

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA**

MARCOS NEVES BERTOLANI

**FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE  
GLOBAL E COMPACTO NA APROXIMAÇÃO DE  
SUPERFÍCIES**

VITÓRIA  
2010

MARCOS NEVES BERTOLANI

# **FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE GLOBAL E COMPACTO NA APROXIMAÇÃO DE SUPERFÍCIES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na área de concentração Mecânica dos Sólidos.  
Orientador: Prof. DSc. Carlos Friedrich Loeffler Neto

**VITÓRIA  
2010**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

"Funções de Base Radial de Suporte Global e Compacto na  
Aproximação de Superfícies"

**Marcos Neves Bertolani**

COMISSÃO EXAMINADORA



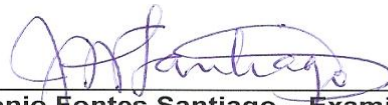
---

**Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador**  
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES



---

**Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro – Examinador interno**  
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES



---

**Prof. Dr. José Antonio Fontes Santiago – Examinador externo**  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE – UFRJ



---

**Eng. Dr. André Bulcão – Examinador externo**  
PETRÓBRAS – CENPES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 29 outubro de 2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

Bertolani, Marcos Neves, 1982-  
B546f      Funções de base radial de suporte global e compacto na  
aproximação de superfícies / Marcos Neves Bertolani. – 2010.  
85 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –  
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Teoria da aproximação. 2. Interpolação. 3. Mínimos  
quadrados. 4. Funções de base radial. I. Loeffler Neto, Carlos  
Friedrich. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro  
Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

---

A Débora, com amor e a minha filha Ester, razão da minha vida.

A Maria da Penha, que dedicou sua vida aos seus filhos.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha esposa e minha filha, pela companhia e ajuda.

À minha mãe, os mais profundos agradecimentos por seu auxílio e suas sábias lições.

À minha irmã Márcia e meus irmãos Marlon e Magno, pelo incentivo e valioso apoio.

Ao meu orientador, Prof. DSc. Carlos Friedrich Loeffler Neto pela amizade, tranqüilidade, paciência e qualidade de suas orientações.

Ao Dr. André Bulcão e ao Prof. Ph. D. Fernando César Meira Menandro por suas contribuições e discussões proporcionadas durante os seminários.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES, pelo financiamento da bolsa de estudos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) da UFES, pela oportunidade oferecida.

Aos meus amigos do PPGEM, pelos momentos de descontração.

*“A nossa presente tribulação, momentânea e sustentável, produz em nós um peso eterno de glória incomensurável (...), pois as coisas que se vêem são temporais e as que não se vêem são eternas”.*  
*(II Cor. 4, 17)*

## RESUMO

Este estudo enfoca as aproximações numéricas através do uso de funções de base radial de suporte compacto (FBRSC). Essas funções têm sido aplicadas de modo crescente na aproximação em multivariáveis, representando potenciais pertinentes às mais diversas áreas da ciência e engenharia, tais como: meteorologia, topografia, sismologia, entre outras. Nestas áreas, comumente aplica-se a construção de um mapeamento superficial a partir de dados experimentais esparsos, na qual certas propriedades são coletadas para finalidades práticas. No entanto, frequentemente tais problemas atingem uma proporção de dados requeridos na ordem de milhões; por isso, procedimentos computacionalmente mais econômicos que reduzam o risco de mau condicionamento do problema e preservem sua exatidão devem ser implementados. Com esse propósito, uma das ações desenvolvidas neste campo consiste na utilização das FBRSCs. Assim, alicerçado na Teoria da Aproximação, este estudo tem por objetivo principal identificar e analisar as regiões do domínio de uma função teste, onde a função de interpolação e/ou de ajuste, hipoteticamente, apresentaria dificuldades de representar parte de uma superfície com determinada característica. Pois, encontrando-se essa região, seria possível eleger um critério para a redução de centros de uma função de base radial a partir do método dos quadrados mínimos. Por fim, o presente estudo está centrado na análise comparativa e interpretação do comportamento dessa classe de funções na representação satisfatória de campos bidimensionais, no que tange à precisão e ao custo computacional. Os resultados apontaram bom desempenho em relação à precisão, tanto em ajuste de curvas quanto em interpolação. Constata-se, também, que o uso de uma malha com pontos igualmente espaçados é a opção mais apropriada para uma aproximação mais precisa.

**Palavras-chave:** Teoria da aproximação; Interpolação; Mínimos quadrados; Funções de base radial.



## ABSTRACT

This study focuses on numerical approximations through to the use of radial basis functions with compactly support (CSRBFs). These functions have been increasingly applied in multivariate approximation, being of great importance to several areas of science and engineering, such as meteorology, topography, seismology, among others. In these areas, usually applies the construction of a mapping surface from sparse experimental data, in which certain properties are collected to practical purposes. However, in these problems the number of parameters can range in the proportion of millions; because of this, computationally more economical procedures that reduce the risk of ill-conditioning of the problem and preserve their accuracy must be implemented. For this objective, one of the actions developed in this field is the use of CSRBFs. Thus, grounded in the approximation theory, this study aims to identify and analyze the regions of the domain of a test function, where the interpolation function or curve fitting function, hypothetically, would present difficulties of representing part of a surface with certain characteristic. Since, finding this region would be possible to elect a criterion for the reduction of centers of a radial basis function from the method of least squares. Finally, this study focuses on the comparative analysis and interpretation of the behavior of this class of functions in satisfactory representation of two-dimensional fields, regarding the accuracy and computational cost. The results showed good performance in relation to the accuracy, both in curve fitting as in interpolation. One can notice that the use of a grid with equally spaced points is the most appropriate option for a more accurate approximation.

**Keywords:** Approximation theory; Interpolation; Least squares; Radial basis functions.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1</b> Regressão por Mínimos quadrados.....	23
<b>Figura 2.2</b> Problema de aproximação: interpretação geométrica.....	24
<b>Figura 2.3</b> Vetor $(f^* - f)$ de menor comprimento.....	24
<b>Figura 2.4</b> (esq.) Dados que exibem erros significativos; (centro) Ajuste polinomial oscilando além do intervalo de dados; (dir.) Resultado mais satisfatório usando ajuste por mínimos quadrados.....	25
<b>Figura 3.1</b> Gaussiana com $c = 10$ (esq.) e $c = 0,1$ (dir.) centrados na origem em $\mathbb{R}^2$ .....	33
<b>Figura 4.1</b> Função de Franke .....	45
<b>Figura 4.2</b> (esq.) - malha aleatória de 25 pontos; (dir.) - malha de 25 pontos igualmente espaçados .....	47
<b>Figura 5.1</b> Gráfico do erro na interpolação da função de Franke com o uso da função de Wendland $\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$ ; $C^2 \cap PD_3$ ; suporte: $\delta = 1,5$ ; (esq.) - malha regular de 25 pontos; (dir.) - malha aleatória de 25 pontos.....	53
<b>Figura 5.2.</b> Pontos de aferição do erro (contorno) .....	64
<b>Figura 5.3.</b> Pontos de aferição no domínio. ....	65
<b>Figura 5.4.</b> Mapa do módulo do gradiente no domínio da função de Franke. ....	71
<b>Figura 5.5.</b> Malha para ajuste com ênfase nos maiores valores do gradiente. ....	72
<b>Figura 5.6.</b> Malha para ajuste com centros igualmente espaçados.....	73
<b>Figura 5.7.</b> Malha para interpolação com pontos que ocupam, preferencialmente, a região de maior módulo do vetor gradiente.....	73
<b>Figura 5.8.</b> Malha de 289 centros e 800 pontos de ajuste, com centros que ocupam, preferencialmente, a região de maior erro absoluto. ....	76
<b>Figura 5.9.</b> Malha de 289 centros e 800 pontos de ajuste, com centros que ocupam, preferencialmente, a região de maior valor algébrico do resíduo obtido através da (eq. 5.7) .....	79

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1. FUNÇÕES RADIAIS DE WENDLAND DE SUPORTE COMPACTO $\varphi_{s,k}$ PARA $k = 0, 1, 2, 3$ E $s = 3$ .	41
TABELA 3.2. FUNÇÕES RADIAIS DE WU DE SUPORTE COMPACTO $\varphi_{k,l}$ PARA VÁRIAS ESCOLHAS DE $k$ E $l = 3$ .	42
TABELA 4.1. LISTA DE FUNÇÕES RADIAIS DE SUPORTE COMPACTO $\varphi_{s,k}$ UTILIZADAS COMO FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO.	45
TABELA 5.1. INTERPOLAÇÃO EM MALHA DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , (SUPORTE: $\delta = 1.5$ )	48
TABELA 5.2. INTERPOLAÇÃO EM MALHA DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , (SUPORTE: $\delta = 1.5$ )	49
TABELA 5.3. INTERPOLAÇÃO EM MALHA DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , (SUPORTE: $\delta = 1.5$ )	50
TABELA 5.4. INTERPOLAÇÃO EM MALHA DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , (SUPORTE: $\delta = 1.5$ )	50
TABELA 5.5. COMPARAÇÃO ENTRE O EMQ NA INTERPOLAÇÃO COM FBRSC'S DE WENDLAND EM MALHAS DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ (SUPORTE: $\delta = 1.5$ )	52
TABELA 5.6. COMPARAÇÃO ENTRE O EMQ NA INTERPOLAÇÃO COM FBRSC'S DE WU EM MALHAS DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ (SUPORTE: $\delta = 1.5$ )	53
TABELA 5.7. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	54
TABELA 5.8. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	55
TABELA 5.9. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , MALHA DE 25 PONTOS ALEATÓRIOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	55
TABELA 5.10. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , MALHAS DE 25 PONTOS ALEATÓRIOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	56
TABELA 5.11. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , SUPORTE $\delta = (1,429)$ FIXO, NO DOMÍNIO $[0, 1]^2$ .	56
TABELA 5.12. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ SUPORTE $\delta = (1,429)$ FIXO, NO DOMÍNIO $[0, 1]^2$ .	57
TABELA 5.13. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , SUPORTE EM APROXIMADAMENTE 25 PONTOS, VARIANDO-SE O NÚMERO DE PONTOS NO DOMÍNIO $[0, 1]^2$ .	58
TABELA 5.14. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , SUPORTE EM APROXIMADAMENTE 25 PONTOS, VARIANDO-SE O NÚMERO DE PONTOS EM $[0, 1]^2$ .	58
TABELA 5.15. COMPARAÇÃO ENTRE O EMQ NA INTERPOLAÇÃO DE FBRSC'S DE WENDLAND EM MALHAS DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ (SUPORTE: $\delta = 1.5$ )	59
TABELA 5.16. COMPARAÇÃO ENTRE O EMQ NA INTERPOLAÇÃO DE FRBC DE WU EM MALHAS DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ (SUPORTE: $\delta = 1.5$ )	59
TABELA 5.17. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE	60
TABELA 5.18. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	61

TABELA 5.19. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , MALHAS DE 25 PONTOS ALEATÓRIOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	61
TABELA 5.20. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , MALHAS DE 25 PONTOS ALEATÓRIOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	62
TABELA 5.21. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , SUPORTE $\delta = 1,429$ FIXO, NO DOMÍNIO $[0, 1]^2$ .	62
TABELA 5.22. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ SUPORTE $\delta = 1,429$ FIXO, NO DOMÍNIO $[0, 1]^2$ .	63
TABELA 5.23. INTERPOLAÇÃO COM A FRBSC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , SUPORTE EM APROXIMADAMENTE 25 PONTOS, VARIANDO-SE O NÚMERO DE PONTOS NO DOMÍNIO $[0, 1]^2$ .	63
TABELA 5.24. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , SUPORTE EM APROXIMADAMENTE 25 PONTOS, VARIANDO-SE O NÚMERO DE PONTOS NO DOMÍNIO $[0, 1]^2$ .	64
TABELA 5.25. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS DE AFERIÇÃO NO CONTORNO ( $\delta = 1,5$ ).	65
TABELA 5.26. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS DE AFERIÇÃO NO CONTORNO ( $\delta = 1,5$ ).	66
TABELA 5.27. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS DE AFERIÇÃO NO CONTORNO ( $\delta = 1,5$ ).	66
TABELA 5.28. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS DE AFERIÇÃO NO CONTORNO ( $\delta = 1,5$ ).	67
TABELA 5.29. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS REFERENTES À FIG. (5.3) PARA AFERIÇÃO NO DOMÍNIO ( $\delta = 1,5$ ).	67
TABELA 5.30. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS REFERENTES À FIG. (5.3) PARA AFERIÇÃO NO DOMÍNIO ( $\delta = 1,5$ ).	68
TABELA 5.31. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS REFERENTES À FIG. (5.3) PARA AFERIÇÃO NO DOMÍNIO $\delta = 1,5$ .	68
TABELA 5.32. INTERPOLAÇÃO COM A FBRSC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3) + p_1 \dots + p_6$ MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	69
TABELA 5.33. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3) + p_1 + \dots + p_6$ MALHA REGULAR DE 25 PONTOS $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.	70
TABELA 5.34. FUNÇÃO DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , COM 289 CENTROS E SUPORTE $\delta = 0,179$ .	74
TABELA 5.35. FUNÇÃO DE WU $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , COM MALHA DE 289 CENTROS E SUPORTE $\delta = 0,179$ .	74
TABELA 5.36. FUNÇÃO DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , COM MALHA DE 289 CENTROS E SUPORTE $\delta = 0,179$ .	75
TABELA 5.37. FUNÇÃO DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , COM MALHA DE 289 CENTROS E SUPORTE $\delta = 0,179$ .	77
TABELA 5.38. FUNÇÃO DE WENDLAND $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , COM MALHA DE 289 CENTROS E SUPORTE $\delta = 0,179$ .	79

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
<b>2. INTERPOLAÇÃO E AJUSTE DE CURVAS .....</b>	<b>17</b>
2.1 INTERPOLAÇÃO .....	17
2.2 AJUSTE DE CURVAS.....	22
2.3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS .....	24
<b>3. FUNÇÕES DE BASE RADIAL .....</b>	<b>28</b>
3.1 FUNÇÕES DE BASE RADIAL E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	29
3.2 FUNÇÕES DE BASE RADIAL E OS MÉTODOS SEM MALHA	30
3.3 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA DAS FUNÇÕES DE BASE RADIAL .....	32
3.4 INTERPOLAÇÃO COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL.....	34
3.5 INTERPOLAÇÃO COM DADOS ESPARSOS E ACRÉSCIMO DE POLINÔMIOS.....	36
3.6 FUNÇÕES DE POTÊNCIA TRUNCADAS.....	37
3.7 FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE COMPACTO .....	38
<b>3.7.1 Funções de Wendland de Suporte compacto.....</b>	<b>38</b>
<b>3.7.2 Funções de Wu de Suporte compacto .....</b>	<b>41</b>
3.8 SUPORTE DA FUNÇÃO RADIAL .....	43
<b>4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>44</b>
<b>5. RESULTADOS .....</b>	<b>48</b>
5.1 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: resultados do cálculo do volume com a função de franke .....	48
5.2 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: resultados do cálculo do volume com a função parabolóide.....	50
5.3 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: resultados do erro no valor da imagem da função de franke .....	51
5.4 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: resultados do erro no valor da imagem da função parabolóide.....	59

5.5	INTERPOLAÇÃO SIMPLES: aferição do erro no contorno e no domínio com o uso da malha regular e aleatória .....	64
5.5.1	Testes de aferição no contorno: função teste de Franke	65
5.5.2	Testes de aferição no contorno: função teste — parabolóide .....	66
5.5.3	Testes domínio: função teste de Franke.....	67
5.5.4	Testes domínio: função teste — parabolóide.....	68
5.6	INTERPOLAÇÃO COM ACRÉSCIMO DE POLINÔMIOS: função teste — parabolóide.....	69
5.7	INTERPOLAÇÃO COM ACRÉSCIMO DE POLINÔMIOS: resultados função de franke.....	70
5.8	AJUSTE E INTERPOLAÇÃO: malha com ênfase nos pontos de maior valor do módulo do gradiente.....	71
5.9	AJUSTE E INTERPOLAÇÃO: malha com ênfase nos pontos de maiores erros.....	75
5.10	AJUSTE E INTERPOLAÇÃO: malha com ênfase nos pontos onde concentram os valores mais altos do resíduo entre a interpolação de wendland e wu.....	78
<b>6.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>80</b>
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	81
<b>7.</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>82</b>
	<b>APÊNDICE.....</b>	<b>85</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Em análise numérica, interpolação é um método de avaliação de novos valores de uma função, dentro de um intervalo que contenha um conjunto de pontos discretos correspondentes a valores conhecidos. Tal procedimento é muito útil na engenharia e na ciência em geral, pois freqüentemente se dispõe de um conjunto de valores discretos de uma função desconhecida, obtidos por amostragem ou experimentação, e se deseja conhecer valores intermediários. Para isso, busca-se construir adequadamente uma função  $g$  que represente satisfatoriamente outra função  $f$ , sendo conhecido apenas um pequeno número de valores funcionais em argumentos denominados pontos bases, na forma  $(x_n, f(x_n))$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Se esses valores são razoavelmente exatos, tal como no caso de uma tabela de dados trigonométricos, o processo mais conveniente de se encontrar valores intermediários é chamado de interpolação. Nesse caso, a função construída com base nos dados disponíveis deve passar exatamente por todos esses pontos. Diante de valores disponíveis exatos, alguns métodos matemáticos podem ser utilizados para identificar os valores intermediários com grande precisão. O emprego da série de Taylor é o melhor exemplo. Contudo, muitas vezes existe o problema da exigüidade de tempo, o que implica na adoção de procedimentos com menor precisão, porém mais rápidos, como a interpolação linear, entre as alternativas mais simples (STARK, 1970).

Por outro lado, se os valores disponíveis não são muito precisos, tais como aqueles provenientes de medidas de campo, então é mais indicado um procedimento no qual se tente minimizar os erros existentes na composição global dos dados. O modo mais adequado consiste em transpor uma curva suave através deles, e o processo é chamado de ajuste de curva ou regressão. O grau da curva empregada necessariamente é menor do que a quantidade de pontos bases disponíveis, que demandaria o grau máximo do polinômio interpolante.

Levando em conta essa abordagem, o objetivo geral do presente trabalho é identificar e analisar as regiões do domínio de uma função teste, onde a função de interpolação e/ou de ajuste ofereceria dificuldades ao representar certa região da superfície na qual se deseja obter uma aproximação. Isso pode ser feito

procedendo-se com base em análises comparativas e interpretação do comportamento de Funções de interpolação. Vale destacar que, neste trabalho, são aplicadas as Funções de Base Radial de Suporte Compacto (FBRSCs) com a finalidade de se obter as funções interpolantes.

Frente a isso, acredita-se que o presente estudo pode contribuir para aprimorar a representação de campos bidimensionais em aproximações com o uso de funções de base radial, sendo relevante para ampliar o campo de conhecimento em aplicações relacionadas, por exemplo, ao mapeamento superficial topográfico voltado para a indústria petrolífera.

Isso posto, apresenta-se, a seguir, a estrutura do presente trabalho.

No próximo capítulo, estão resumidos os tópicos sobre interpolação e ajuste de curvas. No capítulo 3, são abordados os fundamentos teóricos sobre as funções de base radial.

Os procedimentos metodológicos adotados podem ser vistos no quarto capítulo, onde são mostrados os caminhos percorridos e uma breve amostra do objeto de estudo. O quinto capítulo apresenta os resultados obtidos. Neste, são discutidos alguns detalhes acerca da precisão no processo de interpolação e ajuste de curva, comparando-se a precisão de diferentes métodos de aproximação de uma função; como por exemplo, o método dos mínimos quadrados e o método de interpolação com acréscimos de polinômios globais.

Por conseguinte, abordam-se na sexta parte, as considerações finais, onde se expõe uma visão geral dos resultados apresentados na presente dissertação. Por exemplo, nesse capítulo, aponta-se o método de interpolação com acréscimos de polinômios como uma forma de atenuar a perda de precisão causada pelo uso de suporte pequeno (e de uma malha “pobre”, ou seja, com poucos pontos de interpolação) em funções compactas. Finalmente, ainda no capítulo 6, são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.



## 2. INTERPOLAÇÃO E AJUSTE DE CURVAS

### 2.1 INTERPOLAÇÃO

O mais simples tipo de interpolação é a interpolação linear. Nesse caso, admite-se que a função a ser substituída seja contínua e diferenciável em todos os pontos do seu domínio e que não haja necessidade de que os valores discretos sejam igualmente espaçados. No caso de uma função unidimensional  $f(x)$ , é fácil deduzir que o valor interpolado  $p(x)$ , o qual é somente uma aproximação linear de  $f(x)$ , é dado por:

$$p(x) = f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \quad (2.1)$$

Por um lado, caso se queira melhorar a precisão, deve-se interpolar entre valores mais próximos, mas isso nem sempre é possível. Assim, para aperfeiçoar este processo de interpolação, é preciso aumentar a ordem de  $p(x)$  e, para isso, aplica-se a interpolação não-linear. Nesse contexto, a interpolação polinomial pode ser associada a uma generalização da interpolação linear. Desse modo, colocando-se a equação (2.1) sob a forma de equação geral de um polinômio de primeiro grau, obtém-se a seguinte expressão:

$$p(x) = \left[ \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] x + \left[ f(x_i) - x_i \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] \quad (2.2)$$

Em consequência dessa observação, uma melhor aproximação para a curva na qual se dispõe de  $n$  pontos discretos, é obtida a partir de um polinômio de ordem  $(n - 1)$ :

$$p_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (2.3)$$

Por outro lado, caso não se queira escolher todos os pontos, e sim um subconjunto de  $m$  pontos dos  $n$  disponíveis, o polinômio, naturalmente, apresentará grau  $(m - 1)$ .

