



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AMBIENTAL**

RAFAEL DE CASTRO SCOTTÁ DOS PASSOS

**MODELAGEM MORFODINÂMICA DO TRANSPORTE DE
SEDIMENTO DE FUNDO EM AMBIENTES COSTEIROS**

VITÓRIA
2010

RAFAEL DE CASTRO SCOTTÁ DOS PASSOS

**MODELAGEM MORFODINÂMICA DO TRANSPORTE DE
SEDIMENTO DE FUNDO EM AMBIENTES COSTEIROS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Ambiental.

Área de Concentração: Recursos Hídricos

Orientador: Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana

VITÓRIA

2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

P289m Passos, Rafael de Castro Scottá dos, 1981-
Modelagem morfodinâmica do transporte de sedimento de
fundo em ambientes costeiros / Rafael de Castro Scottá dos
Passos. – 2010.
106 f. : il.

Orientador: Julio Tomás Aquije Chacaltana.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) –
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Transporte de sedimentos. 2. Análise numérica. 3.
Modelagem de dados. I. Chacaltana, Julio Tomás Aquije. II.
Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III.
Título.

CDU: 628

RAFAEL DE CASTRO SCOTTÁ DOS PASSOS

**MODELAGEM MORFODINÂMICA DO TRANSPORTE DE
SEDIMENTO DE FUNDO EM AMBIENTES COSTEIROS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Ambiental.

Área de Concentração: Recursos Hídricos

Aprovada em ____ de _____ de _____.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Julio Tomás Quije Chacaltana
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Maxsuel Marcos Rocha Pereira
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador Interno

Prof. Dr. Roger Matsumoto Moreira
Universidade Federal Fluminense
Examinador Externo

*Dedico esta obra à memória de meus pais,
Hirno e Rosali Passos, que se sacrificaram
para me proporcionar toda a oportunidade
de estudo, possibilitando assim que eu
chegasse até aqui. Muito obrigado!*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que me deu esta grande oportunidade e força para superar as dificuldades encontradas para realizar este trabalho.

Ao Professor Dr. Julio, pela oportunidade de trabalharmos juntos neste projeto, pela orientação e paciência durante o meu aprendizado. Ao professor Dr. Antônio Frasson pela contribuição na implementação do módulo de ondas rasas.

Aos examinadores, interno, Dr. Maxsuel, e externo, Dr. Roger, que aceitaram com boa vontade participar da avaliação deste trabalho científico, pois este aceite já representa um apoio da comunidade científica no desenvolvimento de pesquisas na área em questão.

Aos vários colegas/amigos do laboratório LABESUL, que me apoiaram e me ajudaram na aquisição de importantes conhecimentos inerentes ao meu projeto, como André, Carlos, Izabel, e também da vida, compartilhados com Vanessa, Fábio (vídeos do youtube), inclusive aqueles dos “momentos do café”, com MD, Thiago e Gregório e principalmente Henery, que iniciou esta caminhada de mestrado e a termina em igual período, me apoiando ao longo de toda esta jornada.

Aos meus irmãos Vinicius e Victor, que sempre se orgulharam de mim e me incentivaram o empenho nos estudos, bem como os amigos-irmãos do SECRISEF, minha segunda família.

Aos meus colegas da SEMMA, que me deram incentivos e tiveram compreensão quando da minha ausência no ambiente de trabalho devido ao andamento deste projeto.

Por último, e não menos importante, à minha noiva Luana Peixoto, que também membro da comunidade científica, mais do que nunca, me apoiou e incentivou no andamento deste projeto, como sempre o fez para todas as coisas saudáveis, me oferecendo todo o carinho, compreensão e companheirismo, desde que a conheci.

RESUMO

O transporte de sedimentos em ambientes aquáticos costeiros depende muito da hidrodinâmica local, que é forçada pela maré astronômica e meteorológica, pelas ondas, e pela intensidade e direção do vento. Ações planejadas ou não-planejadas nesses ambientes podem desencadear problemas erosivos comprometendo as construções na orla praial, turismo, lazer, operações de embarque em portos, dentre outros. Neste trabalho é realizado o estudo das mudanças morfodinâmicas induzidos por ondas de superfície. O modelo de ondas é linear e do tipo águas rasas, que considera o efeito de atrito com o leito. Sem perda de generalidade, o transporte de sedimento suspenso não é considerado. Para as mudanças morfodinâmicas do leito é considerada a equação de conservação volumétrica de sedimento de fundo. Inicialmente, diferentes esquemas em diferenças finitas foram implementadas para solucionar a equação para o transporte de sedimento (variação morfológica de fundo costeiro) submetido a um escoamento uni-direcional. A análise dos resultados obtidos mostrou que o esquema de Warming-Beam para discretizar a equação de transporte de sedimento foi que melhor representou a solução analítica. O modelo morfodinâmico foi acoplado ao modelo linear de onda do tipo águas rasas. Dos resultados analisados, verificou-se um movimento harmônico do banco de sedimento que aumenta com o aumento do período da onda.

ABSTRACT

The sediment transport in coastal aquatic environments depends heavily on the local hydrodynamics, which is forced by the astronomical and weather tide, waves, and the intensity and wind direction. Actions planned or unplanned in these environments can bring erosion problems affecting the buildings on the coastal shore, tourism, recreation, shipping operations in ports, among others. This work is carried out to study the morphodynamic changes induced by surface waves. The wave model is linear and of shallow water type, which considers the effect of friction with the bed. Without loss of generality, the transport of suspended sediment is not considered. For the morphodynamic changes in the bed, it is considered the conservation equation of sediment volume in the bed level. Initially, different finite difference schemes have been implemented to solve the equation for the transport of sediment (morphological variation of coastal bottom) subjected to a uni-directional flow. The obtained results showed that the Warming-Beam scheme, used to discretize the equation of sediment transport, was best represented the analytical solution. The morphodynamic model was coupled to the linear model of wave-type shallow water. In the analyzed results, there was a harmonic bank sediment increases with increasing wave period.

LISTA DE SÍMBOLOS

a	velocidade de migração da forma de fundo
A	amplitude da onda (m)
c	concentração volumétrica de sedimentos em suspensão na coluna de água (g/m ³)
c_f	fator de fricção
C	celeridade da onda (m/s)
d	diâmetro do grão de sedimento (m)
d_{50}	diâmetro correspondente a 50% do material sendo mais fino (m)
D	profundidade do escoamento (m)
f_i	densidade de força de superfície (N/m ²)
f_w	fator de fricção de onda
F_D	força horizontal de arrasto (N/m)
F_L	força de sustentação (N/m)
g	gravidade (m/s ²)
h	profundidade da água (m)
H	altura da onda (m)
H_r	altura da <i>ripple</i> (m)
x_{\max}	valor máximo de x (m)
x_{\min}	valor mínimo de x (m)
it	posição no tempo
I	gradiente hidráulico
k	número de onda
L	comprimento do domínio em x (m)
L_r	comprimento da <i>ripple</i> (m)

M_s	massa de sedimento (g)
n	número de pontos na dimensão x
\vec{n}	vetor normal unitário à superfície (m/s)
n_p	porosidade do leito
nt	Passo no tempo para a apresentação dos resultados da simulação
p	pressão hidrostática (N/m ²)
p_{ATM}	pressão atmosférica (N/m ²)
q	taxa volumétrica total de transporte de sedimentos (m ³ /s/m)
q_b	taxa de carga de fundo transportada em volume de material por unidade de tempo e largura (m ³ /s/m)
q_x	taxa de transporte de sedimento na direção de x (m ³ /s/m)
q_y	taxa de transporte de sedimento na direção de y (m ³ /s/m)
Q	Fluxo de volume constante do fluido por unidade de comprimento (m ² /s)
s	gravidade específica relativa; Datum (m)
S	densidade de sedimento (g/m ³)
t	tempo (s)
T	período da onda (s)
u	velocidade na direção x (m/s)
\bar{u}	velocidade do escoamento (m/s)
u^*	velocidade crítica do fluido (m/s)
U	velocidade média na direção x (m/s)
U'_f	velocidade da fricção de <i>skin</i> (m/s)
v	velocidade na direção y (m/s)
V	volume de sedimento (m ³)
w	velocidade na direção z (m/s)

W	força peso (N)
x	coordenada espacial horizontal x ; valor na coordenada x (m)
x_C	valor de x no centro da curva gaussiana (m)
y	coordenada espacial horizontal y ; valor na coordenada y (m)
z	coordenada espacial vertical z (m)
z_b	elevação do substrato com relação a um ponto fixo (m)
β	fator de correção da quantidade de movimento
γ	gravidade específica do fluido
γ_s	gravidade específica do sedimento
δ_{ij}	delta de Kronecker
Δt	passo de tempo (s)
Δx	distância regular entre os pontos de grade em x (m)
Δy	distância regular entre os pontos de grade em y (m)
ε_{ijk}	tensor alternante
ϕ_B	forma adimensional de descarga de carga de fundo
φ	valor do diâmetro do grão de sedimento na escala phi
η	elevação da superfície da água (m)
λ	comprimento da onda (m)
ρ	massa específica do fluido (g/m ³)
ρ_s	massa específica do sedimento (g/m ³)
σ_g	desvio padrão geométrico
$\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^{AR}, \sigma_{ij}^{ÁGUA}$	tensor das tensões; tensor das tensões para o ar; e tensor das tensões para a água
σ_x	número de Courant para coordenada x
σ_y	número de Courant para coordenada y

ν	viscosidade cinemática (m ² /s)
θ	parâmetro de Shields
θ'	parâmetro de Shields efetivo
θ_c	parâmetro de Shields crítico
τ	tensão de cisalhamento ou de corte (N/m ²)
$\hat{\tau}$	tensão de cisalhamento ou de corte máximo (N/m ²)
τ'	tensão de cisalhamento ou de corte total (N/m ²)
τ_b	tensão de cisalhamento ou de corte de fundo (N/m ²)
$\tau_i^b ; \tau_i^n$	tensão de cisalhamento respectivamente no leito e na superfície livre, na direção x_i , para $i = 1,2$ (N/m ²)
τ_c	tensão de cisalhamento ou de corte de fundo crítico (N/m ²)
τ_F	tensão de corte transmitida pelo fluido inter-granular (N/m ²)
τ_G	tensão de corte transmitida devido a troca de momentum causada pelos contornos das partículas sólida (N/m ²)
$\tau_{ij}, \tau_{ij}^{AR}, \tau_{ij}^{BOT}$	tensão de cisalhamento resultante das coordenadas x e y , para interface ar-água; e interface água-sedimento (N/m ²)
ω	velocidade de fase da onda (rad/s)
Ω	velocidade angular da Terra (rad/s)
ψ	número de mobilidade
ζ	superfície do leito (m)

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Identificação das categorias da topografia praial.....	18
Figura 3.1 - Parâmetros da onda.....	23
Figura 3.2 - Aumento da assimetria e esbeltez da onda ao se aproximar da linha de costa	24
Figura 3.3 - Comparação da geração de vortex e penetração da coluna da água pelas ondas de arrebentação deslizante (A) e mergulhante (B)	25
Figura 3.4 - Refração de ondas em águas rasas	26
Figura 3.5 - Efeito de difração em ilha.....	27
Figura 3.6 – Diferentes modos de transporte de sedimento: A – carga de fundo em baixa tensão de cisalhamento; B – Escoamento em folha; C – sedimento suspenso.....	29
Figura 3.7 – Frequência ou densidade de probabilidade de uma distribuição log-normal do tamanho do grão. $d_{50} = 0.25$ mm e $\sigma_g = 1.5$	30
Figura 3.8 – Curva de distribuição granulométrica para distribuição log-normal do tamanho de grão para $d_{50} = 0.25$ mm e $\sigma_g = 1.5$. A – Plotagem semi-logarítmica; B – Plotagem em função probabilidade.	31
Figura 3.9 - Forças atuando sobre grãos que repousam no leito	32
Figura 3.10 - O diagrama de Madsen-Grant para o movimento inicial do sedimento em escoamento oscilatório. Dados de Manohar (1955) e de Carstens <i>et al.</i> (1969)	34
Figura 3.11 – Distribuição da tensão de corte do fluido e do grão em um escoamento uniforme em canal aberto.....	37
Figura 3.12 – Formas de fundo no escoamento oscilatório: perfis instantâneo (tracejado) e principal (contínuo). A – ondas de pequeno período; B – ondas de grande período.....	39
Figura 3.13 – Movimento dos vórtices formados ao longo das <i>ripples</i> de vortex	40
Figura 3.14 – Declividade da <i>ripple</i> pela tensão de corte oriunda de dados laboratoriais (A) e dados de campo (B). Após Nielsen (1979).....	41
Figura 3.15 – O transporte transversal de sedimentos, e a formação do banco de quebra.....	43
Figura 3.16 - Grade espacial de diferenças finitas em x e y.....	47
Figura 3.17 – efeitos de dissipação e dispersão. (a) solução exata. (b) Solução numérica distorcida primariamente pelos erros de dissipação (típico de métodos de 1ª ordem). (c) Solução numérica distorcida primariamente pelos erros de dispersão (típico de métodos de 2ª ordem).....	51
Figura 4.1 – Representação gráfica da curva inicial (tempo 0 s) do ambiente com banco de sedimento utilizado nas simulações.....	64
Figura 4.2 – Solução analítica correspondente aos tempos 600 s (azul) e 6.000 s (verde)	67
Figura 5.1 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema FTCS correspondente os tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	70

Figura 5.2 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema Lax-Wendroff correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	71
Figura 5.3 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema FTBS correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	73
Figura 5.4 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema Warming-Beam correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	73
Figura 5.5 – Detalhe do resultado numérico do modelo implementado para o esquema Warming-Beam correspondente ao tempo 600 s (vermelho), em comparação com a solução analítica (azul), no choque do banco de sedimento a sotamar do escoamento, ao se aproximar do nível do leito	75
Figura 5.6 – Detalhe do gráfico do resultado do modelo implementado para o esquema Warming-Beam correspondente ao tempo 6.000 s (verde claro), logo após a frente do banco de sedimento posterior ao sentido do escoamento tocar o substrato	75
Figura 5.7 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema TVD-RK-CCC correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	76
Figura 5.8 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema TVD-RK-CCU correspondente aos tempo 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	77
Figura 5.9 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema TVD-RK-UUC correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	77
Figura 5.10 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema TVD-RK-UUU correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	78
Figura 5.11 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados coincidentes dos modelos CUC e UCC implementados para o esquema TVD-RK correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	78
Figura 5.12 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados coincidentes dos modelos UCU e CUU implementados para o esquema TVD-RK correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)	79
Figura 5.13 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com os resultados dos modelos CCU (verde) e UUC (vermelho) implementados para o esquema TVD-RK correspondente ao tempo 6.000 s, comparados com a solução analítica (azul)	80
Figura 5.14 – Detalhe do gráfico comparativo dos resultados dos modelos CCU (verde) e UUC (vermelho) implementados para o esquema TVD-RK correspondente ao tempo 6.000 s, em comparação com a solução analítica (azul)	81

Figura 5.15 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com os resultados dos modelos UUC (vermelho) implementado para o esquema TVD-RK e Warming-Beam (verde), correspondente ao tempo 6.000 s, comparados com a solução analítica (azul)	81
Figura 5.16 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo de transporte de sedimento implementado para o esquema Warming-Beam sob efeito de hidrodinâmica de ondas ($T=6s$) em águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 600 s (água em azul, sedimento em vermelho).....	83
Figura 5.17 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo de transporte de sedimento implementado para o esquema Warming-Beam sob efeito de hidrodinâmica de ondas ($T=6s$) em águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 6.000s (água em azul, sedimento em vermelho).....	83
Figura 5.18 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo de transporte de sedimento implementado para o esquema Warming-Beam sob efeito de hidrodinâmica de ondas ($T=600s$) em águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 600s (água em azul, sedimento em vermelho).....	84
Figura 5.19 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo de transporte de sedimento implementado para o esquema Warming-Beam sob efeito de hidrodinâmica de ondas ($T=600s$) em águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 6.000 s (água em azul, sedimento em vermelho).....	85
Figura A – Situação e parâmetros físicos considerados	96

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – CLASSIFICAÇÃO GRANULOMÉTRICA DOS SEDIMENTOS SEGUNDO WENTWORTH (1922)	30
TABELA 4.1 – RESUMO DAS CONDIÇÕES INICIAIS DOS PARÂMETROS UTILIZADOS NOS MODELOS	64
TABELA 4.2 – RESUMO DAS CONDIÇÕES INICIAIS DOS PARÂMETROS UTILIZADOS PARA APLICAÇÃO SOB P EFEITO DE ONDAS EM ÁGUAS RASAS ...	65
TABELA 5 – VALOR DO RMS PARA OS MODELOS IMPLEMENTADOS	82

SUMÁRIO

RESUMO.....	6
LISTA DE SÍMBOLOS	8
LISTA DE FIGURAS.....	12
LISTA DE TABELAS	14
1 INTRODUÇÃO	17
1.1 APRESENTAÇÃO	17
1.2 PROBLEMÁTICA AMBIENTAL E SUA IMPORTÂNCIA	18
1.3 MOTIVAÇÃO CIENTÍFICA.....	19
2 OBJETIVOS	21
2.1 OBJETIVO GERAL.....	21
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	21
3 FUNDAMENTOS.....	23
3.1 ONDAS E CORRENTES	23
3.2 TRANSPORTE DE SEDIMENTO	27
3.3 FORMAS DE FUNDO GERADAS POR ONDA	38
3.4 DESENVOLVIMENTO DO PERFIL COSTEIRO	42
3.5 MODELAGEM NUMÉRICA	43
4 METODOLOGIA.....	58
4.1 ESCRITA DOS MODELOS NUMÉRICOS	58
4.2 APLICAÇÃO NUMÉRICA	62
4.3 MODELO DE ONDA E MORFOLOGIA DE FUNDO	67
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO	70
6 CONCLUSÃO.....	87
7 REFERÊNCIAS	91
ANEXOS	

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO

As áreas costeiras, que abrangem desde a Plataforma Continental até os sistemas estuarinos, passando por baías, enseadas, deltas e outras formações geomorfológicas, são de importância indiscutível tanto para a Humanidade quanto para os ecossistemas em si. As áreas costeiras tropicais são um dos mais ricos repositórios da biodiversidade marinha e produzem um número de recursos naturais e serviços ao ecossistema que são vitais à sobrevivência humana e ao bem-estar (MOBERG *et al.*, 2003 *apud* MENEZES, 2005). Estas áreas são utilizadas pelos organismos marinhos como habitat, onde desempenham papéis fundamentais no seu funcionamento, agindo como um dos componentes estruturais dos mesmos. O Homem se insere então como parte deste sistema ecológico, utilizando-se dos serviços ou produtos fornecidos por outros organismos de forma direta ou indireta. Além dos serviços fornecidos pelo ambiente na forma de "organismo" (com capacidade de regeneração na forma de resiliência), estas áreas costeiras fornecem serviços ao Homem pela sua conformação geomorfológica e física, permitindo a criação de grandes cidades; a instalação de complexos sistemas portuários escoando a produção agroindustrial; facilitando o despejo dos efluentes destas cidades que se dispersam no corpo marinho; e mesmo propiciando a exploração de áreas com potencial turístico, como balneários ou parques marinhos (MENEZES, 2005).

Nestas áreas costeiras, as taxas de transporte de areia mais significativas ocorrem nas zonas de arrebentação e de surfe. A energia dissipada pelas ondas incidentes nestas zonas promove a suspensão dos sedimentos e a movimentação destes e àqueles próximos ao fundo. Essa movimentação pode ocorrer de duas maneiras: a longitudinal (ao longo da linha de praia) e a transversal (ao longo da direção praia - offshore) (SOARES, 2005).

A zona de arrebentação é o local onde as ondas incidentes tendem a instabilizar-se até que a velocidade na crista exceda a velocidade de grupo da mesma, ponto no

qual quebrará (HOEFEL, 1998). A Zona de Surfe é a região altamente turbulenta onde a onda desenvolve seu processo de quebra.

A Figura 1.1 apresenta as principais categorias da topografia praial.

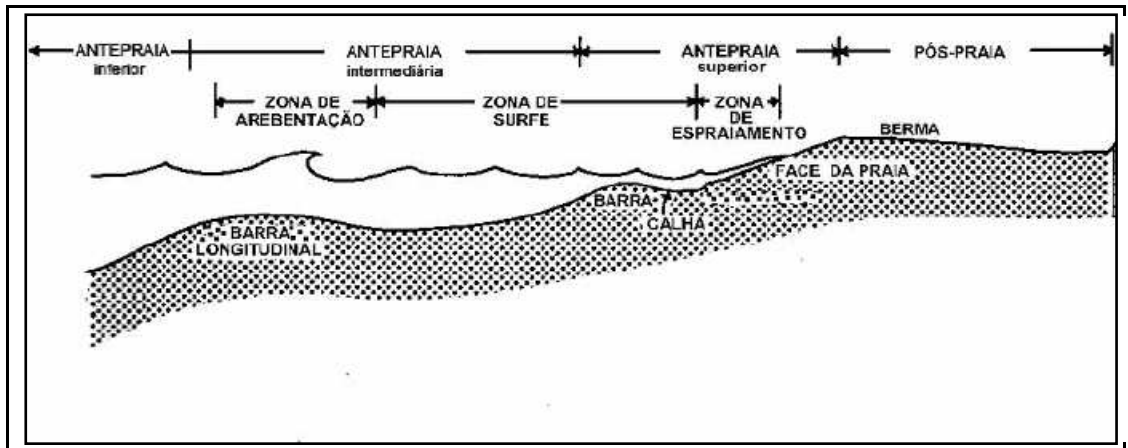


Figura 1.1 - Identificação das categorias da topografia praial
Fonte: Modificado de ALBINO, 1999.

1.2 PROBLEMÁTICA AMBIENTAL E SUA IMPORTÂNCIA

O transporte de sedimentos em ambientes aquáticos costeiros é forçado pela maré, pelas ondas, pelas correntes, e pela intensidade e direção do vento. Ações planejadas ou não-planejadas nesses ambientes podem desencadear problemas erosivos comprometendo as construções na orla praial, turismo, lazer, operações de embarque em portos, dentre outros.

Regiões costeiras do mundo inteiro vêm sofrendo crescentes interferências antrópicas que comprometem a estabilidade da linha de costa e alteram os padrões de circulação. O Brasil não é uma exceção para este problema.

Dai, o crescente incentivo ao desenvolvimento de metodologias que auxiliem nos planos de gerenciamento costeiro, para evitar possíveis problemas ou para recuperar áreas já degradadas por ações mal planejadas (SOARES, 2005).

1.3 MOTIVAÇÃO CIENTÍFICA

Dentre os métodos disponíveis para o estudo do transporte de sedimentos, a modelagem numérica computacional tem-se mostrado vantajosa, justificado pelo relativo baixo custo para simular os sistemas reais.

A modelagem computacional vem sendo empregada cada vez mais, em todas as áreas da engenharia, desde o surgimento dos computadores, sendo hoje uma das principais e fundamentais ferramentas de pesquisa dos processos Oceanográficos (MENEZES, 2005).

A identificação, escolha, e melhoramento dos processos físicos nos modelos, bem como sua correta utilização, propiciam grande passo no avanço do mundo técnico-científico.

CAPÍTULO 2

OBJETIVOS

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é contribuir para o conhecimento da dinâmica do fluido, ondas de gravidade e sua interação com o transporte de sedimento em ambientes costeiros. Para isto, o presente estudo visa acoplar um modelo de onda do tipo águas rasas ao modelo de conservação volumétrica de sedimentos de fundo, equação de Exner (Benkhaldoun & Seaïd, 2009).

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

De maneira específica ela visa:

- implementar diversos métodos numéricos de diferenças finitas para solucionar a equação diferencial de Exner;
- Avaliar e escolher o método numérico que melhor reproduza o comportamento de mudança de forma de leito de ambientes costeiros submetido à ação de correntes.
- Implementar e acoplar, ao modelo morfodinâmico, o modelo linear de ondas do tipo águas rasas.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS

3 FUNDAMENTOS

3.1 ONDAS E CORRENTES

3.1.1 Ondas

Segundo Bird (1976), ondas são ondulações em uma superfície de água produzida por ação de vento. O fluxo turbulento do vento que passa na superfície da água produz tensão e variações de pressão, iniciando-se as ondas que crescem como o resultado de um contraste de pressão ao longo de sua estrutura dados os declives. Ondas consistem em movimentos orbitais de água que diminui rapidamente para baixo da superfície, até que o movimento seja desprezível onde a profundidade da água (h) se iguala a metade do comprimento de onda (λ).

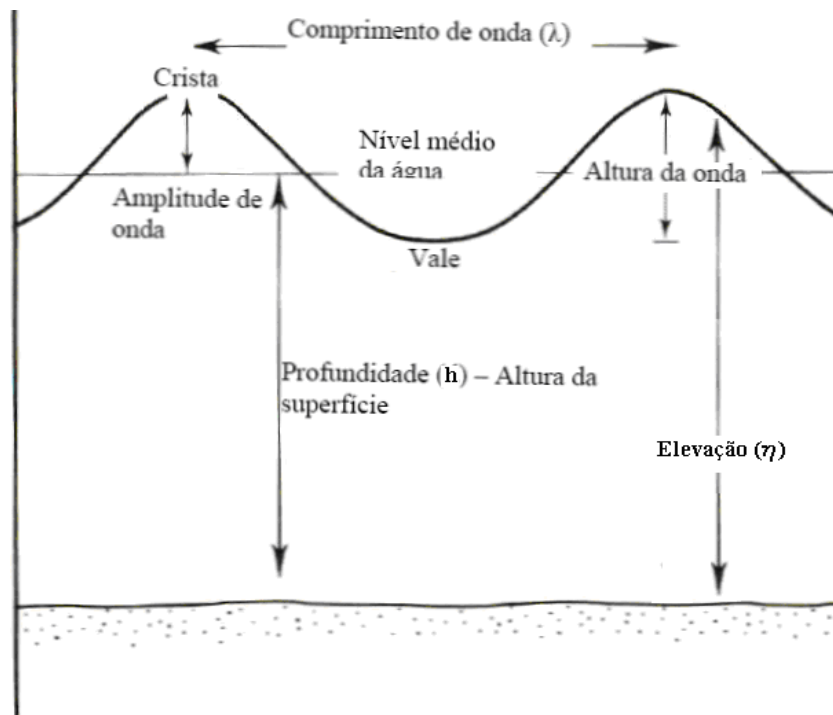


Figura 3.1 - Parâmetros da onda
Fonte: Carter (1988).
Nota: Dados adaptados pelo autor.

