UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

JAILSON DOMINGOS

UM ESTUDO SOBRE POLÍGONOS A PARTIR DOS PRINCÍPIOS DE VAN HIELE

VITÓRIA – ES

2010

JAILSON DOMINGOS

UM ESTUDO SOBRE POLÍGONOS A PARTIR DOS PRINCÍPIOS DE VAN HIELE

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Educação, na área de concentração de Educação e Linguagens, sublinha de Linguagem Matemática vinculada ao campo científico de Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

VITÓRIA – ES
2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

D671e

Domingos, Jailson, 1965-
Um estudo sobre polígonos a partir dos princípios de van Hiele / Jailson Domingos. – 2010.
272 f. : il.

Orientadora: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Hiele, Pierre M. van. 2. Geometria. 3. Polígonos. 4. Material didático. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

JAILSON DOMINGOS

UM ESTUDO SOBRE POLÍGONOS A PARTIR DOS PRINCÍPIOS DE VAN HIELE

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Educação.

Aprovada em 24 de junho de 2010

COMISSÃO EXAMINADORA

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Ligia Arantes Sad
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Isabel Cristina Rabelo Gomes
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Gerda Margit Schütz Foerste
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

Professora Doutora Lilian Nasser
CETIQT/SENAI

A Patricia de Jesus, razão de minha vida.
A Maria Rita e Joaquim, que me deram a vida.

AGRADECIMENTOS

Ao bondoso Deus

Por tudo o que Tens feito. Por tudo o que Vais fazer. Por Tuas promessas e tudo o que És. Eu quero Te agradecer. Com todo o meu ser. Te agradeço, meu Senhor.
(Te agradeço - Diante do Trono).

Para a professora Gerda

Quero aprender sua lição que faz tão bem pra mim. Agradecer de coração por você ser assim. Legal ter você aqui, uma amiga em quem posso acreditar. (Ao Mestre Com Carinho - Abelhudos).

Professor Wanderley e professora Lilian

Legal é ter vocês aqui, amigos nos quais posso acreditar. Queria tanto abraçá-los.
(Ao Mestre Com Carinho - Abelhudos).

Para professora Isabel

Pra alcançar as estrelas não vai ser fácil, mas se eu lhe pedir, você me ensina como descobrir qual é o melhor caminho? (Ao Mestre Com Carinho - Abelhudos).

Para professora Ligia

Foi com você que eu aprendi a repartir tesouros. Foi com você que eu aprendi a respeitar os outros. Legal ter você aqui, uma amiga em quem posso acreditar. Queria tanto abraçá-la. (Ao Mestre Com Carinho - Abelhudos).

Para a minha orientadora e professora Vânia

Pra mostrar pra você que eu não esqueço mais essa lição. Amiga, eu ofereço esta canção: Ao mestre com carinho. Foi com você que eu aprendi, a repartir tesouros. Foi com você que eu aprendi, a respeitar os outros. Legal ter você aqui um amigo em quem eu posso acreditar. Queria tanto abraçá-la. (Ao Mestre Com Carinho - Abelhudos).

Aos amigos Sandra, Laudicéia, Welington, Thiarla, Bernadete, Cátia, Tarliz e Mônica

lembrem-se de que.....Amigo é coisa para se guardar, no lado esquerdo do peito, mesmo que o tempo e a distância digam não. Mesmo esquecendo a canção. O que importa é ouvir. A voz que vem do coração. (Canção da América - Milton Nascimento).

Para minha mãe Maria Rita:

Eu ainda lembro os meus tempos de criança. Que em teus braços eu podia dormir, no embalo de uma canção, como um anjinho muito feliz. Eu dormia seguro em tuas mãos. Hoje, as rugas no teu rosto me dizem que tudo isto foi para me ver feliz. Com o coração alegre, eu canto e peço a Deus que guarde minha mãe em todos os seus caminhos.

Ao meu irmão Jerry e família.

Você é meu amigo de fé e meu irmão camarada. Você é o abraço festivo na minha chegada. Tens uma cabeça de homem, mas um coração de menino.Obrigado pelos conselhos e sugestões. (Amigo - Roberto Carlos).

Para minha amada esposa e eterna namorada, Patrícia

Eu tenho o brilho do sol, num dia nublado, quando está frio lá fora. Para mim é como se fosse a primavera. Bem, você vai me perguntar: O que me faz sentir-me desse jeito? Minha garota. Eu estou falando da minha garota. Eu tenho muito mel. As abelhas me invejam. Eu tenho, uma doce canção. Como os pássaros nas árvores. Bem, você vai me perguntar: O que me faz sentir-me desse jeito? Eu estou falando da minha garota. (My Girl - Temptation).

"Educar é crescer. E crescer é viver. Educação é, assim, vida no sentido mais autêntico da palavra."

Anísio Teixeira

RESUMO

Este trabalho de mestrado com foco na educação matemática vincula-se ao Programa de Pós Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. Nossa pesquisa de cunho qualitativo investiga visualização e caracterização inicial de polígonos a partir dos princípios de van Hiele, combinados com o uso de recursos didáticos. Procuramos responder à pergunta: O que alunos e professores aprendem sobre polígonos e desenvolvimento do raciocinio geométrico quando utilizam tangram, geoplanos e construção de pipas em turmas do 6º ano do ensino fundamental? Neste trabalho o ensino de geometria está fundamentado por van Hiele, Pavanello e Lorenzato. Para analisar a relação entre resolução de problemas, recursos didáticos e o ensino de geometria, utilizamos Polya e Santos-Wagner. Usamos, na pesquisa de campo, um teste diagnóstico inicial e um final e, uma sequência didática composta por três blocos de atividades: um usando o tangram, outro com o geoplano e outro com construção de pipas. Nosso estudo foi desenvolvido de março a setembro de 2009, com alunos do sexto ano de uma escola municipal de Vila Velha, ES. Coletamos os dados por meio de entrevistas a alunos e atividades nas aulas com os blocos mencionados. Nossa análise das respostas dos estudantes nos testes diagnósticos e dos dados coletados no estudo nos indicam que tangram, geoplano e pipas são recursos didáticos que auxiliam no reconhecimento visual de polígonos e de suas características. As atividades didáticas da pesquisa auxiliaram a aprendizagem de conceitos geométricos, em particular a formação do conceito de polígonos e a discussão sobre poligonos convexos e não convexos. Verificamos que os alunos se interessaram pelas atividades, aprenderam com as mesmas e nos levaram a investigar como nomear polígonos com mais de 20 lados. Acreditamos que poderíamos explorar ainda mais o potencial desses recursos didáticos em termos de ensino e aprendizagem de geometria se nós tivéssemos preparado sequências didáticas menores entremeando o uso dos três recursos.

Palavras-chave: geometria; polígonos; visualização; recursos didáticos; princípios de van Hiele.

ABSTRACT

This master work with focus on mathematics education is linked to the Graduate Program of Education of Center of Education at Federal University of Espírito Santo. Our research of qualitative nature investigates visualization and initial characterization of polygons using the van Hiele principles combined with the use of didactical materials. We tried to answer the question: What students and teachers learn about polygons and the development of geometrical thinking when using tangram, geoboards and kites construction in 6th grades classes of fundamental middle school? In this work geometry teaching is based on van Hiele, Pavanello and Lorenzato. In order to analyze the relation between problem solving, didactical materials and geometry teaching we used Polya and Santos-Wagner. We used in the field research an initial and a final diagnostic test and a didactical sequence formed by three unities of activities: one using the tangram, another one with geoboards and another one with kites' construction. Our study has been developed from March until September 2009 with grade six students from a public municipal school from Vila Velha, ES. We have collected the data through interviews to the students and classroom activities with the cited unities. Our analysis from the students' answers to the diagnostic tests and the collected data in the study indicate to us that tangram, geoboards and kites are didactical materials which help in the visual recognition of polygons and its characteristics. The didactical research activities helped the polygon concept formation and the discussion of the concepts of convex and non convex polygons. We verified that the students were interested in the activities, learned with them and led us to search how to label polygons with more than 20 sides. We believe that we could have explored more the potential of such didactical materials if instead of using for so long each material we would have prepared smaller didactical sequences incorporating the use of the three materials.

Keywords: geometry; polygons; visualization; didactical materials, van Hiele principles.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FOTOGRAFIAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

> Numa folha qualquer eu desenho um sol amarelo
> E com cinco ou seis retas é fácil fazer um castelo
> Corro o lápis em torno da mão e me dou uma luva
> E se faço chover, com dois riscos tenho um guarda-chuva
> Se um pinguinho de tinta cai num pedacinho azul do papel
> Num instante imagino uma linda gaivota a voar no céu.
> (Aquarela, de Toquinho, Vinícius de Moraes, Guido Morra e Maurizio Fabrizio, 1983).

Existem músicas que imprimem marcas tão fortes em nossa alma que acabamos carregando a sensação do que elas nos proporcionam para o resto de nossas vidas e, às vezes, sentimos as influências da melodia até mesmo em nossa vida profissional. Todas as vezes que ouço os primeiros acordes da música “Aquarela”, de Toquinho, Vinícius de Moraes, Guido Morra e Maurizio Fabrizio, passeiam, em minha memória, algumas lembranças da minha infância, as quais me ajudam a entender e, ao mesmo tempo a explicar o meu entusiasmo pela Matemática e, em particular, pela Geometria.

A minha paixão pela geometria tem origem nas atividades desenvolvidas pelo meu pai, pois cresci, vendo-o fazer planta-baixa de casas. Além dos desenhos, o que mais me fascinava eram os cálculos relativos à quantidade de material, necessária para cada etapa da construção ou “da obra”, como ele mesmo chamava. Esses cálculos pareciam mágicas aos meus olhos de criança. Achava todas aquelas contas fascinantes e me perguntava: Como um monte de números se tornariam em uma casa ou um apartamento? Confesso que eu duvidava de que aquelas cinco ou seis retas e cálculos pudessem ser transformados em uma casa ou em um prédio.

Num dos momentos em que eu o observei, fazendo os cálculos do material necessário para uma determinada obra, curioso, questionei sobre como realizar aquelas contas. Obtive a seguinte resposta: “Quando você entrar na escola, a professora vai lhe ensinar a fazer estas contas!” Essa frase, dita por ele, só fez aumentar ainda mais a minha expectativa por iniciar a vida estudantil. Quando comecei a estudar, a frase dita pelo meu pai ainda ecoava em meus ouvidos. O tempo passou, conclui o Ensino Primário e os cálculos realizados pelo meu pai ainda continuavam um mistério para mim, muito embora eu já soubesse multiplicar, dividir e já conhecesse algumas formas geométricas. No Ginásio, pouca coisa foi acrescentada, pois eu não conseguia associar o que aprendia na escola com o que meu pai fazia, apesar de já o ajudar a executar alguns cálculos e a desenhar plantas-baixas. Como o meu Segundo Grau foi feito em uma escola pública que só oferecia os cursos de Técnico em Administração e Técnico Contábil, a forma como meu pai aplicava a matemática permanecia enigmática para mim.

Pouco tempo depois de ter terminado o Segundo Grau, atualmente chamado de Ensino Médio, resolvi construir uma casa para minha família e, naquele momento, precisei dos serviços de pedreiro do meu pai. Agora, tínhamos que desenhar o diagrama da obra a ser realizada e estimar os custos e a quantidade de material que gastaríamos na obra. No momento em que iríamos iniciar a construção, surgiu uma pequena dificuldade: o terreno no qual construiríamos a casa media 12m de frente, 28m em um dos lados, 8m de fundo e 32m no outro lado (Ver Figura 1). E o problema era o seguinte: Como construir paredes no esquadro num terreno fora de esquadro? Dito de outra forma, como garantir que as paredes construídas formariam um ângulo de 90º entre si?

A princípio, imaginei que as paredes da casa ficariam fora de esquadro, pois, no meu entendimento, não havia outra solução. Foi quando meu pai afirmou que cravaria três pregos (Ver, por exemplo, os pontos A, B e C na Figura 1.). As medidas seriam: 40cm de A para B, 30cm de B para C e, se ao medir a distância de C até A obtivesse 50cm, poderia afirmar que a parede que passaria pelos pregos B e C estaria no esquadro. Quando percebi o que ele estava fazendo, exclamei: “Ei, espere aí! Isso que o senhor está fazendo é o Teorema de Pitágoras!?” E ele respondeu-me assim: “Eu não sei quem é esse tal Pitágoras, não! Mas sei que esta estratégia funciona.”

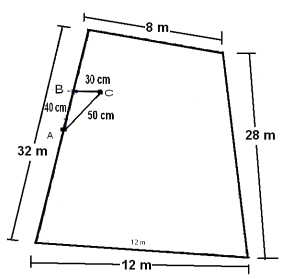


Figura 1 - Desenho do terreno

Essa experiência com meu pai marcou a minha vida profissional, provocando em mim um desejo de realizar uma aproximação entre os conteúdos de matemática e o dia a dia dos meus alunos. Nessa época, em que fazia o curso de Licenciatura em Matemática, estava iniciando a carreira de magistério e ja vinha procurando realizar tal aproximação.

Desde abril de 2008, participo na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) junto com outros professores de um grupo de estudos em educação matemática (GEEM) organizado pela professora Vânia M. dos Santos-Wagner. Um dos objetivos desse grupo é o de professores começarem a se conhecer profissionalmente. Por isso, foi-nos solicitado que respondêssemos a algumas questões, investigando relações entre afeto e matemática e seus processos de ensino e aprendizagem. Dentre as questões, estava a seguinte pergunta: “O que você gosta de ensinar em matemática e por quê?” Ao responder a essa questão, descobri que a minha admiração e fascinação pelos jogos tinha também a influência do meu pai. Numa recente conversa com a minha mãe, ela lembrou-me de que meu pai vivia criando e traçando esquemas para ganhar no jogo de bicho, na loto ou na loteria esportiva. Tais esquemas eram montados na única mesa que tínhamos em casa (a mesma que eu usava para estudar e fazer o dever de casa).

Muitas vezes, eu esquecia as tarefas de casa e ficava vendo-o fazer permutações em números de quatro dígitos, tentando “cercar” o bicho que iria dar no jogo do dia seguinte ou, às vezes, no mesmo dia à noite. O cerco consistia em escrever todas as permutações possíveis, envolvendo quatro (4) dígitos e, de acordo com os critérios probabilísticos estabelecidos por ele, uns números eram descartados e outros aceitos. Algumas vezes, essa estratégia funcionava, mas, na maior parte, dava errado e meu pai perdia o dinheiro apostado. Em outras situações, ele tentava projetar o resultado da loteria esportiva. Após essas experiências, muitos questionamentos atravessaram a minha prática pedagógica. Eles estavam sempre relacionados à busca de recursos didáticos que pudessem me auxiliar na tarefa de ensinar matemática e, em especial, nos conteúdos, vinculados à geometria, que eram trabalhados com os alunos das séries nas quais eu estava lecionando.

Em minha prática profissional, de 1991 a 2004, atuando no Ensino Fundamental e Ensino Médio e, desde 2005, no curso de licenciatura em Matemática numa faculdade particular da Grande Vitória, percebi que os estudantes dos três níveis educacionais apresentavam lacunas no ensino de geometria, dentre as quais se encontravam:

a) o não reconhecimento visual de uma figura geométrica, se esta estivesse desenhada fora da forma encontrada nos livros didáticos;
b) a não distinção entre retas paralelas e retas perpendiculares;
c) a dificuldade em encontrar a terceira medida do ângulo de um triângulo, mesmo conhecendo a medida dos outros dois ângulos;
d) os erros ao calcular o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, dado os seus catetos;
e) não distinção entre os conceitos de perímetro e área e dificuldade de procedimentos de cálculo dos mesmos.

Ao pesquisar sobre as lacunas citadas acima, notamos que essas poderiam estar relacionadas ao que pesquisadores como Pavanello (1993), Kaleff (1994) e Lorenzato (1995) afirmavam, porque, segundo tais autores, o ensino de Geometria, no Brasil foi, praticamente, abandonado ou renegado a um segundo plano, isto é, sempre deixado para o último bimestre. E, quando era ensinado, resumia-se ao cálculo de áreas e perímetros de figuras geométricas que, muitas vezes, os alunos mal sabiam nomear, ou seja, só as reconheciam de forma visual.

Diante do exposto, observa-se que as lacunas de aprendizagem encontradas no ensino de geometria podem ser diminuídas se duas ações forem desenvolvidas. Primeira, se esses conteúdos matemáticos forem reorganizados durante o ano letivo, de forma que se tenha uma parte deles em cada bimestre. E segunda, se forem utilizados outros recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem que extrapolem os sugeridos pelos autores de livros didáticos.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Em 1972, quando iniciei meus estudos, estava feliz, pois pela primeira vez tinha a oportunidade de aprender a fazer os cálculos e os desenhos que via meu pai fazendo e, ao mesmo tempo, a escola representava, no meu imaginário, um lugar mágico, onde eu estaria sendo preparado para ter uma vida melhor e, simultaneamente, para a minha futura profissão. Em vez de encantamento e magia, o que vi e aprendi nos primeiros anos de escola, em particular em matemática, foram ponto, reta, plano, axiomas, teoremas e figuras geométricas, que tomaram o lugar dos desenhos encantadores e daqueles cálculos mágicos, pois, na maioria das vezes, não havia qualquer aplicação que mostrasse a importância dos conteúdos citados no dia a dia, nem mesmo uma aproximação destes com as atividades lúdicas.

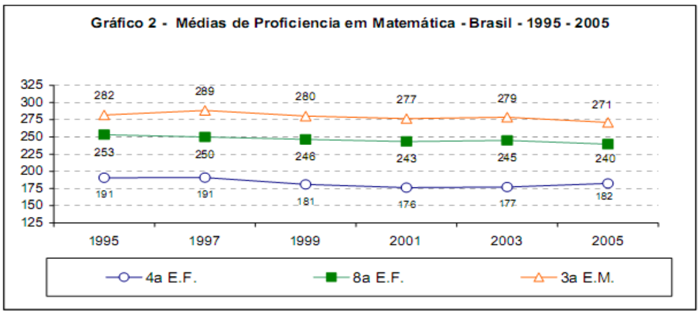
Contudo, o tempo passou, o mundo mudou e, hoje, em 2010, percebo que o modelo de educação por meio do qual fui educado era um modelo tradicional que via o conhecimento como

> um conteúdo, como informações, coisas e fatos a serem transmitidos ao aluno. O aluno, segundo esta visão, vai para a escola para receber uma educação. Dizer que ele aprenderá significa que saberá dizer ou mostrar o que lhe foi ensinado. Segundo este modelo, o ensino é a transmissão de informações. A aprendizagem é a recepção de informações e seu armazenamento na memória (CARRAHER, 2000, p. 12).

Por outro lado, na educação contemporânea, o conhecimento é tratado como uma construção de ideias, partindo da participação ativa de cada um dos atores envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, de seus interesses, de suas experiências anteriores e de suas capacidades e motivações. Carraher (2000) procura mostrar que os estudantes entendem melhor as coisas que eles mesmos descobrem, por isso é necessário levá-los a pensar, investigar, explorar, agir sobre os fatos, permitindo, assim, que tirem suas próprias conclusões e construam o seu saber a partir de suas descobertas. Raciocinando dessa forma, pude ver a aprendizagem como uma descoberta, ou uma construção ou uma atividade investigativa que respeita as diferenças individuais, o ritmo de aprendizagem e o progresso de cada aluno, no decorrer de sua vida escolar.

Ao pensar nos municípios do Espírito Santo e na carga horária de turmas de 5ª a 8ª série (atuais turmas de 6º a 9º ano), onde a hora-aula é de 50 minutos, há de se perguntar quantas horas de estudos de matemática um aluno de 8ª série já teve. Percebe-se que este aluno já acumulou, aproximadamente, oitocentos dias, contando que cada ano letivo tem 200 dias. Ou seja, nas quatro séries escolares, esse aluno já assistiu a um total de quatro mil horas-aula na escola, das quais cerca de 800 horas-aula dedicadas ao estudo de temas matemáticos. Questiono-me sobre o que eles aprenderam nas 1000 horas-aula de um ano letivo, e qual foi a qualidade da aula de matemática da qual participaram como alunos. Quando sinto o esforço que alguns deles fazem para calcular o perímetro de um quadrado ou retângulo, pergunto-me sobre os motivos que levaram os conteúdos de Geometria a serem desconhecidos dos alunos.

Com o intuito de melhorar a qualidade do ensino no Brasil, em 1990, o Ministério da Educação criou o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, que é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Em 1990, foi realizada a primeira avaliação dos estudantes da Rede Pública da 1ª, 3ª, 5ª e 7ª séries do Ensino Fundamental, que foram avaliados em Português, Matemática e Ciências. Em 1995, as avaliações concentraram-se nas turmas de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e na 3ª série do Ensino Médio. Para facilitar a análise do desempenho do estudante brasileiro, o INEP criou um sistema de níveis nos quais foram distribuídos os 500 pontos da avaliação, a saber: abaixo de 150 pontos; de 150 a 200 pontos; de 200 a 250 pontos; de 250 a 300 pontos; de 300 a 350 pontos; de 350 a 400 pontos; maior ou igual a 400 pontos. A Figura 2 mostra o desempenho dos estudantes no período de 1995 a 2005.



Fonte: INEP- 2006

Figura 2 – Médias de Proficiência em Matemática

Diante das informações contidas na figura acima, é possível perceber uma queda no rendimento dos alunos. O gráfico da 8ª série, que aparece na Figura 2, mostra que, em 1995, a série tinha uma pontuação equivalente a 253 e, em 2005, caiu para 240, ou seja, uma queda de 13 pontos (5% inferior a 1995). Os dados da Figura 2 não apresentam informações diretas sobre o ensino de geometria, contudo, tomando como base as pesquisas desenvolvidas por Pavanello (1993), Kaleff (1994), Lorenzato (1995) e Silva (2007), posso afirmar que, no ensino de geometria, a situação não se mostra diferente da apresentada pelo SAEB.

Almouloud e Mello (2000), ao analisarem o rendimento dos alunos em geometria, afirmaram que, no cerne da questão do baixo desempenho dos estudantes em geometria, destacam-se os seguintes:

> - a maior parte dos professores que hoje estão em atividade foram formados com uma base muito frágil em geometria, e isso pode ser creditado à influência que o movimento da matemática moderna exerceu nos currículos nas décadas de 60/70;
> - os cursos de formação inicial de professores não conseguem dar conta de discutir uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria;
> - as modalidades de formação continuada, praticadas nos últimos anos, não conseguem atingir o objetivo de modificar a prática, na sala de aula do ensino de geometria (p. 1).

Outro ponto a ser analisado é o que foi expresso por Dana (1994):

> A decisão dos professores sobre a Geometria a ser ensinada é profundamente influenciada pela Geometria que eles tiveram (geralmente uma pincelada durante o primeiro grau, seguida de um curso com definições e demonstrações no segundo grau), por aquilo que está contido nos manuais escolares de uso corrente (muito pouco) e pelo que é exigido nos exames finais de seu nível (não muito). A mensagem de todas essas fontes geralmente é a mesma: a Geometria é maçante, sem importância, irrelevante e inadequada para a escola elementar (p. 141).

É possível, então, confirmar que os educadores, por terem falhas em sua formação, preferem deixar o ensino de geometria em segundo plano. O problema aumenta quando aqueles que a ensinam tendem a repetir o que lhes foi ensinado, praticando a mesma estratégia e levando à falta de motivação e de interesse para quem está na fase de aprendizagem, o que pode ser comprovado na afirmação de Gazire (2000)

> Por trás dos comportamentos, procedimentos e, principalmente, convicções de muitos professores, parece haver uma compulsão que poderia ser explicitada do seguinte modo: hoje, faço com as pessoas aquilo que fizeram comigo no passado (e, o que é pior: faço comigo mesmo) (p. 177-178).

Ao comentar, sobre os futuros professores de matemática, Gazire (2000) continua afirmando que "se um professor, sistematicamente, não ensina geometria, o provável será que seu aluno (futuro professor) também não o faça. Se este aluno resolver ensiná-la, suas dificuldades para fazê-lo serão enormes" (GAZIRE, 2000, p. 178). Logo a prática acima cria e também realimenta um ciclo vicioso.

Na minha experiência em sala de aula, percebi falta de interesse e, às vezes, até certa rejeição dos alunos pela matemática. Segundo Ferreira (1998), essa rejeição deve-se à crença de que a matemática é algo difícil e que eles são incapazes de aprendê-la. Dessa forma, o ciclo vicioso, citado por Gazire (2000) é realimentado.

Ao trabalhar com atividades como jogos, quebra-cabeças, adivinhações, atividades investigativas, montagens de brinquedos (pipas e lançamento de foguetes) nas minhas aulas de matemática, observo uma redução na rejeição à matemática. Isso me leva a pensar que, entre as possibilidades que quebrariam este círculo vicioso, citado por Ferreira (1998) e Gazire (2000), pode estar a utilização de diversos recursos didáticos e a combinação destes com a metodologia de resolução de problemas.

Nos trabalhos que desenvolvi com o tangram (veja capítulo 2), observei que este, quando bem trabalhado e explorado em sala de aula, permitia-me detectar dificuldades dos alunos em reconhecer visualmente as figuras geométricas, calcular áreas e perímetros, assim como verificar se eles haviam assimilado os conteúdos trabalhados. Além disso, percebi uma sensível redução no receio de tentar resolver os exercícios em matemática. Tal fato, em muitos casos, poderia ser relacionado com uma diminuição do medo de errar dos alunos, e com o desejo deles de realizar atividades matemáticas com esse recurso didático utilizado.

Por meio do tangram, criamos imagens que muitas vezes lembram formas humanas, de animais, de casas, de letras do alfabeto latino e números. Em vários casos, as formas causam surpresas e motivam o educando, despertando neles a curiosidade e a vontade de construí-las. Alguns chegam a produzir formas diferentes das sugeridas pelo professor. Por meio da análise do contorno das figuras construídas com peças do tangram, é possível percebermos que cada forma representada se assemelha a um polígono distinto. Isso possibilita explorar a composição e decomposição de formas geométricas, montadas desde triângulos, quadriláteros e, ainda, construir outras como, por exemplo, pentágonos, hexágonos e outros polígonos, mesmo que sejam irregulares.

Cada nova forma que se propõe ao aluno é um novo quebra-cabeça que instiga e desafia o mesmo a buscar uma resposta, isto é, a construir uma proposta de solução. Ao vencer um desafio, o estudante se sente motivado a enfrentar os próximos que, com certeza, virão. Assim, se diz que a resolução de problemas atravessa todo o trabalho na medida em que o educando se vê desafiado a observar e a considerar as hipóteses que aparecem durante o desenvolvimento da atividade para resolver a mesma.

Concordo com Kaleff e Votto (2008) ao afirmarem ser natural, na escola, que um quebra-cabeça, como o tangram, se justifica por si só, pois, em geral, o aluno demonstra grande interesse pelo aspecto visual do material apresentado, pela diversidade das suas formas e pelo desafio ao qual é levado. Contudo, é conveniente lembrar que a literatura em educação matemática tem revelado que o trabalho com tangram pode levar o aluno a desenvolver habilidades de resolver problemas, utilizando-se de estratégias e desenvolvendo formas de raciocínio e processos ligados à intuição, indução e analogia, além de permitir a interação com os colegas de modo cooperativo.

Outro recurso com o qual já trabalhei é a pipa (leia capítulo 2). Em 2000, desenvolvi um projeto com os alunos da 7ª série, buscando resposta para as seguintes questões: a) por que as pipas voam?; b) o que elas podem nos ajudar no aprendizado em matemática? Para responder à questão inicial, resolvemos pesquisar um pouco da história da pipa e como construir os diversos modelos existentes, além de algumas ações que pudessem garantir a segurança dos pipeiros (pessoas que soltam pipas). Descobrimos que a história das pipas está repleta de enigmas, de lendas, de simbologias e de mitos, sem contar, é claro, com a magia, a beleza e o encantamento que percebemos ao lermos textos sobre esse pequeno e curioso objeto.

Um recurso didático que conheci no Mestrado foi o geoplano (leia capítulo 2). Eu me encantei com as possibilidades geométricas de trabalho com o mesmo. Como parte do trabalho desenvolvido pelo GEEM na UFES desenvolvemos atividades de estudos e pesquisas. Dentre as atividades de estudos e pesquisa sobre a prática de sala de aula realizadas pelo grupo GEEM em 2008 desenvolvemos um estudo exploratório sobre as potencialidades do geoplano em três turmas. Trabalhamos com uma turma de terceira série, uma de quarta série e uma de quinta série, de três escolas públicas do município de Vitória. Nesse estudo, exploramos as potencialidades do geoplano como recurso didático para o ensino de geometria. Por meio do geoplano, discutimos conteúdos como: polígonos convexos e não convexos, perímetros e áreas das figuras planas. Alguns resultados desses estudos foram apresentados no Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) (FRAGA, RIBEIRO, DOMINGOS, SANTOS-WAGNER, GOMES, SOUZA, 2008) e em um minicurso em evento na Universidade Estadual da Bahia, Campus de Jequié (DOMINGOS; SILVA; SANTOS-WAGNER, 2009).

Na execução de atividades com o tangram, a construção de pipas e o geoplano, percebi a empolgação dos alunos ao realizar as tarefas solicitadas. O brilho nos olhos deles, no decorrer do trabalho, levou-me a refletir sobre a potencialidade que esses recursos didáticos possuem para a aprendizagem de matemática, em particular, para a aprendizagem de geometria. Tão interessante e motivador para um professor quanto a empolgação e o brilho nos olhos de seus alunos é perceber, por meio das pistas deixadas pelos estudantes, que estes estão aprendendo, além de ouvir dos pais que seus filhos estão gostando de estudar matemática. Estes retornos de alunos e pais me deixaram com o desejo de pesquisar um pouco mais sobre a influência que os recursos didáticos citados acima podem exercer no ensino de geometria. Todas essas experiências profissionais me deixaram curioso e me levaram a investigar a influência que esses recursos possuem no ensino de geometria.

1.2 A PROBLEMÁTICA E O PROBLEMA

Pesquisadores, como Almouloud e Mello (2000), afirmam que uma das dificuldades enfrentadas pela educação brasileira é o baixo desempenho dos alunos do Ensino Básico em matemática, em particular, nas atividades que envolvem geometria. Uma forma de se comprovar as afirmações expostas são as recentes avaliações feitas pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) dos quais apresentamos alguns resutados na Figura 2 na página 22.

Mesmo admitindo que a geometria é um ramo importantíssimo da matemática tanto do ponto de vista de seu estudo quanto do ponto de vista de ser uma ferramenta para outras áreas, os professores do Ensino Fundamental a apontam como um dos temas cujo processo de ensino-aprendizagem é complicado e problemático. É uma discussão que pode ser constatada em Gazire (2000).

Em 1989, ao iniciar oficialmente a minha vida profissional, ouvia os meus colegas de área comentar sobre a falta de base e de interesse dos alunos em estudar matemática e, quando o assunto caminhava para os tópicos relacionados à geometria, a situação se tornava ainda mais complicada. Nas minhas aulas de geometria, notei a baixa motivação dos alunos em estudá-la, pois, em muitos tópicos, o estudo se tornava enfadonho, sem atrativo e, aos olhos dos estudantes, parecia não ter aplicação no dia a dia deles. Analisando a forma como minhas aulas eram ministradas, a metodologia empregada e os recursos didáticos que utilizava, sinto-me obrigado a admitir que os alunos tinham razão. Afinal, para eles, estudar algo sobre o qual não viam nenhuma aplicação no cotidiano era e é desnecessário e sem sentido.

Com os educandos pensando da forma como foi descrita acima, os resultados que eles obtinham eram cada vez mais medíocres e o estereótipo de que “matemática é difícil “ ou de que “matemática é coisa para gênios” era reforçado. Assim, mesmo sem querer, eu acabava contribuindo para que o ciclo vicioso citado por Ferreira (1998) continuasse vivo e fazendo novas vítimas a cada ano letivo. E me justificava pensando, por exemplo, que “Ensinar, eu ensinei. Se eles não aprenderam, é responsabilidade deles ou porque a base deles, em matemática é fraca”.

No final de 1990, fui contratado por uma escola de Ensino Fundamental e Médio que fez repensar a minha prática e isso me ensinou que não existe ensino sem aprendizagem. Esta mesma escola acreditou na minha proposta de desenvolver atividades junto com os alunos de 7ª e 8ª séries, unindo o uso de recursos didáticos como jogos e construção de pipas aos conteúdos que seriam trabalhados em matemática.

Outro fator importante para minha formação profissional, proporcionado pela escola, foi a montagem de um laboratório de informática e, ainda, a oferta de cursos de capacitação, que tinham como objetivo mostrar que é possível estudar determinados conteúdos, por exemplo polígonos, por meio de softwares, sem que a beleza e o rigor da matemática fossem perdidos.

Os trabalhos realizados naquela escola desencadearam uma mudança em minha vida profissional. Fizeram-me ver que as dificuldades apresentadas pelos alunos eram apenas mais uma possibilidade de aprendizagem e isso significava que eles eram capazes de aprender matemática. Pensando assim, começamos a trabalhar, procurando transformar dificuldades em novas oportunidades de aprendizagens, o que exigia que fizéssemos uso de diversos recursos didáticos, entre os quais: calculadoras, jogos, quebra-cabeças e brinquedos montados a partir de sucatas.

Fundamentando-nos nas pesquisas de Kaleff, Votto e Corrêa (2003) e também Kaleff e Votto (2008), percebemos que a utilização de atividades que envolvem recursos didáticos diversificados, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio do aluno. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática,

> Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão (BRASIL, 1998, p. 57).

Tais recursos, quando integrados às atividades geométricas, permitem ao aluno identificar regularidades, reconhecer as propriedades características de uma dada figura, buscar por semelhanças e diferenças nas formas geométricas, argumentar a favor ou contra. Em outras palavras, permitem aos alunos fazer conjecturas.

Assim entendendo as potencialidades educacionais que há no trabalho com o tangram, o geoplano e a construção de pipas para o ensino de polígonos, é que propusemos a seguinte pergunta central:

O que alunos e professores aprendem sobre polígonos e desenvolvimento do raciocinio geométrico quando utilizam tangram, geoplanos e construção de pipas, em turmas do 6º ano do ensino fundamental?

Em março de 2009, ao iniciarmos os primeiros contatos com a escola e com os grupos de alunos que participariam da investigação, percebemos que nossas questões de investigação não só poderiam ser respondidas como também necessitaríamos de buscar respostas para outros questionamentos auxiliares que surgiram no decorrer da análise inicial dos dados. Durante a pesquisa de campo, ao aplicarmos o teste diagnóstico inicial e refletirmos sobre as histórias de vida, os saberes dos alunos e termos estudado outros teóricos que discutiam o ensino de geometria, percebemos que todos estes nos deram subsídio para formular outras questões de investigação. As perguntas norteadoras que nos auxiliaram no nosso processo investigativo foram:

1. Que nível de desenvolvimento de raciocínio geométrico, segundo van Hiele, nós, pesquisadores, identificamos que alunos do 6° ano exibem no início do ano letivo e ao final da sequência didática?
2. Como a aplicação de tangram, geoplano e pipa em aula de matemática podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio geométrico de alunos do 6º ano?

A pesquisa que fundamentou o nosso projeto teve como objetivos gerais: analisar o que podemos aprender com o uso de tangram, geoplano e a construção de pipas no processo de ensino de polígonos e identificar como esses recursos podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio geométrico de duas turmas do sexto ano.

Os objetivos específicos, associados à primeira pergunta auxiliar, são:

a) identificar o nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos antes da intervenção planejada e após a mesma;
b) analisar as possíveis alterações ocorridas no raciocínio dos alunos, após a intervenção.

Associados à segunda pergunta auxiliar, são:

a) organizar as sequências didáticas que serão utilizadas para cada recurso didático selecionado;
b) aplicar as sequências didáticas organizadas.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O nosso trabalho está dividido em cinco capitulos, sendo que, no primeiro, fazemos uma introdução na qual constam nosso problema de pesquisa e os objetivos gerais e específicos. No capítulo dois, apresentamos o enquadramento teórico e contextualizamos a nossa pesquisa, fazendo algumas reflexões sobre as tendências atuais em educação matemática e uma breve análise da influência da psicologia na educação, na qual destacamos Piaget e Vygotsky. Para a importância da aplicação de recursos didáticos no ensino de geometria e do desenvolvimento do raciocínio geométrico, tomamos, como referência, o modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico proposto pelo casal van Hiele. Além dessas análises, realizamos também uma breve contextualização sobre polígonos e resoluções de problemas no ensino de geometria.

No capítulo três, expomos os nossos percursos metodológicos. A metodologia adotada no processo de coleta de dados e informações foi pautada numa concepção de pesquisa qualitativa. Assim, dividimos nossa pesquisa de campo em três momentos. Inicialmente, realizamos uma avaliação diagnóstica; num segundo momento, desenvolvemos um trabalho de intervenção pedagógica; e, finalmente, concluímos nossa pesquisa com a aplicação de uma nova avaliação. Nesse capitulo, discutimos também as avaliações diagnósticas, descrevemos a sequência didática utilizada, a organização dos blocos da intervenção e os procedimentos que utilizamos na análise dos dados. Fizemos um relato da nossa entrada no campo de pesquisa e, ainda, uma discussão sobre o ambiente e os sujeitos da pesquisa.

No capítulo quatro, discutimos o nível atual de desenvolvimento do raciocínio geométrico das turmas, e os critérios que utilizamos para identificação desse nível ao corrigir o teste diagnóstico. Também descrevemos e analisamos as atividades desenvolvidas com as turmas de sexto ano. No capitulo cinco, descrevemos nossas considerações finais e as aprendizagens que tivemos no desenvolvimento da investigação. Incluímos, ao final do trabalho, as referências e os anexos deste estudo.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO E REVISÃO DE LITERATURA

Este capitulo destina-se à descrição da revisão de literatura e do enquadramento teórico da nossa investigação. Inicialmente, realizamos um levantamento sobre as tendências discutidas em educação matemática no final do século XX, pois acreditamos que tais tendências nos ajudam a contextualizar nossa pesquisa no campo de ensino de matemática. Em seguida, fizemos uma síntese de alguns trabalhos sobre ensino de geometria, resolução de problemas e a questão dos recursos didáticos que utilizamos no trabalho investigativo.

Para embasar este trabalho, pesquisamos obras que poderiam nos ajudar a entender o nosso objeto de investigação. Para tal, precisávamos realizar nossas buscas em bibliotecas e livros, pois acreditamos que

> O tempo passa e nem tudo fica
> A obra inteira de uma vida
> O que se move e
> O que nunca vai se mover.. êê,êê
> Se mover... êê,êê
> O passado está escrito
> Nas colunas de um edifício
> Ou na geleira
> Onde um mamute foi morrer
> O tempo engana aqueles que pensam
> Que sabem demais que juram que pensam
> Existem também aqueles que juram Sem saber
> (O Tempo – Nenhum de Nós – 1990).

Assim, como na música O Tempo, reconhecemos ter que mergulhar nas estantes de uma biblioteca, onde encontraríamos as obras inteiras dos teóricos com as quais poderíamos explicar o problema que pretendíamos pesquisar. Contudo, precisaríamos realizar investigações nos sites da internet, uma vez que, sabíamos que o tempo passa e nem tudo fica, mas certamente, o que nunca vai se mover é a obra inteira de uma vida. E, possivelmente, uma das geladas páginas de sites de buscas da internet poderia nos revelar um tesouro. Nosso trabalho de pesquisa iniciou-se no primeiro semestre de 2008. Resolvemos investir tempo nas buscas na biblioteca central e setorial da UFES e na internet e nesta encontramos a tese de doutorado do casal van Hiele. Nas investigações iniciais, procuramos catalogar as dissertações defendidas na UFES, no período de 1999 a 2008. Das trinta dissertações que encontramos cinco delas tinham relação com o nosso tema de pesquisa. Além das leituras das dissertações da UFES, resolvemos continuar nossa busca. Montamos um banco de dados e nele registramos os endereços eletrônicos das universidades federais brasileiras e, da maioria das universidades internacionais, as quais relacionamos por continentes e em ordem alfabética. Após essas buscas, investimos tempo nas leituras das teorias de Piaget, Vygotsky, van Hiele e das dissertações e teses que discutiam o ensino de geometria no Brasil e no mundo.

No intuito de harmonizar esta pesquisa com as perspectivas teóricas debatidas sobre o nosso tema, recorremos também à leitura de revistas cientificas, jornais, e-books e revistas especializadas em educação matemática e às traduções de textos clássicos que tratam do ensino de geometria e do desenvolvimento do raciocínio geométrico. Dessa forma registramos nesta dissertação o resultado de análises das leituras, que possam contribuir para a discussão sobre o assunto que desenvolvemos na pesquisa e venha nos ajudam a explicar o nosso problema.

A tendência que surgiu na segunda metade do século XX, que a nosso ver está relacionada à psicologia da aprendizagem em matemática e tem, como foco, o ensino de geometria é uma teoria elaborada pelo casal de educadores holandeses Dina e Pierre Marie Van Hiele. Concordamos com Lujan (1997), quando ela afirma que a teoria dos van Hiele fundamenta-se na psicologia genética, e discute a questão dos níveis de desenvolvimento e no momento que trata das noções de estrutura, na Gestalt.

A teoria citada acima ficou conhecida como modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico e, originou-se nas pesquisas de dois professores de matemática do ensino secundário da Holanda, Dina van Hiele-Geldof e seu esposo Pierre M. van Hiele (1957). Dessas investigações resultaram duas teses de doutorado, respectivamente, um modelo de ensino e aprendizagem de geometria e, um exemplo concreto de aplicação desse modelo em cursos de geometria. Com o falecimento de Dina, logo após a conclusão da tese de doutorado, coube a Pierre prestar os esclarecimentos sobre os níveis, fases e as propriedades do modelo.

Segundo Kaleff (1994) inicialmente o modelo de van Hiele não foi muito utilizado em diferentes locais, com exceção da União Soviética - que se fundamentou no modelo de van Hiele para elaborar um novo currículo de geometria - e, da Holanda - que utilizou o modelo de van Hiele no projeto Wiskobas de desenvolvimento curricular em 1971. O modelo não foi muito explorado até a década de 1970, época em que surgiram vários projetos de pesquisa nos Estados Unidos. Foi somente a partir daí que vários artigos publicados por van Hiele passaram a ser traduzidos para o inglês, tornando o modelo conhecido e discutido em outros países.

Ao comentar sobre a divulgação, Kaleff (1994) afirma que

> Foi somente em 1976 que um professor americano, Izaak Wirsup, começou a divulgar o modelo. Ao mesmo tempo, Hans Freudenthal, na Holanda chamou a atenção sobre o trabalho dos van Hieles em seu livro Mathematics as Education Task (1973). Ultimamente com as traduções para o inglês feitas em 1984 por Geddes, Fuys e Tischler, vem crescendo o interesse pelas contribuições do casal (p. 25).

Na década de 1970, nos Estados Unidos, pesquisadores motivados por encontrar soluções para os problemas com ensino de geometria na escola secundária resolveram desenvolver investigações e se fundamentaram nos estudos do casal van Hiele. Em linhas gerais, tais pesquisas tinham como objetivo testar a validade, a viabilidade e as vantagens da aplicação do modelo. A seguir, sintetizamos a partir do texto de Kaleff (1994) três trabalhos de pesquisa que, ficaram conhecidos como projetos do Brooklin, de Chicago e de Oregon, cujas características assemelham-se às que utilizamos em neste trabalho.

O projeto Brooklyn tinha como objetivo desenvolver e documentar os níveis de van Hiele. Para realização de tal tarefa, tomaram como base as traduções do holandês para o inglês, dos artigos publicados sobre a teoria do casal van Hiele e, a partir dessas publicações, os pesquisadores avaliaram os níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico em que se encontravam os estudantes da 6ª à 9ª série. Analisaram, também, se os livros de geometria estavam de acordo com o modelo van Hiele, pois, uma das metas do projeto, era verificar a possibilidade de instruir os professores para que identificassem os níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico de seus alunos. Convém lembrar que os educandos envolvidos nesse projeto tinham idades variando entre 11 e 15 anos e, ainda, que uma das grandes contribuições do Brooklyn foram as traduções para o inglês, dos artigos de van Hiele, tornando possível a difusão deles.

Pelo projeto de Chicago, que era dirigido por Usiskin, analisou-se o nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico de 2700 alunos do ensino secundário. Para concretizar tal tarefa, Usiskin empregou um teste antes e um depois de ter aplicado o modelo van Hiele no ensino de geometria. Com base nessas avaliações, procurou mostrar as relações e as diferenças entre os níveis de raciocínio de van Hiele usados no ensino e os exibidos pelos estudantes. As avaliações organizadas por Usiskin eram compostas de questões de múltipla escolha. Muitos pesquisadores colocaram em dúvida a validade de se avaliarem níveis de raciocínio por meio de testes de múltipla escolha.

Outro projeto interessante, no qual também se discutiu o desenvolvimento do raciocínio geométrico foi o de Óregon, e envolveu 48 alunos da escola básica. Nesse projeto, os educandos foram avaliados por meio de entrevistas, com as quais se verificaram os níveis de raciocínio dos estudantes em geometria. A temática abordada nessas entrevistas dizia respeito a triângulos e quadriláteros. No item 2.1, faremos uma síntese do modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico, proposto pelo casal Dina e Pierre M. van Hiele.

2.1 DESCRIÇÃO DO MODELO DO MODELO VAN HIELE

Na década de 1950, o casal holandes, de professores de matemática, Dina van Hiele-Geoldof e Pierre van Hiele detectaram que seus alunos do curso secundário apresentavam falhas no aprendizado de geometria. Ao pesquisarem sobre essas dificuldades de assimilação do conteúdo, notaram que os estudantes passam por uma seqüência ordenada de níveis de desenvolvimento da aprendizagem em geometria. De acordo com o trabalho do casal van Hiele, podemos pensar que a compreensão de conceitos geométricos por parte de um aprendiz é resultado da passagem pelos estágios, que ocorre da vivência de atividades adequadas e organizadas pelo professor.

A experiência do casal van Hiele, com alunos do ensino médio na Holanda, resultou numa estrutura teórica que trata de explicar, por um lado como se dá a evolução do raciocínio geométrico de um aprendiz e, por outro, como um educador pode ajudar os estudantes a melhorar esse raciocínio. A proposta didática do modelo van Hiele nos mostra que, para facilitarmos a ascensão dos estudantes de um nível de raciocínio para outro imediatamente superior precisamos estruturar nossas atividades de forma sequencial, isto é, elas precisam seguir a organização hierárquica dos níveis e, as orientações sugeridas nas fases de aprendizagem. O modelo proposto pelo casal van Hiele consiste de cinco níveis, que são chamados de: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

Com a intenção de facilitar a compreensão do nosso estudo, resolvemos descrever de forma resumida os níveis de desenvolvimento do raciocínio de geometria proposto pelo casal van Hiele.

No primeiro nível, chamado de **visualização ou reconhecimento**, o estudante tem uma percepção global das figuras. Podemos dizer que um educando neste nível reconhece as figuras geométricas como um todo, isto é, por sua aparência física e não por suas partes ou propriedades. De acordo com Crowley (1994), um estudante neste nível é capaz de aprender um vocabulário geométrico, de identificar formas específicas e de reproduzir uma forma dada. Ainda sobre a percepção do aluno podemos dizer que ele observa o objeto e o associa à figura, sem, contudo, reconhecer que ela faz parte de uma classe, isto é a forma geométrica é vista como um todo e não pelas partes que a compõem.

Outro ponto importante sobre este nível é que as descrições dos formatos são feitos pelos aspectos físicos do objeto ou por meio de comparações destes com as formas geométricas. Tais afirmações são corroboradas por Clements e Battista

(1992, p. 427) que afirmam que os estudantes “[1]identificando figuras, eles freqüentemente usam protótipos visuais; os estudantes dizem que uma dada figura é um retângulo, por exemplo, porque “se parece com uma porta” (Tradução nossa).

Além da percepção outro tema importante que devemos considerar ao trabalharmos com estudantes no nível da visualização é a linguagem desse educando, que é por meio da qual ele descreve as figuras geométricas. Normalmente, essas descrições são feitas sem a utilização de propriedades das formas geométricas. Quando apresentamos um retângulo para um aluno do nível da visualização e perguntamos qual é nome da figura? A resposta que ouviremos é retângulo. Mas, ao solicitarmos que justifique a resposta ouvimos: Ah! Porque me disseram que é. De acordo com van Hiele (1957, p. 22) “[2]para uma criança é muito mais difícil provar que uma figura é um retângulo usando procedimentos geométricos lógicos que fazê-lo depois de tê-lo visualizado”. Tal dificuldade vem do fato de que um aluno, nesse estágio, não reconhece que o retângulo tem ângulos retos e que os lados opostos são paralelos. Esse reconhecimento só acontecerá no nível seguinte.

O segundo nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico na teoria do casal van Hiele, é o da **análise**. É o nível em que os alunos se utilizam da observação e da experimentação, os alunos começam a reconhecer as figuras geométricas por suas características particulares e fazem uso de algumas propriedades para conceituá-las. Os educandos tornam-se capazes de comparar e descrever, empregando vocabulário, identificam símbolos apropriados e propriedades como, por exemplo, número de lados, ângulos, números de diagonais e eixos de simetria de diferentes tipos de figuras (Ripplinger, 2006). Entretanto, o estudante ainda não é capaz de aplicar a inclusão de classes entre figuras geométricas, isto é, não inclui, por exemplo, o losango na classe dos quadriláteros, não consegue explicar relações entre propriedades, não vê inter-relações entre figuras geométricas e não entende definições.

---

[1] *Identifying figures, they often use visual prototypes; students say that a given figure is a rectangle, for instance, because “it looks like a door"* (CLEMENTS E BATTISTA, 1992, p. 427).

[2] *Para un niño es mucho más difícil demostrar que una figura es un rectángulo usando procedimientos geométricos lógicos que hacerlo después de haberlo contemplado* (VAN HIELE, 1957, p. 22).

O terceiro nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico é a **dedução informal**. O aluno nesse nível é capaz de fazer relações entre as figuras, deduzir propriedades e, de reconhecer as classes de figuras geométricas como, por exemplo, a relação de inclusão do losango nos quadriláteros e paralelogramos. Além disso, consegue desenvolver e utilizar as proposições que expõem, com certa clareza e exatidão, os caracteres particulares e diferenciais de uma figura, percebem a necessidade de colocar em prática definições mais precisas, e que uma propriedade pode derivar de outra.

Nesse nível o aluno forma definições fundamentado na percepção do necessário e suficiente. Em outras palavras, é capaz de compreender que quadrado é um quadrilátero cujos lados têm a mesma medida e ângulos retos. É capaz de desenvolver argumentos dedutivos informais corretos como: se quadrado é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes e paralelos, e os quatro ângulos são iguais, e retângulo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos e congruentes, e os quatro ângulos iguais, então, podemos dizer que o quadrado é um retângulo especial. Contudo, um aluno no nível da dedução informal ainda não compreende o significado da dedução ou a função dos axiomas e é incapaz de construir uma prova formal, a partir de diferentes premissas.

A **dedução formal** é o quarto nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico proposto pelo casal van Hiele. O estudante desse nível já é capaz de: compreender o significado da dedução, como uma forma de organizar a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático; compreender o papel que os axiomas, teoremas e definições possuem na construção do conhecimento matemático e geométrico. Além disso, está apto para construir demonstrações, não só memorizá-las, é capaz de desenvolver demonstrações de diferentes maneiras; possui facilidade em identificar informações implícitas numa figura ou numa dada informação; demonstra ter compreensão do que é condição necessária e suficiente; entende e aceita os postulados, isto é, proposição que se admite sem a necessidade de ser demonstrada.

O quinto nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico na teoria do casal van Hiele é o **rigor**. É a partir deste estágio que o aluno se torna capaz de comparar sistemas diferentes. Consegue desenvolver atividades com outros sistemas axiomáticos, mostra-se capaz de raciocinar através de um conjunto de princípios, coordenados entre si, de modo a formar um todo científico evidente e incontestável. Um estudante nesse nível entende, aceita e consegue trabalhar com as geometrias não euclidianas.

Outros pontos interessantes para se discutir nesse modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico são as características das fases de aprendizagem, sequencialidade, linguagem, localidade e continuidade dos níveis. Iniciaremos nossa análise pela questão da sequencialidade dos níveis. O modelo prevê que para um determinado tema os alunos devem passar por todos os níveis para que haja compreensão. Por exemplo, não há como os alunos estarem no nível 2 sem terem passado pelo nível 1. Sobre o problema da sequencialidade dos níveis Clements e Battista (1992, p. 428) afirmaram que num estudo realizado em 1983, Lundkenbein mostrou que "[3]a continuidade em vez de saltos de aprendizagem era frequentemente observada". Porém, essa discussão não foi dada por concluída e, em 1989, foi a vez de Mason, apresentar sua investigação, concluindo que os níveis de desenvolvimento proposto no modelo van Hiele obedeciam a um sistema hierárquico, isto é, não era possível passar do primeiro para o terceiro nível, pulando o segundo.

A linguagem é outra propriedade importante para a compreensão do modelo van Hiele de desenvolvimento do raciocínio, pois esta deve ser adequada ao nível de desenvolvimento em que o aluno se encontra. Ao analisar a importância da linguagem para o progresso do estudante dentro e entre os níveis, van Hiele-Gedolf procurava deixar claro que professor e aluno podem entender um ao outro em um determinado pensamento quando usam uma línguagem em que eles vivenciam as mesmas relações entre os signos linguísticos. Por essa razão, o uso inadequado da linguagem pode dificultar o aprendizado, causando uma frustração no educando, impedindo, por vezes que o progresso de um nível para outro aconteça, pois pode acabar não acontecendo.

---

[3] *Continuity rather than jumps in learning was frequently observed* (CLEMENTS; BATTISTA, 1992, p. 428).

Ao comentar sobre a questão da localidade ou classificação dos níveis, pesquisadores como Clements e Battista (1992) procuraram deixar claro que um aluno pode estar em níveis diferentes relacionados a tópicos diferentes em geometria, mas algumas pesquisas comprovaram que, tendo o aluno chegado a um determinado nível em um tópico de geometria, a progressão dentro desse nível para outro tema de estudo requer menos tempo e esforço. O nível em que se encontra o aluno independe de sua idade, mas sim da instrução recebida.

Na questão da continuidade dos níveis, Dina e Pierre van Hiele (1957) mostraram que o progresso do aluno se dá ao passar de um nível para outro, imediatamente, superior e, nenhum estudante que esteja no nível da visualização passa direto para o da dedução informal, sem aprender as estratégias da análise, que é o nível localizado entre a visualização e a dedução informal. Porém, pesquisas realizadas posteriormente mostram que há um conjunto de fases de transição na progressão de um nível para o outro.

Ao discutirem as fases de aprendizagem, Dina e Pierre van Hiele (1957) afirmaram que elas são compostas de uma sequência de cinco fases de aprendizado para cada nível e, de acordo com eles, ao completar a quinta fase, o aluno alcançará um nível superior. Essas fases são: interrogação ou informação, orientação dirigida, explicitação, orientação livre e integração.

Na fase da interrogação ou informação, professor e aluno conversam sobre o objeto de estudo. O professor verifica quais são os conhecimentos prévios dos alunos a respeito do objeto a ser estudado. É importante lembrar que o educador precisa tomar muito cuidado com a linguagem e com os símbolos utilizados em cada nível.

A orientação dirigida é a segunda fase de aprendizagem. Nesta fase, os alunos exploram o tema de estudo através dos materiais que professor, cuidadosamente, organizou em sequência e com um grau de dificuldade crescente. Neste momento, cada atividade precisa estar voltada para que os alunos apresentem respostas específicas, de forma que percebam, por si mesmos, as propriedades, conceitos e definições que o educador quer atingir.

A explicação é a terceira fase de aprendizagem. Esta fase considera as experiências vividas nas anteriores. Os alunos expõem suas observações ao professor de maneira oral ou escrita. O educador procura direcionar o diálogo de forma a corrigir a linguagem do aluno quando necessário, aproveitando esse momento para apresentar a linguagem específica do nível em que se encontra o grupo de alunos. É a oportunidade para professor e aluno dialogarem e buscarem um consenso com relação ao tema estudado, pois este é o momento em que os alunos realizam trocas de experiências, por isso não se introduzem conceitos novos.

A orientação livre é a quarta fase de aprendizagem. Nela, o professor passa atividades para os alunos de modo que eles tenham que utilizar os conteúdos anteriormente estudados. Mas, convém lembrar que os problemas propostos aos alunos precisam ter um grau de dificuldade maior do que os dados na fase 2, de maneira que os alunos possam ter mais de um caminho para resolvê-los. Os problemas, não devem ser só uma aplicação de tarefas anteriores, mas necessitam apresentar grau de complexidade maior, fazendo com que os alunos apliquem o conhecimento anterior. O professor deve intervir o mínimo possível, deixando para os alunos a tarefa de formalizar o conceito. Para van Hiele, só sabemos se houve compreensão, quando ao aluno é colocada uma nova situação e ele consegue resolver o novo problema. Segundo van Hiele (1957, p. 88)[4],

> Pode-se, dizer que um aluno alcança um determinado nível de pensamento geométrico quando uma nova ordenação mental com respeito a certas operações, permite-lhe aplicá-las em novas situações. Não é possível alcançar a estes níveis com o estudo; no entanto, o professor pode, mediante uma seleção apropriada de tarefas, criar uma situação ideal (favorável) para que o aluno alcance um nível superior de pensamento. Pode-se afirmar, além disso, que a obtenção de um nível superior aumenta consideravelmente o potencial do aluno; entretanto, é pouco provável que o aluno regrida a um nível inferior de pensamento.

Tomando como base a assertiva de van Hiele (1957) e Crowley (1994) concluímos que um estudante, ao atingir a quinta fase de aprendizagem, alcança

[4] *Se dice que uno ha alcanzado determinado nivel de pensamiento cuando una nueva ordenación mental respecto de ciertas operaciones le permite aplicarlas a nuevos objetos. No se puede llegar a estos niveles con el estudio; sin embargo, el profesor puede, mediante uma selección apropiada de tareas, crear una situación ideal para que el alumno alcance un nivel de pensamiento superior. Se puede afirmar además que la consecución de un nivel superior aumenta considerablemente el potencial del alumno, mientras que resulta muy difícil que um alumno vuelva a caer a un nivel de pensamiento inferior* (VAN HIELE, 1957, p. 88).

um novo nível de pensamento, e o novo domínio de raciocínio substitui o antigo, deixando o educando apto a repetir as fases de aprendizagem no nível, imediatamente, superior.

Outra tendência que nos interessa discutir em educação é a matemática praticada por certos grupos socioculturais, também vistas como um fator de grande importância na justificativa da educação matemática, pois nos parece claro que grupos sociais diferentes têm maneiras diferentes de aplicar suas habilidades matemáticas, e isso poderá ser levado em consideração na escola. Nessa perspectiva, surge a etnomatemática, a matemática associada a formas culturais distintas.

Sobre a etnomatemática D' Ambrosio (1993, p. 18) afirma que ela "se situa numa área de transição entre a antropologia cultural e a Matemática que chamamos academicamente institucionalizada, e seu estudo abre caminho ao que poderíamos chamar de uma matemática antropológica". Estudando as pesquisas realizadas por D'Ambrósio (2004; 2005), constatamos que, nos meados da década de 1970, começa a tomar corpo um programa educacional chamado Programa Etnomatemática. Apesar de o nome sugerir uma ênfase na matemática, ele significa, em sentido amplo, um estudo da evolução cultural da humanidade, a partir de uma dinâmica cultural que pode ser observada nas manifestações matemáticas.

Ainda, de acordo com os estudos de D' Ambrósio (1993; 2004), vale dizer que o ponto de partida de um programa de etnomatemática é o exame da história das ciências, das artes, das religiões em várias culturas. Para tal, adota-se um enfoque externalista, em outras palavras devem ser procuradas as relações entre o desenvolvimento das disciplinas científicas ou das escolas artísticas ou das doutrinas religiosas e o contexto sociocultural em que tal acontecimento se deu. Diante do exposto podemos dizer que o programa etnomatemática se apresenta como um programa de pesquisa sobre história e filosofia da matemática, com importantes reflexos na educação.

Pensamos que essa orientação está associada com o trabalho que alguns pesquisadores estão desenvolvendo, os quais têm a história da matemática como motivação para o ensino de matemática. Trabalhar numa perspectiva histórica mostra que o estudo da construção da história da matemática nos conduz a uma melhor e maior compreensão do desenvolvimento do conceito matemático. Contudo, reconstruir, historicamente, um conceito pode não ser uma garantia de que a aprendizagem acontecerá, pois, existem dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que estamos ensinando que, muitas vezes, se tornam barreiras para a aprendizagem do mesmo pelos alunos.

Na tentativa de quebrar a dicotomia existente entre a matemática formal da escola e a sua utilização na vida prática, surge nova tendência, de ensino, a modelagem matemática, que procura conscientizar o aluno da presença e utilidade da matemática no dia a dia. Partindo do princípio de que a matemática está inserida, de alguma maneira, nas criações da humanidade, na tecnologia ou mesmo num objeto, por mais simples que pareça, tem, em sua fundamentação, uma abordagem de solução de algum problema da realidade. Isso nos conduz à ideia de modelo e modelagem matemática e a uma sutil identificação dessas ideias em alguns feitos da história da ciência.

Ao discutir sobre modelagem matemática, Bassanezi (2002) afirma que ela é um processo dinâmico aplicado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. Consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. Modelo é um conjunto de símbolos que interagem entre si, representando alguma coisa. Outro pesquisador que discutiu o conceito de modelagem matemática foi Barbosa (2001; 2008). Segundo ele, podemos conceber a modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência à realidade.

Biembengut (1999), ao analisar a modelagem, afirmou que esta pode se desenvolver em três etapas, a saber: a **interação** que é o reconhecimento da situação-problema e familiarização; a **matematização** que consiste na formulação e resolução do problema; e **modelo matemático** que é a interpretação e validação para o desenvolvimento do conteúdo programático.

Diante do exposto, observamos que são muitas e diferentes as linhas metodológicas de trabalho para o ensino de matemática, que deixam evidente a importância da construção de conceitos matemáticos pelos estudantes, tornando-os sujeitos ativos da própria aprendizagem. Reconhecemos que essas tendências indicam que se deve basear o ensino de matemática num conteúdo adequado ao nível de desenvolvimento psíquico do educando, e envolver metodologias diversificadas e coerentes na fundamentação psicopedagógica.

No próximo tópico discutimos sobre o ensino de geometria, em particular no que diz respeito aos polígonos, recursos didáticos e a resolução de problemas. Nas discussões fazemos relação com as tendências expostas nesse texto.

2.2 ENSINO DE GEOMETRIA

A geometria é delineada como um conjunto de conhecimentos, essencial à compreensão do mundo a nossa volta e para uma atuação efetiva do homem no meio social no qual está inserido, pois, por meio dela, são facilitados o desenvolvimento do raciocínio e a resolução de problemas dos mais diversos campos do conhecimento.

Apesar da importância que geometria tem, é possível, por meio de uma revisão de algumas das pesquisas em educação matemática, realizadas de 1990 até 2008, mostrar que o ensino de geometria plana e espacial, no Brasil, pode ser considerado deficitário. E outras investigações deixaram claro que houve omissão ou abandono do ensino de geometria em todos os níveis de escolarização. Foi possível perceber, por meio desses trabalhos, os problemas enfrentados por professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem de geometria.

Nas pesquisas que discutem o abandono do ensino de geometria, destacamos as pesquisas de Pavanello (1989; 1995), Pereira (2001), Gonçalves (2004). As autoras realizaram uma análise histórica do que aconteceu no Brasil e no mundo, com o ensino em geral e nessas investigações buscavam respostas para questões como: **Por que, quando e como o ensino de geometria foi relegado a um segundo plano? Que prejuízos isto pode acarretar à formação do aluno?**

Além das questões acima, Pereira (2001) declarava que o objetivo do seu trabalho era oferecer uma possibilidade de melhor compreender e resgatar a condição da geometria nos currículos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Já Gonçalves (2004) afirmava que, em seu trabalho, pesquisou sobre os motivos que alguns educadores alegam para deixar o ensino de geometria em segundo plano, mesmo estando a matéria, presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nas propostas curriculares do Estado e nos livros didáticos.

As discussões propostas por Pavanello (1989; 1995), Pereira (2001), e Gonçalves (2004) nos permitiram compreender as razões pelas quais o ensino de geometria foi abandonado e o porquê do nível de conhecimento geométrico dos estudantes estar tão baixo. Sobre essas razões Pavanello (1989, p. 166) explica que “a maioria dos alunos do primeiro grau deixa, assim, de aprender geometria, pois, em geral os professores das quatro séries iniciais limitam-se a trabalhar somente aritmética e as noções de conjunto”. E, ao analisar o material didático utilizado pelos professores Pavanello (1989) segue afirmando que

> Os próprios livros didáticos utilizados nesta época são compêndios de aritmética, geometria, álgebra etc., nos quais cada um desses assuntos é desenvolvido como um todo, progressiva e sistematicamente, sem qualquer tentativa de distribuí-lo por série – já que cada assunto é tratado por extenso numa determinada série – ou de estabelecer qualquer relação entre os diferentes assuntos (p. 150).

Essas pesquisas nos fazem perceber que a estrutura de formalidade usada para o ensino de geometria no final do século XX, ainda era semelhante ao que era ensinado nos compendios do início do mesmo.

No quesito ensino de geometria, dentre as dissertações estudadas destacamos as pesquisas de Pirola (1995) e Inoue (2004), porquanto, dentre aquelas lidas estas foram as que mais se aproximam do nosso tema de pesquisa. Por esta razão decidimos fazer, um pequeno resumo desses trabalhos.

Em sua dissertação, Pirola (1995) realiza um estudo sobre triângulos, no qual ele discute a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo com alunos de 5ª a 8ª séries. Para tal, fundamenta-se nos modelos de Klausmeier e van Hiele, e baseado neles mostra que a série cursada pelo aluno não é indicativo adequado para afirmar que estudantes de séries mais adiantadas possuem conceitos de triângulo e paralelogramo mais completo que os das séries menos adiantadas. Essa pesquisa nos auxiliou a compreender o processo de desenvolvimento de raciocínio geométrico no caso de formação de conceitos de triângulo e pararelogramo.

Já Inoue (2004) discute sobre o processo de formação do conceito de quadriláteros no decorrer da realização de uma sequência de atividades. Por meio dessa a autora analisa os possíveis avanços no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos da 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Pública Municipal, situada em Itajaí, no estado de Santa Catarina. Em nossa pesquisa também discutimos sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico em polígonos. É neste ponto que encontramos informações na dissertação de Inoue que nos fizeram compreender algumas das dificuldades apresentadas pelos estudantes quando trabalhavam com o tangram.

Outro tema importante nas discussões sobre o ensino de geometria é o desenvolvimento do pensamento geométrico e, nesse item, entre as dissertações e teses que encontramos, destacamos as pesquisas de Lujan (1997), Alves (2004) e Delatorre (2007).

Em sua pesquisa Lujan (1997) discute o raciocínio geométrico dos estudantes do primeiro ano do ensino fundamental. A autora tem base na psicologia genética de Piaget e no modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico proposto pelo casal van Hiele. Lujan (1997) declara que sua pesquisa foi realizada com um grupo de 44 crianças da primeira série do primeiro grau, da rede pública do estado de São Paulo. A autora com base em seu trabalho pôde concluir que crianças do primeiro ano também podem adquirir conceitos geométricos de quadrado, triângulos, polígonos e círculo, se a proposta for condizente com o nível de desenvolvimento das mesmas. A investigação feita por Lujan (1997) nos ajudou a compreender a relação entre a teoria de Piaget e a de van Hiele e, segundo Lujan (1997)

> As dificuldades que os alunos apresentam nos tópicos geométricos, poderiam ser amenizadas se o ensino de geometria realmente acontecesse em nossas escolas de maneira pedagogicamente cuidada, levando-se em consideração, as idades dos alunos, as características de seu desenvolvimento cognitivo, assim como também o processo de aprendizagem, respeitando-se os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, propostos pelo casal van Hiele (p. 50).

A investigação de Alves (2004) discute o processo de ensino-aprendizagem da geometria e procura mostrar que este é dificultado por deficiências de visualizações por parte dos alunos. O autor declara que o objetivo de seu estudo foi verificar se o uso do software de geometria dinâmica auxilia no desenvolvimento das representações mentais de objetos geométricos e se contribui para uma melhor compreensão de conceitos relacionados ao domínio do conhecimento.

Alves se fundamenta na teoria do construtivismo cognitivista de Jean Piaget, no socioconstrutivismo de Vygotsky, no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e nas teorias de resolução de problemas e de representação do conhecimento, sub-áreas da psicologia cognitiva. Para tal, realiza dois trabalhos de campo: no primeiro trabalha com alunos ingressantes no ensino técnico, abordando o conteúdo de triângulos, suas classificações, e, no segundo, com estudantes concluintes, abordando o conteúdo sobre cálculo de volume e a justificativa para o uso de fórmulas. De acordo com o autor, os resultados mostraram que a introdução da tecnologia informática, nesse caso, aponta para uma melhora no desempenho dos alunos e potencializa a sua habilidade para visualizar conceitos geométricos.

O trabalho de Alves (2004) nos ajudou na compreensão de que algumas das dificuldades que enfrentamos no nosso trabalho poderiam ser creditadas às falhas na visualização das formas geométricas. Por outro lado, a investigação feita por Alves ampliou nossa compreensão no que diz respeito à relação entre a teoria construtivista cognitivista de Jean Piaget, o sócio-construtivismo de Vygotsky e o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, e ainda nos possibilitou perceber as conexões das teorias já mencionadas com a resolução de problemas. Estas relações nos interessavam, pois, em nossa pesquisa nos fundamentamos em Piaget, no que diz respeito aos princípios da teoria da construção do conhecimento. E nos baseamos em Vygotsky, quando discutimos a questão da mediação, e em van Hiele, quando nos propusemos a realizar uma sequência didática fundamentada no modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico proposto por eles. Nós nos fundamentamos também na resolução de problemas, quando consideramos que cada uma das atividades da sequência didática era um novo problema para o educando. Portanto, encontramos na investigação de Alves, as quatro teorias que nos deram fundamentação teórica para a pesquisa de campo desenvolvida.

Até aqui, discutimos sobre o ensino de geometria e o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Procuramos construir uma argumentação que mostrasse a relação entre os mesmos. Como em nossa pesquisa focalizamos em um tópico do ensino de geometria, a saber, polígonos, resolvemos realizar uma contextualização do mesmo.

2.3 UMA BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO SOBRE POLÍGONOS

Algumas perguntas que as crianças nos fazem, as quais nos levam a pensar e em muitos casos, nos impulsionam a uma profunda reflexão, foram sintetizadas por Calcanhoto (2004), da seguinte forma:

> Por que as cobras matam ?
> Por que o vidro embaça?
> Por que você se pinta?
> Por que o tempo passa?
> Do que é feita a nuvem?
> Do que é feita a neve?
> Como é que se escreve Réveillon ?
> (Adriana Calcanhoto – 2004 – Oito anos – Album- Partimpim).

Questões como “por que o vidro embaça e por que o tempo passa” da música de Calcanhoto nos mostram o quanto as crianças podem nos surpreender com questionamentos aparentemente simples, mas profundos. Foi o que aconteceu conosco no dia 20 de maio de 2009, durante uma das aulas da pesquisa. Ao iniciarmos uma discussão com os alunos sobre polígonos convexos, polígonos não convexos e o nome dado às figuras geométricas, fomos interrompidos pelo estudante C19 (código usado para manter em sigilo o nome do estudante paticipante da pesquisa) com a seguinte pergunta: professor, qual é o nome de uma figura com 25 lados? A primeira resposta que nos veio à mente foi polígono de 25 lados, contudo esta resposta não o satisfez. Percerbendo que poderíamos melhorar a nossa resposta e, em busca de uma resposta mais convincente para o questionamento do educando, resolvemos escrever o texto a seguir.

Se alguém nos mostrasse as Figuras (3 e 4) desenhadas abaixo, e nos perguntassem se elas são polígonos, provavelmente a melhor resposta que poderíamos dar é: depende da definição de polígonos que está sendo discutida.

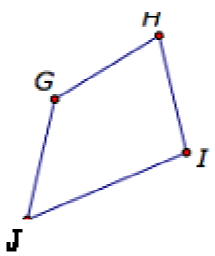


Figura 3 - Polígono como contorno

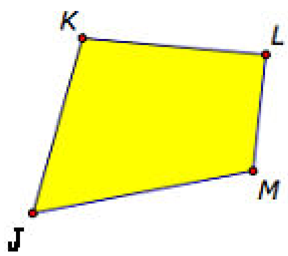


Figura 4 - Polígono como região interna e contorno

Para ilustrar essa dependência, apresentamos a definição de Hilbert (1902, p. 6)

> Um sistema de segmentos AB, BC, CD,. . . , KL é chamado de linha quebrada unindo A com L e é designada, brevemente, como a linha quebrada ABCDE. . . KL. Os pontos situados dentro dos segmentos AB, BC, CD,. . . , KL, como também os pontos A, B, C, D,. . . , K, L, são chamados os pontos da linha quebrada. Em particular, se o ponto A coincide com L, a linha quebrada é chamada um polígono e é designado como o polígono ABCD. . . K. Os segmentos AB, BC, CD,. . . , KA são chamados os lados do polígono e os pontos A, B, C, D,. . . , K os vértices. Polígonos com 3, 4, 5,. . . , N vértices são denominados, respectivamente, triângulo, quadrângulos, pentágonos,. . . , N-gonos.[5]

---

[5] *Hilbert's Definitions. A system of segments AB, BC, CD, ... , KL is called a broken line joining A with L and is designated, briefly, as the broken line ABCDE ... KL. The points lying within the segments AB, BC, CD, …, KL, as also the points A, B, C, D , …, K, L, are called the points of the broken line. In particular, if the point A coincides with L, the broken line is called a polygon and is designated as the polygon ABCD … K. The segments AB, BC, CD, …, KA are called the sides of*

Na definição de Hilbert, polígono é o contorno de uma região poligonal. Outra definição que consideramos interessante é a de Coxeter (1973, p. 1), extraída do livro Regular Polytipes:

> Definimos polígono [plano] de p lados como um circuito de p segmentos de reta A1A2, A2A3, A3A4,..., ApA1, unindo pares consecutivos de pontos A1, A2, A3, A4, ..., Ap. Os segmentos e pontos são chamados lados e vértices do polígono [6].

Dos textos de Hilbert e Coxeter, deduzimos que eles admitem ser polígono um conjunto de segmentos que unem pares de pontos consecutivos, nos quais as extremidades se unem. Essas definições, não deixam claro se a região interna à linha poligonal faz parte do polígono. É necessário uma investigação de como estes autores trabalharam com conceitos de área de poligonos em outros textos para obtermos uma ideia mais precisa sobre isto. Todavia, uma investigação em livros de matemática da atualidade, em particular, naqueles que foram selecionados e indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 1998; 2006; 2008) para serem escolhidos pelos professores das escolas públicas municipais brasileiras, encontraremos, basicamente duas possibilidades de respostas para a pergunta o que é polígono?

A primeira resposta indicando que um polígono é uma linha poligonal fechada em que as extremidades coincidem e a segunda resposta afirmando ser a união de uma linha poligonal fechada simples com sua região interna. Portanto, concluímos que, em uma delas, o termo polígono refere-se a uma região do plano limitada por um contorno e na outra, só o contorno é considerado polígono.

A busca por uma definição de polígonos torna-se importante, porquanto entendemos o que um autor quer dizer ao discutir, por exemplo, o tema quadrilátero, ou seja, se ele pode estar se referindo somente ao contorno ou à união deste com o seu interior.

Segundo Andrini e Vasconcelos (2006), polígono é uma figura fechada, que tem somente contornos retos. Partindo do princípio de que contornos retos significam

---

the polygon and the points A, B, C, D, …, K the vertices. Polygons having 3, 4, 5, …, n vertices are called, respectively, triangles, quadrangles, pentagons, …, n-gons.