No caso de polinomiais interpoladoras de ordem mais alta, seus coeficientes não são difíceis de obter analiticamente, mas isso requer bastante trabalho. Felizmente, existem outras formas de se escrever o mesmo polinômio, mas de modo

computacionalmente mais eficiente, ou seja, com um menor tempo de processamento.

O primeiro desses procedimentos alternativos consiste na representação dos polinômios na forma de Lagrange. A demonstração de sua obtenção é apresentada por Stark (1970). Assim, a base lagrangiana é formada pelas polinomiais  $\{L_i(x)\}_{i=0}^n$  onde:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (2.4)$$

Ou, com a forma mais compacta:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (2.5)$$

Para qualquer  $x_j$ , tal que  $x_j \neq x_i$ , um dos fatores no numerador é nulo, e  $L_i(x)$  é nulo. No entanto, para  $x = x_i$ , o numerador e o denominador são iguais e  $L_i(x)$  vale a unidade. Desse modo, fica muito simples determinar e programar cada componente do polinômio, que é dado por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i) \quad (2.6)$$

Em termos de processamento, a solução de um sistema de equações é substituída pelo cálculo de produtos constituintes dos polinômios.

A prova da unicidade da polinomial interpoladora de Lagrange de ordem  $n$ , expressa pela equação (2.6) é apresentada por Sperandio, Mendes e Silva (2003, p.143). Certamente, é possível encontrar diversas formas de se empreender o processo de interpolação sem que isso signifique qualquer mudança na essência da operação matemática. Essas formas muitas vezes possuem uma formulação mais elaborada, o que pode parecer uma desvantagem; no entanto, são mais fáceis de programar e oferecem um custo computacional mais reduzido. A velocidade de convergência da solução interpolada para a solução exata também é diferente para cada técnica, o que de certo modo implica em precisão diferenciada. Por exemplo, é possível

realizar uma interpolação linear através de aproximações sucessivas, baseando-se na simplicidade operacional dada por certas disposições matriciais. É o caso dos denominados polinômios de Aitken, que atuam assim: polinômios de ordem mais alta são obtidos como funções dos polinômios de ordem mais baixa num arranjo conveniente, que inclui a solução de um determinante (STARK, 1970).

Existem ainda os polinômios de Hermite, que são uma generalização do procedimento de Lagrange ora apresentado, na qual é requerida a obediência de derivadas da função interpolante em distintos pontos, o que produz imediato efeito na questão da precisão.

Até esse ponto os procedimentos de interpolação citados não exigem que os pontos nos quais o valor da função é conhecido sejam igualmente espaçados. No entanto, caso o distanciamento entre tais pontos seja feito igualmente no domínio, diferentes métodos de aproximação podem ser empregados, alguns dos quais são mais convenientes e precisos. São mais convenientes, porque permitem a adição de mais pontos bases de aproximação — que resulta no aumento da ordem dos polinômios envolvidos — modificando-se a expressão interpolante de modo mais simples. A questão da precisão deve ser entendida na velocidade de convergência da solução interpolada com relação à solução exata. Dentre esses outros métodos, muitos são baseados na idéia de diferença finita, um método que pode ser estendido além dos propósitos contidos no processo de interpolação, sendo empregado na solução de equações diferenciais.

Não obstante a importância da interpolação unidimensional, são cada vez mais numerosos os problemas nos quais se deseja fazer a aquisição de valores aproximados em domínios bidimensionais (e também tridimensionais) a partir de dados conhecidos em certos pontos.

Os procedimentos anteriormente mostrados podem, em princípio, ser aplicados, mas a dificuldade operacional é bem maior. Os modelos analíticos são mais complexos e os algoritmos numéricos muito mais complicados. A questão do tempo de solução computacional, por sua vez, é um aspecto igualmente importante a ser considerado, pois que as dimensões dos sistemas tendem a aumentar significativamente.

Além disso, surgem algumas restrições matemáticas com relação à extensão em duas dimensões de alguns métodos bem sucedidos na interpolação unidimensional, pois uma série de propriedades válidas em uma dimensão não se aplica em caso de dimensão maior.

Nem todas essas restrições podem ser aqui listadas, mas destaca-se, primeiramente, que o teorema fundamental da álgebra que garante a fatorização dos polinômios em uma dimensão, não se aplica em duas ou mais dimensões. De fato, tem sido demonstrado que, na maioria das vezes, os polinômios bidimensionais são irreduzíveis.

Em segundo lugar, enquanto em uma dimensão, amostras de  $n$  dados arbitrários invariavelmente requerem um polinômio de grau  $(n - 1)$ , do qual seus coeficientes são inequivocamente determinados, isso pode não ocorrer em duas dimensões. A demonstração da dependência linear de conjuntos de funções contínuas propostas para interpolação num dado intervalo em  $\mathbb{R}^s$ , para  $s$  maior ou igual a dois, já foi obtida por Zakhor e Alvstad (1992). Uma implicação dessa assertiva significa que potências de  $x$  ou  $y$  não formam um sistema de Chebyshev em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, não constituem uma sequência de polinômios ortogonais, relacionados com a fórmula de Moivre e facilmente obtíveis de forma recursiva. Logo, em geral, polinômios em duas variáveis não reconstroem, de forma única, funções calcadas em valores de amostras colhidas em posições arbitrárias.

Em síntese, a interpolação polinomial com multivariáveis é uma tarefa operacionalmente não muito simples, computacionalmente custosa na qual algumas das táticas apresentadas em uma dimensão podem ser inaplicáveis.

Caso seja possível manter a uniformidade no espaçamento dos dados disponíveis, o esquema de diferença finita é uma das táticas cuja aplicação permanece válida nos seus aspectos mais básicos. É imediata a expansão em série de Taylor em duas dimensões, nas quais as derivadas parciais podem ser calculadas através de um esquema de diferenças:

$$f(x+h, y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + \dots$$

$$f(x, y+k) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \frac{k^2}{2} + \dots$$

É possível montar tabelas de diferença de ordem diversa, tanto na variável  $x$  quanto na  $y$ , e montar um esquema de interpolação similar ao unidimensional.

Conforme exposto, devido à sua potencialidade, o método das diferenças estendeu-se para uma aplicação diferente, na qual não se deseja simplesmente interpolar valores em posições intermediárias aos dados disponíveis, mas sim resolver equações diferenciais, ordinárias ou parciais, nas quais as derivadas de ordem diferente nelas presentes sejam adequadamente aproximadas por diferenças. Objetivando representar derivadas de ordem superior, é conveniente deduzir o esquema de diferença finita central, no qual resulta:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \frac{f(x, y+k) - f(x, y-k)}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{f(x, y+k) - 2f(x, y) + f(x, y-k)}{k^2}$$

Contudo, considerando o procedimento de interpolação simples, as diferenças finitas mostram-se custosas e complicadas diante do surgimento de novas técnicas. Um sério problema se prende à necessidade de uniformidade na distribuição do espaçamento entre os pontos, pois há uma tendência atual na composição de amostras de dados que são capturados ou colhidos de modo esparso. O procedimento baseado na idéia de diferenças finitas pode ser adaptado para tal fim — esta é a idéia das diferenças finitas não estruturadas — mas não há razões suficientes que justifiquem a implementação desse processo, matematicamente muito elaborado, apenas para simples interpolação de dados. Ressalta-se que há

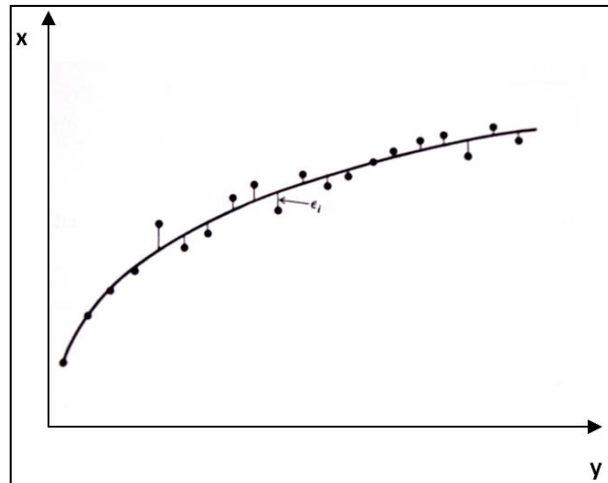
razões favoráveis à implementação do método das diferenças finitas na aproximação de operadores diferenciais, ligados à solução de EDPs.

Portanto, para se realizar efetivamente a interpolação multidimensional existem outras técnicas, que se tornam mais interessantes de serem desenvolvidas devido à facilidade de implementação, rapidez de processamento computacional e precisão dos resultados. O método de interpolação com funções radiais é uma dessas técnicas.

## 2.2 AJUSTE DE CURVAS

Em várias situações em engenharia, os dados são fornecidos em um conjunto discreto de valores entre um contínuo de possibilidades. Entretanto, pode ser necessário fazer estimativas em pontos que estão situados entre estes valores discretos. Além disso, pode-se necessitar de uma versão simples e viável de uma função complicada. Uma forma de fazer isso é obter valores da função em alguns pontos discretos no intervalo de interesse. Então, uma função mais simples pode ser desenvolvida para ajustar esses dados. Essa aplicação é conhecida como ajuste de curvas (CHAPRA; CANALE, 2008, p. 366).

Assim, quando os dados exibirem um grau significativo de erro, a estratégia será encontrar uma única curva que represente a tendência geral dos dados. Como cada ponto individual pode estar incorreto, não é necessário passar a curva por todos os pontos. Em vez disso, a curva é escolhida para seguir a tendência dos pontos considerados como um grupo. Uma abordagem dessa natureza é chamada de regressão por mínimos quadrados (Figura 2.1).

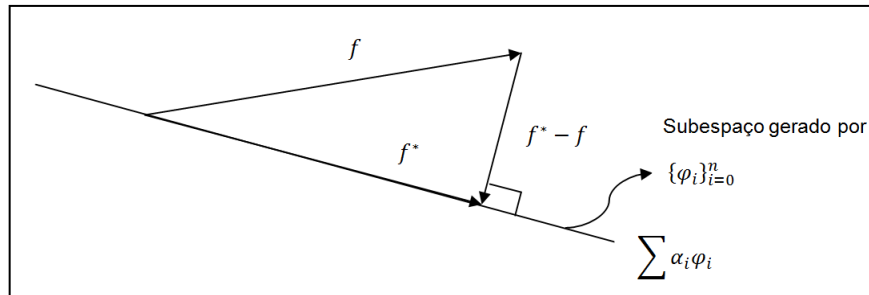


**Figura 2.1** Regressão por Mínimos quadrados  
 Fonte: Hamming (1986, p.428)

Um enfoque alternativo sobre a aproximação e ajuste de funções propõe vislumbrar a função como um vetor. Assim, uma função representada por um vetor formado a partir de valores funcionais numa malha pode ser entendida como um vetor num espaço cuja dimensão é o número de pontos da malha. Quanto mais pontos, maior é a dimensão do espaço e, com isso, representa-se melhor a função. Continuando a aumentar a dimensão do espaço, pode-se, intuitivamente, considerar uma classe de funções contínuas num intervalo  $[a, b]$  como um espaço de funções (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003).

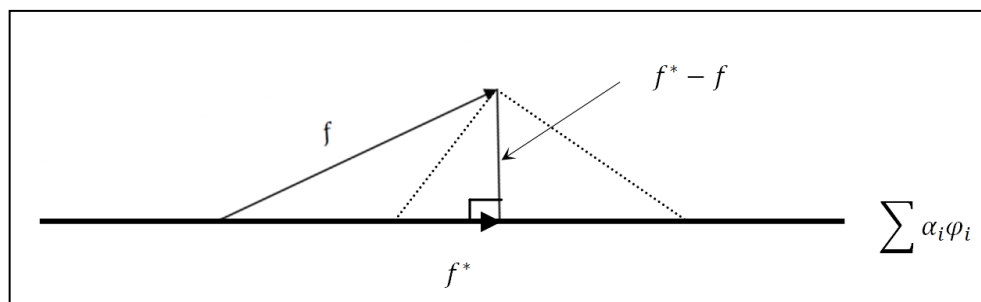
Assim, considerar-se-á um conjunto de  $n + 1$  funções linearmente independentes  $\varphi_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , gerando um subespaço de dimensão  $n + 1$ . O problema de aproximação consiste em encontrar, no subespaço gerado por  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ , um vetor cuja distância em relação à  $f$  seja a menor possível.

Quando a norma euclidiana for a escolhida, a menor distância de um ponto a um subespaço linear é o comprimento do vetor que é perpendicular ao subespaço, como ilustrado na Figura 2.2. Assim, o vetor  $f^* - f$  deve ser perpendicular ao subespaço gerado por  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ .



**Figura 2.2** Problema de aproximação: interpretação geométrica  
 Fonte: Sperandio, Mendes e Silva (2003, p.166)

Portanto, a análise vetorial em conjunto com a interpretação geométrica proposta pela figura 2.2, pode ser útil para formular o método dos mínimos quadrados, obtendo como resultado um sistema linear denominado sistema de equações normais; contudo, uma idéia mais simples, que fornece o mesmo resultado, será formalizada na seção seguinte. Essa idéia consiste em encontrar o mínimo da função erro, derivando-a e igualando essa derivada a zero, obtendo um sistema linear cujas incógnitas são os coeficientes da função de ajuste que minimizam o valor do erro. Retomando-se a interpretação geométrica, esses coeficientes são os que fazem com que o vetor erro,  $(f^* - f)$ , seja perpendicular ao subespaço gerado por  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ , como se pode notar na figura 2.3, onde qualquer outra projeção de  $f$  sobre o subespaço gerado por  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$  forneceria um vetor erro de comprimento maior do que o do vetor  $(f^* - f)$ .



**Figura 2.3** Vetor  $(f^* - f)$  de menor comprimento.  
 Fonte: Sperandio, Mendes e Silva (2003, p.168).

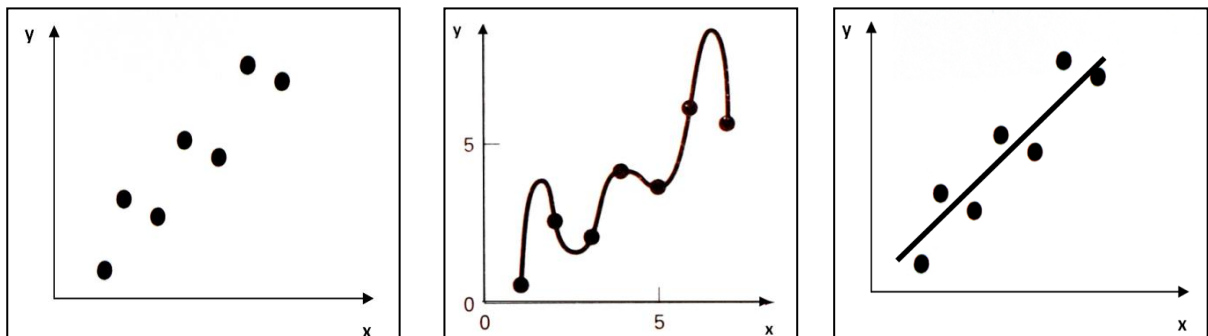
## 2.3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Segundo Hamming (1986), o critério dos mínimos quadrados é utilizado em situações onde há muito mais dados avaliáveis do que parâmetros; nesse caso, a equiparação exata está fora de questão. Além disso, quando os dados são obtidos



de forma experimental, ou seja, existe um erro substancial associado aos dados, o método mais correto a ser utilizado é o de mínimos quadrados.

Para ilustrar, retoma-se o exemplo da interpolação polinomial, que para esse caso, pode produzir resultados insatisfatórios em relação aos valores intermediários. Por exemplo, a figura 2.4 (esq.) mostra pontos de dados obtidos experimentalmente exibindo variações significativas. De fato, se um polinômio interpolador de grau seis for ajustado a esses dados (figura 2.4 centro), ele irá passar exatamente por todos os pontos. Contudo, por causa da variabilidade dos dados, a curva vai oscilar muito no intervalo entre os pontos. Em particular, os valores interpolados em  $x = 1,5$  e  $x = 6,5$  parecem estar bem além do intervalo sugerido pelos dados. Assim, a estratégia mais adequada é determinar uma função aproximadora que ajuste a forma ou tendência geral dos dados sem necessariamente passar pelos pontos individuais. A figura 2.4 (dir.) ilustra como uma reta realiza essa metodologia sem passar por nenhum dos pontos particulares. Um critério para estabelecer uma base para esse ajuste é determinar a curva que minimize a discrepância entre os dados e os pontos da curva. A técnica que alcança esse objetivo é chamada de método dos mínimos quadrados.



**Figura 2.4** (esq.) Dados que exibem erros significativos; (centro) Ajuste polinomial oscilando além do intervalo de dados; (dir.) Resultado mais satisfatório usando ajuste por mínimos quadrados.  
Fonte: Chapra; Canale (2008, p. 380).

Isso posto, apresenta-se a seguir a formalização matemática do método dos mínimos quadrados.

Considera-se uma função  $f$  na qual se tem uma amostra definida de valores em um conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_M\}$  de pontos bases. Então, introduz-se um segundo conjunto de pontos denominado:  $\Theta = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ ; no qual estão contidos os centros das funções interpolantes que formam uma base.

Geralmente, tem-se  $N \leq M$ , e o caso em que  $N$  é igual a  $M$  (que implica em  $X = \Theta$ ), retoma o processo de interpolação simples (BUHMANN, 2003). Ou seja, a interpolação é um caso particular de ajuste de curva, em que a função passa por todos os pontos bases.

Dada a função de aproximação:

$$s(r_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x_k) \quad ; k = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

onde  $\varphi_i$  são funções linearmente independentes e selecionadas a partir de certo critério, e  $\alpha_i$  são parâmetros à determinar.

Seja E definido por:

$$E = \sum_{k=1}^M (f_k - s_k)^2 = \sum_{k=1}^M \left( f_k - \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_{ik} \right)^2 \quad (2.8)$$

Onde  $s_k = s(r_k)$ ,  $f_k = f(x_k)$  e  $\varphi_{ik} = \varphi_i(x_k)$

Assim, aplicando-se

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (2.9)$$

na equação (2.8), tem-se as condições necessárias para minimizar o valor de E obtendo-se em seguida as equações apresentadas por Beveridge e Schechter (1970).

$$\begin{cases} A_{11}\alpha_1 + \dots + A_{1N}\alpha_N = b_1 \\ A_{21}\alpha_1 + \dots + A_{2N}\alpha_N = b_2 \\ \vdots \\ A_{N1}\alpha_1 + \dots + A_{NN}\alpha_N = b_N \end{cases} \quad (2.10)$$

O sistema anterior pode ser escrito como:

$$\sum_{i=1}^N A_{ki}\alpha_i = b_k \quad ; \text{para } k = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

Onde:

$$A_{ki} = \sum_{j=1}^M \varphi_{kj} \varphi_{ji} = A_{ik} \quad (2.12)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^M \varphi_{ij} f_j \quad (2.13)$$

Demonstra-se que se as funções escolhidas,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ...,  $\varphi_n(x)$ , forem linearmente independentes, o determinante da matriz  $A$  é diferente de zero e, portanto, o sistema linear apresentado pela equação 2.10 admite solução única. Ainda mais, demonstra-se que esta solução faz com que a função  $E$  atinja o seu valor mínimo (RUGGIERO; LOPES, 1988).

### 3. FUNÇÕES DE BASE RADIAL

Conforme se procurou mostrar nos capítulos anteriores, muitos métodos numéricos tradicionais, aplicados não apenas na teoria da interpolação e procedimentos correlatos, mas em diversos outros segmentos da análise numérica, limitam-se geralmente aos problemas que envolvem dois ou três parâmetros. Contudo, há muitas aplicações nas quais o número de parâmetros pode facilmente estar contido no intervalo de centenas ou mesmo de milhares.

Além de mostrarem-se incapazes de solucionar determinados problemas pluridimensionais em sua totalidade, certos métodos limitam seu emprego a situações especiais nas quais os domínios são regulares. Por outro lado, a computação com dados em várias dimensões colocou-se atualmente como uma importante questão nos diversos campos da ciência e engenharia. Neste caso, a questão do tempo computacional, seja na elaboração da entrada de dados ou no processamento numérico, continua a ser um fator significativo.

Assim, os métodos ou Técnicas de Aproximação em Multivariáveis (TAM) fornecem uma interessante forma de abordar estas questões. Como o nome indica, tais métodos trabalham com uma função que depende de múltiplas variáveis, sejam espaciais ou não. A interpolação multidimensional é um caso particular dentro desse contexto.

As TAM's atualmente encontram-se inseridas no contexto dos denominados métodos livres de malha (meshfree), que tiveram gênese em aplicações nas seguintes áreas: geodésica e geofísica, mapeamento e meteorologia. Posteriormente, foram direcionadas para aplicações em muitas outras áreas, tais como solução numérica de equações diferenciais parciais, gráficos computacionais, redes neurais, imagem de sinais e processamento (FASSHAUER, 2007).