Os parâmetros de onda mais conhecidos são altura (H), que é a distância entre a crista e a cava (ou vale); o comprimento (λ), que é a distância entre duas cristas ou duas cavas; o período (T) é o tempo em que a crista ou outra parte qualquer da onda leva para se repetir ao passar por um ponto fixo na trajetória da onda; a

velocidade de propagação, celeridade (C), é dada em função da relação $1/T$; a elevação (h), que é a distância entre o leito e o nível da água em qualquer ponto da onda; e a esbeltez que é a relação entre altura e comprimento (H/l) podem expressar a forma da onda.

Estas são as chamadas ondas gravitacionais, e os parâmetros aqui citados se modificam assim que a onda começa a se aproximar de águas rasas. O momento em que ela passa a sentir o fundo é quando a profundidade (h) é igual ou menor do que a metade do comprimento da onda (l) (KOMAR, 1976).

Ao se aproximar da costa, a onda tem sua geometria afetada em função da diminuição da profundidade, tornando-se mais curta (l diminui), e a esbeltez aumenta até a arrebentação da onda (Figura 3.2), o que ocorre quando a onda atinge a relação H/h aproximadamente igual a 0,75 a 1,2; isto é, quando a profundidade da água for mais ou menos igual à altura da onda (MUEHE, 1993).

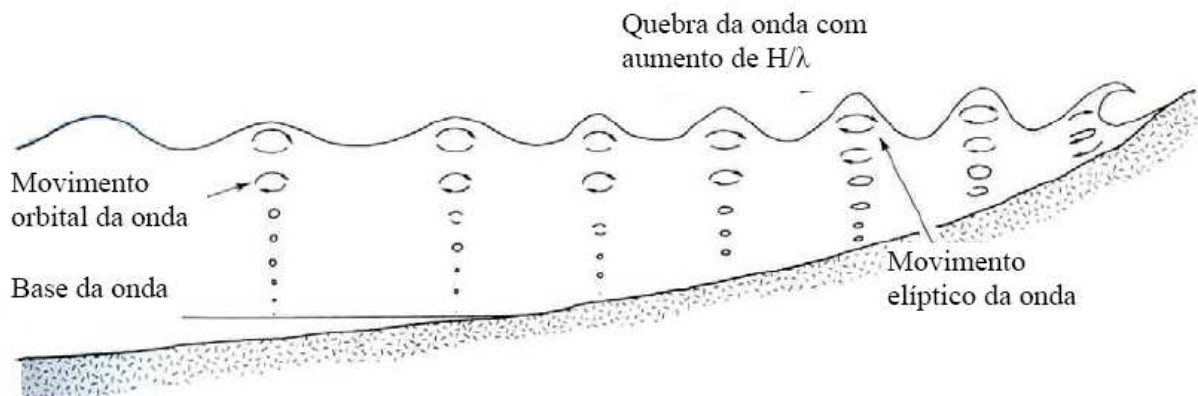


Figura 3.2 - Aumento da assimetria e esbeltez da onda ao se aproximar da linha de costa

Fonte: Carter (1988).

Nota: Dados adaptados pelo autor.

As ondas incidentes podem ser refletidas de escarpas, praias, baixios submarinos, bancos de areia, molhe, quebra-mar, etc. As ondas refletidas podem ser do mesmo tamanho das ondas incidentes, e se a onda se propagar exatamente na direção oposta daquela refletida, ela pode empilhar. Em bacias fechadas as ondas represadas são conhecidas como "seiches" (CARTER, 1988).

As ondas refletidas também podem se espalhar, por exemplo, quando o período da onda incidente é distribuído em componentes de alta-freqüência que radiam energia (CARTER, 1988).

Segundo Carter (1988), os tipos de ondas de arrebentação indicam o modo de dispersão de energia da onda. Nas ondas deslizantes a turbulência começa na crista e envolve gradualmente a frente da onda. A onda deslizante (*spilling breaker*) é um fenômeno de superfície que se segue por distâncias de até vários comprimentos de onda (GALVIN, 1969 *apud* CARTER 1988), de forma que a pequena pressão dissipativa concentrada alcança o fundo. Por outro lado, nas ondas mergulhantes (*plunging breaker*) o processo é mais violento, ocorrendo dentro de uma distância de só 2 ou 3 alturas de onda, de forma que a energia de dissipação está concentrada em uma zona estreita (Figura 3.3). Segundo Komar (1976), as ondas frontais se elevam como se fossem mergulhar, entretanto a base da onda atinge a face da praia tão rapidamente a crista se desmorona e desaparece. As ondas frontais ocorrem em praias de alto-gradiente com ondas de baixa declividade.

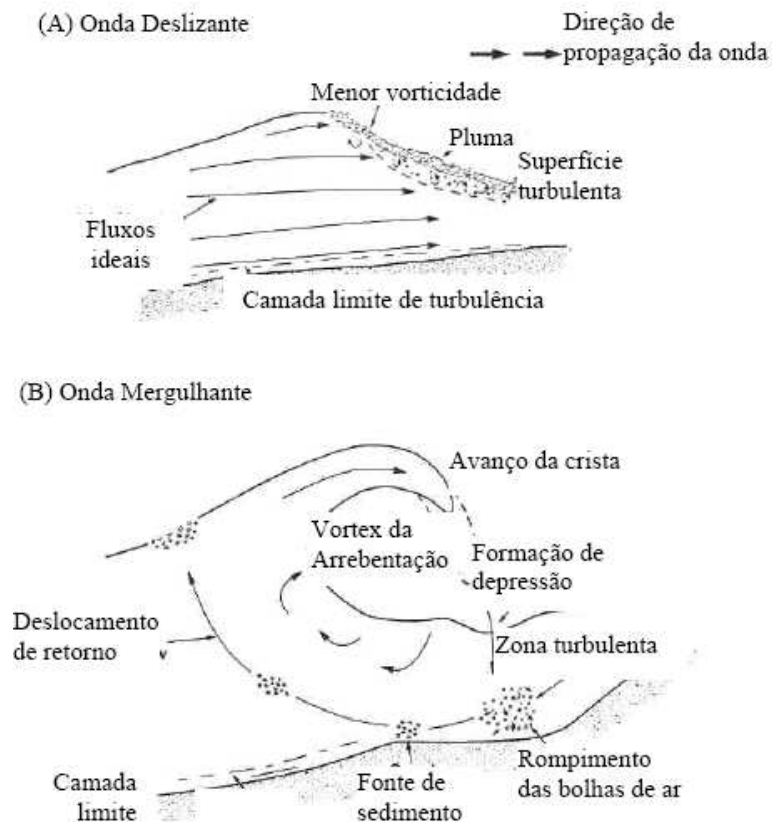


Figura 3.3 - Comparação da geração de vortex e penetração da coluna da água pelas ondas de arrebentação deslizante (A) e mergulhante (B)
 Fonte: Carter (1988).
 Nota: Dados adaptados pelo autor.

Outro processo de dissipação de ondas em águas intermediárias e rasas é o fenômeno de refração. Tal fenômeno consiste no processo pelo qual as cristas das ondas mudam de direção até tornarem-se paralelas à batimetria do fundo (PETHICK, 1986 *apud* Albino, 1995). O trem de ondas segue em direção a linha de costa com ângulo oblíquo em relação a esta linha de costa e o contorno do fundo, quando ainda não afetada pelo fundo. Quando então começa a ser modificada pelo fundo, a velocidade da onda será maior na parte mais distante da costa e menor na parte mais próxima da costa. Com isso a crista tende a curvar-se cada vez mais tanto quanto ela distar da costa, devido a maior velocidade, até que as cristas das ondas tornem-se paralelas à linha de costa (Figura 3.4). Dentro da Baía do Espírito Santo a chegada das ondas NE na costa é influenciada pelo efeito da dissipação e refração.

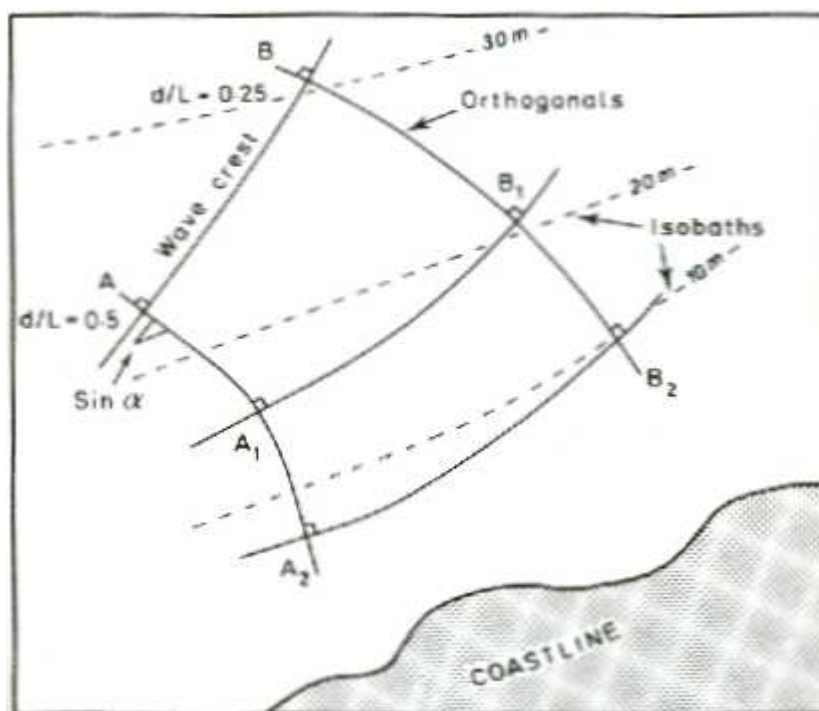


Figura 3.4 - Refração de ondas em águas rasas
Fonte: Carter (1988).

As ondas são também submetidas à difração que é o fenômeno que consiste na transmissão lateral de energia de uma onda ao longo de sua crista. Ele manifesta-se quando há propagação de ondas em um setor restrito, ou quando um trem de ondas é interceptado por obstáculos, como ilhas (Figura 3.5) e espigões (SUGUIO, 1992).

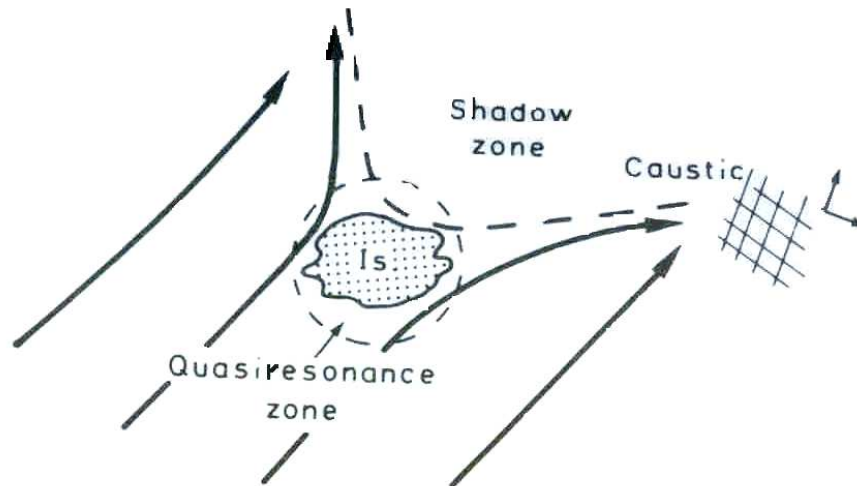


Figura 3.5 - Efeito de difração em ilha
 Fonte: Carter (1988).

3.1.2 Corrente

Correntes oceânicas são movimentos suaves de água com respeito a padrões de vento prevalecentes, e variações de densidade nos oceanos que resultam de diferenças na salinidade e temperatura da água.

As correntes podem mover areia fina a média (diâmetros de grão entre 0,1 e 0,5mm) quando a velocidade excede aproximadamente 15 cm/s, mas são exigidas correntes mais fortes para mover material mais grosso. Correntes geradas por ventos e marés podem ser fortes o bastante para mover areia ou até mesmo pedregulho no chão do mar, contribuindo ainda para o acúmulo de sedimento de praia, abastecendo a praia, ou levando isto para longe da praia, mas estes efeitos são normalmente subordinados aos movimentos de sedimento de praia para dentro e fora e ao longo da costa por ação de onda (BIRD, 1976).

3.2 TRANSPORTE DE SEDIMENTO

A maré, as ondas, as correntes, o tamanho dos grãos, a declividade do fundo e a intensidade e direção dos ventos são fatores que determinam o transporte de sedimentos costeiros (DAVIS, 1985).

O Transporte de sedimento e o escoamento na zona costeira são importantes na relação de vários tópicos de engenharia como sedimentação e erosão no entorno de estruturas, preenchimento de canais dragados, mudanças na morfologia próxima a costa e taxas de transportes de sedimentos transversais e longitudinais com relação à costa (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Fundamentalmente, os sedimentos podem ser transportados pelo fundo ou em suspensão na coluna d'água (DEAN & DALRYMPLE, 2002).

É comum dividir os modos de transporte de sedimento em três partes: carga de fundo, carga suspensa e carga lavada (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

A carga lavada constitui-se de partículas muito finas que são transportadas pela água e que normalmente não são retratadas no fundo. Entretanto, o entendimento da composição do material de fundo não permite nenhuma predição da taxa de transporte da carga carregada. Desta forma, quando o termo “descarga total de sedimento” é utilizado, a carga lavada é desprezada (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Do total da carga de sedimento é feita uma distinção entre as duas categorias, a carga de fundo e a carga suspensa. Nenhuma definição precisa destes termos foi exatamente colocada, mas a idéia básica da separação do total da carga de sedimento em duas partes é que, grosseiramente falando, dois mecanismos diferentes são efetivamente atuantes durante o transporte (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

A carga de fundo é definida como a parte da carga total que possui mais ou menos um contato contínuo com o fundo. Isto inclui primariamente os grãos que rolam, deslizam, ou pulam ao longo do fundo. Assim, a carga de fundo deve ser determinada quase que exclusivamente pela tensão de cisalhamento efetiva (tensão de corte de fundo) atuando diretamente na superfície do sedimento (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

A carga suspensa é definida como a parte da carga total que está se movendo sem contato contínuo com o fundo em resposta da agitação da turbulência do fluido (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

A Figura 3.6 apresenta os diferentes modos de transporte de sedimento.

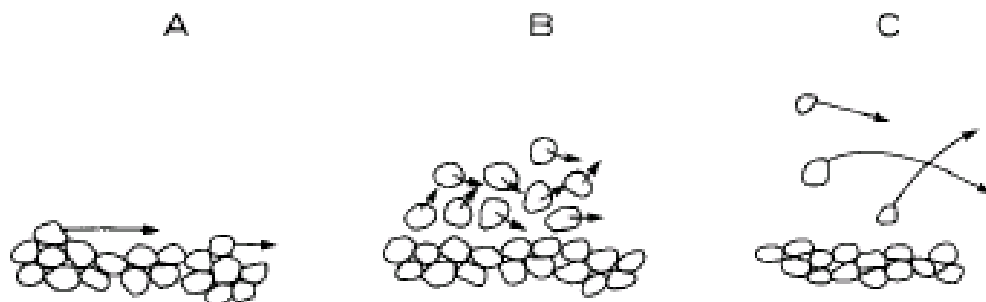


Figura 3.6 – Diferentes modos de transporte de sedimento: A – carga de fundo em baixa tensão de cisalhamento; B – Escoamento em folha; C – sedimento suspenso
Fonte: Fredsoe & Deigaard (1992).

3.2.1 Propriedades dos sedimentos

Segundo Fredsoe e Deigaard (1992), em se tratando de sedimentos não-coesivos (areia e cascalho), do ponto de vista da hidráulica as propriedades do sedimento mais importantes no transporte de sedimento são tamanho, forma, e gravidade específica. O presente estudo, que trata de sedimentos não-coesivos e seu respectivo transporte enquanto carga de fundo, contempla as propriedades do sedimento de tamanho e gravidade específica, as quais são descritas a seguir.

3.2.1.1 Tamanho

O método mais conveniente e mais comum para a análise da distribuição do tamanho de partícula é a análise por peneiramento, onde é aplicado para tamanho de partículas não menores que 0,06 mm (FREDSOE & DEIGAARD, 1992). Ainda, tem-se forte recomendação para fins de estudos científicos na área ambiental que se faça uso na análise granulométrica a utilização de peneiras com a abertura sugerida por Wentworth (1922), cuja Escala Granulométrica está apresentada na Tabela 3.1 (SUGUIO, 1973, ALBINO & OLIVEIRA, 1995; PASSOS 2004, 2007). Nesta, phi (ϕ) corresponde à unidade de medida do diâmetro da partícula do sedimento, cuja equivalência em milímetros (mm) é apresentada na 3ª coluna. Ressalta-se que além do uso desta pela comunidade acadêmica, a mesma classificação granulométrica é utilizada pela legislação brasileira para fins de estudos na área ambiental, como estabelecido pela Resolução CONAMA n.º 344/04.

TABELA 3.1 – CLASSIFICAÇÃO GRANULOMÉTRICA DOS SEDIMENTOS SEGUNDO WENTWORTH (1922)

Classificação	Abertura das peneiras	
	Phi (ϕ)	(mm)
Areia muito grossa	-1 a 0	2 a 1
Areia grossa	0 a 1	1 a 0,5
Areia média	1 a 2	0,5 a 0,25
Areia fina	2 a 3	0,25 a 0,125
Areia muito fina	3 a 4	0,125 a 0,062
Silte	4 a 8	0,062 a 0,00394
Argila	8 a 12	0,00394 a 0,0002

Fonte: Wentworth (1922 *apud* SUGUIO, 1973).

Uma quantidade de sedimento representativamente adequada é analisada, e o resultado é apresentado em uma curva de freqüência (curva de distribuição, Figura 3.7) ou uma curva de freqüência acumulativa (curva de distribuição Figura 3.8).

Na curva de função de densidade de freqüência ou probabilidade (Figura 3.7) a abscissa representa o diâmetro da peneira d , e a ordenada a concentração da amostra total contida em intervalos correspondentes de d . Muito freqüentemente a curva de distribuição de sedimentos se aproxima da curva de probabilidade normal, como plotada na figura 3.8, desta forma a função de distribuição é log-normal (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

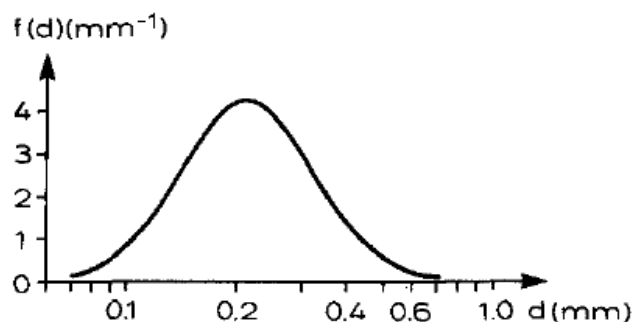


Figura 3.7 – Freqüência ou densidade de probabilidade de uma distribuição log-normal do tamanho do grão. $d_{50} = 0,25$ mm e $\sigma_g = 1,5$

Fonte: Fredsoe & Deigaard (1992).

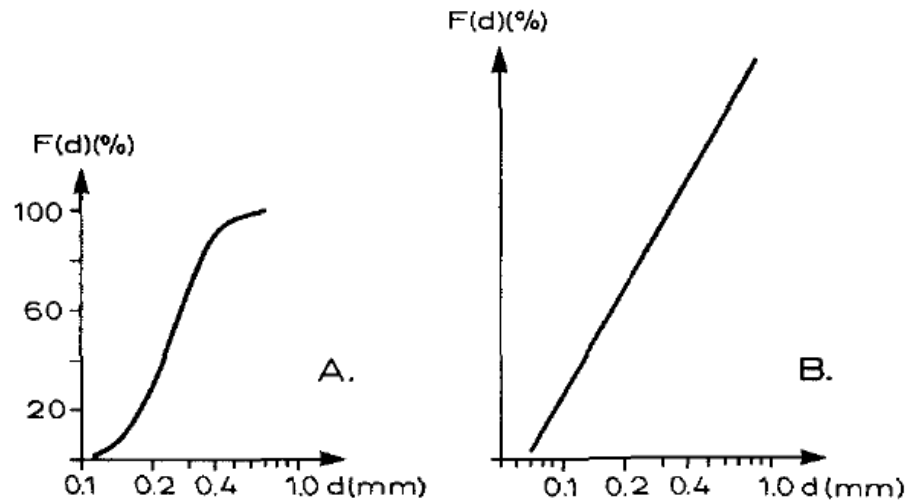


Figura 3.8 – Curva de distribuição granulométrica para distribuição log-normal do tamanho de grão para $d_{50} = 0.25$ mm e $\sigma_g = 1.5$. A – Plotagem semi-logarítmica; B – Plotagem em função probabilidade. Fonte: Fredsoe & Deigaard (1992).

3.2.1.2 Gravidade Específica

A gravidade específica γ_s dos grãos é o parâmetro que exhibe a menor variação sob condições naturais.

A gravidade específica relativa é dada pela Equação (3.1).

$$S = \gamma_s / \gamma, \quad (3.1)$$

onde γ denota a gravidade específica da água a 4° C e é chamada de densidade relativa. Para sedimentos comuns, S é normalmente muito próximo de 2,65 (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

3.2.2 Tensão de corte de fundo

Considerando o transporte de grãos não-coesivos, estes não se moverão em velocidades de escoamento muito baixas, mas quando a velocidade de escoamento se tornar grande o suficiente. Esta velocidade de escoamento é chamada de velocidade de escoamento crítica (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Uma solução clássica para o problema foi oferecida por Shields, no ano de 1936. A análise dele se baseou na análise dimensional. A eminência do movimento da partícula é supostamente influenciada por uma relação entre as forças de condução e de estabilização (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

As forças de condução sobre uma partícula de sedimento em repouso sobre outras em um fundo originalmente plano são a tensão de tração τ_0 (horizontal) e a força de sustentação (Fig. 3.9) (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

A força horizontal de arrasto F_D , criada pelo escoamento, consiste na ação da fricção de *skin* sobre a superfície do grão dada à separação do escoamento (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Normalmente, uma força de sustentação F_L , além da flutuabilidade natural, é também criada pelo escoamento. Esta sustentação é em parte dado pela curvatura das linhas da trajetória de fluxo as quais decrescem localmente a pressão, de forma que esta seja inferior à pressão hidrostática no topo dos grãos. Além disso, a separação do escoamento também envolve uma força de sustentação nos grãos (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

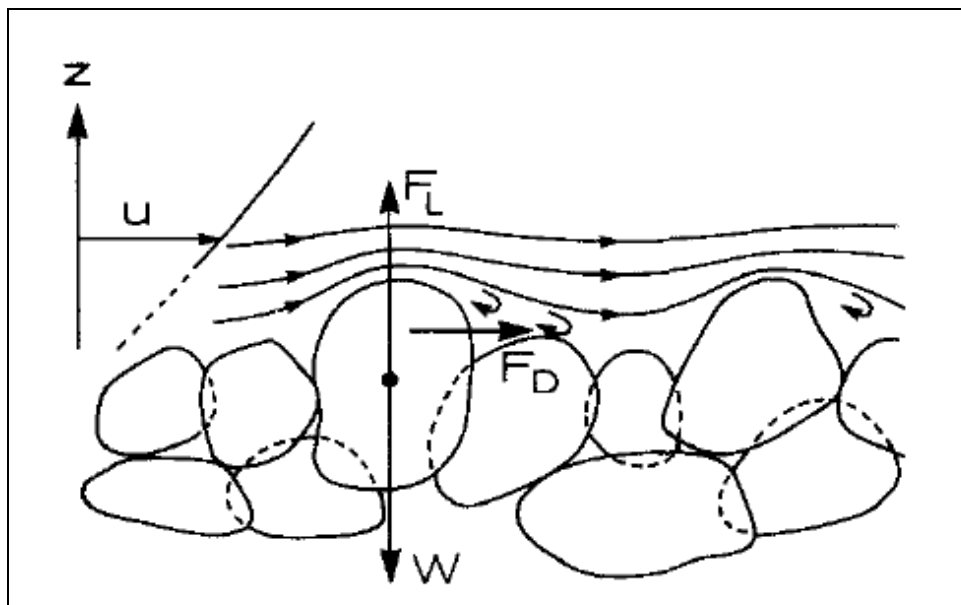


Figura 3.9 - Forças atuando sobre grãos que repousam no leito
Fonte: Fredsoe & Deigaard (1992).

3.2.3 Parâmetro de Shields

Uma medição diferente do balanço entre as forças de condução e as forças de estabilização atuantes nos grãos do sedimento de fundo foi sugerida por Shields no ano de 1936, em um estudo do movimento incipiente do sedimento em um escoamento estacionário (NIELSEN, 1992). A Equação 3.2 apresenta o parâmetro de Shields.

$$\theta = \frac{\tau(o)}{\rho(s-1)gd} = \frac{u^{*2}}{(s-1)gd} \quad (3.2)$$

θ representa o parâmetro de Shields.

Este parâmetro é particularmente conveniente de se usar em conexão com o escoamento estacionário em canais por que aqui, o cisalhamento de fundo estacionário, $\bar{\tau}(o)$, e a velocidade de fricção, \bar{u}^* , são quantidades que serão fáceis de serem medidas, $\bar{\tau}(o) = \rho g D I$, onde D é a profundidade do escoamento e I é o gradiente hidráulico (NIELSEN, 1992).

Em conexão com o movimento da onda, o parâmetro de Shields (correspondente ao cisalhamento total) é geralmente definido em termos do máximo cisalhamento de fundo $\hat{\tau}$ (NIELSEN, 1992).

$$\theta = \frac{\hat{\tau}}{\rho(s-1)gd} = \frac{1/2 f_w (A\omega)^2}{(s-1)gd} = \frac{1}{2} f_w \psi \quad (3.3)$$

onde f_w é o fator de fricção de onda, A é a amplitude de onda, ω é a velocidade de fase da onda e ψ é o número de mobilidade (NIELSEN, 1992).

3.2.4 Parâmetro de Shields crítico

O parâmetro de Shields crítico θ_c é o parâmetro de Shields efetivo θ' no momento que o sedimento começa a se mover.

O valor de θ_c é função da granulometria e da densidade do sedimento, da viscosidade e da densidade do fluido, e da estrutura do escoamento. Valores típicos de θ_c para areia em água são da ordem de 0,05 (NIELSEN, 1992). Para a areia no ar, eles são de alguma forma menores normalmente na faixa $0,01 < \theta_c < 0,02$. Em ambas as situações, θ_c se torna muito maior na faixa de silte das granulometria dos grãos ($d < 0,063mm$).

