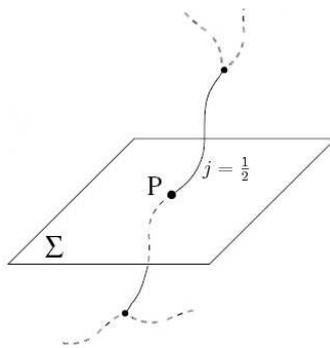


Figura 6.10: A menor área possível: Apenas uma linha de *spin* $j = \frac{1}{2}$ atravessa Σ .

Note que este operador $\hat{\mathcal{A}}$ que calculamos aqui é completamente análogo ao operador comprimento \mathcal{L}_c que calculamos na seção (6.2) para o modelo BF 2+1 dimensional, o que era esperado uma vez que o grupo de representação em ambos os casos é o grupo $SU(2)$.

6.4.4 Determinação do parâmetro de Immirzi

Por fim, ainda podemos utilizar esta relação do operador de área para determinar o parâmetro de Immirzi γ , utilizando dos resultados de Hawking para a entropia de um buraco negro. [34] A idéia é quantizar um setor contendo um horizonte de eventos isolado e então contar o número de estados físicos \mathcal{N} compatíveis com a área macroscópica A_0 do horizonte.

A entropia S de um buraco negro é definida como $S = \ln(\mathcal{N})$. A contagem pode ser feita de forma exata quando $A_0 \gg l_p^2$:

$$S = \frac{\gamma_0}{\gamma} \frac{A_0}{4l_p^2} + \mathcal{O}(\ln(\frac{A_0}{l_p^2})) \quad (6.107)$$

Onde o número real $\gamma_0 = 0.2375\dots$ segue da contagem de estados. Vale a pena enfatizar que o cálculo da entropia acima utiliza o observável parcial área, portanto é independente da maneira que realizamos a quantização do vínculo escalar C . Considerações semi-clássicas levam a $S = \frac{A_0}{(4l_p^2)}$, o que usamos para definir o valor do parâmetro de Immirzi:

$$\gamma = \gamma_0 = 0.2375\dots \quad (6.108)$$

Que é consistente com os cálculos realizados para qualquer buraco negro da família Kerr-Newman.

6.4.5 Quantização do volume \mathcal{V}

A construção do operador volume \mathcal{V} segue a mesma linha da construção do operador \mathcal{A} , descrita na subseção 6.4.1. O volume de uma região tridimensional $D \subset \Sigma$ é dada classicamente por:

$$\mathcal{V}_D = \int_D d^3x \sqrt{|det(P)|} \quad (6.109)$$

Onde $|det(P)| = \left| \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} P_I^a P_J^b P_K^c \varepsilon^{IJK} \right|$. Realizando uma regularização análoga ao caso do operador de área, escrevemos a integral anterior como o limite de somas de Riemann definidas em termos da decomposição de D em superfícies infinitesimais S_n , como uma rede cúbica.

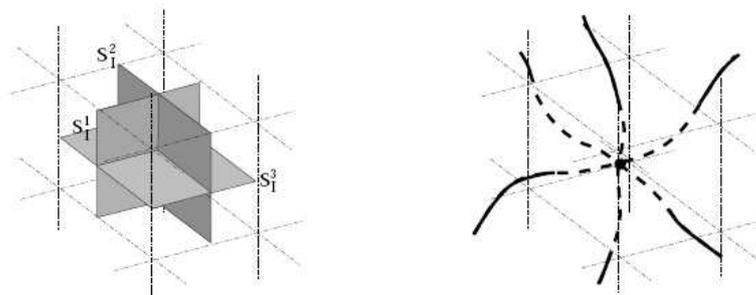


Figura 6.11: Regularização de um volume. Tomamos a regularização de forma que no máximo um vértice esteja contido em cada célula cúbica D_n .

Então, quantizamos esta versão regularizada utilizando os resultados para \hat{P} obtidos anteriormente.

$$\hat{\mathcal{V}}_D = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{V}_D^N \quad (6.110)$$

Aonde:

$$\hat{V}_D^N = \sum_n^N \sqrt{\left| \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \hat{P}_I(S_n^a) \hat{P}_J(S_n^b) \hat{P}_K(S_n^c) \varepsilon^{IJK} \right|} \quad (6.111)$$

Assim como vimos para o operador área \mathcal{A}_S da seção 6.2, calculado para o modelo BF 2+1 dimensional, temos o operador volume \mathcal{V}_D como o análogo 3+1 dimensional desde caso. [35], [36] A maneira como escrevemos os autovalores deste operador é dependente da maneira de como é a estrutura dos vértices da nossa rede de *spin*, que estudamos considerando o caso trivalente na seção supracitada. Cabe lembrar também que na seção anterior nós vimos que o vínculo escalar C depende da quantização do operador volume para ser quantizado, logo, o vínculo escalar C depende da estrutura dos vértices da nossa rede de *spin*.

6.5 Introdução ao formalismo dos *spin foams*

Precisamos construir um método para descrever a dinâmica dos estados quânticos na quantização de laços, assim como o formalismo das integrais de caminho descreve a dinâmica da MQ. Chamamos este método de formalismo dos *spin foams* (espumas de *spin*) e vamos discutir de forma breve nesta seção algumas características desta teoria.

6.5.1 A dinâmica dos estados quânticos

Para discutirmos a dinâmica dos estados quânticos, precisamos partir de uma base bem definida para estes estados, isto é, temos que tomar estados com um produto interno bem definido em um espaço separável físico \mathcal{H}_{fis} . [18, 37] Nós vimos que em ambos os casos discutidos neste trabalho, temos um projetor generalizado P que define nossos estados físicos a partir dos estados do espaço de fase cinemático construído pela quantização de

laços, e este projetor foi definido de maneira covariante como sendo:

$$P = \int D[B]D[A]\mu[A, B] \exp[iC(A, B)] \quad (6.112)$$

Onde P está escrito em função de variáveis de primeira ordem, onde A é a conexão do espaço-tempo, B é o campo conjugado (no caso da RG, é o *vierbein* e), $\mu[A, B]$ é a medida de Haar apropriada e $C(A, B)$ são os vínculos não resolvidos até então. Logo, para um estado arbitrário $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}$, $P|\phi\rangle$ é uma solução para $C(A, B)|\phi\rangle = 0$.

Sendo assim, os elementos de matriz de P definem o produto interno físico. Se $|s\rangle, |s'\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}$:

$$\langle s, s'\rangle_p = \langle Ps, s'\rangle \quad (6.113)$$

Quando estes elementos de matriz são computados numa base de rede de *spin* invariante (como a definida para o modelo BF 2+1 dimensional na seção 4.7), eles podem ser expressos como a soma das histórias das amplitudes de transição das redes de *spin*, ou *spin foams*.

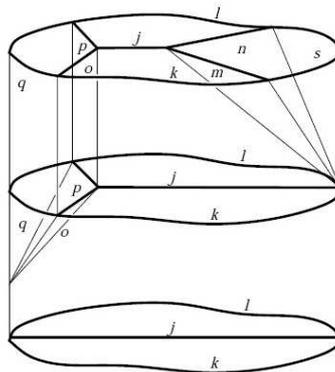


Figura 6.12: Representação gráfica de um *spin foam*, um 2-complexo simplicial que mostra a transição entre 3 estados diferentes de rede de *spin*.

Graficamente, uma história de *spin foam* do estado $|s\rangle$ ao estado $|s'\rangle$ ($F_{s \rightarrow s'}, \{j\}$) gera um espaço topológico combinatorial conhecido como 2-complexo simplicial cujos limites são os grafos dos estados de rede de spin $|s\rangle$ e $|s'\rangle$, e $\{j\}$ são os valores de spin associados às linhas e dos grafos ($e \subset F_{s \rightarrow s'}$) e as faces $f \subset F_{s \rightarrow s'}$. Vértices são chamados de $v \subset F_{s \rightarrow s'}$,

e o produto interno físico pode ser expresso como a soma de amplitudes de *spin foams*:

$$\langle s, s' \rangle_p = \langle P s, s' \rangle = \sum_{F_{s \rightarrow s'}} N(F_{s \rightarrow s'}) \sum_{\{j\}} \prod_{f \subset F_{s \rightarrow s'}} \mathcal{A}_f(j_f) \prod_{e \subset F_{s \rightarrow s'}} \mathcal{A}_e(j_e) \prod_{v \subset F_{s \rightarrow s'}} \mathcal{A}_v(j_v) \quad (6.114)$$

Aonde $N(F_{s \rightarrow s'})$ é um fator de normalização, e $\mathcal{A}_f(j_f)$, $\mathcal{A}_e(j_e)$, $\mathcal{A}_v(j_v)$ são as amplitudes de face, linha e vértice, respectivamente. Veja que caráter discreto para o espaço descoberto na quantização de laços é essencial, uma vez que podemos substituir a integral funcional sobre este por uma soma de amplitudes de objetos combinatoriais, que são os *spin foams*. Com este método, podemos representar por *spin foams* a história de um campo gravitacional que pode ser interpretado como um conjunto de transições entre diferentes estados quânticos do espaço.

6.5.2 *Spin foams* no modelo BF 2+1 dimensional

Como vimos acima, o formalismo dos *spin foams* é desenvolvido a partir da construção de um projetor P que define os estados físicos da teoria e do produto interno destes estados em uma base de rede de *spin* invariante, assunto tratado na seção 6.1. Tomamos então a equação (6.27):

$$\hat{P}|\Psi\rangle = \int \mathcal{D}\mathcal{N} e^{i \int_{\Sigma} Tr(N \hat{F}(A))} |\Psi\rangle \quad (6.115)$$

Onde $N(x) \in SU(2)$ e $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_0$, onde $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_{\text{kin}}$ que é separável. Lembrando agora da regularização que fizemos no espaço, aonde a variedade foi dividida em p células de tamanho ϵ^2 , aonde cada célula corresponde a uma plaqueta que forma um *loop* de uma holonomia $W_p[A]$. Então, podemos escrever:

$$\int_{\Sigma} Tr(N \hat{F}(A)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_p \epsilon^2 Tr[N_p F_p] \quad (6.116)$$

Onde N_p, F_p são os valores de N^I e $\varepsilon^{ab}F_{ab}^I$ no interior de uma plaqueta x_p . A holonomia $W_p[A]$ é dada por:

$$W_p[A] = \mathbb{1} + \varepsilon^2 T_I \varepsilon^{ab} F_{ab}^I(x_p) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (6.117)$$

Com isto, podemos escrever uma forma linear $P(s) = \langle \phi | P | s \rangle$, onde $|s\rangle$ é um vetor da base de rede de *spin* invariante e $|\phi\rangle$ é o estado de vácuo ($\Gamma = \emptyset$):

$$P(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \phi | \prod_p \int \mathcal{DN} e^{iTr[N_p W_p]}, s \rangle \quad (6.118)$$

Podemos realizar a integração em N_p utilizando o teorema de Peter-Weyl (seção 4.4.1):

$$\int \mathcal{DN} e^{iTr[NW]} = \sum_j (2j+1) Tr[\prod^j(W)] \quad (6.119)$$

E a equação 6.118 se escreve como:

$$P(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \prod_p \sum_{j(p)} (2j(p)+1) \langle \phi | Tr[\prod^{j(p)}(W_p)], s \rangle \quad (6.120)$$

Onde $j(p)$ são os valores de *spin* associados à holonomia W_p . O produto interno definido em $P(s)$ é conhecido como representação de Ashtekar-Lewandowski (AL).

Note que ao tomar o limite de $P(s)$ estamos removendo a sua regularização, e a realização deste processo varia com o *genus* g da variedade que estamos considerando ser Σ , mas é demonstrado que o limite existe para g arbitrário. Para uma variedade sem “buracos” ($g = 0$), a regularização é trivial uma vez que nossas variáveis dinâmicas A e B são bem definidas sobre toda a variedade.

