

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Hugo Leonardo Costa Louzada

**Muros de Domínio e Ricochetes na Gravitação
Massiva Tridimensional**

VITÓRIA
2010

HUGO LEONARDO COSTA LOUZADA

MUROS DE DOMÍNIO E RICOCHETES NA GRAVITAÇÃO
MASSIVA TRIDIMENSIONAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov

VITÓRIA
2010

MUROS DE DOMÍNIO E RICOCHETES NA GRAVITAÇÃO MASSIVA TRIDIMENSIONAL

HUGO LEONARDO COSTA LOUZADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Raphael Góes Furtado
CEUNES/Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Universidade Federal da Paraíba

A todas as pessoas esforçadas e perseverantes.

Agradecimentos

À minha família: minha mãe Marina, meu pai Hugo e minhas irmãs Jaqueline e Fabi-ola, por terem me dado educação. Em especial minha mãe que me ensinou o valor da honestidade e do trabalho duro.

Ao Galen por ter me aceito como aluno.

Aos meus companheiros de graduação e mestrado, em especial a Gláuber Carvalho Dorsch por ter partilhado comigo as mesmas dificuldades e ideais revolucionários durante esses quatro anos de graduação e dois de mestrado, a Diego César Monteiro de Mendonça que nesse nosso pouco tempo de convivência mostrou-se também uma excelente pessoa, a Ulysses Camara da Silva e Ivan Luiz Morales por terem mostrado compreensão e camaradagem em me ensinar a usar o LATEX.

Aos meus (poucos) companheiros de Kung-Fu que são a prova que ainda existe gente boa nesse mundo, em especial: Fernanda Andrade, Renan, Thiago, Eduardo Rossi e Jéssica Carolina Soares.

E também aos Beatles, Herman's Hermits, Monkees, Animals, Hollies, e outros grandes grupos dos anos 60, sem vocês eu não seria ninguém.

Esse trabalho foi realizado com o financiamento da Capes.

“A vitória, mesmo antes do combate, está para aquele que não tem pensamentos voltados para si próprio, permanecendo na consciência da grande origem. No coração do homem que controla seus pensamentos e emoções, nem sequer o tigre encontra espaço para introduzir suas garras ferozes.”

Bruce Lee
Tao of Jeet Kune Do

Resumo

As soluções do tipo muros de domínio chatos na gravitação massiva tridimensional com matéria escalar e com potencial de Higgs são construídas com o método do Superpotencial. As propriedades de uma família de soluções cosmológicas do tipo ricochete são investigadas. Dependendo dos valores da constante cosmológica Λ e da massa m^2 do graviton estas soluções descrevem evoluções qualitativamente diferentes do universo 3D, incluindo aquelas com dois períodos de aceleração entre dois estados inicial/final do tipo vácuo dS^3 .

Abstract

Flat domain walls solutions of three dimensional new massive gravity extended by massive scalar with Higgs-like self-interaction are constructed by Superpotential method. The properties of the cosmological bounce-like solution are investigated. Depending on the values of the cosmological constant Λ and of the graviton mass m^2 they describe qualitatively different evolutions of the 3D universe including the one of two periods of acceleration between two dS^3 representing initial/final states.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Extensões da relatividade geral	1
1.2	Algumas propriedades da gravitação massiva	3
1.2.1	Sobre a escolha dos parâmetros a, b, c	3
1.2.2	Soluções assintóticas do tipo vácuo	5
1.2.3	Limite Newtoniano e a massa do graviton	6
2	Muros de domínio na gravitação massiva tridimensional	9
2.1	Conceito de vácuo	9
2.2	Muros de domínios	12
2.3	Muros de domínio na gravitação massiva com campo escalar	15
2.3.1	Caso $\lambda < 0$	17
2.3.2	Caso $\lambda > 0$	21
3	Superpotencial	23
3.1	Definição do Superpotencial	24
3.2	A estrutura causal dos muros de domínio	30
4	Consequências cosmológicas da gravitação massiva	33
4.1	Cosmologia - ingredientes básicos	34
4.2	As “histórias” do universo na nova gravitação massiva	37
4.3	Solução “grande ricochete” da cosmologia massiva tridimensional	41
5	Conclusões	49
A	Dedução das equações de movimento da gravitação massiva tridimensional	52
B	Deslocamento para o vermelho e parâmetro de desaceleração	57
C	Funções especiais	62
C.1	Função Gamma	62
C.2	Função Beta	64

C.3 Função Hipergeométrica	65
--------------------------------------	----

Referências Bibliográficas	69
-----------------------------------	-----------

Capítulo 1

Introdução

1.1 Extensões da relatividade geral

A Relatividade Geral (RG) baseada na ação de Einstein-Hilbert¹:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda + 16\pi G \mathcal{L}_m(\sigma, \phi, \psi)], \quad (1.1)$$

com \mathcal{L}_m representando todos os “campos de matéria” σ, ϕ , etc., como por exemplo:

$$\mathcal{L}_m(\sigma) = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma - V(\sigma), \quad (1.2)$$

descreve com alta precisão um enorme conjunto de fenômenos astrofísicos observados ao redor de nosso sistema solar como também alguns períodos de evolução do universo inteiro. Porém a ação (1.1) leva a sérios problemas (inconsistências quânticas) quando aplicada na descrição de efeitos gravitacionais nas pequenas escalas de $l_{unt} \approx 10^{-17} cm$ à $l_{pl} \approx 10^{-33} cm$, i.e, no regime de geometria (\approx gravitação) e de matéria quântica. Logo a eq. (1.1) sendo uma teoria de gravitação perfeita nas escalas intermediárias e grandes exige sérias modificações para descrever efeitos gravitacionais nas pequenas escalas.

¹Nesta dissertação usamos $c = 1$ (velocidade da luz) e a assinatura $(-, +, \dots, +)$

A lista (incompleta) das diferentes extensões da gravitação de Einstein (1.1) inclui entre outros:

- RG com dimensões extras $d > 4$;
- RG com graus de liberdade (campos) geométricos além da métrica – dilaton, axion, etc.;
- RG baseada nas geometrias não-Riemannianas;
- $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ - RG, incluindo altas derivadas da métrica, veja por exemplo [1].

Uma alternativa é a que surge naturalmente na teoria de unificação das interações (Supercordas) para energias relativamente baixas (distâncias não muito pequenas) e inclui novos termos com origem quântica

$$S_{HD} = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}). \quad (1.3)$$

Dependendo dos valores específicos dos novos parâmetros a, b, c (de dimensões: $\dim[a] = \dim[b] = \dim[c] = cm^2$), esta extensão da relatividade geral pode sofrer efeitos “colaterais” indesejáveis, como: fantasmas, graviton massivo, energias negativas, problemas com descrição determinística clássica, etc. Em quatro dimensões ($d = 4$) não existe escolha apropriada para os parâmetros a, b, c, Λ, G que elimine todos os defeitos deste modelo [4]. Porém estudos intensivos [5], [6], [7], [8] realizados recentemente mostram que para $d = 3$ a eq. (1.3) é consistente como uma teoria clássica (escalas intermediárias e largas) e como uma teoria quântica (renormalizável e unitária) para alguns valores de Λ, a, b, c .

Esta dissertação é dedicada ao estudo das propriedades deste modelo gravitacional na presença da matéria escalar:

$$S_{HDM} = \frac{1}{16\pi G} \int d^3 x \sqrt{-g} \left\{ R - 2\Lambda + aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 16\pi G \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma + V(\sigma) \right) \right\}. \quad (1.4)$$

Os objetivos principais são:

1. Construção e análise das propriedades das soluções clássicas do tipo muros de domínio. Dedução dos valores (ou domínios) dos parâmetros a , b e c garantindo a consistência do modelo.
2. Consequências cosmológicas para um “universo chato” ($k = 0$) e $V_1 = A = \text{const}$, $V_2 = A(\sigma^2 - B^2)^2$, baseadas nas soluções explícitas do tipo Friedman-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + e^{\varphi(t)}(dx^2 + dy^2), \quad \sigma = \sigma(t),$$

visando as propriedades do parâmetro de desaceleração.

1.2 Algumas propriedades da gravitação massiva

1.2.1 Sobre a escolha dos parâmetros a, b, c

Em três dimensões o tensor de Riemann escreve-se em termos do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, a métrica $g_{\mu\nu}$ e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ [3]:

$$R_{\lambda\mu\nu\chi} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\chi} - g_{\lambda\chi}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\chi} + g_{\mu\chi}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}R(g_{\lambda\nu}g_{\mu\chi} - g_{\lambda\chi}g_{\mu\nu}), \quad (1.5)$$

como consequência temos

$$R_{\lambda\mu\nu\chi}R^{\lambda\mu\nu\chi} = 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R^2$$

, o que permite considerar o caso $c = 0$ sem impor restrições, i.e.²

$$aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\lambda\chi}R^{\mu\nu\lambda\chi} = (a - c)R^2 + (b + 4c)R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

ou seja, redefinindo $(a - c) \rightarrow a$ e $(b + 4c) \rightarrow b$.

²queremos dizer que tomar $c = 0$ é equivalente a redefinir as constantes a e b .

A nova gravitação massiva (NGM) em $d = 3$ de Bergshoeff-Hohm-Tonwsend [5], [6] corresponde a uma escolha específica dos parâmetros a e b ;

$$b = -\frac{8}{3}a \equiv -64\lambda = -\frac{1}{m^2} \quad (1.7)$$

por razões de unitariedade (ausência de fantasmas) e renormalizabilidade (na versão quântica) deste modelo [7].

A mesma condição (1.7) elimina as terceiras e as quartas derivadas nas equações, deduzidas da ação (1.4), para soluções de tipos muros de domínio

$$ds_3^2 = d\eta^2 + e^{\varphi(\eta)} (dx^2 - dt^2), \sigma = \sigma(\eta), \quad (1.8)$$

i.e., garantindo que estas equações sejam de segunda ordem (ver apêndice A):

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \dot{\varphi}\dot{\sigma} &= 0, & \dot{\varphi}^2(1 + 4\lambda\dot{\varphi}^2) + 4\Lambda &= \dot{\sigma}^2 \\ \ddot{\varphi}(1 + 8\lambda\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}[\dot{\sigma}^2 + \dot{\varphi}^2(1 + 4\lambda\dot{\varphi}^2) + 4\Lambda] &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde “.” denota a derivada em relação a variável η e fixamos $G = \frac{1}{16\pi}$ e $V = 2\Lambda$.

Logo as condições “iniciais” necessárias para determinar as correspondentes soluções são $\sigma_0, \dot{\sigma}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0$, i.e. elas não incluem mais que as primeiras derivadas dos campos $\sigma(\eta), \varphi(\eta)$ (igualmente como acontece com a gravitação (de segunda ordem) de Einstein) garantindo assim o determinismo desta teoria. Deve ficar claro que esta é uma característica peculiar de nosso “ansatz” (eq. (1.8)), pois em geral, as equações da NGM são de terceira ou quarta ordem.

1.2.2 Soluções assintóticas do tipo vácuo

Por definição as soluções das eqs (1.9) com energia mínima e máximo número de isometrias, i.e. $\sigma = const$, $\dot{\sigma} = 0$

$$\ddot{\varphi}(1 + 8\lambda\dot{\varphi}^2) = 0 \tag{1.10}$$

$$\dot{\varphi}^2(1 + 4\lambda\dot{\varphi}^2) + 4\Lambda = 0,$$

determinam uma classe de soluções chamadas de vácuo. Por exemplo, para $\lambda = 0 = \Lambda$ (\equiv gravitação de Einstein)

$$\ddot{\varphi} = 0 = \dot{\varphi}^2,$$

reproduz o espaço tempo chato de Minkowski

$$ds^2 = d\eta^2 + e^{\varphi_0}(dx^2 - dt^2). \tag{1.11}$$

Para $\lambda = 0$, mas $\Lambda < 0$ temos:

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi}^2 = 4|\Lambda|,$$

que dá origem ao espaço de anti de Sitter AdS_3 :

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\eta^2 + e^{(\varphi_0 \pm 2\sqrt{|\Lambda|\eta})}(dx^2 - dt^2), \\ R^{(3)} &= -2\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2 = -6|\Lambda|. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Na gravitação modificada (NMG) $\lambda \neq 0$ e mesmo sem constante cosmológica (i.e. $\Lambda = 0$) existem soluções do tipo vácuo chatos e curvos, como por exemplo:

- $\lambda < 0$,

$$\dot{\varphi}_{\pm} = \pm \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}, \quad \dot{\varphi}_0 = 0,$$

$$R^{(3)}(\dot{\varphi}_{\pm}) = -\frac{3}{8|\lambda|} \quad (AdS_3),$$

$$R^{(3)}(\dot{\varphi}_0) = 0 \quad (M_3).$$

- $\lambda > 0$ $\dot{\varphi}_0 = 0$ e somente M_3 é solução.

No caso geral $\lambda \neq 0$, $\Lambda \neq 0$:

$$\dot{\varphi}_{\pm}^2 = -\frac{1}{8\lambda} \left(1 \mp \sqrt{1 - 64\lambda\Lambda} \right), \quad (1.13)$$

tanto no caso $\lambda < 0$, $\Lambda < 0$ quanto para $\Lambda > 0$, $\lambda < 0$ existem dois diferentes AdS_3 (com curvaturas diferentes).

1.2.3 Limite Newtoniano e a massa do graviton

O estudo do limite Newtoniano (campo gravitacional fraco) é independente da forma da ação e é baseado na linearização das equações (para a métrica e a matéria) ao redor de uma solução do tipo vácuo:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}^{vac} + \kappa h_{\mu\nu}, \\ \kappa^2 &= 16\pi G, \end{aligned} \quad (1.14)$$

descartando termos com κ^3 nas equações. No caso da gravitação de Einstein temos:

$$g_{\mu\nu}^{vac} = \eta_{\mu\nu} = const, \quad (1.15)$$

que nos leva às soluções estáticas:

$$\Delta h_{\mu\nu} = 0, \quad (1.16)$$

(o campo $h_{\mu\nu}$ representando o graviton \equiv partícula com spin 2 e massa zero). E $h_{00}(r)$ é identificado como o potencial de Newton ($\varphi \sim -\frac{1}{r^{d-3}}$, num espaço-tempo d -dimensional).