Nesse contexto, o emprego de funções de base radial para a operacionalização das TAM tem sido dos mais bem sucedidos, encontrando respaldo matemático eficiente sob a ótica da teoria moderna da aproximação, sobretudo quando se trata de aproximar dados esparsos em várias dimensões (BUHMANN, 2003). Na realidade, historicamente as funções de base radial foram pioneiras na aproximação em

multivariáveis, sendo utilizadas particularmente no processo de interpolação, com eficiência e simplicidade. Tal metodologia se estendeu posteriormente na concepção dos métodos meshfree para solução de equações diferenciais parciais.

### 3.1 FUNÇÕES DE BASE RADIAL E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

As funções de base radial estão sendo utilizadas também em conjunto com as técnicas que já têm seus fundamentos bem estabelecidos, como o Método dos Elementos de Contorno (MEC), uma ferramenta numérica direcionada para solucionar Equações Diferenciais Parciais (EDP) com a qual a dimensionalidade é reduzida, devido ao fato de que o modelo matemático resultante é expresso somente em termos de integrais de contorno. Prescindindo-se da discretização no domínio, o MEC tem sido intensamente utilizado na solução de equações de Laplace, Helmholtz e outras. Por conta da facilidade operacional originada pela redução do problema físico a apenas uma dimensão, o MEC aborda com relativa facilidade problemas de fronteira móvel, meios infinitos, e domínios com geometria regular e irregular, algo bem mais difícil de fazer com os denominados métodos de discretização do domínio. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1998)

Extensões eficientes do MEC aos problemas com ações de domínio como fontes ou sorvedouros — aqueles que apresentam um operador linear com um termo não-homogêneo na equação de governo — tem requerido a utilização de certas formas de interpolação, nas quais as funções de base radial têm se mostrado eficiente. A maior parte destes trabalhos está inserida na formulação com dupla reciprocidade (FDR), que é uma técnica do método dos elementos de contorno na qual a integral de domínio resultante da operacionalização matemática dos termos não-homogêneos é transformada em integrais de contorno equivalentes. Isso se faz pelo uso de funções auxiliares especiais que são devidamente aproximadas pelo uso de RBFs de suporte global.

Graças a FDR é possível abordar com relativa simplicidade problemas bem resolvidos pelo MEC cuja forma integral clássica de contorno existe, mas cuja solução é muito complicada e resulta numa formulação pouco atraente. Também os problemas dependentes do tempo e casos com ações internas ao domínio,

distribuídos de maneira particular como os problemas térmicos difusivos-advectivos, que incluem os casos de dispersão de poluentes, secagem de grãos e mudança de fase em substâncias compostas puderam ser simulados através da FDR com o emprego de funções interpolantes de base radial.

O destaque dado ao MEC no estudo das funções de base radial é pertinente não apenas pelo pioneirismo na aplicação prática dessa classe de funções; centenas de trabalhos científicos foram gerados por conta dessa temática. Para constar, ressaltam-se Yamada et al (1994), que mostraram conclusões matematicamente bem fundamentadas a respeito da convergência dos resultados obtidos com as RBFs no contexto da FDR; Karur e Ramachandran (1994) apresentaram resultados de um estudo no qual examinou-se numericamente as propriedades de convergência das funções de interpolação usualmente empregadas na FDR, obtendo-se resultados satisfatórios para as funções thin plate spline e RBF linear; o trabalho de Golberg e Chen (1994) mostrou uma maneira efetiva de construir uma expressão geral de interpolação empregando funções globais e locais, atualmente adotada na moderna bibliografia sobre o tema; e Partridge (2000) sintetizou conclusões de muitas experiências computacionais interessantes.

### 3.2 FUNÇÕES DE BASE RADIAL E OS MÉTODOS SEM MALHA

A geração de malhas para representar geometrias complicadas é uma etapa altamente custosa aos engenheiros que lidam com problemas industriais utilizando métodos numéricos tais como o método dos elementos finitos, o método das diferenças finitas ou, até mesmo, o método dos elementos de contorno.

A essência desses métodos é que o domínio (ou contorno) pode ser dividido em pequenas partes, partes essas que se conectam, mas não se sobrepõem uma com a outra. Qualquer função de campo é aproximada dentro de cada elemento através de simples funções de interpolação.

Especialmente no caso dos métodos de discretização do domínio, se algum elemento é fortemente distorcido, as funções de forma para esse elemento são de qualidade ruim e os resultados podem ter baixa precisão. Um esquema para resolver as distorções dos elementos consiste em remalhar o domínio, em razão do que

foram desenvolvidas técnicas adaptativas. Essas técnicas, entretanto, encontram sérios problemas criados pela conectividade dos elementos.

Recentemente, pesquisadores passaram a dar especial atenção aos chamados métodos sem malha, nos quais o elemento base ou célula está livre, visando exatamente eliminar os limites de refinamento que são impostos às técnicas adaptativas quando se usa uma malha tradicional. Um dos trabalhos pioneiros foi desenvolvido por Lucy (1977), que inicialmente foi aplicado em problemas da astrofísica e em dinâmica dos fluidos.

Os métodos sem malha diferem dos métodos tradicionais por não usarem uma malha para delimitar e gerenciar o posicionamento e a conectividade dos elementos que definem e distribuem os graus de liberdade por sobre o domínio do problema.

Um sistema sem malha não é necessariamente um sistema sem elementos, embora possa sê-lo. Nas formulações sem malha mais convencionais, a malha é usualmente substituída por um conjunto de células ou elementos generalizados que se sobrepõem uns aos outros através de um conjunto de funções base; definido a partir de pontos situados no domínio, mas desvinculados de qualquer região, célula ou elemento específico.

Já nas formulações mais arrojadas, as funções que aproximam o campo delimitam uma região de influência, ao invés de se circunscrever a um setor ou elemento. Os nós de cada domínio de influência podem ser distribuídos arbitrariamente e os diferentes domínios de influência podem e devem se sobrepor. Assim, discretiza-se o domínio de interesse através de um conjunto de nós, posicionados sem que exista explicitamente uma malha estruturada de elementos definindo funções de aproximação em termos dos nós da discretização. Não há, então, qualquer tipo de interligação topológica entre os nós, que são colocados arbitrariamente. Assim, podem-se definir as funções de aproximação unicamente em termos dos nós, e não de elementos.

Uma das maneiras mais eficientes, tanto para se gerar os pontos de discretização, quanto para correlacionar os domínios de influência, consistem no emprego das funções de base radial. É possível utilizá-las tanto exclusivamente, quanto em

conjunto com funções de interpolação globais. Nesse contexto, também são importantes as funções radiais de base compacta, no sentido de limitar os domínios de influência de modo que nem todos necessariamente se sobreponham uns com os outros.

### 3.3 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA DAS FUNÇÕES DE BASE RADIAL

No intuito de proporcionar uma base teórica, insere-se a definição formal de função radial apresentada por Fasshauer (2007).

**Definição 3.1** Uma função  $\Phi : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$  é dita radial desde que exista uma função, de um único argumento,  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\Phi(x) = \varphi(r), \quad \text{onde } r = \|x\|,$$

e  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^S$ .

Depreende-se desta definição que a afirmativa:

$$\|x_1\| = \|x_2\| \implies \Phi(x_1) = \Phi(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^S,$$

aplica-se para uma função radial  $\Phi$ .

Assim, conforme exposto anteriormente: o valor de  $\Phi$  é constante para qualquer ponto que esteja a uma mesma distância fixa até a origem. De modo que  $\Phi$  é radialmente simétrica em relação ao centro.

A função gaussiana exposta pela equação (3.1) é um exemplo clássico de função radial:

$$\varphi(r) = e^{-(cr)^2}, \quad r \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Analisando-se esta função, constata-se o parâmetro de forma  $c$ , que se encontra relacionado à variância  $\sigma^2$  da distribuição normal pela equação  $c^2 = 1/(2\sigma^2)$ . Caso se faça a função Gaussiana composta da distância Euclidiana  $\|\cdot\|_2$  obtêm-se para qualquer  $x_k \in \mathbb{R}^S$  uma função de múltiplos argumentos que pode ser expressa como:

$$\Phi_k(x) = e^{-c^2 \|x - x_k\|_2^2}, \quad x \in \mathbb{R}^S. \quad (3.2)$$



Neste ponto, cabe esclarecer que a notação matemática apresentada pela equação (3.2) está presente em vários artigos científicos, bem como no trabalho de Wong, Hon e Golberg (2002). Para melhor representá-la, a função gaussiana pode ser escrita sob uma forma mais convencional e extensa, como na equação (3.3), onde  $\|x\|_2$  equivale à base ortonormal de vetores  $x$  e  $y$  no espaço  $\mathbb{R}^2$ .

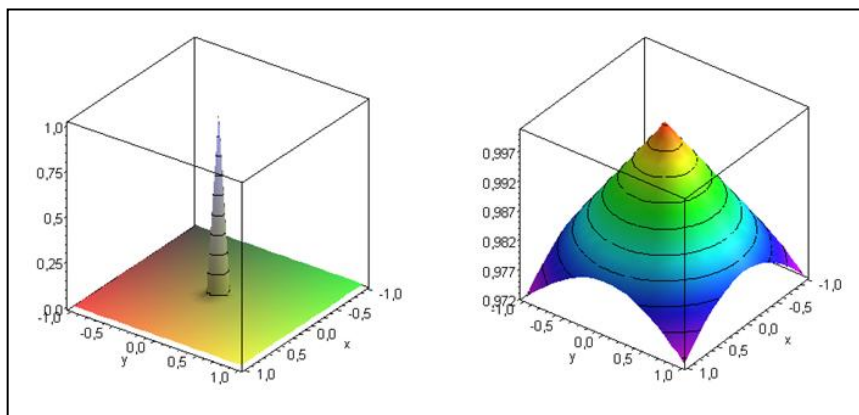
$$\Phi_k(x) = e^{-c^2\{\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\}^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Obviamente, a conexão entre a função  $\Phi_k$  (eq. (3.1)) e  $\varphi$  (eq. (3.2)) é dada por:

$$\Phi_k(x) = \varphi(\|x - x_k\|_2) \quad (3.4)$$

Assim, para diferentes valores de  $x_k$ , será possível formar uma base de funções radiais linearmente independentes.

A figura 3.1 facilita a visualização da propriedade de simetria destas funções, expondo o gráfico de duas RBFs Gaussianas, uma com o parâmetro de forma  $c^2 = 10$  (esquerda), e outra com  $c^2 = 0,01$  (direita), ambas centralizadas na origem em  $\mathbb{R}^2$ . Observando-se assim, que para um pequeno valor de  $c$  (isto é, grande variância) a função torna-se “assentada”, enquanto o aumento de  $c$  conduz a uma RBF mais pontiaguda e, por conseguinte, tendo sua influência mais restrita ou localizada. A escolha de  $c$  influencia profundamente, tanto na precisão, quanto na estabilidade numérica da solução de um problema de interpolação (FASSHAUER, 2007).



**Figura 3.1** Gaussiana com  $c = \sqrt{10}$  (esq.) e  $c = 0,1$  (dir.) centrados na origem em  $\mathbb{R}^2$

Segundo Ramachandran e Karur (1998), um extenso repertório de RBFs tem sido utilizado em interpolação; e algumas das mais comuns são:

- a. Função linear:  $\phi_k = 1 + r_k$ ;
- b. Radial cúbica:  $\phi_k = r_k^3$ ;
- c. Lâmina Spline fina:  $\phi_k = r_k^2 \ln r_k$ ;
- d. Multiquadrática:  $\phi_k = (r_k^2 + C^2)^{n/2}$  em que  $C$  é uma constante e  $n$  um inteiro positivo;
- e. Multiquadrática inversa:  $\phi_k = 1/\sqrt{(r_k^2 + C^2)}$ .

### 3.4 INTERPOLAÇÃO COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL

A interpolação com o uso de funções de base radial enfoca, a partir de dados conhecidos, a reprodução de funções desconhecidas. Baseado neste princípio, um modelo que generaliza o problema de interpolação de funções de múltiplos argumentos é apresentado por Wong, Hon e Golberg (2002) da seguinte forma:

Seja  $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real e  $x_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, 2, \dots, N$ , onde  $x_j$  são  $N$  pontos distintos. Seja, também,  $\phi(x - x_j) = \varphi(\|x - x_j\|)$  uma função de base radial que deverá ser definida como positiva para que o problema tenha solução única (conceito que será exposto mais adiante). Onde o termo  $\|x - x_j\| = r_j$  corresponde à distância Euclidiana entre  $x$  e  $x_j$ .

Considere, então, uma aproximação  $s(x)$  em  $f(x)$  tal que:

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(x - x_j), \quad (3.5)$$

Onde  $\alpha_j$  são coeficientes desconhecidos, que serão determinados impondo-se:

$$s(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

A combinação das equações (3.5) e (3.6) resulta em um sistema de equações lineares, que em forma matricial seria bem representado por:

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x_1 - x_1) & \Phi(x_1 - x_2) & \dots & \Phi(x_1 - x_N) \\ \Phi(x_2 - x_1) & \Phi(x_2 - x_2) & \dots & \Phi(x_2 - x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(x_N - x_1) & \Phi(x_N - x_2) & \dots & \Phi(x_N - x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Este, por sua vez, pode ser expresso de forma sintetizada como:

$$\mathbf{A}\Psi = \mathbf{F}, \quad (3.8)$$

onde  $A_{ij} = [\Phi(x_i - x_j)]$  é a matriz simétrica  $A(N \times N)$  chamada *matriz de interpolação*,  $\Psi_j = [\alpha_j]$  e  $F_i = [f(x_i)]$  são matrizes colunas  $\Psi(N \times 1)$  e  $F(N \times 1)$ , respectivamente. O problema será bem posto, isto é, a solução existirá e será única, se e somente se a matriz  $A_{ij}$  for não-singular. No entanto, para que a matriz de interpolação tenha esta característica, a função  $\Phi$  deverá ser *definida como positiva*. Portanto, vale destacar a importância deste conceito (que garante que a função de interpolação realize seu objetivo) e apresentá-lo de maneira formal:

**Definição 3.2** Uma função contínua  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como positiva ( $PD_S$ ) em  $\mathbb{R}^S$ , se para todos os conjuntos de centros distintos  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^S$  e todos os vetores  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ , a forma quadrática dada por:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \phi(x_j - x_k) \quad (3.9)$$

seja maior ou igual a zero. A função  $\phi$  é estritamente positiva definida em  $\mathbb{R}^S$  se a equação (3.9) é zero somente para  $\alpha \equiv 0$ .

Além disso, uma função par univariável  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada positiva definida em  $\mathbb{R}^S$ , descrita como  $\phi \in PD_S$ , se a função  $\phi(x_j, x_k) = \phi(\|x_k - x_j\|)$ ,  $x_j, x_k \in \mathbb{R}^S$  é positiva definida (S. M. WONG; Y. C. HON; M. A. GOLBERG, 2002).

Como mencionado anteriormente, para que a interpolação seja garantida e o problema admita solução única, as funções de interpolação devem ser definidas como *positivas*. Este conceito contribui para a compreensão da eficiência das funções radiais no que tange à interpolação, pois são várias as funções de base radial que são definidas como positivas; além disso, são poucas as restrições no uso dessas funções (por exemplo: os centros devem ser distintos). Assim, em consequência destas condições, a solução da equação (3.8) pode ser determinada com base, por exemplo, no método de eliminação de Gauss.

Outro conceito importante para fundamentar a presente discussão é apresentado de forma resumida segundo o seguinte teorema:

**Teorema 3.1** Não existem funções univariáveis contínuas de suporte compacto estritamente positivas definidas e radiais em  $\mathbb{R}^s$  para todos os  $s$  (FASSHAUER, 2007).

O teorema 3.1 é uma restrição a ser observada quando se procura uma nova classe de funções que atende ao critério de positividade definida. A seguir, apresenta-se uma exposição sucinta com relação à interpolação com acréscimos de polinômios globais e, posteriormente, alguns dos pontos importantes acerca de funções de base radial de suporte compacto (FBRSCs).

### 3.5 INTERPOLAÇÃO COM DADOS ESPARSOS E ACRÉSCIMO DE POLINÔMIOS

Em alguns casos, convém adicionar polinomiais à expansão da função de base radial.

Para isso, seja  $P_m^d$  o espaço polinomial de dimensão  $d$  e ordem que não excede o valor de  $m$ , e sejam os polinômios  $p_1, \dots, p_M$  uma base de  $P_m^d$  em  $\mathbb{R}^d$ . O grau de liberdade adicional  $M$  da seguinte representação estendida

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{l=1}^M \beta_l p_l(x) \quad (3.10)$$

é compensado pelas equações adicionais produzidas por:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p_l(x_j) = 0, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (3.11)$$

Das quais se origina a matriz

$$\mathbf{P}_X^T = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \cdots & p_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_M(x_1) & \cdots & p_M(x_n) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Assim, impondo-se que  $s$  seja igual a  $f$ , têm-se a seguinte condição de interpolação:

$$f(x_k) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - x_j) + \sum_{l=1}^M \beta_l p_l(x_k), \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.13)$$

Combinando-se a equação (3.13) com a equação (3.11), obtem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Phi, X} & \mathbf{P}_X \\ \mathbf{P}_X^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_X \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

A definição de cada bloco que constitui o sistema da equação matricial (3.14) é apresentada em seguida:

Os dados de  $f$  formam um vetor  $f_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ .

$\mathbf{A}_{\Phi, X}$  é dado por  $A_{kj} = \varphi(\|x_k - x_j\|)$ ,  $j, k = 1, \dots, N$ ;

$P_{kl} = p_l(x_j)$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $l = 1, \dots, M$ ;

$\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$ , e  $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_M]^T$ ;

$0$  é um vetor nulo de comprimento  $M$ , e  $\mathbf{O}$  é uma matriz nula de ordem  $M \times M$ .

Quanto ao exposto acima, pode-se adiantar que se os dados de  $f$  forem provenientes de um polinômio de grau menor ou igual a  $(m - 1)$ , então ele é ajustado exatamente pela expansão dada pela equação (3.10).

### 3.6 FUNÇÕES DE POTÊNCIA TRUNCADAS

Um importante exemplo de família de funções estritamente positivas definidas de suporte compacto advém das funções de potência truncadas:

$$\phi_l(r) = (1 - r)_+^l \quad (3.15)$$

Pois estas funções dão origem a funções radiais estritamente positivas definidas em  $\mathbb{R}^s$ . Mas é importante destacar que devido à observação feita no teorema 3.1, elas não podem ser estritamente positivas definidas em  $\mathbb{R}^s$  para todos os  $s$ , diferentemente das funções globais. Para contornar esse problema, conseqüentemente  $l$  deverá satisfazer:  $l \geq [s/2] + 1$ ; onde a notação  $[x]$  indica a função piso de  $x$  (WENDLAND, 1998). Essa função tem como saída o maior valor algébrico inteiro, menor ou igual a  $x$ .

Por exemplo:

$$[1.3] = 1$$

$$[5.0] = 5$$

$$[-1.3] = -2$$

Ainda a título de ilustração, na equação (3.15) abordou-se a função limitadora  $(\cdot)_+$  que é definida como:

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

### 3.7 FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE COMPACTO

Um dos métodos utilizados para atenuar o problema de custo computacional, devido à enorme proporção de dados requeridos, é o de Funções de Base Radial de Suporte Compacto. Este método aumenta a eficiência computacional, reduz o risco de mau condicionamento do problema, bem como torna possível o trabalho com matrizes com vários elementos nulos — e tudo isto facilita a solução do sistema linear no qual ela está inserida.

Geralmente uma FBRSC é expressa pela forma:

$$\phi_{s,k}(r) = (1-r)_+^k p(r) \quad \text{para } k \geq 1 \quad (3.16)$$

com as seguintes condições

$$(1-r)_+^k = \begin{cases} (1-r)^k & \text{se } 0 \leq r < 1, \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $p(r)$  é um polinômio prescrito;  $r = \|x - x_j\|$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  é a distância Euclidiana e  $x, x_j \in \mathbb{R}^S$ . O índice “ $s$ ” (eq. (3.16)) é um inteiro que indica a dimensão espacial e  $2k$  (para as FBRSC’s de Wendland) equivale à suavidade (smoothness) da função.

#### 3.7.1 Funções de Wendland de Suporte compacto

Provavelmente, a família mais popular de funções radiais de suporte compacto atualmente em uso foi formulada por Wendland. Este autor emprega a função truncada descrita pela equação (3.15), e a partir dessa função, gerou novas funções em outros espaços dimensionais, aplicando repetidamente o operador de integração  $\mathcal{I}$  determinado por:

$$(\mathcal{J}\phi)(r) = \int_r^\infty t\phi(t)dt \quad (3.18)$$

Assim, apresentar-se-á uma sucinta exposição de parte do procedimento que Wendland realizou para obter as funções radiais de suporte compacto que, atualmente são conhecidas pelo nome desse autor. Para isso, inicia-se com a seguinte definição:

**Definição 3.3.** Com  $\varphi_l(r) = (1-r)_+^l$  define-se:

$$\varphi_{s,k}(r) = \mathcal{J}^k \varphi_{[s/2]+k+1} \quad (3.19)$$

Com o uso da função da equação (3.15), a definição 3.3 revela que as funções  $\varphi_{s,k}$  têm todo o seu suporte em  $[0,1]$  e apresentam uma representação polinomial neste intervalo. Mais precisamente:

**Teorema 3.2.** As funções  $\varphi_{s,k}$  são estritamente positivas definidas e radiais em  $\mathbb{R}^s$  e são da forma:

$$\varphi_{s,k}(r) = \begin{cases} p_{s,k}(r), & r \in [0, 1] \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Sendo  $p_{s,k}$  um polinômio univariável de grau  $[s/2] + 3k + 1$ . Além disso,  $\varphi_{s,k} \in C^{2k}(\mathbb{R}) \cap PD_s$  será única para uma determinada constante multiplicadora e o grau do polinômio é mínimo para um dado espaço de dimensão  $s$  e suavidade  $2k$ .