Para obter uma simples descrição do comportamento de θ_c , Shields (1936 *apud* NIELSEN, 1992) notou que tanto a força de arrasto F_D e a força de sustentação F_L , em uma partícula de sedimento de fundo, são proporcionais a $u^2 *$, e às funções do Número de Reynolds para grãos, $u^* d/\nu$. Ele portanto plotou valores observados de θ_c , contra o Número de Reynolds para grãos. O diagrama resultante é chamado de o *Diagrama de Shields*.

Um diagrama levemente diferente foi sugerido por Madsen & Grant (1976 *apud* NIELSEN, 1992). Ao invés do Número de Reynolds para grãos, eles usaram $d\sqrt{(s-1)gd}/4\nu$ como a abscissa. Um exemplo de tal diagrama é mostrado na Figura 3.10.

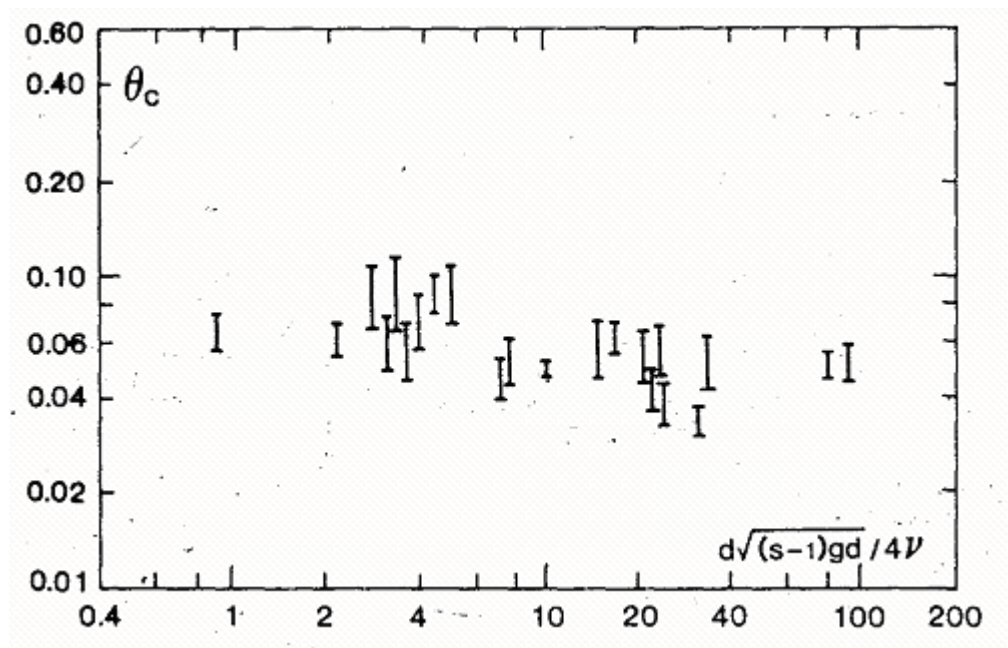


Figura 3.10 - O diagrama de Madsen-Grant para o movimento inicial do sedimento em escoamento oscilatório. Dados de Manohar (1955) e de Carstens *et al.* (1969)
Fonte: Nielsen (1992).

Para uma típica praia arenosa com $d = 0,2mm$ e $s = 2,65$, o valor de $d\sqrt{(s-1)gd}/4\nu$ é aproximadamente 11. Em torno deste valor os dados apresentados não caracterizam, significativamente, uma tendência. Desta forma, é recomendável o uso de um valor:

$$\theta_c = 0,05 \quad (3.4)$$

Valor este aplicável para o parâmetro de Shields na maioria dos casos práticos.

O cisalhamento efetivo τ_c dado em função de θ_c , $\tau_c = \rho(s-1)gd\theta_c$, é chamado de *Cisalhamento crítico* da partícula de sedimento, que define o valor acima do qual é iniciado o transporte de sedimento.

3.2.5 Transporte de carga de fundo

Uma das primeiras aproximações para o problema da predição da taxa de transporte de carga de fundo foi apresentada por H. A. Einstein (1950 *apud* FREDSOE & DEIGAARD, 1992). Uma das maiores inovações em suas análises foi a aplicação da teoria da probabilidade que leva em consideração a variação estatística das forças de agitação sobre as partículas do leito causadas pela turbulência (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Se a magnitude das forças instantâneas de agitação que estão atuando sobre certas partículas do fundo excederem as forças de estabilização sobre a partícula, esta começará a pular, rolar, ou deslizar ao longo do fundo até que se depositem em local onde a magnitude das forças instantâneas é menor que as forças de estabilização. Baseado em observações experimentais, Einstein assumiu que a distância principal, percorrida por uma partícula de sedimento entre erosão e subsequente deposição, é simplesmente proporcional ao diâmetro do grão e independente das condições hidráulicas e porção de sedimento em movimento (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

O princípio da análise de Einstein é que o número de partículas, depositada em uma unidade de área, depende do número de partículas em movimento e da

probabilidade que as forças dinâmicas permitem a deposição das partículas. O número de partículas erodidas da mesma unidade de área depende do número de partículas dentro da área e da probabilidade que as forças hidrodinâmicas sobre estes grãos são suficientemente fortes para movê-las. Para condições de equilíbrio o número de grãos depositados deve ser igual ao número de partículas erodidas. Desta forma, uma relação funcional (função de carga de fundo) é derivada entre as duas quantidades adimensionais ϕ_B e θ' (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

$$\phi_B = \frac{q_b}{\sqrt{(s-1)gd^3}} \quad (3.5)$$

e

$$\theta' = \frac{\tau'_b}{\rho g(s-1)d} = \frac{U_f'^2}{(s-1)gd} \quad (3.6)$$

onde q_b é a taxa de carga de fundo transportada em volume de material por unidade de tempo e largura. Conseqüentemente, ϕ_B é uma forma adimensional de descarga de carga de fundo, enquanto θ' é a tensão de tração adimensional (o parâmetro de Shields) dada à fricção de *skin* e U_f' é a velocidade da fricção de *skin* (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Em 1954, Bagnold apontou uma das deficiências na formulação de Einstein por meio da indicação do seguinte paradoxo. Considere-se um caso ideal de escoamento de fluido ao longo de um fundo uniforme, perfeitamente amontado de esferas em um funo plano, de forma que todas as partículas estão igualmente expostas. Variações estatísticas devido à turbulência são descartadas. Quando a tensão de tração superar o valor crítico, todas as partículas da camada mais acima são arrancadas ao mesmo tempo e são dispersas. Em seguida a próxima camada de partículas é exposta ao escoamento e, também, poderia ser conseqüentemente arrancada. O resultado é que subseqüentemente as camadas logo abaixo também seriam erodidas, de forma que um fundo estável não poderia existir de forma alguma sempre que a tensão de corte excedesse o valor crítico (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Bagnold explica o paradoxo ao assumir que na mistura água-sedimento a tensão de corte total τ' pode ser separada em duas partes:

$$\tau' = \tau_F + \tau_G \quad (3.7)$$

onde τ_F é a tensão de corte transmitida pelo fluido inter-granular, enquanto τ_G é a tensão de corte transmitida devido à troca de momentum causada pelos contornos das partículas sólidas, como uma tensão tangencial dispersiva. A existência de tais tensões dispersivas foi confirmada pelo experimento de Bagnold (FREDSOE & DEIGAARD, 1992). A Figura 3.11 apresenta a distribuição da tensão de corte fundo e do grão em um escoamento uniforme em canal aberto.

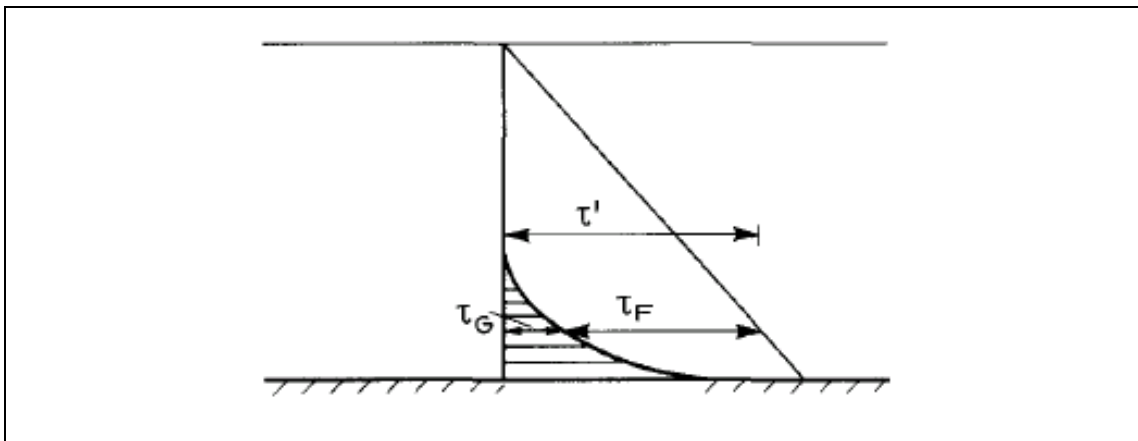


Figura 3.11 – Distribuição da tensão de corte do fluido e do grão em um escoamento uniforme em canal aberto
 Fonte: Fredsoe & Deigaard (1992).

Bagnold argumentou que quando a camada de esferas fosse arrancada, algumas das esferas podem ficar em suspensão, enquanto outras serão transportadas como carga de fundo. Adicionalmente, uma pressão dispersiva sobre a próxima camada de esferas se desenvolverá e atuará como um agente de estabilização. Desta forma, certa parte do total da tensão de corte de fundo é transmitida como uma tensão de corte do grão τ_G , e correspondentemente a menor parte da tensão do fluido ($\tau_F = \tau' - \tau_G$). Continuando a argumentação, é entendido que exatamente tantas camadas de esferas sejam erodidas que a tensão residual do fluido τ_F sobre a primeira camada não-movível é igual (ou menor que) a tensão de tração crítica τ_c . O mecanismo na transmissão da tensão de corte de tração τ maior que a crítica é então o que se

segue: τ_c é transferida diretamente para as partículas em movimento e a partir destas para o fundo fixo como uma tensão dispersiva (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

3.2.6 Transporte transversal de sedimento na zona de surfe

As condições na zona de surfe são caracterizadas pela forte energia dissipativa e geração de turbulência causada pela quebra das ondas. Todos os mecanismos que são tidos como contribuintes para o transporte de sedimento transversal na costa fora da zona de surfe também são relevantes na zona de surfe. Entretanto, os processos que regem a hidrodinâmica fora da zona de surfe são, na zona de surfe, menos importantes, com relação àquela atribuída à geração de turbulência causada pela quebra das ondas, porque a energia dissipativa na camada limite da onda é menor (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

3.3 FORMAS DE FUNDO GERADAS POR ONDA

Em um escoamento oscilatório, a estrutura das formas de fundo é bem diferente daquelas encontradas sobre um fundo erodível exposto a um escoamento unidirecional. Devido às mudanças na magnitude e direção do escoamento a conformação do fundo é também não-estacionária e mudará ao longo do período de onda (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Para ondas de pequeno período, o volume de sedimento deslocado para trás e para frente durante um período de onda é geralmente pequeno comparado ao volume de areia em um fundo ondulado. Isto significa que a conformação pode ser considerada quase estacionária, apenas com pequenas flutuações no perfil ao longo do período de onda (ver Figura 3.12 parte A).

Para ondas de longo período ou em caso de sedimentos muito finos as mudanças no perfil de fundo ondulado pode ser comparável ao volume total de um fundo ondulado como indicado na Figura 3.12 parte B. Neste último caso, o perfil de fundo

principal se torna mais alongado. A principal diferença entre o longo e curto período de onda é que a separação do escoamento no caso de curto período exibe um comportamento muito não-estacionário, enquanto que o *bubble* de separação no caso de longo período é mais permanente ao longo de cada semi-ciclo de onda (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

As *ripples* geradas pelos pequenos períodos de onda (Clifton (1976) sugere que $a/d \leq 500 - 1000$) seja dividido em dois grupos principais, chamado de *ripples* de grãos rolantes e *ripples* de vortex (BAGNOLD, 1946 apud FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

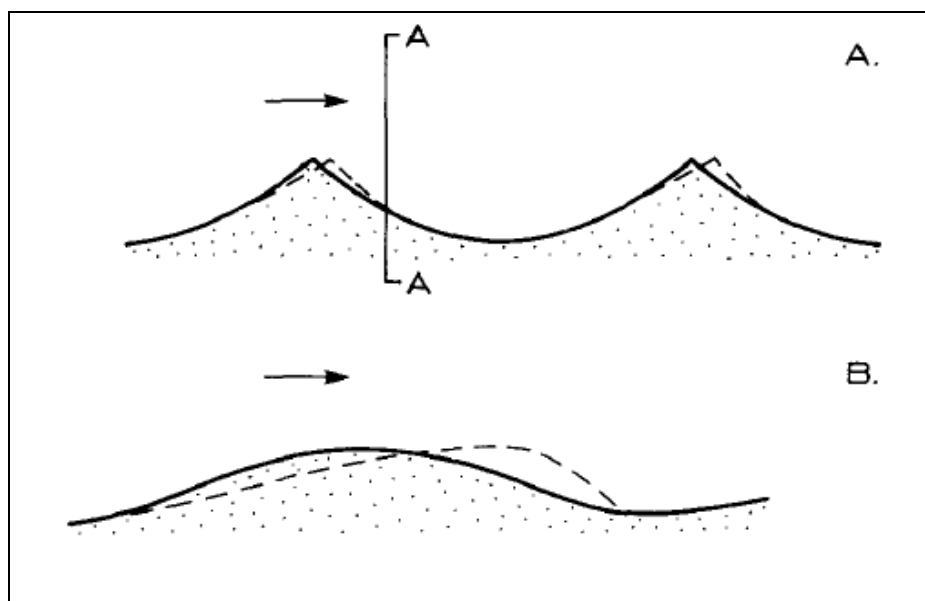


Figura 3.12 – Formas de fundo no escoamento oscilatório: perfis instantâneo (tracejado) e principal (contínuo). A – ondas de pequeno período; B – ondas de grande período
 Fonte: Partly depois Sleath (1984 apud FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

As *ripples* de grãos rolantes são formadas em baixos valores de Shields não muito maiores que duas vezes o número de Shields crítico. Essas *ripples* possuem uma altura tão pequena que nenhuma formação real de vortex ocorre após a passagem do fluido por sua respectiva crista (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

As *ripples* de vortex são *ripples* maiores, formadas por grandes valores do parâmetro de Shields (muito maior que duas vezes o parâmetro de Shields). A Figura 3.13 apresenta o comportamento não-estacionário dos vórtices no escoamento sobre essas *ripples*. Apenas após o escoamento mudar o sentido para a direita, uma separação de *bubbles* se desenvolve após a crista. Esta *bubble* se expandirá com o passar do tempo (Fig. 3.13 partes A e B) e depois será liberado do

fundo quando da reversão do gradiente de pressão (Fig. 3.13 C e D), após o qual o vórtice liberado vai gradualmente perdendo força. Esse vórtice é capaz de mover consideráveis porções de sedimento para longe do leito, o que significa que a presença de *ripples* aumenta a porção de sedimentos em suspensão (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

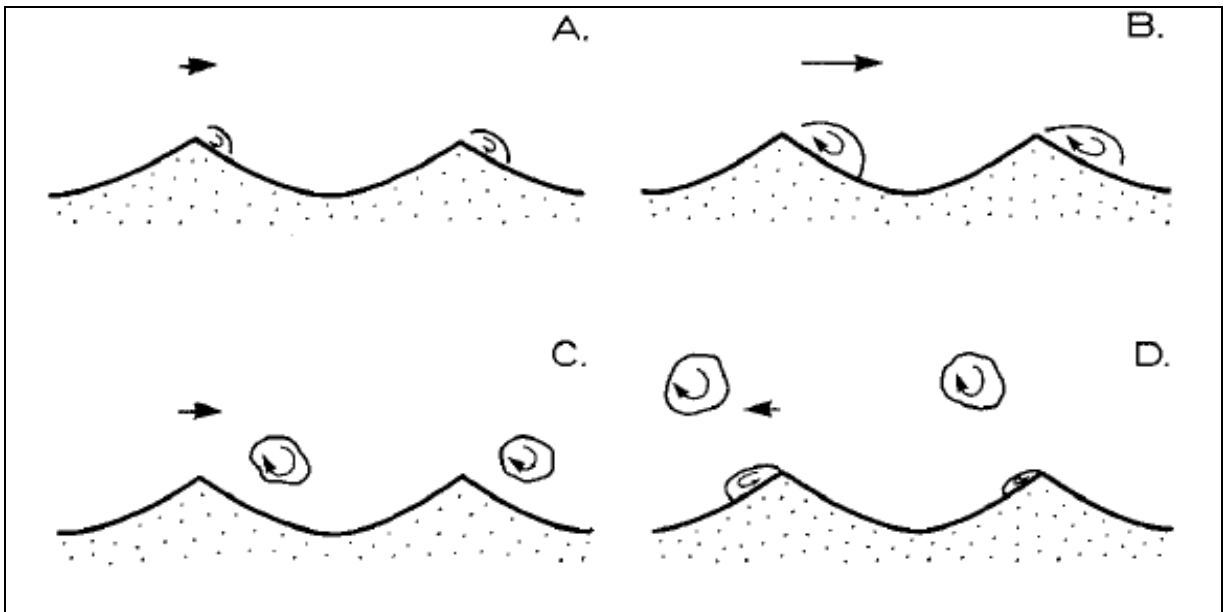


Figura 3.13 – Movimento dos vórtices formados ao longo das *ripples* de vortex
 Fonte: Fredsoe & Deigaard (1992).

A Figura 3.14 indica que para pequenos valores do parâmetro de Shields (θ'), a declividade das *ripples* de vortex H_r/L_r (H_r = altura da *ripple* e L_r = comprimento da *ripple*) é muito grande. O parâmetro de Shields, dada à fricção de *skin*, é calculado pelo uso de expressões (Eq. 3.3) ajustando a rugosidade de fundo para $2.5 \times d_{50}$. A Figura 3.14 parte A apresenta a declividade da *ripple* medida para ondas regulares, enquanto a Figura 3.14 parte B apresenta um caso similar de ondas obtidas sob condições de campo (Nielsen, 1979 *apud* FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

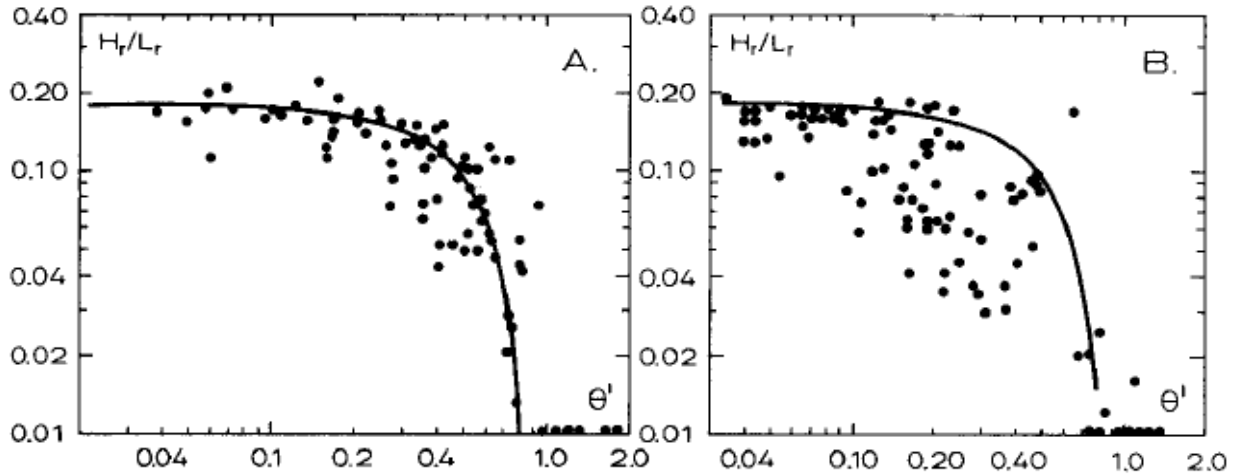


Figura 3.14 – Declividade da *ripple* pela tensão de corte oriunda de dados laboratoriais (A) e dados de campo (B). Após Nielsen (1979)
 Fonte: Fredsoe & Deigaard (1992).

Similar ao comportamento de fundos ondulados em escoamento estacionário, as *ripples* desaparecem para altos valores do parâmetro de Shields. Esta transição para o fundo plano ocorre para valores de θ' por volta de 0.8 – 1.0 (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

Nielsen (1979 *apud* FREDSOE & DEIGAARD, 1992) sugeriu a seguinte expressão empírica para calcular a declividade de *ripple*, essa expressão foi encontrada baseada em experimentos com ondas regulares feitas em laboratório (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

$$\frac{H_r}{L_r} = 0.182 - 0.24(\theta')^{3/2} \quad (3.8)$$

Esta equação é a linha sólida da Fig. 3.14. Em caso de ondas irregulares (dados de campo), a declividade se tornará levemente menor como visto na Fig. 3.14 parte B. Neste caso Nielsen sugeriu a seguinte expressão para a declividade da *ripple*:

$$\frac{H_r}{L_r} = 0.342 - 0.34(\theta')^{1/4} \quad (3.9)$$

3.4 DESENVOLVIMENTO DO PERFIL COSTEIRO

O perfil costeiro pode variar consideravelmente ao longo do ano ou em um particular evento de tempestade. Bancos de sedimento ao longo da costa podem ser formados e bancos existentes podem ser deformados ou desmanchados. O transporte transversal de sedimento promove um importante papel no desenvolvimento do perfil costeiro e a partir deste transporte transversal pode-se formular um modelo para descrever o desenvolvimento morfológico. A principal hipótese assumida é que a situação é estritamente bidimensional, onde a descarga do pacote de sedimento em direção paralela a linha de costa é zero (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

O modelo morfológico consiste no modelo de transporte de sedimento transversal (em direção a costa e para fora dela) que calcula a variação detalhada do sedimento através do perfil. Do campo de transporte de sedimento, o desenvolvimento do perfil costeiro é calculado pela equação de continuidade para o sedimento:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{1-n_p} \frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (3.10)$$

Onde h é a altura do substrato, n_p é a porosidade do leito e q_x é a taxa de transporte de sedimento na direção x . Na prática, o modelo de transporte de sedimento e a equação de continuidade terão que ser resolvidas numericamente. Normalmente um esquema de diferenças finitas é usado, de forma que as condições hidrodinâmicas e o transporte de sedimento são calculados em cada ponto de grade no tempo t . Pelo uso da equação da continuidade do sedimento de fundo após um passo de tempo morfológico (tempo $t + \Delta t$) é determinado a variação na morfologia. Não é trivial selecionar um esquema numérico para solução da equação da continuidade para o sedimento (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

O *undertow* confere uma direção para fora da costa ao transporte na zona de surfe e que o transporte para fora da zona de surfe é fraco, com tendência de ser na direção da costa. Isto significa que um banco ao longo da costa terá tendência a ser formado em um perfil com declividade plana como resultado do transporte transversal (Fig. 3.15) (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

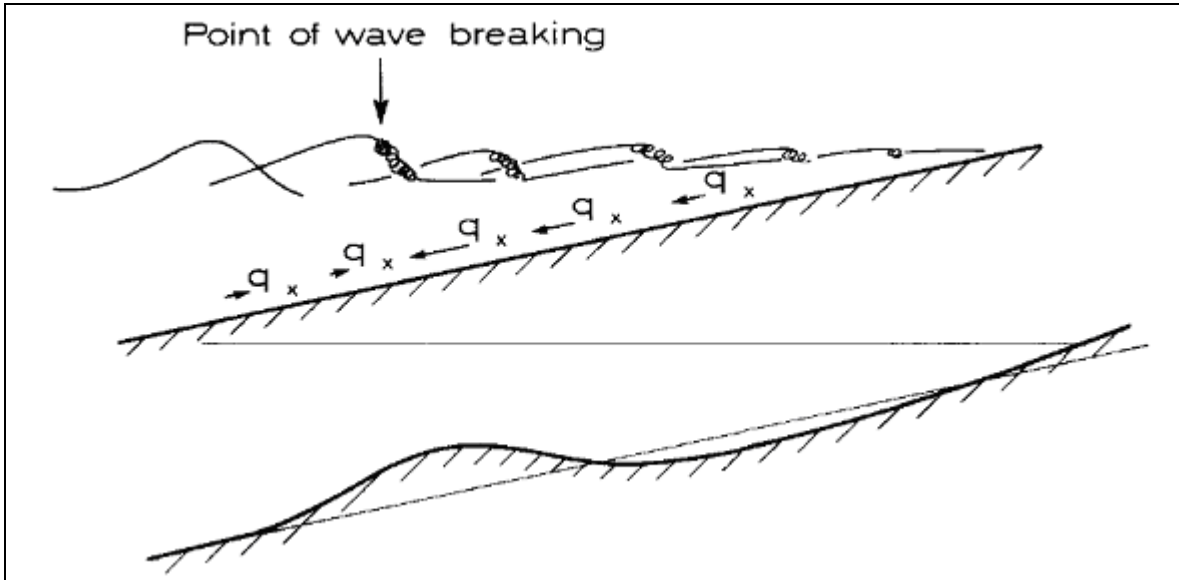


Figura 3.15 – O transporte transversal de sedimentos, e a formação do banco de quebra
 Fonte: Fredsoe & Deigaard (1992).

O transporte transversal de sedimento é considerado importante por ser fator de formação de bancos de sedimentos na arrebentação, mas outros mecanismos podem ser também considerados significantes, como grandes vórtices gerados por ondas tipo *plunging* e baixa freqüência de oscilações geradas por trem de ondas (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

3.5 MODELAGEM NUMÉRICA

Ao longo da última década o desenvolvimento da pesquisa de transporte de sedimento costeiro tem mudado a partir de descrições fenomenológicas até sofisticados modelos numéricos nos quais o escoamento, bem como o resultado do transporte de sedimento, é descrito em detalhes (FREDSOE & DEIGAARD, 1992).

A modelagem numérica permite o conhecimento de processos físicos em fluidos que variam desde estuários a bacias oceânicas, simplesmente através de princípios físicos expressos na forma de leis (como a conservação da massa e do momentum).

Para um escoamento incompressível, a equação geral de conservação do momentum é definida na modelagem, geralmente, pelas equações de Navier-

Stokes, adaptadas pelas tensões de Reynolds, as quais descrevem o movimento turbulento em três dimensões, e é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \therefore u = (u, v, w) \quad (3.11)$$

Os modelos numéricos podem trabalhar com dois tipos de referenciais:

- O referencial de Euler: variáveis dependentes são em função do tempo e das coordenadas espaciais; este é o utilizado pela grande maioria dos modelos computacionais por permitir que o domínio contínuo seja discretizado nestes pontos e nestes possa avaliar a evolução do fluxo (Menezes, 2005);
- O referencial de Lagrange: variáveis materiais dependentes são função de sua posição inicial, e do tempo, seguindo assim a trajetória descrita pela mesma, ou partícula ou mesmo um constituinte (Menezes, 2005).