No caso da nova gravitação massiva tridimensional [5], a linearização ao redor de um vácuo do tipo AdS_3 tem a forma:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu}) = 2\Lambda_{eff}\bar{g}_{\mu\nu}, \\ \bar{R} &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} = 6\Lambda_{eff} = -\frac{3}{2}\dot{\varphi}_{\pm}^2.\end{aligned}\tag{1.18}$$

A derivada covariante é construída com $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}(\bar{g}_{\mu\nu})$, i.e.

$$\bar{\nabla}_{\mu}A_{\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}A_{\rho}.$$

As correspondentes equações linearizadas, obtidas a partir da ação (1.4) com $b = -\frac{8}{3}a = -64\lambda = -\frac{1}{m^2}$, tomam a forma [8], [13]:

$$\left(\bar{\nabla}^2 + \underbrace{2\Lambda_{eff}}_{(M_1)^2}\right)\left(\bar{\nabla}^2 + \underbrace{\left(m^2 + \frac{5}{2}\Lambda_{eff}\right)}_{(M_2)^2}\right)h_{\mu\nu} \approx 0.\tag{1.19}$$

Na presença da constante cosmológica os possíveis valores para a massa do “graviton” (i.e. os pólos no propagador do campo $h_{\mu\nu}$) são definidos como:

$$M_{gr(i)}^2 = (M_i)^2 - 2\Lambda_{eff}, \quad i = 1, 2,\tag{1.20}$$

obtidas através da transformada de Fourier da equação acima. Explicitamente:

$$M_{gr(1)}^2 = 0, \quad M_{gr(2)}^2 = m^2 + \frac{\Lambda_{eff}}{2},\tag{1.21}$$

onde

$$\begin{aligned}\Lambda_{eff} &= -\frac{1}{l_{eff}^2}, \quad l_{eff}^2 = \frac{L^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{m^2L^2}}\right), \\ \Lambda &= -\frac{1}{L^2}, \quad m^2 = \frac{1}{64\lambda}.\end{aligned}\tag{1.22}$$

A condição de unitariedade

$$M_{gr}^2 \geq 0 \quad i.e. \quad m^2 \geq \frac{1}{2l_{eff}^2},$$

indica a existência de um Λ_{eff} crítico

$$\Lambda_{eff}^{cr} = 2\Lambda = -2m^2,$$

que corresponde ao “graviton” sem massa.

O limite Newtoniano (força gravitacional fraca) neste caso é descrito pela equação

$$\Delta_2 (\Delta_2 + m^2) h_{00}(r) = -\mu_0^2 \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.23)$$

cuja solução representa o potencial gravitacional (em duas dimensões espaciais):

$$h_{00}(r) \approx \varphi(r) \approx \frac{\mu_0^2}{4\pi m^2} \ln mr - \frac{\mu_0^2}{m^2} e^{-mr} \sqrt{\frac{2\pi}{mr}}, \quad (1.24)$$

para $r \gg 1/m$. Fica claro que, ao contrário da gravitação de Einstein, a (NGM) reproduz o potencial gravitacional Newtoniano em duas dimensões espaciais (primeiro termo), acrescido de uma correção do tipo “Yukawa” (segundo termo).

Capítulo 2

Muros de domínio na gravitação massiva tridimensional

2.1 Conceito de vácuo

Nas teorias de campos definidas no espaço-tempo chato de Minkowski M_d ($d = 3, 4, 5, \dots$) como por exemplo

$$S = \int d^d x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - V(\sigma) \right)$$

os vácuos representam configurações de campo $\{\sigma^a\}$ que são soluções estáticas, com menor energia

$$E = \frac{1}{2} \int d^{d-1} x \left(\frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \sigma)^2 + V(\sigma) \right), \quad (2.1)$$

estáveis:

$$V'(\sigma^a) = 0, \quad V''(\sigma^a) > 0$$

ou seja, o conjunto dos mínimos do potencial (quando existem). Para o potencial constante $V_1(\sigma) = 2\Lambda_d$ todos os valores $\sigma^a \in \mathbb{R}$ obedecem a estas condições, logo temos um exemplo

de um vácuo contínuo.

No caso $V_2(\sigma) = \text{const.} + \frac{M^2}{2}\sigma^2$ existe um único vácuo $\sigma_0 = 0$, $(V''(0) = M^2 > 0)$. Os vácuos determinam as possíveis condições assintóticas do campo

$$\sigma(x_i, t) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \pm \infty} \sigma^a,$$

ou seja, todas as soluções físicas $\sigma(x_i, t_i | \sigma^a, (\sigma^a)')$ nos infinitos do espaço e no início (final) dos tempos aproximam-se de um dos vácuos. Sendo assim cada solução $\sigma(x_i, t_i | \sigma^a, (\sigma^a)')$ representa a evolução do vácuo $\{\sigma^a\}$ causada pelas forças (i.e. pelo correspondente potencial $V(\sigma)$).

As soluções do tipo vácuo na Relatividade Geral (extendida ou não) descrevem as possíveis geometrias do universo (estático!) na ausência da matéria (i.e. para $\sigma = \{\sigma_{vac}^a\}$) com ou sem constante cosmológica ($\Lambda \gtrless 0$). Da forma da ação (veja eqs. (1.1), (1.2)) fica claro que os valores do potencial $V(\sigma_{vac}^a) = V_{vac}$ contribuem para a constante cosmológica efetiva. Na teoria de Einstein $\Lambda = 0 = \lambda$ (e quando $V(\sigma_{vac}) = 0$) existe uma única solução desse tipo: a métrica chata $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, i.e. $R(\eta_{\mu\nu}) = 0$ em todos os pontos do espaço-tempo de Minkowski M_d . Uma das consequências da adição do termo cosmológico:

$$S_\Lambda = S_{EH} - \frac{\Lambda}{8\pi G} \int d^d x \sqrt{-g}, \quad (2.2)$$

i.e. admitindo energia do vácuo $\Lambda \approx V(\sigma_{vac})$ na RG não-extendida ($\lambda = 0$) é que a geometria do espaço-tempo vazio não é mais M_d : os vácuos cosmológicos¹ representam espaços com curvatura constante $R(g_{\mu\nu}) = \pm 6|\Lambda|$ (para $d = 3$) do tipo anti-de-Sitter $\Lambda < 0$

$$ds^2 = d\eta^2 + e^{\pm 2\sqrt{|\Lambda|\eta}} (dx^2 - dt^2), \quad (2.3)$$

ou de Sitter $\Lambda > 0$.

¹Para $\Lambda > 0$ não existem soluções estáticas não singulares das equações de Einstein sem matéria

Na extensão massiva (veja eq. (1.7)) a inclusão de termos com derivadas superiores [5], [6]:

$$S_{m^2} = -\frac{1}{16\pi G m^2} \int d^3x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right), \quad (2.4)$$

(lembrando que $64\lambda = \frac{1}{m^2}$) leva a mudanças qualitativas na estrutura do vácuo gravitacional. O fato mais surpreendente é que na ausência de matéria ($V(\sigma^{vac}) = 0$) e sem constante cosmológica (i.e. $\Lambda = 0$) no caso $\lambda < 0$ existem duas geometrias diferentes representando o vácuo:

$$R(g_{\mu\nu}^0) = 0, \quad R(g_{\mu\nu}^-) = -\frac{3}{8|\lambda|}, \quad (2.5)$$

i.e. $M_3(\Lambda_{eff} = 0)$ e AdS_3 (com $|\Lambda_{eff}| = \frac{1}{16|\lambda|}$). O efeito da constante cosmológica negativa $\Lambda < 0$ na gravitação “massiva” com $\lambda < 0$ é a existência de dois vácuos diferentes do tipo AdS_3 (para $64|\lambda||\Lambda| < 1$):

$$R(g_{\mu\nu}^\pm) = -\frac{3}{16|\lambda|} \left(1 \pm \sqrt{1 - 64|\lambda||\Lambda|} \right). \quad (2.6)$$

O caso da RG “massiva” com $\lambda > 0$ ($\Lambda \gtrsim 0$) é parecido com $\lambda = 0$ (i.e. com a teoria de Einstein): não existe desdobramento dos vácuos:

- para $\Lambda = 0, \quad \lambda > 0, \quad R(g_{\mu\nu}^0) = 0$
- para $\Lambda < 0, \quad \lambda > 0, \quad R(g_{\mu\nu}^-) = -6|\Lambda_{eff}|,$
com $|\Lambda_{eff}| = \frac{1}{16|\lambda|} \left(1 + \sqrt{1 + 64\lambda|\Lambda|} \right)$
- para $\Lambda > 0, \quad \lambda > 0$, não existem soluções estáticas do tipo vácuo.

A maior mudança na RG “massiva” acontece quando $\Lambda > 0$ e $\lambda < 0$. Apesar da constante cosmológica ser positiva, existe uma solução estática porém representado um espaço com curvatura constante negativa

$$R(g_{\mu\nu}^+) = 6\Lambda_{eff}, \quad (2.7)$$

$$\Lambda_{eff} = -\frac{1}{16|\lambda|} \left(1 + \sqrt{1 + 64|\lambda|\Lambda} \right).$$

Ou seja, o termo massivo (2.4) modifica não somente o valor da constante cosmológica (de Λ para Λ_{eff} como no caso $\Lambda < 0$, $\Lambda_{eff} < 0$) mas o sinal desta também.

Em conclusão: os efeitos que o termo massivo (2.4) causa na estrutura do vácuo gravitacional (sem matéria $V(\sigma_{vac}) = 0$) são equivalentes à presença da energia de vácuo de um campo escalar σ com potencial $V(\sigma)$ que tem um ou dois mínimos (parametrizados por λ e Λ).

2.2 Muros de domínios

O objetivo principal da Relatividade Geral é a descrição dos diferentes (quase inumeráveis) fenômenos astrofísicos (dos movimentos e formações de galáxias, estrelas, planetas, buracos negros, etc. às leis da evolução do universo inteiro) como soluções apropriadas das equações do movimento (eqs. de Einstein e dos campos):

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= 8\pi GT_{\mu\nu}(\sigma, \phi^a), \\ \nabla_\mu \partial^\mu \sigma &= \frac{dV(\sigma, \phi^a)}{d\sigma}, \quad \nabla_\mu \partial^\mu \phi^a = \frac{dV(\sigma, \phi^a)}{d\phi^a}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

dependentes da escolha da matéria (conjunto de campos, fluidos, etc.; i.e. $T_{\mu\nu}$), das condições assintóticas e iniciais, das simetrias impostas, etc.. As soluções mais simples com menor energia (e maior simetria) denominados vácuos:

$$\{g_{\mu\nu}^{vac}, \sigma_{vac}^\pm, \Lambda^\pm = V(\sigma_{vac}^\pm)\},$$

descrevem as geometrias estáticas “puras” do universo eventualmente “curvo” (como AdS_d) pela “presença da energia do vácuo material” $\Lambda^\pm = V(\sigma_{vac}^\pm)$, i.e. pelo campo uniforme σ_{vac}^\pm de fundo, ou seja pelo $T_{\mu\nu}^{vac} = g_{\mu\nu}V(\sigma_{vac}^\pm)$.

A idéia principal da teoria de Einstein é que o movimento de um corpo (planeta, feixe de elétrons, luz, etc.) sob a ação de forças gravitacionais (ou outras forças excluídas) de um conjunto de campos de matéria (a distribuição de matéria com ou sem massa dada

pelo $T_{\mu\nu}$) é equivalente ao movimento “livre” (i.e. seguindo as geodésicas) numa geometria (pseudo) Riemanniana definida por uma métrica $g_{\mu\nu}(x_\rho)$ com curvatura $R(g_{\mu\nu}) \neq const.$ sendo uma solução da eq. (2.8). A realização desta idéia exige uma construção explícita das soluções da eq. (2.8) $\{g_{\mu\nu}(x), \sigma(x), \dots\}$ com condições assintóticas definidas pelas soluções do tipo vácuo $\{g_{\mu\nu}^{vac}, \sigma_{vac}^\pm, \dots\}$.

A família de soluções mais popular é com simetria esférica estática (do tipo AdS-Schwarzschild):

$$\begin{aligned} ds_3^2 &= -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2, \\ \sigma &= \sigma(r), \quad r^2 = x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Em $d = 3$ elas possuem simetria cilíndrica $SO(2)$ $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$ (em $d = 4$ temos simetria $SO(3)$). No limite para $r \rightarrow \infty$ obtemos uma das soluções do vácuo (M_3 ou AdS_3), e em $r = 0$ o espaço-tempo é singular.