6.5.3 Os operadores de *loops*

Na representação AL, cada $Tr[\prod^{j(p)}(W_p)]$ age criando um *loop* fechado em torno da plaqueta p com valor de *spin* $j(p)$.

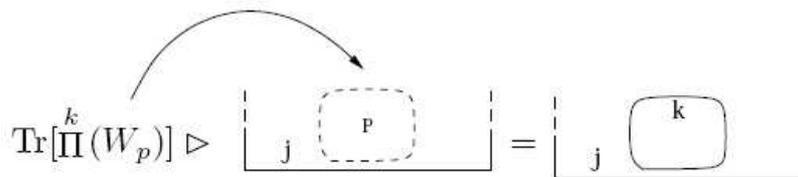


Figura 6.13: Representação gráfica da ação de um operador de *loop* em um estado de rede de *spin*.

Podemos introduzir um parâmetro de evolução (não-físico) “temporal” que serve de coordenada para organizar as sequências de ações dos operadores de *loops* de (6.120), isto é, assumimos que a ação de cada operador de *loop* ocorre em “tempos” diferentes.

Seguindo o método de derivação das integrais de caminho de Feynman, vamos inserir a partição unitária de AL em cada instante t :

$$\mathbb{1} = \sum_{\Gamma \subset \Sigma} |\Gamma, \vec{j}, \vec{v}\rangle \langle \Gamma, \vec{j}, \vec{v}| \quad (6.121)$$

Que nada mais é que a soma da base completa de estados da rede de *spin* $|s\rangle$. Dessa forma, $P(s)$ pode ser interpretado como a soma de amplitudes correspondentes a uma sequência de transições que podem ser vistas como uma evolução “temporal” entre o estado inicial $|s\rangle$ e o estado final $|\phi\rangle$. Então, o produto interno físico entre estados da rede de spin $|s\rangle$ e $|s'\rangle$ é definido como:

$$\langle s, s' \rangle_p = \langle P s, s' \rangle = \overline{\langle P s', s \rangle} \quad (6.122)$$

Ou seja, (6.120) é um operador hermitiano. Este produto pode ser interpretado como a soma de amplitudes das transições entre o estado inicial $|s\rangle$ e o estado final $|s'\rangle$

Vértices da rede de *spin* evoluem como linhas cujos valores de *spin* são dados pelos *intertwinners* e as linhas da rede de *spin* (links) evoluem como faces bidimensionais, cujos valores de *spin* são dados pelos *spins*. Os locais aonde os operadores de *loop* criam novas linhas definem os vértices.

Estas estruturas são chamadas de *spin foams* e as amplitudes são puramente combinatórias

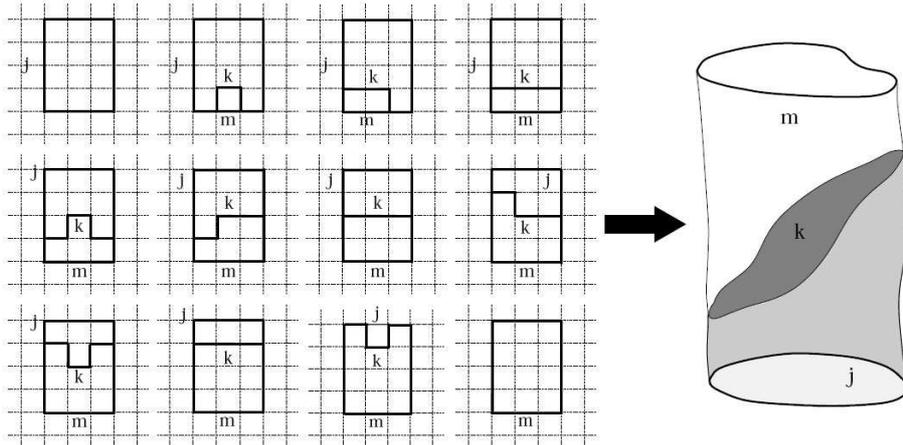


Figura 6.14: À esquerda temos um conjunto de transições discretas do produto interno físico *loop a loop* e a direita temos a representação contínua ($\epsilon \rightarrow 0$) de *spin foam* destas transições.

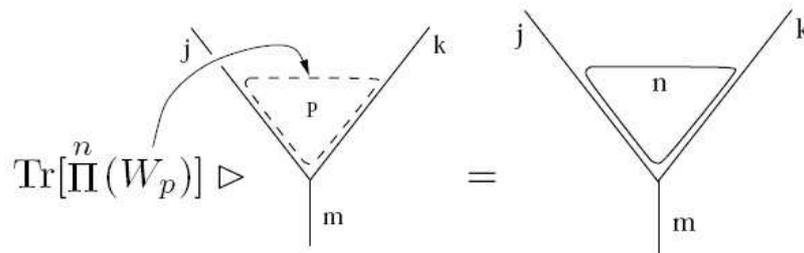


Figura 6.15: Representação gráfica da ação de um operador de *loop* em um vértice da rede de *spin*.

e podem ser calculadas explicitamente da ação dos operadores de *loop* na representação AL.

Um caso simples para o cálculo destas amplitudes ocorre quando $|s\rangle$ e $|s'\rangle$ só possuem vértices trivalentes. Então na notação de (6.114):

$$\langle s|s'\rangle_p = \sum_{\{j\}} \prod_{f \subset F_{s \rightarrow s'}} (2j_f + 1)^{\frac{v_f}{2}} \prod_{v \subset F_{s \rightarrow s'}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \quad (6.123)$$

Aonde v_f é tal que:

1. $v_f = 0$ se $f \cap s \neq 0 \wedge f \cap s' \neq 0$
2. $v_f = 1$ se $f \cap s \neq 0 \vee f \cap s' \neq 0$
3. $v_f = 2$ se $f \cap s = 0 \wedge f \cap s' = 0$

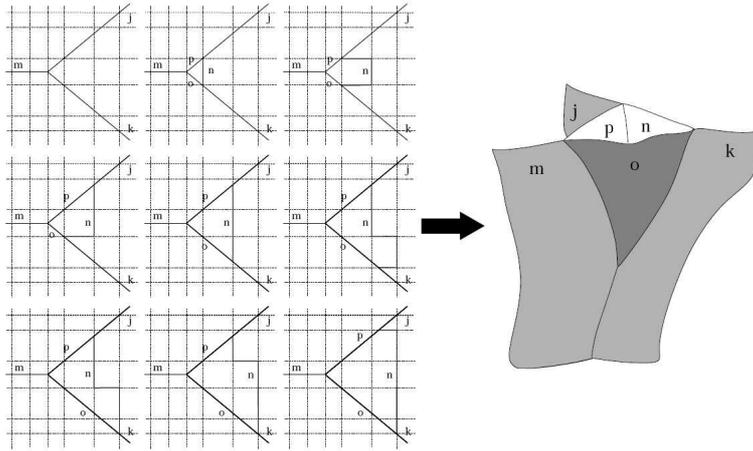


Figura 6.16: À esquerda temos um conjunto de transições discretas que mostra a atuação de um operador de *loop* sobre um vértice de rede de *spin* e a evolução *loop a loop*. À direita temos a representação ($\epsilon \rightarrow 0$) de *spin foam* destas transições.

Onde \vee é a soma wedge ou união de um ponto, que faz a união disjunta de vários espaços topológicos em um único ponto de base.

A amplitude dos vértices é dada pelo símbolo-6j de Wigner, que é uma maneira compacta de descrever as simetrias entre estes valores de spin j , como permutação de colunas, elementos da linha de cima com a linha de baixo, condições de triangulação $j_1 = |j_2 - j_3| \oplus \dots \oplus j_2 + j_3$ e relações de ortogonalidade.

6.5.4 Comentários sobre *spin foams* na gravitação 3+1 dimensional

Como discutimos anteriormente, não existe rigorosamente a construção de um produto interno físico na quantização de laços 3+1 dimensional. A utilização do formalismo dos *spin foams* como método para a definição do produto interno físico foi introduzida formalmente por Rovelli e Reisenberger. [7, 38, 39] As dificuldades de se analisar a dinâmica em 4 dimensões estão associadas às dificuldades de se quantizar o vínculo escalar C , como

vimos na seção 6.3. O produto interno físico é definido como:

$$\begin{aligned} \langle P s, s' \rangle_{\text{dif}} &= \prod_x \delta[\hat{C}(x)] = \int \mathcal{DN} \langle e^{i \int_{\Sigma} N(x) \hat{C}(x)} \rangle_{s, s'} \\ &= \int \mathcal{DN} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle \left[\int_{\Sigma} N(x) \hat{C}(x) \right]^n \rangle_{s, s'} \end{aligned} \quad (6.124)$$

Aonde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{dif}}$ é o produto interno do espaço de Hilbert das soluções do vínculo vetorial \mathcal{H}_{dif} . Já se sabia (ref?) nos primórdios da teoria que estados de *loops* suaves eram aniquilados por \hat{C} independente de qualquer ambiguidade em sua definição, então, \hat{C} age apenas sobre os vértices da rede de *spin*, como o operador volume \mathcal{V}_D . Logo, a ação dele é criar novas linhas e vértices, modificando o grafo dos estados da rede de *spin*.

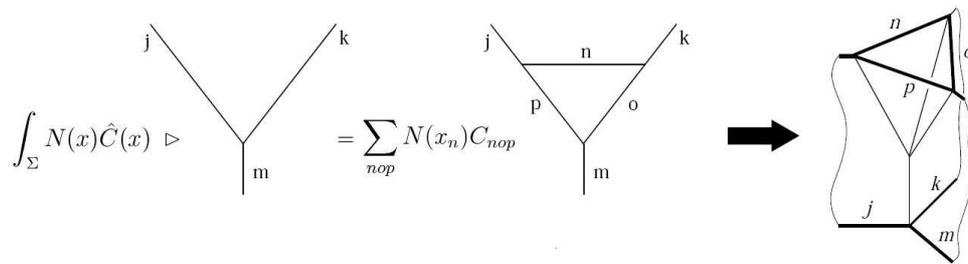


Figura 6.17: A ação do vínculo escalar e sua representação de *spin foams*. $N(x_n)$ é o valor de N no vértice e C_{nop} são elementos de matriz de \hat{C} .

Então, cada termo de (6.124) representa uma sequência de transições dadas pela ação de \hat{C} nos vértices da rede de *spin* dos diferentes estados que interpolam os estados $|s\rangle$ e $|s'\rangle$ e assim como vimos no modelo BF 2+1 dimensional, a equação (6.124) pode ser interpretada como a soma de “histórias” de redes de *spin* representada graficamente por um espaço simplicial 2-complexo. Os valores das amplitudes de “transição” vão ser dados pelos elementos de matriz de \hat{C} , ou seja, mesmo que a estrutura qualitativa seja independente das ambiguidades na quantização de \hat{C} , as amplitudes de transição vão depender da maneira que tomamos \hat{C} .

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho nós analisamos a construção e conseqüente quantização de duas teorias: o modelo BF e a gravitação. Para realizar a construção destas teorias, desenvolvemos as ferramentas matemáticas adequadas para se tratar teorias de calibre (e no caso da gravitação, antes desenvolvemos o formalismo para expressar esta teoria como uma teoria de calibre) e utilizamos este formalismo para realizar o procedimento de quantização canônica.

Em 2+1 dimensões, tanto o modelo BF quanto a gravitação são teorias topológicas, isto é, possuem a hamiltoniana completamente vinculada então toda a evolução da teoria é dada por estes parâmetros das simetrias geradas pelo vínculo hamiltoniano. Em 3+1 dimensões, vimos que a teoria da gravitação, mediante a uma fixação de calibre parcial, pode também ser descrita por uma hamiltoniana completamente vinculada.

Afim de dar continuidade na quantização da teoria construindo um espaço de Hilbert para as nossas grandezas dinâmicas quantizadas canonicamente, desenvolvemos o formalismo da quantização de laços e com este formalismo foi possível construir uma base ortonormal para os estados quânticos, conhecida como rede de *spin*. Daí, em ambas as teorias analisadas neste trabalho nós estudamos a construção dos operadores gerados pelos vínculos e conseqüentemente a construção de uma base para os estados quânticos físicos (que contêm

as simetrias da hamiltoniana), que chamamos rede de *spin* invariante.

