

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES  
Programa De Pós-Graduação em Economia

## **Um Estudo Sobre a Dinâmica Econômica e o Progresso Técnico em Modelos de Crescimento**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Economia da UFES para  
obtenção do título de Mestre em Economia.

**Candidato: Dante Loubach de Lima**  
**Orientador: Rogério Arthmar**

Vitória  
Maio de 2011

# Agradecimentos

A Deus, por guiar meus passos.

Aos meus familiares, especialmente meu pai, dando apoio em momentos de dificuldade.

Aos amigos em geral e aos colegas de turma, Danilo, Mateus, Oldair, Victor, Heldo, Érika, Ana Luísa, Daiane e Deise, dividindo momentos de estudos e alegrias durante esta fase.

Ao meu orientador Rogério Arthmar e ao Professor Alain Herscovici, pela paciência, confiança e pelas sugestões, que tornaram este trabalho possível.

Agradecimentos também a Professora Miriam de Magdala Pinto, que com lições profissionais e morais, despertou de alguma forma meu amadurecimento acadêmico.

Aos professores que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A banca examinadora.

A Capes, pelo apoio financeiro.

*Dante Loubach de Lima*

# Resumo

A literatura do crescimento recente vem estudando a evolução da produtividade e do padrão de vida não somente no século XX, mas desde o período que antecedeu a primeira revolução industrial, período este que foi caracterizado por uma estagnação na produção agregada e no padrão de vida da população. Examinando o lado da oferta por meio da função de produção neoclássica, Prescott (2002) foi um dos autores que contribuíram para esta forma de estudar o crescimento considerando todos os períodos. Este trabalho teve como objetivo principal a elaboração de um estudo a partir das contribuições teóricas de Prescott, Malthus e Solow, no sentido de uma transição de teorias. Além disso, este trabalho procurou discutir as principais fases vividas na economia, com foco sobre o crescimento da produtividade e nas mudanças no ambiente econômico sofridas por uma introdução de novas tecnologias.

**Palavras-Chave:** crescimento econômico, progresso tecnológico, produtividade.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>1 A Transição de uma Economia Estagnante para uma Economia Industrial Moderna</b>	<b>12</b>
1.1 Introdução . . . . .	12
1.2 A Teoria de Malthus . . . . .	15
1.3 A Teoria do Crescimento de Solow . . . . .	19
1.3.1 O Conceito de Capital no Modelo de Crescimento de Solow . . . . .	19
1.3.2 O Modelo de Crescimento . . . . .	24
1.4 A Transição Entre as Duas Teorias: O Modelo de Hansen e Prescott . . . . .	28
1.4.1 O Período 1250 a 1800 . . . . .	28
1.4.2 O Período 1800 a 1989 . . . . .	29
1.4.3 O Modelo Econômico da Transição . . . . .	30
1.5 Considerações ao Capítulo . . . . .	42
<b>2 Progresso Técnico e Crescimento: O Período Pós Revolução Industrial</b>	<b>44</b>
2.1 Introdução . . . . .	44
2.2 Da Tecnologia exógena para a Tecnologia endógena: A Análise de Freeman . . . . .	45
2.2.1 Fases do Elo entre Tecnologia e Crescimento . . . . .	45
2.2.2 A Endogeneização da Mudança Técnica . . . . .	46
2.3 Produtividade, P&D e o uso das Tecnologias de Informação: O modelo caótico de Baumol e a análise proposta por Herscovici . . . . .	49
2.3.1 A Análise de Baumol e Wolff . . . . .	54
2.3.2 A análise de Herscovici e a sugestão de um novo modelo . . . . .	64
2.4 Considerações ao Capítulo . . . . .	71
<b>Conclusão</b>	<b>74</b>

Referências Bibliográficas	81
A Demonstrações	85

# Lista de Figuras

1	Ondas Longas de Mudança Tecnológica . . . . .	10
1.1	Gráfico da função convexa $R = c(\lambda) = c_0\lambda^{-\gamma}$ . . . . .	23
1.2	Diagrama de Solow . . . . .	27
1.3	População e Salário real na fazenda de 1275 a 1800 na Inglaterra	29
1.4	População e Aluguel Real da Terra de 1275 a 1800 na Inglaterra	30
1.5	Níveis de Produtividade e População no Reino Unido de 1700 a 1989 . . . . .	31
1.6	Valor da Terra relativo ao PNB nos EUA de 1870 a 1990 . . . . .	31
1.7	Valor dos Parâmetros para o Exercício Quantitativo . . . . .	39
1.8	Função de Crescimento Populacional . . . . .	40
1.9	Fração dos Insumos Empregados no Setor de Malthus . . . . .	40
1.10	Salário e População . . . . .	41
1.11	Valor da Terra relativo à Produção . . . . .	41
2.1	Preço de novos equipamentos de 1950 a 1990 nos EUA . . . . .	50
2.2	Investimentos em TI e Evolução da Produtividade do Trabalho nos EUA . . . . .	51
2.3	Taxas de crescimento do produto, insumos e da produtividade total dos fatores para o intervalo 1870 a 1999 nos EUA . . . . .	53
2.4	Diagrama de Fase da função recursiva $y_t$ com $y_0 = y(0) = 0.4$ e $w = 0.7$ . . . . .	61
2.5	Diagrama de Fase da função recursiva $y_t$ com $y_0 = y(0) = 0.75$ e $w = 3.4$ . . . . .	62
2.6	Contribuição dos diferentes setores ao crescimento da produ- tividade (em %, por ano, para a economia americana) . . . . .	64
2.7	Externalidades geradas pelo progresso técnico para os países da União Européia e para os EUA . . . . .	65
2.8	Crescimento econômico e o crescimento da produtividade do trabalho para os Estados Unidos, em % por ano . . . . .	66

# Introdução

A literatura do crescimento econômico ganhou fortes contribuições no século XX a partir da modelagem macrodinâmica. Entender os fatores que impulsionam o crescimento de uma economia é importante pois a partir deste podemos medir o padrão de vida dos indivíduos de um país e também explicar o motivo da diferença entre as diferentes taxas de crescimento do PIB per capita dos países.

Os economistas modelam a economia de acordo com as estruturas de mercado e as respectivas tecnologias existentes de cada época. No entanto, a economia sofre grandes transformações quando se introduz uma nova tecnologia no mercado, alterando a estrutura deste a partir das novas formas de produção e organização industrial. Assim, com o funcionamento de uma nova economia, alguns modelos e teorias antigos perdem seu valor explicativo. "[...] As teorias não são elaboradas no vazio, referindo-se em maior ou menor grau a uma realidade empírica, representada pelo tipo de indústria, tecnologia e ambiente de negócios que caracteriza cada época". (TIGRE, 2006, p. 1)

Como os modelos e teorias são construídos de acordo com o funcionamento da economia de cada época e dado o fato de que a economia passa por grandes transformações como indica a história, é preciso unificar as teorias existentes para estudarmos a economia durante toda a história e desenvolver a trajetória do padrão de vida dos indivíduos. Com contribuições recentes de Jones (1999), Galor e Weil (2000) e Hansen e Prescott (2002), a literatura do crescimento engloba as diferentes fases da economia e a trajetória do desenvolvimento é traçada desde antes da revolução industrial.

A revolução industrial constitui um divisor de águas na história econômica, dados seus impactos sobre o crescimento da produtividade. Desde o século XVIII é possível observar grandes mudanças e sucessivas ondas de inovações obtidas por meio da introdução de máquinas e equipamentos e de novas formas de organização da produção (Tigre, 2006).

Até meados do século XVIII, a agricultura era a principal atividade econômica mundial. As mercadorias eram feitas de forma artesanal e não existia linhas e organização de produção. Sem a utilização de máquinas e processos organizacionais voltados para a melhoria da produtividade, o aumento da produção dependia de um aumento proporcional dos fatores de produção utilizados. Para dobrar a produção, dobrava-se o número de trabalhadores, a quantidade de insumos e a área das oficinas, replicando as formas de produção existentes (Tigre, 2006).

A mudança entre diferentes economias derivadas de grandes revoluções e inovações tecnológicas não acontece instantaneamente. Hansen e Prescott (2002), ao calibrar um exercício quantitativo da modelagem estabelecida, observam que a transição da teoria malthusiana (que descreve o período pré industrial) para a teoria de Solow (pós revolução industrial) acontece de forma lenta. Este fato pode ser explicado por um conjunto de fatores de ordem técnica, institucional, social e econômico. O tempo da transição depende da forma como acontece a difusão da nova tecnologia. A mudança técnica não é um processo automático, pois representa a substituição de métodos já estabelecidos, causando prejuízos ao capital investido. É necessário haver uma combinação de fatores que incitem essa mudança e a possibilitem (Tigre, 2006).

Os novos métodos de produção tem de ser compensatórios para cobrir os custos que possam surgir da mudança. Além disso, há uma certa resistência dos trabalhadores à mecanização. É preciso existir uma forte combinação de incentivos para levar os empresários a aceitarem esta mudança.

A característica e a natureza das inovações ocorridas desde a revolução industrial diferem quanto ao tipo de contribuição para os diferentes setores da economia. Em particular, as inovações e mudanças ocorridas nas etapas iniciais da revolução industrial eram de natureza essencialmente prática, desenvolvidas por mecânicos, ferreiros e carpinteiros engenhosos praticamente sem formação científica. A ciência não constituía uma resposta ao objetivo de aumentar a produção de bens, de forma a atender as necessidades humanas. O uso comercial da ciência só ocorreu efetivamente no século XIX, quando surgiram laboratórios de pesquisa empresariais direcionados a aplicar métodos e conhecimentos científicos ao desenvolvimento de novos produtos e processos (Tigre, 2006).

A tecnologia da manufatura de algodão exigiam pouco conhecimento científico ou qualificação técnica além do que dispunha um mecânico prático do começo do século XVIII. Os primórdios da revolução industrial foram



primitivos quanto a inovações tecnológicas. As inovações foram simples de modo geral porque a aplicação de idéias e dispositivos simples era capaz de produzir resultados espetaculares. A novidade não estava nas inovações, e sim na presteza com que homens práticos se dispunham a utilizar a ciência e a tecnologia disponíveis e a seu alcance. Não estava no gênio inventivo individual e sim na situação prática que fazia voltar o pensamento humano para problemas solúveis (Hobsbawm, 1979).

Deste modo, vemos que nas fases iniciais, a revolução industrial teve um impacto mais quantitativo que qualitativo. Mas após a sua consolidação dando origem à segunda revolução industrial, podemos considerar o lado qualitativo. "[...] A revolução industrial não foi uma mera aceleração do crescimento econômico, mas uma aceleração de crescimento em virtude da transformação econômica e social." (HOBSBAWM, 1979, p. 33)

Com o desenvolvimento da revolução industrial, a economia começou a experimentar grandes saltos de produtividade, reduzindo o número de horas de operação necessárias para a produção de um modo geral. A força humana e a tração animal foram substituídas pela máquina a vapor. Malthus (1798), não pôde prever este significativo aumento da produção, elaborando uma teoria onde o crescimento populacional influencia significativamente no padrão de vida dos indivíduos dada uma economia com recursos produtivos limitados. Sua teoria perdeu valor explicativo após a difusão de novas tecnologias de produção.

A partir da revolução industrial, o desenvolvimento tecnológico passou a servir ao processo de acumulação de capital e apresentou uma substituição de trabalho e terra como fatores de produção por máquinas. A introdução da automação através de máquinas e equipamentos aumentou a produtividade e reduziu a dependência do trabalho artesanal. A tecnologia proporcionou vantagens de custos através de novos processos produtivos, economizando recursos escassos e desenvolvendo o uso de novas fontes de materiais e energia.

A máquina rompe uma barreira orgânica que a ferramenta manual de um trabalhador não podia ultrapassar, permitindo um aumento exponencial da produtividade do trabalho. Assim se obtém uma quantidade maior de mercadorias com o mesmo desgaste (ou custo) da força de trabalho. Quanto mais cresce a produtividade do trabalho, tanto mais pode reduzir-se a jornada de trabalho e, quanto mais se reduz a jornada, tanto mais pode aumentar a intensidade do trabalho. (MARX, 1867, p. 606)

No século XX, após a transição de uma economia com baixas produtividades e intensiva na agricultura para uma economia com altas taxas de crescimento e intensiva em capital ter sido efetivamente completada, surgiram novas teorias e modelos econômicos com finalidade de mostrar o funcionamento da economia vigente. Economistas como Solow (1957), Kaldor (1956), Lucas (1988) e Romer (1990) deram fortes contribuições para a literatura do crescimento desta época.

Mas no século XX também houve uma grande mudança tecnológica. A economia intensiva em capital e focada principalmente no setor industrial deu lugar a revolução tecnológica introduzida a partir das Tecnologias de Informação e Comunicação. A partir de então, o setor de serviços da economia vem ganhando pesos consideráveis na produção agregada. Em consequência disto, observa-se taxas de crescimento da produtividade menores nas economias. Acontece o surgimento de uma nova economia com capitais intangíveis cujos bens são diferenciados pela quantidade de informação e conhecimento neles contidos.

Essa revolução caracteriza uma trajetória de inovações associada à aplicação da microeletrônica e à busca de novos materiais. Desde o final dos anos 60, o mundo iniciou um processo de transição rumo a esta economia mais intensiva em informação e conhecimento. Esta onda de inovações foi potencializada pela introdução do circuito integrado nos anos 70 e pela internet nos anos 90. As tecnologias da informação e comunicação (TIC) são uma combinação de várias tecnologias que desenvolveram modelos de gestão mais intensivos em informação e conhecimento (Tigre, 2006).

Quanto ao conteúdo informacional dos produtos e serviços introduzidos por essa nova economia, Tigre (2006) relata:

O conteúdo informacional vem crescendo não apenas em serviços como software e comunicações, mas também em produtos físicos. Os ciclos de vida dos produtos têm se encurtado, aumentando os custos relativos das atividades de P&D em função do menor prazo de permanência do produto no mercado. Um chip, por exemplo, tem menos de 5% de seu preço formado por custos diretos de fabricação, sendo o resto atribuído principalmente a despesas de marketing e P&D [...] (TIGRE, 2006, p. 56)

As redes virtuais ampliam os limites econômicos das indústrias impostos pela sua localização e fronteiras geográficas. A internet permite a aceleração dos fluxos comerciais e financeiros ao permitir a comunicação em tempo real

entre os agentes econômicos melhorando a logística produtiva. Em suma, as redes geram externalidades positivas para as firmas reduzindo o tempo necessário para completar um processo produtivo e diminuindo custos fixos.

Para estabelecer uma periodicidade definida das longas ondas de inovações que introduzem diferentes estruturas de mercado e incitam o surgimento de novas indústrias desde a revolução industrial, Freeman (1997) apresentou seis ciclos longos associados à diferentes inovações e seus impactos sobre a economia e as características da infra-estrutura dominante em cada paradigma. Ele acrescentou um terceiro ciclo, associado ao fordismo, e um quarto, associado à difusão da microeletrônica. Ele propõe que um sexto ciclo deverá ocorrer no futuro, com base na biotecnologia associada ao meio ambiente e à saúde (Tigre, 2006).

Ondas	Características da infra-estrutura dominante		
	C&T e educação	Transporte e Com.	Energia
1. Primeira revolução industrial (1780-1830)	Aprender-fazendo, sociedades científicas	Canais, estradas de carroças	Roda d'água (moinhos)
2. Segunda revolução Industrial (1830-1880)	Engenheiros mecânicos e civis	Estrada de ferro, telégrafo	Energia a vapor
3. Idade da eletricidade (1880-1930)	P&D industrial, química e eletricidade, laboratórios nacionais	Ferrovias (aço) e telefone	Eletricidade
4. Idade da produção em massa- fordismo - (1930-1980)	P&D industrial (empresas e governo) em larga escala. Educação em massa	Rodovias e rádio	Petróleo
5. Idade da microeletrônica (1980 a ?)	Rede de dados, redes globais de P&D; treinamento contínuo	Redes convergentes de telecomunicações em multimídia	Petróleo e gás
6. Tecnologias ambientais, saúde	Biotecnologia, genética, nanotecnologia	Telemática, teletrabalho	Energia Renovável

Fonte: Freeman (1997).

Figura 1: Ondas Longas de Mudança Tecnológica

A figura 1 mostra que cada paradigma requer diferentes infra-estruturas física e social para se difundir. O quinto ciclo deverá se esgotar à medida que a microeletrônica atingir patamares elevados de difusão e as oportunidades de crescimento e de investimentos começarem a declinar. Tal processo abrirá

maior espaço para o predomínio dos investimentos nas ciências da vida como motor do desenvolvimento (Tigre, 2006).

Este trabalho teve como objetivo principal a elaboração de um estudo do crescimento econômico observando: (i) a evolução do padrão de vida das economias mundiais e da produtividade total dos fatores; (ii) a mudança no uso dos insumos de produção na medida que novas tecnologias e métodos de produção são introduzidos (em especial, a revolução industrial e a revolução tecnológica iniciada com a utilização das TIC); (iii) e também visualizar ao longo da história a interação entre os diferentes tipos de tecnologias introduzidas na economia e seus impactos sobre esta, através de algumas contribuições teóricas e modelos econômicos.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1, será discutida: (i) as características das economias pré-industrial e pós-industrial divididas pela introdução da revolução industrial; (ii) a transição entre estas economias através da modelagem estabelecida por Hansen e Prescott (2002) e um exercício quantitativo fornecendo valores aos parâmetros do modelo e (iii) a contribuição de Nissan (1966) para o conceito de capital como uma medida agregada no modelo de Solow (1957). No capítulo 2, será mostrada (i) a contribuição teórica de Freeman (1997) mostrando a evolução das relações entre tecnologia e crescimento e a endogeneização do progresso técnico em modelos de crescimento endógenos; (ii) o modelo caótico de Baumol (1992) procurando analisar as interações entre a produção e disseminação de informação e a taxa de crescimento da produtividade; (iii) e a contribuição de Herscovici (2010) mostrando as limitações do modelo baumoliano e a proposta de uma nova modelagem, considerando os principais aspectos e estrutura da nova economia introduzida pela utilização das TIC.

# Capítulo 1

## A Transição de uma Economia Estagnante para uma Economia Industrial Moderna

### 1.1 Introdução

Os modelos de crescimento econômico desenvolvidos no século XX, em especial os modelos Solow (1956), Kaldor (1956) e os modelos de crescimento endógeno de Lucas (1988) e Romer (1990), foram formalizados numa tentativa de explicar a evolução da taxa de crescimento do PIB per capita dos países após a segunda guerra mundial. No entanto, estes modelos não são compatíveis com uma era onde o padrão de vida foi praticamente constante no longo prazo.

A economia antes de 1800, data em que a revolução industrial começara a surgir, foi caracterizada por uma economia estagnante, onde o padrão de vida da população permaneceu constante por muito tempo. Tanto a renda per capita salarial, quanto a produção e o consumo não cresciam (Hansen e Prescott, 2002).

As economias industriais modernas, por outro lado, experimentam um crescimento significativo na renda per capita e no padrão de vida. O período pós revolução industrial, foi marcado por um aumento na produção de bens. Nesta era, o processo de produção é intensivo em capital, enquanto que na era pré revolução industrial, a produção é intensiva em terra. Nota-se, deste modo, que a revolução industrial foi o acontecimento chave para esta mudança. Desta maneira, podemos pensar no período com economia estagnante como o período pré revolução industrial e o período com crescimento como

o período pós revolução industrial.

Hansen e Prescott (2002, p.1205, tradução nossa) consideram que:

Em particular, a transição da estagnação para o crescimento dos padrões de vida ocorre quando as firmas maximizadoras de lucros, em resposta ao progresso tecnológico, começam empregando um processo produtivo menos intensivo em terra, a qual, embora disponível em toda a história, não foi previamente lucrativa para operar. Além disso, a transição parece ser consistente com os fatos do desenvolvimento durante e após a revolução industrial.

Neste capítulo, faremos uma análise da transição da era estagnante para a era do crescimento, utilizando o modelo desenvolvido por Hansen e Prescott (2002). Este modelo caracteriza o período pré industrial como uma economia que utiliza uma tecnologia intensiva em terra, onde a terra é um fator fixo e há retornos marginais decrescentes do insumo trabalho. A economia pós industrial, por outro lado, é caracterizada por uma tecnologia intensiva em capital e com retornos constantes de escala com trabalho e capital como insumos. O trabalho de Hansen e Prescott (2002) unifica as teorias de Malthus e Solow para estudar a evolução do padrão de vida em todos os períodos. É utilizado o modelo de geração superpostas de Diamond (1965). Nesta modelagem, temos uma firma que opera em dois setores: o setor Malthus e o setor Solow. Uma função de produção é definida para cada setor, ambos processos produzem o mesmo bem, e o fator de produtividade cresce exogenamente. O setor de Malthus tem uma função de produção que depende dos fatores capital, trabalho e terra. Já o setor de Solow possui uma função que depende somente dos fatores capital e trabalho. Assim, a tecnologia intensiva em terra está ligada ao setor de Malthus e a tecnologia intensiva em capital está ligada ao setor de Solow.

Somente a tecnologia Malthus é usada nas fases iniciais do desenvolvimento da trajetória de crescimento equilibrado, quando o estoque de conhecimento utilizado é pequeno. Se operássemos com o setor de Solow nesta fase de desenvolvimento, necessariamente adquiríamos lucros negativos, dado o preço do fator dominante (neste caso, o capital teria preço alto comparado à outros fatores de produção). De fato, a ausência de um crescimento sustentado nos padrões de vida na era da tecnologia Malthus, pode ser explicada pela existência de uma hipótese do modelo de que a taxa de crescimento populacional está aumentando no consumo per capita quando os padrões de vida estão baixos.

Eventualmente, em algum ponto da trajetória de crescimento, será lucrativo operar com o setor de Solow, uma vez que o estoque de conhecimento utilizado aumenta e, por conseguinte, a produtividade total dos fatores também. Como o setor de Solow não utiliza um fator fixo (terra) como insumo de produção, o crescimento populacional não influencia com tanta intensidade na taxa de crescimento da renda per capita e o padrão de vida começa a melhorar. Após a transição ter sido efetivamente completada, a economia comporta-se como um padrão do modelo de crescimento de Solow, que descreve muitas características das economias industriais modernas (Hansen e Prescott, 2002).

Podemos considerar este ponto do modelo como uma bifurcação. Em sistemas dinâmicos, o termo bifurcação refere-se a uma mudança qualitativa no retrato de fases de um sistema dinâmico, conforme algum parâmetro do sistema passa por um valor crítico.

Os sistemas dinâmicos são descritos por modelos matemáticos que são funções de um conjunto de parâmetros, denominados parâmetros de controle  $\mu$ . Alguns parâmetros, em determinadas situações, podem sofrer uma alteração e uma pequena e repentina mudança no comportamento do sistema em função desta variação é de extrema importância. As bifurcações são mudanças qualitativas na resposta de um sistema dinâmico devidas à variações dos parâmetros de controle. (PEREIRA, p. 16)

Para entender melhor o conceito de bifurcação, considere o exemplo de uma equação diferencial do tipo  $\frac{dx}{dt} = f_m(x) = \mu x - x^2$ . Os pontos de equilíbrio desta equação são  $x_1 = 0$  e  $x_2 = \mu$  (raízes da equação). Temos que  $\frac{df}{dx} = \mu - 2x$ . Para  $x_1 = 0$ , temos  $\frac{df}{dx} = \mu$ . Portanto, para  $\mu < 0$ , a origem é um ponto assintoticamente estável e para  $\mu > 0$ , instável. Para  $x_2 = \mu$ , temos  $\frac{df}{dx} = -\mu$ . Logo, o ponto  $x_2$  tem estabilidade contrária à da origem.