Os muros de domínio representam uma outra família de soluções definidas como $\{g_{\mu\nu}(x), \sigma(x)\}$:

$$\begin{aligned} ds_3^2 &= d\eta^2 + e^{\varphi(\eta)} \bar{g}_{ik}(x, t) dx^i dx^k \\ \bar{R}(\bar{g}_{ik}) &= 2k = const. \\ \sigma &= \sigma(\eta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

A métrica acima tem como grupo de isometrias (i.e. as simetrias da parte bidimensional $\bar{g}_{ik}(x, t)$ com curvatura constante):

- $SO(2,1)$ para $k \gtrless 0$,
- $SO(2) \otimes T_2$ para $k = 0$,

refletindo o fato que cada corte bidimensional $\eta = const.$ representa um espaço-tempo AdS_2 ($k < 0$), dS_2 ($k > 0$) ou M_2 ($k = 0$). A distribuição da matéria escalar $\{\sigma = \sigma(x_\rho)\}$ é uniforme e estática para cada um destes cortes, e com distribuição específica não uniforme

na direção (η) - “ortogonal” às superfícies (x, t) descritas por AdS_2 , dS_2 ou M_2 . A curvatura desta métrica $R^{(3)}(g^{\mu\nu})$ não é constante e dependendo dos valores assintóticos do campo escalar

$$\sigma^\pm = \sigma(\eta \rightarrow \pm\infty), \quad (2.11)$$

apresenta uma, duas ou nenhuma singularidade (do tipo nuas, i.e. sem horizontes) no caso $\lambda = 0$, i.e. na teoria de Einstein tridimensional (as mesmas propriedades são válidas para $d = 4$ e $d = 5$). A principal característica destas soluções (além do maior número de isometrias na presença de matéria não-uniforme) é que no caso $\sigma_+ \neq \sigma_-$, ($\Lambda < 0$) são soluções interligando dois vácuos

$$\{g_{\mu\nu}^{vac}, \sigma_{vac}^\pm\},$$

diferentes. As correspondentes geometrias são do tipo assintoticamente AdS_3 , i.e. AdS_3 produzidas pela distribuição não-uniforme do dilaton $\sigma = \sigma(\eta)$, com potencial $V(\sigma) = \text{const.}$ no caso em discussão [2], [14], [15], [16].

As mudanças na estrutura dos vácuos (desdobramento) na gravitação massiva (1.4) (com $b = -\frac{8a}{3}$) deixam em aberto a questão da existência e das propriedades dos muros de domínios dilatônicos ($V(\sigma) = \text{const.}$ e $V(\sigma) \neq \text{const.}$) nesta teoria. A construção e análise completa destas soluções (como dependência dos valores Λ , λ , e σ^\pm) é o principal objetivo desta dissertação.

2.3 Muros de domínio na gravitação massiva com campo escalar

As equações de movimento da gravitação massiva tridimensional², derivadas no Apêndice A, são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + 64\lambda K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\rho\sigma\partial^\rho\sigma + V(\sigma)\right), \quad (2.12)$$

$$\nabla_\mu\partial^\mu\sigma = \frac{dV(\sigma)}{d\sigma} \equiv V'(\sigma),$$

onde o tensor simétrico $K_{\mu\nu}$ é dado por:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - \frac{3}{8}R^2\right) + \nabla^\sigma\nabla_\mu R_{\nu\sigma} + \nabla^\sigma\nabla_\nu R_{\mu\sigma} \\ & - \square R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\rho R_{\sigma\rho} - 2R_{\sigma\mu}R_\nu^\sigma \\ & + \frac{3}{8}(2RR_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu R - \nabla_\nu\nabla_\mu R + 2g_{\mu\nu}\square R). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Escritas para os muros de domínios (ver (2.10)) e fixando o potencial como $V(\sigma) = const = 2\Lambda$, as eqs. (2.12) nos levam ao seguinte sistema de equações ordinárias para $\varphi(\eta)$ e $\sigma(\eta)$:

$$\ddot{\sigma} + \dot{\varphi}\dot{\sigma} = 0,$$

$$\ddot{\varphi}(1 + 8\lambda\dot{\varphi}^2 + 32k\lambda e^{-\varphi}) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\sigma}^2 + 4\Lambda + 4\lambda\dot{\varphi}^4 + 64k^2\lambda e^{-2\varphi}) = 0, \quad (2.14)$$

$$\dot{\sigma}^2 = \dot{\varphi}^2(1 + 4\lambda\dot{\varphi}^2) + 4\Lambda - 4ke^{-\varphi} + 32k\lambda\dot{\varphi}^2e^{-\varphi} - 64k^2\lambda e^{-2\varphi}.$$

Soluções analíticas deste sistema para valores arbitrários dos parâmetros λ , Λ e k são desconhecidas. Também é importante salientar que a eq. acima independe das coordenadas escolhidas para a métrica \bar{g}_{ij} , só utilizamos o fato de $\bar{R}(\bar{g}_{ij}) = 2k = const$. Resolvendo a primeira das equações (2.14)

$$-\dot{\sigma} = u = \frac{2k}{H}e^{-\varphi}, \quad (2.15)$$

²nesta seção usamos $16\pi G = 1$

onde H é uma constante³ (de integração), logo um invariante do sistema. Substituindo na terceira, chega-se a uma equação não linear para o fator de escala e^φ :

$$u^2(1 + 16\lambda H^2) - 4\Lambda + 2Hu = v^2(1 + 4\lambda v^2 + 16\lambda Hu), \quad (2.16)$$

com

$$v = -\dot{\varphi} = \frac{1}{u} \frac{du}{d\eta}.$$

Junto com as equações mais simples representando os vácuos (veja o seção 2.1)

$$u = 0, \quad v_{\pm}^2 = -\frac{1}{8\lambda} \left(1 \mp \sqrt{1 + 64|\Lambda|\lambda} \right).$$

Existe uma outra solução muito simples correspondendo ao valor crítico de H e $k < 0$ (para $\Lambda < 0$):

$$H_{cr}^2 = \frac{4|\Lambda|}{1 - 64|\Lambda|\lambda}, \quad (2.17)$$

($64\lambda|\Lambda| < 1$ para $\lambda > 0$), que nada mais é do que H calculado em

$$v = 0 \text{ e } u = u_{cr} = \pm 2\sqrt{|\Lambda| \left(1 - \frac{|\Lambda|}{m^2} \right)}.$$

Ou seja temos

$$\begin{aligned} \sigma(\eta) &= \sigma_0 - u_{cr}\eta, \\ \varphi(\eta) &= \varphi_0 = \text{const}, \\ ds^2 &= d\eta^2 + e^{\varphi_0} ds_{(2)}^2(AdS_2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esta solução é conhecida como vácuo linear dilatônico representando uma geometria do tipo $\mathbb{R} \otimes AdS_2$.

A família de muros de domínio chatos (i.e. $k = 0$) permite uma descrição analítica mais

³é evidente que $k = 0$ não implica em $\sigma = \text{const}$ (basta ver a eq. (2.14)), logo se $k = 0$, necessariamente, $H = 0$ t.q. a razão $\frac{2k}{H} = -\sigma(\eta = \eta_0)e^{\varphi(\eta = \eta_0)}$ exista.

completa devido à simplificação das eqs. (2.14):

$$\begin{aligned} \dot{u} &= uv, \\ \dot{v}(1 + 8\lambda v^2) &= \frac{1}{2}(u^2 + 4\Lambda + v^2(1 + 4\lambda v^2)), \\ v^2(1 + 4\lambda v^2) &= u^2 - 4\Lambda. \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.3.1 Caso $\lambda < 0$

(i) Quando $\Lambda = 0$, existem três pontos críticos no plano (u, v) ,

$$(0, 0), \quad \left(0, \pm \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\right),$$

representando os vácuos $\{g_{\mu\nu}^{\pm,0}, \sigma^{\pm}\}$. O vínculo

$$v^2(1 - 4|\lambda|v^2) = u^2, \tag{2.20}$$

descreve analiticamente oito diferentes curvas no plano (u, v) (veja fig. 2.1) correspondentes às diferentes geometrias. As eq.s (2.20) sugerem as seguintes restrições sobre os valores de u e v :

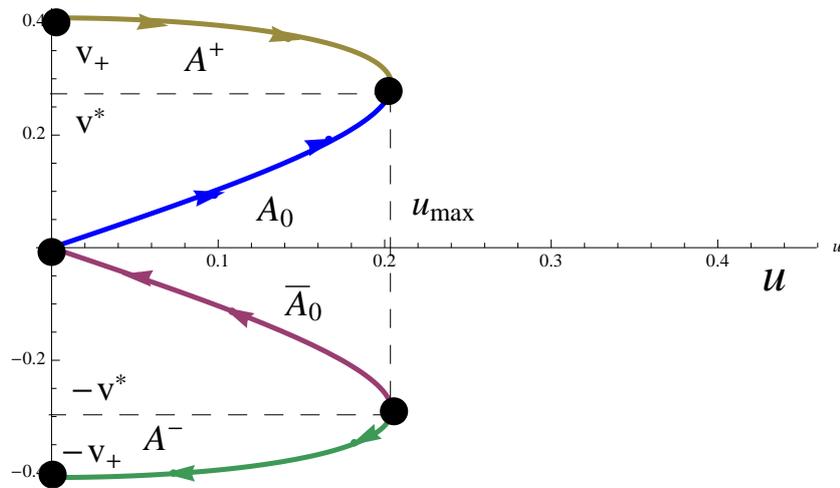


Figura 2.1: Curvas representando as diferentes soluções para $\Lambda = 0$ e $\lambda < 0$. As outras quatro soluções correspondem a uma reflexão no eixo $v = 0$.

$$v^2 \leq \frac{1}{4|\lambda|}, \quad (2.21)$$

$$u^2 \leq \frac{1}{16|\lambda|}.$$

O valor máximo de u

$$u_{max} = \pm \frac{1}{4\sqrt{|\lambda|}},$$

corresponde à

$$v^* = \pm \frac{1}{2\sqrt{2|\lambda|}}.$$

Existem dois tipos de curvas (soluções das eqs. (2.19)): $v_+(\eta)$, $v_-(\eta)$ (e todas as outras – oito em total – são obtidas usando as simetrias $u \rightarrow -u$ e $v_{\pm} \rightarrow -v_{\pm}(-\eta)$)

$$v_{\pm}^2 = \frac{1}{8|\lambda|} \left(1 \pm \sqrt{1 - 16|\lambda|u^2} \right). \quad (2.22)$$

As soluções analíticas:

$$e^{\frac{\eta}{\sqrt{|\lambda|}}} = e^{-\frac{1}{v\sqrt{\lambda}}} \left(\frac{1 - 2\sqrt{|\lambda|}v}{1 + 2\sqrt{|\lambda|}v} \right), \quad (2.23)$$

deixam claro que a curva A^+ que parte do vácuo $u = 0$, $v_+^0 = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}$ em $\eta \rightarrow -\infty$ i.e. $v_+^0 = v_+$ ($\eta \rightarrow -\infty$) (AdS_3) e num “tempo” finito (i.e. distância radial finita) η_+ :

$$e^{\frac{\eta_+}{\sqrt{|\lambda|}}} = e^{-2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right), \quad (2.24)$$

chega ao ponto (u_{max}, v^*) que corresponde à singularidade nua:

$$R^{(3)} = -\frac{3}{2}v^2 + \frac{2u^2}{1-8|\lambda|v^2}, \quad (2.25)$$

$$R^{(3)}\left(u_{max}, v^* = \frac{1}{2\sqrt{2|\lambda|}}\right) = \infty.$$

A solução A^- é completamente análoga, basta inverter a direção de η .

A outra solução A_0 na fig. 2.1 que corresponde à curva v_-^2 da equação (2.22) começa no ponto crítico $u = 0$, $v = 0$ (representando M_3) e no mesmo “tempo” η_+ desenvolve uma

singularidade nua ao aproximar-se do ponto (u_{max}, v^*) . Essas soluções não representam muros de domínios, pois intepolam entre um vácuo (AdS_3 ou M_3) e uma singularidade nua (u_{max}, v^*) . A solução \bar{A}_0 é a mesma invertendo a direção de η .

(ii) No caso da constante cosmológica negativa $\Lambda < 0$ (e $\lambda < 0$) quando $64|\lambda||\Lambda| \leq 1$ temos quatro pontos críticos

$$(0, \pm v_-), (0, \pm v_+),$$

todos representando vácuos do tipo AdS_3 com constante cosmológica efetiva

$$|\Lambda_{eff}| = \frac{1}{32|\lambda|} (1 \pm \sqrt{1 - 64|\lambda||\Lambda|}). \quad (2.26)$$

Oito curvas B_{\pm} na fig. 2.2 descrevem graficamente todos as soluções neste caso, i.e.,

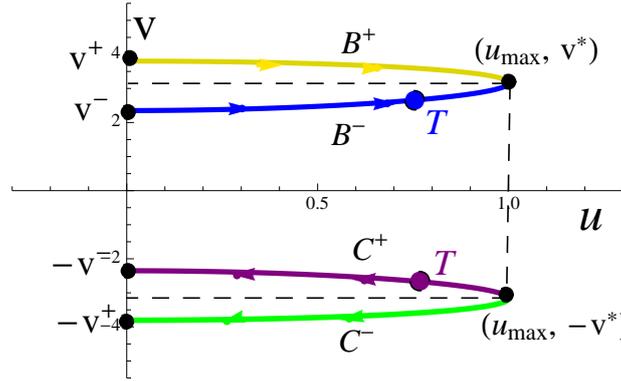


Figura 2.2: Soluções para $\Lambda < 0$ e $\lambda < 0$. As outras quatro soluções correspondem a uma reflexão no eixo $v = 0$.

$$\begin{aligned} v_{\pm}^2(u) &= \frac{1}{8|\lambda|} (1 \pm \sqrt{1 - 16|\lambda|u^2 - 64|\lambda||\Lambda|}), \\ u_{max} &= \pm \frac{1}{4|\lambda|} \sqrt{1 - 64|\lambda||\Lambda|}, \\ v^* &= \frac{1}{2\sqrt{2|\lambda|}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A forma analítica das soluções é obtida integrando as eqs. (2.19)

$$e^{4|\lambda|\eta} = \left(\frac{v - v_+^*}{v + v_+^*} \right)^{\frac{2|\lambda|}{v_+^*}} \left(\frac{v - v_-^*}{v + v_-^*} \right)^{\frac{2|\lambda|}{v_-^*}}, \quad (2.28)$$

onde v_{\pm}^* denotam os pontos críticos

$$v_{\pm}^{*2} = v_{\pm}^2(u=0) = \frac{1}{8|\lambda|} (1 \pm \sqrt{1 - 64|\lambda||\Lambda|}).$$

A solução B_+ (representando a curva $v_+(u)$) começa no ponto $(0, v_+^*)$ ($\eta \rightarrow -\infty$) e termina no ponto (u_{max}, v^*) ($\eta \rightarrow \eta_+$), onde η_+ é dada por

$$e^{4|\lambda|\eta_+} = \left(\frac{v^* - v_+^*}{v^* + v_+^*} \right)^{\frac{2|\lambda|}{v_+^*}} \left(\frac{v^* - v_-^*}{v^* + v_-^*} \right)^{\frac{2|\lambda|}{v_-^*}}, \quad (2.29)$$

que corresponde a uma singularidade nua ($R^{(3)}(u_{max}, v^*) = \infty$).