[6] *We define a p-gon as a circuit of p line-segments A1A2, A2A3, A3A4, ..., ApA1, joining consecutive pairs of p points A1, A2, A3, A4 , ..., Ap. The segments and points are called sides and vértices.*

segmentos de retas, constatamos que na definição de Andrini e Vasconcelos não fica claro se eles identificam como polígono a união da região interna com o contorno ou se só este último é polígono.

Já Giovanni, Castrucci e Giovanni Junior (1998, p. 201) apontam ser polígono “a reunião de uma linha fechada simples formada apenas por segmentos de reta com a sua região interna”. Nesta definição, evidenciamos que para os autores polígono é união do contorno com a região interna da figura geométrica. Contudo, é conveniente lembrar que ao trabalharmos com seus livros didáticos, precisamos deixar claro para os estudantes o que queremos dizer com linhas fechadas simples.

Para Souza e Pataro (2009, p. 157) polígonos são “formas geométricas planas cujo contorno é fechado e formado por segmentos de reta que não se cruzam”. Analisando a definição de Souza e Pataro, inferimos que consideram como polígono o contorno e não a união deste com a região interior, mas, ao estudarmos os exemplos, contra-exemplos e exercícios apresentados por eles, observamos que trabalham, implicitamente, com a união do contorno com a região interna como polígonos. Outro ponto interessante é que eles partem da etimologia da palavra polígono para fecharem a definição e iniciarem a discussão sobre lados, vértices, ângulos que são elementos caracterizadores dessas figuras geométricas.

Os autores Iezzi, Dolce e Machado (2009) começam a discussão sobre o que é polígono pelo seguinte caminho: inicialmente, caracterizam segmentos; depois, segmentos consecutivos e colineares. A partir dessas duas caracterizações, os autores definem polígonal, poligonal simples e não simples, poligonal aberta e fechada e, finalmente, afirmam que “ polígono é uma poligonal em que as extremidades coincidem” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 243). Essa definição dos autores nos esclarece que polígono é apenas o contorno de uma região polígonal e, ainda, eles trazem para o debate com os alunos a existência de polígonos simples e não simples.

Considerando as discussões a respeito de polígonos, assumimos a seguinte definição para polígono: **a união do contorno com o interior de uma região polígonal simples**.

Outro ponto interessante na definição de polígonos é a expressão linha polígonal, que é entendida como uma sucessão de segmentos consecutivos e não colineares, dois a dois e, pode ser classificada em aberta (Figura 5A) ou fechada (Figura 5B).

Figura 5 - Linhas poligonais abertas - linhas poligonais fechadas

Após a discussão sobre linhas poligonais abertas e fechadas passamos a investigar as características de polígono, os elementos que os compõem, a classificação quanto ao número de lados e a nomenclatura deles. No tocante aos elementos de um polígono, apresentamos a ilustração abaixo (Figura 6).

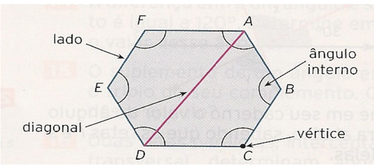


Figura 6 - Elementos de um polígono

- Lados: correspondem a cada um dos segmentos de reta que une vértices consecutivos.
- Vértices: são os pontos de encontro de dois segmentos de retas consecutivos: A, B, C, D, E.
- Ângulos internos: são os ângulos formados por dois lados consecutivos.
- Ângulos externos: são os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo.
- Diagonais: são os segmentos de retas que unem dois vértices não consecutivos.

No tocante à classificação dos polígonos quanto ao número de lados, que era a pergunta feita por C19 e gerador deste tópico em nossa pesquisa, destacamos que isso levou-nos a uma investigação em livros didáticos, em sites que tratam do tema e em conversas com professores de Matemática. O resultado desse trabalho investigativo encontra-se resumido na tabela 1, a seguir:

Tabela 1 - Nomenclaturas dos polígonos

Quantidade de lados	Nome do polígono	Quantidade de lados	Nome do polígono
Um	não existe	Dezessete	heptadecágono
Dois	não existe	Dezoito	octodecágono
Três	triângulo	Dezenove	eneadecágono
Quatro	quadrilátero	Vinte	icoságono
Cinco	pentágono	Vinte e cinco	icosicontakaipentágono
Seis	hexágono	Trinta	triacontákaigono
Sete	heptágono	Quarenta	tetracontákaigono
Oito	octógono	Cinquenta	pentacontákaigono
Nove	eneágono	Sessenta	hexacontákaigono
Dez	decágono	Setenta	heptacontákaigono
Onze	undecágono	Oitenta	octacontákaigono
Doze	dodecágono	Noventa	eneacontákaigono
Treze	tridecágono	Cem	hectákaigono
Quatroze	tetradecágono	Mil	quilógono
Quinze	pentadecágono	Um milhão	megágono
Dezesseis	hexadecágono	∞(infinito)	circunferência

Tabela 1 - Adaptada a partir da ideia de Iezzi, Dolce e Machado (2009) –

Os livros didáticos trazem uma tabela, contendo os nomes dados aos polígonos. Contudo, a maioria deles apresenta uma tabela com uma relação nominal de polígonos, na qual o polígono com o maior número de lados é o icoságono, polígono de vinte lados. E, muitas vezes, mencionam a possibilidade de uma forma geométrica com mais de vinte lados, que só aparece nos exercícios sem o nome.

Na tentativa de responder à questão proposta pelo aluno, descobrimos que existem algumas regras para se nomear polígonos, com mais de 20 e menos de 100 lados. Essas regras se resumem em uma combinação de prefixos e sufixos descritos da seguinte forma: Nome dado à dezena (prefixo) +conta+ KAI + nome dado à unidade + sufixo (gono). Assim, um polígono de 52 lados será: Pentaconta+kai+di+gono, isto é, pentacontakaidigono. Veja outros três exemplos, na tabela 2 abaixo.

Tabela 2 - Formando nomes de polígonos

Quantidade de lados	Dezenas	KAI (e)	Unidades	Sufixo	Nome do polígono
75	heptaconta	Kai	penta	gono	heptacontakaipentagono
86	octaconta	kai	hexa	gono	Octacontakaihexagono
91	Eneaconta	kai	hena	gono	Eneacontakaihenagono

Tabela 2 - Adaptada a partir de: Wikipidia.

Após a pesquisa sobre a forma como os polígonos são nomeados voltamos à sala de aula e apresentamos as respostas para os alunos, deixando claro que tão importante quanto saber o nome dado aos polígonos é reconhecê-los, identificar as características dos mesmos e saber resolver problemas envolvendo os diversos tipos de polígonos.

2.4 RECURSOS DIDÁTICOS

Os problemas enfrentados por alunos e professores no decorrer do processo de ensino-aprendizagem de matemática são muitos e conhecidos. Segundo Fiorentini e Miorin (1993), podemos dizer que de um lado, está o aluno que, por mais que se esforce, não consegue entender a matemática ensinada na escola e, em alguns casos, acaba sendo reprovado na disciplina e, quando é aprovado, sente dificuldade em aplicar o conhecimento matemático “adquirido”. Em resumo, mesmo reconhecendo a importância do saber, não consegue aprendê-lo de forma efetiva. De outro lado, o educador, verificando que os resultados obtidos por seus alunos são insatisfatórios e ciente da complexidade que representa o seu fazer pedagógico, busca recursos didáticos como, jogos, vídeos, calculadoras, computadores, geoplanos e materiais construídos a partir de sucatas. Foi nessa perspectiva que buscamos preparar intervenções pedagógicas, usando os recursos didáticos como tangram, geoplano, e pipas e por acreditarmos que estes contribuem para uma melhoria do processo de ensino-aprendizagem de matemática, em particular de geometria. Sendo assim, consultamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), as pesquisas de Neves (2005), de Kaleff, Votto e Corrêa (2007) e Lorenzato (2008).

Convém lembrar que, em sua Didática Magna, Comenius (1592-1670) já sugeria que utilizássemos os mais diversos recursos didáticos nas aulas, que, segundo ele, tinha o objetivo de desenvolver uma melhor e mais eficiente aprendizagem. Como exemplo de recursos didáticos, ele recomendava que fossem construídos modelos para ensinar geometria. Dessa forma, supomos que Comenius compreendia ser o uso do recurso didático um elemento de apoio na construção do conhecimento matemático.

Em seu trabalho de Mestrado, Neves (2005, p. 14) afirmou o seguinte: “os recursos didáticos são considerados elementos essenciais no trabalho dos conteúdos escolares com os alunos”. Ela segue dizendo que “ao serem usados no trabalho com os conteúdos escolares, os recursos didáticos servem de mediadores entre conteúdos e os alunos (p. 53)”. Concordamos com Neves (2005), pois, vemos os recursos didáticos como elementos que bem trabalhados se tornam em mediadores da aprendizagem do educando. Ao discutir a função deles no ensino, ela declara

> Do nosso ponto de vista, os recursos didáticos são essencialmente mediadores já que possibilitam uma efetiva relação pedagógica de ensino-aprendizagem. Defendemos que eles são mediadores tanto no trabalho dos educadores nos momentos em que expõem os conteúdos escolares como nos trabalhos de grupos dos alunos, momento em que realizam reflexões sobre o conteúdo escolar abordado na aula (NEVES, 2005, p. 14).

Consideramos que, quando utilizamos recursos didáticos no estudo dos polígonos, os recursos servem de mediadores entre os conteúdos e os alunos. Ademais, os estudantes podem aprender os conteúdos que lhes são ministrados e entender a função social, desempenhada por um determinado recurso didático. Citemos o uso da trena (instrumento de medida de comprimentos) nas aulas para discutir as temáticas relacionadas com medidas de comprimentos. Desse aprendizado, ele poderá utilizar o referido instrumento em outros momentos do seu cotidiano. Ao discutir o uso de signos e mediadores, Oliveira (2007, p. 26) afirma o seguinte:

> Quando uma memória é mediada por signos, torna-se mais eficaz e segura do que a memória não mediada. Por exemplo, o simples uso de uma lista de compras para ir ao supermercado que impedirá o esquecimento de algo importante. O uso de mediadores aumenta a capacidade de atenção e de memória e, sobretudo, permite maior controle voluntário do sujeito sobre sua atividade.

Ao comentar sobre signos e instrumentos Oliveira (1997, p. 29) diz que “o instrumento é um elemento interposto entre o trabalhador e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de transformação da natureza”. E, Vygotsky

(1993) nos leva a concluir que os instrumentos psicológicos, ou melhor, os signos que fazem a mediação entre o indivíduo e o mundo são providos pelo grupo cultural à que ele (indivíduo) pertence. Tomando como referência Vygotsky (1993), Oliveira (1997) e Baquero (1998), notamos que no decorrer do processo de desenvolvimento, o indivíduo passa a não utilizar marcas externas e começa a fazer uso de signos internos. Em outras palavras, os objetos do mundo real são substituídos por representações mentais. Desta forma, podemos afirmar que a criança consegue utilizar essas imagens mentais como estímulos mediadores de memória e de aquisição de conhecimento. Assim a criança já sabe que essa imagem mental ou signo interno a faz lembrar da palavra ou palavras que o representam e do objeto real. Mas quando se mudam ou se invertem os objetos reais e as representações dos mesmos, a criança já não consegue mais usar os signos internos ou representações mentais que tinha. Nem consegue utilizá-las como estímulos mediadores entre o indivíduo e o mundo. Por ex., uma criança reconhece um quadrado em uma determinada posição padronizada, mas deixa de perceber o mesmo quando giramos o quadrado e diz que parece agora um balão.

Neves (2005) resume a discussão sobre sua percepção da função mediadora dos recursos didáticos no processo educativo, apresentando o esquema abaixo. Este esquema, simultaneamente, ilustra e mostra a relação entre os três pilares do processo educativo e a função mediadora que os recursos didáticos podem exercer no ensino.

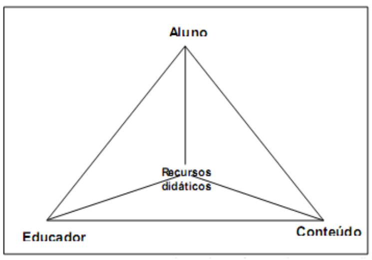


Figura 7 - Relação entre os pilares dos recursos didáticos.
Fonte: NEVES (2005).

Através desse esquema, percebemos a função, o lugar e a importância dos recursos didáticos no processo de ensino-aprendizagem de um determinado conteúdo, bem como o lugar de cada um dos outros componentes do processo educativo.

Em sua pesquisa de Mestrado, Silva (2007, p. 34) afirma que

> Não faltam argumentos favoráveis para que as escolas possuam objetos, textos, livros e imagens a serem utilizados nas aulas como facilitadores da aprendizagem. Justamente por isso, decorre uma grande necessidade das escolas possuírem materiais didáticos de diferentes tipos, sejam estes concretos, visuais ou virtuais Mas o uso desses materiais não pode ser apenas para "enfeitar uma aula" de Matemática. Deve ser um uso consciente e planejado pelo professor, uma vez que somente a utilização dos materiais concretos não dará conta da construção de um conceito. Eles são instrumentos muito úteis para auxiliar as pessoas a entenderem o sistema de idéias que é a Matemática.

Silva (2007) continua a discussão, lembrando que os recursos didáticos só serão compreendidos pelos estudantes, se o professor conseguir reconstruir o conceito a ser ensinado com o uso desses materiais.

As dissertações de Neves (2005), Silva (2007) e Oliveira (2007) mostram os recursos didáticos atuando como mediadores na relação entre o que se deseja ensinar e o que se deseja que os alunos aprendam. Além disso, nos faz pensar que recursos didáticos são componentes do ambiente de aprendizagem que podem: estimular o aluno; favorecer o desenvolvimento da capacidade de observação; aproximar o educando de uma dada realidade; permitir uma visualização dos conteúdos a serem apreendidos; auxiliar na fixação da aprendizagem e ilustrar noções mais abstratas. Diante do exposto, entendemos que, em nossa pesquisa, o tangram, o geoplano e a pipa podem exercer esse papel e, portanto podem ser classificados como recursos didáticos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998, p. 19), consideramos que "recursos didáticos como os jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem." Assim sendo, se utilizarmos em procedimentos de ensino um material que auxilie no processo educativo, esse pode se transformar num recurso de didático. No entanto, devemos pensar e refletir sobre como usar os mesmos para que de fato estes possam ajudar no processo educativo.

O documento dos PCNs (BRASIL, 1998) alerta para o fato de que tais recursos devem estar interligados com situações que levem ao exercício da análise, da reflexão com base na atividade matemática e recomendam que o

> Uso de recursos didáticos, incluindo alguns materiais específicos, é feito em quase todas as propostas curriculares. No entanto, na prática, nem sempre há clareza do papel dos recursos didáticos no processo ensino-aprendizagem, bem como da adequação do uso desses materiais, sobre os quais se projetam algumas expectativas indevidas (p. 26).

Nas afirmações de Neves (2005), dos PCN (BRASIL,1998) e de outros autores há um consenso na ideia de que os recursos didáticos, possivelmente, ofereçam caminhos auxiliares no processo de ensino-aprendizagem. Mas, usar um recurso didático não é o único ou o melhor caminho para o ensino de qualquer disciplina, em particular, o de matemática. E talvez seja essa uma das razões pelas quais os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam outros caminhos para se ensinar matemática na sala de aula e destacam os recursos à história da matemática, às tecnologias da comunicação e jogos como sendo outros recursos didáticos.

A investigação científica que realizamos teve como foco o estudo dos polígonos a partir da metodologia proposta pelo casal van Hiele. Por essa razão buscamos, no documento do PCN (BRASIL, 1998) os objetivos propostos para o ensino de geometria. E segundo esse documento um dos objetivos é identificar as características das figuras geométricas, estabelecendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações, reduções e visualizações das mesmas.

Clements e Battista (1992), citando Suydam (1985, p. 481)[7], afirmam que

> Há uma grande dose de acordo de que os objetivos da instrução de geometria devem ser: desenvolver habilidades de pensamento lógico; desenvolver a intuição espacial sobre o mundo real; difundir (comunicar) os conhecimentos necessários para estudar mais matemática; ensinar a leitura e a interpretação de argumentos matemáticos (p. 421).[8]

Analisando os objetivos propostos no documento dos PCN (BRASIL, 1998) e os apresentados por Clements e Battista (1992) constatamos haver uma relação entre eles. Esta relação fica ainda mais clara em Clements e Battista (1992) quando falam do currículo padrão americano (NCTM Curriculum Standards,

---

[7] SUYDAM, M. N. The shape of insctruction in geometry: Some highlights from research. **Mathematics Teacher**, 78, p. 481-486.

[8] Texto original: *There is a great deal of agreement that the goals of geometry instruction should be to develop logical thinking abilities; develop spatial intuition about the real world; impart the knowledge needed to study more mathematics; teach the reading and interpretation of mathematical arguments. (CLEMENTS; BATTISTA, 1992, p. 421).*

1989), publicado por National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)[9]. Eles informam que este currículo padrão amplia as discussões sobre as metas para o ensino de geometria, sugerindo que precisam atender os objetivos de:

> identificar, descrever, comparar, modelar, desenhar, e classificar figuras geométricas em duas e três dimensões; desenvolver a percepção espacial; explorar os efeitos de transformar, combinar, subdividir, e mudar figuras geométricas; compreender, aplicar, e deduzir propriedades e relações entre figuras geométricas incluindo congruência e semelhança; desenvolver uma apreciação por geometria como um meio de descrever e modelar o mundo físico; explorar abordagens transformacional sintética e coordenada para a geometria com estudantes que vão freqüentar a faculdade que também necessitavam desenvolver uma compreensão de um sistema axiomático através de investigar e comparar diferentes sistemas geométricos; e explorar uma abordagem vetorial a certos aspectos da geometria (p. 421).[10]

Concluímos que o tangram, o geoplano e a construção de pipas atendem ao objetivo de identificar, descrever, comparar, modelar, desenhar e classificar figuras geométricas em duas ou três dimensões. Ou seja, dizemos que os recursos didáticos atendem a esses objetivos propostos pelo documento do PCN (BRASIL, 1998), e pelo curriculo padrão do NCTM (1989) citado em Clements e Battista (1992).

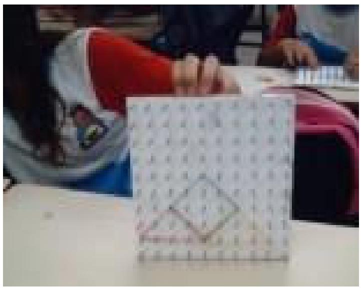
Geoplano, um dos recursos, que utilizamos em nossa pesquisa, foi criado pelo Dr. Caleb Gattegno[11], nos anos 1960. É um artefato de madeira formado por malhas quadrangulares, com um prego em cada vértice da malha (Fotografia 1). O geoplano constitui-se em um recurso didático que possibilita ao professor vislumbrar alguns caminhos para ensinar geometria plana, e para que os estudantes possam interessar-se um pouco mais pela disciplina.

---

[9] National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: Author.

[10] Texto original: *Identify, describe, compare, model, draw, and classify geometric figures in two and tree dimensions; develop spatial sense; explore the effects of transforming, combining, subdividing, and changing geometric figures; understand, apply, and deduce properties of and relationships between geometric figures, including congruence and similarity; develop an appreciation of geometry as a means of describing and modeling the physical world; explore synthetic transformational, and coordinate approaches to geometry with college bound students also required to develop an understanding of an axiomatic system through investigating and comparing various geometric systems; and explore a vector approach to certain aspect o geometry (CLEMENTS; BATTISTA, 1992, p. 421).*

[11] Caleb Gattegno, nascido em Alexandria, Egito, em 1911, formou-se em Física e Química, em 1931, na Universidade de Marselha e em pós-doutorado em Matemática, em 1937, na Universidade da Basiléia. Um dos feitos de Gattegno é a criação do geoplano. Caleb Gattegno morreu em Paris, no ano de 1988 (POWELL , 2007, p. 199).



Fotografia 1 – Estudante A07 utilizando o geoplano

Existem vários tipos de *geoplano,* e em sua maioria, eles são constituídos em uma base de madeira onde são cravados pregos, formando uma malha, tendo diversas texturas. São acompanhados por elásticos coloridos, do tipo de amarrar dinheiro, que serão utilizados para desenhar as figuras e são complementados por papel ponteado, quadriculado, isométrico ou triangular. A denominação está, diretamente, ligada à apresentação da malha; assim se a malha for composta por quadrados, o geoplano é chamado quadricular (Figura 10); se for formada por triângulos equiláteros, será dito geoplano trelissado (Figura 9); se a malha formar circunferências concêntricas será geoplano circular (Figura 8). Na nossa pesquisa utilizamos o modelo de geoplano quadriculado.

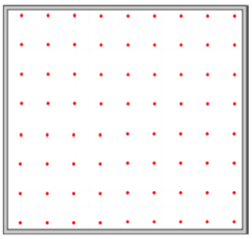


Figura 8 - Geoplano de malhas quadradas

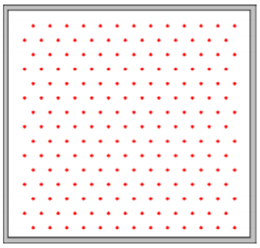


Figura 9 - Geoplano de malhas trelissadas

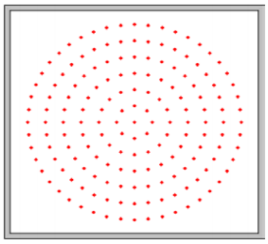


Figura 10 - Geoplano de malhas circulares

Fonte: Machado, 2004

E, concordando com Schons (2008, p. 20), afirmamos ser geoplano:

> Um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo através do qual é possível construir, movimentar e desfazer figuras geométricas. Tal recurso contribui para explorar problemas geométricos e algébricos, possibilitando suposições, podendo-se registrar o trabalho em papel ou reproduzi-lo em papel quadriculado.

Diante do exposto por Schons (2008), ressaltamos que o geoplano é um recurso muito útil para o ensino de matemática, pois nos mostra uma alternativa diferente na resolução de problemas e nos permite visualizar os mais diferentes polígonos geométricos. Isso o torna um instrumento interessante, quando se está trabalhando dentro do primeiro nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico, da teoria de van Hiele. Esse recurso pode nos ajudar a explorar as propriedades das figuras geométricas, nomear e classificar os polígonos.

Nosso ponto de vista é corroborado por Schons (2008), ao esclarecer que

> O geoplano facilita o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial, comparação, relação, discriminação, seqüência, envolvendo conceitos de frações e suas operações, simetria, reflexão, rotação e translação, perímetro e área. O geoplano é um meio, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes (SCHONS, 2008, p. 20).

Partindo da assertiva de Schons, percebemos que o geoplano é um material que possibilita ao estudante visualizar e construir diversas figuras. Este é um dos primeiros passos a serem dados no processo de aprendizagem de conceitos mais avançados, como os de triângulos e quadriláteros.

Outro recurso didático, imprescindível em nossa pesquisa, é o tangram, que pode ser caracterizado como um quebra-cabeça geométrico composto por sete peças, sendo cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo (Figura 11). Sobre esse material, Kaleff, Voto e Corrêa (2003, p. 5) revelam que “quebra-cabeças do tipo tangram são recursos a mais para a elaboração do pensamento geométrico”, pois, segundo as autoras, o tangram permite o desenvolvimento da habilidade da percepção visual e da visualização de formas geométricas.

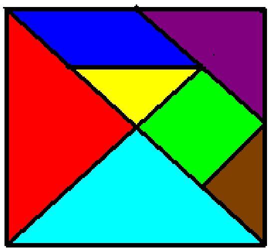


Figura 11 - Desenho do tangram

Através da análise do contorno das figuras construídas com peças do tangram, é possível estabelecer que cada representação se assemelha a um polígono distinto. Isso nos possibilita explorar a composição de formas geométricas, montadas desde triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos e outros polígonos, mesmo que sejam irregulares.

Por meio das pesquisas desenvolvidas com o tangram, foi possível observar que este recurso, ao ser bem trabalhado e explorado em sala de aula, permite-nos reconhecer visualmente as figuras geométricas e também permite detectar algumas dificuldades dos alunos em calcular áreas e perímetros. Quando discutimos sobre o desenvolvimento da visualização de formas, estamos, de certo modo, trabalhando dentro da teoria proposta pelo casal van Hiele, ao afirmar que o educando inicia a formação de conceitos geométricos, por intermédio da visualização e do reconhecimento da figuras, e este princípio pode justificar a utilização do tangram.

A possibilidade de, a partir de sete formas geométricas, desenhar objetos do dia a dia e outras imagens, traz para os alunos a sensação de que estudar matemática, em particular geometria, pode ser algo encantador. Ao trabalharmos com quebra-cabeças, como o tangram, permitimos que o estudante levante hipóteses, faça conjecturas e teste-as e verifique se elas são falsas ou verdadeiras. Se estiverem certas ou erradas e até mesmo equivocadas, o educando pode reconsiderar o seu raciocínio e refazer sua figura. Ou seja, o educando passa a agir em sala de aula de modo autônomo e inicia a propor novos problemas para ele mesmo.

De acordo com Kaleff, Votto e Corrêa (2003, p. 4), “o aluno que utiliza um tangram com formas geométricas ou outro quebra-cabeça tem a oportunidade de perceber formas, de representá-las, de construí-las e de criar objetos e outras formas a partir delas.” Cada nova composição que se propõe é um novo quebra-cabeça que instiga e desafia o aluno a buscar uma resposta, isto é, a construir a figura proposta. Ao vencer o desafio, o estudante se sente motivado para enfrentar os próximos que, com certeza, virão. Assim, pode-se dizer que a resolução de problemas atravessa todo o trabalho, na medida em que o educando se vê desafiado a observar e a considerar as hipóteses que aparecem durante o desenvolvimento da atividade (Schoenfeld, 1980).

Ao considerar as afirmações de Kaleff, Votto e Corrêa (2003), levamos em conta que, com o tangram, alcançaremos tais objetivos:

> identificar de forma visual as diferentes figuras geométricas; explorar propriedades das figuras geométricas; nomear e classificar as peças que compõem o jogo; discutir com os alunos as questões relativas à

> conservação da área da figura; aprender o vocabulário geométrico; utilizar diferentes estratégias de resolução de/para problemas; trabalhar congruências e semelhanças entre as figuras geométricas (p. 4).

Observamos que o jogo em questão potencializa os desenvolvimentos da habilidade de visualização e de raciocínio geométrico favorecendo-o e, portanto, contribui para nossa pesquisa. Quando discute a utilização de jogo na educação Moura (1997, p. 85) revela que a "importância do jogo está nas possibilidades de aproximar a criança do conhecimento científico, levando-a a vivenciar virtualmente situações de solução de problemas que a aproximem daquelas que o homem realmente enfrenta ou enfrentou." Já Amaral (1996), ao discutir sobre o uso de jogos e educação, tomando como base Dewey, afirma que, todos os povos em vários momentos contaram com jogos como parte importante da educação de suas crianças, especialmente, as de pouca idade. Segundo Amaral (1996),

> o jogo é tão espontâneo e inevitável que, no ponto de vista de Dewey, poucos pensadores educacionais atribuíram a ele em teoria o lugar de destaque que sempre ocupou na prática, ou mesmo, poucos tentaram descobrir, se as atividades naturais de jogo das crianças oferecem sugestões que possam ser adotadas na escola (p. 99).

Para a pesquisadora Grando (2000), a inserção do jogo no ensino de matemática

> representa uma atividade lúdica, que envolve o desejo e o interesse do jogador pela própria ação do jogo, e mais, envolve a competição e o desafio que motivam o jogador a conhecer seus limites e suas possibilidades de superação de tais limites, na busca da vitória, adquirindo confiança e coragem para se arriscar (p. 22).

Concordamos com Grando (2000) ao afirmar que no jogo enfrentamos desafios na busca de conhecer nossos limites e adquirimos coragem para enfrentá-los novamente. Entendemos que o jogo propicia o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, desde que permita a investigação, e a exploração do conceito por meio da estrutura matemática subjacente ao jogo. Essas estratégias podem ser vivenciadas pelos alunos, quando jogam, elaborando-as e testando-as, a fim de vencer o jogo. O coração da resolução de problemas está no processo de criação de estratégias e na análise, processada pelo sujeito, das várias possibilidades de resolução (Schoenfeld, 1980). No jogo, ocorre algo análogo, pois ele representa uma situação-problema determinada por regras, em que o indivíduo, a todo o momento, elaborando e reestruturando estratégias, busca vencer o jogo, ou seja, resolver o problema. Essa característica do jogo é que nos possibilita identificá-lo com o contexto de resolução de problemas.

Torna-se compreensível para nós que a inserção de jogos no contexto educacional, isto é, no processo de ensino-aprendizagem implica em vantagens e desvantagens. Estas foram apontadas por Kishimoto (1998) e sintetizadas por Grando (1995), e estão reproduzidas na tabela 3.

Tabela 3 – Síntese das vantagens e desvantagens do uso de jogos

VANTAGENS	DESVANTAGENS
- fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno, introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; - desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos); - aprender a tomar decisões e saber avaliá-las; -.significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; - propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); - o jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento; - o jogo favorece a socialização entre os alunos e a conscientização do trabalho em equipe; - a utilização dos jogos é um fator de motivação para os alunos; -.dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender; - as atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis; - as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos.	-.quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um "apêndice" em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam; - o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; - as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno; - a perda da "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; - a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo; - a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Fonte: Grando (1995, p. 95).

As considerações descritas acima como importantes e necessárias ao processo de inserção do jogo no processo de ensino-aprendizagem mostram que o professor, ao assumir uma proposta de trabalho com jogos, deve tê-la como uma opção, embasada na reflexão com pressupostos metodológicos, relacionada a uma concepção coerente, presente no plano de ensino.

A construção de pipas é outro recurso didático com o qual trabalhamos em nossa pesquisa. Trata-se de um brinquedo que é, simultaneamente, um recurso lúdico e didático. Em se pensando no recurso lúdico, é interessante observar que as crianças do final do século XX e início do século XXI têm à disposição brinquedos eletrônicos, computadores e tudo que a tecnologia lhes oferece e ainda preferem brincar com a pipa, um artefato que tem mais de dois mil anos de existência.

Um dos autores que discutiu o brinquedo na educação foi Vygotsky (1998) ao chamar a atenção para as teorias que ignoram o fato de que o brinquedo preenche necessidades da criança. Para Vygotsky (1998), essas teorias nada mais são do que uma intelectualização pedante da atividade do brincar. Roeder (2007, p. 133), ao analisar a utilização de brinquedos na educação, afirmou que "através do brinquedo, da brincadeira, a criança pode desenvolver a imaginação, a confiança, a auto-estima e a cooperação. O modo como a criança brinca revela seu modo interior e isso permite a interação da criança com outras crianças e a formação de sua personalidade." Concordamos com Roeder (2007), quando ela afirma que é possível desenvolver a confiança, a autoestima e a cooperação, pois estas são algumas das características importantes com as quais trabalhamos na sala de aula, usando brinquedo.

Concernente à questão da elaboração de brinquedos, concordamos com Kishimoto (1994, p. 14) que brinquedos "são sempre suportes de brincadeiras, sua utilização deveria criar momentos lúdicos de livre exploração, nos quais prevalecem a incerteza do ato e não se buscam resultados." Em nossa sequência didática, prevemos alguns momentos nos quais os estudantes são estimulados a explorar, livremente, o brinquedo ou o jogo que lhes propomos.

Nesta pesquisa construímos pipas, e um dos autores que discutiu a confeccção de brinquedos foi Moura (1997, p. 79) ao afimar que a "confecção de brinquedos, de jogos de montar, e a retomada do uso de materiais de ensino sem objetivos pedagógicos claros são a concretização da concepção que entende a construção do conhecimento como fenômeno essencialmente individual". Tomando, como referência, o texto de Moura (1997), afirmamos que temos uma concepção semelhante de brinquedo e de educação. Isso é um fator importante no momento em que decidimos ter tangram, geoplano e construção de pipas como recursos didáticos no ensino de um determinado conceito.

Entendemos que a construção de pipas oferece por si só, uma gama de conhecimentos, pois consegue reunir, numa única atividade, conceitos físicos, climatológicos, geográficos, históricos, linguísticos, artísticos e geométricos. Ao discutir sobre o programa etnomatemática: história, metodologia e pedagogia, em seu site pessoal na internet, D'Ambrosio (2004) explicita uma relação entre a arte, a geometria e os papagaios (nome dado às pipas em Santa Catarina).

> Em particular, na Geometria e na Aritmética, se notam violentas contradições. Por exemplo, a geometria do povo, dos balões e dos papagaios, é colorida. A geometria teórica, desde sua origem grega, eliminou a cor. Muitos leitores, a essa altura, estarão confusos. Estarão dizendo: mas o que isso tem a ver com Matemática? Papagaios e balões? Cores? Tem tudo a ver, pois são justamente essas as primeiras e mais notáveis experiências geométricas. E todos concordam que a reaproximação de Arte e Geometria não pode ser alcançada sem o mediador cor. Na Aritmética, o atributo do número na quantificação é essencial. Duas laranjas e dois cavalos são "dois" distintos. Chegar ao "dois" sem qualificativo, abstrato, assim como à Geometria sem cores, é o ponto crítico na elaboração de uma Matemática teórica (p. 18).

Estamos de acordo com D'Ambrósio (2004) em sua argumentação ao mostrar que papagaios e balões possuem relação com a matemática, pois é com esses brinquedos que a criança tem os primeiros contatos com a geometria. Por outro lado, lembramos que, no trabalho com pipas, temos a oportunidade de unir matemática e arte, sem necessidade de mudar os conceitos que pretendemos discutir com os educandos e, ao mesmo tempo, mostrar a beleza que há por trás dos tópicos estudados em matemática.

Urge afirmar que, em nosso estudo de pesquisa, estamos interessados na relação do recurso didático com o ensino de polígonos. Ao analisarmos a Figura 12, notamos que esse tipo de pipa é um quadrilátero, composto por dois segmentos de reta perpendiculares entre si e que estes, juntamente com as linhas de contorno, formam quatro triângulos retângulos. E observando a Figura 13, verificamos que se trata de pipa ou papagaio de seis lados, isto é, um hexágono.

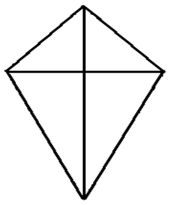


Figura 13 - Pipa de duas varetas

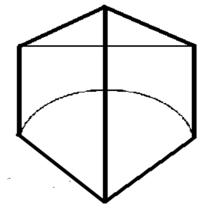


Figura 12 - Pipa de três varetas

Levando em conta as observações acima, percebemos a possibilidade de, com recurso das pipas, debater com os alunos temas relacionados ao reconhecimento visual de triângulos, retângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos e outros polígonos. Ainda nos possibilita estudarmos paralelismos, perpendicularismos, perímetros, áreas e até, construirmos verificações de teoremas como, o teorema de Pitágoras, embora em nossa pesquisa estejamos interessados em investigar e analisar o reconhecimento visual dos estudantes.

Diante do exposto, reconhecemos que o uso de materiais concretos, como o tangram, o geoplano e a construção de pipas, possibilita ao educando exercitar a sua criatividade, a manipular e a construir figuras geométricas e, ainda, estudar as características das mesmas. Enfim, cada um dos recursos citados nos permite desenvolver um trabalho pedagógico dentro da metodologia de resolução de problemas.

2.5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE GEOMETRIA

A metodologia de resolução de problemas tem sido discutida em teses, dissertações, artigos científicos e comunicações orais. No Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Espírito Santo (PPGE-UFES), de 1999 a 2005, esse tema aparece em três Dissertações de Mestrado. Porém, apenas duas traziam informações que nos poderiam ajudar na interpretação e na análise dos dados de nossa investigação, as quais se encontram resumidas, a seguir.

A dissertação de Santana (1999) que teve o objetivo de realizar uma intervenção na realidade de uma escola pública de Vitória – ES. A pesquisadora tinha como referencial teórico a teoria histórico-cultural e as formulações teóricas piagetianas, que se referem ao desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Ela investigou a aprendizagem de conceitos matemáticos mediante resolução de problemas. Iniciou sua investigação, situando o leitor sobre os fundamentos teóricos de sua pesquisa, sobre a construção dos conceitos matemáticos e sobre a questão das dificuldades de aprendizagem, como um construtor social escolar. Finalizando, descreveu a intervenção realizada na escola, a análise dos dados e as conclusões.

A segunda dissertação do PPGE-UFES do autor Broetto (2004) trata do tema resolução de problemas e realiza uma investigação sobre a existência de uma relação entre a capacidade de resolver problemas dos alunos de duas turmas da 8ª série do Ensino Fundamental e seus desempenhos em matemática. Em seu trabalho de pesquisa, Broetto (2004) deixa claro que as técnicas de resolução de problemas proporcionam, na maioria dos alunos, uma melhoria em seu desempenho para resolver problemas-desafio. Esses problemas-desafio possibilitam uma abordagem mais flexível, além de serem caracterizados por não apresentarem estratégias de resolução em seu enunciado, e não conterem notação matemática. Percebe-se esta flexibilidade também nos processos de resoluções desses problemas-desafio por não estarem sujeitos, exclusivamente, ao domínio de conceitos, propriedades, procedimentos, ou mesmo equações matemáticas. Broetto (2004) completa sua afirmação, mostrando que o desempenho escolar estava relacionado à capacidade dos educandos em solucionar problemas-desafio.

Ainda de acordo com sua investigação, a maior parte dos alunos considerados fracos obteve melhores resultados em problemas-desafio. Logo, pensamos que ao classificarmos um aluno como fraco em matemática, podemos ter cometido um erro de avaliação. Pois, algumas vezes, o título de fraco em matemática pode ser resultado de um instrumento de avaliação impróprio para aquele aluno. Tomando como referência a pesquisa de Broetto podemos dizer que o estudante deve ser avaliado por “instrumentos que possam valorizar o que eles sabem, e não por aqueles que apenas evidenciam o que eles não sabem, como muitas vezes acontece” (BROETTO, 2004, p. 188).

Estamos de acordo com Broetto (2004), ao afirmar que o uso da metodologia de resolução de problemas permite aos alunos construírem e desconstruírem conceitos, levantarem hipóteses, trabalharem em equipe, questionarem, duvidarem, aumentarem a autoconfiança, conhecerem seus potenciais e reconhecerem seus pontos de fraquezas. Em sua pesquisa, Broetto deixou claro que um trabalho bem planejado, com atividades diversificadas e mediado pelo professor pode aumentar a motivação, melhora o desempenho e a compreensão por parte dos educandos.

A dissertação de Broetto trouxe luz às nossas ideias, porque nos ajudou a entender que estamos trabalhando com problemas não rotineiros que não estavam formulados de maneira tradicional. Ou seja, seria preciso que o estudante conseguisse ler uma forma geométrica, visualizasse-a e fizesse a composição ou decomposição da mesma, para assim conseguir resolver o problema proposto.

Na dissertação de Araújo (2007), apresentada na Universidade Estadual de Maringá-PR, foram estudados os fatos que colaboram ou dificultam a interpretação e a resolução de problemas matemáticos escolares por alunos do sistema de Educação de Jovens e Adultos, que cursavam a Fase II do Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Os alunos foram submetidos a uma entrevista clínica semi-estruturada, com proposta de resolução de problemas que envolviam conceitos e conhecimentos matemáticos elementares. Deste modo, foi possível entender, nos resultados obtidos, a complexidade do ato de resolver problemas e que este extrapola a questão da fluência na leitura ou da utilização ou não de certas estratégias ou conhecimentos conceituais isolados. Após a análise dos resultados, a pesquisadora levantou a seguinte indagação: Se repetíssemos essa pesquisa com um número maior de pessoas e se os resultados se repetissem, o que isso iria nos indicar?

Araújo (2007) expõe dois problemas, na pág. 73 de sua pesquisa, que exigem dos participantes da pesquisa algum conhecimento de geometria e, ainda, discute as soluções mostradas pelos alunos. Mas, no decorrer da dissertação, não faz qualquer menção ao fato de que as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao resolvê-los podem estar relacionadas às lacunas no processo de ensino-aprendizagem de geometria.

A dissertação de Medeiros Junior (2007), apresentada no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, na Universidade Federal do Paraná, na linha de Educação Matemática fundamentou-se em resolução de problemas. A pesquisa tinha como objetivo identificar as relações didáticas estabelecidas na tríade aluno-professor-conhecimento matemático como um processo de ensinar matemática, com base na resolução de problemas. Para tal, analisou o modo como alunos das 5ª e 6ª séries resolvem exercícios e problemas; estes com enunciados curtos ou longos.

Para fundamentar sua pesquisa, Medeiros Junior (2007) apoiou-se na heurística, na resolução de problemas e nos teóricos escolhidos, George Polya e Alan Schoenfeld. Interpreta-se a resolução de problemas, no âmbito da didática, relacionando-os à análise crítica do discurso do professor, de como este pensa que faz e de como seus alunos, na prática, fazem e relatam como resolvem problemas com enunciados longos e curtos. A dissertação de Medeiros Junior (2007, p. 32) nos ajudou a compreender que problema é uma atividade para qual o aluno:

> quer e precisa encontrar uma solução;
> não tem procedimento prontamente disponível para achar a solução;
> deve fazer uma tentativa para encontrar a solução.

O entendimento de Medeiros Junior (2007) sobre o que é um problema, fundamenta-se no trabalho pioneiro sobre resolução de problemas de Polya (1945) e em pesquisas de outros autores como Charles e Lester (1982).

No cotidiano, enfrentamos problemas o tempo todo. Em cada novo problema nos vemos diante de um novo desafio que exige algum tipo de estratégia, podendo ser aplicada ou criada de maneira a nos conduzir à solução do mesmo. Assim, pensamos que quem quer resolver um problema deve escolher uma estratégia que será aplicada num plano de tentativas. Portanto aquelas que não resolvem o problema são abandonadas, e as que o resolvem são aperfeiçoadas, sendo úteis a outros problemas mais complexos.

Na nossa pesquisa, propomos desafios aos estudantes e aqueles exercem um papel idêntico a um problema, que precisa provocar nos alunos o desejo de querer resolvê-los. Enfim o desafio os leva a busca por uma estratégia, a necessidade em colocar a estratégia planejada em execução, e a verificação se o resultado obtido corresponde ou não a uma solução do desafio. Pensamos que é nesse ponto que a leitura do trabalho de Medeiros Junior (2007) pôde nos ajudar.

No livro *A arte de resolver problemas*, Polya (1945/1995) nos apresenta as etapas da resolução de problemas, a saber: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Essas etapas encontram-se resumidas a seguir.

Compreensão do problema – é nesta etapa que educador e educando dialogam sobre o que entenderam do problema e, em muitos casos, o caminho para esta compreensão pode ser dado pelas respostas às questões como: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? E, ainda, sugestões como: faça uma figura ou adote uma notação que seja adequada ao problema em questão. Agindo assim, o professor pode facilitar para o aluno a compreensão do problema.

Estabelecimento de um plano – consiste em encontrar a relação entre os dados e a incógnita do problema, isto é, o estabelecimento da conexão entre o que se tem e o que se deseja encontrar. Uma das condutas a adotar pelo professor, nesta etapa, é promover um debate com o aluno sobre questões como: Conhece um problema correlato? E, em muitos casos, sugestões como: procure pensar em um problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Execução do plano – o aluno já compreendeu o problema, elaborou um plano e, agora, está no momento de trabalhar e executar o seu plano de resolução. Lembre-se sempre de verificar cada passo e considere a possibilidade de demonstrar que ele está correto.

Retrospecto – este é o momento de retornar e verificar se a solução encontrada responde ao problema que estamos resolvendo e, até mesmo, se o problema admite soluções diferentes da que encontramos ou se é possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema.

O trabalho desenvolvido por Polya (1945/1995) orientou e segue orientando o desenvolvimento de aulas e de pesquisas com foco em resolução de problemas no Brasil e em diversos países. Além disso, as etapas propostas por Polya tornaram-se referência para autores que discutem sobre a metodologia de resolução de problemas em sala de aula. Dentre os autores seguidores das ideias de Polya, escolhemos dois para comentar. O primeiro desses autores é Santos-Wagner (2008), que em seu artigo Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo faz um retrospecto sobre atividades realizadas com futuros professores e professores focalizando em problemas e resolução de problemas. Além disso, ela nos informa sobre trabalhos publicados no Boletim do GEPEM a respeito disso. Dentre vários pesquisadores que influenciam esta temática, Santos-Wagner (2008) destaca os trabalhos de Polya (1945/1973), Charles e Lester (1982), Stanic e Kilpatrick (1988), Schoenfeld (1992), e Santos (1993)[12]. A autora ainda nos provoca neste texto com questionamentos do tipo:

> ... b) Como ensinar matemática, usando atividades de resolução de problemas, pode ajudar a preparar um cidadão crítico, reflexivo, autônomo e feliz em um mundo onde ocorrem mudanças rápidas e constantes? c) Como aprender matemática escolar, usando problemas e atividades de resolução de problemas, pode ajudar na construção de um cidadão crítico, autônomo, feliz num mundo em constantes mudanças? d) Como apreciar, julgar, avaliar se os procedimentos de ensino e de aprendizagem de matemática escolar, usando atividades de resolução de problemas, foram eficazes? ... (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 45-46).

---

[12] POLYA, G. **How to solve it**: a new aspect of mathematical method. Second Edititon, Second Printing, Princetou, New Jersey: Princeton University Pressm 1973 (First Printing, 1945, Second Edition, 1957.
CHARLES, R.; LESTER, F. **Teaching problem solving**: what, why and how. Palo Alto,CA: Dale Seymour Publications, 1982.
STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHRALES, R. I:; SILVER, E. A. (ed.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Research Agenda for Mathematics education, Volume 3. Reston, VA: NCTM, 1988, p. 1-22.
SCHOENFELD; A. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 192, p. 334-370.
SANTOS, V. M. **Metacognitive awareness of prospective elementary teachers in a mathematics course and a look at their knowledge, beliefs and metacognitive awareness about fractions**. 1993, 451f. Tese (PHD em Educação: Educação Matemática). School of Education, Indiana University, Bloomington, Indiana. Publicada por Associação de Professores de Matemática, Lisboa, Portugal.

Ela apresenta respostas para esses questionamentos e outros nesse artigo, mas não pretendemos discuti-los nesta dissertação. Refletir sobre os mesmos nos auxiliou a preparar algumas das atividades da sequência didática desenvolvida em nosso estudo.

Encontramos três autoras que buscam resposta à indagação sobre o que é um problema? Essas autoras são Santos-Wagner (2008), Onuchic e Allevato (2005). Elas afirmam ser problema algo que queremos ou precisamos resolver, que nos apresenta uma dificuldade inicial e seguem, afirmando que, quando o indivíduo já sabe como resolver a situação e já dispõe de estratégias para solucionar a dificuldade, esta situação deixou de ser um problema.

Quando discute sobre o papel do professor na resolução de problemas, inspirada por Polya (1945/1973)[13], Santos-Wagner (2008) nos revela que uma das tarefas mais importantes de um professor é ajudar os seus alunos. E nos lembra de que essa tarefa não é fácil, por requerer "tempo, prática, devoção e princípios adequados. O aluno deve adquirir tanta experiência em trabalho independente quanto possível. Mas, se ele é deixado sozinho com seu problema, sem nenhuma ajuda ou com ajuda insuficiente" (p. 52), nenhum progresso poderá ser alcançado por ele. "Se o professor ajuda demais, nada é deixado para o aluno. O professor deve ajudar, mas nem tanto nem tão pouco, de modo que o aluno tenha uma parte razoável do trabalho " (p. 52). E sobre este quesito, afirma Santos-Wagner (2008) usando as palavras de Polya (1945/1973):

> O melhor é, entretanto, ajudar o aluno naturalmente. O professor deve se colocar no lugar do aluno, ele deve ver o caso do aluno, ele deve tentar entender o que se passa na mente do aluno e colocar uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido para o próprio aluno (p. 52).

Ao considerar a visão histórica da resolução de problemas, Santos-Wagner mostra que problemas têm ocupado um papel central no currículo de matemática escolar desde a antiguidade, mas a resolução de problemas não. Apenas, recentemente, os educadores de matemática aceitaram a ideia de que o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas merece atenção

[13] POLYA. G. **How to solve it**: a new aspect of mathematical method. Second Edition, Second Printing, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1973 (First Printing, 1945, Second Edition, 1957).

especial. Quando se propõe a analisar os tipos de problemas, Santos-Wagner (2008) faz as seguintes considerações:

> 1. Exercícios de fixação fornecem aos alunos prática em usar algoritmos.
> 2. Problemas simples fornecem aos alunos experiência em traduzir problemas reais simples e estes problemas envolvem só um tipo de cálculo.
> 3. Problemas complexos fornecem aos alunos experiência em resolver situações problema que traduzem problemas reais e envolvem dois ou mais cálculos.
> 4. Problemas de processo [...] servem para desenvolver nos alunos estratégias gerais de entendimento, planejamento e resolução de problemas assim como avaliação de tentativas para encontrar a solução.
> 5. Problemas de aplicação fornecem aos alunos a oportunidade de usar uma variedade de habilidades matemáticas, procedimentos, conceitos e fatos para resolver problemas reais....
> 6. Problemas desafio fornecem ao aluno a oportunidade de engajar-se potencialmente em atividades de recreação matemática... (p. 55).

A autora também nos lembra que existem fatores que podem ter influências no processo de resolução de problemas, entre os quais estão:

> - fatores de experiência tanto do contexto como pessoais;
> - fatores afetivos tais como interesse, motivação, pressão, ansiedade e outros;
> - fatores cognitivos tais como prontidão de leitura, de raciocínio, habilidades computacionais e assim por diante (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 57).

No campo das estratégias que podem auxiliar na resolução de problemas, Santos-Wagner (2008, p. 57-58) as apresenta na tabela 4.

Tabela 4 – Resumo das estratégias de resolução de problemas

Estratégias gerais	Estratégias de apoio
Procurar um padrão, regularidade; generalizar	Reler o problema
Usar dedução (ou indução)	Procurar palavras e frases chave no problema
Trabalhar de trás para frente	Escrever informação relevante
Adivinhar (dar palpites) e testar	Fazer uma lista, tabela ou quadro organizado
Resolver um problema semelhante mais simples	Fazer desenhos, gráficos
Escrever uma equação (fórmula)	Experimentar dados e/ou dramatizar a situação
Usar números simples	

Fonte: SANTOS-WAGNER, 2008, p. 57-58

Santos-Wagner (2008) finaliza a discussão usando as ideias de Schroeder e Lester (1989)[14] sobre as três abordagens de ensino em resolução de problemas. A saber: ensino sobre resolução de problemas, ensino para a resolução de problemas e ensino através de resolução de problemas ou ensino por meio de resolução de problemas. Essas três abordagens se complementam e todas devem ser exploradas em sala de aula. Se ensinarmos aos alunos só as quatro etapas de resolução de problemas de Polya estamos trabalhando apenas a primeira abordagem e os alunos precisam ter experiências com as outras duas abordagens de ensino também.

Outro autor, que também discute a resolução de problemas é Dante (2005). Este autor apresenta uma classificação para as situações-problema presentes em sala de aula, das quais ele destaca os seguintes tipos de problemas matemáticos:

> a) Reconhecimento – neste tipo de problema, o objetivo é reconhecer, identificar ou lembrar um conceito, definição ou propriedades que estamos discutindo.
> b) Algoritmos – o objetivo neste tipo de problema é treinar ou e reforçar os conhecimentos das operações que foram ensinadas.
> c) Padrão – neste tipo, o objetivo é aplicar de forma direta um ou mais algoritmos já aprendidos e não pede estratégia. Sua solução está no problema, o que, em muitos casos, exige a transformação da linguagem usual em linguagem matemática.
> d) Heurísticos ou Processo – é o tipo de problema no qual o aluno utilizará as operações, mas elas não estão explícitas no enunciado. Exige a elaboração de um plano de ação para a solução.
> e) Aplicação ou Situações-problema – as situações são reais e exigem o uso da matemática para a solução. É necessário organizar os dados. Sua apresentação pode ser realizada por meio de projetos.
> f) Quebra-Cabeça – os alunos são desafiados para encontrar a solução, que, em alguns momentos, pode depender da sorte ou da facilidade e aproveitar detalhes-chave para a solução (p. 16).

Dante (1999) lembra que um bom problema matemático deve ter as seguintes características:

> ser desafiador para o aluno; ser real para o aluno; ser interessante para o aluno; ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido; não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas; ter um nível adequado de dificuldade" (Dante, 1999, p. 46-47).

[14] SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R. (ed.), **New directions for elementary school mathematics**: 1989 Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1989, p. 31-42.

Reconhecemos que o tangram se enquadra dentro dos tipos de problemas citados por Dante (1999), em particular, nos chamados quebra-cabeças geométricos, pois representam um desafio e provocam, nos estudantes, o desejo de tentar procurar uma solução para o problema proposto.

Onuchic (1999) é outra autora que discute o ensino de matemática através da resolução de problemas. Ela defende que os trabalhos de pesquisas em resolução de problemas foram influenciados por teorias construtivistas. Sobre esse debate, Onuchic (1999) justifica:

> Sabemos que são características de um ensino de Matemática construtivista: construir sobre um conhecimento prévio, enfatizar sobre o pensar, dar tempo para pensar; esperar por explicações ou justificativas para as respostas ou pelo modo de pensar; fazer perguntas e saber ouvir; reconhecer que Matemática é parte invenção e parte convenção; trabalhar os conceitos e procedimentos matemáticos em termos de resolução de problemas (p. 210).

Tomando como referência o texto de Onuchic (1999) concluímos que, na metodologia de resolução de problemas, o ensino é fruto de um processo mais amplo. Em outras palavras, nessa metodologia de ensino o aluno tanto aprende matemática, resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas. De acordo com Onuchic e Allevato (2008), quando damos tempo aos alunos para pensarem sobre uma determinada situação, estamos permitindo-lhes que, usando seus conhecimentos, investiguem, descubram caminhos e decidam quais devem tomar para resolver o problema. E assim estamos proporcionando-lhes um momento para trabalharem colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução.

Pensamos que a resolução de problemas possa ser um relevante recurso para se discutir e ensinar geometria, em particular, para tratarmos dos conteúdos relacionados a polígonos. E, de acordo com Mello (1999, p. 25), “os problemas de geometria apresentam uma grande originalidade em relação às muitas outras tarefas matemáticas que podem ser propostas aos alunos”. Assim, inferimos haver uma relação entre a resolução de problemas e o ensino de geometria.

A relação entre geometria e resolução de problemas é abordada por DeGuire (1994); em um de seus artigos. Nele a autora argumenta que é possível citar várias razões para se estudar geometria no Ensino Fundamental e Médio, e uma delas é “a oportunidade que a geometria oferece de ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas” (DEGUIRE, 1994, p. 73).

DeGuire (1994) continua a discussão sobre o que ela entende por ensinar a resolver problema que, segundo ela, “ultrapassa a mera resolução de problemas para incluir a reflexão sobre processos de resolução, objetivando coligir estratégias de resolução de problemas que poderão ser úteis posteriormente” (DEGUIRE, 1994, p. 73). Ainda de acordo com a autora, pode-se dizer que ensinar a resolver problemas “envolve o ensino do conteúdo de uma maneira significativa, de modo que passe a ser utilizado em outros problemas e aprendizados” (DEGUIRE, 1994, p. 73). Entre as atividades analisadas pela pesquisadora, encontra-se uma seqüência na qual ela usa o geoplano e sugere que seja instituído no ensino intermediário do ensino (4ª a 6ª séries), pois, segundo DeGuire (1994)

> em geral, as crianças do nível intermediário já alcançaram um nível de desenvolvimento cognitivo que as habilita a raciocinar dedutivamente com objetos que estão efetivamente presentes ou com aqueles com que tiveram experiência recente (p. 76).

Após uma discussão inicial sobre algumas atividades, a autora aponta que “materiais de manipulação fornecem oportunidades para raciocinar com objetos e, portanto, para ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas” (DEGUIRE, 1994, p. 77). Continuando a análise, a autora cita o geoplano, como um dos recursos que oferece ao professor a oportunidade de ensinar para resolver problemas. Ao tratar sobre os benefícios que atividades com geoplanos podem oferecer para o ensino, DeGuire 1994) informa que

> há várias atividades com o geoplano que podem proporcionar prazer e benefícios às crianças. Por exemplo, elas podem fazer figuras nas pranchas, dar nome às figuras já feitas, contar para determinar as áreas e os perímetros das figuras e usar os pinos como sistema de coordenadas ou rede. Cada uma delas pode ser uma excelente atividade de aprendizagem e também pode ser ampliada para fornecer desafios de resolução de problemas (p. 78).

Entre as atividades, encontra-se um jogo de adivinhação que procura mostrar uma relação entre jogos, resolução de problemas e geometria. A atividade pode se resumir da seguinte forma: a autora sugere que, nessa atividade, o professor construa uma figura no geoplano e não a apresente para a classe. Os alunos devem, então, identificar a figura, fazendo perguntas que devem ser respondidas com sim ou não. Um dos caminhos que podemos utilizar para a adivinhação é sugerir aos alunos que façam uma cópia da figura em seus próprios geoplanos, virando de face para baixo. O professor verifica se as "adivinhações" estão corretas, sem estragar o prazer dos alunos que ainda não chegaram a uma solução. A outra possibilidade é: assim que um aluno consiga descobrir a resposta certa, o professor pode pedir-lhe que a revele para a turma e diga como ele pensou e fez para chegar à resposta.

Admitimos que nessa tarefa de adivinhação será preciso recorrer a muitas estratégias de resolução de problemas para adivinhar a figura corretamente e, sobre isso, DeGuire (1994) assevera

> A atividade de adivinhar figuras estimula as crianças a usar a linguagem com precisão (por exemplo, a diferença entre "pelo menos três lados" e "três lados") e a raciocinar dedutivamente a partir da informação obtida de cada pergunta e resposta. Grande parte do raciocínio consiste em considerar todas as possibilidades e eliminar algumas - estratégia de resolução de problemas muito útil que deveria ser discutida explicitamente quando se reflete em retrospecto sobre algum episódio particular (p. 81).

Após apresentar algumas sugestões de atividade, a autora conclui o artigo, definindo que “geometria é uma excelente fonte de episódios de resolução de problemas” (p. 85). No texto, DeGuire (1994) deixa pistas para que pesquisemos sobre a relação entre jogos, geometria e resolução de problemas, justamente o que estamos realizando nesta investigação.

Na questão da relação entre a resolução de problemas, ensino de geometria e recursos didáticos como geoplanos, jogos e construção de brinquedos, como a pipa que podem ser incluídos na matemática recreativa Gallangher (1997, p. 235) atenta para o fato de que “na verdade, praticamente todos os campos da Matemática tem aspectos recreativos”. O autor continua a discussão dizendo o seguinte “a resolução de problemas é o único tema comum à maioria dos tópicos de Matemática recreativa (p. 235)”. De certa forma quando trabalhamos com brinquedos como pipa e em jogos, tipo quebra-cabeça, como o tangram colocamos em prática alguns aspectos da matemática recreativa.

Em relação a um quebra-cabeças como o tangram, Gallangher (1997) reafirma que o objetivo é descobrir uma solução que, preferencialmente, use o mínimo de conceitos de matemática sofisticada e, ao mesmo tempo, seja concisa e fácil de entender. Para Gallangher (1997), a maior dificuldade com quebra-cabeças está mais no processo para encontrar a solução do que, propriamente, na solução do mesmo. Porém, Gallangher (1997) pondera que o quebra-cabeças matemático selecionado para o ensino de resolução de problemas precisa ser apresentado para toda turma e deve ter duas características básicas. A primeira é de que os educandos precisam sentir que o quebra-cabeça está ao alcance deles, isto é, os estudantes devem sentir-se capazes de resolver o problema proposto na forma de quebra-cabeças. E em segundo lugar, os alunos devem notar que a solução requer algum esforço intelectual deles, em outras palavras, representa um desafio para eles. Gallangher (1997) resume a discussão da relação entre a matemática recreativa, resolução de problemas e quebra-cabeças na tabela abaixo:

Tabela 5 – Resumo da relação entre quebra-cabeças e resolução de problemas

Problemas de matemática	Quebra - cabeça matemático
1) Identifique um problema do mundo real para o qual se deseja uma solução	1) Identifique um quebra-cabeça para o qual se deseja uma solução
2) Procure e identifique as relações Matemáticas subjacentes ao problema. Traduza essas relações em um modelo matemático adequado.	2)Procure e identifique as relações Matemáticas subjacente ao quebra-cabeça. Traduza essas relações num modelo matemático adequado.
3) Trabalhe uma solução para o modelo.	3)Trabalhe uma solução para o modelo.
4) Traduza a solução do modelo matemático para os termos do mundo real do problema. Aplique a solução aos dados particulares do problema. Avalie os resultados.	4)Traduza a solução do modelo matemático nos termos do quebra-cabeça. Aplique a solução aos dados do quebra-cabeça considerado. Avalie os resultados.
5) Determine se a solução é suficiente e aplicável. Ela satisfaz ao que se exige da solução desejada? Se não, identifique a parte que necessita de mais investigações. Dê continuidade ao modelo matemático antigo ou procure um novo. Volte ao item 3.	5)Determine se a solução é suficiente e aplicável. Ela satisfaz ao que se exige da solução desejada? Se não, identifique a parte que necessita de mais investigações. Dê continuidade ao modelo matemático antigo ou procure um novo. Volte ao item 3.

Fonte: Gallangher – 1997- p. 237.

Observando a tabela, constatamos que existe uma relação entre resolução de problemas e o ensino de geometria por meio de quebra-cabeças, não obstante seja possível notar que em ambos precisamos elaborar um plano, executá-lo e verificar o resultado obtido.

Neste capítulo procuramos mostrar a relação entre a nossa pesquisa e algumas das tendências de educação matemática no século XX. Além disso, discutimos sobre o ensino de geometria e buscamos mostrar que é possível promover uma interação do ensino com os recursos didáticos como tangram, o geoplano e a construção de pipas. Finalizamos a discussão, mostrando que há uma interação entre os recursos didáticos, o ensino de geometria e a resolução de problemas. No próximo capitulo, discutimos a metodologia de pesquisa, por meio da qual desenvolvemos nosso trabalho e analisamos os resultados obtidos.

3 PERCURSOS METODOLÓGICOS

Este capitulo destina-se à descrição do percurso metodológico utilizado em nosso estudo. Inicialmente, são relatados os procedimentos para a aplicação da sequência didática. Na apresentação desta foram expostas as metas e as expectativas de cada uma delas, com algumas amostras das situações apontadas, selecionadas pela sua representatividade. Em seguida, são descritas as características relevantes dos sujeitos da pesquisa e do ambiente de desenvolvimento da investigação.

Acreditamos que em uma pesquisa, a metodologia representa o caminho que escolhemos para seguir.

> Meu caminho é cada manhã
> Não procure saber onde estou
> Meu destino não é de ninguém
> E eu não deixo
> Os meus passos no chão
> (Primeiros erros - Compositor Kiko Zambianchi -1985).

A música de Zambianchi (1985) nos remete ao percurso que realizamos ao desenvolvermos um trabalho de pesquisa e, em muitos casos, sentimos a necessidade de traçarmos o nosso caminho a cada manhã. Em outras palavras, a toda vez que visitamos nosso local de pesquisa, sentimos que precisamos saber onde estamos ou identificar que parte da nossa trajetória já foi percorrida e, se for preciso, fazer as correções necessárias no nosso método.

Provavelmente, uma das mais complexas tarefas na elaboração de uma dissertação, seja a explicitação do método empregado no desenvolvimento da investigação. Falamos método e não metodologia. Ambos são muito importantes, mas não se resumem ao mesmo fim. Às vezes, até aparecem compreendidos de forma confusa, sugerindo ter a mesma identidade, fundindo-se os dois.

O desenvolvimento de uma pesquisa sob a organização de passos a serem seguidos com a finalidade de atingir determinada meta é feito de com antecedência. Nesse momento é perfeitamente compreensível que um pesquisador iniciante ou não faça conjecturas de como chegar a um determinado objetivo, que planeje as etapas a serem seguidas dentro de um cronograma próprio e ainda faça uma previsão de algumas dificuldades, que porventura surjam ao longo da realização dessas etapas, tudo em um momento anterior a execução do projeto. É esse modelo de organização que entendemos como metodologia, que é condição indispensável para a realização dos trabalhos de investigação científica, no entanto, não suficiente.

As investigações em geral seguem seus cursos orientados pela metodologia, mas sem serem limitadas a elas, porquanto, em muitos casos, existem eventos, fenômenos, incidências que escapam do seu controle e é nesse momento que entra o método. O método, mesmo que comporte as metodologias, não se resume a elas, dada a sua natureza criativa e a sua capacidade de renovação. Portanto, pensamos que o método se constrói no caminhar e pode modificar a metodologia. As aproximações e afastamentos entre método e metodologia, podem ser compreendidos nesta afirmação:

> As metodologias são guias a priori que programam as pesquisas, enquanto que o método derivado do nosso percurso será uma ajuda à estratégia (a qual compreenderá utilmente, certo, segmentos programados, isto é, metodologias, mas comportará necessariamente descoberta e inovação) (MORIN, 1999, p. 36).

Nesse raciocínio organizamos o nosso percurso de modo que a investigação desenvolvida neste trabalho pudesse responder à pergunta central de nossa pesquisa, que é a seguinte: **O que alunos e professores aprendem sobre polígonos e desenvolvimento do raciocínio geométrico, quando utilizam tangram, geoplanos e construção de pipas, em turmas do 6º ano do ensino fundamental?**

Para tanto, adotamos um processo de coleta de dados e informações, pautados numa concepção de pesquisa qualitativa. No tocante à abordagem qualitativa Lüdke e André (1986) afirmam que nesse tipo de pesquisa a “preocupação com o processo é muito maior do que com o produto” (p. 12). Dentro dessa perspectiva, inferimos que nosso trabalho situa-se no campo da pesquisa-ação, que no nosso entendimento é uma modalidade de pesquisa participante, na qual o estudioso está inserido no ambiente onde colhe as informações, e prosseguindo faz suas análises e observações. Ao abordarem em seus textos a questão da pesquisa-ação, os professores Fiorentini e Lorenzato (2006, p.112) afirmam que, segundo Thiollent (1983)[15], “a pesquisa-ação se tem constituído como um procedimento voltado para a resolução de problemas práticos e que envolve uma ação conjunta ou cooperativa dos pesquisadores com os envolvidos nos problemas”. A pesquisa-ação como uma modalidade de atuação e observação que está voltada para a reflexão-ação. E, tal tipo de pesquisa apresenta-se como transformadora, libertadora, provocando mudanças de significados.

Um dos objetivos principais das pesquisas em educação matemática é a melhoria da aprendizagem de matemática. No entanto, precisamos distinguir os objetivos pragmáticos dos teóricos. No artigo *O que um iniciante deve saber sobre a pesquisa em educação matemática?* as educadoras Circe M. Silva da Silva e Vânia M. Pereira dos Santos-Wagner (1999) percebemos essa distinção. As autoras deixam essa distinção clara

---

[15] THIOLLENT, M. *Metodologia da pesquisa-ação*. São Paulo: Cortez, 1983.

ao afirmarem que os objetivos de ordem pragmática estão relacionados à pratica de ensino, enquanto os de ordem teórica estão ligados à matemática como campo para formulação de novas estruturas teóricas.

O nosso trabalho de investigação matemática tem por objetivo desenvolver uma pesquisa em educação matemática, e não uma pesquisa na matemática em si. Sendo assim, Silva e Santos-Wagner (1999) ressaltam ser importante lembrar que, numa pesquisa,

> É o olhar de curiosidade e indagação do *investigador acompanhado de sistematicidade*, planejamento, avaliação contínua ao longo do processo de pesquisa, coerência no interpretar, analisar e categorizar dados à luz dos questionamentos da pesquisa que permitem que o processo seja árduo, intenso e muito interessante. Ao encerrarmos uma pesquisa, precisamos estar levantando questões para uma próxima investigação. Precisamos mostrar as potencialidades bem como as limitações do estudo. Esse caráter de pesquisador possibilitará que o professor passe a atuar em sala de aula com um olhar mais crítico, mais indagador e mais reflexivo (p. 20-21).

O olhar curioso, a sistematicidade e o planejamento são algumas das características de um pesquisador iniciante, que têm nos acompanhado e permeado toda a nossa prática educacional. Esse novo fazer antes, durante e depois da aula nos tem feito enxergar a sala de aula como um importante campo de pesquisa. E, ainda nos faz ver as dificuldades apresentadas pelos alunos, em determinados conteúdos, como uma nova oportunidade de aprendizado para os atores envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

Essas aprendizagens temos desenvolvido ao longo de todo o curso de mestrado em três momentos significativos. Primeiro, nos momentos de estudo das diversas disciplinas. Em segundo lugar nos momentos de conversas, telefonemas, e emails junto com a orientadora antes de planejar a pesquisa, durante a mesma e nas etapas de redigir e editar o texto final. E finalmente essas aprendizagens têm sido também despertadas nos momentos de nossa participação no grupo de estudos em educação matemática (GEEM), do qual participamos desde 2008. Nesse grupo de estudos, coordenado por professora Vânia M. Santos-Wagner, desde 2006, nós aprendemos a nos conhecer profissionalmente, estudamos, e compartilhamos anseios e aprendizagens do processo educativo. Além disso, no GEEM nós também aprendemos a planejar e desenvolver atividades de pesquisa em sala de aula.

Como pesquisadores iniciantes um dos pontos, no processo de investigação, que nos causam preocupação são os procedimentos de coleta de dados e informações que adotamos no nosso trabalho. Pois é por meio deles que organizamos o material a ser analisado, obtemos subsídios para as considerações e, conseqüentemente, embasamos nossas conclusões. Assim, resolvemos dividir nossos procedimentos de coleta de dados e informações em três momentos, a saber: no primeiro, realizamos uma avaliação diagnóstica, no segundo, trabalhamos com uma intervenção pedagógica; e, finalmente, concluímos nossa pesquisa com a aplicação de uma nova avaliação.

3.1 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZADA NA PESQUISA

A sequência didática foi organizada sob a forma de blocos e uma das nossas primeiras preocupações foi o planejamento das atividades que a comporiam. Na fase de planejamento, selecionamos os conteúdos, os objetivos, a quantidade de aulas a serem utilizadas, a ordem que seria aplicada em cada um dos blocos de atividades da sequência didática e os procedimentos que adotaríamos, a fim de analisá-los. Chegamos à conclusão que uma das possibilidades de organizarmos a seqüência didática seria dividi-la em três blocos, os quais foram intitulados de bloco do tangram, do geoplano e da pipa. Prosseguindo, descrevemos cada uma das partes da nossa sequência didática.

3.1.1 As Avaliações Diagnósticas

A avaliação diagnóstica inicial teve como objetivo principal investigar os conhecimentos que os alunos possuíam sobre as características básicas de um polígono e o reconhecimento visual das formas geométricas; um pré-requisito para a elaboração e organização da seqüência didática. A avaliação foi constituída por seis questões objetivas, todas ilustradas por figuras geométricas (ver Anexo A).

A segunda atividade diagnóstica (Anexo B) aplicada na nossa pesquisa, e intitulada avaliação diagnóstica final, foi construída, tomando como base, as duas atividades diagnósticas: a inicial, a sequência didática, e um teste diagnóstico preparado com base no teste elaborado por Nasser (2000). Essa avaliação diagnóstica final possuía sete questões, sendo que as cinco primeiras eram divididas em dois itens. No primeiro, o estudante marcava com um X sobre o polígono pedido no enunciado da questão e, no segundo item da atividade, o educando era orientado a explicar o motivo da escolha que ele havia feito. Nosso objetivo com essa avaliação continuava sendo investigar o que os estudantes haviam aprendido sobre as características básicas de um polígono. Para responder às questões, os alunos utilizaram uma aula de cinquenta minutos.

Outro ponto relevante de nossa pesquisa, discutido neste capítulo, é a metodologia da intervenção pedagógica. Para facilitar a organização dos passos a serem seguidos no estudo, decidimos dividir a intervenção em três etapas, as quais se encontram sintetizadas no próximo tópico.

3.1.2 Primeiro Bloco: Trabalhando com o Tangram

No bloco do tangram, tínhamos, como objetivo geral, o reconhecimento visual dos polígonos e o estudo de suas características. No intuito de atingir o objetivo geral, resolvemos dividir a sequência didática em cinco etapas. Na primeira etapa, intitulada “contando a história do tangram”, nossas metas eram discutir com os estudantes um pouco da história do tangram, apresentá-lo para os estudantes e analisar a leitura, escrita e a compreensão dos educandos sobre cada uma das lendas desse recurso.

Para o desenvolvimento dessa primeira etapa, “contando a história do tangram” (Anexos C1, C2 e C3) foram utilizadas três aulas de cinquenta minutos, sendo tais aulas distribuídas igualmente, entre cada uma das três lendas do tangram. No início de cada sessão, explicamos aos alunos como seria desenvolvida a atividade e que precisaríamos de um estudante que quisesse fazer a leitura da lenda, pois, assim observaríamos a habilidade de leitura e compreensão do texto lido. Ao término de cada uma das sessões, distribuímos um pequeno questionário para os alunos, com o fim de conhecer o que os estudantes sabiam sobre o tangram. Pedímos que fizessem um desenho representativo da história lida, criassem uma história sobre o recurso, escrevessem as palavras que desconheciam e depois consultassem um dicionário para descobrir o significado delas. Finalizamos cada sessão, perguntando-lhes se haviam gostado da atividade e como eles se sentiam em relação à atividade que acabaram de fazer.

A segunda etapa do bloco do tangram (Anexo D) foi nomeada “construindo o tangram”. Nossos objetivos eram: construir o tangram, utilizando uma régua; reconhecer, visualmente, as suas peças; dialogar com os alunos sobre as características de cada figura geométrica que o compõem; e nomear cada peça do tangram. Para facilitar o entendimento dos estudantes, resolvemos dividir o processo de construção do tangram em nove passos (veja Anexo D). Para executar esta primeira etapa precisamos de duas aulas de cinqüenta minutos cada uma delas.

A terceira etapa do bloco do tangram (Anexo E) foi nomeada “atividade livre”, na qual tínhamos como objetivos: identificar as peças do tangram; construir polígonos diferentes dos que estão presentes nas peças do tangram; classificar os polígonos em regulares ou irregulares; classificar os polígonos em côncavos ou convexos; identificar, em cada polígono construído, características como quantidades de lados, medidas dos lados, se possuíam lados paralelos ou perpendiculares, a quantidade de ângulos de cada figura; e nomear os polígonos construídos nesta etapa.

Para realizar essa atividade, dependemos de duas aulas de cinquenta minutos cada. Na primeira aula, sugerimos aos estudantes que escolhessem uma letra do alfabeto e, com as sete peças do tangram, deviam construí-la. Após essa atividade, os estudantes receberam uma nova tarefa. Pedimos-lhes que selecionassem um dos algarismos de 0 (zero) a 9 (nove), tentassem montar o número escolhido, com todas as figuras. Aproveitamos as construções dos alunos e juntos discutimos os conceitos de polígonos convexos e não convexos. Após terminarem a construção, deixamos que criassem suas próprias figuras e a única exigência era que todas as peças do tangram fossem aplicadas. Em seguida, os educandos foram informados que, nas tarefas seguintes, construiriam as figuras considerando as orientações que seriam dadas pelos pesquisadores.

A quarta etapa do bloco do tangram (Anexos F1, F2 e F3) foi nomeada “atividade orientada”. Para a realização dessa atividade, elencamos os seguintes objetivos: identificar os polígonos que compõem o tangram; construir, com uma dada quantidade de peças do tangram, alguns tipos de polígonos; classificar os polígonos em regulares ou irregulares; reconhecer polígonos em convexos ou não convexos; relacionar a quantidade de lados, de ângulos e de vértices dos polígonos construídos; reconhecer retas paralelas ou perpendiculares como características das formas geométricas construídas; e, finalmente, relacionar os nomes dos polígonos construídos com as características dos mesmos.