O teorema 3.2 ainda afirma que nenhuma outra função polinomial de suporte compacto  $C^{2k}$ , estritamente definida positiva e radial em  $\mathbb{R}^s$ , terá um grau menor para o polinômio.

Apresenta-se a seguir algumas funções de Wendland  $\varphi_{s,k}$ , para  $s = 3$  e  $k = 0, 1, 2$  e  $3$ .

Para  $k = 0$  e  $s = 3$ , segue diretamente da **definição 3.3** a seguinte função

$$\begin{aligned} \varphi_{3,0}(r) &= \varphi_{[3/2]+0+1} \\ \varphi_{3,0}(r) &= \varphi_2(r) = (1-r)_+^2 \quad ; C^0 \cap PD_3 \end{aligned} \quad (3.21)$$

No próximo caso, os valores são:  $k = 1$  e  $s = 3$ , então, aplica-se novamente a equação (3.19) para obter:

$$\varphi_{3,1}(r) = \mathcal{J}^1 \varphi_{\lfloor 3/2 \rfloor + 1 + 1}$$

$$\varphi_{3,1}(r) = \mathcal{J}^1 \varphi_3(r) = \int_r^\infty t \varphi_3(t) dt$$

$$\varphi_{3,1}(r) = \int_r^\infty t(1-t)_+^3 dt$$

Nesse caso, o suporte compacto de  $\varphi_l$  reduz a integral imprópria da equação acima a uma integral definida que poderá ser resolvida utilizando-se integração por partes ou da forma exposta a seguir.

$$\varphi_{3,1}(r) = \int_r^1 t(1-t)^3 dt$$

$$\varphi_{3,1}(r) = \int_r^1 (t - 3t^2 + 3t^3 - t^4) dt$$

$$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r) ; C^2 \cap PD_3 \quad (3.22)$$

O símbolo ( $\doteq$ ) significa que a equação apresenta igualdade se for multiplicada por uma constante positiva.

Para  $k = 2$  e  $s = 3$ , repetindo-se o mesmo procedimento utilizado para obter a equação (3.22), tem-se:

$$\varphi_{s,k}(r) = \mathcal{J}^k \varphi_{\lfloor s/2 \rfloor + k + 1}$$

$$\varphi_{3,2}(r) = \mathcal{J}^2 \varphi_{\lfloor 3/2 \rfloor + 2 + 1}$$

$$\varphi_{3,2}(r) = \mathcal{J}^2 \varphi_4(r) = \mathcal{J}^2 \int_r^\infty t \varphi_4(t) dt$$

$$\varphi_{3,2}(r) = \mathcal{J}^1 \int_r^\infty t(1-t)_+^4 dt$$



$$\varphi_{3,2}(r) = \int_r^1 \left( \frac{1}{30} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^4 + \frac{4}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6 \right) dt$$

$$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3) ; C^4 \cap PD_3 \quad (3.23)$$

O procedimento para se obter a função de Wendland denominada por  $\varphi_{3,3}(r)$  será omitido, mas essa função pode ser gerada com a aplicação da **definição 3.3** e a repetição do procedimento que resulta na equação (3.23).

Na tabela 3.1 encontram-se dispostas as funções obtidas para  $s = 3$  com  $k = 0:3$ ; tais funções são estritamente definidas como positivas e radiais em  $\mathbb{R}^s$  para  $s \leq 3$ .

TABELA 3.1. FUNÇÕES RADIAIS DE WENDLAND DE SUPORTE COMPACTO  $\varphi_{s,k}$  PARA  $k = 0, 1, 2, 3$  E  $s = 3$ .

$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	$C^0 \cap PD_3$
$\varphi_{3,1}(r) = \mathcal{J}^1 \varphi_3(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	$C^2 \cap PD_3$
$\varphi_{3,2}(r) = \mathcal{J}^2 \varphi_4(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$	$C^4 \cap PD_3$
$\varphi_{3,3}(r) = \mathcal{J}^3 \varphi_5(r) \doteq (1-r)_+^8(32r^3 + 25r^2 + 8r + 1)$	$C^6 \cap PD_3$

Vale destacar o significado da notação:  $\varphi_{s,k} \in C^{2k} \cap PD_s$  presente na tabela 3.1. Assim,  $C^{2k}$  significa que a função  $\varphi_{s,k}$  é diferenciável em igual número de vezes ao valor algébrico de  $2k$ . Por conseguinte, o símbolo  $PD_s$  indica que a mesma função caracteriza-se por ser definida como positiva.

### 3.7.2 Funções de Wu de Suporte compacto

Outro tipo de funções positivas definidas de base radial e suporte compacto que também apresentam a forma polinomial, como as funções de Wendland, são propostas por Wu (1995). Para isso, esse autor utiliza a seguinte função:

$$\varphi(r) = (1-r^2)_+^l \quad ; l \in \mathbb{N} \quad (3.24)$$

A equação (3.24) não é positiva definida. Porém, aplicando-se uma convolução a ela, é possível obter uma nova função que é estritamente positiva definida e radial em  $\mathbb{R}$ , ou seja:

$$\varphi_l = (\varphi * \varphi)(2r)$$

$$\varphi_l = \int_{-\infty}^{+\infty} (1-t^2)_+^l (1-(2r-t)^2)_+^l dt$$

$$\varphi_l = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^l (1-(2r-t)^2)_+^l dt \quad (3.25)$$

A equação (3.25) é definida como positiva, pois sua transformada de Fourier é maior que zero. Assim, uma família de funções radiais estritamente definidas como positivas é gerada utilizando-se o operador derivativo apresentado a seguir:

$$\varphi_{k,l} = \mathcal{D}^k \varphi_l \quad (3.26)$$

Onde  $\varphi_l$  é dada pela equação (3.25). As funções  $\varphi_{k,l}$  são estritamente definidas positivas e radiais em  $\mathbb{R}^s$  para  $s \leq 2k + 1$ . Pode-se acrescentar que elas também são polinomiais de grau  $4l - 2k + 1$  e são  $n$  vezes continuamente diferenciáveis no interior do suporte, sendo  $n = 2l - 2k$ . No contorno essa suavidade aumenta para  $2l - k$  (SCHABACK, 1995).

Para exemplificar, a tabela 5.2 apresenta quatro funções de Wu, calculadas a partir de:

$$\varphi_{k,3} = \mathcal{D}^k \varphi_3 = \mathcal{D}^k (1-t^2)_+^3 * (1-t^2)_+^3(2r) \quad ; k = 0, 1, 2, 3. \quad (3.27)$$

A máxima dimensão espacial  $s$  para cada uma dessas funções também é listada nesta tabela, basta observar o símbolo  $PD_s$  que indica que a função está contida no espaço de funções Definidas como Positivas. Assim como nas funções de Wendland, as funções da tabela 3.2 se equivalem à definição por intermédio de uma constante, por isso o uso do símbolo ( $\doteq$ ).

TABELA 3.2. FUNÇÕES RADIAIS DE WU DE SUPORTE COMPACTO  $\varphi_{k,l}$  PARA VÁRIAS ESCOLHAS DE  $k$  E  $l = 3$ .

$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5 + 35r + 101r^2 + 147r^3 + 101r^4 + 35r^5 + 5r^6)$	$C^6 \cap PD_1$
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + 36r + 82r^2 + 72r^3 + 30r^4 + 5r^5)$	$C^4 \cap PD_3$
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8 + 40r + 48r^2 + 25r^3 + 5r^4)$	$C^2 \cap PD_5$
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16 + 29r + 20r^2 + 5r^3)$	$C^0 \cap PD_7$

### 3.8 SUPORTE DA FUNÇÃO RADIAL

A função de base radial  $\phi_{l,k}$  pode ser dimensionada de modo que tenha um suporte compacto em  $[0, \delta]$ . Para isso, é suficiente que se substitua  $r$  por  $r/\delta$  para  $\delta > 0$ . A função de interpolação definida pela Equação (3.5) pode ser escrita como

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_{1,k} \left( \frac{r_j}{\delta_j} \right), \quad (3.28)$$

Por exemplo, a função de Wu  $\varphi_{2,3}(r)$  (estritamente definida positiva em  $\mathbb{R}^5$ ):

$$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5 (8 + 40r + 48r^2 + 25r^3 + 5r^4)$$

Assumiria a seguinte forma:

$$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r/\delta)_+^5 \left( 8 + 40 \frac{r}{\delta} + 48 \left( \frac{r}{\delta} \right)^2 + 25 \left( \frac{r}{\delta} \right)^3 + 5 \left( \frac{r}{\delta} \right)^4 \right)$$

O fator de dimensionamento  $\delta_j$  pode ser variável ou constante em diferentes centros  $j = 1, 2, \dots, N$  dependendo da natureza do problema. Um importante problema que ainda não foi resolvido é encontrar um método para determinar o valor ideal de  $\delta$ . Em geral, quanto menor o valor de  $\delta$ , maior o percentual de elementos nulos na matriz de interpolação. No entanto, isto também resulta em baixa precisão (WONG; HON; LI, 1999).

#### 4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

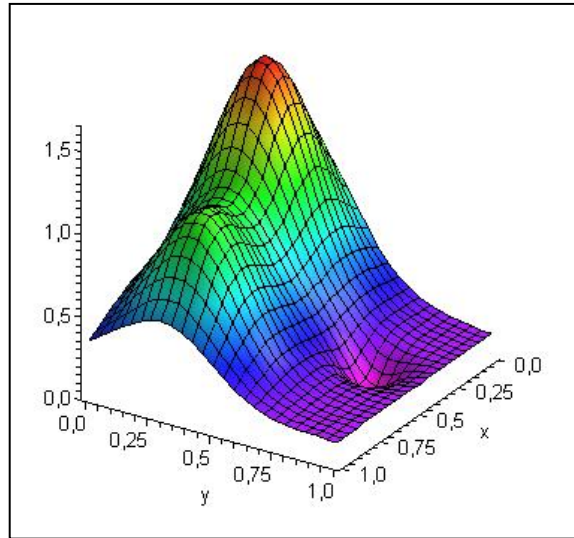
Para se realizar as simulações computacionais efetuadas no presente trabalho, foi escrito um código em linguagem FORTRAN 77 (FORmula TRANslation) — uma linguagem de alto nível, que permite a elaboração de programas extremamente sofisticados para a resolução de problemas complexos nas diversas áreas das ciências e engenharias.

Algumas tarefas auxiliares foram executadas com o uso do MATLAB — um programa inicialmente concebido como ferramenta de labor matricial e escrito em linguagem FORTRAN — que se desenvolveu enormemente e se tornou uma ferramenta versátil, atualmente escrito em linguagem C. Com esta ferramenta foi possível gerar um conjunto de pontos para as malhas, denominados de **halton** (malha de pontos aleatórios), bem como calcular o maior diâmetro de um círculo sem pontos internos numa malha em que o suporte da FRBC seja proporcional a este diâmetro.

Para possibilitar a visualização gráfica, utilizou-se o pacote Maple, um sistema computacional algébrico escrito em linguagem C, cuja capacidade de manipular informações de maneira simbólica permite que respostas analíticas (exatas) sejam obtidas, em vez de valores numéricos aproximados. Ressalta-se que o Maple pode apresentar respostas exatas para problemas matemáticos como integrais, equações diferenciais e sistemas lineares. Ademais, sua programação estruturada permite salvar textos e comandos em seus arquivos de planilhas. Tais planilhas podem ser carregadas no próprio programa e seus comandos executados diretamente (BURDEN; FAIRES, 2003).

Buscando verificar a efetividade das aproximações, foi utilizada inicialmente como teste a função de Franke (R. Franke, 1982), mostrada na Figura 4.1. É uma espécie de função padrão para teste, bem conhecida na investigação de métodos de interpolação com dados esparsos. Sua expressão é dada por:

$$f(x, y) = 0.75e^{-0.25(9x-2)^2-0.25(9y-2)^2} + 0.75e^{-(9x-2)^2/49-(9y-2)^2/10} + 0.5e^{-0.25(9x-7)^2-0.25(9y-3)^2} - 0.2e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2} \quad (4.1)$$



**Figura 4.1** Função de Franke

Na tabela (4.1) encontram-se listadas as funções que foram utilizadas nos testes de interpolação. A título de esclarecimento, considera-se oportuno ressaltar que a partir deste ponto, as funções serão listadas omitindo-se alguns termos de seu polinômio para melhor aproveitar-se o espaço nas tabelas.

TABELA 4.1. LISTA DE FUNÇÕES RADIAIS DE SUPORTE COMPACTO  $\varphi_{s,k}$  UTILIZADAS COMO FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO.

#### Função de Wendland

$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	$C^0 \cap PD_1$
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	$C^0 \cap PD_3$
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	$C^0 \cap PD_5$
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	$C^2 \cap PD_1$
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+5r+8r^2)$	$C^4 \cap PD_1$
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	$C^2 \cap PD_3$
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$	$C^4 \cap PD_3$
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(32r^3+25r^2+8r+1)$	$C^6 \cap PD_3$

#### Função de Wu

$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5+35r+101r^2+147r^3+101r^4+35r^5+5r^6)$	$C^6 \cap PD_1$
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6+36r+82r^2+72r^3+30r^4+5r^5)$	$C^4 \cap PD_3$
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8+40r+48r^2+25r^3+5r^4)$	$C^2 \cap PD_5$
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16+29r+20r^2+5r^3)$	$C^0 \cap PD_7$

Para aferição do desempenho numérico das funções radiais de base compacta, foram feitos dois tipos de teste: avaliação do erro cometido no cálculo do valor da própria função teste em pontos diferentes dos pontos interpolantes ou pólos e o cálculo do volume situado abaixo da curva de interpolação. Para avaliação do

volume, determinou-se o valor analítico obtido pela integral dupla da função teste de Franke. Esta integral foi calculada através do Maple pela integração da equação (4.1), ou seja:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( 0.15 + 0.75e^{-0.25(9x-2)^2 - 0.25(9y-2)^2} + 0.75e^{-\frac{(9x-2)^2}{49} - \frac{(9y-2)^2}{10}} + 0.5e^{-0.25(9x-7)^2 - 0.25(9y-3)^2} - 0.2e^{-(9x-4)^2 - (9y-7)^2} \right) dydx = 0.614228126 \quad (4.2)$$

A partir da equação (4.2), pode-se observar uma modificação na função de Franke (foi transladada para cima somando-se uma constante de 0.15), propositalmente introduzida para que ela não apresentasse valores não-positivos, algo que poderia causar transtornos ao integrar o volume. Assim, sua imagem que inicialmente estava contida aproximadamente no intervalo  $[-0.15, 1.50]$ , passou a apresentar-se aproximadamente no intervalo de  $[0, 1.65]$ .

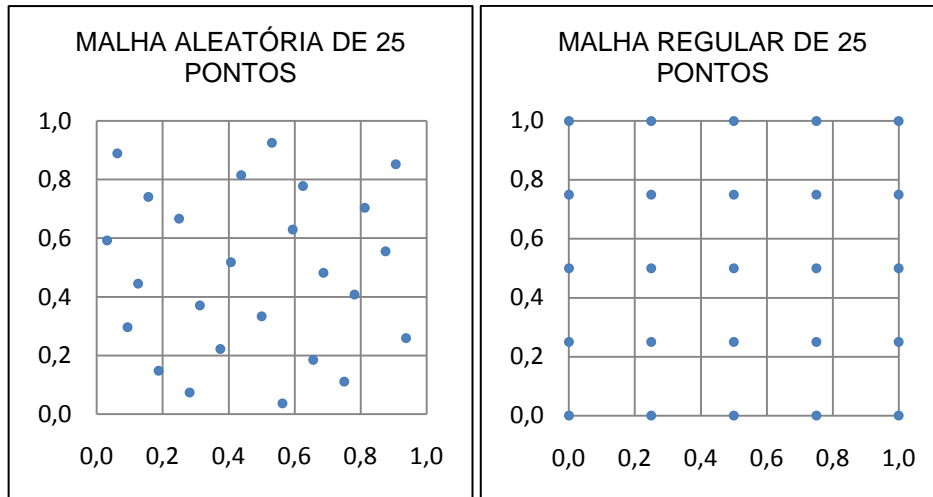
Vale ressaltar que o valor computacional referente ao cálculo do volume abaixo da função de Franke, bastante abordado no presente trabalho, foi obtido através da aplicação da “Regra 1/3 de Simpson”; cuja formulação é apresentada por Cruz (2009).

Isso posto, as malhas de 25 pontos empregadas em alguns dos experimentos deste trabalho possuem as seguintes características: a primeira delas com pontos igualmente espaçados, chamada neste trabalho de malha regular, contém dezesseis pontos no contorno e nove no interior; e a outra com 25 pontos aleatórios, também chamada de sequência de pontos halton. Esta última malha, foi gerada pelo programa *haltonseq.m*,<sup>1</sup> codificado em MATLAB, escrito por Daniel Dougherty.

Para melhor visualização, na figura 4.2 apresenta-se a distribuição dos pontos nos dois tipos de malha empregados.

---

<sup>1</sup> Tal programa pode ser encontrado em MATLAB Central File Exchange.



**Figura 4.2** (esq.) - malha aleatória de 25 pontos; (dir.) – malha de 25 pontos igualmente espaçados

Os pontos das malhas correspondem aos centros das funções de base radial de suporte compacto formuladas por Wendland e Wu. Tais funções (listadas na tabela 4.1) foram utilizadas para interpolação.

## 5. RESULTADOS

### 5.1 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: RESULTADOS DO CÁLCULO DO VOLUME COM A FUNÇÃO DE FRANKE

Nas próximas duas tabelas, comparam-se os volumes obtidos pelos dois tipos de malha (a de pontos igualmente espaçados e a de pontos aleatórios) com o volume analítico.

Cabe assinalar que o rendimento da interpolação quanto ao valor do volume é verificado através do erro relativo percentual, computado a partir do volume analítico e do volume na interpolação pela seguinte expressão:

$$\text{Erro relativo \%} = \frac{|v_{\text{analítico}} - v_{\text{interp}}|}{v_{\text{analítico}}} \times 100\% \quad (5.1)$$

Nos testes propostos pelas tabelas 5.1 a 5.4, o suporte da função de interpolação é ( $\delta = 1,5$ ); em um domínio bidimensional  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ . Desta forma, a função de interpolação apresenta suporte global, ou seja, em todo o domínio.

TABELA 5.1. INTERPOLAÇÃO EM MALHA DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , (SUPORTE:  $\delta = 1.5$ )

Função de Wendland	Malha Regular		Malha Aleatória	
	Vol. Num.	Erro relat. %	Vol. Num.	Erro relat. %
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	0,596721134	<b>2,8502%</b>	0,620042172	<b>0,9466%</b>
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	0,597861035	<b>2,6647%</b>	0,613996705	<b>0,0377%</b>
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	0,594265802	<b>3,2500%</b>	0,607289456	<b>1,1297%</b>
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	0,616392768	<b>0,3524%</b>	0,621093413	<b>1,1177%</b>
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+\dots+8r^2)$	0,623700238	<b>1,5421%</b>	0,617846558	<b>0,5891%</b>
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	0,615341499	<b>0,1813%</b>	0,619535969	<b>0,8641%</b>
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$	0,622331890	<b>1,3193%</b>	0,617009329	<b>0,4528%</b>
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1+\dots+32r^3)$	0,625277275	<b>1,7989%</b>	0,613913515	<b>0,0512%</b>

Assim, ao se observar a tabela 5.1, previamente mostrada, constata-se que os melhores resultados estão relacionados à malha de pontos aleatórios (sequência halton), em comparação com os resultados obtidos pela malha de pontos igualmente espaçados. Apenas duas funções de Wendland forneceram resultados melhores para a malha regular.



Para a malha aleatória, pode-se destacar a função  $\varphi_{3,0}(r)$  como a que apresenta o melhor resultado; em seguida, está a função  $\varphi_{3,2}(r)$ . Já para a malha regular, o menor erro é fornecido pela função  $\varphi_{3,1}(r)$ . Vale destacar, que bons resultados eram esperados para esta última função, pois é mencionada por Schaback (2007) como uma das mais precisas funções radiais definidas como positivas e de suporte compacto.

A justificativa para os resultados expressos pela tabela 5.1 fundamenta-se no fato de que os pontos situados nas regiões centrais do domínio concentram a maior parte do volume gerado abaixo da curva, de modo que os pontos de contorno têm pouca influência nesse cálculo. Logo, como a malha aleatória é formada de pontos situados no domínio (sem pontos no contorno), o volume do mesmo nessas condições foi representado com maior eficiência.

Com a intenção de corroborar essa assertiva, na seção 5.2 será analisado um teste com a função parabolóide. Tal função apresenta seu volume concentrado próximo ao contorno. Logo, é possível que estes resultados se invertam para as malhas em questão.

Dando seqüência à argumentação ora apresentada, repetem-se os testes utilizando-se as funções de Wu.

TABELA 5.2. INTERPOLAÇÃO EM MALHA DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , (SUPORTE:  $\delta = 1.5$ )

Função de Wu	Malha Regular		Malha Aleatória	
	Volume	Erro relat. %	Volume	Erro relat. %
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5 + \dots + 5r^6)$	0,631900918	<b>2,8772%</b>	0,616399206	<b>0,3535%</b>
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$	0,625666498	<b>1,8622%</b>	0,617455708	<b>0,5255%</b>
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8 + \dots + 5r^4)$	0,616472789	<b>0,3654%</b>	0,620327065	<b>0,5720%</b>
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16 + \dots + 5r^3)$	0,598039410	<b>2,6356%</b>	0,610714532	<b>0,9929%</b>

Claro está que, no tocante ao teste com 25 pontos, novamente os menores erros aplicam-se para a malha aleatória, pelas mesmas razões anteriores.