A solução B_- é muito parecida com B_+ : começa no outro ponto crítico $(0, v_-^*)$ e termina no mesmo ponto (u_{max}, v^*) . As duas representam geometrias singulares com uma borda do tipo AdS_3 e uma singularidade nua. De novo estas geometrias do tipo assintoticamente AdS_3 (a AdS_3) não descrevem muros de domínio pois não interpolam entre dois vácuos.

(iii) O caso $\Lambda > 0$ ($\lambda < 0$) é qualitativamente diferente dos casos com $\Lambda \leq 0$: agora temos dois pontos críticos

$$(0, \pm v_+), \quad v_+^2 = \frac{1}{8|\lambda|} (1 + \sqrt{1 + 64|\lambda|\Lambda}),$$

que correspondem ao vácuo do tipo AdS_3 com

$$\Lambda_{eff} = -\frac{1}{32|\lambda|} (1 + \sqrt{1 + 64|\lambda|\Lambda}).$$

As curvas A e C representando todas as soluções são desenhadas na fig. 2.3

$$\begin{aligned} u_{max} &= \pm \frac{1}{16|\lambda|} \sqrt{1 + 64|\lambda|\Lambda}, \\ u_{min} &= \pm 2\sqrt{\Lambda}, \quad v^* = \frac{1}{2\sqrt{2|\lambda|}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A curva A tem propriedades similares as A^+ e B^+ : começa no ponto crítico v_+ do tipo AdS_3 e termina num “tempo” finito com uma singularidade nua no ponto (u_{max}, v^*) . A novidade neste caso é a curva B que interpola entre duas singularidades nuas $(u_{max}, \pm v^*)$.

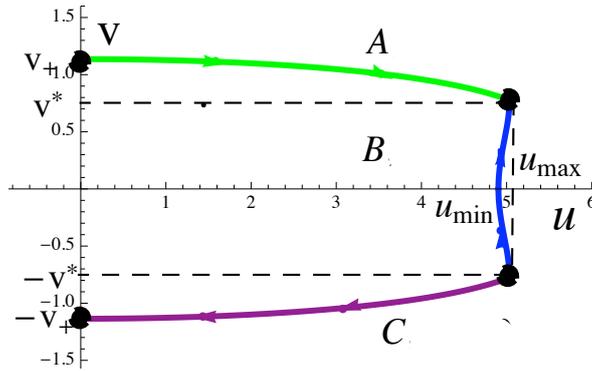


Figura 2.3: Soluções para $\Lambda > 0, \lambda < 0$. As outras quatro soluções correspondem a uma reflexão no eixo $v = 0$.

2.3.2 Caso $\lambda > 0$

Esse modelo demonstra muitas das características da gravitação não-extendida $\lambda = 0$ e $k = 0$. Para $\Lambda > 0$ não existem pontos fixos (i.e. vácuos) e as soluções são periódicas

$$e^{i4\lambda\eta} = \left(\frac{v - i\sqrt{|v_-|^2}}{v + i\sqrt{|v_-|^2}} \right)^{\frac{2\lambda}{\sqrt{|v_-|^2}}} \left(\frac{v - i\sqrt{|v_+|^2}}{v + i\sqrt{|v_+|^2}} \right)^{\frac{2\lambda}{\sqrt{|v_+|^2}}}, \quad (2.31)$$

onde

$$v_{\pm}^2 = \frac{1}{8\lambda} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 16u^2 - 64\Lambda\lambda} \right), \quad (2.32)$$

e não representam muros de domínio.

Em ambos os casos $\Lambda = 0$ e $\Lambda < 0$ as curvas (u, v)

$$v^2(1 + 4\lambda v^2) = u^2 + 4|\Lambda|,$$

que descrevem as soluções das eq.s (2.19) não impõem restrições sobre os valores de u e v (ao contrário do caso $\lambda < 0$!). Por exemplo para $\Lambda = 0$ temos um vácuo M_3 (o ponto $u = 0 = v$) e todas soluções

$$\eta + \eta_0 = -\frac{1}{v} + 2\sqrt{\lambda} \arctan(2\sqrt{\lambda}v), \quad (2.33)$$

começam neste ponto (para $\eta \rightarrow -\infty$) e terminam em uma singularidade nua para $u \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$, num “tempo” finito $\eta_+ = \pi\sqrt{\lambda}$. No caso $\Lambda < 0$ existem dois pontos fixos

$$(0, \pm|v_-|), \quad v_-^2 = \frac{1}{8\lambda}(\sqrt{1 + 64\lambda|\Lambda|} - 1),$$

descrevendo vácuos do tipo AdS_3 . As soluções

$$e^{4\lambda\eta} = \left(\frac{v - |v_-|}{v + |v_-|}\right)^{\frac{2\lambda}{|v_-|}} \left(\frac{v - i|v_+|}{v + i|v_+|}\right)^{i\frac{2\lambda}{|v_+|}},$$

onde v_+ e v_- são dados pela eq. (2.32) com $\Lambda \rightarrow -|\Lambda|$, demonstram que temos geometrias com curvatura não-constante com uma borda (quando $\eta \rightarrow -\infty$ para $v > 0$, $u > 0$) e uma singularidade nua para $\eta_+ = 0$.

A análise das propriedades das soluções do tipo Muros de Domínio (DW's) para $k = 0$, $V = 1$, $\lambda \neq 0$ na gravitação massiva dilatônica tridimensional esclarece as diferenças e as semelhanças com o modelo sem extensão ($\lambda = 0$), e como conclusão para $k = 0$ ($\lambda \gtrless 0$, $\Lambda \gtrless 0$) não há soluções interligando dois vácuos. Logo como no caso $k = 0$, $\lambda = 0$ não temos muros de domínio legítimos. As investigações numéricas usando o programa *Mathematica* apresentam evidências que para $k < 0$, $\Lambda < 0$, $\lambda < 0$ existem soluções interligando dois vácuos diferentes do tipo AdS_3 .

Capítulo 3

Superpotencial

O objetivo deste capítulo é a investigação das propriedades da gravitação massiva na presença de matéria representada por um campo escalar com autointeração $V(\sigma) \neq \text{const.}$. Nosso principal interesse é estudar as condições sobre $V(\sigma)$ que permitam múltiplos vácuos e soluções do tipo muros de domínio interligando-os. Seguindo os trabalhos de Bergshoeff, Hohm e Townsend [5], [6], consideremos o modelo da Nova Gravitação Massiva (NGM) com a ação

$$S_{NGM} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{-g} \left(\epsilon R - \frac{1}{m^2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) - \kappa^2 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + V(\sigma) \right) \right), \quad (3.1)$$

com $\kappa^2 = \frac{1}{16\pi G}$ e $\epsilon = \pm 1$, ou seja, o termo de Einstein-Hilbert pode ter o sinal “certo” ($\epsilon = 1$) ou “errado” ($\epsilon = -1$).

3.1 Definição do Superpotencial

As equações (2.12) da gravitação massiva com potencial $V(\sigma)$ arbitrário e para muros de domínio chatos (i.e. $k = 0$)

$$ds^2 = d\eta^2 + e^{\varphi(\eta)}(dx^2 - dt^2),$$

têm a seguinte forma ($64\lambda = \frac{1}{m^2}$):

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} &= -\dot{\sigma}\dot{\varphi} + V'(\sigma), \\ \ddot{\varphi} \left(1 - \frac{\dot{\varphi}^2}{8\epsilon m^2}\right) + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(1 - \frac{\dot{\varphi}^2}{16\epsilon m^2}\right) + \epsilon \kappa^2 \left(\frac{\dot{\sigma}^2}{2} + V(\sigma)\right) &= 0, \\ \dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{\dot{\varphi}^2}{16\epsilon m^2}\right) + \epsilon \kappa^2 (2V(\sigma) - \dot{\sigma}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mesmo para potenciais mais simples do tipo $V_1(\sigma) = \frac{\gamma}{4}(\sigma^2 - \sigma_{\pm}^2)^2 - 2\Lambda$ e $V_2(\sigma) = B(2\cos(2\sigma) - 1)$, que admitem múltiplos vácuos degenerados é difícil encontrar uma solução analítica para as eq.s (3.2) com $\lambda \neq 0$ e até $\lambda = 0$ (i.e. $m^2 \rightarrow \infty$). Para o caso $\lambda = 0$ (a gravitação 3-D de Einstein) existe um método simples e eficiente chamado “Superpotencial” que providencia uma família restrita de soluções analíticas do correspondente sistema de equações (3.2) com $m^2 \rightarrow \infty$ ($\lambda = 0$). O ponto chave consiste na introdução de uma nova, e desconhecida, função $W(\sigma)$ (chamada de Superpotencial) [14], [15], [16]:

$$\begin{aligned} V(\sigma) &= \frac{2}{\kappa^2} W'^2 - 2\epsilon W^2, \\ \dot{\varphi} &= -2\epsilon \kappa W, \quad \dot{\sigma} = \frac{2}{\kappa} W'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

É fácil verificar que todas as soluções das eqs (3.3)¹ são também soluções das eqs (3.2). Dado o potencial $V(\sigma)$, deduzir a forma de $W(\sigma)$ (resolvendo a primeira das eqs (3.3)) que reproduz $V(\sigma)$ é um problema extremamente difícil. Em alguns casos a forma do Superpotencial é conhecida, por exemplo o potencial $V_1(\sigma)$ (do tipo Higgs) tem como Superpotencial

$$W_1(\sigma) = B\sigma^2 + A,$$

¹basta substituir as eqs. (3.3) nas eqs. (3.2).

porém neste caso não existem soluções das equações de primeira ordem do tipo muros de domínio. Logo, invertendo a lógica, podemos reformular nosso problema: quais são os Superpotenciais que permitem soluções (do tipo kink ou muro) com dois (ou mais) vácuos e interligando esses vácuos? O exemplo mais simples (referindo-se aos potenciais polinomiais) é dado por um Superpotencial cúbico:

$$W_{cub}(\sigma) = \frac{B\sigma^2}{6}(2\sigma + 3A),$$

que de acordo com as eq.s (3.3) corresponde ao potencial:

$$V_{hexa}(\sigma) = \frac{B^2}{32\kappa^2}\sigma^2[(\sigma + A)^2 - \epsilon\kappa^2\sigma^2(2\sigma + 3A)^2].$$

Antes de tudo é necessário estabelecer como os extremos de $V_{hexa}(\sigma)$ são codificados na forma do Superpotencial ou seja:

$$\kappa^2 V'(\sigma) = 4W'(W'' - \epsilon\kappa^2 W).$$

Devido a forma da equação para o campo escalar

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\kappa}W'(\sigma),$$

as soluções do tipo vácuo, i.e. $\sigma = const$, reproduzidas por este método correspondem aos extremos do Superpotencial

$$W'_{cub}(\sigma) = B\sigma(\sigma + A) = 0,$$

$$\sigma_0^* = 0, \quad \sigma_A^* = -A.$$

Este resultado deixa claro o fato que somente soluções interligando os extremos de $V(\sigma)$ (i.e. $V'(\sigma_a^*) = 0$) do tipo $W'(\sigma_a^*) = 0$ são reproduzidas. Os extremos que correspondem as soluções de

$$W''(\sigma) = \epsilon\kappa^2 W(\sigma),$$

chamados instáveis ou não-supersimétricos são descartados.

A curvatura escalar pode ser reescrita em termos de W e W' como:

$$R^{(3)} = 8\epsilon(W')^2 - 6\kappa^2 W^2.$$

Assim, para as soluções do tipo vácuo temos:

$$R^{(3)}(\sigma_{vac}^*) = -6\kappa^2 W^2(\sigma_{vac}^*) \equiv 6\Lambda_{eff}.$$

Consequentemente:

$$\Lambda_{eff}(\sigma_0^*) = 0 \quad , \quad \Lambda_{eff}(\sigma_A^*) = -\frac{\kappa^2 B^2 A^6}{36},$$

i.e. esses vácuos representam geometrias M_3 e AdS_3 . As correspondentes soluções do tipo muro (\equiv *kink*) têm a seguinte forma (para $A < 0$):

$$\begin{aligned} \sigma(\eta) &= |A| \left(1 + e^{\frac{2B|A|(\eta+\eta_0)}{\kappa}}\right)^{-1} \\ e^{\varphi(\eta)} &= a_0 (|A| - \sigma(\eta))^{-\frac{\epsilon|A|^2 \kappa^2}{6}} e^{\frac{\kappa^2 \epsilon}{6} \sigma(|A| - \sigma)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

quando

$$0 \leq \sigma \leq |A|,$$

e descrevem muros de domínio

$$\sigma(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow \sigma_0^* = 0,$$

$$\sigma(\eta)_{\eta \rightarrow -\infty} \rightarrow \sigma_A^* = |A|,$$

ligando os vácuos (σ_0^*, M_3) e (σ_A^*, AdS_3) .