Para o desenvolvimento das tarefas da quarta etapa foram necessárias quatro aulas de cinquenta minutos, sendo tais aulas distribuídas entre cada uma das quatro atividades que a compunham. Na primeira, foi pedido aos estudantes que relacionassem a quantidade de lados, ângulos e vértices de cada uma das peças do tangram. Na segunda tarefa, propusemos aos estudantes que construíssem um triângulo, um quadrado e um paralelogramo. Para executar tal tarefa, orientamos aos educandos que trabalhassem apenas com duas das sete peças do tangram e estas não podiam se sobrepor. Ao terminarem a construção de cada polígono, os estudantes chamavam os pesquisadores e pediam que analisassem se a construção estava correta e, em seguida, se propunham a ajudar outros colegas.

Na terceira tarefa, propusemos novamente, aos alunos que construíssem um triângulo, um quadrado, um retângulo, um losango, um paralelogramo e um trapézio. Para realizar a tarefa, sugerimos-lhes que utilizassem apenas três das sete peças do tangram e que estas não podiam se sobrepor. Aproveitamos a empolgação dos estudantes durante a execução da atividade para discutirmos com eles sobre a quantidade de lados, vértices, ângulos e se as figuras construídas eram convexas ou não convexas. Como ocorreu no final da segunda etapa, ao finalizarem a construção de cada polígono, os alunos chamavam os pesquisadores e pediam para analisar, se a construção feita por eles era válida e, em seguida, se colocavam à disposição para ajudar outros colegas.

Na quarta tarefa, a proposta feita teve como objetivo, a construção de um triângulo, um quadrado e um paralelogramo. Para a realização dessa atividade, decidimos dividir a aula em duas partes. Na primeira, os estudantes teriam de construir os polígonos solicitados acima, usando apenas quatro peças. E, na segunda parte da aula construiriam as figuras geométricas sugeridas, porém dessa vez, deviam trabalhar com todas as sete peças. Combinamos também que, o primeiro estudante a conseguir montar qualquer uma das figuras viria ao quadro para colá-la. O fato motivou a turma e assim que terminavam a montagem, chamavam os pesquisadores para que verificassem se haviam feito corretamente e, em seguida, as colavam no quadro. Assim que o grupo conseguiu terminar a atividade, iniciamos a segunda parte da tarefa. Mais uma vez, nós os orientamos a fim de que concluíssem a tarefa, chamássem-nos e, só depois poderiam fixá-las no quadro negro. Após a conclusão desta atividade da quarta etapa do bloco do tangram, iniciamos a quinta e última parte dele.

Na quinta etapa do bloco do tangram, realizaram-se atividades, como os últimos desafios, um painel com os tangrans e um resumo das discussões que havíamos desenvolvido ao longo das atividades. Nesta etapa, nossos objetivos foram: nomear e discutir as propriedades características de cada forma construída com o tangram e organizá-las numa tabela. Para a realização dessa atividade, foram necessárias três aulas. Continuamos com os desafios nesta etapa, pois notamos que a metade dos alunos não havia conseguido completá-los e, na tentativa de facilitar o término das atividades sugerimos-lhes que retirassem os dois maiores triângulos do conjunto de peças do tangram e montassem um quadrado com o grupo de peças restantes. Com a recomendação, os educandos conseguiram completar a atividade.

A construção de um painel com as peças do tangram estava prevista para ser realizada dentro de uma das aulas do cronograma da pesquisa. Todavia, devido à ausência de um professor, acabou acontecendo uma aula extra e, por essa razão, tivemos que dividir a turma com a aula de educação física. Para executar a tarefa, os estudantes escolheram quais figuras iriam montar. Após a escolha, os pesquisadores ajudaram os alunos a organizar as figuras escolhidas de forma que elas pudessem contar uma história e, completando, os estudantes foram para o pátio e montaram as figuras no painel de avisos. Finalizando a etapa, resumimos as discussões que havíamos tido com os estudantes, organizamos uma tabela, e anotamos o resultado das discussões sobre as características de um polígono. Dentre as características de um polígono destacamos com os alunos a quantidade de lados, de vértices, de ângulos, se a figura possuía lados paralelos ou perpendiculares, se era um polígnon convexo ou não convexo e o nome dos polígonos formados no decorrer do bloco.

O material que devia usar na pesquisa era uma das nossas preocupações, pois, além das questões de aprendizagem, teríamos de cuidar também do problema de documentar a pesquisa com fotografia das atividades desenvolvidas pelos alunos. Na primeira etapa do bloco do tangram, disponibilizamos de duas folhas de papel sulfite por aluno, nas quais estavam escritas as três lendas do tangram e um pequeno questionário. Na etapa da construção de um dos tipos de tangram, em uma folha de sulfite, foi desenhado e construído o nosso quebra-cabeças. Depois dessa etapa, passamos a utilizar um tangram colorido, construído em EVA, pois num primeiro teste com o trabalho feito pelos alunos, enfrentamos problemas como o vento e a falta de visibilidade nas fotos. Já com tangram feito em EVA não enfrentamos as dificuldades citadas. Nas demais etapas deste bloco, o material empregado resumiu-se em cinco folhas de papel sulfite para cada estudante, nas quais imprimimos as tarefas que realizariam. Após essas tarefas, fechamos as atividades com o tangram e conversamos com os alunos sobre o geoplano, material a ser usado no segundo bloco da pesquisa.

3.1.3 Segundo Bloco: Trabalhando com o Geoplano

O segundo bloco da nossa sequência didática, intitulado atividades com geoplano, teve, como objetivo geral: explorar, livremente, as construções de figuras geométricas que podemos fazer, usando o geoplano; nomear e discutir as propriedades características de cada um dos polígonos construídos no geoplano; classificar os polígonos em regulares ou, irregulares, convexo ou não convexo e organizar as propriedades numa tabela. Para desenvolvermos a pesquisa dividimos o bloco em três etapas, a saber: atividade livre, atividade orientada e resumindo os estudos.

Na primeira etapa intitulada “atividade livre utilizando o geoplano” (Anexo G), nossas metas eram conhecer o geoplano e explorar, livremente, as possibilidades de construção de polígonos que confeccionamos com o geoplano. Para o desenvolvimento desta etapa foi programada uma aula de cinqüenta minutos. Inicialmente, conversamos com os alunos sobre o material, a possibilidade de pequenos acidentes e as regras que empregaríamos no decorrer das atividades desenvolvidas com o geoplano. Após a conversa, distribuímos os geoplanos, quatro elásticos de cores variadas e uma folha de papel sulfite para os alunos. Orientamos os estudantes dizendo que utilizassem os elásticos para formar as figuras que desejassem e, após terminarem a construção, deveriam desenhar a forma construída.

Na segunda etapa intitulada “atividade orientada utilizando o geoplano” (Anexos H1, H2 e H3) com a intenção de facilitar o desenvolvimento de nossa pesquisa decidimos dividi-la em primeira atividade orientada, segunda atividade orientada e terceira atividade orientada. Para executarmos cada uma dessas subdivisões da segunda etapa, aplicamos uma aula para cada parte. Na primeira atividade orientada, nossos objetivos eram construir diferentes polígonos, trabalhando com elásticos de várias cores e geoplano e nomear os polígonos construídos. Como forma de orientar os alunos, dividimos a atividade em três partes. Na primeira, solicitamos-lhes que construíssem dois polígonos de três lados que atendessem aos seguintes critérios: o primeiro polígono devia ter dois lados de mesmo tamanho e, o segundo precisava ter os três lados de tamanhos diferentes. A nossa intenção nessa atividade era avaliar se os educandos reconheceriam as formas construídas como triângulos, retângulos, quadrados, paralelogramos e polígonos convexos e não convexos.

Para alcançar tal objetivos optamos por questioná-los no momento em que apresentassem suas construções livres. Em seguida, sugerimos à turma que, para cada um dos itens dados, construíssem uma figura geométrica que o atendesse:

a) Uma figura de quatro lados, sendo que os quatro lados devem ter o mesmo tamanho.
b) Uma figura de quatro lados.
c) Uma figura de cinco lados.
d) Uma figura de seis lados.
e) Uma figura de oito lados.

Na segunda atividade orientada, nossos objetivos eram relacionar as características como quantidade de lados, ângulos e vértices de cada um dos polígonos construídos, classificar os polígonos construídos em convexos ou não convexos e regulares ou irregulares. Para realizarmos essa atividade, distribuímos para os alunos uma folha contendo as formas que eles deviam construir no geoplano e solicitamos que depois dissessem o nome da figura. Em seguida, pedimos aos alunos que analisassem se os polígonos construídos eram convexos ou não convexos e que verificassem se eles possuíam lados de mesmo tamanho. A partir dessa atividade, discutimos com os estudantes sobre como medir ângulos e o instrumento que devemos usar para medi-los. Na segunda aula, conversamos com os alunos sobre como utilizar o transferidor. Isso feito desenhamos três polígonos no quadro e pedimos aos alunos que viessem ao quadro e, com o transferidor, medissem os ângulos de cada figura geométrica.

Na terceira atividade orientada, nossos objetivos eram reconhecer polígonos convexos ou não convexos, regulares ou irregulares construídos no geoplano, construir retas paralelas e retas perpendiculares no geoplano de malha quadriculada. Para realizarmos essa parte da atividade iniciamos a aula conversando sobre como desenvolveríamos a tarefa e sobre objetos nos quais poderíamos encontrar segmentos de retas paralelas ou perpendiculares. Obedecemos à sequência: pedimos aos estudantes que construíssem no geoplano um par de segmentos de retas paralelas e depois um par de segmentos de retas perpendiculares; voltamos a conversar com os estudantes sobre o reconhecimento de polígonos convexos e não convexos. Após este diálogo pedimos-lhes que representassem, no geoplano, um polígono convexo e um não convexo; conversamos sobre as características de polígonos que são regulares, como por exemplo, o fato de que estes possuem lados congruentes e ângulos congruentes; e finalmente, pedimos que apresentassem, pelo menos um exemplo desse tipo de polígono.

A parte final do bloco do geoplano foi reservada para realizar um resumo das discussões que tivemos com os educandos. Antes de iniciarmos os resumos, separamos uma aula para proporcionar aos estudantes um momento em que pudessem expor sua criatividade e, muitos resolveram unir o que haviam aprendido no bloco do tangram com o que foi estudado no geoplano. Para isso, criaram, no geoplano, desenhos que lembravam as montagens feitas com o tangram e em outras criações no geoplano, eles utilizaram polígonos como triângulo, quadrados e paralelogramos. Os estudantes criaram figuras que, na visão deles, lembravam formas humanas, casas e até animais. Para desenvolver esse bloco, ocupamos três aulas, sendo uma para o momento de criatividade e duas para as anotações e discussões das informações anotadas.

No tocante ao resumo, orientamos aos alunos que anotassem numa tabela algumas informações, tais como, a quantidade de lados, de vértices, de ângulos, se a figura possuía lados paralelos ou perpendiculares, se era convexo ou não convexo e o nome dos polígonos formados no decorrer do bloco. A partir das anotações, sobre o nome dado ao polígono, a identificação de segmentos de retas paralelas, segmentos de retas perpendiculares, dialogamos sobre figuras geométricas e, analisamos se esses polígonos eram convexos ou não convexos.

De forma semelhante ao que aconteceu com o bloco do tangram, o material usado, nesse bloco da investigação, preocupou-nos também. Pois, além das questões de aprendizagem, precisamos tomar alguns cuidados, no que diz respeito a problemas com as fotografias das atividades desenvolvidas pelos alunos. Como a cor de fundo da madeira do geoplano era uma tonalidade amarela, decidimos pintá-lo para que as formas desenhadas com os elásticos coloridos pudessem ser visualizadas. A cor que nos proporcionava uma fotografia mais nítida era a branca.

Outra fonte de preocupação foi a construção do material, porquanto eram necessários martelo, pregos e pedaço de madeira de tamanho 20X20 cm. Por uma questão da segurança, optamos por construir o geoplano em nossas residências e depois levá-los prontos para a escola. Uma vez que o geoplano já estava pronto, levamo-lo para a sala de aula e conversamos com os estudantes sobre os cuidados que precisariam ter ao manusear o material, pois ele foi construído com madeira e pregos, os quais poderiam causar pequenos arranhões durante a manipulação.

Além dos materiais já citados acima, utilizamos uma folha de papel sulfite por aluno e por atividade. Nelas imprimimos as orientações e as tarefas que os alunos fariam. Tínhamos apenas 15 geoplanos, e isso era uma de nossas preocupações, pois as turmas possuíam em média 25 alunos; por essa razão, combinamos com os alunos que eles fariam as atividades em duplas. Acabamos as atividades com o geoplano e aproveitamos para dialogar com os estudantes sobre a construção de pipas, que é o material de estudo do terceiro bloco da nossa pesquisa.

3.1.4 Terceiro Bloco: Trabalhando com Pipas

O terceiro bloco da nossa sequência didática é intitulado construindo pipas. Tivemos objetivos de: explorar a relação entre a pipa e algumas descobertas científicas, discutir com os estudantes sobre o prazer e os perigos existentes no ato de soltar pipas; construir dois tipos de pipas com os educandos; analisar, com a participação dos alunos, as características e propriedades de cada polígono construído a partir da confecção de pipas; e resumir as discussões que tivemos nas atividades, envolvendo a confecção de pipas. Para desenvolvermos nossa pesquisa dividimos este bloco em quatro etapas, a saber: contando a história das pipas, construindo pipas, atividade orientada e resumo da sequência.

Na primeira etapa, intitulada “contando a história da pipa”, nossas metas eram discutir com os estudantes um pouco dessa história e, também discutir sobre lendas e histórias, envolvendo pipas, mostrar que as pipas estão relacionadas com a história do ser humano, analisar a leitura, escrita e a compreensão dos educandos sobre cada uma das lendas da pipa. E, além disso, dialogar com os estudantes sobre os perigos de soltarem pipas em ambientes inadequados. Para o desenvolvimento da etapa, contando a história da pipa (Anexo I) utilizamos uma aula de cinquenta minutos. No inicio da sessão, explicávamos aos alunos como pretendíamos desenvolver a atividade e que precisaríamos de um estudante para ler uma das lendas, pois, tínhamos a intenção de analisar se a compreensão e a leitura dos estudantes haviam melhorado.

Conversamos com os estudantes sobre as lendas lidas e sobre o fato de que alguns escritos históricos mostram figuras que remetem a pessoas soltando pipas há, aproximadamente, 200 anos antes de Cristo. Aproveitamos a informação para relacionar o brinquedo pipa com a disciplina de história e, ainda, iniciar uma discussão sobre números inteiros. Para tal, combinamos com os educandos que as palavras antes de Cristo seriam representadas pelo sinal de menos e depois de Cristo seria representado pelo de mais. Comentamos com os estudantes sobre as atividades que pretendíamos desenvolver e que, em uma delas construiríamos dois modelos de pipas. Aproveitamos o momento para perguntar-lhes se sabiam construir algum tipo de pipa e a resposta, que ouvimos, foi não.

Na segunda etapa intitulada “construindo pipas”, pretendíamos discutir sobre as formas geométricas existentes no brinquedo e, analisar as características de cada um dos polígonos que fossem identificados durante a sua construção. Para tal, combinamos com os alunos que construiríamos dois modelos de pipas, sendo um com duas varetas e o outro com três varetas de bambu. Ao tormarmos conhcimento de que 4 alunos na turma C e 3 na turma A sabiam confeccionar os tipos de pipas mencionados, negociamos com o grupo que esses alunos estariam dispostos a ajudar os demais colegas. Para realizar esta etapa utilizamos três aulas distribuídas da seguinte forma: uma para a construção da pipa de duas varetas, uma para a de três varetas (Anexo J) e uma terceira para dialogarmos sobre as formas construídas (Anexo J1).

No decorrer da construção da pipa de duas varetas, aproveitamos para questionar aos estudantes se eles reconheciam segmentos de retas perpendiculares e segmentos de retas paralelas. No momento em que iniciamos a parte de contornar a armação voltamos aos nossos questionamentos para verificar se os alunos relacionavam as formas obtidas no contorno da armação com os polígonos e, assim buscávamos identificar, visualmente, figuras geométricas como triângulos, losangos e quadriláteros.

Ao iniciar a confecção da raia de três varetas retomamos as discussões com os estudantes e, mais uma vez, tínhamos o objetivo de verificar se eles, ao olharem a armação da pipa, conseguiam identificar segmentos de retas paralelas, e segmentos de retas perpendiculares. Outro ponto que nos interessava nessa tarefa era avaliar se os educandos conseguiam reconhecer polígonos como triângulos, retângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos, obtidos ao contornamos a estrutura do brinquedo. Para tal, pedimos aos alunos que desenhassem os polígonos, que conseguiam identificar na armação da raia de três varetas. Finalizamos a tarefa com a exposição das pipas que construímos.

Na terceira etapa chamada de “atividade orientada e resumo da sequência”, pretendíamos discutir com os estudantes sobre a classificação dos polígonos em convexos e não convexos; relacionar as características como quantidade de lados, medidas dos lados e dos ângulos dos polígonos que foram identificados na etapa da construção. Para organizar o trabalho e evitar que durante o manuseio as pipas fossem danificadas, sugerimos aos alunos que fizessem desenhos de cada passo da construção da pipa de duas varetas e outros desenhos para cada etapa da confecção da raia de três varetas. Combinamos que precisaríamos de três horas aula, sendo que duas para construção das raias e, uma para o resumo das discussões.

Quanto aos desenhos que fizeram na fase de construção de pipas, aproveitamos para discutir com os educandos as características de cada figura e classificar os polígonos em regulares ou irregulares. Naturalmente, mostramos para os estudantes os diagramas de outros tipos de pipas e analisamos, com eles as propriedades particulares de cada uma dessas outras figuras de pipas, por termos objetivo de classificá-las em polígonos convexo ou não convexo. A medida que dialogávamos sobre os diagramas, estudantes anotavam as informações no caderno, pois, pretendíamos analisá-las, ao resumir as atividades do bloco.

Quanto ao resumo os alunos foram orientados a anotar, numa tabela, dados referentes à quantidade de lados, de vértices, de ângulos, se a figura possuía lados paralelos ou perpendiculares, se era convexo ou não convexo e o nome dos polígonos formados no decorrer do bloco. Fundamentados nessas anotações, conversamos sobre os polígonos que foram identificados na construção das pipas, o reconhecimento de segmentos de retas paralelas, segmentos de retas perpendiculares e, concluímos sobre figuras geométricas convexas e não convexas.

O material empregado no trabalho com as pipas constituiu uma de nossas preocupações, por trabalharmos com materiais como tesoura, varetas de bambu e precisávamos tomar cuidados para evitar pequenos acidentes. Para a construção das pipas, foram necessárias quinze folhas de papel de seda, cinco varetas de bambu para cada aluno, um carretel de linha para cada 4 estudantes e uma folha de papel sulfite para a anotação dos dados. Para as demais etapas do bloco da construção de pipas, utilizamos apenas duas folhas de papel sulfite para cada um dos alunos envolvidos na pesquisa.

3.2 PROCEDIMENTOS UTILIZADOS NA ANÁLISE DOS DADOS

As informações coletadas durante a aplicação das avaliações diagnósticas e dos blocos de atividades da sequência didática, merecem um tipo de tratamento. Pensando assim, decidimos organizar os dados, segundo os indicadores: quantidade de lados, vértices, ângulos, retas paralelas ou retas perpendiculares, que, no nosso entendimento, compõem um grupo de características básicas para a definição de um polígono. Na análise dos dados, empregamos dois procedimentos. No primeiro, apresentamos os dados numéricos, usando estatística descritiva, através da quantificação em números absolutos das respostas dos alunos, as quais estão organizadas sob os critérios respostas certas, erradas e certo-errada. Após a organização dos dados, resolvemos dispô-los sob a forma de gráficos em barras. Com o segundo procedimento, apresentamos interpretações que utilizamos para analisar as informações coletadas na sequência didática. Trazemos a descrição e análise de dezoito das 31 aulas ministradas para cada uma das duas turmas participantes da pesquisa. Essas dezoito aulas relatadas foram distribuídas da seguinte forma: 9 aulas de atividades com tangram, 4 aulas de atividades com geoplano, 3 aulas sobre a construção de pipas e, 2 aulas para atividades interdisciplinares (jogo de palavras e o painel). Fundamentamos nossas discussões na teoria de van Hiele, no conceito de mediadores proposto por Vygotsky e em autores comentados no capítulo 2.

Completamos nossas análises, realizando um entrelaçamento entre os dados organizados de forma numérica e as informações obtidas na análise das dezoito aulas, selecionadas da sequência didática da pesquisa. Dessa forma procuramos triangular dados e informações e mostrar uma relação entre cada uma das atividades desenvolvidas no decorrer da investigação.

3.3 ENTRANDO NO CAMPO: AS IDAS E VINDAS DA PESQUISA

A nossa primeira escolha para o ambiente de pesquisa foi a escola na qual atuamos como professor do 9º ano. Em final de 2008, encaminhamo-nos para a escola, que por questões de ética, chamaremos de Escola X e conversamos com a diretora sobre a nossa intenção de desenvolvermos a pesquisa de mestrado na unidade que estava sob a direção dela. Explicamos-lhe que a nossa investigação consistia num estudo sobre polígonos, a partir dos princípios propostos pelo casal van Hiele e que, em linhas gerais, o objetivo da investigação era analisar o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos do 6° ano. Quanto às razões da escolha pela escola que ela dirigia, esta se devia aos seguintes fatos:

- Sou professor da rede pública municipal de Vila Velha.
- Sou professor de matemática da escola que ela dirige.
- A Escola X fica próxima à residência de um dos pesquisadores.

A diretora consentiu que pesquisássemos na escola que ela dirige e, imediatamente informou à supervisão do turno vespertino que, a partir de março de 2009, iríamos desenvolver uma pesquisa de mestrado na escola e sugeriu à supervisora que providenciasse uma reunião, da qual participariam a diretora, a supervisora e a professora das turmas que fariam parte da pesquisa e os pesquisadores. A reunião foi agendada para o dia 29 de janeiro de 2009.

Conforme havíamos combinado, retornei à escola para participar da reunião de planejamento inicial e, conversar com a professora de matemática do sexto ano sobre a possibilidade de realizarmos a pesquisa de mestrado com as turmas dela. Após explicar-lhe o que pretendíamos e como seria desenvolvida nossa pesquisa, a professora aceitou participar da pesquisa e revelou-nos não trabalhar com geometria no primeiro bimestre do ano letivo e, sim no último bimestre. Contudo, ela não ela via nenhum problema em iniciar o ano letivo com os conteúdos de geometria. Terminamos a reunião e combinamos que, no dia 04-02-09, data marcada para começar as atividades letivas nós nos encontrariamos e iríamos juntos ás salas de aula para conhecermos os novos alunos do sexto ano.

Quando chegamos à escola para conhecer as turmas do sexto ano, a professora de matemática procurou-nos e antes que entrássemos na sala dos professores disse-nos que havia conversado com a supervisora e com a professora de matemática do sexto ano matutino, que também trabalha na Escola X com os 7º anos vespertino. Na opinião da professora, ela não devia trabalhar com geometria no primeiro semestre pela razão de que deixaria o planejamento de matemática dos turnos matutino-vespertino desencontrado. Respondemos-lhe que tínhamos um posicionamento diferente do dela, da colega dela e da supervisora, mas respeitávamos o que elas pensavam e agradecíamos por sua rápida participação no nosso trabalho.

Neste processo de busca por um local de pesquisa, resolvemos procurar a Escola F, que fica na Ilha dos Ayres, no bairro onde eu nasci, cresci e só sai dele após o meu casamento em 1994. Marcamos um horário com a diretora, a senhora V e as supervisoras da escola. Nesse encontro, explicamos-lhes o que desejávamos e como seria nossa pesquisa, com as turmas com as quais pretendíamos trabalhar e perguntamos-lhes se seria possível desenvolvermos nossa investigação na escola que ela dirigia. Depois de ouvir nossas argumentações, a diretora da escola autorizou-nos a desenvolver o nosso trabalho, mas, disse-nos que só poderíamos começar nossa pesquisa no início de março de 2009, pois, havia os seguintes inconvenientes:

- A escola estava mudando de endereço e iria para um novo prédio.
- As turmas de sexto ano estavam sem professor de português, história e o professor de matemática do sexto ano estava de licença médica.
- Ela acabava de assumir a escola e precisava inteirar-se de alguns processos.

Sobre os inconvenientes citados pela diretora, dissemos-lhe que não víamos problemas em esperar até março para iniciar, pois a escola já estaria no novo prédio e as faltas de professores, provavelmente, já estariam resolvidas. Diante do exposto pela diretora, pensamos que o melhor era marcar o inicio da pesquisa para 11 de março de 2009. No final da reunião, perguntamos para a diretora quantas turmas havia no sexto ano e qual era a quantidade de alunos em cada série, pois precisávamos organizar o material, de acordo com a quantidade de alunos. No tópico, a seguir, fizemos um breve relato do ambiente de pesquisa e dos sujeitos selecionados para compor nossa investigação.

3.4 O AMBIENTE E OS SUJEITOS DA PESQUISA

O nosso local de pesquisa está situado no bairro Ilha dos Ayres, no município de Vila Velha, ES. A escola foi inaugurada em dez de maio de 1986, com o intuito de responder às reivindicações da comunidade local e tem como missão contribuir para a formação de cidadãos autônomos, participativos, críticos, conscientes de seus direitos, deveres, que sejam capazes de interagir social e profissionalmente, em diversas situações. Para atender às necessidades da comunidade, a Escola F se organizou da seguinte forma: turno matutino, atende aos educandos que cursam a primeira fase do Ensino Fundamental, isto é, do primeiro ao quinto ano. Os alunos do sexto ao nono ano são atendidos no turno vespertino. Nos finais de semana, a Escola F, por meio do projeto escola aberta, atende à comunidade na qual ela está inserida. No turno vespertino, a escola atende a dez turmas, sendo distribuídas da seguinte forma: quatro salas de turmas de 6° ano e duas turmas para cada um dos demais anos do Ensino Fundamental, totalizando 350 alunos, sendo que 140 desses estudantes estão matriculados no 6º ano, o que corresponde a 40 % do total dos matriculados no vespertino.

Por entendermos que o nosso estudo se enquadra dentro do perfil teórico de estudantes de sexto ano, nós os selecionamos para participarem da pesquisa. Nessa unidade escolar há quatro turmas de sexto ano e cada uma destas turmas possui 30 alunos registrados. Quanto aos procedimentos de ordem ética, solicitamos à diretora da Escola F, ao professor, aos pais e aos alunos que assinassem os formulários de consentimento de participação no estudo (Anexo K). Informamos a todos que seus nomes serão mantidos em sigilo e que, no relato final do estudo, devem aparecer nomes fictícios.

Nossa pesquisa se desenvolveu no período de 11 de março a 23 de setembro de 2009. Vale ressaltar que de onze de março a dois de maio de 2009 atuamos, simultaneamente, como pesquisador e professor das quatro turmas de sexto ano que compunham o nosso grupo de pesquisa, pois neste período o professor titular da turma estava de licença médica. A partir do dia 3 de maio até 30 de setembro de 2009 atuamos como pesquisador e, foi neste período que junto com o professor titular das turmas de sexto ano, decidimos que a pesquisa seria desenvolvida apenas com duas das quatro turmas de sexto anos. As turmas escolhidas foram o sexto ano A e C, pois estas eram as turmas de sexto que tínhamos autorização de todos os pais e a maioria dos alunos demonstravam interesse em participar das atividades de pesquisa.

Após esta descrição geral do ambiente de pesquisa, dos participantes da investigação, da seqüência didática e das atividades diagnósticas avaliativas é o momento de descrever e analisar os dados coletados durante a aplicação dos blocos da nossa sequência didática. Apresentamos isto no próximo capítulo.

4..DISCUTINDO O NÍVEL ATUAL DE DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO DAS TURMAS

Neste capitulo trazemos a descrição e análise dos dados coletados na pesquisa, que foi realizada no período de 11 de março a 23 de setembro de 2009, na Escola F da rede municipal de Vila Velha, com estudantes do sexto ano. Inicialmente realizamos um teste diagnóstico que teve como orientação metodológica o modelo de van Hiele. Procuramos identificar com o teste o nível atual de desenvolvimento de raciocinio geométrico dos alunos. Após a interpretação dos resultados deste teste diagnóstico trabalhamos com uma sequência didática composta de blocos de tangram, geoplano e pipa. Ao iniciar o terceiro bloco da sequência, aplicamos outro teste e ao terminar o terceiro bloco aplicando um último teste. Os dados coletados, os teóricos que nos ajudaram a compreender os fatos que aconteceram no trabaho e as respectivas análises encontram-se descritas neste capítulo.

4.1 CRITÉRIOS UTILIZADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DO NÍVEL ATUAL DE DESENVOLVIMENTO DE RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO

No dia 16 de março, retornamos à Escola F, na expectativa de realizar um teste, com o qual procuraríamos identificar o nível de conhecimento geométrico dos alunos do sexto ano. Para isso, construimos um teste inspirado, no que foi proposto pela professora Lilian Nasser, na revista Nova Escola, de junho de 1996. Destacamos que a avaliação de Nasser (1996; 2000), contemplava itens que apreciavam os três primeiros níveis de desenvolvimento de raciocinio geométrico. A nossa atividade diagnóstica foi elaborada, apenas, para identificar o primeiro nível de reconhecimento visual.

Lendo a relação nominal dos alunos das quatro turmas do sexto ano da Escola F, tomamos conhecimento de que no registro de cada uma das turmas há 30 alunos. Porém, a frequência às aulas era, em média de 20 estudantes, durante o período de março até 01 de maio de 2009. Uma conversa informal com os estudantes nos mostrou que as faltas às aulas estavam relacionadas a vários fatores. Os alunos destacaram o momento de insegurança vivido no bairro, a mudança de endereço da escola e o fato de que eles estavam sem professor para duas disciplinas. Assim, nos dias que tinham, no horário escolar, aulas das referidas disciplinas, eles preferiam ficar em casa.

Em 16 de março de 2009, após a leitura do termo de autorização de participação na pesquisa (Anexo K), aplicamos o teste diagnóstico. Uma das primeiras dificuldades que encontramos, ao tabular os dados, está relacionada abaixo. Mas para compreender melhor o referido problema, vamos tomar, como exemplo, a primeira questão da avaliação diagnóstica inicial (Figura 14).

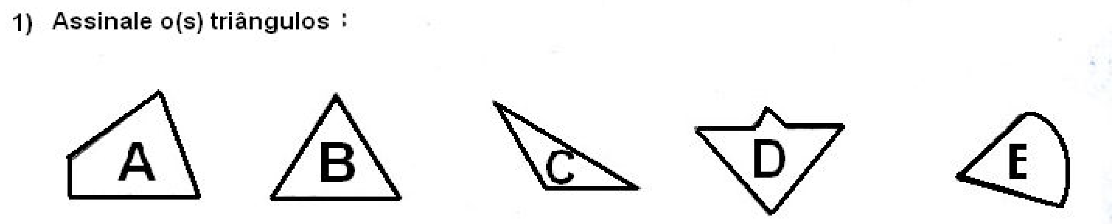


Figura 14 - Primeira questão do diagnóstico inicial (Anexo A)

Observe que poderiam acontecer as seguintes possibilidades de resposta:

Caso 1. O aluno marca as figuras B e C.
Caso 2. O estudante marca a figura B e qualquer outra diferente de C.
Caso 3. O estudante marca a figura C e qualquer outra diferente de B.
Caso 4. O estudante marca uma única figura e esta é B ou C.
Caso 5. O aluno marca duas figuras e estas não são B e nem C.

As possibilidades de resposta nos mostram que não poderíamos, simplesmente, considerar que o estudante identificasse, visualmente, ou não identificasse uma dada figura geométrica. Em nossa pesquisa nos deparamos com situações como as apresentadas nos casos 2, 3 e 4, pois esses casos nos mostram que, em parte, a resposta está certa e, em parte, errada. Tomando como referência, o fato acima, resolvemos que se, a resposta dada pelo aluno coincidisse com o caso 1, afirmaríamos que ele identifica, visualmente, a figura geométrica. Se a resposta coincidisse com os casos 2, 3 ou 4, reconheceríamos que o estudante parece estar em trânsito na construção de seu reconhecimento visual de triângulo. E, no caso 5, o estudante ainda não identifica a forma geométrica solicitada de triângulo. Pelas razões explícitas acima, pensamos que o critério citado pode ser utilizado para analisar as demais questões dos testes.

De acordo com Clements e Battista (1992), o problema da continuidade dos níveis de desenvolvimento de raciocínio geométrico proposto pelo casal van Hiele foi discutido por pesquisadores como Hoffer (1983), Wirszup (1976), Burger e Shaughnessy (1986)[16]. Clements e Battista (1992) comentam que estes

[16] HOFFER, A. Van Hiele – based research. In: LESH, R.; LANDAU, M (ed.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York, NY: Academic Press, 1983, p. 205-227, WIRSZUP, I. Breakthroughs in the psychology of learning and teaching of geometry. In: MARTIN, J.L.; BRADBARD, D. A. (ed.). **Space and geometry**: papers from a research workshop. Athens, GA. University of Georgia, Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics, 1976, p. 75-97.

pesquisadores conseguiram mostrar, por meio de suas investigações, que havia instabilidade e oscilação entre os níveis de desenvolvimento de raciocícinio geométrico e dentro deles. Em nosso entendimento, os estudos mostraram que existe uma aparente continuidade, em vez de saltos nos níveis de aprendizagem proposto por van Hiele. Pensando nos níveis de desenvolvimento de raciocinio geométrico como um modelo contínuo, isto é, que os estudantes podem oscilar dentro de um nível e entre os níveis, mas acreditando que os alunos passam suavemente de um nível para o outro, realizamos nosso primeiro teste diagnóstico com cada uma das turmas participantes da pesquisa. Os resultados e as análises estão descritas no item 4.2.

4.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NOS SEXTO ANOS

A primeira turma que nós visitamos, foi a sala do sexto ano A. No dia 16 de março de 2009 entramos na sala de aula e observamos que a turma já tinha a expectativa de iniciar a participação na pesquisa. Isto é, eles esperavam que fossem manusear o tangram nessa aula, contudo, mostramos-lhes que não seria possível, por não termos ainda a autorização dos pais/responsáveis por eles. Entregamos-lhes a autorização e pedimos ao aluno AO5 que a lesse. Na leitura do aluno, chamou-nos a atenção o primeiro desafio que teríamos pela frente, pois, foi uma leitura quase silábica. Esse estudante colocava um ponto parágrafo após cada palavra e, apesar da boa vontade, tinha muita dificuldade em ler.

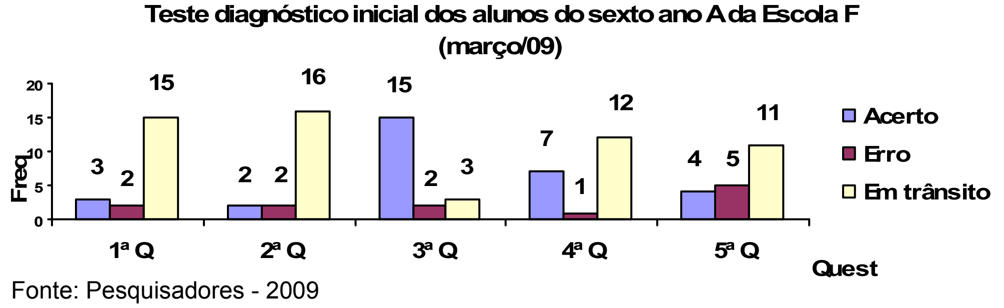
Após a leitura explicamos-lhes a razão da autorização e demos certeza de que o escrito por eles seria mostrado antes do relato final e de que o nome deles não seria revelado pela pesquisa, garantindo-lhes sigilo e uma conduta ética na pesquisa. Ainda na nossa conversa com os estudantes, solicitamos-lhes que

BURGER, W; SHAUGHNESSY, J. M. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, 17, p. 31-48, 1986.

respondessem a um teste diagnóstico. Como os alunos não se opuseram, entregamos-lhes o pré-teste, lemos com eles, discutindo, em cada questão, o significado de palavras que lhes eram estranhas. Por exemplo, explicamos o significado de assinalar e sigilo, para eles esses dois termos eram desconhecidos. Por último esclarecemos que não se tratava de uma prova e, sim de um instrumento que iria nos permitir planejar as atividades, por essa razão a atividade não valeria nota. A descrição e a análise do teste diagnóstico (Anexo A) aparecem nas próximas seções.

4.2.1 O Teste Diagnóstico Aplicado nos Sextos Anos

O teste diagnóstico, aplicado nas turmas, foi elaborado considerando as sugestões apresentadas por Nasser (1996; 2000). Nesses textos, a autora mostra alguns tipos de questões que podem ser abordadas, quando se deseja analisar, medir ou verificar em que nível de desenvolvimento do raciocinio geométrico se encontra determinado aluno ou grupo de alunos. O teste diagnóstico, empregado nos sextos anos A e C, continha seis questões, com as quais procurávamos analisar se os estudantes identificavam, visualmente, triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, segmentos de retas paralelas e se os estudantes conseguiam associar o nome à figura geométrica que ela representava. Para aplicarmos o teste, utilizamos uma hora aula de cinquenta minutos em cada uma das turmas. As respostas dos alunos para as cinco primeiras questões estão registradas no gráfico 1.



Fonte: Pesquisadores - 2009

Gráfico 1 – As cinco primeiras questões do diagnóstico inicial - 6ºA

Observando a quantidade de erros e acertos dos estudantes apresentadas nas cinco questões notamos pela quantidade de acertos da terceira questão que o retângulo é a figura geométrica mais reconhecida pelos alunos. Isso, provavelmente, se deva ao fato de que, no dia a dia, o educando tenha mais contato com as formas retangulares. No nosso teste o retângulo estava desenhado na forma padronizada, registrada no dia a dia e nos livros didáticos. Tomando, como referência, a pesquisa de Hershkowitz (1994) e Kaleff (2004) concluímos que os alunos se utilizam de protótipos para avaliar situações envolvendo conhecimentos geométricos. Isso significa que, ao verificarem se uma figura dada é ou não um retângulo, os estudantes comparam a forma dada com a a forma protótipa que eles aceitam como retângulo, para assim decidirem. Além disso, assinala Hershkowitz (1983), os alunos, na maioria das vezes, lançam mão de atributos inadequados para fazerem tal comparação, por isso tomam atributos específicos do exemplo prototípico no lugar de atributos, que caracterizariam o conceito em questão.

A primeira questão do teste teve como objetivo analisar a capacidade de os alunos identificarem, visualmente, o triângulo e, de acordo com o gráfico, afirmarmos que três dos vinte estudantes foram capazes de distingui-lo. Dois alunos não o reconheceram e 15 marcaram um dos dois triângulos existentes na questão e qualquer outro dos três polígonos desenhados. Segundo o critério determinado na introdução deste capitulo, consideramos que quinze estudantes estão em trânsito dentro do nível de visualização sobre o triângulo.

A segunda questão do diagnóstico tratou do reconhecimento visual do quadrado. No gráfcio 1, observamos que apenas dois alunos o apontaram. Outros dois estudantes não conseguiram identificar os dois quadrados no meio de um grupo de cinco figuras geométricas. E dezesseis identificaram um dos quadrados, mas não o outro quadrado existente no grupo. De acordo com os critérios estaelecidos, asseguramos que esses 16 alunos estão em trânsito dentro do nível de visualização do quadrado.

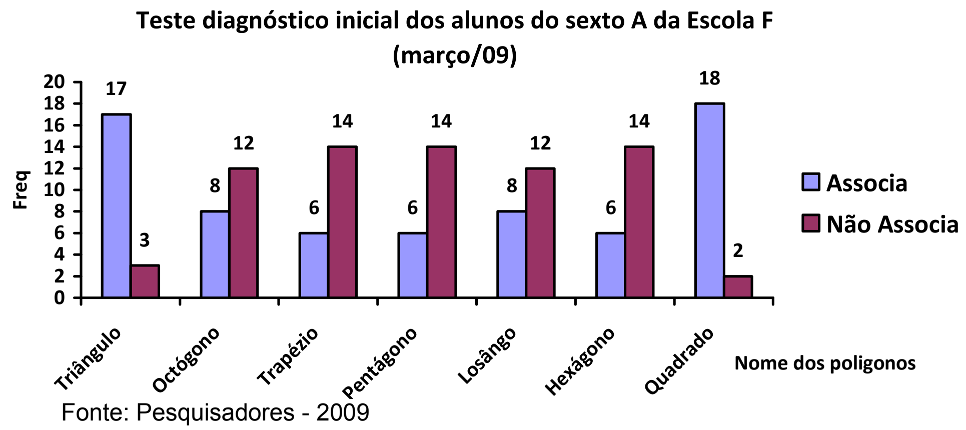
Na terceira questão do diagnóstico, tratamos do reconhecimento visual do retângulo. Uma análise do gráfico 1 nos revelou que quinze alunos foram capazes de reconhecer, visualmente, o retângulo. No entanto, dois educandos não o identificaram e três alunos marcaram um retângulo desenhado na questão e outro polígono. Nessa situação afirmamos que estes três estudantes estão em trânsito, dentro do nível de visualização de retângulo.

A quarta questão do diagnóstico abordou o reconhecimento visual do paralelogramo. Desenhamos dois paralelogramos e o estudante precisava marcá-los. Uma análise do gráfico 1 nos mostrou que sete alunos foram capazes de identificá-los. Um estudante não reconheceu os paralelogramos desenhados, e doze alunos reconheceram, visualmente, um dos paralelogramos e não, o outro. Por essa razão, afirmamos que os doze educandos parecem estar em trânsito, dentro do nível de reconhecimento visual de paralelogramo.

A quinta questão do diagnóstico focalizou o reconhecimento visual de segmentos de retas paralelas. Ao observar o gráfico 1, verificamos que quatro alunos foram capazes de identificar os dois pares de segmentos de retas paralelas; cinco alunos não encontraram os dois pares de segmentos; e onze estudantes reconheceram um par e não conseguiram identificar o outro par existente no teste. Admiimos que os onze alunos pareciam estar em trânsito dentro do nível de visualização de segmentos de retas paralelas.

Já na sexta questão do diagnóstico, tratamos da associação do nome de um polígono ao desenho do mesmo. Nessa questão, constatamos que associar nome ao polígono correspondente era equivalente ao reconhecimento visual. Assim, observando o gráfico 2, que traz os dados relativos a esta sexta questão, notamos que a associação do nome com o desenho do polígono, que o representa, foi um sucesso no caso do triângulo e do quadrado. Qualificamos como interessante e curioso destacar que a soma dos alunos que reconheceram o triângulo, corretamente, com os que estavam em trânsito no reconhecimento visual no gráfico 1 é, numericamente igual, ao total de estudantes que associaram o nome à figura, no gráfico 2. Podemos observar, de modo semelhante, o ocorrido com o quadrado, ao olharmos os resultados obtidos pelos alunos, no gráfico 1 com o gráfico 2. O que, em nossas reflexões, reforça as afirmações de Hershkowitz

(1983) e Kaleff (2004), de que os alunos fazem uso de figuras prototípicas para avaliar situações, envolvendo conhecimentos geométricos.

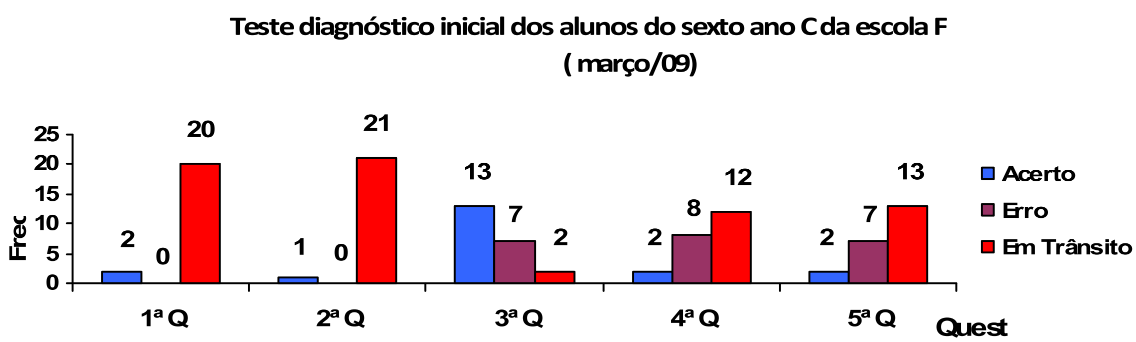


Fonte: Pesquisadores - 2009

Gráfico 2 – Sexta questão do diagnóstico - 6ºA

Diante dos resultados expostos para cada questão, observamos que os estudantes do sexto ano A da Escola F, em sua maioria, estavam em trânsito, quanto ao recohecimento visual dos polígonos. O fato nos mostra que os níveis de desenvolvimento não são discretos. Isto é, podemos ter, no mesmo grupo de estudantes, alguns que nos dão pistas de que são capazes de reconhecer uma determinada figura, em qualquer forma e posição; uns apresentam indícios de que as reconhecem apenas na configuração padrão ou prototípica; e outros deixam pistas de que não as reconhecem, independente da forma e da posição.

Abaixo descrevemos e analisamos as respostas dadas pelos alunos do sexto ano C, nas cinco primeiras questões, as quais se encontram registradas no gráfico 3, e a sexta questão, no gráfico 4.



Fonte: Pesquisadores - 2009

Gráfico 3 – As cinco primeiras questões do diagnóstico - 6ºC

A primeira questão do diagnóstico tratava do problema de reconhecimento visual do triângulo. Uma observação minuciosa da referida questão, no gráfico 3, nos mostra que dois dos 22 estudantes, dessa turma, o identificaram, visualmente, no meio de um grupo de formas geométricas (gráfico 3), e 20 só conseguiram reconhecê-lo na configuração prototípica apresentada por livros didáticos. Na segunda questão, tratávamos do problema da identificação visual do quadrado. Uma análise nos revela que apenas um dos alunos foi capaz de percebê-lo. Os 21 alunos restantes só distinguiam o quadrado de outras figuras, se esse fosse desenhado na configuração apresentada nos livros, que era a prototípica. Na terceira questão, abordávamos o reconhecimento do retângulo. Constatamos que dos 22 educandos, 13 são capazes de reconhecer o retângulo. Porém, para dois alunos deste grupo basta ter quatro lados para que eles reconheçam a figura como um retângulo, e 7 dos 22 não distinguem retângulo de outras figuras**.** Nessa atividade deduzimos que o retângulo é a figura geométrica mais reconhecida pelos educandos do sexto ano C. E isso, provavelmente, se dê aos fatos de que, no dia a dia, o educando tenha mais contato com as formas retangulares do que com as outras e, no nosso teste, o retângulo estava desenhado na forma padronizada, registrada na linguagem coloquial e nos livros didáticos.

Se olharmos os gráficos 1 e 3, dos sextos A e C, constatamos que o retângulo é a forma geométrica mais reconhecida, visualmente, pelos estudantes das duas turmas e, no caso do triângulo e do quadrado, é possível concluirmos que existe algum tipo de reconhecimento visual.

Como já comentamos com as respostas dos alunos do sexto ano A aconteceu a mesma situação citada por Hershkowitz (1983) com os estudantes do sexto ano C. Ao distinguirem se uma figura dada é ou não um retângulo, os estudantes comparam a forma dada com a que eles aceitam como retângulo, para assim decidirem. Além disso, assinala Hershkowitz (1983), os alunos, na maioria das vezes, utilizam-se de atributos inadequados para fazerem tal comparação, visto que tomam atributos específicos do exemplo prototípico, no lugar de atributos que caracterizariam o conceito em questão. O argumento de Hershkowistz é corroborado por Senechal (1990), ao apontar que nós encontramos padrões o tempo todo, todos os dias em diferentes situações. Segundo Senechal, encontramos padrões: na fala e na escrita, nas formas musicais e imagens de vídeos, no desenho ornamental e na geometria natural, nos padrões de trânsito, e nos objetos que construímos.

Nessa perspectiva Senechal (1990) nos mostra que nossa habilidade cognitiva de interpretar e de criar padrões pode ser a chave para atribuirmos significados, darmos sentido ao que vivenciamos e experienciamos. Ou seja, a chave para negociarmos significados com o mundo ao nosso redor. E isso pode explicar o papel marcante das figuras geométricas que os estudantes interiorizam como sendo os protótipos de triângulo, de quadrado, de retângulo, etc. Ou seja, a partir dos desenhos e formas que estudantes aceitam como protótipos e que percebem as mesmas no mundo que os rodeia, nos desenhos que aparecem dessas formas nos livros didáticos e dos desenhos feitos por professores em quadro de giz, em cartazes, etc.

A quarta questão do diagnóstico trata do reconhecimento visual do paralelogramo. Uma observação minuciosa do gráfico 3 nos mostra que dois dos 22 alunos foram capazes de identificar o paralelogramo. Oito estudantes não reconheceram os paralelogramos desenhados e doze alunos reconheceram visualmente um dos paralelogramos e não o outro. Por essa razão, concluimos que os doze educandos, no que diz respeito ao paralelogramo, estejam em trânsito dentro do nível de reconhecimento visual. Já a quinta questão do diagnóstico discute sobre o reconhecimento visual de segmentos de retas paralelas. Ao observarmos o gráfico 3, destacamos que dois dos 22 alunos conseguiram identificar os dois pares de segmentos de retas paralelas, e sete alunos não acertaram os mesmos. Os outros treze estudantes foram capazes de reconhecer um par e não conseguiram identificar o outro par de segmento de retas paralelas, existente no teste. Chegamos à conclusão que esses treze alunos podem estar em trânsito, dentro do nível de visualização de segmento de retas paralelas.

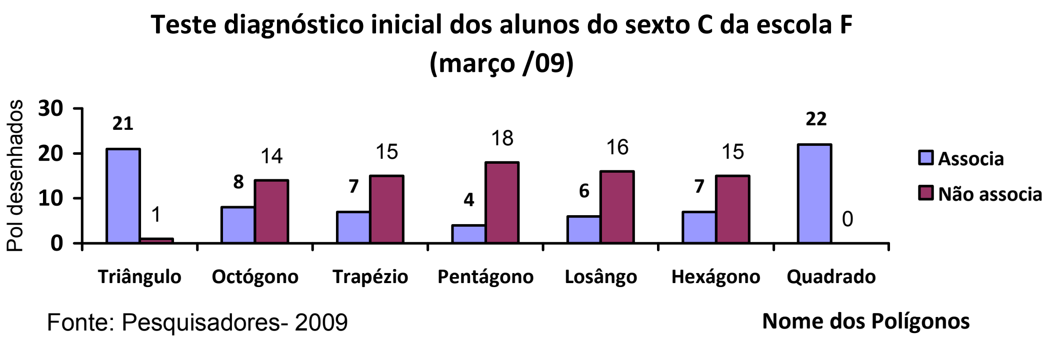


Gráfico 4 – Sexta questão do diagnóstico - 6ºC

Na sexta questão do diagnóstico pedíamos que os estudantes associassem o nome de um polígono ao desenho do mesmo, por entendermos que associar o nome do polígono à figura correspondente era equivalente ao reconhecimento visual. Observando o gráfico 4, percebemos que a associação do nome com o desenho do polígono que o representa, foi um sucesso no caso do triângulo e do quadrado. Porém, ao compararmos com os dados do gráfico 3, especialmente, na questão 1, que corresponde à associação da figura do triângulo ao nome dele, notamos que há uma inversão, isto é, o quantitivo de educandos que reconheciam no gráfico 3, passa a ser, praticamente, igual aos que não associam (gráfico 4).

Ao analisarmos a configuração na qual os polígonos foram desenhados no teste interpretamos as respostas dos alunos segundo os autores já mencionados. Na sexta questão, o quadrado e o triângulo estavam desenhados na mesma forma como eles, geralmente, aparecem nos livros e como os professores os desenham no quadro negro, no power point e no quadro branco. Isso, em nossa interpretação, reforça as afirmações de Hershkowitz (1983), Senechal (1990) e Kaleff (2004). Ou seja, os alunos fazem uso de prototípos para avaliar situações envolvendo conhecimentos geométricos. Contudo, examinando minuciosamente os resultados expostos para cada questão podemos perceber que os estudantes do sexto ano C da Escola F, em sua maioria, também estavam em trânsito, quanto ao recohecimento visual dos polígonos. Situação análoga a que foi comentada pelas respostas dos estudantes do sexto ano A da mesma Escola F. Essas observações são corroboradas pelas afirmações de Clements e Battista (1992) sobre o fato de que os níveis de desenvolvimento não sejam discretos. Portanto, temos, no mesmo grupo de estudantes, alguns que são capazes de reconhecer uma determinada figura apenas em uma forma e posição. E, outras formas geométricas podem ser reconhecidas, pelos mesmos estudantes, apenas por suas características. O que nos mostra ser possível que, em referência a um dado polígono, alguns estudantes estejam entre um nível e outro nas duas turmas de sexto ano desta Escola F.

Após a análise do teste diagnóstico, organizamos os blocos da sequência didática e os aplicamos nas duas turmas do sexto ano. A descrição e a análise das tarefas trabalhadas no bloco do tangram encontram-se registradas em 4.2.2. O nosso trabalho com o tangram teve inicio em 23 de março e foi finalizado em 13 de maio de 2009. Nesse período, trabalhamos com os estudantes agrupados em duplas, mas cada aluno tinha o seu tangram. Foram ministradas treze aulas para cada uma das turmas. Com intuito de trazer os dados significativos da pesquisa e facilitar a leitura desse relato final decidimos fazer um recorte das aulas, que, selecionadas, representam momentos significantes da nossa investigação.

4.2.2 Sequência Didática: Trabalhando com o Tangram

Na fase inicial de planjamento e de estudos relativos ao tema da pesquisa supomos que seria suficiente trabalhar com o tangram em um total de seis aulas. Julgamos que essas aulas seriam suficientes para auxiliar os estudantes a desenvolver o reconhecimento visual de figuras geométricas. Tínhamos organizado o trabalho da seguinte forma: na primeira aula, discutiríamos as lendas; na segunda, construiríamos o tangram e teríamos o primeiro contato livre com o quebra-cabeça; a terceira aula seria dedicada à construção de algumas figuras geométricas escolhidas pelos pesquisadores; a quarta e a quinta aula seriam reservadas para os problemas-desafio, e uma sexta aula para resumo e discussão sobre suas aprendizagens.

Por ocasião da nossa qualificação, alguns questionamentos dos componentes da banca nos alertaram para o fato de que sería preciso muito mais do que seis aulas. Ao iniciarmos nosso trabalho de campo, sentimos que o alerta dado pelos professores da banca tinha se tornado realidade. Por essa razão, resolvemos desenvolver a sequência didática do tangram em 13 (treze) aulas. Das treze aulas selecionamos 9 (nove) para comporem nosso relato final. Defendemos que as nove aulas foram escolhidas por serem, as que traziam evidências mais claras do início do reconhecimento visual de poligonos, de suas características, da nomenclatura de polígonos e do desenvolvimento do raciocinio geométrico, particularmente, no nivel de visualização. Tais evidências são apreendidas nos diálogos entre pesquisador e alunos.

Por isso, desenvolvemos em três aulas as primeiras atividades realizadas neste bloco envolvendo leitura, análise e discussão das lendas do tangram. É importante registrar que a leitura e a compreensão de textos são fundamentais na resolução de problemas em matemática. E, situações de resolução de problemas seriam trabalhadas neste bloco de atividades com tangram e nos demais. Em seguida, desenvolvemos um grupo de quatro aulas, por meio das quais os estudantes teriam os primeiros contatos com o material organizado pelos pesquisadores. Após esse trabalho, realizamos um conjunto de cinco aulas, nas quais os estudantes precisariam construir uma forma geométrica, seguindo orientações predeterminadas pelos pesquisadores. E uma última atividade que fazia uma relação entre artes e matemática, que poderia despertar a criatividade dos alunos e levá-los a compreender a intedisciplinaridade entre essas disciplinas. Para desenvolvermos essas atividades combinamos com os estudantes que eles trabalhariam em duplas, mas que cada um deles teria um tangram e uma folha de atividades dirigidas e estas seriam entregues aos pesquisadores, ao terminar a tarefa.

A primeira aula do tangram aconteceu em 23 de março e durou o equivalente a uma aula de cinquenta minutos. Para esta aula, nossos objetivos eram os seguintes: ler a primeira lenda tangram; discutir a pronúncia e a escrita de algumas palavras do texto da primeira lenda, analisar o que os alunos compreenderam da primeira lenda do tangram e apresentar o tangram para os estudantes. Os fatos ocorridos na atividade e as nossas aprendizagens encontram-se descritos e analisados, a seguir.

A nossa primeira atividade da pesquisa e também selecionada para este relato final, chamada de *Primeira Lenda do Tangram*. Iniciamos a atividade com a leitura de uma das lendas do tangram e a comentamos. Na segunda parte, os alunos responderam a um pequeno questionário, pois tínhamos a intenção de analisar o que eles haviam compreendido da história lida. Entramos na sala do sexto ano A e iniciamos a aula pedindo ao aluno A07 que lesse a lenda. Orientamos os alunos para que, ao término da leitura, marcassem no texto as palavras que eles desconheciam e procurassem buscar o significado das mesmas no dicionário. Entre as palavras que os estudantes não conheciam apareceram instigante e serviçal. Depois da consulta ao dicionário e compreensão dos estudantes sobre esses termos e o siginificado dos mesmos no contexto da lenda, propusemos aos alunos a seguinte questão:

P: *Quais poderiam ser as formas geométricas citadas no texto*? E as respostas dos estudantes A07, A14, A15 e A21 foram:

A07: *Quadrado.*
A14: *Retângulo.*
A15 *Triângulo.*
A21: *Aquela que é tipo um balão.*

A explicação mais plausível, para o fato de que apenas as formas quadrado, triângulo e retângulo tenham sido citadas pelos alunos desta turma, pode estar no fato de que sejam as formas mais trabalhadas nos livros didáticos e em salas de aula. Pode ser que devido às várias repetições nos livros e nas aulas sobre as três formas geométricas elas tenham-se tornado figuras padrões para os alunos. No nosso teste diagnóstico, já tínhamos percebido que essas três formas geométricas eram reconhecidas por alguns estudantes das duas turmas de sexto ano. Pelas respostas do diagnóstico inicial parecia que estudantes tinham algum reconhecimento visual de retângulo, triângulo e quadrado. Recordando retângulo, foi reconhecido, visualmente, pela maioria dos alunos das duas turmas. Triângulo e quadrado tiveram algum tipo de reconhecimento visual, pois em alguns casos, tivemos a maioria dos alunos em trânsito, pois ora reconheciam estas formas geométricas ora não (veja seção 4.2.1). Explicando-se, assim, o motivo delas terem sido citadas pelo estudantes. Entretanto, o losango ainda é conhecido e visto como um balão; figuras como paralelogramo e trapézio não foram nem citadas pelos alunos depois da leitura da lenda.

A nossa segunda aula do tangram aconteceu em 30 de março e foi programada para durar, também, uma hora-aula. Os objetivos para esta aula continuavam sendo: ler a segunda lenda tangram; discutir a pronúncia e a escrita de algumas palavras do texto da lenda; analisar o que os alunos compreenderam da segunda lenda do tangram; e apresentar o tangram para os estudantes. Iniciamos a aula, procurando atingir os objetivos citados e pedimos a um aluno que lesse a lenda. O estudante A16 se prontificou a ler. Procedemos com a mesma estratégia da primeira aula, quanto aos vocábulos desconhecidos pelos alunos, usando o dicionário, orientando-os, também quanto a pronúncia difícil de alguns termos para eles. Entre as palavras que consideraram difíceis de pronunciar e que desconheciam estava Chi chiao tu (as sete peças). Como estas palavras não tinham no dicionário, dissemos-lhes que o significado da expressão era “as sete peças” e que era uma referência ao tangram. A segunda palavra desconhecida foi enciclopédia, cujo significado é “um conjunto de obras que abrangem todos os ramos do conhecimento”, e o última vocábulo marcado pelos estudantes foi taoísta, “ensinamento religioso que significa a busca de um caminho”. Assim que terminamos as buscas no dicionário, relemos as palavras com os estudantes e pedimos-lhes que repetissem. Assim sendo, aproveitamos o fato de que no texto há uma menção ao quadrado para fazermos o seguinte pedido aos alunos:

P: *Descrevam um quadrado*. As respostas que ouvimos e os diálogos que iniciamos com os estudantes encontram-se descritos abaixo.

A07: *É uma figura que possui quatro lados.*

Diante da resposta de A07, resolvemos fazer o desenho abaixo, no quadro e perguntar-lhe: P: *Ah! Então podemos dizer que esta figura (Figura 15) é um quadrado*?

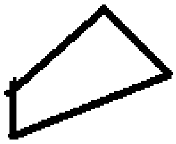


Figura 15 - Quadrilátero qualquer

A15: *Não, pois os lados não eram iguais*.

Percebemos que a turma parecia concordar com ele. Resolvemos fazer um novo desenho no quadro e perguntamos-lhes: P: *Quais eram as 'características' da figura (Figura 16) desenhada?*

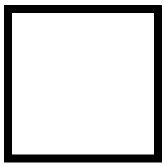


Figura 16 - Quadrado

A15: *é um quadrado, pois, tinha quatro lados iguais e quatro quinas iguais*. Procuramos discutir sobre as formas geométricas citadas pelos alunos, porquanto, assim como os pesquisadores van Hiele (1957/1990) e Presmeg (1997) concordamos que a imagem que eles formaram de um quadrado, pode nos ajudar a perceber se eles identificam exemplos e contra-exemplos do mesmo. E saber quais as características destas formas geométricas que eles já sabem e reconhecem, visualmente, e ainda pode nos ajudar na busca de novas relações entre a imagem visual e o conceito que podem estar construindo sobre quadrado.

Na quinta aula no dia 08 de abril, na qual a temática era *Brincando e aprendendo a utilizar o Tangram*, tínhamos como objetivo construir com os alunos, a partir das peças do tangram, as letras do alfabeto, explorar uma das possibilidades do tangram e identificar os polígonos que compõem o tangram. Na primeira parte da atividade, conversamos com os alunos sobre o que já sabíamos sobre polígonos e, na segunda parte, construimos com os alunos, utilizando as peças do tangram, algumas letras do alfabeto. Iniciamos esta aula no sexto ano A, retornando a discussão sobre o significado da palavra polígono. A resposta dada pelos alunos A07 e A12: *polígono é uma figura geométrica fechada com 3 ou mais lados*. Essa resposta dos dois alunos representa um resumo das nossas discussões na aula do dia seis de abril. Continuamos questionando os estudantes e pedimos-lhes o seguinte:

P: *Citem três exemplos de polígonos.*
A06: *Triângulo.*
A07: *Quadrado e retângulo.*
A15: *Losango.*
A22: *Trapézio*.

Perguntamos se eles sabiam nos dizer quantos lados tem um quadrado. Responderam-nos quatro. Continuamos a questioná-los sobre como eles chegaram a esse número e nos explicaram que contaram as “retas” (os “segmentos de reta”) que formavam os lados do quadrado. Uma vez que os estudantes já haviam explicado como contaram os lados do quadrado, resolvemos utilizar as peças do tangram para construir a letra J (Figura 17A) e depois a desenhamos no quadro e, em seguida, fizemos a seguinte pergunta.

P: *Quantos lados possui o polígono J (Figura 17A)*?

Dois alunos nos deram as seguintes respostas:

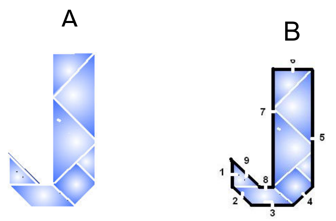


Figura 17 - Polígono J formado com o tangram

A12: *9 lados*.
A07: *6 lados.*

Voltamos para a turma e perguntamos: Quem estava certo? Concluímos que o grupo havia se dividido entre as duas respostas, pois, uma parte achou que A12 estava certo e a outra que A07 estava certo. Na tentativa de solucionar o impasse convidamos A07 para mostrar como chegou a um resultado de seis lados, e ele se explicou, mostrando um por um dos lados e, nesse momento percebeu que havia esquecido de contar três lados. Em seguida pedimos para que A12 explicasse por que ele havia respondido 9 lados e ouvimos a seguinte resposta:

A12: “*Eu marquei os lados e depois os contei um por um dos lados*”(Figura 17 B).

Concluímos a discussão e orientamos aos estudantes que elegessem uma das letras do nosso alfabeto. Após a escolha conversamos sobre os motivos pelos quais selecionaram a letra e pedimos-lhes que as montassem. Uma das regras que colocamos para os educandos foi: eles deviam utilizar todas as sete peças do tangram e estas não podiam se sobrepor. Para auxiliá-los na tarefa que lhes fora pedida, retornamos ao exemplo da letra J (Figura 17) e a reconstruímos, explicando passa a passo para os alunos.

Nesta parte da atividade, constatamos que estávamos trabalhando de fato com uma atividade de resolução de problemas, um jogo do tipo quebra-cabeças composição e decomposição de figuras geométricas. A atividade de resolução de problemas surge na atividade, quando propusemos aos estudantes que escolhessem uma letra e a desenhassem. A partir desse momento, os educandos teriam que traçar as estratégias que os auxiliariam a concluir a atividade. Entre as estratégias escolhidas pelos alunos estavam: desenhar a letra selecionada e encaixar as peças do tangram dentro da mesma. Neste momento muitos alunos necessitaram de algumas dicas dos pesquisadores e dezesseis dos vinte e dois alunos precisaram de ajuda de um dos colegas, que tinham terminado a sua montagem. Após a montagem, os alunos convidaram os pesquisadores para juntos verificarem se a construção era semelhante à letra escolhida.

De acordo com Pais (2002, p. 37), afirmamos que o nosso desafio didático, na atividade acima, consistia em “partir do conteúdo estabilizado no plano intelectual do sujeito e trabalhar para que essa dimensão particular alcance a generalidade prevista” pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998). Destarte, propusemos tarefas que favorecessem uma aproximação do conhecimento que os alunos possuem com aqueles que estavam previstos nos documentos oficiais da área de matemática.

Ao analisar a atividade *Brincando e aprendendo a utilizar o tangram,* notamos estar diante de situações, nas quais o estudante precisa manipular alguns conceitos e realidades, até já conhecidos por ele, para chegar a saberes até então ignorados. Dessa forma, o aluno faz conjecturas, reflete sobre as hipóteses levantadas pelos colegas, intereage com seus pares, sugere respostas e chega a resultados que lhe permitem alcançar outros níveis de conhecimento, informação e raciocínio. No desenvolvimento dessa tarefa, entendemos que estávamos proporcionando aos educandos atividades, nas quais a interação entre pares era fundamental e, para Vygotsky (1993; 1998) é mediante a interação que se constrói o conhecimento e depois poderá ser partilhado com o grupo, junto ao qual tal conhecimento foi construído.

Ao refletirmos sobre as atividades desenvolvidas em sala de aula, torna-se evidente a necessidade de entendê-las e organizá-las como sendo um processo interativo, que tem como objetivos garantir ao estudante um momento para se expressar; levantar hipóteses; questionar; e chegar a conclusões que o auxilie a construir seu conhecimento.

Outro ponto interessante nesta atividade foi compreender que o trabalho com quebra-cabeças pode trazer sensações antagônicas para os alunos. Pois, alguns deles mostravam-se decepcionados ao descobrirem que teriam que reiniciar a montagem, quando ocorria alguma falha, enquanto outros vibravam quando conseguiam construir a letra escolhida. Pudemos perceber que as declarações de Kaleff, Votto e Corrêa (2003) tinham sentido, porque a letra era um novo desafio para o educando. Ao vencer um desafio, o estudante se motivava para enfrentar os próximos que surgiriam.

Nesta atividade, compreendemos a importância que a composição e decomposição de formas/figuras geométricas têm para o desenvolvimento da visualização. Ao analisar a atividade de montagem de uma letra do alfabeto, remetemos-nos ao trabalho de Del Grande (1994). Fundamentado nele, conferimos que estamos trabalhando com a composição e decomposição de formas, que é uma das habilidades necessárias para se desenvolver a visualização. Outro autor que nos ajudou a entender que estamos realizando uma atividade de composição e decomposição de figuras geométricas foi Lorenzato

(2008). Este autor deixa claro que as habilidades citadas por Del Grande (1994) são também fundamentais para a compreensão do estudo das figuras. Lorenzato (2008) ainda destaca que tais habilidades são importantes para que os estudantes comecem a ler, escrever sobre, desenhar, descrever, andar em e sobre, jogar com e perceber as formas e o espaço onde vivem. Enfim todas estas habilidades necessárias para compor e decompor formas e figuras geométricas servem para desenvolver o reconhecimento visual tanto em atividades com formas e figuras quanto mentalmente. Pois todas estas habilidades auxiliam o ser humano para identificar, conhecer, ler, escrever sobre, desenhar, descrever, andar em e sobre, jogar com, reconhecer e perceber o espaço onde convivem e as formas imersas no mesmo.

Na aula do dia 13 de abril desenhando uma das histórias do tangram, tinhamos objetivos de identificar os polígonos convexos e não convexos, e de utilizar o tangram para contar uma das versões do mesmo. Para realizar essa atividade, resolvemos iniciar a aula, no sexto ano A, retomando mais uma vez a discussão sobre o que é um polígono. Pois tínhamos a intenção de, a partir das respostas dos estudantes, discutir o que eles entendiam por polígono e acrescentar a ideia de que um dado polígono pode ser convexo ou não convexo. Entre as respostas que ouvimos estavam as seguintes:

A10 e A08: *Uma figura geométrica fechada com 3 ou mais lados*.

Essa resposta dos estudantes A10 e A08 era a mesma dada pelos estudantes A07 e A12 na aula do dia 08 de abril. Ou seja, os estudantes estavam aos poucos incorporando as discussões sobre polígonos. Continuamos o diálogo com os alunos, pedindo-lhes o seguinte:

P: *Citem um exemplo de polígono*.
A15: *Trapézio*.
A22: *Losango*.
P: *Quantos lados possui o trapézio? E o losango?*
A27: *Eles têm 4 lados.*

Concordamos com ele, mas continuamos questionando-os, pois queríamos provocar os estudantes a comentarem mais sobre algumas características destes polígonos. P: *Vocês querem acrescentar mais alguma coisa na informação de A27*?

A22 e A15: *Quatro vértices e quatro ângulos.*

Utilizamos as peças do tangram para construir a letra C (Figura 18). Aproveitamos para trabalhar com os alunos a contagem de lados de um polígono. Perguntamos-lhes se sabiam nos dizer quantos lados tinha o polígono letra C e nos responderam. Em seguida, desenhamos um quadrado ao lado do polígono letra C, marcamos dois pontos no interior de C, de tal forma que o segmento de reta que os unia passasse também por fora do polígono letra C. Procedemos de forma semelhante com o quadrado e mostramos–lhes que qualquer segmento de reta desenhado, ligando dois pontos internos do quadrado sempre estaria dentro do mesmo. Concluimos a atividade mostrando para os educandos que no primeiro caso o polígono é chamado de convexo e, no segundo caso, ele é dito não convexo ou côncavo.

Figura 18 - Letra C montada com o tangram

Como exercício, propusemos aos alunos que dissessem quais dos polígonos desenhados no quadro eram convexos e quais eram não convexos (Figura 19)?

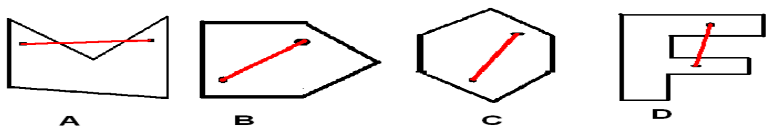


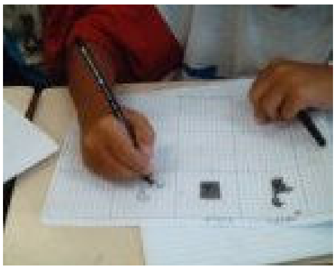
Figura 19 - Polígonos convexos e não convexos

Os estudantes A22, A10 e A08 responderam o seguinte:

A22: *As figuras B e C são convexos.*
A10: *As figuras A e D são não convexos.*

A08: *As figuras B e C são convexas e as figuras A e D são não convexas*.

Orientamos os alunos para anotarem as novas informações no caderno e partimos para a tarefa seguinte, isto é, recontar, por meio de uma história em quadrinhos, qualquer uma das versões do tangram, empregando, para realizar tal tarefa, as peças do tangram. Para auxiliar os estudantes, preparamos uma folha de papel quadriculado e a distribuímos para os educandos. Orientamos que desenhassem a versão distribuída na folha dada. Sugerimos-lhes que relessem uma das versões das histórias do tangram, que havíamos distribuído no dia 23 de março, pois tal releitura poderia ajudá-los na tarefa que lhes fora solicitada (Fotografias 2 e 3).



Fotografia 2 – Desenhando uma das histórias do tangram

Fotografia 3 – Desenhando uma das histórias do tangram

Concordamos com Broetto (2004) ao afirmar que o uso da metodologia de resolução de problemas permite que os alunos construam, desconstruam e reconstruam conceitos, façam levantamento de hipóteses, trabalhem em equipe, questionem, duvidem, aumentem a autoconfiança, conheçam seus potenciais e reconheçam seus pontos de fraquezas. Assim, pensamos que questionando os estudantes sobre as afirmações que eles faziam, estávamos lhes propondo problemas, e isso ainda nos permitia trabalhar a partir do conhecimento do aluno.

No momento em que questionamos os estudantes sobre o que é polígono e pedimos que dissessem quais dos polígonos desenhados no quadro eram convexo e quais eram não convexos fornecemos-lhes diferentes problemas. Nesse questionamento, conforme Grando (1995) explorávamos um conceito e, simultaneamente, resolvíamos um problema, mediante exemplos e contra-exemplos, na busca de semelhanças e diferenças entre os polígonos desenhados. Pois sabemos que para construir um conceito matemático é preciso reconhecer e identificar exemplos e contra-exemplos deste conceito. Ademais, conforme discussão feita por van Hiele (1956) e Crowley (1994), aplicávamos estratégias que permitissem aos educandos discernir as características dos polígonos, reconhecendo as partes de uma dada figura geométrica.

Após a atividade de desenhar uma das versões da história do tangram, iniciamos um conjunto de aulas, as quais intitulamos de desafios. Nossos objetivos neste grupo de desafios eram continuar mostrando o tangram como um jogo de quebra-cabeças que pode ser desafiador, e discutir com os educandos a possibilidade de construir alguns polígonos a partir das peças do tangram. Na aula do dia 16 de abril, em que a temática eram desafios com tangram, objetivávamos construir os polígonos indicados pelo pesquisador com um dado número de peças do tangram e mostrar que é possivel compor alguns polígonos a partir de triângulos, quadrados e paralelogramos. O conjunto de aulas, que chamamos de desafios com tangram, foi planejado para durar seis aulas de 50 minutos cada uma.

Para auxiliar no entendimento da aula que selecionamos para relatar resolvemos neste parágrafo descrever, de forma suscinta, as duas primeiras aulas de desafios. Antes de propormos o primeiro desafio para os estudantes, discutimos com eles sobre as regras das atividades que desenvolveríamos. As orientações dadas para os alunos foram as seguintes: eles só poderiam utilizar a quantidade de peças determinada pelos pesquisadores e, após encontrarem as soluções para o desafio dado, deviam nos chamar e mostrar-nos o que haviam conseguido. Em seguida propusemos um grupo de quatro desafios para os estudantes, que passamos a descrever.

I) Construir e depois desenhar numa folha de papel quadriculado um quadrado, um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. Para realizar a atividade, a regra básica era utilizar apenas duas das sete peças do tangram.

II) Construir e desenhar numa folha de papel quadriculado um quadrado, um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. Para realizar a atividade, a regra básica era utilizar apenas três das sete peças do tangram.

Os dois conjuntos de desafios descritos acima foram utilizados nas aulas dos dias 16 e 22 de abril de 2009. Acreditando que, no terceiro desafio, os estudantes precisariam de um tempo maior para organizar as informações necessárias e resolver o problema que lhes fora proposto, decidimos que o desafio, descrito abaixo, seria trabalhado nas aulas dos dias 29 de abril, 06 e 11 de maio.