Assim como exposto por Petrila & Trif (2005), o desenvolvimento para estudo da continuidade pode-se optar pelo uso das coordenadas Lagrangianas (descrição material) ou coordenadas Eulerianas (descrição espacial).

Os modelos numéricos a serem implementados para transporte de sedimentos neste estudo utiliza o chamado referencial de Euler, ou Euleriano.

A equação típica para a variação da altura do substrato em decorrência do transporte de sedimentos em rios, estuários e sistemas litorâneos é baseada na conservação da massa de sedimento. É geralmente uma equação de conservação não-linear para substrato. Muitos modelos morfológicos usam esquemas clássicos de baixa ordem de Lax-Wendroff, ou derivados deste para morfologias que não são muito estáveis para simulações de longos períodos de transporte de sedimentos (Long *et al.*, 2008).

3.5.1 Conservação de massa de sedimento

Segundo BENKHALDOUN & SEAÏD (2009) a equação de conservação de massa para sedimento, que governa as mudanças na altura do substrato, é expressa pela equação de Exner:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{E - D}{1 - n_p} \quad (3.12)$$

Onde:

$z_b(x, t)$ é a elevação do substrato (definida como positiva uma variação para cima em relação a um Datum) em cada posição horizontal em x e no tempo t ;

n_p é a porosidade do substrato;

q é a taxa volumétrica total de transporte de sedimentos;

E é a taxa de erosão;

D é a taxa de deposição;

Long *et al.* (2008) apresentam ainda uma equação de fluxo de contribuição dos sedimentos de fundo dada pela forma reduzida:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{1}{1 - n_p} \nabla \cdot \vec{q} \quad (3.13)$$

Onde a taxa de transporte \vec{q} é uma complexa função das várias grandezas como as correntes, ondas e profundidade da água bem como as grandezas associadas com as propriedades do sedimento como densidade e tamanho do grão.

As taxas de mudança no nível do substrato são calculadas a partir da equação de conservação de massa de sedimento que, em uma dimensão, considerando somente a carga de fundo, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1 - n_p} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.14)$$

A taxa de transporte q_x é função de vários parâmetros, como correntes, ondas, profundidade e propriedades dos sedimentos. A cada passo de tempo de integração da Eq. 3.14 se assume para cada ponto de grade que as propriedades dos sedimentos são fixas, correntes e ondas variam localmente com a profundidade e o nível da água é um nível fixo acima do Datum. Sob essas colocações, as taxas de

transporte variam somente com o nível do substrato (JOHNSON & ZYSERMAN, 2002). Desta forma a equação 3.14 pode ser reescrita como uma equação de advecção:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-n_p} \left(\frac{\partial q_x}{\partial z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.15)$$

ou

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + C_x(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} = 0 \quad \text{onde} \quad C_x = \frac{1}{1-n_p} \frac{\partial q_x}{\partial z} \quad (3.16)$$

Aonde $C_x(z_b)$ é a componente x da celeridade de fundo (celeridade das oscilações do fundo), a qual depende do nível do substrato.

A Equação (3.16) mostra que a evolução morfológica ocorre como uma propagação não linear das deformações do nível do substrato na direção do transporte (JOHNSON & ZYSERMAN, 2002). Por simplicidade, no presente estudo será considerado que a onda se propaga na direção x .

3.5.2 Esquemas de diferenças finitas

O método de diferenças finitas substitui as derivadas das equações diferenciais parciais por diferenças finitas, o que resulta após manipulação em sistemas algébricos. A ferramenta básica para gerar expressões em diferenças finitas é o caso da série de Taylor para as derivadas nas proximidades de um ponto atual (PETRILA & TRIF, 2005).

Vários esquemas de diferenças finitas podem ser aplicados para resolver a Equação 3.14. Uma possibilidade é a utilização de uma malha de diferenças finitas, como apresentado na Figura 3.16.

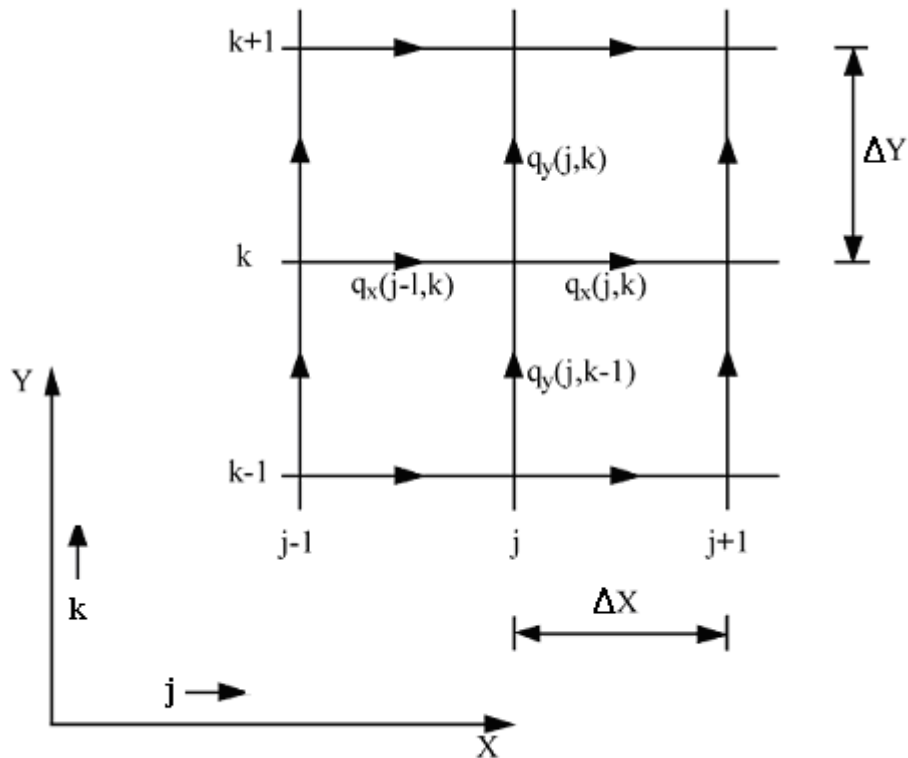


Figura 3.16 - Grade espacial de diferenças finitas em x e y
Fonte: Johnson & Zyserman (2002).

As derivadas do tempo e espaço na Equação 3.14 podem ser discretizadas para uma precisão de segunda ordem em Δt , Δx como se segue:

$$\frac{z^{n+1}(j) - z^n(j)}{\Delta t} + \frac{1}{1-n} \left[\left(\frac{q_x^n(j) - q_x^n(j-1)}{\Delta x} \right) \right] = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 z^n}{\partial t^2} \Big|_j \quad (3.17)$$

Aonde Δt é um passo de tempo, Δx é o espaçamento da grade no eixo x , e o índice “ n ” é usado para referenciar o instante de tempo atual, j posição no eixo x . Se o termo à direita da igualdade da Equação 3.17 é zero, tem-se um esquema adiantado no tempo e atrasado no espaço, o qual é um esquema de advecção instável (ABBOT, 1979 *apud* JOHNSON & ZYSERMAN, 2002).

O membro à direita da igualdade da Equação 3.17 é formulado em função das derivadas espaciais como apresentado abaixo. Usando a equação 3.16, $\partial^2 z / \partial t^2$ pode ser expressa por:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(C_x \frac{\partial z}{\partial x} \right) = - \left[\frac{\partial C_x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + C_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] \quad (3.18)$$

Agora, substituindo a Equação 3.16 na Equação 3.18 e rearranjando, se obtém:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = C_x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2C_x + \frac{\partial z}{\partial x} \left[-\frac{\partial C_x}{\partial t} + C_x \frac{\partial C_x}{\partial x} \right] \quad (3.19)$$

Assumindo que a celeridade de fundo varia lentamente no tempo e no espaço, os últimos dois termos da Equação 3.19 podem ser desprezados (JOHNSON & ZYSERMAN, 2002). Desta forma, a Equação 3.17 pode ser escrita como:

$$\frac{z^{n+1}(j) - z^n(j)}{\Delta t} + \frac{1}{1-n} \left[\left(\frac{q_x^n(j) - q_x^n(j-1)}{\Delta x} \right) \right] = \frac{\Delta t}{2} \left(C_x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2C_x \right) \Big|_j \quad (3.20)$$

Desta forma, a introdução de $\partial^2 z / \partial t^2$ na Equação 3.17 tem o efeito de introdução de termo de difusão $K_{xx} = C_x^2 \Delta t / 2$ (JOHNSON & ZYSERMAN, 2002). O membro direito (MD) da Equação 3.20 pode ser escrito na forma de diferença finita como:

$$MD = \frac{\Delta t C_x^2(j)}{2(\Delta x)^2} \{ z^n(j+1) - 2z^n(j) + z^n(j-1) \} \quad (3.21)$$

A Equação 3.20 é o esquema Lax-Wendroff (ABBOTT, 1979 *apud* JOHNSON & ZYSERMAN, 2002), que também pode ser rearranjado como:

$$z^{n+1}(j) = \frac{\Delta t}{(1-n)} \left[\frac{q_x^n(j) - q_x^n(j-1)}{\Delta x} \right] + [1 - \sigma_x^2(j)] z^n(j) + \frac{\sigma_x^2(j)}{2} [z^n(j+1) + z^n(j-1)] \quad (3.22)$$

Onde $\sigma_x = C_x \Delta t / \Delta x$ é o número de Courant no eixo x .

De forma a ilustrar os principais aspectos do esquema Lax-Wendroff, considera-se um caso unidimensional da Equação 3.22, na qual os termos de transporte são realocados com os termos de celeridade correspondentes e níveis de fundo. Desta maneira, a versão 1-D da Equação 3.22 pode ser escrita como:

$$z^{n+1}(j) = \frac{\sigma_x^2(j) + \sigma_x(j)}{2} z^n(j-1) + [1 - \sigma_x^2(j)] z^n(j) + \frac{\sigma_x^2(j) - \sigma_x(j)}{2} z^n(j+1) \quad (3.23)$$

3.5.3 Limitações dos esquemas de diferenças finitas

Os esquemas que utilizam diferenças finitas acarretam alguns erros que afastam a solução obtida desses esquemas com relação à solução real. Dessas limitações, são apresentados aqui o erro de truncamento e os efeitos dispersivo, dissipativo e difusivo.

3.5.3.1 Erro de truncamento

Dada a discretização para a solução numérica de uma equação diferencial, a mesma possui erros de aproximação, que irão distar da solução exata, de acordo com a ordem de aproximação escolhida. A estes erros, dá-se o nome de erros de truncamento (ET), os quais podem ser determinados com uso da expansão na série de Taylor da função em torno de um ponto para obter as expressões numéricas das derivadas do operador diferencial (MALISKA, 2004).

Desta forma, ao se considerar $x = x_i$, $i = 1, \dots, m$ e $y = y_j$, $j = 1, \dots, n$ ser uma grade em um domínio computacional, com os nós (x_i, y_j) e os espaçamentos Δx e Δy para duas direções, espaçamentos que podem ser diferentes um do outro.

Por exemplo, se u é a componente horizontal da velocidade, então no ponto $P_{i,j}$ onde $x = x_i$ e $y = y_j$, o valor de u é $u_{i,j}$ enquanto que $u_{i+1,j}$ é o valor de u no ponto $P_{i+1,j}$. Usando a série de Taylor para calcular $u_{i+1,j}$:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (3.24)$$

O valor exato de $u_{i+1,j}$ poderia ser obtido a partir de todos os termos da série (se a série é convergente). Na prática, acontece então, que a série é “truncada” ao desconsiderar os termos das ordens maiores, e considerando o tamanho de espaçamentos Δx pequenos (PETRILA & TRIF, 2005). Então, são obtidas as seguintes expressões:

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + O(\Delta x^3) \quad (3.25)$$

para um truncamento de terceira ordem, ou:

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x \quad (3.26)$$

para um truncamento de segunda ordem. Dessas relações obtêm-se uma aproximação para calcular a primeira derivada com uma precisão de primeira ordem:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.27)$$

Que é uma aproximação da primeira derivada por uma diferença finita adiantada.

3.5.3.2 Efeito dispersivo, dissipativo e difusivo

O erro de dissipação está presente em esquemas do tipo *upwind* e afeta a forma da onda de choque das regiões de grandes gradientes, o que muitas vezes destrói a solução. A captura da onda de choque deve ser realizada com precisão para identificar a real posição do choque, ou frente a propagação da onda (MALISKA, 2004).

Outro erro encontrado em esquemas numéricos é a de dispersão que se manifesta como oscilações numéricas. Aproximações de alta ordem, finitas, nos termos advectivos, quando esses forem dominantes, geram instabilidades, produzindo soluções que apresentam oscilações numéricas nas regiões onde ocorrem os grandes gradientes (MALISKA, 2004).

O efeito combinado dos erros dissipativos e dispersivos é chamado de erro difusivo (TANNEHILL *et al.*, 1997). A Figura 3.17 apresenta graficamente o efeito dissipativo e dispersivo.

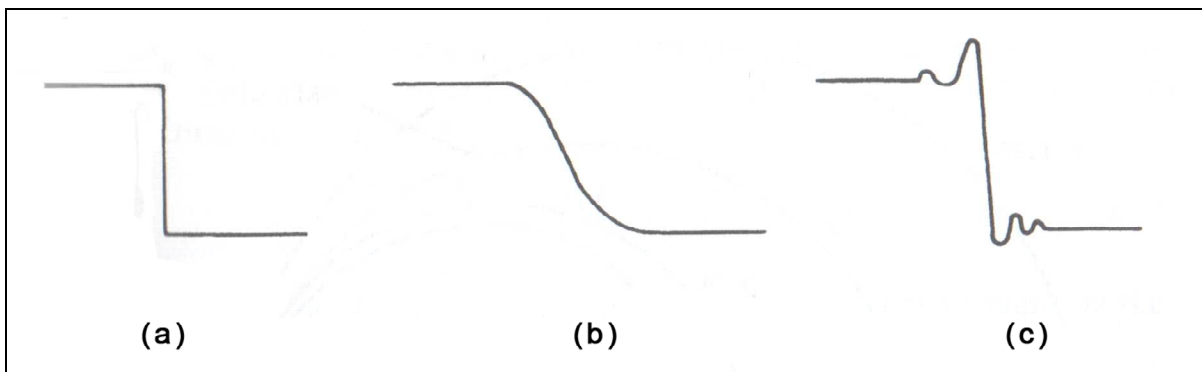


Figura 3.17 – efeitos de dissipação e dispersão. (a) solução exata. (b) Solução numérica distorcida primariamente pelos erros de dissipação (típico de métodos de 1ª ordem). (c) Solução numérica distorcida primariamente pelos erros de dispersão (típico de métodos de 2ª ordem).
 Fonte: Tannehill *et al.* (1997).

3.5.4 Tipos de esquemas de diferenças finitas

Diversos esquemas numéricos de diferenças finitas para discretização espacial de equações diferenciais com dominância do termo advectivo são encontrados na literatura. Estes podem ser divididas em duas grandes categorias: esquemas de diferenças centradas e esquemas *upwind*. Cada uma com suas próprias vantagens e desvantagens.

3.5.4.1 Esquemas de diferenças centradas

O esquema de diferença central mais simples é o FTCS (*Forward Time, Central Space* = adiantado no tempo, centrado no espaço). Este esquema é absolutamente instável para equações de conservação hiperbólica, mas é condicionalmente estável para problemas de difusão por convecção. A correção para o esquema FTCS é introduzir o efeito da viscosidade na equação de fluxo de contribuição dos sedimentos de fundo (lado esquerdo da Eq. 3.28). O esquema de Lax e Wendroff (1960 *apud* Long *et al.*, 2008) e a família de esquemas derivados deste são comumente usadas na dinâmica dos fluidos computacional. A seguir, são apresentados os algoritmos para os esquemas de diferenças finitas de Lax-Wendroff (Eq. 3.28), de Richtmyer e de MacCormack:

$$\frac{z_{b_i}^{n+1} - z_{b_i}^n}{\Delta t} + \frac{1}{1-n_p} \frac{(q_{i+1}^n - q_{i-1}^n)}{2\Delta x} = \frac{\Delta t C_i^2}{2} \frac{(z_{b_{i+1}}^n - 2z_{b_i}^n + z_{b_{i-1}}^n)}{\Delta x^2} \quad (3.28)$$

esquema de diferenças finitas de Richtmyer (1962 *apud* Long *et al.*, 2008):

$$z_{b_i}^{n+1/2} = \frac{z_{b_{i+1}}^n + z_{b_i}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{1}{(1-n_p)} (q_{i+1}^n - q_i^n) \quad (3.29)$$

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-n_p)} (q_i^{n+1/2} - q_{i-1}^{n+1/2}) \quad (3.30)$$

e esquema de diferenças finitas de MacCormack (1969 *apud* Long *et al.*, 2008):

$$\tilde{z}_{b_i} = z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x(1-n_p)} (q_i^n - q_{i-1}^n) \quad (3.31)$$

$$z_{b_i}^{n+1} = \frac{z_{b_i}^n + \tilde{z}_{b_i}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x(1-n_p)} (q(\tilde{z}_b)_{i+1} - q(\tilde{z}_b)_i) \quad (3.32)$$

Os esquemas de diferenças finitas de Richtmyer e de MacCormack requerem um recálculo da taxa de transporte de sedimento q em instantes de tempo intermediários, que correspondem aos níveis de z_b para $z_b^{n+1/2}$ e \tilde{z}_b .

3.5.4.2 Esquemas *UPWIND*

Os esquemas de diferenças centrais possuem uma precisão de ordem maior, mas apresentam requerimentos de estabilidade mais restritiva, e tendem a gerar falsas oscilações. Por outro lado, as os esquemas *upwind* são geralmente mais estáveis devido aos efeitos inerentes de dissipação pelo preço da baixa ordem de precisão (para os esquemas *upwind* de baixa ordem). O esquema mais simples de primeira ordem FTBS (*forward in time, backward in space* = adiantado no tempo, atrasado no espaço), é dado por:

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x(1-n_p)} \left[(1-\alpha)(q_{i+1}^n - q_i^n) + (1+\alpha)(q_i^n - q_{i-1}^n) \right]$$

$\alpha = 1$, atrasado no espaço; (3.33)
 $\alpha = -1$, adiantado no espaço; e
 $\alpha = 0$, centrado no espaço

E o esquema de segunda ordem de Warming e Beam (1975 *apud* Long *et al.*, 2008):

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x(1-n_p)} (\hat{q}_{i+1/2} - \hat{q}_{i-1/2})$$
(3.34)

onde:

$$\hat{q}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(3q_i^n - q_{i-1}^n) - \frac{1}{2}C_{i-1/2}(q_i^n - q_{i-1}^n), C_{i+1/2} \geq 0$$
(3.35)

$$\hat{q}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(3q_{i+1}^n - q_{i+2}^n) - \frac{1}{2}C_{i+3/2}(q_{i+2}^n - q_{i+1}^n), C_{i+1/2} < 0$$
(3.36)

e

$$\hat{q}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(3q_{i-1}^n - q_{i-2}^n) - \frac{1}{2}C_{i-3/2}(q_{i-1}^n - q_{i-2}^n), C_{i-1/2} \geq 0$$
(3.37)

$$\hat{q}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(3q_i^n - q_{i+1}^n) - \frac{1}{2}C_{i+1/2}(q_{i+1}^n - q_i^n), C_{i-1/2} < 0$$
(3.38)

Com $C_{i+1/2}$, $C_{i-1/2}$, $C_{i+3/2}$ e $C_{i-3/2}$ a velocidade de fase no nível substrato para as respectivas posições. Novamente é necessário conhecimento sobre C (celeridade de fundo) para uma correção de segunda ordem, o que as vezes é difícil (Long *et al.*, 2008).

3.5.4.3 Esquema TVD

No esquema TVD (*Total Variation Diminishing* = “diminuição da variação total”) o propósito é que a variância total da solução de $TV = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial z_b}{\partial x} \right| dx$ deve permanecer

constante ou apenas decrescer no tempo. Durante o processo de resolução, não serão gerados novos extremos. Alguns esquemas clássicos satisfazem à condição TVD automaticamente, por exemplo, o esquema de Lax-Friedrichs (Lax, 1954 *apud* Long *et al.*, 2008). Harten (1983 *apud* Long *et al.*, 2008) propôs um esquema de TVD de primeira ordem e um de segunda ordem para cálculo do transporte de sedimento. Em seguida, muitos esquemas TVD foram propostos baseados nos esquemas existentes. Delis e Skeels (1998 *apud* Long *et al.*, 2008) resumem um número de esquemas que satisfazem o TVD, incluindo um esquema de Lax-Wendroff (TVD-LW) e um esquema MacCormack (TVD-MC). Shu e Osher (1988 *apud* Long *et al.*, 2008) e Shao *et al.* (2004 *apud* Long *et al.*, 2008), propuseram a aplicação de um esquema TVD-Runge-Kutta (TVD-RK) para integração em terceira ordem no tempo. O esquema TVD-RK é um algoritmo de cinco etapas, onde a primeira etapa consiste em um esquema de Euler para obter o nível do tempo $n+1$, conforme Eq. (14) a seguir:

$$\frac{z_b^{n+1} - z_b^n}{\Delta t} + \frac{\partial \left[\frac{1}{1-n_p} q(z_b^n) \right]}{\partial x} = 0 \quad (3.39)$$

A segunda etapa consiste em uma aproximação para o nível do tempo $n+2$:

$$\frac{z_b^{n+2} - z_b^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \left[\frac{1}{1-n_p} q(z_b^{n+1}) \right]}{\partial x} = 0 \quad (3.40)$$

A terceira etapa consiste em uma etapa de média entre z_b^n e z_b^{n+2} para obtenção de uma solução aproximada para z_b em $n+1/2$:

$$z_b^{n+1/2} = \frac{3}{4} z_b^n + \frac{1}{4} z_b^{n+2} \quad (3.41)$$

A quarta etapa consiste na terceira etapa de Euler para obtenção do nível do tempo $n+3/2$:

$$\frac{z_b^{n+3/2} - z_b^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{\partial \left[\frac{1}{1-n_p} q(z_b^{n+1/2}) \right]}{\partial x} = 0 \quad (3.42)$$

Finalmente, a quinta etapa consiste em uma etapa de média entre z_b^n e $z_b^{n+3/2}$ para obtenção da solução do nível do tempo $n+1$:

$$z_b^{n+1} = \frac{1}{3} z_b^n + \frac{2}{3} z_b^{n+3/2} \quad (3.43)$$

Shu e Osher (1988 *apud* Long *et al.*, 2008), e Shao *et al.* (2004 *apud* Long *et al.*, 2008), ressaltam que na segunda e na quarta etapa deve ser feito o recálculo da taxa de transporte q . Este esquema dá uma precisão de terceira ordem no tempo $O(\Delta t^3)$ e quinta ordem no espaço $O(\Delta x^5)$.

3.5.4.4 Esquema Euler-WENO

O modelo ENO foi desenvolvido por Harten (1983) e aperfeiçoado por Harten e outros (1987). A idéia chave do esquema ENO é usar um formato suavizado dentre os vários valores de aproximação do fluxo q nos contornos da célula ($i \pm 1/2$) com grande ordenamento e ao mesmo tempo evitando falsas oscilações e distúrbios freqüentes ou descontinuidades.

O modelo WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) foi apresentado por Liu *et al.* (1994). Os esquemas WENO propiciam um incremento ao processo por utilizar uma média ponderada para um conjunto de valores.

O modelo Euler-WENO foi desenvolvido por Long *et al.* (2008) como resultado de um incremento do modelo WENO.

Long *et al.* (2008) apresentam e discutem vários esquemas de capturas de choques para simulação de variação de altura do substrato para diferentes situações de precisão e estabilidade. Para tanto, aplica teste nos diferentes esquemas analisados em situações hipotéticas: escoamento unidirecional; deformação de bancos de areia

dado à ação das ondas; problema de estabilidade em escoamentos 2-D; e coordenadas curvilíneas generalizadas. Para um caso com de um leito com seis bancos de sedimento, sujeito à ação de ondas, observou-se que o banco de sedimento se moveu no sentido oposto ao escoamento.

De acordo com Yu e Mei (2000), por causa de cada crista inicial dos bancos estarem acima do nó de onda em $\pi/4$ e abaixo do próximo ante-nó em $\pi/4$, as ondas de Bragg depositam areia nas cavas iniciais dos bancos e erodem as cristas iniciais dos bancos. Conseqüentemente os bancos irão ser aplainados por suas ondas dispersadas. Novos bancos de areia irão crescer longe dos bancos iniciais e sua taxa de crescimento será reduzida na medida em que os bancos iniciais forem diminuindo. O crescimento dos bancos à esquerda possui uma taxa de crescimento maior dado ao fato que as ondas são mais abrigadas à direita.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA

4 METODOLOGIA

Neste projeto, diversos esquemas em diferenças finitas foram implementados em linguagem FORTRAN para solucionar a equação volumétrica de conservação de sedimento de fundo. Alguns esquemas fazem uso de termo difusivo (Lax-Wendroff), outros processos de filtragem, e outros, ainda, foram implementados visando à combinação dessas e outras vantagens em um só modelo (FTCS e FTBS junto com o TVD).

Os modelos para atualização da altura do substrato, aqui implementados, utilizam referencial Euleriano e método de diferenças finitas, e são resultados de uma constante evolução dos esquemas existentes.

Para a comparação entre os resultados dos diversos modelos numéricos realizados neste estudo, foi escolhido para uma forma de fundo gaussiana em um escoamento uni-direcional, conforme exemplo utilizado em Johnson e Zyserman (2002), Hudson *et al.* (2005), e Long *et al.* (2008).

Após a escolha do esquema numérico que melhor represente a forma do leito sob um escoamento unidirecional, o mesmo foi inserido num modelo de ondas do tipo águas rasas para avaliar o transporte de sedimentos sob o efeito de ondas, também em 1-D.

4.1 ESCRITA DOS MODELOS NUMÉRICOS

Um modelo computacional escrito em linguagem FORTRAN foi desenvolvido para cada esquema numérico em diferenças finitas aplicado na solução da equação de transporte de sedimento de Exner.

Os métodos FTCS, FTBS, Lax-Wendroff, Warming-Beam e TVD-RK foram implementados para resolver a Eq. 3.16. A seguir, são apresentados todos os algoritmos numéricos usados na programação.