No caso da gravitação massiva (i.e. $\lambda \neq 0, m^2 \neq \infty$) a forma do vínculo (a terceira das

eqs (3.2)) sugere a seguinte generalização do conceito de Superpotencial² e das eqs (3.3):

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= -2\epsilon\kappa W, \\ \dot{\sigma} &= \frac{2}{\kappa}W' \left(1 - \frac{W^2\kappa^2}{2\epsilon m^2}\right), \\ \kappa^2 V(\sigma) &= 2(W')^2 \left(1 - \frac{W^2\kappa^2}{2\epsilon m^2}\right)^2 - 2\epsilon\kappa^2 W^2 \left(1 - \frac{W^2\kappa^2}{4\epsilon m^2}\right).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Nossa observação é que as soluções das eqs (3.5) também resolvem as eqs (3.2) (o inverso não é necessariamente verdadeiro). Como no caso $\lambda = 0$, a relação dos extremos σ_a^* de $V(\sigma)$ (*i.e.* $V'(\sigma_a^*) = 0$) que descrevem os possíveis vácuos com forma (e propriedades) do Superpotencial $W(\sigma)$ é dada por:

$$\kappa^2 V'(\sigma) = 4W' \left(1 - \frac{W^2\kappa^2}{2\epsilon m^2}\right) \left[W'' \left(1 - \frac{W^2\kappa^2}{2\epsilon m^2}\right) - \frac{\kappa^2}{\epsilon m^2} (W')^2 W - \epsilon\kappa^2 W \right].$$

Analisando de novo a forma da curvatura

$$R^{(3)} = 8\epsilon(W')^2 \left(1 - \frac{W^2\kappa^2}{2\epsilon m^2}\right) - 6\kappa^2 W^2, \quad (3.6)$$

e da equação para o campo escalar

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\kappa}W' \left(1 - \frac{W^2\kappa^2}{2\epsilon m^2}\right),$$

chegamos a conclusão que somente os extremos de $V(\sigma)$ que correspondem à:

$$W'(\sigma_a^*) = 0 \quad , \quad W^2(\sigma_{\pm}) = \frac{2\epsilon m^2}{\kappa^2},$$

descrevem as soluções do tipo vácuo com

$$R^{(3)}(\sigma_{vac}) = -6\kappa^2 W^2(\sigma_{vac}) = 6\Lambda_{eff}.$$

²A forma das eqs. de primeira ordem representa uma modificação do Superpotencial [17], introduzido na gravitação em cinco dimensões com termo de Gauss-Bonnet.

Consideremos o exemplo mais simples (e mais interessante) de potencial $V(\sigma)$ do tipo Higgs:

$$V(\sigma) = \frac{\gamma}{4}(\sigma^2 - \sigma_{\pm}^2)^2 - \frac{2\Lambda}{\kappa^2},$$

(quando $\epsilon m^2 > 0$). Este caso corresponde à seguinte escolha de Superpotencial $W(\sigma)$:

$$W(\sigma) = B\sigma \quad , \quad W'(\sigma) = B,$$

onde:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2B^4\kappa^2}{m^2} \left(1 + \frac{B^2}{m^2}\right) \\ m_{\sigma}^2 &= V''(\sigma_{\pm}) = 8\epsilon B^2 \left(1 + \frac{B^2}{m^2}\right), \\ \Lambda &= m^2 \quad , \quad \Lambda_{eff} = -2\epsilon m^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

A forma explícita das soluções interligando os vácuos σ_+ e σ_- ($\sigma_{\pm}^2 = \frac{2\epsilon m^2}{B^2\kappa^2}$) depende das condições de contorno impostas:

- do tipo (1): $\sigma_- \leq \sigma \leq \sigma_+$,
- do tipo (2): (a) $-\infty < \sigma \leq \sigma_-$, (b) $\sigma_+ < \sigma < \infty$.

Somente o primeiro caso corresponde a muros de domínio legítimos:

$$\begin{aligned} \sigma(\eta) &= |\sigma_+| \tanh \left[B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}} (\eta - \eta_0) \right], \\ e^{\varphi(\eta) + \varphi_0} &= \cosh^{-\frac{2\epsilon|m^2|}{B^2}} \left[B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}} (\eta - \eta_0) \right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

As condições de contorno do tipo (2) nos levam à soluções singulares ligando um vácuo

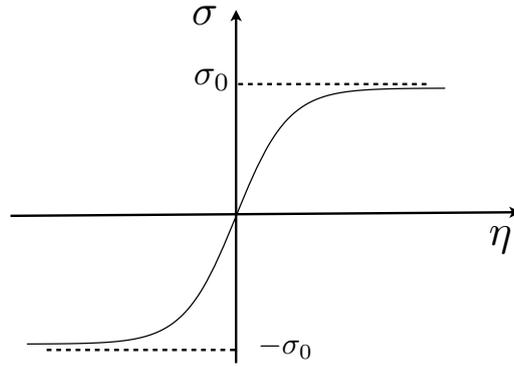


Figura 3.1: Curva de $\sigma(\eta)$ da eq. (3.8).

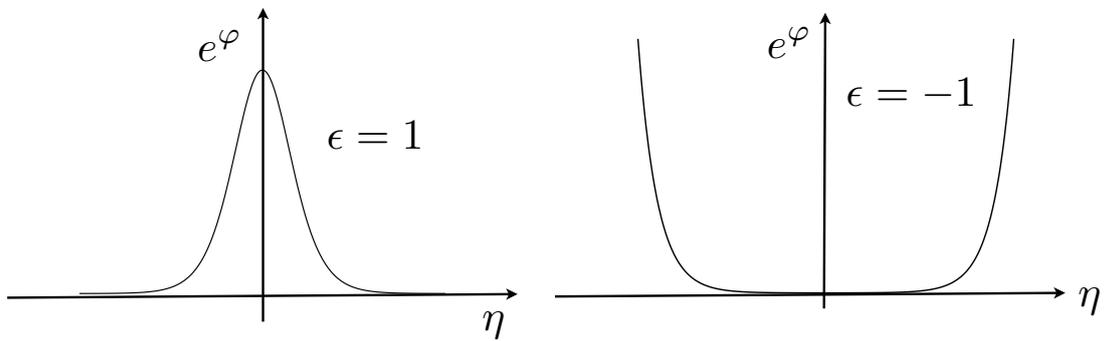


Figura 3.2: Curvas de $e^{\varphi(\eta)}$ da eq. (3.8) para os casos $\epsilon = 1$ e $\epsilon = -1$.

(σ_+ , AdS_3) a uma singularidade $\sigma \rightarrow \infty$, $e^\varphi \rightarrow \infty$ para $\epsilon = -1$:

$$\begin{aligned} \sigma(\eta) &= |\sigma_+| \coth \left[B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}} (\eta - \eta_0) \right], \\ e^{\varphi(\eta) + \varphi_0} &= \left| \sinh \left[B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}} (\eta - \eta_0) \right] \right|^{\frac{2\epsilon|m^2|}{B^2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

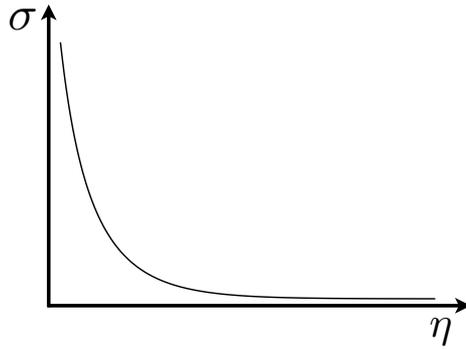


Figura 3.3: Curva de $\sigma(\eta)$ da eq. (3.9). A curva é singular em $\eta = \eta_0 = 0$.

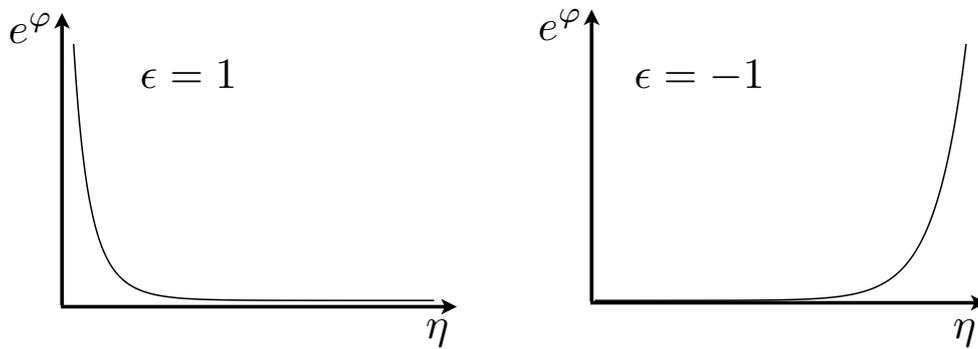


Figura 3.4: Curvas de $e^{\varphi(\eta)}$ da eq. (3.9) para os casos $\epsilon = 1$ e $\epsilon = -1$. No primeiro caso $e^{\varphi(\eta)}$ diverge no ponto $\eta = \eta_0 = 0$ e tende à zero no infinito, já no outro caso, temos exatamente o inverso.

3.2 A estrutura causal dos muros de domínio

Os espaços assintoticamente AdS_3 (3.8) e (3.9) que representam os muros³ estáticos e chatos “dividindo” os dois vácuos AdS_3 $(\sigma_+, \Lambda_{eff})$ e $(\sigma_-, \Lambda_{eff})$ são do tipo conforme-chatos. A prova deste fato é a nova forma da métrica:

$$ds_3^2 = e^{\varphi(y)}(dy^2 + dx^2 - dt^2),$$

³o primeiro (3.8) é não singular; o segundo (3.9) representa uma singularidade quando $\eta \rightarrow \eta_0$.

onde a nova coordenada para o caso (3.8) é definida por:

$$\begin{aligned} y(\eta) &= \pm \int_{\eta_0}^{\eta} e^{-\frac{\varphi(\eta)}{2}} d\eta \\ &= \pm \frac{\tanh\left(B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}}(\eta - \eta_0)\right)}{B^2} \sqrt{\frac{|m^2|}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{\epsilon|m^2|}{2B^2}; \frac{3}{2}; \tanh^2\left(B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}}(\eta - \eta_0)\right)\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

e para $\epsilon = -1$ ($m^2 < 0$) varia entre $y_{min} < y < y_{max}$ com:

$$y_{max} - y_{min} = \Delta y = \sqrt{\frac{\pi|m^2|}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{|m^2|}{2B^2}\right)}{B^2 \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{|m^2|}{2B^2}\right)}, \quad (3.11)$$

onde ${}_2F_1(a, b; c; z)$ e $\Gamma(z)$ são, respectivamente, as funções hipergeométrica e gamma definidas no apêndice C.

A estrutura causal desse espaço é parecida com a de M_3 (espaço de Minkowski) com uma pequena diferença, aqui y está definido na semireta $y \in (y_{min}, y_{max})$. As geodésicas do tipo luz são retas (com inclinação de 45 graus) porém um feixe de luz emitido arbitrariamente próximo de $\eta \rightarrow -\infty$ ($\equiv y_{min}$) viaja até um ponto arbitrariamente próximo da outra borda $\eta \rightarrow \infty$ ($\equiv y_{max}$) em um tempo finito $\Delta t = \Delta y$. No caso $\epsilon = 1$ ($m^2 > 0$) a estrutura causal do muro é do tipo M_3 com

$$y \approx \mp 2 \frac{e^{\mp \sqrt{2|m^2|}\eta}}{\sqrt{2|m^2|}} \xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} \pm\infty,$$

implicando que $y \in \mathbb{R}$.

Para os espaços AdS_3 singulares, (i.e. $R^{(3)}(\eta \rightarrow \eta_0) = -\infty, \sigma(\eta \rightarrow \eta_0) = \infty, e^{\varphi(\eta \rightarrow \eta_0)}(\epsilon = -1) = 0$ para $\eta > \eta_0$) o correspondente fator conforme

$$e^{\varphi(y)} = \sinh^{-\frac{2\epsilon|m^2|}{B^2}} \left(B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}} (y - y_0) \right),$$

é dado explicitamente por:

$$y(\eta) = -\frac{\epsilon \cosh^{\frac{\epsilon|m^2|}{B^2}} \left(B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}} (\eta - \eta_0) \right)}{\sqrt{2|m^2|}} \quad (3.12)$$

$${}_2F_1 \left(\frac{\epsilon|m^2|}{2B^2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon|m^2|}{2B^2}; \frac{1}{2} + \frac{\epsilon|m^2|}{2B^2}; \cosh^{-2} \left(B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}} (\eta - \eta_0) \right) \right).$$

Para o caso “unitário” $\epsilon = -1$ ($m^2 < 0$) temos duas situações completamente diferentes em função dos parâmetros m^2 e B^2 :

- (a) $0 < \frac{|m^2|}{B^2} < 1$: como no caso não-singular ($\epsilon = -1$), a nova coordenada y é restringida ao intervalo $y_{min} < y < y_{max}$ com

$$y_{max} - y_{min} = \Delta y = \sqrt{\frac{\pi}{2|m^2|}} \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{|m^2|}{2B^2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{|m^2|}{2B^2} \right) \quad (3.13)$$

Um feixe de luz emitido em um ponto arbitrariamente próximo da borda $\eta \rightarrow -\infty$ viaja, em um tempo finito $\Delta t = \Delta y$, até um ponto arbitrariamente próximo da singularidade “nua” $\eta \equiv \eta_0$.

- (b) $\frac{|m^2|}{B^2} > 1$: agora y está definido na semireta $-\infty < y < y_{max} < \infty$. Um feixe de luz leva um tempo finito para chegar à borda (do tipo AdS_3 em $\eta \rightarrow -\infty$), porém tal tempo finito é arbitrariamente longo (ao contrário do outro caso).