Os autores interpretam o declínio do uso da terra na produção ocorrendo quando o insumo terra foi aos poucos sendo substituído pelo insumo capital, produzido no setor industrial. A terra foi importante na produção de energia utilizável, insumo intermediário crucial na produção do bem final. Exemplo disto são as ferrovias e as máquinas agrícolas, que são substitutos dos cavalos, que exigiam terra para pastagem. As máquinas podem ser executadas à base de combustíveis fósseis, que requerem menos terra para a sua produção do que os grãos para os cavalos.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na próxima seção, apresentaremos a teoria malthusiana, que descreve bem o comportamento da economia pré revolução industrial. Na seção 1.3, apresentamos o modelo de Solow para explicar o crescimento econômico pós revolução industrial. É importante ressaltar que neste modelo de crescimento, a tecnologia ainda é tratada exogenamente. Além disso, discutiremos sobre o conceito de capital neste modelo a partir da análise feita por Nissan (1966). A transição entre as duas economias será discutida na seção 1.4. O modelo utilizado para descrever esta transição foi o do trabalho de Hansen e Prescott (2002). Após a construção de toda a modelagem, os autores fornecem valores aos parâmetros do modelo afim de elaborar um exercício quantitativo, que também será analisado. As considerações finais ao capítulo serão apresentadas na seção 1.5.

## 1.2 A Teoria de Malthus

A era malthusiana no modelo que estudaremos adiante foi marcada por um período com ausência de crescimento sustentado. A economia nesta época era estagnante, com baixas taxas de crescimento. Isso porque a produção agregada neste período foi praticamente constante e muito baixa se comparada a produção agregada das economias industriais modernas. A ausência de tecnologia, de máquinas, fábricas e outras instalações e conseqüentemente a dependência de uma produção agrícola geravam baixas produtividades. A produção de bens era relativamente intensiva em terra. Empregava-se certo número de trabalhadores agrícolas na fazenda afim de obter a produção final.

Com um processo produtivo intensivo em terra temos como conseqüência padrões de vidas baixos e constantes pelo seguinte motivo: a terra é uma oferta fixa para a firma, e como a produção depende de forma intensiva deste fator, a produção final não experimentará aumentos significativos. Desta forma, para aumentar a produção, a firma (ou as fazendas agrícolas) deverá empregar mais trabalhadores (uma vez que a revolução industrial ainda não tinha acontecido e, desta maneira, não há variedades de bens de capital). Então, a produção final só aumentará de forma significativa se houver também um aumento significativo na força de trabalho e assim, o produto por trabalhador ou o produto per capita da economia permanecerá constante<sup>1</sup>. Além disto, como os indivíduos desta economia alugam suas terras e utilizam suas rendas salariais para financiar seus respectivos consumos, e uma

---

<sup>1</sup>Hipótese do pleno emprego da força de trabalho



vez que os aluguéis da terra e os salários cresceram na mesma proporção da população nesta era, temos rendas per capita salariais constantes e consumo per capita também constante.

Dadas estas condições, Malthus (1798) em seu Ensaio Sobre o Princípio da População, previa que o crescimento populacional superasse a produção de alimentos e subsídios, gerando fomes, guerras e baixos padrões de vida. Especificamente, considerava que a população, quando não controlada, cresce em uma progressão geométrica, e os meios de subsistência para o homem crescem em progressão aritmética.

Ele também argumentou que quando a sociedade em geral possui um alto padrão de vida, onde não há restrição de consumos para os indivíduos e nenhuma restrição sobre os fornecimentos de subsídios para as famílias, a população cresceria à taxas elevadas sem controle sobre si mesma. Isto pode ser comprovado na citação abaixo:

Em um estado, portanto, de grandes igualdades e virtudes, onde puras e simples maneiras prevalecem, e onde os meios de subsistência eram tão abundantes que nenhuma parte da sociedade poderia ter qualquer receio sobre fornecimentos amplos para uma família, o poder da população seria deixado a exercer-se sem controle, o aumento da espécie humana deveria evidentemente ser muito maior que qualquer aumento que tem sido até agora conhecido. (MALTHUS, 1798, p. 14, tradução nossa)

Em consequência de um crescimento populacional maior que os meios de subsistência para o homem, os pobres seriam reduzidos a uma miséria grave e viveriam um padrão de vida inferior comparado ao do período anterior. A partir de então, o número de trabalhadores também estaria acima da proporção de trabalho no mercado, acarretando uma diminuição salarial dos trabalhadores, enquanto o preço dos mantimentos ao mesmo tempo tenderiam a subir. Por conseguinte, o trabalhador deverá trabalhar mais para adquirir o mesmo que ele adquiria antes. Durante este período de dificuldade e miséria, o desânimo para o casamento e a dificuldade de criar uma família são tão grandes que a população se encontra estável. Nesse meio tempo, o barateamento do trabalho, a abundância de trabalhadores, e a necessidade de um aumento industrial entre eles, incentiva os agricultores e fazendeiros a empregarem mais trabalhadores em suas terras, para transformar o solo fresco, o adubo e melhorar de forma mais completa o que já está na agricultura, até que os meios de subsistência se encontram novamente na mesma

proporção que a população. A situação do trabalhador será de novo razoavelmente confortável, as restrições da população estarão soltas em certo grau, e o mesmo movimento retrógrado e progressivo será repetido (Malthus, 1798).

A análise de Malthus foi mais específica quando ele considerou que os ricos (capitalistas e fazendeiros) possuíam melhor organização do que as classes mais baixas da sociedade, no sentido de determinarem o salário real dos trabalhadores agrícolas:

É muito raro acontecer que o preço nominal do trabalho (salário nominal) universalmente sofra uma queda, mas nós sabemos bem que frequentemente permanece o mesmo, enquanto o preço nominal dos mantimentos tem aumentado gradualmente. Isto é, em efeito, uma queda no salário real, e durante este período, as condições das classes baixas da comunidade devem gradualmente piorar ainda mais. Mas os fazendeiros e capitalistas estão aumentando sua riqueza a partir do barateamento do salário real dos trabalhadores. Seus aumentos em capitais permitem eles a empregarem um grande número de homens. Trabalho, portanto, pode ser abundante, e o salário dos trabalhadores aumentariam conseqüentemente. Mas a falta de liberdade no mercado de trabalho, que ocorre mais ou menos em todas as comunidades, a partir de algumas leis, ou a causa mais geral da facilidade de combinação entre os ricos e de dificuldade entre os pobres, funcionam para evitar que o salário dos trabalhadores aumentem no período natural, e continua baixo por mais alguns períodos; talvez até um ano de escassez, quando o clamor é muito alto... (MALTHUS, 1798, p.18-19, tradução nossa)

Dessa maneira, é importante fixar em mente a oscilação do crescimento populacional e a miséria que é gerada quando a população é bem maior em relação aos meios de subsistência para o homem. Essa miséria e período de sofrimento para a população funcionam como freios do crescimento populacional, até que a produção de mantimentos e subsídios se encontre na mesma proporção de antes.

As proposições que Malthus considerava relevante para a construção dessa realidade são as seguintes:

**Proposição 1** *A população não pode aumentar sem os meios de subsistência.*

**Proposição 2** *A população cresce invariavelmente onde há meios de subsistência.*

**Proposição 3** *O poder superior de crescimento populacional não pode ser controlado sem produção de misérias e sofrimentos.*

Estas proposições são muito óbvias e sequer precisavam de ilustração, conforme Malthus:

Que a população não pode aumentar sem os meios de subsistência é uma proposição tão evidente que não necessita de ilustração.

Que a população aumenta invariavelmente onde há meios de subsistência, a história de todos os povos que já existiram provarão abundantemente.

E que o poder superior do crescimento populacional não pode ser controlado sem produção de misérias e vícios, a ampla porção de muitos destes ingredientes amargos no copo da vida humana e a continuação de causas físicas que parecem tê-las produzido suportam um testemunho muito convincente. (MALTHUS, 1798, p.19, tradução nossa)

No entanto, Malthus ignorou o avanço tecnológico que ainda não tinha sido vivenciado naquela época, o que teria permitido que a curva de crescimento da população se mantivesse à frente da curva de alimentos. Isto porque a produção de alimentos pode crescer na mesma taxa que a população, porque depende não somente do fator terra, mas também da acumulação de conhecimento, que contribui para o aumento da produtividade.

Com os avanços na produção de sementes, nutrientes do solo, reposição de nutrientes (como fertilizantes químicos), irrigação, mecanização e outros, os suprimentos de alimentos podem permanecer bem a frente da curva de crescimento da população. Em outras palavras, os avanços tecnológicos em todos seus aspectos (agricultura, energia, uso da água, manufatura, controle de doenças, gerenciamento de informação, transporte, comunicações) permitem que a produção de subsídios e alimentos cresça mais rápido que a população. (JEFFREY SACHS, 2008, p. 1)

A revolução industrial, que intensificou um grande avanço tecnológico para a humanidade, permitiu que a produção aumentasse em larga escala, aumentando a produtividade do trabalho. A partir da revolução industrial, as teorias de Malthus não são consistentes com a realidade e surge a necessidade de uma nova teoria para a descrição do ambiente econômico: a teoria do crescimento econômico que se intensificou no século XX. Algumas destas

teorias do crescimento, consideram o efeito que o progresso tecnológico possui no crescimento de longo prazo de uma economia, embora em diferentes abordagens.

## **1.3 A Teoria do Crescimento de Solow**

Antes da introdução do modelo de crescimento desenvolvido por Solow, é importante fixar alguns conceitos sobre as variáveis do modelo. Este é o propósito da seção seguinte. É feita uma análise mais precisa do conceito de um dos fatores de produção: o capital. Este conceito foi estudado por Nissan (1966) e será vista aqui sua análise detalhada do capital utilizado por Solow em seu modelo de crescimento.

### **1.3.1 O Conceito de Capital no Modelo de Crescimento de Solow**

Sob certas condições é possível definir uma agregação significativa de bens de capital heterogêneos para o propósito de uma análise de longo prazo de produção e distribuição, embora tal agregação não possa ser significativamente definida para o curto prazo. (LIVIATAN, 1966, p.2, tradução nossa)

A teoria do capital é famosa pelas controvérsias com as quais está associada. Ela tornou-se relevante quando estavam em discussão o problema da escolha de técnicas e da explicação das participações de distribuição e das mudanças na produtividade através do tempo, tanto teórica quanto empiricamente. Os primeiros lances do debate estavam ligados a um velho problema: a busca de uma unidade com a qual medir o capital social (agregado). A unidade desejada tinha que ser independente da distribuição e dos preços relativos, de modo que pudesse ser usada para a explicação das participações na produção e na distribuição e do conjunto de preços dentro do contexto da ficção teórica neoclássica de um estado estacionário (Harcourt, 1969).

Do ponto de vista macroeconômico, uma das principais dificuldades encontradas para medir os impactos do progresso técnico no funcionamento do sistema econômico foi agregar as variáveis e aplicá-las na função de produção. O problema reside principalmente na agregação dos bens de capital, dada a heterogeneidade dos equipamentos e as diferenças entre indústrias. Solow

(1963) reconhece que a função de produção apenas integra uma grande variedade de situações microeconômicas diferentes, agregando os bens de capital por seus preços correspondentes (Tigre, 2006).

Vale lembrar que a função de produção, representando as diferentes tecnologias de produção que são diferentes combinações de insumos, apresenta apenas as mudanças tecnológicas de processo. Inovações em produto são consideradas como exploração de novos mercados, já que o conceito de mercado é restrito a bens perfeitamente homogêneos (Tigre, 2006).

Nissan (1966) desenvolve uma análise sobre o capital com o objetivo de responder a pergunta: Existe uma medida econômica significativa do capital global utilizado no modelo de Solow para análises de curto e longo prazo? O próprio autor do modelo, Solow, responde à este problema. "[...] Claramente, não existe tal medida como um estoque de capital, que podemos comparar entre os estados estacionários." (SOLOW, 1963, p.629, tradução nossa)

As medidas do capital agregado utilizado por Solow em seus cálculos são considerados por ele apenas artifícios estatísticos que são tratados como se eles representassem o capital em certo sentido válido, quando na verdade eles não são. Consequentemente, as funções de produção correspondentes, são consideradas como falsas função de produção (Nissan, 1966).

O objetivo da análise de Nissan (1966) foi de demonstrar, a partir de uma modelagem, que no longo prazo, existe de fato uma medida ideal do capital como insumo na função de produção agregada. Ao desenvolver seu trabalho, mostrou que na análise do modelo de Solow, o capital pode ser considerado como uma única mercadoria no mesmo sentido de que um grupo de mercadorias com fixos preços relativos pode ser considerado como uma única mercadoria no teorema de composição de bens de Hicks.

## A Descrição do Modelo

Neste modelo, todas as máquinas possuem vida fixa  $N$ , podem ser operadas independentemente e são produzidas somente por trabalho; as unidades de trabalho necessárias para produzir uma máquina com uma capacidade de uma unidade de bens de consumo será:  $c(\lambda) = c_0\lambda^{-\gamma}$ , onde  $\lambda$  é a quantidade de unidades de trabalho operando a máquina e  $\gamma > 0$  (Note que as máquinas com menores exigência de trabalho custam mais para produzir).

O insumo trabalho será denotado por  $L$ , o número de máquinas do tipo  $\lambda = \lambda_i$  (que exigem  $\lambda$  trabalhadores para sua operação) por  $x_i$ , com

$i = 1, \dots, n$  e  $Q = F(L, x_1, \dots, x_n)$  representará a função de produção completa que especifica a máxima produção de bens de consumo atingível por  $L$  e qualquer conjunto de máquinas dentro de um determinado período. Defina-se os preços dos bens de capital individuais como o custo por período do uso destes. Estes preços são denotados por  $p_1, \dots, p_n$ , a taxa de salário por  $w$ , e o custo total de produção por  $\alpha$ , onde  $w, p_1, \dots, p_n$  e  $\alpha$  são todos expressos em termos de bens de consumo por período. Em seguida, suponha a maximização de  $F(L, x_1, \dots, x_n)$  sujeita a restrição de custo  $wL + \sum_1^n p_i x_i = \alpha$ , onde  $w, p_1, \dots, p_n$  e  $\alpha$  representam qualquer conjunto admissível de parâmetros. Então o valor do resultado ótimo será denotado por  $\bar{F}, \bar{L}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ .

Coma a finalidade de demonstrar a argumentação de que existe realmente uma medida do capital global que tem as propriedades de um insumo usual na análise de longo prazo, desenvolve-se uma modelo para concluir que as seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) Capital global, sendo denotado por  $R$ , é uma função  $V(x_1, \dots, x_n)$ , de quantidade de bens de capital individuais. Da mesma forma, o preço de  $R$ ,  $p$ , é uma função dos preços  $p_1, \dots, p_n$  dos componentes individuais.

(b) Existe uma função  $f(L, R)$  que pode ser maximizada sujeita a  $wL + pR = \alpha$  e para os quais resultam em valores ótimos, a saber:  $f^*, L^*, R^*$ , satisfazendo  $f^* = \bar{F}$ ,  $L^* = \bar{L}$  e  $pR^* = \sum_1^n p_i x_i$ . Isto é válido para qualquer conjunto de parâmetros  $w, p_1, \dots, p_n$  e  $\alpha$ .

A condição (b) nos diz que a solução para o problema de maximização deve permanecer invariável sob uma substituição de  $f$  por  $F$  na medida em que os valores ótimos de  $Q, L$  e os gastos sobre o grupo  $x_1, \dots, x_n$  são considerados. É neste sentido que  $f$  pode servir como uma função de produção usual e  $R$  como um insumo usual. Além disso, sob as hipóteses do modelo de Solow,  $f$  determinará corretamente a distribuição da renda entre capital e trabalho. Esta capacidade de determinar corretamente as frações dos fatores de produção distingue  $f$  de uma falsa função de produção.

Para demonstração da condição (a), defina  $R$  como o trabalho requerido da produção de um conjunto  $x_1, \dots, x_n$ , que é dado no modelo de Solow por  $R = \sum_1^n c(\lambda_i) x_i = V(x_1, \dots, x_n)$ . Agora, maximize  $F(L, x_1, \dots, x_n)$  sujeito a  $L = \text{constante}$  e  $V(x_1, \dots, x_n) = \text{constante}$ . O valor de maximização da produção, dependerá então, somente de  $L$  e  $R$ . Denote esta dependência pela função  $g(L, R)$ .

Agora, com relação aos custos e à definição do preço de  $R$ , considere o

setor de bens de consumo como uma grande firma comprando bens de capital do setor de construção de máquinas. O custo de reprodução de uma máquina do tipo  $\lambda$  em termos de bens de consumo é  $s(\lambda) = wc(\lambda)$ . O custo por período do uso vitalício de uma máquina com  $s = 1$ , utilizando o conceito de soma de uma série geométrica finita e juros compostos, será  $\varsigma[1 - (1 + \varsigma)^{-N}]^{-1}$ , que pode ser considerada como uma função  $\psi(\varsigma)$  somente da taxa de juros, já que  $N$  é fixo para todas as máquinas. O preço de uma máquina para o propósito desta análise é agora definido como seus custos por período, isto é,  $p_i = \psi wc(\lambda_i)$  (1). Deve-se ressaltar que isso implica que o preço relativo de quaisquer dois tipos de máquinas, digamos  $\lambda_k$  e  $\lambda_j$ , é simplesmente  $\frac{c(\lambda_k)}{c(\lambda_j)}$

que é uma constante, independente de  $\varsigma$  e  $w$ . É esta propriedade que faz o capital no modelo de Solow uma propriedade Hicksiana de composição de bens. Prosseguindo, o custo total por período do uso de qualquer conjunto de máquinas será dado por  $\psi w \sum_1^n c(\lambda_i)x_i = \psi wV(x_1, \dots, x_n) = \psi wR$ . Defina-se desta maneira,  $\psi w = p$  como o preço da composição de bens de  $R$ , de modo que  $pR = \sum_1^n p_i x_i$ . Note que o preço  $p_i$  de qualquer máquina é um múltiplo fixo de  $\psi w$  por (1), o que significa que  $p$  pode ser considerado como uma função dos preços das máquinas individuais, como requerido em (a) acima.

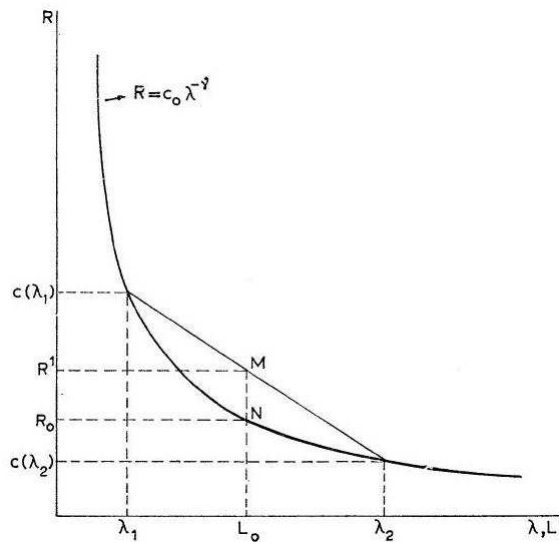
Agora, com a finalidade de demonstrar a condição (b), tome qualquer conjunto admissível de preços e o custo total  $\alpha$  e maximize  $F(L, x_1, \dots, x_n)$  sujeito a  $wL + \sum_1^n p_i x_i = wL + pV(x_1, \dots, x_n) = \alpha$ . Considere dois estágios de maximização. No primeiro estágio, maximize  $F$  para os valores dados de  $L$  e  $R = V(x_1, \dots, x_n)$  que satisfaz  $wL + pR = \alpha$ . Uma vez que o valor máximo de  $F$  para dados  $L$  e  $R$  são determinados pela função  $g(L, R)$ , vemos que o primeiro estágio de maximização solicita uma substituição de  $F$  por  $g$ . O segundo estágio é então maximizar  $g(L, R)$  sujeito a  $wL + pR = \alpha$ , e este irá determinar o correto valor ótimo de  $Q, L$  e  $pR = \sum_1^n p_i x_i$ . Assim,  $g$  pode ser considerado como  $f$  na condição (b). Isto completa a prova que as condições (a) e (b) são satisfeitas no modelo de Solow. A existência de uma medida do capital global como um composição de insumos na análise de longo prazo pode ser estendida para quaisquer outros modelos onde os custos relativos dos bens de capital no longo prazo permanecem constantes.

Estas demonstrações foram feitas de um modo geral. Em particular, a demonstração é independente de hipóteses de que as máquinas são operadas independentemente e que a forma específica de  $c(\lambda)$  é  $c_0\lambda^{-\gamma}$ . A partir de agora, deve-se usar estes últimos pressupostos a fim de derivar a forma precisa de  $f(L, R)$  no modelo de Solow. Por causa da simplicidade da tecnologia usada no modelo de Solow, isto não será difícil. Suponha  $L = L_0$  e considere

o problema de minimização do valor de  $R = V(x_1, \dots, x_n)$  que é necessário para produzir uma unidade de produção no longo prazo.

Uma vez que as máquinas podem ser operadas independentemente, e uma vez que  $c(\lambda)$  é convexo, monotonicamente decrescente e contínua, segue-se que somente uma máquina será usada na solução ótima, e que esta máquina é do tipo  $\lambda = L_0$ . Isto pode ser visto facilmente na figura 1.1 a partir da curva  $c_0\lambda^{-\gamma}$  que especifica o trabalho requerido para produzir uma máquina do tipo  $\lambda$  (com uma capacidade de uma unidade de bem de consumo).

Considere uma média ponderada de duas máquinas, digamos do tipo  $\lambda_1$  e do tipo  $\lambda_2$ , onde  $u\lambda_1 + (1-u)\lambda_2 = L_0$  ( $u$  sendo uma fração positiva), para produzir uma unidade de bem de consumo. O custo do trabalho de produzir esta combinação de máquinas é  $R^1 = c_0[u\lambda_1^{-\gamma} + (1-u)\lambda_2^{-\gamma}]$  que é também descrita por  $L_0M$  na figura 1.1.



Fonte: Nissan (1966).

Figura 1.1: Gráfico da função convexa  $R = c(\lambda) = c_0\lambda^{-\gamma}$

Por causa da convexidade de  $c(\lambda)$  o custo desta combinação deve sempre exceder o custo de produzir uma máquina do tipo  $\lambda = L_0$ , cuja equação é  $R_0 = c_0L_0^{-\gamma}$  ou  $L_0N$  na figura 1.1 (este argumento é evidentemente válido para uma combinação de mais de duas máquinas). Portanto, o valor mínimo



de  $R$  que pode ser combinado com  $L_0$  para produzir uma unidade de bem de consumo é  $R_0 = c_0 L_0^{-\gamma}$ .

Alternativamente, a máxima produção que pode ser produzida no longo prazo com  $R_0 = c_0 L_0^{-\gamma}$  e  $L_0$  é exatamente uma unidade de bem de consumo. Podemos assim considerar  $R = c_0 L^{-\gamma}$  como uma equação explícita da curva de isoproduto  $f(L, R) = 1$ . Uma vez que no modelo de Solow  $f$  deve ser homogênea de grau 1, podemos escrever  $Q = f(L, R)$  como  $1 = f\left(\frac{L}{Q}, \frac{R}{Q}\right)$ .