Esquema FTCS

O método FTCS (*Forward Time Central Space*= adiantado no tempo, centrado no espaço) é a formulação numérica mais simples de um esquema de diferença finita. O algoritmo de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço (Eq. 4.1).

$$\frac{z_{b_i}^{n+1} - z_{b_i}^n}{\Delta t} + \frac{1}{1 - n_p} \frac{(q_{i+1}^n - q_{i-1}^n)}{2\Delta x} = 0 \quad (4.1)$$

Esquema Lax-Wendroff

O método proposto por Lax & Wendroff (1960 *apud* Long *et al.*, 2008) acrescenta um termo de viscosidade artificial ao algoritmo do esquema FTCS, que possibilita a obtenção de um resultado mais refinado. O acréscimo do termo em questão (membro direito da Eq. 4.2) confere ao algoritmo uma precisão de segunda ordem. A Eq. 4.2 é equivalente a Eq. 3.23.

$$\frac{z_{b_i}^{n+1} - z_{b_i}^n}{\Delta t} + \frac{1}{1 - n_p} \frac{(q_{i+1}^n - q_{i-1}^n)}{2\Delta x} = \frac{\Delta t C_i^2}{2} \frac{(z_{b_{i+1}}^n - 2z_{b_i}^n + z_{b_{i-1}}^n)}{\Delta x^2} \quad (4.2)$$

Esquema FTBS

O método FTBS (*Forward Time Back Space*= adiantado no tempo, atrasado no espaço) é forma mais simples de um esquema do tipo *upwind*. O algoritmo nesse esquema faz uso da informação de uma dada posição i na grade de um domínio, anterior ao da posição i em que de fato se pretende calcular o q , considerando o sentido do escoamento. Desta forma o esquema é representado pelo par de algoritmos de precisão de primeira ordem (Eq. (4.3) e (4.4)).

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x(1 - n_p)} (q_{i+1}^n - q_i^n), C_i < 0 \quad (4.3)$$

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x(1 - n_p)} (q_i^n - q_{i-1}^n), C_i > 0 \quad (4.4)$$

O algoritmo para o esquema FTBS também pode ser escrito na forma apresentada na Eq. 4.5 (Long *et al.*, 2008).

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x(1-n_p)} \left[(1-\alpha)(q_{i+1}^n - q_i^n) + (1+\alpha)(q_i^n - q_{i-1}^n) \right] \quad (4.5)$$

onde $\alpha = \text{sign}(C_i)$.

Esquema Warming-Beam

O método proposto por Warming e Beam acrescenta uma correção de segunda ordem ao esquema FTBS, o que confere maior ordem de precisão no espaço, conforme Eq. 4.6.

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x(1-n_p)} (\hat{q}_{i+1/2} - \hat{q}_{i-1/2}) \quad (4.6)$$

onde

$$\hat{q}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(3q_i^n - q_{i-1}^n) - \frac{1}{2}C_{i-1/2}(q_i^n - q_{i-1}^n), C_{i+1/2} \geq 0 \quad (4.7)$$

$$\hat{q}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(3q_{i+1}^n - q_{i+2}^n) - \frac{1}{2}C_{i+3/2}(q_{i+2}^n - q_{i+1}^n), C_{i+1/2} < 0 \quad (4.8)$$

e

$$\hat{q}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(3q_{i-1}^n - q_{i-2}^n) - \frac{1}{2}C_{i-3/2}(q_{i-1}^n - q_{i-2}^n), C_{i-1/2} \geq 0 \quad (4.9)$$

$$\hat{q}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(3q_i^n - q_{i+1}^n) - \frac{1}{2}C_{i+1/2}(q_{i+1}^n - q_i^n), C_{i-1/2} < 0 \quad (4.10)$$

Esquema TVD-RK

O esquema do tipo TVD (*Total Variation Diminishing*= “diminuição da variação total”), proposto por Shu e Osher (1988 *apud* Long *et al.*, 2008) e Shao *et al.* (2004 *apud* Long *et al.*, 2008), foi desenvolvido para uma integração em terceira ordem no tempo TVD-Runge-Kutta (TVD-RK). O esquema TVD-RK é um algoritmo de cinco

etapas, onde a primeira consiste em uma etapa de Euler para obtenção do nível do tempo $n+1$, conforme Eq. 4.11 abaixo:

$$\frac{z_b^{n+1} - z_b^n}{\Delta t} + \frac{\partial \left[\frac{1}{1-n_p} q(z_b^n) \right]}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

A segunda etapa consiste em uma aproximação para o nível do tempo $n+2$:

$$\frac{z_b^{n+2} - z_b^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \left[\frac{1}{1-n_p} q(z_b^{n+1}) \right]}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

A terceira etapa consiste em uma etapa intermediária para obtenção de uma solução aproximada no nível do tempo em $n+1/2$:

$$z_b^{n+1/2} = \frac{3}{4} z_b^n + \frac{1}{4} z_b^{n+2} \quad (4.13)$$

A quarta etapa consiste na obtenção do nível do tempo $n+3/2$, envolvendo a terceira etapa para $z_b^{n+1/2}$:

$$\frac{z_b^{n+3/2} - z_b^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{\partial \left[\frac{1}{1-n_p} q(z_b^{n+1/2}) \right]}{\partial x} = 0 \quad (4.14)$$

Finalmente, a quinta etapa consiste em obtenção da solução para o nível do tempo $n+1$:

$$z_b^{n+1} = \frac{1}{3} z_b^n + \frac{2}{3} z_b^{n+3/2} \quad (4.15)$$

Onde uma combinação dos algoritmos apresentados anteriormente foram usados para a discretização espacial e cálculo de $\partial q(z_b^n)$, como no tempo já que q varia no espaço, de forma a obter-se um esquema mais robusto. Conforme ressaltado por Shu e Osher (1988 *apud* Long *et al.*, 2008) e Shao *et al.* (2004 *apud* Long *et al.*,

2008), foi procedido, na segunda e na quarta etapa, o recálculo da taxa de transporte q . Este esquema dá uma precisão de terceira ordem no tempo $O(\Delta t^3)$ e quinta ordem no espaço $O(\Delta x^5)$.

Para o esquema TVD-RK foram implementados esquemas em diferenças finitas com várias combinações entre algoritmos do tipo diferença centrada e *upwind*, substituindo-se as Equações 4.11, 4.12 e 4.14, conforme informado na metodologia. Os modelos TVD a seguir serão apresentados com as designações C (diferença centrada) e U (*upwind*), na seqüência em que foram utilizadas nos três algoritmos dentro do esquema TVD-RK, por exemplo, TVD-RK-CUC (uso do algoritmo: de diferença centrada na Eq. 4.11, *upwind* na Eq. 4.12 e diferença centrada na E. 4.14).

A implementação para o uso combinado de um módulo de ondas de águas rasas e de um modelo de transporte de sedimento foi feito a partir do seqüencial de equações da onda e do sedimento descritas nos Anexos A e B, respectivamente.

4.2 APLICAÇÃO NUMÉRICA

A aplicação numérica feita com os modelos implementados é um caso de escoamento em canal, com um banco de sedimento no meio de uma morfologia plana. Nesta etapa é feita a determinação de quais serão as condições iniciais, ou seja, a inserção das informações das forçantes físicas e características gerais do ambiente a ser simulado, informações do domínio com as respectivas condições de contorno, e critérios de estabilidade.

Assumindo que a taxa de transporte q é diretamente influenciada pela velocidade de corrente unidimensional (Grass, 1981; van Rijn, 1984a,b,c, 1993 *apud* Long *et al.*, 2008), e assumindo uma descarga fixa no canal com uma tampa rígida, temos que:

$$q = au^b \quad (4.16)$$

$$u = Q/h \quad (4.17)$$

$$h = s - z_b \quad (4.18)$$

Q é o volume constante do fluxo de fluido por unidade de largura. Seguindo Johnson e Zyserman (2002), a equação linear advectiva para o fluxo de sedimentos pode ser escrita como, ao considerar uma dependência do q em função de z_b :

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + C(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} = 0 \quad (4.19)$$

Onde $C(z_b)$ é a velocidade temporal de forma do substrato, expressa como:

$$C(z_b) = \frac{1}{1 - n_p} \frac{\partial q}{\partial z_b} = \frac{1}{(1 - n_p)(s - z_b)} abu^b \quad (4.20)$$

Os valores seguintes são especificados de acordo com critério similar ao de Hudson *et al.* (2005):

$$a = 0,001 \text{ s}^2/\text{m} \quad (4.21)$$

$$b = 3.0 \quad (4.22)$$

$$Q = 10 \text{ m}^2/\text{s} \quad (4.23)$$

$$n_p = 0,4 \quad (4.24)$$

E a condição inicial $z_b(x,0)$ é dada como uma curva gaussiana,

$$z_b(x,0) = -h + 2e^{[-\beta(x-x_c)^2]} \quad (4.25)$$

Com $\beta = 0.01 \text{ m}^{-2}$, $h_0 = 6.0 \text{ m}$, $0 \leq x \leq 300 \text{ m}$ e $x_c = 150,0 \text{ m}$ como o centro da curva gaussiana. Para as simulações numéricas, o espaçamento da grade é tomado como $\Delta x = 1 \text{ m}$, e o intervalo de tempo é tomado como $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, o que suficientemente pequeno para satisfazer as condições de estabilidade para todos os esquemas discutidos acima mencionados.

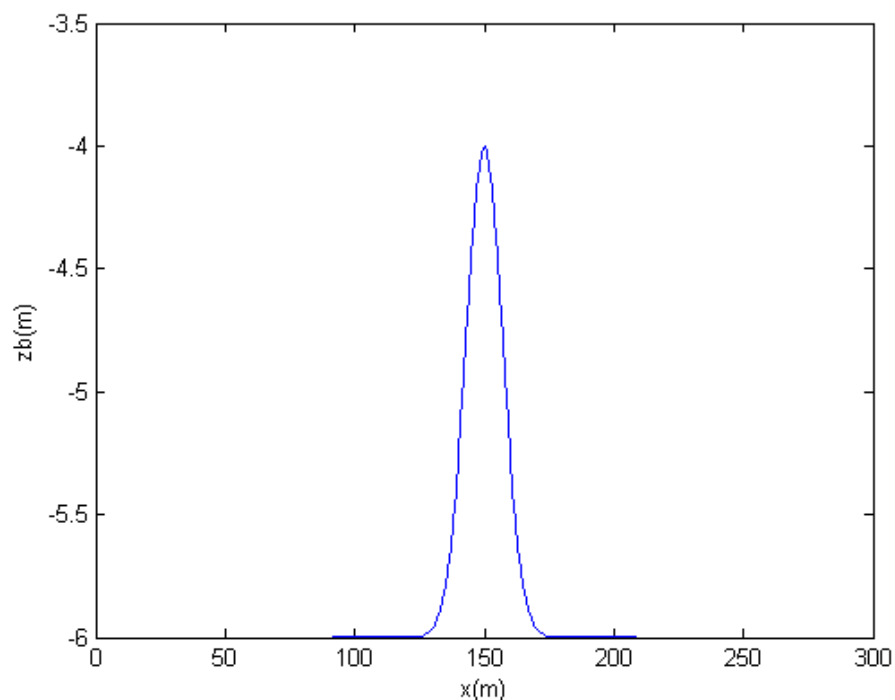


Figura 4.1 – Representação gráfica da curva inicial (tempo 0 s) do ambiente com banco de sedimento utilizado nas simulações

TABELA 4.1 – RESUMO DAS CONDIÇÕES INICIAIS DOS PARÂMETROS UTILIZADOS NOS MODELOS

Descrição do parâmetro	Representação	Valor determinado
Comprimento do domínio físico de x	L	300 (m)
Número de pontos	n	$(L/\Delta x) + 1$
Distanciamento entre os pontos de grade em x	Δx	1 (m)
Passo de tempo	Δt	0,1 (s)
Porosidade	n_p	0,4
Constante a	a	10^{-3}
Constante b	b	3,0
Datum	s	0 (m)
Fluxo de volume constante do fluido por unidade de comprimento	Q	10 (m ² /s)
Valor máximo de x	x_{\max}	300 (m)
Valor mínimo de x	x_{\min}	0 (m)
Profundidade da água	h	6 (m)
Passo no tempo para a apresentação dos resultados da simulação	nt	6.000 e 60.000
Cálculo dos pontos de grade em x , para $1 < i < 300$	x	$x_{\min} + (i - 1) \times \Delta x$ (m)
Posição do centro da curva gaussiana	x_c	150 (m)
Morfologia de fundo	z_b	$-h + 2e^{-\beta(x-x_c)^2}$ (m)

Fonte: Johnson e Zyserman (2002), Hudson *et al.* (2005), e Long *et al.* (2008).

Nota: Dados adaptados pelo autor.

A Figura 4.1 apresenta a representação gráfica da curva inicial, dada pelo resultado da Equação 4.25, do ambiente com banco de sedimento.

Os dados iniciais, a fim de simular os modelos, como i (posição em x), Δt (passo de tempo), n (número de pontos na dimensão x), L (comprimento de x) e n_p (porosidade do substrato), dentre outros, estão todos relacionados na Tabela 4.1.

Na simulação com a hidrodinâmica de ondas foram utilizadas ondas com períodos $T=6s$ e $T=600s$, e a velocidade foi multiplicada por um fator de 3, a fim de que se realçasse o efeito da onda na deformação da morfologia inicial. O cenário simulado foi semelhante aquele utilizado sob o efeito da corrente, possuindo aqui a crista do banco de sedimento dois pontos em x ($z_b=-4.005$ para $x=150$ e 151). Outros valores de parâmetros utilizados na simulação estão apresentados na Tabela 4.2.

TABELA 4.2 – RESUMO DAS CONDIÇÕES INICIAIS DOS PARÂMETROS UTILIZADOS PARA APLICAÇÃO SOB O EFEITO DE ONDAS EM ÁGUAS RASAS

Descrição do parâmetro	Representação	Valor determinado
Comprimento do domínio físico de x	L	300 (m)
Número de pontos	n	$(L/\Delta x) + 1$
Distanciamento entre os pontos de grade em x	Δx	1 (m)
Passo de tempo	Δt	0,1 (s)
Porosidade	n_p	0,4
Datum	s	0 (m)
Valor máximo de x	x_{\max}	300 (m)
Valor mínimo de x	x_{\min}	0 (m)
Profundidade da água	h	6 (m)
Passo no tempo para a apresentação dos resultados da simulação	nt	6.000 e 60.000
Valor de x	x	$x_{\min} + (i - 1) \times \Delta x$ (m)
Valor de x no centro da curva gaussiana	x_c	150 e 151 (m)
Morfologia de fundo	z_b	$-h + 2e^{-\beta(x-x_c)^2}$ (m)
Coeficiente de atrito	C_f	0,0015
Amplitude de onda	A	1 (m)

Fonte: Johnson e Zyserman (2002), Hudson *et al.* (2005), e Long *et al.* (2008).

Nota: Dados adaptados pelo autor.

4.2.1 Estabilidade Numérica

A primeira e mais importante medida a ser considerada é o atendimento à condição de estabilidade definida pelo número de Courant que é representado por C_i e expresso por:

$$\left| C_i \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad (4.26)$$

Nos métodos descritos na metodologia, essa condição é atendida para valores de Δt e Δx , 0.1s e 1m, respectivamente, ao considerar um número de Courant igual a 1.

Ainda, foi utilizada uma técnica de periodicidade nos contornos, que promove ao modelo uma idéia de “continuidade” nas extremidades do domínio, assim como visto em Long *et al.* (2008). Esta estratégia funciona de forma a impedir um colapso do modelo quando do encontro do fluido, que está em escoamento constante, de se chocar com o contorno ocasionando efeitos hidrodinâmicos equivocados, como, por exemplo, reflexão, para o dado ambiente simulado.

4.2.2 Solução Analítica

A solução analítica utilizada para usar como referência na comparação com os resultados numéricos de deformação do ambiente simulado é aquela utilizada por Johnson e Zyzerman (2002) e Long *et al.* (2008).

Não tendo disponível uma equação para construção da curva da referida solução foi necessário uma leitura digital com precisão de 3 casas decimais do valor de z_b para cada valor de x em cada uma das posições i , ou seja, 301 valores, mais valores auxiliares. Os resultados foram analisados para as curvas correspondentes aos tempos de simulação de 600 e 6.000 segundos, respectivamente, cujos valores tomados para construção das curvas (Figura 4.2) estão apresentados nos Anexos C e D.

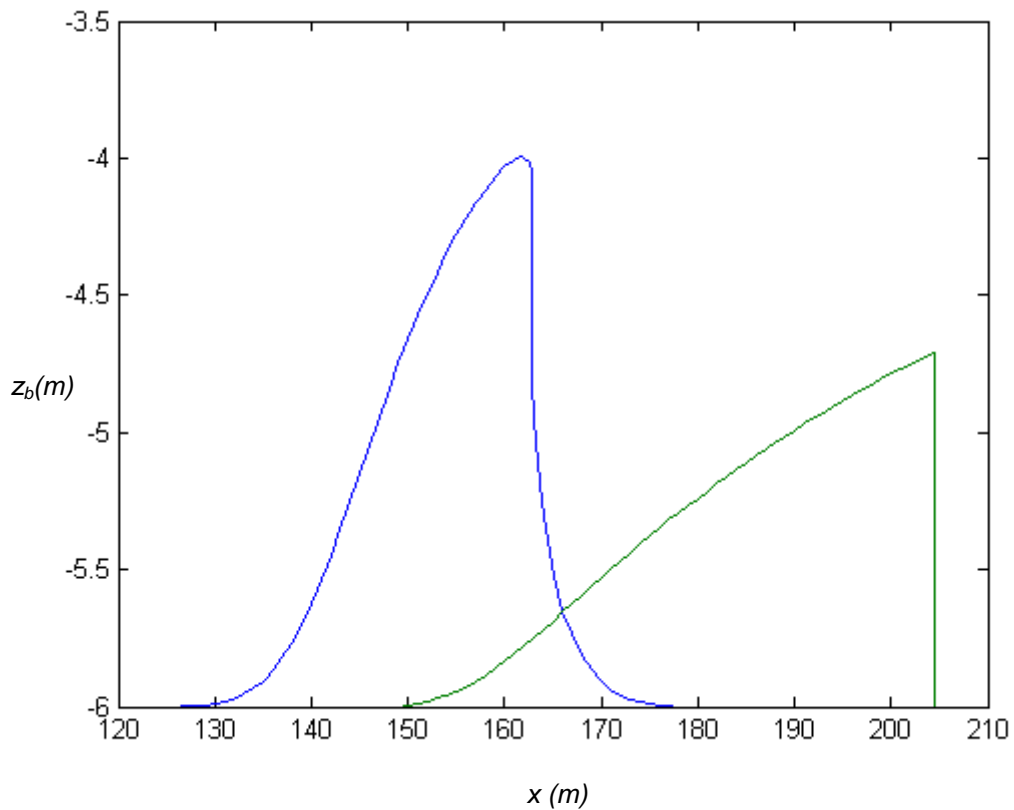


Figura 4.2 – Solução analítica correspondente aos tempos 600 s (azul) e 6.000 s (verde)

4.3 MODELO DE ONDA E MORFOLOGIA DE FUNDO

O modelo linear de onda, descrito pelas equações abaixo, respectivamente para a conservação da massa e quantidade de movimento:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(HU) = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(HU) = gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_x^b \quad (4.28)$$

O Anexo A descreve a propagação de ondas na direção x e leva em consideração o efeito da pressão e fricção pelo leito. Nestas equações, $H = h + \eta$ é a profundidade total da coluna d'água e $h = h_1 - \zeta$ é a profundidade do leito medido a partir do nível médio da água; ζ representa a forma do leito.

As equações anteriores são acopladas à equação de Exner, que representa a conservação volumétrica dos sedimentos de fundo.

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1 - n_p} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4.29)$$

Na equação acima, $\zeta = z_b$

Neste caso, o transporte de sedimento suspenso não é considerado.

As ondas são geradas na extremidade esquerda do domínio que se propagam no sentido positivo do eixo x . Ondas são irradiadas quando interagem com a forma do leito, nesse caso é inserida no modelo de ondas a condição de radiação para a onda refletida e para a onda transmitida, ou seja, condição de contorno absorvente. Na forma de leito é colocada a condição de periodicidade.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÃO

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após implementação dos modelos numéricos, os resultados dos modelos foram comparados qualitativamente com a solução analítica.

O gráfico da Figura 5.1 apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo implementado para o esquema FTCS, para os tempos 600 s e 6.000 s.

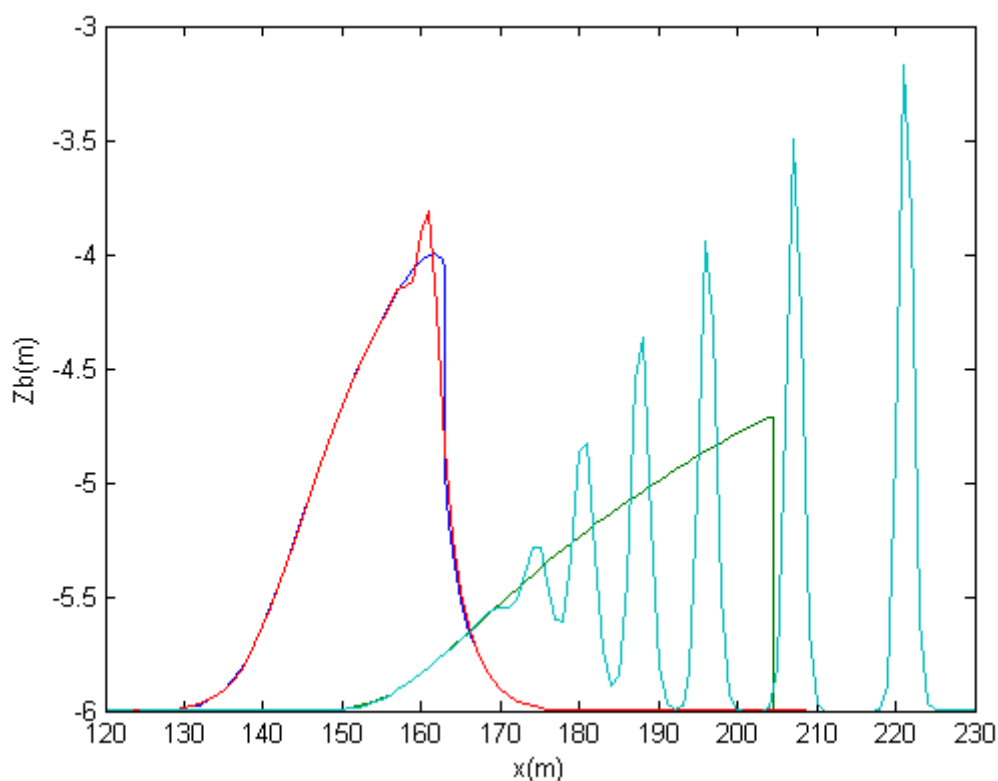


Figura 5.1 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema FTCS correspondente os tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

Nesta figura observa-se que o resultado referente ao tempo 600 s apresentou um resultado consideravelmente satisfatório com grande precisão, considerando a curva da solução analítica, tendo apenas na crista uma deformação pontiaguda que ultrapassa a da solução analítica (FTCS $z_b = -3,812$, solução analítica $z_b = -3,997$), o que indica uma possível perda de estabilidade para passos de tempo futuros.

Para o tempo 6.000 s, constata-se, no resultado numérico, que o lado do banco de sedimento a barlar do escoamento, manteve-se, até antes do início das oscilações ($x=170$), sobreposta à curva da solução analítica. No tempo 6.000 s, observa-se ainda, no resultado numérico, que a crista do banco de sedimento que se apresentou pontiaguda para o tempo 600 s, se divide em diversas cristas, ocasionando um erro conhecido na literatura como *spurious oscillations*, decorrente de modelos com erros dispersivos.

O gráfico da Figura 5.2 apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo implementado para o esquema Lax-Wendroff, para os tempos 600 s e 6.000 s.

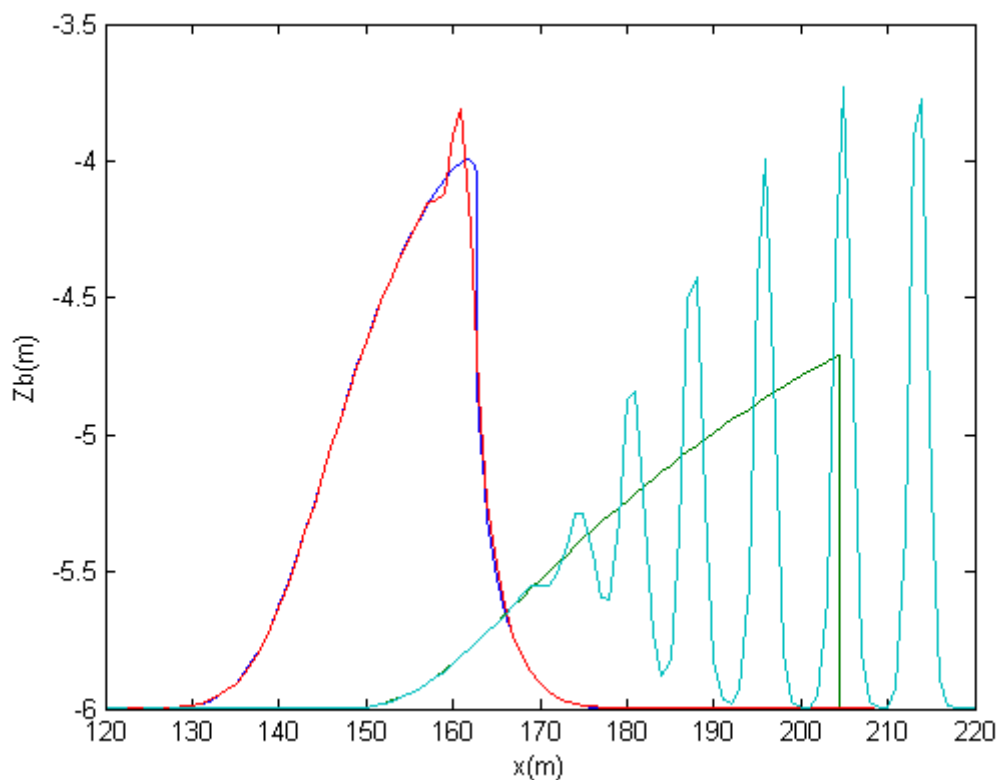


Figura 5.2 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema Lax-Wendroff correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

Para o esquema Lax-Wendroff o resultado numérico referente ao tempo 600 s apresentou-se consideravelmente satisfatório com grande precisão (comparando-se com a curva da solução analítica), muito similar ao obtido para o esquema FTCS,

inclusive, a deformação pontiaguda na crista com mesma forma (Lax-Wendroff, $z_b = -3,814$; solução analítica $z_b = -3,997$).

