UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO TECNOLÓGICO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ROBERTA NUNES MATTOS

FORMULAÇÕES ESTABILIZADAS MULTIESCALAS APLICADAS

ÀS EQUAÇÕES DE EULER

VITÓRIA

2012

ROBERTA NUNES MATTOS

FORMULAÇÕES ESTABILIZADAS MULTIESCALAS APLICADAS ÀS EQUAÇÕES DE EULER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Informática. Orientador: Prof. Dr. Isaac Pinheiro dos Santos. Co-orientadora: Profa. Dra. Lucia Catabriga.

VITÓRIA

2012

Formulações Estabilizadas Multiescalas Aplicadas às Equações de Euler

Roberta Nunes Mattos

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Informática do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Informática.

Prof. Isaac Pinheiro dos Santos, D.Sc.

Profa. Lucia Catabriga, D.Sc.

Prof. Daniel Thomes Fernandes, D.Sc.

Profa. Regina Célia Cerqueira de Almeida, D.Sc.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Vitória, Agosto de 2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Mattos, Roberta Nunes, 1982 -
M000x

Formulações Estabilizadas Multiescalas Aplicadas às Equações de Euler/ Roberta Nunes Mattos. - 2012
xxx f. :il.

Orientador: Isaac Pinheiro dos Santos
Co-Orientadora: Lucia Catabriga
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico

1. Elementos Finitos. 2. Métodos Estabilizados. 3. Difusão Dinâmica. 4. Equações de Euler. 5. Simulação Numérica. I. Santos, Isaac Pinheiro dos, 1974-. II. Catabriga, Lucia. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU:004

"Há duas formas de viver a vida:

Uma é acreditar que não existe milagre.

A outra é acreditar que todas as coisas são um milagre."

Albert Einstein

Aos meus pais e ao meu esposo, meus grandes amores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela graça conquistada.

Aos meus pais por sempre me apoiarem nos estudos.

À minha avó, Olindina, luz da minha vida, minha maior incentivadora.

Ao meu esposo, Angelo, por todo amor, carinho e compreensão.

À minha família pela torcida e incentivo.

À minha amiga, Edna, e minha linda afilhada, Maria Luiza, por compreenderem a ausência.

Aos amigos do Banestes pela força.

Aos amigos Nuno e Rodolfo por estarem sempre dispostos a ajudar.

Aos meus queridos orientadores, Isaac e Lúcia, pela oportunidade e apoio na realização deste trabalho.

À memória dos que se foram, mas estiveram presentes em cada passo da minha vida.

E àqueles que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação.

Resumo da dissertação apresentada ao PPGI/UFES como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Formulações Estabilizadas Multiescalas Aplicadas às Equações de Euler.
Roberta Nunes Mattos
Agosto/2012

Orientador: Isaac Pinheiro dos Santos
Co-orientadora: Lucia Catabriga
Programa: Informática

Este trabalho apresenta uma implementação do método de elementos finitos para resolver o sistema de equações de Euler compressíveis bidimensionais em variáveis conservativas, usando a formulação estabilizada submalha Difusão Dinâmica, considerando escalas submalhas estáticas e transientes. O método Difusão Dinâmica é baseado no formalismo multiescala e foi proposto para resolver problemas de transporte predominantemente convectivos. Um operador dissipativo não linear é acrescentado ao método de Galerkin adicionando uma difusão artificial não parametrizada em todas as escalas da discretização. Além disso, estamos considerando que as escalas submalhas variam em função do tempo. Dessa forma, apresentamos uma expressão para representá-las em cada passo de tempo. Um algoritmo preditor multicorretor de segunda ordem é utilizado para a integração no tempo e os sistemas lineares resultantes em cada correção são resolvidos pelo método iterativo GMRES. São considerados um conjunto de experimentos clássicos tais como, choque normal, choque oblíquo e choque refletido para aferir a acuidade da solução aproximada encontrada. Os experimentos numéricos realizados demonstram que o método Difusão Dinâmica – com subescalas transientes – obtém soluções mais precisas do que os métodos estabilizados SUPG/CAU e SUPG/YZβ.

Abstract of dissertation presented to PPGI/UFES as a partial fulfilment of the requirements for the degree of Master.

Subgrid Stabilized Formulations Applied to Euler equations.

Roberta Nunes Mattos

August/2012

Advisor: Isaac Pinheiro dos Santos

Advisor: Lucia Catabriga

Department: Computer Science

This work presents an implementation of the finite element method to solve the system of two-dimensional compressible Euler equations in conservation variables, using the Dynamic Diffusion subgrid stabilization method, considering static and transient subgrid scales. This method is based on the multiscale formalism and has been proposed to solve convection-dominant transport problems. A nonlinear dissipative operator acting isotropically in all discretization scales is added to the Galerkin method. We let the subgrid scales very in time, and thus they need to be tracked. Then, we propose a closed-form expression for them at each time step. A second order implicit predictor multicorrector scheme is used for time integration and the linear systems resulting are solved by the GMRES iterative method. We consider a set of classic experiments: normal shock, oblique shock and reflected shock. Numerical experiments shown that the method Diffusion Dynamics - with transient subgrid scales - results in more accurate solutions than the stabilized methods SUPG/CAU e SUPG/YZβ.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

As equações de Euler compressíveis formam um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não lineares de primeira ordem, proveniente das *leis de conservação da massa, momentum e energia*. Essas equações descrevem o escoamento de fluidos na natureza, considerados não viscosos. Na engenharia de petróleo, as equações de Euler podem ser utilizadas na simulação de explosões acidentais em plataformas *offshore* (Cant *et al.*, 2004) e na engenharia aeroespacial essas equações são utilizadas no projeto de aeronaves e afins (Donea e Huerta, 2003; Lohner, 2001).

Em geral, a solução analítica de uma equação diferencial parcial ou de um sistema de equações diferenciais parciais não é uma tarefa trivial, mesmo considerando casos mais simples com comportamento linear. Neste contexto, os métodos numéricos são utilizados para discretização das equações diferenciais, resolvendo o problema de forma aproximada. Dentre os métodos utilizados para resolver as equações de Euler, destacam-se o método de elementos finitos, o método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos. Este trabalho apresenta uma metodologia baseada no método dos elementos finitos (Hughes, 1987).

O estudo das equações de Euler no contexto do método de elementos finitos é desenvolvido desde os anos oitenta (Aliabadi *et al.*, 1993; Almeida e Galeão, 1996; Beau e Tezduyar, 1991; Catabriga e Coutinho, 2002; Catabriga *et al.*, 2005; Shakib, 1988; Tezduyar e Hughes, 1982, 1983; Tezduyar e Senga, 2006, 2007; Tezduyar *et al.*, 2006). É conhecido que o método de elementos finitos de Galerkin clássico não é adequado para resolver equações diferenciais com comportamento hiperbólico, como é o caso das equações de Euler. Para contornar as dificuldades numéricas desse método, foram desenvolvidos os chamados métodos estabilizados ou métodos de Petrov-Galerkin. Estes métodos consistem em adicionar um termo à formulação de Galerkin, baseado no resíduo da equação e ponderado com um parâmetro de estabilização, gerando uma nova formulação variacional consistente e com maior estabilidade. Esta nova classe de métodos surgiu no início dos anos oitenta com o método SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*) (Brooks e Hughes, 1982) para problemas predominantemente convectivos. Os métodos estabilizados possuem uma sólida fundamentação matemática e numérica, mas o seu uso prático depende da escolha adequada de um coeficiente, comumente chamado de parâmetro de estabilização. Além disso, o método SUPG não impede oscilações nas regiões de altos gradientes. Pode-se evitar ou reduzir estas oscilações através dos métodos de captura de descontinuidades, como o CAU (*Consistent Approximate Upwind*) (Almeida e Galeão, 1996; Galeão e Carmo, 1988) e o YZβ (Rispoli *et al.*, 2007; Tezduyar e Senga, 2007).

Os métodos estabilizados podem ser também entendidos segundo a abordagem multiescala, que em geral, consiste em decompor o problema em dois subproblemas: um associado a discretização utilizada (macro escala - escala resolvida) e o outro relacionado às escalas menores, submalhas (micro escala - escala não resolvida). Os efeitos não locais da micro escala são incorporados na macro escala resultando em um problema enriquecido para as escalas resolvidas, que é então solucionado numericamente (Santos, 2007). Como exemplos de métodos multiescala, destacam-se: RFB (*Residual-Free Bubbles*) (Brezzi e Russo, 1994; Brezzi *et al.*, 1997), VMS (*Variational Multiscale*) (Hughes, 1995; Hughes *et al.*, 2004), MFEM (*Multiscale Finite Element Method*) (Hou e Wu, 1997; Tang *et al.*, 2006) e SGS (*Subgrid Stabilization*) (Guermond, 2001, 1999; Guermond *et al.*, 2006; Heitmann, 2003; Kaya e Layton, 2003; Layton, 2002). Em (Santos, 2007; Santos e Almeida, 2007) é desenvolvido um método multiescala não linear (NSGS - *Nonlinear Subgrid Stabilization*) para problemas de transporte predominantemente convectivos, onde um operador dissipativo não linear e não parametrizado agindo isotropicamente somente na micro escala é adicionado à formulação de Galerkin. Como extensão deste método, é apresentado o método de estabilização Difusão Dinâmica (DD), introduzido por Arruda *et al.* (2010) para a equação de convecção-difusão-reação que adiciona à formulação de Galerkin um operador não linear, agindo em todas as escalas da discretização. Em geral, os resultados numéricos obtidos pelo método DD são melhores do que àqueles obtidos pelo método

NSGS. Em ambos métodos multiescala não lineares, a quantidade de difusão artificial é determinada pela solução na escala resolvida a nível do elemento, sendo portanto um método auto-adaptativo e livre de parâmetros de estabilização. Werner *et al.* (2010) e Werner (2011) aplicaram o método Difusão Dinâmica no problema de escoamento miscível em meios porosos, considerando a hipótese de submalhas *quase-estáticas* (Codina e Blasco, 2002; Juanes, 2003). As soluções encontradas foram similares àquelas obtidas pela formulação SUPG/CAU.

Neste trabalho é apresentada uma implementação do método de elementos finitos para resolver as equações de Euler em variáveis conservativas usando o método Difusão Dinâmica. A quantidade de difusão artificial utilizada pelo método DD é dada em função de normas do resíduo e do gradiente da solução do problema associada à macro escala. Para problemas escalares, utiliza-se a norma euclidiana. Almeida (1993) apresentou uma generalização do método CAU para o sistema de equações de Euler, obtendo *normas generalizadas* para o cálculo da difusão artificial deste método, que também é dado em função do resíduo e do gradiente da solução. Neste trabalho, são utilizadas as normas apresentadas em (Almeida e Galeão, 1996; Almeida, 1993; Catabriga, 2000) para o cálculo da quantidade de difusão artificial do método DD. Além disso, estamos considerando que as escalas submalhas variam em função do tempo. Dessa forma, apresentamos uma expressão para representá-las em cada passo de tempo. Para o armazenamento das matrizes resultantes do modelo numérico, que são altamente esparsas, é utilizada a estratégia de armazenamento elemento por elemento (Hughes, 1987). O algoritmo preditor/multicorretor de segunda ordem descrito em (Hughes e Tezduyar, 1984) é utilizado para a integração no tempo e os sistemas lineares resultantes em cada correção são resolvidos pelo método iterativo GMRES (*Resíduo Mínimo Generalizado*)(Saad e Schultz, 1986), com um pré-condicionador bloco diagonal nodal (Catabriga e Coutinho, 2002). É considerado um conjunto de experimentos clássicos, tais como, choque normal, choque oblíquo e choque refletido para aferir a acuidade das soluções aproximadas encontradas. Os resultados numéricos são comparados com as formulações estabilizadas SUPG/CAU (Almeida e Galeão, 1996; Catabriga e Coutinho, 2002) e SUPG/YZβ (Tezduyar e Senga, 2006).

Este texto é composto desta introdução e o restante está organizado como apresentado a seguir. No capítulo 2 são apresentadas as leis de conservação de massa, *momentum* e energia, e as equações de Euler bidimensionais, considerando escoamento invíscido.

No capítulo 3 é apresentada a formulação variacional do modelo matemático, as formulações numéricas adotadas e o algoritmo preditor/multicorretor de integração no tempo. O Capítulo 4 é dedicado a apresentação das matrizes dos elementos associadas às formulações numéricas descritas no Capítulo 3. No Capítulo 5 são discutidos os resultados dos experimentos numéricos realizados para verificar a formulação numérica adotada. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões, as considerações finais e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Equações de Euler

Os três princípios físicos fundamentais sobre o qual toda a dinâmica dos fluidos se baseia são representados pelas conhecidas leis de conservação da massa, *momentum* e energia. Neste capítulo são apresentadas as expressões gerais dessas leis, bem como as equações de Euler que são provenientes delas, considerando o escoamento invíscido.

2.1 Leis de Conservação para Campos Escalares e Vetoriais

Seja U uma quantidade escalar por unidade de volume, definida num domínio arbitrário Ω, fixo no espaço e limitado por uma superfície fechada S. A intensidade local de U varia devido a atuação do fluxo que expressa a contribuição do meio externo a Ω e das fontes q. A forma geral da lei de conservação para a quantidade escalar U é expressa assumindo-se que a variação de U dentro de Ω por unidade de tempo é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} U d\Omega. \tag{2.1}$$

Assumindo que o fluxo de U através de S seja uma função denotada por $\mathbf{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou $n = 3$, o fluxo total de U em S é dado por

$$-\oint_{S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}. \tag{2.2}$$

Adicionando a contribuição das fontes que podem ser divididas em volumétricas, q_V, e superficiais, $\mathbf{q}_S$, obtemos a forma geral da lei de conservação para a quantidade U, dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega U d\Omega + \oint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \int_\Omega q_V d\Omega + \oint_S \mathbf{q}_S \cdot d\mathbf{S}. \tag{2.3}$$

Supondo a continuidade do fluxo e das fontes superficiais, podemos aplicar o Teorema de Gauss na Eq. (2.3), obtendo

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega U d\Omega + \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{f} d\Omega = \int_\Omega q_V d\Omega + \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{q}_S d\Omega. \tag{2.4}$$

Como a Eq. (2.4) é escrita para um volume Ω arbitrário, a igualdade do integrando é válida localmente em qualquer ponto do domínio Ω, determinando a forma diferencial da lei de conservação, expressa por

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{f} = q_V + \nabla\cdot\mathbf{q}_S \tag{2.5}$$

ou

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{f} - \mathbf{q}_S) = q_V. \tag{2.6}$$

Se a quantidade conservada é descrita por uma quantidade vetorial $\mathbf{u}$, então o fluxo e o termo relativo às fontes superficiais se tornam tensores, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{Q}_S$ respectivamente. O termo correspondente às fontes volumétricas se torna um vetor $\mathbf{q}_V$ e as Eqs. (2.4)-(2.6) assumem, respectivamente, a forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \mathbf{u} d\Omega = -\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F} d\Omega + \int_\Omega \mathbf{q}_V d\Omega + \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{Q}_S d\Omega \tag{2.7}$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{F} - \mathbf{Q}_S) = \mathbf{q}_V. \tag{2.8}$$

2.1.1 Lei de Conservação da Massa

A lei de conservação da massa é uma declaração geral de natureza cinemática, ou seja, independente da natureza do fluido ou das forças que atuam sobre ele. A lei expressa o fato empírico de que, em um sistema fluido, a massa não pode desaparecer do sistema, nem ser criada (Hirsch, 2007). A quantidade de U é, neste caso, a massa específica, $U = \rho$ em kg/m^3. Como não existe fluxo difusivo no transporte de massa, a massa só pode ser transportada através do processo de convecção. Considerando que o fluxo convectivo é definido por

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_C = \rho\mathbf{v},$$

onde $\mathbf{v}$ é o campo de velocidades da massa fluida, e que não existem fontes, a forma integral da equação de conservação da massa é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho d\Omega + \oint_{S}\rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{2.9}$$

e a forma diferencial,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{2.10}$$

A Eq. (2.10) é chamada de *equação de conservação da massa* ou *equação da continuidade*. Considerando que

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{v},$$

a Eq. (2.10) pode ser reescrita como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{2.11}$$

onde

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho$$

é uma derivada material.

A Eq. (2.10) corresponde à forma geral da lei de conservação, uma vez que é escrita na forma conservativa ou na forma de divergência, enquanto que a Eq. (2.11) está na forma *quase-linear* ou não conservativa (Hirsch, 2007).

2.1.2 Lei de Conservação do *Momentum*

Momentum é uma grandeza vetorial, com direção e sentido, definida como o produto da massa específica, ρ, pela velocidade, $\mathbf{v}$, e cuja direção e sentido são os mesmos da velocidade. Neste caso, a quantidade $\mathbf{u}$ em (2.7) é expressa por $\rho\mathbf{v}$, e a lei de conservação terá a forma geral dada pelas Eqs. (2.7)-(2.8).

O tensor do fluxo convectivo é definido por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C = \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \tag{2.12}$$

onde $\otimes$ representa o produto tensorial.

É conhecido da Lei de Newton que as fontes para variação do *momentum* em um sistema físico são as forças externas, $\mathbf{f}_e$, e internas, $\mathbf{f}_i$, ao volume, que agem sobre ele e são definidas por unidade de massa. O termo de fonte, $\mathbf{q}_V$, consiste na soma das forças externas de volume, $\rho\mathbf{f}_e$, e na soma de todas as forças internas, $\rho\mathbf{f}_i$.

Assumindo que o fluido é Newtoniano, as tensões internas, $\mathbf{Q}_S = \sigma$, são dadas por

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau, \tag{2.13}$$

onde $\mathbf{I}$ é o tensor identidade, p é a pressão e τ é o tensor das tensões cujas componentes são dadas por

$$\tau_{ij} = \left[\mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ij}\right], \tag{2.14}$$

sendo μ a viscosidade dinâmica (ou molecular) do fluido e δ_{ij} o delta de Kronecker. O coeficiente de viscosidade cinemática é definido por $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Substituindo o valor da quantidade $\mathbf{u}$ em (2.7) para a lei de conservação do *momentum*, o termo de fonte $\mathbf{q}_V$, o tensor do fluxo convectivo (2.12) e as tensões internas (2.13) nas

Eqs. (2.7) e (2.8), obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega = -\int_\Omega \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) d\Omega + \int_\Omega \rho \mathbf{f}_e d\Omega + \int_\Omega \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \tau) d\Omega \tag{2.15}$$

e

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{I} - \tau) = \rho \mathbf{f}_e. \tag{2.16}$$

2.1.3 Lei de Conservação de Energia

A primeira lei da termodinâmica estabelece que os agentes responsáveis pela variação da energia total em um sistema são o trabalho das forças atuando no sistema e o calor transmitido para o mesmo.

A quantidade conservada no escoamento de fluidos é a energia total do sistema por unidade de massa, denotada por E e definida como a soma de sua energia interna e e sua energia cinética por unidade de massa $\frac{\mathbf{v}^2}{2}$, isto é

$$E = e + \frac{\mathbf{v}^2}{2}. \tag{2.17}$$

Considerando a forma geral da lei de conservação para a quantidade ρE (energia total por unidade de volume), temos como fluxo convectivo de energia

$$\mathbf{f}_C = \rho \mathbf{v} \left(e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \tag{2.18}$$

e o fluxo difusivo,

$$\mathbf{f}_D = -\gamma \rho k \nabla e \tag{2.19}$$

uma vez que, por definição, não existe fluxo difusivo associado ao movimento. Em (2.19) k é o coeficiente de difusividade (ou condutividade térmica) e deve ser definido empiricamente, junto com a viscosidade dinâmica μ. O coeficiente γ é a razão entre os coeficientes de calor específico, considerando a pressão (c_p) e o volume (c_v) constantes,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

A Eq. (2.19) pode ser escrita usando a lei de Fourier, dada por

$$\mathbf{f}_D = -k\nabla T, \tag{2.20}$$

onde T é a temperatura absoluta.