Uma vez que  $f\left(\frac{L}{Q}, \frac{R}{Q}\right) = 1$  é a mesma equação que  $f(L, R) = 1$ , e uma vez que a solução da última é  $R = c_0 L^{-\gamma}$ , sabemos que a solução de  $f\left(\frac{L}{Q}, \frac{R}{Q}\right) = 1$  deve ser  $\frac{R}{Q} = c_0 \left(\frac{L}{Q}\right)^{-\gamma}$ . A última expressão pode também ser escrita como  $\frac{Q}{L} = c_0^{\frac{-1}{1+\gamma}} \left(\frac{R}{L}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$  de modo que  $f(L, R) \equiv c_0^{\frac{-1}{1+\gamma}} L^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} R^{\frac{1}{1+\gamma}}$ .

Portanto, a fração dos fatores de produção são determinados na função de produção e se iguala a  $\frac{\gamma}{(1+\gamma)}$  para o trabalho e  $\frac{1}{(1+\gamma)}$  para o capital.

### 1.3.2 O Modelo de Crescimento

O modelo de Solow é construído com hipóteses simplificadoras da realidade: a economia produz um único bem, parte desta produção é consumida e o resto é poupada e investida; a fração poupada do produto é constante; economia fechada com ausência de comércio internacional; retornos decrescentes de escala para cada insumo produtivo separadamente; equilíbrio de pleno emprego da força de trabalho e um ambiente de concorrência perfeita.

O bem (produto) produzido pela economia é denotado por  $Y$ , onde a fração do produto poupada é constante,  $s$ , sendo a taxa de poupança desta maneira igual a  $sY$ . O estoque de capital,  $K$ , que para fins de simplificação será assumido que não sofre depreciação, representa a acumulação do produto de toda economia. O investimento líquido é medido pelo crescimento do estoque de capital. Portanto, a partir da identidade entre poupança e investimento, temos a função que descreve a acumulação de capital ao longo do tempo:

$$\dot{K} = sY, \quad (1)$$

A produção do bem  $Y$  utiliza os insumos de produção capital,  $K$ , e trabalho,  $L$ . A tecnologia é representada por uma função de produção com retornos constantes de escala<sup>2</sup>:

$$Y = F(K, L) \quad (2)$$

Solow incorpora posteriormente o progresso tecnológico exógeno ao modelo, acrescentando a variável tecnologia  $A$ , à função de produção:

$$Y = F(K, AL), \quad (3)$$

onde  $AL$  é o trabalho efetivo. Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$\dot{K} = sF(K, AL), \quad (4)$$

O trabalho,  $L$ , e a tecnologia  $A$ , crescem a taxas constantes, conforme as seguintes equações:

$$\dot{L}(t) = L_0 e^{nt} \quad (5)$$

$$\dot{A}(t) = e^{gt} \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (4), teremos:

$$\dot{K} = sF(K, L_0 e^{(n+g)t}), \quad (7)$$

Quando dizemos que um país é rico ou pobre, não devemos nos concentrar sobre o produto total deste país, e sim no produto por trabalhador, ou seja, o produto per capita do país (Costa, 2007). Assim, é necessário que o modelo seja construído em termos per capita. Logo, o capital por trabalhador é  $k = \frac{K}{AL} \Rightarrow K = k \cdot AL = k \cdot L_0 e^{(n+g)t}$ . Derivando esta equação em relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{K} = \dot{k} L_0 e^{(n+g)t} + (n+g)k L_0 e^{(n+g)t} \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), teremos:

$$L_0 e^{(n+g)t} [\dot{k} + (n+g)k] = sF(K, L_0 e^{(n+g)t}) \quad (9)$$

---

<sup>2</sup>A hipótese de retornos constantes de escala para a função de produção  $F$  implica que ao multiplicarmos os insumos, capital,  $K$  e trabalho,  $L$ , por uma constante positiva  $\alpha$ , o produto aumentará também na mesma proporção  $\alpha$ , isto é,  $F(\alpha K, \alpha AL) = \alpha F(K, AL)$ , para todo  $\alpha > 0$ .

Como a função de produção possui retornos constantes de escala, podemos dividir ambas as variáveis em  $F$  por  $AL = L_0e^{(n+g)t}$ , e multiplicá-las pelo mesmo fator. Portanto,

$$L_0e^{(n+g)t}[\dot{k} + (n + g)k] = sL_0e^{(n+g)t}F\left(\frac{K}{L_0e^{(n+g)t}}, 1\right) \quad (10)$$

O que resulta em

$$\dot{k} + (n + g)k = sF(k) \quad (11)$$

Ou seja,

$$\dot{k} = sF(k) - (n + g)k \quad (12)$$

No modelo de Solow, podemos destacar o impacto do crescimento da poupança,  $s$ , do crescimento populacional,  $n$ , e do progresso tecnológico  $A$ . A equação (12), é a que descreve a taxa de variação do estoque de capital por unidade de trabalho efetivo como a diferença entre dois termos. O primeiro termo,  $sF(k)$ , é o investimento atual por unidade de trabalho efetivo. O segundo termo,  $(n + g)k$ , é o investimento necessário para impedir a queda de  $k$ . Quando o investimento necessário para impedir a queda de  $k$  é igual ao investimento atual,  $k$  permanece constante e a economia se encontra no equilíbrio estacionário. Usando o símbolo  $*$  para indicar os valores no estado estacionário, definimos o equilíbrio conforme o seguinte:

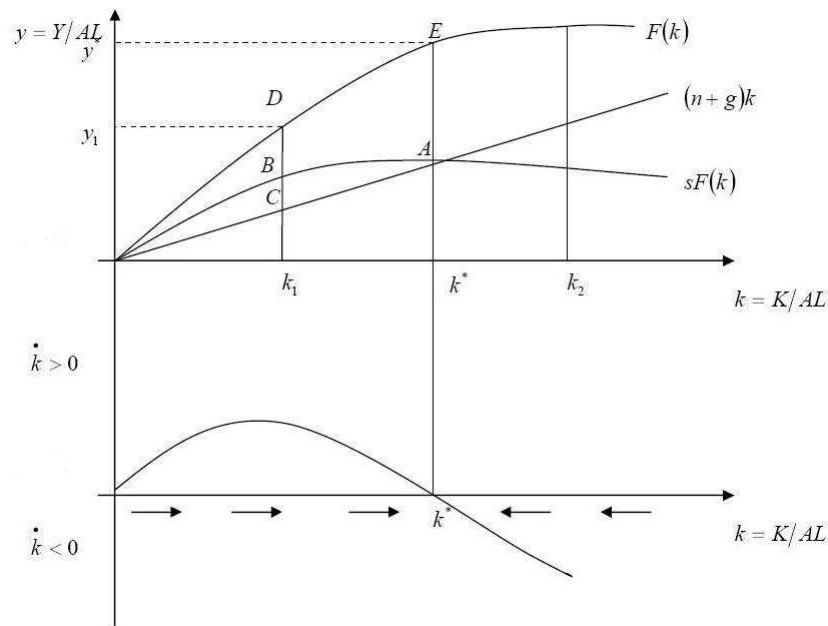
$$sF(k^*) = (n + g)k^*$$

As equações que descrevem o crescimento do produto,  $y = sF(k)$ , e o crescimento da acumulação de capital,  $\dot{k} = sF(k) - (n + g)k$ , são representadas pelo diagrama básico do modelo de Solow, que é utilizado para uma análise da dinâmica da transição do modelo, como pode ser visto na figura 1.2<sup>3</sup>.

Na figura 1.2,  $F(k)$  é uma função de produção bem comportada, com retornos constantes de escala;  $sF(k)$  mostra o nível de poupança por trabalhador ao longo de diferentes níveis de capital por trabalho efetivo;  $(n + g)k$  descreve o investimento necessário para impedir a queda de  $k$ . No ponto  $k_1$  a poupança por trabalhador,  $B$ , excede o investimento necessário,  $C$ , e a economia experimenta um crescimento acelerado. Em  $k_1$  o consumo por

---

<sup>3</sup>Alguns autores utilizaram outras metodologias para descrever o modelo de Solow e a equação da variação do estoque de capital. Bueno (2010) por exemplo, utilizou a abordagem de dinâmica de sistemas, esquematizando a economia e as respectivas variáveis de nível interligadas que se retroalimentam num dado sistema.



Fonte: Costa (2007).

Figura 1.2: Diagrama de Solow

trabalhador é indicado por  $D - B$  e o produto por trabalhador é  $y_1$ . Em  $k_2$ , devido ao fato do investimento necessário ser maior do que a poupança por trabalhador,  $k$  diminui. A trajetória de crescimento equilibrado ocorre em  $k^*$ , ponto em que o investimento por trabalhador é igual ao investimento necessário. O produto por trabalhador é  $y^*$  e o consumo por trabalhador é  $E - A$ . Na figura também é mostrada a relação entre  $k^*$  e  $k$  por meio do diagrama de fase. Quando  $\dot{k} > 0$ ,  $k$  está crescendo, e quando  $\dot{k} < 0$ ,  $k$  está caindo.

O diagrama de Solow nos permite concluir que o crescimento da economia sempre convergirá para o equilíbrio de estado estacionário,  $(k^*, y^*)$ , qualquer que seja as condições iniciais. Neste ponto  $(k^*, y^*)$  a renda per capita crescerá a uma taxa constante, equivalente a taxa de crescimento do progresso tecnológico exógeno. Assim, mudanças na taxa de poupança e na taxa de crescimento populacional são capazes de alterar o nível de equilíbrio da renda per capita, mas não o seu crescimento. A hipótese de convergência para o equilíbrio estacionário é a conclusão fundamental do modelo de Solow, que também foi utilizado para comparar as diferentes taxas entres os países.

De acordo com o modelo de Solow, diferentes economias convergiriam para o mesmo equilíbrio estacionário, independentemente de suas dotações iniciais. Lucas (1988) critica tal hipótese, construindo um modelo em que uma economia que começa com baixos níveis de capital humano e físico continuará permanentemente abaixo de uma economia que inicia sua trajetória de crescimento com uma melhor dotação (Costa, 2007).

Em um segundo trabalho sobre crescimento econômico, Solow (1957) atribuiu a diferença entre a taxa de crescimento do produto e a taxa de crescimento dos fatores de produção à mudança tecnológica, dando origem ao chamado resíduo de Solow (Snowdon & Vane, 1999). O modelo de Solow tratou a tecnologia como uma variável exógena determinante do crescimento econômico de longo prazo, fornecendo as primeiras intuições para o desenvolvimento de modelos de crescimento pela abordagem neoclássica (Costa, 2007).

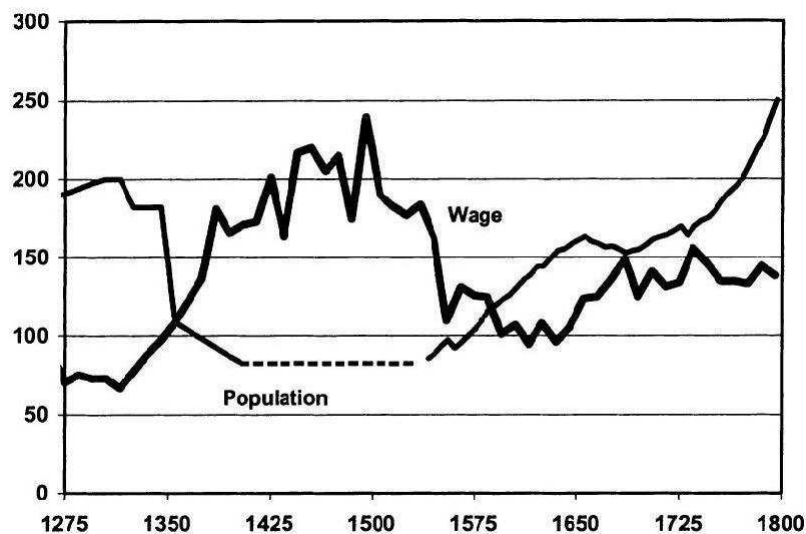
## **1.4 A Transição Entre as Duas Teorias: O Modelo de Hansen e Prescott**

### **1.4.1 O Período 1250 a 1800**

A teoria malthusiana descreve bem a economia inglesa da segunda metade do século XIII até 1800. Nesta fase, a economia inglesa não mostra nenhuma tendência sobre o salário real e o padrão de vida (praticamente constantes no longo prazo). Isto pode ser verificado na figura 1.3<sup>4</sup>, que mostra a trajetória do salário real nas fazendas e a população para o período 1275 a 1800. Durante este período, houve um grande choque exógeno, a Peste Negra, que reduziu a população abaixo da tendência de forma significativa durante um extenso período. Como podemos ver na figura, este declínio durou até meados do século XV e foi acompanhado de um aumento no salário real. Quando a população começa a crescer novamente o salário real cai. Isto está em conformidade com a teoria de Malthus, que prevê que uma queda na população devido à fatores como a peste, resultará numa alta produtividade marginal do trabalho, e por conseguinte, aumentará o salário real, até que a população se recupere novamente.

---

<sup>4</sup>Hansen e Prescott (2002) utilizam dados de Clark (1988a), Clark(1988b) e Henry Phelps-Brown e Sheila V. Hopkins (1956) para a construção das séries temporais do salário real e população.



Fonte: Hansen e Prescott (2002).

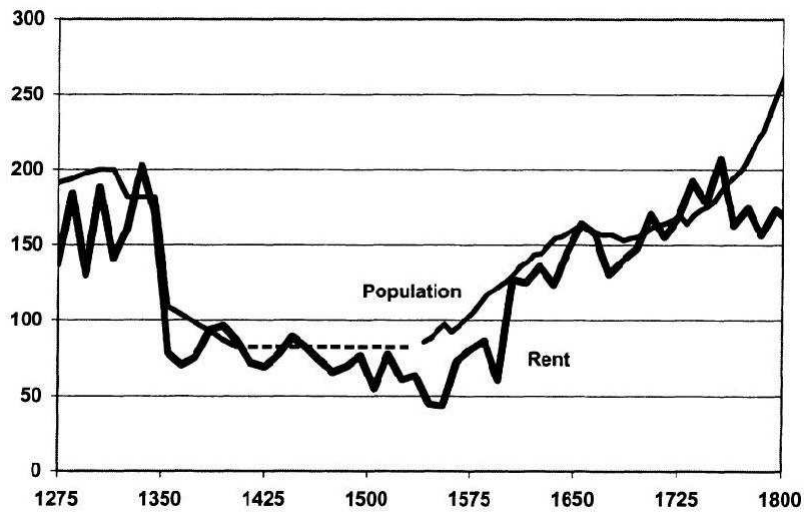
Figura 1.3: População e Salário real na fazenda de 1275 a 1800 na Inglaterra

Outra previsão da teoria de Malthus é que os aluguéis da terra aumentam e diminuem junto com a população. A figura 1.4, plota o aluguel real da terra e a população da Inglaterra para o mesmo período 1275-1800 da figura 1.3. Consistente com a teoria, quando a população está caindo na primeira metade da amostra, os aluguéis da terra também caíram. Quando a população aumentou, o aluguel da terra também aumentou até perto do final do período da amostra, e daí em diante a revolução industrial já estava começando.

### 1.4.2 O Período 1800 a 1989

Após 1800, a economia inglesa não se comporta de acordo com a teoria de Malthus. Tanto a produtividade do trabalho, que se move juntamente com o salário real, quanto a população cresceram à taxas mais elevadas do que no período anterior. O aumento populacional não levou à queda do padrão de vida, como a teoria malthusiana prevê. Isto pode ser verificado na figura 1.5<sup>5</sup> que mostra a produtividade do trabalho do Reino Unido e sua população para os anos selecionados. A observação marcante é que a produtividade do

<sup>5</sup>Fonte: Hansen e Prescott (2002) utilizaram dados de Angus Maddison (1991, p. 274-76) e Maddison (1991, p. 227, 230-39).



Fonte: Hansen e Prescott (2002).

Figura 1.4: População e Aluguel Real da Terra de 1275 a 1800 na Inglaterra

trabalho aumentou mais de vinte vezes entre 1780 e 1989. Além disso, após 1870, não existiu nenhuma relação discernível entre o crescimento populacional e o crescimento da produtividade do trabalho, o que é consistente com as previsões do modelo de crescimento de Solow.

Uma transição da teoria de Malthus para a teoria de Solow implica que a terra se tornou menos importante como um fator de produção. De fato, o valor das terras relativo ao valor do produto nacional bruto PNB, diminuiu drasticamente nos últimos dois séculos. A figura 1.6 apresenta essa relação para os EUA desde 1870. O valor das terras relativo ao PNB anual caiu de 88% em 1870 para menos de 5% em 1990.

### 1.4.3 O Modelo Econômico da Transição

#### A Tecnologia

Hansen e Prescott (2002) estudam o modelo econômico com um único bem na versão do modelo de Diamond (1965) de gerações superpostas. O primeiro setor de produção, chamado de setor de Malthus, capital, trabalho e terra são combinados para a produção do bem final. No segundo setor, chamado de setor de Solow, somente capital e trabalho são utilizados para a produção do mesmo bem. As funções de produção para os dois setores são as seguintes:

Ano	PIB/Hora		População	
	1985 \$US	Taxa de Crescimento	Milhões	Taxa de Crescimento
1700	0.82		8.4	
1760			11.1	0.47
1780	1.02	0.27		
1820	1.21	0.43	21.2	1.08
1870	2.15	1.16	31.4	0.79
1890	2.86	1.44	37.5	0.89
1913	3.63	1.04	45.6	0.85
1929	4.58	1.46	45.7	0.01
1938	4.97	0.91	47.5	0.43
1960	8.15	2.27	52.4	0.45
1989	18.55	2.88	57.2	0.30

Fonte: Hansen e Prescott (2002).

Figura 1.5: Níveis de Produtividade e População no Reino Unido de 1700 a 1989

Ano	Porcentagem
1870	88
1900	78
1929	37
1950	20
1990	9

Fonte: Hansen e Prescott (2002), U.S Bureau of the Census (1975).

Figura 1.6: Valor da Terra relativo ao PNB nos EUA de 1870 a 1990

$$(1) \quad Y_{M_t} = A_{M_t} K_{M_t}^\phi N_{M_t}^\mu L_{M_t}^{1-\phi-\mu}$$

$$(2) \quad Y_{S_t} = A_{S_t} K_{S_t}^\theta N_{S_t}^{1-\theta}$$

O subscrito  $M$  denota o setor Malthus e  $S$  denota o setor Solow. As variáveis  $A_j$ ,  $Y_j$ ,  $K_j$ ,  $N_j$  e  $L_j$  com  $j = M, S$  referem-se ao fator de produtividade, produção, capital, trabalho e terra empregada no setor  $j$ . Além disso,  $\{A_{j_t}\}_{t=t_0}^\infty$ ,  $j = M, S$ , são sequências de números positivos.

A terra neste modelo econômico é um fator fixo: não pode ser produzida



e nem sofre depreciação. A quantidade total de terra neste modelo é considerada igual a 1. Além disso, a terra não tem uso alternativo ao lado da produção no setor Malthus, então  $L_{M_t} = 1$  no equilíbrio.

Implícito por trás destas funções de produção agregadas estão as tecnologias para as individuais unidades de produção onde, dado o preço dos fatores, o tamanho ideal da unidade é pequena em relação ao tamanho da economia. A produtividade total dos fatores é assumida exógena nestes individuais centros de lucro. A unidade de produção de Malthus é a única que é relativamente intensiva em terra (como uma fazenda da família a moda antiga) pois é dependente de fontes de energia intensiva em terra, como energia animal. A unidade de produção de Solow, por outro lado, é intensiva em capital, ao invés de intensiva em terra e poderia corresponder à uma fábrica. Consistente com este raciocínio, assume-se que  $\theta > \phi$ . A terra, pelo menos quando interpretada como um fator fixo, não entra na tecnologia de Solow absolutamente.

A produção a partir de qualquer setor pode ser usada para consumo ou investimento em capital. Considera-se que o capital sofre depreciação total ao final de cada período. Assim, a restrição dos recursos para a economia é dada por:

$$(3) \quad C_t + K_{t+1} = Y_{M_t} + Y_{S_t}.$$

Uma vez que as funções de produção exibem retornos constantes de escala, é assumido, por conveniência analítica, que esta é somente uma firma competitiva operando em cada setor. Dado um valor para  $A_j$ , um salário  $w$ , uma taxa de aluguel do capital  $r_K$ , e uma taxa de aluguel da terra  $r_L$ , a firma no setor  $j$  resolve o seguinte problema de maximização:

$$(4) \quad \max\{Y_j - wN_j - r_K K_j - r_L L_j\}$$

$$j = M, S$$

Sujeito às funções de produção (1) e (2).

### **Preferências e Estrutura Demográfica**

As famílias vivem por 2 períodos e elas têm preferências que dependem do consumo em cada período de vida. Em particular, uma jovem família nascida no período  $t$ , tem preferências resumidas pela seguinte função de utilidade:

$$(5) \quad U(c_{1t}, c_{2,t+1}) = \log c_{1t} + \beta \log c_{2,t+1}.$$

Aqui,  $c_{1t}$  é o consumo de uma família jovem no período  $t$  e  $c_{2t}$  é o consumo de uma família veterana nascida no período  $t - 1$ . O número de famílias nascidas no período  $t$  é denotado por  $N_t$ , onde:

$$(6) \quad N_{t+1} = g(c_{1t})N_t$$

A forma da função  $g(\cdot)$  é dada. Em conformidade com Malthus (1798), a taxa de crescimento da população depende do padrão de vida, que neste modelo foi medido usando o consumo de uma família jovem. A função  $g$  é definida no intervalo  $[c_{MIN}, \infty)$  e é contínua, diferenciável e  $g'(c_{MIN}) > 0$ . A forma precisa desta função será dada mais adiante.

A idade inicial (período  $t_0$ ) nesta economia é dotada de  $\frac{K_{t_0}}{N_{t_0-1}}$  unidades de capital e  $L = \frac{1}{N_{t_0-1}}$  unidades de terra. Antigos agentes alugam a terra e o capital para as firmas e, no final do período, vendem suas terras para os jovens. Cada família jovem é dotada de uma unidade de trabalho. A renda do trabalho é usada para financiar o consumo e adquirir capital e terra, o retorno a partir do qual desejam financiar o consumo quando as famílias se tornarem antigas. Ou seja, as famílias jovens maximizam (5) sujeita às restrições orçamentárias seguintes:

$$(7) \quad c_{1t} + k_{t+1} + q_t l_{t+1} = w_t$$

$$c_{2,t+1} = r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1}.$$

A notação de letras minúsculas  $k$  e  $l$  são para denotar o capital e as terras como propriedades de uma família particular e as maiúsculas  $K$  e  $L$  ( $L = 1$ ) são para denotar o total de estoque de capital e terra disponível na economia. A letra  $q$  denota o preço da terra.

### Caracterizando o Equilíbrio Competitivo

Dados  $N_{t_0}$ ,  $k_{t_0}$  e  $l_{t_0}$  (onde  $N_{t_0-1} l_{t_0} = 1$ ), um equilíbrio competitivo na economia consiste de seqüências de preços para  $t \geq t_0$ ,  $\{q_t, w_t, r_{K_t}, r_{L_t}\}$ ; dotações das firmas,  $\{K_{M_t}, K_{S_t}, N_{M_t}, N_{S_t}, Y_{M_t}, Y_{S_t}\}$ ; e dotações das famílias,  $\{c_{1t}, c_{2,t+1}, k_{t+1}, l_{t+1}\}$ , tal que o seguinte é válido:

1. Dada a sequência de preços, as dotações da firma resolve os problemas especificados na equação (4).

2. Dada a sequência de preços, as dotações da família maximizam (5) sujeito a (7).

3. Condições do Mercado:

$$K_{M_t} + K_{S_t} = N_{t-1}k_t$$

$$N_{M_t} + N_{S_t} = N_t$$

$$N_{t-1}l_t = 1$$

$$Y_{M_t} + Y_{S_t} = N_t c_{1_t} + N_{t-1} c_{2_t} + N_t k_{t+1}$$

4.  $N_{t+1} = g(c_{1_t})N_t$ .