No tempo 6.000 s se constata, analisando o resultado numérico, que o lado do banco de sedimento a barlar do escoamento, manteve-se, até antes do início das oscilações ($x=170$), sobreposta à curva da solução analítica. No tempo 6.000 s, observou-se ainda que a crista do banco de sedimento (no resultado numérico), que se apresentou pontiaguda para o tempo 600 s, assim como ocorrido para o resultado numérico do esquema FTCS, se dividiu em diversas cristas ocasionando as *spurious oscillations*, destacando novamente o erro de dispersão de modelos de diferenças centradas.

Entretanto a inserção do termo de viscosidade artificial, o que difere o esquema Lax-Wendroff daquele de 1ª ordem apresentado (FTCS), ocasionou, analisando comparativamente o resultado numérico de ambos para o tempo 6.000 s, diferença na intensidade do erro de dispersão, já que o distanciamento entre cada uma das várias cristas formadas foi menor no Lax-Wendroff (última crista em $x=214$) do que observado no FTCS (última crista em $x=221$), estando este último mais distante da solução analítica (crista em $x=204,5$). Comparando ainda estes dois modelos, houve no Lax-Wendroff decaimento da amplitude das últimas cristas (FTCS: penúltima, $z_b = -3,495$; última $z_b = -3,172$; Lax-Wendroff: penúltima, $z_b = -3,730$; última $z_b = -3,776$).

O gráfico da Figura 5.3 apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo implementado para o esquema FTBS, para os tempos 600 e 6.000 s.

Neste, observa-se que o resultado numérico referente ao tempo 600 s se apresentou consideravelmente satisfatório, detectando-se no lado do banco de sedimento à barlar do escoamento uma sutil diferença para com a curva do banco correspondente à solução analítica, sendo esta diferença mais perceptível na frente do banco à sotamar do escoamento. Essas diferenças não foram significativas nos resultados dos modelos apresentados anteriormente (FTCS e Lax-Wendroff).

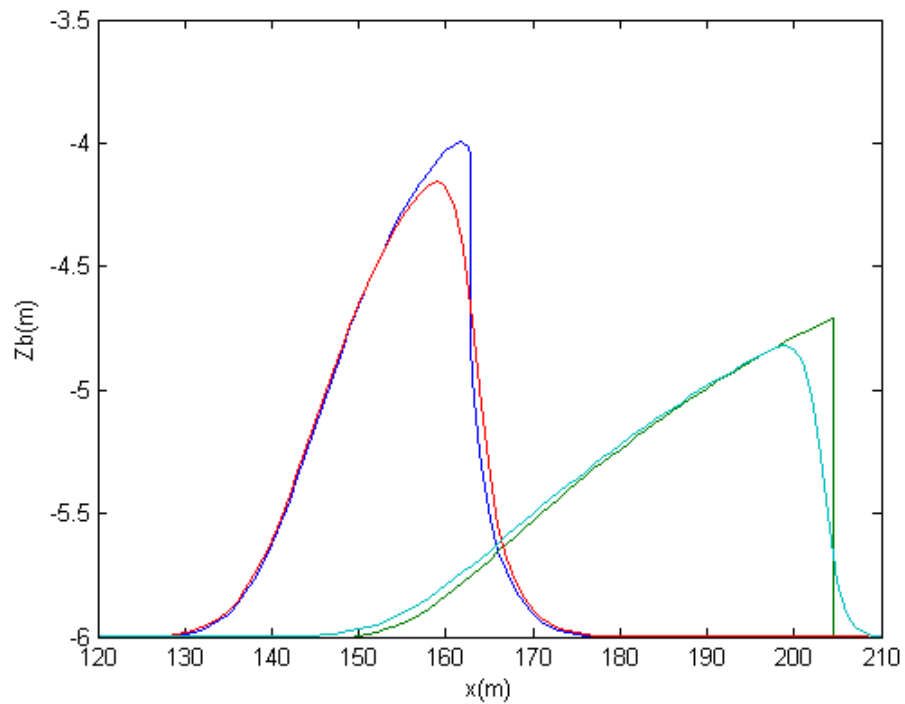


Figura 5.3 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema FTBS correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

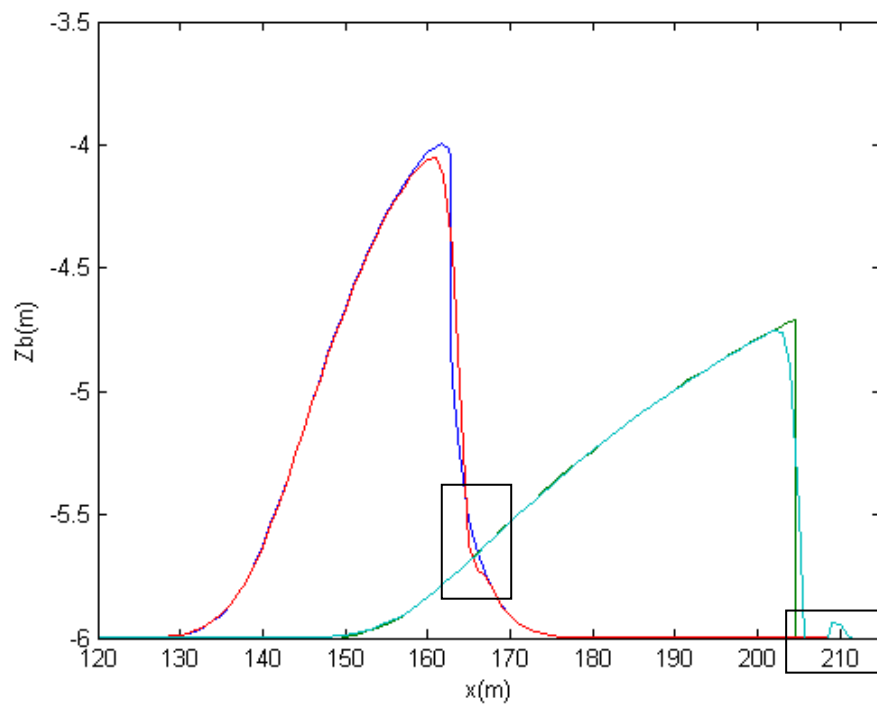


Figura 5.4 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema Warming-Beam correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

Contudo o resultado numérico do modelo implementado para o esquema FTBS manteve a curvatura da crista de forma suave, como a da solução analítica, o que representa um indício de estabilidade, mas apresentou uma amplitude bem inferior que a da solução (FTBS, $z_b = -4,158$; solução analítica, $z_b = -3,997$), o que indica para o caso perda de sedimento, sendo este um problema de conservação de massa de sedimento, configurando tendência dissipativa ao modelo.

No tempo 6.000 s, constata-se, no resultado numérico, que no lado do banco de sedimento a barlar do escoamento, que havia apresentado no tempo 600 s uma sutil diferença em comparação com a curva da solução analítica, torna-se perfeitamente visível, se antecipando o início da elevação de z_b no substrato, ou seja, $z_b > -6,000$ (FTBS: 1ª elevação $x = 140$, $z_b = -5,999$, perceptível visualmente a partir de $x = 145$ com $z_b = -5,994$; solução analítica: 1ª elevação $x = 150$, $z_b = -5,993$).

O gráfico da Figura 5.4 apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo implementado para o esquema Warming-Beam, para os tempos 600 s e 6.000 s, com áreas destacadas pelos retângulos pretos em detalhe nas Figuras 5.6 e 5.7, discutidas a seguir.

O modelo implementado para o esquema Warming-Beam se mostrou com o melhor resultado, até aqui, dentre os modelos apresentados. Neste observa-se que o resultado numérico referente ao tempo 600 s é consideravelmente preciso, por se aproximar bem da curva da solução analítica, com um efeito dissipativo relativamente pequeno (crista do banco de sedimento: FTBS, $z_b = -4,158$; Warming-Beam, $z_b = -4,053$; solução analítica, $z_b = -3,997$).

Ainda para o resultado numérico do tempo 600 s, observa-se no choque do banco (à sotamar do escoamento), ao se aproximar do nível do leito, que um trecho de divergência com a solução analítica se destaca, conforme Figura 5.5.

Também no resultado numérico correspondente ao tempo 6.000 s, onde ocorreu um trecho de divergência, desta vez ainda mais acentuada que no passo de tempo 600 s, como exposto na figura 5.6.

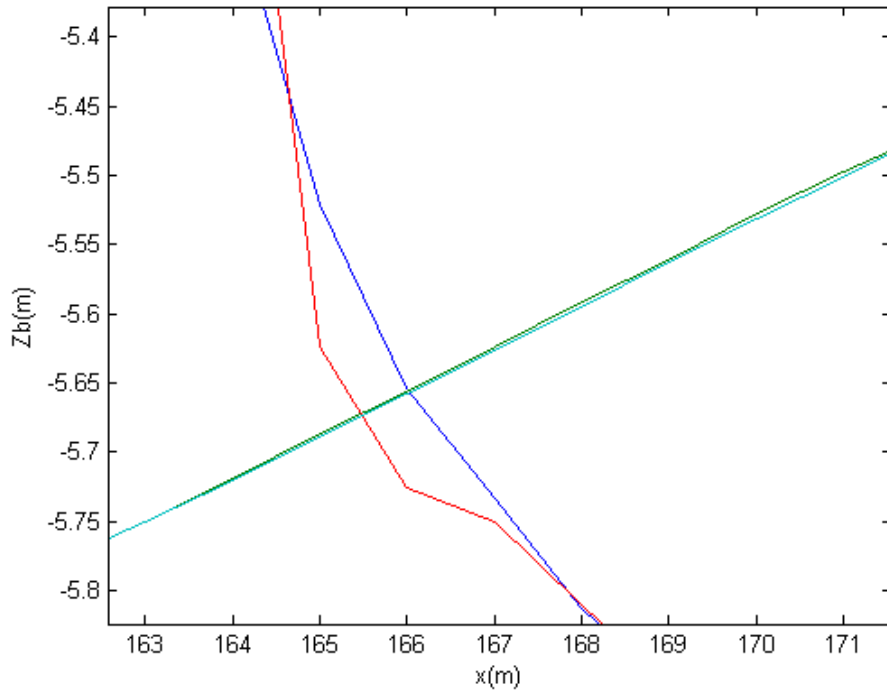


Figura 5.5 – Detalhe do resultado numérico do modelo implementado para o esquema Warming-Beam correspondente ao tempo 600 s (vermelho), em comparação com a solução analítica (azul), no choque do banco de sedimento a sotamar do escoamento, ao se aproximar do nível do leito

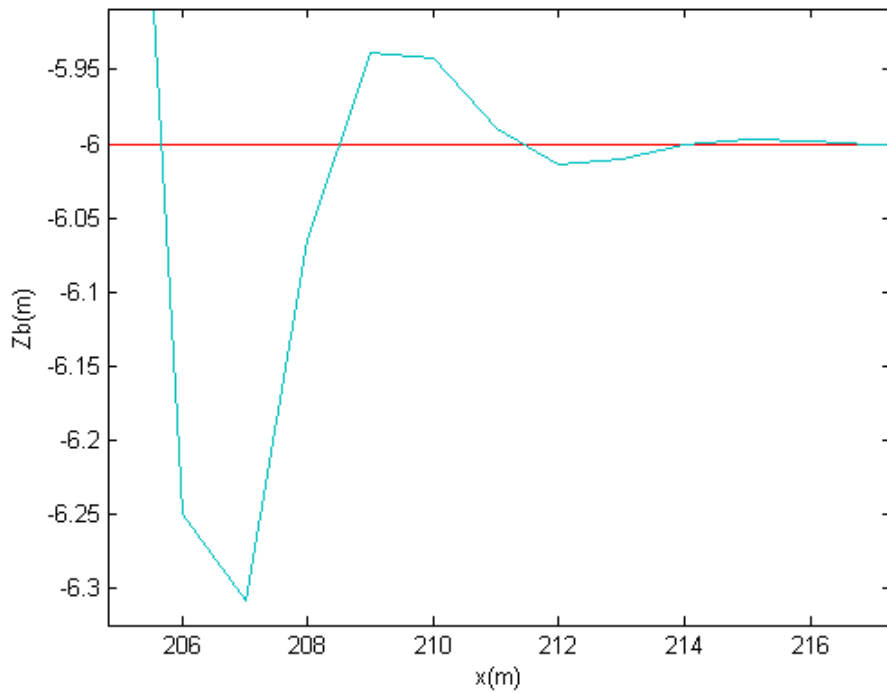


Figura 5.6 – Detalhe do gráfico do resultado do modelo implementado para o esquema Warming-Beam correspondente ao tempo 6.000 s (verde claro), logo após a frente do banco de sedimento posterior ao sentido do escoamento tocar o substrato

Tanto para o tempo 600 s como para 6.000 s, foi observada deformações no choque do banco de sedimento do resultado numérico nas proximidades com o nível médio do leito ($z_b = -6,000$), que não ocorre choque da solução analítica. Essas divergências mostraram que o modelo encontra dificuldade ao retomar ao nível médio do substrato. No tempo 6.000 s, o resultado numérico ainda mantém oscilações nas próximas posições i até que o z_b consiga se alinhar ao nível médio do leito, onde a solução analítica se encontra após o choque do banco de sedimento.

Para o esquema TVD-RK foram implementados esquemas em diferenças finitas com várias combinações entre algoritmos do tipo diferença centrada e *upwind*, substituindo-se as Equações 4.11, 4.12 e 4.14, conforme informado na metodologia.

O gráfico da Figura 5.7 apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo implementado para o esquema TVD-RK-CCC, para os tempos 600 e 6.000 s.

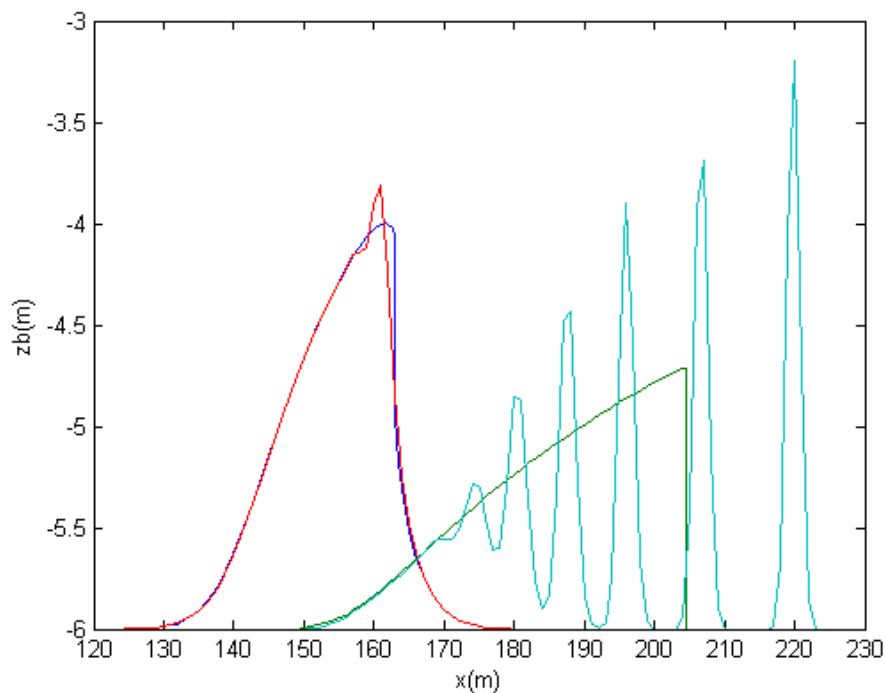


Figura 5.7 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema TVD-RK-CCC correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

O gráfico da Figura 5.8 apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo implementado para o esquema TVD-RK-CCU, para os tempos 600 e 6.000 s.

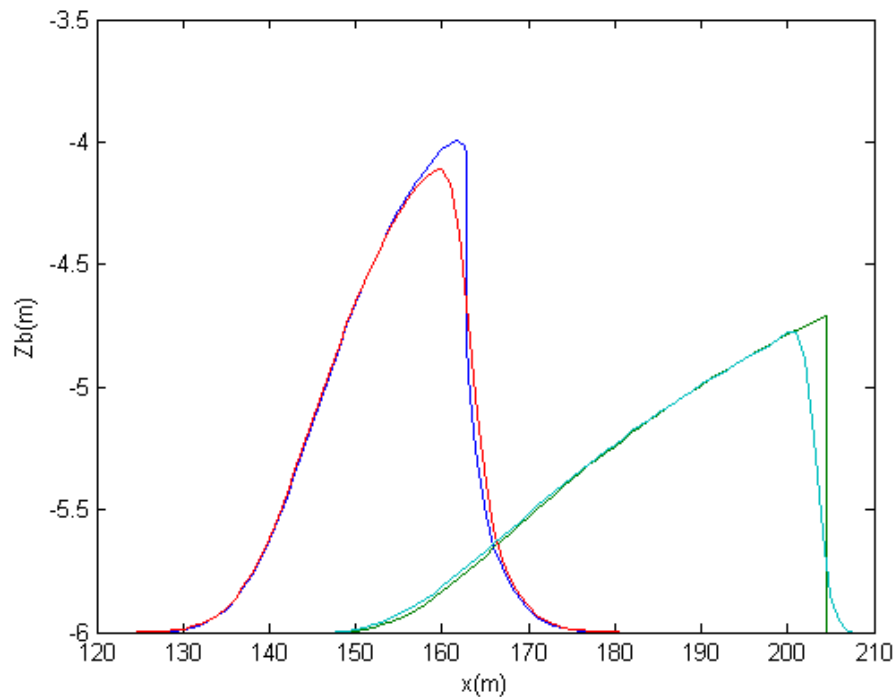


Figura 5.8 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema TVD-RK-CCU correspondente aos tempo 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

O gráfico da Figura 5.9 apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo implementado para o esquema TVD-RK-UUC, para os tempos 600 e 6.000 s.

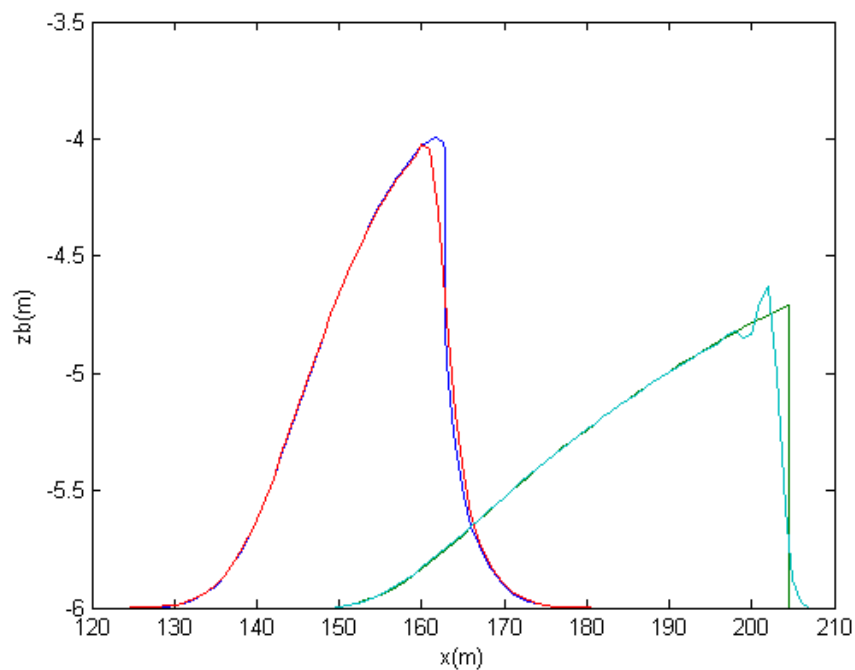


Figura 5.9 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema TVD-RK-UUC correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

O gráfico da Figura 5.10 apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo implementado para o esquema TVD-RK-UUU, para os tempos 600 s e 6.000 s.

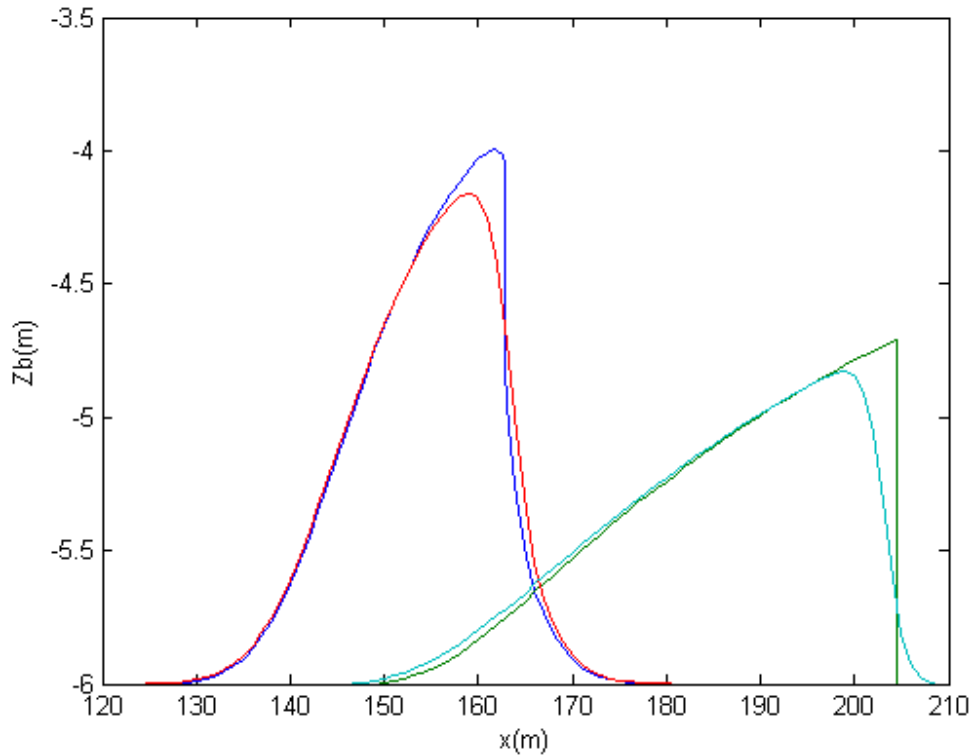


Figura 5.10 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo implementado para o esquema TVD-RK-UUU correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

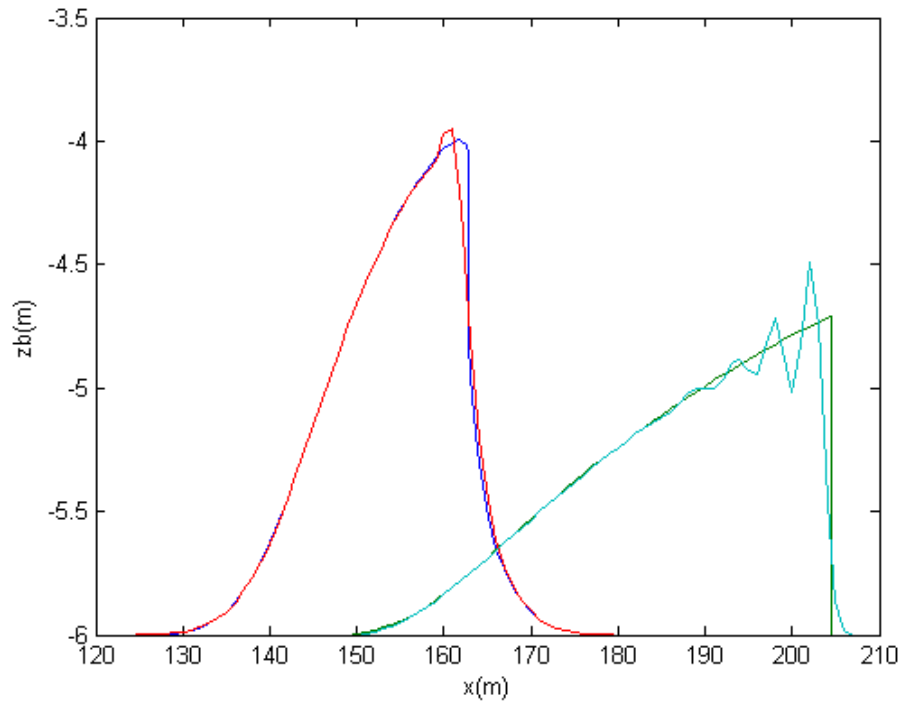


Figura 5.11 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados coincidentes dos modelos CUC e UCC implementados para o esquema TVD-RK correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

O gráfico da Figura 5.11 apresenta os resultados numéricos obtidos para os modelos CUC e UCC, cujo valor numérico dos resultados coincide de um com o do outro, implementados para esquema TVD-RK, para os tempos 600 e 6.000 s.

O gráfico da Figura 5.12 apresenta os resultados numéricos obtidos para os modelos UCU e CUU, cujo valor numérico dos resultados coincide entre si, assim como na comparação entre CUC e UCC, implementados para esquema TVD-RK, para os tempos 600 s e 6.000 s.

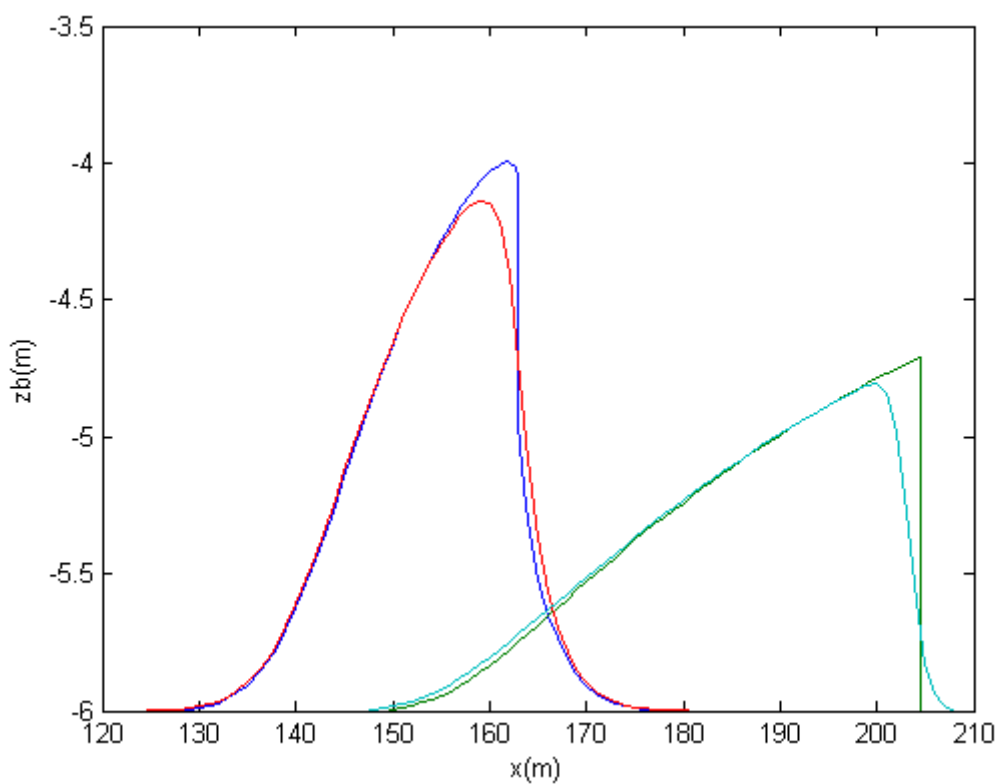


Figura 5.12 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados coincidentes dos modelos UCU e CUU implementados para o esquema TVD-RK correspondente aos tempos 600 s (vermelho) e 6.000 s (verde claro), comparados com as curvas da solução analítica (azul e verde escuro, respectivamente)

Os resultados numéricos dos modelos implementados a partir das combinações de algoritmos dentro do esquema TVD-RK, que mais se assemelharam à curva do banco de sedimento obtida pela solução analítica, são as combinações CCU e UUC, apresentadas em contraste com a solução analítica para o passo de tempo 6.000 s na Figura 5.13.