III) Construir e depois desenhar numa folha de papel quadriculado um quadrado, um paralelogramo, um triângulo e trapézio. Para realizar a atividade a regra básica era utilizar apenas quatro das sete peças do tangram.

Iniciamos a aula intitulada *O desafio final do tangram,* conversando com os alunos sobre a alteração que faríamos nas regras para aquela atividade. Explicamos-lhes que, na tarefa, eles deviam usar todas as peças de um mesmo tangram, isto é, eles não podiam pegar peças de outros tangrans e unir ao deles e muito menos trocar uma peça por outra. Como de costume a aluna A13 pediu-nos para distribuir o material para os colegas. Concordamos que ela poderia entregar o material para os colegas, mas pedimos-lhe o seguinte: Enquanto organizamos a sala, por gentileza, verifique se os tangrans estão completos e depois distribua um para cada dupla. A aluna A13 entendeu o que pedimos e, em seguida, pegou a pasta com os tangrans, retirou-os de dentro da mesma e, para verificar se estavam completos resolveu montá-los (Fotografia 4) formando o quadrado com as sete peças. No entendimento dela, se estivesse tudo certo o tangram estava completo, caso contrário, poderia estar faltando ou sobrando peça. Aluna A13, percebendo que poderia demorar mais tempo do que devia, resolveu convocar o colega A02 (Fotografia 5) para ajudá-la. E, à medida que ela terminava a montagem, o aluno A02 pegava o tangram, desmontava-o, colocava-o num envelope e entregava um envelope para cada dupla.

Fotografia 4 - A02 aguardando a montagem dos tangrans

Fotografia 5 - A13 montando os tangrans

Depois de constatar que todas as duplas já estavam de posse do material necessário para enfrentar os desafios, propusemos-lhes o primeiro desafio, a saber: Construir um quadrado, utilizando todas as sete peças do tangram. Este desafio foi resolvido com relativa facilidade pelos estudantes (Fotografia 4). O que pode ser explicado pelo fato de que alguns alunos observaram a aluna A13 montar o quadrado e empregaram a mesma estratégia. Outro alunos buscavam a ajuda de colegas que já haviam conseguido montar o quadrado.

Neste desafio, percebemos o que Polya (1945/1995), Dante (1999), Onuchic & Allevato (2005) e Santos-Wagner (2008) queriam dizer quando afirmavam que o que é problema para uns estudantes, poderia não o ser para outros. Concordamos com Santos-Wagner (2008, p. 56) ao alertar para o fato de que, se os estudantes trabalham com situações que eles “já saibam e dominem as estratégias e procedimentos de solução estas tarefas deixam de ser consideradas como problemas e passam a ser tratadas pelos alunos apenas como tarefas para exercitar e memorizar procedimentos”. Foi, exatamente, o que vimos acontecer com A13, pois a referida aluna já havia montado tantas vezes o quadrado com as sete peças do tangram que o desafio proposto não representava um desafio para ela e, sim mais um exercício de treinamento.

Porém, o que observamos neste desafio foi uma interação entre os alunos e, neste ponto, concordamos com Vygotsky (1998) ao afirmar que é na interação entre as pessoas, que constróem o conhecimento, que será partilhado com o grupo, por meio do qual tal conhecimento foi conquistado ou construído. Tal interação pôde ser percebida, quando um aluno sentia dificuldade em resolver o desafio que lhes fora proposto e, imediatamente, outro colega vinha auxiliá-lo. Também pensamos que o conhecimento é uma construção que vai sendo elaborada desde a infância, através da interação do sujeito ser humano com os objetos que procura conhecer, sejam eles do mundo físico ou cultural.

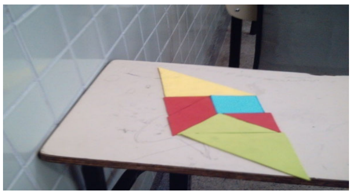
Em nossa percepção ficou evidente a importância da visualização, no momento em que pedimos aos alunos que montassem um quadrado com as sete peças do tangram, e eles não encontraram dificuldades em executar o comando e, sim, na composição da figura pedida. Lorenzato (2008) e Del Grande (1994) nos ajudaram a entender o problema da composição/decomposição de figuras geométricas em nosso desafio proposto aos alunos. Eles afirmam que, em atividades como a proposta neste desafio, é a habilidade de percepção de figuras em campos que ajuda. Pois, esta habilidade exige do estudante que focalize a atenção no que é essencial numa figura geométrica e desconsidere todas as características que não são essenciais. A construção de um quadrado, utilizando as sete peças do tangram exige que o estudante tenha a imagem da figura de um quadrado na mente e ainda que ele possa recordar-se que o tangram foi construído a partir de um quadrado. O que significa dizer que basta recompor o quadrado inicial, isto é, uma vez que a decomposição já havia sido feita, eles agora estavam diante da composição do quadrado original. Uma vez vencido o primeiro desafio, era a hora de enfrentar o segundo:

2º Desafio: Construir um paralelogramo, utilizando todas as sete peças do tangram.

Após ouvirem a leitura do desafio e terem feito a primeira tentativa sem obterem sucesso, a aluna A13 e o aluno A14 nos fizeram o seguinte pedido: *Professor, você pode dar alguma dica pra gente*? Respondemos-lhes que sim e, apresentamos as duas dicas registradas:

1ª Retire, temporariamente, do conjunto os dois maiores triângulos.
2ª Com as cinco peças restantes construa um quadrado.

Alguns minutos depois da conversa que tivemos com a turma sobre as dicas para a construção do paralelogramo com sete peças, A13 e A20 nos chamaram e disseram que haviam conseguido construir. Fomos até eles e confimamos que haviam, de fato, construído o paralelogramo (Fotografias 6 e 7) com as sete peças do tangram. Sugerimos-lhes,então, que ajudassem outros colegas.



Fotografia 7 - Paralelogramo construído por A13

Fotografia 6 - Paralelogramo construído por A20

Essa foi mais uma aula, na qual, aplicamos algumas das sugestões de Polya (1945/1995) e Suydam (1997). Segundo estes autores, quando os alunos consideram complexo um problema, uma boa prática, para auxiliá-los a resolver o mesmo, é dividí-lo em problemas mais simples ou que eles já tivessem resolvido antes. Observamos que, no momento em que dávamos dicas para os aluns, estávamos reduzindo um problema complexo em outros mais simples e, simultaneamente, aplicando uma das três formas de desemaranhar pistas, sugeridas por Suydam (1997). Outro ponto que nos chamou a atenção neste desafio, relaciona-se à nossa orientação e à ajuda da professora da educação especial: uma das alunas da turma que possui síndrome de Dawn (Fotografia 10) conseguiu construir o paralelogramo. A felicidade estampada no rosto da aluna nos deixou empolgados e também nos fez ver que o tangram tem potencial para trabalhar com alunos com necessidades especiais. Depois dessas evidências cabe-nos registrar que, conforme defendia Piaget, o conhecimento repousa em todos os pontos sobre a interação entre o sujeito e os objetos, entre sujeitos e sujeitos.

Na teoria de Piaget (1995) a criança constrói seu conhecimento por meio da experimentação ativa, isto é, ela manuseia e estuda os objetos, a princípio, sem formar conceitos, pois estes só serão construídos e formados mais tarde. Segundo Piaget (1973, p. 45)

> O papel inicial das ações e das experiências lógico matemáticas concretas é precisamente de preparação necessária para chegar-se ao desenvolvimento de espírito dedutivo, e isto por duas razões. A primeira é que as operações mentais ou intelectuais que intervém nestas deduções posteriores derivam justamente das ações: ações interiorizadas, e quando esta interiorização, junto com as coordenações que supõem, são suficientes, as experiências lógico matemáticas enquanto ações materiais resultam já inúteis e a dedução interior se bastará a si mesma. A segunda razão é que a coordenação de ações e as experiências lógico matemáticas dão lugar, ao interiorizar-se, a um tipo particular de abstração que corresponde precisamente a abstração lógica e matemática .

Para Piaget e seus colaboradores existem três tipos de conhecimentos: conhecimento físico, conhecimento lógico-matemático e conhecimento social ou convencional. O conhecimento físico refere-se aos objetos; pode ser adquirido por meio da observação e das abstrações empíricas, sendo sua fonte, portanto, externa ao sujeito. De acordo com Kamii e Devries (1991, p. 21) “a ação da criança sobre os objetos e sua observação da reação do objeto são importantes em todas as atividades que envolvem o conhecimento físico.” Já o conhecimento lógico-matemático, surge, por intermédio da ação do sujeito que introduz relações nos objetos e entre os objetos; e o conhecimento social é construído em interação com os outros indivíduos em sociedade.

Ao discutirem sobre o ensino de geometria, Piaget e Inhelder (1993) dizem que a ordem lógica em que a geometria é construída inicia-se com conceitos topológicos, depois vêm os projetivos e os euclidianos, ou seja, o estudo do espaço é de ordem topológica.

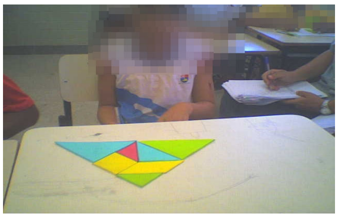
> ... a formação do espaço é ligada a uma intuição sensível, e relaciona suas vias profundas sobre a significação do grupo dos deslocamentos ao jogo das sensações propriamente ditas, como se o espaço sensório-motor fornecesse o essencial da representação geométrica e como se o intelecto trabalhasse sobre o sensível já previamente elaborado (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 13).

Desta forma, pensamos que a compreensão do espaço surge no começo na vida da criança, inicialmente de forma experimental e mais tarde surgem nas ações interiorizadas pela criança.

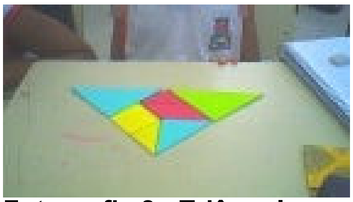
O nosso terceiro e último desafio foi o seguinte: Construir um triângulo, dispondo todas as sete peças de um tangram. Como já havíamos dado algumas dicas no desafio anterior, resolvemos usar a mesma estratégia neste. Portanto, decidimos repetir as duas dicas anteriores e acrescentar uma terceira que, na nossa concepção era a que tornava o terceiro desafio diferente dos demais. Eis a seguir as duas dicas anteriores e o acréscimo que fizemos:

1ª Retire, temporariamente, do conjunto os dois maiores triângulos.
2ª Com as cinco peças restantes construa um quadrado.
3ª Após construir o quadrado com as cinco peças, gire-o até virar um losango e depois encaixe os dois triângulos grandes na figura, sendo um de cada lado do losango-quadrado.

Ficamos a observar os alunos, tentando montar o quadrado com cinco peças. Depois de ter tentado e não obter êxito, o aluno A28 e a aluna A13 perguntaram se podiam usar o desenho do quadrado, formado com cinco peças, que eles tinham desenhado no caderno. Permitimos que fizessem uso do desenho como inspiração. Logo depois, A28 e A13 mostraram o quadrado montado e nos questionaram: e agora, professor o que fazemos com os dois triângulos que sobraram? Entendemos que eles não tinham utilizado a terceira dica e sugerimos-lhes que a utilizassem e, ainda, que desenhassem um triângulo para verem como encaixar os dois triângulos. Passados alguns minutos, os dois alunos A13 e A28 (Fotografias 08 e 09) mostraram o triângulo formado com as sete peças do tangram. Pedimos-lhes que ajudassem aos demais colegas neste desafio. Os dois alunos atenderam a nosso pedido e, pouco a pouco, os demais alunos da turma concluíam o desafio e nos mostravam.



Fotografia 9 - Triângulo montado por A13



Fotografia 8 - Triângulo montado por A28

Nesse trabalho, verificamos que, além de dar dicas, utilizamos mais uma das orientações deixadas por Polya (1945/1994) e reforçada por Santos-Wagner (2008), Silver & Kilpatrick (2000) e Dante (1999). Todos esses autores afirmam que em alguns casos, para ajudar os estudantes a compreender um problema e elaborar um plano para resolvê-lo, é conveniente utilizar a estratégia de dividi-lo em dois problemas mais simples ou em um problema correlato que eles já saibam resolver.

Os desafios proporcionaram aos estudantes oportunidades de exercitarem habilidades como a coordenação visual-motora, a percepção de figuras, a constância de forma e tamanho e, a memória visual que são quatro das sete habilidades necessárias para o desenvolvimento da percepção espacial. A memória visual foi mobilizada pelos alunos quando tiveram que construir o triângulo com todas as peças do tangram e tinham montado apenas o quadrado com cinco peças. A coordenação visual-motora foi acionada no momento em que os estudantes precisavam girar o quadrado até que ficasse semelhante a um losango. Contudo, no momento em que o aluno percebe que o quadrado já se tornou um losango, ele está mobilizando a percepção de figuras em campos. Já a constância de forma e tamanho foi empregada no momento em que o educando compreendeu que o quadrado, apesar do giro ao qual foi submetido, não perdeu suas características básicas, isto é, continuou com 4 lados iguais, 4 vértices e 4 ângulos retos. Porém, esta ação podia ajudar a solucionar o desafio e, assim, resolver o problema de construir o triângulo, utilizando as sete peças do tangram.

Prevendo que não levaríamos a aula toda para concluir o terceiro desafio, preparamos uma atividade extra. Inicialmente os alunos deveriam traçar, no desenho, as figuras que lembrassem um dos polígonos estudados. Em seguida, numerá-los e escrever as características e os nomes de cada um dos polígonos identificados. Relacionamos, nas figura 20 e 21, as respostas dadas por alguns alunos a essa atividade.

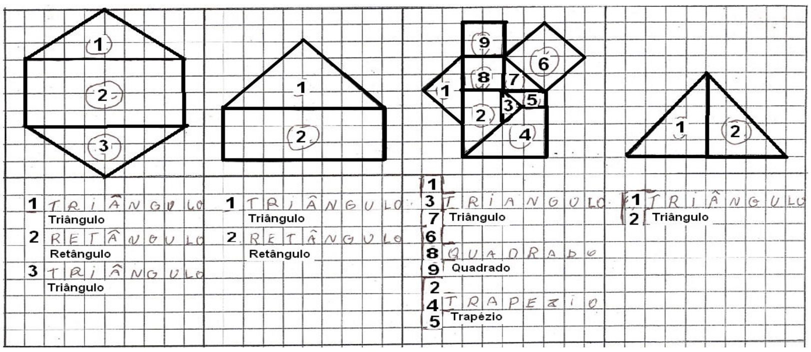


Figura 20 - Desenho do aluno A14

Nesse exercício, tínhamos a intenção de analisar se os estudantes eram capazes de reconhecer, visualmente, polígonos como: retângulo, quadrado e triângulo. Tomando como referência Gutiérrez (1991) e as respostas apresentadas por A14 (Figura 21) inferimos que ele já é capaz de reconhecer, visualmente, quadrado, retângulo, triângulo e trapézio.

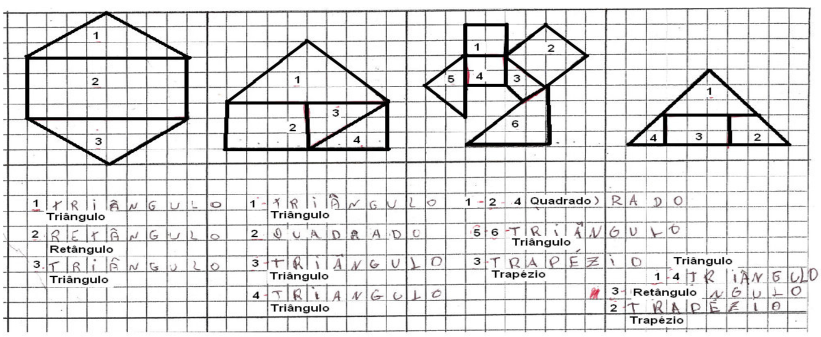


Figura 21 - Desenho do aluno A08

Uma análise da atividade de A08 (Figura 21) nos mostra que ele é capaz de reconhecer visualmente polígonos como retângulo, quadrado, triângulo e trapézio, pois, mesmo essas formas não estando no seu campo visual ele conseguiu vê-las dentro dos desenhos acima. Melhor dizendo, ficou constatado, pelas pistas deixadas pelos educandos, que eles constituiram uma imagem mental de triângulos, quadrados e retângulos, a partir das figuras que lhes foram mostradas no papel milimetrado. Essa é uma atividade característica de compor e decompor figuras, que, no nosso raciocínio, é uma forma de trabalhar a memória visual, é a habilidade de lembrarmos de uma figura que não está mais mais em nosso campo de visão. Além da memória visual outra habilidade que foi acionada nesta atividade é a decomposição de campo, pois é através dela que podemos isolar o campo visual. Em outras palavras, quando pedimos a um aluno que observe uma dada forma e lhe perguntamos com que forma ela se parece, estamos acionando a decomposição de campo e proporcionando ao educando o desenvolvimento do raciocínio visual.

Ao pedirmos para os estudantes traçarem as formas que eles enxergavam em cada uma das figuras desenhadas na folha de papel milimetrado, estávamos propondo atividades que lhes permitissem o desenvolvimento do nível de visualização. De acordo com van Hiele (1957), e Crowley (1994), um educando neste nível reconhece as figuras geométricas apenas por sua aparência física e não por suas partes ou propriedades e, além disso, é capaz de reproduzir uma forma dada, ainda que não esteja no seu campo visual.

As aulas selecionadas foram ministradas no sexto ano C, no período de 30 de março a 13 de maio, com duração de uma aula para cada uma delas. Para a aula inicial, nossos, objetivos eram: ler a segunda lenda do tangram; discutir a pronúncia e a escrita de algumas palavras do texto da referida lenda, analisar o que os alunos compreenderam da primeira lenda do tangram; e apresentar o tangram para os estudantes. Iniciamos a aula, distribuindo o material com o qual iriamos trabalhar. Em seguida, pedimos ao aluno C.18 que lesse a segunda lenda e sugerimos a todos os educandos que marcassem as palavras que lhes eram desconhecidas. As palavras que eles marcaram foram: Chi chiao tu (as sete peças); enciclopédia (obra que abrange todos os ramos do conhecimento).

Concluímos a pesquisa no dicionário, voltamos nossa atenção para o fato de que o texto faz uma menção a formas geométricas e fizemos a seguinte pergunta para os educandos:

P: *Quais são as figuras geométricas que vocês conhecem?* As respostas foram:
C19: *Triângulo e o quadrado*.
P: *Descrevam um triângulo*.

Os alunos C18, C19 e C16 fizeram um desenho no ar, mostrando o que era um triângulo. Já os estudantes C14, C10 e C19 disseram o seguinte: *é uma figura de três quinas*.

P: *Sendo assim, podemos dizer que a Figura 22 é um triângulo*. Fizemos o desenho abaixo no quadro.

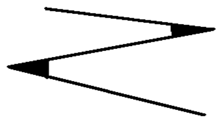


Figura 22 - Desenho do suposto triângulo

C19: *Este não é o desenho de um triângulo*.
P: *Por que a forma desenhada não é um triângulo*?
C19: *Porque é uma figura aberta e triângulo é fechado*. Fizemos uma nova figura no quadro e repetimos o processo de questionamentos.

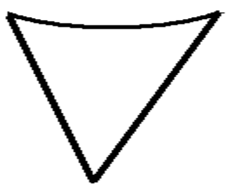


Figura 23 - Suposto triângulo

C19: *Essa figura (Figura 23) não é um triângulo, porque ela tem uma linha que não é uma reta*.

Após a justificativa do estudante, fizemos um último desenho no quadro.

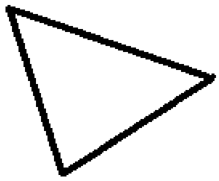


Figura 24 - Triângulo

C19: *É um triângulo (Figura 24).*
P: Por que acha que a figura é um triângulo?
C19: Porque ela possui três lados retos e três quinas.

Tomando como referencia Gutiérrez (1991) e as pistas deixadas pelo aluno C19 podemos dizer que o estudante possui uma imagem mental de um triângulo. De acordo com o modelo de van Hiele, esse aluno possui características de um estudante no nível da análise, já que consegue identificar algumas características básicas do triângulo.

No dia 01 de abril de 2009, lemos com os alunos sobre a *Terceira lenda do Tangram*. Nossos objetivos continuavam os mesmos da primeira e da segunda lenda. Para facilitar o trabalho, resolvemos dividir a atividade em dois momentos, a saber: na primeira parte da atividade lemos a lenda e comentamos sobre o que havíamos entendido da atividade. Já, na segunda parte da atividade, dialogamos sobre a terceira lenda. Conversamos com os alunos sobre o que iriamos fazer e pedimos ao aluno C18 que a lesse. Na sequência, solicitamos que marcassem no texto as palavras que eles desconheciam e, que deviam consultar o dicionário, a fim de saber o significado de cada uma delas. Depois da consulta ao dicionário, assim os questionamos:

P: *O que é um retângulo*?
C14*: Retângulo é uma figura de quatro lados.*
C19: *É uma figura de quatro lados com os lados que ficam de frente um para outro iguais*.

Percebendo que o conceito de C19 poderia ser melhorado, perguntamos-lhe:

P: *Qual era a diferença entre o quadrado e um retângulo*?

C19: *No quadrado os lados têm todos o mesmo tamanho e no retângulo os lados não são todos iguais*.

Analisando as aulas do dia 30 de março e 01 de abril percebemos, de modo semelhante ao que ocorreu com os alunos do sexto ano A, que os estudantes usam de protótípos para avaliar situações, envolvendo os conhecimentos geométricos. Na nossa avaliação, isso é explicável pelo fato de que as figuras geométricas, citadas pelos alunos, estão entre as mais estudadas e discutidas livros nos didáticos e trabalhadas em aulas e se tornam em modelos prototípicos. Nas pesquisas, Hershkowitz (1994; 1983), Fainguelernt e Nunes (2004), deixam claro que os alunos se utilizam de formas padrões, para avaliarem se uma dada figura se encaixa ou não em um modelo.

Pelas razões descritas acima acreditamos que os educandos, ao avaliarem a situação que lhes eram propostas e decidirem se esta poderia ser incluída na classe de figuras que chamavam de triângulos ou de quadrados, apoiavam-se nos modelos prototípicos para fazerem a comparação, ao invés de se basearem na definição matemática daquele conceito. Por outro lado Hershkowitz (1994) alerta que, em muitas atividades, os alunos se apropriam de atributos inadequados para realizarem comparações entre duas formas geométricas, pois tomam características específicas de um prototípico no, lugar de atributos que caracterizariam o conceito em questão. Concordamos com van Hiele que tal situação ocorre, pelo fato de que os estudantes não dominam todas as estratégias necessárias à realização da tarefa solicitada.

No dia 13 de abril de 2009, sugerimos aos alunos que desenhassem uma das histórias do tangram. Para essa atividade, os nossos objetivos eram: identificar os polígonos convexos e não convexos; e utilizar as peças do tangram para contar uma das versões do tangram. Dividimos a tarefa em dois momentos. No primeiro, conversamos com os alunos sobre polígonos convexos e não convexos. E, no segundo momento, combinamos que iríamos desenhar um das versões da história do tangram, utilizando para isso as sete peças do quebra-cabeça. Resolvemos iniciar a atividade, retomando com os alunos a discussão da aula do dia 08 de abril. Para tal, fizemos as seguintes perguntas aos estudantes:

P: *O que é polígono*?

C13 C19, C21 e C18: *Polígono é uma figura geométrica com 3 ou mais lados.*

P: Apresentem-nos um exemplo de polígono:

C13: *Retângulo.*

C29: *Quadrado.*

C18: *Pipa*.

Numa conversa com o estudante, percebemos que o polígono chamado de pipa é, na realidade o losango. Depois solicitamos para construir a letra H com as peças do tangram (Figura 25) e, em seguida, fizemos o seguinte questionamento:

P: *Quantos lados tem o polígono H (Figura 25)?*

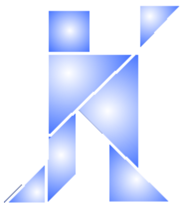


Figura 25 - Letra H formada com as peças do tangram

Os educandos nos responderam corretamente, mas observamos que os alunos ainda contam os lados do polígono apontando para cada um dos lados. Marcamos dois pontos dentro do lado do polígono N (Figura 26B), de tal forma que o segmento de reta que os unia estivesse parte dentro e parte fora do polígono. Desenhamos um retângulo (Figura 26D) e marcamos dois pontos dentro dele. Mostramos–lhes que um segmento de reta desenhado, ligando dois pontos internos do polígono (Figura 26D), sempre estaria dentro do mesmo. Explicamos-lhes que, no primeiro caso, o polígono (Figuras 26C e 26D) é chamado de convexo e, no segundo caso, é dito não convexo (Figuras 26A e 26B).

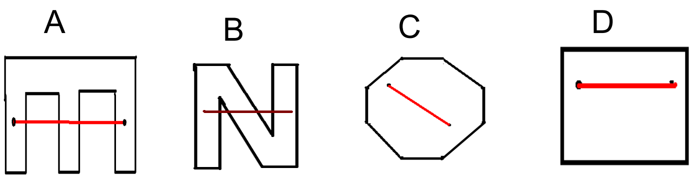


Figura 26 - Polígonos não convexos - Polígonos convexos

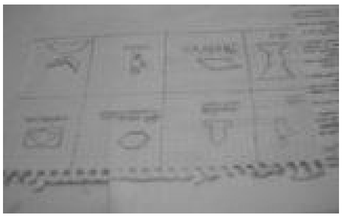
P: *Quais dos polígonos acima são convexos e quais não são*?

C13: *As figuras 26C e 26D são convexas*;

C29: *As figuras 26A e 26B são não convexas.*

Orientamos os alunos para que anotassem as novas informações no caderno e propomos a eles que escolhessem uma das versões das lendas do tangram e recontassem a mesma, por meio de uma história em quadrinhos. Porquanto distribuíamos uma folha de papel quadriculado, orientamos os estudantes que desenhassem a versão escolhida na folha dada. Sugerimos-lhes que relessem a história para ter uma ideia do que iriam fazer e os resultados estão registrados nas fotografias (Fotografias 10 e 11) a seguir:

Fotografia 10 - Caderno de C28



Fotografia 11 - Caderno de C13

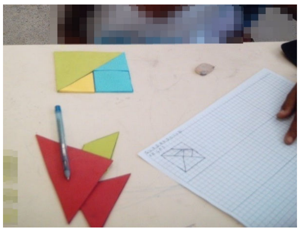
A possibilidade de poder montar as letras do alfabeto utilizando o tangram, empolgou tanto a aluna C25, que ela, depois de ter montado a letra que havia escolhido, resolveu ir de colega em colega e desenhar, no caderno, a letra que eles desenharam. Como algumas letras não haviam sido escolhidas pelos alunos, C25 pesquisou na internet, perguntou aos pesquisadores e, na aula seguinte, trouxe os desenhos equivalentes a todas as letras do alfabeto, montados com as peças do tangram (Fotografia 12).

Fotografia 12 - Alfabeto montado por C25

Do dia 16 de abril a 13 de maio de 2009 realizamos um conjunto de três aulas intituladas de desafios com tangram, nas quais nossos objetivos eram: construir os polígonos indicados pelo pesquisador com um dado número de peças do tangram e mostrar que é possivel compor algumas formas, partindo de polígonos como, por exemplo, triângulos e quadrados. Explicamos as regras da atividade para os estudantes, selecionamos a aula do dia 29 de abril para compor nossas análises, pois foi a aula em que tivemos a maior participação dos alunos e, nela encontramos vários indícios do desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes. Iniciamos a aula, relembrando as regras da tarefa apresentamos-lhes os novos desafios:

I) Construir e depois desenhar, numa folha de papel quadriculado, as figuras geométricas descritas a seguir: um quadrado, um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. Para realizar a atividade, a regra básica era empregar quatro das sete peças do tangram.

Orientamos os estudantes para que escolhessem por quais formas geométricas iriam iniciar a montagem. Curiosamente as duas primeiras figuras que os alunos escolheram para começar a trabalhar e, também as que montaram primeiro, foram, respectivamente, o quadrado (Fotografia 13) e o paralelogramo (Fotografia 14).



Fotografia 14 - Quadrado construído por C25

Fotografia 13 - Paralelogramo construído por C13

Nesta atividade, percebemos que a escolha pelo quadrado (Fotografia 13) pode estar relacionada ao fato de que esta é uma das formas geométricas mais discutidas e analisadas nos livros didáticos e pelos professores. De acordo com Hershkowitz (1989), Fainguelernt e Nunes (2004), os estudantes utilizam-se de formas padrões para avaliarem se uma dada figura se encaixa, ou não, em um modelo. Assim, pensamos que os alunos avaliaram os problemas que lhes foram propostos e decidiram que começar pelo quadrado poderia ser um caminho para concluir a tarefa.

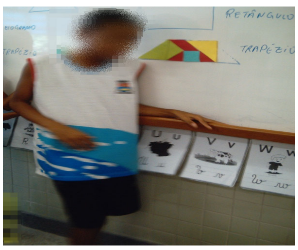
Os alunos sentiram dificuldades em construir o triângulo, utilizando apenas quatro das sete peças do tangram. Depois de algumas tentativas, os estudantes C19 e C12 nos chamaram e mostraram que haviam conseguido montar o triângulo com quatro peças do mesmo tangram (Fotografia 15). Pedimos-lhes que nos explicassem o procedimento que tinham utilizado para vencer esse desafio. Eles nos deram a seguinte resposta:

C12 e C19: *Nós dividimos o quadrado em dois triângulos. Depois prendemos um dos triângulos e tentamos construir o outro sobre o maior lado, não funcionou, e ai nós tentamos no outro, e deu certo*.

Fotografia 15 - Triângulo construído com 4 peças do tangram - C12 e C19

Ao refletir sobre as respostas dadas pelos estudantes C19 e C12, notamos que uma das estratégias empregadas por eles foi dividir o problema em dois, e depois agiram por tentativas e erros até conseguirem construir o triângulo com quatro peças. Referenciando-nos nas pesquisas de Hershkowitz (1989), Fainguelernt e Nunes (2004) podemos afirmar que esses alunos utilizaram-se de protótipos para responderem ao desafio proposto. E, ainda de acordo com a teoria de van Hiele (1957), mostraram-se capazes de identificar, visualmente, um triângulo.

II) Construir e depois desenhar numa folha de papel quadriculado as seguintes figuras geométricas: um quadrado, um retângulo,um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. Para realizar a atividade proposta, a regra básica era trabalhar com todas as sete peças do tangram, sem as sobrepor.



Fotografia 17 - Trapézio construído por C21

Fotografia 16 - Paralelogramo construído por C17

Os estudantes perguntaram se podiam desenhar o paralelogramo numa folha. Entendemos que eles precisavam de um protótipo e respondemos-lhes que podiam. O aluno C17 (Fotografia 17) foi um dos primeiros a terminar a montagem, por essa razão o convidamos para colar o seu paralelogramo no quadro e, explicar o caminho que ele utilizou para construir o polígono. A resposta dada pelo estudante foi a seguinte:

C17: *Eu fiz um desenho do paralelogramo grandão e depois fui colocando as peças do tangram dentro dele até completar a figura*.

Nessa atividade, observamos que a capacidade de reconhecer uma dada forma ou objeto está relacionada à habilidade de identificar as semelhanças e diferenças entre os objetos em estudos. Tal afirmação pode ser confirmada por Fainguelernt e Nunes (2004), pois, segundo as autoras, a capacidade de perceber uma forma ou um objeto é importante para gerar a aprendizagem de conceitos geométricos. E, ainda Senechal (1990) considera descobrir semelhanças e diferenças entre os objetos, analisar os componentes da forma, e reconhecer formas em diferentes representações com sendo umas das habilidades básicas da visualização. Classificação, análise e representação são as nossas ferramentas. São instrumentos importantes na aprendizagem de um conceito em geometria.

No dia 13 de maio de 2009 realizamos a atividade *Últimos desafios do Tangram*. Mais uma vez, dialogamos com os alunos sobre as regras da atividade. Depois das orientações que demos aos estudantes, propusemos-lhes os desafios. O desafio para esta aula era solucionar o problema da construção do trângulo com sete peças. Para tal, resolvemos iniciar a aula pedindo aos alunos que olhassem uma figura desenhada numa folha que lhes foi distribuída e, marcassem nela onde visualizavam um triângulo, ou um quadrado, ou um retângulo ou outro polígono, que já havíamos estudados. Sugerimos também que escrevessem as características que lembravam de cada figura. Relacionamos abaixo as respostas dadas por dois alunos, pois, aceitamo-las como um bom exemplo para as análises e discussões.

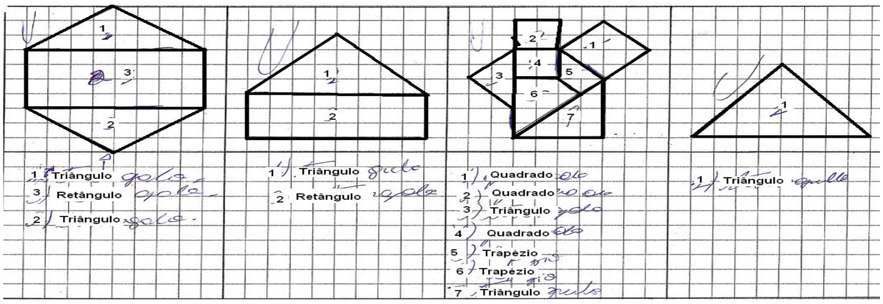


Figura 27 - Desenho do aluno C13

A resposta de C13 (Figura 27) nos mostra que formas geométricas como triângulos, quadrados, retângulos e trapézios são identificadas, visualmente, pelo aluno. Pois, conforme Senechal (1990), para um estudante conseguir reconhecer uma dada forma geométrica, a partir do contorno de outras, é preciso que ele seja capaz de notar diferenças e semelhanças entre os objetos. Em muitos casos, para distinguir semelhanças e diferenças num polígono, é preciso que o educando saiba compor e decompor o polígono analisado.

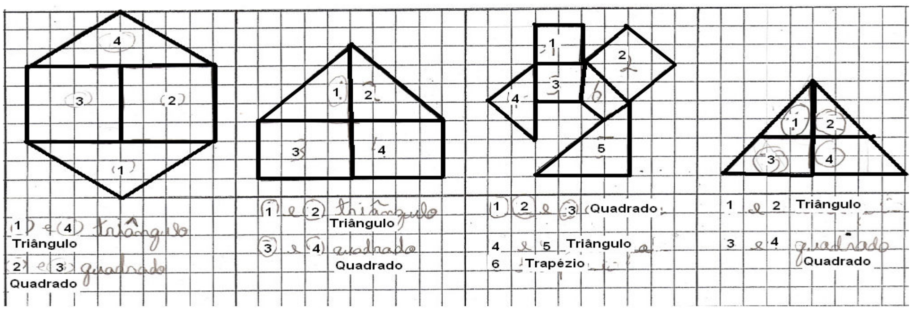


Figura 28 - Desenho da aluna C29

A Figura 28, da aluna C29, mostra que ela visualizou triângulos, retângulos e quadrados dentro das formas dadas. Mas observando as marcações por ela feitas no hexágono e no pentágono, constatamos que ela ainda confunde quadrado e retângulo. O fato nos permite intuir que C29 possui um protótipo de quadrado e que nele se apoia para comparar com os polígonos de quatro lados e, assim, decide se a forma dada é ou não um quadrado. Entretanto, ao tomar como referência Del Grande (1994), PCN (BRASIL, 1998) e Lorenzato (2008), observamos que C29 é capaz de compor e decompor um polígono em triângulos, quadrados, retângulos e pentágonos. Em nosso entendimento e de acordo com os autores acima a habilidade de compor e decompor formas é uma das necessárias para se desenvolver a visualização.

Continuamos a discussão da aula anterior, lembrando-lhes que, após a atividade de reconhecimento visual de uma figura geométrica em um desenho, retomaríamos a construção do triângulo com as sete peças do tangram. Logo que terminamos a frase, C18 perguntou-nos:

C18: *Nós teremos uma dica?*
P: *Sim. E as dicas são.....*

1ª Retire, temporariamente, do conjunto os dois maiores triângulos.
2ª Com as cinco peças restantes, construa um quadrado.
3ª Após construir o quadrado com as cinco peças, gire-o até que se assemelhe a um losango e depois encaixe os dois triângulos grandes na figura, um de cada lado do quadrado.

À medida que discutíamos com a turma as dicas para a construção do triângulo com sete peças, pedimos a um aluno que conferisse se os tangrans estavam completos e, caso não estivessem que ele fizesse a gentileza de organizá-los. Alguns minutos depois de ouvir as dicas, C19 e C13 nos chamaram e disseram que haviam conseguido construir o triângulo (Fotografias 18 e 19). Analisamos a construção deles e reconhecemos que haviam de fato construido o triângulo com as sete peças do tangram. Confirmamos que a construção estava correta e, pedimos-lhes que ajudassem outros colegas.

Fotografia 19 - Triângulo construído por C19

Fotografia 18 - Triângulo construído por C13

Acompanhar os alunos C19 (Fotografia 18) e C13 (Fotografia 19), permitiu-nos perceber a importância da composição e da decomposição no desenvolvimento do raciocinio geométrico, pois, segundo Gutiérrez (1991), Del Grande (1994), PCN (BRASIL,1998) e Lorenzato (2008), compor/decompor figuras geométricas é uma das habilidades necessárias para se desenvolver a visualização. Uma análise minunciosa dessa atividade nos fez evidenciar que aplicamos uma das estratégias sugeridas por Polya (1945/1994), isto é, quando enfrentamos um problema complexo, uma das possibilidades de resolvê-lo é dividindo-o em problemas mais simples. Outra alternativa é verificar se já solucionamos um problema parecido e analisar se as estratégias desenvolvidas nele, podem ser aplicadas em outra situação. Foi possível obsevar que, nesse momento, acabamos por aplicar um dos princípios da teoria vygotskiniana, ou seja, um colega mais experiente pode ajudar na solução ou na compreensão de um problema.

O bloco da sequência didática permitiu-nos concluir que as atividades nele executadas despertaram a curiosidade e o interesse dos estudantes. Por essa razão, resolvemos fazer um comentário sobre a participação daqueles alunos que, estiveram mais envolvidos na atividade. No sexto ano A, os educandos que mais participaram foram: A08, A10, A14, A15, A22 e A24. Analisando as inferências feitas por esses estudantes e tomando com referência os autores van Hiele (1957/1986), Clements e Battista (1982), Hershkowtiz (1989), Crowley (1994), Fainguelernt e Nunes (2004) inferimos que os alunos acima citados deixaram indícios de que já são capazes de reconhecer triângulos, quadrados, retângulos, losangos e decágonos e, em particular, conseguem identificar polígonos convexos e não convexos. Contudo, estudantes como A15, A22 e A24 nos deram pistas de que começam a discernir as características de figuras como triângulos, quadrados, retângulos, decágonos, e estas são estruturas particulares de educandos que estão iniciando o nível de análise.

Entretanto, no sexto ano C, os educandos que mais participaram foram: C19; C14; C13; C12 e C25. Analisando as informações dadas por eles e referenciando-nos novamente em Van Hiele (1957/1986), Clements e Battista (1982), Hershkowtiz (1989), Crowley (1994), Fainguelernt e Nunes (2004) evidenciamos que os educandos citados nos deram pistas de que conseguem identificar, visualmente, triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos e polígonos convexos e não convexos. Os estudantes C12, C14 e C19 apresentaram indícios de que são capazes de discernir algumas características de figuras geométricas como triângulos, quadrados, retângulos, e estas são estruturas particulares de educandos que estão iniciando o nível de análise.

A aluna C25 nos chamou a atenção pelo intenso interesse e motivação nas atividades, envolvendo o tangram. A educanda se motivou tanto com a tarefa que resolveu construir todas letras do alfabeto. Para atingir seu objetivo, ela pesquisou, perguntou aos professores e desenhou as letras que os colegas de sala haviam conseguido montar. Ela é um dos exemplos de que as tarefas do bloco do tangram podem provocar uma motivação intrínseca, que, de acordo com Burochovitch & Bzuneck (2004), sensibiliza o aluno no sentido de que a participação dele na tarefa é a principal recompensa, não sendo necessárias pressões externas, internas ou prêmios por seu cumprimento.

Finalizamos as nossas atividades com o tangram e, nos preparamos para a próxíma sequência didática da nossa pesquisa. Na seção 4.2.3, descreveremos e analisaremos as tarefas relativas ao bloco Trabalhando com o Geoplano.

4.2.3 Sequência Didática: Trabalhando com o Geoplano

A sequência de aulas que selecionamos abaixo, fazem parte do bloco de atividades do trabalho que desenvolvemos com o geoplano. Para nossa análise, escolhemos uma aula no dia 18, duas aulas do dia 20 e uma do dia 25, ambas ministradas em maio de 2009. As atividades foram selecionadas por representarem as atividades com maior participação dos estudantes e por apresentarem muitos indícios de que os alunos são capazes de identificar polígonos. Na nossa aula do dia 18 de maio, intitulada *Aprendendo a trabalhar com o geoplano,* tínhamos o objetivo de: explorar, livremente, as possibilidades do geoplano; trabalhar com a criatividade do aluno; construir no geoplano de malha quadrada, as formas sugeridas pelos pesquisadores; e retomar a discussão sobre polígonos convexos e não convexos. Nessa aula, dialogamos com os alunos sobre a atividade que realizaríamos. Explicamos-lhes quais eram nossos objetivos, e em seguida propusemos-lhes as seguintes questões:

P: *O que vocês lembram sobre polígonos convexos?* Os alunos A 07; A14 e A15 responderam:

A07: *Eu lembro que é algo ligado a polígono.*

A15: *Eu lembro que tem uma reta que passa no polígono.*

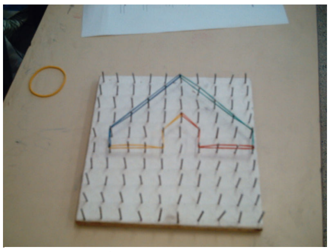
A14: *Eu lembro que um polígono é convexo, quando pego dois pontos dentro dele e desenho uma reta, ligando os dois pontos, e ela não sai de dentro do polígono.*

P: *E se ela tiver parte dentro e parte fora do polígono?*

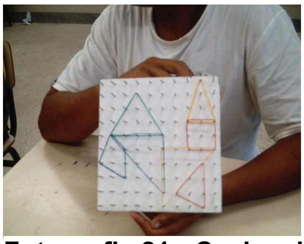
A*14: Ai professor, o polígono é não convexo*!

P: *Alguém quer acrescentar mais alguma informação*?

As respostas dos alunos nos fizeram ver que eles já conseguem identificar polígonos convexos e não convexos. Tomando como referência van Hiele (1957), dizemos que esses alunos ainda estão na fase de reconhecimento visual. Finalizamos o processo, pedindo-lhes que desenhassem alguns polígonos no geoplano ou as formas que a imaginação deles e a quantidade de borrachinhas lhes permitissem. E os resultados encontram-se descritos abaixo.



Fotografia 20 - Igreja construída por A15



Fotografia 21 - Cachorrinho construído por A24

Entre as figuras que os alunos representaram no geoplano, encontramos duas que achamos interessantes. Na primeira figura, o aluno A15 (Fotografia 20) representou, na visão dele, a frente de uma igreja, e fizemos a seguinte pergunta:

P: *Quantos lados, ângulos e vértices tem a figura?*

A15: *10 lados, 10 ângulos e 10 vértices*.

P: *Você sabe o nome de uma figura geométrica que possui 10 lados*?

A15: *Sim, é um decaaa....é um decágono*!

A segunda figura foi feita por A24, e na visão do estudante era um cachorrinho (Fotografia 21).

P: *Quais polígonos você utilizou para compor o cachorrinho*?

A24: *Utilizei cinco triângulos, um quadrado e uma figura de quatro lados*.

P: *Esta figura de quatro lados é um quadrado*?

A24 : *Não*

P: *É um retângulo*!

A24: Não

P: *Então que forma é*?

A24: *É um quadrilátero que eu não sei o nome.*

O fato de ter reconhecido a figura como um quadrilátero já nos deixou satisfeitos. Como a aula já estava nos minutos finais, não tivemos tempo para continuar o diálogo com o aluno.

A primeira atividade com o geoplano nos permitiu perceber que, por meio dele, podemos visualizar os objetos geométricos criados e movimentá-los, transformando-os e conservando suas propriedades. Segundo Schons (2008) por meio do geoplano, temos conhecimento de como os alunos compreendem a geometria, além de propiciar um ambiente interativo para a aprendizagem de níveis mais complexos de pensamento geométrico. Acreditamos que o diálogo com o aluno A24 nos permitu perceber que os estudantes, em particular o próprio aluno, formaram uma imagem mental de um quadrado, de um quadrilátero qualquer e mostraram-se capazes de distinguir um quadrado de um triângulo. Para van Hiele (1957), quando os educandos se mostram capazes de identificar semelhanças e diferenças entre os objetos geométricos, analisar os componentes da forma e reconhecê-la em diferentes representações, dizemos que no tocante à figura dada, os estudantes apresentam fortes indicios de que já estão iniciando um novo nível de desenvolvimento do raciocinio geométrico. Analisando as afirmações dadas por A24, recohecemos que este aluno está iniciando, o nível de análise, pois, é neste nível que os educandos conseguem identificar semelhanças e diferenças, tornando-se capazes de reconhecer um polígono por suas propriedades.

Nas atividades desenvolvidas no dia 18 de maio, tínhamos o objetivo de analisar, se os alunos conseguiam identificar polígonos, em particular, distinguir polígonos convexos de não convexos, e relacionar as características de um figura geométrica com os nomes delas. Observando os desenhos de A15 e A24 (Fotografias 20 e 21), concluímos que esses alunos deixaram pistas de que são capazes de identificar polígonos convexos, não convexos e ainda relacionar características de um polígono com o nome que possui. Nessa atividade percebemos, mais uma vez, que os educandos formaram imagens mentais que correspondem a polígonos como, por exemplos, triângulos, quadrados, retângulos e decágonos.

Sabemos que um educando no nível visual reconhece as figuras geométricas apenas por sua aparência física, e não por suas partes ou propriedades, além de ser capaz de reproduzir uma forma dada, mesmo que esta não esteja no seu campo visual. Todavia nas respostas dadas pelos alunos, A15 e A24, encontramos indicios de que eles são capazes de reconhecer algumas características básicas de um polígono, o que na nossa compreensão já está além da aparência física, isto é, da visualização.

Essa tarefa pode ser uma possibilidade de se trabalhar a percepção visual, isto é, a habilidade de lembrar-se de uma figura que não está mais sob seu campo de visão e a decomposição de campo, isto é enxergar uma determinada figura no contorno de uma outra forma geométrica (Del Grande, 1994). Quando discutimos com o aluno A15 sobre a figura que ele havia construído no geoplano, observamos, nos indícios deixados pelo estudante, que ele era capaz de identificar as características de uma dada forma e havia formado imagens mentais de alguns polígonos, como os mencionados pelo próprio educando.

Para a aula do dia 20 de maio, chamada *reconhecendo poligonos convexos e não convexos* no geoplano de malha quadrada, tínhamos o objetivo de reconhecer polígonos convexos e não convexos no geoplano e construir polígonos convexos e não convexos no geoplano. Na aula, a turma estava bastante agitada, pois tinham acabado de responder a uma prova e, para acalmá-los, resolvemos conversar um pouco com eles sobre as questões da prova e saber se eles tinham feito uma boa avaliação. Após este bate papo, iniciamos o nosso trabalho, fazendo o seguinte pedido aos alunos:

P: *Digam-nos o nome de um polígono convexo.*

A29: *Triângulo*.

A19: *Quadrado, retângulo e trapézio*.

A21: *Octógono.*

P: *Qualquer octógono*?

Após alguns instantes de silêncio, veio a resposta.

A21: *Não é qualquer octógono que é convexo*.

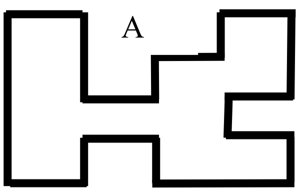
Continuamos a aula, distribuindo para os alunos uma folha com duas questões. Na primeira questão, eles precisariam identificar se uma dada figura era, ou não, polígono e, ainda contar a quantidade de lados da figura geométrica. Já na segunda questão, precisariam reconhecer se um polígono é ou não convexo. Nas duas questões, foi pedido aos estudantes que montassem as figuras no geoplano e depois respondessem às questões. Abaixo, registramos as questões e os resultados que obtivemos em cada questão.

Na primeira questão propusemos aos estudantes que respondessem se a Figura 32 era um polígono. Todas as nove duplas que responderam a essa questão acertaram. As justificativa de A08 e A15 foram as seguintes:

A08 e A15: *É feita por retas e é fechada*.

A08 e A15: *É um polígono não convexo*.

Contudo, a resposta desta dupla nos chamou a atenção, pois respondeu que a Figura 29 era um polígono não convexo e, isto era mais do que esperávamos para essa questão, porquanto trazia pistas de que os alunos eram capazes de identificar se um dado polígono era ou não convexo.



Agora responda às perguntas sobre o desenho A.

a) O desenho ao lado é um polígono?

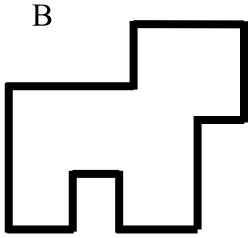
Resposta:______________ por quê?

b) Quantos lados tem o desenho A?

Figura 29 - Polígono não convexo

Nove duplas responderam à questão que se segue, sendo que: sete responderam corretamente, uma dupla não respondeu e outra dupla escreveu que a figura não era um polígono (Figura 30).

B



Agora responda às perguntas sobre o desenho B.
a) O desenho ao lado é um polígono?
Resposta:______________ por quê?

____

b) Quantos lados tem o desenho B?

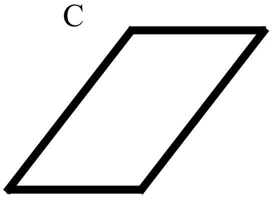
Figura 30 - Cachorrinho - Políg. não convexo

Uma das respostas que nos chamou a atenção foi a dada pela dupla A19-A21:

A19-A21: *Sim. A Figura 30 é feita de retas e é fechada. Tem 12 lados, 12 vértices.*

A resposta da dupla trouxe-nos indícios de que são capazes de identificar polígonos, em particular de 12 lados, e ainda conseguem distinguir um polígono convexo de um não convexo. Os erros cometidos nessa questão foram relativos à contagem dos lados. Outra questão que propusemos aos estudantes encontra-se descrita abaixo

C



Agora responda às perguntas sobre o desenho C.
a) O desenho ao lado é um polígono?
Resposta:______________ porquê?

____

b) Quantos lados tem o desenho C?

Figura 31 - Quadrilátero convexo

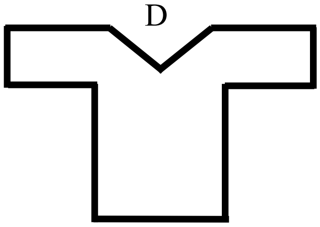
Todas as nove duplas responderam corretamente a essa questão (Figura 31). O que nos mostra que figuras protótipas ou formas geométricas semelhantes a elas são facilmente reconhecidas como polígonos. A resposta da dupla A07-A14 foi:

A07-A14*: Sim, porque ela (Figura 31) é feita por retas, é um paralelogramo. 4 lados e 4 vértices.*

A resposta de A07-A14 deu-nos pistas de que eles são capazes de reconhecer o paralelogramo, e ainda conseguem identificar algumas características como, lados e vértices, de um polígono de quatro lados.

Na questão seguinte, ainda estávamos interessados em analisar se os estudantes conseguiam reconhecer um polígono convexo. Para tal, pedimos aos alunos que utilizassem as borrachinhas para montar, no geoplano, os polígonos que estavam desenhados na folha de papel quadriculado (Figuras 32, 33 e 34). Escolhemos três itens da questão para expressar nossos comentários, pois, no nosso entendimento esses itens representam, neste momento, da pesquisa, o que desejávamos analisar.

D



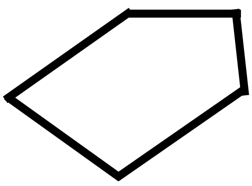
A forma D é um polígono? ________
Por quê?________________________

Figura 32 - Camisa polígono não convexo

A08-A15: *O polígono não é convexo (Figura 32). Liguei dois pontos dentro dele, e o segmento de reta saiu dele.*

O diálogo com a dupla A08-A15 trouxe-nos pistas de que eles são capazes de identificar um polígono não convexo (Figura 32).

E



Agora responda às perguntas sobre o desenho E.
a) O desenho ao lado é um polígono?
Resposta:_______________ por quê?
____

b) Quantos lados tem o desenho E?

Figura 33 - Pentágono convexo

A19-A21: *É convexo. Porque se ligar dois pontos dentro do polígono, a reta não sai de dentro dele (Figura 33).*

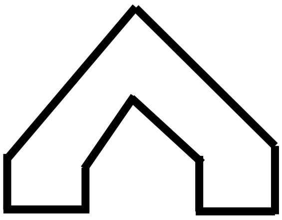
A18-A22: *O polígono é convexo (Figura 33). Eu testei.*

P: *Como você fez o teste?*

A18-A22: *Escolhi dois pontos dentro do polígono e liguei eles.*

As duplas A19-A21 e A18-A22 trouxeram-nos indícios de que eles conseguem distinguir um póligono convexo de um não convexo.

F



Agora responda às perguntas sobre o desenho F.
a) O desenho ao lado é um polígono?
Resposta:______________ por quê?

____

b) Quantos lados tem o desenho F?

Figura 34 - Frente da igreja - Polígono não convexo

A24-A29: *A figura não é convexa. Eu liguei dois pontos e a reta entrou e saiu da figura (Figura 34).*
A18 e A22: *Não. Eu liguei dois pontos dentro dele e a reta entrou e saiu da figura (Figura 34).*

As respostas das duplas nos mostraram que eles conseguem identificar polígono não convexo. Após o trabalho no papel, sugerimos aos estudantes que fizessem o mesmo desenho no geoplano e, em seguida, perguntamos-lhes:

P: *Utilizando o geoplano como faríamos para mostrar que um polígono não é convexo?*
A14: *No papel, eu marcaria dois pontos dentro da figura e depois ligaria os dois pontos se a reta saisse da figura, o polígono seria não convexo e se ela não saisse seria convexo.*
P: *Gostamos da sua idéia e como nós poderíamos fazer para desenhar esta reta no geoplano?*

Por alguns minutos, a turma ficou em silêncio. Quebramos o silêncio com a seguinte dica:

P: *E se substituíssemos a reta do desenho por uma borrachina no geoplano*
O resultado da dica está exemplificado na Fotografia 22 abaixo:

Fotografia 22 - Polígonos não convexos construídos no geoplano

Na nossa análise da aula do dia 20 de maio, concluímos pelos indicios deixados pelos estudantes que eles conseguem reconhecer polígonos e ainda são capazes de identificar características como ângulos, lados e vértices de uma dada forma geométrica. Os alunos também mostraram que conseguem diferenciar um polígono convexo de um não convexo. Tomando com referência van Hiele constatamos que os educandos são capazes de identificar, visualmente, um dado polígono.

De acordo com este mesmo autor e as pistas deixadas pelos estudantes A14, A19, A21 e A29, afirmamos que, em se tratando de triângulos, retângulos e trapézios esses alunos já apresentam características de estudantes que estão iniciando o nível de análise do modelo van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Demos continuidade à aula do dia 25 de maio, pois nosso planejamento para ela era de construir segmentos de retas paralelas e segmentos de retas perpendiculares no geoplano de malha quadriculada. Nesta atividade, dialogamos com os alunos sobre retas paralelas e perpendiculares. Nossa primeira pergunta para os estudante foi:

P: *Vocês sabem nos dizer como identificamos um par de retas paralelas?*
A21: *Duas retas que não se encontram nunca*.
P: *Você pode nos dizer o nome de um polígono que possui um par de lados paralelos?*
A21: *Um hexágono*. A resposta dele nos surpreendeu.

Desenhamos um hexágono (regular) no quadro e pedimos ao aluno A21 para nos mostrar o par de lados que estavam sobre as retas paralelas, que ele estava vendo na figura desenhada (Figura 35).

P: Onde você vê um par de lados que estão sobre paralelas nesta figura ?

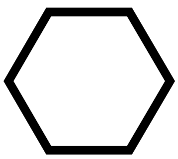


Figura 35 - Hexágono

O aluno A21 marcou, no hexágono, os pares de lados que pensava serem paralelos (Figura 36).

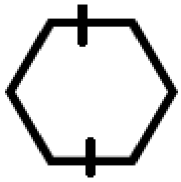


Figura 36 - Segmentos de retas paralelas do hexágono

A21: *A reta de cima e a de baixo são paralelas*.

P: *Você acha que existe mais algum par de segmentos de retas paralelas no hexágono (Figura 36)*?

A21: *Sim, tem*. Mal terminou de nos responder, foi logo marcando os segmentos de reta que ele entendia como sendo paralelos (Figura 37).

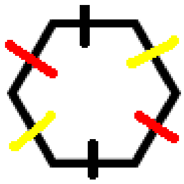


Figura 37 - Lados paralelos no hexágono

A justificativa do aluno nos chamou a atenção e ele afirmou o seguinte:

A21: *Se eu girar o hexágono, os lados marcados de vermelho ficarão no lugar dos marcados de preto, e como eles são paralelos, eu acho que as vermelhas também serão (Figura 37).*

No exemplo apresentado pelo estudante A21, encontramos pistas de que, além de reconhecer, visualmente, o hexágono, ele ainda é capaz de visualizar lados paralelos imersos no referido polígono. No nosso entendimento, isto é um indício de que esse aluno está desenvolvendo estratégias do nível de análise que, na metodologia de van Hiele, é o nível, imediatamente, superior ao reconhecimento visual.

Seguindo o exemplo dado por A21, outros alunos citaram polígonos, como por exemplo, quadrado, retângulo e octógono. Outra resposta que nos chamou a atenção foi a do aluno A28:

A28: *O trapézio*. Aproveitamos a citação de A28 e desenhamos no quadro os trapézios abaixo (Figura 38):

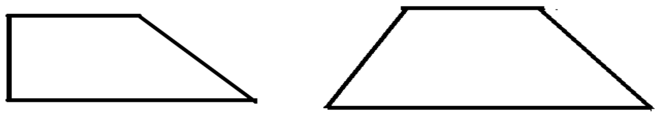


Figura 38 - Trapézios

Após desenhá-los, pedimos a A28 que nos mostrassem onde ele viu lados paralelos no trapézio.

A28: O lado *de cima é paralelo ao de baixo*.

Marcamos os dois lados referenciados (Figura 39) por ele e perguntamos-lhe:

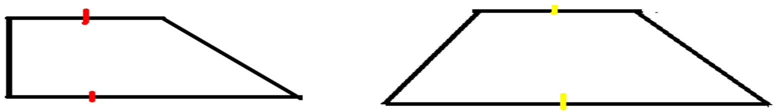


Figura 39 - Lados paralelos nos trapézios

P*: São estes lados a que você está se referindo (Figura 39)*?
A28: *Sim*.

Observando o exemplo dado pelo aluno A28, encontramos dados que nos levam a crer que, além de reconhecer, visualmente, um trapézio, ele consegue visualizar lados paralelos no polígono. Entendemos que esse fato indica que o aluno está desenvolvendo estratégias do nível de análise.

Retornamos à discussão sobre os lados paralelos do hexágono e mostramos, por meio de um desenho (Figura 40), aos alunos que nem todo hexágono tem lados paralelos.

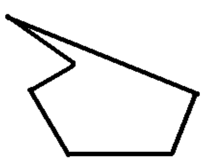


Figura 40 - Hexágono não convexo

Continuamos a conversa com a turma perguntando-lhes o seguinte:

P: *Este hexágono (Figura 40) é convexo ou não convexo*?
A02, A05, A16 e A20: *É convexo*.
A14, A15, A21 e A28: *Ele é não convexo*. Percebendo que havia uma dúvida, voltamos-nos para o grupo composto por A02, A05, A16 e A20 e perguntamos:

P: *Por que vocês acham que este polígono é convexo (Figura 40)?*
A02: *Todas as retas que desenhei dentro do polígono não saíram de dentro dele*.

Perguntamos se os demais componentes do grupo (A05, A16 e A20) concordavam com A02 ou se queriam acrescentar mais alguma coisa, responderam que não desejavam acrescentar nada ao que foi dito pelo colega. Voltamo-nos para o grupo e pedimos lhes:

P: *Justifiquem a resposta que vocês deram.*
A14: Eu encontrei um segmento de reta neste polígono que começa dentro dele, depois sai e retorna pra dentro. E, em seguida, marcou o referido segmento de reta no desenho (Figura 41).

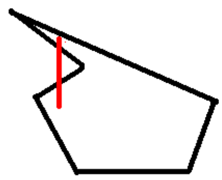
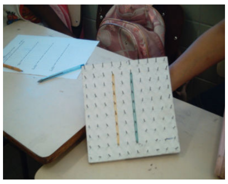


Figura 41 - Hexágono não convexo

Ter proporcionado aos dois grupos momentos para exporem suas opiniões, nos mostrou que a interação entre pares também era um caminho para permitir a troca de ideias entre os alunos e, uma oportunidade para que eles pudessem fazer um sumário do que haviam aprendido. Estávamos outra vez usando as ideias de Vygotsky sobre o papel da interação. Finalizamos a discussão, mostrando para os alunos que bastava um segmento de reta começar dentro da figura, sair dela e depois terminar dentro dela para que o polígono fosse considerado como não convexo. Em seguida, distribuimos uma folha de pesquisa com as seguintes questões:

1) Construir, no geoplano e depois desenhar no espaço abaixo, um par de

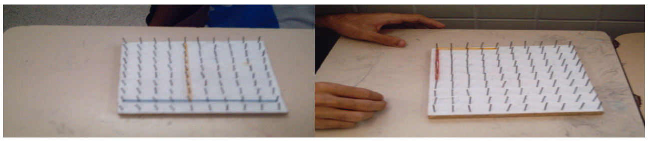
segmentos de retas que sejam paralelos (Fotografia 23).



Fotografia 23 - Segmentos de retas paralelas - A21

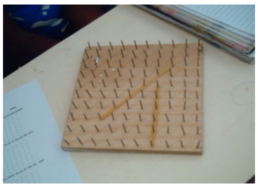
No exercício seguinte, pedimos aos estudantes que realizassem a tarefa:

2) Construir, no geoplano e depois desenhar, na folha que havíamos distribuído, um par de segmentos de retas que fossem perpendiculares.



Fotografia 24 - Segmentos de retas perpendiculares - A14 e A27

Na nossa terceira tarefa, pedimos aos alunos que construíssem, no geoplano e depois desenhassem, na folha distribuída, um par de segmentos de retas que não fossem nem perpendiculares e nem paralelos.



Fotografia 25 - Segmentos de retas concorrentes - A21

Ao analisar as respostas dadas pelos alunos, encontramos pistas do que eles conseguem identificar segmentos de retas paralelas e, ainda pelos indícios deixados, os estudantes podem ser capazes de distinguir segmentos de retas paralelas das não paralelas num dado polígono. Tomando como referência van Hiele, supomos que os estudantes são capazes de identificar, visualmente, segmentos de retas paralelas. Na atividade em que dialogamos com os alunos sobre polígono convexo e não convexo, percebemos que os estudantes já assimilaram o procedimento para verificar se um dado polígono é convexo e o utilizam sempre que desejam analisar se um polígono é não convexo.

Ao observar, minuciosamente, as tarefas da segunda atividade desta aula, notamos que os exercicios propostos aos alunos exigiam que eles construíssem segmentos de retas paralelas no geoplano, pois, no nosso entendimento se eles conseguissem realizar a tarefa, poderíamos dizer que eles também eram capazes de reconhecer, visualmente, tais tipos de retas. Essa tarefa nos mostrou a potencialidade do geoplano para o trabalho com polígonos e que os alunos já possuem algumas estratégias que os permitem identificar segmentos de retas paralelas.

Iniciamos nossas atividades do bloco do Geoplano, no sexto ano C, no dia 18 de maio de 2009. Os objetivos que definimos para o trabalho com esse grupo eram os mesmos que aplicamos no bloco do geoplano, no sexto ano A. Assim como fizemos no sexto ano A, resolvemos dividir a tarefa em dois momentos. No primeiro, conversamos com os alunos sobre a atividade e no segundo, enfrentamos o desafio de construir formas geométricas no geoplano quadrado. A seguir descreveremos os fatos que ocorreram nessa atividade e vamos analisar os mesmos.

Falamos com a turma sobre o geoplano quadrado e discutimos as regras para se trabalhar com o instrumento. Informamos-lhes que cada dupla receberia um conjunto com 5 borrachinhas, sendo: duas amarelas, uma azul, uma verde e uma vermelha e que este material deveria ser devolvido no final da atividade. Assim que terminamos a distribuição do material, questionamos os alunos:

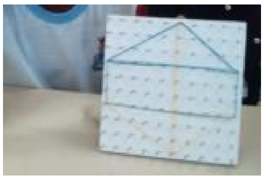
P: *Quantos pregos utilizamos no geoplano que está com vocês*?
C18 e C19: *São 100 pregos*.
P: *Vocês concordam com a resposta de C19 e C18*?
Turma: *Sim*.
P: *C19 e C18 expliquem como vocês procederam para chegar a este resultado.* A explicação dada foi a seguinte:
C19: *Contei o total de linha e depois o total de pregos por linha e assim multipliquei os totais e deu 100.*
C18: *Eu contei a primeira linha e deu dez. Depois contei o total de linhas, deu dez. Depois fiz o seguinte juntei os dez pregos da primeira linha com os segunda, com dez da terceira, e fui juntando até a décima linha e assim obtive o total de 100 pregos.*

Nas respostas destes dois alunos podemos perceber que eles apresentam indicios de que já é possível desenvolver atividades, nas quais seja necessário o cálculo de áreas de polígonos como quadrado e retângulo.

Voltamos-nos para a turma e fizemos a seguinte pergunta:

P: *Se forem preparados 22 geoplanos e cada um deles tiver 100 pregos, juntando todos os geoplanos quantos pregos utilizamos*?
C20: *Eu multipliquei 22 por 100 e aí vi que foram usados 2200 pregos*.

Finalizando essa parte pedimos aos alunos que seguissem as orientações dadas na folha de atividades que tínhamos distribuido e apresentamos fotos das atividades criativas realizadas pelos alunos (Fotografia 26 e 27).



Fotografia 26 - Pipas construídas no geoplano - C07

Perguntamos ao aluno o que havia desenhado, e a resposta dele foi:

C07: *Eu fiz uma pipa*.
P: *Você sabe nos dizer quais são as figuras geométricas que há na sua pipa*?
C07: *Tenho quatro triângulos, dois retângulos e um hexágono*.
Outro educando que apresentou sua obra de arte foi o aluno C18.
P: *C18, diga-nos o que você desenhou*?
C18: *Eu fiz uma máscara*.

Fotografia 27 - Máscara - C18

P: *Você poderia nos dizer quais são as figuras geométricas que há na sua máscara?*

C18: *Tenho quadriláteros* .

Observando a estratégia que C19 e C18 se apoiaram para resolver o problema da contagem da quantidade de pregos do geoplano, esclarecemos que um deles empregou a estratégia de contar o total de pregos de uma linha e o total de linhas, em seguida multiplicou os totais entre si, que é o procedimento aplicado para se calcular área. O segundo utilizou o princípio aditivo que se aproxima muito da multiplicação. Já C20 empregou um princípio da multiplicação, ou seja multiplicou o total de geoplanos pelo total de pregos de cada geoplano. Nessa atividade, observamos também que C07 é capaz de reconhecer, visualmente, os retângulos e os triângulos. Já C18 consegue reconhecer que uma dada figura de 4 lados é um quadrilátero, que, no nosso entendimento, pode ser visto como o início do nível de análise.

No dia 20 de maio de 2009, realizamos uma atividade intitulada *Aprendendo a trabalhar com o geoplano.* Para essa atividade, os nossos objetivos eram: Explorar livremente as possibilidades do geoplano; trabalhar com a criatividade do aluno; construir, no geoplano de malha quadrada, as formas sugeridas pelo pesquisador; retomar a discussão sobre polígonos convexos e não convexos. Dividimos a tarefa em dois momentos. No primeiro, dialogando com os alunos sobre a atividade e, no segundo, enfrentando o desafio de construir formas geométricas no geoplano quadrado. Iniciamos a aula conversando com os alunos sobre a atividade que realizaríamos, quais eram nossos objetivos. Para iniciar um debate com os estudantes, propusemos as seguintes questões:

P: *O que vocês lembram sobre polígonos convexos*?
C29: *Eu lembro que polígono convexo é quadrado, triângulo e retângulo*.
P: *De fato. Os polígonos que você citou são convexos, mas o que queremos saber é o seguinte: Como podemos reconhecer se um polígono é convexo*?
C04: *Eu lembro que tem uma reta que passa no polígono*
C19: *Um polígono é convexo, quando desenho uma reta dentro dele e ela não sai de dentro do polígono*.
P: *E se ela tiver parte dentro e parte fora do polígono*?
C19: *Ai ele é não convexo*!
P: *Vocês têm mais alguma coisa a acrescentar*?

Turma: *Não*.

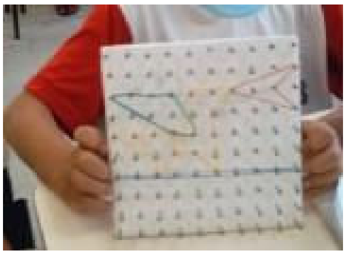
No dia 25 de maio, dialogamos com os alunos sobre a quantidade de lados de um polígono. Foi o momento em que conversávamos com os estudantes sobre a contagem de lados de um polígono e que esta também podia ser uma forma de nomeá-los. E, o aluno C19 nos fez a seguinte pergunta:

C19: *Qual é o nome de um polígono com 25 lados?*
P: *Poligono de vinte e cinco lados.*
C19: *Um polígono de cinco lados é chamado pentágono e um de seis lados é hexágono?*

Sem uma resposta convincente no momento resolvemos responder-lhe: *Vamos pesquisar e depois lhe responderemos*.

Ao analisar o questionamento do aluno, percebemos que estávamos diante do seguinte problema: como nomear um polígono com mais de vinte e cinco lados?. Tal problema trouxe-nos interesse e motivação para desenvolvermos uma pesquisa sobre isto. O resultado dessa investigação foi tal qual a relatada no capitulo dois, sob o título de uma breve contextualização sobre polígonos. Nesse episódio, comprovamos o que Santos-Wagner (2008) disse a respeito dos fatores que podem ter influências no processo de resolução de problemas, entre os quais ela cita: fatores de experiência tanto de contexto quanto pessoais; afetivos tais como interesse, motivação, pressão, ansiedade e cognitivos como prontidão de leitura, de raciocínio, habilidades computacionais e assim por diante. Foram, exatamente, fatores como os apresentados por Santos-Wagner (2008) que nos impulsionaram a pesquisar sobre a forma de nomear polígonos. Registramos, nesse episódio, que, em muitos casos, os alunos também podem nos propor problemas interessantes e que exigirão do professor um trabalho de investigação, elaboração de estratégias, execução das mesmas e, finalmente, a verificação das soluções encontradas.

Finalizamos o processo, dizendo à turma que desenhasse alguns polígonos no geoplano ou as formas que a imaginação deles e a quantidade de borrachinhas lhes permitissem. Vejam alguns resultados na Fotografia 28.



Fotografia 28 - Atividade de C21

Analisando essa atividade, notamos pelas pistas deixadas pelos alunos que eles já são capazes de reconhecer, visualmente, se um dado polígono é convexo e, em algumas situações já conseguem até argumentar para defender a ideia de convexo e não convexo para uma determinada figura. As atividades desenvolvidas neste bloco e a pesquisa feita por Schons (2008) nos permitiram compreender que, com o geoplano, podemos criar figuras geométricas, estabelecer relações entre as mesmas, e ainda desenvolver no aluno a autoconfiança e a autonomia necessárias para criar e resolver situações matemáticas. Outro ponto importante em nossa análise foi o problema proposto por C19, quando nos questionou sobre o nome dado a um polígono de 25 lados. Esta questão foi interessante porque representou para nós um desafio, além de nos mostrar que, quando damos liberdade para os estudantes exporem suas ideias e observações, podem surgir interessantes problemas de pesquisa.

No dia 25 de maio de 2009, realizamos uma atividade intitulada *Contruindo retas paralelas e perpendiculares no geoplano de malha quadrada*. Para esta atividade, os nossos objetivos eram: Construir segmentos de retas paralelas no geoplano de malha quadriculada; construir diferentes poligonos no geoplano de malha quadriculada; reconhecer polígonos convexos e não convexos no geoplano; construir polígonos convexos e não convexos no geoplano. Dividimos a tarefa em dois momentos no primeiro, conversamos com os alunos sobre a atividade; e, no segundo, distribuimos o material para realização das tarefas. No início da aula respondemos à pergunta que C19 havia feito na aula do dia 20 e mostramos como podemos nomear polígonos, com quantidade de lados superior a vinte lados. Nessa aula, dialogamos com os alunos sobre segmentos de retas paralelas, retas paralelas, segmentos de retas perpendiculares, e retas perpendiculares. Começamos a atividade, perguntando aos estudantes:

P: *Vocês sabem o que são retas paralelas*?

C19: *São duas retas que estão sempre juntas e nunca se encontram*.
P: *O que você quer dizer com estão sempre juntas e nunca se encontram?*
C19: *É como uma linha de trem*.

Entendemos na justificativa dele que se referia ao fato de que retas paralelas não possuem pontos em comum e, ainda estão sempre mantendo uma mesma distância entre elas. Procurando saber o que os alunos sabiam sobre retas paralelas e, ao mesmo tempo, analisar se eles as identificavam em algum polígono, questionamos-lhes:

P: *Vocês lembram de algum polígono que tenha um par de lados paralelos*.
C29: *O triângulo!?*

Observamos na expressão facial de C29 que, ao mesmo tempo, em que exclamava, na certeza de que estava correta, deixava a impressão de que estava querendo perguntar. Aproveitamos a fala de certeza-duvidosa de C29, desenhamos no quadro um triângulo, e fizemos os seguintes pedidos:

P: *Mostrem-nos quais são os lados paralelos que existiam no triângulo*.

Antes que ele se pronunicasse, o aluno C19 exclamou:

C19: *Professor, o triângulo não tem lados paralelos*!

Este fato foi a dica para C29 desistir da tentativa e voltar atrás, dizendo que havia errado. Outra resposta que ouvimos sobre polígono com par de lados paraelos foi a de C18.

C18: *Um quadrado*!

Desenhamos no quadro um quadrado, e em seguida fizemos o seguinte pedido para C18.

P: *Mostre-nos qual é o par de segmentos de retas paralelas que existe neste quadrado?*.
C18: *A reta de cima e a de baixo* (Figura 42)

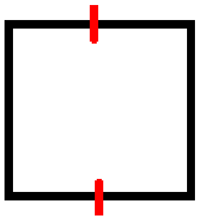


Figura 42 - Segmentos de retas paralelas no quadrado

Marcamos os segmentos de retas que C18 havia citado e perguntamos-lhe:

P: *Você saberia nos dizer se o quadrado possui outro par de segmentos de retas paralelas*?

C18: *Sim*.

P: *Qual é o outro par de segmento de retas paralelas*?

C18: O *segmento de reta do lado esquerdo e o do lado direito*.

Mais uma vez marcamos os segmentos e perguntamos-lhe:

P: *Marcamos os segmentos certos?*.