Capítulo 4

Consequências cosmológicas da gravitação massiva

A extensão massiva da Relatividade Geral oferece meios para a descrição dos efeitos gravitacionais nas pequenas distâncias (de tempo e/ou volume) devido a ausência de fantasmas e renormalizabilidade perturbativa. O maior desafio nas largas escalas é a explicação da atual aceleração do universo. Assumindo que esta nova gravitação massiva, ao menos em três dimensões, é válida para todas as escalas (*i.e.* $l_{planck} \approx G_N, L^2 \approx -\frac{1}{|\Lambda|}, l^2 \approx \frac{1}{8m^2} = 8\lambda$) surge o problema de verificação das consequências cosmológicas desta teoria. Para a realização deste objetivo é necessário a construção explícita das soluções das equações de movimento da gravitação massiva tridimensional não estacionárias do tipo Friedmann - Robertson - Walker (FRW) [3].

$$\begin{aligned}
 ds_3^2 &= -dt^2 + e^{\varphi(t)} \bar{g}_{ik}(x_i) dx^i dx^k, \\
 \sigma &= \sigma(t), \bar{R}^{(2)}(\bar{g}_{ik}) = 2k,
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

ou seja, a métrica \bar{g}_{ij} representa a esfera S^2 no caso de $k > 0$, o plano hiperbólico H^2 para $k < 0$ e o plano euclidiano E^2 se $k = 0$. Uma representação da métrica \bar{g}_{ij} para

qualquer k é:

$$\bar{g}_{ij}dx^i dx^j = dr^2 + \frac{(\sin(\sqrt{k}r))^2}{k} d\theta^2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (4.2)$$

com $r > 0$ se $k \leq 0$ e $0 < r < \pi$ se $k > 0$. Repare que a métrica é bem definida mesmo para $k < 0$ $\left(\frac{(\sin(\sqrt{k}r))^2}{k} \rightarrow \frac{(\sinh(\sqrt{|k|r}))^2}{|k|} \right)$ e $k = 0$ $\left(\frac{(\sin(\sqrt{k}r))^2}{k} \rightarrow r^2 \right)$.

A substituição das eq.s (4.1) nas equações de movimento da gravitação massiva tridimensional para $k = 0$ nos leva ao seguinte sistema de equações de FRW:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= uv, \\ v^2(1 - 4\lambda v^2) &= u^2 + 4\Lambda, \\ \dot{v}(1 - 8\lambda v^2) &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 4\Lambda - 4\lambda v^4), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $u = -\dot{\sigma} \equiv -\frac{d\sigma}{dt}$ e $v = -\dot{\varphi} \equiv -\frac{d\varphi}{dt}$.

4.1 Cosmologia - ingredientes básicos

Acredita-se que as possíveis “histórias” da evolução de um universo homogêneo e isotrópico (i.e. uma “idealização” razoável para os momentos iniciais e finais) são codificados nas condições iniciais para o fator de escala $e^{\varphi(t)}$ (i.e. φ_0 e $\dot{\varphi}_0$) e para os “campos de matéria” $\sigma(t)$ (i.e. σ_0 e $\dot{\sigma}_0$) e na escolha do potencial $V(\sigma)$. Evidentemente os fatores principais que determinam a natureza desta evolução são:

(a) Qual é o tensor energia-momento associado à matéria: $T_{\mu\nu}=?$ i.e. que tipos de campos, fluidos, etc. entram no lado direito das equações de Einstein; condições de energia (forte, fraca, dominante), por exemplo em ($d = 3$) a condição forte exige $p \geq 0$; as equações de estado ligando a pressão p e a densidade ρ . Nosso modelo simplificado

($V(\sigma) = 2\Lambda = \text{const.}$) corresponde à¹:

$$\begin{aligned} 8\pi GT_{\mu\nu}(\sigma, \lambda) &= \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\nabla_\rho\sigma\nabla^\rho\sigma - \Lambda g_{\mu\nu}, \\ \rho(t) &= \frac{1}{32\pi G}(\dot{\sigma}^2 + 4\Lambda), \\ p(t) &= \frac{1}{32\pi G}(\dot{\sigma}^2 - 4\Lambda), \end{aligned} \quad (4.4)$$

ou seja, a equação de estado é de um fluido do tipo “rígido”

$$p(t) = \rho(t) - \frac{\Lambda}{4\pi G}. \quad (4.5)$$

As condições iniciais para $\sigma(t)$, i.e. $\sigma_\pm = \sigma(t \rightarrow \pm\infty)$ formam um contínuo: $\sigma_\pm \in \mathbb{R}$.

(b) Qual é a geometria: $G_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) = ?$ i.e. o lado esquerdo das equações de movimento. A geometria é sempre (pseudo)Riemanniana (por convicção!) porém a forma do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ fica em aberto: a clássica (E-H)

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

ou a estendida

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = G_{\mu\nu}^{(1)} + 64\lambda K_{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

onde:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - \frac{3}{8}R^2) + \nabla^\sigma\nabla_\mu R_{\sigma\nu} + \nabla^\sigma\nabla_\nu R_{\sigma\mu} \\ & - \square R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\rho R_{\sigma\rho} - 2R_{\mu\sigma}R_\nu^\sigma \\ & + \frac{3}{8}(2RR_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu R - \nabla_\nu\nabla_\mu R + 2g_{\mu\nu}\square R). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nosso objetivo agora torna-se buscar respostas para a seguinte pergunta: Dada a matéria com tensor energia-momento (4.4) e a equação de estado (4.5) (a mesma para as duas

¹nosso tensor momento energia representa um fluido homogêneo e isotrópico, i.e. pode ser escrito como: $T_{\mu\nu}(\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}$, com $U^\mu = (1, 0, 0)$.

escolhas $G_{\mu\nu}^{(1)}$ e $G_{\mu\nu}^{(2)}$). Quais são as eventuais mudanças que o termo “massivo”, $64\lambda, K_{\mu\nu}$ provoca nas “histórias” de evolução do universo (especialmente o chato, i.e. $k = 0$) e como a natureza destas mudanças dependem dos valores relativos dos parâmetros “cosmológicos” λ e Λ ?

A resposta exige uma comparação entre as propriedades das soluções cosmológicas do tipo FRW para $\lambda = 0$ e $\lambda \neq 0$ com $\Lambda_{eff}(\lambda) > 0$, não necessariamente $\Lambda > 0$. Ao julgar as vantagens e desvantagens das diferentes escolhas de λ, Λ e das condições iniciais ($\sigma_0, \dot{\sigma}_0$ e $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$) tendo como a base as atuais interpretações das observações astrofísicas e as “crenças modernas”: big-bang, aceleração \cong red-shift, expansão, etc. é necessário calcular e comparar os valores (e o comportamento) das seguintes grandezas físicas:

(a) Curvatura $R^{(3)}(t)$ - presença, ausência, número e tipo de singularidades:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{(3)}(t, \lambda, \Lambda|u_0, v_0) = 2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2}v^2 - \frac{2u^2}{1 - 8\lambda v^2}. \quad (4.9)$$

(b) Parâmetro de desaceleração (ver Apêndice B):

$$q^{(3)}(t, \lambda, \Lambda|u_0, v_0) = -\frac{(\dot{\varphi}^2 + 2\ddot{\varphi})}{\dot{\varphi}^2} = \frac{v^2 - 8\Lambda}{v^2(1 - 8\lambda v^2)}. \quad (4.10)$$

De acordo com a própria definição:

$$q^{(3)}(t) = -\frac{e^{\frac{\varphi}{2}}(\partial_t^2 e^{\frac{\varphi}{2}})}{(\partial_t e^{\frac{\varphi}{2}})^2}, \quad (4.11)$$

o sinal de $q^{(3)}(t)$ é oposto ao sinal da aceleração ($\partial_t^2 e^{\frac{\varphi}{2}}$) do fator de escala $e^{\frac{\varphi}{2}}$ do universo bidimensional. No caso convencional e para nossa escolha de matéria temos $\lambda = \Lambda = 0$ o que nos dá:

$$q^{(3)}(t, \lambda = 0) = \frac{32\pi Gp(t)}{\dot{\varphi}^2}, \quad (4.12)$$

logo a energia positiva é equivalente a pressão positiva $p(t) > 0$, que corresponde à época de desaceleração ($q^{(3)} > 0$). Portanto o “universo” em aceleração (neste modelo $\lambda = 0$ e $T_{\mu\nu}$ dado pela eq. (4.4)) exige a quebra da condição forte de energia e pressão negativa.

No caso “massivo” (i.e. $\lambda \neq 0$) devido a mudança na forma de $q^{(3)}$:

$$q^{(3)}(t, \lambda, \Lambda) = \frac{32\pi G p(t) + 4\lambda v^4}{v^2(1 - 8\lambda v^2)}. \quad (4.13)$$

Mesmo para $p(t) > 0$, são possíveis ambos os sinais, i.e. as épocas de aceleração ou desaceleração.

4.2 As “histórias” do universo na nova gravitação massiva

As maiores surpresas são a existência de modelos cosmológicos consistentes com aceleração, big-bang e expansão para $\Lambda = 0$ e $\Lambda < 0$, impossível para $\lambda = 0$, devido à constante cosmológica efetiva Λ_{eff} positiva em ambos os casos.

(A) Caso $\Lambda = 0$, $\lambda > 0$

As soluções no plano (u, v) são apresentadas por oito curvas mostradas na figura 4.1 (porém somente quatro “histórias” diferentes!). Os pontos fixos são:

$$v^* = \pm \frac{1}{2\sqrt{2\lambda}}, \quad u_{max} = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}}, \quad (4.14)$$

que representam singularidades iniciais “-” ou finais “+” do tipo “big-bang” ou “big-crunch”. As soluções \bar{A}_0 e A^- descrevem universos em expansão ($v < 0$) do momento inicial “big-bang” $(u_{max}, -v^*)$ com:

$$q(\bar{A}_0) = \frac{1}{1 - 8\lambda v^2} < 0, \quad (4.15)$$

correspondendo a um universo em aceleração que termina em um espaço chato $R^{(3)}(u = 0, v = 0) = 0$ e com distribuição de matéria uniforme $\sigma = \sigma_+ = const..$ No caso A^-

temos:

$$q(A^-) > 0, \quad (4.16)$$

que descreve um universo em desaceleração rumo ao espaço de de Sitter com constante cosmológica $\Lambda_{eff} = \frac{1}{32\lambda}$. As histórias A^+ e A_0 são ambas de contração ($v > 0$) rumo ao “big-crunch” final sendo

$$q(A_0) < 0, \quad (4.17)$$

descrevendo um universo em aceleração e

$$q(A^+) > 0, \quad (4.18)$$

para um universo em desaceleração, que tinha nascido como dS_3 com $\Lambda_{eff} = \frac{1}{32\lambda}$.

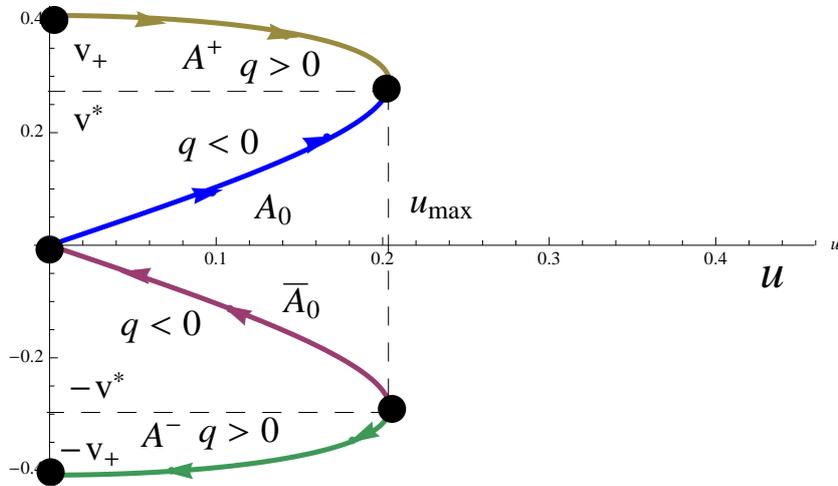


Figura 4.1: Caso $\Lambda = 0$, $\lambda > 0$

(B) Caso $\Lambda > 0$, $\lambda > 0$

Este caso oferece “histórias” mais realistas. Como sempre os pontos laterais ($u_{max}, \pm v^*$) representam as singularidades. Os pontos $(0, \pm v^\pm)$ representam estados finais ($v < 0$) ou

iniciais ($v > 0$) do universo de Sitter com constantes cosmológicas efetivas

$$\Lambda_{eff}^{\pm} = \frac{1}{32\lambda}(1 \pm \sqrt{1 - 64\lambda\Lambda}), \quad 64\lambda\Lambda < 1. \quad (4.19)$$

Para o universo C^+ que começa sua “história” (ver figura 4.2) no “big-bang” ($u_{max}, -v^*$) com :

$$q(C^+) = \frac{v^2 - 8\Lambda}{v^2(1 - 8\lambda v^2)}, \quad (4.20)$$

no intervalo

$$8\Lambda < v^2 < \frac{1}{8\lambda}, \quad (4.21)$$

temos

$$q(C^+) > 0, \quad (4.22)$$

i.e. o parâmetro de desaceleração chegando ao ponto T (ver figura 4.2) onde

$$v^2 = 8\Lambda, \quad q(C^+, v^2 = 8\Lambda) = 0, \quad (4.23)$$

troca de sinal

$$q(C^+, v^2 < 8\Lambda) < 0, \quad (4.24)$$

entrando na fase de aceleração até terminar sua “história” como um universo de Sitter com $\Lambda_{eff} = \Lambda_{eff}^-$ no final dos tempos. Por outro lado, o universo C^- apresenta uma “história” simples de aceleração eterna expandindo-se até um outro universo de Sitter com $\Lambda_{eff} = \Lambda_{eff}^+ > \Lambda_{eff}^-$. As “histórias” B^{\pm} são semelhantes as de C^{\pm} , porém descrevem universos em contração ao final comum (e “quente”) do “big-crunch”.