Na caracterização de um equilíbrio, os seguintes resultados são cruciais<sup>6</sup>:

**Proposição 4** *Para qualquer taxa de salário  $w$ , e taxa de aluguel do capital  $r_K$ , é lucrativo operar no setor Malthus. Isto é,  $Y_{M_t} > 0$  para todo  $t$ .*

#### Demonstração

Dados  $w$  e  $r_K$ , quando o problema (4) é resolvido para o setor Malthus, lucros máximos são iguais a:

$$\Pi_M(w, r_K) = A_{M_t}^{\frac{1}{(1-\phi-\mu)}} (1 - \phi - \mu) \cdot \left(\frac{\phi}{r_K}\right)^{\frac{\phi}{(1-\phi-\mu)}} \left(\frac{\mu}{w}\right)^{\frac{\mu}{(1-\phi-\mu)}}$$

que é claramente positivo para todo  $t$ .

**Proposição 5** *Dada uma taxa de salário  $w$  e uma taxa de aluguel do capital  $r_K$ , o lucro máximo por unidade de produção no setor Solow é positivo se, e somente se:*

$$(8) \quad A_{S_t} > \left(\frac{r_K}{\theta}\right)^\theta \left(\frac{w}{1-\theta}\right)^{1-\theta}$$

---

<sup>6</sup>Para detalhes das demonstrações, vide apêndice.

A proposição 5 significa que só é lucrativo operar no setor de Solow se o fator de produtividade total neste setor superar os preços dos fatores de produção ajustados aos respectivos parâmetros. Se a equação (8) não é satisfeita, então a economia opera somente com o setor malthusiano, já que neste setor os lucros máximos são sempre positivos de acordo com a proposição 4. Mas como o fator de produtividade no setor de Solow cresce a uma taxa positiva exógena, eventualmente a equação (8) será satisfeita e a economia irá operar em ambos setores a partir de um determinado período  $t$ .

Se, em algum período  $t$ , somente o processo de produção de Malthus é empregado, o equilíbrio salário e taxa de aluguel do capital será:

$$(9) \quad w_t = \mu A_{M_t} K_t^\phi N_t^{\mu-1}$$

$$r_{K_t} = \phi A_{M_t} K_t^{\phi-1} N_t^\mu$$

**Corolário 1** *Tanto o setor Malthus quanto o setor Solow serão operados no período  $t$  se, e somente se, a equação (8) é satisfeita ao preços dos fatores obtidos pela equação (9) aos valores no período  $t$  de  $A_M$ ,  $A_S$ ,  $K$  e  $N$ .*

Se ambos os setores são operados, (9) não é o equilíbrio dos preços dos fatores. Em vez disso, os recursos são alocados de forma eficiente através dos dois setores garantido pelo primeiro teorema do bem estar. Assim, a produção total é determinada unicamente pelo seguinte bem comportado problema de maximização:

$$(10) \quad Y(A_M, A_S, K, N)$$

$$= \max_{\substack{0 \leq K_S \leq K \\ 0 \leq N_S \leq N}} \{A_M (K - K_S)^\phi (N - N_S)^\mu + A_S K_S^\theta N_S^{1-\theta}\}$$

O equilíbrio salário e taxas de aluguéis será:

$$(11) \quad w_t = \mu A_{M_t} K_{M_t}^\phi N_{M_t}^{\mu-1} = (1 - \theta) A_{S_t} K_{S_t}^\theta N_{S_t}^{-\theta}$$

$$r_{K_t} = \phi A_{M_t} K_{M_t}^{\phi-1} N_{M_t}^\mu = \theta A_{S_t} K_{S_t}^{\theta-1} N_{S_t}^{1-\theta}$$

$$r_{L_t} = (1 - \phi - \mu) A_{M_t} K_{M_t}^\phi N_{M_t}^\mu$$

A condição de primeira ordem para o problema de otimização das famílias pode ser determinada pelas seguintes expressões<sup>7</sup>:

$$(12) \quad c_{1t} = \frac{w_t}{1 + \beta}$$

$$(13) \quad q_{t+1} = q_t r_{K,t+1} - r_{L,t+1}$$

Além disso, a condição de restrição orçamentária e de mercados implicam que:

$$(14) \quad K_{t+1} = N_t(w_t - c_{1t}) - q_t$$

Dadas as sequências  $\{A_{M_t}, A_{S_t}\}_{t=t_0}^{t_n}$ , as condições iniciais  $K_{t_0}$  e  $N_{t_0}$ , e um preço inicial da terra,  $q_{t_0}$ , as equações (6) e (11)-(14) determinam um equilíbrio da sequência de preços e quantidades:

$$\{w_t, r_{K_t}, r_{L_t}, q_{t+1}, c_{1t}, N_{t+1}, K_{t+1}\}_{t=t_0}^{t_n}$$

O valor de  $q_{t_0}$  é também determinado pela condição de equilíbrio do modelo, mas não pode ser resolvida analiticamente. Um algoritmo numérico pode ser usado para calcular este preço inicial.

## A trajetória do Desenvolvimento Equilibrado

As condições iniciais ( $K_{t_0}$  e  $N_{t_0}$ ) e as sequências  $\{A_{M_t}, A_{S_t}\}_{t=t_0}^{t_n}$  são escolhidas de modo que a economia esteja utilizando apenas a tecnologia Malthus inicialmente (neste caso, a equação (8) não é satisfeita) e em seguida, é feita uma observação de como a economia se desenvolve ao longo do tempo.

Para que a tecnologia de Solow venha ser adotada na trajetória de equilíbrio, é necessário que a equação (8) seja satisfeita. Como é sempre lucrativo operar no setor de Malthus, a firma irá operar neste setor desde os estágios iniciais. Mas, quando a equação (8) é satisfeita aos preços dos fatores obtidos pela equação (9), a firma passa a operar nos dois setores de produção, alocando desta forma, os fatores de produção em ambos os setores. Mas para que a equação (8) seja satisfeita, é necessário que o fator de produtividade no setor de Solow,  $A_{S_t}$ , aumente com o tempo. Para isto, Hansen e Prescott formulam condições necessárias e suficientes para que o fator de produtividade exceda os preços dos fatores ajustados aos respectivos parâmetros. Eles utilizaram

---

<sup>7</sup>Para detalhes, vide apêndice.

dados da era malthusiana e da última metade do século XX, para restringir os valores dos parâmetros e calcular a trajetória do equilíbrio resultante da economia.

O valor inicial  $N_{t_0}$  é igual a 1, e o estoque de capital inicial,  $K_{t_0}$ , é definido de modo que a equação (8) ainda não seja satisfeita pelos preços dos fatores em (9), garantindo assim que somente a tecnologia Malthus seja adotada nos estágios iniciais na firma.

Para caracterizar esta trajetória de crescimento, garantindo que na era malthusiana a renda per capita e o consumo sejam constantes, não existindo melhoria no padrão de vida dessa forma, é necessário ainda acrescentar duas hipóteses: uma sobre o fator de produtividade total e a outra sobre o crescimento populacional. São elas:  $A_{M_t}$  cresce à uma taxa constante,  $A_{M_t} = \gamma_M^t$ , onde  $\gamma_M \geq 1$ . E  $g'(c_{1_M}) > 0$ , onde  $c_{1_M}$  é definido por  $g(c_{1_M}) = \gamma_M^{\frac{1}{1-\phi-\mu}}$ .

Depois de escolhidos os valores iniciais  $K_{t_0}$  e  $N_{t_0} = 1$ , e dadas as hipóteses sobre o fator de produtividade no setor malthusiano e sobre o fator de crescimento populacional nos estágios iniciais quando somente o setor malthusiano é utilizado pela firma, as equações (1), (6), (9), (12), (13) e (14) calculam respectivamente as sequências de produção agregada, da população, dos preços dos fatores, dos consumos das famílias jovens, dos preços da terra e do capital, na era malthusiana. A sequência de consumos das famílias jovens  $c_{1_t}$  nas fases iniciais onde somente a tecnologia malthus é utilizada é representada por  $c_{1_M}$ . O fator de crescimento populacional será constante nesta fase e igual a  $\gamma_M^{\frac{1}{1-\phi-\mu}}$ .

A partir das condições de mercado e das equações mencionadas, não é difícil perceber que a produção agregada, o capital global, o consumo total, o preço da terra e a taxa de aluguel da terra crescem na mesma taxa da população<sup>8</sup> e que o salário e a taxa de aluguel do capital são constantes. Como  $w$  e  $r_K$  são constantes nos estágios iniciais quando a firma opera somente no setor malthusiano, temos que a expressão do lado direito da equação (8),  $\left(\frac{r_K}{\theta}\right)^\theta \left(\frac{w}{1-\theta}\right)^{1-\theta}$ , é também constante. Denote esta constante por  $\hat{A}$ .

Neste caso, o crescimento da produção se traduz diretamente dentro do crescimento populacional e não há melhoria no padrão de vida das famílias. Isto simula a trajetória de longo prazo do crescimento (abstraindo de pragas ou outras perturbações) que as economias reais experimentaram por séculos

---

<sup>8</sup>Isto implica que o produto per capita e o consumo per capita são constantes na era malthusiana.

antes da revolução industrial (Hansen e Prescott, 2002).

Como  $\{A_{S_t}\}_{t=t_0}^{\infty}$  cresce a uma taxa positiva, eventualmente  $A_{S_t}$  excederá  $\hat{A}$ . A proposição 5 garante que neste ponto, capital e trabalho serão atribuídos à tecnologia de Solow. Quanto tempo levará a transição será uma questão quantitativa, que dependerá dos parâmetros do modelo.

### Um Exercício Quantitativo: Fornecendo Valores aos Parâmetros do Modelo

O exercício quantitativo é designado de modo que a economia inicialmente opera somente no setor malthusiano, e então é simulada a trajetória do equilíbrio até que todo capital e trabalho são empregados no setor Solow<sup>9</sup>. Um período  $t$  do modelo é equivalente a 35 anos.

O fator de crescimento da produtividade para o setor de Solow é definido por  $A_{S_t} = \gamma_S^t$ , para todo  $t$ , onde  $\gamma_S > 1$ . O modelo é calibrado de modo que: a era malthusiana é consistente com os fatos do crescimento que descrevem a economia inglesa antes de 1800, a economia de Solow descreve os fatos do crescimento pós segunda guerra mundial das economias industrializadas e a taxa de crescimento populacional reage à mudança nos padrões de vida (medido através de  $c_1$ ). Estes critérios levaram os autores do modelo à adotarem os valores de parâmetros mostrados na figura 1.7.

Para calibrar a função de crescimento populacional,  $g(c_1)$ , Hansen e Prescott utilizaram dados de Lucas (1998) sobre taxa de crescimento populacional e PIB per capita para várias regiões do mundo de 1750 até 1990. As taxas de crescimento populacional crescem linearmente conforme os padrões de vida crescem (medidos através de  $c_1$ ) do nível malthusiano  $c_{1_M}$  até o nível onde a população está dobrando a cada período (a cada 35 anos). Durante este intervalo, os padrões de vida duplicam para o nível malthusiano. Depois disso, a taxa de crescimento populacional diminui linearmente até que os padrões de vida são aproximadamente 18 vezes o que eles eram no estado estacionário de Malthus. Assume-se que a população é constante conforme  $c_1$  cresce depois deste ponto. Isto resulta na seguinte função  $g(c_1)$ :

---

<sup>9</sup>A Proposição 4 garante que alguma fração do capital e trabalho sempre serão alocados no setor malthusiano, já que sempre é lucrativo operar neste setor. Mas esta fração converge para zero no limite quando  $t \rightarrow \infty$ .

Parâmetro	Definição	Valor	Comentários
$\gamma_M$	Fator de Crescimento na Tecnologia Malthus	1.032	Consistente com o crescimento populacional na era malthusiana (Dobrando a cada 230 anos ou 6.57 períodos).
$\gamma_S$	Fator de Crescimento na Tecnologia Solow	1.518	Consistente com a taxa de crescimento do PIB per capita pós guerra nos EUA.
$\phi$	Fração do Capital na Tecnologia Malthus	0.1	Similar ao valor relatado em Philip T. Hoffman (1996) e Clark (1998a).
$\mu$	Fração do Trabalho na Tecnologia Malthus	0.6	A fração do trabalho é igual a 0.6 em ambas as tecnologias.
$\theta$	Fração do Capital na Tecnologia Solow	0.4	Baseado nos dados das frações dos fatores pós guerra nos EUA.
$\beta$	Fator de Desconto	1.0	Implica que o retorno anual sobre o capital varia de 2% na era Malthus para 4.5% nos períodos quando a tecnologia Solow é usada.

Fonte: Hansen e Prescott (2002).

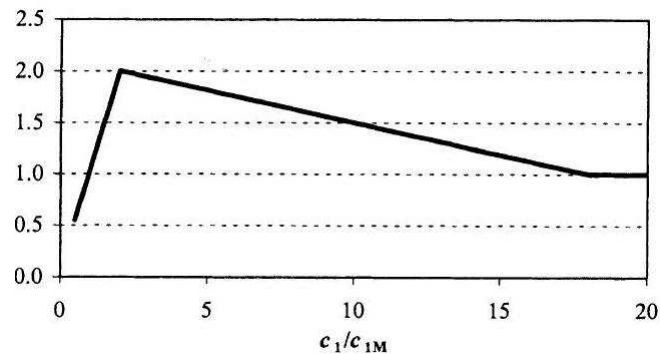
Figura 1.7: Valor dos Parâmetros para o Exercício Quantitativo

$$g(c_1) = \begin{cases} \gamma_M^{\frac{1}{1-\mu-\phi}} \left( 2 - \frac{c_1}{c_{1M}} \right) + 2 \left( \frac{c_1}{c_{1M}} - 1 \right) & , c_1 < 2c_{1M} \\ 2 - \frac{c_1 - 2c_{1M}}{16c_{1M}} & , 2c_{1M} \leq c_1 \leq 18c_{1M} \\ 1 & , c_1 > 18c_{1M} \end{cases}$$

A figura 1.8 representa graficamente a função  $g(c_1)$  em relação aos valores de  $\frac{c_1}{c_{1M}}$ .

A economia é simulada começando no período  $t_0 = -5$  num total de 11 períodos, ponto no qual a transição para a tecnologia Solow foi efetivamente

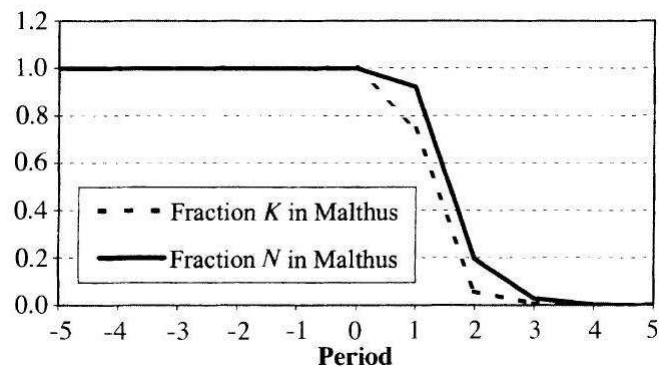




Fonte: Hansen e Prescott (2002).

Figura 1.8: Função de Crescimento Populacional

completada. A figura 1.9 mostra a fração dos fatores de produção (capital e trabalho) empregados no setor de Malthus em cada período.



Fonte: Hansen e Prescott (2002).

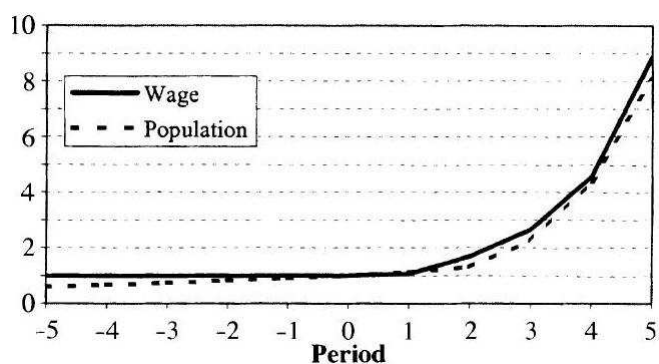
Figura 1.9: Fração dos Insumos Empregados no Setor de Malthus

A transição leva 3 gerações (105 anos) desde o ponto no qual a tecnologia Solow é utilizada pela primeira vez até que mais de 99% dos recursos sejam alocados no setor Solow. Como na revolução industrial inglesa, a transição para uma economia industrial moderna não é instantânea, mas leva gerações para ser atingida. Somente a tecnologia Malthus é utilizada do período -5 ao período 0. Durante este tempo, a produção por trabalhador permanece constante. Uma vez que a revolução industrial começa no período 1, a produção por trabalhador cresce a taxas cada vez maiores.

A simulação da trajetória do crescimento tem várias características em

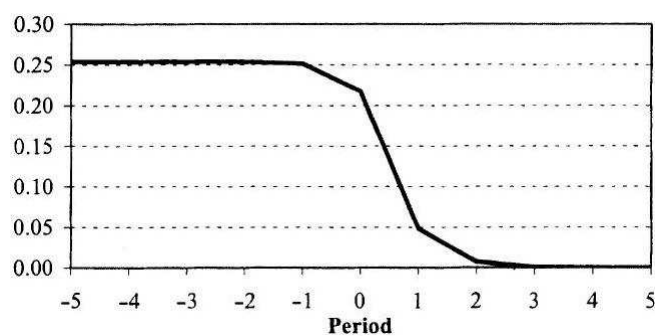
comum com os dados históricos mostrados nas figuras 1.3, 1.5 e 1.6. Durante os períodos em que somente a tecnologia de Malthus é utilizada, a população cresce na mesma taxa da produção e o salário permanece constante. Após o período 0, aumenta o crescimento da população, e os salários reais também aumentam. Isto é mostrado na figura 1.10, onde o salário foi considerado igual a 1 no estado estacionário de Malthus.

A figura 1.11 mostra que o valor relativo da terra na produção decresce depois que a tecnologia Solow é adotada, em conformidade com o padrão visto na figura 1.6.



Fonte: Hansen e Prescott (2002).

Figura 1.10: Salário e População



Fonte: Hansen e Prescott (2002)

Figura 1.11: Valor da Terra relativo à Produção

## 1.5 Considerações ao Capítulo

Recentemente, a literatura do crescimento econômico focou em explicar características das economias industriais modernas enquanto é inconsistente com os fatos que descrevem a economia pré industrial. Isto inclui tanto os modelos baseados no progresso tecnológico exógeno, como o de Robert Solow (1957), e os mais recentes modelos de crescimento endógenos, tais como o de Paul Romer (1986) e Lucas (1988). Mas o crescimento sustentado já existe há mais de dois séculos passados, enquanto os milênios anteriores foram caracterizados pela estagnação, sem um crescimento permanentemente significativo nos padrões de vida. A modelagem de Hansen e Prescott (2002) contribui para uma literatura recente sobre modelos de crescimento unificados, que podem explicar os fatos básicos de crescimento de ambas as épocas, bem como a transição entre as duas. A teoria destes autores prevê que as frações relativas da terra na produção deve cair de forma endógena ao longo do tempo, como observado historicamente, e que haverá uma fuga da estagnação malthusiana e uma transição para o moderno crescimento no sentido de Solow.

Embora tenha se tornado popular na literatura do crescimento modelos de acumulação de conhecimentos neoclássicos, como uma característica endógena do modelo econômico estudado, estes autores do modelo da transição optaram por abstrair isto e assumir o progresso tecnológico exógeno.

Fizemos esta escolha porque ela simplifica nossa análise e porque não acreditamos que ainda existe uma teoria da acumulação de conhecimento com o mesmo nível de aceitação que existe para o padrão da teoria da acumulação de capital. Para aqueles que discordam disso, acreditamos que as características do crescimento endógeno podem ser facilmente incorporadas na nossa teoria de uma maneira que não altere nossas principais conclusões. (HANSEN & PRESCOTT, 2002 p.1216, tradução nossa.)

Os autores não exploraram como a política e as instituições, desencorajando ou prevenindo a invenção e adoção de novas idéias, podem desempenhar um papel importante na determinação de quando a tecnologia de Solow é utilizada pela primeira vez, e com que rapidez a transição da teoria de Malthus para a teoria de Solow será concluída. Outras literaturas da transição para as economias industriais modernas abordaram como a política e as instituições podem afetar em quanto tempo a transição será completada. Jones (1999), considerou que a política e as instituições, afetando a taxa de compensação para a atividade inovativa, pode determinar o tempo da revolução industrial.

Stephen L. Parente e Prescott (1997) estudaram como a política pode afetar o nível do parâmetro de produtividade total dos fatores na tecnologia Solow. Ao manter este parâmetro pequeno, a política pode afetar quando a equação (8) é satisfeita e, portanto, quando a revolução industrial começa.

O fato de que a revolução industrial aconteceu primeiro na Inglaterra no início do século XIX em vez de mais cedo na China (onde o estoque de conhecimento utilizável poderia ter sido realmente alto), é talvez devido às maneiras de como as instituições e políticas atuaram nestes dois países. (HANSEN & PRESCOTT, 2002 p.1216, tradução nossa.)

A transição do uso intensivo da terra para a economia industrial moderna requer que a taxa do fator total de produtividade cresça no setor Solow. A tecnologia tem que melhorar bastante para que ela finalmente se torne lucrativa e assim desviar os recursos para este setor não utilizado anteriormente (Hansen & Prescott, 2002).

## Capítulo 2

# Progresso Técnico e Crescimento: O Período Pós Revolução Industrial

### 2.1 Introdução

O crescimento econômico tem sido um dos campos de pesquisa mais ativos da teoria econômica. O assunto já estava em debate na década de 1950, com a publicação de Solow (1956). Neste trabalho, ele destacou a importância da acumulação de capital físico e do progresso técnico, sendo este o motor que impulsiona o crescimento sustentado. Mais tarde, Paul Romer e Robert Lucas na Universidade de Chicago, voltaram a discutir o tema e acrescentaram destaques importantes como a economia das idéias e do capital humano. Romer apresentou aos macroeconomistas a economia da tecnologia. Economistas como Adam Smith e Karl Marx consideraram as invenções e as inovações os elementos fundamentais para o crescimento da economia. As teorias do crescimento recentes destacaram o papel fundamental desempenhado pela acumulação de conhecimentos no processo do crescimento econômico.

Sem mudança tecnológica, a acumulação do capital não se sustenta- sua produtividade marginal torna-se declinante- e a taxa de crescimento per capita da economia tenderá inexoravelmente a zero. As invenções de novas máquinas e de produtos intermediários proporcionam oportunidades para novos investimentos. (FREEMAN, 1997 p.541)

Os fatos revelam que a evolução do crescimento a longo prazo tem sido desigual ao longo do tempo e entre países, surgindo dúvidas a respeito da

hipótese de convergência, que foi estabelecida em modelos de crescimento nas décadas de 1950 e 1960. Freeman (1997), afirma que o padrão de crescimento econômico dos últimos dois séculos tem sido de rápida e crescente diferenciação entre os países e de crescente divergência no crescimento. O motivo de tal divergência, segundo ele, seria fruto de diferenças no sucesso dos países em usarem os avanços científicos e tecnológicos de forma mais eficiente ou melhor que outros.