Com relação às fontes de variações de energia, temos que as fontes volumétricas são dadas pela soma do trabalho das forças de volume $\mathbf{f}_e$ e de outras fontes de condução de calor (radiação, reações químicas, etc.), designadas por q_H. As fontes volumétricas são dadas por

$$q_V = \rho\mathbf{f}_e \cdot \mathbf{v} + q_H \tag{2.21}$$

e as fontes superficiais devidas às tensões internas, considerando que não existem fontes de calor externas agindo sobre a superfície, são dadas por

$$\mathbf{q}_S = \sigma \cdot \mathbf{v} = -p\mathbf{v} + \tau \cdot \mathbf{v}. \tag{2.22}$$

Usando $U = \rho E$, (2.17), (2.18), (2.20), (2.21) e (2.22) em (2.3), obtemos a forma integral da lei de conservação de energia,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho E d\Omega + \oint_S \rho E\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S k\nabla T \cdot d\mathbf{S} + \int_\Omega (\rho\mathbf{f}_e \cdot \mathbf{v} + q_H) d\Omega + \oint_S (\sigma \cdot \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{2.23}$$

A forma diferencial da lei de conservação de energia é dada por

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E\mathbf{v}) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{v}) + (\rho\mathbf{f}_e \cdot \mathbf{v} + q_H). \tag{2.24}$$

Introduzindo a entalpia

$$h = e + \frac{p}{\rho}, \tag{2.25}$$

a entalpia total

$$H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} = h + \frac{\mathbf{v}^2}{2} = E + \frac{p}{\rho} \tag{2.26}$$

e usando (2.13) em (2.24), obtemos uma forma alternativa da Eq. (2.24), dada por

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} H - k \nabla T - \tau \cdot \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{v} + q_H. \tag{2.27}$$

2.2 Equações de Euler Bidimensionais

As equações de Euler expressam a conservação de massa, *momentum* e energia em um escoamento compressível não viscoso. Na seção anterior, as Eqs. (2.10), (2.16) e (2.27) que descrevem as leis de conservação na forma diferencial foram descritas, formando um sistema dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0; \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{I} - \tau) &= \rho \mathbf{f}_e; \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} H - k \nabla T - \tau \cdot \mathbf{v}) &= \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{v} + q_H, \end{aligned} \tag{2.28}$$

conhecido como equações de Navier-Stokes. Considerando que o escoamento seja não viscoso, então a equação constitutiva (2.13) torna-se

$$\sigma = -p\mathbf{I}, \tag{2.29}$$

e além disso, que $\mathbf{f}_D = \mathbf{0}$ em (2.20), o sistema (2.28) resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0; \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{I}) &= \rho \mathbf{f}_e; \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} H) &= \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{v} + q_H, \end{aligned} \tag{2.30}$$

conhecido como sistema de equações de Euler compressíves. Esse sistema de equações pode ser escrito na forma vetorial em 2D como,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \mathbf{B}, \tag{2.31}$$

onde $\mathbf{U}$ é o vetor de variáveis conservativas, $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$ são os vetores de fluxos de Euler associados, respectivamente, as direções espaciais x e y, e $\mathbf{B}$ é o vetor dos termos de fonte. Esses vetores são dados por

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_1 p H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho v_2^2 + p \\ \rho v_2 p H \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \mathbf{f}_e \\ \rho \mathbf{f}_e \cdot v_1 + q_H \\ \rho \mathbf{f}_e \cdot v_2 + q_H \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

onde ρ é a massa específica, v_1 e v_2 são as componentes do campo de velocidades $\mathbf{v}$, E a energia total do sistema e $H = E + \frac{p}{\rho}$.

O modelo matemático associado às equações de Euler, usando variáveis conservativas definidas por $\mathbf{U} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho E)^T$, e considerando $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ pode ser descrito por

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \qquad \text{sobre } \Omega \times [0, T_f], \tag{2.33}$$

onde Ω é um domínio convexo poligonal de $\mathbb{R}^2$ com fronteira Γ, T_f é um número real positivo e

$$\mathbf{A}_x = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{U}} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_y = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{U}} \tag{2.34}$$

são as matrizes Jacobianas associadas aos fluxos de Euler a serem definidas na próxima seção.

Um conjunto de condições de contorno e iniciais deve ser definido de forma apropriada para a Eq. (2.33), completando a descrição do modelo.

2.3 Matrizes Jacobianas dos Fluxos de Euler

Considere o vetor $\mathbf{U}$ dado por

$$\mathbf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}}_{\text{variáveis conservativas}} = \underbrace{\rho \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ E \end{bmatrix}}_{\text{variáveis primitivas}} .$$

As matrizes Jacobianas (2.34) são descrita da seguinte forma,

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial U_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial U_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial U_3} & \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial U_4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial U_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial U_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial U_3} & \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial U_4} \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

onde $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial U_j}$ é um vetor de ordem 4. Os vetores $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$ (ver Eq. (2.32)) podem ser reescritos em termos das variáveis primitivas ou das variáveis de conservação (Catabriga, 2000):

$$\mathbf{F}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho v_1 \\ \rho {v_1}^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ v_1(\rho E + p) \end{bmatrix}}_{\text{primitivas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_2 \\ \frac{{U_2}^2}{U_1} + p \\ \frac{U_2 U_3}{U_1} \\ \frac{U_2 U_4}{U_1} + p\frac{U_2}{U_1} \end{bmatrix}}_{\text{conservativas}}$$

e

$$\mathbf{F}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho {v_2}^2 + p \\ v_2(\rho E + p) \end{bmatrix}}_{\text{primitivas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_3 \\ \frac{U_2 U_3}{U_1} \\ \frac{{U_3}^2}{U_1} + p \\ \frac{U_3 U_4}{U_1} + p\frac{U_3}{U_1} \end{bmatrix}}_{\text{conservativas}},$$

onde a pressão p pode ser escrita como

$$p = (\gamma - 1)\left(U_4 - \frac{||U_{23}||^2}{2U_1}\right), \tag{2.36}$$

com $||U_{23}|| = (U_2)^2 + (U_3)^2 = \rho^2|\mathbf{v}|^2$. Calculando as derivadas da pressão em relação a algumas grandezas conservativas, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial U_1} &= (\gamma-1)\frac{|\mathbf{v}^2|}{2};\\
\frac{\partial p}{\partial U_2} &= -(\gamma-1)v_1;\\
\frac{\partial p}{\partial U_3} &= -(\gamma-1)v_2;\\
\frac{\partial p}{\partial U_4} &= (\gamma-1).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial U_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{U_2^2}{U_1^2} + (\gamma-1)\frac{||U_{23}||^2}{2U_1^2} \\ -\frac{U_2U_3}{U_1^2} \\ -\frac{U_2}{U_1^2}\left[\gamma U_4 - (\gamma-1)\frac{||U_{23}||^2}{U_1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_1^2 + \frac{(\gamma-1)|\mathbf{v}|^2}{2} \\ -v_1v_2 \\ -v_1(\gamma E - (\gamma-1)|\mathbf{v}|^2) \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial U_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ (3-\gamma)\frac{U_2}{U_1} \\ \frac{U_3}{U_1} \\ \gamma\frac{U_4}{U_1} - \frac{(\gamma-1)}{2U_1^2}(||U_{23}||^2 + 2U_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (3-\gamma)v_1 \\ v_2 \\ \gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2}(|\mathbf{v}|^2 + 2v_1^2) \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial v_1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial U_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\gamma-1)\frac{U_3}{U_1} \\ \frac{U_2}{U_1} \\ -(\gamma-1)\frac{U_3U_2}{U_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\gamma-1)v_2 \\ v_1 \\ -(\gamma-1)v_1v_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial v_2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial U_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma-1) \\ 0 \\ \gamma\frac{U_2}{U_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma-1) \\ 0 \\ \gamma v_1 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial E}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial U_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{U_2U_3}{U_1^2} \\ -\frac{U_3^2}{U_1^2} + (\gamma-1)\frac{||U_{23}||^2}{2U_1^2} \\ -\frac{U_3}{U_1^2}\left[\gamma U_4 - (\gamma-1)\frac{||U_{23}||^2}{U_1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_1v_2 \\ -v_2^2 + (\gamma-1)\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \\ -v_2(\gamma E - (\gamma-1)|\mathbf{v}|^2) \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial U_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_3}{U_2} \\ -(\gamma-1)\frac{U_2}{U_1} \\ -(\gamma-1)\frac{U_2U_3}{U_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ -(\gamma-1)v_1 \\ -(\gamma-1)v_1v_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial v_1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial U_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{U_2}{U_1} \\ (3-\gamma)\frac{U_3}{U_1} \\ \gamma\frac{U_4}{U_1} - \frac{(\gamma-1)}{2U_1^2}(||U_{23}||^2 + 2U_3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ (3-\gamma)v_2 \\ \gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2}(|\mathbf{v}|^2 + 2v_2^2) \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial v_2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial U_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\gamma-1) \\ \gamma\frac{U_3}{U_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\gamma-1) \\ \gamma v_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial E}.$$

Em termos de variáveis primitivas, a matriz jacobiana $\mathbf{A}_x$ é dada por

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_1^2 + \frac{(\gamma-1)|\mathbf{v}|^2}{2} & (3-\gamma)v_1 & -(\gamma-1)v_2 & (\gamma-1) \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 & 0 \\ -v_1(\gamma E - (\gamma-1)|\mathbf{v}|^2) & \gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2}(|\mathbf{v}|^2 + 2v_1^2) & -(\gamma-1)v_1v_2 & \gamma v_1 \end{bmatrix}$$

e em variáveis conservativas tem-se

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{U_2^2}{U_1^2} + (\gamma-1)\frac{||U_{23}||^2}{2U_1^2} & (3-\gamma)\frac{U_2}{U_1} & -(\gamma-1)\frac{U_3}{U_1} & (\gamma-1) \\ -\frac{U_2U_3}{U_1^2} & \frac{U_3}{U_1} & \frac{U_2}{U_1} & 0 \\ -\frac{U_2}{U_1^2}\left[\gamma U_4 - (\gamma-1)\frac{||U_{23}||^2}{U_1}\right] & \gamma\frac{U_4}{U_1} - \frac{(\gamma-1)}{2U_1^2}(||U_{23}||^2 + 2U_2^2) & -(\gamma-1)\frac{U_3U_2}{U_1^2} & \gamma\frac{U_2}{U_1} \end{bmatrix}$$

De forma análoga obtemos as matrizes jacobianas $\mathbf{A}_y$

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 & 0 \\ -v_2^2 + (\gamma-1)\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} & -(\gamma-1)v_1 & (3-\gamma)v_2 & (\gamma-1) \\ -v_2(\gamma E - (\gamma-1)|\mathbf{v}|^2) & -(\gamma-1)v_1v_2 & \gamma E - \frac{(\gamma-1)}{2}(|\mathbf{v}|^2 + 2v_2^2) & \gamma v_2 \end{bmatrix}$$

em variáveis primitivas e

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{U_2U_3}{U_1^2} & \frac{U_3}{U_2} & \frac{U_2}{U_1} & 0 \\ -\frac{U_3^2}{U_1^2} + (\gamma-1)\frac{||U_{23}||^2}{2U_1^2} & -(\gamma-1)\frac{U_2}{U_1} & (3-\gamma)\frac{U_3}{U_1} & (\gamma-1) \\ -\frac{U_3}{U_1^2}\left[\gamma U_4 - (\gamma-1)\frac{||U_{23}||^2}{U_1}\right] & -(\gamma-1)\frac{U_2U_3}{U_1^2} & \gamma\frac{U_4}{U_1} - \frac{(\gamma-1)}{2U_1^2}(||U_{23}||^2 + 2U_3^2) & \gamma\frac{U_3}{U_1} \end{bmatrix}$$

em variáveis conservativas.

No próximo capítulo são descritas a formulação variacional do modelo matemático e as formulações numéricas adotadas para resolver as equações de Euler.

Capítulo 3

Formulações Numéricas Estabilizadas para as Equações de Euler

O desenvolvimento de métodos numéricos para simulação de problemas complexos é uma área bastante ativa devido às inúmeras aplicações da dinâmica de fluidos em diferentes áreas da ciência aplicada e engenharia, como, por exemplo, na indústria aeroespacial e automobilística, na indústria do petróleo, meteorologia, oceanografia, entre outras.

Neste capítulo apresentamos as formulações numéricas utilizadas para resolver as equações de Euler. Inicialmente descrevemos a conhecida formulação variacional semi-discreta baseada no método de elementos finitos de Galerkin e os métodos estabilizados SUPG, CAU e YZβ. Em seguida, apresentamos o método de estabilização Difusão Dinâmica e um esquema numérico para calcular as variações temporais das escalas submalhas, desenvolvido nesse trabalho. E por último, apresentamos o algoritmo de integração no tempo preditor/multicorretor.

3.1 Formulação Variacional Semidiscreta para as Equações de Euler

A formulação variacional semidiscreta de Galerkin caracteriza-se pela combinação de aproximações distintas para as variáveis espacial e temporal, sendo utilizados os espaços de aproximações polinomiais clássicos de elementos finitos para discretizar o espaço, e o método de diferenças finitas para discretizar o tempo.

Para discretização do problema, considera-se uma partição $\mathcal{T}_h = \{\Omega_e\}$ do domínio espacial Ω em n_{el} elementos triângulares, Ω_e, $e = 1, 2, \cdots, n_{el}$ tal que

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e \quad \text{e} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n_{el}, \quad i \neq j.$$

Define-se o espaço das funções testes $\mathcal{S}_h$ e o espaço das variações admissíveis $\mathcal{V}_h$, repectivamente por

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbf{U}_h | \mathbf{U}_h \in [\mathbf{H}_h^1(\Omega)]^4, \mathbf{U}_h|_{\Omega_e} \in [P^1(\Omega_e)]^4, \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{e}_k = g_k(t) \text{ em } \Gamma_{g_k}\} \quad e \tag{3.1}$$

$$\mathcal{V}_h = \{\mathbf{W}_h | \mathbf{W}_h \in [\mathbf{H}_h^1(\Omega)]^4, \mathbf{W}_h|_{\Omega_e} \in [P^1(\Omega_e)]^4, \mathbf{W}_h \cdot \mathbf{e}_k = 0 \text{ em } \Gamma_{g_k}\}, \tag{3.2}$$

com $\mathbf{H}_h^1(\Omega) \subset \mathbf{C}^0(\Omega)$ denotando o espaço de funções de dimensão finita sobre Ω, $P^1(\Omega_e)$ o conjunto de polinômios de 1ª ordem em Ω_e e Γ_{g_k} o contorno de Ω com condições de contorno de Dirichlet prescritas.

A formulação variacional semidiscreta de Galerkin para o problema (2.33), considerando $t \in (0, T)$, consiste em achar $\mathbf{U}^h(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}_h$ tal que

$$\int_\Omega \mathbf{W}^h \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}\Big) d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{V}_h. \tag{3.3}$$

Em geral, o método de elementos finitos de Galerkin clássico é caracterizado pela falta de estabilidade quando utilizado para resolver problemas predominantemente convectivos, como aqueles regidos pelas equações de Euler, produzindo soluções numéricas instáveis, que não representam o modelo físico. Nas próximas seções serão descritas formulações numéricas estabilizadas para o sistema de equações de Euler (2.33).

3.2 A Formulação Estabilizada SUPG

Dentre os trabalhos desenvolvidos considerando formulações estabilizadas para as equações de Euler, destacamos o trabalho apresentado por (Hughes e Tezduyar, 1984) como uma das primeiras publicações estendendo o método SUPG para sistemas hiperbólicos não lineares de leis de conservação.

Um avanço na formulação dos métodos de elementos finitos estabilizados, para problemas de escoamento compressíveis, apresentou a ideia de trabalhar com leis de conservação simetrizada (Hughes *et al.*, 1986). A simetrização é realizada por uma mudança de variáveis que conduzem à formulação das equações de Euler nas variáveis de entropia (Catabriga, 2000). Por razões práticas, é desejável desenvolver métodos de elementos finitos estabilizados para as equações de Euler usando variáveis conservativas, uma vez que as variáveis de conservação tem uma relação linear com as variáveis primitivas que são as variáveis físicas de interesse.

O método SUPG para as equações de Euler consiste em adicionar à formulação variacional de Galerkin (Eq. (3.3)), uma contribuição elemento por elemento dependente do resíduo local da equação. Isso resulta no seguinte problema: para $t \in (0, T)$, encontrar $\mathbf{U}^h(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}_h, \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{V}_h$ tal que $\mathbf{U}^h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$ e

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{W}^h \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}\Big) d\Omega \\ &+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\tau}_{SUPG} \Big(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y}\Big) \cdot R(\mathbf{U}) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{V}^h, \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde

$$R(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}$$

é o resíduo local do sistema de equações de Euler. O $\boldsymbol{\tau}_{SUPG}$ é uma matriz de estabilização, definida como em (Catabriga, 2000) por

$$\boldsymbol{\tau}_{SUPG} = \tau \mathbf{I},$$

com

$$\tau = max[0, \tau_t + \zeta(\tau_a - \tau_\delta)], \tag{3.5}$$

onde ζ é um parâmetro definido por

$$\zeta = \frac{2\alpha CFL}{1 + 2\alpha CFL}; \tag{3.6}$$

τ_t, τ_a e τ_δ são parâmetros de estabilização correspondentes, respectivamente, aos termos dependentes do tempo, advectivos e de desconto dos efeitos do operador de captura de descontinuidades CAU, presentes na Eq. (3.5) e definidos por

$$\tau_t = \frac{2}{3(1+2\alpha CFL)}\tau_a, \tag{3.7}$$

$$\tau_a = \frac{h}{2(c+|\mathbf{v}\boldsymbol{\beta}|)}, \tag{3.8}$$

$$\tau_\delta = \frac{\delta}{(c+|\mathbf{v}\boldsymbol{\beta}|)^2}, \tag{3.9}$$

onde α é o parâmetro que controla a estabilidade e precisão do algoritmo de integração, adotado neste trabalho como $\alpha = 0.5$, CFL é o número de *Courant-Friedrichs-Lewy*, dado por

$$CFL = \frac{(c+|\mathbf{v}\boldsymbol{\beta}|)\Delta t}{h} \tag{3.10}$$

e $\boldsymbol{\beta}$ um vetor unitário arbitrário, definido da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\nabla\|\mathbf{U}\|_*^2}{\|\nabla\|\mathbf{U}\|_*^2\|_2}, \quad \text{onde } \|.\|_* = \|.\|_2 \text{ ou } \|.\|_{\mathbf{A}_0^{-1}}. \tag{3.11}$$

A velocidade acústica c é dada por

$$c^2 = \gamma(\gamma-1)(e - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2})$$

e o comprimento característico de malha adotado é $h = \sqrt{2A^e}$, sendo A^e a área do elemento triangular Ω_e. O parâmetro δ referente ao operador de captura de descontinuidades CAU será definido na próxima seção.

3.3 Operadores de Captura de Descontinuidades

O método de estabilização SUPG evita que as oscilações que surgem nas regiões de camadas limites sejam propagadas para todo o domínio computacional. No entanto, algumas oscilações permanecem próximo às descontinuidades ou próximo a regiões de altos gradientes. Para contornar essas limitações do método SUPG, pode-se utilizar os métodos de captura de descontinuidades, como proposto em Galeão e Carmo (1988).

A maioria dos métodos de captura de descontinuidades consiste em decompor o termo de estabilização em duas partes: uma parte é um termo de estabilização linear, como o operador SUPG, que controla o gradiente da solução na direção das linhas de corrente e a segunda parte é um termo não linear que controla o gradiente em outras direções, impedindo oscilações localizadas próximas às camadas limites (Santos, 2007). Para o sistema de equações de Euler, esse termo (conhecido como Operador de Captura de Descontinuidades - OCD) tem, em geral, a forma

$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \delta_{ocd} \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} . \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} . \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \Big) d\Omega, \tag{3.12}$$

onde δ_{ocd} é um parâmetro de estabilização que depende de $\mathbf{U}^h$ e que caracteriza os vários operadores existentes na literatura. Neste trabalho consideraremos os métodos de captura de descontinuidades CAU (Almeida e Galeão, 1996) e YZβ (Tezduyar e Senga, 2006). Dessa forma, a formulação variacional SUPG/OCD para as equações de Euler consiste em encontrar $\mathbf{U}^h \in \mathcal{S}_h$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \Big) d\Omega \\ &+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\tau}_{SUPG} \Big(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \Big) \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \Big) d\Omega \\ &+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \delta_{ocd} \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \Big) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{V}^h. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A seguir, os parâmetros de estabilização (δ_{ocd}) para os métodos CAU e YZβ, denotados respectivamente por δ_{CAU} e $\delta_{YZ\beta}$, serão definidos.

Parâmetro de estabilização do método CAU

O sistema de equações de Euler pode ser escrito em uma forma simétrica em termos de variáveis de entropia (Hughes *et al.*, 1986). Denotando por $\mathbf{V}$ o vetor de variáveis de entropia, a forma simétrica das equações de Euler (Almeida e Galeão, 1996; Hughes *et al.*, 1986) é dada por

$$\widetilde{\mathbf{A}}_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \widetilde{\mathbf{A}}_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \widetilde{\mathbf{A}}_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{0}, \tag{3.14}$$

onde

$\widetilde{\mathbf{A}}_0 = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}$ é uma matriz simétrica e definida positiva;

$\widetilde{\mathbf{A}}_x = \mathbf{A}_x\widetilde{\mathbf{A}}_0$ e $\widetilde{\mathbf{A}}_y = \mathbf{A}_y\widetilde{\mathbf{A}}_0$ são matrizes simétricas.

O parâmetro de estabilização do método CAU em variáveis de entropia (Almeida e Galeão, 1996; Catabriga, 2000), denotado por δ_{CAU}, é definido por

$$\delta_{CAU} = \begin{cases} \frac{\left\|R(\mathbf{V})^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0^{-1}}}{\left\|\nabla_\xi \mathbf{V}^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0}}, & \text{se} \quad \left\|\nabla_\xi \mathbf{V}^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0} \neq 0; \\ 0, & \text{se} \quad \left\|\nabla_\xi \mathbf{V}^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0} = 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

onde

$$\|\mathbf{w}\|_{\widetilde{A}_0^{-1}} = (\mathbf{w}^T\widetilde{A}_0^{-1}\mathbf{w})^{1/2} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{w}\|_{\widetilde{A}_0} = (\mathbf{w}^T\widetilde{A}_0\mathbf{w})^{1/2}; \tag{3.16}$$

$$R(\mathbf{V}^h) = \widetilde{\mathbf{A}}_0\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}_x\frac{\partial \mathbf{V}^h}{\partial x} + \tilde{\mathbf{A}}_y\frac{\partial \mathbf{V}^h}{\partial y} \tag{3.17}$$

é o resíduo no interior do elemento Ω_e, e

$$\left\|\nabla_\xi \mathbf{V}^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0^{-1}} = \left\|\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \mathbf{V}^h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \mathbf{V}^h}{\partial y}\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0^{-1}} + \left\|\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \mathbf{V}^h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \mathbf{V}^h}{\partial y}\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0^{-1}}. \tag{3.18}$$

Os termos $\frac{\partial x_j}{\partial \xi_l}$ são as componentes da matriz de transformação das coordenadas físicas para o sistema de referências das coordenadas locais ξ_l nos elementos.