Uma vez que construímos uma base de estados físicos (exceto no caso da gravitação 3+1 dimensional, onde este é um problema em aberto) nós podemos estudar alguns observáveis (parciais, no caso da gravitação 3+1 dimensional) da teoria, em particular, no caso do modelo BF 2+1 dimensional num espaço euclidiano, vimos que os observáveis comprimento e área geram um espectro de autovalores discreto para a base de rede de *spin* invariante, o que corrobora com a idéia de que ao quantizarmos o campo gravitacional, teríamos a discretização do espaço-tempo. A partir da base dos estados físicos também podemos construir o formalismo dos *spin foams*, que dá um significado dinâmico ao produto interno de dois estados quânticos na base de *spin* invariante, que pode ser visto com a soma das histórias das amplitudes de transição das redes de *spin*.

As perspectivas de estudos futuros que surgiram no desenvolvimento deste trabalho envolvem:

- Explorar a dinâmica dos estados quânticos obtidos no modelo BF 1+1 dimensional afim de estabelecer um comparativo com a dinâmica da teoria de Chern-Simons tridimensional, discutida em [19], [40];
- A análise mais formal de um modelo BF de dimensões maiores que possivelmente apresente outros termos acoplados à ação (como o modelo BF 4D de J. Baez [15] ou o modelo Barrett-Crane (BC) [41]) [42] e as implicações destes na compreensão da gravitação quadridimensional;
- A análise das teorias descritas aqui neste trabalho considerando outras álgebras de Lie, tomando outros grupos de representação (como o modelo BF 2+1 lorentziano $SU(1, 1)$ estudado por Freidel [30, 43]);
- Um estudo mais cuidadoso da construção do projetor P para o modelo BF 2+1 dimensional utilizando a teoria das distribuições e das implicações para a dinâmica quântica ao fazê-lo, bem como acompanhar o estudo da construção do projetor generalizado P para a gravitação quadridimensional via o programa do vínculo

mestre de Thiemann [31], [33], [32] que visa reduzir ou tornar independente de ambiguidades de quantização o formalismo dos *spins foams* nesta teoria.

Apêndice A

Revisão de Geometria Diferencial

A.1 Grupos de Lie

Na matemática, um grupo de Lie [13], [44] é um grupo que também é uma variedade diferenciável, o que faz com que as operações dos elementos do grupo, ou geradores, sejam compatíveis com a estrutura diferencial. Neste trabalho, quando nos referimos a grupos de calibre (*gauge*) ou ainda grupos de simetria, estamos considerando que os grupos citados são grupos de Lie.

Os grupos de Lie, por serem variedades diferenciáveis podem ser estudados utilizando o cálculo diferencial, em contraste com os casos mais gerais de grupos topológicos. Uma das idéias chave na teoria de grupos de Lie é substituir o objeto global, o grupo, por sua versão local ou linearizada que é chamada de grupo infinitesimal cujo estudo é conhecido como álgebra de Lie, que é a teoria que atualmente melhor descreve as simetrias contínuas de objetos e estruturas matemáticas.

A.1.1 Alguns de grupos de Lie

Escrevemos aqui alguns exemplos de grupos de Lie que aparecem neste trabalho, ao longo do texto.

- O espaço euclidiano R^n com a adição vetorial comum como operação do grupo se torna um grupo de Lie abeliano não-compacto n -dimensional;
- O grupo círculo \mathcal{S}^1 que consiste em números complexos com valor absoluto = 1 sobre multiplicação. Este é um grupo de Lie abeliano compacto unidimensional.
- O grupo ortogonal $O(R^n)$, formado por todas as matrizes ortogonais $n \times n$ com valores reais. Este é um grupo de Lie $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensional desconexo, mas que tem um subgrupo conexo $SO^n(R)$ de mesma dimensão que é formado por matrizes ortogonais de determinante = 1, que é conhecido como grupo especial ortogonal (em inglês, *Special Orthogonal group*) (para $R^n = 3$, temos o grupo de rotações).
- O grupo unitário $U(n)$ é formado por matrizes unitárias $n \times n$ com valores complexos. Este é um grupo de Lie de dimensão n^2 compacto e conexo. Matrizes unitárias de determinante = 1 formam um subgrupo conexo fechado de dimensão $n^2 - 1$ chamado de $SU(n)$, o grupo especial unitário (em inglês *special unitary group*).
- O grupo de Lorentz e o grupo de Poincaré são os grupos de isometrias lineares e afins do espaço de Minkowski (interpretado como o espaço-tempo da relatividade restrita). Eles são grupos de Lie de dimensão 6 e 10.

A.1.2 A álgebra do grupo $SU(2)$

Para definir o Grupo de Lie G (consideramos grupos semissimples) temos que definir os geradores de transformações infinitesimais g . Vamos definir o grupo $SU(2)$ como exemplo

e para tal, seja ψ um vetor do espaço tangente $T_P\mathcal{M}$ cuja fibra é o grupo G :

$$g \in G : \psi' = g\psi \quad (\text{A.1})$$

$$g \approx 1 + \omega ; |\omega| \ll 1 \quad (\text{A.2})$$

Propriedades de $SU(2)$:

$$\text{Os } g \text{ são matrizes } 2 \times 2 \quad (\text{A.3})$$

$$g^\dagger g \approx (1 + \omega)^\dagger (1 + \omega) = 1 + \omega^\dagger + \omega = 1 : \boxed{\omega^\dagger = -\omega} \quad (\text{A.4})$$

$$\det(g) = 1 : \boxed{\text{Tr}(\omega) = 0} \quad (\text{A.5})$$

Com estas propriedades, podemos escrever uma base para as matrizes ω usando as matrizes de Pauli σ_I , com ($I = 1, 2, 3$).

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

E chamamos a base dos geradores ω de T_I , que obedecem: $-\frac{i}{2}\sigma_I \equiv T_I$. Em geral:

$$\omega(x) = \omega^I(x)T_I \quad (\text{A.7})$$

Note também que:

$$\text{Tr}(T_I T_J) = -\frac{1}{2}\delta_{IJ} \quad (\text{A.8})$$

As relações de comutação entre os T_I :

$$[T_I, T_J] = f_{IJK}T_K \quad (\text{A.9})$$

Onde f_{IJK} é a constante de estrutura do grupo, em $SU(2)$: $f_{IJK} = \varepsilon_{IJK}$, o tensor de Levi-Civita.

A.1.3 Homeomorfismos de $SU(2)$

Há um homeomorfismo entre $SU(2) \rightarrow SO(3)$ dado por:

$$g \in SU(2) \mapsto R_{ij}(g) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i g \sigma_j g^\dagger) \quad (\text{A.10})$$

Onde $i, j = 1, 2, 3$. Só que $R(-g) = R(g)$, então o espaço não é isomórfico, pois uma curva indo de g a $-g$ em $SO(3)$ é uma curva aberta, mas em $SU(2)$ é uma curva fechada, então esta mesma curva vai ter classes de homotopia diferentes dependendo do espaço em que ela estiver definida, o que mostra que estes espaços não são isomórficos.

A.2 Formas diferenciais e vetores

A.2.1 Representação adjunta para formas e vetores

A partir do estudo da álgebra do grupo de calibre $SU(2)$, podemos adotar uma notação para expressar nossos campos vetoriais e formas diferenciais da seguinte maneira:

$$A_\mu \leftrightarrow A_\mu^I T_I \equiv A_\mu^I \quad (\text{A.11})$$

$$B_\mu \leftrightarrow B_\mu^I T_I \equiv B_\mu^I \quad (\text{A.12})$$

A.2.2 Formas, vetores e tensores em uma variedade diferenciável

Vamos introduzir o conceito das formas diferenciais [4], [13], [44], que temos como exemplo $A_\mu^I dx^\mu$. A_μ^I pode ser considerado uma conexão, que define a derivada covariante na variedade diferenciável. Uma variedade diferenciável é um conjunto de pontos P que possui uma topologia e estes pontos possuem homeomorfismos, ou seja, uma transformação que caracteriza de maneira única o ponto P .

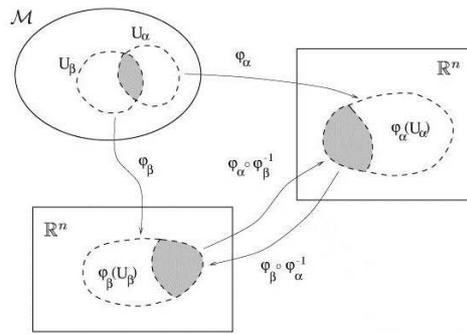


Figura A.1: Para pontos $P \in U_\alpha$ e $Q \in U_\beta$ podemos definir transformações de coordenadas φ_α e φ_β que mapeiam os pontos da variedade \mathcal{M} em subespaços \mathbb{R}^n .

Podemos escrever as transformações de coordenadas de forma geral:

$$x'^\mu = x'^\mu(x) \quad (\text{A.13})$$

Que em uma variedade diferenciável são funções definidas em \mathbb{C}^∞ , infinitamente diferenciáveis.

Agora vamos definir os Vetores:

$$v^\mu(\vec{x}) \quad , \quad \mu = 0, \dots, D - 1 \quad (\text{A.14})$$

E a derivada na direção de um vetor:

$$v^\mu(\vec{x}) \partial_\mu f(\vec{x}) \quad (\text{A.15})$$

Onde $f(\vec{x})$ é uma função que é definida de forma que os vetores escritos nesta forma sejam invariantes. Chamamos $f(p)$ uma função escalar, isto é, invariante sob uma transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' \quad (x \equiv (x^0, \dots, x^{D-1})) \\ f(x) &= f'(x') \end{aligned}$$

Considerando transformações infinitesimais:

$$\begin{aligned}x'^{\mu} &= x^{\mu} - \xi^{\mu}(\vec{x}) \quad |\xi| \text{ pequeno} \\f(\vec{x}) &= f'(\vec{x} - \xi) \\f'(\vec{x}) &= f(\vec{x} + \xi) = f(\vec{x}) + \xi^{\mu} \partial_{\mu} f = f(\vec{x}) + \delta f(\vec{x})\end{aligned}$$

Então escrevemos o vetor $v(p)$ com $p \in \mathcal{M}$, sendo um operador diferencial definido num sistema de coordenadas x por:

$$(vf)(\vec{x}) = v^{\mu}(\vec{x}) \partial_{\mu} f(\vec{x}) \quad (\text{A.16})$$

Note que $v^{\mu}(\vec{x})$ pode ser visto como o módulo das componentes e $\partial_{\mu} f(\vec{x})$ como os vetores da base definida por f . Uma vez definido desta forma, temos independência do sistema de coordenadas, o que queremos para trabalhar com vetores na nossa variedade diferenciável:

$$\begin{aligned}v'^{\mu}(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial \vec{x}'^{\mu}} f'(\vec{x}') &= v^{\mu}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \vec{x}^{\mu}} f(\vec{x}) \\ \partial'_{\mu} f' &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \vec{x}'^{\mu}} \partial_{\nu} f\end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A equação (A.17) é justamente a definição de vetor covariante, que obtivemos como consequência de $f(p)$ ser escalar. Em geral, temos o tensor:

$$t'^{\mu_1 \dots \mu_n}(\vec{x}') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu}} t^{\nu \mu_2 \dots \mu_n} + \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\nu}} t^{\mu_1 \nu \mu_3 \dots \mu_n} + \dots \quad (\text{A.18})$$

A.2.3 O espaço tangente T_P e o espaço dual T_P^*

Sempre podemos definir um espaço dual a um espaço vetorial pré-definido, então chamamos de T_p^* o espaço dual do espaço tangente T_p . Um elemento $\omega \in T_p^*$ é uma forma linear