Os países são constituídos de características diferentes tais como: cultura, eficiência das instituições, das políticas que promovem a tecnologia e até mesmo o tamanho do país. Essas diferenças sugerem que é preciso evitar as generalizações e os modelos agregados de crescimento e destacar a variedade de circunstâncias nacionais.

Embora a abordagem dos sistemas nacionais procure explicar o desempenho de cada país em termos de suas características especiais, as teorias do crescimento tentam chegar a generalizações para todos os países. A grande variedade de culturas, de instituições políticas, de estruturas econômicas e sociais, de instituições científicas e técnicas, de políticas e suas interdependências tornam esse um projeto inerentemente difícil. (FREEMAN, 1997 p.546)

Apesar disso, os economistas estabelecem modelos de crescimento padronizados, mesmo que proporcione resultados restritos, apontando para períodos de convergência e divergência em áreas específicas.

## 2.2 Da Tecnologia exógena para a Tecnologia endógena: A Análise de Freeman

### 2.2.1 Fases do Elo entre Tecnologia e Crescimento

Com a coleta de dados históricos de Maddison (1982, 1987) e a ampliação feita por Pavitt & Soete (1981), Freeman destacou as seguintes fases de crescimento e diferentes padrões de desempenho inovativo:

**Período de 1890 a 1913:** Nesta fase, há uma correlação muito fraca entre as variáveis tecnológicas e as taxas de crescimento. Além disso, houve uma convergência tecnológica internacional, com os países retardatários tendendo a alcançar os pioneiros em inovações, mas essa melhoria tecnológica não implica diretamente aumento na taxa de crescimento econômico.

**Período de 1913 a 1929:** Neste período houve um aumento das relações entre a tecnologia e o crescimento econômico na maioria dos países. As atividades inovativas aqui já desempenhavam papel importante nas taxas de crescimento dos países.

**Período da Grande Depressão e da Segunda Guerra Mundial:** Fase caracterizada por uma transição, em que as inovações, os investimentos, o crescimento da produtividade e a competitividade começam a desenvolver relações entre si.

**Período do alto crescimento Pós- Guerra (1945 a 1975):** Fase na qual as atividades tecnológicas desempenharam um papel fundamental. A tecnologia e os níveis de renda estão fortemente correlacionados. O crescimento da produção industrial impulsiona diretamente o crescimento da renda.

Após 1975, o que se viu foi uma correlação menos forte entre a tecnologia e o crescimento econômico.

À medida que a longa associação entre as taxas de aumento das atividades inovativas e do produto se enfraqueceram, ela não foi aparentemente substituída por quaisquer novos mecanismos impulsionados por empresários, por meio dos quais altos níveis de atividades inovativas nacionais vinculavam-se a tendências subsequentemente favoráveis ao desempenho econômico. (FREEMAN, 1987 p. 549)

### 2.2.2 A Endogeneização da Mudança Técnica

Todos os modelos de crescimento econômico, sejam eles clássico, neoclássico, keynesiano ou estruturalista, sugeriram a importância que a mudança técnica desempenha no crescimento e desenvolvimento de um país. As inovações, de um modo geral, constituem o principal motor para o desenvolvimento de um país. Mas, cada modelo de crescimento econômico, trata de forma diferente a relação entre tecnologia e crescimento. Nos modelos mais antigos, o progresso técnico era encarado como uma variável residual exógena ao modelo, enquanto que nos modelos mais recentes o progresso técnico é incorporado ao modelo e passa a ser uma variável endógena.

Modelos mais antigos, como exemplo o de Solow (1957) visto no capítulo anterior, eram caracterizados por pressupostos neoclássicos: funções de produção com retornos constantes, concorrência perfeita, o capital e o trabalho como

únicos fatores de produção e a hipótese otimizadora por parte dos agentes individuais da economia. Como visto, Solow estabelece em seu modelo de crescimento uma equação de acumulação de capital. O estoque de capital cresce à uma taxa equivalente à soma de crescimento da população e da taxa de progresso técnico. Sem o crescimento da população e havendo um progresso técnico constante, os retornos marginais do capital seriam decrescentes e não haveria desta forma investimentos e conseqüentemente, crescimento. Sendo assim, as influências exógenas (crescimento populacional e tecnologia) salvam o crescimento econômico.

Resumindo, o processo do modelo de crescimento de Solow é o seguinte: a variação do nível de capital  $K$  depende do nível do produto  $Y$ , de acordo com a equação (1) do capítulo anterior na seção 1.3.2. Como a produtividade marginal de  $K$  é decrescente na produção de  $Y$ , a acumulação de capital se torna cada vez mais difícil, tendendo a um crescimento zero no longo prazo. Para sustentar o crescimento, Solow considera importante acrescentar as variáveis exógenas mencionadas.

O crescimento da renda per capita a longo prazo somente pode existir se houver uma tendência exógena devida ao progresso técnico. De outra forma, o crescimento no modelo básico de Solow limita-se ao que tem sido chamado de dinâmica transitória. (FREEMAN 1987, p. 554)

Para que o crescimento não pudesse ser extinguido, Solow considerou então um fator externo que aumenta a produtividade dos insumos de produção  $K$  e  $L$  ao longo do tempo. Este fator externo é o progresso técnico  $A$ , que passou a ser incorporado no modelo exogenamente.

O progresso técnico aumenta a produtividade e o retorno do capital. Assim, a acumulação de capital passa a depender diretamente da mudança técnica. Mas o progresso técnico não é explicado neste modelo. Portanto, o crescimento é explicado por fontes exógenas.

Mais tarde, outros economistas tentaram tornar endógena a mudança técnica aos modelos, como Arrow (1962). Ele destacou os efeitos do aprendizado como uma fonte de melhoria da tecnologia. Os modelos mais recentes de crescimento levam em consideração os fatores determinantes da mudança técnica, diferentemente no modelo adotado por Solow no qual o progresso técnico não é explicado. O crescimento a partir de então pode ser explicado por variáveis endógenas ao modelo.



É importante fazer uma classificação quanto às fontes de crescimento nos modelos de crescimento endógenos. Freeman (1997) utiliza a classificação sugerida por Amable (1993):

(a) A primeira fonte de crescimento endógeno seria um investimento em um determinado fator de produção. Romer (1986) em seu modelo de crescimento endógeno adota retornos constantes de escala assim como no modelo proposto por Solow, mas considera no seu modelo economias de escalas externas à firma. Assim, as externalidades garantem que a produtividade marginal dos fatores na acumulação dos fatores não tenda para zero a longo prazo.

(b) Outra fonte de crescimento endógena é a inovação tecnológica. Para que exista um crescimento econômico com esta fonte de crescimento é preciso que existam investimentos e recursos em Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) e em outras instituições de pesquisa básica e aplicada. O modelo de Romer em 1990 incorporou esta fonte de crescimento.

(c) Assim como o capital físico se acumula, o capital humano também. Este constitui de outra fonte de crescimento endógena dos modelos mais recentes. No modelo desenvolvido por Lucas (1988), os indivíduos acumulam capital humano numa forma de rendimentos crescentes. Quanto maior for o nível do capital humano, maior será a produtividade individual de cada trabalhador na produção do bem final.

(d) A última fonte de crescimento endógena seria através de bens públicos e infra-estrutura. Estes bens aumentam a produtividade dos fatores privados. Eles são produzidos por instituições sociais e financiados por meio de impostos.

Segundo Freeman, esta classificação ilustra o papel específico dos investimentos na relação entre a mudança tecnológica e o crescimento econômico, seja ele em capital físico, em P&D e em capital humano e público. A classificação acima aponta os diferentes fatores que impulsionam a mudança técnica numa tentativa de tornar esta variável endógena aos modelos de crescimento econômico. É importante saber não somente através de modelos, mas como o processo acontece no mercado quando tratamos da relação entre tecnologia e crescimento. Freeman (1987) enfatiza:

Antes de desenvolver novas oportunidades de crescimento (pela introdução de um novo produto no mercado, por exemplo), a firma geralmente procurará oportunidades alinhadas com o seu know-how. Após avaliar as tendências da demanda para produtos novos e melhorados, e para adaptar adequadamente seus programas de produção,

ela determinará quando será necessário fazer esforços de pesquisa e desenvolvimento que irão aumentar o estoque de conhecimentos da firma. Este aumento, contudo, só poderá tornar-se efetivo quando for seguido de investimentos físicos. [...] este círculo virtuoso de investimentos intangíveis, de aprendizagem, de investimentos materiais e de pressões do mercado, realça a particular importância dos investimentos intangíveis para um crescimento endógeno para incluir as externalidades da mudança técnica. O crescimento destes investimentos é induzido pela expansão e o tamanho do mercado [...]

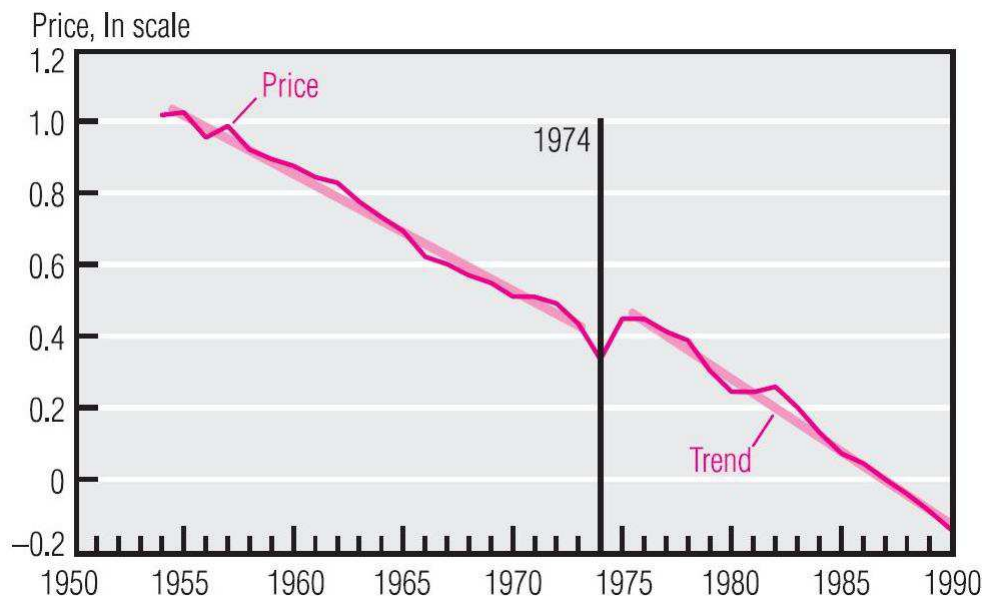
## **2.3 Produtividade, P&D e o uso das Tecnologias de Informação: O modelo caótico de Baumol e a análise proposta por Hercovici**

O ano de 1974 marcou o começo da Terceira Revolução Industrial—uma era de rápidos progressos tecnológicos associados com o desenvolvimento das Tecnologias de Informação? O ritmo acelerado do avanço tecnológico levou a uma maior desigualdade de renda? A desaceleração do crescimento da produtividade teve relação com estes fenômenos? (GREENWOOD, 1997, p. 1)

A partir de 1974 (ou talvez por volta de 1968) o crescimento da produtividade reduziu significativamente nos EUA e no exterior, e ainda não se recuperou totalmente, pelo menos quando os agregados nacionais são considerados. (Griliches, 1994)

Se ocorre um salto no estado da tecnologia, de forma que isto seja traduzido pelo uso de novas máquinas (tais como o uso das Tecnologias de Informação), e se, além disso, para a adoção destas novas tecnologias tivermos um custo significativo em termos de aprendizagem, de tal maneira que os trabalhadores qualificados têm uma vantagem em aprender, então o avanço na tecnologia será associado com um aumento na demanda por habilidades necessárias para a implementação do uso destas novas tecnologias. Portanto, o salário dos trabalhadores qualificados relativo ao dos trabalhadores não qualificados irá aumentar (isto também é denominado por prêmio de habilidades), e conseqüentemente a desigualdade de renda crescerá (Greenwood, 1997).

Nas fases iniciais, as novas tecnologias podem não funcionar eficientemente devido à inexperiência. O crescimento da produtividade pode parecer estável conforme a economia investe em conhecimentos necessários com a finalidade de que estas novas tecnologias sejam exploradas em todo seu potencial.



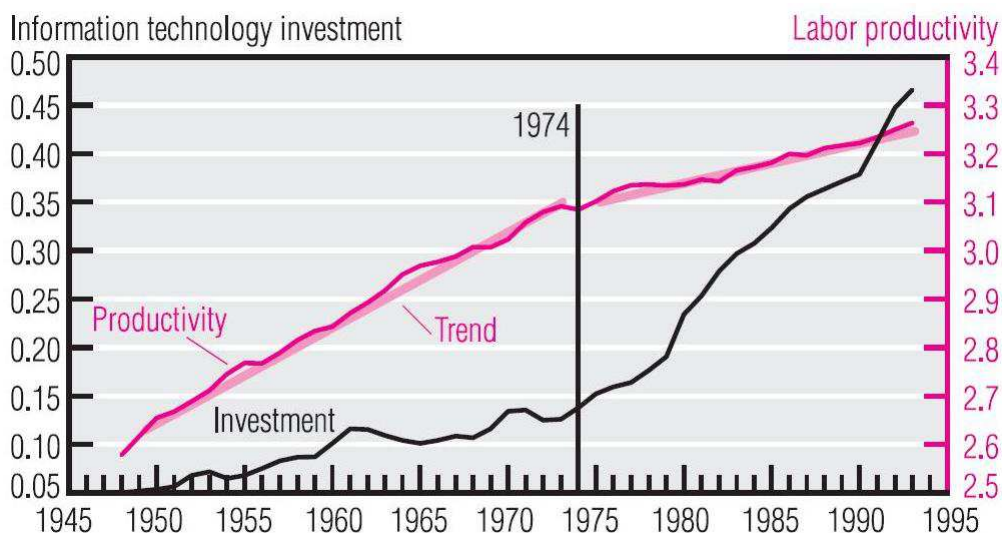
Fonte: Greenwood, Hercowitz e Krusell (1997).

Figura 2.1: Preço de novos equipamentos de 1950 a 1990 nos EUA

A figura 2.1 mostra o preço de uma parte de novos equipamentos de produção (bens de capital) relativo ao preço de uma unidade de bens de consumo não duráveis ao longo do período que sucede a Segunda Guerra Mundial. A queda acentuada no preço relativo dos equipamentos de produção é um reflexo da alta taxa de progresso tecnológico no setor de produção de bens de capital. Especificamente, o progresso tecnológico permite quantidades cada vez maiores de bens de capital a serem produzidos com uma certa quantidade de capital e trabalho. Este processo abaixa os preços destes bens. Este tipo de avanço tecnológico é chamado de investimento específico do progresso tecnológico, pois afeta o setor de bens de capital da economia (Greenwood, 1997).

O preço dos equipamentos caíram mais rapidamente após 1974 do que no período anterior, como mostra a linha de tendência na figura . Se um declínio no preço dos novos equipamentos pode ser tomado como uma medida de

melhor eficiência na produção, então o ritmo do avanço tecnológico saltou a partir de 1974. ”[...] O rápido avanço na tecnologia desde 1974 é sem dúvida ligado ao desenvolvimento das Tecnologias de Informação.” (GREENWOOD, 1997, p. 2)



Fonte: Greenwood (1997).

Figura 2.2: Investimentos em TI e Evolução da Produtividade do Trabalho nos EUA

A figura 2.2 ilustra o aumento surpreendente dos investimentos em Tecnologias da Informação como uma fração do investimento total em equipamentos de produção. A figura também mostra como o crescimento da produtividade do trabalho se estabilizou com o aumento dos investimentos em TI. A produtividade do trabalho, que mede a quantidade de Produto Nacional Bruto (PNB) criado por hora de trabalho, é muitas vezes tomada como uma medida de quanto eficiente é uma economia. Quanto mais PNB cada trabalhador puder produzir, melhor é uma economia. Antes de 1974, a produtividade do trabalho cresceu em cerca de 2% anualmente. Depois disto, cresceu a 0.8%. Esta mudança é muitas vezes chamada de *desaceleração do crescimento da produtividade*.

A figura 2.3 a seguir é baseada nos dados do trabalho de Gordon (2000). Ela compara as taxas de produção, dos insumos e do crescimento da produtividade alcançadas pela economia americana durante os anos 1995-1999 com três longos intervalos anteriores: 1870-1913, 1913-1972 e 1972-1995. A

primeira linha mostra a taxa real de crescimento do produto ao longo destes períodos.

As linhas 2 a 6 mostram a taxa de crescimento dos insumos e da produtividade. As linhas 2 e 3 exibem as taxas de crescimento dos insumos trabalho (medido em horas de trabalho) e capital, respectivamente. A linha 4 é a taxa de crescimento do capital por horas de trabalho. A linha 5 exhibe a taxa de crescimento da produção por hora, ou equivalentemente, a produtividade do trabalho. Os dados para esta linha na tabela podem ser calculados subtraindo a taxa de crescimento das horas de trabalho na linha 2 pela taxa de crescimento da produção na linha 1. A linha 6 exhibe o crescimento da produtividade total dos fatores (PTF), que é uma produtividade baseada na ponderação média de vários insumos, neste caso, capital e trabalho somente. A ponderação é baseada na participação de cada insumo na renda total.

O crescimento do produto por hora (linha 5) pode ser dividido entre o crescimento da PTF (linha 6) e da contribuição do aprofundamento do capital, que por sua vez é o crescimento do capital por horas de trabalho (linha 4) multiplicado pela participação do capital na renda total da economia, que é de aproximadamente um terço (Gordon, 2000). Assim, a taxa de crescimento da produtividade menos um terço da taxa de crescimento do capital por horas de trabalho é igual a produtividade total dos fatores<sup>1</sup>.

A pergunta que surge é: em um tempo de grandes avanços tecnológicos resultantes da introdução das Tecnologias de Informação (especificamente após a década de 70), por que razão houve uma estabilidade e uma desace-

---

<sup>1</sup>Considere a seguinte função de produção:

$$y = m + bh + (1 - b)k,$$

onde  $y$  é a taxa de crescimento do produto,  $m$  é a taxa de crescimento da produtividade total dos fatores,  $b$  é a elasticidade de produção com respeito ao insumo trabalho,  $h$  é a taxa de crescimento do insumo trabalho,  $1 - b$  é a elasticidade de produção com respeito ao insumo capital, e  $k$  é a taxa de crescimento do insumo capital. Assim, o crescimento do produto é a soma do crescimento da produtividade com as respectivas contribuições dos insumos trabalho e capital separadamente, ponderados pelas respectivas elasticidades de produção. Agora, subtraindo  $h$  de ambos os lados da igualdade da função de produção, podemos obter:

$$y - h = m + (1 - b)(k - h).$$

O crescimento da produção por hora (ou produtividade do trabalho) é agora igual ao crescimento da produtividade total dos fatores somado com o aprofundamento do capital, que é a elasticidade de produção com respeito ao insumo capital  $(1 - b)$  vezes a taxa de crescimento da relação capital-trabalho  $(k - h)$ .

	1870-1913	1913-1972	1972-1995	1995-1999
1. Produção	4.42	3.14	2.75	4.90
2. Horas de Trabalho	3.24	1.28	1.71	2.25
3. Capital (k)	4.16	2.07	2.98	4.87
4. Capital por horas de trabalho (k-h)	0.92	0.79	1.27	2.62
5. Produção por hora (y-h)	1.18	1.86	1.04	2.65
6. Produtividade total dos fatores (m)	0.77	1.60	0.62	1.79

Fonte: Gordon (2000).

Figura 2.3: Taxas de crescimento do produto, insumos e da produtividade total dos fatores para o intervalo 1870 a 1999 nos EUA

leração no crescimento da produtividade como os dados das figuras anteriores mostram<sup>2</sup>?

Griliches (1994) atribuiu esta desaceleração do crescimento ao problema dos dados disponíveis e como estes dados são utilizados para medir o crescimento:

A principal mensagem que eu tentarei transmitir é que nós frequentemente interpretamos mal os dados disponíveis por causa de atenção inadequada da forma como eles são produzidos e que a mesma falta de atenção por nós às fontes de nossos dados ajuda a explicar porque o progresso é tão lento. (GRILICHES, 1994, p. 5)

É notável que após a Revolução Industrial no século XVIII, a produtividade na indústria aumentou consideravelmente. O progresso técnico proporcionou melhorias nas técnicas de produção principalmente nas atividades industriais e manufatureiras. É também razoável considerar que existe uma correlação positiva entre o progresso técnico e os gastos com Pesquisa e Desenvolvimento (P&D): o setor de P&D gera externalidades positivas para o setor industrial e conseqüentemente para um aumento da produção. Mas a natureza das externalidades geradas por um progresso técnico impulsionado

<sup>2</sup>Observe que na figura 2.3 a produtividade para o período 1995-1999 é maior, havendo, portanto, uma aceleração no crescimento da produtividade. O autor Gordon atribui este crescimento a efeitos cíclicos que consideram o tamanho do intervalo do período considerado além de desmembrar esta produtividade entre os diferentes setores da economia concluindo que não houve de fato aceleração no crescimento da produtividade. Para mais detalhes, ver Gordon (2000).

pelo desenvolvimento das TI foi diferente daquelas geradas pela revolução industrial, sendo tais externalidades propagadas para outras atividades da economia.

Conforme visto, as evidências a partir de 1970, mostram um crescimento mais lento da produtividade, mesmo com a presença de aumentos nos gastos com P&D e investimentos em TI. Surge desta forma a necessidade de uma análise explicativa para a referida queda na taxa de crescimento da produtividade. Vários economistas estudaram as relações entre informação e o crescimento da produtividade do trabalho. Baumol e Wolff (1992) utiliza o modelo de 1967 para estudar uma relação entre produtividade e P&D. Mais tarde, Herscovici (2010) propõe uma análise alternativa modificando as hipóteses do modelo desenvolvido por Baumol e Wolff. Ambas as análises são explicitadas nesta seção. Por último, na conclusão deste trabalho, também será discutida um possível reavivamento do crescimento da produtividade a partir de 1995, como os dados da figura 2.3 mostraram.

### **2.3.1 A Análise de Baumol e Wolff**

Baumol e Wolff (1992) desenvolvem a análise assumindo que o setor de serviços tem uma taxa de crescimento da produtividade com tendência a crescer mais lentamente do que a taxa do setor industrial e manufatureiro. Nesta perspectiva, dividem a economia em dois setores: o setor produtivo e o setor improdutivo (ou estagnante). O setor produtivo se refere às atividades econômicas onde o crescimento da produtividade é geralmente rápido, enquanto que o setor estagnante é composto das atividades onde o crescimento da produtividade tende a ser baixo e menor que no setor produtivo.