Reescrevendo o parâmetro do operador δ_{CAU} em variáveis conservativas (ver Almeida e Galeão (1996); Catabriga (2000) para maiores detalhes), obtemos

$$\delta_{CAU} = \begin{cases} \frac{\left\|R(\mathbf{U})^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0^{-1}}}{\left\|\nabla_\xi \mathbf{U}^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0^{-1}}}, & \text{se} \quad \left\|\nabla_\xi \mathbf{U}^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0^{-1}} \neq 0; \\ 0, & \text{se} \quad \left\|\nabla_\xi \mathbf{U}^h\right\|_{\widetilde{\mathbf{A}}_0^{-1}} = 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

onde

$$R(\mathbf{U})^h = \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}. \tag{3.20}$$

Parâmetro de estabilização do método YZβ

O parâmetro de estabilização do método YZβ, conforme apresentado em (Tezduyar e Senga, 2006) e denotado por $\delta_{YZ\beta}$, é definido por

$$\delta_{YZ\beta} = \left\|\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Z}\right\| \left[\sum_{a=1}^{n_{sd}} \left\|\mathbf{Y}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_i}\right\|\right]^{\frac{\beta}{2}-1} \left\|\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U}\right\|^{1-\beta} \left(\frac{h_{yz\beta}}{2}\right)^{\beta}, \tag{3.21}$$

onde $\mathbf{Y}$ é uma matriz diagonal construída a partir dos valores de referência das componentes de $\mathbf{U}$, dada por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} (U_1)_{ref} & & & \\ & (U_2)_{ref} & & \\ & & (U_3)_{ref} & \\ & & & (U_4)_{ref} \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}, \tag{3.23}$$

$$h_{yz\beta} = 2\Big[\sum_{a=1}^{n_{en}} |\mathbf{J} \cdot \nabla N_a|\Big]^{-1}, \tag{3.24}$$

onde $n_{en} = 3$ é o número de pontos nodais em cada elemento Ω_e, N_a é a função de interpolação associada ao ponto nodal a e

$$\mathbf{J} = \frac{\nabla \rho^h}{\|\nabla \rho^h\|}. \tag{3.25}$$

Para regiões com gradientes suaves, utiliza-se $\beta = 1$ e para regiões com gradientes elevados, utiliza-se $\beta = 2$. Dessa forma, o parâmetro $\delta_{YZ\beta}$ é definido como uma média, considerando esses dois valores de β, ou seja,

$$\delta_{YZ\beta} = \frac{1}{2}\Big((\delta_{YZ\beta})_{\beta=1} + (\delta_{YZ\beta})_{\beta=2}\Big). \tag{3.26}$$

3.4 Métodos de Estabilização Difusão Dinâmica (DD)

Arruda *et al.* (2010) introduziram o método de estabilização Difusão Dinâmica (DD) para problemas de transporte predominantemente convectivos. Este método consiste em adicionar à formulação de Galerkin um operador dissipativo não linear, agindo isotropicamente em todas as escalas da discretização. A quantidade de difusão artificial é determinada pela solução do problema na escala resolvida a nível do elemento, sendo portanto um método auto-adaptativo e livre de parâmetros de estabilização.

Werner (2011) aplicou o método DD na solução do problema de escoamento miscível em meios porosos, usando a hipótese de escalas submalhas *quase-estáticas*. Neste trabalho, aplicaremos o método DD na solução do sistema de equações de Euler compressíveis, considerando escalas submalhas estáticas e transientes. Para a apresentação do método considere uma partição $\mathcal{T}_h$ do domínio Ω em elementos triangulares, junto com o seguinte enriquecimento dos espaços de aproximação $\mathcal{S}_h$ e $\mathcal{V}_h$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^E &= \mathcal{S}^h \oplus \mathcal{S}^B; & (3.27)\\ \mathcal{V}^E &= \mathcal{V}^h \oplus \mathcal{V}^B, & (3.28) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{S}^B$ e $\mathcal{V}^B$ são, respectivamente, os espaços de funções testes e admissíveis, formados por funções bolhas (Santos, 2007) – ver Fig. 3.1. As funções enriquecidas $\mathbf{U}^E \in \mathcal{S}^E$ e $\mathbf{W}^E \in \mathcal{V}^E$ são decompostas unicamente da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^E &= \mathbf{U}^h + \mathbf{U}^B, \quad \text{onde} \quad \mathbf{U}^h \in \mathcal{S}^h \text{ e } \mathbf{U}^B \in \mathcal{S}^B; & (3.29)\\ \mathbf{W}^E &= \mathbf{W}^h + \mathbf{W}^B, \quad \text{onde} \quad \mathbf{W}^h \in \mathcal{V}^h \text{ e } \mathbf{W}^B \in \mathcal{V}^B. & (3.30) \end{aligned}$$

A função bolha $\varphi_B \in \mathcal{S}^B$, associada ao elemento $\Omega_e \in \mathcal{T}_h$, é uma função polinomial satisfazendo

$$\begin{cases} \varphi_B(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e; \\ \varphi_B(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_e \cup \Omega/\Omega_e; \\ \varphi_B(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{no baricentro do triângulo } \Omega_e. \end{cases}$$

Neste caso, a função bolha utilizada é uma função polinomial cúbica definida por

$$\varphi_B(x,y) = 27N_1^e(x,y)N_2^e(x,y)N_3^e(x,y), \tag{3.31}$$

onde $N_j^e(x,y)$ representa a função de forma local do MEF associada ao ponto nodal (macro) j, para $j = 1,2,3$ do elemento Ω_e.

No contexto dos métodos multiescala, $\mathcal{S}^h$ e $\mathcal{V}^h$ representam os espaços das escalas resolvidas (espaços macro), enquanto que $\mathcal{S}^B$ e $\mathcal{V}^B$ representam os espaços das escalas não resolvidas (espaços micro ou submalhas) (Santos, 2007). Em geral, os espaços $\mathcal{S}^h$ e $\mathcal{V}^h$ são formados por funções contínuas em Ω e lineares em cada elemento $\Omega_e \in \mathcal{T}_h$. O método de estabilização Difusão Dinâmica para a Eq. (2.33) consiste em achar $\mathbf{U}^E \in \mathcal{S}^E$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{W}^E \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial y}\Big) d\Omega \quad + \\ &\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y}\Big) d\Omega \quad = \quad \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}^E \in \mathcal{V}^E, \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde o coeficiente ξ_h representa a quantidade de viscosidade artificial adicionada pelo modelo numérico. Para o caso escalar, esse coeficiente é dado em termos das normas euclidianas do resíduo e do gradiente da solução da equação associada à macro escala. Almeida (1993) apresentou uma generalização do método CAU para o sistema de equações de Euler, obtendo *normas generalizadas* para o cálculo do parâmetro de estabilização deste método, que também é dado em função do resíduo e do gradiente da solução aproximada. Neste trabalho, utilizamos a norma dada pela Eq. (3.16). Portanto, definimos ξ_h da seguinte forma:

$$\xi_h = \xi_h(\mathbf{U}^h) = \begin{cases} \mu(h) \dfrac{\|R(\mathbf{U}^h)\|_{\widetilde{A}_0^{-1}}}{\|\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}^h\|_{\widetilde{A}_0^{-1}}}, \text{ se } \|\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}^h\|_{\widetilde{A}_0^{-1}} > tol_\xi; \\ \\ 0, \quad \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{3.33}$$

sendo $\mu(h) = \sqrt{2A^e}$ o parâmetro característico submalha, com A^e a área do elemento Ω_e, $tol_\xi = 10^{-10}$ neste trabalho, $R(\mathbf{U}^h)$ é o resíduo da equação no interior de Ω_e, denotado por

$$R(\mathbf{U}^h) = \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y},$$

e

$$\|\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}^h\|_{\widetilde{A}_0^{-1}} = \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right\|_{\widetilde{A}_0^{-1}} + \left\| \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right\|_{\widetilde{A}_0^{-1}}.$$

Para acelerar a convergência do processo iterativo, o cálculo de (3.33) no passo de tempo $n+1$ é determinado conforme em (Santos e Almeida, 2007), isto é,

$$\xi_h^{n+1} = \frac{1}{2}\Big(\xi_h^{n+1} + \xi_h^n\Big).$$

pontos nodais de $\mathcal{S}^h$ e $\mathcal{V}^h$
pontos nodais de $\mathcal{S}^B$ e $\mathcal{V}^B$
Ω_e

Figura 3.1: Representação dos espaços $\mathcal{S}^E$ e $\mathcal{V}^E$.

A Eq. (3.32) pode ser particionada em duas outras equações, uma associada às escalas resolvidas:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}\Big) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y}\Big) d\Omega$$
$$+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}\Big) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{V}^h, \tag{3.34}$$

e a outra associada às escalas submalhas:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}\Big) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega$$
$$+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y}\Big) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^B \in \mathcal{V}^B. \tag{3.35}$$

Em (3.34) e (3.35), os termos

$$\int_{\Omega_e} \xi_h \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \Big) d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \xi_h \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \Big) d\Omega$$

provenientes da formulação numérica DD e o termo convectivo associada à micro escala

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \Big(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \Big) d\Omega \tag{3.36}$$

foram omitidos, por serem nulos.

As Eqs (3.34) e (3.35) formam um sistema fortemente acoplado, dificultando o processo de condensação estática para eliminar a variável $\mathbf{U}^B$ (Werner, 2011; Yang e Samper, 2009). Uma forma de simplificar a solução desse sistema é assumindo a hipótese de escalas submalhas *quase-estáticas* (Codina e Blasco, 2002; Juanes, 2003; Yang e Samper, 2009), isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} \approx 0. \tag{3.37}$$

Essa abordagem foi utilizada por Werner (2011) no método Difusão Dinâmica aplicado à problemas de escoamento miscível em meios porosos e as soluções encontradas foram similares àquelas obtidas pela formulação SUPG/CAU. Trabalhos recentes considerando escalas submalhas *transientes* (ou dinâmicas) são apresentados em (Codina *et al.*, 2007; Gamnitzer *et al.*, 2010; Nassehi e M.Parvazinia, 2009). Neste trabalho, propomos um esquema numérico para resolver (3.34)-(3.35) considerando que as escalas submalhas sejam transientes.

As Eqs. (3.34) e (3.35) resultam em um sistema local de equações diferenciais ordinárias fortemente acoplado da forma

$$\begin{bmatrix} M_{hh} & M_{hB} \\ M_{Bh} & M_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{U}}_h \\ \dot{\mathrm{U}}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hB} \\ K_{Bh} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U}_h \\ \mathrm{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_h \\ 0_B \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

onde

- U_h e U_B são os vetores que representam as soluções $\mathbf{U}_h$ e $\mathbf{U}_B$ nos pontos nodais macro e micro, respectivamente, de cada elemento Ω_e. Analogamente, $\dot{\mathrm{U}}_h$ e $\dot{\mathrm{U}}_B$ são vetores que representam $\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t}$ e $\frac{\partial \mathbf{U}_B}{\partial t}$ nos pontos nodais macro e micro, respectivamente, de cada elemento Ω_e;

- M_{hh}, M_{hB}, M_{Bh} e M_{BB} são matrizes globais locais de massa associadas, respectivamente, à contribuição dos termos

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega;$$

- K_{hh} é a matriz global local de rigidez associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \Big(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \Big) d\Omega + \int_{\Omega_e} \xi_h \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \Big) d\Omega$$

- K_{hB} e K_{Bh} são matrizes globais locais de rigidez associadas aos termos

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \Big(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \Big) d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \Big(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \Big) d\Omega,$$

  respectivamente;

- K_{BB} é a matriz global local de rigidez associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \xi_h \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \Big) d\Omega.$$

3.4.1 Método de estabilização Difusão Dinâmica com escalas submalhas estáticas

Usando a hipótese (3.37), as matrizes locais M_{hB} e M_{BB} se anulam, de forma que o sistema (3.38) resulta em

$$\begin{bmatrix} M_{hh} & 0 \\ M_{Bh} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{U}}_h \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hB} \\ K_{Bh} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U}_h \\ \mathrm{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_h \\ 0_B \end{bmatrix}, \tag{3.39}$$

Utilizando o processo de condensação estática em (3.39) para eliminar a variável U_B, em cada elemento Ω_e, obtém-se um sistema local de equações diferenciais ordinárias para U_h da forma

$$M\dot{U}_h + KU_h = 0, \tag{3.40}$$

onde

$$
\begin{aligned}
M &= M_{hh} - K_{hB}(K_{BB})^{-1}M_{Bh};\\
K &= K_{hh} - K_{hB}(K_{BB})^{-1}K_{Bh}.
\end{aligned}
$$

O valor de U_B pode ser obtido pela expressão

$$U_B = -(K_{BB})^{-1}[K_{Bh}U_h + M_{Bh}\dot{U}_h].$$

Como a matriz K_{BB} é associada somente ao termo proveniente do método DD,

$$\int_{\Omega_e} \xi_h \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \Big) d\Omega,$$

segue-se que K_{BB} é inversível, sempre que $\xi_h > 0$ (ver Eq. (4.53)). O termo convectivo (3.36) associada à micro escala que deveria fazer parte da matriz K_{BB} se anula (ver Seção 4.2.7, Eq. (4.49)), quando se utiliza funções bolhas definidas da forma (3.31). Pode-se definir outras funções bolhas de forma que (3.36) seja não nulo. Quando $\xi_h = 0$, utilizamos o método SGS (Subgrid Stabilization) proposto por Guermond (2001), com o coeficiente de estabilização igual a um, de forma a preservar a não singularidade de K_{BB}.

Nos testes numéricos realizados os resultados apresentados não foram satisfatórios, conforme pode ser observado no Cap. 5. A seguir é apresentado um esquema numérico para resolver (3.34)-(3.35) considerando que as escalas submalhas sejam transientes.

3.4.2 Método de estabilização Difusão Dinâmica com escalas submalhas transientes

O sistema (3.38) resulta em duas equações:

$$M_{hh}\dot{\mathrm{U}}_h + M_{hB}\dot{\mathrm{U}}_B + K_{hh}\mathrm{U}_h + K_{hB}\mathrm{U}_B \cong 0_h; \tag{3.41}$$

$$M_{Bh}\dot{\mathrm{U}}_h + M_{BB}\dot{\mathrm{U}}_B + K_{Bh}\mathrm{U}_h + K_{BB}\mathrm{U}_B = 0_B. \tag{3.42}$$

Considerando uma aproximação por diferenças finitas de primeira ordem para a derivada temporal na escala submalha, no passo de tempo $n+1$,

$$\dot{\mathrm{U}}_B^{n+1} \cong \frac{\mathrm{U}_B^{n+1} - \mathrm{U}_B^n}{\Delta t}, \tag{3.43}$$

onde $\Delta t > 0$ é o passo no tempo e substituindo este resultado na Eq. (3.42), associada à micro escala, obtemos uma expressão que representa a variação no tempo das escalas submalhas, dada por

$$\mathrm{U}_B^{n+1} = (M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} \left[2M_{BB}\mathrm{U}_B^n - \Delta t \left(M_{Bh}\dot{\mathrm{U}}_h^{n+1} + K_{Bh}\mathrm{U}_h^{n+1} \right) \right], \tag{3.44}$$

onde $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$ é uma matriz local 4×4 inversível (ver Lema 3.4.1).

Lema 3.4.1. *A matriz local* $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$ *é inversível.*

Demonstração. De fato,

$$M_{BB} = \left(\frac{81A^e}{280} \right) I_4 \quad \text{e} \quad K_{BB} = \beta I_4,$$

onde I_4 é a matriz identidade de ordem 4 e

$$\beta = \begin{cases} \frac{81\xi_h}{40A^e} \left[\sum_{i=1}^{3} (x_i^2 + y_i^2) - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) \right] > 0, & \text{se } \xi_h > 0; \\ \\ 0, & \text{se } \xi_h = 0, \end{cases}$$

sendo x_i e y_i, $i = 1, 2, 3$ as coordenadas espaciais dos pontos nodais do elemento Ω_e. Portanto,

$$\det(M_{BB} + \Delta t K_{BB}) = \left(\frac{81A^e}{280} + \Delta t \beta \right)^4 \neq 0$$

e $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$ é inversível. $\square$

Usando (3.43) e (3.44) em (3.41), obtemos o sistema

$$\widehat{M}\dot{\mathrm{U}}_h^{n+1} + \widehat{K}\mathrm{U}_h^{n+1} = \widehat{N}\mathrm{U}_B^n, \tag{3.45}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\widehat{M} &= \Big[M_{hh} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} M_{Bh}\Big]; \\
\widehat{K} &= \Big[K_{hh} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} K_{Bh}\Big]; \\
\widehat{N} &= \frac{1}{\Delta t}\Big[M_{hB} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} M_{BB}\Big].
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema global associado de equações diferencias ordinárias (3.45) através de um algoritmo predito-multicorretor, obtemos U_h^{n+1} e $\dot{U}_h^{n+1}$. O vetor U_B^n no lado direito de (3.45) é atualizado usando a expressão (3.44).

Diferentemente do caso anterior, a matriz $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$ é inversível, independente do valor de ξ_h, conforme o Lema 3.4.1. O passo de tempo associado à micro escala em (3.43) é o mesmo utilizado na resolução do problema macro. Passos de tempos diferentes para a micro e macro escalas podem ser considerados. Os resultados numéricos usando essa metodologia são mostrados no Capítulo 5. O problema global (3.45) associado é resolvido usando o algoritmo preditor/multicorretor, descrito na próxima seção.

3.5 Integração no Tempo / Linearização

O algoritmo de integração no tempo adotado é o preditor/multicorretor, apresentado em (Hughes e Tezduyar, 1984). Neste algoritmo, a equação global associada às equações locais (3.40) e (3.45), definidas de forma genérica por

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \mathbf{F} = F(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, U_B), \mathbf{K} = K(\mathbf{U})$$

é discretizada por diferenças finitas. Para sua descrição, seja n o contador de passos no tempo, Δt o passo no tempo, $\dot{\mathbf{U}}^n$ e $\mathbf{U}^n$ as aproximações para $\dot{\mathbf{U}}_\mathbf{h}(t_n)$ e $\mathbf{U}_\mathbf{h}(t_n)$, respectivamente, o algoritmo pode ser resumido nos seguintes passos:

Dados $\dot{\mathbf{U}}^n$ e $\mathbf{U}^n$

Predição:

$i = 0;$

$\mathbf{U}_{(0)}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \alpha \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n$;

$\dot{\mathbf{U}}_{(0)}^{n+1} = 0$;

Correção:

$i = i + 1$;

Calcule $\mathbf{R} = \mathbf{F} - (\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_{i-1}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{i-1}^{n+1})$;

Resolva $\mathbf{M}^* \Delta \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}$;

Atualize $\dot{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_{i-1}^{n+1} + \Delta \dot{\mathbf{U}}$;

Atualize $\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_{i-1}^{n+1} + \alpha \Delta t \Delta \mathbf{U}$,

onde

- $\alpha \in [0, 1]$ é um parâmetro que estabelece o controle da estabilidade e precisão do método de integração no tempo. Neste trabalho, utiliza-se $\alpha = 0.5$, que corresponde a um método implícito de segunda ordem.
- $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \alpha \Delta t \mathbf{K}$ é a matriz efetiva cuja ordem é o número de graus de liberdade;
- $\mathbf{R} = \mathbf{F} - [\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U}]$ é o vetor de resíduos em função dos valores iniciais da multicorreção dos valores nodais de $\dot{\mathbf{U}}$ e $\mathbf{U}$;
- $\Delta \dot{\mathbf{U}}$ é a correção dos valores de $\dot{\mathbf{U}}$ para a próxima iteração;

O número de correções foi fixado em três para todos os métodos. Os sistemas lineares são resolvidos utilizando o método GMRES com um pré-condicionador bloco diagonal nodal (Catabriga e Coutinho, 2002). Os experimentos numéricos serão apresentados no Capítulo 5.

Capítulo 4

Matrizes dos Elementos

As formulações numéricas variacionais discretizadas apresentadas no Capítulo 3 resultam em sistemas algébricos de equações diferenciais ordinárias não lineares, que são resolvidos por um esquema discreto de integração no tempo, descrito na Seção 3.5 do capítulo anterior. As matrizes globais provenientes dessas formulações têm uma enorme esparsidade e seus coeficientes não nulos não são dispostos uniformemente. Os métodos iterativos não estacionários, também conhecidos como métodos livres de matrizes, são mais indicados nesse caso, pois apresentam facilidades no armazenamento das matrizes esparsas (Saad, 1995). Além disso, a principal operação desses métodos, o produto matriz-vetor, pode ser realizada acessando apenas as posições não nulas da matriz dos coeficientes. Entretanto, para que essa vantagem dos métodos não estacionários possa ser melhor aproveitada, há necessidade de se definir estratégias de armazenamentos especiais das matrizes envolvidas. Dentre às várias estratégias de armazenamento aplicadas ao método dos elementos finitos, armazenamento elemento por elemento (EBE) (Hughes, 1987), aresta por aresta (EDE) (Catabriga, 2000; Martins, 1996) e a tradicional estratégia de linhas esparsas comprimidas, do inglês, Compressed Sparse Row (CSR) (Saad, 1995), optou-se por utilizar a estrutura elemento por elemento. Dessa forma, neste capítulo são apresentadas as matrizes dos elementos associadas às formulações numéricas descritas no Capítulo 3.