C18: *Sim:*

P: *Turma vocês conhecem outros exemplos que possuem segmentos de retas paralelas?*

C13*: Sim, o retângulo!*

C19: *Sim, o trapézio!*

Desenhamos um trapézio no quadro e, sem dizer o nome do polígono, perguntamos-lhe: P: *Esta figura (Figura 43) é um trapézio?*

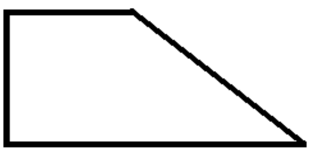


Figura 43 - Reconhecendo o trapézio

C19: *Sim, a figura desenhada é um trapézio.*

P: *Já que esta figura é um trapézio, então diga-nos quais são os lados paralelos?*

Entregamos-lhe um pincel e pedimos ao aluno que marcasse os lados paralelos. O estudante C19 foi ao quadro e marcou as bases do *trapézio* e disse:

C19: *Estes são os lados paralelos.*

P: *O trapézio possui mais algum lado que é paralelo?* O aluno olhou para a figura, pensou por alguns instantes e respondeu:

C19: *Não há mais lados paralelos*.

Como nossa curiosidade persistia, resolvemos desenhar um novo trapézio no quadro (Figura 44), e reiniciamos o questionamento.

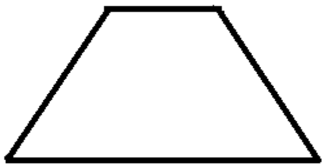


Figura 44 - Reconhecendo o trapézio isósceles

P: *Qual é o nome desta figura?*

C19: *Trapézio!*

P: *Há algum lado paralelo neste tipo de trapézio (Figura 44)?*

C19: *Sim, existe.*

P: *Você tem certeza?*

C19: *Sim, tenho*.

P: *Já que você afirmar existir lados paralelos no trapézio, diga-nos quais são?*

C19: *O lado de cima e o de baixo*. (Veja as marcas feitas na Figura 45.)

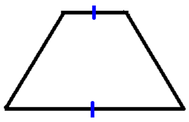


Figura 45 - Lados paralelos no trapézio

No diálogo com C19, encontramos pistas de que este aluno já reconhece retas paralelas e ainda é capaz de identificar, visualmente, polígonos como o tapézio. Referenciando-nos em van Hiele (1957; 1986), Clements e Battista (1992), e Kaleff (1994) podemos dizer que C19 nos dá pistas que está iniciando o nível de análise. Além de C19, o aluno C29 nos deu a seguinte resposta:

C29: *O quadrilátero também tem lados paralelos*.

P: *Você tem razão, mas será que todos os quadriláteros possuem lados paralelos?*

C29: *.Euuu...eu... acho que sim*.

Desenhamos a figura abaixo no quadro e perguntamos :

P: *Esta figura (Figura 46) é um quadrilátero?*

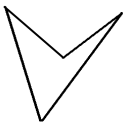


Figura 46 - Quadrilátero não convexo

Alguns segundos de silêncio, C19 respondeu:

C19: *É um quadrilátero (Figura 46)*.

P: *Você tem certeza?*

C19: *Tenho sim, pois a figura é fechada e possui quatro lados.*

P: *Existe algum par de lados paralelos no quadrilátero desenhado?*

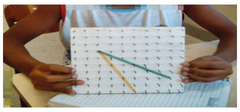
C29: *Não existe lados paralelos nesta figura (Figura 46)* .

P: *Como poderíamos ter certeza de que não há lados paralelos?* C19 se antecipa ao colega e responde o seguinte:

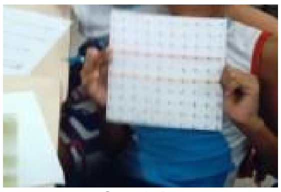
C19: *A abertura entre os lados não era igual e para ser paralelo a abertura devia ser igual*.

Entendemos que ele queria dizer que a distância entre os dois lados mantinha-se constante. Após esta conversa com os alunos, pedimos-lhes que utilizassem as borrachinhas que havíamos distribuidos para construirem, no geoplano, os seguintes pares de segmentos de retas: um par de segmentos de retas paralelas, um par de segmentos que não fossem paralelos e um par de segmentos de retas perpendiculares. As Fotografias 29, 30, 31 e 32 mostram os alunos, respondendo às questões propostas pelos pesquisadores. Nas fotografias 30 e 31 abaixo os alunos C18 e C13 estão mostrando os segmentos de retas paralelas que conseguiram construir, utilizando o geoplano e duas borrachinhas coloridas.

As fotografias 29 e 32 mostram os estudantes C17 e C23, exibindo suas construções no geoplano.

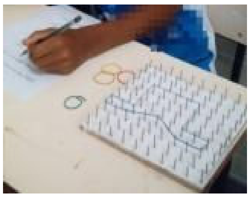


Fotografia 32 - Concorrentes - C17



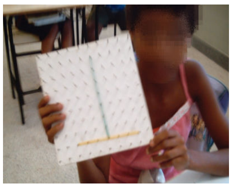
Fotografia 31 - Retas paralelas - C18

Fotografia 30 - Retas paralelas - C13

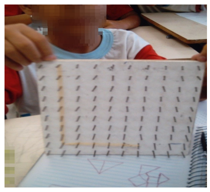


Fotografia 29 – Atividade de C23

Nas fotografias abaixo, os estudantes C23 e C25. exibem os segmentos de retas pependiculares que conseguiram construir no geoplano, utilizando borrachinhas coloridas e o geoplano de malha quadrada.



Fotografia 34 - Segmentos de retas perpendiculares - C25



Fotografia 33 - Segmentos de retas perpendiculares - C23

Analisando as atividades desta tarefa percebemos, pelas pistas deixadas pelos alunos, que eles reconhecem segmentos de retas paralelas, retas paralelas, segmentos de retas perpendiculares e retas perpendiculares. De acordo com Lorenzato (2008), a memória visual é uma das habilidades necessárias à percepção espacial, e os indícios nos mostram que os estudantes estão desenvolvendo esta habilidade, pois, quando pedimos aos alunos que representassem, no geoplano, um par de segmentos de retas paralelas, um par de segmentos de retas perpendiculares e um par de segmentos de retas que não fossem perpendiculares nem paralelas, estávamos levando-os a exercitar a memória visual. No entanto, no momento em que lhes foi solicitado que identificassem segmentos de retas paralelas e segmentos de retas perpendiculares no desenho de uma figura geométrica estávamos, na prática, exercitando a discriminação visual. Pois os alunos precisam mobilizar a capacidade de comparar a imagem mental de segmentos de retas paralelas ou de retas perpendiculares que possuíam e compará-las com os segmentos de retas, que são os lados desenhados no polígono.

Outro ponto interessante nessas aulas, foi o fato de que propusemos aos estudantes um problema: encontrar polígonos que possuam lados paralelos e/ou perpendiculares. E isto exigiu, de certa forma, que os alunos compreendessem o que lhes foi solicitado, comparassem a imagem mental de segmentos de retas paralelas que possuíam com os lados componentes de cada polígono. Neste momento eles de fato estavam executando um plano e simultaneamente verificando se a resposta encontrada por eles correspondia à solução do problema proposto. Além disso, as atividades desenvolvidas no bloco do geoplano nos deram indícios de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes. Por essa razão, decidimos fazer um comentário sobre a participação dos educandos que, no nosso entendimento, estiveram mais envolvidos na atividade. Entre os alunos do sexto ano A, os que mais se envolveram nas atividades são: A14, A15, A21; A24 e A28**.** E, do sexto ano C, foram: C18; C19; e C29. A seguir, apresentamos nossa análise das atividades desenvolvidas por estes alunos do sexto ano A e do sexto ano C.

Uma observação minuciosa das inferências realizadas pelos alunos e referenciando-nos em van Hiele (1957/1986), Clements e Battista (1992), Hershkowtiz (1989), Crowley (1994), Fainguelernt e Nunes (2004) e Schons (2008), podemos concluir que os alunos A14; A15; A21; A24 e A28 deixaram indícios de que conseguem reconhecer triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, octógonos, polígonos convexos e não convexos, retas paralelas, perpendiculares e concorrentes. Os alunos A15 e A24 deixaram-nos convictos de que são capazes de discernir as características de figuras como, quadrilátero, e ainda conseguem identificar retas paralelas, perpendiculares e concorrentes, e estas, na nossa compreensão, são estruturas, de educandos que estão iniciando o nível de análise.

Importa registrar, também que, no sexto ano C, os educandos que mais participaram foram: C18; C19; e C29. Analisando as informações dadas por esses alunos, encontramos pistas de que eles conseguem identificar, visualmente, polígonos como triângulos, quadrados, retângulos e polígonos convexos e não convexos. Outro indício que as respostas de C18, C19 e C29 nos trouxe foi que os educandos citados são capazes de reconhecer, visualmente, se um dado paralegramo possui lados paralelos e/ou perpendiculares. Assim, pensamos que estudantes como, por exemplo, C18, C19 e C29 apresentaram indícios de que são capazes de discernir algumas características das figuras geométricas. E, em nossa opinião, essas são estruturas particulares de educandos que estão iniciando o nível de análise.

Uma análise minuciosa das atividades que desenvolvemos neste bloco e uma leitura na pesquisa feita por Schons (2008) nos mostraram que geoplano é um recurso didático dinâmico e manipulativo, por meio do qual é possível construir, movimentar e desconstruir formas geométricas, além de contribuir para explorar problemas algébricos, geométricos e, ainda nos permite levantar hipóteses. Além disso, por meio do geoplano, trabalhamos com tarefas que podem auxiliar no desenvolvimento das habilidades de percepção espacial, comparação, discriminação, simetria, reflexão, rotação, translação, perímetro e área (Ripplinger, 2006). Tomando com referência a pesquisa de Schons (2008), concluímos que o recurso oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes e registramos que esse recurso serviu como um estímulo à criatividade dos estudantes, além de, proporcionar uma possibilidade de aprender de maneira agradável e divertida.

Começamos uma nova sequência de atividades, com outro recurso didático que foi chamado de construção da pipa. As tarefas dessa fase tiveram o seu início em 29 de julho e terminaram em 26 de agosto. Nessa parte da pesquisa, faremos uma descrição e as respectivas análises das tarefas que fizeram parte da terceira etapa da investigação.

4.2.4 Sequência Didática: Trabalhando com Pipas

As atividades, deste bloco, iniciaram-se em 29 de julho e encerraram-se em 29 de agosto de 2009. Durante esse período foram ministradas cinco aulas de cinquenta minutos cada uma, as quais tínham como objetivos analisar as formas geometricas contidas na construção do brinquedo e identificar os polígonos que existem nas pipas. O grupo de aulas foi distribuído da seguinte forma: uma para a história das pipas, uma conversando sobre os perigos que estão envolvidos na brincadeira e três para construção de dois modelos de pipas e da rabiola. Calculando que, na construção de pipas, necessitaríamos realizar tarefas, as quais se tornariam mais fáceis se fossem feitas com a ajuda de outro colega, resolvemos dividir a turma em grupos de dois alunos. Combinamos com os alunos que cada dupla teria um conjunto de cinco varetas de bambu, seis metros de linha nº 10 e uma folha de papel de seda para duas duplas, uma tesoura por dupla e a cola seria de uso coletivo. Organizadas as atividades era a hora de partirmos para a parte prática do trabalho.

O conjunto de aulas que escolhemos para compor este relatório foram as aulas dos dias 05, 13 e 19 de agosto de 2009. Na nossa aula do dia 05 de agosto, intitulada *Conhecendo e explorando pipas*, dialogamos com os estudantes sobre a história das pipas e os perigos envolvidos no ato de soltá-las.

Para introduzir a aula do sexto ano A, do dia 05 de agosto, partimos do questionamento:

P: *Levanta a mão quem sabe construir pipas*?

A resposta à pergunta nos causou uma surpresa, pois, esperávamos que, pelo menos os meninos, da turma soubessem construir pipas e, surpreendentemente, apenas três deles levantaram a mão, confirmando que sabiam construi-las. Entre as meninas duas disseram que sabiam construir o brinquedo.

P: V*ocês sabem quais são os perigos de se soltar raias?*

Um resumo das respostas dadas pelos estudantes encontra-se registrado abaixo:

- O uso do cerol – os alunos lembraram de reportagens e histórias que eles viram/ouviram sobre o uso do cerol. Entre estas histórias, citaram um colega que se cortou, devido ao cerol e outra de um motoqueiro que quase foi degolado na BR 262, ao ser atingido por uma linha com cerol.
- Fios de alta tensão- Lembraram da história de um menino que morava na Serra e foi vitima de um choque elétrico ao tentar retirar uma pipa de uma fiação de alta voltagem.
- Atropelamentos – Comentaram sobre a possibilidade de acontecerem atropelamentos ao correrem atrás de pipas e ao atravessarem ruas movimentadas.
- O perigo de soltar pipas na laje – Comentaram sobre a questão de soltarem pipas na laje e cair dela.

P: *Quem conhece a história das pipas?*

Quanto à história das pipas os alunos foram unânimes ao responderem que a desconheciam e, por essa razão, pedimos ao estudante A21 que lesse a segunda lenda. Orientamos aos alunos que, ao término da leitura iriam marcar, no texto, as palavras que eles desconheciam. Após marcarem as palavras que não conheciam iriam buscar o significado das mesmas no dicionário. Entre as palavras que os estudantes desconheciam apareceu camponês. Depois da consulta no dicionário, terminamos a aula, combinando com os alunos que, na próxima, iríamos construir pipas e que, se fosse possível, levantaríamos as raias construidas.

No dia 13 de agosto realizamos nossa segunda atividade, denominada *A construção de pipas*. De início conversamos com os estudantes sobre a atividade que desenvolveríamos e convidamos os alunos A14; A21 e A28, que sabiam construir pipas, para serem os professores auxiliares. O convite foi aceito e causou uma reação positiva. A impressão que eles nos passaram foi a de que se sentiam muito importantes e demonstravam felicidade em poder ajudar. Para organizar o trabalho com os três novos professores, combinamos com eles o seguinte:

A14 se responsabilizaria por ajudar os colegas A01 a A08.
A21 seria responsável por ajudar os colegas A09 a A18 (exceto A14).
A28 ficou responsável por ajudar os colegas A19 a A29 (exceto A21).

E nós, pesquisadores, nos responsabilizamos por explicar como se constrói uma pipa e acompanhar o desenvolvimento das atividades nos três grupos. Distribuímos o material que utilizaríamos para construir uma pipa de duas varetas, assim relacionado:

- Duas varetas de bambu.
- Três metros de linha nº10.
- 1/2 folha de papel de seda.
- 1 tesoura para cada dupla de alunos.
- 2 tubos de cola para cada um dos três grupos.

Após a distribuição do material, desenhamos a pipa de duas varetas no quadro e dissemos-lhes que aquele era o tipo de pipa que construiríamos (Fotografia 35).

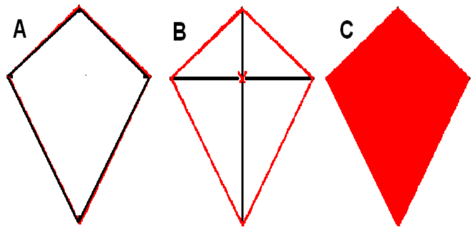


Figura 47 - Modelo de armação de pipas de 2 varetas

Fotografia 35 - Construção de Pipas - A08 e A13

Antes de iniciar a construção propusemos os seguintes questionamentos aos alunos: P: *Considerando a linha como contorno (Figura 47A), respondam-nos* q*uantos lados tem a Figura* 47A? Ouvimos os alunos A14; A21 e A28 responderem o seguinte: A14; A21 e A28: *4 lados.*

Pensamos que o trio iria se antecipar aos colegas e não daria tempo para os demais responderem, então, resolvemos pedir que eles esperassem um pouco e dessem um tempo para os demais colegas pensarem e responderem.

P: *Quantos ângulos?*
A10: *4 ângulos*.
A24: *A figura 49A possui 4 ângulos*.
P: *E quantos vértices*?
A13: *4 vértices*.
A05: *A figura tem 4 vértices.*

P: *Como a Figura 47A tem 4 lados, quatro vértices e quatro ângulos, podemos dizer que esta forma é um quadrado*?
A13 e A05: *Não, porque elas não possuem os 4 ângulos de 90º graus*.
P: S*e ela não é um quadrado e possui 4 lados, quatro vértices e quatro ângulos então ela só pode ser um retângulo?*
A15: *Não, porque nos retângulos os quatro ângulos são de 90º graus*.
P: C*omo vocês podem ter certeza de que a figura não tem ângulo de 90º?*.
A15: *Na figura não tem ângulo que parece com a letra L ou T*.
A14 e A28: *Essa figura é um quadrilátero, é um losango*!?!
P: A figura 47A é um losango?
A14 e A28: *Não. Ela não possui lados paralelos.*

Após a armação, fizemos um novo desenho (Figura 47C) no quadro e explicamos-lhes que aquele desenho representava como eles deviam cortar o papel de seda e as linhas pontilhadas onde eles deviam colar a armação da pipa. Terminamos a aula e combinamos que, na próxima, faríamos a pipa de três varetas e que precisaríamos quardar as pipas na escola, pois iríamos utilizá-las em outras aulas.

Na atividade da construção de pipas de duas varetas, procurávamos evidências que pudessem nos mostrar se os estudantes conseguiriam reconhecer as características como ângulos, lados e vértices de uma figura geométrica. Porque, conforme Senechal (1990) para constatarmos diferenças e semelhanças entre os objetos, necessitamos ser capazes de reconhecer as características de uma forma geométrica e ainda identificá-las em diferentes posições. Era isto que buscávamos, quando questionávamos os alunos se uma determinada figura, que possuia quatro lados, era um quadrado. E, acreditamos, pelas respostas que ouvimos, terem os educandos iniciado uma fase de análise e, já se mostravam capazes de distinguir entre um quadrado e outros quadriláteros.

Analisando a aula do dia 13 de agosto, notamos, pelas pistas deixadas, que os estudantes já conseguem reconhecer as características das figuras. Por exemplo, os educandos sabem que quadrado, retângulo, losango e um quadrilátero qualquer possuem quatro lados, quatro ângulos e quatro vértices. Mas, durante todo o debate mostraram que a Figura 47A não era um quadrado, muito menos um retângulo. Porém, sabiam que era um quadrilátero e isto, de acordo com Crowley (1994), são características esperadas para alunos que estão iniciando o nível de análise.

No dia 19 de agosto, realizamos a terceira atividade, denominada *A construção de pipas,* que era a continuação da atividade anterior. Dialogamos com os alunos sobre a atividade que desenvolveríamos. Resolvemos convidar os alunos A14; A21 e A28 para nos auxiliar no desenvolvimento da aula. Eles aceitaram o convite, demonstrando o mesmo entusiasmo e satisfação da aula do dia 13/08. Seguimos as mesmas estratégias organizadas em 13 de agosto, referentes às responsabilidades dos alunos, assim como a distribuição do material. Dividimos a turma em três grupos:

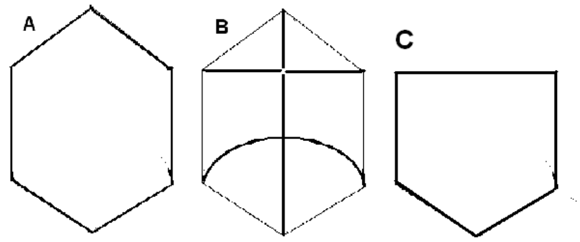
A14 seria responsável pela ajuda aos colegas A01 a A8.

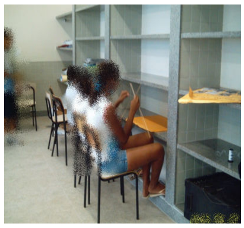
A21 seria responsável por ajudar aos colegas A09 a A18 (exceto A14).
A28 ficou responsável por ajudar aos colegas A19 a A29 (exceto A 21).

Distribuimos o material necessário à construção da pipa de três varetas:

- Três varetas de bambu.
- Três metros de linha nº10.
- 1/2 folha de papel de seda.
- 1 tesoura para cada dupla de alunos.
- 2 tubos de cola para cada um dos três grupos.

Após distribuir o material, desenhamos o modelo de pipa que construiríamos (Figura 48B e Fotografia 36) e fizemos as seguintes perguntas para os estudantes:





Fotografia 36 - Alunos construindo pipas

Figura 48 - Modelo de pipas de 3 varetas

P: *Quais são as características da Figura 48A*?
A14; A21 e A28: *Ela tem 6 lados, 6 ângulos e 6 vértices.*
P: Qu*al é o nome desta Figura 48A?*
A14: *Hexágono*.
P: *Este hexágono é convexo ou não convexo*?
A14: *É convexo*.

Depois da resposta de A14, demos inicio à montagem da armação da pipa, fizemos um novo desenho no quadro (Figura 48C) e explicamos-lhes que aquele desenho representava como eles deviam cortar o papel de seda e colar a armação no papel.

Analisando a conversa com os alunos A14, A21 e A28, observamos que eles, além de terem formado uma imagem mental de um hexágono, reconheceram algumas das caraterísticas deste polígono. O fato nos traz sinais de que eles estão além do nível do reconhecimento visual. Partindo do pressuposto teórico de que a identificação de uma forma geométrica, por meio de suas características, é uma das estratégias do nível de análise, podemos dizer que esses alunos estão iniciando esse nível. Terminamos a aula e combinamos que, na próxima, faríamos a rabiola, o cabresto das pipas e, se o tempo ajudasse, soltaríamos a pipa no pátio da escola.

Uma observação minuciosa da atividade do dia 19 de agosto nos mostra que a comparação entre o polígono que desejamos identificar e a figura geométrica padrão, pode ser uma das maneiras de reconhecermos uma dada configuração geométrica. Segundo Senechal (1990), encontramos formas padrões o tempo todo, todos os dias: na fala e na escrita, nas formas musicais e imagens de vídeos, no desenho ornamental e na geometria natural, nos padrões de trânsito, e nos objetos que construímos. Nossa habilidade cognitiva de interpretar e criar padrões pode ser a chave para negociar com o mundo ao nosso redor. Nessa atividade os alunos das duas turmas deixaram pistas de que já reconhecem um hexágono.

Analisando as atividades envolvendo a construção de pipas, concluímos que ela se constituiu numa alternativa para propormos e resolvermos problemas. O nosso problema incial nesta tarefa pode ser resumido em: como construir uma pipa se as pessoas, que a construirão, desconhecem os procedimentos necessários? Nossa primeira ação para tentar solucionar a problemática foi verificar se no meio do grupo de alunos envolvidos na atividade, existia, pelo menos, um educando que soubesse confeccionar pipas e lhe pedíssemos que nos ajudasse. Entendemos que, agindo assim, estaríamos trabalhando com as ideias de Polya (1945/1995) e as de Vygotsky (1993) ao mencionarem que a interação de um aluno - com experiência em construir raias com um outro inexperiente - poderia nos ajudar a solucionar o problema.

Outro problema interessante que observamos na confecção das raias foram as estratégias adotadas pelos alunos, para garantir a simetria entre um lado e outro das varetas que compunham a pipa. Entre as estratégias utilizadas encontra-se uma em que um aluno segurava a armação e outro, um pedaço de linha ou de uma vareta de bambu, com a qual media um primeiro lado e o outro lado e, em seguida, comparava as medidas. Se elas fossem diferentes eles faziam os ajustes e continuavam a confecção, caso os resultados fossem iguais, os educandos davam continuidade ao processo de construção. Um ponto interessante nas estratégias empregadas por eles é que não usaram os instrumentos convencionais. Outros dois problemas desafiavam os pequenos engenheiros de pipas. O primeiro problema consistia em distribuir uma única folha de papel de seda para cada dupla, e elas deviam se organizar para que todos encapassem suas pipas. O segundo problema era se eles desejavam construir uma pipa colorida, precisavam negociar com o colega que tinha a cor que queriam.

A estratégia empregada por um dos grupos consistia em colocar as armações sobre a folha de papel de seda e com um pincel atômico contornar a armação, e depois recortavam o desenho. Este procedimento foi repetido pelos componentes do grupo. Outras equipes adotaram a estratégia de colar as armações e recortá-las. Para resolver o segundo problema, os estudantes aceitaram a troca como forma de negociar. Para tal, recortavam o tamanho que precisavam e passavam de grupo em grupo, perguntando se desejavam trocar. Percebemos, nas soluções que os educandos arranjaram, que eles necessitavam da interação dos outros colegas e, ainda precisavam ouvir as sugestões dos colegas de grupo. A atividade nos mostrou que, por meio "do brinquedo, da brincadeira, a criança pode desenvolver a imaginação, a confiança, a auto-estima e a cooperação" (ROEDER, p. 132). E, a cooperação foi uma das situações que pudemos observar nesta tarefa, em particular, no momento da troca de materiais.

De forma semelhante realizamos no dia 05 de agosto de 2009 no sexto ano C, uma atividade, cujo título era *Trabalhando com o pipas*. Os objetivos dessa atividade estão declarados no início deste capítulo, desta dissertação. Dividimos a tarefa em dois momentos no primeiro, dialogando com os alunos sobre as pipas e os perigos do brinquedo. Iniciamos a aula propondo aos alunos que respondessem às questões:

P: *Vocês sabem construir pipas*?

A resposta obtida na primeira pergunta nos causou uma surpresa, pois, esperávamos que, pelo menos os onze meninos da turma soubessem construir pipas mas, surpreendentemente, só três deles afirmaram que sabiam confeccioná-las. Entre as meninas apenas duas disseram que sabiam construir o brinquedo.

P: *O que vocês sabem sobre a história das pipas*?

Quanto à história das pipas os alunos foram unânime ao responderem que a desconheciam. Por essa razão, resolvemos iniciar o trabalho, lendo com eles as três das versões da história das pipas.

P: *Vocês sabem quais são os perigos de se soltar pipas*?

Os alunos citaram reportagens que assistiram na televisão sobre o uso do cerol. Entre as histórias citaram a de um motoqueiro que quase foi degolado na 262 ao ser atingido por uma linha com cerol. Outro item citado pelos estudantes foi o perigo de se soltar pipas próximo a fios de alta tensão. Contaram a história de um menino que morava na Serra e foi vitima de um choque elétrico ao tentar retirar uma pipa de uma fiação de alta voltagem.

Entre os perigos lembrados pelos educandos estava o problema dos atropelamentos. Neste item, eles comentaram sobre colegas deles que se descuidaram ao correr atrás de uma pipa e acabaram sendo atropelados por uma bicicleta. Além dos perigos já mencionados o ato de soltar pipas na laje também foi lembrado. Neste instante, comentamos com os estudantes sobre o risco que representa soltar pipas em lugares inadequados. Contiuamos nosso diálogo com os alunos, porém agora o nosso interesse repousava sobre a pipa e a relação desta com as grandes invenções da humanidade. Perguntamos-lhes se eles lembravam de alguma invenção que tivesse a pipa como inspiração. As respostas que ouvimos foram:

P: *Vocês conhecem ou lembram de algum objeto que o homem inventou inspirado na pipa?*
C19: *O para-raio. Minha professora disse que a invenção do para-raio tinha como inspiração a pipa*.
P: *Dizem os pipeiros que o inventor do para-raio se inspirou na pipa*.

C18: *Avião*.

P: *O avião! Por que você acha que a invenção do avião tem alguma coisa a ver com a pipa*?

C19: *Ele nos respondeu que tinha visto num livro uma foto do 14 bis e achou muito parecido com uma pipa japonesa*.

P: *Concordamos com C19*.

C11: *Kite surf.*

P: *O que o Kite surf tem a ver com a pipa*?

C11: *O kitesurfista "voa" preso a uma pipa*.

P: *Onde você viu isto?*

C11: *Na praia, lá em Vitória*!

C17: *Tem cidades que as pipas são usadas como meio de comunicação*.

P: *Questionamos se ele sabia nos dizer em qual lugar a pipa era utilizada como meio de comunicação*.

C17: *Nas favelas do Rio de Janeiro.*

Comentamos com a turma que, de fato, isso ocorre em algumas favelas do Rio de Janeiro, mas, que nem sempre que uma pipa é levantada, no Rio significa que a polícia esteja na 'área'. Lembramos-lhes que, no Japão e na China há muitos séculos a pipa era usada como veículo de comunicação entre familiares e até mesmo entre os soldados do exército chinês e japonês. Terminamos esta aula combinando com os alunos que, na próxima, iriamos construir pipas e que, se fosse possível, levantaríamos as raias construídas.

Tomando como referência o PCN de matemática (BRASIL,1998) e as discussões feitas entre os estudantes e os pesquisadores, dizemos que as atividades desenvolvidas se constituiram num campo de integração com os conteúdos de outras áreas do currículo, como por exemplo, de Ciências Sociais e Naturais e, em particular, com as questões tratadas pelos temas transversais. Nas perguntas que fizemos para os estudantes, tínhamos como objetivo conhecer o que eles sabiam sobre a pipa e se conseguiam fazer alguma relação do brinquedo com as criações do ser humano. Além disso, precisávamos saber se os educandos sabiam construir pipas, pois, esta era uma das nossas tarefas. As respostas que os estudantes nos deram, fez-nos perceber as conexões e as diferenças que eles estabeleceram entre o brinquedo e os tópicos matemáticos e também entre a raia e as demais áreas do conhecimento, bem como as relações entre o brinquedo e as situações do cotidiano.Tais percepções estão de acordo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Por isso, é fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, deixando-os resolver problemas, ainda que sejam complexos. Agindo dessa forma estávamos permitindo que os estudantes lançassem mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscassem estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. E, assim questionamos os educandos sobre a confecção, a história, os perigos e as invenções inspiradas na pipa.

Começamos a aula no sexto ano C, conversando com os alunos sobre a construção de pipas com duas varetas. Convidamos os três alunos (C13; C19 e C28) que as sabiam construir para nos ajudar, atuando como professores auxiliares. Os alunos aceitaram o convite. Compreendemos que eles se sentiram muito importantes. Para organizar o trabalho combinamos com os três professores auxiliares o seguinte:

C13 se responsabilizaria por ajudar aos colegas C01 a C08.
C19 seria responsável por ajudar aos colegas C09 a C18 (exceto C13).
C28 ficou responsável por ajudar aos colegas C19 a C29 (exceto C19).

E nós, pesquisadores, nos responsabilizamos por explicar como se constrói uma pipa de duas varetas e acompanhar o desenvolvimento das atividades nos três grupos assim como apresentar a relação do material a ser usado.

- Duas varetas de bambu.
- Três metros de linha nº10.
- 1/2 folha de papel de seda.
- 1 tesoura para cada dupla de alunos.
- 2 tubos de cola para cada um dos três grupos.

Após a distribuição do material, desenhamos uma pipa de duas varetas no quadro e dissemos-lhes que aquela era o tipo de pipa que iríamos construir. Explicamos aos estudantes os procedimentos que adotaríamos para construir a pipa de duas varetas. Resolvemos perguntar-lhes:

P: Quantos lados, ângulos e vértices existem na figura (Veja Figura 47A, p. 170)?
C13; C19 e C28*: 4 lados, 4 ângulos e 4 vértices .*
P: *Então posso dizer que a figura 47A é um quadrado*?
C08 e C12: *Ela não é um quadrado*.
C13 e C19: *A figura não não possuia quatro ângulos de 90º graus*.
P: *Como poderiam ter certeza de que não tinha ângulo de 90º na figura 47A*?
C13 e C19: *No contorno não tem ângulo formando a letra L ou T*.
P: *Qual o nome da figura 47A?*
C13: *É um quadrilátero*.

Após a armação, fizemos um novo desenho no quadro (Figura 47C, p. 170) e explicamos que aquele desenho representava como eles deviam cortar o papel de seda e depois colar a armação no papel. Ao terminar a aula combinamos que, na próxima, faríamos a pipa de três varetas e que precisaríamos quardar as pipas na escola, pois iríamos precisar delas em outras aulas.

Ao analisar as atividades desenvolvidas, percebemos que, para os estudantes do sexto ano C, construir uma pipa tinha se constituído um problema. Nesse momento, entendemos que o nosso papel, enquanto professores desses educandos, era ajudá-los. Tal percepção é corroborada por Santos-Wagner (2008), quando, ao discutir o papel do educador na resolução de problemas, ela nos mostra que ajudar os alunos a pensar em como resolver o problema sem dar direto a solução do mesmo é uma das tarefas mais importantes de um professor.

Entendemos que, quando selecionamos alguns estudantes que sabiam construir pipas e os colocamos como professores auxiliares, estávamos desenvovendo um trabalho dentro das orientações deixadas por Santos-Wagner (2008), Polya (1945/1995) e Vygotsky (1998). Além dos autores citados, concordamos com os PCNs (BRASIL, 1998), quando afirmam que, ao permitirmos que os alunos desenvolvam habilidade de reconhecer problemas, buscar, selecionar informações e tomar decisões, estamos aumentando a capacidade de aprendizagem dos estudantes. Além disso, asseguramos que a partir do momento em que convidamos os estudantes para serem professores auxiliares, estávamos, na prática proporcionando aos educandos que atuassem como mediadores de suas próprias aprendizagens e das aprendizagens dos colegas.

No dia 19 de agosto realizamos, no sexto ano C, a segunda parte da atividade Construção de pipas. Os objetivos propostos para essa atividade estão declarados no início deste subcapítulo. Dividimos a tarefa em dois momentos: no primeiro, dialogando com os alunos sobre a atividade, enfrentando o desafio de construir uma pipa de três varetas. Conversamos com a turma sobre a atividade que desenvolveríamos e perguntamos se os alunos, C13; C19 e C28, que nos auxiliaram na aula anterior, queriam nos ajudar novamente. Na intenção de organizar o trabalho, combinamos com os três professores auxiliares:

C13 se responsabilizaria por ajudar os colegas C01 a C08.
C19 seria responsável por ajudar os colegas C09 a C18 (exceto C13).
C28 ficou responsável por ajudar os colegas C19 a C29 (exceto C19).

Nós nos responsabilizamos por explicar como se constrói uma pipa de três varetas e acompanhar o desenvolvimento das atividades nos três grupos. Explicamos aos alunos que iriamos construir uma pipa e em seguida relacionamos o material que utilizaríamos:

- Três varetas de bambu.
- Três metros de linha nº10.
- 1/2 folha de papel de seda.
- 1 tesoura para cada dupla de alunos.
- 2 tubos de cola para cada três grupos de alunos.

Distribuímos o material e desenhamos uma pipa de três varetas (Figura 48B, p. 173) no quadro e dissemos-lhes que aquela era o tipo de pipa que iríamos construir. Explicamos aos estudantes como deveriam proceder para construir a pipa de três varetas (Figura 48B), e resolvemos perguntar-lhes o seguinte:

P: *Quantos lados, ângulos e vértices tem a figura acima*?
C13; C19 e C28: A *figura tem 6 lados, 6 ângulos e 6 vértices* .

P: Qual é nome da Figura 48A (p. 173)?
C08 e C12: Hexágono.

No decorrer do processo de montagem da armação da pipa de três varetas, observamos as estratégias que os estudantes desenvolveram para garantir que a raia não penderia para um dos lados, isto é, para deixá-la o mais simétrica possível. Entre os procedimentos adotados pelos estudantes, encontramos os seguintes: a primeira estratégia consistia em medir um lado com uma vareta de bambu e depois verificar se eram iguais; e para a segunda estratégia os educandos tinham uma linha no lugar da vareta. Armada a pipa, fizemos um novo desenho no quadro (Figura 48C, p. 173). Explicamos que aquele desenho representava como eles deviam cortar o papel de seda e depois colar a armação nesse papel. Como a aula estava terminando, combinamos com os estudantes que, na próxima, faríamos a rabiola da pipa de três varetas e que guardaríamos as pipas na escola, pois iríamos precisar delas em outras aulas.

Observamos na tarefa do bloco da construção da pipa, como comenta Kishimoto (1998), que é por meio de brincadeiras que os educandos aprendem a se movimentar, falar e desenvolver estratégias para solucionar problemas. Concordamos com a afirmação de Kishimoto, pois foi o que compravamos ao observar os estudantes enquanto explicavam aos colegas como se constrói uma pipa e as estratégias empregadas para garantir que a pipa não penderia para um lado, quando estivesse voando. Novamente, estamos de acordo com Kishimoto (1998) ao afirmar que o brinquedo representa um primeiro nível de construção do conhecimento. Mas é preciso lembrar que, além de explorar as possibilidades educacionais do brinquedo, o educador precisa sistematizar os conceitos trabalhados, pois se esta não for realizada aprendizagem desejada acabará não acontecendo. Analisando a construção da pipa de três varetas é possível observar que, nesta atividade, os estudantes resolveram problemas, interagiram, organizaram seus conhecimentos sobre os objetos que construíram, e ainda, atuaram como interlocutores na aprendizagem uns dos outros. O que na nossa compreensão está de acordo com os princípios teóricos propostos por Vygotsky (1993).

4.2.5 Atividades com Características Interdisciplinares Realizadas nas duas Turmas

Passamos a relatar as atividades que possuem intersecções com outros campos do conhecimento. O ponto interessante que encontramos nestas atividades foi a intersecção delas com a arte. Isto nos faz lembrar Hardy (1887-1947) que comparou o matemático a um desenhista de ideias, pois entendia que os desenhos de um matemático, assim como os de um pintor ou de um poeta, necessitam da beleza; as ideias, como as cores ou as palavras, precisam conectar-se de forma harmoniosa. Portanto, mostramos que, por trás das atividades que desenvolvemos, além do conteúdo de matemática, havia uma busca pela harmonia, pelo belo e ainda que estudar matemática pode ser apaixonante.

Na aula do dia 18 de maio de 2009 construímos um painel com tangram, com as turmas dos sextos anos A e C. Tínhamos os objetivos de construir um painel com vários tangrans; mostrar mais uma das potencialidades artísticas do mesmo e utilizá-lo na composição e decomposição de várias formas. Para atingir nossas metas, resolvemos dividir a tarefa em dois momentos. No primeiro, dialogamos com os alunos sobre a atividade e os informamos que a atividade aconteceria fora das nossas aulas de pesquisa, mas numa aula extra. No segundo momento, enfrentaríamos o desafio de construir um painel com as sete peças de vários tangrans.

Convidamos os estudantes para nos ajudar na montagem de um painel, fazendo uso das sete peças do tangram. Conversamos sobre o que iríamos construir e decidimos que contaríamos uma das versões do tangram. Selecionamos as figuras geométricas que atenderiam ao nosso intento. Os educandos C19, A14 e A15 se prontificaram a montar a história num dos painéis (Fotografias 37 e 38) que a escola nos disponibilizou. Porém, quando já estávamos iniciando a montagem, C18 desistiu. Durante a montagem acompanhamos diálogos entre os alunos que participaram da montagem e agora os reescrevemos.

Fotografia 38 - Alunos construindo um painel

Fotografia 37 - O Painel feito com tangram

C19: *Acho que devemos começar a montagem da primeira figura com o quadrado*.

A14: *Eu acho melhor iniciar com o triângulo que forma o pé da figura, assim poderíamos alinhar as outras figuras por ele*.

C19: *Concordando com A14*.

A14 pediu para C19 pegar o paralelogramo. O aluno C19 atende ao pedido de A14 pega o paralelogramo e o prepara para colar no painel.

C19: *Terminamos a montagem da nossa primeira figura. Agora só faltam 11 figuras para completar o painel.*

C19 fala para A15: *A segunda figura é uma foma humana, mas é diferente da que vocês construiram.*

A14: *É sim*.

C19: *Acho que os dois maiores triângulos devem se juntar para formar o corpo da figura*. A sugestão de C19 funcionou.

C19: *Acho que devemos utilizar o triângulo médio e o paralelogramo para construir a perna, os dois triângulos pequenos formariam os pés e finalmente o quadrado para formar a cabeça*.

P: *Como você chegou a esta conclusão?*

C19: *Sabia da sequência e ele afirmou que já havia construido esta forma antes.*

A15: *Agora podem deixar eu construirei o quadrado e vocês constroem outra figura.*

Observando a montagem do painel percebemos que nesta atividade os alunos precisariam utilizar a imagem mental das formas geométricas já estudadas, e ainda compô-las de maneira a formar a figura que desejassem construir.

Lorenzato (2008) considera que a representação mental dos objetos geométricos é um dos passos preparatórios para o entendimento da formalização de um conceito em geometria. Analisando o processo de construção do painel, deduzimos que os estudantes são capazes de reconhecer visualmente, figuras como triângulos, quadrados e paralelogramos. Além do reconhecimento visual os educandos conseguiram associar os nomes de cada um dos polígonos a figuras geométricas que os representam. Portanto, tomando van Hiele (1957), Gutiérrez (1991), Nasser (2000) e Lorenzato (2008), podemos dizer que os estudantes A14, A15, C19 estão iniciando o nível de análise no que diz respeito aos polígonos citados.

Dentro do contexto de tarefas com intersecções interdisciplinares, a segunda atividade que realizamos nas duas turmas, no dia 22 de julho, foi o Jogo das palavras. Nossos objetivos eram: revisar com os alunos nossas aprendizagens sobre polígonos, e discutir a escrita e pronúncia correta dos nomes dos polígonos. Para realizar essa atividade, distribuímos um envelope fechado, cujo conteúdo eram as letras de uma palavra e os estudantes não sabiam que palavra estava dentro do seu próprio envelope. Ao mesmo tempo em que as duplas montavam suas palavras, elas eram escritas no quadro. Depois que todos os grupos tivessem terminado, os alunos tinham a missão de descobrir qual era a frase formada com aquelas palavras.

Lembramos aos estudantes que esta aula exigia que a turma trabalhasse de forma cooperativa. Ou seja, para concluir a atividade eles precisariam dar conta de formar a palavra que estava no envelope deles, em seguida, ajudar os colegas que ainda não tinham conseguido montá-las e depois reuni-las de maneira a formar uma frase. No início da atividade, os alunos sentiram um pouco de dificuldade, mas à medida em que se envolviam no trabalho e, que montavam as palavras que estava no envelope de cada um deles, a animação tomava conta do grupo e os que terminavam se prontificavam a ajudar os demais colegas e juntos montavam a palavra que existia no envelope do colega.

O conteúdo de cada envelope foi registrado no quadro e o desafio da turma agora era formar a frase. Após um tempo tentando formar a frase, o aluno A28 mostrou a que ele havia montado e constatamos que era a frase que estava com os pesquisadores. Pedimos ao aluno A28 que aguardasse um pouco mais antes de divulgá-la. Aproximadamente, cinco minutos depois, outros alunos conseguiram e aproveitamos para escrevê-la no quadro: Com tangram e geoplano podemos formar polígonos como: triângulos, quadrados, trapézios, losangos, pentágonos e hexágonos.

Fotografia 39 - Alunos montando o jogo das palavras

A mesma atividade foi desenvolvida no sexto ano C. Dialogamos com os estudantes e informamos-lhes que à medida em que os estudantes montavam a palavra cujas letras estavam no interior do envelope, esta era registrada no quadro. Depois que todos os educandos terminaram a montagem da palavra, um novo problema começava a se formar, isto é, eles precisavam responder à seguinte pergunta:

P: *Qual é a frase que estas palavras formam*? Após um tempo tentando formar a frase, ouvimos o seguinte pedido:
C18: *Dá uma dica pra gente*!
P: *A dica é: a frase contém, dois brinquedos que já utilizamos nas nossas aulas e o nome de alguns polígonos que já estudamos*.

Alguns minutos depois, C19 mostrou a frase que ele havia montado e pelo fato de que a aula já estava nos minutos finais, decidimos escrevê-la no quadro: Com tangram e geoplano podemos forma polígonos como: triângulos, quadrados, trapézios, pentágonos e hexágonos.

Concordamos com Pavanello (1995) ao afirmar que não podemos negar que a geometria nos oferece um maior número de atividades, nas quais o aluno pode exercitar a sua criatividade. E esta criatividade surge ao interagir com as propriedades dos objetos, ao manipular e construir figuras, ao observar suas características, compará-las, associá-las de diferentes maneiras, ao conceber formas de representá-las. Além disso, percebemos que G. H. Hardy (2000) tinha razão ao comparar o matemático e o aluno que estuda matemática, a um desenhista de ideias. Foi assim que vimos os desenhos dos alunos dos sextos anos A e C, pois neles notamos uma conexão entre as ideias matemáticas e as obras de artes desenhadas por eles.

4.3 NOSSO ÚLTIMO ATO DA PESQUISA DE CAMPO

Após o trabalho com a construção de pipas resolvemos realizar uma última análise do nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes das duas turmas. Para tal, elaboramos outro teste para investigar o nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico, o qual continuava sendo inspirado nos testes propostos pela professora Nasser (1996; 2000). Uma das mudanças que fizemos no teste se refere ao final de cada questão, ao propormos aos educandos que explicassem a escolha que haviam feito. Os resultados obtidos pelo alunos do sexto ano A e C, nesta avaliação, estão relatados nesta parte.

A primeira questão do teste da segunda fase tinha o objetivo de analisar se os alunos identificavam, visualmente, quadriláteros e, de acordo com o gráfico 5, podemos afirmar que dezenove alunos dos vinte estudantes do sexto ano A foram capazes de reconhecê-lo. Por essa razão e tomando como referência o modelo de van Hiele consideramos que esses educandos estão no nível de visualização. Após a primeira questão, pedimos-lhes que justificassem as escolhas que haviam feito, e 17 alunos escreveram que marcaram o paralelogramo e o trapézio como quadriláteros por eles possuírem quatro lados. Entre os 17 estudantes, 03 disseram que além de possuírem 4 lados, as figuras também tinham 4 vértices, 4 ângulos e as demais características não foram mencionadas.

Já no sexto ano C, a quantidade de alunos que conseguiu identificar os dois quadriláteros foi de dezoito alunos em um total de vinte e dois (gráfico 6).

Tomando como referência as pistas deixadas pelos alunos, e os critérios que estabelecemos na introdução deste capitulo, consideramos que os dezoito estudantes são capazes de identificar, visualmente, um quadrilátero. Assim, no que diz respeito aos quadriláteros, podemos considerar que eles estão no nível de visualização. Depois de responderem à primeira questão, os estudantes apresentaram as justificativas para as escolhas que haviam feito e 18 alunos escreveram que haviam marcado o paralelogramo e o trapézio como quadriláteros por eles possuírem quatro lados, 4 ângulos e 4 vértices. Dos 18 estudantes, 03 disseram que além de possuírem 4 lados, 4 ângulos e 4 vértices, os paralelgramos possuíam lados opostos paralelos. No meio de todas as justificativas uma que nos chamou a atenção, foi a de C25 que, além de ter escrito as características já citadas, afirmou que as formas marcadas eram quadriláteros porque elas tinham a forma de um quadrado. No nosso entendimento e tomando como referência van Hiele (1957; 1986), Clements e Batista (1982) percebemos que esse aluno, em particular, deixa pistas que está no nível de visualização de quadriláteros.

A segunda questão do diagnóstico final trata do reconhecimento visual do hexágono. Observando o gráfico 5, vemos que dezessete dos vinte alunos do sexto ano A identificaram o hexágono. Outros três marcaram o polígono de seis lados e outra figura, assim de acordo com os critérios que empregamos no teste diagnóstico inicial, podemos afirmar que estes alunos estão em trânsito dentro do nível de visualização do hexágono.

As justificativas, apresentadas pelos estudantes do sexto ano A para as respostas que deram na segunda questão, traziam a afirmação de que escolheram hexágono porque ele possue seis lados e seis vértices. Entre os vinte alunos desta turma, 17 deram a justificativa acima e 2 estudantes disseram que, além de possuírem seis lados e seis vértices, a figura também tinha seis ângulos.

O gráfico 6 apresenta os resultados do sexto ano C, no diagnóstico final. Observamos, na segunda questão, que dezessete dos vinte e dois alunos desta turma foram capazes de reconhecer um hexágono e cinco assinalaram o hexágono e outras figuras. Tomando como referência o modelo de van Hiele e os critérios que empregamos no diagnóstico inicial, podemos dizer que os dezessete educandos que assinalaram corretamente estão no nível de visualização do hexágono e os cinco restantes estão em trânsito. Os estudantes do sexto ano C justificaram a escolha afirmando que a figura era um hexágono, pelo fato de que ela possuía seis lados, seis ângulos e seis vértices. Entre os vinte alunos desta turma, 17 deram a justificativa acima e cinco restantes disseram que a forma geométrica tinha 6 lados.

Na terceira questão do diagnóstico final, o estudante devia marcar entre um grupo de cinco quadriláteros aqueles que fossem um trapézio. Uma análise dos gráficos 5 e 6 nos revela que dezenove dos vinte alunos do sexto ano A e quinze dos vinte e dois estudantes do sexto ano C foram capazes de reconhecer, visualmente, os trápezios. Assim com base no modelo de van Hiele e nos critérios que declaramos no início deste capítulo, supomos que estes educandos estão no nível de visualização do trapézio.

Os estudantes do sexto ano A e do sexto ano C afirmaram que assinalaram o trapézio porque ele era parecido com o quadrado, com o balão (losango) e com o retângulo, mas não era nenhum dos três e, ainda possuia quatro lados, quatro ângulos e quatro vértices. Esta justificativa nos mostra que estes educandos ainda utilizam-se de protótipo ao analisarem uma dada figura geométrica e a incluírem numa dada categoria. Já na quarta questão do diagnóstico final os educandos precisavam assinalar entre um grupo de formas geométricas aquelas que apresentavam lados paralelos. Observando os gráficos 5 e 6, concluimos que dezoito alunos do sexto ano A e doze estudantes do sexto ano C conseguiram identificar as figuras que possuiam lados paralelos. Assim sendo, no que tange ao reconhecimento de segmentos de retas paralelas e retas paralelas, pensamos que esses educandos estão no nível de visualização. Entre os alunos do sexto ano A e do C apenas um estudante de cada turma conseguiu justificar porque tinha marcado o trapézio e o retângulo como formas geométricas, nas quais eles identificaram pares de segmentos de retas paralelas. O argumento utilizado pelos estudantes A14 e C19 foi que retas paralelas são retas que não se encontram.

A quinta questão do diagnóstico final trata do reconhecimento visual de lados perpendiculares. Analisando os gráficos 5 e 6, verificamos que dezessete alunos do sexto ano A e também dezessete no sexto ano C foram capazes de identificar os pares de lados perpendiculares. Portanto, no tocante ao reconhecimento de retas perpendiculares, pensamos que os estudantes estão no nível de reconhecimento.

No que se refere à justificativa, os alunos do sexto ano A afirmaram que as retas eram perpendiculares, pelo fato de que os lados que se encontravam formavam um L. Os estudantes do sexto ano C utilizaram o mesmo argumento para justificarem a escolha. Apenas C25 afirmou que era pelo fato de os lados formarem ângulos retos e, ainda desenhou um triângulo retângulo para exemplificar o que estava dizendo. Neste episódio, percebemos que C25 utilizou-se de um modelo de retas perpendiculares para reforçar o seu argumento. Tomando como referência van Hiele (1957/1986), Clements e Battista (1992) podemos dizer que o aluno C25 está no nível de visualização das retas perpendiculares.

A sexta questão do diagnóstico final trata do reconhecimento visual de polígonos convexos e não convexos. Nesta questão, propusemos aos alunos que entre um grupo de cinco polígonos marcassem aqueles que eram não convexos. Analisando os gráficos 5 e 6, observamos que dezoito estudantes do sexto A e dezenove no sexto C foram capazes de identificar, visualmente, os poligonos convexos. Portanto, no tocante ao reconhecimento de polígonos convexos e não convexos, pensamos que estes estudantes estão no nível de reconhecimento.

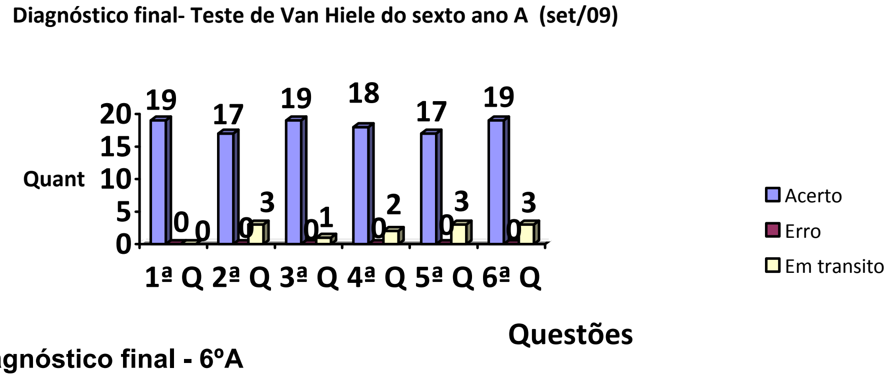


Gráfico 5 - Teste diagnóstico final - 6ºA

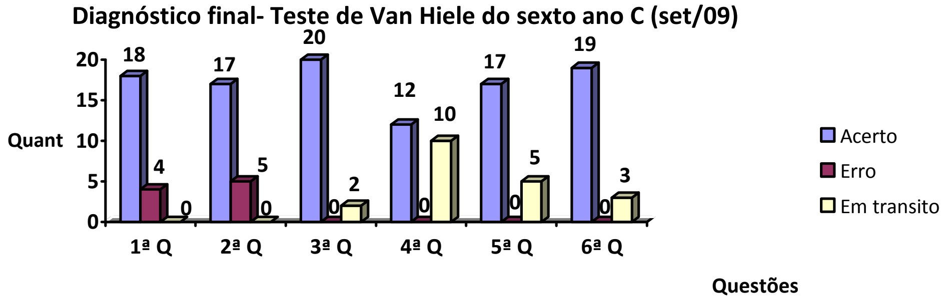


Gráfico 6 - Teste diagnóstico final - 6º C

Os argumentos empregados pelos estudantes do sexto ano A e C para justificarem a escolha foi semelhante ao que fizemos e falamos anteriormente em aulas. Eles iam afirmando que, se traçássemos um segmento de reta ligando dois pontos internos do polígono e se uma parte dele estiver dentro e a outra parte fora da figura, o polígono seria chamado de não convexo. A argumentação utilizada pelos alunos nos deixam pistas de que eles incorporaram nossos argumentos e estão no nível de reconhecimento visual de polígonos convexos e não convexos.

A sétima questão do diagnóstico final trata da identificação de algumas características dos polígonos. Para analisar se os estudantes conseguiriam reconhecer características de um dado polígono, propusemos-lhes cinco questões que tratam dos seguintes temas: quantidade de lados, vértices e ângulos de um polígono e, ainda se, na figura, existiam lados paralelos e/ou perpendiculares.

No tocante à quantidade de lados, ângulos e vértices, podemos afirmar que, em média 19/20 estudantes do sexto A e 18/22 do sexto C reconheceram corretamente, as caracteristicas pedidas. Já no reconhecimento de lados paralelos nas formas desenhadas obtivemos os seguintes resultados: no retângulo 16/20 alunos do sexto A e 17/22 do sexto C afirmaram que o retângulo possui retas paralelas e o mesmo quantitativo de educandos disseram que a forma geométrica citada também possui lados perpendiculares.

No trapézio retângulo, 19/20 alunos do sexto ano A e 18/22 do sexto ano C afirmaram que o trapézio possui lados paralelos. Os educandos revelaram ainda que encontraram lados perpendiculares na referida forma geométrica. Já para o hexágono os resultados obtidos foram 17/20 alunos do sexto ano A e 17/22 do sexto ano C que disseram possuir o hexágono lados paralelos.

4.4 SÍNTESE DO CAPÍTULO

No entendimento de Kaleff (1998), van Hiele (1986) e no nosso também a visualização tem um papel de destaque na construção de conhecimento matemático. As discussões que desenvolvemos nesse capítulo partiram da problemática da visualização em geometria que desempenha esse papel fundamental no processo de construção do conhecimento matemático. Pois, é por meio dela que a representação mental dos objetos geométricos, a análise e a organização formal das propriedades geométricas relacionadas aos conteúdos geométricos se constituem nos passos iniciais para o entendimento da formalização de um conceito.

No desenvolvimento da nossa investigação, percebemos que os recursos didáticos, como os que utilizamos, podem constituir-se nos passos iniciais para a introdução de conceitos geométricos, e ainda nos auxiliam no processo de formalização desses conceitos. O trabalho com o tangram apresentou como principal desafio a necessidade de compor e decompor uma dada forma plana, a partir de figuras geométricas como: triângulo, quadrado e paralelogramo. No nosso entendimento a composição e a decomposição exigiam que os estudantes mobilizassem percepção visual (Lorenzato, 2008).

Ademais, por meio do quebra-cabeças, pudemos propor atividades interessantes e desafiadoras, verdadeiros problemas que desafiavam a capacidade do educando. Tal afirmação pôde ser confirmada ao propormos aos estudantes um conjunto de desafios e observarmos o entusiasmo com o qual os alunos buscavam solucionar o problema proposto. Ao encontrarem a solução do desafio, tratavam de socializar o sucesso obtido e, de acordo com Kaleff, Voto e Corrêa (2003) podemos dizer que o

> .... trabalho com tangram possibilita levar o aluno a resolver situações-problema adotando estratégias, desenvolvendo formas de raciocínio e processos ligados à intuição, indução e analogia, além de permitir ao aluno interagir com os colegas de modo cooperativo, aprendendo a trabalhar em conjunto na busca de soluções, princípios estes que são de importância fundamental para o ensino e a aprendizagem da Matemática (p. 2).

Esta pesquisa nos permitiu compreender que quando o estudante utiliza um tangram, ele tem a oportunidade de perceber formas, de representá-las, de construí-las, de criar objetos e outras formas planas, partindo das peças que constituem o quebra-cabeças. Diante dos fatos, nos colocamos de acordo com Kaleff, Voto e Corrêa (2003, p. 5), acreditamos que tais quebra-cabeças “potencializam o desenvolvimento da habilidade de visualização” e ainda, por meio das formas que os compõem, permitem a introdução de ideias iniciais dos conceitos geométricas.

Nas nossas investigações com o geoplano, nós o consideramos um meio que oferece apoio à representação mental, uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando experiência geométrica aos estudantes. Em nosso trabalho aprendemos que o geoplano é um recurso didático manipulativo e dinâmico, pelo qual se pode construir, desconstruir, movimentar e desfazer figuras geométricas. Tal recurso contribui para explorar problemas geométricos e algébricos, possibilitando suposições e registros em papel. Sobre a questão da resolução de problemas é importante lembrar que, de acordo com Baquero (1998) e Vygotsky (1993), esses problemas precisam estar dentro da zona de desenvolvimento proximal do aluno. Porque para um estudante aprender tem de ser sempre estimulado e tentar se superar, por seu próprio esforço, ou por meio de parcerias, procurando no coletivo estratégias para chegar às respostas.

Pensamos que é conveniente ressaltar que a confecção de pipas e o geoplano podem colaborar para o desenvolvimento da visualização, que é o primeiro nível do desenvolvimento do raciocínio geométrico no modelo de van Hiele. A postura do professor que trabalha com esses tipos de recursos, precisa ser flexivel. Acreditamos que, agindo assim, proporcionará que o educando faça novas descobertas e tornará o estudo mais atraente. Além disso, o educador precisa ter um bom diálogo com a classe, permitindo que cada estudante elabore o seu pensamento. Deve dar tempo para que o aluno observe, reflita e expresse seu pensamento. A linguagem do educador necessita ser concisa e cuidadosa, suficientemente rica para utilizar expressões equivalentes que tornem claras as ideias e facilitem a compreensão dos significados.

Ao finalizar cada uma das atividades propostas, o educador precisa orientar o estudante para que faça os registros, a fim de assimilar conceitos e simbologias características das tarefas estudadas. Esta foi uma prática constante em nossa pesquisa, pois todas as vezes que terminávamos uma discussão com os estudantes, sugeríamos que fizessem as anotações em seus cadernos. Além do mais, sempre permitimos que os educandos expusessem suas ideias, conclusões e defendessem suas afirmações.

O teste diagonóstico que realizamos no início de nosso estudo nos permitiu conhecer o nível atual de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes dos sextos anos A e C e, ainda, nos auxiliou na organização das atividades que compuseram a nossa pesquisa. O nosso diagnóstico nos mostrou, que em se tratando do nível de visualização de triângulos, quadrados, paralelogramos e retas paralelas, os estudantes estavam em trânsito. Isto é, em dado momento as formas geométricas citadas eram reconhecidas e em outros momentos, não. Ressaltamos que os estudantes não reconheciam as formas propostas se estas não estivessem nas posições usuais (protótipos).

Entretanto, no decorrer do desenvolvimento da sequência didática, percebemos, pelas pistas deixadas pelos estudantes, que eles já conseguiam reconhecer, visualmente, triângulos, quadrados e paralelogramos. Por essa razão, elaboramos e aplicamos um teste final que exigia a identificação dos polígonos citados, mas que não fosse de forma tão direta. Os fatos nos informam que houve um melhora no nivel de visualização dos educandos. Contudo não podemos afirmar que este acontecimento se deve única e exclusivamente à sequência didática que desenvolvemos com os alunos, pois para afirmar tal resultado precisaríamos de um estudo longitudinal, com mais registros e detalhes dos estudantes e mais profundo do que foi o nosso.

5...CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como proposta analisar o que podemos aprender com o uso de tangram, geoplano e a construção de pipas no processo de ensino de polígonos e identificar como os recursos podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio geométrico de duas turmas do sexto ano. Para planejar e desenvolver nossa proposta pedagógica precisávamos responder a alguns questionamentos iniciais e o primeiro deles estava relacionado, naquele momento, com o nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos do 6° ano. A resposta para o questionamento acima foi obtida ao analisarmos o teste diagnóstico iniical aplicado aos alunos das duas turmas e compararmos as respostas dadas pelos alunos com o proposto na teoria do casal van Hiele. Concluímos que, em relação ao reconhecimento visual de triângulos, quadrados, paralelogramos, retas paralelas e retas perpendiculares, os sujeitos da pesquisa nas duas turmas estavam em trânsito. Isto é, em dado momento e numa dada posição a figura geométrica era reconhecida, mas em outro, a mesma forma não era reconhecida. Tal conclusão pode ser confirmada, analisando-se os gráficos 1 e 2.

As respostas dos educandos nos deram informações sobre os conhecimentos geométricos que eles possuíam no início do ano letivo de 2009. Além disso, mostraram que precisávamos organizar a sequência didática de forma que pudéssemos nos basear na bagagem cultural que os estudantes possuíam. E, ainda, possibilitar aos educandos um contato ‘concreto’ com os polígonos que eles tinham dificuldades em reconhecer visualmente. Nesse raciocínio, resolvemos organizar os blocos da nossa sequência didática de forma que iniciássemos pelo tangram, vindo em seguida o geoplano e finalizando com a construção de pipas. O trabalho com o tangram foi organizado de forma que os alunos tivessem momentos de exploração do recurso, executassem as tarefas propostas pelos pesquisadores, expusessem oralmente seus pensamentos e as respostas obtidas na atividade e finalizassem, fazendo anotações em seus cadernos.

Apoiando-nos em Nasser (1996; 2000), Crowley (1994) e van Hiele (1957), podemos dizer que organizando o bloco dessa maneira, estávamos preparando uma proposta de ensino de geometria segundo as fases de aprendizagem propostas no modelo de van Hiele. Ao examirnarmos as respostas dos estudantes nas tarefas do bloco do tangram, foi possível observar a reação dos educandos quando se deparavam com desafios, isto é com situações-problema. Uma análise qualitativa das inferências feitas pelos alunos possibilitou-nos acompanhar que conhecimentos geométricos estavam sendo construídos e produzidos pelos estudantes e, consequentemente, o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos educandos.

O desenvolvimento de atividades com o uso do recurso didático tangram foi importante no auxilio ao desenvolvimento da visualização de triângulos, retângulos, quadrados, trapézios e de polígonos com mais de quatro lados. Por outro lado, os educandos aprenderam também com esse material a identificar lados, ângulos e vértices, algumas das características dos polígonos. Assim tomando Kaleff, Voto e Corrêa (2003) como referência, afirmamos que atividades deste bloco auxiliaram os alunos a desenvolverem estratégias que estavam no início do nível de análise das características dos polígonos, nível imediatamente superior ao nível de reconhecimento visual, no modelo de van Hiele.

O segundo recurso didático que aplicamos na nossa pesquisa de campo foi o geoplano. O trabalho com este recurso foi organizado de forma a proporcionar aos educandos momentos nos quais eles pudessem explorar livremente o recurso, dialogassem com os pesquisadores, colegas de sala e, ainda expusessem oralmente suas análises e percepções. A partir da análise das respostas que os educandos deram nas atividades trabalhadas neste bloco, podemos inferir que este recurso também auxiliou os educandos no desenvolvimento da visualização de polígonos como, por exemplo, triângulos, quadrados e polígonos com mais de quatro lados. O uso do recurso didático geoplano, pela possibilidade de visualização, foi importante para a apropriação do conceito de polígonos convexos e não convexos.

O trabalho com o geoplano também proporcionou aos estudantes momentos nos quais eles puderam desenvolver atividades que uniam criatividade, geometria e arte. Consolidados nas atividades criativas, os educandos mostraram que conseguiam reconhecer, visualmente, figuras geométricas com quantidade de lados maiores do que quatro lados, sendo capazes de nomeá-las, identificar características como ângulos, vértices e lados. Através desse recurso didático, desenvolvemos não só atividades que auxiliaram os estudantes no reconhecimento de segmentos de retas e de retas paralelas, perpendiculares e concorrentes, mas também, conseguiram compreender melhor o conceito de polígono convexo e não convexo.

O terceiro recurso didático que utilizamos em nossa pesquisa de campo foi a pipa. O trabalho com esse recurso foi planejado de maneira a proporcionar aos estudantes atividades nas quais eles pudessem explorar livremente o recurso, dialogassem com os pesquisadores, com os colegas de sala e, ainda expusessem oralmente suas visões e percepções. A construção de Pipas foi importante, pois nos permitiu fazer uma relação entre matemática, temas transversais e interdisciplinaridade, uma das orientações dos PCN's (BRASIL, 1998).

Através da análise das respostas dos estudantes no desenvolvimento de cada uma das atividades trabalhadas, inferimos que esse recurso auxiliou os alunos no desenvolvimento da visualização de quadriláteros e triângulos. Além disso, o recurso didático pipa foi importante na identificação de características como lados, ângulos, vértices e, no reconhecimento visual de retas paralelas, perpendiculares e concorrentes. As tarefas com o recurso permitiram aos alunos trocar experiências sobre a construção da pipa e, segundo Vygotsky (1993; 1998) e Baquero (1998) atuarem como mediadores, um na aprendizagem do outro. Pelas discussões entre os alunos, percebemos a apropriação da linguagem matemática, outra propriedade importante para a compreensão do modelo de van Hiele. Diante do exposto pensamos que a aplicação dos recursos didáticos tangram, geoplano e pipas auxiliaram no desenvolvimento do raciocínio geométrico dos sujeitos desta pesquisa.

Por meio das tarefas da nossa sequência, percebemos também que estávamos atuando com recursos didáticos que nos permitiam desenvolver atividades voltadas para a metodologia de resolução de problemas. Tais percepções podem ser observadas ao longo de toda a sequência didática. No bloco do tangram, por exemplo, nas atividades dos alunos A13, A15, A28, C19 e C13 (ver seção 4.2.2).

No bloco do geoplano, nas tarefas desenvolvidas por A15, A21, A28, C13, C18 e C19 (ver seção 4.2.3). E, no bloco da construção de pipas, as inferências e ações desenvolvidas pelos estudantes A14, A15, A21, A28; C13, C18, C19, C28 (ver seção 4.2.4). Tomando como referência Polya (1945/1995), Dante (1999), Onuchic e Allevato (2005), Santos-Wagner (2008) e Suydam (1997) consideramos que as atividades desenvolvidas em cada um dos blocos de nossa sequência didática proporcionaram aos estudantes momentos de resolução de problema. Portanto, há uma relação entre o uso dos recursos didáticos tangram, geoplano e pipas e a resolução de problemas em matemática.

Realizado o trabalho com o tangram, o geoplano e a construção de pipas aplicamos um teste diagnóstico final com o qual analisamos o nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes ao final da pesquisa. Concluímos que, os sujeitos deste estudo foram capazes de reconhecer, visualmente, triângulos, quadrados, trapézios hexágonos, segmentos de retas paralelas, retas paralelas, segmentos de retas perpendiculares e retas perpendiculares. Também foram capazes de identificar polígonos convexos e não convexos e características como lados, ângulos e vértices dos polígonos estudados. Tal conclusão pode ser confirmada analisando os gráficos 5 e 6.

Os recursos didáticos desempenham um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, desde que se tenha clareza das possibilidades e dos limites que cada um deles apresenta e de como eles podem ser inseridos numa proposta global de trabalhos. Por isso, pensamos que o professor precisa conhecer o recurso didático que pretende usar para poder aproveitá-lo como instrumento de aprendizagem e por meio dele proporcionar situações onde o aluno apresente avanços na construção de conceitos e na resolução de problemas propostos.

Os recursos didáticos explorados nesta pesquisa possuem a vantagem de serem de fácil construção, manuseio e por isso acessível a qualquer professor. Por meio do tangram, geoplano e da construção de pipas os estudantes puderam explorar e identificar propriedades geométricas; classificar, selecionar e mover as peças que compõem o quebra-cabeças; apropriar-se do vocabulário específico relacionado às formas geométricas elementares; e aplicar diferentes estratégias para resolução de problemas (Schoenfeld, 1980).

As atividades desenvolvidas nesta pesquisa proporcionaram uma interação entre os educandos, despertaram a colaboração, a motivação e a ajuda mútua, produzindo um maior entendimento do conteúdo. De acordo com Vygotsky (1993; 1998), a aprendizagem ocorre na interação entre as pessoas. O estudante consegue aprender e entender o que ainda não sabia no diálogo com os outros colegas.

Resolvemos incluir, em nossas considerações finais, os temas, o que aprendemos e os possíveis desdobramentos desta pesquisa. Quando refletimos sobre nossa pesquisa, lembramos que uma de nossas alegrias neste trabalho pode ser muito bem expressa em

> Viver!
> E não ter a vergonha
> De ser feliz
> Cantar e cantar e cantar
> A beleza de ser
> Um eterno aprendiz...
> (O que é o que é Gonzaguinha-1982)

Esta investigação nos trouxe de volta a alegria de ser um aprendiz, nos deu a oportunidade de nos colocar na condição de aprendente. Entre as nossas aprendizagens mais marcantes estão:

O primeiro momento de aprendizagem consistiu no desafio de mudar de paradigma de pesquisa, pois as pesquisas feitas anteriormente seguiram o paradigma quantitativo como modelo de investigação. E, nesta investigação aceitamos o desafio de elaborar, planejar e executar um trabalho na linha qualitativa. O resultado está escrito neste relatório final do estudo desenvolvido.

A segunda aprendizagem veio de uma certeza de que tanto Skinner, quanto suas ideias já haviam morrido. A surpresa surgiu quando num trabalho, sobre a vida e a obra de Skinner, apresentado na aula de seminário C, disciplina ministrada pela professora Ligia A. Sad, no segundo semestre de 2008, comecei a refletir sobre este educador e psicólogo. E, as reflexões continuaram nas conversas telefônicas e via email com a minha orientadora sobre este mesmo teórico. Nós percebemos que utilizávamos algumas das teorias de Skinner no nosso cotidiano escolar muito mais do que imaginávamos. Por essas razões, concluímos que não nos restava outra alternativa a não ser ressuscitar as ideias deste teórico e refletir mais cuidadosamente sobre o que funcionava ou não no processo de ensino-aprendizagem. E nos fez repensar sobre alguns educadores do passado e alguns atuais e, perceber que nem sempre os educadores mais divulgados e comentados na atualidade oferecem todos os caminhos possíveis no processo educativo.

Já a terceira aprendizagem foi provocada pela pergunta de um aluno do sexto ano (leia capítulo 2.3, p. 48). Em um de nossos momentos de pesquisa de campo, o aluno nos perguntou qual era o nome dado a um polígono de 25 lados. Tal questionamento gerou para nós momentos de pesquisa, discussão e resolução de problemas.

O quarto momento de aprendizagem veio da percepção que fomos captando do processo de ensino-aprendizagem ao longo do estudo e nesta fase de relato final. A maneira como desenvolvemos nossa sequência didática, isto é, trabalhando todas as atividades do tangram, depois todas as tarefas do geoplano e, por fim, todas as atividades da construção de pipas provocou em alguns momentos cansaço nos estudantes. Ter a oportunidade de registrar todas as etapas de planejamento, execução e análise dos acontecimentos de aulas e poder compartilhar todas estas fases constantemente com minha orientadora serviram de recursos para esta outra aprendizagem. E despertou em nós o desejo de podermos explorar futuramente esta sequência didática alternando mais o uso dos recursos e verificando de forma mais atenta as pistas dos alunos sobre momentos em que precisamos alterar alguns dos planejamentos.

Os momentos citados nos mostraram que aprender não tem idade, posição social, que educador também aprende enquanto ensina e como dizia Gonzaguinha basta não ter a vergonha de ser feliz e se permitir encantar-se com a beleza de ser um eterno aprendiz. Foi isto que fizemos no momento em que decimos concorrer há uma vaga no mestrado, nos momentos de aulas e durante a nossa pesquisa de campo.

As outras aprendizagens que tivemos neste trabalho estão relacionadas aos instrumentos de pesquisa que utilizamos. Sabemos que podemos melhorá-los propondo que neles sejam incluídas questões, por meio das quais, pedimos aos estudantes que dado o nome do polígono, faça um desenho que represente tal forma geométrica. Pois, o teste que aplicamos na nossa pesquisa investiga se o estudante reconhece um dado polígono no meio de outros, e se o educando é capaz de ligar o nome de um polígono ao desenho que o representa.

Finalizando, reconhecemos que a nossa pesquisa indicou que é possível realizar um trabalho com os recursos didáticos como tangram, geoplano e pipas para auxiliar o desenvolvimento do nível de reconhecimento visual de poligonos. E, esse trabalho, embasado no modelo de van Hiele, pode possibilitar o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes do ensino fundamental.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23., 2000, Caxambu, MG. **Anais**... Caxambu: ANPED, 2000. Disponível em <http://www.anped.org.br> acesso em: 24 fev. 2009. 18 p.

AMARAL, M. N. C. P. Dewey: jogo e filosofia da experiência democrática. In: KISHIMOTO, T. M. (org.). **O brincar e suas teorias**. São Paulo: Pioneira, 1998, pp. 79-107.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. **Novo praticando matemática**. São Paulo: Ed. do Brasil, 2006.

ARAÚJO, N. S. R. **A educação de jovens e adultos e a resolução de problemas matemáticos**. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu, MG. **Anais**..., Caxambu: ANPED, 2001. CD-ROM, 14 p.

______. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, jan./jun. 1999. Disponível em: <http://sites.uol.com.br/joneicb>. Acesso em: 05 ago. 2008.

BASSANEZI, C. B. **Ensino – aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BAQUERO, R. **Vygotsky e a aprendizagem escolar**. Tradução de Ernani F. da Fonseca Rosa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. de C.; ARAUJO, J. de L. (org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática e implicações no ensino-aprendizagem de matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 1999. 134p.

BORUCHOVITCH, E.; BZUNECK, J. A. (org.). **A motivação do aluno:** contribuições da psicologia contemporânea. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. **Guia de livros didáticos 1998**. Ministério da Educação. Brasilia: MEC, 1997.

______. **Guia de livros didáticos 2006**. Ministério da Educação. Brasilia: MEC, 2005.

______. **Guia de livros didáticos 2008**. Ministério da Educação. Brasilia: MEC, 2007.

BRITO, M. R. F. de. Psicologia e educação matemática. **Revista de Educação Matemática**, SBEM-SP, ano 1, nº 1, p. 31-63, setembro 1993.

BROETTO, G. C. **Resolução de problemas e desempenho escolar em matemática no ensino fundamental.** 2004. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REY, R. E. (org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997 (Obra publicada originalmente em inglês em 1980), p.32 – 48.

CARRAHER, D. W. Educação tradicional e educação moderna. In: CARRAHER, T. N. (org.). **Aprender pensando**: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M T. Geometry and spatial reasoning. In: GROUWS, D. A. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan, 1992. p. 420-464.

COXETER, H.S.M. **Regular polytopes**. 3rd edition. Dover, New York. 1973.

CROWLEY, M. L. **O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** IN: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). Aprendendo e ensinando geometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994 (Obra publicada originalmente em inglês em 1987.), p. 1- 20.