Assim, constata-se que, para as duas diferentes malhas, as funções que apresentam o menor erro não são iguais, tal como aconteceu para as funções de Wendland, pois a função de Wu  $\varphi_{0,3}(r)$  assume posição de melhor desempenho na malha aleatória e, analogamente, a função  $\varphi_{2,3}(r)$ , de mesmo autor, assume tal papel para a outra malha.

## 5.2 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: RESULTADOS DO CÁLCULO DO VOLUME COM A FUNÇÃO PARABOLÓIDE

Nos testes anteriores, afirmou-se que a função teste de Franke apresentava seu volume gerado com base, principalmente, nas proximidades da região central do domínio. Com o propósito de se apresentar uma situação contrária à primeira, novos testes com o cálculo de volume são reproduzidos utilizando-se como função teste o parabolóide, cuja equação é descrita por:

$$z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \quad (5.2)$$

Ao contrário da função de Franke, essa nova função apresenta sua região de concentração do volume próxima ao contorno. Assim, esperar-se-iam melhores resultados para a malha homogênea em relação à malha aleatória, nos próximos experimentos contidos nas tabelas 5.3 e 5.4; para que seja confirmado o raciocínio ora apresentado.

TABELA 5.3. INTERPOLAÇÃO EM MALHA DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , (SUPORTE:  $\delta = 1.5$ )

Função de Wendland	Malha regular		Malha aleatória	
	Vol. Num.	Erro relat. %	Vol. Num.	Erro relat. %
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1 - r)_+$	0,18573973	11,4438	0,15250057	8,4997
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1 - r)_+^2$	0,18232750	9,3965	0,15047529	9,7148
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1 - r)_+^3$	0,18247054	9,4823	0,14735118	11,5893
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1 - r)_+^3(1 + 3r)$	0,17163366	<b>2,9802</b>	0,16129534	3,2228
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1 - r)_+^5(1 + \dots + 8r^2)$	0,17166157	2,9969	0,16204047	<b>2,7757</b>
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1 - r)_+^4(1 + 4r)$	0,17431406	4,5884	0,15926304	4,4422
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1 - r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$	0,17325679	3,9541	0,16066774	3,5994
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1 - r)_+^8(1 + \dots + 32r^3)$	0,17314550	3,8873	0,16092985	3,4421

A tabela acima indica resultados mais próximos entre si, ou seja, observa-se que a superioridade de uma malha sobre a outra existe, mas a diferença entre os valores não é tão elevada quanto no teste anterior com a função de Franke.

TABELA 5.4. INTERPOLAÇÃO EM MALHA DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , (SUPORTE:  $\delta = 1.5$ )

Função de Wu	Malha regular		Malha aleatória	
	Volume	Erro relat. %	Volume	Erro relat. %
$\phi_{0,3}(r) \doteq (1 - r)_+^7(5 + \dots + 5r^6)$	0,16963381	1,7803	0,16363817	1,8171
$\phi_{1,3}(r) \doteq (1 - r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$	0,17129343	2,7761	0,16226463	2,6412
$\phi_{2,3}(r) \doteq (1 - r)_+^5(8 + \dots + 5r^4)$	0,17393528	4,3612	0,15993689	4,0379
$\phi_{3,3}(r) \doteq (1 - r)_+^4(16 + \dots + 5r^3)$	0,18093117	8,5587	0,14983492	10,0990

O conjunto dos resultados referentes às tabelas 5.3 e 5.4 aponta alguns resultados (cerca de 40%) com melhor desempenho voltado para a malha homogênea. Nos testes anteriores (tabelas 5.1 e 5.2), com a função de Franke, este percentual era menor (25%). Isso mostra que os resultados melhoraram para a malha homogênea.

Assim, a afirmação de que, para o cálculo do volume, os pontos de interpolação devem estar situados em maior número onde o volume da função está concentrado, ainda é plausível. Vale ressaltar, que a superioridade da malha homogênea não foi tão significativa, talvez pelo fato de que o valor máximo da função paraboloidal — no domínio utilizado — seja menor que o valor máximo da função de Franke, sendo menor também o volume do parabolóide.

Destarte, a fixação dos pontos onde a função concentra maior volume influencia na eficiência deste cálculo. Porém, devem existir outros fatores que também têm influência, visto que nem todos os resultados da tabela 5.4 apontam a malha homogênea como a mais precisa.<sup>2</sup> Por exemplo: A função que se deseja interpolar pode ser mais “propícia” para certa malha; ou ainda, o contorno “mal delimitado” (para o cálculo de volume) pode ser mais apropriado, posto que neste tipo de aplicação, a função de interpolação poderá oscilar no contorno e compensar o erro no cálculo do valor numérico do volume.

### 5.3 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: RESULTADOS DO ERRO NO VALOR DA IMAGEM DA FUNÇÃO DE FRANKE

O cálculo de volumes apresenta dois sérios inconvenientes: no primeiro deles, é possível haver compensações de valores errôneos acima ou abaixo do valor exato, o que em termos de teste, não é desejável. A segunda razão é que em muitas funções-teste o volume é preponderantemente gerado com base nos valores de domínio, conforme ocorreu no teste precedente com a função de Franke.

Assim, os resultados das tabelas 5.5 e 5.6 comparam o Erro Médio Quadrático (EMQ) para os dois tipos de malhas abordados. O EMQ é calculado para um conjunto de pontos igualmente espaçados, que formam uma grade  $[40 \times 40]$  no domínio bidimensional  $[0,1]^2$ . Para isso, utiliza-se a seguinte equação:

---

<sup>2</sup> Este tema poderá ser devidamente explanado em trabalhos posteriores.

$$\text{EMQ} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [F(\xi_i) - s(\xi_i)]^2} \quad (5.3)$$

Onde:

$F(\xi_i)$  — valor da função analítica em um ponto  $\xi_i$ ;

$s(\xi_i)$  — valor da função de interpolação em um ponto  $\xi_i$ ;

$M$  — número total de pontos.

É importante esclarecer que a equação (5.3) foi utilizada como parâmetro de aferição do erro em diversos trabalhos sobre o tema em questão, como exemplo, tem-se o trabalho de Fasshauer (2007), Karur e Ramachandran (1994) bem como o de Wong, Hon e Golberg (2002).

TABELA 5.5. COMPARAÇÃO ENTRE O EMQ NA INTERPOLAÇÃO COM FBRSC'S DE WENDLAND EM MALHAS DE 25 PONTOS EM  $[0, 1]^2$  (SUPORTE:  $\delta = 1.5$ )

Função de Wendland	EMQ malha Regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	<b>2,83137E-02</b>	6,49944E-02
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	<b>2,90399E-02</b>	7,36518E-02
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$	<b>3,35389E-02</b>	6,99270E-02
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1 + \dots + 8r^2)$	<b>3,65216E-02</b>	7,81939E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1 + \dots + 32r^3)$	<b>3,66880E-02</b>	7,82100E-02
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	<b>5,87112E-02</b>	7,02582E-02
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	<b>5,99568E-02</b>	8,73171E-02
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	<b>6,00843E-02</b>	5,82867E-02

Agora, ao contrário dos resultados para os testes para a determinação do volume, nos quais a malha de pontos aleatórios apresentou menores erros, analisando-se os valores do EMQ mostrados na tabela 5.5 constatam-se melhores resultados para a malha de pontos igualmente espaçados. A razão disso provavelmente está ligada aos fatores anteriormente expostos, particularmente a distribuição predominante do volume no interior do domínio, que para o EMQ tem outra importância.

Vale observar que a função  $\varphi_{3,1}(r)$  apresenta o melhor resultado (menor EMQ) para a malha homogênea e o segundo melhor para a outra malha.

A tabela 5.6 é uma réplica da tabela anterior; porém, nesse caso utilizam-se as funções de Wu.

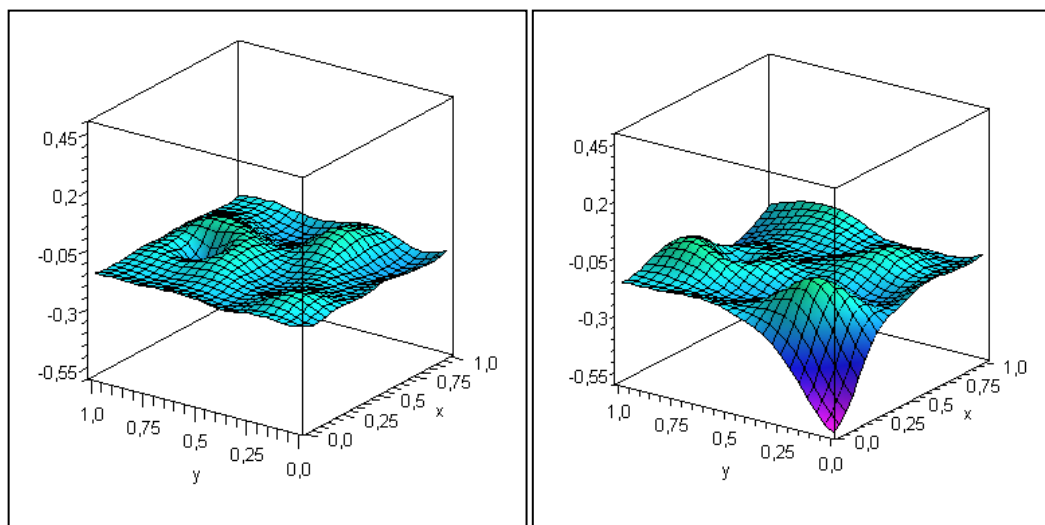
TABELA 5.6. COMPARAÇÃO ENTRE O EMQ NA INTERPOLAÇÃO COM FBRSC'S DE WU EM MALHAS DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ . (SUPORTE:  $\delta = 1.5$ )

Função de Wu	EMQ malha Regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8 + \dots + 5r^4)$	<b>2,97182E-02</b>	6,78403E-02
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$	<b>3,91023E-02</b>	8,29019E-02
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5 + \dots + 5r^6)$	<b>4,71556E-02</b>	1,11437E-01
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16 + \dots + 5r^3)$	<b>5,49928E-02</b>	6,28686E-02

Comparando-se os valores contidos nas Tabelas 5.5 e 5.6, notar-se-á que geralmente o EMQ obtido para as funções de Wendland foi ligeiramente menor que o EMQ obtido para as funções de Wu (para 25 pontos de interpolação).

As funções de Wu também apresentam melhores resultados para a malha de pontos igualmente espaçados.

Para melhor entender esse comportamento, é visto adiante, através da exposição de gráficos, que o erro de interpolação no contorno da malha de pontos aleatórios é muito alto, fazendo com que o EMQ seja maior se comparado com o valor obtido pela malha de pontos igualmente espaçados, pois essa última malha apresenta interpolação no contorno mais exata.



**Figura 5.1** Gráfico do erro na interpolação da função de Franke com o uso da função de Wendland  $\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$ ;  $C^2 \cap PD_3$ ; suporte:  $\delta = 1,5$ ; (esq.) - malha regular de 25 pontos; (dir.) - malha aleatória de 25 pontos.

Para que se obtenha um parâmetro de aferição do erro em forma percentual, introduzir-se-á uma nova medida de erro: o termo EM% (Erro Médio percentual). Além disso, também será contabilizado o percentual não nulo da matriz de interpolação (% Não Nulo).

O Erro médio percentual, para a função de Franke, foi calculado através da expressão (5.4).

$$EM\% = \sum_{i=1}^M \frac{[F(\xi_i) - \varphi(\xi_i)]}{1,65 \cdot M} \cdot 100\% \quad (5.4)$$

Tal parâmetro foi obtido nos mesmos pontos onde foi calculado o EMQ. A constante (1,65), no denominador, é o valor da amplitude da função de Franke no domínio  $[0,1]^2$ , enquanto  $M$  é o número total de pontos. Assim, foi possível relacionar o valor do erro médio de interpolação com a amplitude da função teste, tomando-se uma amostra de  $[40 \times 40]$  pontos igualmente espaçados.

Os novos experimentos foram realizados utilizando-se uma função de Wendland e uma função de Wu, ambas de suavidade  $C^4$ , estritamente positivas definidas e radiais em  $\mathbb{R}^3$ , para possibilitar a comparação.

Nas tabelas 5.7 e 5.8 varia-se o suporte da função de interpolação proporcionalmente ao valor da diagonal ( $d$ ) do domínio da função teste de Franke.

TABELA 5.7. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$  MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

SUPORTE	EMQ	EM%	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	2,77877E-01	12,2822	27,04	0,406595429	33,80%
<b><math>d/2 \approx 0,714</math></b>	<b>2,74772E-02</b>	<b>1,2980</b>	<b>57,76</b>	<b>0,616392776</b>	<b>0,35%</b>
$3d/4 \approx 0,893$	2,97928E-02	1,4070	74,40	0,619912589	0,93%
$d \approx 1,429$	3,30467E-02	1,5782	100,00	0,622115662	1,28%

A partir dos resultados da tabela 5.7, pode-se inferir que: com o suporte igual à metade da diagonal do domínio, a precisão na interpolação é maior. Este é um resultado inesperado, visto que, quanto maior o suporte, a função radial torna-se menos compacta e mais pontos são “acessíveis” ao centro de cada função.

O procedimento se repete para a tabela a seguir, utilizando-se a função de Wu.

TABELA 5.8. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU  $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

SUPORTE	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	2,12000E-01	9,0957	27,04	0,461832191	24,81%
<b><math>d/2 \approx 0,714</math></b>	<b>3,14404E-02</b>	<b>1,4784</b>	<b>57,76</b>	<b>0,620625616</b>	<b>1,04%</b>
$3d/4 \approx 0,893$	3,36934E-02	1,5923	74,40	0,623190055	1,46%
$d \approx 1,429$	3,85701E-02	1,8414	100,00	0,625648536	1,86%

Novamente, para a malha de 25 pontos, o melhor suporte assume o valor de “d/2”.

Nas duas tabelas anteriores observa-se que para suportes maiores que “d/4”, a função de Wendland supera a função de Wu nos resultados dos testes apresentados.

Replicados para a malha de pontos aleatórios, esses testes estão presentes nas tabelas 5.9 e 5.10. Neste caso, o suporte é variado proporcionalmente ao raio da maior circunferência “vazia” (sem pontos bases internos) que pode ser colocada nesta malha de 25 pontos.

TABELA 5.9. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , MALHA DE 25 PONTOS ALEATÓRIOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

Suporte	EMQ	EM %	% Não nulo	VOLUME	ERRO VOLUME
$r \approx 0,27$	3,54146E-01	15,7508	18,40	0,360149423	41,37%
$2r \approx 0,54$	8,96585E-02	3,1982	57,12	0,575925306	6,24%
<b><math>3r \approx 0,81</math></b>	<b>4,17210E-02</b>	<b>1,7852</b>	90,08	0,603999869	1,67%
<b><math>4r \approx 1,08</math></b>	5,16353E-02	2,2261	100,00	<b>0,612468927</b>	<b>0,29%</b>
$5r \approx 1,35$	6,48329E-02	2,5946	100,00	0,616063053	0,30%

Analisando-se a tabela acima, pode-se perceber que para o suporte igual a “3r” o EMQ é mínimo, mas o erro em relação ao volume continua diminuindo até que o valor do suporte atinja “4r”. Por isso, pode-se constatar que um pequeno erro no cálculo do volume não afirma que a interpolação foi mais exata, pois o cálculo deste volume pode ter sido deficiente em uma região, mas compensado pela soma algébrica de outra deficiência (de sinal oposto) em outra região.

Em decorrência disso, pode-se concluir que o melhor suporte — para as condições apresentadas neste teste — pode ser considerado o de valor igual a “3r”, pois apresentou um menor EMQ, bem como um menor erro médio percentual.

A tabela a seguir apresenta os testes replicados para a função de Wu.

TABELA 5.10. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU  $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , MALHAS DE 25 PONTOS ALEATÓRIOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

SUPORTE	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$r \approx 0,27$	3,13832E-01	13,5576	18,40	0,39993408	34,89%
$2r \approx 0,54$	7,55796E-02	2,6313	57,12	0,586204846	4,56%
<b><math>3r \approx 0,81</math></b>	<b>5,32940E-02</b>	<b>2,2309</b>	90,08	0,606958330	1,18%
<b><math>4r \approx 1,08</math></b>	6,82038E-02	2,8308	100,00	0,61359794	<b>0,10%</b>
$5r \approx 1,35$	7,91013E-02	3,1141	100,00	0,61673482	0,41%

Os resultados da tabela 5.10 possuem características semelhantes aos obtidos pela tabela anterior, com a função de Wendland. Pois a função de Wu alcançou um EMQ mínimo, também no suporte de  $3r$ . Constata-se que o valor deste erro é um pouco maior que aquele obtido com a função de Wendland.

Dos resultados anteriores (expostos nas tabelas 5.5 a 5.10), no tocante à comparação do desempenho das malhas em questão, verifica-se um melhor desempenho da malha aleatória para o teste que determina o volume; ao passo que, para o cálculo da imagem (valor da função), a malha com pontos igualmente espaçados foi mais precisa tanto na medida EMQ quanto na EM%.

Os resultados das tabelas 5.11 e 5.12, apresentadas a seguir, foram obtidos variando-se o número de pontos (igualmente espaçados) das malhas e mantendo-se fixo o suporte de  $\delta = (1,429)$ .

TABELA 5.11. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$ , SUPORTE  $\delta = (1,429)$  FIXO, NO DOMÍNIO  $[0, 1]^2$ .

N	EMQ	EM %	VOLUME	Erro% volume
25	<b>3,30467E-02</b>	<b>1,5782</b>	0,622115663	1,28414%
81	<b>4,47843E-03</b>	<b>0,1677</b>	0,614816829	0,09584%
289	<b>9,62005E-05</b>	<b>0,0029</b>	0,614251532	0,00381%
1089	<b>3,17382E-06</b>	<b>0,0001</b>	0,614229089	0,00016%



Neste caso, constata-se uma convergência significativa dos resultados. A função de interpolação assume valores muito próximos da função analítica para uma malha de 1089 pontos. Porém, o preço a ser pago quando se deseja uma boa precisão com o aumento do número de pontos, é um dispêndio de tempo de processamento.

Isso significa que, obtendo-se convergência numérica, sacrifica-se a eficiência computacional, e o agente intermediador dessa interação é o suporte da função radial de base compacta. Ou seja: se o suporte é pequeno, a matriz de interpolação apresentará vários elementos nulos, e o algoritmo de solução do sistema linear pode estar preparado para eliminar etapas, economizando assim, tempo e custo computacional. Por outro lado, se o suporte é grande, aquela matriz será cheia, e a convergência será maior; no entanto, o tempo de processamento pode ser inapropriado.

O problema referente a essas funções é similar ao caso referente às RBFs de suporte global: quando a busca por precisão pode conduzir ao mau condicionamento da matriz de interpolação.

Na seqüência, apresenta-se um experimento similar com a função de Wu  $\varphi_{1,3}$ .

TABELA 5.12. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU  $\varphi_{1,3}(\mathbf{r}) \doteq (1 - \mathbf{r})_+^6 (6 + \dots + 5\mathbf{r}^5)$  SUPORTE  $\delta = (1, 429)$  FIXO, NO DOMÍNIO  $[0, 1]^2$ .

N	EMQ	EM %	VOLUME	ERRO VOLUME
25	<b>3,85701E-02</b>	<b>1,8414</b>	0,625648537	1,85931%
81	<b>4,55754E-03</b>	<b>0,1735</b>	0,614852788	0,10170%
289	<b>8,94740E-05</b>	<b>0,0026</b>	0,614248391	0,00330%
1089	<b>2,72624E-06</b>	<b>0,00007</b>	0,614228867	0,00012%

Ao se analisar a tabela acima, observa-se nos testes com malhas acima de 81 pontos, melhores resultados comparados àqueles obtidos pela função de Wendland  $\varphi_{3,2}$ .

Vale lembrar, que nas duas tabelas anteriores o percentual não nulo das matrizes de interpolação é de 100%.

Os resultados das tabelas 5.13 e 5.14 a seguir foram construídos com base no que é denominado na literatura especializada de teste estacionário, ou seja, varia-se o

suporte e também o número de pontos, mantendo-se constante determinada quantidade de pontos no interior do suporte. Considera-se um suporte inicial de ( $\delta = d/2 = 0,714$ ) para  $N = 25$  (número de pontos bases na malha) de forma que um ponto central tenha um suporte de outros 24 pontos vizinhos. A partir daí, aumenta-se o número de pontos (igualmente espaçados), reduzindo à metade a distância entre eles; simultaneamente, faz-se a redução do suporte, também à metade. Assim, o número de pontos em suporte permanece aproximadamente constante neste tipo de teste.

A Tabela 5.13 apresenta resultados dessa natureza para a função de Wendland.

TABELA 5.13. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$ , SUPORTE EM APROXIMADAMENTE 25 PONTOS, VARIANDO-SE O NÚMERO DE PONTOS NO DOMÍNIO  $[0, 1]^2$ .