O conjunto de equações originadas da aproximação pelo método de elementos finitos, forma um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias não lineares, que pode ser representado de forma matricial por

$$M\dot{\mathrm{U}}_h + K\mathrm{U}_h = F, \mathbf{F} = F(\mathbf{U}_h, \dot{\mathbf{U}}_\mathbf{h}, U_B), \mathbf{K} = K(\mathbf{U})$$

onde M é a matriz de massa generalizada e K é um operador não linear de U representando os termos das equações de estado. As matrizes de (4.1) são construídas a partir da contribuição de matrizes associadas à cada elemento.

A matriz de interpolação é definida por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}_{4\times 12} \tag{4.1}$$

ou de forma mais compacta

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1\mathbf{I}_4 & N_2\mathbf{I}_4 & N_3\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

onde $\mathbf{I}_4$ é a matriz identidade de ordem 4 e N_1, N_2 e N_3 são as funções de interpolação no interior do elemento.

A matriz de interpolação $\mathbf{N}_B = \mathbf{N}_B(x, y)$ associada às funções bolhas é dada por

$$\mathbf{N}_B = \begin{bmatrix} N_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_b \end{bmatrix}_{4\times 4} \tag{4.3}$$

ou, de forma compacta,

$$\mathbf{N}_B = \left[N_b\mathbf{I}_4 \right], \tag{4.4}$$

onde

$$N_b = 27N_1N_2N_3. \tag{4.5}$$

Para simplificar as funções de interpolação, realiza-se uma transformação de variáveis globais (x, y) para variáveis locais (ξ, η) - Fig. 4.1. Dessa forma, as funções de interpolação para elementos triangulares são dadas por

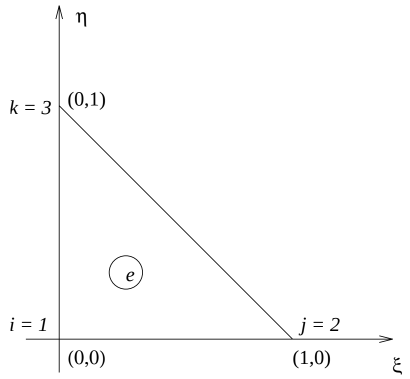


Figura 4.1: Elemento Triangular Linear

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \xi; \\
N_2 &= \eta; \\
N_3 &= 1 - \xi - \eta.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

A Matriz Jacobiana que define a transformação das coordenadas globais para as coordenadas locais é dada por

$$
\mathbf{J} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} & -y_{31} \\ -x_{32} & y_{23} \end{bmatrix}, \tag{4.7}
$$

sendo x_i e y_j as coordenadas globais do elemento Ω_e, e $x_{ij} = x_i - x_j$, $i, j = 1, 2, 3$. A inversa da Matriz Jacobiana é dada por

$$
\mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \end{bmatrix}, \tag{4.8}
$$

onde A^e é a área do elemento Ω_e. O operador gradiente discreto das funções de interpolação do método de Galerkin é definido por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{I}_4 & y_{31}\mathbf{I}_4 & y_{12}\mathbf{I}_4 \\ x_{32}\mathbf{I}_4 & x_{13}\mathbf{I}_4 & x_{21}\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

ou seja,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & 0 & 0 & y_{31} & 0 & 0 & 0 & y_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{23} & 0 & 0 & 0 & y_{31} & 0 & 0 & 0 & y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{23} & 0 & 0 & 0 & y_{31} & 0 & 0 & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{23} & 0 & 0 & 0 & y_{31} & 0 & 0 & 0 & y_{12} \\ x_{32} & 0 & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 & x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 & x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & 0 & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{32} & 0 & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 & x_{21} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

O operador gradiente discreto associado às funções bolhas do método de Galerkin é dado por

$$\mathbf{B}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{bx} \\ \mathbf{B}_{by} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}_B}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}_B}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

ou seja,

$$\mathbf{B}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{bx} \\ \mathbf{B}_{by} \end{bmatrix} = \frac{27}{2A} \begin{bmatrix} (y_{23}N_2N_3 + y_{31}N_3N_1 + y_{12}N_1N_2)\mathbf{I}_4 \\ (x_{32}N_3N_2 + x_{13}N_1N_3 + x_{21}N_2N_1)\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

A seguir são apresentadas as matrizes dos elementos provenientes das formulações numéricas descritas no Capítulo 3. As matrizes $\mathbf{A}_x^h$ e $\mathbf{A}_y^h$ são avaliadas no baricentro de cada elemento, usando a solução do passo de tempo anterior. Dessa forma, elas são consideradas constantes em cada elemento.

4.1 Matrizes Locais dos Métodos Estabilizados SUPG/CAU e SUPG/YZβ

As matrizes locais dos métodos estabilizados SUPG/CAU e SUPG/YZβ são representadas pelas matrizes de massa do método de Galerkin e do método SUPG e pelas matrizes de rigidez associadas aos método de Galerkin, SUPG e pelo Operador de Captura de Descontinuidades.

4.1.1 Matriz de massa do método de Galerkin

A matriz local de massa M_{hh}^{g} proveniente do método de Galerkin é associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega_e.$$

Portanto,

$$M_{hh}^{g} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{I}_4 \\ N_2 \mathbf{I}_4 \\ N_3 \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{I}_4 & N_2 \mathbf{I}_4 & N_3 \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega_e,$$

que pode ser escrita como

$$M_{hh}^{g} = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_4 & 2\mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 & 2\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}_{12\times 12}. \tag{4.13}$$

4.1.2 Correção SUPG da matriz de massa

O termo referente à correção SUPG da matriz de massa, denotada por M_{hh}^{supg}, é associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} \Big(\mathbf{A}_x \frac{\mathbf{W}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \Big) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega_e.$$

Dessa forma,

$$M_{hh}^{supg} = \tau_{SUPG}\int_{\Omega_e}\Big(\mathbf{B}_x^T\mathbf{A}_x\mathbf{N} + \mathbf{B}_y^T\mathbf{A}_y\mathbf{N}\Big)d\Omega \tag{4.14}$$

$$= \tau_{SUPG}\mathbf{B}_x^T\mathbf{A}_x\Big(\int_{\Omega_e}\mathbf{N}d\Omega\Big) + \tau_{SUPG}\mathbf{B}_y^T\mathbf{A}_y\Big(\int_{\Omega_e}\mathbf{N}d\Omega\Big), \tag{4.15}$$

onde

$$\int_{\Omega_e}\mathbf{N}d\Omega = \int_{\Omega_e}\left[\begin{array}{ccc} N_1\mathbf{I}_4 & N_2\mathbf{I}_4 & N_3\mathbf{I}_4 \end{array}\right]d\Omega.$$

Como $\int_{\Omega_e} N_i d\Omega = \frac{A^e}{3}, \quad i = 1, 2, 3$, então

$$\int_{\Omega_e}\mathbf{N}^T d\Omega = \frac{A^e}{3}\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 \end{array}\right]_{4\times 12}.$$

Usando (4.9), obtemos

$$M_{hh}^{supg} = \frac{\tau_{SUPG}}{6}\begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{I}_4 \\ y_{31}\mathbf{I}_4 \\ y_{12}\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}\mathbf{A}_x\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 \end{array}\right] + \frac{\tau_{SUPG}}{6}\begin{bmatrix} x_{32}\mathbf{I}_4 \\ x_{13}\mathbf{I}_4 \\ x_{21}\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}\mathbf{A}_y\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4 \end{array}\right]$$

$$= \frac{\tau_{SUPG}}{6}\begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y & y_{23}\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y & y_{23}\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y \\ y_{31}\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y & y_{31}\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y & y_{31}\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y \\ y_{12}\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y & y_{12}\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y & y_{12}\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y \end{bmatrix}_{12\times 12}. \tag{4.16}$$

4.1.3 Matriz de rigidez do método de Galerkin

A matriz local de rigidez K_{hh}^g proveniente do método de Galerkin é associada ao termo convectivo

$$\int_{\Omega_e}\mathbf{W}^h\cdot\Big(\mathbf{A}_x\frac{\partial\mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y\frac{\partial\mathbf{U}^h}{\partial y}\Big)d\Omega_e.$$

Logo,

$$K_{hh}^g = \int_{\Omega_e}\Big(\mathbf{N}^T\mathbf{A}_x\mathbf{B}_x + \mathbf{N}^T\mathbf{A}_y\mathbf{B}_y\Big)d\Omega \tag{4.17}$$

$$= \Big(\int_{\Omega_e}\mathbf{N}^T d\Omega\Big)\mathbf{A}_x\mathbf{B}_x + \Big(\int_{\Omega_e}\mathbf{N}^T d\Omega\Big)\mathbf{A}_y\mathbf{B}_y. \tag{4.18}$$

Mas,

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T d\Omega = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_1\mathbf{I}_4 \\ N_2\mathbf{I}_4 \\ N_3\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega.$$

Como $\int_{\Omega_e} N_i d\Omega = \frac{A^e}{3}, \quad i = 1, 2, 3$, então

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T d\Omega = \frac{A^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}_{12\times 4}.$$

Usando (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} K_{hh}^g &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x \\ \mathbf{A}_x \\ \mathbf{A}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{I}_4 & y_{31}\mathbf{I}_4 & y_{12}\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_y \\ \mathbf{A}_y \\ \mathbf{A}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{32}\mathbf{I}_4 & x_{13}\mathbf{I}_4 & x_{21}\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y & y_{31}\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y & y_{12}\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y \\ y_{23}\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y & y_{31}\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y & y_{12}\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y \\ y_{23}\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y & y_{31}\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y & y_{12}\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.19}$$

4.1.4 Correção SUPG da matriz de rigidez

A parcela referente à correção SUPG da matriz de rigidez, denotada por K_{hh}^{supg}, é associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \tau_{SUPG}\Big(\mathbf{A}_x \frac{\mathbf{W}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y}\Big) \cdot \Big(\mathbf{A}_x \frac{\mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}\Big) d\Omega_e.$$

Dessa forma,

$$K_{hh}^{supg} = \tau_{SUPG} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x\mathbf{A}_x & \mathbf{A}_x\mathbf{A}_y \\ \mathbf{A}_y\mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y\mathbf{A}_y \end{bmatrix} \mathbf{B} d\Omega \tag{4.20}$$

$$= \frac{\tau_{SUPG}}{4A^e} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

onde cada E_{ij} é uma submatriz 4×4, definida por

$$E_{12} = y_{23}(y_{31}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_y) + x_{23}(y_{31}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_y);$$

$$E_{13} = y_{23}(y_{12}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_y) + x_{32}(y_{12}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_y);$$

$$E_{21} = y_{31}(y_{23}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_y) + x_{13}(y_{23}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_y);$$

$$E_{23} = y_{31}(y_{12}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_y) + x_{13}(y_{12}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_y);$$

$$E_{31} = y_{12}(y_{23}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_y) + x_{21}(y_{23}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_y);$$

$$E_{32} = y_{12}(y_{31}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_x\mathbf{A}_y) + x_{21}(y_{31}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y\mathbf{A}_y);$$

$$E_{11} = -(E_{12} + E_{13});$$

$$E_{22} = -(E_{21} + E_{23});$$

$$E_{33} = -(E_{31} + E_{32}).$$

4.1.5 Matriz de correção do Operador de Captura de Descontinuidades

A matriz local K_{hh}^{ocd} de correção do método de Captura de Descontinuidades (CAU ou YZβ), associada ao termo

$$\delta_{ocd} \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{W}^h \cdot \nabla \mathbf{U}^h d\Omega,$$

é dada por

$$\begin{aligned} K_{hh}^{ocd} &= \delta_{ocd} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega = \delta_{ocd} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \int_{\Omega_e} d\Omega \\ &= \delta_{ocd} A^e \mathbf{B}^T \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Substituindo $\mathbf{B}^T$ e $\mathbf{B}$ pelas matrizes de interpolação correspondentes, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^T\mathbf{B} &= \frac{1}{4(A^e)^2}\begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{I}_4 & x_{32}\mathbf{I}_4 \\ y_{31}\mathbf{I}_4 & x_{13}\mathbf{I}_4 \\ y_{12}\mathbf{I}_4 & x_{21}\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{I}_4 & y_{31}\mathbf{I}_4 & y_{12}\mathbf{I}_4 \\ x_{32}\mathbf{I}_4 & x_{13}\mathbf{I}_4 & x_{21}\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4(A^e)^2}\begin{bmatrix} (y_{23}^2 + x_{32}^2)\mathbf{I}_4 & (y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13})\mathbf{I}_4 & (y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21})\mathbf{I}_4 \\ (y_{31}y_{23} + x_{13}x_{32})\mathbf{I}_4 & (y_{31}^2 + x_{13}^2)\mathbf{I}_4 & (y_{31}y_{12} + x_{13}x_{21})\mathbf{I}_4 \\ (y_{12}y_{23} + x_{21}x_{32})\mathbf{I}_4 & (y_{12}y_{31} + x_{21}x_{13})\mathbf{I}_4 & (y_{12}^2 + x_{21}^2)\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$K_{hh}^{ocd} = \frac{\delta_{ocd}}{4A^e}\begin{bmatrix} (y_{23}y_{23} + x_{32}x_{32})\mathbf{I}_4 & (y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13})\mathbf{I}_4 & (y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21})\mathbf{I}_4 \\ (y_{31}y_{23} + x_{13}x_{32})\mathbf{I}_4 & (y_{31}y_{31} + x_{13}x_{13})\mathbf{I}_4 & (y_{31}y_{12} + x_{13}x_{21})\mathbf{I}_4 \\ (y_{12}y_{23} + x_{21}x_{32})\mathbf{I}_4 & (y_{12}y_{31} + x_{21}x_{13})\mathbf{I}_4 & (y_{12}y_{12} + x_{21}x_{21})\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

4.2 Matrizes Locais do Método de Estabilização Difusão Dinâmica

As matrizes locais do método DD são representadas pelas matrizes de massa M_{hh}^g do método de Galerkin, dada por (4.13), das componentes M_{hB}, M_{Bh} e M_{BB}, conforme (3.38), pelas matrizes de rigidez K_{hh}^g do método de Galerkin, dada por (4.19), e das componentes K_{hB}, K_{Bh} e K_{BB}, conforme (3.38).

4.2.1 Matriz de massa M_{hB} do método DD

A matriz local de massa M_{hB} proveniente do método DD é associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega_e.$$

Logo,

$$M_{hB} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_B d\Omega_e. \tag{4.24}$$

Substituindo $\mathbf{N}^T$ e $\mathbf{N}_B$ pelas matrizes de interpolação correspondentes, tem-se

$$M_{hB} = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_1\mathbf{I}_4 \\ N_2\mathbf{I}_4 \\ N_3\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_b\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_bN_1\mathbf{I}_4 \\ N_bN_2\mathbf{I}_4 \\ N_bN_3\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega_e, \tag{4.25}$$

onde

$$\int_{\Omega_e} N_bN_i d\Omega_e = \frac{3A^e}{20}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Portanto, a matriz local de massa M_{hB} é dada por

$$M_{hB} = \frac{3A^e}{20} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}_{12\times 4}. \tag{4.26}$$

4.2.2 Matriz de massa M_{Bh} do método DD

A matriz local de massa M_{Bh} proveniente do método DD é associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega_e.$$

Dessa forma,

$$M_{Bh} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B\mathbf{N} d\Omega_e. \tag{4.27}$$

Substituindo $\mathbf{N}_B$ e $\mathbf{N}$ pelas matrizes de interpolação correspondentes, tem-se

$$M_{Bh} = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_b\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1\mathbf{I}_4 & N_2\mathbf{I}_4 & N_3\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega_e, \tag{4.28}$$

$$= \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_bN_1\mathbf{I}_4 & N_bN_2\mathbf{I}_4 & N_bN_3\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega_e, \tag{4.29}$$

onde

$$\int_{\Omega_e} N_bN_i d\Omega_e = \frac{3A^e}{20}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Logo, a matriz local de massa M_{Bh} é dada por

$$M_{Bh} = \frac{3A^e}{20} \big[\mathbf{I}_4 \quad \mathbf{I}_4 \quad \mathbf{I}_4\big]_{4\times 12} = (M_{hB})^T. \tag{4.30}$$

4.2.3 Matriz de massa M_{BB} do método DD

A matriz local de massa M_{BB} proveniente do método DD é associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega_e.$$

Dessa forma,

$$M_{BB} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B^T \mathbf{N}_B d\Omega_e. \tag{4.31}$$

Substituindo $\mathbf{N}_B^T$ e $\mathbf{N}_B$ pelas matrizes de interpolação correspondentes, tem-se

$$M_{BB} = \int_{\Omega_e} \left[\, N_b \mathbf{I}_4 \, \right] \left[\, N_b \mathbf{I}_4 \, \right] d\Omega = \int_{\Omega_e} \left[\, N_b^2 \mathbf{I}_4 \, \right] d\Omega, \tag{4.32}$$

com

$$\int_{\Omega_e} N_b^2 d\Omega = 27^2 \int_{\Omega_e} N_1^2 N_2^2 N_3^2 d\Omega_e = \frac{81A^e}{280}. \tag{4.33}$$

Logo, a matriz local de massa M_{BB} é dada por

$$M_{BB} = \Big(\frac{81A^e}{280}\Big)\mathbf{I}_4. \tag{4.34}$$

4.2.4 Matriz de rigidez K_{hh} do método DD

A matriz K_{hh} é formada pela matriz associada ao termo convectivo da equação de Euler, já representada no método de Galerkin por K_{hh}^g (Eq. (4.19)), adicionada à um termo associado ao operador de difusão artificial proveniente do método DD, ou seja,

$$K_{hh} = K_{hh}^g + K_{hh}^{dd},$$

onde K_{hh}^g é dado pela Eq. (4.19) e

$$K_{hh}^{dd} = \xi_h \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{W}^h \cdot \nabla \mathbf{U}^h d\Omega.$$

De forma análoga a (4.23), obtemos

$$K^{dd}_{hh} = \frac{\xi_h}{4A^e}\begin{bmatrix} (y_{23}y_{23}+x_{32}x_{32})\mathbf{I}_4 & (y_{23}y_{31}+x_{32}x_{13})\mathbf{I}_4 & (y_{23}y_{12}+x_{32}x_{21})\mathbf{I}_4 \\ (y_{31}y_{23}+x_{13}x_{32})\mathbf{I}_4 & (y_{31}y_{31}+x_{13}x_{13})\mathbf{I}_4 & (y_{31}y_{12}+x_{13}x_{21})\mathbf{I}_4 \\ (y_{12}y_{23}+x_{21}x_{32})\mathbf{I}_4 & (y_{12}y_{31}+x_{21}x_{13})\mathbf{I}_4 & (y_{12}y_{12}+x_{21}x_{21})\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}. \tag{4.35}$$

4.2.5 Matriz de rigidez K_{hB} do método DD

A matriz K_{hB} é dada por

$$K_{hB} = K^{conv}_{hB} + K^{dd}_{hB},$$

onde K^{conv}_{hB} é associada ao termo convectivo da equação de Euler,

$$\int_{\Omega_e}\Big(\mathbf{W}^h\mathbf{A}_x\frac{\partial\mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{W}^h\mathbf{A}_y\frac{\partial\mathbf{U}^B}{\partial y}\Big)d\Omega$$

e K^{dd}_{hB} é associada ao operador de difusão artificial,

$$\xi_h\int_{\Omega_e}\nabla\mathbf{W}^h\cdot\nabla\mathbf{U}^B d\Omega$$

proveniente do método DD.