$\omega(\alpha v + \beta w) = \alpha\omega(v) + \beta\omega(w)$ sobre T_p :

$$\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.19})$$

$$v \rightarrow \omega(v)$$

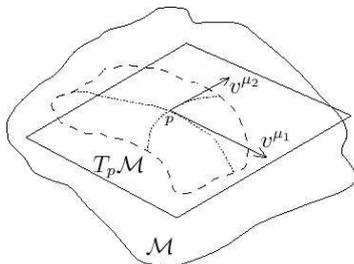


Figura A.2: O conjunto dos vetores v de um ponto p se chama espaço tangente T_p , que é um espaço vetorial, isto é, obedece propriedades vetoriais tais como o produto de dois vetores continua dentro do espaço, etc.

v^{μ_1}, v^{μ_2}

O dual T_p^* também é um espaço vetorial:

$$c_1\omega_1(v) + c_2\omega_2(v) = (c_1\omega_1 + c_2\omega_2)(v) \quad (\text{A.20})$$

Onde $\omega_1, \omega_2 \in T_p^*$, $v \in T_p$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A $\dim(T_p^*) = \dim(T_p) = \dim(\mathcal{M}) = D$. Escrevemos uma base de um sistema de coordenadas para $T_p^* : \{dx^\mu, \mu = 0, \dots, D-1\}$ definida por $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu$ para definirmos a 1-forma geral $\omega \in T_p^*$:

$$\omega = \omega_\mu(\vec{x})dx^\mu \quad (\text{A.21})$$

Que independe da escolha de coordenadas. O delta descrito acima nada mais é do que a maneira de escrever a 1-forma como sendo um vetor contravariante:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \\ dx'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \Rightarrow \omega'_\mu(\vec{x}') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu(\vec{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

A transformação infinitesimal associada a 1-forma ω é:

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = -\xi^\mu(\vec{x}') \quad (\text{A.23})$$

$$\delta \omega_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda \omega_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda \omega_\lambda \quad (\text{A.24})$$

A.2.4 Multiplicação de formas diferenciais

Podemos generalizar a 1-forma para p-formas de forma análoga ao que fizemos dos vetores para tensores:

- vetor \rightarrow produto tensorial $T_p \otimes T_p \otimes \dots \otimes T_p$ (p vezes) \rightarrow gera um tensor de rank p ;
- 1-forma \rightarrow produto tensorial $T_p^* \otimes T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*$ (p vezes) \rightarrow gera p-formas.

Mas o produto tensorial é antissimétrico $T_p^* \wedge T_p^*$, então uma 2-forma geral vai ser escrita da seguinte maneira:

$$\omega_2 : \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}(\vec{x}) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{A.25})$$

E como a base $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ são números de Grassmann, $\omega_{\mu\nu}$ pode ter uma parte simétrica e outra antissimétrica, mas só a parte antissimétrica sobrevive à contração dos índices, então $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e:

$$\omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{21} dx^2 \wedge dx^1 = 2\omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 \quad (\text{A.26})$$

As p-formas são então:

$$\omega_p = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{A.27})$$

Se queremos a independência de um sistema de coordenadas, os ω 's vão se transformar de uma maneira particular:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x'(\vec{x}) \\ \omega'_{\mu_1 \dots \mu_p}(\vec{x}') &= \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_p}}{\partial x'^{\mu_p}} \omega_{\nu_1 \dots \nu_p} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\delta \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} = \xi^\lambda \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} + \partial_{\mu_1} \xi^\nu \omega_{\nu \mu_2 \dots \mu_p} + \cdots + \partial_{\mu_p} \xi^\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \nu} \quad (\text{A.29})$$

Consideramos agora o produto exterior, que mostra algumas propriedades importantes das formas:

$$\omega_p \wedge \omega_q = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{1}{q!} \omega_{\rho_1 \dots \rho_q} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\rho_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\rho_q} \quad (\text{A.30})$$

É uma $(p+q)$ -forma. Se os números p ou q forem pares eles comutam e se ambos forem ímpares eles anticomutam:

$$\omega_p \wedge \omega_q = (-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p \quad (\text{A.31})$$

Note que $dx^\mu \wedge dx^\mu = 0$. Seja $\dim(\mathcal{M}) = D$, então o máximo de dx que podemos colocar juntos é igual a D . Por exemplo, para $D = 2$:

$$\text{1-forma: } \omega_\mu dx^\mu = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 \quad (\text{A.32})$$

$$\text{2-forma: } \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{21} dx^2 \wedge dx^1 \quad (\text{A.33})$$

$$\text{3-forma: } \omega_{\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = \omega_{12\rho} \underbrace{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^1}_{=0} + \cdots = 0 \quad (\text{A.34})$$

Por fim, uma 0-forma nada mais é do que uma função escalar:

$$\omega = \omega(\vec{x}) \quad (\text{A.35})$$

$$\delta \omega(\vec{x}) = \xi^\lambda \partial_\lambda \omega(\vec{x}) \quad (\text{A.36})$$

A.2.5 Derivação de uma forma

Definimos da seguinte forma o operador derivada exterior d :

$$d\omega_p \equiv \frac{1}{p!} \partial_\mu \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{A.37})$$

Este operador derivada exterior d é intrinsecamente um operador ímpar, uma vez que ao derivar uma p -forma ω_p geramos uma $(p+1)$ -forma $d\omega_p$.

Algumas propriedades desta derivada:

$$d^2 = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q \quad (\text{A.39})$$

A propriedade (A.38) pode ser mostrada levando-se em conta que o produto de uma grandeza simétrica com uma grandeza antissimétrica é nulo com a permutação dos índices:

$$d\omega_p = \partial_\mu \omega dx^\mu \wedge \dots \quad (\text{A.40})$$

$$dd\omega_p = \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{simétrico}} \omega \underbrace{dx^\nu \wedge dx^\mu}_{\text{antissimétrico}} \wedge \dots = 0 \quad (\text{A.41})$$

Faremos alguns exemplos para mostrar que este operador realmente representa uma operação de derivação, primeiro consideramos $p = 0$:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= f(\vec{x}) \\ d\omega_0 &= \partial_\mu f(\vec{x}) dx^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Onde $f(\vec{x})$ é uma função escalar (0-forma), então $\partial_\mu f(\vec{x})$ nada mais é do que um gradiente e o operador d faz o papel de derivada convencional. Consideramos agora 1-formas:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_\mu dx^\mu \\ d\omega_1 &= \partial_\nu \omega_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Lembrando que devido a contração com $dx^\mu \wedge dx^\nu$ só a parte antissimétrica vai contribuir, então:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \left[\frac{1}{2}(\partial_\nu \omega_\mu + \partial_\mu \omega_\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\nu \omega_\mu - \partial_\mu \omega_\nu) \right] dx^\mu \wedge dx^\nu \\ d\omega_1 &= \frac{1}{2}(\partial_\nu \omega_\mu - \partial_\mu \omega_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Que é o rotacional de ω_μ . Note que os resultados que achamos até agora são consistentes com as duas propriedades citadas acima, levando-se em conta que o rotacional de um gradiente é sempre nulo (equação A.38). Olhando para formas de ordens maiores, como $p = 2, 3, \dots$, sempre vamos encontrar o padrão de permutação cíclica entre derivadas de componentes, que é uma analogia ao rotacional das componentes, como a divergência no caso $p = 2$.

A.2.6 Integração de uma forma

Seja ω_D uma D-forma, e queremos calcular a integral $\int_V \omega_D$, com $V \subset \mathcal{M}$. Para tal, faremos uma generalização, melhor dizendo, restringiremos nossas formas dx^μ que são a base do espaço dual T_p^* a serem elementos infinitesimais no espaço V , isto é:

$$\omega_D = \frac{1}{D!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_D} \underbrace{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D}}_{\text{forma volume } dV} \quad (\text{A.45})$$

Então a permutação de $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D}$ gera uma forma volume $+dV$ se as permutações forem pares e uma forma volume $-dV$ se as permutações forem ímpares. O símbolo que expressa este comportamento é o tensor de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D}$, que é completamente antissimétrico. Então, seguindo a seguinte convenção:

$$\varepsilon^{012 \dots (D-1)} = 1 \quad \begin{cases} +1 \text{ se a permutação for par} \\ -1 \text{ se a permutação for ímpar} \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

Temos $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} dV$, então:

$$\begin{aligned}\omega_D &= \frac{1}{D!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \omega_{\mu_1 \dots \mu_D} dV \\ \omega_D &= \tilde{\omega} dV\end{aligned}\tag{A.47}$$

Finalmente, escrevemos a integral:

$$\int_V \omega_D = \int_V dx^0 dx^1 \dots dx^D \tilde{\omega}(\vec{x})\tag{A.48}$$

É importante notar que esta operação de integração não define nenhuma métrica, mesmo que estejamos falando de uma “forma volume”. O que esta operação faz é definir um mapa entre coordenadas, e se definirmos uma base encontraremos comprimentos, áreas, volumes naquele sistema de coordenadas definido.

A.3 Outros operadores derivadas

A.3.1 A antiderivada

Um operador que obedece a regra de Leibniz gera uma operação que chamamos de derivação. Um operador que obedece a regra generalizada de Leibniz gera uma operação chamada de antiderivação.

Definimos então o operador i_v associado a um vetor $v : v = v^\mu(\vec{x})\partial_\mu$ de forma que suas propriedades são tais que:

$$i_v(\omega_p \wedge \omega_q) = (i_v \omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge i_v \omega_q\tag{A.49}$$

$$i_v dx^\mu = v^\mu \Rightarrow i_v \text{ 0-forma} = 0\tag{A.50}$$

$$(i_v)^2 = 0\tag{A.51}$$

Note que (A.50) transforma uma forma de grau (D) em uma forma de grau (D-1) e

também é um operador ímpar de antiderivação. Chamamos i_v de derivada interior ou contração. Calculando algumas derivadas de formas:

$$i_v \omega_1 = i_v(\omega_\mu dx^\mu) = \omega_\mu i_v dx^\mu = \omega_\mu v^\mu (\equiv \omega \cdot v) \quad (\text{A.52})$$

$$i_v \omega_p = \frac{1}{(p-1)!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} v^{\mu_1} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{A.53})$$

A.3.2 A derivada de Lie

É um operador \mathcal{L}_v associado a um vetor v , e é uma combinação da derivada interior e da derivada exterior:

$$\mathcal{L}_v \omega_p = (i_v d + di_v) \omega_p \quad (\text{A.54})$$

Este operador é um objeto par, pois conserva o grau da forma. E respeita a regra de Leibniz, assim sendo chamamos \mathcal{L}_v de uma derivação.

Notação: A partir de agora, sempre que nos referirmos ao produto de duas formas, estaremos falando do produto *wedge*, a menos que se diga o contrário $\omega_p \wedge \omega_q = \omega_p \omega_q$.