A análise é feita através de uma modelagem de funções recursivas entre a produção e disseminação de informação e a taxa de crescimento da produtividade industrial. O setor de P&D é considerado um setor da economia que está envolvido na produção de informação. Numa perspectiva microeconômica, as firmas possuem atividades de P&D internas e fazem investimentos nestas com objetivos de melhorar seus produtos perante às concorrentes, aumentar a produtividade industrial e como uma forma de barreira à entrada de novas firmas. Portanto, percebe-se que a intensidade da produção de informação influencia a taxa de crescimento da produtividade industrial. No entanto, como veremos, Baumol e Wolff (1992) analisam também o sentido inverso: a taxa de crescimento da produtividade afetando a produção de informação. Eles resumem a análise em três elementos:

[...] (i) produção de informação, que estimula o crescimento da pro-

atividade na indústria; (ii) produção e disseminação de informação que, como atividades estagnantes ou assintoticamente estagnantes, são caracterizadas por um crescimento da produtividade que tende a ser inferior ao da atividade industrial. Como um resultado, o custo relativo e o preço da informação aumenta, e aumenta mais rapidamente que o aumento da taxa da produtividade industrial; (iii) quando isto acontece, outros insumos tendem a ser substituídos por informação, e então a demanda por informação é inibida, que, por sua vez, serve como um impedimento ao crescimento da produtividade. (BAUMOL & WOLFF, 1992, p.356, tradução nossa)

Baumol, utilizando os resultados descritos do modelo de 1967<sup>3</sup>, considera as seguintes equações:

$$y_1 = cL_1e^{rt}, \quad y_2 = bL_2 \quad (1)$$

$$AC_1 = \frac{wL_1}{y_1} = \frac{w}{ce^{rt}}, \quad AC_2 = \frac{wL_2}{y_2} = \frac{w}{b} \quad (2)$$

$$\frac{AC_2}{AC_1} = \frac{ce^{rt}}{b} \quad (3)$$

Onde  $y_i$  representa a produção no setor  $i$ ,  $w$  a taxa de salário,  $L_i$  o trabalho utilizado no setor  $i$ ,  $b$  e  $c$  constantes positivas e  $r$  a taxa de crescimento da produtividade;  $AC_i$  representa o custo médio (ou unitário) do trabalho. O índice 1 designará o setor produtivo (onde a produção cresce exponencialmente), o índice 2 o setor estagnante e o índice 3 o setor assintoticamente estagnante, que será definido a seguir.

O setor assintoticamente estagnante definido no modelo é aquele que utiliza insumos dos outros dois setores já definidos, em proporções fixas. Ou seja:

$$\frac{y_{13}}{y_3} = k_1, \quad \frac{y_{23}}{y_3} = k_2 \quad (4)$$

Segue que o custo médio da produção deste setor será:

$$AC_3 = k_1AC_1 + k_2AC_2 = \frac{k_1w}{ce^{rt}} + k_2\frac{w}{b} \quad (5)$$

---

<sup>3</sup>Ver referência Baumol (1967).



Quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $AC_3 \rightarrow k_2 \frac{w}{b}$ . Isto significa que, ao longo do tempo, o comportamento do custo unitário de produção do setor 3 (assintoticamente estagnante) se aproxima do custo unitário de produção do setor 2 (estagnante).

Observe que, nas atividades da economia onde a tecnologia é alta (que sofrem mais inovações e mudanças tecnológicas), considerando estas atividades como um setor assintoticamente estagnante do modelo, quanto maior a tecnologia maior será o valor de  $r$  da taxa de crescimento da produtividade, e quanto maior o valor de  $r$  mais rapidamente o custo unitário de produção do setor 3 se aproximará do custo unitário de produção do setor 2.

A queda no custo do insumo do setor produtivo explica uma queda no custo real unitário do setor assintoticamente estagnante. Mas a queda no custo real deste insumo reduz sua participação no custo total, deixando o desenvolvimento do custo total ser determinado pelo insumo do setor estagnante. Portanto, o período inicial do declínio no custo total do setor assintoticamente estagnante é seguido por um futuro de aumento de custo relativo. (BAUMOL & WOLFF, 1992, p. 252, tradução nossa)

O setor 2 (estagnante) é intensivo em trabalho e pode ser equivalente ao setor de serviços da economia. Um exemplo de indústria para o setor 3 (assintoticamente estagnante) é o de informática. Esta indústria depende da fabricação de hardwares e softwares. Seguindo a construção do setor 3, utiliza-se insumos de um setor produtivo (hardware) e de um setor improdutivo (software) que é intensivo em trabalho. O comportamento dos custos também se encaixam na lógica do modelo, seguindo a idéia de Herscovici:

[...] no caso da indústria informática, os custos ligados ao hardware, ou seja, ao insumo produtivo, diminuem, enquanto os custos ligados aos programas, intensivos em trabalho, aumentam. Os custos em trabalho aumentam em relação à totalidade dos custos, isto se explicando a partir da presença do componente estagnante. (HERSCOVICI, 2010, p. 4)

A hipótese de proporções fixas ( $k_1$  e  $k_2$ ) da utilização de insumos dos setores 1 e 2 é modificada logo em seguida no trabalho de Baumol. Agora ele considera que as proporções utilizadas dos insumos provenientes dos setores 1 e 2 na produção do setor 3 varia no tempo à diferentes taxas para cada

setor. Desta forma, temos uma abordagem mais geral para o estudo do setor assintoticamente estagnante, principalmente quando tratamos do setor de Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) com o propósito de analisar se este é um setor estagnante ou assintoticamente estagnante.

Baumol sugere que o setor de P&D na economia encaixa-se melhor como um setor assintoticamente estagnante que utiliza como insumos o trabalho mental e os equipamentos tecnológicos (ex: computadores), e o uso destes insumos variam no tempo. Além disso, a produção do setor de P&D depende da elasticidade preço da demanda dos insumos utilizados dos outros setores.

[...] Que a proporção dos insumos variam é indicada pelo fato que enquanto os gastos em P&D pela indústria privada aumentaram 36% entre 1967 e 1980 em termos reais, o número de cientistas e engenheiros empregados neste setor aumentou somente 21%. (BAUMOL E WOLFF, 1992, p. 254, tradução nossa)

Quanto ao comportamento da demanda pelos produtos dos diferentes setores, Baumol considera que as respostas das quantidades demandadas aos diferentes níveis de preços devem ser desenvolvidas endogenamente e isto desempenhará um importante papel na sua análise. Ele considera dois efeitos que variam a quantidade demandada dos produtos dos diferentes setores: uma em relação ao aumento da renda real gerada por um crescimento da produtividade dos setores produtivo e assintoticamente estagnante e a outra em relação a mudanças nos custos relativos (preços) dos diferentes setores.

A construção da função de demanda é tal que os efeitos da renda e dos preços sobre as quantidades demandadas são multiplicativos, ou seja, que o efeito de cada uma dessas variáveis é representado pela sua própria expressão e a função de demanda é o produto destas duas expressões. Além disso, a elasticidade preço da demanda é constante e o preço do setor  $i$  é proporcional ao seu respectivo custo médio. Assim, teremos:

$$(6) \quad y_i = f^i(y)AC_i^{-E_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Aqui,  $y$  representa a renda real total da economia (ou a produção total) e  $E_i$  é a elasticidade preço da demanda para o bem  $i$ , que é constante ao longo do tempo. De acordo com a equação (6), vemos que o efeito renda pode compensar o efeito preço quanto a quantidade demandada de cada setor (Herscovici, 2010).

Elevando ambos os membros da equação (6) a  $\frac{1}{E_1}$ , podemos facilmente obter:

$$(7) \quad \frac{y_1^{\frac{1}{E_1}}}{y_1^{\frac{1}{E_j}}} = g^j(y) \frac{AC_j}{AC_1} \quad (j = 2, 3)$$

Portanto, se todo  $E_1$  satisfaz  $0 < E_{i*} \leq E_i \leq E_{i**} < \infty$ , onde  $E_{i*}, E_{i**}$  são constantes, e uma vez que por (3) e (5) a fração  $\frac{AC_j}{AC_1}$  deve finalmente aumentar sem limite, obtém-se o resultado:

**Proposição 6** *Salvo que a elasticidade renda da demanda atua como compensadora do efeito da elasticidade preço, e que ao longo do tempo todas as elasticidades preços são limitadas entre zero e infinito,  $y_1$  deverá finalmente aumentar sem limite em relação à produção dos setores estagnante e assintoticamente estagnante. Isto é, a demanda relativa dos produtos dos setores 2 e 3 deverá em última instância se aproximar de zero.*

É importante enfatizar o resultado acima obtido: como os preços relativos dos produtos do setores estagnante e assintoticamente estagnante aumentam sem limite, a menos que as elasticidades preço ou renda da demanda são bruscamente inclinadas em favor destes produtos, a quantidade relativa demandada destes setores deverá finalmente cair, e poderá cair bem próxima de zero.

Segue agora a análise das funções recursivas entre P&D e crescimento da produtividade construída por Baumol.

Até aqui foi admitido que no setor produtivo a produtividade do trabalho está crescendo à uma taxa percentual constante  $r$ . Mas a partir de agora, ela será considerada como uma função de  $y_{31}$ , a quantidade de produção de informação (produzida pelo setor de P&D) utilizada como insumo pelo setor produtivo 1. Esta hipótese é relevante no sentido de que P&D (produzindo informação) e uma mudança técnica no setor 1 contribui para o aumento da produtividade (Baumol, 1992).

Nesta perspectiva, como o setor 3 (assimilado ao setor de P&D) é assintoticamente estagnante, o seu custo médio de produção e, conseqüentemente, seus preços relativos devem começar a aumentar. Utilizando o resultado da proposição 6, a demanda relativa por  $y_3$  e, portanto, o uso relativo deste como insumo pelo setor produtivo 1 cairá para zero. Com isso,  $r$  também

cairá. Portanto, a característica do setor assintoticamente estagnante, assimilado como uma atividade de P&D, atua como um freio sobre a taxa de crescimento da produtividade da economia.

Mas o mecanismo de retroalimentação é mais complexo do que parece ser:

[...] o declínio em  $r$  por si mesmo leva a uma desaceleração no preço relativo de P&D, e isto, por sua vez, serve para diminuir o declínio na demanda por estes produtos resultando numa queda do valor de  $r$ . (BAUMOL & WOLFF, 1992, p. 259, tradução nossa)

Para combinar todas estas relações, é feita uma formalização que agora dispensa os subscritos (1,2 e 3) dos setores de produção. Utilizando  $r_t$  para representar a taxa de crescimento da produtividade no período  $t$  fora o setor de P&D,  $y_t$  a produção na indústria de informação (P&D), e  $p_t$  o preço da informação (P&D), temos as seguintes relações:

A produção de informação pelo setor de P&D no período  $t$  contribui para a taxa de crescimento da produtividade no período  $t + 1$ :

$$(8) \quad r_{t+1} = a + by_t$$

O preço (custo) da informação produzida pelo setor de P&D, que é um setor intensivo em trabalho podendo ser assimilado à um setor de serviços conforme  $t$  evolui, cresce na proporção dos ganhos de produtividade do trabalho realizados na economia:

$$(9) \quad \frac{(P_{t+1} - P_t)}{P_t} = vr_{t+1}$$

A função de demanda por informação, dada a elasticidade preço da demanda  $E$  constante no tempo:

$$(10) \quad \frac{(y_{t+1} - y_t)}{y_t} = -E \frac{(P_{t+1} - P_t)}{P_t}$$

A demanda por informação depende do preço da informação numa relação negativa através da elasticidade preço positiva.

Em seguida, substituindo (8) e (10) em (9), obteremos:

$$(11) \quad y_{t+1} = (1 - ka)y_t - kby_t^2$$

onde  $k = vE > 0$ .

A equação (11) é a relação de feedback de Baumol. Esta relação também pode ser denominada de função recursiva, na medida que os valores num período  $t$  atual determinam o valor para o período seguinte  $t + 1$ , e assim sucessivamente.

Supondo que a sequência  $y_t$  em (11) seja convergente e que tenha um limite  $y_e$ , ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = y_e$ , podemos então escrever  $y_{t+1} = y_t = y_e$  e obteremos os seguintes valores de equilíbrio:

$$(12) \quad y_e = 0 \text{ e } y_e = -\frac{a}{b}.$$

Derivando a equação (11) com relação a  $y_t$ , temos:

$$(12) \quad \frac{dy_{t+1}}{dy_t} = (1 - ka) - 2kby_t$$

que é igual a

$$(13) \quad (1 - ka), \text{ se } y_t = y_e = 0$$

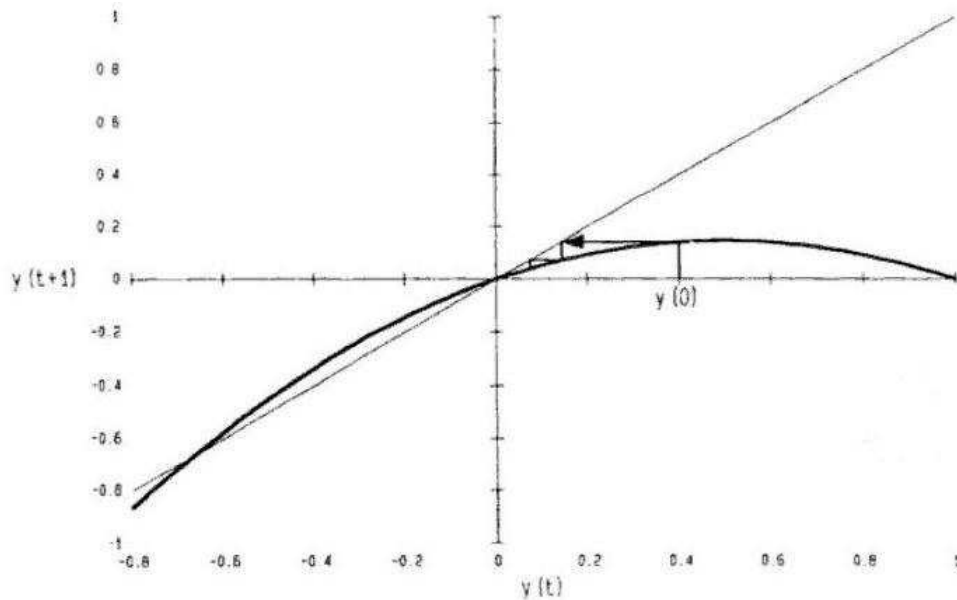
e

$$(14) \quad (1 + ka), \text{ se } y_t = y_e = -\frac{a}{b}.$$

Admitindo a hipótese de que  $vEa = ka < 1$ , o que parece possível, uma vez que pode-se argumentar  $v \cong 1$  em (9), e  $E$ , a elasticidade preço da demanda por informação provavelmente não muito maior que, digamos, 2, enquanto  $a$ , o valor da taxa de crescimento da produtividade quando a produção de informação é zero (equação (8)), é provavelmente muito pequeno (Baumol, 1992).

No entanto, o que não está muito claro é se  $a$  será provavelmente negativo ou positivo. Um valor positivo deste parâmetro significa que na ausência da produção de fluxos de informações endógenas, a produtividade deverá ainda assim continuar a crescer ao que se chama de taxa autônoma,  $a$ . Então (13) nos diz que o ponto de equilíbrio  $y_e = 0$  será estável, enquanto por (14)  $y_e = -\frac{a}{b} < 0$  será instável e então a trajetória tenderá para a origem, movendo monotonicamente para zero de produção de informação pelo setor de P&D, e taxa de crescimento da produtividade  $a$ . O diagrama de fase está na figura 2.4. Observe que tanto o crescimento da produtividade quanto a

produção de informação pelo setor de P&D sofrem um declínio, com este último aproximando-se do limite zero.



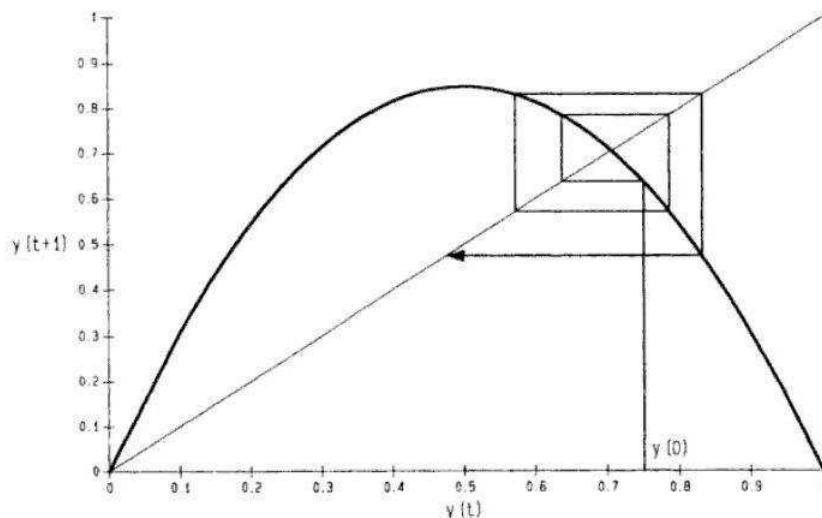
$$y(0) = 0.4, w = 0.7$$

Fonte: Baumol (1992).

Figura 2.4: Diagrama de Fase da função recursiva  $y_t$  com  $y_0 = y(0) = 0.4$  e  $w = 0.7$

Mas, na ausência de produção de informação pelo setor de P&D, a produtividade deverá, na verdade, começar a cair, como aparentemente aconteceu durante alguns períodos históricos anteriores. Isto motiva uma consideração de que  $a < 0$ . Para um valor de  $a$  negativo, a questão será revertida, com o equilíbrio na origem instável e  $y_e = -\frac{a}{b} > 0$  podendo ser estável. Se  $ka > -1$ , de modo que a derivada da equação (11) dada pela expressão (12) seja positiva para o valor de convergência  $y_e = -\frac{a}{b}$ , temos que o valor  $y_e = -\frac{a}{b}$  será estável desta vez, e este ponto de equilíbrio será aproximado monotonicamente. No entanto, se  $ka < -1$ , o declive do diagrama de fase até o valor  $y_e = -\frac{a}{b}$  será negativo, e a trajetória será oscilatória (figura 2.5). Para  $ka = -2$ , estas oscilações se tornarão instáveis e mais complexos padrões cíclicos surgirão. Para um valor suficientemente grande de  $-ka$  um regime

caótico irá ocorrer<sup>4</sup>, com todos estes resultados dificultando uma previsão e uma intuição explicativa.



$$y(0) = 0.75, w = 3.4$$

Fonte: Baumol (1992).

Figura 2.5: Diagrama de Fase da função recursiva  $y_t$  com  $y_0 = y(0) = 0.75$  e  $w = 3.4$

Como  $y_t$  se aproxima de zero quando  $a > 0$ , pela equação (8) a produtividade continua a crescer no próximo período. Isto significa que, pela equação (9),  $P_t$ , o preço da informação, continua aumentando e continua pressionando para baixo a quantidade de informação demandada (equação (10)), embora esta produção já seja igual a zero. No caso contrário em que  $a < 0$ , mesmo com  $y_t$  positivo mas suficientemente próximo de zero, a produtividade começará a cair. Isto vai diminuir o preço da informação, pela equação (9), e então irá estimular a quantidade demandada. Neste caso, para  $y_t$  próximo de zero, pode-se esperar que a trajetória seja dirigida numa direção ascendente, como pode ser visto na figura 2.5.

<sup>4</sup>Escrevendo (11) como  $y_{t+1} = f(y_t)$ , pelo resultado padrão de Li e Yorke (1982), o limite próximo da região caótica é o menor valor de  $ka$  em que  $y_{t+3} = f(f(f(y_t)))$  obtém sua primeira raiz real satisfazendo  $y_{t+3} = y_t$  mas não satisfazendo  $y_{t+2} = y_t$  e  $y_{t+1} = y_t$ . No caso particular onde  $1 - ka = kb$ , (11) torna-se a simples equação  $y_{t+1} = wy_t(1 - y_t)$  (escrevendo  $w = 1 - ka$ ) cujas propriedades tem sido estudadas extensivamente, e para o qual o regime caótico começa em  $-ka=2.83$  aproximadamente. (Baumol, 1992, p. 261)

Resumindo, dependendo dos valores dos parâmetros adotados, as equações (11) e (12) mostram que a evolução da produção de informação  $y_t$  pode se tornar caótica. Assim, a estas oscilações de  $y_t$  correspondem, pela equação (8), a oscilações na taxa de crescimento da produtividade,  $r_t$ . Em consequência disso, dada uma correlação positiva entre o crescimento econômico e o crescimento da produtividade, a essas evoluções da taxa de crescimento da produtividade estão associadas evoluções da taxa de crescimento do PIB (Herscovici, 2010)

Herscovici destaca uma importante observação no modelo desenvolvido por Baumol, ressaltando que uma das construções do modelo são cruciais para se chegar a tais flutuações na taxa de crescimento da produtividade:

[...] é importante observar que a possibilidade do sistema gerar, de maneira endógena, flutuações, e tornar-se caótico, provém do fato da elasticidade preço da demanda por informação ser negativa. (HERSCOVICI, 2010, p. 6)

A análise desenvolvida por Baumol em geral, indica que podem existir várias perspectivas possíveis entre o setor de atividades de informação (P&D) e o crescimento da produtividade industrial, cada uma relevante para a política. Primeiro, existe uma possibilidade de uma sequência de estágios que não terminam em si, envolvendo um declínio monótono no crescimento da produtividade e na produção de informação. Esta é sem dúvida, uma situação preocupante para a política de produtividade. Segundo, o modelo indica que o mecanismo intertemporal pode muito bem ser oscilatório dependendo dos parâmetros, e pode, portanto, implicar uma série de interrupções no crescimento da produtividade. E finalmente, através de outros valores adotados para os parâmetros, a análise indica que o modelo pode também ser capaz de gerar um comportamento caótico.

Obviamente, esperamos que um aumento nos gastos em P&D aumentarão o crescimento da produtividade, mesmo que com algum atraso. Mas a verdadeira taxa de crescimento da produtividade nos outros setores contribuídos por P&D, influencia o custo relativo de P&D (informação), aumentando este custo relativo. Assim, o próprio sucesso do trabalho pelo setor de P&D pode aumentar o preço futuro impedindo a demanda da sua produção (Baumol, 1992).



### 2.3.2 A análise de Herscovici e a sugestão de um novo modelo

A análise da produtividade e da produção de conhecimento e informação é feita com pressupostos diferentes dos adotados por Baumol. Primeiro, a partir de dados sobre o crescimento da produtividade nos diferentes setores da economia, surge a observação de que metade dos ganhos de produtividade dos fatores é realizada no setor das TIC (Tecnologia da Informação e Comunicação), conforme mostra a figura 2.6. Desta forma, o setor que produz este tipo de inovação não é assintoticamente estagnante conforme Baumol considerou, pois ele realiza a metade dos ganhos de produtividade na totalidade da economia (Herscovici, 2010).

	1974-1990	1990-1995	1996-1999
Cresc. da produtividade			
global dos fatores	0,40	0,57	1,25
- Computadores	0,12	0,13	0,22
- Semicondutores	0,08	0,13	0,41
- Outros setores	0,20	0,30	0,62

Fonte: Herscovici (2010).

Figura 2.6: Contribuição dos diferentes setores ao crescimento da produtividade (em %, por ano, para a economia americana)

Em seguida, Herscovici apresenta uma tabela (figura 2.7) para mostrar a diferença nos ganhos de produtividade entre os setores que utilizam as TIC e os que não utilizam. A partir destes dados, ele ressalta as observações seguintes:

(i) As TIC não geram externalidades positivas para as atividades manufatureiras e industriais e sim para as atividades de serviço.

(ii) No que se refere ao período 1995-2000, os ganhos de produtividade na totalidade da economia para a União Européia e para os Estados Unidos foram, respectivamente 1.4 e 2.5. Esta diferença acontece pelo fato de que o peso dos serviços que utilizam as TIC, no PIB, é mais importante nos Estados Unidos do que na União Européia, bem como os ganhos de produtividade. Além disso, os ganhos de produtividade realizados no setor que produz as TIC são mais importantes nos Estados Unidos.

	Cresc. produtividade do trabalho				%PIB	
	1990-95		1995-2000		(2000)	
	EU	US	EU	US	EU	US
Totalidade da Economia	1.9	1.1	1.4	2.5		
Indústria utilizando TIC	3.1	-0.3	2.1	1.2	5.9	4.3
Indústria não utilizando TIC	3.8	3.0	1.5	1.4	11.9	9.3
Serviços utilizando TIC	1.1	1.9	1.4	5.4	21.1	26.3
Serviços não Utilizando TIC	0.6	-0.4	0.2	0.4	44.7	43.0
Indústria produtoras de TIC	11.1	15.1	13.8	23.7	1.6	2.6
Serviços produtores De TIC	4.4	3.1	6.5	1.8	4.3	4.7

Fonte: Herscovici (2010).