N	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
25	2,74772E-02	1,29802	57,76	0,616392776	0,35242%
81	1,39567E-02	0,58743	23,18	0,616528052	0,37444%
289	1,11836E-02	0,39092	7,47	0,614641427	<b>0,06729%</b>
1089	5,95520E-03	0,23141	2,13	0,613369549	0,13978%

Pode-se perceber que os resultados melhoram levemente com o acréscimo de pontos. Mas, como era de se esperar, a convergência não é tão satisfatória quanto à obtida nas tabelas 5.11 e 5.12.

Para o teste com  $N = 1089$ , enquanto o EMQ diminuiu, o erro em relação ao volume aumentou ligeiramente. Isso advém da quantidade de operações realizadas para o cálculo do volume, que é muito grande; com isso, o erro computacional pode ter sido aumentado decorrente da maior quantidade de pontos da malha.

TABELA 5.14. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU  $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6+\dots+5r^5)$ , SUPORTE EM APROXIMADAMENTE 25 PONTOS, VARIANDO-SE O NÚMERO DE PONTOS EM  $[0, 1]^2$ .

N	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
25	3,14404E-02	1,4784353	57,76	0,620625616	1,04155%
81	1,38316E-02	0,5789870	23,18	0,618164122	0,64080%
289	1,12248E-02	0,3570699	7,47	0,616304456	0,33804%
1089	<b>5,66934E-03</b>	0,1804764	2,13	0,615062666	<b>0,13587%</b>

## 5.4 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: RESULTADOS DO ERRO NO VALOR DA IMAGEM DA FUNÇÃO PARABOLÓIDE

A tabela 5.15 é uma réplica da tabela 5.5 (seção 5.3) na qual se utilizou a função teste de Franke; porém, aqui a função parabolóide é empregada como função teste.

TABELA 5.15. COMPARAÇÃO ENTRE O EMQ NA INTERPOLAÇÃO DE FBRSC'S DE WENDLAND EM MALHAS DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$  (SUPORTE:  $\delta = 1.5$ )

Função de Wendland	EMQ malha Regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	<b>1,33071E-02</b>	3,00708E-02
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	<b>8,97056E-03</b>	2,24293E-02
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$	<b>1,11789E-02</b>	2,51673E-02
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+\dots+8r^2)$	<b>8,37258E-03</b>	1,99586E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1+\dots+32r^3)$	<b>1,07832E-02</b>	2,39979E-02
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	<b>1,78958E-02</b>	5,60128E-02
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	<b>2,13589E-02</b>	5,32600E-02
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	<b>1,85939E-02</b>	6,22679E-02

Novamente, a malha homogênea apresenta menores EMQs. Essa superioridade de resultados para a malha regular é explicada com base nos erros contidos no contorno da malha aleatória, haja vista que esta malha não delimita bem tal região, em virtude da falta de pontos bases.

Assim, na região do contorno da malha aleatória, estão os principais erros de interpolação e são bem elevados em relação àqueles cometidos pela malha homogênea.

Na tabela 5.16, os experimentos foram novamente repetidos para as funções de Wu.

TABELA 5.16. COMPARAÇÃO ENTRE O EMQ NA INTERPOLAÇÃO DE FRBC DE WU EM MALHAS DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$  (SUPORTE:  $\delta = 1.5$ )

Função de Wu	EMQ malha Regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8+\dots+5r^4)$	<b>1,25737E-02</b>	2,78618E-02
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6+\dots+5r^5)$	<b>7,71888E-03</b>	1,89366E-02
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5+\dots+5r^6)$	<b>4,90930E-03</b>	1,32675E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16+\dots+5r^3)$	<b>1,77484E-02</b>	5,61217E-02

Comparando-se o rendimento das malhas de 25 pontos até aqui, com relação ao parâmetro EMQ, a malha homogênea apresenta melhor desempenho. Tal afirmativa

ganha mais respaldo com os resultados presentes na tabela 5.16, na qual são expostos testes com funções de Wu.

As tabelas 5.17 e 5.18 a seguir, são similares às tabelas 5.7 e 5.8, ou seja, são produzidas a partir dos mesmos procedimentos, alterando-se a função teste, que neste caso é a função parabolóide (eq. (5.2)). Vale lembrar que nestes experimentos, varia-se o suporte da função de interpolação proporcionalmente ao valor da diagonal ( $d$ ) do domínio.

Ademais, o Erro médio percentual para a função parabolóide foi obtido através da seguinte equação:

$$EM\% = \sum_{i=1}^M \frac{[F(\xi_i) - s(\xi_i)]}{0,5 \cdot M} \cdot 100\% \quad (5.5)$$

Onde a constante (0,5) presente no denominador da equação (5.5) é o valor da amplitude do parabolóide no domínio  $[0,1]^2$ .

Aqui, os testes contidos nestas tabelas não apenas estabelecem uma competição entre duas funções de interpolação (Wendland  $\varphi_{3,2}(r)$ , e Wu  $\varphi_{1,3}(r)$ ), como também servirão para verificar se o fato ocorrido com a função de Franke (tabela 5.7) — aquele que mostrou melhores resultados para o suporte igual a  $d/2$  — se repetirá para o teste com a função parabolóide.

TABELA 5.17. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$  MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE .

SUPORTE	EMQ	EM%	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	5,26193E-02	7,8561	27,04	0,129728539	22,16%
$d/2 \approx 0,714$	3,60116E-02	5,3446	57,76	0,187845476	12,71%
$3d/4 \approx 0,893$	2,65815E-02	3,9643	74,40	0,182362317	9,42%
<b><math>d \approx 1,429</math></b>	<b>1,21682E-02</b>	<b>1,8075</b>	<b>100,00</b>	<b>0,173832396</b>	<b>4,30%</b>

Nos resultados da tabela 5.17, ao contrário dos testes com a função de Franke, não foi constatado nenhum tipo de “anormalidade”. Portanto, o melhor resultado é obtido quando o valor do suporte igual ao da diagonal ( $d$ ) do domínio, ou seja, quando ele assume um valor global.

A tabela 5.18 contém resultados de testes similares utilizando-se a FBRSC de Wu ( $\varphi_{1,3}$ ).

TABELA 5.18. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU  $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

SUPORTE	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	3,26850E-02	4,8628	27,04	0,147258385	11,64%
$d/2 \approx 0,714$	3,39812E-02	5,0837	57,76	0,186308498	11,79%
$3d/4 \approx 0,893$	1,98024E-02	2,9937	74,40	0,178657020	7,19%
$d \approx 1,429$	8,33334E-03	1,2478	100,00	0,171636151	2,98%

Para a função de Wu, tal qual ocorre com a função de Wendland, o melhor resultado surge quando o suporte é igual ao valor da diagonal (d). Mostrando-se um comportamento mais adequado na interpolação do parabolóide, visto que na interpolação da função de Franke, os melhores resultados foram obtidos para um suporte igual a  $d/2$  — algo inesperado no contexto deste trabalho.

Vale ressaltar que, para os resultados com a função de Franke a função de Wendland apresentava erros menores que a função de Wu; por outro lado, para o teste com o parabolóide este fato se inverteu. Assim, comparando-se o rendimento da função de Wendland  $\varphi_{3,2}(r)$  com a função de Wu  $\varphi_{1,3}(r)$  (na interpolação do parabolóide com uma malha homogênea de 25 pontos), verifica-se que a segunda função fornece melhores resultados.

Nos testes a seguir (tabelas 5.19 e 5.20), bem como nos testes da seção anterior com a função de Franke, o suporte é variado proporcionalmente ao raio ( $r$ ). Onde: “ $r$ ” é o raio do maior círculo “vazio” (sem pontos internos), que poderia ser inserido na malha de 25 pontos aleatórios.

TABELA 5.19. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$ , MALHAS DE 25 PONTOS ALEATÓRIOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

Suporte	EMQ	EM %	% Não nulo	VOLUME	ERRO VOLUME
$r \approx 0,27$	1,48153E-01	19,8631	18,40	0,078775929	52,73%
$2r \approx 0,54$	8,94437E-02	9,9030	57,12	0,134647962	19,21%
$3r \approx 0,81$	5,61929E-02	5,5172	90,08	0,150558021	9,67%
$4r \approx 1,08$	3,87234E-02	3,5125	100,00	0,156696713	5,98%
$5r \approx 1,35$	<b>2,89430E-02</b>	<b>2,5123</b>	100,00	0,159620611	<b>4,23%</b>

É notório que há uma pequena convergência dos resultados neste teste. O EM% reduz a cada etapa, ou seja, à medida que o suporte aumenta, os valores dos parâmetros de aferição do erro diminuem.

Portanto, o melhor resultado é obtido para o suporte igual a cinco vezes o valor do raio do círculo vazio.

Segue a tabela com os resultados para a função de Wu.

TABELA 5.20. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU  $\phi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , MALHAS DE 25 PONTOS ALEATÓRIOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

SUPORTE	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$r \approx 0,27$	1,41987E-01	18,3910	18,40	0,087494710	47,50%
$2r \approx 0,54$	8,12251E-02	8,8093	57,12	0,139086663	16,55%
<b><math>3r \approx 0,81</math></b>	4,58102E-02	4,2860	90,08	0,154432025	7,34%
<b><math>4r \approx 1,08</math></b>	2,93069E-02	2,5068	100,00	0,159480902	4,31%
$5r \approx 1,35$	2,16197E-02	1,8209	100,00	0,161549312	3,07%

Novamente, os testes replicados para a malha aleatória, apresentam os melhores resultados quando se tem o maior valor do suporte da função de base radial compacta.

Da observação das duas tabelas anteriores pode-se inferir que: no que tange à malha de pontos aleatórios, bem como à malha homogênea, a função de Wu é mais precisa na interpolação do parabolóide, se comparada à função de Wendland. Contudo, o mesmo não ocorre quando se utiliza a função teste de Franke.

Mantendo-se a seqüência de testes realizados com a função de Franke, apresentam-se os testes com a função parabolóide, presentes nas tabelas 5.21 e 5.22. Nestes testes varia-se o número de pontos na malha regular e mantém-se fixo o suporte de  $\delta = 1,429$ .

TABELA 5.21. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND  $\phi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$ , SUPORTE ( $\delta = 1,429$ ) FIXO, NO DOMÍNIO  $[0, 1]^2$ .

N	EMQ	EM %	VOLUME	Erro% volume
25	1,21682E-02	1,8075	0,173832396	4,29944%
81	1,31714E-03	0,1715	0,167201884	0,32113%
289	1,01170E-04	0,0105	0,166697121	0,01827%
1089	<b>4,06113E-06</b>	<b>0,00041</b>	0,166668205	<b>0,00092%</b>

Os resultados acima foram obtidos a partir de uma matriz de interpolação cheia, ou seja, o suporte da função radial abrange todo o domínio da função em estudo.

Para posterior comparação, são apresentados os resultados de interpolação do parabolóide com a função de Wu  $\varphi_{1,3}$ .

TABELA 5.22. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU  $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$  SUPORTE ( $\delta = 1,429$ ) FIXO, NO DOMÍNIO  $[0, 1]^2$ .

N	EMQ	EM %	VOLUME	ERRO VOLUME
25	8,33334E-03	1,2478	0,17163615	2,98169%
81	7,72807E-04	0,0988	0,16697848	0,18709%
289	5,53514E-05	0,0056	0,16668296	0,00977%
1089	2,16437E-06	0,00021	0,16666746	0,00048%

Vale lembrar que, nos testes com a função de Franke, alguns dos resultados foram favoráveis à função de interpolação de Wendland; quais sejam: os testes com malhas de 25 e 81 pontos. Por outro lado, para a nova função teste (parabolóide) a função de Wu superou a função de Wendland em todas as malhas.

O teste estacionário é novamente apresentado nas tabelas 5.23 e 5.24, na interpolação da função parabolóide.

TABELA 5.23. INTERPOLAÇÃO COM A FRBSC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$ , SUPORTE EM APROXIMADAMENTE 25 PONTOS, VARIANDO-SE O NÚMERO DE PONTOS NO DOMÍNIO  $[0, 1]^2$ .

N	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
25	3,601160E-02	5,3446	57,76	0,187845476	12,70729%
81	1,894510E-02	2,47331	23,18	0,174096907	4,45814%
289	1,062990E-02	1,11321	7,47	0,169351778	1,61107%
1089	4,029046E-03	0,43229	2,13	0,167512372	0,50742%

Vale lembrar que, no teste estacionário mantém-se 25 pontos de suporte na interpolação. Por isso a convergência dos parâmetros de aferição do erro não é tão significativa.

O percentual não-nulo diminui à medida que o número de pontos da malha aumenta. Isso ocorre porque com o aumento do número de pontos, o suporte é reduzido à metade, para manter-se estacionário os 25 pontos de suporte. Assim, reduzindo-se o suporte, o número de elementos nulos da matriz de interpolação aumenta.

Na tabela a seguir, apresentam-se os resultados obtidos para a função de Wu, ainda utilizando o teste estacionário.

TABELA 5.24. INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WU  $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6+\dots+5r^5)$ , SUPORTE EM APROXIMADAMENTE 25 PONTOS, VARIANDO-SE O NÚMERO DE PONTOS NO DOMÍNIO  $[0, 1]^2$ .

N	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
25	3,39812E-02	5,0837	57,76	0,186308498	11,78510%
81	1,91221E-02	2,5762	23,18	0,174019026	4,41142%
289	1,09291E-02	1,2081	7,47	0,169615914	1,76955%
1089	4,43861E-03	0,4626	2,13	0,167891821	0,73509%

Os resultados das duas tabelas anteriores apontam uma pequena vantagem da função de Wu, para a malha de 25 pontos. Porém, quando o percentual não nulo da matriz de interpolação diminui (malhas de 81, 289 e 1089 pontos), a função de Wendland mostra-se mais eficiente na interpolação do parabolóide.

## 5.5 INTERPOLAÇÃO SIMPLES: AFERIÇÃO DO ERRO NO CONTORNO E NO DOMÍNIO COM O USO DA MALHA REGULAR E ALEATÓRIA

Novos testes para aferição do erro de interpolação (relativos às malhas de 25 pontos regular e aleatória) foram realizados no contorno e no domínio, separadamente.

As figuras abaixo apresentam a distribuição dos pontos de aferição do erro calculado ora para o contorno, ora para o domínio.

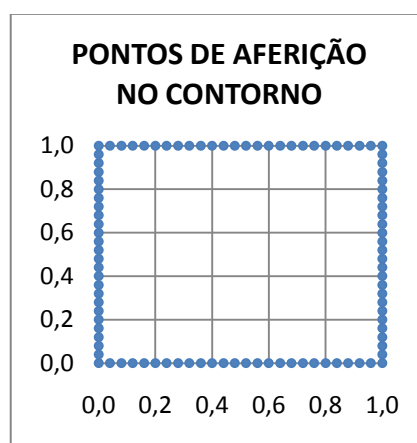


Figura 5.2 Pontos de aferição do erro (contorno)

A figura 5.2 representa uma malha contendo cem pontos de contorno nos quais os parâmetros de aferição do erro de interpolação serão calculados.



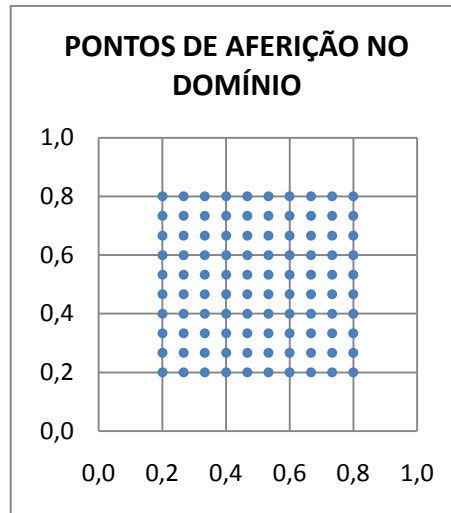


Figura 5.3 Pontos de aferição no domínio.

A figura 5.3 consiste em cem pontos contidos em uma sub-região interna ao domínio; sendo esta, separada do contorno por outra sub-região que não contém pontos de aferição. Considerando que os próximos experimentos consistem em verificar, separadamente, o erro de interpolação no domínio e no contorno.

### 5.5.1 Testes de aferição no contorno: função teste de Franke

Testes com pontos de aferição no contorno foram realizados para que se possa observar o comportamento das malhas na interpolação dessa região. Espera-se que a malha aleatória não ofereça uma boa interpolação no contorno, visto que ela não possui pontos bases exatamente contidos nessa região, pois tais pontos figuram de forma esparsa no domínio bidimensional  $[0,1]^2$ . Por outro lado, a malha regular contém 16 (dezesseis) pontos presentes no contorno e 9 (nove) pontos no domínio.

TABELA 5.25. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS DE AFERIÇÃO NO CONTORNO ( $\delta = 1, 5$ ).

Função de Wendland	EMQ contorno malha Regular	EMQ contorno malha aleatória
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	<b>2,07212E-02</b>	1,65330E-01
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	<b>1,96390E-02</b>	1,19368E-01
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	<b>1,90169E-02</b>	8,13346E-02
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	<b>1,11120E-02</b>	1,41057E-01
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+\dots+8r^2)$	<b>1,42484E-02</b>	1,45502E-01
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	<b>1,00862E-02</b>	1,19248E-01
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$	<b>1,25635E-02</b>	1,24771E-01
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1+\dots+32r^3)$	<b>1,28450E-02</b>	1,40755E-01

Pode-se notar que a malha homogênea apresenta valores menores do EMQ para todas as funções de Wendland na interpolação da função de Franke.

O mesmo pode ser observado em relação às funções de Wu na tabela abaixo.

TABELA 5.26. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS DE AFERIÇÃO NO CONTORNO ( $\delta = 1,5$ )

Função de Wu	RMS cont. malha Regular	RMS cont. malha aleatória.
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5 + \dots + 5r^6)$	<b>1,69327E-02</b>	2,19958E-01
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$	<b>1,54306E-02</b>	1,55661E-01
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8 + \dots + 5r^4)$	<b>1,11303E-02</b>	1,25524E-01
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16 + \dots + 5r^3)$	<b>1,76762E-02</b>	9,84046E-02

### 5.5.2 Testes de aferição no contorno: função teste — parabolóide

Para complementar a análise em questão, foram feitos novos testes utilizando-se a função parabolóide, no intuito de confirmar a superioridade da malha homogênea, no que tange à qualidade de interpolação no contorno:

TABELA 5.27. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS DE AFERIÇÃO NO CONTORNO ( $\delta = 1,5$ ).

Função de Wendland	EMQ malha Regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	<b>3,14957E-03</b>	1,24323E-01
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	<b>3,63575E-03</b>	1,30274E-01
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	<b>5,92553E-03</b>	1,44289E-01
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	<b>8,00069E-03</b>	5,51739E-02
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1 + \dots + 8r^2)$	<b>6,84741E-03</b>	4,99552E-02
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	<b>1,09096E-02</b>	7,36820E-02
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$	<b>9,22756E-03</b>	6,26199E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1 + \dots + 32r^3)$	<b>8,72901E-03</b>	6,00551E-02

Claro está que, se comparada à malha de pontos aleatórios, a interpolação no contorno com o uso da malha regular proporciona maior qualidade. Isto se deve ao fato de que a malha regular contém 64% de seus pontos bases delimitando o contorno, ao passo que a malha aleatória emprega todos estes pontos de forma esparsa no domínio.

TABELA 5.28. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS DE AFERIÇÃO NO CONTOURO ( $\delta = 1,5$ ).

Função de Wu	EMQ malha Regular	EMQ malha aleatória
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5 + \dots + 5r^6)$	<b>4,26854E-03</b>	3,36725E-02
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$	<b>6,34051E-03</b>	4,74655E-02
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8 + \dots + 5r^4)$	<b>1,01321E-02</b>	6,85554E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16 + \dots + 5r^3)$	<b>4,63705E-03</b>	1,30872E-01

Nota-se também, que experimentos com diferentes funções teste, resultam em precisão diferente na interpolação; mesmo que esses experimentos sejam realizados com funções interpolantes e malhas iguais.

Por exemplo: A função de Wendland  $\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$  na interpolação da função de Franke fornece um EMQ, no contorno, para a malha homogênea igual a  $(2,07212E - 02)$ . Por outro lado, esta mesma função quando utilizada na interpolação do parabolóide com a mesma malha, fornece um EMQ com um valor de  $(3,14957E - 03)$ . Portanto, a exatidão da interpolação dependerá da função teste.

### 5.5.3 Testes domínio: função teste de Franke

Os testes desta seção estão relacionados com a aferição do erro de interpolação calculados nos pontos da malha contida na figura 5.3. E foram realizados com a finalidade de se verificar se a malha aleatória apresenta melhor precisão no domínio em relação à malha regular, visto que a primeira contém mais pontos nessa região.

TABELA 5.29. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS REFERENTES À FIG. (5.3) PARA AFERIÇÃO NO DOMÍNIO ( $\delta = 1,5$ )

Função de Wendland	EMQ dom. malha Regular	EMQ dom. malha Aleatória.
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	<b>5,86824E-02</b>	6,28924E-02
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	<b>5,80366E-02</b>	6,10270E-02
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	<b>5,93949E-02</b>	6,05227E-02
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	<b>3,13586E-02</b>	3,60421E-02
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1+\dots+8r^2)$	<b>3,29107E-02</b>	3,62051E-02
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	<b>3,11401E-02</b>	3,50827E-02
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$	<b>3,26422E-02</b>	3,49214E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1+\dots+32r^3)$	<b>3,37565E-02</b>	3,54930E-02

Os resultados da tabela acima apresentam valores razoavelmente aproximados, porém, aqueles erros referentes à malha regular ainda são menores que os outros.