D'AMBROSIO, U. **O programa etnomatemática**: história, metodologia e pedagogia. 2004. Disponível em: <http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm>. Acesso em: 10 fev. 2009.

______. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan/abr, 2005.

DANA, M. E. Geometria: um enriquecimento para a escola elementar. In: LINDIQUIST, M. M.; SHULTE, A P. (org.) **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994 (Obra publicada originalmente em inglês em 1987.), p.141-155.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 1999.

DEGUIRE, L. J. Geometria: um caminho para o ensino da resolução de problemas, do jardim-de-infância à nona série**.** IN: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994 (Obra publicada originalmente em inglês em 1987.), p. 73 - 85.

DELATORRE, P. C. S. **A Educação matemática e o software Cabri:** uma pesquisa-ação com alunos de 7ª série do ensino fundamental. São Paulo. 2006. 93f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente, S.P.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994 (Obra publicada originalmente em inglês em 1987.), p.156 -167.

DOMINGOS, J.; RIBEIRO, W. S.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Geoplano circular: uma alternativa para se introduzir o geometria plana no ensino fundamental. In: XIII Encontro Baiano de Educação Matemática, 2009, Jequié. **Caderno de Resumos do XIII EBEM** – As tecnologias da informação e comunicação na formação do professor de matemática. Jequié: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e SBEM, Reginonal Bahia, 2009. p. 37

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Fazendo arte com a matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FERREIRA, A. C. **O desafio de ensinar-aprender matemática no noturno**: Um estudo das crenças de estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte. 1988. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa Brasiléia em educação matemática:** o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. 1994. 425f. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática** – percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. **Boletim SBEM-SP**, Ano 4-nº 7, p. 4-9, 1993.

GALLANGHER, K. Resolução de problemas com o uso da matemática recreativa. In: KRULIK, S.; REYS, R. E (org.).A resolução de problemas na matemática escolar. SãoPaulo: Atual, 1997. p.235-246. (A obra foi publicada originalmente em inglês em 1980.).

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. 238f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GOMES, A. L. A. A. **A dinâmica do pensamento geométrico**: aprendendo a enxergar meias verdades e a construir novos significados. 1997. 229f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

GONÇALVES, E. C. N. **O ensino de geometria nas séries iniciais em Petrolina:** do abandono a uma nova perspectiva. 2004. 181f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

GRANDO, R. C. **O jogo suas possibilidades metodológicas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática**. 1995. 194f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 239f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANI JUNIOR, J. R. **A conquista da Matemática** Nova. São Paulo: FTD, 5ª série, 1998.

GUTIÉRRES, A. Procesos y habilidades em visualización. **Memorias del congreso Internacional sobre investigaciones em educacíon matemática** – Valência, España,1991. p. 44 - 59.

HARDY, G. H. **Em defesa de um matemático**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

HERSHKOWITZ, R.; VINNER, S. The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In: **Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. 1983. p. 223-228.

HERSHKOWITZ, R . Visualização em geometria: **as duas faces da moeda. Boletim GEPEM**, Ano XVIII, nº 32, p.45-61, 1994.

HILBERT, D. **The foudantions of geometry**. Ilinois: The Open Court Publish Company, 1950.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**. 6.ed. São Paulo: Atual, 2009.

INOUE, R. K. M. **O processo de formação do conceito de quadriláteros, envolvendo alunos de uma 6ª série do ensino fundamental**. 2004. 170f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Mestrado Acadêmico em Educação, Universidade do Vale do Itajaí, Blumenau.

KALEFF, A. M. M. R; VOTTO, Bárbara Gomes. Do concreto ao virtual: uma coleção de quebra-cabeças planos especiais para o ensino de geometria. In: VI Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, 2008, Rio de Janeiro. **Anais do VI Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estrado do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Sociedade brasileira de Educação Matemática-RJ, 2008. p. 1 - 8.

______. **Tomando o ensino da geometria em nossas mãos**. In A Educação Matemática em Revista-SBEM – ano I, n. 2, p. 19 -25, 1994.

______. Da **rigidez do olhar euclidiano às (im)possilidades de (trans)formação dos conhecimentos geométricos do professor de matemática**. 2004. 450f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal Fluminense. Niterói.

KALEFF, A. M. M. R.; VOTTO, B. G.; CORRÊA, B. M. **Utilizando quebra-cabeças planos especiais no ensino de geometria**. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Rio de Janeiro. P. 22-30, 2003.

KALEFF, A. M. M.R.; et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: O modelo Van Hiele. **Bolema**, p. 21-30, 1994.

KAMII, C.; DEVRIES, R., **A criança e o número**. Campinas: Papirus. pré-escolar Porto Alegre, Artes Médicas. 1991.

KILPATRICK, J.; SILVER, E. A. Unfinished business: challenges for mathematics educators in the next decades. In: BURKE, M. J.; CURCIO, F. R. (ed.). NCTM 2000 Yearbook, **Learning mathematics for a new century**. Reston/VA: NCTM, 2000. p.223-235.

KISHIMOTO, T., M. Froebel e a concepção de jogo infantil. In: KISHIMOTO, T., M (org.).**O brincar e suas teorias**. São Paulo: Ed Thompson, 1996, p 57-76.

______. **Jogos Infantis**: o jogo, a criança e a educação. Petrópolis: Vozes, 1993.

LOPES, M. L. M. Leite; NASSER, L. (Coord.) **Geometria**: na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

LORENZATO S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, p. 3 – 13, 1995.

______. **Educação infantil e percepção matemática.** Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2008.(Coleção formação de professores)

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LUJAN, M. L. **A geometria na primeira série do 1º grau um trabalho na perspectiva de van Hiele**. 1997. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação). – Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MEDEIROS Jr, R. J. **Resolução de problemas e ação didática em matemática no ensino fundamental**. 2007. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

MELLO, E. G. S. **Demonstração**: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de geometria. 1999. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MORIN, E. **O método 3**: o conhecimento do conhecimento. Porto Alegre:Sulinas, 1999.

MOURA M. O. de. **A séria busca no jogo**: do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (org.) Jogo, brinquedo e brincadeira e a educação. Cortez, São Paulo. 1997. p. 32 - 56.

MUSSER, G. L.; SHAUGHNESSY, J. M. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In: KRULIK, Stephen; REY, Robert E. (org.) **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997 obra publicada originalmente em 1980, p. 188 – 201.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão IM/UFRJ, 2000.

NASSER, L. Uma forma de organizar o pensamento. Revista Nova Escola. Ano XI, nº 94, p. 17 - 25, jun. 1996.

NEVES, E. B. T. **Recursos didáticos**: Mediadores semiotizando o processo de ensino-aprendizagem. 2005. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

OLIVEIRA, C. C. M. **Componentes de contexto local na matemática escolar:** uma opção para o ensino-aprendizagem. 2007. 218f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

ONUCHIC, L. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problema. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA M. C. (org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 2 ed. Revisada. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAVANELLO, R. M. **O abandono da geometria**: uma visão histórica. 1989. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______. **Formação de possibilidades cognitivas em noções de geometria.** 1995. 179f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, CEMPEM/F. E. UNICAMP, ano 1 – n° 1, p. 7-18; 1993.

PEREIRA, M. R. O. **A geometria escolar**: uma análise dos estudos sobre o seu abandono. 2001. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. Tradução de. D'AMORIM, M. A. M.; SILVA, P. S. L. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 21. ed., 1995.

______. **O juízo moral na criança**. Tradução de Elzon Lenardon. São Paulo: Summus, 2ª ed., 1994.

______. **Estudos sociológicos**. Rio de Janeiro: Editora Forense.1973.

PIAGET, J.; INHELDER, B.. **A psicologia da criança**. São Paulo : DIFEL, 1982.

PIROLA, N. A. **Um estudo sobre a formação dos conceitos de triângulos e paralelogramos em alunos de 1º grau**. 1995. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Publicado originalmente em inglês em 1945. 196p.

PRESMEG, N.. Generalization using imagery in mathematics. In: ENGLISH, Lyn (ed.). **Mathematical reasoning**: analogies, metaphors and images. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1997. p. 299-312.

RIPPLINGER, H. M. G. **A simetria nas práticas escolares**. 2006. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

ROEDER, Silvana Ziger. **Brinquedoteca universitária**: processo de formação do pedagogo e contribuição para a prática pedagógica. 2007. 179f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Tuiuti do Paraná, Curitiba.

SANTANA, L. M. F. **Crianças aprendendo Matemática por meio da resolução de problemas.** 1999. p. 176f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SANTOS, V. M. P. dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática***:* métodos alternativos. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim do Gepem**, Rio de Janeiro, UFRRJ, n. 53, p. 43-74, jul/dez, 2008

_______. **Conversas e mensagens da orientadora sobre como elaborar um projeto de pesquisa**, 2008; 2009; 2010.

SCHOENFELD, A. H. Heurísticas na sala de aula. In: KRULIK, S.; REY, R. E. (org.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução: Hegino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. Obra publicada originalmente em inglês em 1980, p. 13 – 31.

SCHONS, L. M. B. **O geoplano como recurso didático para a aprendizagem de conceitos e aplicações de triângulos e quadriláteros**. 2008. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Pós-graduação do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Rio Grande do Sul.

SENECHAL, M. **Shape**. On the shoulders of giants. New approaches to numeracy. National Academy Press, Washington DC. 1990.

SILVA, E. C. **Prática matemática**: um exame de sua influência nas concepções e atitudes dos professores e alunos do ensino médio. 2007. 222f. Dissertação

(Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SILVA, C. M. S. da; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. O que um iniciante deve saber sobre a pesquisa em Educação Matemática? **Caderno de Pesquisa em Educação,** Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Pedagógico, Programa de Pós-Graduação em Educação, v. 10, n. 19, jan/jun. 1999. Vitória: PPGE, p. 10-23.

SILVA, S. F. da.; RIBERO, W. S.; DOMINGOS, J.; SANTOS-WAGNER, V. M. P dos; GOMES, I.C.R.. Utilizando o geoplano circular na introdução de geometria plana com alunos das séries iniciais. In: II SEMINÁRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO CEFETES, 2008, Vitória.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática**. São Paulo: FTD, 2009. (Coleção Vontade de Saber)

SUYDAM, M. N. The shape of instruction in geometry: some highlights from research. **Mathematics Teacher**, NCTM, Vol. 78, p. 481 – 486, 1985.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión**: en conexión com la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Utrecht: Universidad Real de Utrecht. 1957. 148 f. Tese (Doctor en Matemáticas y Ciencias Naurales). Universidad Real de Utrecht, Utrecht.

______. **Structure and Insigth**. Academic press, 1986.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. Tradução de. Jéferson L. Camargo. São Paulo, SP: Martins Fontes, 1993.

______. **A formação social da mente**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes,1998.

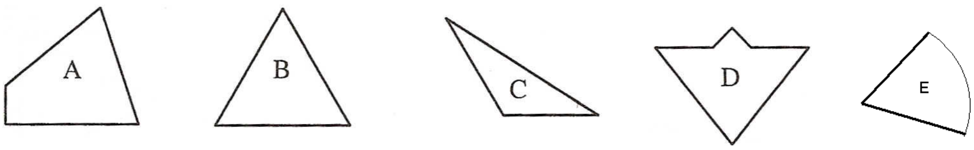
ANEXOS

ANEXO A – Teste diagnóstico inicial - Nível de Reconhecimento Visual

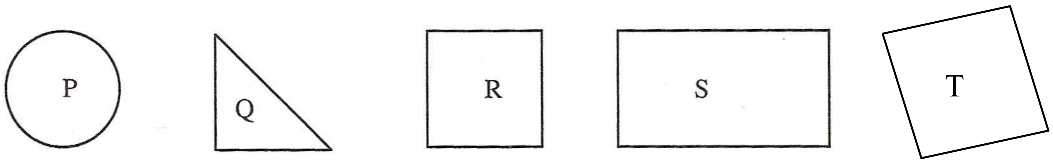
Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Nome: ____**Data:** ________
Série: ____ **Turma:** ______

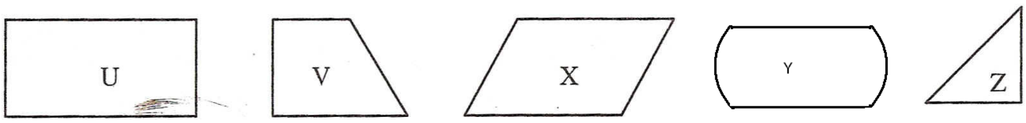
1) **Assinale** o(s) **triângulo(s):**



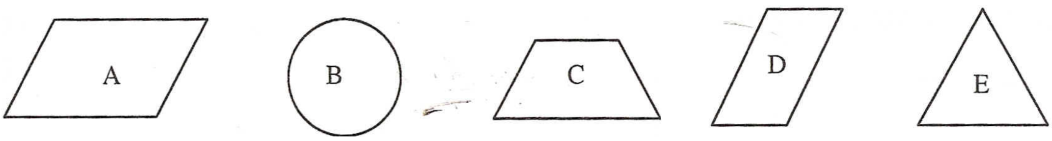
2) **Assinale** o(s) **quadrado(s):**



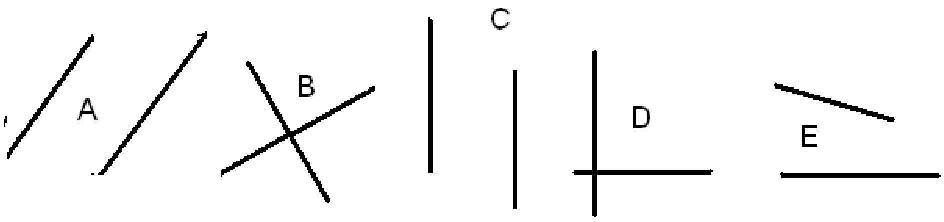
3) **Assinale** o(s) **retângulo(s):**



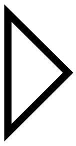
4) Assinale o(s) paralelogramo(s):

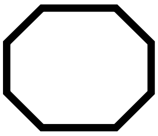


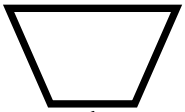
5) Assinale os pares de segmentos de retas paralelas:

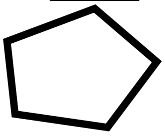


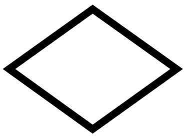
6) Ligue cada desenho ao nome que ele possui:

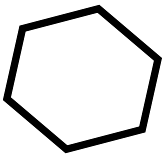

A .

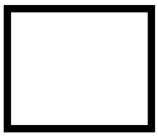

B .


C .


D .


E .


F .


G .

- Quadrado
- Pentágono
- Losango
- Hexágono
- Triângulo
- Octógono
- Trapézio

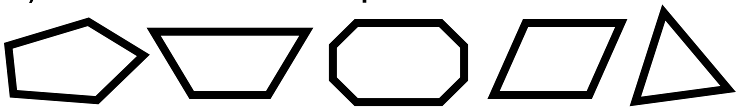
ANEXO B – Teste diagnóstico final - Nível de Reconhecimento Visual

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Nome: ____ Idade : ______

Série: ____ Turma: _____

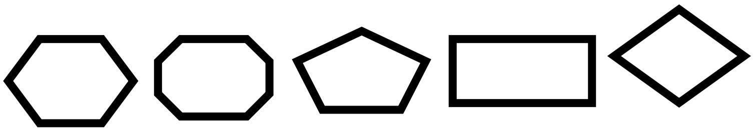
1) QUESTÃO:
   a) **Assinale com um X os quadriláteros.**



b)Explique o porquê você acha que a(s) figura(s) que você assinalou são quadriláteros.

____
____

2) QUESTÃO:
   a) **Assinale com um X os hexágonos.**



b)Explique o porquê você acha que a(s) figura(s) que você assinalou são hexágonos.

____
____

3) QUESTÃO:
   a) **Assinale com um X os trapézios.**

   b) **Explique o porquê você acha que a(s) figura(s) que você assinalou são trapézios**.

____
____

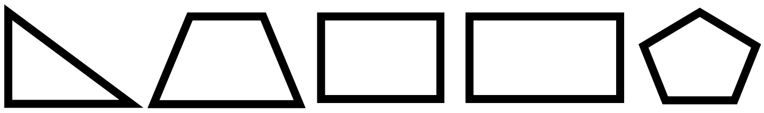
4) QUESTÃO:
   a) **Marque um X a(s) figura(s) geométrica(s) que possuem (possui) lados paralelos.**

   b) **Explique o porquê você acha que a(s) figura(s) que você assinalou possuem lados paralelos.**

____
____

5) QUESTÃO:

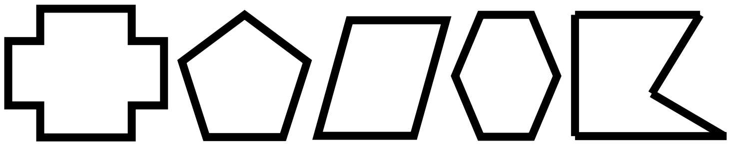
a) Marque com um X a(s) figura(s) geométrica(s) que possui (possuem) lados perpendiculares.



b) Explique o porquê você acha que a(s) figura(s) que você assinalou possuem lados perpendiculares.

6) QUESTÃO:

a) **Marque com um X os polígonos não convexos.**

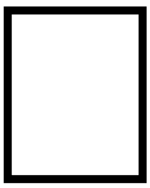


b) **Explique o porquê você acha que a(s) figura(s) que você assinalou são polígonos não convexos.**

7) QUESTÃO:

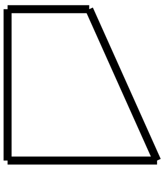
Escreva três características do polígono desenhado abaixo:

Figura 1



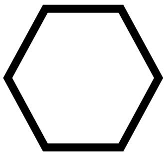
Quantos lados ele possui?____________
Quantos vértices ele possui?__________
Quantos ângulos ele possui?___________
Possui lados paralelos?_______________
Possui lados perpendiculares?__________

Figura 2



Quantos lados ele possui?____________
Quantos vértices ele possui?__________
Quantos ângulos ele possui?___________
Possui lados paralelos?_______________
Possui lados perpendiculares?__________

Figura 3



Quantos lados ele possui?____________
Quantos vértices ele possui?__________
Quantos ângulos ele possui?___________
Possui lados paralelos?_______________
Possui lados perpendiculares?__________

ANEXO C1 – Primeira lenda do tangram

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Os objetivos propostos para esta etapa são:
Ler e discutir esta versão do tangram; analisar a leitura dos alunos; e consultar no dicionário palavras que não conhecem e estão nesta versão da lenda do tangram.
O tempo previsto para esta etapa da atividade: 01 (uma) aula.
Desenvolvendo a atividade: Versão 1 – Será lida por um aluno.

Um pouquinho de história
Tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa, formado por 7 peças geométricas que pode formar milhares de figuras diferentes. A origem do nome é considerada uma homenagem à dinastia chinesa Tan e gram viria do latim e significa ordenar, dispor.
Existem várias versões sobre a origem do tangram. A que mais gostamos conta que um serviçal quebrou o mais belo vaso do palácio imperial em 7 pedaços e o Imperador, zeloso com sua coleção de cerâmicas, exigia a imediata reposição do vaso ou o serviçal perderia sua cabeça.
Desesperado, o pobre serviçal tentou a todo custo colocar as peças, porém não conseguiu. No entanto, ele notou que, com as 7 peças, poderia representar não apenas vasos, mas toda a sorte de figuras. Ao ser chamado para dar conta do vaso, o serviçal mostrou o que tinha descoberto. O Imperador adorou a brincadeira e poupou o pescoço de nosso querido herói.
Com isso, ganhamos um quebra-cabeça instigante, de onde com apenas 7 peças, podemos representar milhares de problemas e desenvolver a percepção espacial, a concentração e a criatividade.

Questões respondidas pelos estudantes
Aluno: **Data:**
Série:

a) Você já ouviu falar no tangram? ___________Conte-nos o que você ouviu.
b) Releia o texto e escreva aqui as palavras que você não conhece.
c) Consulte o dicionário para saber o significado delas.

ANEXO C2 – Segunda lenda do tangram

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Os objetivos propostos para esta etapa são:
Ler e discutir esta versão do tangram; analisar a leitura dos alunos; e consultar no dicionário palavras que não conhecem e estão nesta versão da lenda do tangram.
O tempo previsto para esta etapa da atividade: 01 (uma) aula.
Desenvolvendo a atividade: Versão 2 – Será lida por um aluno.

A Lenda do tangram
Não conhecemos ao certo a origem do tangram, nem a data de concepção, nem sequer o seu inventor. A referência mais antiga é de um painel em madeira, de 1780 de Utamaro com a imagem de duas senhoras chinesas a resolver um tangram. Em chinês, o tangram é conhecido como Chi chiao tu, ou as Sete Peças Inteligentes.

A mais antiga publicação com exercícios de tangram é do início do século XIX. Chegou rapidamente aos EUA e à Europa e ficou conhecido como o puzzle chinês. Desde então, são

criados tangrans em todos os tipos de materiais, desde cartão a pedra, plástico ou metal. Um dos exemplos interessantes é um conjunto de mesas descobertas na China, que data do século XIX.
A Enciclopédia de tangram foi escrita por uma mulher, na China, há 130 anos. É composta por seis volumes e contém mais de 1700 problemas para resolver.
Conta-se que, no século XII, um monge taoísta deu ao seu discípulo um quadrado de porcelana, um rolo de papel de arroz, pincel e tintas, e disse: Vai e viaja pelo mundo. Anota tudo que vires de belo e depois volta.
A emoção de ver coisas tão belas fez com que o discípulo deixasse cair o quadrado de porcelana, que se partiu em sete pedaços. O discípulo, tentando reproduzir o quadrado, viu formar uma imensidão de figuras belas e conhecidas a partir das sete peças.
De repente, percebeu que não precisaria mais correr o mundo. Tudo de belo que existia, poderia ser formado pelo tangram.

Atividade desenvolvida com os alunos
Aluno: **Data:**
Série:

a) Releia o texto e escreva aqui as palavras que você não conhece.
b) Consulte o dicionário para saber o significado delas.

ANEXO C3 – Terceira lenda do tangram

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Os objetivos propostos para esta etapa são:
Ler e discutir esta versão do tangram; analisar a leitura dos alunos; e consultar no dicionário palavras que não conhecem e estão nesta versão da lenda do tangram
O tempo previsto para esta etapa da atividade: 01 (uma) aula.
Desenvolvendo a atividade: Versão 3 – Será lida por um aluno.

A lenda do tangram
Conta a lenda que um jovem chinês despedia-se de seu mestre, pois iniciaria uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou- lhe um espelho de forma quadrada e disse:
- Com esse espelho você registrará tudo que encontrar durante a viagem, para mostrar-me na volta. O discípulo, surpreso, indagou:
- Mas, mestre, como com um simples espelho, eu poderei mostrar-lhe tudo o que encontrar durante a viagem?
No momento em que fazia esta pergunta, o espelho caiu-lhe das mãos, quebrando-se em sete peças. Então o mestre disse:
-Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.
Lendas e histórias como essas sempre cercam objetos ou fatos de cuja origem temos pouco ou nenhum conhecimento, como é o caso do tangram. Se é ou não verdade, pouco importa: o que vale é a magia, própria dos mitos e lendas.

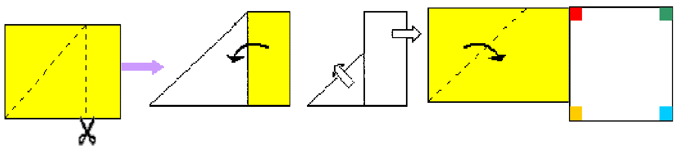
Agora responda às questões abaixo:
a) Você já ouviu falar no tangram? ___________Conte-nos o que você ouviu.
a) Releia o texto e escreva aqui as palavras que você não conhece.
b) Consulte o dicionário para saber o significado delas.
c) O que há em comum entre as três histórias do tangram?
d) Que tal agora você criar uma nova história para o tangram?
e) Agora vamos utilizar o tangram para escrever as palavras que você não conhece.

ANEXO D – Construção do tangram

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

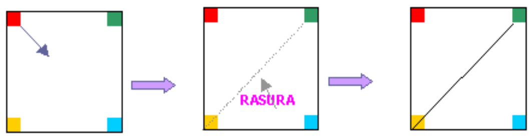
Os objetivos propostos para esta etapa são:
Construir o tangram; reconhecer visualmente as peças do tangram; identificar cada peça do tangram; e nomear cada peça do tangram.
O tempo previsto para esta etapa da atividade: 01 (uma) aula.
Materiais necessários para esta etapa da atividade são:
02 (duas) folhas de papel sulfite tamanho A4; 01 (uma) régua de 30 cm; 01 (uma) tesoura sem ponta; 01 (uma) caixa de lápis de cor; e O1(um) lápis ou lapiseira.
Para construirmos o tangram, utilizaremos uma folha de papel A4 e seguiremos os passos abaixo: (Esta construção abaixo tem como fonte inspiradora as informações obtidas no site http://netescola.pr.gov.br/netescola/escola/087045005/constru%C3%A7%C3%A3o_de_tangran.htm)

Construindo um tangram
Sabemos que o tangram é um antigo jogo chinês formado por sete peças (polígonos) com os quais podem ser construídas figuras variadas. Para facilitar a construção do mesmo, resolvemos dividi-la em 9 passos.

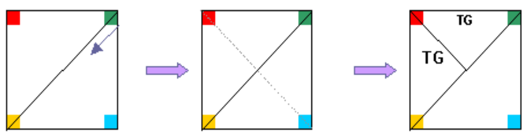


1º PASSO: Construir um quadrado a partir de uma folha de papel sulfite A4, medindo cerca de 20 cm de lado. Seguir a esquematização dos desenhos:

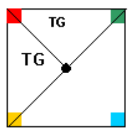
2º PASSO: Marque o vértice (canto) superior esquerdo com um quadradinho vermelho, o direito superior com um quadradinho verde, o vértice inferior esquerdo com um quadradinho amarelo e o vértice inferior direito com um quadradinho azul. Conforme ilustração abaixo:
3º PASSO: Faça uma dobra unindo o quadradinho vermelho ao azul de modo a obter uma rasura que corresponda a uma ligação entre o quadradinho verde e o amarelo. Com a ajuda da régua, passe uma reta com a caneta, formalizando a união do quadradinho verde ao amarelo no qual originará uma diagonal do quadrado maior. Observe o modelo ao lado:



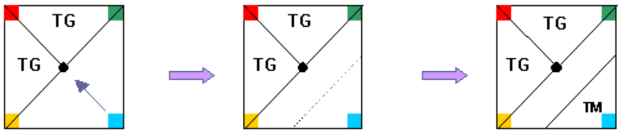
4º PASSO: Agora faça a dobra, unindo o quadradinho verde ao amarelo, obtendo uma rasura que une o quadradinho vermelho ao azul, posteriormente, trace uma reta, com o apoio da régua e da caneta, do quadradinho vermelho até a diagonal formada na união do quadradinho verde com o amarelo. Ilustração ao lado:



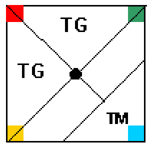
5º PASSO: Marque uma bolinha de cor preta no centro do quadrado. Ela deverá coincidir com o ponto de intersecção (encontro) da reta traçada no passo anterior com a diagonal obtida no 3º passo. Observe a figura ao lado:



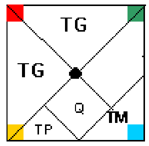
6º PASSO: Seguindo a montagem, encoste o quadradinho azul na bolinha preta que foi feita no passo anterior, de maneira a obter uma rasura formando uma paralela inferior à diagonal. Em seguida, trace com a caneta sobre a rasura obtida, formando o triângulo médio. Observe a figura a seguir:



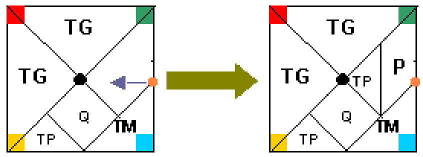
7º PASSO: Agora passe uma reta, iniciando-a no centro do triângulo (TM) que foi caracterizado na atividade anterior, levando-a até o centro da diagonal, onde se encontra a bolinha preta. Essa reta coincidirá com a rasura que teve origem na atividade do 4º passo. Conforme ilustração ao lado.



8º PASSO: Encoste o quadradinho amarelo na bolinha preta no centro do quadrado. A partir da rasura obtida na dobra, faça uma reta dando origem a um triângulo pequeno (TP) e a um quadrado (Q). Veja figura ao lado:



9º PASSO: Finalmente, faça uma bolinha de cor alaranjada no vértice do triângulo (TM) que se encontra no centro da reta que liga o quadradinho verde ao azul. Encoste a bolinha alaranjada na bolinha preta ao centro. Com a dobra realizada, obterá uma rasura que formará um outro triângulo pequeno (TP) e um paralelogramo (P). Veja a ilustração ao lado: Recorte os traçados e obtenha diferentes figuras planas para serem trabalhadas na formação de inúmeras figuras de acordo com a imaginação do aluno.



ANEXO E – Atividade livre utilizando o tangram

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

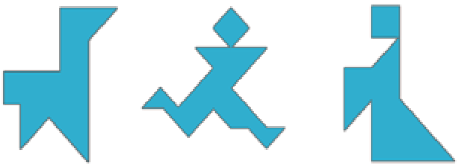
Introdução:
Nesta atividade nosso objetivo geral é conhecer as peças do tangram e explorar livremente as possibilidades que ele nos oferece ao tentarmos construir outras formas a partir das sete peças. Para atingir a meta proposta necessitaremos de materiais como: um tangram; um retroprojetor e uma transparência com as formas a serem sugeridas para os alunos contruirem (ou um data show e uma página com as formas); lapiseira e lápis de cor. Com a intenção de facilitar o nosso trabalho, decidimos dividir esta etapa em três partes, a saber: iniciando a atividade, construindo algumas figuras propostas e anotando as informações sobre cada forma construída. As informações adicionais de cada uma destas partes encontram-se descritas abaixo.

Objetivos desta parte da atividade são:
Conhecer as peças do tangram; explorar livremente as possibilidades do tangram; trabalhar com a criatividade do aluno; e construir algumas figuras sugeridas pelo pesquisador.
Tempo necessário para a realização desta parte da atividade:
Será necessário 01(uma) aula para desenvolver esta atividade. Esta parte da pesquisa será dividida em três momentos relatados aqui.

Primeiro momento: Iniciando a atividade.
Nesta parte da atividade será sugerido ao aluno que tente se inspirar numa das versões da história do tangram para montar as figuras que a imaginação dele permitir. Para desenvolver esta etapa da pesquisa, utilizaremos 10 minutos.

Segundo momento: Nesta parte da atividade será fornecida ao aluno a seguinte orientação: Usando todas as peças do tangram (sem sobrepô-las) construa as figuras:

figura1 figura 2 figura 3



Para desenvolver esta etapa da pesquisa utilizaremos 20 minutos.

Terceiro momento: Nesta etapa da atividade estamos resumindo a terceira etapa e preparando o estudante para os desafios que eles enfrentarão na quarta etapa.

a) Quantas das figuras acima você conseguiu construir? b) Qual das figuras acima tem alguma relação com as histórias do tangram? c) O que achou desta atividade ?

Escolha uma das figuras que você construiu com o tangram e responda às seguintes perguntas.

a) Quantos lados ela tem? b) Quanto mede cada lado? c) Você já viu esta figura antes? d) Você sabe o nome dela ?__________ Qual?__________

ANEXO F1 – Atividade orientada utilizando tangram

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Introdução:
Nesta atividade nosso objetivo geral é analisar, com a participação dos alunos, as características e propriedades de cada figura (polígonos) construída utilizando o tangram. Para atingir a meta proposta, necessitaremos de materiais como: um tangram, um retro-projetor com uma transparência com as formas que serão construídas pelos alunos, lapiseira e lápis de cor. Na tentativa de facilitar o desenvolvimento do nosso trabalho, decidimos dividir esta etapa em duas partes, a saber: reconhecendo as peças do tangram e construindo algumas figuras, de acordo com regras. As informações adicionais sobre cada uma destas partes encontram-se descritas abaixo.

Os objetivos propostos para esta parte da atividade são:
Identificar as peças do tangram; classificar polígonos quanto à quantidade de lados, ângulos e vértices; construir polígonos diferentes dos que estão presentes nas peças do tangram; classificar os polígonos em convexos e não convexos; e nomear os polígonos construídos nesta etapa.

Tempo necessário para o desenvolvimento desta atividade:
Precisa-se de 04 (quatro) aulas para o desenvolvimento desta atividade, que serão distribuídas da seguinte forma: uma aula para a etapa “conhecendo as peças do tangram” e três aulas para a etapa “construindo várias formas usando as peças do tangram”.

Primeiro momento: Conhecendo as peças do tangram. Para esta atividade serão utilizados 20 minutos. Neste momento discutiremos com os alunos as características de cada peça do tangram, para tal dividimos a etapa em duas partes, a saber:

I) **Quanto à quantidade de lados**
a) Quantas figuras de três lados temos no tangram? b) Quantas figuras de quatro lados encontramos no tangram? c) No tangram existe alguma figura com mais de quatro lados?_________ Qual(is) é(são) a(s) peça(s)? ____________

II) **Quanto à medida dos ângulos**
a) Quais são as figuras (peças) do tangram que possuem no mínimo um ângulo medindo 90°? b) Existe alguma figura com pelo menos um ângulo medindo menos que 90°? _____ Qual(is) é(são) a(s) peça(s)?____________

Segundo momento: Construindo várias formas usando as peças o tangram.

Neste momento os alunos construirão os polígonos sugeridos pelo pesquisador e após a discussão resumirão as discussões classificando as figuras geométricas quanto à quantidade de lados. Para esta etapa da atividade, utilizaremos 2 aulas, as quais serão distribuídas da seguinte forma: uma aula para a III) e uma aula para a IV).

III) Com apenas **duas peças** do tangram construa e depois desenhe as figuras construídas.
a) um quadrado; b) um triângulo; c) uma figura de quatro lados diferente do quadrado.
IV) Com **três peças** construa e depois desenhe as figuras construídas (no verso da folha).
a) um quadrado; b) um paralelogramo; c) um trapézio.

Material necessário para esta etapa:
01 (um) tangram; 01(uma) folha de papel sulfite tamanho A4 para as anotações; 01 (um) lápis ou lapiseira ou caneta; e 01 (uma) borracha.

ANEXO F2 – Atividade orientada utilizando tangram – parte 2

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Introdução:
Nesta atividade nosso objetivo geral é analisar, com a participação dos alunos, as características e propriedades de cada figura (polígonos) construída utilizando o tangram. Para atingir a meta proposta necessitaremos de materiais como: um tangram (com peças coloridas); um retroprojetor com uma transparência com as formas que serão construídas pelos alunos; lapiseira e lápis de cor.

Os objetivos propostos para esta parte da atividade são:
Identificar as peças do tangram; classificar polígonos quanto à quandtidade de lados, ângulos e vértices; construir polígonos diferentes dos que estão presentes nas peças do tangram; classificar os polígonos em convexos e não convexos; e nomear os polígonos construídos nesta etapa.

Atividades:
I) Com **quatro peças** construa e depois desenhe as figuras construídas:
(a) um quadrado; (b) um paralelogramo; (c) um triângulo; (d) um trapézio
II) Construa um quadrado **com cinco peças**.

ANEXO F3 – Atividade orientada utilizando tangram – parte 3

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Introdução:
Nosso objetivo geral é analisar, com a participação dos alunos, as características e propriedades de cada figura (polígonos) construída utilizando o tangram (colorido). Para atingir a meta proposta necessitaremos de materiais como: um tangram; um retroprojetor com uma transparência com as formas que serão construídas pelos alunos; lapiseira e lápis de cor.

Os objetivos propostos para esta parte da atividade são:
Identificar as peças do tangram; classificar polígonos quanto à quantidade de lados, ângulos e vértices; construir polígonos diferentes dos que estão presentes nas peças do tangram; classificar os polígonos em convexos e não convexos; e nomear os polígonos construídos nesta etapa.

Atividades: Precisaremos de uma aula para realizar a atividade I) e uma para a II).
I)Construa com **todas as peças** e depois desenhe as figuras construídas.
a)um triângulo; b) um retângulo;

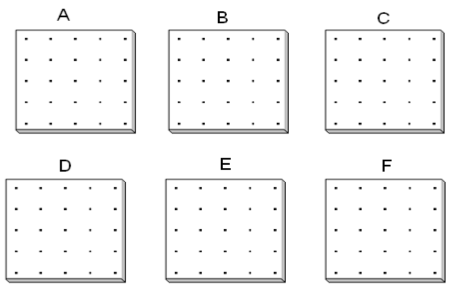
II)Construa com **todas as peças** e depois desenhe as figuras construídas.
a)um paralelogramo; b) um trapézio, c) um quadrado.

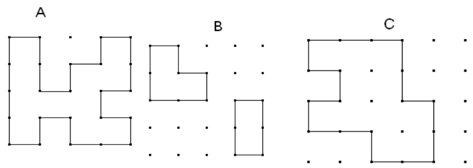
ANEXO G – Atividade livre utilizando geoplanos – parte 1

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Introdução:
Nesta atividade nosso objetivo geral é construir no geoplano as formas sugeridas pelo pesquisador. Para atingir a meta proposta necessitaremos de materiais como: um geoplano; um retroprojetor e uma transparência com as formas a serem sugeridas; uma folha de papel sulfite tamanho A4; lápiseira e lápis de cor. Na tentativa de facilitar o desenvolvimento do nosso trabalho, decidimos dividir esta etapa em três partes, a saber: iniciando a exploração, continuando a explorar e finalizando o processo de exploração. As informações adicionais sobre cada uma destas partes encontram-se descritas abaixo.

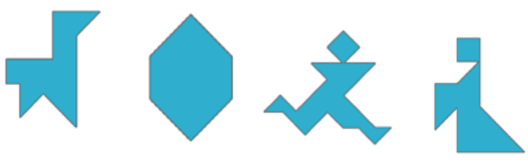
Objetivos propostos para esta atividade são:
Conhecer o geoplano; explorar livremente as possibilidades do geoplano; trabalhar com a criatividade do aluno; e construir no geoplano as formas sugeridas pelo pesquisador.
Tempo necessário para o desenvolvimento desta atividade: serão de 02 (duas) aulas para o desenvolvimento desta atividade, distribuídas da seguinte forma:
Iniciando - Esta etapa da atividade será realizada em 40 minutos.
Nesta parte da atividade será sugerido ao aluno, que, utilizando o geoplano, tente construir as figuras que ele imaginar e depois desenhe-as nos geoplanos ao lado (ou abaixo).





Continuando - Esta etapa da atividade será realizada em 10 minutos. Com o intuito de auxiliar os alunos no manejo do geoplano foi sugerido (figura ao lado ou abaixo) que executem os itens A e C utilizando uma borrachinha para cada e no item B o estudante utilizará duas borrachinhas.
Finalizando - Esta parte da atividade será desenvolvida em 30 minutos.
Usando no máximo sete borrachinhas construa no geoplano as figuras a seguir e depois responda às questões abaixo (ou ao lado):

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4



a)Qual das figuras ao lado você não conhece? ______________

b) Qual das figuras ao lado foi mais difícil de construir ? _______________

Materiais necessários para desenvolver esta atividade:
01(um) geoplano; 01(um) retroprojetor (ou) data show; 01 (uma) transparência com as formas a serem sugeridas; e 01 (uma) folha de papel sulfite tamanho A4.

ANEXO H1 – Atividade orientada utilizando geoplanos – parte 1

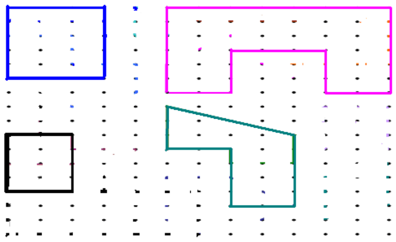
Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Os objetivos propostos para esta parte da atividade são:
Construir diferentes polígonos diferentes no geoplano; identificar os diversos polígonos com a ajuda do geoplano; e nomear os polígonos construídos nesta etapa.

Tempo necessário para o desenvolvimento desta atividade:
Precisa-se de 02 (duas) aulas para o desenvolvimento desta atividade.

Construindo figuras geométricas no geoplano
I) Construa, em seu geoplano, as figuras apresentadas pelo pesquisador.
Construir uma figura geométrica conforme a orientação a seguir:
a) Uma figura de quatro lados sendo que os quatro lados devem ter o mesmo tamanho;
b) Uma figura de quatro lados; c) Uma figura de cinco lados; d) Uma figura de seis lados; e) Uma figura de oito lados.

Construindo várias formas com o geoplano
II) Agora, usando todas as borrachinhas vamos montar no geoplano as figuras mostradas nos desenhos abaixo.



Materiais necessários para esta etapa:
01 (um) geoplano; 08(oito) borrachinhas de prender dinheiro para cada aluno; 01(uma) folha de papel sulfite tamanho A4 para as anotações; 01 (um) lápis ou lapiseira ou caneta; e 01 (uma) borracha.

ANEXO H2 – Atividade orientada utilizando geoplanos – parte 2

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Introdução:
Nesta atividade objetivamos analisar e discutir, com a participação dos alunos, a classificação dos polígonos construídos com o geoplano. Para atingir a meta proposta necessitaremos de materiais como: um geoplano; um conjunto de seis borrachinhas; uma transparência com as formas que serão construídas pelos alunos; lapiseira e lápis de cor. Na tentativa de facilitar o desenvolvimento do nosso trabalho, decidimos dividir esta etapa em duas partes, a saber: construindo figuras de acordo com algumas regras e construindo polígonos quaisquer. As informações adicionais sobre cada uma destas partes encontram-se descritas a seguir.

Os objetivos propostos para esta parte da atividade são:
Relacionar as características dos polígonos construídos (quantidade de lados, medidas dos lados e dos ângulos); classificar os polígonos em regulares (ou irregulares); e reconhecer as características das figuras construídas.

Tempo necessário para o desenvolvimento desta atividade:
Precisamos de 01 (uma) aula para o desenvolvimento desta atividade.

Construções geométricas no geoplano
Para desenvolvermos esta parte da atividade utilizaremos vinte minutos distribuídos da seguinte forma:
I) Construir uma figura geométrica, conforme a orientação a seguir: Utilizaremos 10 minutos.
a) Uma figura de três lados, sendo que os três lados devem ter o mesmo tamanho; b) Uma figura de três lados sendo que dois dos três lados têm o mesmo tamanho; c) Uma figura de três lados sendo que os três lados devem ter tamanhos diferentes.
II) Construir uma figura geométrica conforme a orientação a seguir: Utilizaremos 10 minutos, sendo 2 minutos por item. a) Uma figura de quatro lados sendo que os quatro lados devem ter o mesmo tamanho; b) Uma figura de quatro lados; c) Uma figura de cinco lados; d) Uma figura de seis lados; e) Uma figura de oito lados.

Construindo várias formas com o geoplano
Para desenvolvermos esta parte da atividade serão utilizados trinta minutos distribuidos da seguinte forma: Para a primeira sequência serão utilizados 5 minutos, na segunda sequência, 10 minutos e na terceira serão usados 10 minutos, e os 5 minutos restantes serão utilizados para realizarmos uma avaliação e resumo das atividades do dia letivo.
I) Usando todas as borrachinhas, montaremos as figuras mostradas nos desenhos abaixo.

Sequência 1

Sequência 2

Sequência 3

Material necessário para esta etapa:
01 (um) geoplano; 08(oito) borrachinhas de prender dinheiro para cada aluno; 01(uma) folha de papel sulfite tamanho A4 para as anotações; 01 (um) lápis ou lapiseira ou caneta; e 01 (uma) borracha.

ANEXO H3 – Atividade orientada utilizando geoplanos – parte 3

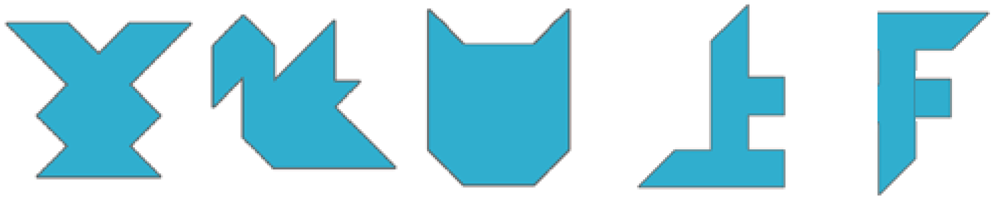
Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.
Aluno: **Data:**
Série:

Introdução:
Nesta atividade nosso objetivo geral é construir no geoplano as formas sugeridas pelo pesquisador. Para atingir a meta proposta necessitaremos de materiais como: um geoplano; um retroprojetor ou data show; uma transparência com as formas a serem sugeridas para os alunos; uma folha de papel sulfite tamanho A4; lapiseira e lápis de cor. Na tentativa de facilitar o desenvolvimento do nosso trabalho, decidimos dividir esta etapa em três partes, a saber: iniciando a exploração, continuando a explorar e finalizando o processo de exploração. As informações adicionais sobre cada uma dessas partes encontram-se descritas a seguir.

Os objetivos propostos para esta parte da atividade são:
Construir diferentes polígonos no geoplano; classificar os polígonos em convexos e não convexos; reconhecer as características das figuras construídas; e nomear os polígonos construídos nesta etapa.

Tempo necessário para o desenvolvimento desta atividade:
Precisamos de 01 (uma) aula para o desenvolvimento desta atividade.

Construindo figuras geométricas no geoplano
Usando todas as borrachinhas, vamos montar as figuras mostradas nos desenhos abaixo.



Qual das sequências você achou mais difícil?
Por que?

Material necessário para esta etapa:
01 (um) geoplano; 08(oito) borrachinhas de prender dinheiro para cada aluno; 01(uma) folha de papel sulfite tamanho A4 para as anotações; 01 (um) lápis ou lapiseira ou caneta; e 01 (uma) borracha.

ANEXO I – História das pipas

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data**:
Série:

Introdução:
Na atividade construção de pipas, temos como objetivo geral o reconhecimento visual dos polígonos e o estudo das características destes polígonos. Para atingirmos o objetivo geral, resolvemos dividir a sequência didática em quatro etapas, a saber: contando a história das pipas, construindo pipas, atividade orientada e resumo da sequência. Para cada etapa, foram elencados objetivos específicos que no nosso entendimento estão relacionados com os princípios teóricos do casal van Hiele.

Os objetivos desta parte são:
a) Discutir com os alunos sobre lendas e histórias envolvendo pipas; b) Mostrar que as pipas estão relacionadas com a história do ser humano; c) Analisar a leitura dos alunos; d) Consultar no dicionário palavras que não conhecem e estão na história lida.

Tempo necessário para a realização desta atividade:
Precisamos de 01 (uma) aulas para o desenvolvimento desta atividade, distribuídas da seguinte forma:

Primeira parte da atividade: Conversando sobre a temática de pipas
Para esta parte serão utilizados 10 minutos. Questionar-se-á aos estudantes quais são as histórias que eles ouviram contar sobre pipas?
Segunda parte da atividade: Lendo e discutindo sobre as histórias das pipas.
Nesta parte escolheremos, de forma aleatória três alunos para lerem cada uma das versões da história das pipas e após a leitura, debateremos sobre o assunto com os alunos. Para executarmos esta parte da primeira atividade, serão precisos de 10 minutos para cada uma das versões.
Terceira parte da atividade: Respondendo ao questionário.
Nesta parte da primeira atividade, conversaremos com os alunos sobre a história das pipas e, em seguida, eles responderão a quatro questões. Para executarmos esta parte da atividade, utilizaremos 10 minutos.
Versão 1: Um pouquinho de história – Será lida por um aluno.
Partindo da mitologia, podemos dizer que.....tudo começou quando o homem primitivo percebeu que os pássaros podiam voar, ir de um ponto ao outro sem ter que mudar a trajetória por conta de um obstáculo, enquanto ele (o homem) estava preso ao solo. De acordo com a mitologia grega, podemos afirmar que a primeira tentativa do homem para levantar vôo encontra-se narrada na

história de Ícaro e seu pai Dédalo. Eis, a seguir, um resumo da saga de Ícaro e Dédalo. Segundo a mitologia grega, eles foram aprisionados no labirinto de Creta, pelo rei Minos e perceberam que a única forma de alcançar a liberdade era...voando....,voando como os pássaros e, assim resolveram construir asas com cera e penas para partirem em busca do sonho de ser livre. Mas, Ícaro encantado com a possibilidade de dominar os ventos desobedeceu às orientações de Dédalo e aproximou-se muito do sol que transformou a cera das asas em líquido e assim fez Ícaro cair no mar, o final da história, vocês já conhecem.

Versão 2: Segunda Lenda – Será lida por um aluno.
Segundo uma lenda chinesa a origem da pipa vem da história de um camponês que na intenção de evitar que o seu chapéu voasse o amarrava com uma corda. Mas um belo dia, antes de colocar o chapéu na cabeça, o vento foi mais rápido e o levantou. De acordo com a lenda, o chinês só não o perdeu graças à corda.

Versão 3: Terceira lenda – Será lida por um aluno.
Outra história curiosa sobre a pipa vem da China e pode ser resumida assim.... Durante uma guerra entre os exércitos de Han Hsin e Hsiang Yu (em 200 a.C.), conta-se que Han Hsin convocou o seu exército e ordenou-lhes o seguinte: construam grandes pipas atando a elas apitos e as façam flutuar sobre os campos inimigos. Quando os soldados de Hsiang Yu escutaram o som dos apitos, acabaram se assustando e recuando, pois acreditavam que o barulho do apito era a voz dos "deuses" que os estava alertando que algo de mal estava para acontecer com eles, e dessa forma Han Hsin venceu a guerra.
Existem outras lendas e histórias sobre a origem da pipa, contudo as três surgiram em dois grandes berços da civilização e, por esta razão, as relatamos aqui.

Material necessário para a realização desta atividade:
01(uma) folha de papel sulfite; e 01 (uma) caneta, ou lápis ou lapiseira.

Atividade desenvolvida com os alunos:
a)Você conhecia alguma destas três versões da história das pipas?; b)Quais são as palavras que você não sabe o que significa?; c) Veja no dicionário o significado de cada uma das palavras que voce escreveu no item b)

ANEXO J – Confecção das pipas

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

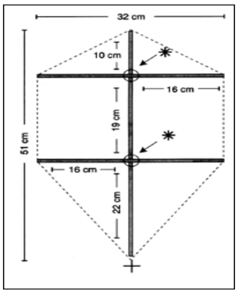
Introdução:
Nesta atividade, temos o objetivo geral de construir (confeccionar) pipas com os alunos. Para atingir a meta proposta, necessitaremos de materiais como: folhas de papel sulfite tamanho A4; régua de 30 cm; tesoura sem ponta; um esquadro; folha de papel de seda; tubo de cola; varetas de bambu (1 de 52 cm e 2 de 32cm) para cada modelo; carretel de linha nº10 e sacola plástica de lixo. A quantidade de cada um desses materiais encontra-se descrita abaixo. Com a intenção de facilitar o nosso trabalho, decidimos dividir esta etapa em duas partes, a saber: confeccionando pipas e anotando as informações sobre o desenho da armação.

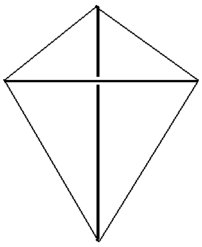
Os objetivos propostos para esta etapa são:
Confeccionar uma pipa; reconhecer visualmente as formas geométricas envolvidas nas pipas; e nomear cada uma das formas geométricas encontradas num determinado modelo de pipa.

Tempo previsto para esta etapa da atividade:
Precisamos de 02 (duas) aulas para o desenvolvimento desta atividade distribuída da seguinte forma: uma (aula) para a construção da pipa de duas varetas e uma (aula) para a de três varetas

Primeira parte da atividade:
Construiremos uma pipa que utiliza apenas duas varetas. Nesta parte, serão distribuídas cinco varetas de bambu, dois metros de linha número 10, uma folha de papel sulfite, uma folha de papel de seda e um tubo de cola para os estudantes. Sugeriremos aos alunos que recortem a folha de papel de seda em quatro partes iguais, separem uma das quatro partes e troquem as outras com os colegas, pois assim poderão confeccionar pipas coloridas. Para executarmos esta tarefa utilizaremos 20 minutos.
Segunda parte da atividade: Construindo Pipas
Será construída uma pipa que utiliza apenas duas varetas. Para a realização desta atividade, orientaremos os alunos para que meçam a vareta maior e no meio da maior vareta, eles devem colocar a segunda vareta e, em seguida, enrolar a linha em torno das duas varetas de forma que elas fiquem firmes. Em seguida, devem contornar a armação da pipa.
Terceira parte da atividade:
Após as discussões da segunda parte, será pedido aos alunos que anotem as informações na ficha de anotações.
Materiais necessários para esta etapa da atividade são:
02 (duas) folhas de papel sulfite tamanho A4; 01 (uma) régua de 30 cm; 01 (uma) tesoura sem ponta e um esquadro; 01 (uma) folha de papel de seda; O1(um) tubo de cola; 03 (três) varetas de bambu (1 de 52 cm e 2 de 32cm) para cada modelo; 01(um) carretel de linha nº10; e 01(uma) sacola plástica.

Construindo pipas
Construiremos pipas, conforme os modelos sugeridos a seguir:
Modelo 1 Modelo 2





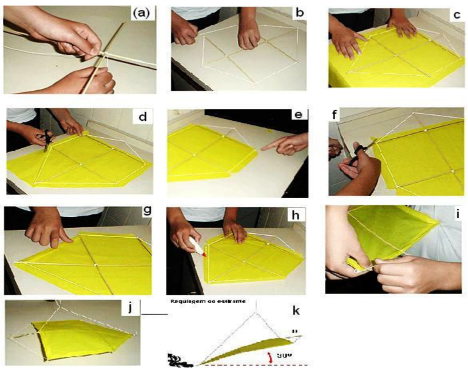


Imagem retirada do site
http://www.pipas.com.br/html/monte_sua_pipa

Os passos a seguir referem-se ao primeiro modelo (para os outros modelos serão utilizados passos semelhantes).
01 - Amarre as varetas menores na maior (Figura a).
02 - Passe a linha em todas as pontas da armação .
03 - Cole a armação sobre o papel, mas deixe uma extremidade de fora, a menor (Figura c).
04. Corte o papel um pouco maior que a armação, essa margem servirá para a colagem (Figura d).
05 - Em cada extremidade, dê dois cortes e pode preparar a cola, logo será usada (Figura e).
06 - Todas as extremidades foram cortadas? Muito bem, agora é só começar a colar sem se lambuzar (Figura f).
07 - Antes de colar, porém, dobre as margens e veja se está bem ajustada a linha, o dente do papel pode ficar solto ou colado (Figura g).
08 - Passe a cola sobre a margem e vire-a para dentro, aderindo bem (Figura h).
09- Envergue a 1ª das varetas e dê uma volta com a linha superior sobre a extremidade da vareta (Figura i).
10 - Em seguida, é só colocar o estirante (cabrestro) e a rabiola (Figura h**).**
11- As figuras J e K são relativas ao procedimento de amarrar o cabestro (estirante).

Atividades
1) Faça um desenho da construção da pipa, considerando cada passo que você utilizou para confeccioná-la; 2)Você sabe o nome de cada uma destas figuras geométricas?________
3)Desenhe a figura que você sabe o nome e depois escreva o nome dela ao lado do desenho.

ANEXO J1 – Atividade orientada

Pesquisador: Jailson Domingos
Orientadora: Profª Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Aluno: **Data:**
Série:

Introdução:
Nesta atividade nosso objetivo geral é analisar, com a participação dos alunos, as características e propriedades de cada figura (polígonos) construída a partir da confeccção de pipas. Para atingir a meta proposta, necessitaremos de materiais como: folha de papel sulfite tamanho A4 para as anotações; transferidor; lápis ou lapiseira ou caneta; borracha; giz e o quadro negro. Será pedido aos estudantes que procurem responder a um questionário, e em seguida, estaremos discutindo as respostas que eles derem.

Os objetivos propostos para esta parte da atividade são:
Identificar e desenhar os diferentes polígonos que estão presentes nas pipas; classificar os polígonos em regulares (ou irregulares); classificar os polígonos em côncavos (ou não côncavos) (ou em polígonos convexos e não convexos); relacionar as características dos referidos polígonos (quantidade de lados, medidas dos lados e dos ângulos); e nomear os polígonos construídos nesta etapa.

Tempo necessário para o desenvolvimento desta atividade:
Precisamos de 01 (uma) aula para o desenvolvimento desta atividade.

Material necessário para esta etapa:
01(uma) folha de sulfite tamanho A4 para as anotações; 01 (um) lápis ou lapiseira ou caneta; 01 (uma) borracha.

Atividade: Identificando os polígonos existentes nas pipas
I) Quanto à quantidade de lados.
a) Quantas figuras de três lados temos?; b) Quantas figuras de quatro lados encontramos na pipa modelo 1?; c) E na pipa do modelo 2?; d) Na pipa do modelo 2 existe alguma figura com mais de cinco lados?

II) Quanto à medida dos ângulos.
a) Desenhe as figuras, da pipa do modelo 1, que possuem no mínimo um ângulo medindo 90°.; b) Existe alguma figura da pipa do modelo 1, com, pelo menos um ângulo medindo menos que 90°? _____ Em caso afirmativo, qual figura é esta? _______; c) Existe alguma figura da pipa do modelo 1 com pelo menos um ângulo maior que 90°? ______ Em caso afirmativo, qual figura é esta?________

ANEXO K – Autorizações

Termo de autorização de participação em pesquisa assinado pelo Diretor(a) da Escola F,

Prezado diretor(a),

Eu, professor Jailson Domingos, gostaria de pedir a sua autorização para desenvolver uma pesquisa em educação matemática nesta escola. Gostaria então, de solicitar a sua permissão para a participação na pesquisa, do(a) professor(a) de matemática da escola, como sujeito da minha pesquisa em educação matemática que estou iniciando. Esta pesquisa vai focalizar o ensino de geometria. Com esta prática espero que possamos trabalhar de forma colaborativa e compartilhar em todas as fases as informações da pesquisa. Em qualquer momento, a escola poderá desistir de participar desta investigação. Além disso, informo que todos os nomes e informações para identificarem o professor (a), alunos (as) e a escola serão mantidos em sigilo. No relato final da investigação, nós utilizaremos nomes fictícios, combinados posteriormente.
Nome: ____.
Local: ____
Data: ____
Assinatura: ____.

Termo de autorização para participação na pesquisa assinado pelos responsáveis pelos alunos

Prezado pai, mãe ou responsável,

Eu, Jailson Domingos, aluno do curso de Mestrado em Educação do PPGE-UFES, gostaria de convidar seu(sua) filho(a) a participar como sujeito de uma pesquisa em Educação Matemática que estou desenvolvendo. Para isso, necessito de sua autorização. Esta pesquisa vai focalizar o ensino de geometria. Pretendo com ela identificar conceitos/significados que os alunos de 5ª série (6° ano) externam a respeito de polígonos. Para tal, estou acompanhando as aulas de matemática e pretendo conversar com os alunos, inclusive seu(sua) filho(a), caso autorize. No decorrer da pesquisa, informarei sobre os dados coletados e analisados. Informo que todos os nomes e informações que identifiquem seu(sua) filho(a) e local de estudo serão mantidos em sigilo. No relato final da investigação, nós utilizaremos nomes fictícios combinados com cada aluno. Em qualquer momento, caso o(a) senhor(a) e seu(sua) filho(a) queiram, poderão desistir da participação nesta investigação. Nesse caso, todas as informações que tenham sido compartilhadas sobre o(a) seu(sua) filho(a) irão permanecer em sigilo.
Nome do(a) aluno(a):
Local: Data:
Nome do responsável:
Assinatura do responsável:

ANEXO L1 – Identificando o nível de desenvolvimento de raciocínio geométrico das turmas antes da sequência didática

Data: 16-03-09 **horário:** 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A, B, C e D

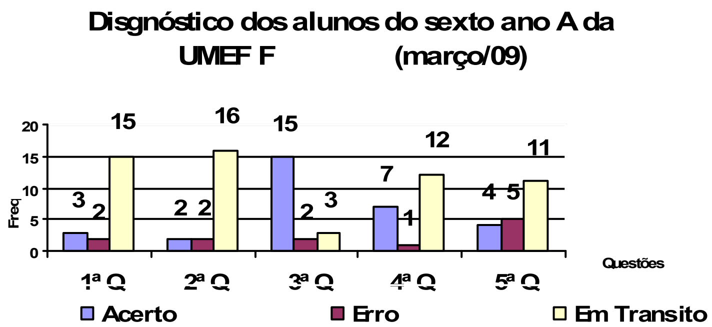
Retornei à UMEF Escola F, na expectativa de descobrir o nível de conhecimento geométrico do sexto ano e, para isso utilizei uma parte do teste proposto pela professora Lilian Nasser, na revista Nova Escola de junho de 1996. A avaliação proposta por Nasser contemplava os três primeiros níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico. Enquanto a nossa foi elaborada apenas para investigar o primeiro nível.
Hoje na escola percebi que no registro de cada um dos sextos anos há marcados 30 alunos, porém a frequência às aulas é de 20 estudantes. Ainda não descobri qual o motivo de tantas faltas e, pretendo analisar se estas faltas podem influenciar no resultado do pré-teste.

Sexto ano A – A turma estava na expectativa de iniciar o trabalho na aula de hoje, contudo, mostrei-lhes que não seria possível, pois eu ainda não tinha a autorização dos pais/responsáveis por eles. Entreguei-lhes a autorização (Anexo K) e pedi ao aluno A05 que lesse. Na leitura do

aluno, percebi a primeira dificuldade deles, pois, foi uma leitura na qual ele colocava um ponto parágrafo após cada palavra. Expliquei-lhes a razão da autorização e procurei dar-lhes certeza de que o que for escrito lhes será mostrado e, o nome deles não será revelado pela pesquisa. Em outras palavras, procurei garantir-lhes o sigilo.
Entreguei-lhes o pré-teste e li com eles, explicando-lhes o significado de palavras (como por exemplo, assinalar). Após a leitura, disse-lhes que não se tratava de uma prova para eles e, sim de um instrumento que iria me permitir planejar as atividades (jogos) para eles. Por essa razão a atividade não valeria nota. As respostas dos alunos encontram-se no gráfico abaixo.

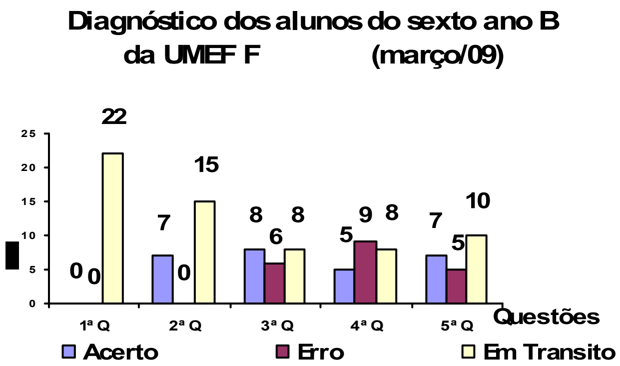
Comentários e análises

O teste diagnóstico aplicado nas turmas foi elaborado, considerando as sugestões apresentadas por Nasser (1996; 2000), no qual ela mostra alguns tipos de questões que podem ser abordadas quando se deseja analisar, medir ou verificar em que nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico se encontra determinado aluno ou grupo de alunos. Conhecer em que nível está o grupo de pesquisa é importante pois, de posse desta informação, é possível elaborar a sequência didática que será aplicada nas turmas que participarão da pesquisa de campo.



Na sala do sexto ano B

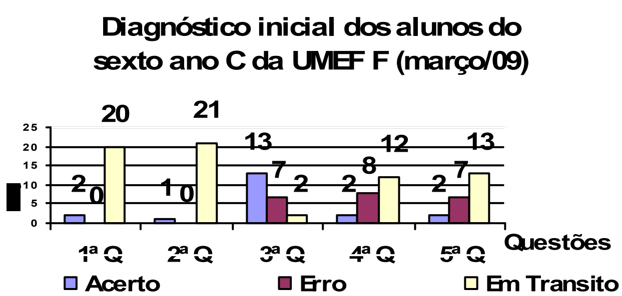
Percebi que eles estavam muito agitados, o que causava mais uma dificuldade para o trabalho. Conversei com a turma sobre o que iríamos fazer na aula de hoje. Em seguida entreguei-lhes a autorização e, pedi ao aluno B06 que lesse. Novamente, a leitura do aluno apresentava problemas, pois, foi uma leitura com dificuldade ao decodificar algumas palavras (como por exemplo: sujeito; externam; autorize e coletados). Expliquei-lhes a razão da autorização e procurei dar-lhes certeza de que qualquer coisa, que eles falarem ou escreverem, lhes será mostrado e o nome deles não será revelado pela pesquisa. Em outras palavras, procurei garantir-lhes o sigilo.



Entreguei-lhes o pré-teste e li com eles, explicando o significado de palavras (como por exemplo, assinalar). Após a leitura disse-lhes que não se tratava de uma prova para eles e, sim, de um instrumento que iria me permitir planejar as atividades (jogos) para eles. Por essa razão, a atividade não valeria nota, pois, mais uma vez percebi a vontade deles de "colar" a atividade um do outro. As respostas dos alunos encontram-se nos gráficos colados ao lado deste breve relato.

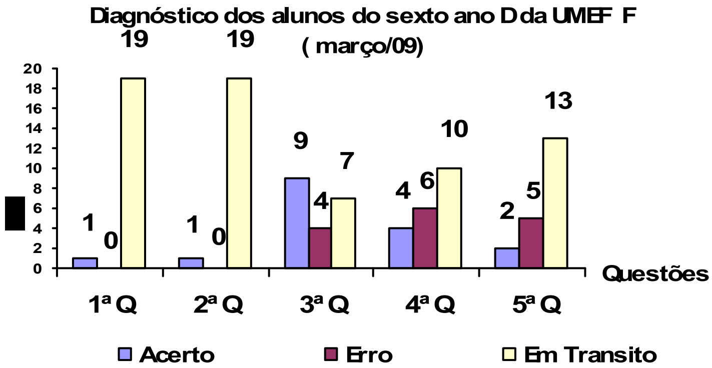
Na sala do sexto ano C

Esta turma estava mais tranquila. Conversei com eles sobre o que iríamos fazer na aula de hoje. Entreguei-lhes a autorização e, pedi a C18 que lesse. Novamente, a leitura da aluna apresentava problemas, errava na leitura de algumas palavras (como: externam; identifiquem e sigilo). Expliquei-lhes o motivo do pedido de autorização e procurei deixar claro que tudo, que eles falarem ou escreverem, lhes



será mostrado e, o nome deles não será revelado pela pesquisa. Em outras palavras, procurei garantir-lhes o sigilo.
Entreguei-lhes o pré-teste e li com eles explicando-lhes o significado de palavras (como por exemplo, assinalar). Após a leitura disse-lhes que não se tratava de uma prova para eles e, sim de um instrumento que iria me permitir planejar as atividades (jogos) para eles. Por essa razão a atividade não valeria nota, pois, mais uma vez percebi a vontade deles de “colar” a atividade um do outro. As respostas dos alunos encontram-se no gráfico ao lado.

Na sala do sexto ano D
Esta turma possui um aluno que, quando está na sala de aula desequilibra todos os outros e, hoje ele estava na aula. Conversei com eles sobre o que iríamos fazer na aula e, em seguida entreguei-lhes a autorização e, pedi a D26 que lesse. Novamente a leitura do aluno apresentava problemas, ele passava por cima de todo o tipo de pontuação e algumas vezes errava na pronúncia de palavras. Expliquei-lhes o motivo do pedido de autorização e deixei claro que tudo, que eles falarem ou escreverem, lhes será mostrado, e o nome deles não será revelado pela pesquisa. Em outras palavras, procurei garantir-lhes o sigilo.
Entreguei-lhes o pré-teste e li com eles explicando o significado de palavras (como por exemplo , assinalar). Após a leitura, disse-lhes que não se tratava de uma prova para eles e, sim, de um instrumento que iria me permitir planejar as atividades (jogos) para eles. Por essa razão, a atividade não valeria nota, pois, mais uma vez percebi a vontade deles de “colar” a atividade um do outro. As respostas dos alunos encontram-se no gráfico ao lado.



ANEXO L2 – AULA – Primeira lenda do tangram

Data: 23-03-09 **horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A, B, C e D

Objetivos
Discutir a pronúncia e a escrita de algumas palavras do texto da primeira lenda do tangram; apresentar o tangram para os alunos; analisar o que os alunos compreenderam da primeira lenda do tangram; e conversar com eles sobre a pronúncia correta das palavras.

Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos, distribuída da seguinte forma:
Primeira parte da atividade: Leitura da primeira lenda, e comentários sobre o que os alunos entenderam da atividade.
Segunda parte da atividade: Respondendo ao questionário.

Na sala do sexto ano A – Iniciei a aula, pedindo ao aluno A07 que lesse a lenda e, em seguida, marcasse no texto as palavras que desconhecia e dei a mesma orientação aos demais alunos. Após a leitura, os alunos marcaram as palavras que não conheciam, e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Surgiram palavras como instigante e serviçal para procurar no dicionário. Depois da consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: quais poderiam ser as sete formas?
As respostas que os alunos deram foram:
A07 quadrado; A14 retângulo; A15 triângulo; A21 aquela que é tipo um balão. (Eu imaginei que ele estava querendo dizer “losango”.).
Nesta discussão não apareceram figuras geométricas como: paralelogramo e trapézios.

Na sala do sexto ano B – Conversei com os alunos sobre o que iríamos fazer e, pedi ao aluno B06 que lesse a primeira lenda e, em seguida, marcasse no texto as palavras que ele

desconhecia. Voltei-me para o grupo, orientando-os para que após a leitura, marcassem as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Surgiram palavras como imperador e instigante. Depois da consulta ao dicionário, retomei com os alunos a discussão sobre: quais poderiam ser as sete formas?
As respostas que os estudantes deram foram:
B26 quadrado; B14 triângulo; B21 retângulo.
Nessa discussão não apareceram figuras geométricas como: paralelogramo, losango e trapézios.

Na sala do sexto ano C – Iniciei a aula, pedindo ao aluno C18 que lesse a lenda e, em seguida, marcasse no texto as palavras que ele desconhecia e transmiti aos demais a mesma orientação. Após a leitura os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Surgiram palavras como chi chau tu, e enciclopédia. Depois da consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: o quais poderiam ser as sete formas?
As respostas que os alunos deram foram:
C18 quadrado; C13 retângulo; C21 triângulo; C19 losango
Nessa discussão não apareceram figuras geométricas como: paralelogramo e trapézios
Hoje a aluna especial estava sem a presença da professora da Educação Especial. Tentei uma aproximação com ela, mas a educanda se mostrou inacessível, dando mostra clara de que não queria qualquer tipo de aproximação.

Na sala do sexto ano D – Expliquei aos alunos o que iríamos fazer e, em seguida, pedi ao aluno D 14 que lesse a lenda e seguida marcasse no texto as palavas que ele desconhecia e os dei a mesma orientação dada aos demais. Após a leitura os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Surgiram palavras como imperador, instigante e serviçal. Depois da consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: quais poderiam ser as sete formas?
As respostas que os estudantes deram foram:
D 06 retângulo; D 24 triângulo; D 26 quadrado.
Nessa discussão, não apareceram figuras geométricas como: paralelogramo, losango e trapézios.

ANEXO L3 – AULA – Segunda lenda do tangram

Data: 30-03-09 **horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A, B, C e D

Objetivos desta aula:
Discutir a pronúncia e a escrita de algumas palavras do texto da segunda lenda do tangram: apresentar o tangram para os alunos; e mostrar que o tangram está relacionado com as lendas.

Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos, distribuída da seguinte forma:
Primeira parte da atividade: Leitura da terceira lenda, e comentários sobre o que os alunos entenderam da atividade.
Segunda parte da atividade: Respondendo ao questionário.
Iniciei a aula na expectativa ler e discutir com os alunos a segunda lenda do tangram e analisar com eles a pronúncia e a escrita das palavras que achavam difícil de pronúnciar ou de escrever.

Na sala do sexto ano A – Pedi que um aluno lesse a lenda e A16 se prontificou para fazê-lo. Pedi aos estudantes que marcassem no texto as palavras que eles desconheciam. Após a leitura, os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário.
As palavras que eles acharam difíceis de pronunciar foram:
Chi chiao tu (as sete peças); enciclopédia (obra que abrange todos os ramos do conhecimento); e taoísta (ensinamento ‘religioso”que significa – a busca de um caminho).

Depois de finalizar a consulta no dicionário, aproveitei o fato de que no texto há uma menção ao quadrado para lhes perguntar: como eles descreveriam um quadrado? Ouvi respostas como:

Uma figura que possui quatro lados.
Fiz o desenho no quadro ao lado e perguntei-lhes: então eu posso dizer que esta Figura A é um quadrado.

Figura A

O aluno A15 respondeu que não, pois os lados não eram iguais. Percebi que a turma parecia concordar com ele. Resolvi fazer um novo desenho no quadro e questioná-los sobre o desenho e quais eram as "características" da figura desenhada (Figura B).
Mais uma vez o aluno A15 se apressou em responder que a figura B era um quadrado, pois, tinha quatro lados iguais e quatro quinas iguais.

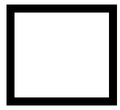


Figura B

Na sala do sexto ano B – Esta é uma turma muito agitada, mas pelo que percebi eles gostam de atividades práticas. Distribui o material que iríamos trabalhar e pedi ao aluno B10 que lesse a segunda lenda e orientei a todos que prestassem muita atenção e marcassem as palavras que lhes eram desconhecidas.
As palavras que eles marcaram foram:
Chi chiao tu (as sete peças); enciclopédia (obra que abrange todos os ramos do conhecimento); e taoísta (ensinamento 'religioso"que significa – a busca de um caminho).
Depois de finalizar a consulta no dicionário, aproveitei o fato de que o texto faz menção a uma figura geométrica para lhes perguntar quais são as figuras geométricas que eles conheciam e ouvi as seguintes respostas: B19- triângulo e quadrado e uma que ele não sabia dizer o nome, mas que era semelhante a um balão. (Imaginei que esta figura poderia ser o losango.). Como ele (B19) mencionou o triângulo pedi-lhes que descrevessem um triângulo. Alguns alunos (B19, B06 e B16) fizeram um desenho no ar, mostrando o que era um triângulo e outros (B14, B15 e B21) disseram que era uma figura de três quinas. Aproveitei a deixa e fiz o desenho, ao lado, no quadro (Figura C).

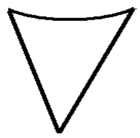


Figura C

Perguntei ao sexto ano B se a Figura C, ao lado, era um triângulo e os ouvi (B21) disse que não, quando perguntei o por quê, a resposta foi: O desenho possui três quinas, mas tem uma linha que não é uma reta.
B19 disse que a Figura C não era triângulo, e a justificativa era porque existia linha que não era uma reta e desenhei no quadro a Figura D ao lado.
E B19 disse que este desenho é um triângulo e questionei-lhe o por quê e ele disse-me: Este desenho possui três lados retos, três ângulos e três quinas.

Figura D

Na sala do sexto ano C – Distribui o material que iríamos trabalhar e pedi ao aluno C18 que lesse a segunda lenda e orientei a todos que prestassem muita atenção e marcassem as palavras que lhes eram desconhecidas.
As palavras que eles marcaram foram:
Chi chiao tu (as sete peças); e enciclopédia (obra que abrange todos os ramos do conhecimento).
Depois de finalizar a consulta no dicionário, aproveitei o fato de que o texto faz uma menção a uma figura geométrica para lhes perguntar quais são as figuras geométricas que eles conhecem e ouvi as seguintes respostas: C19 - triângulo e quadrado. Como ele (C 19) mencionou o triângulo pedi-lhes que descrevessem um triângulo. Alguns alunos (C18, C9 e C16) fizeram um desenho no ar, mostrando o que era um triângulo e outros (C14, C10 e C19) disseram que triângulo era uma figura de três quinas. Aproveitei a deixa e fiz no quadro o desenho Figura E

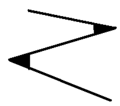


Figura E

Perguntei ao sexto C se a figura acima era um triângulo e os ouvi (C19) dizer que não. Perguntei-lhe o por quê. A resposta foi: O desenho é aberto e triângulos são fechados. Fiz um novo desenho (Figura F) no quadro e repeti o processo.