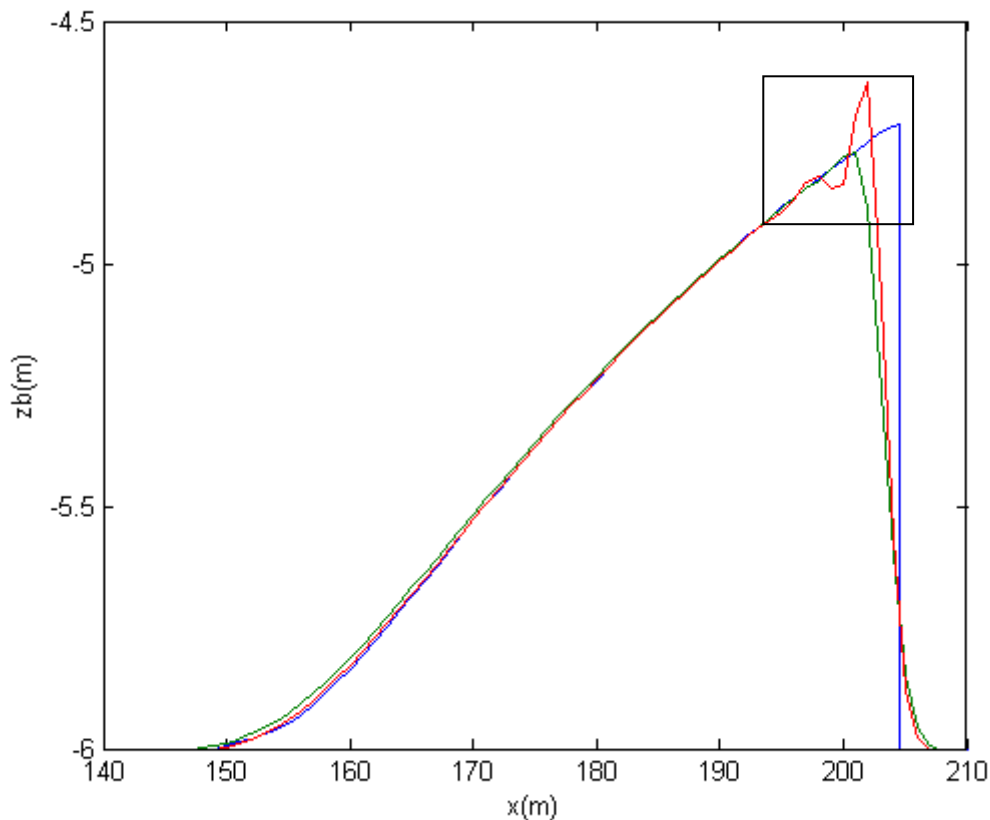


Figura 5.13 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com os resultados dos modelos CCU (verde) e UUC (vermelho) implementados para o esquema TVD-RK correspondente ao tempo 6.000 s, comparados com a solução analítica (azul)

A Figura 5.14 apresenta em detalhe a área destacada no gráfico da Figura 5.13 pelo retângulo preto, onde se pode observar que a crista do modelo UUC que ultrapassa a curva da solução analítica se dá, verticalmente, na grandeza de aproximadamente 0,15 m, ao passo que o erro de distanciamento horizontal deste modelo é cerca de quase 1 m menor que a do modelo CCU. Ainda, o choque do modelo UUC, com relação àquele do modelo CCU, está mais próximo do choque apresentado pela solução analítica. Desta forma, pode-se atribuir melhor acurácia ao modelo UUC.

Tendo sido constatada a superioridade do modelo UUC, dentre as combinações apresentadas para o esquema TVD-RK, comparou-se o resultado numérico deste com o modelo implementado para o esquema Warming-Beam, conforme apresentado no gráfico da Figura 5.15.

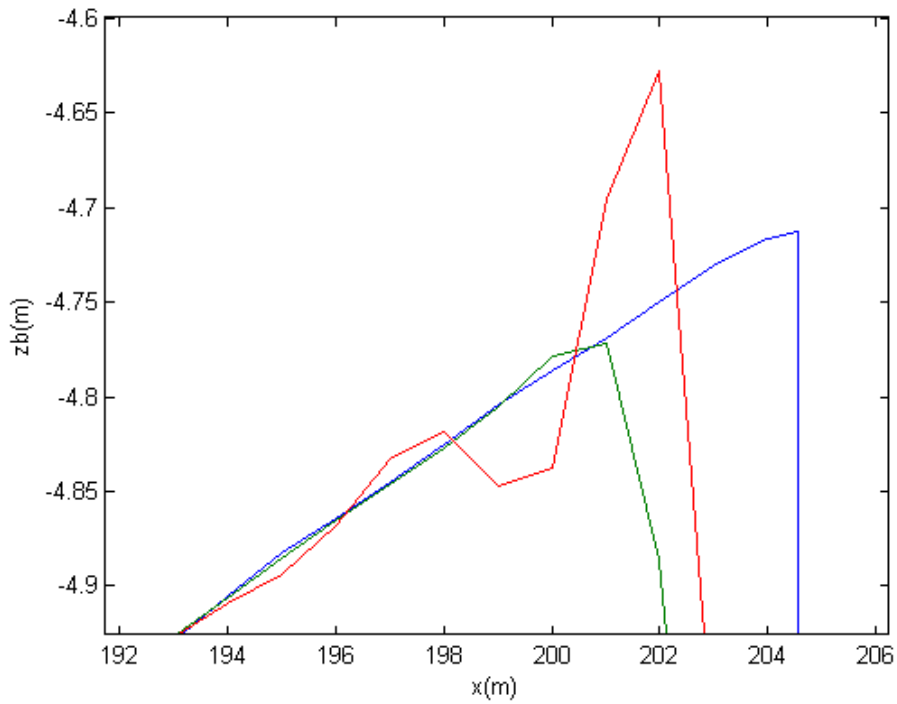


Figura 5.14 – Detalhe do gráfico comparativo dos resultados dos modelos CCU (verde) e UUC (vermelho) implementados para o esquema TVD-RK correspondente ao tempo 6.000 s, em comparação com a solução analítica (azul)

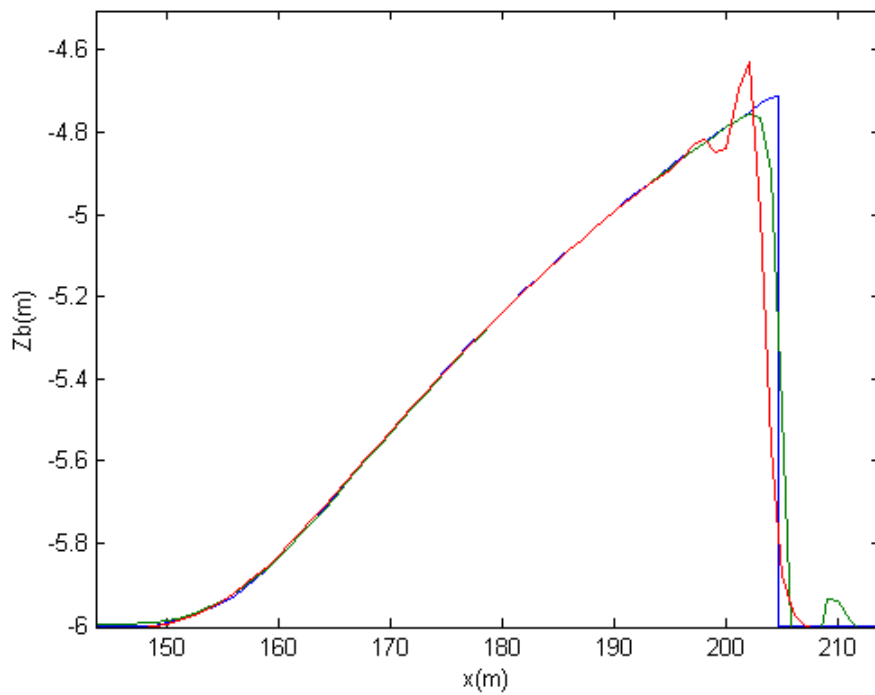


Figura 5.15 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com os resultados dos modelos UUC (vermelho) implementado para o esquema TVD-RK e Warming-Beam (verde), correspondente ao tempo 6.000 s, comparados com a solução analítica (azul)

Pode-se observar na Figura 5.15 que o modelo do esquema Warming-Beam se manteve mais próximo da solução analítica, na maior parte do traçado, em contrapartida ao modelo para o esquema TVD-RK-UUC, apresentando menor efeito dissipativo, e ainda maior semelhança entre o choque do banco de sedimento do respectivo resultado numérico e a solução analítica. Sendo assim, o modelo do esquema Warming-Beam se mostrou superior ao modelo UUC implementado para o esquema TVD-RK.

Um resumo do erro RMS (*Root Mean Square*) para os diferentes modelos usados neste trabalho é apresentado na Tabela 5.

TABELA 5 – VALOR DO RMS PARA OS MODELOS IMPLEMENTADOS

Modelo numérico	RMS para o tempo 600 s	RMS para o tempo 6.000 s
FTCS	0,000437	0.144238
Lax-Wendroff	0,000435	0.107541
FTBS	0,001475	0.003924
Warming-Beam	0.001182	0.001591
TVD-RK-UUC	0.000529	0.002965

Por ter este último se mostrado mais eficiente, dentre os modelos testados, para cálculo do transporte de sedimento, somente o modelo Warming-Beam foi inserido no modelo de ondas de águas rasas. Como apresentado na metodologia, foi simulado hidrodinâmica de ondas com períodos $T=6s$ e $T=600s$, e velocidade multiplicada por um fator de 3, em interações com o módulo de sedimento. O cenário simulado é semelhante àquele utilizado para corrente, possuindo aqui a crista do banco de sedimento dois pontos em x ($z_b = -4.005$ para $x=150$ e 151).

A Figura 5.16 apresenta o resultado numérico obtido para o tempo de simulação de 600 s, para onda com período igual a 6 s.

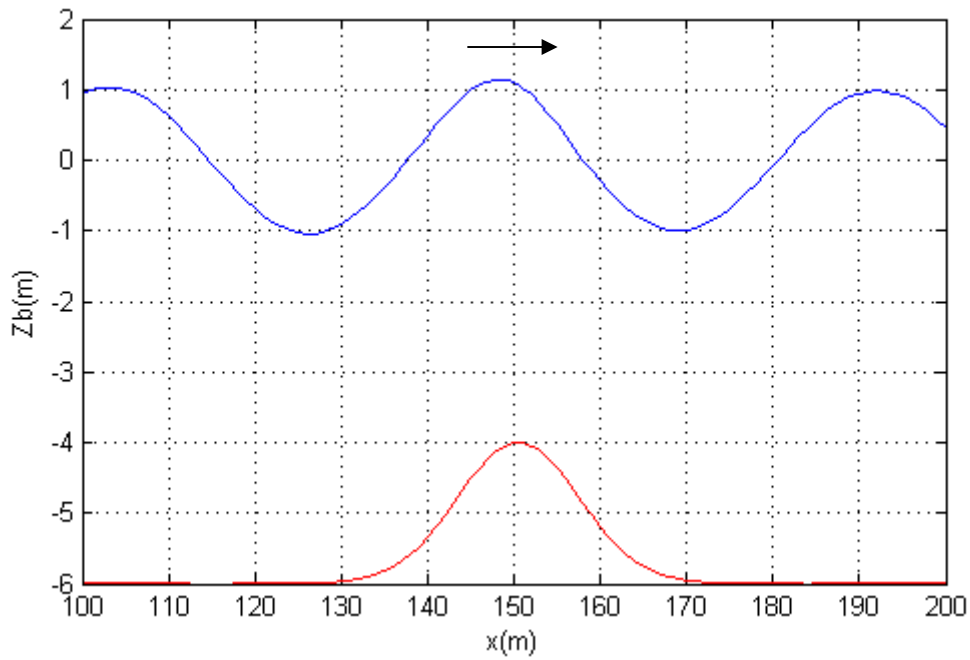


Figura 5.16 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo de transporte de sedimento implementado para o esquema Warming-Beam sob efeito de hidrodinâmica de ondas ($T=6s$) em águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 600 s (água em azul, sedimento em vermelho)

A Figura 5.17 apresenta o resultado obtido para o tempo de simulação de 6.000 s, para onda com período igual a 6 s.

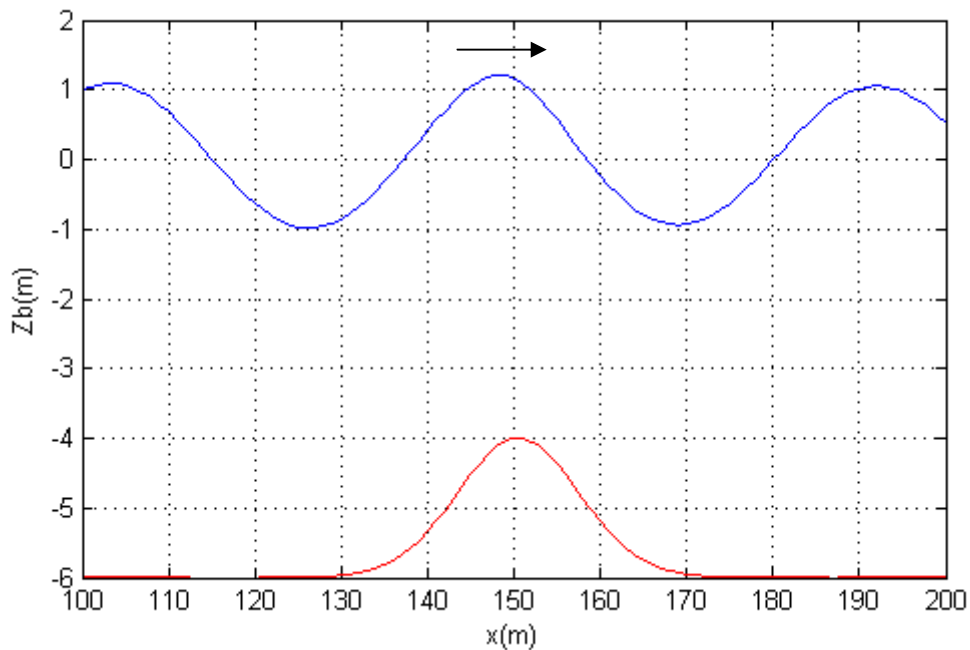


Figura 5.17 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo de transporte de sedimento implementado para o esquema Warming-Beam sob efeito de hidrodinâmica de ondas ($T=6s$) em águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 6.000 s (água em azul, sedimento em vermelho)

águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 6.000s (água em azul, sedimento em vermelho)

Dos resultados obtidos, 600 e 6.000 segundos, para o transporte de sedimento sob efeito de ondas em águas rasas ($T=6s$), entre os dois tempos de simulação apresentou-se uma desprezível mudança de $0,001 m$, para a crista em $x=150$, obtidos $z_b=-4,005$ e $-4,004$ respectivamente. Ainda, detectou-se insignificante redução de altura nas curvas a barlar e sotamar do banco de sedimento, se observado os pontos de grade para $x=140$ e 160 , o que justifica o desprezível empinamento da crista.

A Figura 5.18 apresenta o resultado numérico obtido para o tempo de simulação de 600 s, para onda com período igual a 600 s.

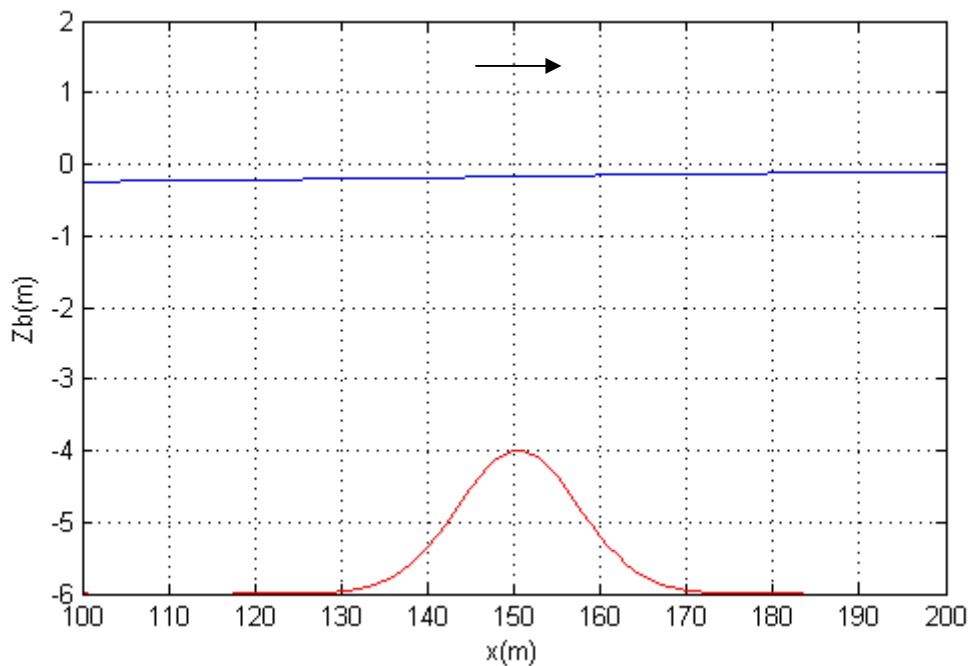


Figura 5.18 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo de transporte de sedimento implementado para o esquema Warming-Beam sob efeito de hidrodinâmica de ondas ($T=600s$) em águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 600s (água em azul, sedimento em vermelho)

A Figura 5.19 apresenta o resultado numérico obtido para o tempo de simulação de 6.000 s, para onda com período igual a 600 s.

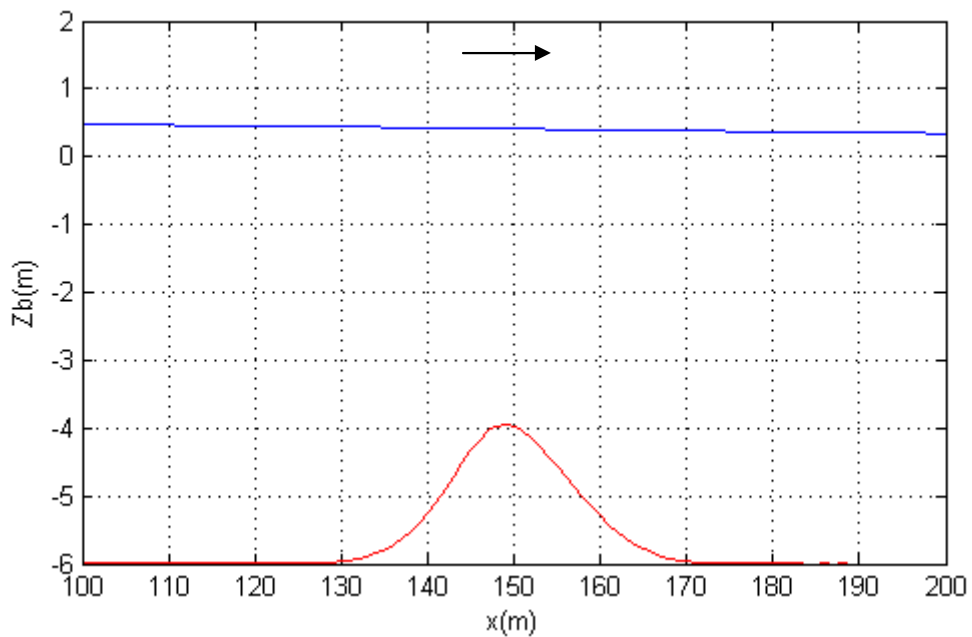


Figura 5.19 – Gráfico do eixo x pela altura z_b , com resultados do modelo de transporte de sedimento implementado para o esquema Warming-Beam sob efeito de hidrodinâmica de ondas ($T=600s$) em águas rasas, para o tempo de simulação correspondente a 6.000 s (água em azul, sedimento em vermelho)

Comparando-se os resultados referentes aos tempos de simulação 600 e 6.000 segundos, com ondas de águas rasas com $T=600s$, observa-se um pequeno deslocamento do banco de sedimento para a esquerda (crista em $x=149$), ao contrário do sentido de origem das ondas, além de um leve empinamento (crista em $z_b = -3,94$).

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

6 CONCLUSÃO

Os esquemas de diferença centrada, FTCS e Lax-Wendroff, apresentaram grande precisão nos resultados numéricos, ou seja, grande proximidade com a curva da solução analítica, sendo estes satisfatórios para pouco tempo de simulação (600 s), com problema apenas de deformação pontiaguda na crista. Entretanto, quando submetidos a um número mais elevado de passos de tempo ($it=60.000$), a crista antes pontiaguda divide-se em várias cristas, formando o que é conhecido como *spurious oscillations*, revelando estes modelos possuírem tendência a erros dispersivos, sendo conseqüentemente pouco estáveis, conforme observado em Johnson e Zyserman (2002) e Long *et al.* (2008).

A inserção do termo de viscosidade artificial, o que difere o esquema Lax-Wendroff (2ª ordem) do FTCS (1ª ordem), proporciona o aumento da precisão do modelo, incorrendo em variação no efeito dispersivo, que diminui, como constatado pelo menor distanciamento entre cada uma das várias cristas formadas, sobretudo as últimas.

O modelo FTBS (1ª ordem) se mostrou de pouca precisão por apresentar a curva da crista do banco de sedimento do resultado numérico muito abaixo daquela da solução analítica, o que indica para o caso perda de sedimento, sendo este um problema de conservação de massa de sedimento, configurando tendência ao erro dissipativo ao modelo. Contudo, a estabilidade do modelo mostrou-se relevante, mesmo para a curva do banco de sedimento do resultado numérico obtido para o tempo 6.000 s.

O modelo Warming-Beam (2ª ordem) apresentou, em seu resultado numérico deformações no choque do banco de sedimento do resultado numérico nas proximidades com o nível médio do leito ($z_b = -6,000$), que não ocorre choque da solução analítica. Essas divergências mostraram que o modelo encontra dificuldade ao retomar ao nível médio do substrato. No tempo 6.000 s, o resultado numérico ainda mantém oscilações nas próximas posições i até que o z_b consiga se alinhar ao nível médio do leito, onde a solução analítica se encontra após o choque do banco de sedimento.

Os melhores resultados numéricos dentre àqueles modelos implementados para o esquema TVD-RK, a partir de algoritmos de 1ª ordem, foram as combinações CCU (seqüência de algoritmos: diferença centrada – diferença centrada – *upwind*) e UUC (seqüência de algoritmos: *upwind* – *upwind* – diferença centrada).

A crista do banco de sedimento do resultado numérico do modelo TVD-RK versão UUC que ultrapassa a curva da crista na solução analítica não impede que este modelo seja considerado superior ao modelo versão CCU. Isto é explicado pela escala gráfica, que revela a magnitude do erro vertical da crista do modelo versão UUC ser inferior comparado ao erro horizontal do modelo versão CCU.

O resultado numérico do modelo do esquema Warming-Beam se manteve mais próximo da solução analítica, na maior parte do traçado, em contrapartida ao resultado numérico do modelo UUC, implementado para o esquema TVD-RK, se mostrando superior por apresentar menor erro dissipativo e maior semelhança com o choque da solução analítica.

Ressalta-se que os resultados numéricos obtidos para os modelos dos esquemas aqui implementados podem possuir alguma pequena diferença se comparado aos resultados numéricos de modelos implementados para os mesmos esquemas encontrados na literatura. Isto pode ocorrer por particularidades definidas quando da implementação dos modelos, muitas vezes não detalhadas pelos autores (Long *et al.*, 2008; Johnson e Zyserman, 2002).

Dos resultados obtidos para o transporte de sedimento sob efeito de ondas em águas rasas, entre os dois tempos de simulação apresentados ($it=6.000$ e $it=60.000$), observou-se, no resultado numérico, uma desprezível mudança para a crista do banco de sedimento e respectivas curvas a barlar e sotamar do escoamento, quando consideradas as ondas de pequeno período ($T=6s$). Já para ondas de maior período ($T=600s$) a influência no transporte de sedimento foi maior, com ocorrência de deformação do banco de sedimento para esquerda, oposta ao sentido do escoamento como observado em Long *et al.* (2008).

A influência da onda de maior período no resultado numérico foi maior provavelmente ao fato desta se assemelhar mais ao efeito da hidrodinâmica de corrente, uma vez que neste trabalho consideram-se casos em 1-D (eixo horizontal),

o que despreza o efeito de remobilização (eixo vertical) de sedimento de fundo dado a hidrodinâmica de onda, e ondas com períodos maiores tendem a ter maior amplitude de excursão, movimento que se dá na direção horizontal.

Para os casos em 1-D aqui analisados, na comparação entre os efeitos de ondas e correntes, constatou-se para este último efeito muito superior. Isto se justifica por ter a onda um movimento harmônico, o que faz com que os grãos de sedimento possuam uma trajetória cíclica, que hora deslocados tentam retornar ao ponto espacial inicial.

O transporte de sedimento se dá como resultado de diferentes e complexos processos físicos, aos quais muitas vezes têm-se dificuldade em considerar para a criação de sofisticados modelos numéricos computacionais. É necessário para tanto, fazer uso das melhores estratégias de emprego dos métodos numéricos existentes, sendo este o maior desafio para o problema em questão.

CAPÍTULO 7
REFERÊNCIAS

7 REFERÊNCIAS

ALBINO, J. **Processos de sedimentação atual e morfodinâmica das Praias de Bicanga a Povoação, ES.** Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Geologia Sedimentar. Instituto de Geociências USP. 1999.