Da definição da derivada de Lie, podemos deduzir várias propriedades interessantes, tais como:

$$d\mathcal{L}_v \omega = \mathcal{L}_v(d\omega) \quad (\text{A.55})$$

$$\mathcal{L}_{fv} \omega = f\mathcal{L}_v \omega + df \wedge i_v \omega \quad (\text{A.56})$$

Vamos calcular a derivada de Lie \mathcal{L}_ξ para uma 0-forma associada $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \omega_0 &= i_\xi d\omega_0 + di_\xi \omega_0 \\ &= i_\xi \partial_\mu \omega_0 dx^\mu = \xi^\mu \partial_\mu \omega_0 = \delta_{\text{diff eo}} \omega_0 \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Ou seja, a derivada de Lie sobre uma 0-forma tem o efeito de uma transformação geral infinitesimal ($x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$) de coordenadas $\delta_{\text{diff eo}} \omega_0 = \xi^\mu \partial_\mu \omega_0$, onde a 0-forma é um

invariante sobre difeomorfismos associados ao parâmetro ξ^μ . No caso da 1-forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi\omega_1 &= i_\xi d\omega_\mu dx^\mu + di_\xi\omega_\mu dx^\mu \\ &= i_\xi(\partial_\nu\omega_\mu dx^\nu dx^\mu) + d(\xi^\mu\omega_\mu) \\ &= \partial_\nu\omega_\mu\xi^\mu dx^\mu - \partial_\nu\omega_\mu dx^\nu\xi^\mu + \partial_\nu\xi^\mu dx^\nu\omega_\mu + \xi^\mu\partial_\nu\omega_\mu dx^\mu\end{aligned}$$

Renomeando alguns índices somados e cancelando o segundo e quarto termos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi\omega_1 &= (\xi^\lambda\partial_\lambda\omega_\mu + \partial_\mu\xi^\lambda\omega_\lambda)dx^\mu \\ &= (\delta_{\text{diffeo}}\omega_\mu)dx^\mu\end{aligned}\tag{A.58}$$

Em geral:

$$\mathcal{L}_\xi\omega_p = \frac{1}{p!}(\delta_{\text{diffeo}}\omega_{\mu_1\dots\mu_p})dx^{\mu_1}\dots dx^{\mu_p}\tag{A.59}$$

A derivada de Lie então é uma boa candidata para escrevermos uma integração invariante sobre difeomorfismos ($x' = x - \xi$):

$$\int_V \omega'_D - \int_V \omega_D = \int_V \mathcal{L}_\xi\omega_D = \int_V (i_\xi d\omega_D + di_\xi\omega_D) = \int_V di_\xi\omega_D\tag{A.60}$$

Pode-se mostrar que $di_\xi\omega_D = di_\xi(\tilde{\omega}dV) = d(\tilde{\omega}i_\xi dV)$ e nossa integral pode ser escrita como:

$$\int_V di_\xi\omega_D = \int_V d^D x \partial_\mu(\xi^\mu\tilde{\omega})\tag{A.61}$$

O difeomorfismo deixa a borda de V fixa, então a integral é invariante quando tomamos o limite de $V \rightarrow \infty$ e $d^D x \rightarrow 0$. A quantidade entre parênteses ($\xi^\mu\tilde{\omega}$) é uma densidade escalar.

Um exemplo onde este tipo de estrutura é utilizada ocorre na RG, onde os escalares da teoria são multiplicados por fatores envolvendo \sqrt{g} justamente pelo fato que queremos que os objetos desta teoria se transformem como (A.61).

A.4 Invariância sobre difeomorfismos

Na seção anterior estudamos as condições para que ω_D seja invariante sobre difeomorfismos:

$$\delta\tilde{\omega}_D = \mathcal{L}_\xi\tilde{\omega}_D = \partial_\mu(\xi^\mu\tilde{\omega}_D) \quad (\text{A.62})$$

Onde $\xi^\mu\tilde{\omega}_D$ é a densidade escalar. Uma vez que $\delta \int_{\mathcal{M}} \omega_D = 0$, vamos utilizar esta forma para escrever ações, que vão ser invariantes sobre difeomorfismos. Por exemplo, na RG a ação tem uma forma do tipo $\int d^4x \sqrt{g}R$, onde R é um escalar de curvatura. A invariância desta integral é obtida devido ao termo de densidade escalar \sqrt{g} que podemos mostrar a partir da lei de transformação do tensor métrico:

$$\delta_{\text{dif}}g_{\mu\nu} = \xi^\lambda\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\mu\xi^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu\xi^\lambda g_{\mu\lambda} \quad (\text{A.63})$$

$$\delta(\sqrt{|g|}R) = \partial_\lambda(\xi^\lambda\sqrt{|g|})R + \sqrt{|g|}\xi^\lambda\partial_\lambda R = \partial_\lambda(\xi^\lambda\sqrt{|g|}R) \quad (\text{A.64})$$

Com isto vemos que a ação de Einstein-Hilbert é invariante sobre difeomorfismos:

$$S_{EH} = \frac{1}{G} \int d^4x \sqrt{-g}R \quad (\text{A.65})$$

A.4.1 Integrais invariantes

Estudaremos agora as integrais de linha, então consideraremos uma 1-forma $a = a_\mu dx^\mu$ integrada sobre uma curva C .

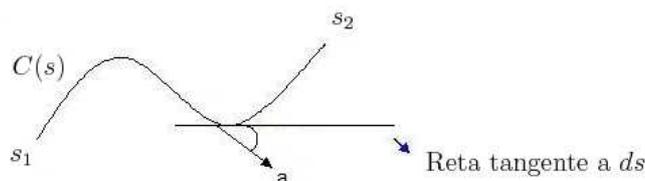


Figura A.3: A curva $C \in \mathcal{M}$, aonde aplicamos uma parametrização $x(s)$ para realizar a integração.

Definimos o sistema de coordenadas para a integração:

- Coordenadas de \mathcal{M} : $x^\mu, \mu = 0, \dots, \mu = D - 1$
- Parametrizar a curva $s, s_1 \leq s \leq s_2$

Escrevemos as equações paramétricas de C :

$$x^\mu = x^\mu(s), s_1 \leq s \leq s_2 \quad (\text{A.66})$$

$$dx^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} ds \equiv x'^\mu(s) ds \quad (\text{A.67})$$

Ao longo de C . Note que tomamos as formas dx^μ como diferenciais e a nossa integral de linha é definida como:

$$\int_C a \equiv \int_{s_1}^{s_2} ds a_\mu(x(s)) x'^\mu(s) \quad (\text{A.68})$$

Que independe das escolhas de coordenadas e de parametrização.

Consideramos agora a integral de uma 2-forma: $\omega_2 = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$. Note que ao tomarmos $dx^\mu \wedge dx^\nu$ como diferenciais, temos um elemento de área.

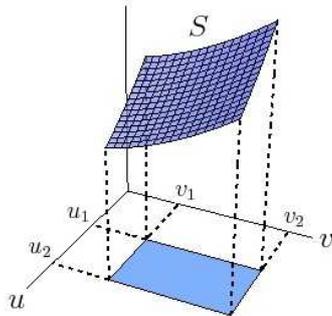


Figura A.4: A superfície $S \in \mathcal{M}$, aonde aplicamos uma parametrização $x(u, v)$ para realizar a integração.

u_1, u_2, v_1, v_2

Escrevemos as equações paramétricas ao longo da superfície S :

$$x^\mu = x^\mu(u, v) \quad (\text{A.69})$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u} du + \frac{\partial x^\mu}{\partial v} dv \quad (\text{A.70})$$

O elemento de área se escreve como:

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} du \wedge dv + \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} dv \wedge du \\ &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} - \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \right) du \wedge dv \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

E a integral de superfície é definida como:

$$\int_{\Sigma} \omega_2 \equiv \frac{1}{2} \int_{\Sigma} dudv \omega_{\mu\nu}(x(u, v)) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} - \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \right) \quad (\text{A.72})$$

A generalização para D-formas é evidente.

A.4.2 Comutadores de formas diferenciais

Os comutadores e anticomutadores que aparecem entre formas podem ser reescritos como comutadores graduados, devido à antissimetria do produto *wedge*. Seja então X uma P-forma e Y uma Q-forma, o comutador generalizado ou graduado é tal que:

$$[X_P, Y_Q] \equiv X_P Y_Q - (-1)^{PQ} Y_Q X_P \quad (\text{A.73})$$

Isto é, se P e Q forem ímpares teremos relações de anticomutação e em outras situações, relações de comutação.

A.4.3 Regra de Integração por partes

Considerando X_P uma P-forma e Y_Q uma Q-forma:

$$D(X_P Y_Q) = (DX)Y + (-1)^P X D Y = d(X_P Y_Q) + [A, X_P Y_Q] \quad (\text{A.74})$$

Tomando o $Tr(X_P Y_Q)$ vemos que:

$$D(Tr(X_P Y_Q)) = d(Tr(X_P Y_Q)) + 0 \quad (\text{A.75})$$

Pois $Tr[X_P, Y_Q] = 0$, uma vez que:

$$\begin{aligned} (Y_Q X_P)_{\alpha\gamma} &= Y_{Q\alpha\beta} X_{P\beta\gamma} \\ Tr(Y_Q X_P) &= Y_{Q\alpha\beta} X_{P\beta\alpha} \\ &= (-1)^{QP} X_{P\beta\alpha} Y_{Q\alpha\beta} = (-1)^{QP} Tr(X_P Y_Q) \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Então:

$$d(X_P Y_Q) = D(X_P Y_Q) = (DX_P)Y_Q + (-1)^P X_P DY_Q \quad (\text{A.77})$$

Então este resultado gera uma fórmula de integração por partes:

$$Tr \int (DX_P)Y_Q = (-1)^{P+1} Tr \int X_P DY_Q + Tr \int D(X_P Y_Q) \quad (\text{A.78})$$

Aonde podemos utilizar a notação de componentes e as propriedades do traço para obter:

$$\boxed{Tr \int d^2 x' X^I D_\mu^{IJ} Y^J = (-1)^{D-2} Tr \int d^2 x' D_\mu^{IJ} X^J Y^I} \quad (\text{A.79})$$

No caso particular (2.39) da equação (A.78), o último termo é então:

$$d(\eta F) = D\eta F + (-1)^{D-3} \eta DF = 0 \quad (\text{A.80})$$

Sabendo que $DF = 0$ mostramos que a variação da ação é mesmo dada pela regra de integração dada em (2.39):

$$\delta Tr \int BF = Tr \int D\eta F = (-1)^{D-2} Tr \int \eta DF = 0 \quad (\text{A.81})$$

Apêndice B

Complementos sobre Quantização Canônica

B.1 A quantização do campo de Schrödinger

B.1.1 A ação de Schrödinger

Vamos começar da integral de ação I , que gera a equação de Schrödinger, e mostrar que podemos obter a dinâmica da mecânica quântica descrita pelos comutadores, e mediante a aplicação do teorema de Ehrenfest, obter a base da representação de Heisenberg:

$$I = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} dt d^3x, \text{ onde } \mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\nabla\psi^* \quad (\text{B.1})$$

Note que ψ e ψ^* são campos independentes.

Então, o primeiro passo do método é converter a nossa lagrangiana para uma hamiltoniana.

Vamos escrever as equações de movimento de Lagrange em coordenadas generalizadas, que seguem da variação da integral de ação: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_n}$ e para passar para o formalismo

hamiltoniano introduzimos as variáveis de momento P_n , definidas por:

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$$

No caso da ação de Schrödinger, definimos os momentos conjugados aos campos ψ e ψ^* :

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^* \quad (\text{B.2})$$

$$\Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Que respeitam as relações fundamentais de comutação:

$$[\psi(\vec{x}), \psi^*(\vec{y})] \equiv 0 \quad [\Pi(\vec{x}), \Pi^*(\vec{y})] \equiv 0 \quad (\text{B.4})$$

$$[\psi(\vec{x}), \Pi(\vec{y})] \equiv \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad [\psi^*(\vec{x}), \Pi^*(\vec{y})] \equiv \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{B.5})$$

Note que os momentos não são funções independentes das velocidades, então vão existir relações do tipo $\phi_m(q, P) \approx 0$ que são chamadas vínculos primários, no nosso caso:

$$\phi_1 \approx \Pi - i\hbar\psi^* \quad (\text{B.6})$$

$$\phi_2 \approx \Pi^* \quad (\text{B.7})$$

Podemos agora escrever $H = P_n \dot{q}_n - L$ e nosso H vai ser uma equação integral da densidade hamiltoniana $H = \int \mathcal{H} d^3x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi_n \dot{\psi}_n - \mathcal{L} = \Pi \dot{\psi} + \Pi^* \dot{\psi}^* - i\hbar\psi^* \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^* \\ \mathcal{H} &= i\hbar\psi^* \dot{\psi} + 0 \cdot \dot{\psi}^* - i\hbar\psi^* \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^* \\ \mathcal{H} &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^* \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Só que esta hamiltoniana não é unicamente determinada porque podemos adicionar qual-

quer combinação linear de ϕ 's, que são zero. Escrevemos então \mathcal{H}_c :

$$\mathcal{H}_c = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi\nabla\psi^* + u_1(\Pi - i\hbar\psi^*) + u_2(\Pi^*) \quad (\text{B.9})$$