Então,

$$\begin{aligned} K^{conv}_{hB} &= \int_{\Omega_e}\Big(\mathbf{N}^T\mathbf{A}_x\mathbf{B}_{bx} + \mathbf{N}^T\mathbf{A}_y\mathbf{B}_{by}\Big)d\Omega \\ &= \int_{\Omega_e}\Big[\mathbf{N}^T\mathbf{A}_x\Big(\frac{\partial N_b}{\partial x}\Big)\mathbf{I}_4 + \mathbf{N}^T\mathbf{A}_y\Big(\frac{\partial N_b}{\partial y}\Big)\mathbf{I}_4\Big]d\Omega \\ &= \int_{\Omega_e}\Big[\Big(\frac{\partial N_b}{\partial x}\Big)\mathbf{N}^T\mathbf{A}_x + \Big(\frac{\partial N_b}{\partial y}\Big)\mathbf{N}^T\mathbf{A}_y\Big]d\Omega \\ &= \Big[\int_{\Omega_e}\Big(\frac{\partial N_b}{\partial x}\Big)\mathbf{N}^T d\Omega\Big]\mathbf{A}_x + \Big[\int_{\Omega_e}\Big(\frac{\partial N_b}{\partial y}\Big)\mathbf{N}^T d\Omega\Big]\mathbf{A}_y, \end{aligned} \tag{4.36}$$

onde

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_b}{\partial x}\right)\mathbf{N}^T d\Omega = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_b}{\partial x}\right) \begin{bmatrix} N_1\mathbf{I}_4 \\ N_2\mathbf{I}_4 \\ N_3\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega = \begin{bmatrix} \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_b}{\partial x} N_1 d\Omega_e\right)\mathbf{I}_4 \\ \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_b}{\partial x} N_2 d\Omega_e\right)\mathbf{I}_4 \\ \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_b}{\partial x} N_3 d\Omega_e\right)\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Resolvendo as integrais da equação (4.37), temos que

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_b}{\partial x}\right)\mathbf{N}^T d\Omega = \frac{9}{40} \begin{bmatrix} (y_{23} + 2y_{31} + 2y_{12})\mathbf{I}_4 \\ (2y_{23} + y_{31} + 2y_{12})\mathbf{I}_4 \\ (2y_{23} + 2y_{31} + y_{12})\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_b}{\partial y}\right)\mathbf{N}^T d\Omega = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_b}{\partial y}\right) \begin{bmatrix} N_1\mathbf{I}_4 \\ N_2\mathbf{I}_4 \\ N_3\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega = \begin{bmatrix} \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_b}{\partial y} N_1 d\Omega\right)\mathbf{I}_4 \\ \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_b}{\partial y} N_2 d\Omega\right)\mathbf{I}_4 \\ \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_b}{\partial y} N_3 d\Omega\right)\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Resolvendo as integrais da equação (4.39), temos que

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_b}{\partial y}\right)\mathbf{N}^T d\Omega_e = \frac{9}{40} \begin{bmatrix} (x_{32} + 2x_{13} + 2x_{21})\mathbf{I}_4 \\ (2x_{32} + x_{13} + 2x_{21})\mathbf{I}_4 \\ (2x_{32} + 2x_{13} + x_{21})\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Substituindo (4.38)-(4.40) em (4.36), resulta em

$$K_{hB}^{conv} = \frac{9}{40} \begin{bmatrix} (y_{23} + 2y_{31} + 2y_{12})\mathbf{A}_x + (x_{32} + 2x_{13} + 2x_{21})\mathbf{A}_y \\ (2y_{23} + y_{31} + 2y_{12})\mathbf{A}_x + (2x_{32} + x_{13} + 2x_{21})\mathbf{A}_y \\ (2y_{23} + 2y_{31} + y_{12})\mathbf{A}_x + (2x_{32} + 2x_{13} + x_{21})\mathbf{A}_y \end{bmatrix}_{12\times 4}. \quad (4.41)$$

A matriz K_{hB}^{dd} é dada por

$$
\begin{aligned}
K_{hB}^{dd} &= \xi_h \int_{\Omega_e} \Big(\mathbf{B}^T \mathbf{B}_B\Big) d\Omega_e \\
&= \xi_h \int_{\Omega_e} \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{I}_4 & x_{32}\mathbf{I}_4 \\ y_{31}\mathbf{I}_4 & x_{13}\mathbf{I}_4 \\ y_{12}\mathbf{I}_4 & x_{21}\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \frac{27}{2A^e} \begin{bmatrix} (y_{23}N_2N_3 + y_{31}N_3N_1 + y_{12}N_1N_2)\mathbf{I}_4 \\ (x_{32}N_3N_2 + x_{13}N_1N_3 + x_{21}N_2N_1)\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} d\Omega_e \\
&= \frac{9\xi_h}{16A^e} \begin{bmatrix} \Big[y_{23}(y_{23}+y_{31}+y_{12}) + x_{32}(x_{32}+x_{13}+x_{21})\Big]\mathbf{I}_4 \\ \Big[y_{31}(y_{23}+y_{31}+y_{12}) + x_{13}(x_{32}+x_{13}+x_{21})\Big]\mathbf{I}_4 \\ \Big[y_{12}(y_{23}+y_{31}+y_{12}) + x_{21}(x_{32}+x_{13}+x_{21})\Big]\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \\
&= O_{12\times 4}.
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

De fato,

$$
y_{23} + y_{31} + y_{12} = x_{32} + x_{13} + x_{21} = 0.
$$

Isso significa que o termo

$$
\xi_h \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{W}^h \cdot \nabla \mathbf{U}^B d\Omega
$$

associado ao método DD é nulo.

4.2.6 Matriz de rigidez K_{Bh} do método DD

A matriz K_{Bh} é dada por

$$
K_{Bh} = K_{Bh}^{conv} + K_{Bh}^{dd},
$$

onde K_{Bh}^{conv} é associada ao termo convectivo da equação de Euler,

$$
\int_{\Omega_e} \Big(\mathbf{W}^B \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{W}^B \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y}\Big) d\Omega
$$

e K_{Bh}^{dd} é associada ao operador de difusão artificial,

$$
\xi_h \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{W}^B \cdot \nabla \mathbf{U}^h d\Omega
$$

proveniente do método DD.

Então,

$$\begin{aligned}
K_{Bh}^{conv} &= \int_{\Omega_e} \Big(\mathbf{N}_B\mathbf{A}_x\mathbf{B}_x + \mathbf{N}_B\mathbf{A}_y\mathbf{B}_y\Big)d\Omega_e \\
&= \Big[\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B d\Omega\Big]\mathbf{A}_x\mathbf{B}_x + \Big[\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B d\Omega_e\Big]\mathbf{A}_y\mathbf{B}_y, \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

onde

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B d\Omega_e = \Big(27\int_{\Omega_e} N_1N_2N_3 d\Omega_e\Big)\mathbf{I}_4 = \frac{9A^e}{20}\mathbf{I}_4. \qquad (4.44)$$

Substituindo (4.44) em (4.43), obtemos

$$K_{Bh}^{dd} = \frac{9}{40}\Big[y_{23}\mathbf{A}_x + x_{32}\mathbf{A}_y \quad y_{31}\mathbf{A}_x + x_{13}\mathbf{A}_y \quad y_{12}\mathbf{A}_x + x_{21}\mathbf{A}_y\Big]_{4\times 12}. \qquad (4.45)$$

A matriz K_{Bh}^{dd} é dada por

$$\begin{aligned}
K_{Bh}^{dd} &= \xi_h \int_{\Omega_e} \Big(\mathbf{B}_B^T\mathbf{B}\Big)d\Omega_e \\
&= \frac{9\xi_h}{16A^e}\begin{bmatrix}
\Big[y_{23}(y_{23}+y_{31}+y_{12}) + x_{32}(x_{32}+x_{13}+x_{21})\Big]\mathbf{I}_4 \\
\Big[y_{31}(y_{23}+y_{31}+y_{12}) + x_{13}(x_{32}+x_{13}+x_{21})\Big]\mathbf{I}_4 \\
\Big[y_{12}(y_{23}+y_{31}+y_{12}) + x_{21}(x_{32}+x_{13}+x_{21})\Big]\mathbf{I}_4
\end{bmatrix}^T \\
&= O_{12\times 4}^T = O_{4\times 12}. \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

De fato,

$$y_{23} + y_{31} + y_{12} = x_{32} + x_{13} + x_{21} = 0.$$

Isso significa que o termo

$$\xi_h \int_{\Omega_e} \nabla\mathbf{W}^B \cdot \nabla\mathbf{U}^h d\Omega$$

associado ao método DD é nulo.

4.2.7 Matriz de rigidez K_{BB} do método DD

A matriz K_{BB} é dada por

$$K_{BB} = K_{BB}^{conv} + K_{BB}^{dd},$$

onde K^{conv}_{BB} é associada ao termo convectivo da equação de Euler,

$$\int_{\Omega_e}\Big(\mathbf{W}^B\mathbf{A}_x\frac{\partial\mathbf{U}^B}{\partial x}+\mathbf{W}^B\mathbf{A}_y\frac{\partial\mathbf{U}^B}{\partial y}\Big)d\Omega$$

e K^{dd}_{BB} é associada ao operador de difusão artificial,

$$\xi_h\int_{\Omega_e}\nabla\mathbf{W}^B\cdot\nabla\mathbf{U}^B d\Omega$$

proveniente do método DD.

Então,

$$\begin{aligned}
K^{conv}_{BB} &= \int_{\Omega_e}\Big(\mathbf{N}_B\mathbf{A}_x\mathbf{B}_{bx}+\mathbf{N}_B\mathbf{A}_y\mathbf{B}_{by}\Big)d\Omega_e\\
&= \frac{27}{2A^e}\int_{\Omega_e}\Big(N_b(y_{23}N_2N_3+y_{31}N_3N_1+y_{12}N_1N_2)\mathbf{A}_x \qquad (4.47)\\
&+ N_b(x_{32}N_3N_2+x_{13}N_1N_3+x_{21}N_2N_1)\mathbf{A}_y\Big)d\Omega_e,
\end{aligned}$$

onde

$$\int_{\Omega_e}N_bN_1N_2d\Omega_e=\int_{\Omega_e}N_bN_1N_3d\Omega_e=\int_{\Omega_e}N_bN_2N_3d\Omega_e=\frac{27A^e}{630}. \qquad (4.48)$$

Substituindo (4.48) em (4.47), obtemos

$$\begin{aligned}
K^{conv}_{BB} &= \frac{81}{140}\Big[(y_{23}+y_{31}+y_{12})\mathbf{A}_x+(x_{32}+x_{13}+x_{21})\mathbf{A}_y\Big]\\
&= O_{4\times 4}. \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

De fato,

$$y_{23}+y_{31}+y_{12}=x_{32}+x_{13}+x_{21}=0.$$

Isso significa que o termo convectivo

$$\int_{\Omega_e}\Big(\mathbf{W}^B\mathbf{A}_x\frac{\partial\mathbf{U}^B}{\partial x}+\mathbf{W}^B\mathbf{A}_y\frac{\partial\mathbf{U}^B}{\partial y}\Big)d\Omega$$

é nulo.

A matriz K_{BB}^{dd}, proveniente do operador submalha do método DD é dada por

$$\begin{aligned} K_{BB}^{dd} &= \xi_h \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_B^T \mathbf{B}_B d\Omega_e \\ &= \xi_h \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{bx}^2 d\Omega + \xi_h \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{by}^2 d\Omega, \end{aligned} \tag{4.50}$$

onde

$$\xi_h \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{bx}^2 d\Omega_e = \frac{81\xi_h}{40A^e}(y_{23}^2 + y_{31}^2 + y_{12}^2 + y_{23}y_{31} + y_{23}y_{12} + y_{31}y_{12})\mathbf{I}_4 \tag{4.51}$$

e

$$\xi_h \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{by}^2 d\Omega_e = \frac{81\xi_h}{40A^e}(x_{32}^2 + x_{13}^2 + x_{21}^2 + x_{32}x_{13} + x_{32}x_{21} + x_{13}x_{21})\mathbf{I}_4. \tag{4.52}$$

Portanto,

$$K_{BB} = r\mathbf{I}_4, \tag{4.53}$$

onde

$$\begin{aligned} r = \; & \frac{81\xi_h}{40A^e}\Big[y_{23}^2 + y_{31}^2 + y_{12}^2 + y_{23}y_{31} + y_{23}y_{12} + y_{31}y_{12} \\ & +x_{32}^2 + x_{13}^2 + x_{21}^2 + x_{32}x_{13} + x_{32}x_{21} + x_{13}x_{21}\Big] > 0, \quad \text{se } \xi_h > 0. \end{aligned}$$

No próximo capítulo serão apresentados os resultados numéricos considerando três exemplos na análise de escoamento com gradientes elevados regidos pela equação de Euler: Choque Normal Unidimensional, Choque Oblíquo Bidimensional e Choque Refletido Bidimensional.

Capítulo 5

Experimentos Numéricos

Neste capítulo são apresentados os experimentos numéricos considerando três exemplos de escoamentos regidos pelas equações de Euler: choque normal unidimensional, choque oblíquo bidimensional e choque refletido bidimensional. Os resultados obtidos utilizando o método de estabilização difusão dinâmica, considerando que as escalas submalhas sejam estáticas e transientes, são comparados com as respectivas soluções analíticas e com as soluções obtidas pelas formulações estabilizadas SUPG/CAU e SUPG/YZβ. Para facilitar a leitura do texto, neste capítulo o método difusão dinâmica usando escalas submalhas transientes é chamado simplesmente de difusão dinâmica transiente (ou DD Transiente), enquanto que para escalas submalhas estáticas o método é chamado de difusão dinâmica estática (ou DD Estático).

Em todos os exemplos são considerados gases compressíveis com expoente adiabático ($\gamma = 1.4$ e $c_v = 716.5$). No algoritmo de avanço no tempo o número de multicorreções foi fixado em 3, o número de vetores para o *restart* do método GMRES adotado é igual a 5 e a tolerância fixada em 10^{-1}. Os testes foram realizados numa máquina com processador Intel Core2 Duo 2.10 GHz com 4GB de memória RAM e sistema operacional Windows Vista Home Basic.

5.1 Choque Normal Unidimensional

Este problema consiste de um escoamento através de duas regiões separadas por um choque normal. A velocidade inicial do escoamento apresenta uma descontinuidade, que é propagada para o domínio temporal. Considera-se uma malha com 39×2 células, sendo 2 elementos triangulares em cada célula, totalizando 120 nós e 156 elementos, distribuídos no domínio retangular $\Omega =]0, 39[\times] - 0.5, 0.5[$, conforme Fig. 5.1. A massa específica, a temperatura e os campos de velocidades são considerados prescritos na entrada do escoamento e a temperatura na saída. O choque ocorre em $x = 20$ e as condições iniciais, em um sistema de unidades compatível, são dadas por:

$$x < 20 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} M & = & 2.0; \\ \rho & = & 1.0; \\ v_1 & = & 1.0; \\ v_2 & = & 0.0; \\ p & = & 0.17857, \end{array} \right. \qquad x > 20 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} M & = & 0.57735; \\ \rho & = & 2.66667; \\ v_1 & = & 0.37500; \\ v_2 & = & 0.0; \\ p & = & 0.80357, \end{array} \right.$$

onde M é o número de Mach e p é a pressão.

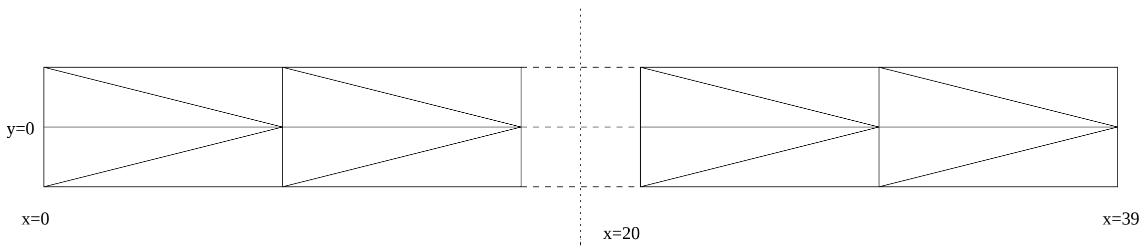
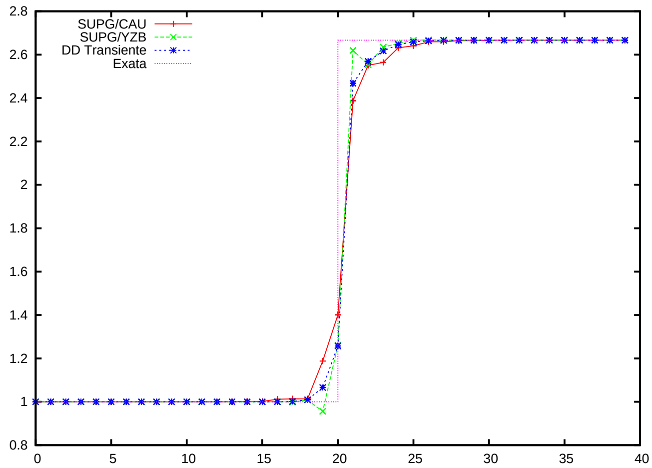
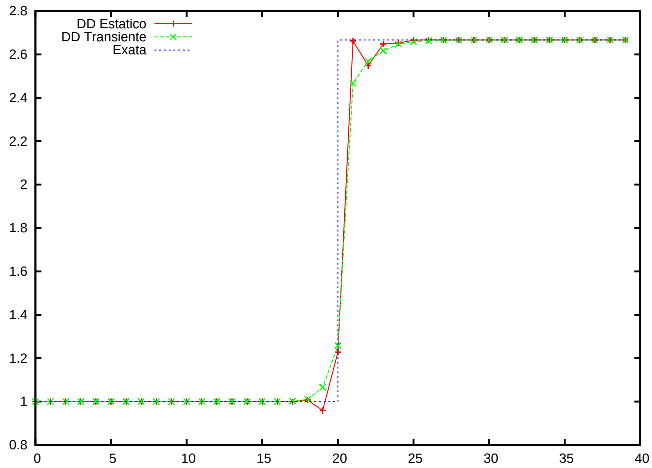


Figura 5.1: Formato da Malha – Choque Normal Unidimensional.

A Fig. 5.2(a) mostra os perfis de massa específica da solução exata e das soluções numéricas obtidas pelos métodos SUPG/CAU, SUPG/YZβ e Difusão Dinâmica Transiente. Considerando $\Delta t = 10^{-2}$ em todas as formulações, observa-se que a solução obtida pelo método DD Transiente está mais próxima da solução exata do que a obtida pela formulação SUPG/CAU. O método SUPG/YZβ apresenta oscilações na região do choque. A Fig. 5.2(b) compara as soluções obtidas pelos métodos DD Transiente e DD Estático após 300 passos de tempo. Assim como o método SUPG/YZβ, o método DD Estático apresenta um comportamento oscilatório próximo ao choque. As Figs.



(a) Massa específica dos métodos SUPG/CAU, SUPG/YZβ e DD Transiente

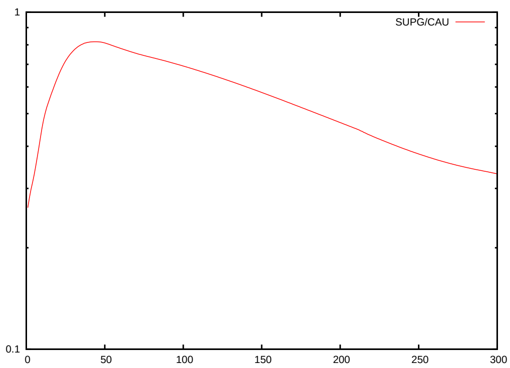


(b) Massa específica dos métodos DD Estático e DD Transiente

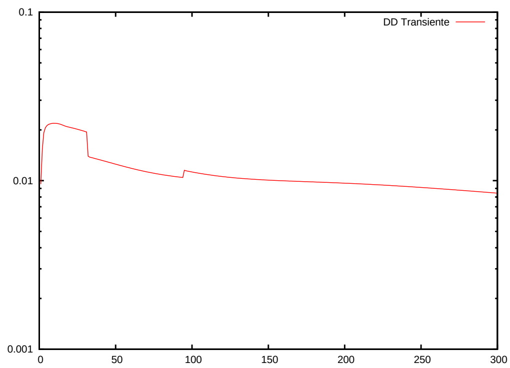
Figura 5.2: Choque normal unidimensional – Comparativo dos perfis de massa específica das formulações numéricas

5.3(a) e 5.3(b) mostram, respectivamente, o comportamento dos resíduos das formulações SUPG/CAU e DD Transiente. Ambos decaem à medida que o tempo avança, porém, a magnitude do resíduo do método SUPG/CAU é maior do que a do método DD Transiente. Ao analisar o resíduo dos métodos SUPG/YZβ e DD Estático, Figuras 5.3(c) e 5.3(d), ao contrário do comportamento dos métodos anteriores, observa-se um crescimento dos resíduos nos últimos 150 passos.

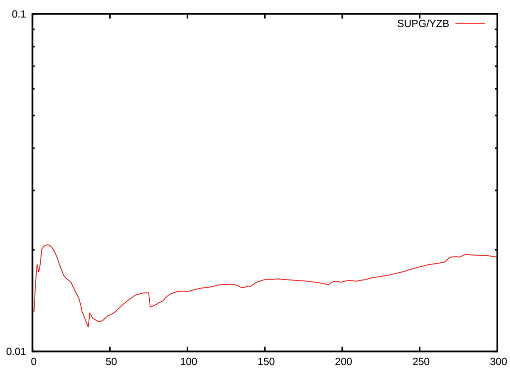
A Tabela 5.1 apresenta o desempenho computacional das implementações realizadas. O método DD Transiente foi cerca de 50% mais rápido para solucionar o sistema de equações que todos os demais métodos, realizando 1174 iterações GMRES a menos do que o método SUPG/CAU e 1782 iterações a menos do que o método SUPG/YZβ. Entretanto, na montagem das matrizes, onde se encontra o maior esforço computacional, o tempo obtido pelo método DD é um pouco mais elevado.



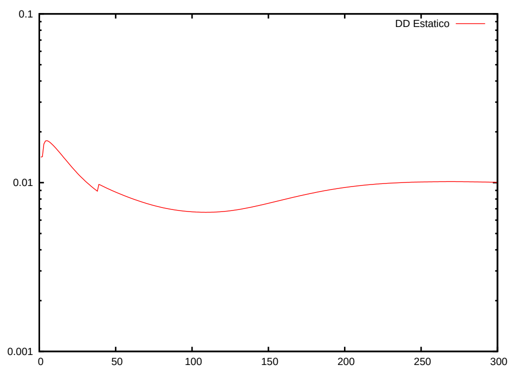
(a) Resíduo da massa específica do método SUPG/CAU



(b) Resíduo da massa específica do método DD Transiente



(c) Resíduo da massa específica do método SUPG/YZβ



(d) Resíduo da massa específica do método DD Estático

Figura 5.3: Choque normal unidimensional – Resíduos da massa específica das formulações numéricas

Tabela 5.1: Choque normal unidimensional – Desempenho computacional.