TABELA 5.30. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS REFERENTES À FIG. (5.3) PARA AFERIÇÃO NO DOMÍNIO ( $\delta = 1,5$ ).

Função de Wu	EMQ dom. malha Regular	EMQ dom. malha aleat.
$\varphi_{0,3}(r) \doteq (1-r)_+^7(5 + \dots + 5r^6)$	<b>3,55522E-02</b>	3,84848E-02
$\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$	<b>3,33790E-02</b>	3,68745E-02
$\varphi_{2,3}(r) \doteq (1-r)_+^5(8 + \dots + 5r^4)$	<b>3,12382E-02</b>	3,57143E-02
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^4(16 + \dots + 5r^3)$	<b>5,46053E-02</b>	5,85705E-02

A malha aleatória poderia apresentar menores EMQs, nos resultados contidos nas tabelas 5.29 e 5.30, pois seus pontos bases de interpolação estão situados internos ao domínio, ou seja, fora do contorno. No entanto, os erros foram menores para a malha homogênea em todas as funções de interpolação, embora a malha homogênea compartilhe seus pontos entre o contorno e o domínio.

#### 5.5.4 Testes domínio: função teste — parabolóide

Por fim, os experimentos numéricos com o domínio da função parabolóide encerram o uso de pelo menos duas funções teste, para que se confirmem os resultados ora observados. Assim, a tabela a seguir apresenta os resultados para as funções de Wendland.

TABELA 5.31. RESULTADOS DO EMQ PARA 100 PONTOS REFERENTES À FIG. (5.3) PARA AFERIÇÃO NO DOMÍNIO ( $\delta = 1,5$ ).

Função de Wendland	EMQ malha Regular	EMQ malha Aleatória
$\varphi_{1,0}(r) \doteq (1-r)_+$	1,40435E-02	<b>1,03172E-02</b>
$\varphi_{3,0}(r) \doteq (1-r)_+^2$	1,15923E-02	<b>9,99295E-03</b>
$\varphi_{5,0}(r) \doteq (1-r)_+^3$	1,16816E-02	<b>1,01484E-02</b>
$\varphi_{1,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(1+3r)$	2,77022E-03	<b>2,46247E-03</b>
$\varphi_{1,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(1 + \dots + 8r^2)$	2,78632E-03	<b>1,87760E-03</b>
$\varphi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(1+4r)$	4,49845E-03	<b>3,41245E-03</b>
$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$	3,71656E-03	<b>2,52126E-03</b>
$\varphi_{3,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(1 + \dots + 32r^3)$	3,50375E-03	<b>2,21157E-03</b>

Analisando-se a malha aleatória, com base nos testes realizados ora com a função teste de Franke, ora com a função Parabolóide, os erros sempre foram maiores no contorno que no domínio. Evidentemente, isso se deve à forma como estão dispostos os pontos nesta malha.

Neste mesmo prisma, analisando-se a malha regular, os menores erros de interpolação localizavam-se onde o valor da função teste era mais elevado. Assim, na interpolação da função de Franke, o maior erro inside sobre a região central do domínio — poder-se-ia pensar, imediatamente, que isso ocorre devido ao fato de que a malha contém menor quantidade de pontos bases no domínio do que no contorno — no entanto, realizando-se a interpolação do Parabolóide de equação (5.2), com a mesma malha, o maior erro localiza-se sobre o contorno.

Por conseguinte, observa-se que: mesmo com a malha regular contendo mais pontos bases no contorno que no domínio, existe o caso em que o erro de interpolação é maior, sobretudo naquela região com mais pontos.

## 5.6 INTERPOLAÇÃO COM ACRÉSCIMO DE POLINÔMIOS: FUNÇÃO TESTE — PARABOLÓIDE

A Fundamentação teórica sobre os testes aplicados neste capítulo, encontra-se na seção 3.5. Como foi argumentado naquela seção, caso os dados da função na qual se deseja aproximar forem provenientes de um polinômio, cujo o grau é menor ou igual ao grau do polinômio acrescido à função de interpolação, então, a função é ajustada exatamente.

Os testes a seguir foram realizados expandindo-se as FRBC's com  $p_1(x, y) = 1$ ,  $p_2(x, y) = x$ ,  $p_3(x, y) = y$ ,  $p_4(x, y) = x^2$ ,  $p_5(x, y) = y^2$  e  $p_6(x, y) = xy$ ,

À medida que, o parabolóide (eq. (5.2)) pode ser representado por um polinômio de grau igual a dois, para validar a interpolação realizada com o código (escrito em FORTRAN) do presente trabalho, propõem-se a interpolação do parabolóide para verificar se a solução numérica será mesmo exata. Tal exercício pode ser observado com os resultados presentes na tabela 5.32.

TABELA 5.32. INTERPOLAÇÃO COM A FBRSC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3) + p_1 + \dots + p_6$  MALHA REGULAR DE 25 PONTOS EM  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

SUPORTE	EMQ	EM%	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
d/4 $\approx$ 0,357	1,06319E-15	0,00000	42,77	0,166666667	0,00000%
d/2 $\approx$ 0,714	3,47550E-16	0,00000	62,75	0,166666667	0,00000%
3d/4 $\approx$ 0,893	2,56313E-16	0,00000	73,57	0,166666667	0,00000%
d $\approx$ 1,429	1,39864E-16	0,00000	90,22	0,166666667	0,00000%

Como esperado, o ajuste do parabolóide é exato, ou seja, os erros contidos na tabela 5.32 são originados pela máquina, e isso fornece amparo para que se possa realizar novos testes confiando-se que os resultados estão corretos.

## 5.7 INTERPOLAÇÃO COM ACRÉSCIMO DE POLINÔMIOS: RESULTADOS FUNÇÃO DE FRANKE

No passo seguinte, realiza-se um teste com a função de Franke. Quanto a esse teste, pode-se adiantar a informação de que a função de Franke não será ajustada com exatidão, pois ela não é representada apenas por polinômios, como a função paraboloidal.

TABELA 5.33 INTERPOLAÇÃO COM A FRBC DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3) + p_1 + \dots + p_6$  MALHA REGULAR DE 25 PONTOS  $[0,1]^2$ , VARIANDO-SE O SUPORTE.

SUPORTE	EMQ	EM%	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO VOLUME
$d/4 \approx 0,357$	1,06536E-01	5,03862	42.77	0,600764768	2,19191%
$d/2 \approx 0,714$	3,46763E-02	1,69979	62.75	0,613336900	<b>0,14510%</b>
<b><math>3d/4 \approx 0,893</math></b>	<b>3,27943E-02</b>	<b>1,60035</b>	73.57	0,618867677	0,75535%
$d \approx 1,429$	3,68398E-02	1,77863	90.22	0,625516130	1,83775%

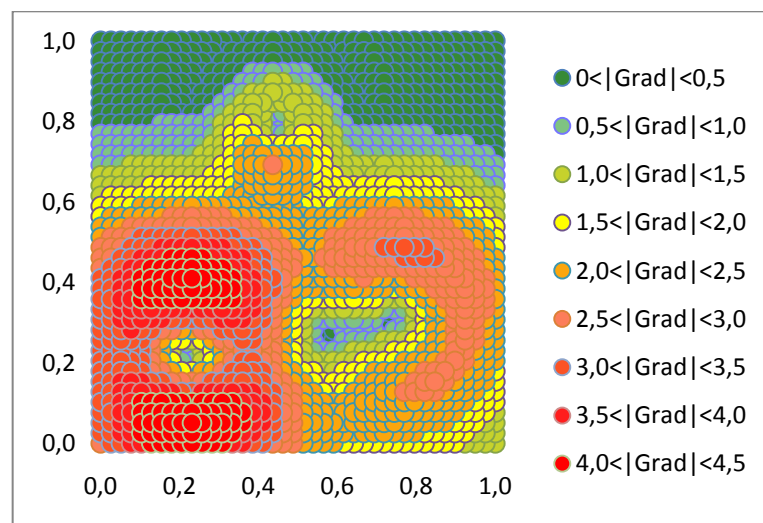
Os resultados da tabela 5.33 podem ser comparados aos resultados da tabela 5.7, pois esses experimentos comparam a interpolação com polinômios acrescidos com a interpolação simples (apenas com o uso de FBRSC).

Assim, os dados apontam uma melhoria dos resultados (utilizando-se os polinômios acrescidos) quando o suporte é pequeno. Contudo, o desempenho dessa função diminui, em relação à versão simples, quando o suporte é grande. A explicação para isso reside no fato de que os polinômios acrescidos contribuem na interpolação apenas quando a função é deficiente; ou seja, quando o suporte da função radial é insuficiente, o polinômio se comporta como um fator compensador que preenche as condições que se tornam “ausentes” devido a esse pequeno valor do suporte.

## 5.8 AJUSTE E INTERPOLAÇÃO: MALHA COM ÊNFASE NOS PONTOS DE MAIOR VALOR DO MÓDULO DO GRADIENTE

A otimização da forma de representar as funções de interpolação tem sido o empreendimento prioritário deste trabalho. Nesse contexto, a fim de aperfeiçoar a precisão e encontrar um critério para a redução dos centros da função de interpolação pelo método dos mínimos quadrados, propõem-se um mapeamento do gradiente da função teste (fig. 5.4). Dessa forma, será produzida uma malha na qual os centros da função de interpolação estejam localizados onde ocorra um maior valor do módulo do vetor gradiente — imaginando-se que essa região é a que necessita de maior quantidade de pontos bases de interpolação.

Portanto, a figura 5.4 representa o domínio da função de Franke, onde foi calculado o módulo do vetor gradiente em 1089 pontos igualmente espaçados, utilizando-se um suporte que abrange todo o domínio ( $\delta = 1,5$ ). Assim, as regiões de maior gradiente encontram-se nessa ilustração descritos pela cor vermelha, enquanto os menores módulos do gradiente estão contidos na região verde escura.

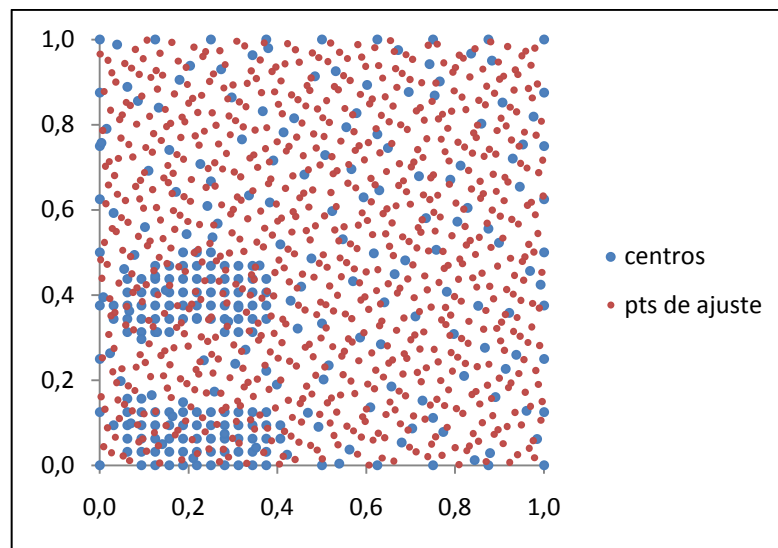


**Figura 5.4** Mapa do módulo do gradiente no domínio da função de Franke.

A partir dos dados contidos na figura 5.4 é possível produzir uma malha com 289 pontos, que são posicionados na região de maior valor do módulo do gradiente. Em consequência disso, as regiões de menor gradiente torna-se menos “povoada”, pois a idéia base é que os pontos de interpolação sejam solicitados onde se presume que eles sejam necessários com certa prioridade.

Assim, ilustra-se na figura 5.5 uma malha na qual, uma parte do conjunto de pontos que compõe os centros atende às condições do procedimento ora descrito. Da mesma forma, 32 (trinta e dois) pontos contemplam a região do contorno e, por fim, os pontos restantes são preenchidos com pontos aleatórios na região remanescente.

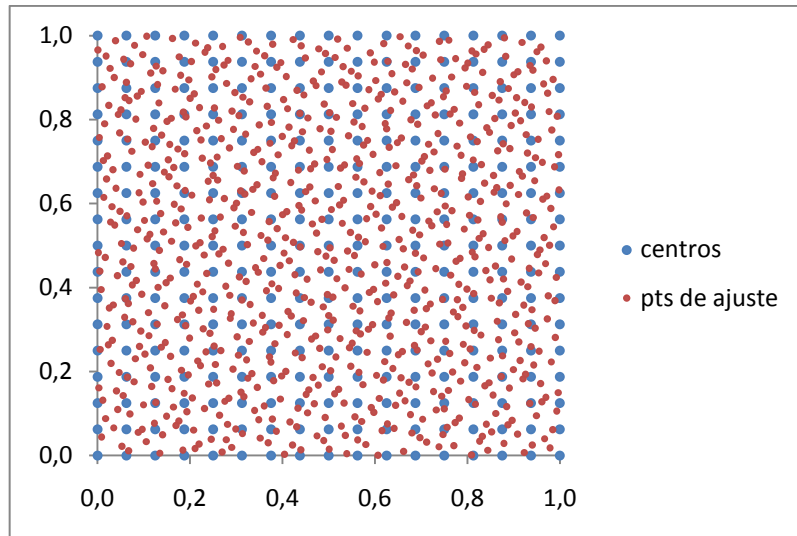
Cabe destacar, que os pontos em vermelho são os pontos de ajuste, os quais serão utilizados no contexto do método dos mínimos quadrados.



**Figura 5.5** Malha para ajuste com ênfase nos maiores valores do gradiente.

Destaca-se, ainda, o uso da malha da figura 5.6 na comparação dos resultados, para verificar se há ou não, maior precisão com a alocação dos pontos em regiões de elevado valor do gradiente. Nessa malha, os centros da função de interpolação (pontos azuis) e os pontos de ajuste (em cor magenta) estão dispostos de forma regular e aleatória, respectivamente.

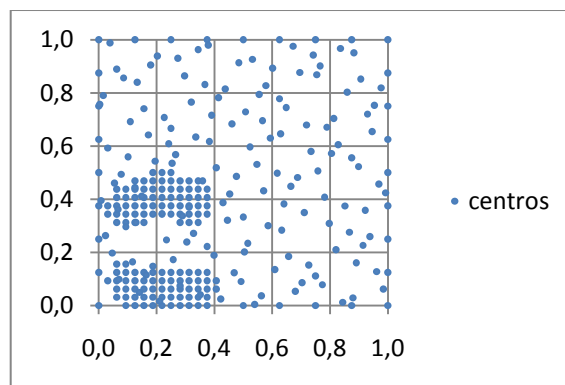




**Figura 5.6** Malha para ajuste com centros igualmente espaçados.

A figura 5.7 também apresenta uma malha com 289 centros de interpolação com ênfase nos pontos de maior valor do gradiente. Assim, será possível realizar a interpolação e comparar com testes similares, anteriormente realizados neste capítulo.

Portanto, os próximos testes foram realizados com um suporte constante em aproximadamente 25 pontos, segundo o teste estacionário descrito na seção 5.3 do presente estudo.



**Figura 5.7** Malha para interpolação com pontos que ocupam, preferencialmente, a região de maior módulo do vetor gradiente.

Nesse foco, a tabela 5.34 compara a precisão dos métodos que foram abordados até aqui. Para isso, utilizam-se os parâmetros EMQ, EM% bem como o erro percentual no volume da função.

TABELA 5.34. FUNÇÃO DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$ , COM 289 CENTROS E SUPORTE ( $\delta = 0,179$ ).

PROCEDIMENTO	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO % VOLUME
Polinômios acrescidos ( <b>malha regular</b> )	7,95936E-03	0,24129	10,92	0,61365134	0,09390
Ajuste ( <b>malha regular</b> )	9,02468E-03	0,33250	25,43	0,61466690	0,07144
Interpolação ( <b>malha regular</b> )	1,11836E-02	0,39092	7,47	0,61464143	0,06729
Polinômios cresc. (malha gradiente)	3,76703E-02	1,37467	15,75	0,61576970	0,25098
Ajuste (malha gradiente)	8,38809E-02	3,09590	32,71	0,60155488	2,06328
Interpolação (malha gradiente)	1,21239E-01	4,03864	12,43	0,55343212	9,89795

Os valores do erro médio quadrático são apresentados pela tabela com uma coloração, cuja tonalidade é dependente da magnitude do valor, ou seja, a cor vermelha indica um maior valor do erro e as cores menos “vivas” representam erros menores. Assim, como se pode notar na tabela 5.34, a interpolação que usa funções radiais compactas com acréscimo de polinômios e com o uso da malha regular obteve melhor precisão. Em segundo lugar, está o ajuste de curva pelo método dos quadrados mínimos, também com a malha regular.

Logo, o uso da malha com pontos que enfatizam as regiões de altos valores do gradiente — nomeada pela tabela de “malha gradiente” — não apresentou bons resultados, o que permite deduzir que, neste caso, o melhor arranjo para os pontos de interpolação, ainda é o de pontos igualmente espaçados. Utiliza-se a expressão “ainda”, pois se propõem novas comparações, com outras malhas, que podem vir a apresentar resultados melhores que os apresentados pela malha regular.

Antes disso, a tabela 5.35, que é similar à anterior, propõe novos resultados utilizando-se a função de Wu de suporte compacto para ratificar os resultados obtidos, considerando-se as condições do presente trabalho.

TABELA 5. 35. FUNÇÃO DE WU  $\varphi_{1,3}(r) \doteq (1-r)_+^6(6 + \dots + 5r^5)$ , COM MALHA DE 289 CENTROS E SUPORTE ( $\delta = 0,179$ ).

PROCEDIMENTO	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO % VOLUME
Polinômios acrescidos ( <b>malha regular</b> )	7,94062E-03	0,23941	10,92	0,613733277	0,08056
Ajuste ( <b>malha regular</b> )	9,07628E-03	0,33466	25,43	0,615071753	0,13735
Interpolação ( <b>malha regular</b> )	1,12248E-02	0,35707	7,47	0,616304456	0,33804
Polinômios cresc. (malha gradiente)	2,80557E-02	1,01285	15,75	0,615863791	0,26630
Ajuste (malha gradiente)	6,48052E-02	2,26470	32,71	0,607127223	1,15607
Interpolação (malha gradiente)	9,10200E-02	2,94689	12,43	0,574252644	6,50825

Novamente, o método de interpolação com precisão polinomial superou o ajuste por mínimos quadrados, tendo-se em conta que foram utilizados 289 centros para ambos os métodos e, o método dos mínimos quadrados fez uso de 800 pontos adicionais (pontos de informação) para o ajuste da função teste de Franke.

A malha gradiente não obteve sucesso, visto que a malha de pontos igualmente espaçados apresenta precisão mais satisfatória. Porém, não é demais enfatizar que os erros cometidos no contorno têm uma grande importância, e sendo assim, a malha gradiente deve ser comparada com a malha regular, mantendo-se a mesma quantidade de pontos no contorno para as duas malhas.

Por isso, em uma nova tentativa de se verificar a interpolação e ajuste com informações do gradiente, visto que a precisão não reduziu tão significativamente, foi realizado outro teste, propondo-se manter o mesmo contorno (64 pontos igualmente espaçados) para a malha em ambas as malhas. Esses resultados estão contidos na próxima tabela.

TABELA 5.36. FUNÇÃO DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(\mathbf{r}) \doteq (1 - \mathbf{r})_+^6(3 + \dots + 35\mathbf{r}^2)$ , COM MALHA DE 289 CENTROS E SUPORTE ( $\delta = 0,179$ ).

PROCEDIMENTO	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO % VOLUME
Polinômios cresc. (m. regular)	7,95936E-03	0,24129	10,92	0,61365134	0,09390%
Ajuste (m. regular)	9,02468E-03	0,33250	25,43	0,61466690	0,07144%
Interpolação (m. regular)	1,11836E-02	0,39092	7,47	0,61464143	0,06729%
Polinômios cresc. (m. grad.)	4,72323E-02	1,68345	15,03	0,61863692	0,71778%
Ajuste (m. grad.)	9,31191E-02	3,52574	30,7	0,60075508	2,19349%
Interpolação (m. grad.)	1,41385E-01	4,64662	11,78	0,54065228	11,97859%

Portanto, não há dúvida de que, para os casos analisados, a malha proposta não supera a malha regular. A diferença entre os erros está na ordem de uma casa decimal, o que representa até dez vezes mais em precisão.