(C) Caso $\Lambda < 0, \lambda > 0$

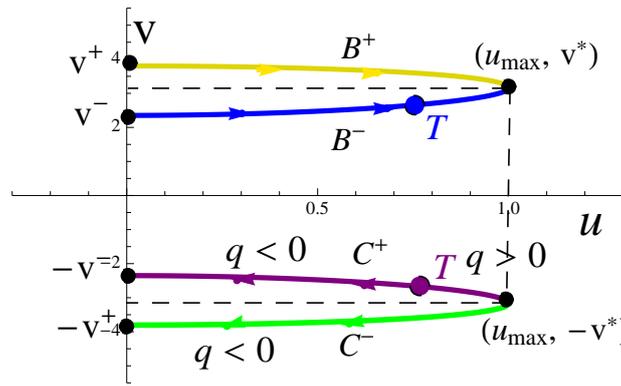


Figura 4.2: Caso $\Lambda > 0$, $\lambda > 0$

Mesmo com constante cosmológica negativa ($\Lambda < 0$) a “história” do tipo A na figura 4.4 representa um universo inicialmente de Sitter

$$\Lambda_{eff}^{A,C} = \frac{1}{32\lambda} \left(1 + \sqrt{1 + 64|\Lambda|\lambda} \right),$$

em contração rumo ao “big-crunch”. A “história” do tipo C (ver figura 4.4) é de um universo nascido do “big-bang” em expansão e acelerando rumo a um destino final de espaço de Sitter com matéria uniformemente diluída. A “história” B é de um universo que nasce no mesmo “big-bang” ($u_{max}, -v^*$) sempre em desaceleração rumo ao “big-crunch”, porém até o ponto ($u_{min}, 0$) está em expansão, mudando para contração na segunda época de sua existência.

Todas as outras “histórias” do universo para $\lambda < 0$ (e $\Lambda < 0$ ou > 0) têm muitas das características do caso convencional $\lambda = 0$.

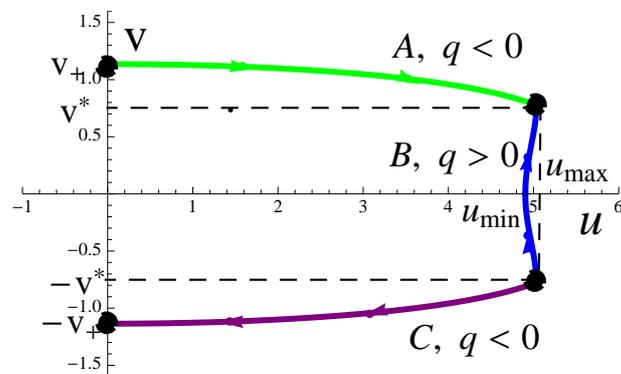


Figura 4.3: Caso $\Lambda < 0$, $\lambda > 0$

4.3 Solução “grande ricochete” da cosmologia massiva tridimensional

Esta seção é dedicada ao estudo das consequências cosmológicas para a evolução de um universo tridimensional, com assinatura $(-++)$, homogêneo, chato ($k = 0$) e isotrópico, no modelo NMG (3.1) com matéria escalar do tipo Higgs, i.e.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m(\sigma, g_{\mu\nu}|\gamma, b) &= \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - V(\sigma) \right), \\ V(\sigma) &= \frac{\gamma}{4} \left(\sigma^2 - \frac{m_\sigma^2}{2\gamma} \right)^2 - 2\Lambda.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Os parâmetros γ , m_σ e Λ , i.e. a constante de acoplamento γ , a massa de “Higgs” m_σ e a energia do vácuo Λ podem depender da massa do graviton $\lambda_0 = 1/64m^2$. Nosso problema é a construção das soluções analíticas das equações da cosmologia massiva tridimensional [18]:

$$\begin{aligned}\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\dot{\varphi} + V'(\sigma) &= 0, \\ \ddot{\varphi}(1 + 8\epsilon\lambda_0\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(1 + 4\epsilon\lambda_0\dot{\varphi}^2) &= -\epsilon\left(\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 - V(\sigma)\right), \\ \epsilon(\dot{\sigma}^2 + 2V(\sigma)) - \dot{\varphi}^2(1 + 4\epsilon\lambda_0\dot{\varphi}^2) &= 0.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Note que a constante cosmológica Λ agora está “escondido” no potencial, i.e. $V(\sigma_\pm^2 = \frac{m_\sigma^2}{2\gamma}) = -2\Lambda$, no caso $\epsilon\lambda_0 < 0$. Vale lembrar que uma característica importante deste modelo é que as equações (4.26) são de segunda ordem apesar de que a ação (3.1) incluir derivadas de ordem quatro em $g_{\mu\nu}$. Por este motivo as soluções cosmológicas do tipo FRW não sofrem de problemas de “causalidade”, ou seja, elas têm as condições iniciais do problema de Cauchy bem definidas para todos os valores dos parâmetros ϵ , λ_0 , γ e m_σ^2 . Porém a construção explícita das soluções do sistema (4.26) é bastante difícil, como também o problema da dependência das propriedades destas soluções com as condições iniciais $(\sigma_0, \dot{\sigma}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$.

O método do Superpotencial para a gravitação massiva introduzido no cap. 3 oferece ferramentas simples para construção de soluções não-perturbativas das equações (4.26). De novo, como no caso dos muros de domínio considerados no cap. 3, é necessário a introdução de uma função $W(\sigma)$ do campo escalar σ de modo que:

$$\begin{aligned} V(\sigma) &= 2\epsilon W^2(1 + 16\epsilon\lambda_0 W^2) - 2(W')^2(1 + 32\epsilon\lambda_0 W^2)^2, \\ \dot{\varphi} &= -2\epsilon W(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= 2W'(\sigma)(1 + 32\epsilon\lambda_0 W^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

É fácil verificar, por inspeção direta, que as soluções das equações (4.27) de primeira ordem fornecem soluções para o sistema original (4.26) das equações de segunda ordem. Em seguida vamos estudar as soluções para o caso particular de um Superpotencial linear: $W(\sigma) = B\sigma$. Ele descreve o modelo NMG (3.1) com potencial de Higgs correspondente aos parâmetros específicos dados por:

$$\begin{aligned} \gamma &= 128\lambda_0 B^4(1 - 64\lambda_0 B^2), \\ m_\sigma^2 &= -8\epsilon B^2(1 - 64\lambda_0 B^2), \\ \sigma_\pm^2 &= -\frac{1}{32\epsilon\lambda_0 B^2}, \quad \Lambda = \frac{1}{64\lambda_0} = m^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dependendo dos sinais de $\epsilon\lambda_0$ e $B \gtrless m^2$ o potencial $V(\sigma)$ representa o potencial de Higgs (normal e invertido) quando $\epsilon\lambda_0 < 0$. No caso $\epsilon\lambda_0 > 0$ o correspondente potencial é do tipo σ^4 (com um mínimo somente). É necessário salientar que para esta escolha particular de $W(\sigma)$ os parâmetros γ, m_σ^2 e m^2 não são independentes:

$$\gamma_\pm = -\epsilon \frac{m_\sigma^2}{8} \left(1 \pm \sqrt{1 + \epsilon \frac{m_\sigma^2}{2m^2}} \right) \equiv -\epsilon \frac{m_\sigma^2 B_\pm^2}{4m^2}. \quad (4.29)$$

Vamos estudar primeiro o caso $\epsilon\lambda_0 < 0$ que descreve:

(a) $\epsilon = -1, \lambda_0 > 0$: modelo NMG(1) com potencial de Higgs $V_-(\sigma)$,

(b) $\epsilon = 1, \lambda_0 < 0$: modelo NMG(1) com potencial de Higgs invertido $V_+(\sigma)$.

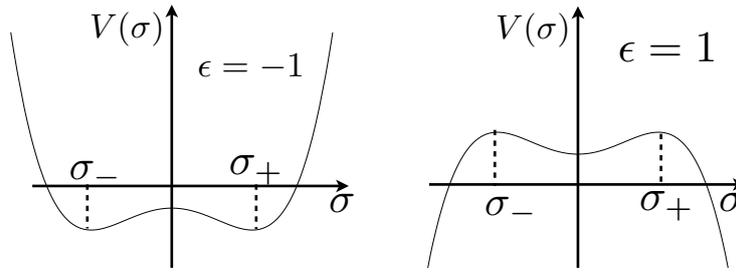


Figura 4.4: Curvas dos potenciais para os casos (a) e (b), respectivamente.

Em ambos os casos temos $\sigma_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m\sigma^2}{2\gamma}}$ representando os dois mínimos (para $\epsilon = -1$) ou os dois máximos (para $\epsilon = 1$) dos potenciais $V_{\pm}(\sigma)$. Para os valores σ_{\pm} (ou seja os vácuos do modelo NMG) do campo $\sigma(t)$ o modelo NMG representa uma gravitação com constante cosmológica $\Lambda = m^2$: temos $\Lambda < 0$ para $\lambda_0 < 0$ e $\Lambda > 0$ para $\lambda_0 > 0$. Uma característica importante deste modelo é a constante cosmológica efetiva Λ_{eff} , definida pelos valores da curvatura tridimensional $R^{(3)}$ correspondentes às soluções do tipo vácuo, i.e. $(g_{\mu\nu}^{\pm vac}, \sigma_{\pm})$:

$$\begin{aligned} R^{(3)}(g_{\mu\nu}^{vac}, \sigma_{\pm}) &= 2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2, \\ &\equiv -8\epsilon(W')^2(1 + 32\lambda_0\epsilon W^2) + 6W^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Mais precisamente temos que

$$R^{(3)}(g_{\mu\nu}^{vac}, \sigma_{\pm}) = -\frac{3}{16\epsilon\lambda_0} \equiv 6\Lambda_{eff}^{\pm}.$$

Em ambos os casos com $\epsilon\lambda_0 < 0$ a constante cosmológica efetiva $\Lambda_{eff} = 2|m^2|$ é positiva e conseqüentemente o fator de escala $(a^2(t) = e^{\varphi(t)})$ $a_{vac}^2(t) = e^{2\sqrt{\Lambda_{eff}t}}$ representa um espaço de Sitter (dS_3).

Temos que considerar dois tipos de condições iniciais para $\sigma(t)$ e $a(t)$:

- tipo (1): $\sigma^2(t) \leq \sigma_{\pm}^2$

$$\sigma(t \rightarrow \pm\infty) = \sigma_{\pm}, \quad \sigma_- \leq \sigma(t) \leq \sigma_+,$$

$$a_{vac}^{\pm} = a_{dS_3}(t) = e^{\sqrt{\Lambda_{eff}}t}.$$

- tipo (2): $\sigma^2(t) \geq \sigma_{\pm}^2$

$$\sigma_- \leq \sigma(t) \leq \sigma(t = t_0) = \infty,$$

$$a_{vac}^- = a_{dS_3} \text{ mas } a(t_0) = 0 \text{ e } R^{(3)}(t = t_0) = \infty,$$

$$\sigma_+ \leq \sigma(t) \leq \sigma(t = t_0) = \infty.$$

No primeiro caso, as condições do tipo (1), as soluções não singulares que interpolam entre dois vácuos σ_+ e σ_- têm as seguintes formas

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}(t|\epsilon) &= \sqrt{\frac{m_{\sigma}^2}{2\gamma_{\pm}}} \tanh(b_{\pm}(t - t_0)), \\ a_{\pm}^2(t|\epsilon) &= e^{\varphi_{\pm}(t|\epsilon)} = \left(\cosh b_{\pm}(t - t_0) \right)^{\delta_{\pm}}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$\begin{aligned} b_{\pm} &= \frac{m^2}{\sqrt{2|m^2|}} \left(1 \pm \sqrt{1 + \epsilon \frac{m_{\sigma}^2}{2m^2}} \right), \\ \delta_{\pm} &= -\epsilon \frac{m_{\sigma}^2}{2\gamma_{\pm}} = -2\epsilon \frac{|m^2|}{B_{\pm}^2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

As curvas das eqs. (4.31) são as mesmas apresentadas nas figuras 3.1 e 3.2.

A forma explícita da curvatura

$$R_{\pm}^{(3)}(t) = \frac{8B_{\pm}^2}{\cosh^2 b_{\pm}(t - t_0)} \left(-\epsilon + \frac{3}{4}\sigma_{\pm}^2 \sinh^2 b_{\pm}(t - t_0) \right), \quad (4.33)$$

sugere que esta solução é do tipo ricochete, que são soluções que descrevem universos que começam e terminam de formas semelhantes em torno de um mínimo ou máximo do fator de escala, ela descreve um espaço assintoticamente dS_3 , ou seja:

$$R^{(3)}(t \rightarrow \pm\infty) = 12|m^2| = 6\Lambda_{eff}^{\pm} = \frac{6}{L_{gr}^2}, \quad L_{gr}^2 \gg l_{pl}^2. \quad (4.34)$$

A característica mais importante desta solução é dada pela aceleração

$$q_{\pm}(t) \equiv -1 - 2 \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = -1 - \frac{s_{\pm}(\epsilon)}{\sinh^2(b_{\pm}(t - t_0))}, \quad (4.35)$$

onde s_{\pm} são números reais

$$\begin{aligned} s_{\pm}(\epsilon = -1) &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{m_{\sigma}^2}{2m^2}} \right) = \frac{B_{\pm}^2}{m^2}, \\ s_{-}(\epsilon = 1) &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{m_{\sigma}^2}{2m^2}} \right) = -\frac{B_{-}^2}{|m^2|}. \end{aligned}$$

Repare que as soluções do tipo ricochete ($\epsilon = -1, \lambda_0 > 0$ e $\epsilon = 1, \lambda_0 < 0$) são inversamente proporcionais ($a^2(\epsilon = -1) = a^{-2}(\epsilon = 1)$), logo descrevem evoluções do universo tridimensional bastante diferentes. A origem dessa diferença está na forma de $V_{\pm}(\sigma)$: com vácuos estáveis para $\epsilon = -1$ e com máximos não estáveis para $\epsilon = 1$.

Consideremos primeiro o caso $\epsilon = -1, \lambda_0 > 0$. Devido ao fato que os expoentes $s_{\pm}(\epsilon = -1)$ são sempre positivos, a desaceleração $q_{\pm}(t|\epsilon)$ é sempre negativa para todos os tempos, i.e. $t \in (-\infty, \infty)$. Logo este caso descreve um universo eternamente acelerado. Ele começa sua evolução no vácuo ($\sigma_{-}, dS_3(\Lambda_{eff})$) que representa o mínimo esquerdo do potencial e vive um período de expansão acelerada ($\dot{\varphi} > 0$ para $B < 0$) para todo $t < t_0$. No momento $t = t_0$ este universo entra em contração ($\dot{\varphi} < 0$) rumo ao vácuo “final” ($\sigma_{+}, dS_3(\Lambda_{eff})$).