As equações de movimento de Hamilton segundo o método variacional são:

$$\dot{\psi}_n = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Pi_n} + u_m \frac{\partial\phi_m}{\partial\Pi_n} \quad (\text{B.10})$$

$$\dot{\Pi}_n = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi_n} - u_m \frac{\partial\phi_m}{\partial\psi_n} \quad (\text{B.11})$$

Usando o formalismo dos colchetes de Poisson, podemos reescrever estas equações para que sejam da forma (sendo g uma função qualquer):

$$\dot{g} = [g, H] + u_m [g, \phi_m] = [g, H + u_m \phi_m] \quad (\text{B.12})$$

B.1.2 O Algoritmo de Dirac-Bergmann

Começamos o Algoritmo de Dirac-Bergmann, primeiramente devemos verificar as condições de consistência dos vínculos, trocando g por um dos ϕ 's. Um vínculo é dito consistente quando este não evolui no tempo, isto é, colocando $\dot{g} = 0$ e $g = \phi_m$:

$$[\phi_m, H] + u_{m'} [\phi_m, \phi_{m'}] \approx 0$$

No caso de Schrödinger temos que fazer duas verificações, uma pra ϕ_1 e outra para ϕ_2 :

$$[\phi_1, H] + u_2 [\phi_1, \phi_2] \approx 0 \quad (\text{B.13})$$

$$[\phi_2, H] + u_1 [\phi_2, \phi_1] \approx 0 \quad (\text{B.14})$$

Então resolvemos os seguintes comutadores:

$$\begin{aligned}
\int d^3y [\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{y})] &= \int d^3y [\Pi(\vec{x}) - i\hbar\psi^*(\vec{x}), \Pi^*(\vec{y})] \\
&= \int d^3y [-i\hbar\psi^*(\vec{x}), \Pi^*(\vec{y})] \\
&= -i\hbar \int d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= -i\hbar
\end{aligned} \tag{B.15}$$

H é a integral: $\frac{\hbar^2}{2m} \int d^3y \nabla\psi\nabla\psi^* = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3y \{\nabla(\nabla\psi\psi^*) - \psi^*\nabla^2\psi\}$ ou sua conjugada, então utilizamos o teorema de Stokes e excluimos o primeiro termo (divergente) e ficamos com $-\int d^3y \psi^*\nabla^2\psi$ ou sua conjugada. Assim os comutadores são triviais:

$$[\Pi - i\hbar\psi^*, H] = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi^* \tag{B.16}$$

$$[\Pi^*, H] = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi \tag{B.17}$$

Podemos então resolver explicitamente (13) e (14) de forma que:

$$u_1 = \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2\psi \tag{B.18}$$

$$u_2 = -\frac{i\hbar}{2m} \nabla^2\psi^* \tag{B.19}$$

Note que $u_1 = u_2^*$. Caímos no caso onde as condições de consistência impõem valores para os coeficientes u_m e o algoritmo encerra.

B.1.3 A hamiltoniana total

Agora vamos supor que os u 's são desconhecidos e temos duas equações não homogêneas para u_1 e u_2 , onde u_m são funções de q e P .

$$u_m = U_m(q, P)$$

Como esta solução não é única, podemos adicionar qualquer solução $V_m(q, P)$ da equação homogênea associada a (13) e (14):

$$V_{m'}[\phi_m, \phi_{m'}] = 0$$

Como queremos a solução mais geral, devemos considerar todas as soluções V_{am} independentes $u_m = U_m + v_a V_{am}$ em termos de v_a que são arbitrários.

A hamiltoniana total se escreve como:

$$\begin{aligned} H_T &= H + U_m \phi_m + v_a V_{am} \phi_m = H_c + v_a \phi_a \\ H_T &= \frac{i\hbar}{2m} \int d^3x \Pi \nabla^2 \psi - \Pi^* \nabla^2 \psi^* + v_a \phi_a \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Note que essa nova hamiltoniana total tem equações de movimento da forma $\dot{g} \approx [g, H_T]$. Os v 's são coeficientes ou funções arbitrárias do tempo que satisfazem os requerimentos para uma teoria dinâmica.

B.1.4 A classe de um vínculo

(ACHO QUE O COLCHETE COM H DEVE TAMBÉM SER FRACAMENTE NULO. POR FAVOR VERIFIQUE.)¶

Olivier, no livro do Dirac [16] está como definição o colchete de g e os ϕ apenas - Diego 08/02/10

Para desenvolver o algoritmo de Dirac-Bergmann, precisamos introduzir o conceito de classe dos vínculos: Uma variável dinâmica $g(q, P)$ é dita de primeira classe se

$$[g, \phi_m] \approx 0 \quad (\text{B.21})$$

Caso contrário $g(q, P)$ é dito ser de segunda classe. Vale ressaltar que apenas uma igualdade fraca é necessária, isto é, o resultado do colchete (B.21) pode ser uma quantidade

fracamente nula, como um vínculo.

B.1.5 Os colchetes de Dirac

Observe que se fazemos $g = \phi_{m'}$ na equação (B.21):

$$[\phi_1, \phi_2] = -i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0$$

Então nossos vínculos são de segunda classe. A idéia por trás de quantizar uma teoria com vínculos secundários é que a própria existência de vínculos secundários significa que existem graus de liberdade que não são fisicamente importantes e podemos redefinir os colchetes de Poisson em colchetes de Dirac. Primeiro formamos um determinante com os vínculos de segunda classe $\phi_i \equiv \chi_i$:

$$\det(\Delta) = \begin{vmatrix} 0 & [\chi_1, \chi_2] \\ [\chi_2, \chi_1] & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -i\hbar \\ i\hbar & 0 \end{vmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = -\hbar^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0$$

Como $\det(\Delta) \neq 0$, a matriz Δ pode ser invertida:

$$\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i\hbar} \\ -\frac{1}{i\hbar} & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Definimos o novo colchete como:

$$\{\xi, \eta\}_D \equiv [\xi, \eta] - \sum_{ss'} \int d^3x d^3y [\xi, \chi_s] \Delta_{ss'}^{-1} [\chi_{s'}, \eta] \quad (\text{B.22})$$

Note que as propriedades e as equações de movimento associadas se sustentam com a redefinição do colchete $\{g, H_T\} \approx [g, H_T]$. Antes de trabalhar com os novos colchetes podemos colocar os $\chi \equiv 0$. No caso de Schrödinger, significa que os dois vínculos podem

ser tomados como igualdades fortes:

$$\phi_1 = 0 \rightarrow \Pi = i\hbar\psi^* \quad (\text{B.23})$$

$$\phi_2 = 0 \rightarrow \Pi^* = 0 \quad (\text{B.24})$$

Isto significa que nossa hamiltoniana pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} H_T &= H + v_a\phi_a \\ H_T &= \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \nabla\psi\nabla\psi^* + v_a\phi_a \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Como $\Pi \propto \psi^*$ e $\Pi^* = 0$, excluimos o grau de liberdade Π e nossos comutadores fundamentais são:

$$\{\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})\} = 0, \quad \{\psi^*(\vec{x}), \psi^*(\vec{y})\} = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$\{\psi(\vec{x}), \psi^*(\vec{y})\} = \frac{\delta^3(\vec{x} - \vec{y})}{i\hbar} \quad (\text{B.27})$$

E com isto terminamos o método hamiltoniano de quantização canônica sobre a ação de Schrödinger. Note que basta chamar os campos de operadores $\psi \rightarrow \hat{\psi}$ para termos o operador hamiltoniano $H_T \rightarrow \hat{H}_T$ bem como as relações fundamentais de comutação da mecânica quântica.

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (\text{B.28})$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}(\vec{x})}{2m} + V(\vec{x}) \quad (\text{B.29})$$

Onde $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ e $V(\vec{x})$ é arbitrário.

B.2 Construção do espaço de Hilbert cinemático

B.2.1 O espaço de fase clássico

Seja um espaço de fase clássico formado por coordenadas generalizadas (q^α, P_α) com $\alpha = 1, \dots, D$ cujo colchetes fundamentais se escrevem como $[q^\alpha, P_\beta] = \delta_\beta^\alpha$. Os vínculos de primeira classe são tais que $C_a(q, P) \approx 0$ com $a = 1, \dots$ e obedecem $[C_a, C_b] = F_{ab}{}^c C_c$.

O primeiro passo para quantizarmos este espaço de fase é definirmos os operadores autoadjuntos \hat{q}^a e \hat{P}_a com álgebra finita gerada pelo comutador, via princípio da correspondência:

$$[\hat{q}^a, \hat{P}_b] = i\hbar\delta_b^a \quad (\text{B.30})$$

B.2.2 O espaço de Hilbert na MQ

Vamos construir um espaço de Hilbert cinemático \mathcal{H}_k de representação desta álgebra. Então seja \hat{q}^a e \hat{P}_a operadores lineares autoadjuntos atuando em \mathcal{H}_k , então $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_k$:

$$\hat{q}|\psi\rangle \in \mathcal{H}_k \quad (\text{B.31})$$

$$\hat{P}|\psi\rangle \in \mathcal{H}_k \quad (\text{B.32})$$

Na Mecânica Quântica convencional temos em \mathcal{H}_k :

$$\hat{q}^a\psi(q) = q^a\psi(q) \quad (\text{B.33})$$

$$\hat{P}_a\psi(q) = -i\hbar\frac{\partial\psi(q)}{\partial q^a} \quad (\text{B.34})$$

Temos que construir um espaço de Hilbert cinemático \mathcal{H}_k de representação desta álgebra análogo ao espaço de Hilbert da mecânica quântica, onde $\psi(q)$ é uma função tal que $\int d^A q |\psi|^2 < \infty$, isto é, $\psi(q)$ precisa ser diferenciável e bem definida no subespaço S das

funções C^∞ de decrescimento rápido.

O subespaço $S \subset \mathcal{H}_k$ e se S é denso, $\bar{S} = \mathcal{H}_k$. \bar{S} é chamado de fecho de S , que podemos definir melhor a seguir:

Seja uma sequência de Cauchy $|\psi_n\rangle$, $n = 1, \dots, \infty$ tal que $\| |\psi_n\rangle - |\psi_m\rangle \| \rightarrow 0$. Temos as seguintes condições:

1. \mathcal{H}_k é completo se todas as sequências de Cauchy ψ_n têm um limite ψ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| |\psi_n\rangle - |\psi\rangle \| = 0 \quad (\text{B.35})$$

2. Se S não é completo, definimos \bar{S} , que é o conjunto de todas as sequências de Cauchy de S .
3. Seja V e W dois espaços vetoriais onde $V \subset W$, W é completo e V é denso em W se $\forall \vec{w} \in W$, existe um vetor $\vec{v} \in V$ tal que:

$$\| \vec{w} - \vec{v} \| < \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (\text{B.36})$$

Então, S é denso em \bar{S} .

Na MQ preferimos fazer os cálculos em S pois devido às suas propriedades pode-se nele aproximar de uma função de onda qualquer função C^∞ de decrescimento rápido. Então o procedimento do segundo passo de fato é construir um espaço $S = Cyl$ e completar Cyl , então $Cyl = \mathcal{H}_k$.