Figura 2.7: Externalidades geradas pelo progresso técnico para os países da União Européia e para os EUA

(iii) Com relação ao setor das TIC, o setor industrial (setor produtivo ligado ao hardware) apresenta ganhos de produtividade do trabalho consideráveis, mas seu peso no PIB é baixo, gerando pouco valor agregado; já o setor de serviços (componente estagnante), embora apresente ganhos de produtividades do trabalho menores, representa uma parte relativa maior do PIB.

Da observação (iii), surge uma importante conclusão, que será importante para a construção das hipóteses da modelagem de Herscovici:

Este fato pode explicar a relação não linear que existe entre a taxa de crescimento da produtividade do trabalho e a taxa de crescimento

do PIB [...] permite refutar uma relação kaldoriana de causalidade cumulativa, e linear, entre a taxa de crescimento da produtividade do trabalho e o crescimento econômico [...] (HERSCOVICI, 2010, p. 8)

Deste modo, nesta nova economia impulsionada pelo desenvolvimento das TIC, as relações de Kaldor não se verificam, ou seja, o crescimento da indústria não será o principal fator para explicar o crescimento da economia a partir do produto agregado, pois a indústria numa das leis de Kaldor identifica-se como o motor de crescimento por ser o setor mais dinâmico e difusor de inovações (Feijó, Tostes Lamonica, 2007).

A conclusão de uma relação não linear entre a taxa de crescimento da produtividade do trabalho e a taxa de crescimento do PIB, pode ser reforçada com o apoio dos dados da figura 2.8.

	Crescimento do PIB	Cres. da produtividade do trabalho
1975-1982-2	3,0	0,7
1982-3 1990-4	3,7	1,6
1991-1-1999-4	3,5	2,0
A partir de 1995	4,2	2,6

Fonte: Herscovici (2010), Departamento do Comércio Americano.

Figura 2.8: Crescimento econômico e o crescimento da produtividade do trabalho para os Estados Unidos, em % por ano

A partir da figura 2.7, percebe-se que o setor de serviços que utilizam as TIC desempenham um papel fundamental para explicar os ganhos de produtividade do trabalho, considerando seu peso relativo no PIB (valor agregado). Além disso, o progresso técnico gera externalidades positivas principalmente para o setor de serviços e não para as atividades industriais como assumido por Baumol. O aumento da produtividade no setor industrial pode ser concebido como um progresso técnico autônomo, que não depende diretamente das TIC (Herscovici, 2010).

Uma das principais consequências macroeconômicas é que os setores ligados às TIC não podem ser considerados um setor motor (no

sentido schumpeteriano) capaz de promover uma nova fase longa de expansão. As potencialidades que eles contêm, em termos de crescimento da produtividade do trabalho do PIB, dependem da natureza das externalidades que eles geram, das modalidades de apropriação dessas externalidades e do sistema de DPI que, limita estas modalidades de apropriação. (HERSCOVICI, 2010, p. 9)

As externalidades geradas por um progresso técnico ligado diretamente às TIC, dependem de fatores como os sistemas de DPI que limitam as apropriabilidades sociais, gerando um impacto restrito das externalidades geradas por este tipo de progresso técnico (Herscovici, 2007); e de variáveis institucionais.

Neste sentido, as hipóteses e as construções do modelo baumoliano limitam-se no que diz respeito ao funcionamento da nova economia<sup>5</sup>. Na perspectiva de Herscovici, os modelos baumolianos estão limitados às seguintes observações:

1) A informação e a pesquisa não são bens privados. Assim, eles podem ser assimilados a bens públicos e podem ser apropriados a agentes que não pagam o direito de utilizá-los. Portanto não é possível estabelecer uma relação linear de proporcionalidade inversa entre as variações dos preços e as variações das quantidades demandadas. Segue que a construção da relação de feedback de Baumol não é efetivada.

2) A concorrência não se dá pelos preços (ou custos médios de produção, como considerado no modelo baumoliano) e sim de uma forma qualitativa. A valorização econômica dos bens depende da quantidade de informação e de conhecimento codificado neles contidos, dependendo cada vez menos dos custos em trabalho necessários à sua produção.

3) Os gastos em P&D não são fatores substituíveis. Na Organização Industrial, estes gastos representam um meio de construir barreiras à entrada, e são irreversíveis.

4) A remuneração do trabalho que produz inovação e, conseqüentemente, informação, é ligada a uma lógica rentista e não ao trabalho assalariado. O sistema de DPI privado internaliza as externalidades da produção de conhecimentos, através da apropriação de uma renda temporária de monopólio.

---

<sup>5</sup>A economia da informação e do conhecimento, que como capitais intangíveis, não atendem às formalizações de modelos clássicos da economia.

A valorização econômica deste tipo de produção é particularmente aleatória, no sentido dela não ser regulada a partir de uma lógica de custos, seja em termos de igualação entre custo e receita marginal, seja em função dos custos em trabalho; trata-se de uma lógica de protótipo [...] (HERSCOVICI, 2010, p. 11)

Desta forma, a análise alternativa é proposta a partir da construção de um modelo dos ganhos de produtividade do trabalho inspirado no capitalismo pós-industrial, onde o peso industrial no PIB é menor em relação ao do setor de serviços. A criação de valor e de riqueza (conhecimento e informação) não são medidas a partir do trabalho aplicado a produção de mercadorias. Com a aparição de uma nova era da economia destacada pelo nível conhecimento e de informação, não é mais possível mensurar os ganhos de produtividade do trabalho nos diferentes setores da economia, em função dos desenvolvimentos das atividades imateriais ligadas à informação e ao conhecimento. Além disso, o aumento da produção não se traduz por um aumento da produtividade global, pois o aumento da demanda se relaciona apenas com determinados setores e, conforme mostra a figura 2.7, o progresso técnico e o aumento da produtividade do trabalho são limitados a certos setores e não se propagam para os outros setores. O trabalho assalariado é substituído por uma lógica rentista, ligado aos sistemas de detenção de DPI. (Herscovici, 2010).

### **As hipóteses e o modelo alternativo proposto**

Três setores são considerados na modelagem: o setor 1 é o setor estagnante, no sentido definido por Baumol, o setor 2 é o setor industrial (fora a produção de hardware), e o setor 3 é o setor ligado a produção de TIC.

As hipóteses são as seguintes:

*Hipótese 1* Existe um progresso técnico autônomo, que se traduz por um aumento da produtividade do trabalho, nos setores 2 e 3.

*Hipótese 2* A produção do setor 3 pode ser assimilada a bens públicos.

Dessa forma, não existe uma relação inversa entre variações dos preços e variações das quantidades demandadas. Além disso, há presença de custos marginais decrescentes e custos unitários de produção diminuindo com o consumo. Portanto, os preços desses bens não serão determinados a partir do custo médio em trabalho da sua produção.

*Hipótese 3* Em função da dinâmica dos mercados, os custos em P&D são

irreversíveis: não é possível substituir os investimentos em P&D por outros fatores de produção.

*Hipótese 4* A concorrência se exerce, parcialmente, fora dos preços.

*Hipótese 5* A valorização dos bens e serviços do setor 3 é aleatória.

A hipótese 5 significa que, dado o caráter rentista da valorização dos trabalhos técnicos e científicos para a produção das inovações (garantido a partir de uma renda de monopólio dos sistemas de DPI), não é possível estabelecer uma relação entre uma função de produção e a quantidade de trabalho utilizada.

*Hipótese 6* A taxa de crescimento dos salários é determinada em função da taxa de crescimento da produtividade do trabalho na totalidade da economia,  $r$ ; apenas parte dos ganhos de produtividade é repassada para os salários. Por outro lado, a parte relativa dos salários no PIB diminui, em benefício das mais valias financeiras, dos lucros e das rendas ligadas à propriedade intelectual e à inovação; isto tem que ser interpretado como uma redistribuição menor dos ganhos de produtividade para o fator trabalho.

As relações definidas para as funções de produção em cada setor são as seguintes:

Setor estagnante:

$$Y_{1t} = aL_{1t} \quad (1)$$

Setor produtivo industrial (fora produção de hardware):

$$Y_{2t} = bL_{2t}e^{r_{2t}} \quad (2)$$

Setor de produção das TIC:

$$Y_{3t} = \frac{cL_{3t}e^{r_{3t}}}{\Omega} \quad (3)$$

Onde  $r_i$  representa a taxa de crescimento da produtividade do trabalho no setor  $i$ ,  $r$  a taxa média de produtividade do trabalho na totalidade da economia e  $\Omega$  o componente aleatório relativo à valorização da produção no setor 3. Note que quanto maior o componente aleatório relativo à valorização da produção menor será a produção do setor 3.

Supondo que  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  representem a quantidade de insumo proveniente dos setores 1, 2 e 3 respectivamente, o custo médio de produção de cada setor será dado pelas seguintes expressões:

$$C_1 = \frac{We^{rt}(L_{1t} + y_1L_{2t} + z_1L_{3t})}{aL_{1t}} \quad (4)$$

$$C_2 = \frac{We^{rt}(L_{2t} + x_2L_{1t} + z_2L_{3t})}{bL_{2t}e^{r_2t}} \quad (5)$$

$$C_3 = \frac{We^{rt}L_{3t}\Omega}{cL_{3t}e^{r_3t}n} \quad (6)$$

Onde  $n$  representa o número de consumidores. Note que o custo médio de produção de conhecimento e de informação pelo setor 3 decresce com o aumento no número de consumidores.

Analisando as equações dos custos, pode-se concluir que  $C_1$  aumenta com o tempo. O desenvolvimento de  $C_2$ , dependerá das taxas de crescimento da produtividade na totalidade da economia  $r$  e do setor 2,  $r_{2t}$ . Se  $r \leq r_{2t}$  o custo médio de produção do setor 2 será constante ou diminuirá com o tempo.

Como o setor de produção das TIC estão relacionados a produtos de alta tecnologia, é intuitivo considerar que a produtividade do trabalho neste setor cresça mais rapidamente que a taxa média da economia, ou seja,  $r_{3t} > r_t$ . Logo,  $C_3$  diminui. Mas, em virtude de uma intensificação do caráter aleatório  $\Omega$ , essa diminuição pode ser compensada.

No que diz respeito às relações entre a produção de informação e o crescimento da produtividade do trabalho, Herscovici conclui:

O caráter de bem público da Informação e do Conhecimento não permite estabelecer, como o fez Baumol, uma relação linear entre (a) a variação dos preços da informação e sua demanda nem (b) entre a produção de informação e o aumento da produtividade na totalidade da economia. As externalidades e suas modalidades de internalização, a partir da definição dos sistemas de DPI, representam a variável chave [...] (HERSCOVICI, 2010, p. 16)

Além disso, note que, como os coeficientes técnicos (quantidades de insumos provenientes dos outros setores) são constantes, o preço da inovação não explica o nível de sua quantidade demandada.

## 2.4 Considerações ao Capítulo

Com uma revisão da história da evolução do crescimento econômico e do crescimento da produtividade que aumentou significativamente após a revolução industrial, procurou-se relatar neste capítulo, as diferentes fases vividas pela economia. Como foi visto, o alto crescimento experimentado pelas economias dos países logo após a segunda guerra mundial inspirou uma série de modelos com objetivo de explicar tal crescimento a partir das novas técnicas de produção beneficiadas por uma invenção de novas máquinas e melhorias tecnológicas, tornando o trabalho mais produtivo.

Sem dúvida, é de se esperar que melhores tecnologias aumentem a produção e a produtividade do trabalho na economia. Foi o que aconteceu no período que sucedeu a revolução industrial até meados dos anos 1960. No entanto, após este período, a taxa de crescimento da produtividade tornou-se declinante, mesmo com melhores tecnologias de produção e gastos com Pesquisa e Desenvolvimento. Daí surge a necessidade de uma teoria para explicar tal queda do crescimento da produtividade. Baumol utiliza os resultados do modelo desenvolvido em 1967 e procura explicar essa queda através do seu modelo de feedback entre a produtividade e a produção de informação pelo setor de P&D. Mais tarde, Herscovici também estuda o assunto de forma diferente, abordando os contextos e as teorias da nova economia, a economia da informação e do conhecimento. Esta nova economia possui algumas características diferentes da economia clássica, levando Herscovici a chegar em resultados diferentes daqueles de Baumol.

No modelo baumoliano, vimos como sua relação entre crescimento da produtividade e produção de informação pode tornar-se caótico e oscilatório. A questão principal considerada por este autor foi a relação linear inversa entre as variações dos preços e quantidades demandadas da informação. Se o preço da inovação sobe (por exemplo, por um aumento da taxa de produtividade), isto diminui a quantidade demandada de informação e conseqüentemente há uma queda na taxa de crescimento da produtividade. Baumol também assume que os preços dos bens em cada setor são proporcionais aos custos médios em trabalho da produção desses bens, endogeneizando dessa forma a produtividade do trabalho em seu modelo. Além disso, constrói todo o modelo a partir de uma lógica de trabalho assalariado.

Já Herscovici, com uma perspectiva voltada para as características de uma nova era da economia da informação e do conhecimento, desmonta as hipóteses assumidas por Baumol para a construção do seu modelo. Primeiro, ele destaca que a produção de informação pode ser assimilada a bens públicos.



O consumo deste bem é interpretado por diferentes formas pelos agentes na economia. Não se considera assim, uma relação linear inversa entre variações dos preços e variações das quantidades demandadas como assumido no modelo baumoliano. Segundo, ele parte de uma lógica rentista de remuneração dos trabalhadores, a partir das diferentes valorizações do sistema de DPI, e não de uma lógica de trabalho assalariado. Além disso, a valorização econômica dos bens do setor das TIC se dão pela quantidade de informação codificada nesses bens e não pela quantidade de trabalho necessário à sua produção. Terceiro, e também um dos principais pressupostos, é que as externalidades positivas geradas pela produção de bens do setor das TIC se aplicam ao setor de serviços e não às atividades industriais, considerando que estas possuem um progresso técnico autônomo.

Mas, de que maneira podemos interpretar a queda do crescimento da produtividade ocorrida a partir da modelagem de Herscovici? A resposta é dada a partir da construção do autor mostrada a seguir.

Ele começa definindo as diferentes formas de progresso técnico em relação aos ganhos de produtividade do trabalho:

(i) Um progresso técnico autônomo, definido de maneira exógena e fora do modelo.

(ii) O efeito Baumol, das relações entre o crescimento dos ganhos de produtividade do setor e sua parte relativa na totalidade do produto: se a parte relativa dos setores com produtividade baixa aumenta no decorrer do tempo, os ganhos de produtividade global da economia vão diminuir, assim como o crescimento do produto. Isto corresponde ao modelo de 1967 de Baumol.

(iii) Um efeito que mede a variação da produtividade a partir do peso relativo dos insumos, ou seja, um efeito induzido. Este efeito pode ser induzido a partir de uma diminuição do valor dos insumos ou pelas modalidades de internalização das externalidades produzidas por estes insumos.

Conforme mostra os dados da figura 2.7, o setor industrial atende a proposição (i), ou seja, neste setor o progresso técnico pode ser considerado autônomo. Os insumos utilizados do setor das TIC pelo setor industrial não geram externalidades para este (para os ganhos de produtividade deste setor). Quanto ao efeito baumol da proposição (ii), percebe-se um efeito negativo: a um peso relativo menor no PIB do setor industrial, corresponde uma taxa de crescimento da produtividade maior.

Já no setor de serviços, percebe-se um efeito induzido positivo, ou seja, a utilização dos insumos produzidos pelo setor das TIC aumenta a produtividade do trabalho neste setor. Além disso, o componente dos serviços que utiliza as TIC, possui maiores taxas de crescimento da produtividade (em relação ao setor que não utiliza) e tem um peso relativo maior no PIB.

Portanto, a nova economia gera impactos diferentes sobre os setores. As externalidades produzidas para o setor de serviços utilizando as TIC são maiores do que aquelas do setor industrial.

[...] O setor de serviços que não internalizava as externalidades produzidas pelo progresso técnico volta a internalizar estas externalidades: isto pode ser explicado tanto a partir da modificação da natureza e da função deste setor quanto a partir da modificação da natureza do progresso técnico. (HERSCOVICI, 2010, p. 17)

Estas considerações, motivaram Herscovici a escrever a função:

$$r = \phi \left( r_i, \frac{y_i}{PIB}, \frac{\delta_{ij}}{y_i} \right)$$

Assim, a taxa de crescimento da produtividade média do trabalho na totalidade da economia  $r$  depende: do progresso técnico autônomo do setor  $i$ ; da parte relativa daquele setor na produção (composição no PIB)  $\frac{y_i}{PIB}$ ; e do efeito induzido da utilização dos insumos do setor  $j$  (das externalidades geradas por este setor).

Portanto, pode-se dizer que a explicação da queda da produtividade ocorrida a partir de 1960, deve-se ao fato de que o peso relativo do setor industrial e de produção de hardware, que experimentam maiores taxas de crescimento da produtividade, está cada vez menor no PIB, enquanto que o setor de serviços (estagnante), que experimentam taxas baixas de crescimento da produtividade, está ganhando pesos maiores. Assim, o setor industrial pode deixar de ser considerado como um setor motor, capaz de sustentar o crescimento de longo prazo, deixando de explicar os ganhos de produtividade na totalidade da economia (Herscovici, 2010).

# Conclusão

A partir de um estudo de diferentes contribuições teóricas, tanto em modelos de crescimento e de relações entre os diferentes setores e atividades econômicas (e a contribuição destes para o crescimento da produtividade a partir das externalidades geradas) quanto em próprias discussões teóricas, este trabalho procurou em seu contexto geral, observar as diferentes fases vividas pela economia desde a estagnação antes da primeira revolução industrial até o desenvolvimento da nova economia com o surgimento das Tecnologias de Informação e Comunicação.

No primeiro capítulo, estudamos a partir do modelo de Prescott (2002), a unificação das teorias de Malthus e Solow para modelar as economias pré industrial e pós industrial divididas pela introdução da primeira revolução industrial. O trabalho de Prescott conseguiu captar os efeitos das duas economias ao longo de todo período a partir de um modelo de crescimento. Os modelos de crescimento neoclássicos do século XX, desenvolvidos após a segunda guerra, captam os efeitos da economia desta época, na qual a acumulação de capital físico e as tecnologias desempenhavam papel fundamental no crescimento do produto. Estes modelos não levaram em conta o período antecessor à primeira revolução industrial, onde houve uma estagnação do padrão de vida e do crescimento da produção agregada, limitados pelo baixo capital naquela época, uma vez que a revolução industrial não havia começado.

O modelo de Prescott acrescentou uma importante contribuição para a literatura do crescimento econômico, tendo em vista a extensão do modelo para as duas economias: a da estagnação até aproximadamente 1800 e a do crescimento experimentado no século XX. No entanto, não se pode deixar de dizer que apesar deste aumento de poder explicativo, este modelo ainda contém algumas limitações. Só para se ter uma idéia, a questão principal para o estudo do crescimento da renda foi medido através do crescimento do produto através da função de produção agregada. Este modelo de crescimento, assim como o de Solow (1957) foca o lado da oferta, por meio do estudo

da função de produção neoclássica. Não há estudo sobre o comportamento da demanda agregada, e sua importância, na determinação do crescimento de longo prazo. O progresso tecnológico é visto como a principal fonte de crescimento da renda per capita. Implicitamente, considera-se na geração de modelos neoclássicos, que a oferta cria a sua própria demanda. Além disso, o crescimento da produtividade total dos fatores dado pelas sequências  $\{A_{M_t}\}_{t=t_0}^{\infty}$ ,  $\{A_{S_t}\}_{t=t_0}^{\infty}$  é considerado exógeno. A PTF da função de produção agregada simplesmente cresce após a revolução industrial de forma exógena.

Uma vez que o principal fator de crescimento da renda das economias está focado no lado da oferta a partir da função de produção agregada, deve-se observar que o principal motivo para a economia pré industrial ter sofrido uma estagnação se deve ao fato de que a função de produção definida para esta época continha um insumo fixo: a terra, que naquela época poderia ser considerado como o principal fator de produção. Desta forma, o lado da oferta da economia, explicado pela função de produção, era de certa forma limitado pela oferta fixa de terra existente. A produção crescia lentamente, uma vez que era intensiva em terra, e esta limitada por fatores geográficos. O padrão de vida, medido no modelo através dos consumos das famílias, foi constante já que a produção agregada crescia lentamente e o crescimento populacional não era limitado.

Com o surgimento da primeira revolução industrial, o processo produtivo deixou de ser intensivo em terra e passou a ser explicado pela acumulação de capital. Assim, na época pós industrial, não temos uma função de produção limitada pela oferta de fatores fixos, uma vez que a revolução industrial possibilitou grandes inovações tecnológicas, permitindo o uso sem restrição do capital. Portanto, o padrão de vida começou a melhorar na medida em que a produção agregada aumentava consideravelmente, por contribuição principal do capital e do crescimento da PTF.

O segundo capítulo descreveu acontecimentos e algumas características do período que sucedeu a primeira revolução industrial. Como visto na introdução deste trabalho, este período foi marcado também por uma segunda revolução industrial e pelo fordismo no início do século XX, marcado pela expansão das atividades industriais e da produção em massa. O capítulo começa com uma revisão histórica a partir da visão da contribuição teórica de Freeman, procurando descrever as diferentes fases do elo entre a tecnologia e seu papel no crescimento de uma economia. Vimos como este elo foi se tornando mais forte principalmente depois do período marcado pela segunda revolução industrial, aproximadamente de 1870 a 1900. Além disso, vimos como os modelos de crescimento neoclássicos desde o pioneiro tra-

balho de Solow (1956) evoluíram até os modelos de crescimento endógenos nas décadas de 80 e 90. A principal mudança com respeito à estes modelos neoclássicos desde o trabalho de Solow foi a forma de considerar a variável do progresso tecnológico nos modelos de crescimento, a partir das diferentes fontes de crescimento. Estas fontes de crescimento nos modelos endógenos, podem ser vistas como uma perspectiva microeconômica, na tentativa de entender o que determina o avanço tecnológico e para onde este se propaga, seja através de capital humano para tornar os trabalhadores mais qualificados ou através de investimentos em setores internos de pesquisa e desenvolvimento vinculados à empresa com objetivo de aumentar e desenvolver técnicas mais eficientes de produção.

Na sequência do segundo capítulo, destacamos um problema que tem sido estudado por vários economistas e que vem acontecendo desde a década de 70, quando algumas economias começavam a mergulhar no mundo da informação, dos computadores e dos novos equipamentos tecnológicos: *a desaceleração do crescimento da produtividade do trabalho* (em inglês, *The Productivity Slowdown*).

À primeira vista, parece um paradoxo o fato de que com grandes aumentos nos investimentos em computadores e outras tecnologias, o crescimento da produtividade do trabalho se torna estável, sendo possível até haver uma desaceleração. Qual seria o motivo para tal queda de crescimento? Este trabalho considerou dois modelos com diferentes perspectivas no estudo das características do novo mundo e da nova economia introduzida com o desenvolvimento das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e de investimentos em setores de Pesquisa e Desenvolvimento (P&D): o modelo de Baumol desenvolvido em 1992 e o de Herscovici em 2010.