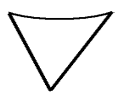


Figura F

Mais uma vez os ouvi (C19) dizer que não e, C19 justificou dizendo que a figura tinha uma linha que não era uma reta e fiz um último desenho no quadro abaixo (Figura G).
Perguntei-lhe e este desenho (Figura G) é um triângulo? A resposta foi:
C19 disse que a figura G é um triângulo. Questionei-lhe o por quê e ele disse-me: Este desenho possui três lados retos e três quinas.

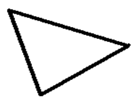


Figura G

Na sala do sexto ano D – Iniciei a aula, distribuindo o material que iríamos trabalhar e pedi ao aluno D01 que lesse a segunda lenda e orientei a todos que prestassem muita atenção e marcassem as palavras que lhes eram desconhecidas.

As palavras que eles marcaram foram:
enciclopédia (obra que abrange todos os ramos do conhecimento); e taoísta (ensinamento religioso"que significa – a busca de um caminho).
Finalizamos a fase de consultas no dicionário. Aproveitei o fato de que o texto faz uma menção a uma figura geométrica para lhes perguntar quais são as figuras geométricas que eles conheciam e ouvi as respostas respostas: D04 - triângulo e quadrado. Como ele (D04) mencionou o triângulo pedi-lhes que descrevessem um triângulo. Alguns alunos (D04, D06 e D16) fizeram um desenho no caderno mostrando o que era um triângulo e outros (D14, D12 e D11) disseram que era uma figura de três lados. Aproveitei a deixa e fiz o desenho (Fgura H) no quadro.

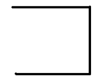


Figura H

Perguntei ao sexto ano D, se a figura acima era um triângulo e os ouvi (D 24) dizer que não. Perguntei o por quê. A resposta foi: O desenho possui três lados, mas só tem duas quinas. Percebi que para estes alunos "quina" é a mesma coisa que "ângulo". Fiz um novo desenho (Figura I) no quadro e repeti o processo.

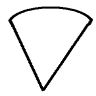
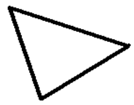


Figura I

Mais uma vez os ouvi (D24) dizer que não e, a justificativa agora era porque existia uma linha que não era uma reta e fiz um último desenho no quadro (Figura J).



E D24 disse que este desenho é um triângulo e questionei-lhe o por quê e ele disse-me: Este desenho possui três lados retos e é fechado.

Figura J

ANEXO L4 – AULA – Terceira lenda do tangram

DATA: 01-04-09 **Horário**: 13:50-16:40
TURMAS: 6º anos A, B, C e D

Objetivos:
Discutir a pronúncia e a escrita de algumas palavras do texto da terceira lenda do tangram; apresentar o tangram para os alunos; e mostrar que o tangram está relacionado com as lendas.

Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisa-se de 01(uma) hora aula. Distribuída da seguinte forma:
Primeira parte da atividade: Leitura da terceira lenda e comentários sobre o que os alunos entenderam da atividade.
Segunda parte da atividade: Respondendo ao questionário.
Retornei à escola na expectativa de discutir com os alunos a terceira lenda do tangram e iniciar a construção do tangram.

Na sala do sexto ano A – Iniciei a aula pedindo ao aluno A16 que lesse a lenda e, marcasse no texto as palavas que ele desconhecia e orientei os outros alunos para que agissem da mesma forma. Após a leitura os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Depois de finalizar a consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: o que é um retângulo?
A28 é uma figura de quatro lados, e mal A28 terminou outro colega continuou.
A14 é uma figura de quatro lados com os lados que ficam de frente um para outro iguais.
Perguntei qual era a diferença entre o quadrado e um retângulo?
A14 no quadrado os lados têm o mesmo tamanho e no retângulo os lados são dois a dois iguais.

Na sala do sexto ano B – Conversei com os alunos sobre o que iríamos fazer e pedi ao aluno B10 que lesse a lenda e em seguida marcasse no texto as palavas que ele desconhecia. E depois repeti a mesma orientação paro os demais alunos. Após a leitura os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Depois de finalizar a consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: o que é um retângulo?
B21: é uma figura de quatro lados, e mal B 21 terminou outro colega continuou.
B19: é uma figura de quatro lados com os lados dois iguais e outros dois iguais mas de tamanhos diferentes dos outros.

Pedi-lhe que me mostrasse com um desenho o que ele queria dizer e entendi o que ele queria dizer.
Perguntei-lhe qual era a diferença entre o quadrado e o retângulo?
B19: no quadrado os lados têm o mesmo tamanho e no retângulo os lados são dois a dois iguais.

Na sala do sexto ano C – Conversei com os alunos sobre o que iríamos fazer e pedi ao aluno C18 que lesse a lenda e em seguida marcasse no texto as palavras que ele desconhecia e dei a mesma orientação aos demais alunos. Após a leitura, os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Depois de finalizar a consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: o que é um retângulo?
C14: é uma figura de quatro lados e mal C14 terminou outro colega continuou.
C19: é uma figura de quatro lados com os lados que ficam de frente um para outro iguais.
Perguntei qual era a diferença entre o quadrado e um retângulo?
C19: no quadrado os lados têm o mesmo tamanho e no retângulo os lados são dois a dois iguais.
Hoje a aluna especial estava sem a presença da professora da Educação Especial. Tentei uma aproximação com ela, mas a aluna se mostrou inacessível, dando mostra clara de que não queria qualquer tipo de aproximação.

Na sala do sexto ano D – Iniciei a aula conversando com os alunos sobre o que iríamos fazer e, pedindo ao aluno D 01 que lesse a lenda e, em seguida, marcasse no texto as palavas que ele desconhecia. Dei a mesma orientação aos demais alunos. Após a leitura os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Depois de finalizar a consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: o que é um retângulo?.
D14: é uma figura de quatro lados, e mal D 14 termnou outro colega continuou.
D24: é uma figura de quatro lados com os lados que ficam de frente um para outro iguais.
Perguntei qual era a diferença entre o quadrado e um retângulo?
D24: no quadrado os lados têm o mesmo tamanho e no retângulo os lados ão dois a dois iguais.

ANEXO L5 – AULA – Brincando e aprendendo a utilizar o tangram

Data: ***06-04-09*** *Horário****: 13:00-16:40***
*Turmas****: 6º anos A, B, C e D***

Objetivos:
Construir com os alunos, a partir das peças do tangram, os algarísmos de 0 a 9; compor uma figura a partir das peças do tangram e explorar uma das possibilidades do tangram; e identificar os polígonos que compõem o tangram.

Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de 01 (uma) aula de 50 minutos, distribuída da seguinte forma:
Primeira parte da atividade*:* Conversar com os alunos sobre os conhecimentos prévios e intuitivos que eles possuem sobre polígonos.
Segunda parte da atividade: Construir com os alunos os algarísmos de 0 a 9, utilizando as peças do tangram.

Sala do sexto ano A – Iniciei a aula, perguntando para os alunos se eles sabiam o que quer dizer a palavra “polígonos” e ouvi as seguintes respostas:
-É um triângulo?! Resposta dada por A12 (Estou registrando assim, pois me parecia que eles queriam perguntar e, ao mesmo tempo, expressar a alegria por entenderem que estavam certos.)
-É um retângulo?! Resposta dada por A06.
-É um quadrado?! Resposta dada por A22.
As respostas que ouvi me levaram à conclusão de que os alunos possuem algum conhecimento sobre o significado da palavra polígonos e resolvi continuar o debate só que agora mudando a pergunta para a seguinte:
Vocês estudaram em português sobre palavras monossílabas, e eles disseram que sim. Continuei a conversa, pedindo-lhes que me dissessem o que é uma palavra monossílaba. A10 apressou-se em dizer que era uma palavra de uma única sílaba.

E uma palavra dissílaba? Mais uma vez, A10 respondeu-me afirmando que era uma palavra de duas sílabas.
Voltei-me para os alunos e perguntei-lhes: E uma palavra polissílaba?
Novamente A10 respondeu afirmando que era uma palavra com mais de 4 sílabas.
Voltemos à questão do polígono e, agora para vocês o que significa a palavra polígono?
A 22 respondeu que achava que era uma figura com 3 lados. Questionei-lhe o seguinte:
Então posso dizer que uma figura de 4, 5, 6 ou mais lados eram polígonos?
A10 e A22 responderam que sim.
Perguntei-lhes: Então, precisamos melhorar nossa definição, e os alunos sugeriram o seguinte: A10 e A22 responderam que polígono é "uma figura com 3, 4, 5, 6 ou mais lados". Perguntei-lhes se a nossa definição ficaria melhor escrita assim: " polígono é uma figura geométrica com 3 ou mais lados", e os alunos concordaram.
Por esse relato, foi possível perceber que os alunos já têm um conhecimento prévio do que é um polígono, porém esses conhecimentos ainda estão presos a três polígonos canônicos, em outras palavras, às figuras geométricas como triângulos, retângulos e quadrados. Isso, provavelmente ocorreu pelo fato de que os livros didáticos de matemática do 1º ao 5º ano apresentem essas figuras como exemplos de polígonos.
Outro aprendizado que tivemos neste episódio foi que, de acordo com Vygotsky, os conceitos espontâneos desenvolvem-se em direção a níveis maiores de abstração, possibilitando assim, em seu caminho a elaboração de conceitos científicos. Pensando assim, argumentamos que a idéia de associar a divisão silábica das palavras com a definição de polígonos, que surgiu no calor dos debates, nos proporcionou uma possibilidade de realizar uma aproximação entre o desenvolvimento real e o ideal. Em outras palavras, percebemos que atuamos dentro da zona de desenvolvimento proximal do estudante.
A tentativa de amarrar com eles um significado do que são polígonos, conduziu-nos à percepção de que um conceito pode ser compreendido como uma estrutura viva e complexa do pensamento, que tem a função de comunicar, assimilar, entender ou resolver problemas. Observando o esforço realizado pelos estudantes para expressar o que entendiam por polígonos e os exemplos dados por eles percebemos os ajustes que cada aluno fez, em seu próprio conceito, após ouvir o exemplo apresentado pelo colega. E, à medida que tais ajustes eram feitos caminhamos em direção à generalização do conceito que estamos discutindo. Segunda parte da atividade
Desenhamos o tangram no caderno e antes de distribuir um tangram para cada dupla, resolvemos construir o número um (utilizando as peças do tangram) como exemplo, para eles. A partir daí, conversamos com os alunos sobre a regra do jogo:
a) Utilizar as sete peças do tangram para construir a forma desejada; b) Não é permitido sobrepor peças.
Uma sugestão que apesentei para os alunos foi a silhueta dos algarismos de 0 a 9.
Depois deixei-os tentando construir o número que quisessem e os resultados estão registrados nas fotografias.
No decorrer dessa atividade, percebemos que todos os alunos conseguiram construir, pelo menos, um número, embora em alguns casos, eles pedissem ajuda ao pesquisador ou a outro colega. Nos momentos em que pediam ajuda, entendemos a importância de se desenvolverem atividades que permitam a um colega mais experiente atuar na zona de desenvolvimento proximal do outro.

Na sala do sexto ano B –

Comecei a aula perguntando para os alunos se eles sabiam o que quer dizer a palavra "polissílaba" e ouvi as seguintes respostas: B26 É uma palavra com 4 ou mais sílabas.
Fiz a seguinte pergunta: O que significa a palavra polígonos?
Por alguns segundos, o silêncio tomou conta da sala. Depois de alguns instantes B16 quebrou o silêncio, afirmando que só sabia que significa "muitos" alguma coisa.
Voltei para a turma e disse: Vamos pensar juntos...
Um triângulo é um polígono? B21 disse, timidamente, que sim.
Quantos lados tem um triângulo? Responderam: 3.
E um quadrado é um polígono? B21 do qual ouvi novamente um tímido sim.
Quantos lados tem um quadrado? Responderam 4.
Partindo das informações acima, o que vocês acham que significa a palavra polígonos?
B16 respondeu. Uma forma com 4 lados!?
Perguntei para B16, se o triângulo e o pentágono (figura geométrica de 5 lados) eram polígonos? Respondeu-me que sim.
Afirmei que a definição dele dizia que só as figuras de 4 lados eram polígonos.

B16 respondeu. Ah! então polígono é uma figura geométrica que tem 3, 4 ou 5 lados.
E as figuras com 6 ou mais lados não são polígonos?
B20 nem deu tempo para B16 pensar e já foi logo afirmando...é uma figura geométrica com mais de 3 lados? E as de 3 lados não são polígonos? E B16 corrige a frase de B20, afirmando: polígono é uma figura geométrica com 3 ou mais lados.
Finalizei a discussão, pedindo ao grupo que escrevesse no caderno que polígono é "uma figura geométrica com 3 ou mais lados".
Segunda parte da atividade
A título de exemplo desenhei no quadro um número e utilizei as sete peças do tangram para desenhar este número apresentado como um exemplo. Depois distribui uma folha com o alfabeto e uma com os algarismos de 0 a 9 e disse-lhes: Escolham uma letra e um número e os desenhem utilizando todas as sete peças do tangram e os resultados estão registrados nas fotografias.

Na sala do sexto ano C –
Comecei a aula, perguntando para os alunos se eles sabiam o que quer dizer a palavra "polissílaba" e ouvi as seguintes respostas: C19 respondeu-me: Professor, professor ...é uma palavra com 4 ou mais sílabas.
Fiz a seguinte pergunta para eles: O que significa a palavra polígonos?
C19 não deu tempo nem para os colegas pensarem e foi logo respondendo: é uma figura geométrica que possui 3 ou mais lados.
Perguntei à turma se eles concordavam com C19 e, responderam que sim.
Voltei para a turma e pedi que me dessem um exemplo de polígono (E neste momento pedi para C19 não responder.) e C9 respondeu: triângulo.
Não demorou muito para que outros alunos respondessem: quadrado e retângulo.
Voltei-me para C19 e perguntei-lhe, você quer acrecentar mais alguma forma geométrica?
E ele me respondeu: poderia acrescentar à nossa lista o trapézio e o losango.
Quando estava quase finalizando esta parte da atvidade C19 retorna à cena e pergunta: Professor, qual é o nome dado a um polígono de 10 lados? Respondi. Decágono.
Não se contentando voltou a perguntar e um de 40 lados? Surpreso com a pegunta disse-lhe o nome dele é um polígono de 40 lados. Mas esta resposta não me satifez e, percebi que precisava pesquisar sobre como nomear os polígonos com mais de 20 lados.
Finalizei a discussão, pedindo ao grupo que escrevesse no caderno que polígono é "uma figura geométrica com 3 ou mais lados" e, disse-lhe que esta definição receberia o nome de C19, afinal ele foi o primeiro da classe a pronunciá-la.
Segunda parte da atividade
A título de exemplo, desenhei no quadro um número e utilizei as sete peças do tangram para desenhar este número apresentado como um exemplo. Depois distribui uma folha com o alfabeto e uma com os algarismos de 0 a 9 e disse-lhes: Escolham uma letra e um número e os desenhem utilizando todas as sete peças do tangram. Os resultados estão registrados nas fotografias.

Na sala do sexto ano D –
Conversei com os alunos sobre os objetivos propostos para a aula de hoje e, escrevi no lado esquerdo do quadro os temas:
Construindo os algarímos de 0 a 9 com o tangram; e identificando polígonos.
D24 perguntou curioso o que significa polígonos?
Aproveitei para devolver a pergunta para a turma e questionei-lhes se sabiam o que quer dizer a palavra "polígono" . Percebi que eles não sabiam e perguntei-lhes se já tinham estudado a divisão das palavras em sílabas. Responderam-me que sim.
Perguntei. Qual é o nome dado para uma palavra que possui apenas uma sílaba? D25 respondeu: monossílaba
Continuei. E uma com duas sílabas? D3 respondeu dissílaba.
E uma com três silabas. D25 respondeu. Trissílaba
Questinei-lhes mais uma vez. E uma com mais de 4 sílabas?
D24, meio em dúvida, respondeu: polissílaba.
Comentei que com as figuras geométricas acontece algo muito parecido, por exemplo, uma figura de três lados nós a chamamos de....triângulo (responderam alguns alunos da turma). Aproveitei para pedir-lhes que precisavam levantar a mão, quando quisessem responder ou fazer alguma pergunta. Continuando, e as figuras geométricas de 4 lados, nós as chamamos de .... D14 levantou a mão e respondeu quadrado. Questionei-lhe se era só o quadrado que possuia 4 lados, e ele (D14) respondeu-me que não, pois, existia também o retângulo e outras que não sabia o

nome. Voltei-me para a turma e perguntei-lhes que tal chamarmos as figuras geométricas que possuem 4 lados de quadriláteros, concordaram e continuei o diálogo e disse-lhes.
Como na divisão silábica, palavras com mais de 4 sílabas são chamadas de polissílabas. E algo semelhante acontece com as figuras geométricas, uma figura com 3 ou mais lados recebe o nome de ... D 24 interrompe e diz polígonos!?. (Eu fiquei na dúvida se ele estava perguntando ou afirmando) Muito bem!
Finalizei a discussão, pedindo ao grupo que escrevesse no caderno que polígono é “uma figura geométrica com 3 ou mais lados” e, disse-lhes que esta definição receberia o nome de D24, pois, afinal, ele foi o primeiro da classe a pronunciá-la.
Segunda parte da atividade
A título de exemplo desenhei no quadro um número e empreguei as sete peças do tangram para desenhar este número apresentado como exemplo. Depois distribui uma folha com o alfabeto e uma com os algarismos de 0 a 9 e disse-lhes: Escolham uma letra e um número e os desenhem utilizando todas as sete peças do tangram.

ANEXO L6 – AULA – Brincando e aprendendo a utilizar o tangram alfabeto

Data: 08-04-09 **Horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A, B, C e D

Objetivos:
Construir com os alunos, a partir das peças do tangram, as letras do alfabeto; explorar uma das possibilidades do tangram; e identificar os polígonos que compõem o tangram.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de 01 (uma) hora aula, distribuída da seguinte forma:
Primeira parte da atividade: Conversar com os alunos sobre o que já sabemos em relação aos polígonos.
Segunda parte da atividade: Construir com os alunos, utilizando as peças do tangram, algumas letras do alfabeto.

Sala do sexto ano A –
Iniciei a aula, retomando a discussão sobre o que é polígono.
A resposta dada por A07 e A12 foi ‘uma figura geométrica com 3 ou mais lados”, que era o resultado da nossa discussão na aula anterior (06-04-09). Perguntei se eles poderiam apresentar três exemplos de polígonos e as respostas foram:
A6 respondeu: triângulo; A7 respondeu: quadrado e retângulo; A15 respondeu: losango; A22 respondeu: trapézio.
Utilizei as peças do tangram para construir a letra J (Figura K) e aproveitei para trabalhar com os alunos a contagem de lados de um polígono. Perguntei se eles sabiam me dizer quantos lados tem um quadrado. Reponderam-me quatro.

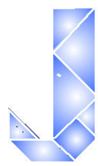


Figura K

Voltei a questioná-los sobre como eles chegaram a esse número e me explicaram que contaram as “retas” que formavam os lados do quadrado. Ou seja, queria que os alunos contassem quantos lados tinha o contorno do lado do desenho da letra J (Figura K) e por isso perguntei: Digam-me quantos lados tem a letra J formada a partir das sete peças do tangram? A12 respondeu: 9 lados e A07 respondeu: 6 lados.
Voltei-me para a turma e perguntei quem estava certo e o grupo se dividiu, uma parte achou que A12 estava certo e a outra achou que A07 estava certo. Pedi a A07 que mostrasse como chegou ao resultado de seis lados e A07 se explicou, mostrando um por um dos lados e, percebeu que não havia contado três lados. Quando me voltei para A12 e pedi-lhe que explicasse, ouvi a seguinte resposta, eu marquei os lados e depois os contei um por um dos lados (Figura K1).

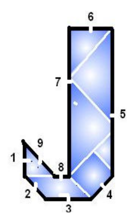


Figura K1

Finalizei a discussão e orientei-os para que escolhessem algumas letras para montar, utilizando todas as sete peças do tangram.
Segunda parte da atividade
Distribui um tangram para cada dupla. Sugeri-lhes que escolhessem uma letra e a montassem utilizando todas as sete peças do tangram.

Na sala do sexto ano B –
Iniciei a aula, retomando a discussão sobre o que é polígono?
A resposta dada por B26 e B14 foi 'uma figura geométrica com 3 ou mais lados", que era o resultado da nossa discussão na aula anterior (06-04-09). Perguntei se eles poderiam apresentar três exemplos de polígono e as respostas foram: B23 respondeu: triângulo; B26 respondeu: retângulo; B14 respondeu: losango; B18 respondeu: quadrado.
Quais das peças acima faz parte do tangram? B26 respondeu: triângulos e quadrados, mas o tangram tem mais uma figura, mas eu não sei o nome
Utilizei as peças do tangram para construir a letra J (Figura K) e aproveitei para trabalhar com os alunos a contagem de lados de um polígono. Perguntei se eles sabiam me dizer quantos lados tem um quadrado. Responderam-me quatro.
Voltei a questioná-los sobre como eles chegaram a esse número e me explicaram que contaram as "linhas" (percebi que eles entendem linha como um segmento de reta) que formam os lados do quadrado. Digam-me quantos lados tem a letra J formada a partir das sete peças do tangram (Figura K)?
B19 respondeu: 9 lados; B14 respondeu em seguida: 9 lados (veja Figura K1).
Finalizei a discussão e orientei-os para que escolhessem algumas letras para montar, utilizando todas as sete peças do tangram.
Segunda parte da atividade
Distribui um tangram para cada dupla, sugeri-lhes que escolhessem uma letra e a montassem utilizando todas as sete peças do tangram.

Na sala do sexto ano C –
Iniciei a aula, retomando a discussão sobre o que é polígono.
A resposta dada por C 06 e C13 foi 'uma figura geométrica com 3 ou mais lados", que era o resultado da nossa discussão na aula anterior (06-04-09). Perguntei se eles poderiam apresentar três exemplos de polígono e as respostas foram:
C6 respondeu: triângulo e retângulo; C7 respondeu: quadrado;
C15 respondeu: losango; C22 respondeu: trapézio.
Quais das peças acima fazem parte do tangram?
C19 disse: quadrado e triângulo, mas tem também o paralelogramo que não foi falado antes.
Utilizei as peças do tangram para construir a letra J (Figura K) e aproveitei para trabalhar com os alunos a contagem de lados de um polígono. Perguntei se eles sabiam me dizer quantos lados tem um quadrado. Reponderam-me quatro.
Voltei a questioná-los sobre como eles chegaram a esse número e me explicaram que contaram as "retas" que formavam os lados do quadrado. Digam-me quantos lados tem a letra J formada a partir das sete peças do tangram (Figura K)? C22 respondeu: 9 lados; C07 respondeu: 8 lados.
Voltei-me para o grupo e perguntei quem estava certo e o grupo se dividiu, uma parte achou que C22 estava certo e a outra achou que C07 estava certo. Pedi a C22 que mostrasse como chegou ao resultado de nove lados e C22 se explicou mostrando um por um dos lados (observe a Figura K1). Quando me voltei para a C07 e pedi-lhe se explicasse, ouvi a seguinte resposta, eu não havia contado um lado.
Finalizei a discussão e orientei-os para que escolhessem algumas letras para montar, utilizando todas as sete peças do tangram.
Segunda parte da atividade
Distribuir um tangram para cada dupla. Sugeri-lhes que escolhessem uma letra e a montassem, utilizando todas as sete peças do tangram e os resultados estão registrados nas fotografias.
Uma aluna gostou tanto desta atividade que resolveu pesquisar em casa e desenhou o alfabeto todo, tomando como base as 7 formas do tangram.

Fotografia 01 - caderno da aluna C25

Na sala do sexto ano D –
Conversei com os alunos sobre os objetivos propostos para a aula de hoje e escrevi no lado esquerdo do quadro os temas: Retomando a discussão sobre polígonos.
Perguntei aos alunos mais uma vez o que é polígono?
A resposta dada por D 09 e D 24 foi ‘uma figura geométrica com 3 ou mais lados”, que era o resultado da nossa discussão na aula anterior (06-04-09). Perguntei se eles poderiam apresentar três exemplos de polígonos e as respostas foram: D14 respondeu: triângulo; D24 respondeu: retângulo; trapézio; D26 respondeu: losango; e D22 respondeu: quadrado.
Utilizei as peças do tangram para construir a letra J (Figura K) e aproveitei para trabalhar com os alunos a contagem de lados de um polígono. Perguntei se eles sabiam me dizer quantos lados tem um quadrado. Responderam-me quatro.
Voltei a questioná-los sobre como eles chegaram a esse número e me explicaram que contaram as “retas” que formavam os lados do quadrado. Digam-me quantos lados tem a letra J formada (Figura K), a partir das sete peças do tangram?
D09 respondeu: 9 lados; D14 respondeu: 8 lados.
Voltei-me para o grupo e perguntei quem estava certo e o grupo se dividiu, uma parte achou que D14 estava certo e a outra achou que D09 estava certo. Pedi a D14 que mostrasse como chegou a resultado de nove lados e D14 se explicou mostrando um por um dos lados (Figura K1). Quando me voltei para a D09 e pedi-lhe que se explicasse, ele contou os seis lados e, nesse momento percebeu que não havia contado três lados. Finalizei a discussão e orientei-os para que escolhessem algumas letras para montar empregando todas as sete peças do tangram.
Segunda parte da atividade
A título de exemplo, desenhei no quadro um número e utilizei as sete peças do tangram para desenhar este número apresentado como exemplo. Depois distribui uma folha com o alfabeto e uma com os algarismos de 0 a 9 e disse-lhes: Escolham uma letra e um número e os desenhem, utilizando todas as sete peças do tangram.

ANEXO L7 – AULA – Desenhando uma das versões do tangram

Data: 13-04-09 **Horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A, B, C e D

Objetivos:
Identificar os polígonos convexos e não convexos; e utilizar o tangram para contar uma das versões do tangram.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de 01 (uma) hora aula, distribuída da seguinte forma:
Primeira parte da atividade: Conversar com os alunos sobre polígonos convexos e não convexos.
Segunda parte da atividade: Contar um das versões da história do tangram, utilizando para isso as sete peças do quebra-cabeça.

Sala do sexto ano A – Iniciei a aula retomando a discussão sobre o que é polígono?
A resposta dada por A10 e A 08 foi ‘uma figura geométrica com 3 ou mais lados”, que era o resultado da nossa discussão na aula anterior (08-04-09). Pedi que me dessem algum exemplo de polígono e ouvi:
A15 respondeu: trapézio; e A22 respondeu: losango.
Perguntei sobre o número de lados dos polígonos acima. A27 (aluno especial) respondeu que estes têm 4 lados” Concordei com ele e perguntei-lhes o seguinte: vocês querem acrescentar mais alguma coisa na informação de A27, A22 e A15, e os alunos da turma responderam: quatro vértices e quatro ângulos.
Utilizei as peças do tangram para construir a letra C (Figura 01) e aproveitei para trabalhar com os alunos a contagem de lados de um polígono. Perguntei se eles sabiam me dizer quantos lados tinha o polígono letra C e me responderam. Desenhei um quadrado ao lado do polígono letra C, marquei dois pontos no interior de C, de tal forma que o segmento de reta que os unia passasse também fora do polígono letra C e depois procedi de forma semelhante com o quadrado e mostrei–lhes que qualquer segmento de reta desenhado ligando dois pontos internos do polígono

sempre estaria dentro do mesmo. Falei-lhes que, no primeiro caso, dizemos que o polígono é convexo e, no segundo caso, é dito não convexo. Desenhei outros polígonos no quadro (Figuras 01; 02; 03; 04 e 05).

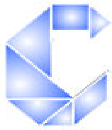


Figura nº 01

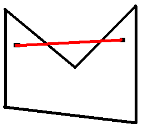


Figura nº 02

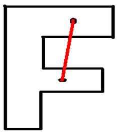


Figura nº 03

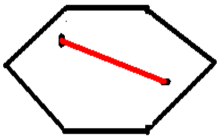


Figura nº 04

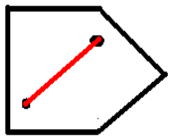


Figura nº 05

Perguntei aos alunos quais daqueles polígonos eram convexos e quais eram não convexos? Ouvi as seguintes respostas: A22 - As figuras 4 e 5 são convexas; A10 - As figuras 2 e 3 são não convexas; A08 - As figuras 4 e 5 são convexas e a 2 e a 3 não são convexas.
Orientei os alunos para anotarem as novas informações no caderno e partimos para a tarefa seguinte, isto é, recontar, por meio de uma história em quadrinhos, qualquer uma das versões do tangram, utilizando as suas peças.

Segunda parte da atividade
Distribui uma folha de papel quadriculado e os orientei para desenhar a versão escolhida na folha dada. Sugeri-lhes que relessem a história para ter uma ideia do que iriam fazer. e os resultados estão registrados nas fotografias (Fotografias 02 e 03), a seguir:


Fotografia 02


Fotografia 03

Na sala do sexto ano B –
Retomei com os alunos a discussão sobre o que é polígono.
A resposta dada por B10; B06, B15 e B14 foi a seguinte: "polígono é uma figura geométrica com 3 ou mais lados", que era o resultado da nossa discussão na aula anterior (08-04-09). Pedi que me apresentassem algum exemplo de polígono e ouvi: B14 respondeu: quadrado; B22 respondeu: triângulo; e B06 respondeu: paralelogramo.
Utilizei as peças do tangram para construir a letra N (Figura 8) e retornei à ideia de contagem de lados de um polígono. Perguntei se eles sabiam me dizer quantos lados tinha o polígono N e me responderam corretamente. Percebi que os alunos ainda contam os lados do polígono, apontando para cada um dos lados. Marquei dois pontos no interior de N (Figura 8), de tal forma que o segmento de reta que os unia tivesse parte dentro e parte fora do polígono letra N. Depois procedi de forma semelhante com o pentágono (Figura 9) e mostrei-lhes que qualquer segmento de reta desenhado, ligando dois pontos internos do polígono sempre estaria dentro do mesmo. Falei-lhes que, no primeiro caso (Figura 9), dizemos que o polígono é convexo e no segundo caso, é dito não convexo (Figura 8).
B19 perguntou-me 'professor, mas e se eu conseguir desenhar um linha que esteja totalmente dentro de N, o polígono ainda será não convexo?
Devolvi a pergunta para a turma e percebi que a dúvida era geral.
Depois de conversar com a turma respondi que bastava uma única linha ter partes dentro do polígono e partes fora para ele ser não convexo.
Desenhei outros polígonos no quadro (Figuras 06; 07; 08; 09 e 10).

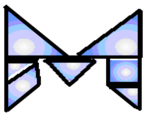


Figura nº 06

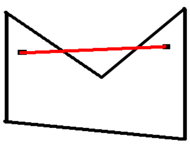


Figura nº 07

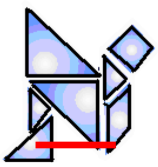


Figura nº 08

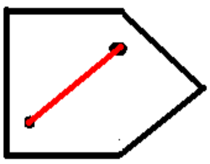


Figura nº 09

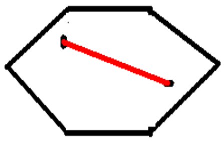


Figura nº 10

Perguntei aos alunos quais daqueles polígonos eram convexos e quais não eram? Ouvi as seguintes respostas: B19: As figuras 09 e 10 são convexas; B06: As figuras 06, 07 e 08 são não convexas;
B14: fez um resumo do que os colegas tinham dito, afirmando que figuras 09 e 10 são convexas e a 07 e a 08 não são convexas.
Pedi aos alunos que anotassem as novas informações no caderno e partimos para a tarefa seguinte, isto é, recontar, por meio de uma história em quadrinhos, qualquer uma das versões do tangram, utilizando as peças do tangram.
Segunda parte da atividade
Distribui uma folha de papel quadriculado e os orientei para desenhar a versão escolhida na folha dada. Sugeri-lhes que relessem a história para ter uma ideia do que iriam fazer. E os resultados foram registrados em fotografias.

Na sala do sexto ano C –
Retomei com os alunos a discussão sobre a definição de polígono.
A resposta dada por C13 C19, C21 e C18 foi a seguinte: “polígono é uma figura geométrica com 3 ou mais lados”, que era o resultado da nossa discussão na aula anterior (08-04-09). Pedi que me apresentassem algum exemplo de polígono e ouvi: C13 respondeu: retângulo; C29 respondeu: quadrado; e C18 respondeu: pipa. Numa conversa, percebi que o polígono pipa é na realidade, o losango.
Utilizei as peças do tangram para construir a letra H (Figura 11) e retornei à ideia de contagem de lados de um polígono. Perguntei se eles sabiam me dizer quantos lados tinha o polígono letra H e me responderam corretamente. Percebi que os alunos ainda contam os lados do polígono, apontando para cada um dos lados. Desenhei um quadrado ao lado do polígono letra H, marquei dois pontos no interior de H de tal forma que o segmento de reta que os unia tivesse parte dentro e parte fora do polígono letra H e depois procedi de forma semelhante com o quadrado e mostrei-lhes que qualquer segmento de reta desenhado, ligando dois pontos internos do polígono sempre estaria dentro do mesmo. Falei-lhes que, no primeiro caso, o polígono é convexo e, no segundo caso, é não convexo.
Desenhei outros polígonos no quadro (Figuras abaixo).

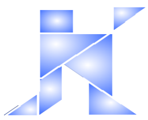


Figura nº 11

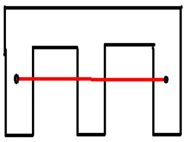


Figura nº 12

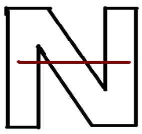


Figura nº 13

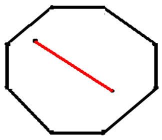


Figura nº 14

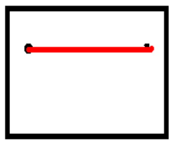
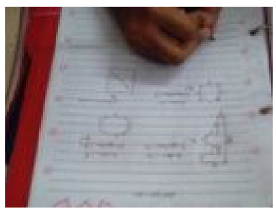


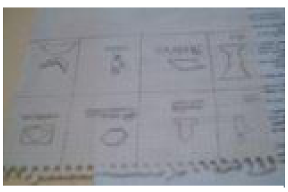
Figura nº 15

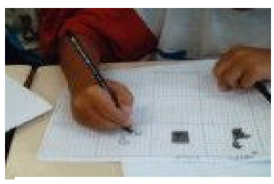
Perguntei aos alunos quais daqueles polígonos eram convexos e quais não eram? Ouvi as seguintes respostas:
C13 - As figuras 14 e 15 são convexas; e C29 - As figuras 11,12 e 13 são não convexas.
Pedi aos alunos que anotassem as novas informações no caderno e partimos para a tarefa seguinte, isto é, recontar, por meio de uma história em quadrinhos, qualquer uma das versões do tangram, utilizando para isto as suas peças.


Fotografia 04

Segunda parte da atividade
Distribui uma folha de papel quadriculado e os orientei para desenhar a versão escolhida na folha dada. Sugeri-lhes que relessem a história para ter uma ideia do que iriam fazer, e os resultados estão registrados nas fotografias a seguir:


Fotografia 05


Fotografia 06


Fotografia 07

Na sala do sexto ano D – Questionei os alunos sobre o que é polígono? A resposta dada por D09; D24 e D26 foi a seguinte: “polígono é uma figura geométrica com 3 ou mais lados”. E isto foi o resultado da nossa discussão na aula anterior (08-04-09). Pedi que me apresentassem algum exemplo de polígono e ouvi: D09 respondeu: quadrado; D26 respondeu: triângulo; e D24 respondeu: paralelogramo.
Utilizei as peças do tangram para construir a letra T (Figura16) e retornei à ideia de contagem de lados de um polígono. Perguntei se eles sabiam me dizer quantos lados tinha o polígono letra T e me responderam corretamente. Eu percebi que os alunos ainda contam os lados do polígono, apontando para cada um dos lados. Desenhei um quadrado ao lado do polígono letra T, marquei dois pontos no inteiror de T, de tal forma que o segmento de reta que os unia tivesse parte dentro e parte fora do polígono letra T e depois procedi de forma semelhante com o quadrado e mostrei-lhes que qualquer segmento de reta desenhado, ligando dois pontos internos do polígono sempre estaria dentro do mesmo. Falei-lhes que, no primeiro caso dizemos que o polígono é convexo e, no segundo caso, é não convexo. Desenhei outros polígonos no quadro (Figuras abaixo).


Figura nº 16

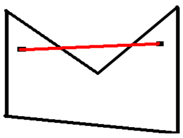


Figura nº 17


Figura nº 18

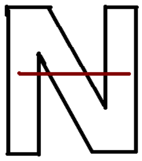


Figura nº 19

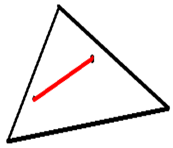


Figura nº 20

Perguntei aos alunos quais daqueles polígonos eram convexos e quais não eram? Ouvi as seguintes respostas: D10 o polígono 17 não é convexo, D09 os polígonos 16 e 19 não são convexos; D24 os polígonos são convexos e D26 fez um resumo do que os colegas tinham dito, afirmando que as figuras 18 e 20 são convexas e a 17 e a 19 não são convexas.
Sugeri aos alunos que anotassem as novas informações no caderno e partimos para a tarefa seguinte, isto é, recontar, por meio de uma história em quadrinhos, qualquer uma das versões do tangram, utilizando para isto as suas peças.
Segunda parte da atividade
Distribui uma folha de papel quadriculado e os orientei para desenhar a versão escolhida na folha dada. Sugeri-lhes que relessem a história para ter uma ideia do que iriam fazer.

ANEXO L8 – AULA – Primeiros desafios com o tangram

Data: 22-04-09 **Horário**: 13:50-16:40
TURMAS: 6º anos A, B, C e D

Objetivos:
Construir os polígonos indicados pelo pesquisador com um dado número de peças do tangram; e mostrar que é possivel compor alguns polígonos, a partir de triângulos e quadrados.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Uma hora aula de 50 minutos.
Transmitir aos alunos as regras da atividade. Propor os desafios para os estudantes.

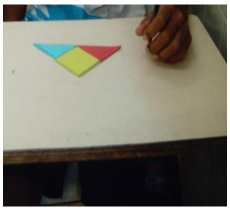
Sala do sexto ano A – Conversei com os alunos sobre os seguintes polígonos: triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo. Nessa conversa, discutimos sobre as características de cada uma das figuras geométricas citadas acima. Questionei os estudantes sobre as seguintes características de cada polígono:
a) Quantidade de lados de cada polígono; b) Quantidade de ângulos de cada polígono;
c) Quantidade de vértices de cada polígono; d) Se o polígono possui lados paralelos;
e) Se o polígono possui lados perpendiculares; f) Nome do polígono.
Para organizar a participação dos alunos, sugeri que levantassem a mão quando desejassem responder a uma pergunta. Questionei-lhes sobre as características de cada uma das figuras geométricas abaixo e, as respostas, que obtivemos para cada um dos polígonos, encontram-se descritas a seguir:

Polígono 1: TRIÂNGULO

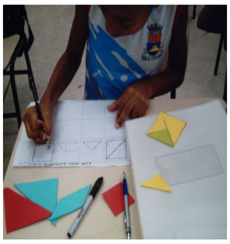
A14 - Possui 3 lados, 3 vértices e 3 ângulos; A21 - não possui lados paralelos.
A07- Alguns triângulos possuem todos os ângulos iguais.
Pesquisador: No caso do triângulo possuir lados iguais, eles serão chamados de triângulos equiláteros.
Polígono 2: QUADRADO
A27- O quadrado possui quatro lados iguais; A10 - Possui quatro vértices e os quatro ângulos dele têm o mesmo valor; A28 - O quadrado é um quadrilátero.
A14 - No quadrado, os lados opostos (percebi que se tratava de lados opostos pelo gesto dele com as mãos) são paralelos.
Polígono 3: RETÂNGULO
A21 - Possui 4 lados, 4 ângulos e quatro vértices; A15 - Os lados que ficam de frente um para o outro (opostos) têm o mesmo tamanho; A03 - Os ângulos possuem o mesmo valor; A06 - O retângulo é um quadrilátero.
Polígono 4: TRAPÉZIO
A09 - O trapézio é um quadrilátero; A14 - É o quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos.
Pesquisador: Afirmei que o quadrado e o retângulo também possuem dois lados paralelos. Perguntei se ele via alguma diferença entre o retângulo e o trapézio e A19 disse: É que no trapézio só dois dos lados opostos são paralelos.
A03 - O trapézio possui também 4 vértices, 4 ângulos e 4 lados.
Pesquisador: Disse aos alunos que existiam outros tipos de quadriláteros, além daqueles que tínhamos desenhado no quadro.

Polígono 5: PARALELOGRAMO
A21- É um quadrilátero; A14 - Os lados são dois a dois paralelos; A15 - O paralelogramo tem 4 lados, 4 vértices e 4 ângulos.

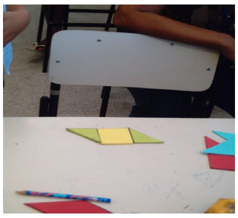
Polígono 6: LOSANGO
A14 - O losango é um quadrilátero que possui 4 lados, 4 ângulos e 4 vértices; A28 - É um quadrilátero com quatro lados iguais.
Disse-lhes que tinha alguns desafios para propor-lhes e expliquei-lhes as regras que eles deviam seguir.
1ª regra: Deviam montar as figuras com as quantidades de peças indicadas.
2ª regra: Ao concluir cada desafio, deviam levantar a mão e chamar o pesquisador para fotografar.
1º Desafio: Construir um triângulo, utilizando apenas três das sete peças do tangram.


Fotografia 08

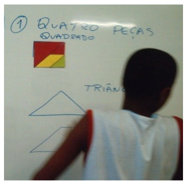
2º Desafio: Construir um quadrado, utilizando apenas três das sete peças do tangram.


Fotografia 09

3º Desafio: Construir uma figura de quatro lados (diferente do quadrado), utilizando apenas três das sete peças do tangram.


Fotografia 10

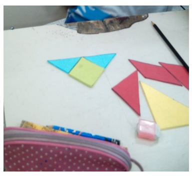
4º Desafio: Construir um quadrado, utilizando apenas três das sete peças do tangram.



Fotografia 11

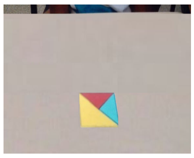
Na sala do sexto ano B –
Iniciei a aula, conversando com os alunos sobre polígonos, como por exemplo, triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo. Nesse diálogo, discutimos sobre as características de cada uma das figuras geométricas citadas acima. Questionei os estudantes sobre as seguintes características de cada polígono:
a) Quantidade de lados de cada polígono; b) Quantidade de ângulos de cada polígono;
c) Quantidade de vértices de cada polígono; d) Se o polígono possui lados paralelos;
e) Se o polígono possui lados perpendiculares; f) Nome do polígono.
Para organizar a participação dos alunos, sugeri que levantassem a mão quando desejassem responder a uma pergunta.
Questionei-lhes sobre as características de cada uma das figuras geométricas abaixo e, as respostas, que obtivemos para cada um dos polígonos, encontram-se descritas a seguir:

Polígono 1: TRIÂNGULO
B22: O triângulo tem 3 lados, 3 vértices; B26 - Possui três ângulos e não possui lados paralelos; B07- Há alguns triângulos que possuem todos os ângulos iguais.
Polígono 2: QUADRADO
B21 - O quadrado possui quatro lados iguais; B13 - Possui quatro vértices.
B18 - Os quatro ângulos dele têm o mesmo valor; B23 - O quadrado é um quadrilátero.
B26 - No quadrado os lados que ficam de frente um para o outro são paralelos.
Polígono 3: RETÂNGULO
B13 - Possui 4 lados, 4 ângulos e quatro vértices; B10 - Os lados, que ficam de frente um para o outro, têm o mesmo tamanho; B13 - Os ângulos possuem o mesmo valor.
B25 - O retângulo também é um quadrilátero. Pesquisador: Completei as informações sobre o retângulo, declarando que no retângulo os lados opostos são paralelos.
Polígono 4: TRAPÉZIO
B01- O trapézio é um quadrilátero; B26 - É o quadrilátero porque os lados que ficam de frente um para o outro são paralelos. Questionei-o, afirmando que o quadrado e o retângulo também possuem os lados paralelos que ficam de frente um para o outro. Perguntei-lhe o que diferencia o quadrado do trapézio e B26 respondeu-me: o trapézio tem só dois dos seus lados paralelos.
B17 - O trapézio possui também 4 vértices e 4 ângulos.
O pesquisador disse aos alunos que existiam outros tipos de trapézios além daquele que tínhamos desenhado no quadro.
Polígono 5: PARALELOGRAMO
B26 - O paralelogramo é um quadrilátero; B14 - Os lados são dois a dois paralelos;
B04 - O paralelogramo tem 4 lados, 4 vértices e 4 ângulos.
Polígono 5: LOSANGO
B15 - O losango é um quadrilátero que possui 4 lados, 4 ângulos e 4 vértices.
B21- É um quadrilátero com quatro lados iguais.
Disse-lhes que tinha alguns desafios para propor-lhes e expliquei-lhes as regras que eles deviam seguir.
1ª regra: Deviam montar as figuras com as quantidades de peças indicadas.
2ª regra: Ao concluir cada desafio deviam levantar a mão e me chamar para fotografar.
1º Desafio: Construir um triângulo, utilizando apenas três das sete peças do tangram.



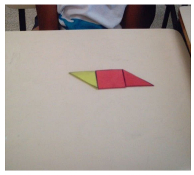
Fotografia 12

2º Desafio: Construir um quadrado, utilizando apenas três das sete peças do tangram.



Fotografia 13

3º Desafio: Construir uma figura de quatro lados (diferente do quadrado) utilizando apenas três das sete peças do tangram.

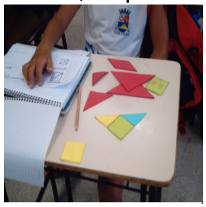


Fotografia 14

Na sala do sexto ano C –
Conversei com os alunos sobre os seguintes polígonos: triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo. Nessa conversa, discutimos sobre as características de cada uma das figuras geométricas citadas acima. Questionei os estudantes sobre as seguintes características de cada polígono:
a) Quantidade de lados de cada polígono; b) Quantidade de ângulos de cada polígono;
c) Quantidade de vértices de cada polígono; d) Se o polígono possui lados paralelos;
e) Se o polígono possui lados perpendiculares; f) Nome do polígono.
Para organizar a participação dos alunos, sugeri que levantassem a mão quando desejassem responder a uma pergunta.
Questionei-lhes sobre as características de cada uma das figuras geométricas abaixo e, as respostas, que obtivemos para cada um dos polígonos, encontram-se descritas a seguir:
Polígono 1: TRIÂNGULO
C18: O triângulo possui 3 lados, 3 vértices e não possui lados paralelos.
C26: O triângulo possui também três ângulos; C20: Alguns triângulos possuem todos os ângulos iguais.
Polígono 2:QUADRADO
C18: O quadrado possui quatro lados iguais; C13: O quadrado possui quatro vértices e os quatro ângulos dele tem o mesmo valor; C26: O quadrado é um quadrilátero; C03 disse: No quadrado os lados são paralelos. Perguntei: Todos os quatro lados são paralelos? C03 respondeu-me que não, mas, que os lados eram dois a dois paralelos. Completei informando que os lados opostos são paralelos.
Polígono 3: RETÂNGULO
C26: Possui 4 lados e quatro vértices; C20: Os lados que ficam de frente um para o outro têm o mesmo tamanho; C13: Os ângulos possuem o mesmo valor; C04: O retângulo também é um quadrilátero. Completei as nformações sobre o retângulo, declarando que no retângulo os lados opostos são paralelos.
Polígono 4: TRAPÉZIO
C26: O trapézio é um quadrilátero; C19: É o quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos. Questionei-o afirmando que o quadrado e o retângulo também possuem dois lados paralelos. Percebi que ele não conseguia completar o que havia dito, ajudei-o escrevendo a frase dele da seguinte forma: É o quadrilátero que tem apenas dois lados opostos paralelos.
C03: O trapézio possui também 4 vértices e 4 ângulos.
O pesquisador disse aos alunos que existiam outros tipos de quadriláteros chamados de trapézio, além daquele que tinhamos desenhado no quadro.
Polígono 5: PARALELOGRAMO
C26: O paralelogramo é um quadrilátero; C19: Os lados são dois a dois paralelos; C13 disse: O paralelogramo tem 4 lados, 4 vértices e 4 ângulos.
Polígono 6: LOSANGO
C26: O losango é um quadrilátero que possui 4 lados, 4 ângulos e 4 vértices; C19: É um quadrilátero com quatro lados iguais.
Disse-lhes que tinha alguns desafios para propor-lhes e expliquei-lhes as regras que eles deviam seguir.
1ª regra: Deviam montar as figuras com as quantidades de peças indicadas.
2ª regra: Ao concluir cada desafio deviam levantar a mão e me chamar para fotografar.

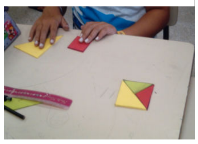
Pedi aos alunos que explicassem como fizeram para compor a figura geométrica, a partir das orientações dadas.

1º Desafio: Construir um triângulo, utilizando apenas três das sete peças do tangram (Fotografias 26).



Fotografia 15

2º Desafio: Construir um quadrado, utilizando apenas três das sete peças do tangram.

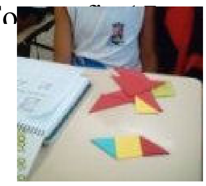


Fotografia 16

3º Desafio: Construir uma figura de quatro lados (diferente do quadrado), utilizando apenas três das sete peças do tangram.

Fo

4º Desafio: Construir um paralelogramo, utilizando apenas três das sete peças do tangram.



Fotografia 18

Na sala do sexto ano D –

Conversei com os alunos sobre os seguintes polígonos: triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo. Nessa conversa, discutimos sobre as características de cada uma das figuras geométricas citadas acima. Questionei os estudantes sobre as seguintes características de cada polígono:

a) Quantidade de lados de cada polígono; b) Quantidade de ângulos de cada polígono;
c) Quantidade de vértices de cada polígono; d) Se o polígono possui lados paralelos;
e) Se o polígono possui lados perpendiculares; f) Nome do polígono.

Para organizar a participação dos alunos, sugeri que levantassem a mão quando desejassem responder à uma pergunta. Questionei-lhes sobre as características de cada uma das figuras geométricas abaixo e, as respostas, que obtivemos para cada um dos polígonos, encontram-se descritas a seguir:

Polígono 1: TRIÂNGULO

D06 disse: O triângulo possui 3 lados, 3 vértices e não possui lados paralelos; D26: O triângulo possui também três ângulos; D26: Alguns triângulos possuem todos os ângulos iguais.

Polígono 2:QUADRADO

D24: O quadrado possui quatro lados iguais; D26: O quadrado possui quatro vértices e os quatro ângulos dele têm o mesmo valor; D26: O quadrado é um quadrilátero; D03: No quadrado os lados são paralelos. Perguntei-lhes: Todos os quatro lados são paralelos? D03 respondeu-me que não, mas, que os lados eram dois a dois paralelos. Completei informando que os lados opostos são paralelos.

Polígono 3: RETÂNGULO

D24: Possui 4 lados e quatro vértices; D24: Os lados que ficam de frente um para o outro têm o mesmo tamanho; D06: Os ângulos possuem o mesmo valor; D24: O retângulo também é um quadrilátero. Completei as informações sobre o quadrado e o retângulo, declarando que no retângulo os lados opostos são paralelos.

Polígono 4: TRAPÉZIO

D26: O trapézio é um quadrilátero; D24: É o quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos. Questionei-o afirmando que o quadrado e o retângulo também possuem dois lados paralelos. Percebi que ele não conseguia completar o que havia dito, ajudei-o escrevendo a frase dele da seguinte forma: É o quadrilátero que tem apenas dois lados opostos paralelos.

D03: O trapézio possui também 4 vértices e 4 ângulos.
O pesquisador disse aos alunos que existiam outros tipos de quadriláteros, além daqueles que tínhamos desenhado no quadro.
Polígono 5: PARALELOGRAMO
D06: O paralelogramo é um quadrilátero; D24: Os lados são dois a dois paralelos
D03: O paralelogramo tem 4 lados, 4 vértices e 4 ângulos.
Polígono 5: LOSANGO
D.26: O losango é um quadrilátero que possui 4 lados, 4 ângulos e 4 vértices.
D 24: É um quadrilátero com quatro lados iguais.
Disse-lhes que tinha alguns desafios para propor-lhes e expliquei-lhes as regras que eles deviam seguir.
1ª regra: Deviam montar as figuras com as quantidades de peças indicadas.
2ª regra: Ao concluir cada desafio deviam levantar a mão e me chamar para fotografar.
1º Desafio: Construir um triângulo, utilizando apenas três das sete peças do tangram.
2º Desafio: Construir um quadrado, utilizando apenas três das sete peças do tangram.
3º Desafio: Construir uma figura de quatro lados (diferente do quadrado), utilizando apenas três das sete peças do tangram.
4º Desafio: Construir um quadrado, utilizando apenas três das sete peças do tangram.

ANEXO L9 – AULA – Desafio final do tangram

Data: 29-04-09 **Horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Construir os polígonos indicados pelo pesquisador com um dado número de peças do tangram; e mostrar que é possivel compor alguns polígonos, a partir de triângulos e quadrados.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Uma hora aula de 50 minutos. Conversar com os alunos sobre as regras da atividade.

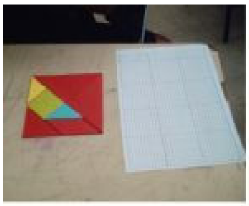
Na sala do sexto ano C –
Continuamos a atividade desafio da aula anterior. Agora nossos desafios consistiam em:
I) Construir e depois desenhar numa folha de papel quadriculado as figuras geométricas descritas a seguir: um quadrado, um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. Para realizar a atividade a regra básica era utilizar apenas **quatro das sete peças do tangram**.

Fotografia 19 - Formas geométricas

Fotografia 20 - Trapézio

Curiosamente as duas primeiras figuras que os alunos conseguiram montar foram respectivamente, o quadrado e o paralelogramo. A explicação para terem conseguido montar o quadrado pode estar no fato de que esta é uma das figuras que eles mais vêem e, visualmente, reconhecessem. Mas e quanto ao paralelogramo, qual seria a explicação plausível?
A construção do triângulo só foi possível porque nós dividimos o quadrado em dois triângulos e fixamos um. Depois tentamos construir o outro num lado, não funcionou e aí nós tentamos no outro e deu certo. Frases dos alunos C19 e C12 explicando como resolveram o desafio.

II) Construir e depois desenhar numa folha de papel quadriculado as seguintes figuras geométricas: um quadrado, um retângulo,um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. Para realizar a atividade proposta, a regra básica era usar todas as **sete peças do tangram**.



Fotograifa 21- Quadrado

Fotografia 22 - Paralelogramo

Faremos mais desafios na próxima aula.

Sala do sexto ano A –
Na aula prevista para 29/04, temos a pretensão de continuar a atividade desafio da aula anterior e, para tal, propomos novos desafios, os quais consistem em:
I) Construir e depois desenhar numa folha de papel quadriculado: um quadrado, um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. Para realizar a atividade, a regra básica era utilizar apenas **quatro das sete peças do tangram**.
II) Construir e depois desenhar numa folha de papel quadriculado: um quadrado, um retângulo, um paralelogramo, um triângulo e um trapézio. Para realizar a atividade a regra básica era utilizar todas as **sete peças do tangram**.

Fotografia 23

Fotografia 24

Fotografia 25

ANEXO L10 – AULA – Desenhando uma das histórias do tangram

Data: 06-05-09 **Horário:** 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A e C

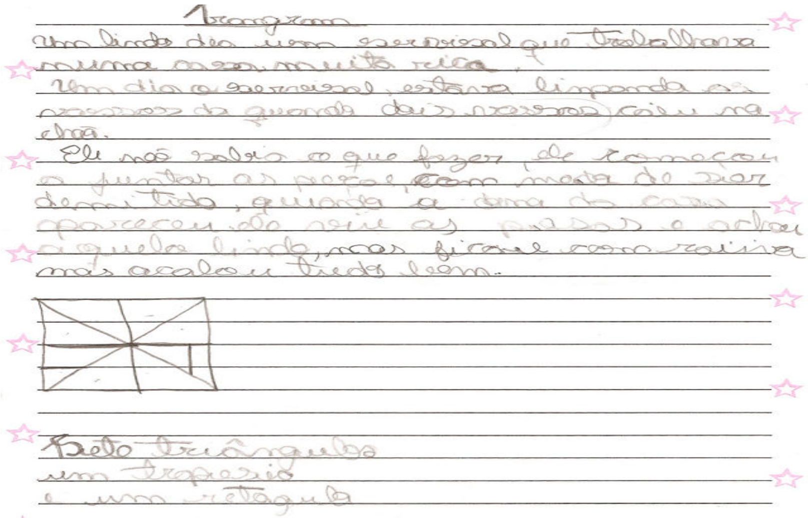
Objetivos:
Conversar com os estudantes sobre as três lendas do tangram; criar uma nova lenda para o tangram; e propor aos alunos que inventem outro tangram.

Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta atividade. Dialogar com os alunos sobre a atividade.

Na sala do sexto ano C –
Iniciei a aula desta turma, conversando com eles sobre as três lendas do tangram. Perguntei-lhes o que eles lembravam das lendas que leram?
C19 respondeu o seguinte: “Eu lembro daquela que um rei (imperador), muito zeloso tinha um serviçal e, este serviçal, certo dia quebrou um vaso do imperador. Tentando consertar o vaso, acabou construindo várias figuras, e o rei vendo o que podia fazer com aquelas sete peças resolveu poupar a vida do serviçal.”
C18 respondeu o seguinte: “Eu me lembro que tinha um monge que deu ao seu discípulo um quadrado de porcelana, um rolo de papel, pincel e tintas, e mandou-o viajar pelo mundo, anotando tudo que ele visse de bonito. O discípulo ficou tão feliz que acabou deixando a porcelana cair e quebrar em sete pedaços”.
C13 respondeu o seguinte: “A terceira lenda é parecida com a segunda, só que na terceira a porcelana é trocada por um espelho.”
Comentei com os alunos sobre as lendas e os orientei, dizendo que na aula de hoje, eles iriam inventar uma lenda para o tangram e, disse-lhes que iriam, além disso, criar um tangram, com a quantidade de peças que desejassem. Neste momento, percebi a empolgação de alguns alunos e a decepção de outros (Pois estes esperavam pelos desafios de montar algumas formas com o tangram.).

Segue, em anexo algumas lendas e alguns tangrans inventados pelos alunos.

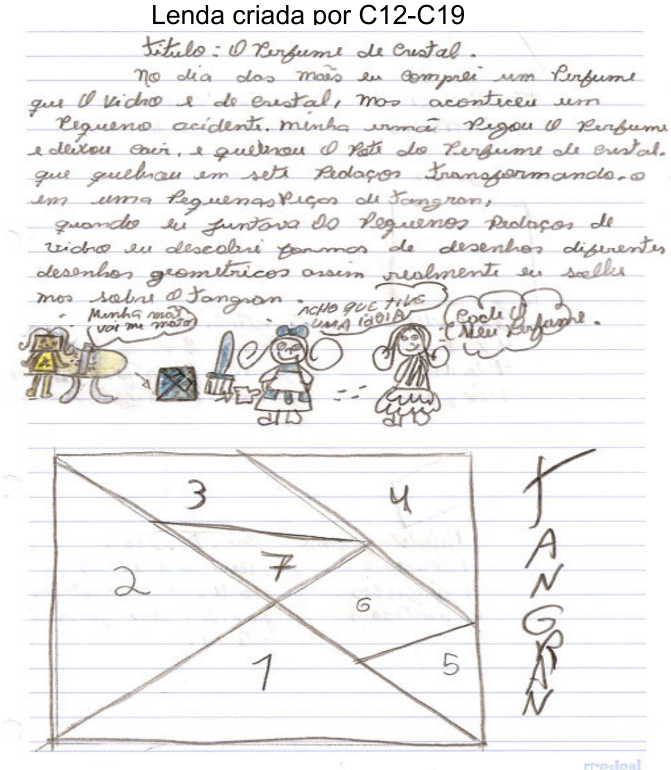
Lenda criada por C06



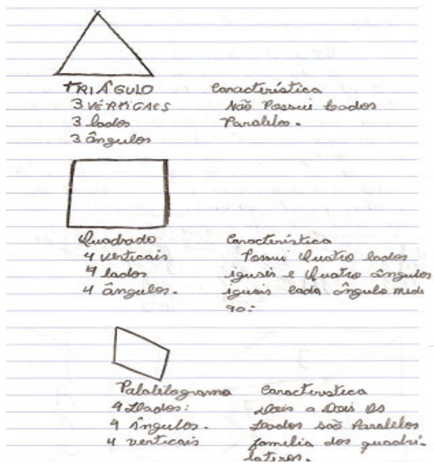
Tangram
Um lindo dia uma servisal que trabalhava
numa casa muito rica.
Um dia a servisal estava limpando as
peças do guarda dois peças caiu no
chão.
Ele não sabia o que fazer, ele começou
a juntar as peças, com medo de ser
demitido, quando a dona da casa
apareceu ela viu as peças e achou
aquela lindo, mas ficou com raiva
mas acabou tudo bem.

Sete triângulos
um trapezio
e um retângulo

Lenda criada por C12-C19



Titulo: O Perfume de Cristal.
No dia das mães eu comprei um Perfume
que o vidro é de cristal, mas aconteceu um
Pequeno acidente. minha irmã Pegou o Perfume
e deixou cair, e quebrou o Pote do Perfume de cristal.
que quebrou em sete Pedaços transformando-o
em uma Pequenas Peças de Tangran,
quando eu juntava os Pequenos Pedaços de
vidro eu descobri formas de desenhos diferentes
desenhos geométricos assim realmente eu sabe
mos sobre o Tangran



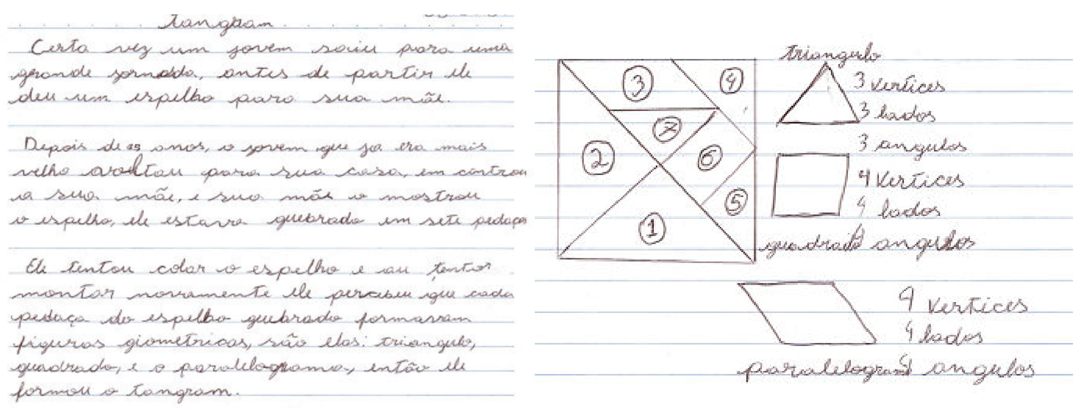
TRIÂNGULO 3 VÉRTICES 3 lados 3 ângulos	Característica Não Possui lados Paralelos.
Quadrado 4 verticais 4 lados 4 ângulos.	Característica Possui Quatro lados iguais e Quatro ângulos iguais cada ângulo mede 90°
Paralelogramo 4 lados: 4 ângulos. 4 verticais	Característica dois a dois os lados são Paralelos familia dos quadrilateros.

Análise: Nesta turma, percebemos que os alunos estão escrevendo um pouco mais, apesar de ainda cometerem alguns erros ortográficos, que, em alguns casos, parece acontecer por falta de atenção e em outros por desconhecerem a palavra que desejam escrever. As histórias criadas pelos alunos nos mostraram algumas pistas sobre as formas que eles já reconhecem. Esse fato fica evidente quando lemos as versões do tangram que eles construiram. Na versão criada por C19-C12, eles nos revelam que identificam triângulos, quadrados e paralelogramos e na hora de inventar um tangram, mostram que são capazes de identificar formas hexagonais e trapezoidais. Tomando como referência Lorenzato (2008) e Gutiérrez (1990), podemos afirmar que os alunos citados já formaram um imagem mental de figuras como: triângulos, quadrados, hexágonos e trapézios, pois, além de citar

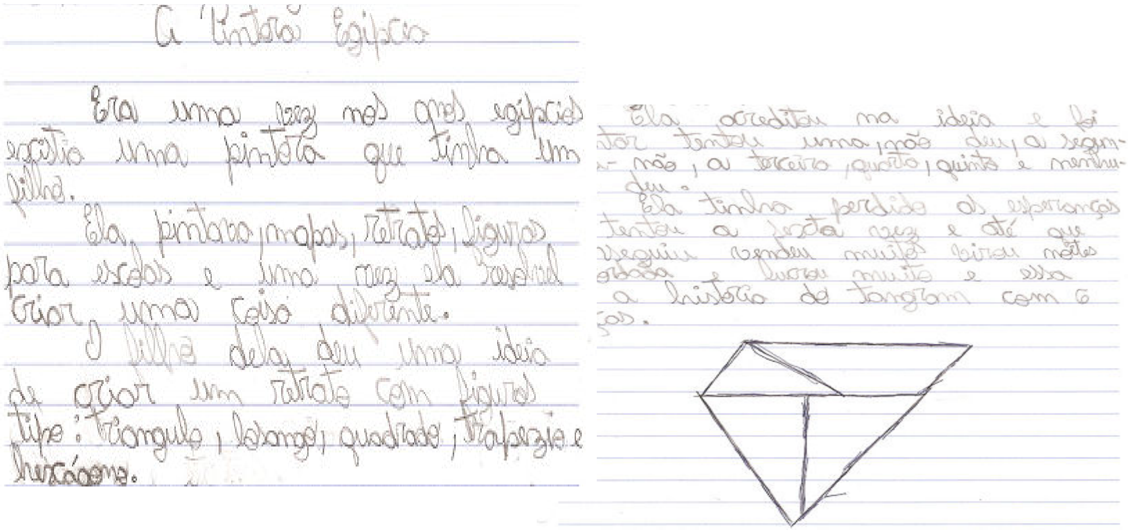
os nomes das referidas figuras, eles também apresentam algumas das características como quantidade de lados, ângulos e vértices de cada uma das referidas figuras geométricas.
No caso do aluno C06, percebemos que ele é capaz de identificar triângulos, quadrados e trapézios. Sendo este só sob determinadas posições e tipo. Contudo, no que diz respeito às características das figuras geométricas citadas, ele não nos deixou pistas de que é capaz de identificá-las, mas também não deu nenhuma informação de que não consegue identificá-las e, isto nos leva à conclusão de que precisamos buscar estas informações sobre o aluno C06.

Sala do sexto ano A –
Conversei com os alunos sobre as três lendas do tangram. Perguntei-lhes o que eles lembravam das lendas que leram? A15 respondeu o seguinte: " lembro que tinha um imperador e um serviçal e, este serviçal quebrou um vaso do imperador. Ao tentar consertar o vaso acabou construindo muitas figuras. Como as figuras eram muito bonitas o imperador se encantou com elas e resolveu poupar a cabeça do serviçal."
A 28 respondeu o seguinte: "um discípulo ganhou de seu mestre um quadrado de porcelana, um rolo de papel, pincel e tintas. E disse que ele devia sair pelo mundo desenhando tudo que ele visse de bonito. O discípulo ficou tão feliz que acabou deixando a porcelana cair e quebrar."
A14 respondeu o seguinte: "O que eu lembro da terceira lenda é que tinha um espelho quadrado que um discípulo quebrou em sete pedaços e ao tentar montar o quadrado ele criou várias figuras."
Comentei com os alunos sobre as lendas, disse-lhes que, na aula de hoje, eles criariam uma lenda e inventariam um tangram com a quantidade de peças que desejassem. Neste momento, percebi a alegria no rosto de alguns alunos e a decepção de outros, pois estes esperavam pelos desafios de montar algumas formas com o tangram.
Segue, em anexo, algumas lendas e alguns tangrans inventados pelos alunos.

Lenda criada por A14


tangram
Certa vez um jovem saiu para uma grande jornada, antes de partir ele deu um espelho para sua mãe.
Depois de 20 anos, o jovem que já era mais velho voltou para sua casa, encontrou a sua mãe, e sua mãe o mostrou o espelho, ele estava quebrado em sete pedaços
Ele tentou colar o espelho e ao tentar montar novamente ele percebeu que cada pedaço do espelho quebrado formaram figuras geométricas, são elas: triangulo, quadrado, e o paralelogramo, então ele formou o tangram.

Lenda criada por A21 – A 28


A 'Pintora' Egípcia
Era uma vez nos anos egípcios existia uma pintora que tinha um filho.
Ela pintava mapas, retratos, figuras para escolas e uma vez ela resolveu criar uma coisa diferente.
O filho dela deu uma idéia de criar um retrato com figuras tipo: triangulo, losango, quadrado, trapézio e hexágono.
Ela acreditou na ideia e foi tentar uma vez não deu, a segunda não, a terceira, quarta, quinta e nenhuma deu.
Ela tinha perdido as esperanças tentou a sexta vez e até que conseguiu vendeu muitos ficou rica e ... muito e ela ... a história do tangram com 6 ...

Análises: Nessa turma, percebemos que os alunos estão escrevendo um pouco mais. Contudo ainda apresentaram alguns erros ortográficos. As histórias criadas pelos alunos nos mostraram algumas pistas sobre as formas que eles já reconhecem. Este fato fica evidente, quando lemos as versões do tangram que eles construiram. Na versão criada por A 28-A21, eles nos revelam que identificam triângulos, losangos, quadrados, trapézios e paralelogramos. Tomando como referência Lorenzato (2008), podemos afirmar que os alunos citados já formaram um imagem mental de figuras como: triângulos, quadrados, losangos e trapézios, porém ainda não é possível afirmar se os alunos conseguem identificar as características das referidas figuras.

No caso do aluno A14 ele se inspira numa das versões do tangram para criar uma nova história e deixa pistas de que é capaz de identificar triângulos, quadrados e paralelogramos e ainda mostra que consegue enumerar a quantidade de lados, ângulos e vértices das figuras citadas. Tomando como referência Gutiérrez (1990) e Lorenzato (2008) afirmamos que A14 formou uma imagem mental das formas geométricas que ele mesmo cita.

ANEXO L11 – AULA – Os últimos desafios

Data: 11-05-09 **Horário**: 13:00-14:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Construir, com um dado número de peças do tangram, os polígonos sugeridos pelo pesquisador; e mostrar que é possivel compor e decompor alguns polígonos a partir de triângulos e quadrados.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para desenvolver esta tarefa, distribuída da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade; e enfrentando o desafio proposto pelo pesquisador.

Sala do sexto ano A –
Conversei com os alunos sobre as lendas que criaram para o tangram e aproveitei para questionar os alunos sobre a grafia das seguintes palavras: Certo, se escreve com S ou C?
A10 respondeu o seguinte: “ é com C”; A14 respondeu o seguinte: “é com C”
Escrevi a palavra no quadro e voltei a perguntar-lhes o seguinte: E quadrado escreve-se com G ou Q?
A14 respondeu o seguinte: “é com Q”; A28 respondeu o seguinte: “é com Q.”
Escrevi a palavra quadrado (com Q) no quadro e fiz a última pergunta e a palavra pedaço escreve-se com s ou ç? A14 respondeu: Pedaço é escrito com s; A28 respondeu o seguinte: Pedaço é escrito com ç.
Diante da dúvida, lembrei-lhes que é sempre bom consultar o dicionário, principalmente quando estamos em dúvida na escrita de alguma palavra e lembrei-lhes de que: S escrito entre duas vogais tem som de Z e escrevi a palavra certa no quadro.
Finalizei a aula, propondo-lhes que enfrentassem os desafios abaixo e disse-lhes que poderiam escolher por qual forma eles queriam começar.
1º Desafio: Construir um triângulo, utilizando todas as sete peças de um tangram.
Nesta aula, os alunos não conseguriam montar o triângulo com as sete peças.
2º Desafio: Construir um paralelogramo, utilizando todas as sete peças do tangram.
3º Desafio: Construir um trapézio com todas as sete peças do tangram.
Comentários e análises:
Na aula de hoje, os alunos preferiram iniciar a montagem da forma geométrica pelo paralelogramo, depois o trapézio e, por fim, o triângulo. Contudo, as tentativas que realizaram não trouxe os resultados esperados e devido ao pouco tempo que tivemos não conseguimos finalizar construindo o triângulo. E por esta razão, decidimos construí-la, na próxima aula.
Durante o processo de construção do paralelogramo, os alunos me pediram para dar uma dica de como construir a forma geométrica proposta, e eu apresentei-lhes as seguintes dicas:
1ª dica: Retire, temporariamente, do conjunto os dois maiores triângulos.
2ª dica: Com as cinco peças restantes construa um quadrado.
3ª dica: Após construir o quadrado com as cinco peças encaixe os dois triângulos grandes na

figura, sendo um de cada lado do quadrado.
Os alunos tentaram e depois de alguns minutos conseguiram montar o quadrado com cinco peças, porém, surgiu um problema. O enunciado da atividade pedia-lhes que construíssem um paralelogramo e a figura montada por alguns alunos era um trapézio. Percebendo a dificuldade desses estudantes, pedi a um aluno que tinha conseguido, para explicar a um grupo que ainda não tinha conseguido construir a figura pedida. O primeiro a se apresentar para ajudar foi A28. A seguir relato um trecho da conversa entre A28 e a dupla A14 e A21.
A28: Vamos construir primeiro o quadrado.
A14 e A21: Construimos e agora, o que faremos?
A28: Como vocês já construíram o quadrado, agora é só colocar um triângulo de um lado e outro de cabeça para baixo do outro lado.
A14 e A21: Conseguimos construir o paralelogramo.
Verifiquei que de fato os alunos tinham montado, na mesa deles, o paralelogramo. Pedi que colassem o paralelogramo no quadro. Nesse momento surgiu um novo problema. A figura montada, no quadro, não era um paralelogramo e, sim um tipo de trapézio. Perguntei-lhes: Como consertar o "erro"? A solução de A14 foi: trocar o lado no qual o durex tinha sido colado nos dois maiores triângulos, e funcionou.
Enquanto eu trabalhava as dicas com os demais alunos da turma, notei que a professora de educação especial fazia o mesmo com a aluna de educação especial. Assim que os outros alunos começaram a montar o paralelogramo, aproximei-me da aluna especial e da professora para acompanhar o trabalho e dar novas sugestões para elas. Uma vez que faltava apenas uma peça (um triângulo grande) sugeri que colocassem o último triângulo numa posição inversa à do primeiro.
Nesta aula, percebi que apliquei a sugestão de Polya de dividir um problema complexo em problemas mais simples. No nosso problema, a união das respostas dos dois problemas (figuras geométricas) poderiam trazer como respostas outras figuras que não eram, exatamente, a resposta para o problema proposto e isto aconteceu. Foi nesse momento que utilizei também um dos princípios da teoria de Vygotsky, ou seja, um colega mais experiente pode ajudar outro colega na busca de solução ou entendimento de um problema.
Outra percepção que tive, sobre dificuldades que surgem de repente para os alunos, foi no momento em que os alunos iam ao quadro para colar a figura construída e, inicialmente, não conseguiam obter a forma montada na mesa. Pensei que este episódio acontecesse pelo fato de que os alunos ainda não dominavam as estratégias de resolução de problemas ou que eles enfrentavam dificuldades relacionadas à simetria. Analisando o episódio da construção do paralelogramo construído pela dupla A14 e A21 pude perceber que o problema enfrentado pela dupla, ao colar o paralelogramo no quadro, estava relacionado à simetria.