Método	$Iter_{GMRES}$	$Tempo_{CPU}$ (s)		
		Montagem das matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	2199	24.342	1.025	27.253
SUPG/YZβ	2807	25.857	1.193	28.751
DD Estático	2444	27.908	1.163	30.877
DD Transiente	1025	28.716	0.592	31.215

5.2 Choque Oblíquo Bidimensional

Este problema consiste em um escoamento bidimensional supersônico – número de Mach $M = 2$ – de um fluido invíscido sobre uma cunha, fazendo um ângulo de $-10°$ em relação à malha, conforme mostrado na Fig. 5.4. Pode-se determinar analiticamente a formação de um choque oblíquo a $29.3°$ com a parede. O domínio $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ considerado é discretizado em 20×20 células com dois elementos triangulares em cada célula, totalizando 441 nós e 800 elementos. Considerando um sistema de unidades compatível, as condições de contorno prescritas na entrada e no topo de Ω são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} M &=& 2.0; \\ \rho &=& 1.0; \\ v_1 &=& \cos 10°; \\ v_2 &=& -\sin 10°; \\ p &=& 0.17857. \end{array} \right.$$

Além disso, a velocidade v_2 é nula na parede inferior, não sendo imposta nenhuma condição na saída. As condições iniciais são consideradas como de escoamento livre. A solução exata na saída abaixo do choque é dada por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} M &=& 1.64052; \\ \rho &=& 1.45843; \\ v_1 &=& 0.88731; \\ v_2 &=& 0; \\ p &=& 0.30475. \end{array} \right.$$

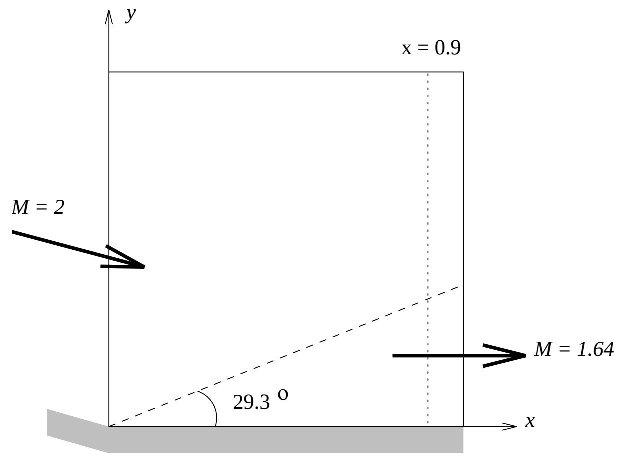
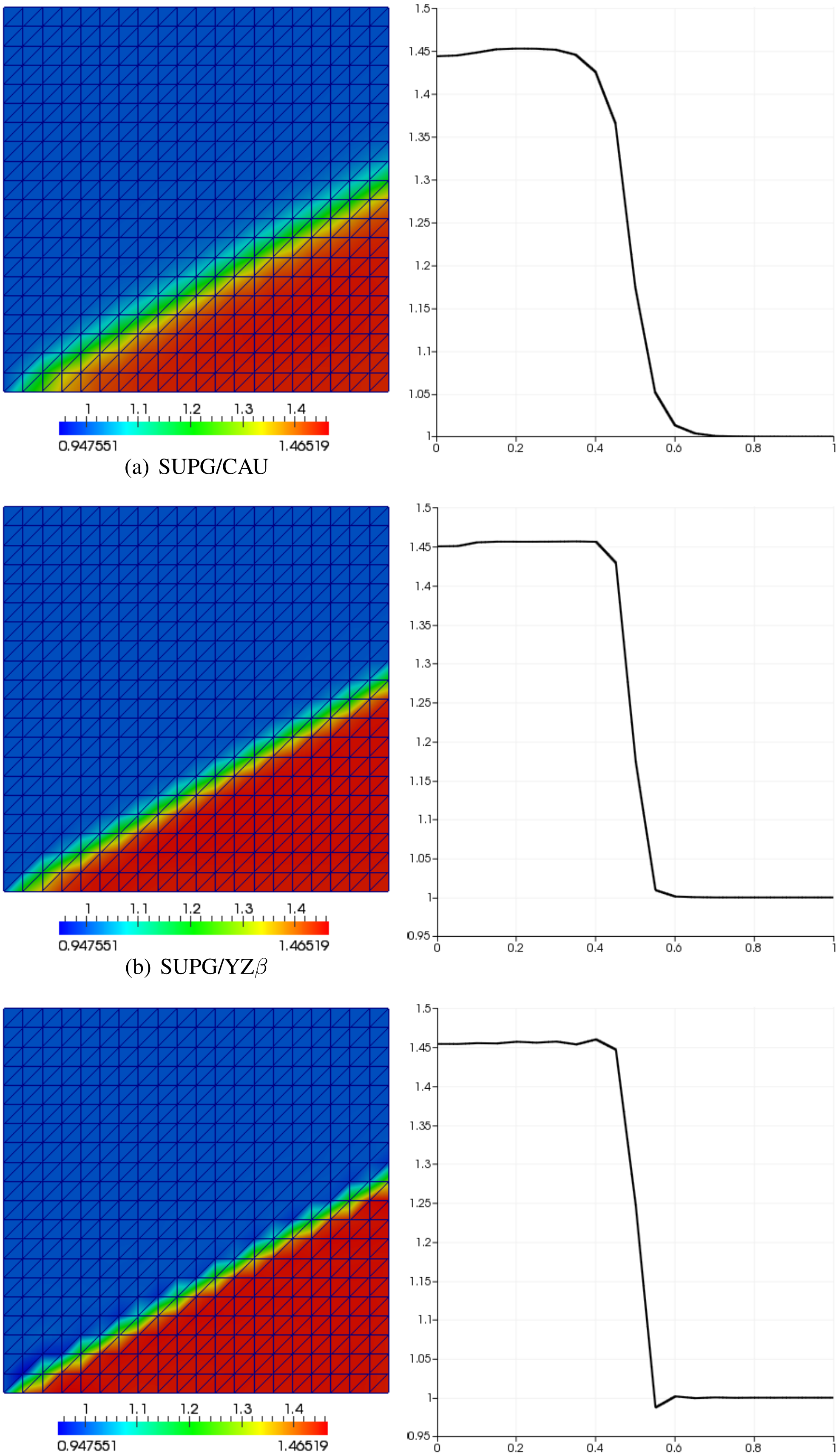


Figura 5.4: Esquema do problema - Choque bidimensional oblíquo.

A Fig. 5.5 apresenta as isocurvas e perfis da massa específica para as formulações SUPG/CAU (a), SUPG/YZβ (b) e DD Transiente (c), usando uma malha 20×20 e $\Delta t = 10^{-3}$. Observa-se que o método Difusão Dinâmica Transiente apresenta uma solução menos difusiva na região do choque. A Fig. 5.6 apresenta as isocurvas e perfis da massa específica dos métodos em malhas não estruturadas com 507 nós e 932 elementos e a Fig. 5.7 em malhas não estruturadas com 2560 nós e 4996 elementos, sendo bastante refinada na região do choque. Para as malhas não estruturadas pode-se observar oscilações obtidas pelo método DD Transiente em regiões de alto gradiente.

As Figs. 5.8, 5.9 e 5.10 mostram os perfis de massa específica no ponto $x = 0.9$ para todas as formulações, considerando três malhas (10×10, 16×16 e 20×20) com respectivos passos de tempo. As soluções obtidas com o método DD Transiente representam melhor o choque do que àquelas obtidas pelos métodos SUPG/CAU e SUPG/YZβ. Pode-se observar que, em geral, as soluções DD Transiente e SUPG/YZβ são próximas, porém a solução DD Transiente é ligeramente mais precisa. A representação do choque oblíquo pelo método DD Estático não foi satisfatória e teve um comportamento mais difusivo a medida em que o passo de tempo diminuia.

O método DD Transiente apresentou um comportamento condicionalmente estável, o que pode justificar as oscilações ocorridas na região do choque para malhas não estruturadas (Figs. 5.6 e 5.7). A dependência do método em relação ao parâmetro Δt é mostrada na Fig. 5.11, usando uma malha 20×20. Note que a solução aproximada oscila na região do choque quando $\Delta t = 10^{-2}$. Para $\Delta t = 10^{-3}$ ou $\Delta t = 10^{-4}$, o comportamento da solução é praticamente o mesmo, apresentando apenas uma pequena oscilação na parte inferior

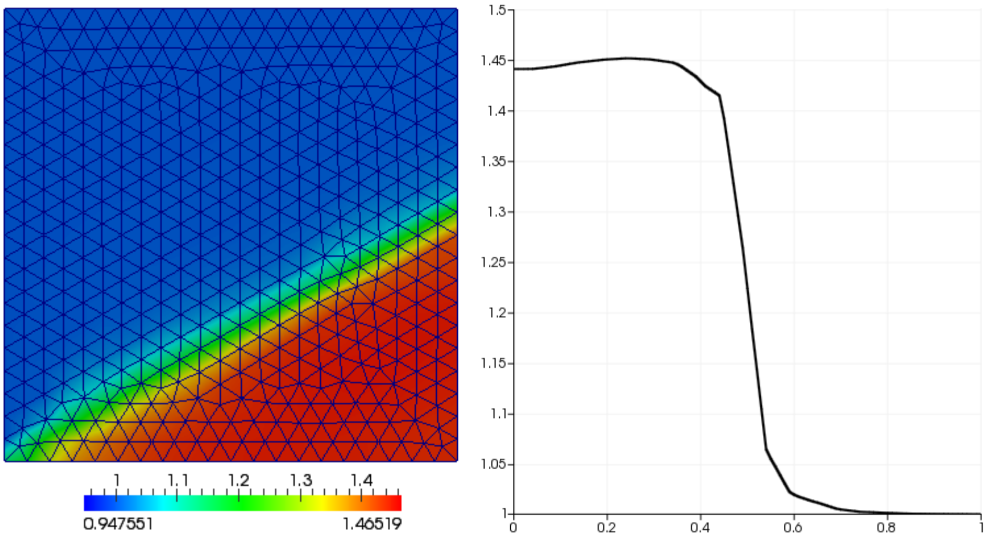


(a) SUPG/CAU

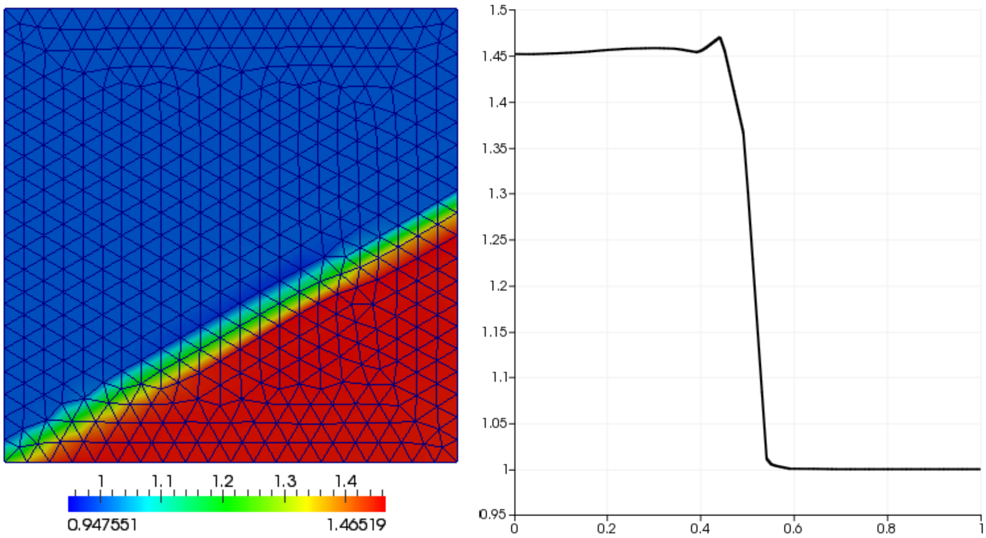
(b) SUPG/YZβ

(c) DD Transiente

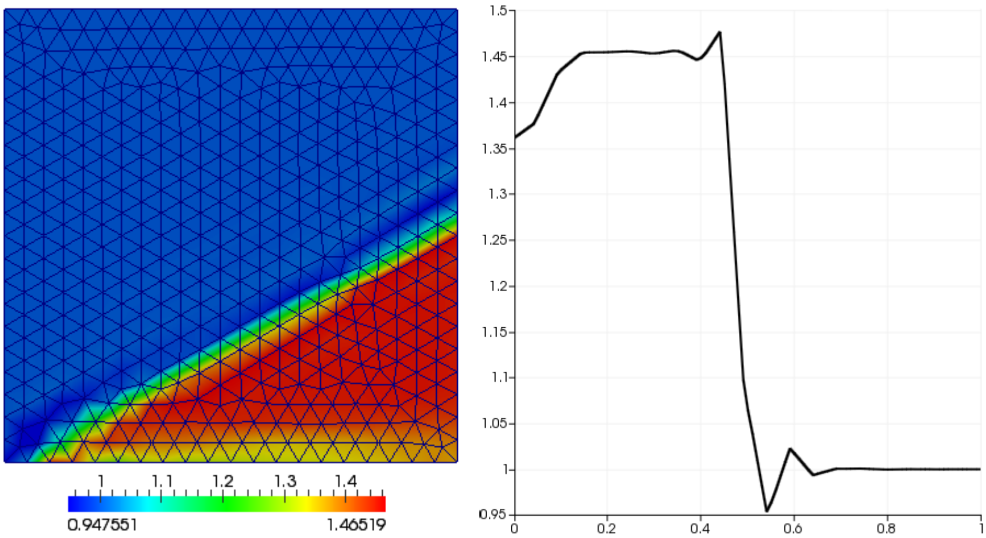
Figura 5.5: Choque oblíquo bidimensional – Isocurvas e perfis da massa específica – malha 20×20 e $\Delta t = 10^{-3}$.



(a) SUPG/CAU

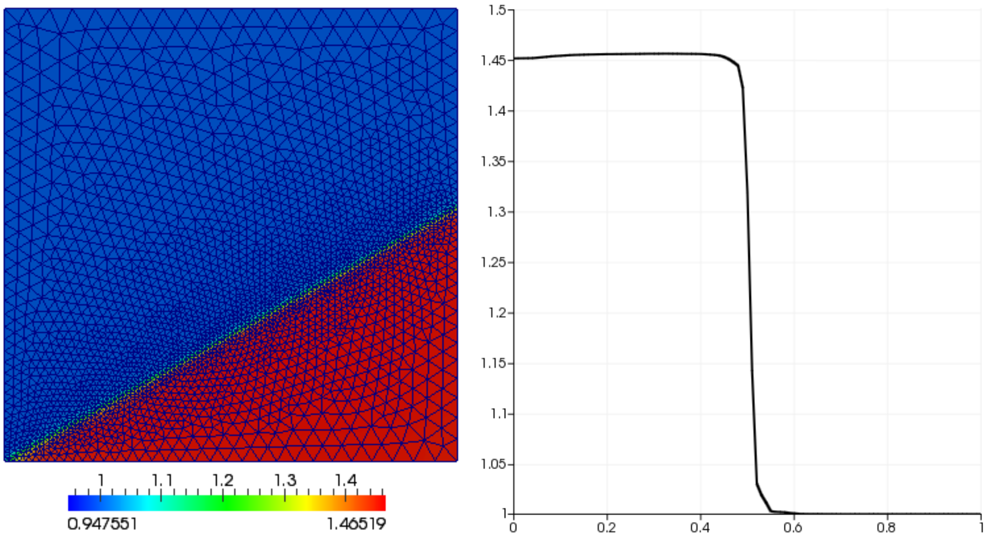


(b) SUPG/YZβ

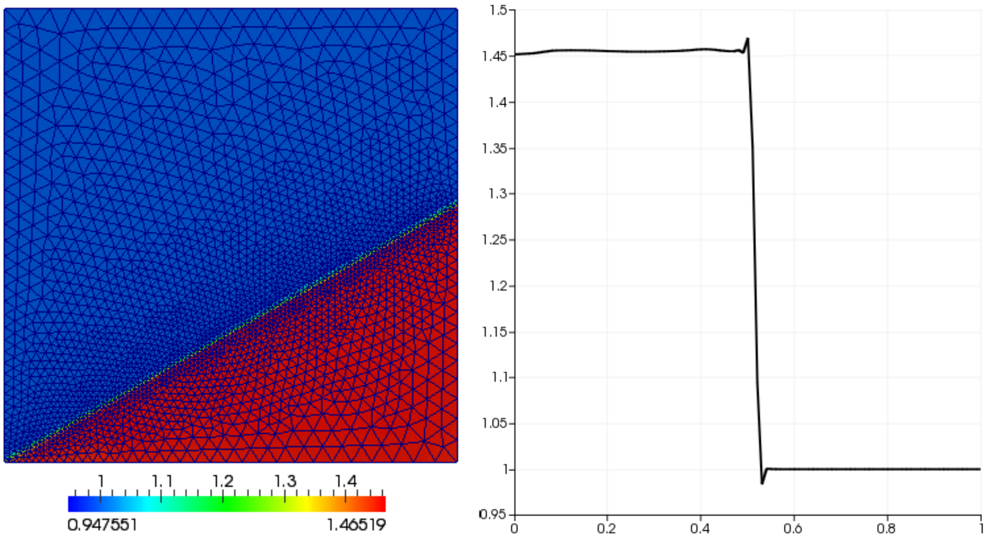


(c) DD Transiente

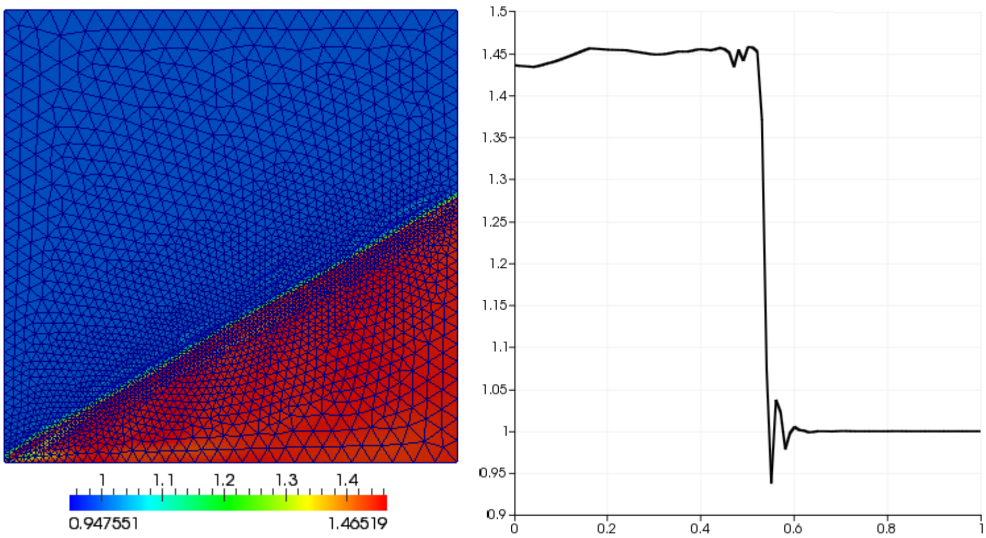
Figura 5.6: Choque oblíquo bidimensional – Isocurvas e perfis da massa específica para malhas não estruturadas sem refinamento e $\Delta t = 10^{-3}$.



(a) SUPG/CAU

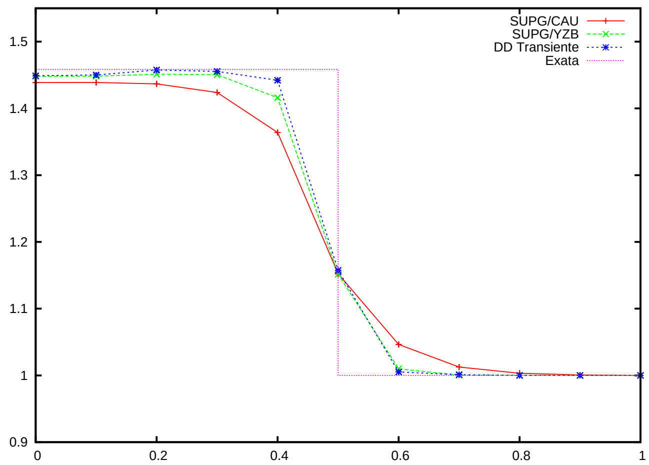


(b) SUPG/YZβ

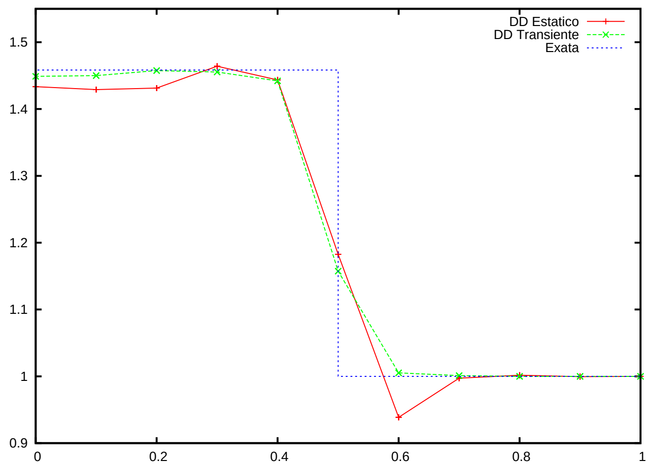


(c) DD Transiente

Figura 5.7: Choque oblíquo bidimensional – Isocurvas e perfis da massa específica para malhas não estruturadas refinadas na região do choque e $\Delta t = 10^{-3}$.