ALBINO, J e OLIVEIRA, R., **Influência das couraças lateríticas da formação Barreiras na topografia e distribuição granulométricas dos perfis praias de Bicanga e Manguinhos – ES.** Anais I Simpósio Processos Sedimentares e Problemas Ambientais da Zona Costeira do NE do Brasil. 1995.

BENKHALDOUN, F.; SEAÏD, M. **Combined characteristics and finite volume methods for sediment transport and bed morphology in free-surface water flows.** Preprint submitted to Elsevier Science. 2009.

BIRD, E.C.F. **Coasts.** Australian National University Press. 2a edição. 1976.

CARTER, R.W.G. **Coastal Environments – An introduction to the Physical, Ecological and Cultural Systems of Coastline.** Academic Press, Cambridge. 1988.

CONAMA – Conselho Nacional do Meio Ambiente. **Resolução n.º 344.** Brasil. 2004.

DAVIS, R. A. **Beach and nearshore zone.** In:_____. Coastal Sedimentary Environments. 2. ed. New York: Springer-Verlag, p. 379-532. 1985.

DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. **Coastal processes with engineering applications.** USA: Cambridge University Press, 2002.

FREDSOE, J.; DEIGAARD, R. **Mechanics of coastal sediment transport.** Advanced Series on Ocean Engineering. Vol. 3. Ed. World Scientific. Technical University of Denmark. 1992.

HARTEN, A. **High resolution schemes for hyperbolic conservation laws.** J. Comput. Phys. 49, 357. 1983.

HARTEN, A., ENGQUIST, B., OSHER, S., CHAKRAVARTHY, S. **Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes, III.** J. Comput. Phys. 71, 231. 1987.

HUDSON, J., DAMGAARD, J., DODD, N., CHESHER, T., COOPER, A. **Numerical approaches for 1D morphodynamic modelling.** Coast. Eng. 52, 691–707. 2005.

HOEFEL, F. **Morfodinâmica das praias arenosas oceânicas: uma revisão bibliográfica.** Univali, Itajaí – PR. 93 p. 1998.

JIANG, G.-S., SHU, C.-W. **Efficient implementation of weighted ENO schemes.** J. Comput. Phys. 126, 202. 1996.

JOHNSON, H.K., ZYSERMAN, J.A. **Controlling spatial oscillations in bed level update schemes.** Coast. Eng. 46, 109–126. 2002.

KOMAR, P.D. **Beach Processes and Sedimentation.** Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ. 1976.

LIU, X. D., OSHER, S., CHAN, T. **Weighted essentially non-oscillatory schemes.** J. Comput. Phys. 115, 200. 1994.

LONG, W.; KIRBY, J. T.; SHAO, Z. **A numerical scheme for morphological bed level calculations.** Science Direct. Coastal Engineering. 2008.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2ª ed. Ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Universidade Federal de Santa Catarina. 2004.

MENEZES, G. S. C. **Modelagem de correntes residuais na Baía do Espírito Santo**. Monografia de Graduação. UFES. Departamento de Ecologia e Recursos Naturais. 2005.

MEYER-PETER, E., MÜLLER, R. **Formulas for bed-load transport**. Rep. 2nd Meet. Int. Assoc. Hydraul. Struct. Res. International Association Hydraulic Structure Research, Stockholm, pp. 39–64. 1948.

MUEHE, D. **Geomorfologia Costeira**. In GUERRA, A.J.T. e CUNHA, S.B. **Geomorfologia: Uma atualização de bases e conceitos**. Ed. Bertrand Brasil. 1993.

NASCIMENTO, M. F. **Estudo numérico da propagação para águas rasas de ondas geradas por embarcações**. Tese de doutorado. COPPE/UFRJ. Engenharia Oceânica. Rio de Janeiro. 2007.

NIELSEN, P. **Coastal Botton Boundary Layers and Sediment Transport**. Advanced Series on Ocean Engineering. Vol. 4. Ed. World Scientific. University of Queensland. 1992.

PASSOS, R. C. S. **Análise dos parâmetros granulométricos, químicos e bacteriológicos em sedimentos para estudo de viabilidade de obras de dragagem para desassoreamento da foz do rio Benevente com engordamento da Praia de Anchieta**. Monografia de especialização. FAESA. Gestão Ambiental. 2007.

PASSOS, R. C. S. **Variação morfotextural da praia de Camburi, Vitória – ES, após engordamento artificial.** Monografia de graduação. UFES. Oceanografia. 2004.

PETRILA, T.; TRIF, D. **Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics.** Ed. Springer. Babes-Bolyai University. 2005.

SOARES, S. B. **Avaliação experimental da taxa longitudinal de transporte de sedimentos e sua previsão usando formulações globais na zona de surfe da Praia de Camburi Vitória-ES.** Dissertação de mestrado. UFES. Engenharia Ambiental. Espírito Santo. 2005.

SUGUIO, K. **Dicionário de Geologia Marinha.** T.A. Queiroz. ed. São Paulo. 1992.

SUGUIO, Kenitiro. **Introdução à Sedimentologia.** Ed. Edgard Blücher Ltda. Universidade de São Paulo. 1973.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid mechanics and heat transfer.** Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences. 2ª ed. Ed. Taylor & Francis. 1997.

YU, J., MEI, C.C. **Formation of sand bars under surface waves.** J. Fluid Mech. 416, 315–348. 2000.

ANEXOS

ANEXO A

Neste anexo são apresentadas as equações da modelagem de ondas em águas rasas.

Para tanto, considera-se a Figura A:

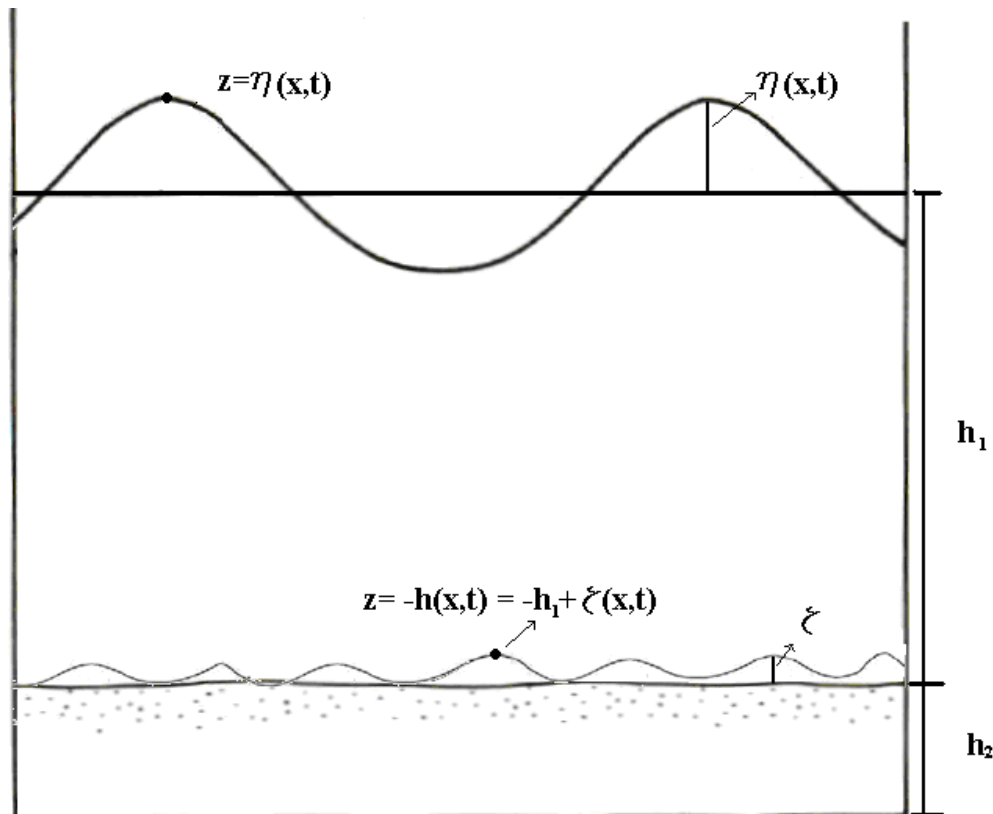


Figura A – Situação e parâmetros físicos considerados

Considerando o escoamento de um fluido incompressível, a equação de conservação da massa pode ser escrita da forma:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

para $i = 1, 2, 3$ e $u_i = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ é o vetor velocidade na direção $x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Fazendo a consideração de onda longa e procurando estabelecer uma relação da velocidade instantânea horizontal com a velocidade média na horizontal, pode-se integrar a equação da continuidade na vertical

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

para $i = 1, 2$, e tem-se colocado em evidência a componente vertical da velocidade. Resolvendo a equação acima, para a integral exata e usando a regra de Leibniz se obtém

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} u_i dz - \left(u_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right)_{\eta} + \left(u_i \left(\frac{-\partial h}{\partial x_i} \right) \right)_{-h} + w(-\eta) - w(-h) = 0$$

Considerando a condição cinemática na superfície livre $S: z - \eta(x_i, t) = 0$, se obtém uma equação para a velocidade vertical

$$w(\eta) - \left(u_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right)_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

E, considerando a condição cinemática no leito $S: z + h(x, t) = 0$, se obtém a seguinte equação.

$$w(-h) - \left(u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{-h} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

E usando a definição de velocidade média na vertical

$$U_i = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u_i dz,$$

para $i = 1, 2$. Substituindo as equações das condições e da velocidade média na vertical na equação da conservação da massa integrada na vertical se obtém:

$$\frac{\partial}{\partial x} (HU) + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

onde definindo $H = h + \eta$ e $z = -h(x, t) = -h_1 + \zeta(x, t)$ é a descrição do formato do leito.

Já que $h = h_1 - \zeta(x_i, t)$ e

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Nota-se que a equação da conservação da massa dela em consideração a variação do leito descrito por:

$$\frac{\partial}{\partial x}(HU) + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

A equação acima também pode ser escrita da forma, para $H = h + \eta$

$$\frac{\partial}{\partial x}(HU) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

A equação da conservação da quantidade de movimento escrita para um escoamento instantâneo é dada pela expressão abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - 2\rho \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k$$

para $i=1,2,3$ e $j=1,2,3$.

Neste trabalho será considerado o escoamento de um fluido incompressível, induzido por uma onda longa e sem efeito da rotação da Terra, e submetido à pressão hidrostática

A hipótese de onda longa leva a considerar que as acelerações da partícula na vertical são muito pequenas quando comparadas com a aceleração horizontal, Logo, para $i=3$ tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_3) + \rho U_j \frac{\partial U_3}{\partial x_j} = \rho \frac{DU_3}{Dt} \cong 0$$

A baixa variação das velocidades na vertical leva a considerar que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{3j} \cong 0$$

Desconsiderando o efeito da rotação da terra na equação $i=3$,

$$2\rho \varepsilon_{3jk} \Omega_j U_k \cong 0$$

se obtém a equação para a distribuição da pressão hidrostática.

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial x_3}$$

Integrando a equação acima se obtém:

$$p(x_3) = p_{ATM} + \rho g(x_3 - \eta)$$

Derivando a equação acima na horizontal,

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{ATM}}{\partial x_i} - \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad i = 1, 2$$

Substituindo a equação acima e considerando $\rho = cte$, sem perda de generalidade, se obtém para $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ATM}}{\partial x_i} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right)$$

Integrando na vertical e usando a regra de Leibniz obtém-se:

a) Para o termo de pressão.

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p_{ATM}}{\rho} \right) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{p_{ATM}}{\rho} \right) dx_3 - \frac{p_{ATM}}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{p_{ATM}}{\rho} \frac{\partial(-h)}{\partial x_i}$$

b) Para o termo da superfície livre.

$$\int_{-h}^{\eta} g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx_3 = g \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} \eta dx_3 - g \eta \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + g \eta \frac{\partial(-h)}{\partial x_i} - gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$$

c) Para o termo das tensões.

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \frac{\tau_{ij}}{\rho} dx_3 - \frac{\tau_{ij}^{AR}}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\tau_{ij}^{BOT}}{\rho} \frac{\partial(-h)}{\partial x_j}$$

d) Para o termo local

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_i}{\partial t} dx_3 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u_i dx_3 - u_i(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial t}$$

e) Para o termo advectivo.

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} u_i u_j dx_3 - (u_i u_j)_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + (u_i u_j)_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial x_j}$$

Substituindo as equações do item d) e do item e) no lado esquerdo da equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} (HU_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\beta HU_i U_j) - U_i \Big|_{-h} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right) - U_i \Big|_{-h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U_j \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)$$

Ordenando e manipulando obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(HU_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\beta HU_i U_j) - u_i \Big|_{\eta} \underbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - u_3 \right)}_{=0} + u_i \Big|_{-h} \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} - u_3 \right)}_{=0} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t}(HU_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\beta HU_i U_j) \end{aligned}$$

para $i = j = 1, 2$

Por simplicidade e na falta de um modelo 3-D pode-se considerar $\beta = 1$

Substituindo as equações do item a), item b) e do item c) no lado direito da equação e desconsiderando o efeito de pressão atmosférica, o lado direito da equação fica

$$-gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \frac{\tau_{ij}}{\rho} dx_3 - \frac{\tau_{ij}}{\rho} \Big|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\tau_{i3}}{\rho} \Big|_{\eta} + \frac{\tau_{ij}}{\rho} \Big|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial x_j} - \frac{\tau_{i3}}{\rho} \Big|_{-h}$$

Aplicando a condição dinâmica na superfície da água a equação acima obtém-se

$$= gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \frac{\tau_{ij}}{\rho} dx_3 + \tau_i^{\eta} - \tau_i^b$$

Finalmente, igualando o termo do lado esquerdo com o lado direito, a equação da conservação de quantidade de movimento fica:

$$\frac{\partial}{\partial t}(HU_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\beta HU_i U_j) = gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \frac{\tau_{ij}}{\rho} dx_3 + \tau_i^{\eta} - \tau_i^b$$

No presente trabalho é considerado o movimento de propagação de uma onda ao longo do eixo X, se considerar o termo advectivo, o cisalhamento interno e nem os efeito de cisalhamento do vento. Nesse caso, as equações de conservação de massa e da conservação da quantidade de movimento podem ser escritas como:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(HU) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(HU) = gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_x^b$$

Onde:

$$H = h + \eta$$

$$h = h_1 - \zeta$$

ANEXO B

Transporte de sedimento suspenso.

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathcal{S} U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (-q_j) \quad \mathcal{S} = \frac{M_s}{V} \quad q = \left[\frac{M_s}{t} \frac{1}{L^2} \right]$$

$$a) \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} dx_3 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \mathcal{S} dx_3 - \mathcal{S} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathcal{S} \frac{\partial}{\partial t} (-h)$$

$$b) \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathcal{S} u_j) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \mathcal{S} u_j dx_3 - \mathcal{S} u_j \Big|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + (\mathcal{S} u_j)_{-h} \frac{\partial (-h)}{\partial x_j}$$

$$c) \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_j} q_j dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} q_j dx_3 - q_j \Big|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + q_j \Big|_{-h} \frac{\partial (-h)}{\partial x_j}$$

Não esquecer para $j = 3$

$$b') \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_3} (\mathcal{S} u_3) dx_3 = (\mathcal{S} u_3)_{\eta} - (\mathcal{S} u_3)_{-h}$$

$$c') \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_3} q_3 dx_3 = q_3 \Big|_{\eta} - q_3 \Big|_{-h}$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \mathcal{S} dx_3$$

Lado esquerdo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (H\mathcal{S}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \mathcal{S} u_j dx_3 - \mathcal{S} \left(\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - u_3}_{=0} \right) - \mathcal{S} \left(\underbrace{\frac{\partial h}{\partial t} + u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} + u_3}_{=0} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} (H\mathcal{S}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \mathcal{S} u_j dx_3 \end{aligned}$$

Lado direito:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} q_j dx_3 - q_j \Big|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + q_j \Big|_{-h} \frac{\partial (-h)}{\partial x_j} - q_3 \Big|_{-h} \right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} q_j dx_3 + \underbrace{(q_k \eta_k)}_{=0} - \underbrace{(q_k \eta_k)}_{-h} \Rightarrow q_k = (q_1, q_2, q_3), \eta_k \Big|_{\eta} = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, -\frac{\partial \eta}{\partial x_2}, -1 \right), \eta_k \Big|_{-h} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, 1 \right)$$

*vetor normal,
para fora
da superfície*

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} q_j dx_3 - q_n \Big|_{-h}$$

Finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t} (H\mathcal{S}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \mathcal{S} u_j dx_3 = -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} q_j dx_3 - q_n \Big|_{-h}$$

No presente trabalho não será considerado o sedimento suspenso e sim a mudança do leito dada pela equação da conservação volumétrica de sedimento, equação de Exner:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{1-n_p} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

ANEXO C

solução analítica $nt = 6.000$					
x(i)	Zb(i)	x(i)	Zb(i)	x(i)	Zb(i)
0	-6,000	50	-6,000	150	-4,658
1	-6,000	51	-6,000	151	-4,571
2	-6,000	52	-6,000	152	-4,489
3	-6,000	53	-6,000	153	-4,416
4	-6,000	54	-6,000	154	-4,346
5	-6,000	55	-6,000	155	-4,280
6	-6,000	56	-6,000	156	-4,219
7	-6,000	57	-6,000	157	-4,164
8	-6,000	58	-6,000	158	-4,116
9	-6,000	59	-6,000	159	-4,069
10	-6,000	60	-6,000	160	-4,031
11	-6,000	61	-6,000	161	-4,006
12	-6,000	62	-6,000	161,68	-3,997
13	-6,000	63	-6,000	162	-4,001
14	-6,000	64	-6,000	162,625	-4,019
15	-6,000	65	-6,000	162,85	-4,053
16	-6,000	66	-6,000	162,85	-4,813
17	-6,000	67	-6,000	163	-4,954
18	-6,000	68	-6,000	163,563	-5,184
19	-6,000	69	-6,000	164	-5,302
20	-6,000	70	-6,000	165	-5,521
21	-6,000	71	-6,000	166	-5,654
22	-6,000	72	-6,000	167	-5,734
23	-6,000	73	-6,000	168	-5,813
24	-6,000	74	-6,000	169	-5,867
25	-6,000	75	-6,000	170	-5,906
26	-6,000	76	-6,000	171	-5,935
27	-6,000	77	-6,000	172	-5,957
28	-6,000	78	-6,000	173	-5,971
29	-6,000	79	-6,000	174	-5,981
30	-6,000	80	-6,000	175	-5,990
31	-6,000	81	-6,000	176	-5,993
32	-6,000	82	-6,000	177	-5,997
33	-6,000	83	-6,000	178	-6,000
34	-6,000	84	-6,000	179	-6,000
35	-6,000	85	-6,000	180	-6,000
36	-6,000	86	-6,000	181	-6,000
37	-6,000	87	-6,000	182	-6,000
38	-6,000	88	-6,000	183	-6,000
39	-6,000	89	-6,000	184	-6,000
40	-6,000	90	-6,000	185	-6,000
41	-6,000	91	-6,000	186	-6,000
42	-6,000	92	-6,000	187	-6,000
43	-6,000	93	-6,000	188	-6,000
44	-6,000	94	-6,000	189	-6,000
45	-6,000	95	-6,000	190	-6,000
46	-6,000	96	-6,000	191	-6,000
47	-6,000	97	-6,000	192	-6,000
48	-6,000	98	-6,000	193	-6,000
49	-6,000	99	-6,000	194	-6,000

solução analítica $nt = 6.000$					
$x(i)$	$Zb(i)$	$x(i)$	$Zb(i)$	$x(i)$	$Zb(i)$
195	-6,000	245	-6,000	295	-6,000
196	-6,000	246	-6,000	296	-6,000
197	-6,000	247	-6,000	297	-6,000
198	-6,000	248	-6,000	298	-6,000
199	-6,000	249	-6,000	299	-6,000
200	-6,000	250	-6,000	300	-6,000
201	-6,000	251	-6,000		
202	-6,000	252	-6,000		
203	-6,000	253	-6,000		
204	-6,000	254	-6,000		
205	-6,000	255	-6,000		
206	-6,000	256	-6,000		
207	-6,000	257	-6,000		
208	-6,000	258	-6,000		
209	-6,000	259	-6,000		
210	-6,000	260	-6,000		
211	-6,000	261	-6,000		
212	-6,000	262	-6,000		
213	-6,000	263	-6,000		
214	-6,000	264	-6,000		
215	-6,000	265	-6,000		
216	-6,000	266	-6,000		
217	-6,000	267	-6,000		
218	-6,000	268	-6,000		
219	-6,000	269	-6,000		
220	-6,000	270	-6,000		
221	-6,000	271	-6,000		
222	-6,000	272	-6,000		
223	-6,000	273	-6,000		
224	-6,000	274	-6,000		
225	-6,000	275	-6,000		
226	-6,000	276	-6,000		
227	-6,000	277	-6,000		
228	-6,000	278	-6,000		
229	-6,000	279	-6,000		
230	-6,000	280	-6,000		
231	-6,000	281	-6,000		
232	-6,000	282	-6,000		
233	-6,000	283	-6,000		
234	-6,000	284	-6,000		
235	-6,000	285	-6,000		
236	-6,000	286	-6,000		
237	-6,000	287	-6,000		
238	-6,000	288	-6,000		
239	-6,000	289	-6,000		
240	-6,000	290	-6,000		
241	-6,000	291	-6,000		
242	-6,000	292	-6,000		
243	-6,000	293	-6,000		
244	-6,000	294	-6,000		

Anexo D

solução analítica $nt = 60.000$					
x(i)	Zb(i)	x(i)	Zb(i)	x(i)	Zb(i)
0	-6,000	50	-6,000	100	-6,000
1	-6,000	51	-6,000	101	-6,000
2	-6,000	52	-6,000	102	-6,000
3	-6,000	53	-6,000	103	-6,000
4	-6,000	54	-6,000	104	-6,000
5	-6,000	55	-6,000	105	-6,000
6	-6,000	56	-6,000	106	-6,000
7	-6,000	57	-6,000	107	-6,000
8	-6,000	58	-6,000	108	-6,000
9	-6,000	59	-6,000	109	-6,000
10	-6,000	60	-6,000	110	-6,000
11	-6,000	61	-6,000	111	-6,000
12	-6,000	62	-6,000	112	-6,000
13	-6,000	63	-6,000	113	-6,000
14	-6,000	64	-6,000	114	-6,000
15	-6,000	65	-6,000	115	-6,000
16	-6,000	66	-6,000	116	-6,000
17	-6,000	67	-6,000	117	-6,000
18	-6,000	68	-6,000	118	-6,000
19	-6,000	69	-6,000	119	-6,000
20	-6,000	70	-6,000	120	-6,000
21	-6,000	71	-6,000	121	-6,000
22	-6,000	72	-6,000	122	-6,000
23	-6,000	73	-6,000	123	-6,000
24	-6,000	74	-6,000	124	-6,000
25	-6,000	75	-6,000	125	-6,000
26	-6,000	76	-6,000	126	-6,000
27	-6,000	77	-6,000	127	-6,000
28	-6,000	78	-6,000	128	-6,000
29	-6,000	79	-6,000	129	-6,000
30	-6,000	80	-6,000	130	-6,000
31	-6,000	81	-6,000	131	-6,000
32	-6,000	82	-6,000	132	-6,000
33	-6,000	83	-6,000	133	-6,000
34	-6,000	84	-6,000	134	-6,000
35	-6,000	85	-6,000	135	-6,000
36	-6,000	86	-6,000	136	-6,000
37	-6,000	87	-6,000	137	-6,000
38	-6,000	88	-6,000	138	-6,000
39	-6,000	89	-6,000	139	-6,000
40	-6,000	90	-6,000	140	-6,000
41	-6,000	91	-6,000	141	-6,000
42	-6,000	92	-6,000	142	-6,000
43	-6,000	93	-6,000	143	-6,000
44	-6,000	94	-6,000	144	-6,000
45	-6,000	95	-6,000	145	-6,000
46	-6,000	96	-6,000	146	-6,000
47	-6,000	97	-6,000	147	-6,000
48	-6,000	98	-6,000	148	-6,000
49	-6,000	99	-6,000	149	-6,000

solução analítica $nt = 60.000$					
$x(i)$	$Zb(i)$	$x(i)$	$Zb(i)$	$x(i)$	$Zb(i)$
150	-5,993	201	-4,769	250	-6,000
151	-5,986	202	-4,750	251	-6,000
152	-5,980	203	-4,731	252	-6,000
153	-5,969	204	-4,716	253	-6,000
154	-5,959	204,55	-4,713	254	-6,000
155	-5,947	204,55	-6,000	255	-6,000
156	-5,930	205	-6,000	256	-6,000
157	-5,910	206	-6,000	257	-6,000
158	-5,886	207	-6,000	258	-6,000
159	-5,860	208	-6,000	259	-6,000
160	-5,835	209	-6,000	260	-6,000
161	-5,808	210	-6,000	261	-6,000
162	-5,779	211	-6,000	262	-6,000
163	-5,751	212	-6,000	263	-6,000
164	-5,719	213	-6,000	264	-6,000
165	-5,687	214	-6,000	265	-6,000
166	-5,656	215	-6,000	266	-6,000
167	-5,624	216	-6,000	267	-6,000
168	-5,591	217	-6,000	268	-6,000
169	-5,561	218	-6,000	269	-6,000
170	-5,528	219	-6,000	270	-6,000
171	-5,498	220	-6,000	271	-6,000
172	-5,469	221	-6,000	272	-6,000
173	-5,438	222	-6,000	273	-6,000
174	-5,406	223	-6,000	274	-6,000
175	-5,377	224	-6,000	275	-6,000
176	-5,349	225	-6,000	276	-6,000
177	-5,319	226	-6,000	277	-6,000
178	-5,292	227	-6,000	278	-6,000
179	-5,266	228	-6,000	279	-6,000
180	-5,240	229	-6,000	280	-6,000
181	-5,212	230	-6,000	281	-6,000
182	-5,183	231	-6,000	282	-6,000
183	-5,160	232	-6,000	283	-6,000
184	-5,133	233	-6,000	284	-6,000
185	-5,109	234	-6,000	285	-6,000
186	-5,085	235	-6,000	286	-6,000
187	-5,062	236	-6,000	287	-6,000
188	-5,036	237	-6,000	288	-6,000
189	-5,014	238	-6,000	289	-6,000
190	-4,992	239	-6,000	290	-6,000
191	-4,968	240	-6,000	291	-6,000
192	-4,946	241	-6,000	292	-6,000
193	-4,929	242	-6,000	293	-6,000
194	-4,905	243	-6,000	294	-6,000
195	-4,883	244	-6,000	295	-6,000
196	-4,864	245	-6,000	296	-6,000
197	-4,845	246	-6,000	297	-6,000
198	-4,825	247	-6,000	298	-6,000
199	-4,804	248	-6,000	299	-6,000
200	-4,786	249	-6,000	300	-6,000