Na sala do sexto ano C –
Conversei com os alunos sobre as lendas que criaram para o tangram e aproveitei para informar-lhes que eu havia gostado das histórias e da criatividade deles e, em seguida, questionei-lhes sobre a grafia das seguintes palavras: Vaso, se escreve com S ou com SS?
C19 respondeu o seguinte: " professor, vaso se escreve com um único S."; C18 respondeu o seguinte: "é com SS."
Perguntei se eles lembravam qual era o som da letra S, quando esta é escrita entre duas vogais.
C19 respondeu o seguinte: Ele tem som de z.
E na palavra vaso o som que ouvimos é de s ou de z?
C18 respondeu: é de z.
Sugeri que olhassem no dicionário e me respondessem.
C13 respondeu que estava escrito com um s.
Escrevi a palavra vaso no quadro e voltei a perguntar-lhes o seguinte: E quadrado escreve-se com G ou Q?
C19 respondeu o seguinte: "é com Q"; C18 respondeu o seguinte: "é com Q."
Finalizei a aula, propondo-lhes que enfrentassem os desafios abaixo e disse-lhes que poderiam escolher por qual forma eles queriam começar.
1º Desafio: Construir um triângulo, utilizando todas as sete peças de um tangram.
Nesta aula os alunos não conseguriam montar o triângulo com as sete peças.
2º Desafio: Construir um paralelogramo, utilizando todas as sete peças do tangram.
3º Desafio: Construir um trapézio com todas as sete peças do tangram.
Comentários e análises:

Na aula de hoje os alunos preferiram iniciar a montagem da forma geométrica pelo paralelogramo, depois o trapézio e, por fim, o triângulo. Contudo, a construção das figuras mencionadas acima, nos deixou pouco tempo para tentar montar o triângulo e por essa razão decidimos construí-la na próxima aula. Durante o processo de construção do paralelogramo, o aluno C18 me pediu para dar uma dica de como construir a forma geométrica proposta, e eu apresentei-lhes as seguintes dicas:
1ª dica: Retire, temporariamente, do conjunto de peças os dois maiores triângulos.
2ª dica: Com as cinco peças restantes construa um quadrado.
3ª dica: Após construir o quadrado com as cinco peças, encaixe os dois triângulos grandes na figura, sendo um de cada lado do quadrado.
Enquanto os alunos tentavam montar o quadrado com cinco peças, C19 montou um paralelogramo. Pedi-lhe que o escondesse e, depois de alguns minutos, os demais colegas conseguiram montar o quadrado com cinco peças. Percebendo a dificuldade desses estudantes, pedi a C19 que os ajudasse, explicando ao grupo que ainda não tinha conseguido construir a figura pedida, a forma como ele resolveu este problema. E C19 agiu da seguinte forma: C19 aproximou-se de C18 e C03 e percebeu que eles já haviam construído o quadrado com cinco peças e disse-lhes agora é só vocês encostarem os triângulos um em cada lado do quadrado.
C03; C18 e C19 se juntaram para ajudar os outros colegas que ainda tinham dificuldades. O procedimento utilizado por C03 e C18 foram os que haviam aprendido com C19. Ao pedir que colasse o paralelogramo no quadro, um novo problema surgiu. A figura montada não era um paralelogramo e, sim um tipo de trapézio e a pergunta agora era como consertar o "erro" e C19 sugeriu ao colega C21 que invertesse o lado do durex de um dos triângulos. Nesta aula, percebi que apliquei a sugestão de Polya de dividir um problema complexo em problemas mais simples ou que eles já tinham resolvido antes. No nosso problema, a união das respostas dos dois problemas (figuras geométricas) poderiam trazer como respostas outras figuras que não eram, exatamente, a resposta para o problema proposto e isto aconteceu. Foi nesse momento que utilizei também um dos princípios da teoria vygotskiniana, ou seja, um colega mais experiente pode ajudar outro na procura de solução ou entendimento de um problema.
Outra percepção que tive, sobre dificuldades que surgem com os alunos, foi no momento em que os alunos iriam ao quadro para colar a figura construída e inicialmente não conseguiam obter a forma montada na mesa. Pensei que este episódio acontecesse pelo fato de que os alunos ainda não dominavam as estratégias de resolução de problemas ou que eles enfrentavam dificuldades relacionadas à simetria.

No desafio com tangram, percebemos que na "aprendizagem da geometria, a (de) composição é também uma estratégia facilitadora, pois, por exemplo, diante da questão: como transformar um paralelogramo num quadrado" (LORENZATO, 2008, p. 16). Na nossa atividade foi pedido aos alunos que construíssem um paralelogramo e os estudantes conseguiram montar um trapézio. Agora o problema resumia-se em transformar o trapézio num paralelogramo, em outras palavras, os educandos precisavam decompor um trapézio e sem desconstruir toda a figura deviam compor o paralelogramo, isto é, eles precisariam deslocar, ou rotacionar uma figura para formar a outra.

A partir dessa data, trabalharemos apenas com os 6º anos A e C. Numa conversa com a minha orientadora e com o professor da turma, percebi que precisava escolher uma ou, no máximo, duas turmas para continuar a desenvolver a pesquisa. Pensamos nessa decisão ao levar em consideração os seguintes pontos: o aumento rápido do volume de dados para analisar detalhadamente em várias fases e para confrontar com os autores estudados; o envolvimento de cada turma com as atividades de pesquisa; as dificuldades com o tempo para planejar, replanejar atividades, registrar e transcrever todos os dados das aulas, ler e reler autores e estudos relacionados com a pesquisa; e as diversas fases de aprendizagem de um pesquisador iniciante atuando como professor-pequisador ao implementar uma pesquisa qualitativa.

Na atividade de hoje, percebi que os alunos estão começando a apresentar sinais de que o trabalho com o tangram está ficando entediante e aproveitei para informar-lhes que, a partir do dia 18-05, estaremos trabalhando com um novo material o geoplano. Provavelmente eu deveria ter pensado em desenvolver atividades com o tangram e com o geoplano intercaladas. Contudo, nem tudo é possível pensarmos e planejarmos antes da intervenção pedagógica. Percebi também como comentou minha orientadora em nossas conversas por telefone e email que o trabalho de leitura, consulta ao dicionário e conversas sobre as palavras usadas nas aulas de matemática podem auxiliar os alunos em suas dificuldades com a língua portuguesa. Nas duas turmas trabalhamos sempre com estas ideias e fomos percebendo que os alunos foram incorporando novos hábitos de estudos e de cuidados com a língua portuguesa.

ANEXO L12 – AULA – O início do trabalho com o geoplano

Data: 13-05-09 **Horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Conhecer o geoplano de malha quadrada; explorar, livremente, as possibilidades do geoplano; trabalhar com a criatividade do aluno; e construir no geoplano de malha quadrada as formas sugeridas pelo pesquisador.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisa-se de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta atividade, distribuída da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade; e enfrentando o desafio de construir formas geométricas no geoplano quadrado.

Sala do sexto ano A –
Iniciamos a aula, conversando com a turma sobre o geoplano quadrado e, em seguida, discutimos as regras para se trabalhar com o instrumento. Informei-lhes a respeito do material que eles receberiam, um conjunto com 5 borrachinhas distribuídas assim: duas amarelas, uma azul, uma verde e uma vermelha. Falei que este material deveria ser devolvido no final da atividade.
Durante a apresentação do geoplano para a turma, o aluno A02, curioso, nos fez a seguinte pergunta: Professor, quantos kilos de pregos o senhor utilizou em todas essas tábuas?
Respondi: Utilizei um pacote de 1 kilo, mas eu tenho uma questão para vocês. Bom, eu preparei 22 geoplanos, todos do mesmo tamanho, para trabalhar com vocês. A pergunta é a seguinte: Quantos pregos tem em cada geoplano?
Depois de alguns minutos A02 respondeu: são 100 pregos.
A14 o meu também tem 100 pregos! E A15 disse que no seu geoplano tinha 100 pregos.
Voltei-me para os alunos e perguntei como vocês chegaram a esse número?
A02 respondeu-me: eu fui contando prego por prego.
A15 respondeu-me: eu contei dez na primeira linha, dez na segunda linha, dez na terceira e assim até a décima linha e depois somei todos os resultados e deu 100.
A14 respondeu-me: eu contei a primeira linha e deu dez. Depois contei o total de linhas e deu dez e, em seguida, multipliquei dez por dez e deu 100 pregos.
A14 concluiu, professor, são 22 geoplanos, não é mesmo?
Respondi-lhe que sim.
A14 continua: Como cada geoplano tem 100 pregos e são 22, então, em um kilo de pregos temos 2200 pregos.
Achei interessante a estratégia que cada um dos três alunos utilizou para resolver o problema, pois um deles empregou a estratégia de contar elemento por elemento e, o segundo usou o princípio aditivo que se aproxima muito da multiplicação e o terceiro utilizou um princípio da multiplicação que, neste episódio, aproxima-se do caminho utilizado para se calcular área.
Finalizando essa parte, pedi aos alunos que seguissem a folha de orientações de atividades distribuídas pelo professor. E apresentamos algumas fotografias das atividades criativas realizadas pelos alunos.
Perguntei ao aluno o que havia desenhado e a resposta que recebi foi:
A08 eu construi um prédio de apartamentos, uma casa com um gramado e o sol iluminando tudo.
Outra obra de arte que achamos interessante foi a apresentada por A18. Pedi a aluna que me falasse sobre a sua obra de arte, e ela respondeu-me o seguinte:
A18 disse: eu fiz um homem de óculos e com bigode. Ficamos interessados pelo trabalho da aluno pelo fato de que ela utilizou apenas triângulos e retângulos para construir a obra de arte dela.

Na sala do sexto ano C –
Principiamos a aula, conversando com a turma sobre o geoplano quadrado, e discutimos as regras para trabalharmos com o instrumento. Informei-lhes a respeito do material que eles receberiam um conjunto com 5 borrachinhas sendo: duas amarelas, uma azul, uma verde e uma vermelha e que este material deveria ser devolvido no final da atividade.

Pedi aos alunos que descobrissem quantos pregos foram pregados no geoplano.
Assim que terminei a pergunta C19 e C18 responderam: são 100 pregos.
Perguntei para a turma se eles concordavam com C19 e C18 e a resposta foi: sim, concordamos.
Pedi aos dois alunos C19 e C18 que explicassem como eles procederam para chegar àquele resultado e a explicação foi:
C19 respondeu: Contei o total de linhas e depois o total de pregos por linha e assim multipliquei os totais e deu 100.
C18 respondeu-me: eu contei a primeira linha e deu dez. Depois contei o total de linhas e deu dez e, em seguida, multipliquei dez por dez e deu 100 pregos. C18 limitou-se a repetir as frases ditas por C19.
Voltei-me para a turma e disse o seguinte:
Se foram preparados 22 geoplanos e cada um deles tem 100 pregos, juntando todos os geoplanos quantos pregos utilizei?
C20: Professor, foram usados 2200 pregos.
Achei interessante a estratégia que C19 e C18 utilizaram para resolver o problema, pois um deles utilizou a estratégia de contar elemento por elemento e, o segundo utilizou o principio aditivo que se aproxima muito da multiplicação. Já o terceiro aluno C20 utilizou um princípio da multiplicação que nesse episódio, se aproxima do caminho utilizado para se calcular área.
Finalizando esta parte pedi aos alunos que seguissem a folha de orientações de atividades distribuídas. A seguir, apresentamos fotografias das atividades criativas realizadas pelos alunos.
Perguntei ao aluno o que havia desenhado e a resposta que recebi foi:
C07: Eu fiz uma pipa.
Perguntei-lhe: Você poderia me dizer quais são as figuras geométricas que há na sua pipa?
C07: Tenho quatro triângulos, dois retângulos e um hexágono.
Perguntei ao aluno o que havia desenhado e a resposta que recebi foi:
C18: Eu fiz uma máscara.
Perguntei-lhe: Você poderia me dizer quais são as figuras geométricas que há na sua máscara?
C18: Tenho quadriláteros.
Comentários e análises:
Nesta atividade, percebemos que os alunos das duas turmas deixaram pistas de que já é possível trabalhar cálculo de áreas e parece que reconhecem, visualmente, figuras de três, quatro, cinco e seis lados.
É interessante percerber como os estudantes avançam quando estão motivados e o efeito que materiais como o geoplano apresentou para esses alunos. Um exemplo claro disto é a criatividade deles quando estão com o material nas mãos (Veja as fotografias neste relato de pesquisa.).

ANEXO L13 – AULA – Confeccionando um painel com o tangram

Data: 18-05-09 **horário:** 13:50-14:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Construir um painel com vários tangrans; mostrar mais uma das potencialidades artísticas do tangram; e utilizar o tangram na composição e decomposição de várias formas.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisa-se de uma hora aula de 50 minutos para realizar essa tarefa, distribuida da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade e enfrentando o desafio de construir um painel com as sete peças de vários tangrans.

Construindo um painel com alunos das duas turmas 6º A e 6ºC –
Para esta aula a nossa missão era de resolver o problema da construção de um painel com as sete peças triângulo. Iniciei a aula, conversando com os alunos sobre quem gostaria de construir uma “obra de arte”, isto é, um painel, utilizando as sete peças do tangram. Conversamos sobre o que iríamos construir e decidimos que contaríamos uma versão semelhante à segunda versão do tangram. Selecionamos as figuras geométricas que atenderiam ao nosso intento e um grupo de quatro alunos (C19 e C18; A14 e A15), dois de cada turma se encarregaram de montar a história num dos painéis que a escola nos disponibilizou. Porém, quando já estávamos iniciando a montagem, C18 desistiu da tarefa.

Durante a montagem pude perceber e acompanhar as conversas entre os alunos que participaram da montagem e agora as reescrevo.
Conversas entre C19 e A14 –
C19: Acho que devemos começar a montagem da primeira figura com o quadrado. A14 responde: eu acho melhor iniciar com o triângulo que forma o pé da figura, assim poderíamos alinhar as outras figuras por ele. C19 balançou a cabeça, concordando com A14.
Num momento seguinte, A14 vira para C19 e fala o seguinte: pega para mim o paralelogramo e passe o durex nele. Neste instante, vi C19 ir até as peças do tangram e pegar o paralelogramo e prepará-lo para colar no painel e entregá-lo para A14.
Por uns instantes os vi pensativos sobre qual seria a próxima figura e C19 fala para A14, que ele tinha certeza de que naquela posição seria a de um triângulo pequeno e resolveram experimentar e se alegraram por dar certo. Terminaram a primeira figura e se juntaram a A15 para construirem a figura seguinte.
A15 diz para os outros dois: Esta também é uma foma humana, mas é diferente da que vocês construíram. A14 concorda e C19 diz que acha que os dois maiores triângulos devem se juntar para formar o corpo da figura. A sugestao de C19 funcionou. E C19 continua dizendo: agora eu acho que devemos utilizar o triângulo médio e o paralelogramo para construir a perna, os dois triângulos pequenos formariam os pés e, finalmente, o quadrado para formar a cabeça.
Questionei-lhe como ele, C19, sabia da sequência, e ele afirmou que já havia construido esta forma antes.
A15: Agora, podem deixar, eu construirei o quadrado e vocês constroem outra figura. A15 foi rápido na construção do quadrado com as sete peças do tangram e não mostrou dificuldade nenhuma.
Comentários e análises:
O interessante nessa atividade foi que nela os alunos precisavam utilizar a visualização das figuras que queriam construir e ainda precisavam considerar o fator simetria. Pelo que percebemos durante o processo de construção, os estudantes mostraram que reconheciam, visualmente, e também já sabiam os nomes de cada uma das figuras geométricas que estavam empregando. Isto, na nossa compreensão mostra que esses estudantes parecem ter formado uma imagem mental de cada uma das formas que compõem o tangram.

ANEXO L14 – AULA – Aprendendo a trabalhar com o geoplano

Data: 20-05-09 **Horário**: 13:50-14:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Explorar, livremente, as possibilidades do geoplano; trabalhar com a criatividade do aluno; construir no geoplano de malha quadrada as formas sugeridas pelo pesquisador; e retormar a discussão sobre polígonos convexos e não convexos.

Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta atividade, distribuída da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade; e enfrentando o desafio de construir formas geométricas no geoplano quadrado.

Sala do sexto ano A –
Na aula de hoje, dialogamos com os alunos sobre a atividade que iríamos realizar, e quais eram nossos objetivos. Iniciamos o debate com a seguinte questão: O que vocês lembram sobre polígonos convexos?
As respostas foram as seguintes: A07: Eu lembro que é algo ligado a polígono; A15: Eu lembro que tem uma reta que passa no polígono; A14: Eu lembro que um polígono é convexo, quando pego dois pontos dentro dele e desenho uma reta, passando pelos dois pontos e ela não sai de dentro do polígono.
Perguntei-lhe: e se ela estiver parte dentro e parte fora do polígono?
A14: Aí, professor, o polígono é não convexo!
Voltamo-nos para a turma e perguntamos se alguém tinha mais alguma coisa a acrescentar e a turma sinalizou que não queria acrecentar mais nada.

Finalizei o processo, dizendo à turma que desenhasse alguns polígonos no geoplano ou as formas que a imaginação deles e a quantidade de borrachinhas lhes permitissem. E os resultados encontram-se assim descritos:
Entre as figuras que os alunos representaram no geoplano encontramos duas que achamos interessantes.
Na primeira o aluno A15 representou, na visão dele, a frente de uma igreja, e quando lhe perguntei quantos lados, ângulos e vértices tinha a figura, as respostas foram:
A15: A figura tem 10 lados, 10 ângulos e 10 vértices.
Voltei a perguntar-lhes se sabiam dizer o nome de uma figura geométrica que possui 10 lados, e a resposta foi: A 15: Sim, é um decaaa....é um decágono!
A segunda figura foi feita por A24 e, na visão do estudante, era um cachorrinho. Perguntei-lhe se sabia me dizer quais polígonos havia utilizado para compor o cachorrinho. As respostas foram:
A24: Eu utilizei quatro triângulos, um quadrado e uma figura de quatro lados.
Voltei a perguntar-lhe se esta figura de quatro lados é um quadrado?
A24: não
Perguntei-lhe: É um retângulo? E A24 respondeu-me novamente que não era.
Perguntei-lhe que forma era aquela e a resposta de A24 foi: É um quadrilátero que eu não sei o nome.
O fato de ter reconhecido a figura como um quadrilátero me deixou satisfeito e dei a discussão por encerrada, pois a aula já estava nos minutos finais.

Na sala do sexto ano C –
Nesta aula conversamos com os alunos sobre a atividade que pretendíamos realizar, e quais eram nossos objetivos. Para iniciar um diálogo com os estudantes propusemos a seguinte questão: O que vocês lembram sobre polígonos convexos?
A respostas foram as seguintes:
C29: Eu lembro que polígono convexo é quadrado, triângulo e retângulo.
Respondemos-lhe: de fato, os polígonos que você citou são convexos, mas o que queremos saber é o seguinte: O que é polígono convexo?
C04: Eu lembro que tem uma reta que passa no polígono. C19: Um polígono é convexo, quando desenho uma reta dentro dele e ela não sai de dentro do polígono.
Perguntei-lhe: e se ela tiver parte dentro e parte fora do polígono?
C18: Aí ele é não convexo!
Voltamo-nos para a turma e perguntamos se alguém tinha mais alguma coisa a acrescentar e a turma sinalizou que não queria acrecentar mais nada.
C19 curioso pergunta: uma figura de 6 lados é chamado de hexágono, uma de 10 lados é decágono e uma de 25 lados que nome tem ?
Respondi: Polígono de 25 lados.
C19: Ele não tem um nome especial?
Respondi: Tem mas eu vou pesquisar e te respondo na próxima aula.
Finalizei o processo, dizendo à turma que desenhasse alguns polígonos no geoplano ou as formas que a imaginação deles e a quantidade de borrachinhas lhes permitissem e os resultados encontram-se descritos a seguir.
Comentários e análises:
Nesta atividade, percebemos pelas pistas deixadas pelos alunos que eles já são capazes de reconhecer, visualmente, se um dado polígono é convexo e, em algumas situações já conseguem até argumentar para defender a ideia de convexo e não convexo para uma determinada figura.

ANEXO L15 – AULA – Reconhecendo polígonos convexos e não convexos no geoplano de malha quadrada

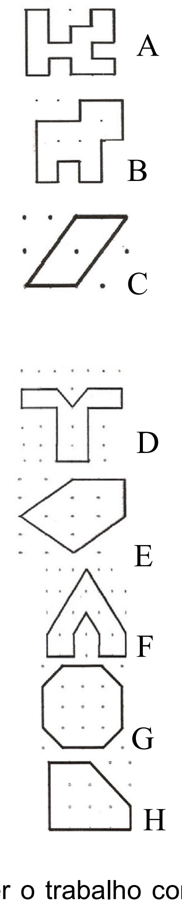
Data: 20-05-09 **horário**: 15:50-17:30
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Explorar livremente as possibilidades do geoplano; trabalhar com a criatividade do aluno; reconhecer polígonos convexos e não convexos no geoplano; e construir polígonos convexos e

não convexos no geoplano.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta tarefa, distribuida da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade.

Sala do sexto ano C –
Retomei à questão de um polígono ser ou não convexo. Pedi aos alunos que me dissessem o nome de um polígono, que não fosse nem quadrado, nem retângulo e nem triângulo, e que fosse um polígono convexo. As respostas foram as seguintes:
C29 respondeu-me: O triângulo.
Perguntei-lhe: Você conhece outro polígono que não seja o triângulo?
Antes que ela pudesse responder, C19 entrou na conversa e afirmou: professor qualquer polígono em que eu desenhe uma reta e ela não sai de dentro dele é convexo, não é?
Respondi-lhe: sim...mas, qual polígono você apresenta como exemplo?
C19 respondeu: o octógono. Mas só aquele que desenharmos uma reta e ela não sair de dentro dele.
Continuei a aula distribuindo para os alunos uma folha com duas questões nas quais eles precisariam identificar se uma dada figura era ou não polígono e, ainda contar a quantidade de lados da figura geométrica. Já na segunda questão, precisariam reconhecer se um polígono é ou não convexo. Nas duas questões foi pedido aos estudantes que montassem as figuras no geoplano e depois respondessem às questões. Como mencionei as figuras estavam desenhadas numa folha que foi distribuída para os estudantes no início da atividade (Figura 21ª; B; C; D, E, F, G e H).
Das dez duplas que responderam à questão (Figura 21A) cinco responderam corretamente, sendo que as outras duplas que erraram, confundiram polígonos convexos com o conceito de polígono.
Das dez duplas que responderam à questão (Figura 21B), sete responderam corretamente, sendo que as outras três duplas erraram por pensar que uma figura de doze lados não pode ser um polígono.
Das dez duplas que responderam à questão (Figura 21C), oito acertaram a resposta, sendo que as outras duas que erraram, justificaram, afirmando que a figura ao lado não é um polígono por ele não possuir retas perpendiculares ou, como eles escreveram, não possui reta em forma de T invertido.
Na questão seguinte, estávamos interessados em analisar se os estudantes conseguiriam reconhecer um polígono convexo.
Das dez duplas que responderam a essa questão (Figura 21D), oito responderam corretamente, sendo que as outras duas que erraram, justificaram afirmando que não encontraram uma reta que tivesse parte dentro e parte fora do polígono.
Das dez duplas que responderam a esta questão (Figura 21E) nove responderam corretamente, sendo que apenas uma errou, porém não justificou.
Das dez duplas que responderam a essa questão (Figura 21F), nove responderam corretamente, sendo que apenas uma errou, porém justificou, afirmando que era um polígono convexo.
Das dez duplas que responderam a essa questão (Figura 21G) nove responderam corretamente, sendo que apenas uma errou, porém justificou afirmando que o polígono era não convexo.
Das dez duplas que responderam a essa questão (Figura 21 H) oito responderam corretamente, sendo que as duas que erraram, não justificaram as respostas.
Comentários – Neste tipo de atividade, a turma obteve um aproveitamento muito bom, mas o fato que nos chamou a atenção foi que um mesmo aluno errou todas as questões que tratavam do conceito de polígono e também as que versavam sobre polígonos convexos e não convexo. No entanto, durante a aula esse mesmo aluno era capaz de responder corretamente às mesmas perguntas.

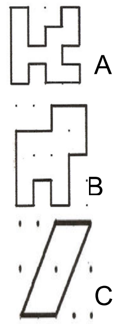
Figura 21



Sala do sexto ano A –
Nesta aula, a turma estava bastante agitada, mas ainda foi possível desenvolver o trabalho com ela. Iniciei pedindo aos alunos que me dissessem o nome de um polígono, que fosse convexo. As

respostas foram as seguintes:
A29: O triângulo; A19: Quadrado, o retângulo e trapézio; A21: O octógono.
Perguntei-lhe: Qualquer octógono?
Continuei a aula, distribuindo para os alunos uma folha com duas questões nas quais eles precisariam identificar se uma dada figura era ou não polígono e, ainda contar a quantidade de lados da figura geométrica. Já, na segunda questão, precisariam reconhecer se um polígono é ou não convexo. Nas duas questões foi pedido aos estudantes que montassem as figuras no geoplano e depois respondessem às questões.
A14 respondeu que, se fosse no papel, ele marcaria dois pontos dentro da figura e depois ligaria os dois pontos se a reta saísse da figura o polígono seria não convexo e se ela não saísse seria convexo.
Respondi para ele o seguinte: gostei da sua ideia e como nós poderíamos fazer para desenhar esta reta no geoplano. Depois de um tempo, perguntei-lhe o que achava se substituíssemos a reta do desenho por uma borrachinha no geoplano. Testamos e funcionou.
Nas duas questões foi pedido aos estudantes que montassem as figuras no geoplano e depois respondessem às questões.
As figuras estavam desenhadas numa folha (Figura 22A, B e C) que foi distribuída para os estudantes no inicio da atividade.
Das nove duplas que responderam à questão (Figura 22A), oito responderam corretamente, sendo que apenas uma errou, pois confundiu polígono convexo com o conceito de polígono.
Das nove duplas que responderam a esta questão (Figura 22B) sete responderam corretamente, sendo que uma não respondeu e a outra dupla errou por pensar que uma figura de doze lados não pode ser um polígono.
Das nove duplas que responderam a esta questão (Figura 22C), oito responderam corretamente, sendo que uma não respondeu.
Na questão seguinte, estávamos interessados em analisar, se os estudantes conseguiam reconhecer um polígono convexo, contudo o tempo foi insuficiente para que resolvessem esta questão.

Figura 22



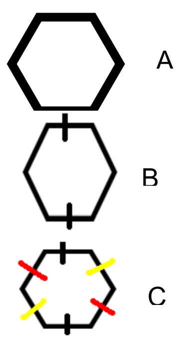
ANEXO L16 – AULA – Contruindo retas paralelas e perpendiculares no geoplano de malha quadrada

Data: 25-05-09 **Horário**: 13:00-15:50
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Construir retas paralelas no geoplano de malha quadriculada; construir diferentes polígonos no geoplano de malha quadriculada; reconhecer polígonos convexos e não convexos no geoplano; e construir polígonos convexos e não convexos no geoplano.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizarmos esta tarefa, distribuída da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade; e distribuindo o material para a realização das tarefas.

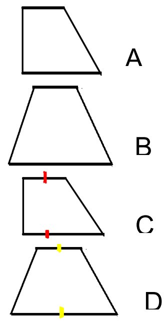
Sala do sexto ano A –
Nesta aula iniciei um diálogo com os alunos sobre retas paralelas e perpendiculares e comecei perguntando se eles sabiam o que era uma reta paralela e as respostas que alguns alunos deram foram:
A21 respondeu: duas retas que não se encontram.
Voltei-me para ele e pedi-lhe que me dissesse o nome de um polígono que possui um par de retas paralelas.
A21: um hexágono.
Desenhei um hexágono (regular) no quadro e pedi-lhe que me mostrasse o par de retas paralelas (Figura 23A) .
A21 marcou no hexágono os pares de retas que pensava ser paralelas (Figura 23B).
E completou a informação, dizendo a de cima e a de baixo são paralelas.
Voltei a perguntar-lhe: você acha que existe mais algum par de retas paralelas

Figura 23



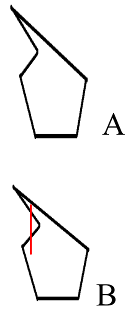
no hexágono(Figura A)?
A21: Sim tem. Mal terminou de me responder, foi logo marcando aquelas retas que ele entendia como sendo paralelas (Figura C).
A justificativa de A21 me chamou a atenção e ele afirmou o seguinte:
A21: Professor, se eu girar o hexágono, as retas marcadas de vermelho ficarão no lugar das marcadas de preto e como as de preto são paralelas eu acho que as vermelhas também serão(Figura C).
Seguindo o exemplo dado por A21, outros alunos citaram outros polígonos, como por exemplo, quadrado retângulo e octógono.
Outro ponto que me chamou a atenção foi o fato de um aluno, A28, ter citado o trapézio. Aproveitei a citação de A28 e desenhei no quadro os trapézios ao lado (Figura 24A, B, C e D):

Figura 24



Após desenhá-los, pedi a A28 que me mostrasse onde ele viu retas paralelas no trapézio (Figura 24ª e 24B).
A28 respondeu: a reta de cima é paralela à de baixo.
Marquei as duas retas referênciadas (Figura 24C e 24D) por ele e perguntei-lhe: É a estas retas que você está se referindo?
Respondeu-me que sim.
Retornei à discussão sobre as retas paralelas do hexágono e mostrei, por meio de um desenho (Figura 25A e 25B), aos alunos que nem todo hexágono tem retas paralelas.
Continuei a conversa com a turma, pedindo-lhes que me dissessem se o hexágono que eu havia desenhado era convexo ou não convexo(Figura 25A)?

Figura 25



Alunos como A2, A5, A16 e A20 disseram que o polígono era convexo e outros estudantes como, A14, A15, A21 e A28 responderam que o polígono que estava desenhado no quadro era não convexo. Percebendo que havia uma dúvida, voltei-me para o grupo composto por A2, A5, A16 e A20 e pedi-lhes que me dissessem o motivo que os levava a afirmar que o polígono desenhado era convexo.
A2: todas as retas que desenhei dentro do polígono não saíram de dentro dele.
Perguntei se os demais componentes do grupo (A5, A16 e A20) cncordavam com A2 ou se queriam acrescentar mais alguma coisa, responderam que não.
Voltei-me para o grupo formado por A14, A15, A21 e A28 e pedi-lhes que justificassem a afirmação deles. Mal terminei a frase e A14 foi logo respondendo ao meu questionamento com o desenho abaixo.
E A14 completou a ideia, dizendo que havia uma reta que iniciava dentro do polígono passava por fora dele e, retornava para dentro, o que mostrava que o hexágono desenhado no quadro era não convexo(Figura 25B).
Finalizei a discussão, distribuindo uma folha de pesquisa com as seguintes questões:

1) Construir, no geoplano e depois desenhar no espaço abaixo, um par de retas que sejam paralelas.

Comentários e análises: Neste dia, tínhamos em sala de aula 22 alunos, os quais foram agrupados em duplas, o que nos levou a ter onze duplas participando da atividade. Dessas onze duplas, 10 responderam corretamente à questão e a dupla que errou, disse que se enganou por distração.

2) Construir, no geoplano e depois desenhar no espaço abaixo, um par de retas que não sejam paralelas.

Comentários e análises: Dez duplas responderam corretamente, à questão e a dupla que errou, disse que errou na leitura, isto é, não viram a palavra **não** no texto. Nesta atividade uma das dez duplas que respondeu corretamente à atividade desenhou um par de retas perpendiculares como resposta para esta questão, e quando questionei, eles disseram "ah mas elas não são paralelas!". Esse episódio serviu para me mostrar que eles já conseguiam distinguir retas paralelas de retas perpendiculares.

3) Construir, no geoplano e depois desenhar no espaço abaixo, um par de retas que sejam perpendiculares.

Comentários e análises: Todas as duplas fizeram a atividade corretamente e isto me trouxe a seguinte curiosidade: "será que as retas perpendiculares são mais conhecidas que as paralelas?"

4) Construir, no geoplano e depois desenhar no espaço abaixo, um par de retas que não seja perpendicular.

Comentários e análises: Esta atividade foi feita corretamente por todas as duplas. Existia também uma segunda folha de atividades que, no caso desta turma, não foi possível distribuí-la, pois a aula estava perto de terminar e, então, decidimos deixá-la para a próxima aula.

Sala do sexto ano C –

Iniciei a aula respondendo à pergunta que C19 havia feito, na aula do dia 20 e mostrando como podemos formar o nome de formas geométricas com quantidade de lados superior a vinte lados. Em seguida, nesta aula, comecei um diálogo com os alunos sobre retas paralelas e perpendiculares. E comecei, perguntando-lhes: Vocês sabem o que é uma reta paralela? O aluno C19 respondeu que eram duas retas que estão sempre juntas e nunca se encontram.

Voltei-me para ele e pedi-lhe que me explicasse o que queria dizer com " estão sempre juntas e nunca se encontram".

C19: é como uma linha de trem.

Achei interessante a resposta dele, percebi que precisávamos de mais exemplos e, então, voltei-me para a turma e perguntei se eles conheciam algum polígono que tinha um par de retas paralelas.

C29: O triângulo!?

Percebi pela expressão de C29 que, ao mesmo tempo, em que exclamava, na certeza de que estava correta a resposta,deixava a impressão de que estava querendo perguntar. Aproveitei a certeza-duvidosa de C29, desenhei no quadro um triângulo e, em seguida pedi-lhe que me mostrasse quais eram as retas paralelas que existiam no triângulo. Antes que C29 se pronunicasse, o aluno C19 exclamou: professor, o triângulo não tem retas paralelas! Este fato parece ter sido a deixa para C29 desistir da tentativa e voltar atrás, dizendo que havia errado.

(Obs.: Na escola não há qualquer registro de que C29 seja um aluno com qualquer grau de necessidades especiais mas, eu tenho a ligeira impressão de que este aluno possui alguma necessidade especial.)

As outras respostas para o pedido de exemplo de um polígono que contém um par de retas paralelas foram:

C18: Um quadrado (Figura 26A)!

Desenhei no quadro um quadrado e voltei-me para C18 e disse-lhe o seguinte: mostre-me onde estão as retas paralelas neste quadrado.

C18 respondeu: a reta de cima e a de baixo (Figura 26A).

Marquei as retas que C18 havia citado e perguntei-lhe: você saberia me dizer se o quadrado possui outro par de retas paralelas?

C18 respondeu-me que sim. Perguntei-lhe: qual?

C18: A reta do lado esquerdo e a do lado direito.

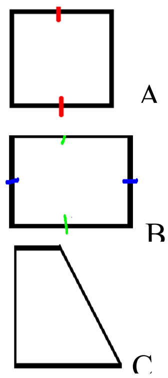
Marquei as retas e perguntei-lhe se eu havia marcado as retas certas. C18 respondeu-me que sim: C13: Um retângulo (Figura 26B)!

Pedi a C13 que me mostrasse quais os lados do retângulo, ele dizia que era paralelo (Figura 26B).

C13 respondeu-me apontando para o lado "de cima" e o "de baixo" do retângulo. Marquei os lados que ele havia indicado e perguntei-lhe se havia mais algum par de lados paralelos no retângulo.

C13 respondeu que sim e apontou para o lado direito e esquerdo do retângulo.

Figura 26



Um caso que me deixou curioso foi o de C19, pois nos dois grupos de pesquisa foi o único a citar o trapézio.

C19: Um trapézio (Figura 26:C)!

Desenhei um trapézio no quadro e sem dizer o nome, perguntei-lhe: esta figura é um trapézio?

C19: Sim, a figura desenhada é um trapézio.

Perguntei-lhe: Já que esta figura é um trapézio, mostre-me quais são os lados paralelos nela, entreguei-lhe o pincel e disse marque os lados paralelos. C19 foi ao quadro, marcou as bases do trapézio e disse: estes são os lados paralelos (Figura 26C).

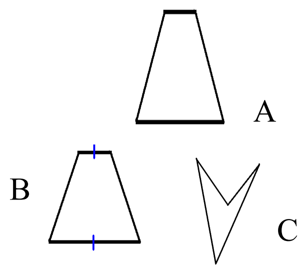
Perguntei-lhe: O trapézio possui mais algum lado que é paralelo?

C19 olhou para a figura e respondeu o seguinte: não há mais lados paralelos.

A minha curiosidade persistia e resolvi trocar o tipo de trapézio e fiz o desenho a seguir (Figura 27A):

Olhei para C19 e perguntei-lhe: Qual é o nome desta figura?

Figura 27



C19: Trapézio (Figura 27 A)!
Perguntei-lhe: há algum lado paralelo neste tipo de trapézio?
C19: Sim (Figura 27 B).
Questionei-lhe: você tem certeza? Ele respondeu-me: tenho sim.
Perguntei-lhe: Já que existe lados paralelos, diga-me quais são?
C19: o lado de cima e o de baixo.
Outro aluno que participou deste diálogo foi C29 e a resposta dele foi:
C29: Um quadrilátero.
Você tem razão mas será que todos os quadriláteros possuem lados paralelos?
C29 respondeu-me meio inseguro...eu...eu acho que sim.
Desenhei a figura abaixo no quadro e, em seguida, perguntei para a turma se aquela figura era um quadrilátero (Figura 27C).
Após alguns segundos de silêncio, C19 respondeu-me que a figura desenhada era um quadrilátero. Perguntei-lhe como tinha certeza de que a figura era um quadrilátero e C19 respondeu-me: tenho sim, pois a figura é fechada e possui quatro lados. Voltei-me para a turma e perguntei-lhe, se existia algum par de retas paralelas no quadrilátero desenhado. C29 respondeu-me que não existiam lados paralelos na figura. Perguntei-lhe: como ter certeza de que não há lados paralelos? Antes que C29 pudesse responder, C19 disse que a abertura entre os lados não são iguais e para ser paralelo a abertura devia ser igual.
Comentários e análises: Nessa aula, percebemos que os alunos deixam pistas de que reconhecem retas paralelas e perpendiculares. De acordo com Lorenzato (2008), isso pode ser analisado do ponto de vista das habilidades para percepção espacial e uma dessas habilidades que percebemos nessa turma foi a memória visual, que é a capacidade de se lembrar daquilo que não está mais no seu campo visual. Quando pedimos aos alunos que identifcassem retas paralelas e perpendiculares no desenho de um figura geométrica, estamos, na prática, exercitando a discriminação visual, pois os alunos precisam mobilizar a capacidade de comparar a imagem mental que possuem de retas paralelas ou perpendiculares e compará-las com as desenhadas no polígono desenhado.
Outro ponto interessante nas aulas foi o fato de propormos aos estudantes como um problema encontrar polígonos que possuem retas paralelas e/ou retas perpendiculares. E isso exigiu que os alunos compreendessem o que lhes foi solicitado, comparassem a imagem mental de retas paralelas que possuíam com as retas componentes de cada polígono. E, no momento, eles, de fato, estavam executando um plano e, simultaneamente, verificando se a resposta estava correta para o problema que tinha sido proposto para eles.

ANEXO L17 – AULA – Reconhecendo polígonos no geoplano de malha quadrada e conhecendo o transferidor

Data: 27-05-09 **horário**: 13:00-15:50
Turmas: 6º anos A e C

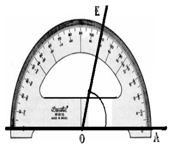
Objetivos:
Reconhecer o transferidor como instrumento de medir ângulos; e medir ângulos, utilizando o transferidor
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta atividade, distribuída da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade; e distribuindo o material para realização das tarefas.

Sala do sexto ano A – Iniciamos a aula, dialogando com os alunos sobre retas paralelas e perpendiculares e uma das questões que abordamos com eles foi se eles lembravam do que é um polígono convexo? Ouvimos as seguintes respostas:
A01 respondeu o seguinte: é uma figura fechada. A05 respondeu o seguinte: é uma figura com mais de três lados. A14, A15, A21 e A28 responderam que é um polígono que quando você escolhe dois pontos e desenha uma reta ligando esses dois pontos a reta não sai de dentro do polígono.
Outra questão que discutimos com os alunos foi se eles lembravam quais eram as características

de um quadrado?
A14 respondeu o seguinte: um polígono fechado que possui quatro lados iguais, quatro vértices e quatro ângulos iguais. Perguntamos-lhe se lembrava mais alguma característica. Como notamos uma dúvida, resolvemos dar uma pista, perguntando-lhe se o quadrado possui retas perpendiculares. A14 respondeu-nos que sim. Questionamos-lhe como podia ter certeza de que o quadrado possui retas perpendiculares. A14 respondeu que os lados do quadrado formam um L, um ângulo de 90º.
Voltamo-nos para a sala e perguntamos-lhes: Qual instrumento utilizamos para medir ângulos?
A28: Uma régua.?
Ficamos curiosos com a afirmação-pergunta e resolvemos continuar a discussão, perguntando o seguinte: A unidade de medida da régua é o centímetro e o ângulo foi medido em 90º. Após a observação, perguntei-lhes se era possível medir ângulos com régua.
Por alguns minutos, o silêncio reinou solitário e, depois A14 timidamente disse que não podia utilizar a régua para medir ângulos. Depois da afirmação feita por A14, outro aluno A28 fez um desenho no ar, mostrando o instrumento que, na opinião dele, era utilizado para medir ângulos. Pedimos que ele desenhasse no quadro e ele aceitou o desafio (veja o desenho de A28 ao lado-Figura 28A).
Perguntamos se sabia qual era o nome do instrumento e A28 respondeu-nos que não sabia. Aproveitamos para conversar com os alunos sobre o instrumento usado para medir ângulos (Figura 28B). Escrevemos o nome do instrumento no quadro e pedimos aos alunos que lessem.

Figura 28

A



B

Em seguida, desenhamos um ângulo no quadro e mostramos aos alunos como medimos ângulos. Eis, a nossa explicação sobre como medimos ângulos.
Para medir um ângulo, coloque o centro do transferidor (ponto 0) no vértice do ângulo, alinhe o segmento de reta OA (ou OE) com um dos lados do ângulo e o outro lado do ângulo determinará a medida do ângulo, como mostra a figura abaixo.
Comentários e análises: Nesta atividade observamos que a imagem que os alunos tinham sobre lados perpendiculares, nos ajudou a formalizar o conceito de ângulo reto e, ao mesmo tempo, a aprender a medir ângulos. Outro ponto que consideramos interessante observar é que os alunos do sexto A não conheciam o instrumento utilizado para medir ângulos.

Sala do sexto ano C –
Começamos nossas atividades com uma conversa com os alunos sobre retas paralelas e perpendiculares e, exemplos de polígonos que contêm retas paralelas ou perpendiculares. Outra questão que abordamos com os estudantes foi se eles lembravam o que é um polígono convexo? Ouvimos as seguintes respostas:
C18 respondeu o seguinte: é uma figura poligonal fechada com mais de três lados.
C19 respondeu que é um polígono que se você desenhar uma reta partindo de pontos dentro dele, a reta não sai de dentro do polígono.
Conversamos com os estudantes sobre as características de um quadrado. Os estudantes enumeraram as seguintes características do quadrado: um polígono fechado que possui quatro lados iguais, quatro vértices e quatro ângulos iguais e, ainda tem retas paralelas e retas perpendiculares.
Questionamos-lhe como podia ter certeza de que o quadrado possui retas perpendiculares. C18 respondeu que os lados do quadrado formam um L, e que retas perpendiculares sempre formam um L ou um T. Achamos interessante a afirmação dele e, decidimos esperar a turma aprender a trabalhar com o transferidor para problematizar esta certeza.
Voltamo-nos para a sala e perguntamos-lhes: Qual instrumento utilizamos para medir ângulos?
O aluno C19 fez um desenho no quadro do instrumento que, na opinião dele, era utilizado para medir ângulos.
Perguntamos se sabia qual era o nome deste instrumento e C19 respondeu-nos que não sabia. Apoveitamos para conversar com os alunos sobre este instrumento (Figura 28B). Escrevemos o nome do instrumento no quadro e pedimos aos alunos que lessem.
Em seguida, desenhamos um ângulo no quadro e mostramos aos alunos como medimos ângulos. Eis, a seguir, a nossa explicação sobre como medimos ângulos.
Para medir um ângulo, coloque o centro do transferidor (ponto 0) no vértice do ângulo, alinhe o segmento de reta OA (ou OE) com um dos lados do ângulo e o outro lado do ângulo determinará a medida do ângulo, como mostra a figura ao lado.

Comentários e análises: No diálogo com esta turma percebemos que os estudantes não conheciam o instrumento utilizado para medir ângulos e nem sabiam os procedimentos usados para medi-los. Contudo, podemos dizer que a imagem que os alunos tinham sobre lados perpendiculares, nos ajudou a discutir com eles sobre como medir ângulos e, em particular o ângulo reto.

Obs.: Nos dias 29-05 e 03-06-09 não aconteceram as aulas relativas às pesquisas, pois nestas datas os professores da rede municipal paralisaram suas atividades, atendendo a uma decisão da assembléia de professores.

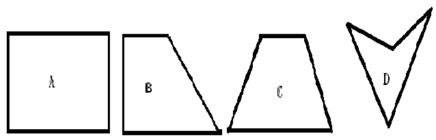
ANEXO L 18 – AULA – Resumindo o que aprendemos em geometria

Data: 10-06-09 **horário**: 13:00-15:50
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Analisar o que os alunos aprenderam sobre polígonos; e resumir os conceitos estudados em polígonos.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos, distribuída da seguinte forma: dialogar com os alunos sobre a atividade e distribuir o material, contendo as letras para montagem das palavras.

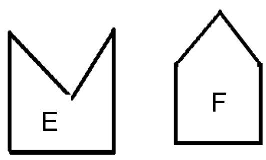
Sala do sexto ano A –
Como se passaram três semanas resolvemos revisar os conceitos que haviamos discutido com os alunos e, à medida que avançávamos na discussão, anotávamos os resultados no quadro.
Começamos a atividade de revisão perguntando aos alunos o que significa polígonos?
As respostas que ouvimos foram:
A05: é uma figura com mais de três lados.
A14: é uma figura fechada que possui 3 ou mais lados.
Pedimos aos alunos que nos dissessem quantos lados, ângulos e vértices as figuras desenhadas ao lado possuíam (Figura 29).

Figura 29



Os alunos A14 e A15, responderam que as figuras 29A, 29B, 29C e 29D possuem quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos.
Perguntamos-lhes: Quais das figuras acima possuem lados paralelos?
Os alunos A14 e A15 responderam que as figuras 29A, 29B e 29C possuem lados paralelos.
Perguntamos-lhes se alguma delas possui lados perpendiculares.
Os estudantes A14 e A15 disseram que as figuras 29A e 29B tinham lados perpendiculares.
Novamente questionamos-lhes sobre quais das figuras acima possuem apenas um par de lados paralelos.
E os alunos A14 e A15 disseram que as figuras 29B e 29C possuiam um par de lados paralelos.
Desenhamos duas outras figuras no quadro e, voltamos a perguntar-lhes: qual das figuras abaixo possuem lados paralelos? Qual das figuras abaixo possuem lados perpendiculares (Figuras 30E e 30F)?

Figura 30

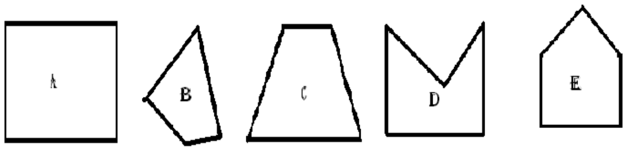


Os alunos A21 e A28 responderam que as figuras 30E e 30F possuem lados paralelos.
Perguntamos-lhes se alguma delas possui lados perpendiculares.
A21 e A28 responderam: as duas possuem lados perpendiculares (Figura 30E e 30F) .
Novamente questionamos-lhes o seguinte: qual das figuras representa um polígono não convexo?
E os alunos A21 e A28 disseram que o polígono E não é convexos.
Finalizamos a aula e combinamos que na próxima semana trabalharíamos com um jogo.

Sala do sexto ano C –
Como se passaram duas semanas resolvemos revisar os conceitos que haviamos discutidos com

os alunos e, à medida que avançávamos na discussão, anotávamos os resultados no quadro.
Começamos a atividade de revisão perguntando aos alunos o que significa polígonos?
As respostas que ouvimos estão escritas abaixo.
A05: é uma figura com mais de três lados
A14: é uma figura fechada que possui 3 ou mais lados.
Pedimos aos alunos que nos dissessem quantos lados, ângulos e vértices das figuras desenhadas abaixo.

Figura 31



Os alunos C19 e C18, responderam que as figuras 31A, 31B e 31C possuem quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos. E os polígonos 31D e 31E possuem cinco lados, cinco ângulos e cinco vértices.
Perguntamos-lhes: Quais das figuras acima possuem lados paralelos?
Os estudantes C18 e C19 responderam que as figuras 31A, 31C; 31D e 31E possuem lados paralelos.
Perguntamos-lhes: alguma delas possui lados perpendiculares?
Os estudantes C18 e C19 disseram que os polígonos 31A; 31D e 31E tinham lados perpendiculares.
Novamente questionamos-lhes o seguinte: quais das figuras acima possuem um par de lados paralelos?
C18 e C19: apenas as figuras 31D e 31E possuem um par de lados paralelos.
Novamente questionamos-lhes: qual(is) das figuras acima é um polígono não convexo?
C18 e C19: o polígono D não é convexo e A, B, C e E são polígonos convexos.
Finalizamos a aula e combinamos que na semana seguinte faríamos um jogo.

ANEXO L19 – AULA – Jogo das palavras - Escrevendo sobre polígonos

Data: 22-07-09 **Horário:** 13:00-15:50
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Revisar com os alunos o que aprenderam sobre polígonos; e discutir a escrita e pronúncia correta dos nomes dos polígonos.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos, distribuida da seguinte forma: dialogar com os alunos sobre a atividade e distribuir o material, contendo as letras para montagem das palavras.

Sala do sexto ano A –
Iniciamos um diálogo com a turma sobre a atividade que iríamos realizar. Explicamos para os alunos como seria a atividade e que eles precisariam, individualmente, montar uma palavra que estava no material que lhes foi entregue e depois, reunir todas as palavras formando uma frase. Estas eram as únicas informações que os alunos possuíam, isto é, eles não sabiam qual era a palavra que estava no envelope de cada um deles e nem a turma sabia qual era a frase que formariam. No início da atividade, os alunos sentiram um pouco de dificuldade, mas a medida que se envolviam no trabalho e, que montavam a palavra que estava no envelope de cada um deles, a animação tomava conta do grupo. E os que terminavam se prontificavam a ajudar os demais colegas e juntos montavam a palavra que existia no envelope do colega.
O conteúdo de cada envelope foi registrado no quadro, e o desafio da turma agora consistia em organizar as palavras (que eram o conteúdo dos envelopes) e formar a frase que estava guardada com os pesquisadores. Após um tempo tentando formar a frase, o aluno A28 mostrou a frase que ele havia montado e percebemos que esta era a que estava com os pesquisadores. Pedimos-lhe que aguardasse um pouco mais antes de divulgá-la e, cinco minutos depois outros alunos conseguiram e aproveitamos para escrevê-la no quadro, a saber:

Fotografia 26

COM TANGRAM E GEOPLANO PODEMOS FORMAR POLÍGONOS COMO: TRIÂNGULOS, QUADRADOS, TRAPÉZIOS; LOSANGOS, PENTÁGONOS E HEXÁGONOS.
As fotografias da atividade realizada pelos alunos.

Sala do sexto ano C –
Conversamos com a turma sobre a atividade que realizaríamos, explicamos-lhes o que iríamos fazer e, que eles precisariam, individualmente, montar uma palavra, utilizando as letras que estavam no material que lhes foi entregue e depois, reunir todas as palavras e assim formar uma frase. Estas eram as informações que os alunos possuiam, isto é, eles não sabiam qual era a palavra que estava no envelope de cada um deles e muito menos o grupo sabia qual era a frase que formariam. No começo da atividade os alunos sentiram dificuldade, contudo à medida que montavam a palavra que estava no envelope de cada um deles, a animação tomava conta do grupo. E os que terminavam se prontificavam a ajudar os demais colegas e juntos montavam a palavra que existia no envelope do colega.
Cada palavra montada era registrada no quadro e o desafio agora consistia em organizar as palavras (que eram o conteúdo dos envelopes) e formar a frase que estava guardada com os pesquisadores. Após um tempo tentando formar a frase, o aluno C18 pediu uma dica, que respondemos: a frase contém, dois brinquedos que já utilizamos nas nossas aulas e o nome de alguns polígonos que já estudamos. Alguns minutos depois C19 mostrou a frase que ele havia montado e, pelo fato de que a aula já estava nos minutos finais, decidimos escrevê-la no quadro:
COM TANGRAM E GEOPLANO PODEMOS FORMAR POLÍGONOS COMO: TRIÂNGULOS, QUADRADOS, TRAPÉZIOS; PENTÁGONOS E HEXÁGONOS.

Fotografia 27

ANEXO L20 – AULA – Primeira lenda da pipa

Data: 29-07-09 **Horário**: 13:00
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Discutir a pronúncia e a escrita de algumas palavras do texto da primeira lenda do tangram; discutir com os estudantes sobre a confeccção de pipas, e analisar o que os alunos compreenderam da primeira lenda do tangram.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisa-se de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta tarefa, distribuida em duas partes. **Primeira parte da atividade**: Leitura da primeira lenda e comentários sobre o que os alunos entenderam da atividade. **Segunda parte da atividade**: Consulta ao dicionário.

Na sala do sexto ano A –
Iniciei a aula pedindo a um aluno que lesse a lenda e, em seguida, marcasse no texto as palavras que ele desconhecia e dei a mesma orientação aos demais alunos. Após a leitura os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Surgiram palavras como instigante e serviçal. Depois da consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: quais as formas geométricas eles viam na pipa?
As respostas que os alunos deram foram: A07: hexágono; A14: losango.
Terminamos a atividade.

Na sala do sexto ano C –
Iniciei a aula pedindo a um aluno que lesse a lenda e, em seguida, marcasse no texto as palavras que ele desconhecia e dei a mesma orientação aos demais alunos. Após a leitura os alunos marcaram as palavras que não conheciam e buscamos o significado das mesmas no dicionário. Surgiram palavras como instigante e serviçal. Depois da consulta no dicionário, reiniciei com os alunos a discussão sobre: quais as formas geométricas eles viam na pipa?
As respostas que os alunos deram foram: C18: Pentágono; C13: Hexágono; C21: Losango.

Na discussão com as duas turmas, percebemos que os estudantes já possuem uma imagem mental das formas citadas.

Primeira versão: Lida por um aluno.
Ícaro e seu pai, Dédalo, aprisionados no labirinto de Creta pelo rei Minos, tentaram alcançar a liberdade voando. Construíram asas com cera e penas e conseguiram escapar. Apesar das recomendações do pai, embevecido pela possibilidade de dominar os ventos, Ícaro negligenciou a prudência e chegou muito perto do Sol, que derreteu a cera das asas e precipitou-o ao mar, matando-o.

Segunda Versão: Lida por um aluno.
Segundo uma fábula chinesa, a origem da pipa vem da história de um camponês que, na intenção de evitar que o seu chapeu voasse, ele o amarrava com um corda. Mas um belo dia, antes de colocar o chapéu na cabeça, o vento foi mais rápido e o levantou. De acordo com a lenda, o chinês só não o perdeu graças à corda.

Terceira Versão: Lida por um aluno.
A terceira versão também vem da China e pode ser resumida assim.... Durante uma guerra entre os exércitos de Han Hsin e Hsiang Yu (em 200 a.C.), conta-se que Han Hsin convocou o seu exército e ordenou-lhes o seguinte: construam grandes pipas atando a elas apitos e as façam flutuar sobre os campos inimigos. Quando os soldados de Hsiang Yu escutaram o som dos apitos, acabaram se assustando e recuando, pois acreditavam que o barulho do apito era a voz dos “deuses” que estava alertando-os que algo de mal estava para acontecer com eles e desta forma, Han Hsin venceu a guerra.

ANEXO L21 – AULA – O início do trabalho com o pipas

Data: 05-08-09 **Horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Discutir com os alunos sobre a história das pipas, e explorar as potencialidades e fraquezas do brinquedo.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta atividade, distribuída da seguinte forma: Dialogando com os alunos sobre as pipas e os perigos deste brinquedo.

Sala do sexto ano A –
Iniciamos a aula propondo aos alunos que respondessem a questões como: a) Vocês sabem construir pipas? b) O que vocês sabem sobre a história das pipas? c) Vocês sabem quais são os perigos de se soltar pipas? As respostas obtidas com a primeira pergunta nos causou uma surpresa, pois, esperávamos que, no mímimo, os onze meninos da turma soubessem construir pipas e, surpreendentemente, só três deles afirmaram que sabiam construir pipas. Entre as meninas apenas duas disseram que sabiam construir o brinquedo. Quanto à história das pipas, os alunos foram unânimes, ao responderem que a desconheciam e, por esta razão resolvemos iniciar o trabalho com os alunos lendo três das versões da história das pipas. A terceira pergunta trouxe as seguintes respostas: a) O uso do cerol – os alunos lembraram de reportagens e histórias que eles viram/ouviram sobre o uso do cerol. Entre as histórias havia uma de um colega que se cortou, devido ao cerol e outra de um motoqueiro que quase foi degolado na 262 ao ser atingido por uma linha com cerol. b) Fios de alta tensão - Lembraram da história de um menino que morava na Serra e foi vitima de um choque elétrico, ao tentar retirar uma pipa de uma fiação de alta voltagem. c) Atropelamentos – Comentaram sobre a possibilidade de acontecer atropelamentos ao correrem atrás de pipas e atravessarem ruas movimentadas. d) O perigo de soltar pipas na laje-comentaram sobre a questão de soltarem pipas na laje e cair dela.
Terminamos esta aula, combinando com os alunos que na próxima aula iriamos construir pipas e que se fosse possível levantaríamos as raias costruidas.

Na sala do sexto ano C –
Iniciamos a aula propondo aos alunos que respondessem às questões como: a) Vocês sabem construir pipas? b) O que vocês sabem sobre a história das pipas? c) Vocês sabem quais são os perigos de se soltar pipas? As respostas obtidas nessa turma foram semelhante às da turma A. Perguntei ao grupo se eles conheciam ou lembravam de algum objeto que o homem inventou inspirado na pipa? C19: O pára-raios. Minha professora disse que a invenção do pára-raios tinha como inspiração a pipa. Afirmei que alguns pipeiros dizem que o inventor do pára-raios se inspirou na pipa. C18: avião. Perguntei-lhe com um tom de espanto. O avião! Por que você acha que a invenção do avião tem alguma coisa a ver com a pipa? C19: Ele nos respondeu que tinha visto num livro uma fotografia do 14 bis e achou muito parecido com uma pipa japonesa. C11: Kite surf. Perguntei-lhe o que o Kite surf tem a ver com a pipa? C11: o kitesurfista "voa" preso a uma pipa. Perguntei-lhe onde ele tinha visto isto? C11: Na praia, lá em Vitória! C 17: Tem cidades em que as pipas são usadas como meio de comunicação. Questionei-lhe se ele sabia nos dizer em qual lugar a pipa era utilizada com meio de comunicação. C17: Nas favelas do Rio de Janeiro. Lembrei-lhe que não é toda vez que se levanta uma pipa no RJ, que se está avisando que a polícia vem ai.Terminamos esta aula combinando com os alunos que, na próxima,iríamos construir pipas e que se fosse, possível levantaríamos as raias construidas.

ANEXO L22 – AULA – A construção de pipas de duas varetas

Data: 13-08-09 **Horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Construir pipas e analisar as formas geométricas contidas na construção do brinquedo, e identificar os polígonos que existem na construção das pipas.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta tarefa, distribuída da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade; e enfrentando o desafio de construir pipas.

Sala do sexto ano A –
Iniciei a aula, conversando com os alunos sobre a atividade que desenvolveríamos e convidamos os três alunos (A14; A21 e A28), que sabiam construir pipas, para serem os professores auxiliares.O convite foi aceito e causou uma reação positiva, a impressão que me passaram foi a de que se sentiam muito importantes. Para organizar o trabalho com os três novos professores combinei com eles o seguinte:
A 14 se responsabilizaria por ajudar os colegas de A1 a A8; A 21 seria responsável por ajudar os colegas de A9 a A18 (exceto A14); A28 ficou responsável por ajudar os colegas de A19 a A29 (exceto A 21).
E eu me responsabilizei por explicar como se constrói uma pipa de duas varetas e acompanhar o desenvolvimento das atividades nos três grupos.
Distribuímos o material que utilizaríamos para construir a pipa de duas varetas. Os materiais distribuídos foram os seguintes: Duas varetas de bambu; Três metros de linha nº10; 1/2 folha de papel de seda; 1 tesoura para cada dupla de alunos; e 2 tubos de cola para cada um dos três grupos.
Após a distribuição do material fiz o desenho de uma pipa de duas varetas (Figura 32) no quadro e disse-lhes que aquela era o tipo de pipa que iríamos construir.

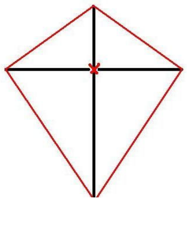


Figura 32 : Modelo de pipa de duas varetas

Antes de iniciar a construção fiz as seguintes perguntas para os alunos. Considerando a linha como contorno da Figura nº32, respondam-me: Quantos lados tem a Figura 32?
Ouvi os alunos A14; A21 e A28 responderem, quase que, instantaneamente, 4 lados .

Imaginei que eles iriam se antecipar aos colegas e então resolvi pedir que eles esperassem um pouco para dar tempo para os demais colegas pensarem para responder.
Voltei-me para a turma e perguntei: Quantos ângulos? As respostas que ouvi os alunos A10 e A24 dizer foi que a figura possui 4 ângulos. E quantos vértices?
Os alunos A13 e A05 responderam que eram 4 vértices.
Resolvi perguntar-lhes se a figura era um quadrado ou um retângulo ? Os alunos A 13 e A 05 responderam-me que não, pois não possuía ângulos de 90º graus.
Curioso perguntei-lhes como sabiam que na Figura 32, não tinha ângulo de 90º. A resposta foi: no contorno não tem ângulo formando a letra L ou T. E os alunos A14 e A28, ansiosos para iniciar a montagem da pipa, disseram professor esta figura é um quadrilátero. Iniciamos a montagem da armação da pipa. Após a armação fiz um novo desenho no quadro (Figura 33) e expliquei que aquele desenho representava como eles deviam cortar o papel de seda e depois colar a armação no papel.

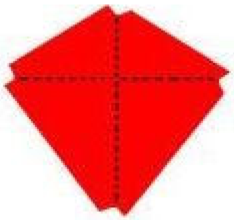


Figura 33: Representação de como recortar o papel

Terminamos a aula e combinamos que na próxima, faríamos a pipa de três varetas e que precisariamos quardar as pipas na escola, pois iriamos precisar delas em outras aulas.
Comentários e análises: Nesta atividade, notamos que os alunos das duas turmas deixaram pistas de que já reconhecem quadriláteros. Entendemos o que Lorenzato (2008) queria dizer quando discutia a problemática da importância dos educandos formarem uma imagem visual de uma dada forma.

Na sala do sexto ano C –
Comecei a aula, conversando com os alunos sobre a atividade que desenvolveríamos e convidamos os três alunos (C13; C19 e C28) que sabiam construir pipas para nos ajudar, atuando como professores auxiliares. Os alunos aceitaram o convite, entendi que eles se sentiram muito importantes. Para organizar o trabalho, combinei com os três professores auxiliares o seguinte: C13 se responsabilizaria por ajudar os colegas de C1 a C8; C19 seria responsável por ajudar os colegas de C9 a C18 (exceto C13); C28 ficou responsável por ajudar os colegas de C19 a C29 (exceto C19). E eu me responsabilizei por explicar como se constrói uma pipa de duas varetas e acompanhar o desenvolvimento das atividades nos três grupos.
Expliquei aos alunos que iríamos construir uma pipa de duas varetas e o material que utilizaríamos eram os seguintes: Duas varetas de bambu; Três metros de linha nº10; 1 / 2 folha de papel de seda; 1 tesoura para cada dupla de alunos; 2 tubos de cola para cada um dos três grupos.
Após a distribuição do material fiz o desenho de uma pipa de duas varetas (Figura 32) no quadro e disse-lhes que aquela era o tipo de pipa que iríamos construir.
Expliquei aos estudantes como procederíamos para construir a pipa de duas varetas e, resolvi perguntar aos alunos se eles sabiam me dizer quais eram as características da figura acima:
Ouvi os alunos C13; C19 e CA28 responderem, que a Figura 32 possuía 4 lados, 4 ângulos e 4 vértices.
Voltei-me para a turma e perguntei, então, a figura acima é um quadrado? As respostas que ouvi dos alunos C8 e C12 foram de que a figura não era um quadrado. Os alunos C13 e C19 justificaram dizendo que a figura não possuia quatro ângulos de 90º graus.
Mais uma vez, perguntei-lhes como sabiam que não tinha ângulo de 90º na Figura 32. A resposta foi: no contorno não tem ângulo formando a letra L ou T.
Pela última vez, perguntei-lhes se sabiam me dizer o nome da figura. E C19 respondeu que era um quadrilátero.
Iniciamos a montagem da armação da pipa. Após a armação fiz um novo desenho (Figura 33) no quadro e expliquei que aquele desenho representava como eles deviam cortar o papel de seda e depois colar a armação no papel. Combinei com os estudantes que, na próxima aula, faríamos a pipa de três varetas e que precisaríamos guardar as pipas na escola, pois iriamos precisar delas em outras aulas.

ANEXO L23 – AULA – A construção de pipas de três varetas

Data: 19-08-09 **horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Construir pipas e analisar as formas geométricas contidas na construção do brinquedo; e identificar os polígonos que existem na construção das pipas.
Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta tarefa, distribuída da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade; e enfrentando o desafio de construir uma pipa de três varetas.

Sala do sexto ano A –
Dialogamos com os alunos sobre a atividade que desenvolveríamos e perguntamos aos três alunos (A14; A 21 e A28) se sabiam construir pipas para serem os professores auxiliares. Como na semana passada, o convite foi aceito com a mesma satisfação da aula anterior. Dividimos a turma em três grupos, os quais estão descritos abaixo: A14 se responsabilizaria por ajudar os colegas de A1 a A8; A21 seria responsável por ajudar os colegas de A9 a A18 (exceto A14); e A28 ficou responsável por ajudar os colegas de A19 a A29 (exceto A 21).
Eu me encarreguei da explicação de como se constrói uma pipa de três varetas e de acompanhar o desenvolvimento das atividades nos três grupos.
Distribuímos o material que necessitaríamos para construir a pipa de três varetas, a saber: três varetas de bambu; três metros de linha nº10; 1/2 folha de papel de seda; 1 tesoura para cada dupla de alunos; e 2 tubos de cola para cada um dos três grupos.
Após a distribuição do material fiz o desenho de uma pipa de três varetas (Figura 3) no quadro e disse-lhes que aquela era o tipo de pipa que iríamos construir.

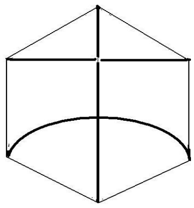


Figura 34: Modelo de armação de uma pipa de três varetas

Como na aula anterior iniciei um pequeno questionário:
Minha primeira pergunta foi: Quais são as características da Figura 34? Ouvi os alunos A14; A21 e A28 responderem: A figura possui 6 lados, 6 ângulos e 6 vértices.
Perguntei-lhes se sabiam dizer-me o nome da figura. O aluno A14 respondeu que era um hexágono.
Depois da resposta de A14 resolvemos iniciar a montagem da armação da pipa. Após a armação fiz um novo desenho no quadro (Figura 35) e expliquei que aquele desenho representava como eles deviam cortar o papel de seda e depois colar a armação no papel.

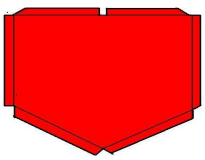


Figura 35 : Desenho representativo de como recortar o papel.

Terminamos a aula e combinamos que, na próxima, faríamos a rabiola e o cabresto das pipas e se o tempo ajudasse, soltaríamos a pipa no pátio da escola.

Na sala do sexto ano C –
Conversei com os alunos sobre a atividade que desenvolveríamos e perguntei se os alunos (C13; C19 e C 28) que nos auxiliaram na aula anterior queriam ser professor auxiliar novamente e, eles aceitaram. Organizei o trabalho, combinei com os três professores auxiliares da seguinte forma: C 13 se responsabilizaria por ajudar os colegas de C1 a C8; C19 seria responsável por ajudar os colegas de C9 a C18 (exceto C13) e C28 ficou responsável por ajudar os colegas de C19 a C29 (exceto C 19).

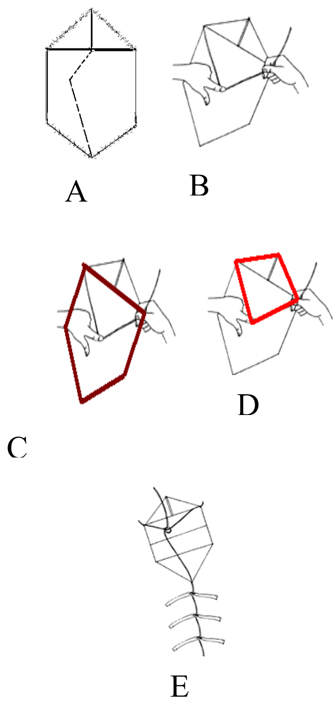
Encarreguei-me de explicar como se constrói uma pipa de três varetas e de acompanhar o desenvolvimento das atividades nos três grupos.
Disse aos alunos que iríamos construir uma pipa de três varetas e o material que utilizaríamos eram os seguintes: três varetas de bambu; três metros de linha nº10; 1/2 folha de papel de seda; 1 tesoura para cada dupla de alunos; e 2 tubos de cola para cada um dos três grupos.
Após a distribuição do material fiz o desenho de uma pipa de três varetas (Figura 34) no quadro e disse-lhes que aquele era o modelo de pipa que iríamos construir.
Expliquei aos estudantes os procedimentos que utilizaríamos para construir a pipa de três varetas e, resolvi peguntar aos alunos se eles sabiam me dizer quais eram as características da figura acima.
Ouvi os alunos C19 e C28 responderem, que a figura possuía 6 lados, 6 ângulos e 6 vértices .
Voltei-me para a turma e perguntei então qual é o nome da figura 34 ?
As respostas que ouvi o aluno C12: hexágono.
Perguntei aos alunos se a figura possuía lados perpendiculares?
C13 e C19 responderam que no contorno não tinha, mas nas varetas tinha.
Iniciamos a montagem da armação da pipa. Após a armação fiz um novo desenho (Figura 35) no quadro e expliquei que aquele desenho representava como eles deviam cortar o papel de seda e depois colar a armação no papel.
Ao terminar a aula, combinei que na próxima, faríamos a rabiola e o cabresto da pipa de três varetas e que precisaríamos guardar as pipas na escola, pois iríamos precisar delas em outras aulas.
Uma observação minuciosa da atividade do dia 19 de agosto nos mostra que os estudantes utilizam-se de figura geométrica padrão como forma de reconhecer uma dada configuração geométrica. Nesta atividade os alunos das duas turmas deixaram pistas de que já reconhecem um hexágono.

ANEXO L24 – AULA – Construindo a rabiola das pipas

Data: 26-08-09 **Horário**: 13:50-16:40
Turmas: 6º anos A e C

Objetivos:
Construir o cabresto e a rabiola de pipas. Identificar os ‘retas’ existentes na construção de rabiolas e cabrestos de pipa; e resumir o que aprendemos na construção de pipas.

Figura 36



Tempo estimado para a realização da atividade:
Precisamos de uma hora aula de 50 minutos para realizar esta tarefa, distribuída da seguinte forma: dialogando com os alunos sobre a atividade; e enfrentando o desafio de construir pipas.

Sala do sexto ano A – Conversei com a turma sobre a atividade que desenvolveríamos. Mostrei como fariamos o cabresto (Figura 36A). Discuti com os alunos sobre a função do cabresto, perguntei-lhes se tinham ideia de por que tínhamos que fazer o cabresto nas pipas e ouvi a seguinte resposta. A14 e A28 disseram que era para dar força para a pipa e para ela subir.

Entendi que ele estava referindo-se à força de ação dos ventos e à de reação da pipa, mas, mesmo assim, resolvi perguntar o seguinte: Como eles sabiam que o cabresto dava “força” à pipa ? Responderam: A14 e A28 é porque na linha quando estávamos soltando pipa, nós sentimos a pipa puxando.
Agora vamos fazer o cabresto e os orientei dizendo: a) Para montar a barbela, ou cabresto, amarre a linha em um dos cantos, como mostra a Figura 36B, e conduza-a até o meio do corpo da pipa, amarrando em seguida no outro canto superior.

Perguntei-lhes quais as figuras que eles viam no desenho acima?
Responderam: A07: um hexágono; A14: um triângulo; A21: um pentágono
Fiquei curioso para saber onde ele tinha visto um pentágono e então pedi-lhe que me mostrasse onde estava o pentágono? A resposta foi: na parte marrom (Figura 36C).
A28 um quadrilátero. Voltei a perguntar onde eles viam um quadrilátero? A28 respondeu na parte vermelha da figura (Figura 36D) abaixo.
b) Amarre agora outra linha na extremidade inferior da vareta central, dê um nó simples na outra linha e conduza a primeira linha até a extremidade oposta da vareta central (Figura 36A). Amarre, prestando atenção para deixar uma distância igual entre as duas linhas.
E assim finalizamos o problema do cabresto e iniciamos a confecção da rabiola. Dei-lhes a seguinte orientação:
c) Monte a rabiola com tiras estreitas de papel amarradas em uma linha grossa, conforme mostra a Figura 36E. Faça isso até atingir o comprimento desejado.
d) Prenda a rabiola, dando várias voltas, firmemente, em torno da ponta inferior da vareta central (Figura 36E). Passe a linha através do papel algumas vezes, e então arremate.

Na sala do sexto ano C – Perguntei aos estudantes se eles sabiam por que precisamos confeccionar rabiola e o cabresto de uma pipa (Figura 36A) e ouvi a seguinte resposta:
C12 e C08 disseram que era para dar força para a pipa subir.
Entendi que ele estava referindo-se à força de ação dos ventos e à de reação da pipa, mas, mesmo assim, resolvi perguntar o seguinte: Como eles sabiam que o cabresto dava “força” à pipa ?
Responderam: C12 e C08 é porque na linha quando estávamos soltando pipa, nós sentimos a pipa puxando. Agora vamos fazer o cabresto e os orientei dizendo: a) Para montar a barbela, ou cabresto, amarre a linha em um dos cantos, como mostra a Figura 36B, e conduza-a até o meio do corpo da pipa, amarrando, em seguida, no outro canto superior.
Perguntei-lhes quais as figuras que eles viam no desenho acima?
Responderam: C21 um hexágono; A14 um triângulo; A12 um pentágono.
Fiquei curioso para saber onde ele tinha visto um pentágono e então pedi-lhe que me mostrasse onde estava o pentágono?
A resposta foi: na parte marrom (Figura 36C).
C18 um quadrilátero. Voltei a perguntar onde eles viam um quadrilátero? A respondeu na parte vermelha da figura (Figura 36D) acima.
b. Amarre agora outra linha na extremidade inferior da vareta central, dê um nó simples na outra linha e conduza a primeira linha até a extremidade oposta da vareta central (Figura 36A). Amarre, prestando atenção para deixar uma distância igual entre as duas linhas.
E assim, finalizamos o problema do cabresto e iniciamos a confecção da rabiola. Dei-lhes a seguinte orientação:
c) Monte a rabiola com tiras estreitas de papel amarradas em uma linha grossa, conforme mostra a Figura 36E. Faça isso até atingir o comprimento desejado.
d) Prenda a rabiola dando várias voltas firmemente em torno da ponta inferior da vareta central (Figura 36E). Passe a linha através do papel algumas vezes,e, então arremate.