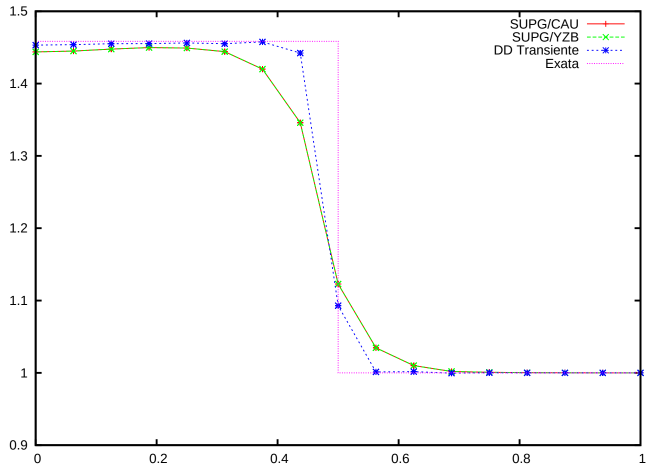


(a) Massa Específica dos métodos SUPG/CAU, SUPG/YZβ e DD Transiente

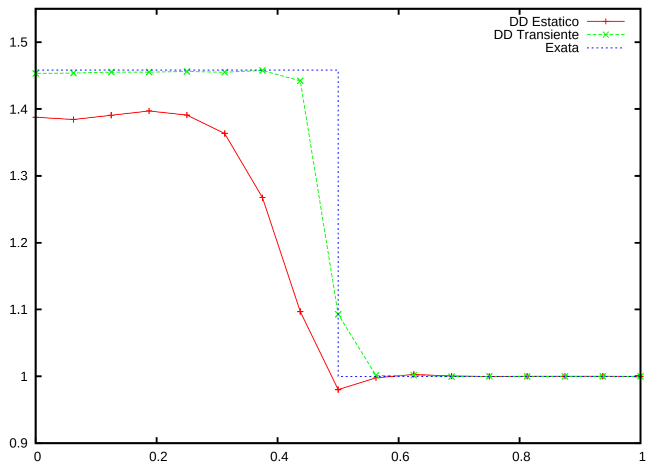


(b) Massa Específica dos métodos DD Estático e DD Transiente

Figura 5.8: Choque oblíquo bidimensional – Comparativo dos perfis de massa específica das formulações numéricas – malha 10×10 e $\Delta t = 10^{-2}$

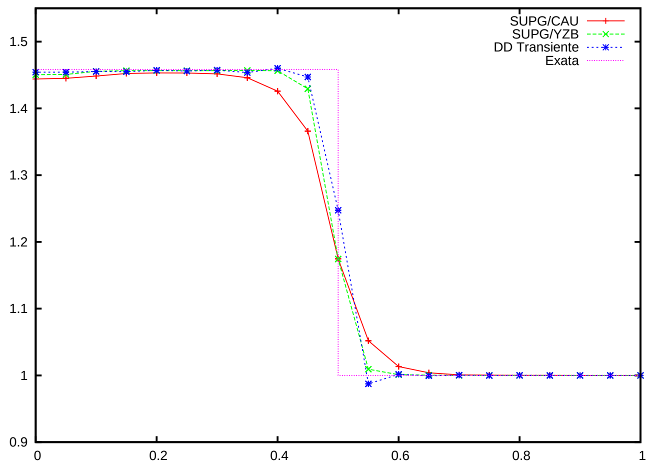


(a) Massa específica dos métodos SUPG/CAU, SUPG/YZβ e DD Transiente

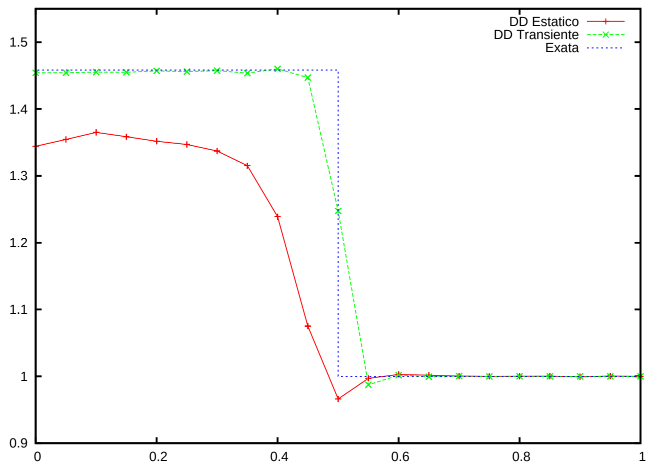


(b) Massa específica dos métodos DD Estático e DD Transiente

Figura 5.9: Choque oblíquo bidimensional – Comparativo dos perfis de massa específica das formulações numéricas – malha 16×16 e $\Delta t = 10^{-3}$



(a) Massa específica dos métodos SUPG/CAU, SUPG/YZβ e DD Transiente



(b) Massa específica dos métodos DD Estático e DD Transiente

Figura 5.10: Choque oblíquo bidimensional – Comparativo dos perfis de massa específica das formulações numéricas – malha 20×20 e $\Delta t = 10^{-3}$

do choque. A melhor solução é obtida quando $\Delta t = 10^{-5}$.

A Fig. 5.12 mostra que o resíduo do método DD Transiente, 5.12(b), diminui com maior rapidez do que os resíduos das metodologias SUPG/CAU, 5.12(a), e SUPG/YZβ, 5.12(c), além de apresentar uma magnitude consideravelmente menor. O comportamento variável do resíduo do método DD Estático, cuja solução numérica mostrou-se extremamente difusiva, indica que o método não convergiu.

O tempo de processamento e o número de iterações dos métodos analisados são mostrados na Tabela 5.2. Na resolução dos sistemas lineares, o método DD Transiente executou menos de um terço do número de iterações GMRES obtido pelo método SUPG/CAU e 15179 iterações a menos que o método SUPG/YZβ. No entanto, o maior esforço computacional do método DD encontra-se na estrutura utilizada para montagem das matrizes, tornando o tempo total de processamento deste método maior em relação ao tempo obtido pelo SUPG/CAU. O método SUPG/YZβ se mostrou ainda mais custoso que o DD Transiente na montagem das matrizes do sistema. O resultado obtido pelo DD Estático demonstra a inviabilidade do método neste exemplo.

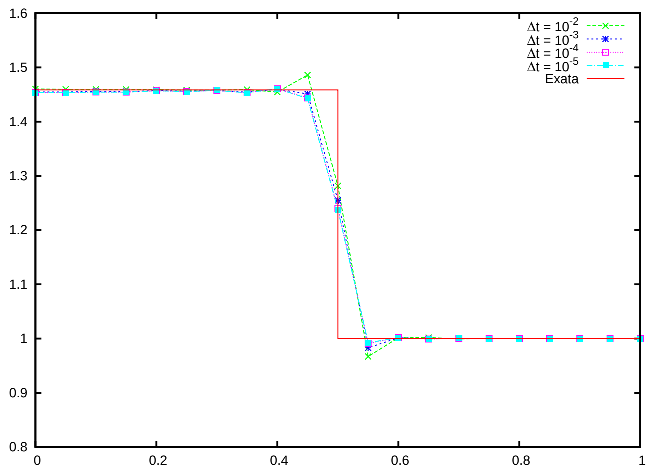
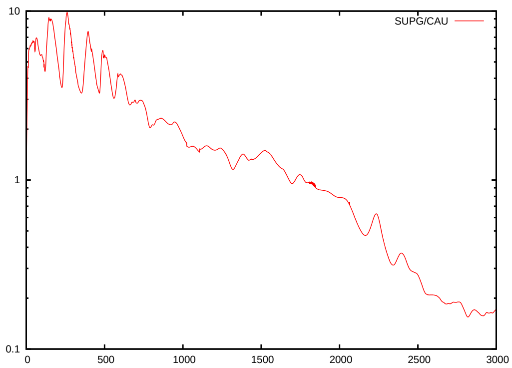


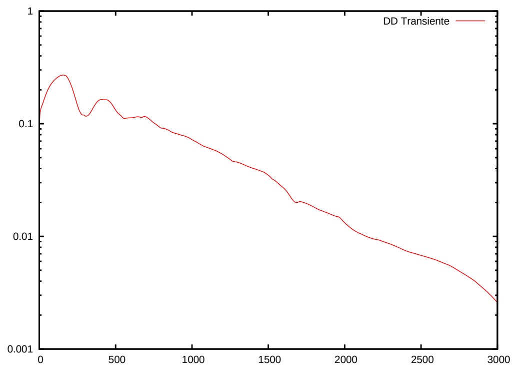
Figura 5.11: Choque oblíquo bidimensional – Perfis de massa específica do método DD Transiente – malha 20×20.

Tabela 5.2: Desempenho Computacional – malha 20×20 – Choque Oblíquo Bidimensional.

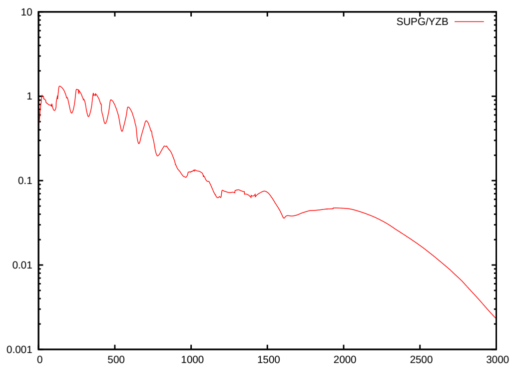
Método	$Iter_{GMRES}$	$Tempo_{CPU}$ (s)		
		Montagem das Matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	30389	1161.509	64.252	1268.125
SUPG/YZβ	24185	1455.933	62.292	1556.114
DD Estático	389136	1465.959	829.497	2345.703
DD Transiente	9006	1383.513	29.948	1456.456



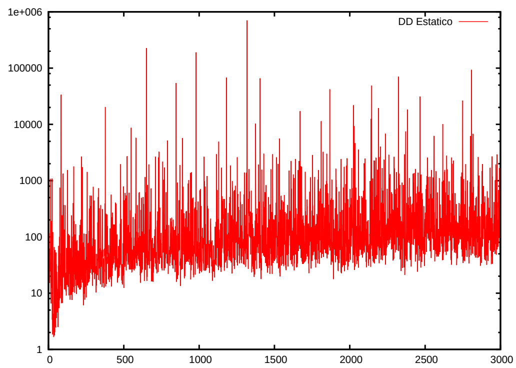
(a) Método SUPG/CAU



(b) Método DD Transiente



(c) Método SUPG/YZβ



(d) Método DD Estático

Figura 5.12: Choque oblíquo Bidimensional – Resíduos da massa específica das formulações numéricas – malha 20×20 e $\Delta t = 10^{-3}$

5.3 Choque Refletido Bidimensional

Este problema consiste de três regiões de escoamento separadas por um choque oblíquo e sua reflexão ao longo de uma parede, conforme Fig. 5.13. O domínio $\Omega =]0, 4.1[\times]0, 1[$ é particionado em 60×20 células com 2 elementos triangulares em cada célula, totalizando 1281 nós e 2400 elementos. Condições de contorno de Dirichlet para massa específica, velocidade e pressão são prescritas no contorno de entrada e no topo de Ω. Não são impostas condições de contorno na fronteira à direita do domínio. Na fronteira inferior, a componente horizontal do campo de velocidades é prescrita com valor nulo, ou seja, $v_1 = 0$. As condições iniciais são de escoamento livre. Considerando um sistema de unidades compatível, os dados na entrada do domínio (parede à esquerda - região 1) são

$$\text{Região 1:} \quad \begin{cases} M &= 2.9; \\ \rho &= 1.0; \\ v_1 &= 2.9; \\ v_2 &= 0.0; \\ p &= 0.714286. \end{cases}$$

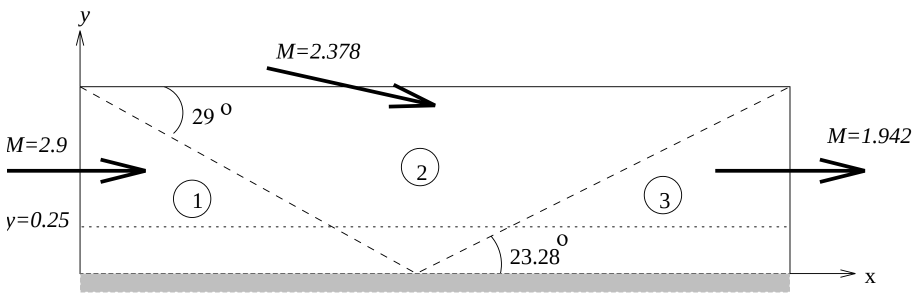


Figura 5.13: Esquema do problema - Choque refletido bidimensional.

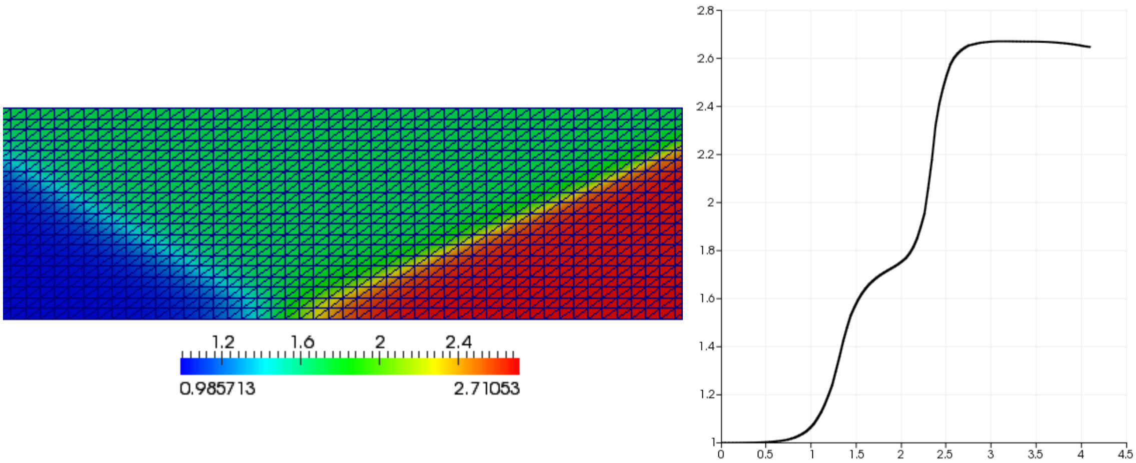
Considerando que a incidência do choque faz um ângulo de $29°$, as soluções exatas nas regiões 2 e 3 são dadas por:

$$\text{Região 2:} \begin{cases} M &= 2.3781; \\ \rho &= 1.7; \\ v_1 &= 2.61934; \\ v_2 &= 0.50632; \\ p &= 1.52819 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{Região 3:} \begin{cases} M &= 1.94235; \\ \rho &= 2.68728; \\ v_1 &= 2.40140; \\ v_2 &= 0.0; \\ p &= 2.93407. \end{cases}$$

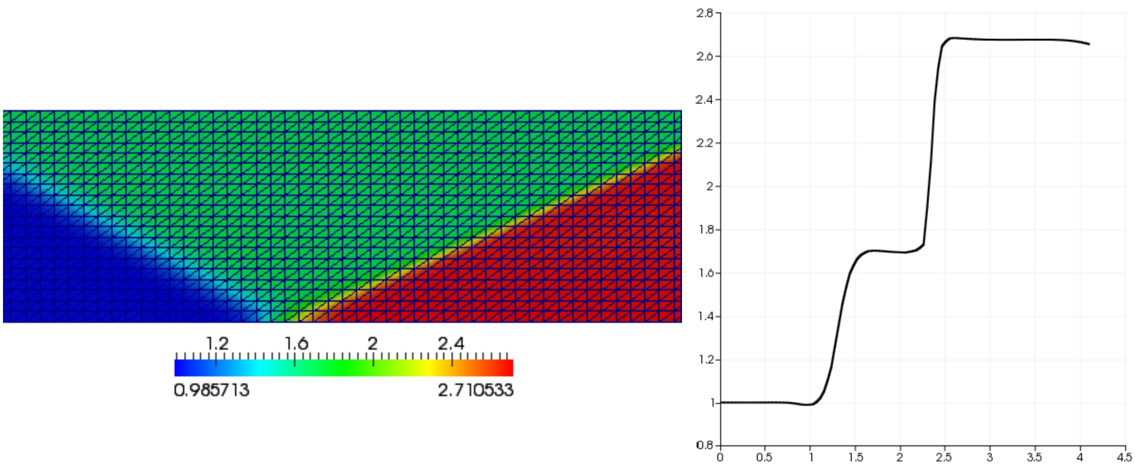
A Fig. 5.14 apresenta as isocurvas e perfis da massa específica, considerando uma malha 60×20 e $\Delta t = 10^{-3}$. Observa-se que a solução obtida pelo método DD Transiente é mais precisa do que àquela obtida pelos métodos SUPG/CAU e SUPG/YZβ. A Fig. 5.15 apresenta as isocurvas e perfis da massa específica dos métodos em malhas não estruturadas com 536 nós e 968 elementos, onde observa-se uma boa precisão da solução obtida pelo método DD Transiente. As Figs. 5.16(a) e 5.16(b) exibem os perfis de massa específica para as formulações avaliadas, usando uma malha 60×20 e $\Delta t = 10^{-3}$. Podemos observar que a solução obtida pelo método DD Transiente representa melhor o choque. A Fig. 5.17 mostra a dependência do método DD em relação ao tamanho do passo de tempo Δt. Quando $\Delta t = 10^{-2}$, pequenas oscilações aparecem nas regiões dos choques. Soluções melhores são obtidas quando $\Delta t = 10^{-3}$ ou $\Delta t = 10^{-4}$.

O comportamento dos resíduos é mostrado na Fig. 5.18. Podemos observar que, exceto para o DD Estático, o resíduo dos métodos decaem com o tempo, diferenciando somente na magnitude dos mesmos. O método DD Estático obteve, além de uma solução difusiva, um comportamento crescente e variável do resíduo, indicando que o mesmo não convergiu.

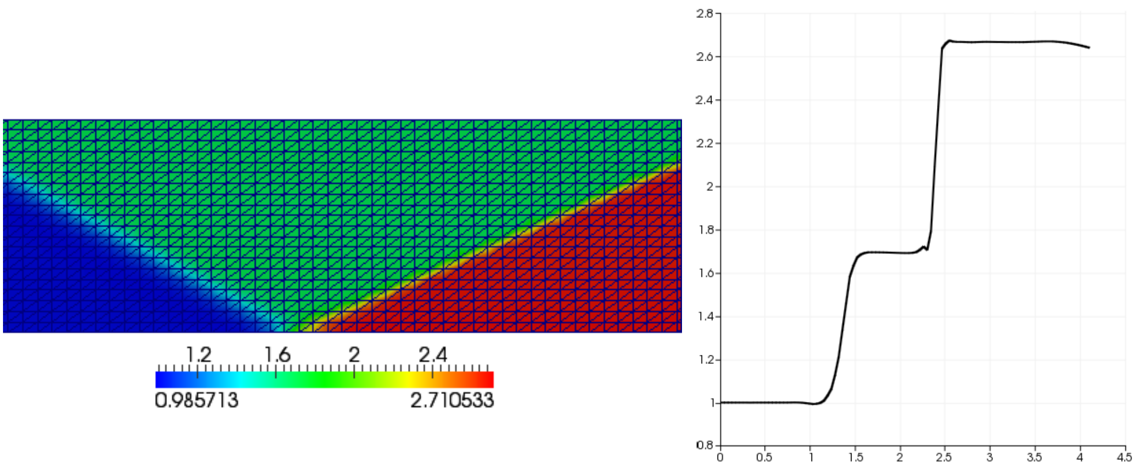
A Tabela 5.3 mostra que o método SUPG/CAU executou quase quatro vezes mais iterações GMRES, na solução dos sistemas lineares, do que o método DD Transiente. No entanto, devido ao custo computacional necessário na montagem das matrizes, o método DD necessitou de maior tempo computacional, quando comparado ao SUPG/CAU, contudo não mais que o método SUPG/YZβ. O método DD Estático mostrou-se novamente inviável para o problema considerado.