B.2.3 Um espaço de estados físicos

O terceiro passo do procedimento de quantização é resolver os vínculos, isto é, temos definir um espaço físico \mathcal{H}_{fis} com os vetores que obedecem os vínculos:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_k \quad , \quad \text{tal que } C_a |\psi\rangle = 0 \quad (\text{B.37})$$

A importância destes vínculos serem de primeira classe fica evidente aqui, pois os vínculos devem obedecer as regras de comutação:

$$[C_a, C_b]|\psi\rangle = C_a C_b |\psi\rangle - C_b C_a |\psi\rangle = F_{ab}{}^c C_c |\psi\rangle \quad (\text{B.38})$$

As vezes, o comutador dos vínculos gera uma anomalia \mathcal{A}_{ab} : $[C_a, C_b] = F_{ab}{}^c C_c + \mathcal{A}_{ab}$ que não é um vínculo. Isto acontece quando os vínculos são de segunda classe ou quando os vínculos são de primeira classe mas possuem termos que são produtos de \hat{q} e \hat{P} , o que na mecânica quântica gera um problema de ordem dos operadores. No caso de um problema de ordem, a anomalia pode ser eliminada fazendo uma combinação linear dos vínculos de maneira que \mathcal{A}_{ab} , que são coeficientes que dependem da representação e dos grupos, se anule.

Apêndice C

Casos particulares

C.1 O modelo BF em $(1 + 1)$ dimensões

A ação do modelo BF vai ser:

$$S = \int d^2x B^I F^I = \int d^2x B^I (dA^I + f_{JK}^I A^J A^K) \quad (\text{C.1})$$

Onde B é uma 0-forma e F é uma 2-forma. Em componentes:

$$S = \int d^2x \varepsilon^{\mu\nu} B^I F_{\mu\nu}^I = \text{Tr} \int B \wedge F \quad (\text{C.2})$$

C.1.1 As simetrias do caso bidimensional

1. Simetrias do tipo YM infinitesimais:

$$\begin{cases} \delta A = D\omega = d\omega + [A, \omega] \\ \delta B = [B, \omega] \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Onde δA é como se transforma a conexão e δB é como se transforma o campo. Esta simetria vem do fato que $\delta \text{Tr} BF = \text{Tr} [BF, \omega] = 0$.

2. Consideramos ainda as possíveis simetrias do tipo-2:

$$\begin{cases} \delta A = 0 \\ \delta B_{D-2} = D\eta_{D-3} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Ou seja, para $D = 2$, η_{D-3} não está definido, então não temos as simetrias do tipo-2.

C.1.2 O método hamiltoniano

Começamos expandindo os termos da ação:

$$\varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \varepsilon^{01} F_{01} + \varepsilon^{10} F_{10} = 2F_{01} = 2F_{tx} \quad (\text{C.5})$$

Onde $F_{tx} = \partial_t A_x - \partial_x A_t + A_t \otimes A_x$, então separando as coordenadas temporal e espacial na ação, determinamos a lagrangiana:

$$S = \int dt \int dx (B^I \partial_t A_x^I + A_t^I D_x B^I) = \int dt L \quad (\text{C.6})$$

Os momentos vão ser:

$$A_t^I \rightarrow \Pi_I^t = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_t} \approx 0 \quad (\text{C.7})$$

$$A_x^I \rightarrow \Pi_I^x = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_x} = B_I \quad (\text{C.8})$$

Ou seja, (C.7) é o vínculo primário da teoria e (C.8) define o conjugado da variável A_x^I (mediante a aplicação do método de quantização canônica de Dirac):

$$\{A_x^I(x), B_J(y)\} = \delta_J^I \delta(x - y) \quad (\text{C.9})$$

O vínculo primário gera um vínculo secundário:

$$D_x B^I \approx 0 \quad (\text{C.10})$$

Que é o único vínculo secundário que aparece neste caso unidimensional. A hamiltoniana então é:

$$H = - \int dx A_t^I D_x B^I \quad (\text{C.11})$$

Que gera o primeiro conjunto de simetrias (YM infinitesimais).

C.1.3 O espaço de Hilbert cinemático invariante

Como é o espaço cinemático neste caso? Tomamos $\mathcal{H}_{cin} = \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$, então os grafos $\Gamma = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ possíveis neste espaço são os arcos do círculo \mathcal{S}^1 .

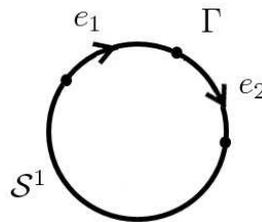


Figura C.1: Grafo Γ sobre o círculo \mathcal{S}^1 .

Quais destes grafos possíveis são invariantes? Para construir invariantes temos que tomar a transformação de uma holonomia, e sabemos que uma transformação de uma holonomia age em pontos diferentes se a curva em que a holonomia está definida for aberta. Então, a invariância de calibre exige grafos fechados, então só temos uma possibilidade:

$$\Gamma_x = \mathcal{S}_x^1 \quad (\text{C.12})$$

Então nosso espaço \mathcal{H}_{cin} possui uma base $|\Gamma_x, j, \alpha, \beta\rangle$, onde $x \in \mathcal{S}^1$:

$$\langle \Gamma_x, j, \alpha, \beta | \Gamma_x, j', \alpha', \beta' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta^{\beta\beta'} \quad (\text{C.13})$$

Se os x são diferentes, não necessariamente temos estados ortogonais, contudo devido às permutações cíclicas possíveis devido a invariância de traço, os estados são ortonormais,

e x é fixado.

Lembrando do estudo de vértices, quando temos dois vértices sobre um *loop* este pode ser dividido em duas curvas de spins j_k e j_{k+1} e vimos que a única opção invariante é $j_k = j_{k+1}$, então temos que tomar spins iguais em todos os segmentos de um loop.

$$\langle A | \Gamma_x, j, \alpha, \beta \rangle = R_\alpha^{(j)\beta} [U_x[A]] \quad (\text{C.14})$$

Onde $U_x[A] = \mathcal{P}e^{-\oint_{S^1} A} = \mathcal{P}e^{-\int_x dx A_x}$.

O espaço \mathcal{H}_{fis} vai ser descrito por uma base $|j\rangle$, onde:

$$\begin{aligned} \langle A | j \rangle = \Psi_j[A] &= Tr (\mathcal{P}[e^{-\oint_{S^1} A}]^{(j)}) \\ &= Tr (R^{(j)}(U_x[A])) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Onde $R^{(j)}(U_x[A])$ são chamados de caracteres, que é o invariante associado à representação j . Note que o traço do caracter independe de x .

$$\langle j | j' \rangle = \delta^{jj'} \quad (\text{C.16})$$

$$\forall \Psi \in \mathcal{H}_{fis} \quad : \quad |\Psi\rangle = \sum c_j |j\rangle \quad (\text{C.17})$$

C.1.4 A construção de observáveis sobre os estados físicos

Agora vamos verificar se existem observáveis no espaço \mathcal{H}_{fis} , e queremos que estes observáveis sejam invariantes de calibre:

$$\mathcal{O}^\dagger = \mathcal{O} \quad (\text{C.18})$$

Então para todo $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{fis}$, $\mathcal{O}|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{fis}$, logo \mathcal{O} deve ser invariante de calibre uma vez que $|\Psi\rangle$ já o é.

Queremos que \mathcal{O} se transforme sob uma transformação $g(x)$ como:

$$\mathcal{O}'(x) = g^{-1}(x)\mathcal{O}(x)g(x) = \mathcal{O}(x) \quad (\text{C.19})$$

Agora vamos buscar candidatos a observáveis, então olhamos para a nossa teoria clássica, onde existem alguns campos básicos e operadores proporcionais a eles. Na teoria clássica temos $A_x(x)$, $B(x)$. Seja $\epsilon = \epsilon^I T_I$, então:

$$\begin{cases} \delta A_x = D_x \epsilon = \partial_x \epsilon + [A_x, \epsilon] \\ \delta B = [B, \epsilon] \end{cases}$$

Uma possibilidade de observável é o operador L :

$$L = \text{Tr } B \wedge B = -\frac{1}{2} B^I B^I \quad (\text{C.20})$$

$$\delta L = 0 \quad (\text{C.21})$$

Pois L é o produto de dois campos B , e $\delta B = [B, \epsilon]$, então:

$$\delta(BB) = [B, \epsilon]B + B[B, \epsilon] = [BB, \epsilon]$$

$$\delta \text{Tr } (BB) = 0$$

Então L é invariante sobre permutações cíclicas. Outro candidato a observável é o próprio laço de Wilson:

$$T = \text{Tr } \mathcal{P} e^{-\oint A_x dx} \equiv \text{Tr } U[A, \mathcal{S}^1] \quad (\text{C.22})$$

Pode-se mostrar que no nosso caso $\delta T = 0$.

C.1.5 A aplicação dos observáveis T e L

Seja $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{cin}$:

$$\langle A|\Psi\rangle = f(U[A]) \quad (C.23)$$

$$\langle A|T|\Psi\rangle = U[A] \cdot f(U[A]) \in \mathcal{H}_{cin} \quad (C.24)$$

No caso $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{fis}$:

$$\langle A|\Psi\rangle = f(Tr U[A]) \quad (C.25)$$

$$\langle A|T|\Psi\rangle = Tr U[A] \cdot f(Tr U[A]) \quad (C.26)$$

Então $T|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{fis}$, T é apenas um operador multiplicativo.

O operador L é um pouco mais complicado de definir pois B é um operador diferencial dado por $\hat{B}_I(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_x^I(x)}$, então vamos ver o resultado da aplicação de \hat{B} . Seja $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{cin}$ tal que $|\Psi\rangle = |j, \alpha, \beta\rangle$, então:

$$\langle A|j, \alpha, \beta\rangle = \Psi_{j\alpha\beta}[A] = [\mathcal{P}e^{-\oint dx A_x^K(x)T_K}]_{\alpha\beta} \quad (C.27)$$

$$\hat{B}_I(x)\Psi_{j\alpha\beta}[A] = -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_x^I(x)} \mathcal{P}e^{-\oint dx A_x^K(x)T_K} \quad (C.28)$$

Para fazer esta diferenciação vamos representar a exponencial como uma somatória, e vamos decompor a integral em n intervalos e definir um ponto de base x_p para o laço, para evitar problemas de ordenação com \mathcal{P} :

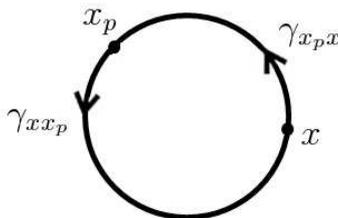


Figura C.2: A decomposição dos limites de integração do laço da holonomia $|\Psi\rangle$.

$$e^{-\oint_{x_p}^{x_p} A} = e^{-\int_x^{x_p} A} \cdot e^{-\int_{x_p}^x A} \quad (\text{C.29})$$

Onde todos os A integrados no primeiro termo são posteriores a x_p e todos do segundo termo são anteriores a x_p . Sobre x_p (corte) temos $A^{K_p}(x_p)$ Então:

$$\begin{aligned} \hat{B}_I(x)\Psi_{j\alpha\beta}[A] &= -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_x^I(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \cdot \\ &\quad \cdot \dot{x}(s_1) \cdots \dot{x}(s_n) \cdot A^{K_1}(x_1) \cdots A^{K_n}(x_n) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_I(x)\Psi_{j\alpha\beta}[A] &= -i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^N \delta^{IK_p} \cdot \int dx_1 \cdots \int dx_p \cdots \int dx_n \cdot \\ &\quad \cdot A^{K_1}(x_1) \cdots \delta(x - x_p) \cdots A^{K_n}(x_n) \cdot T_{K_1}^{(j)} \cdots T_{K_p}^{(j)} \cdots T_{K_n}^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Note que $\delta^{IK_p} T_{K_p}^{(j)} = T_I^{(j)}$. Resolvendo a integral $\int dx_p \delta(x - x_p) = 1$, nosso \hat{B} vai ficar então como:

$$\hat{B}_I(x)\Psi_{j\alpha\beta} = -i\hbar e^{-\int_{\gamma_2} dx A_x} T_I^{(j)} e^{-\int_{\gamma_1} dx A_x} \quad (\text{C.32})$$

Este operador não é invariante de calibre. Então vamos aplicar novamente \hat{B}_I :

$$\sum_I \hat{B}_I(x) \hat{B}_I(x) \Psi_{j\alpha\beta} = -\hbar^2 e^{-\int_{\gamma_2} dx A_x} \sum_I T_I^{(j)} T_I^{(j)} e^{-\int_{\gamma_1} dx A_x} \quad (\text{C.33})$$

Só que $\sum_I T_I^{(j)} T_I^{(j)} = (T^{(j)})^2 = -j(j+1)\mathbb{1}$, então:

$$\begin{aligned} \sum_I \hat{B}_I(x) \hat{B}_I(x) \Psi_{j\alpha\beta}[A] &= \hbar^2 j(j+1) \Psi_{j\alpha\beta}[A] \\ (B^I B^I)(x) |j, \alpha, \beta\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, \alpha, \beta\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Que é um operador invariante de calibre. Este operador é análogo ao operador momento

angular \vec{J} da Mecânica Quântica, que gera autovalores para a base $|j, m\rangle$:

$$\vec{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle \quad (\text{C.35})$$

Então, no espaço cinemático, nosso operador L corta a holonomia em duas e adiciona um operador T^2 entre elas. Para projetá-lo no espaço físico, vamos tomar o traço da expressão:

$$B^2(x)|j\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j\rangle \quad (\text{C.36})$$

Então, $L(x)|j\rangle = B^2(x)|j\rangle \in \mathcal{H}_{fis} \forall j \geq 0$ e é independente de x .