O motivo para a escolha destes modelos é o de que eles permitem uma melhor análise comparativa. Baumol, considera que a informação é um bem privado produzido pelo setor de P&D e que gera externalidades para a taxa de crescimento da produtividade na totalidade da economia. No desenvolvimento deste modelo, ele considerou que os preços dos diferentes bens produzidos pelos setores da economia são proporcionais aos custos médios em trabalho para a produção destes mesmos bens. Assim, a informação produzida pelo setor de P&D como um bem privado, possui um preço que depende dos custos em trabalho para a produção da mesma. Neste processo, podemos perceber a endogeneização que Baumol desenvolveu da produtividade do trabalho.

A explicação a que Baumol chegou para que o crescimento da produtivi-

dade do trabalho pudesse se tornar oscilatório e até caótico provém principalmente do fato de que se o preço da informação sobe de forma considerável a partir de uma proporção dos ganhos de produtividade na economia, tornando custoso o uso da informação, este aumento de preço reduziria a quantidade demandada de informação através de uma elasticidade preço da demanda negativa. Assim, com a restrição da demanda por informação na economia, a produtividade poderia cair, já que esta depende da quantidade de informação utilizada.

Com uma perspectiva voltada para as principais características que descrevem o funcionamento da nova economia, Herscovici observa que a informação pode ser assimilada à bens públicos. Assim, ela não teria um preço definido como Baumol ressaltou em seu trabalho. Assim, isso já implica que não existe uma relação perfeita entre variações de preços e quantidades demandadas de informação. Além disso, ele considerou também que quando a informação possui preço, este preço não é medido através de custos em trabalho da sua produção, mas sim através das rendas de monopólio através de patentes e de Direitos de Propriedade Intelectual, que protegem e restringem a utilização da informação por outros agentes da economia, permitindo uso exclusivo por parte de alguns agentes.

Construindo suas hipóteses através dos dados observados na economia, Herscovici questionou as relações kaldorianas, ressaltando que, visto a participação da indústria na produção agregada, esta não seria mais capaz de explicar os principais ganhos de produtividade na totalidade da economia no sentido de ser um setor motor impulsionando o crescimento da produtividade. As externalidades geradas pelo progresso técnico gerado a partir das Tecnologias de Informação em sua visão, se propagam com mais intensidade para certos setores da economia, especialmente para as atividades de serviço. Estas atividades, com produtividades inferiores às da indústria, estão ganhando pesos relativamente maiores no PIB, conforme os dados observados no seu trabalho.

Por último, considerando três fatores que afetam a produtividade na totalidade da economia, Herscovici sugere que a desaceleração da produtividade possa estar ocorrendo devido a esta relação. Ele considera que a produtividade na totalidade da economia depende: (i) de um progresso técnico autônomo, que se desenvolve principalmente nas atividades industriais, ou seja, a contribuição da produtividade deste setor para a produtividade global depende dos próprios progressos técnicos gerados neste setor; (ii) das relações entre o crescimento dos ganhos de produtividade do setor e sua parte relativa na totalidade do produto; (iii) de um efeito que pode ser induzido a par-

tir da internalização das externalidades geradas pelo uso dos insumos dos diferentes setores. Com o componente estagnante ganhando pesos cada vez maiores no PIB e a fraca contribuição das TIC (limitada pela modalidades de apropriação das suas externalidades) para o crescimento da produtividade industrial, que no fordismo foi responsável por grande participação no PIB, poderíamos esperar uma desaceleração no crescimento da produtividade global do trabalho na economia.

Surgiram também outras explicações para a tal queda da aceleração da produtividade. Alguns economistas trabalharam com a idéia da aprendizagem das novas técnicas de produção. Quando uma nova tecnologia é introduzida, pode levar algum tempo para a adoção e difusão desta tecnologia no ambiente econômico. Assim, os impactos de melhores resultados e aumentos de produtividade somente apareceriam depois que a nova tecnologia estivesse sendo explorada em todo seu potencial. Em suma, os resultados não são imediatos.

Quando os investimentos em computadores estavam falhando em fornecer muitas melhoras nas medidas de aumentos da produtividade de 1970 a 1990, uma resposta dos economistas foi a de que os ganhos de produtividade deveriam eventualmente aparecer. Talvez a mais notória formulação deste argumento foi dada por David (1990), que defendeu que levou algumas décadas para que a luz elétrica e os motores elétricos se difundissem depois de suas invenções em 1870, de modo que os benefícios de suas produtividades não chegassem nas décadas iniciais do século XX. Talvez David defenda que os ganhos de produtividade a partir dos computadores devem seguir o mesmo padrão. (GORDON, 2000, p. 16, tradução nossa.)

Já Gordon (2000), trabalhou com hipóteses de retornos marginais decrescentes a partir dos computadores. Ele considerou que os principais benefícios do desempenho do computador para o crescimento da produtividade já foram estabelecidos e as principais inovações destes computadores já aconteceram.

Ao invés de esperarmos os ganhos de produtividade provenientes de computadores chegarem, é mais provável que os principais ganhos de produtividade já tenham sido alcançados. (GORDON, 2000, p. 17, tradução nossa.)

Também foi visto no segundo capítulo, a partir dos dados de Gordon (2000) na página 53, que o período 1995-99 poderia estar resgatando uma

aceleração da produtividade do trabalho, que se desacelerou no período 1972-1995. A produtividade medida para este intervalo de 1995-99 até superou a dos chamados anos de ouro de 1913-1972, da era do fordismo, marcado pelo forte crescimento das atividades industriais. Entretanto, no seu próprio trabalho, Gordon analisou minuciosamente este possível reavivamento da produtividade num certo grau de ceticismo. Ele observou que parte dessa produtividade revivida é atribuída a efeitos cíclicos de produtividade, ao aprofundamento do capital, a efeitos de medidas nos preços do desempenho do computador, entre outros. Concluiu dessa forma que a verdadeira taxa de crescimento da produtividade estrutural da economia é próxima de zero ou até mesmo negativa no caso dos setores da economia fora das atividades industriais responsáveis por aproximadamente 88% da economia americana. Os investimentos em computadores teriam repercussões significativas somente para os setores industriais responsáveis pelos restantes 12% da economia americana (Gordon, 2000).

A nova economia criou uma explosão dinâmica no crescimento da produtividade no setor da indústria de bens duráveis, tanto na indústria de computadores e semicondutores quanto de outros tipos de bens duráveis. Esta explosão de produtividade impulsionou a taxa de crescimento da produtividade da economia. No entanto, a nova economia tem pouco significado para os 88% da economia fora do setor industrial de bens duráveis; nesta parte da economia, a tendência de crescimento da produtividade total dos fatores tem desacelerado na realidade, apesar de grandes investimentos maciços em computadores e outros equipamentos relacionados (Gordon, 2000).

Na avaliação da importância da nova economia para incrementos nos padrões de vida, em comparação com as contribuições advindas das grandes inovações da segunda revolução industrial, como o motor de combustão interna, a eletricidade, o encanamento de água, entre outros, Gordon ressalta:

Para medir-se, a nova economia deveria se igualar às grandes invenções que constituem o que tem sido chamado de segunda revolução industrial. A navegação na internet pode ser divertida e até mesmo informacional, mas representa um incremento muito menor nos padrões de vida do que a extensão do dia nas noites realizada pela luz elétrica, a revolução na eficiência da fábrica realizada pelo motor elétrico, a flexibilidade e a liberdade alcançados por automóveis, a economia de tempo e o estreitamento do mundo alcançado pelo avião, os novos materiais obtidos pela indústria química, o primeiro sentido de comunicação de duas vias alcançado pelo telefone, a chegada de notícias



ao vivo e entretenimentos para as casas familiares proporcionada pela televisão e pelo rádio, e as enormes melhorias na expectativa de vida, riqueza e conforto proporcionado pelo saneamento urbano e pelo encanamento de águas. (GORDON, 2000, p. 24, tradução nossa.)

# Referências Bibliográficas

- [1] ARROW, K. J. Economic welfare and the allocation of resources for invention. In: Nelson, R. **The rate and Direction of inventive activity**: Princeton, NJ: Princeton University Press, 1962. p. 609-625.
- [2] BAUMOL, W. J. Macroeconomics of unbalanced growth: the anatomy of urban crisis. **The American Economic Review**, 57. 1967, p. 415-426.
- [3] BAUMOL, W. J; WOLFF, E. N. Feedback between R&D and productivity growth: a chaos model, In: BENHABIB, J. (ed.). **Cycles and Chaos in Economic Equilibrium**. Princeton University Press, 1992.
- [4] BUENO, N. P. O modelo Solow-Swan na linguagem de dinâmica de sistemas, **Nova Economia**, Belo Horizonte, 20 (2). p. 287-310. 2010.
- [5] COSTA, J. M. **Teorias de crescimento econômico: um estudo comparado**. 2007. 116f. Dissertação (Mestrado em Economia)-Programa de Pós Graduação em Economia, Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2007.
- [6] CLARK, G. **Microbes and Markets: Was the black death an economic revolution?**. Unpublished manuscript, University of California, Davis. 1998.
- [7] CLARK, G. **Nominal and real male agricultural wages in England**, Unpublished manuscript, University of California, Davis. 1998.
- [8] DIAMOND, P. A. National debt in a neoclassical growth model. **American Economic Review**, 55(5) p. 1126-50. 1965.
- [9] FEIJÓ, C. A; TOSTES LAMONICA, M. **Crescimento e industrialização no Brasil: as lições das leis de Kaldor**. In : Encontro Nacional da Anpec. Recife. 2007.

- [10] FREEMAN, C.; SOETE, L. **A economia da inovação industrial**. 3. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.
- [11] GALOR, O. From stagnation to growth: United growth theory, In: **Economic Growth**, Elsevier, North-Holland, 2005, p. 171-294.
- [12] GALOR, O; WEIL, D. Population, technology, and growth: From malthusian stagnation to the demographic transition and beyond, **American Economic Review**, 90(4) p. 806-828, 2000.
- [13] GORDON, R. J. Does the new economy measure up to the great inventions of the past? **Journal of Economic Perspectives**, 14 (4), p. 49-74, 2000.
- [14] GREENWOOD, J. The third industrial revolution: Technology, productivity, and income inequality. **Washington: AEI Press**, 1997.
- [15] GRILICHES, Z. Productivity, R&D, and the data constraint. **American Economic Review**, 84(1), p. 1-23, 2004.
- [16] HANSEN, G. D; PRESCOTT, E. C. Malthus to Solow. **American Economic Review**, 92(4), p. 1205-1217, 2002.
- [17] HARCOURT, G. C. Some Cambridge controversies in the theory of capital. **Journal of Economic Literature**, p. 369-405, 1969.
- [18] HERSCOVICI, A. Capital intangível e direitos de propriedade intelectual: uma análise institucionalista. **Revista de Economia Política**, São Paulo, v. 27, p. 54-76, 2007.
- [19] HERSCOVICI, A. Progresso técnico, crescimento econômico e desindustrialização: a lógica kaldoriana revisitada à luz da nova economia. In: **Anais do III Encontro da Associação Keynesiana Brasileira**, São Paulo, 2010, p. 1-20
- [20] HOBBSAWM, E. J. **A Era das Revoluções**. Rio de Janeiro: Paz e Terra. 2007.
- [21] JONES, C. L. **Was the industrial revolution inevitable? Economic growth over the very long run**. Unpublished manuscript, Stanford University, 1999.
- [22] KALDOR, N. Alternative theories of distribution. Stiglitz, J. E; Uzawa, H. (Orgs) **Readings in the Modern Theory of Economic Growth**. The MIT Press, 1956.

- [23] LIVIATAN, N. The concept of capital in professor Solow's model. **Econometrica**, 34(1), p. 220-24, 1966.
- [24] LUCAS, R. On the mechanics of economic development. **Journal of Monetary Economics**, 22, p. 3-42, 1988.
- [25] MALTHUS, T. R. (1798) **An essay on the principle of population**. New York: Penguin Books, 1982.
- [26] MARX, K. **Capital**. V. 1. New York: Penguin Books, 1976.
- [27] PARENTE, S. L; PRESCOTT, E. C. Monopoly rights: A barrier to riches. **American Economic Review**, 89(5), p. 1216-1233, 1999.
- [28] PEREIRA, D. C. **Bifurcações**: documento de trabalho. Disponível em <http://www.rc.unesp.br/igce/demac/balthazar/voo/Bifurcacoes.pdf>. Acesso em 29 Jan. 2012.
- [29] PHELPS-BROWN, H; HOPKINS, S. V. Seven centuries of the prices of consumables, compared with builders wage rates. **Economica**, November, (23) p. 296-315, 1956.
- [30] ROMER, P. M. Endogenous technological change. **Journal of Political Economy**, 98(5), p. 71-102, 5 out. 1990.
- [31] SACHS, J. A volta do espectro de Malthus. **Scientific American Brasil**, Out. 2008. Disponível em: <http://www2.uol.com.br/sciam/artigos>. Acesso em: Janeiro 2011.
- [32] SNOWDON, B; VANE, H. **Conversations with leading economists: interpreting modern macroeconomics**. Cheltenham, UK. Edward Elgar, 1999.
- [33] SOLOW, R. M. A contribution to the theory of economic growth. **Quarterly Journal of Economics**, 70, p. 65-94, 1956.
- [34] —————, Technical change and the aggregate production function. **Review of Economics and Statistics**, 39(3), p. 312-20, 1957.
- [35] —————, Substitution and fixed coefficients in the theory of capital. **Review of Economic Studies**, 29(3), p. 207-218, 1962.
- [36] —————, Heterogeneous capital and smooth production functions: an experimental study. **Econometrica**, Vol. 31, p. 623-645, 1963.

- [37] TIGRE, P. B. **Gestão da inovação: a economia da tecnologia do Brasil**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

# Apêndice A

## Demonstrações

### 1. Demonstração da Proposição 4

Função Lucro no setor malthusiano (para um período fixo  $t$  e  $L_{M_t} = 1$ ):

$$\Pi_M = Y_{M_t} - w_t N_{M_t} - r_{K_t} K_{M_t} - r_L = A_{M_t} K_{M_t}^\phi N_{M_t}^\mu - w_t N_{M_t} - r_{K_t} K_{M_t} - r_L$$

A função lucro recebe os descontos da taxa de aluguel da terra  $r_L$ . Esta taxa de aluguel é a taxa que uma família individual aluga para uma firma. Somando todas as taxas de aluguéis multiplicadas pela quantidade de terra que as famílias individuais alugam teremos o montante total da taxa de aluguel da terra. Como foi considerado que  $L_{M_t} = 1$ , a taxa  $r_L$  que entra na função lucro acima é muito pequena se comparada a taxa total da economia. Por isto considera-se  $r_L = 0$  na função acima.

Para valores dados de  $w$  e  $r_K$ :

$$\Pi_M(w, r_K) = A_{M_t} K_{M_t}^\phi N_{M_t}^\mu - w N_{M_t} - r_K K_{M_t} \quad (1)$$

Condições de lucro máximo:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow \phi A_{M_t} K_{M_t}^{\phi-1} N_{M_t}^\mu = r_K \Leftrightarrow K_{M_t} = \left( \frac{\phi}{r_K} \right) Y_{M_t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N} = 0 \Leftrightarrow \mu A_{M_t} K_{M_t}^\phi N_{M_t}^{\mu-1} = w \Leftrightarrow N_{M_t} = \left( \frac{\mu}{w} \right) Y_{M_t} \quad (3)$$

Substituindo as expressões (2) e (3) na função lucro (1), podemos obter:

$$\Pi_M = (1 - \phi - \mu)Y_{M_t} \quad (4)$$

Na equação (4) acima, temos que:

$$\Pi_M = (1 - \phi - \mu)Y_{M_t} = (1 - \phi - \mu)A_{M_t}K_{M_t}^\phi N_{M_t}^\mu$$

Agora, substituindo os valores de  $K_{M_t}$  e  $N_{M_t}$  pelas expressões dadas em (2) e (3), chegaremos a:

$$\Pi_M = (1 - \phi - \mu)A_{M_t} \left( \frac{\phi}{r_K} \right)^\phi \left( \frac{\mu}{w} \right)^\mu Y_{M_t}^{\phi+\mu}$$

Da equação (4), temos que  $Y_{M_t} = \frac{\Pi_M}{(1 - \phi - \mu)}$ . Segue que:

$$\Pi_M = (1 - \phi - \mu)A_{M_t} \left( \frac{\phi}{r_K} \right)^\phi \left( \frac{\mu}{w} \right)^\mu \left[ \frac{\Pi_M}{(1 - \phi - \mu)} \right]^{\phi+\mu} \Rightarrow$$

$$\Pi_M^{(1-\phi-\mu)} = (1 - \phi - \mu)^{(1-\phi-\mu)} A_{M_t} \left( \frac{\phi}{r_K} \right)^\phi \left( \frac{\mu}{w} \right)^\mu \Rightarrow$$

Elevando ambos os membros da equação acima a  $\frac{1}{1 - \phi - \mu}$ , finalmente encontramos a função de lucros máximos no setor malthusiano:

$$\Pi_M = (1 - \phi - \mu)A_{M_t}^{\frac{1}{(1-\phi-\mu)}} \left( \frac{\phi}{r_K} \right)^{\frac{\phi}{(1-\phi-\mu)}} \left( \frac{\mu}{w} \right)^{\frac{\mu}{(1-\phi-\mu)}}$$

O que nos permite concluir que  $\Pi_{M_t} > 0$  para todo  $t$ .

## 2. Demonstração da Proposição 5

Função Lucro para o setor Solow (para um período fixo  $t$ ):

$$\Pi_S = Y_{S_t} - wN_{S_t} - r_K K_{S_t} = A_{S_t} K_{S_t}^\theta N_{S_t}^{1-\theta} - w_t N_{S_t} - r_{K_t} K_{S_t}$$

Para valores dados de  $w$  e  $r_K$ :

$$\Pi_S(w, r_K) = A_{S_t} K_{S_t}^\theta N_{S_t}^{1-\theta} - wN_{S_t} - r_K K_{S_t} \quad (1)$$

Condições de lucro máximo:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow \theta A_{S_t} K_{S_t}^{\theta-1} N_{S_t}^{1-\theta} = r_K \Leftrightarrow K_{S_t} = \left( \frac{\theta}{r_K} \right) Y_{S_t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N} = 0 \Leftrightarrow (1-\theta) A_{S_t} K_{S_t}^\theta N_{S_t}^{-\theta} = w \Leftrightarrow N_{S_t} = \left( \frac{1-\theta}{w} \right) Y_{S_t} \quad (3)$$

Da equação (1), vemos que a condição necessária e suficiente para que  $\Pi_S > 0$  é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_S > 0 &\Leftrightarrow Y_{S_t} - wN_{S_t} - r_K K_{S_t} > 0 \Leftrightarrow Y_{S_t} > wN_{S_t} + r_K K_{S_t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A_{S_t} K_{S_t}^\theta N_{S_t}^{1-\theta} > wN_{S_t} + r_K K_{S_t} \Leftrightarrow A_{S_t} > \frac{wN_{S_t} + r_K K_{S_t}}{K_{S_t}^\theta N_{S_t}^{1-\theta}} \end{aligned}$$

Substituindo os valores no denominador de  $K_{S_t}$  e  $N_{S_t}$  pelas expressões dadas em (2) e (3), temos:

$$A_{S_t} > \left( \frac{r_K}{\theta} \right)^\theta \left( \frac{w}{1-\theta} \right)^{1-\theta} \frac{wN_{S_t} + r_K K_{S_t}}{Y_{S_t}}$$

Como  $wN_{S_t} + r_K K_{S_t} = w \left( \frac{1-\theta}{w} \right) Y_{S_t} + r_K \left( \frac{\theta}{r_K} \right) Y_{S_t} = Y_{S_t}$ , finalmente obtemos:

$$A_{S_t} > \left( \frac{r_K}{\theta} \right)^\theta \left( \frac{w}{1-\theta} \right)^{1-\theta} .$$

**Demonstração das expressões (12), (13) e (14) da página 36:**

Função de utilidade:

$$U(c_{1t}, c_{2,t+1}) = \log c_{1t} + \beta \log c_{2,t+1} \quad (*)$$

Restrição dos recursos:



$$c_{1t} + k_{t+1} + q_t l_{t+1} = w_t \Rightarrow c_{1t} = w_t - k_{t+1} - q_t l_{t+1} \quad (1)$$

$$c_{2,t+1} = r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1} \quad (2)$$

Vamos deixar agora a função de utilidade em função da quantidade de capital e terra ( $k_{t+1}$  e  $l_{t+1}$ ) que as famílias adquirem para financiar seus consumos quando se tornam veteranas. Assim, os salários  $w_t$ , as taxas de aluguéis  $r_{K,t+1}$  e  $r_{L,t+1}$  e os preços da terra são parâmetros (constantes) nesta função. Além disso, estamos trabalhando num período  $t$  fixo.

Substituindo (1) e (2) na função de utilidade (\*), temos:

$$U(k_{t+1}, l_{t+1}) = \log(w_t - k_{t+1} - q_t l_{t+1}) + \beta \log[r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1}]$$

Condições de primeira ordem para valores ótimos:

Derivada parcial de  $k_{t+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial k_{t+1}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{w_t - k_{t+1} - q_t l_{t+1}} = \frac{\beta r_{K,t+1}}{r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{c_{1t}} = \frac{\beta r_{K,t+1}}{r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1}} \\ &\Leftrightarrow c_{1t} = \frac{r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1}}{\beta r_{K,t+1}} = \frac{c_{2,t+1}}{\beta r_{K,t+1}} \quad (3) \end{aligned}$$

Derivada parcial de  $l_{t+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial l_{t+1}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{q_t}{w_t - k_{t+1} - q_t l_{t+1}} = \frac{\beta(r_{L,t+1} + q_{t+1})}{r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{q_t}{c_{1t}} = \frac{\beta(r_{L,t+1} + q_{t+1})}{r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1}} \\ &\Leftrightarrow c_{1t} = \frac{q_t [r_{K,t+1} k_{t+1} + (r_{L,t+1} + q_{t+1}) l_{t+1}]}{\beta(r_{L,t+1} + q_{t+1})} = \frac{q_t c_{2,t+1}}{\beta(r_{L,t+1} + q_{t+1})} \quad (4) \end{aligned}$$

De (3) e (4), temos:

$$\begin{aligned} \frac{c_{2,t+1}}{\beta r_{K,t+1}} = c_{1t} &= \frac{q_t c_{2,t+1}}{\beta(r_{L,t+1} + q_{t+1})} \Leftrightarrow r_{L,t+1} + q_{t+1} = q_t r_{K,t+1} \\ &\Leftrightarrow q_{t+1} = q_t r_{K,t+1} - r_{L,t+1} \end{aligned}$$

Portanto, a equação (13) está verificada. Para provar a equação (12), basta substituir a equação (13) em (3) para obter:

$$c_{1t} = \frac{r_{K,t+1} k_{t+1} + q_t r_{K,t+1} l_{t+1}}{\beta r_{K,t+1}} \Leftrightarrow c_{1t} = \frac{k_{t+1} + q_t l_{t+1}}{\beta}$$

De (1), temos que  $k_{t+1} + q_t l_{t+1} = w_t - c_{1t}$ . Segue que  $c_{1t} = \frac{w_t - c_{1t}}{\beta} \Leftrightarrow$   
 $c_{1t} = \frac{w_t}{1 + \beta}.$

Por último, a equação (14):

$$K_{t+1} = N_t k_{t+1} = N_t(w_t - c_{1t} - q_t l_{t+1}) = N_t(w_t - c_{1t}) - q_t N_t l_{t+1}$$

Mas  $N_t l_{t+1} = 1$ . Portanto,  $K_{t+1} = N_t(w_t - c_{1t}) - q_t$ .