(a) SUPG/CAU

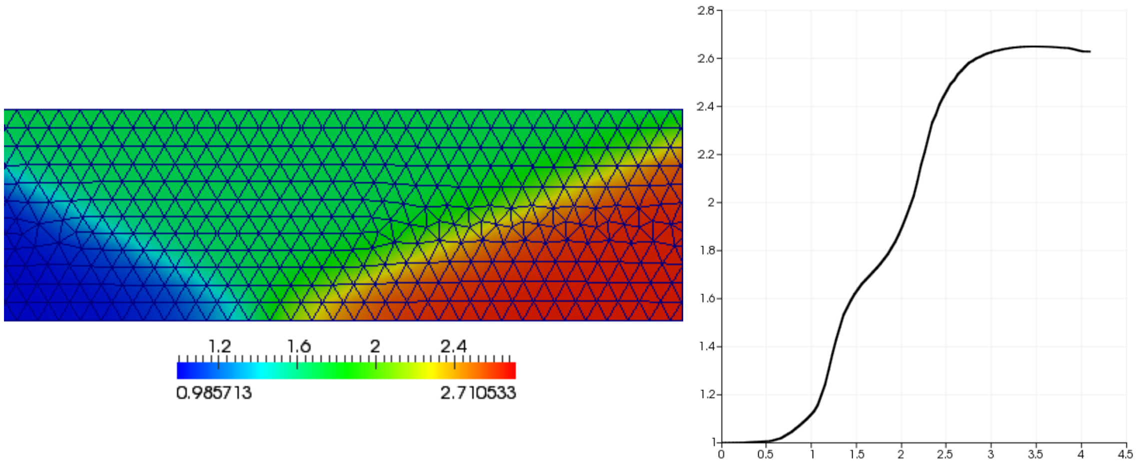


(b) SUPG/YZβ

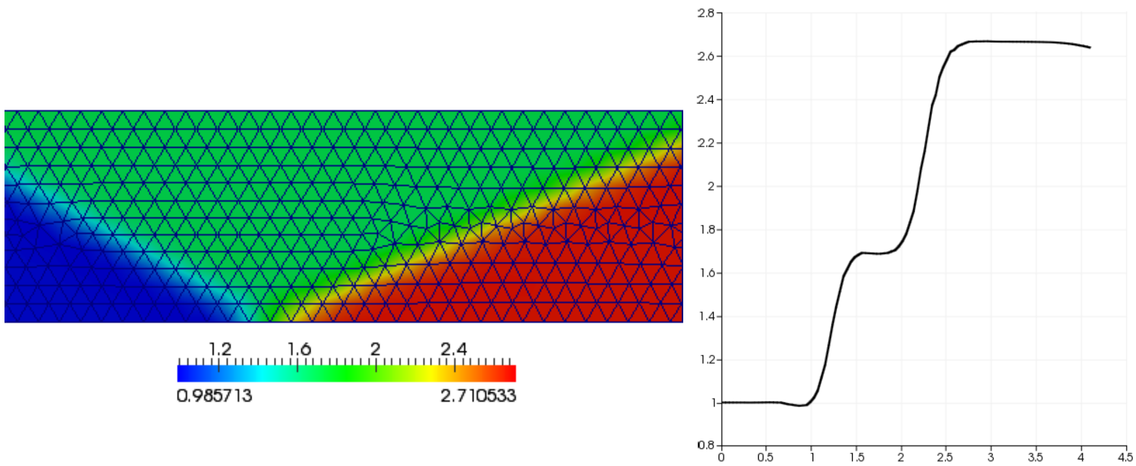


(c) DD Transiente

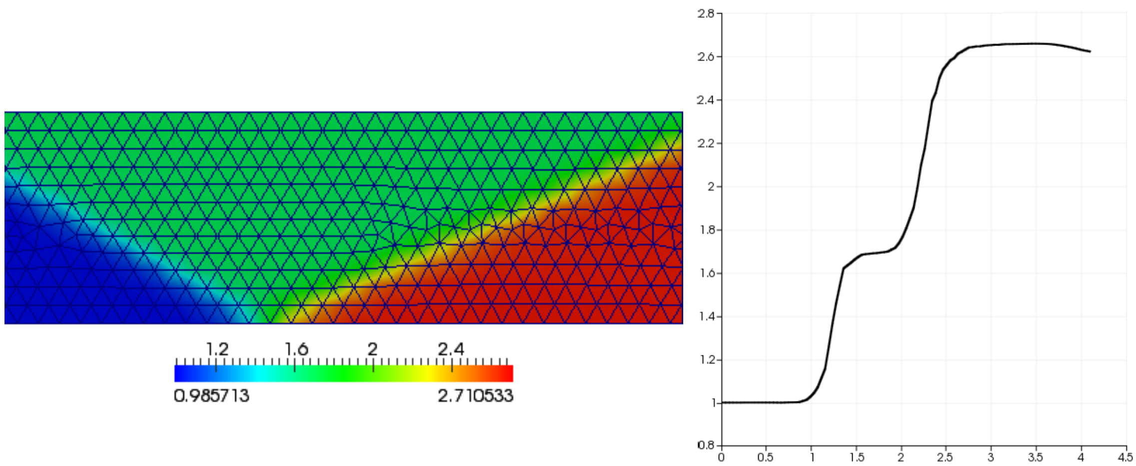
Figura 5.14: Choque refletido bidimensional - Isocurvas e perfis da massa específica – Malha 60×20



(a) SUPG/CAU

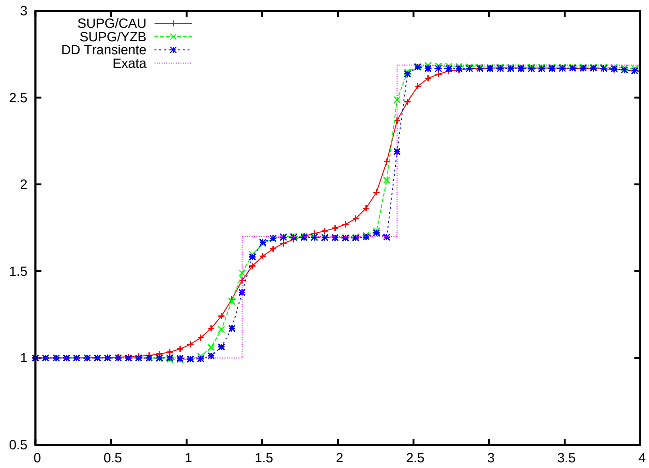


(b) SUPG/YZβ

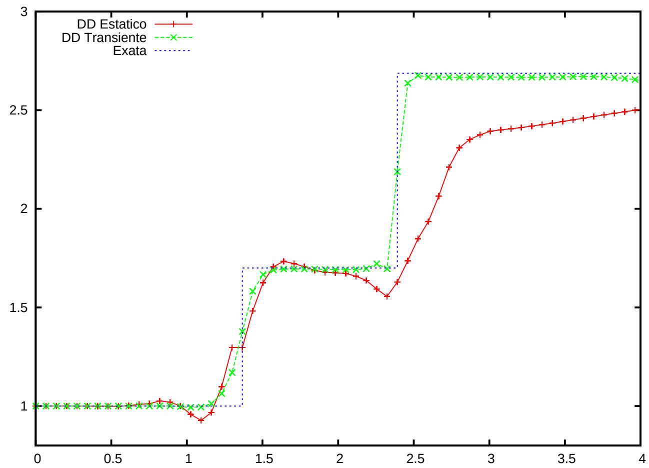


(c) DD Transiente

Figura 5.15: Choque refletido bidimensional – Isocurvas e perfis da massa específica – Malha não estruturada



(a) Massa específica dos métodos SUPG/CAU, SUPG/YZβ e DD Transiente



(b) Massa específica dos métodos DD Estático e DD Transiente

Figura 5.16: Choque refletido bidimensional – Comparativo dos perfis de massa específica das formulações numéricas

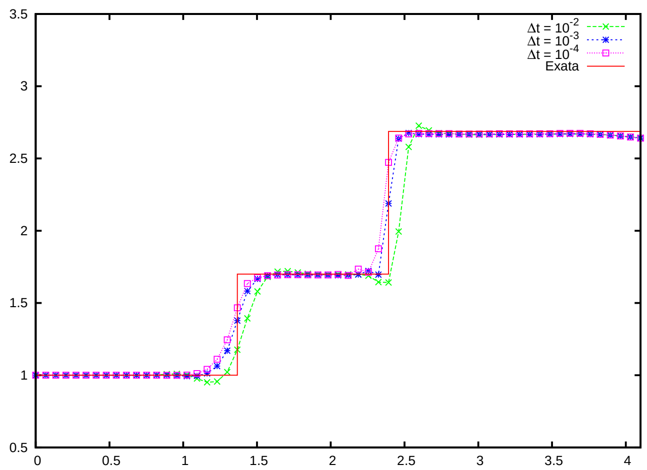
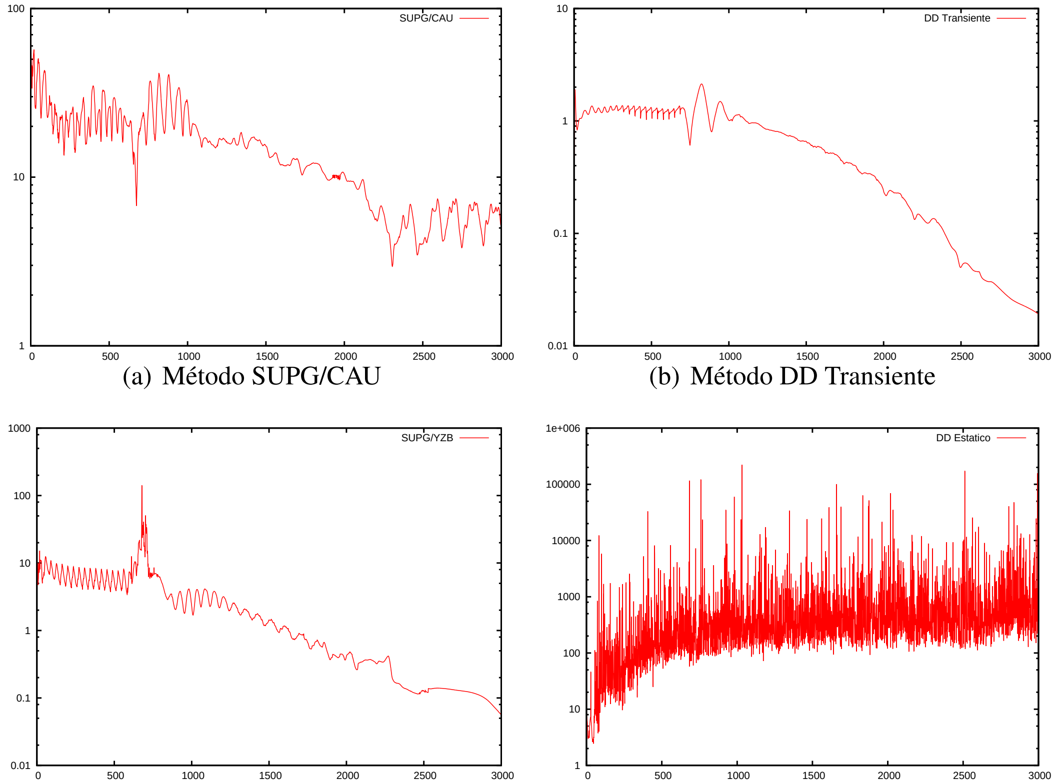


Figura 5.17: Choque refletido bidimensional – Perfis de massa específica do método DD Transiente – Malha 60×20.



(a) Método SUPG/CAU (b) Método DD Transiente

(c) Método SUPG/YZβ (d) Método DD Estático

Figura 5.18: Choque Refletido Bidimensional – Resíduos de Massa Específica das formulações numéricas – malha 60×20 e $\Delta t = 10^{-3}$

Tabela 5.3: Choque refletido bidimensional – Desempenho computacional – Malha 60×20.

Método	$Iter_{GMRES}$	$Tempo_{CPU}$ (s)		
		Montagem das matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	34869	4189.882	242.964	4545.313
SUPG/YZβ	31473	4989.128	254.620	5364.641
DD Estático	390502	4389.009	2382.762	6874.362
DD Transiente	9006	4750.084	101.701	4960.722

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho apresentou uma implementação do método de estabilização difusão dinâmica, para resolver o sistema de equações de Euler compressíveis, considerando escalas submalhas estáticas e transientes. Para as escalas submalhas transientes foi proposto uma expressão para representá-las em cada passo de tempo. O armazenamento da matriz global foi realizado através da estrutura de dados elemento-por-elemento. Para a integração no tempo foi utilizado um método preditor multicorretor de segunda ordem e os sistemas lineares resultantes em cada correção foram resolvidos pelo método iterativo GMRES, com um pré-condicionador bloco diagonal nodal.

Um conjunto de experimentos, incluindo choques normal, oblíquo e refletido, foi considerado e as soluções obtidas pelo método difusão dinâmica com escalas submalhas estáticas e transientes foram comparadas com a solução exata e as soluções obtidas pela formulação estabilizada SUPG/CAU e SUPG/YZβ. Observou-se que os métodos SUPG/YZβ e difusão dinâmica com escalas submalhas transientes obtiveram resultados mais precisos e com menor número de iterações GMRES para os choques oblíquo e refletido, comparados ao método SUPG/CAU que mostrou-se mais difusivo. No entanto, para os três problemas testados, o tempo total de processamento obtido pelo método SUPG/CAU foi menor, devido ao esforço computacional utilizado na montagem das matrizes dos outros métodos. Contudo, o desempenho do método difusão dinâmica com escalas submalhas transientes foi melhor com relação a solução dos sistemas lineares resultantes, tanto em relação ao número de iterações, quanto em relação ao tempo computacional despendido para resolução do sistema.

Durante a realização dos testes para malhas de diferentes tamanhos observou-se um comportamento condicionalmente estável, em relação ao passo de tempo, do método difusão dinâmica para os choques oblíquo e refletivo. O método difusão dinâmica com submalhas estáticas, mostrou-se inviável e com soluções não satisfatórias quando aplicado às equações de Euler compressíveis.

A metodologia difusão dinâmica com escalas submalhas transientes apresentou resultados promissores. Como trabalhos futuros podemos destacar a implementação dessa metodologia em aplicações tridimensionais e nas equações de Navier-Stokes. Podem também ser desenvolvidas, além de estratégias de aceleração de convergência, tais como outros pré-condicionadores e controle automático do tamanho do passo de tempo, formas mais otimizadas para montagem das matrizes envolvidas no método, com o intuito de diminuir o tempo de processamento. A utilização de estruturas de dados por arestas, paralelização do código computacional e um estudo a respeito da definição de diferentes passos de tempo para as escalas micro e macro justificam a continuidade do trabalho.

Referências Bibliográficas

Aliabadi *et al.***(1993)** S.K. Aliabadi, S. E. Ray e T. E. Tezduyar. Supg finite element computation of viscous compressible flows based on the conservation and entropy variables formulations. *Computational Mechanics*, 11:300–312. Citado na pág.

Almeida e Galeão(1996) R. C. Almeida e A. C. Galeão. An adaptive Petrov-Galerkin formulations for the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129:157–176. Citado na pág.

Almeida(1993) R. C. C. Almeida. *Uma formulação de Petrov-Galerkin para a resolução das equações de Euler e Navier-Stokes compressível usando técnicas adaptativas*. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ. Citado na pág.

Arruda *et al.***(2010)** N. C. B. Arruda, R. C. Almeida e E. G. D. do Carmo. Dynamic viscosity formulations for advection dominated transport problems. in preparation for *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010. Citado na pág.

Beau e Tezduyar(1991) G.J. Le Beau e T. E. Tezduyar. Finite element cmputation of compressible flows with the supg formulation. Em *Advances in Finite Element Analysis in Flud Dynamics (eds. Dhaubhadel, M.N., Engelmean M.S. e Reddy J.N)*, páginas 21–27. ASME, New York. Citado na pág.

Brezzi e Russo(1994) F. Brezzi e A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4:571–587. Citado na pág.

Brezzi *et al.***(1997)** F. Brezzi, L. P. Franca, T. J. R. Hughes e A. Russo. b = $\int$g. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145:329–339. Citado na pág.

Brooks e Hughes(1982) A. N. Brooks e T. J. R. Hughes. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259. Citado na pág.

Cant *et al.***(2004)** R. S. Cant, W. N. Dawes e A. M. Savill. Advanced cfd and modeling of accidental explosions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36:97–119. Citado na pág.

Catabriga(2000) L. Catabriga. *Soluções implícitas das equações de Euler empregando estruturas de dados por aresta*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ. Citado na pág.

Catabriga e Coutinho(2002) L. Catabriga e A.L.G.A Coutinho. Implicit SUPG solution of Euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(32):3477–3490. Citado na pág.

Catabriga *et al.***(2005)** L. Catabriga, A. L. G. A. Coutinho e T. E. Tezduyar. Compressible flow supg parameters computed from element matrices. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 21, n.9:465–476. Citado na pág.

Codina e Blasco(2002) R. Codina e J. Blasco. Analysis of a stabilized finite element approximation of the transient convection-diffusion-reaction equation using orthogonal subscales. *Computing and Visualization in Science*, 4:167–174. Citado na pág.

Codina *et al.***(2007)** R. Codina, J. Principe, O. Guasch e S. Badia. Time dependent subscales in the stabilized finite element approximation of incompressible flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2413–2430. Citado na pág.

Donea e Huerta(2003) J. Donea e A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley and Sons, Ltd. Citado na pág.

Galeão e Carmo(1988) A.C Galeão e E.G.D Carmo. A consistent approximate upwind petrov-galerkin method for convection-dominated problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68:83–95. Citado na pág.

Gamnitzer *et al.***(2010)** P. Gamnitzer, V. Gravemeier e W. A. Wall. Time-dependent subgrid scales in residual-based large eddy simulation of turbulent channel flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:819–827. Citado na pág.

Guermond(2001) J.-L. Guermond. Subgrid stabilization of galerkin approximations of linear monotone operators. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 21:165–197. Citado na pág.

Guermond(1999) J.-L. Guermond. Stabilization of galerkin approximations of transport equation by subgrid modeling. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33: 1293–1316. Citado na pág.

Guermond *et al.*(2006) J.-L. Guermond, A. Marra e L. Quartapelle. Subgrid stabilized projection method for 2D unsteady flows at high Reynolds numbers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:5857–5876. Citado na pág.

Heitmann(2003) N. Heitmann. *Subgrid Stabilization of Evolutionary Diffusive Transport Problems*. Phd thesis, Faculty of Arts and Science, University of Pittsburgh. Citado na pág.

Hirsch(2007) C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows - Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, volume 1. John Wiley and Sons, Ltd, second edição. Citado na pág.

Hou e Wu(1997) T. Y. Hou e X. H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal OF Computational Physics*, 134:169–189. Citado na pág.

Hughes(1987) T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall International, Inc. Citado na pág.

Hughes(1995) T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena: Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation, sugrid scale models, bubbles and the origin of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:387–401. Citado na pág.

Hughes e Tezduyar(1984) T. J. R. Hughes e T. E. Tezduyar. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45:217–284. Citado na pág.

Hughes *et al.*(1986) T. J. R. Hughes, L. P. Franca e M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I. symmetric forms of the compressible euler and navier-stokes equations and the second law of thermodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54:223–234. Citado na pág.

Hughes *et al.*(2004) T. J. R. Hughes, G. Scovazzi e L. P. Franca. *Multiscale and Stabilized Methods, Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd. Citado na pág.

Juanes(2003) R. Juanes. *Displacement theory and multiscale numerical modeling of three-phase flow in porous media*. Phd thesis, Engineering - Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley. Citado na pág.

Kaya e Layton(2003) S. Kaya e W. Layton. Subgrid-scale eddy viscosity models are variational multiscale methods. Relatório Técnico TR-MATH 03-05, University of Pittsburgh. Citado na pág.

Layton(2002) W. J. Layton. A connection between subgrid scale eddy viscosity and mixed methods. *Appl. Math. and Comput.*, 133:147–157. Citado na pág.

Lohner(2001) R. Lohner. *Applied CFD Techniques - An Introduction Based on Finite Element Methods*, volume 1. John Wiley and Sons, Ltd, 01 edição. Citado na pág.

Martins(1996) M. A. D. Martins. *Solução iterativa em paralelo de sistemas de equações do método dos elementos finitos empregando estruturas de dados por arestas*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ. Citado na pág.

Nassehi e M.Parvazinia(2009) V. Nassehi e M.Parvazinia. A multiscale finite element space-time discretization method for transient transport phenomena using bubble functions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45:315–323. Citado na pág.

Rispoli *et al.*(2007) F. Rispoli, R. Saavedra, Alessandro C. e T. E. Tezduyar. Computation of inviscid compressible flows with the v-sgs stabilization and yzβ shock-capturing. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 54:695–706. Citado na pág.

Saad(1995) Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company. Citado na pág.

Saad e Schultz(1986) Y. Saad e H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM. J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3): 856–869. Citado na pág.

Santos(2007) I. P. Santos. *Métodos Submalhas Não Lineares Para o Problema de Convecção-Difusão-Reação*. Tese de doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC, Petrópolis, RJ. Citado na pág.

Santos e Almeida(2007) I. P. Santos e R. C. Almeida. A nonlinear subgrid method for advection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:4771–4778. Citado na pág.

Shakib(1988) F. Shakib. *Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations*. Tese de Doutorado, Stanford University, Palo Alto, California, USA. Citado na pág.

Tang *et al.*(2006) S.Q. Tang, T.Y. Hou e W.K. Liu. A mathematical framework of the bridging scale method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:1688–1713. Citado na pág.

Tezduyar e Hughes(1982) T. E. Tezduyar e T. J. R. Hughes. Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *NASA Technical Report NASA-CR-204772*. Citado na pág.

Tezduyar e Hughes(1983) T. E. Tezduyar e T. J. R. Hughes. Finite element formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the compressible euler equations. Em *21st Aerospace Sciences Meeting*, páginas 878–883. Reno, Nevada, AIAA. Citado na pág.

Tezduyar e Senga(2006) T. E. Tezduyar e M. Senga. Stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:1621–1632. Citado na pág.

Tezduyar e Senga(2007) T. E. Tezduyar e M. Senga. Supg finite element computation of inviscid supersonic flows with yzβ shock-capturing. *Computers and Fluids*, 36,1: 147–159. Citado na pág.

Tezduyar *et al.*(2006) T. E. Tezduyar, M. Senga e D. Vicker. Computation of inviscid supersonic flows around cylinders and spheres with the supg formulation and yzβ shock-capturing. *Computational Mechanics*, 38:469–481. Citado na pág.

Werner(2011) S. L. Werner. Método de estabilização submalha difusão dinâmica aplicado na simulação de escoamentos miscíveis em meios porosos. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Informática/UFES, Vitória, ES. Citado na pág.

Werner *et al.*(2010) S. L. Werner, L. Catabriga e I. P. Santos. Método de estabilização submalha difusão dinâmica aplicado na simulação de escoamento miscível. Em *XXXI Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, páginas 4039–3053, Buenos Aires, Argentina. Citado na pág.

Yang e Samper(2009) C. Yang e J. Samper. A subgrid-scale stabilezed finite element method for multicomponent reactive transport through porous media. *Transp Porous Media*, 78:101–126. Citado na pág.