Então, nossos estados físicos $|j\rangle \in \mathcal{H}_{fis}$ são invariantes sobre transformações de calibre (*gauge*) e sobre transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos), e fomos capazes de encontrar observáveis, tais como T e L , que atuam sobre o espaço físico, isto é, compartilham com nossos vetores as invariâncias sobre transformações de calibre e difeomorfismos.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Laloë C. Cohen-Tannoudji, B. Diu. *Mécanique quantique*. Hermann, Paris, 2 edition, 1977.
- [2] San Fu Tuan J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics Revised Edition*. Addison-Wesley, 1994.
- [3] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 1995.
- [5] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [6] Sean M. Carroll. Lecture notes on general relativity. Technical report, Institute for Theoretical Physics - University of California, December 1997.
- [7] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [8] Carlo Rovelli. Relational quantum mechanics. *arXiv:quant-ph/9609002*, 1995.
- [9] Lee Smolin Carlo Rovelli. Discreteness of the area and volume in quantum gravity. *Nucl. Phys. B*, 442, 1995.
- [10] Thomas Thiemann. *Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity*. Albert-Einstein-Institut, Preprint 2001.
- [11] Abhay Ashtekar. *Lectures on non perturbative canonical gravity*. World Scientific, 1991.

- [12] Reinhold A. Bertlmann. *Anomalies in quantum field theory*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [13] Andrew J. Hanson Tohru Eguchi, Peter B. Gilkey. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. North-Holland Publisher Company, Amsterdam, 1980.
- [14] Jerzy Lewandowski Abhay Ashtekar. Background independent quantum gravity: A status report. *arXiv:gr-qc/0404018 v2*, September 2004.
- [15] John C. Baez. An introduction to spin foam models of quantum gravity and bf theory. *Lect. Notes Phys.*, 543:25-94, 2000.
- [16] Paul A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, New York, 1964.
- [17] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, 2 edition, 2007.
- [18] Proceedings of the II International Conference on Fundamental Interactions. *Alejandro Perez: Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams*, Pedra Azul, Brazil, June 2004.
- [19] O. Piguet C. P. Constantinidis, G. Luchini. The hilbert space of chern-simons theory on the cylinder. a loop quantum gravity approach. *arXiv:gr-qc/0907.3240v2*, 2009.
- [20] Lee Smolin Carlo Rovelli. Spin networks and quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 53:5743, 1995.
- [21] John C. Baez. Spin network states in gauge theory. *Adv. Math.*, 117:253-272, 1996.
- [22] S. Carlip. *Quantum Gravity in 2+1 dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [23] Thomas Thiemann. Qsd iv: 2+1 euclidean quantum gravity as a model to test 3+1 lorentzian quantum gravity. *arXiv:gr-qc/9705018v1*, 1997.
- [24] C. Rovelli A. Perez. Observables in quantum gravity. *arXiv:gr-qc/0104403v2*, 2001.

- [25] Alejandro Perez. Spin foam models for quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 20:R43, 2003.
- [26] Jose A. Zapata. Continuum spin foam model for 3d gravity. *J. Math. Phys.*, 43:5612-5623, 2002.
- [27] J. Fernando Barbero. Real ashtekar variables for lorentzian signature space times. *Phys. Rev.*, D51:5507-5510, 1995.
- [28] G. Immirzi. Real and complex connections for canonical gravity. *Class. Quant. Grav.*, 14:L177-L181, 1997.
- [29] Ivan F. Wilde. Distribution theory (generalized functions) lecture notes. Technical report, Department of Mathematics - King's College, London.
- [30] Carlo Rovelli Laurent Freidel, Etera R. Livine. Spectra of length and area in (2+1) lorentzian loop quantum gravity. *arXiv:gr-qc/0212077v2*, 2003.
- [31] Thomas Thiemann. The phoenix project: Master constraint programme for loop quantum gravity. *arXiv:gr-qc/0305080*, 2003.
- [32] C. Rovelli. The projector on physical states in loop quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 59:104015, 1999.
- [33] C. Rovelli A. Perez. 3+1 spinfoam model of quantum gravity with spacelike and timelike components. *Phys. Rev. D*, 64:064002, 2001.
- [34] K. Krasnov A. Ashtekar, John C. Baez. Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 3:419-478, 2000.
- [35] Thomas Thiemann. Closed formula for the matrix elements of the volume operator in canonical quantum gravity. *J. Math. Phys.*, 1998.
- [36] Renate Loll. Simplifying the spectral analysis of the volume operator. *Nucl. Phys. B*, 500:405-420, 1997.
- [37] Alejandro Perez Karim Noui. Three dimensional loop quantum gravity: Physical scalar product and spin foam models. *arXiv:gr-qc/0402110*, 2004.

- [38] Michael P. Reisenberger. World sheet formulations of gauge theories and gravity. *arXiv:gr-qc/941235*, 1994.
- [39] J. Fernando Barbero. From euclidean to lorentzian general relativity: The real way. *Phys. Rev.*, 442, D54:1492-1499, 1996.
- [40] C. Rovelli E. R. Livine, A. Perez. 2d manifold-independent spinfoam theory. *Class. Quant. Grav.*, 20:4425-4445, 2003.
- [41] L. Crane J. W. Barrett. A lorentzian signature model for quantum general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 17:3101-3118, 2000.
- [42] V. G. Turaev O. Y. Viro. Statesum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols. *Topology*, 31:865-902, 1992.
- [43] L. Freidel. A ponzano-regge model of lorentzian 3-dimensional gravity. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 88:237-240, 2000.
- [44] Chris J. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*, volume 61. World Scientific Lecture Notes in Physics, 2 edition, 1999.

Lista de Figuras

3.1	Foliação de uma variedade $\mathcal{M} = \mathbb{R} \otimes \Sigma$ que mostra a decomposição da variedade em várias “folhas” Σ_t	35
3.2	Esboço do espaço de fase cinemático, onde há um subespaço dos pontos que obedecem os vínculos.	53
4.1	Espaço de Minkowski (mostrados apenas x_1 e x_2) com uma rede que gera uma restrição na qual o volume finito contém um número finito de pontos.	56
4.2	Um exemplo de grafo orientado, composto por três linhas e_1, e_2 e e_3 e dois vértices.	57
4.3	A curva γ_i em $\Sigma = \mathcal{M}_{D-1}$ parametrizada na variável s	58
4.4	Holonomia como transporte paralelo, onde v'_1 é o vetor v_1 transportado para o subespaço de v_2	59
4.5	Decomposição de uma curva γ em segmentos $\bar{s}_{(k)(k+1)}$	60
4.6	Laço γ , obtido tomando $x_i = x_f$	63
4.7	Grafo Γ fechado e conexo.	64
4.8	Grafos Γ e Γ' distintos. Note que neste caso $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$	67
4.9	Exemplo de grafos Γ e Γ'	70
4.10	O grafo Γ' como um caso particular do grafo Γ	71
4.11	Aplicação de $\hat{\mathcal{G}}$ sobre uma curva e	73
4.12	Vértice bivalente $v_{\alpha_2}^{\beta_1}$	76
4.13	Vértice trivalente $v_{\alpha_2, \alpha_1}^{\beta_3}$	76
4.14	Grafo Γ associado ao vetor $ s\rangle$ da base de rede de <i>spin</i>	78
5.1	Espaço tangente em P de uma variedade \mathcal{M}_4	83
6.1	Espaço do funcional $F[A] \rightarrow F(A_1, \dots, A_\Omega)$ que é um espaço finito e enumerável $\alpha = 1, \dots, \Omega$ e $A_\alpha = A(\vec{x}_\alpha)$	106
6.2	Curva $c(s)$ interceptando um grafo Γ da base de rede de <i>spin</i>	109
6.3	O grafo Γ definido sobre uma área Σ regularizada. As contribuições não-nulas vêm dos elementos de superfície \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2	112
6.4	O difeomorfismo ativo ϕ agindo sobre um grafo Γ	117
6.5	Difeomorfismo finito ϕ que preserva o grafo e age apenas sobre as orientações relativas entre os <i>links</i>	121
6.6	A imagem de \mathcal{S} dentro de \mathcal{S}'	121

6.7	Superfície $\mathcal{A}(\Sigma) \in \mathcal{M}$	124
6.8	A curva γ interceptando a área Σ em três pontos. Podemos fatorar γ em 3 curvas que interceptam Σ uma única vez.	126
6.9	Grafo Γ interceptando a superfície Σ . Note que cada célula Σ_N só contém um ponto de interseção p_k	127
6.10	A menor área possível: Apenas uma linha de <i>spin</i> $j = \frac{1}{2}$ atravessa Σ	129
6.11	Regularização de um volume. Tomamos a regularização de forma que no máximo um vértice esteja contido em cada célula cúbica D_n	130
6.12	Representação gráfica de um <i>spin foam</i> , um 2-complexo simplicial que mostra a transição entre 3 estados diferentes de rede de <i>spin</i>	132
6.13	Representação gráfica da ação de um operador de <i>loop</i> em um estado de rede de <i>spin</i>	135
6.14	À esquerda temos um conjunto de transições discretas do produto interno físico <i>loop</i> a <i>loop</i> e a direita temos a representação contínua ($\epsilon \rightarrow 0$) de <i>spin foam</i> destas transições.	136
6.15	Representação gráfica da ação de um operador de <i>loop</i> em um vértice da rede de <i>spin</i>	136
6.16	À esquerda temos um conjunto de transições discretas que mostra a atuação de um operador de <i>loop</i> sobre um vértice de rede de <i>spin</i> e a evolução <i>loop</i> a <i>loop</i> . À direita temos a representação ($\epsilon \rightarrow 0$) de <i>spin foam</i> destas transições.	137
6.17	A ação do vínculo escalar e sua representação de <i>spin foams</i> . $N(x_n)$ é o valor de N no vértice e C_{nop} são elementos de matriz de \hat{C}	138
A.1	Para pontos $P \in U_\alpha$ e $Q \in U_\beta$ podemos definir transformações de coordenadas φ_α e φ_β que mapeiam os pontos da variedade \mathcal{M} em subespaços \mathbb{R}^n	146
A.2	O conjunto dos vetores v de um ponto p se chama espaço tangente T_p , que é um espaço vetorial, isto é, obedece propriedades vetoriais tais como o produto de dois vetores continua dentro do espaço, etc.	148
A.3	A curva $C \in \mathcal{M}$, aonde aplicamos uma parametrização $x(s)$ para realizar a integração.	156
A.4	A superfície $S \in \mathcal{M}$, aonde aplicamos uma parametrização $x(u, v)$ para realizar a integração.	157
C.1	Grafo Γ sobre o círculo \mathcal{S}^1	172
C.2	A decomposição dos limites de integração do laço da holonomia $ \Psi\rangle$	175