## 5.9 AJUSTE E INTERPOLAÇÃO: MALHA COM ÊNFASE NOS PONTOS DE MAIORES ERROS

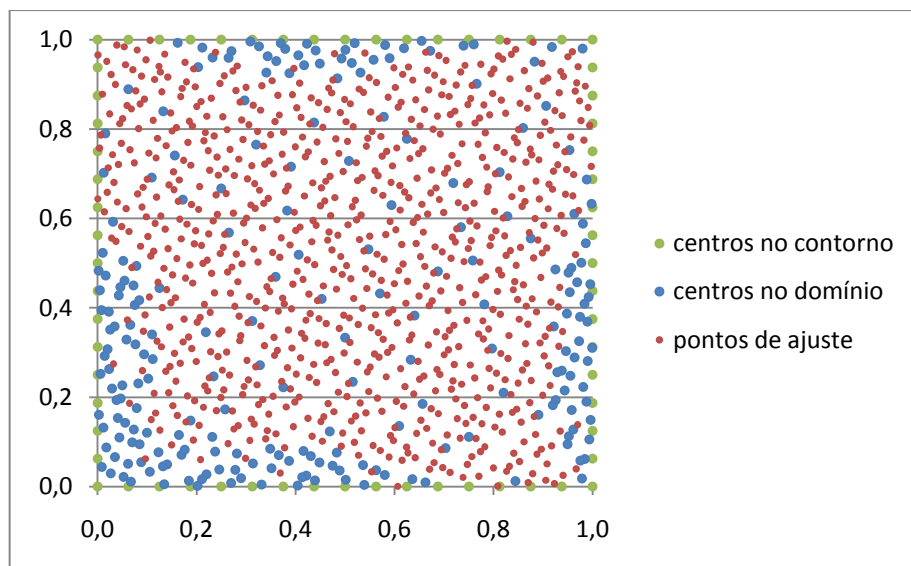
Na seção anterior, procurou-se analisar a precisão de uma malha que continha pontos bases ocupando, preferencialmente as regiões com alto valor do módulo do gradiente. No passo seguinte, realiza-se uma discussão em torno de uma nova

vertente, pois ao invés de mapear o domínio da função de Franke com relação à magnitude do gradiente, como no caso anterior, recria-se este mapeamento com o uso do valor do módulo do erro absoluto; ou seja, os centros da função de interpolação serão posicionados nas regiões onde se localizam os maiores erros. Esse parâmetro, que foi utilizado como peça chave para a produção da malha, é fornecido pela seguinte equação:

$$Erro\ abs = |f_{real}(\xi) - f_{comp}(\xi)| \quad (5.6)$$

Desse modo, o erro absoluto nada mais é do que o desvio entre a função real e a função obtida pelo computador em cada ponto  $\xi$ .

A figura 5.8 mostra a malha resultante do procedimento descrito nesta seção.



**Figura 5.8** Malha de 289 centros e 800 pontos de ajuste, com centros que ocupam, preferencialmente, a região de maior erro absoluto.

A malha ilustrada pela figura 5.8 apresenta tanto pontos de contorno (64 centros igualmente espaçados) em coloração verde, quanto informa sobre os centros contidos no domínio (pontos azuis), que foram colocados priorizando-se as regiões onde o valor do erro absoluto é elevado. Essa figura também indica pontos de cor magenta, que representam os pontos de ajuste da função de aproximação, os quais serão aplicados no contexto do método dos quadrados mínimos definido na seção 2.3.

Vale destacar, que os procedimentos de interpolação contidos na tabela 5.37 utilizam 289 pontos como centros de interpolação; compostos pelos pontos de contorno e de domínio (pontos verdes e azuis da figura 5.8). Os testes permanecem sendo realizados com uma FBRSC de Wendland e outra de Wu.

TABELA 5.37. FUNÇÃO DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3+\dots+35r^2)$ , COM MALHA DE 289 CENTROS E SUPORTE ( $\delta = 0,179$ ).

PROCEDIMENTO	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO % VOLUME
Polinômios acresc. ( <b>m. regular</b> )	7,95936E-03	0,24129	10,92	0,61365134	0,09390%
Ajuste ( <b>m. regular</b> )	9,02468E-03	0,33250	25,43	0,61466690	0,07144%
Interpolação ( <b>m. regular</b> )	1,11836E-02	0,39092	7,47	0,61464143	0,06729%
Polinômios acresc. (m. erro abs.)	6,18652E-02	2,37957	12,72	0,61778411	0,57893%
Ajuste (m. erro abs.)	1,48783E-01	5,36507	22,00	0,58267239	5,13746%
Interpolação (m. erro abs.)	2,03662E-01	7,32966	9,34	0,49161087	19,96282%

Os resultados presentes na tabela 5.37 também apontam a malha regular como mais precisa. De fato, a organização dos pontos dessa malha permanece como a melhor configuração.

Cabe ressaltar, que os testes com polinômios acrescidos foram feitos com base em interpolação, ou seja, não estão relacionados ao ajuste de curva. Então, pode-se imaginar que ainda é possível melhorar os resultados realizando-se o ajuste de curva em conjunto com polinômios globais acrescidos, o que poderá ser analisado em trabalhos futuros. Porém, é bom lembrar que a interpolação com precisão polinomial nem sempre contribui para aumentar a precisão quando o suporte da função é global. Assim como o ajuste de curva pelo método dos mínimos quadrados também contribui para o mau condicionamento da matriz de ajuste.

Contudo, se o suporte da função radial compacta é pequeno, a matriz de ajuste de curva torna-se esparsa, ou seja, contém vários elementos nulos. Isso faz com que o trabalho computacional seja reduzido e ainda obtém-se maior precisão em relação à interpolação simples. Além disso, pode-se deduzir que o ajuste de curva com precisão polinomial e com o uso de funções radiais de suporte compacto é capaz de utilizar funções globais sem comprometer o condicionamento da matriz do sistema, melhorando a precisão e obtendo bom desempenho computacional.

## 5.10 AJUSTE E INTERPOLAÇÃO: MALHA COM ÊNFASE NOS PONTOS ONDE CONCENTRAM OS VALORES MAIS ALTOS DO RESÍDUO ENTRE A INTERPOLAÇÃO DE WENDLAND E WU

Com os próximos experimentos, ainda se busca aperfeiçoar o posicionamento dos centros de interpolação ou ajuste, para que se obtenham resultados mais precisos em comparação com os da malha de pontos igualmente espaçados, pois até então, esta é a malha na qual os resultados são mais exatos.

Para isso, pretende-se examinar uma forma de aperfeiçoar a malha, de modo que não seja necessário utilizar a função analítica mais de uma vez, como por exemplo, é necessário no método do erro apresentado na seção 5.9 sem bons resultados.

Nessa nova tentativa, o procedimento para produzir a malha ótima é explicado com base na seguinte seqüência:

(a) realiza-se uma interpolação com a função de Wendland e outra com a função de Wu;

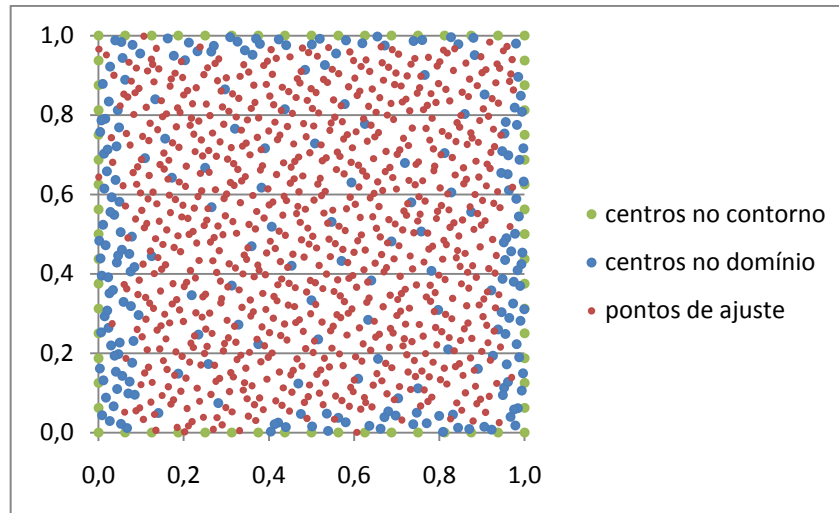
(b) Calculam-se os resíduos de interpolação dados pela diferença entre as interpolações do item (a), ou seja:

$$resíduo(\xi_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi(r(\xi_i))^{Wendland} - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi(r(\xi_i))^{Wu} \quad (5.7)$$

(c) Obtêm-se os pontos  $(\xi_i)$  nos quais estão localizados os maiores resíduos, pois a nova malha os empregará como centros de interpolação.

A título de esclarecimento, cabe enfatizar que o primeiro termo do lado direito da equação (5.7) representa a função obtida por interpolação com a FBRSC de Wendland em uma interpolação com o uso de 1089 centros e suporte em todo o domínio, já o segundo termo representa a função de Wu obtida do mesmo modo.

Assim, a malha resultante possui o aspecto apresentado pela figura 5.9.



**Figura 5.9** Malha de 289 centros e 800 pontos de ajuste, com centros que ocupam, preferencialmente, a região de maior valor algébrico do resíduo obtido através da eq. 5.7.

Isso posto, os resultados obtidos com o uso dessa malha são comparados aos da malha regular, realizando-se experimentos de interpolação com polinômios acrescidos, interpolação simples e ajuste de curva. Tudo isso pode ser conferido com a tabela a seguir.

TABELA 5.38. FUNÇÃO DE WENDLAND  $\varphi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(3 + \dots + 35r^2)$ , COM MALHA DE 289 CENTROS E SUPORTE ( $\delta = 0,179$ ).

PROCEDIMENTO	EMQ	EM %	% NÃO NULO	VOLUME	ERRO % VOLUME
Polinômios acresc. ( <b>m. regular</b> )	7,95936E-03	0,24129	10,92	0,61365134	0,09390%
Ajuste ( <b>m. regular</b> )	9,02468E-03	0,33250	25,43	0,61466690	0,07144%
Interpolação ( <b>m. regular</b> )	1,11836E-02	0,39092	7,47	0,61464143	0,06729%
Polinômios acresc. (resíduo)	6,66441E-02	2,47987	11,68	0,61095320	0,53318%
Ajuste (resíduo)	1,64751E-01	6,07109	20,14	0,57825810	5,85613%
Interpolação (resíduo)	2,28015E-01	8,07680	8,26	0,47943418	21,94526%

Nos testes realizados até aqui, procurou-se analisar as regiões onde a função de interpolação e/ou ajuste, hipoteticamente, apresentaria dificuldades em aproximá-las. O preenchimento com pontos bases de interpolação nessas regiões foi tomado como procedimento básico para a formação da malha.

Contudo, a malha que demonstra ser mais eficiente é a regular, ou seja, aquela com os pontos igualmente espaçados. A interpolação com polinômios acrescidos demonstra ser mais eficiente que o ajuste de curva sem o uso desses polinômios, mas acredita-se que os resultados poderiam melhorar com o uso de ajuste com acréscimo de polinômios globais.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em vista dos resultados obtidos nesse estudo, algumas considerações devem ser feitas. Essas considerações se referem às peculiaridades observadas durante os experimentos relacionados à interpolação e ao ajuste de curva.

Assim, pode-se afirmar que as FBRSCs apresentaram resultados bastante precisos. Por exemplo, uma interpolação com o uso de uma malha de apenas 25 pontos em um domínio  $[0,1]^2$  com suporte igual à metade da diagonal, conduz a um erro médio percentual em torno de 1% (um por cento).

Os experimentos numéricos não trazem informações conclusivas sobre qual das FBRSCs (Wu ou Wendland) são mais precisas, mas demonstram que são bastante efetivas. Nota-se que as funções de interpolação se revezam na aquisição do melhor resultado, ora para determinada função teste, ora para certo procedimento ou malha diferente. Porém, os resultados são muito próximos um em relação ao outro.

A malha de pontos regulares demonstrou — nas condições avaliadas no presente estudo — ser mais apropriada, fornecendo maior precisão na aproximação de funções em vários testes. Como exemplo, convém citar os resultados provenientes do cálculo do volume da função, que se apresentaram com maior precisão quando se utilizou a malha aleatória. Essa informação pode ser útil quando se deseja, especificamente, obter um volume de uma determinada feição geológica ou região no espaço  $R^3$ . Porém, para se obter melhores resultados nos valores da imagem da função, deve-se usar uma malha de pontos igualmente espaçados.

No tocante aos estudos relacionados à comparação dos resultados para os diferentes procedimentos numéricos abordados neste trabalho, o Método de interpolação com precisão polinomial demonstrou maior exatidão na aproximação de funções, levando-se em conta as condições impostas neste estudo. A vantagem do uso do Método dos Mínimos Quadrados é que ele fornece precisão maior que a interpolação — se forem utilizados pontos adicionais para ajuste; além disso, este método pode ser abordado quando se deseja reduzir o número de centros na função de aproximação, obtendo-se menor custo computacional. Outrossim, poder-se-ia implementar o uso do ajuste de curva com precisão polinomial, para alcançar melhores resultados.



Para os casos analisados, os pontos do domínio nos quais a função apresenta maior gradiente não deveriam ter centros de interpolação em adicional, tão pouco reduzir os centros nos locais de menor gradiente, pois os resultados mostraram-se melhores nos eventos em que os pontos estavam dispostos em igual espaçamento.

Os testes referentes aos cálculos do erro e do resíduo (seção 5.9 e 5.10) para a formação da malha, não obtiveram resultados satisfatórios. Assim, o estudo mostrou que um possível critério para se reduzir o “tamanho” da função de aproximação, seria eliminar os pontos que se localizam entre pontos igualmente espaçados. Para que a malha apresente centros dispostos regularmente e pontos quaisquer para serem utilizados como ajuste. Visto que desse modo, os resultados mostraram melhor eficiência.

## 6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Especificamente neste trabalho, alguns pontos não puderam ser profundamente avaliados durante o seu desenvolvimento. Por isso, a seguir, listam-se algumas sugestões, bem como atividades que possam complementar os estudos realizados durante o desenvolvimento desse trabalho.

- Implementação de uma subrotina que não armazene os elementos nulos da matriz de colocação, para verificar o ganho em custo computacional;
- Ao invés de se tentar reduzir o número de pontos de colocação em determinadas regiões do domínio, poder-se-ia tomar o caminho inverso: como iniciar com poucos pontos e, gradativamente, aumentar esse número para chegar a uma medida de erro previamente definida como admissível.

O algoritmo a seguir pode facilitar a compreensão desse procedimento.

- a. Escolher um subconjunto dos pontos de interpolação e ajustar a FBR apenas nesse pequeno número de pontos.
  - b. Calcular o resíduo,  $\varepsilon_i = f_i - s(x_i)$ , nesses pontos.
  - c. Se  $\max\{|\varepsilon_i|\} < \text{erro admissível}$  então pare.
  - d. Se não, insira novos centros próximo ao local onde  $\varepsilon_i$  é elevado.
  - e. Reajuste a FBR e vá para b.
- Solucionar Equações Diferenciais com o uso de funções de base radial.

## 7. REFERÊNCIAS

BEVERIDGE, Gordon S. G.; SCHECHTER, Robert S. **Optimization: Theory and Practice**. 1ed. São Paulo: McGRAW – HILL Kogakusha, 1970.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements An Introductory Course**. 2ed. Boston: WIT Press/Computational Mechanics Publications, 1998.

BUHMANN, M.D., **Radial Basis Functions: Theory and Implementations**. 1ed. New York: Cambridge University Press, 2003.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 1ed. São Paulo: Thomson, 2003.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

CRUZ, A. L. **Análise do desempenho de funções de base radial na aproximação de superfícies**. 2009. 154 f. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

FASSHAUER, G. E. **Meshfree Approximation Methods with MATLAB**. 1ed. Singapura: World Scientific Publishers, 2007.

FRANKE, R. Scattered data interpolation: test of some methods, **Mathematics of Computation**, California, USA, v. 38 n. 157, p. 181-200, Jan. 1982.

GOLBERG, M.A.; CHEN, C.S. The Theory of Radial Basis Functions applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential equations. **BE Communication**. 5: 57-61, 1994.

HAMMING, R. W. **Numerical Methods for Scientists and Engineers**. 2ed. New York: Unabridged Dover, 1986.

KARUR, S.R.; RAMACHANDRAN, P.A., Radial Basis Function Approximation in the Dual Reciprocity Method. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 20, 7: 59-70, 1994.

LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. **The Astronomical Journal**, v. 82, n.12, 1977.

PARTRIDGE, P.W. Toward Criteria for Selecting Approximation Functions in the Dual Reciprocity Method. **1<sup>st</sup> Brazilian seminar on the Boundary element Method in Engineering**, 9-14, COPPE/UFRJ, 2000.

RAMACHANDRAN, P.A.; KARUR, S.R. Multidimensional Interpolation Using Oscillatory Radial Basis Functions, **Computers Math. Applic.** Vol. 35, No. 11, pp. 1998.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 1ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1988.

SCHABACK, R. **A practical guide to Radial Basis Functions**, 2007. Disponível em: <<http://num.math.uni-goettingen.de/schaback/teaching/texte/approxsc.pdf>>. Acesso em: 13 jan. 2010.

SCHABACK, R. Creating Surfaces from Scattered Data Using Radial Basis Functions. **Mathematical Methods for Curve and Surfaces**, M. Daehlen, T. Lyche, and L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, p. 477-496, 1995

SPERANDIO, D.; MENDES, J.T.; SILVA, L.H.M. **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

STARK, Peter A. **Introduction to Numerical Methods**. 1ed. New York: Macmillan, 1970.

ZAKHOR, A.; ALVSTAD, G. **Two-Dimensional Polynomial Interpolation from Nonuniform Samples**, IEEE Transactions on Signal Processing. 40: 169-180, 1992.

WENDLAND, H. Error Estimates for Interpolation by Compactly Supported Radial Basis Function of Minimal Degree. **J. Approx. Theory**. 93, p. 258-272, 1998.

WONG, S.M.; HON, Y.C.; GOLBERG, M.A. Compactly supported radial basis functions for shallow water equations. **Applied Mathematics and Computation**, New York, USA, v.127, 1: 79-101, 2002.

WONG, S.M; HON, Y.C.; LI, T.S. Radial Basis Function with compactly support and multizone decomposition: Applications to environmental modeling. **Boundary Element Technology XII**, WIT Press, p. 355-364, 1999.

YAMADA, T.; WROBEL, L.C.; POWER, H. On the Convergence of the Dual Reciprocity Boundary Element Method. **Engineering Analysis with Boundary Element**, 13: 291-298, 1994.

## 8. APÊNDICE

Derivadas parciais de funções de base radial

**FRBC de Wendland**

$$\varphi(\varepsilon r) = (1 - \varepsilon r)_+^4 (4\varepsilon r + 1)$$

$$\frac{\partial \varphi(\varepsilon r)}{\partial x} = r_i \frac{d}{dr} \varphi(\varepsilon r)$$

$$\frac{\partial \varphi(\varepsilon r)}{\partial x} = \frac{r_i}{r} \frac{d}{dr} \varphi(\varepsilon r)$$

**Onde:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \varphi(\varepsilon r) &= \frac{d}{dr} [(1 - \varepsilon r)_+^4 (4\varepsilon r + 1)] \\ &= (4\varepsilon r + 1) \frac{d}{dr} ((1 - \varepsilon r)_+^4) + (1 - \varepsilon r)_+^4 \frac{d}{dr} (4\varepsilon r + 1) \\ &= (4\varepsilon r + 1)(-4\varepsilon)(1 - \varepsilon r)_+^3 + 4\varepsilon(1 - \varepsilon r)_+^4 \\ &= (-16\varepsilon^2 r - 4\varepsilon)(1 - \varepsilon r)_+^3 + 4\varepsilon(1 - \varepsilon r)(1 - \varepsilon r)_+^3 \\ &= (-16\varepsilon^2 r - 4\varepsilon)(1 - \varepsilon r)_+^3 + (4\varepsilon - 4\varepsilon^2 r)(1 - \varepsilon r)_+^3 \\ &= -20\varepsilon^2 r(1 - \varepsilon r)_+^3 \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{\partial \varphi(\varepsilon r)}{\partial x} = -20x\varepsilon^2(1 - \varepsilon r)_+^3$$

Bem como:

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial y} = -20y\varepsilon^2(1 - \varepsilon r)_+^3$$

**WENDLAND**

$$\varphi_{3,2}(r) \doteq (1 - \varepsilon r)_+^6 (35(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 3)$$

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \frac{d}{dr} \varphi(\varepsilon r) \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \frac{r_i}{r} \frac{d}{dr} \varphi(\varepsilon r)$$

Onde:

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = \frac{d}{dr} [(1 - \varepsilon r)_+^6 (35(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 3)]$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = (35(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 3) \frac{d}{dr} [(1 - \varepsilon r)_+^6] + (1 - \varepsilon r)_+^6 \frac{d}{dr} [(35(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 3)]$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = (35(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 3)(-6\varepsilon)(1 - \varepsilon r)_+^5 + (1 - \varepsilon r)_+^6 (70\varepsilon^2 r + 18\varepsilon)$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = (-210\varepsilon^3 r^2 - 108\varepsilon^2 r - 18\varepsilon)(1 - \varepsilon r)_+^5 + (1 - \varepsilon r)_+^6 (-70\varepsilon^3 r^2 +$$

$$-18\varepsilon^2 r + 70\varepsilon^2 r + 18\varepsilon)$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = (-280\varepsilon^3 r^2 - 56\varepsilon^2 r)(1 - \varepsilon r)_+^5$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = -56\varepsilon^2 r(5\varepsilon r + 1)(1 - \varepsilon r)_+^5$$

Logo:

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = -56\varepsilon^2 (x_{dt} - x_{ce})(5\varepsilon r + 1)(1 - \varepsilon r)_+^5$$

Bem como:

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial y} = -56\varepsilon^2 (y_{dt} - y_{ce})(5\varepsilon r + 1)(1 - \varepsilon r)_+^5$$

Seja a função de interpolação dada por:

$$s = \varphi(\varepsilon r) + p_1 + \dots + p_6$$

As derivadas parciais em x e em y são dadas por:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -56\varepsilon^2 (x_{dt} - x_{ce})(5\varepsilon r + 1)(1 - \varepsilon r)_+^5 + 1 + 2x_{dt} + y_{dt}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = -56\varepsilon^2 (y_{dt} - y_{ce})(5\varepsilon r + 1)(1 - \varepsilon r)_+^5 + 1 + 2y_{dt} + x_{dt}$$