O segundo caso ($\epsilon = 1, \lambda_0 < 0$) corresponde ao potencial de Higgs invertido. A principal diferença é o valor negativo $s_{-}(\epsilon = 1) = -\frac{B_{-}^2}{|m^2|}$ que causa duas mudanças no sinal da desaceleração $q_{-}(t|\epsilon = 1)$. Logo neste caso temos duas épocas de aceleração (a “inicial” e a “final”) divididas por um período finito de desaceleração. Estudando as propriedades do fator de escala (e suas derivadas \dot{a} e \ddot{a}) podemos reconstruir a história completa deste universo. No passado remoto ($t \rightarrow -\infty$) quando $\sigma(t) \rightarrow \sigma_{-}$ e $a_{-}^2 \rightarrow e^{2\sqrt{2|m^2|}t}$, o universo encontra-se no vácuo instável (σ_{-}, dS_3) representando o máximo de $V_{+}(\sigma)$. Em seguida ele passa um período (semi-infinito) de aceleração e contração com curvatura $R^{(3)}(t)$ decrescente de $R^{(3)}(\sigma_{-}) = 12|m^2|$ até $R^{(3)}(t_1) = 0$.

No momento específico $t_1 < 0$,

$$t_1 = -\frac{1}{b_-} \ln \left(\sqrt{\frac{2|s_-|}{3}} + \sqrt{\frac{2|s_-|}{3} + 1} \right),$$

a curvatura troca de sinal, entrando numa época de curvatura negativa de duração finita $T_- = 2|t_1|$ até o momento $\bar{t}_1 = -t_1 > 0$ quando troca de sinal de novo. Sobre as propriedades da aceleração observe que para tempos $|t_1| > |t_a|$:

$$|t_a| = \frac{1}{b_-} \ln \left(\sqrt{|s_-|} + \sqrt{|s_-| + 1} \right),$$

o universo entra numa época de desaceleração de duração finita $T_a = 2|t_a|$. A segunda e última época de aceleração é agora de expansão, começa no momento $t = |t_a|$ rumo a eternidade futura, i.e. o novo vácuo (σ_+, dS_3) . Uma descrição equivalente dessa evolução do universo é baseada na análise da equação de estado $p_{eff} = p_{eff}(\rho_{eff})$ onde a pressão efetiva p_{eff} e a densidade de energia ρ_{eff} são definidos pela equação:

$$diag(T^\mu{}_\nu(\sigma, h_{\mu\nu})) = (-\rho_{eff}, p_{eff}, p_{eff}),$$

onde

$$\frac{1}{2}\kappa^2 T^\mu{}_\nu(\sigma, h_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R h_{\mu\nu} + \Lambda h_{\mu\nu}.$$

Partindo das equações (4.26) e (4.27) chegamos à seguinte forma da equação de estado:

$$p_{eff}(t) = 8\epsilon m^2 s_\pm + (s_\pm - 1)\rho_{eff}(t), \quad \rho_{eff} > 0. \quad (4.36)$$

No caso $\epsilon = -1, \lambda_0 > 0$, temos

$$\begin{aligned} p_{eff}(t) &= -8B_\pm^2 - \rho_{eff}(t) \left(1 - \frac{B_\pm^2}{m^2} \right), \\ B_\pm^2 &\leq m^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

ou seja, p_{eff} é sempre negativa e conseqüentemente o universo é eternamente acelerado.

No caso $\epsilon = 1, \lambda_0 < 0$ a pressão muda de sinal duas vezes, nos momentos $\pm t_a$, devido à

existência de um valor crítico da densidade de energia

$$\rho_{eff}^{cr}(\epsilon = 1, \lambda_0 < 0) = \frac{8B_-^2|m^2|}{|m^2| + B_-^2}, \quad (4.38)$$

onde $p_{eff} = 0$. Este fato nos leva a dois períodos de pressão negativa (aceleração) e um de pressão positiva (desaceleração).

Um problema interessante na cosmologia é o da escolha das condições iniciais. Mais precisamente, como as particularidades da evolução do universo dependem (ou não) das condições iniciais (ou finais). O modelo NMG providencia um exemplo de dois tipos de condições iniciais distintas (denominadas do tipo (1) e do tipo (2)) que levam à diferentes histórias do universo: as soluções não singulares do tipo “grande ricochete” discutidas acima, como também soluções singulares do tipo “big-bang” no caso $\sigma^2 \geq (\sigma_{\pm})^2$ para os mesmos valores dos parâmetros $(\kappa^2, \lambda_0, m_{\sigma}^2)$ do novo modelo:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(t|\epsilon) &= \sqrt{\frac{m_{\sigma}^2}{2\gamma_{\pm}}} \coth(b_{\pm}(t - t_0)), \\ \tilde{a}_{\pm}^2 &= |\sinh b_{\pm}(t - t_0)|^{\delta_{\pm}}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Estas soluções apresentam singularidades “nuas” no instante $t = t_0$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(t \rightarrow t_0) &\rightarrow \infty, \quad \dot{\tilde{\varphi}}(t \rightarrow t_0) \rightarrow \infty, \\ \tilde{R}^{(3)}(t \rightarrow t_0) &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.40)$$

e são definidas em dois intervalos de tempo desconexos. Para $t \in (-\infty, t_0)$ esta solução descreve um universo acelerado rumo ao “big-crunch”. No caso $\epsilon = -1$ (correspondente ao potencial $V_-(\sigma)$) o período inicial de aceleração termina no momento $t = t_a$, quando $\tilde{q}(t)$ muda de sinal e inicia-se uma nova época de desaceleração. As soluções (4.39) consideradas no intervalo $t_0 < t < \infty$ representam um universo acelerado (e em expansão) iniciado no momento $t = t_0$ da singularidade inicial (“big-bang”) rumo ao futuro remoto $t \rightarrow \infty$ que correspondente ao vácuo (σ_+, dS_3) , no caso $\epsilon = -1$. Novamente o caso $\epsilon = 1$ apresenta períodos de aceleração e desaceleração.

Por último consideremos os modelos correspondentes à condição $\epsilon\lambda_0 > 0$, ou seja, com potencial

$$V_{\pm}^{cyc}(\sigma) = \pm \frac{|\gamma|}{4} \left(\sigma^2 + \frac{2|m^2|}{B^2} \right)^2 - 2\Lambda. \quad (4.41)$$

As correspondentes soluções são periódicas ($t_- < t < t_+$):

$$\begin{aligned} \sigma_{cyc}(t) &= \frac{1}{4\sqrt{2|\lambda_0|}} \tan(8B^2\sqrt{2|\lambda_0|}t), \\ a_{cyc}^2(t) &= \left| \cos(8B^2\sqrt{2|\lambda_0|}t) \right|^{\frac{2\epsilon|m^2|}{B^2}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Elas apresentam singularidades $R^{(3)}(t_{\pm}) \rightarrow \infty, \sigma_{cyc}(t_{\pm}) \rightarrow \infty$ nos instantes $(t_{\pm}) = \pm \frac{\pi|m|}{B^2\sqrt{2}}$. Estas soluções podem ser usadas para descrição de uma evolução cíclica do universo ou, equivalentemente, um modelo de universo de duração finita $T_u = \frac{\pi|m|}{\sqrt{2}B^2}$ começando no “big-bang” e terminando no “big-crunch”.

Capítulo 5

Conclusões

As modificações na ação (e conseqüentemente nas equações) da Relatividade Geral de Einstein têm que respeitar o princípio de equivalência, ser baseadas nas geometrias (pseudo) Riemannianas e no limite de força fraca (Newtoniano) reproduzir uma força gravitacional atrativa. Os modelos de gravitação estendida do tipo Lovelock [1], ou seja incluindo novos invariantes do tipo R^{M_1} , $(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^{M_2}$ e $(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma})^{M_3}$ na ação surgem naturalmente nas teorias de unificação de todas as interações conhecidas como Supercordas, como também nos modelos gravitacionais, cujos objetivos são a descrição da energia e matéria “escuras” e o segundo período de aceleração e expansão do universo acontecendo na época contemporânea da evolução do universo. Esses termos quadráticos, cúbicos, etc., nos invariantes de curvatura são também indispensáveis na quantização perturbativa da gravitação de Einstein, pois agem como “contratermos” e sua adição à Lagrangiana gravitacional elimina as divergências ultravioletas (de curtas distâncias) que são comuns em cálculos de energias de vácuo e amplitudes de espalhamento das “partícula de spin-2” - os gravitons. Os mesmos termos são necessários para a resolução das divergências que surgem nas teorias quânticas dos campos (escalar com potencial σ^4 por exemplo) nos espaços clássicos (de fundo) curvos. Porém a inclusão destes termos na ação cria ao menos dois novos problemas (ausentes na gravitação de Einstein):

- (a) de causalidade devido às altas (maiores que a segunda) derivadas da métrica,
- (b) de unitariedade, causados pelo aparecimento de normas negativas nas teorias quânticas correspondentes.

Nas teorias gravitacionais com dimensões $d \geq 4$ não são conhecidas escolhas particulares de combinações de termos quadráticos (ou cúbicos, etc.) que levam a modelos consistentes livres dos problemas mencionados acima. De outra forma, a gravitação de Einstein em duas $(1 + 1)$ ou três $(2 + 1)$ dimensões não descreve forças gravitacionais, devido ao fato de que o excesso de simetrias (difeomorfismos) não deixa graus de liberdade físicos. Os recentes estudos do modelo tridimensional de Bergshoeff, Hohm e Townsend [5], [6], dado pela ação (1.3) (veja também a eq.(3.1)) com escolha específica dos coeficientes relativos dos termos quadráticos mostraram que este modelo é livre dos defeitos do tipo (a) e (b) acima. Ou seja, ele é um modelo consistente com dois graus de liberdade físicos (as “polarizações” de $s = \pm 2$ do graviton), causal e unitário (sem problemas com fantasmas). Foram achadas soluções do tipo vácuo com significado físico interessante como buracos negros legítimos, ondas gravitacionais entre outras. Para a escolha do sinal errado $\epsilon = -1$ do termo ϵR e certas condições sobre os parâmetros λ_0 e Λ foi mostrado que o modelo descreve no limite Newtoniano uma força gravitacional atrativa com potencial um pouco mais complicado do que o de Newton na gravitação em quatro dimensões $(3 + 1)$ (veja Cap. 1 e 2).

Esta dissertação contém os resultados de um estudo das soluções do tipo muros de domínio e cosmológicas do tipo FRW do modelo da gravitação massiva tridimensional com matéria escalar. Além das construções explícitas das soluções, o principal objetivo das investigações foi o estudo das propriedades geométricas, e no caso da cosmologia o estudo das propriedades do parâmetro de desaceleração em busca dos valores particulares dos parâmetros $(\lambda_0, \Lambda, \gamma, |m_\sigma|^2)$ que reproduzem a evolução (“histórias”) do universo com ou sem singularidades iniciais e finais, com dois ou mais períodos de aceleração e com duração (tempo de vida \equiv existência) finita ou infinita. Os principais resultados deste estudo podem ser resumidos da seguinte forma:

(1) O estudo das soluções da gravitação massiva tridimensional com matéria representada por um campo escalar livre e sem massa.

(2) O desenvolvimento do método chamado “Superpotencial” introduzindo um sistema de equações de primeira ordem, cujas soluções são soluções das equações (de segunda ordem) da gravitação massiva.

(3) A aplicação desse novo método para a gravitação massiva com potencial do tipo Higgs com dois mínimos degenerados. O estudo das consequências cosmológicas das soluções do tipo “grande ricochete” específicas para esse modelo (ausentes na gravitação de Einstein, i.e. para $\lambda_0 = 0$).

Os resultados referentes às novas soluções foram recentemente publicados no jornal *Phys. Lett. B* (veja referência [18]).

A escolha do potencial estudado (σ^4 - do tipo Higgs) foi motivada por sua simplicidade e importância física conceitual. Porém o método do Superpotencial desenvolvido nesta dissertação permite a construção analítica de soluções interessantes do tipo muros de domínio ou soluções cosmológicas para uma variedade de diferentes potenciais como, por exemplo, os do tipo periódicos, ou seja, $W(\sigma) = A + B \cos \sigma$ que descreve o potencial “real” $V(\sigma)$ do tipo sine-Gordon duplo.

É importante mencionar que os métodos desenvolvidos para construção de soluções da gravitação massiva tridimensional no caso dos muros de domínio chatos e soluções do tipo FRW (homogêneos, isotrópicos e $k = 0$, i.e. espaços chatos) permitem uma simples extensão para dimensões arbitrárias $d > 3$. Porém, como já foi mencionado, a consistência “quântica” é um privilégio do modelo $d = 3$. Mesmo assim para aplicações “clássicas” como, por exemplo, a explicação dos períodos de aceleração do universo, estes modelos em quatro ou mais dimensões apresentam problemas físicos atuais e bem definidos cuja investigação promete resultados interessantes.

Apêndice A

Dedução das equações de movimento da gravitação massiva tridimensional

Mostraremos agora o procedimento de dedução das equações de movimento da gravitação massiva tridimensional. Dada a ação geral¹:

$$S = \frac{1}{16\pi G_d} \int d^d x \sqrt{-g} [R + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + 16\pi G_d \mathcal{L}_m], \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma - V(\sigma)$$

no caso $d = 3$, como já foi dito anteriormente

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - R^2,$$

então

$$c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = (c_1 - c_3) R^2 + (c_2 + 4c_3) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu},$$

fazendo $a = (c_1 - c_3)$ e $b = (c_2 + 4c_3)$, a ação torna-se:

$$S = \frac{1}{16\pi G_3} \int d^3 x \sqrt{-g} [R + a R^2 + b R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + 16\pi G_3 \mathcal{L}_m]$$

¹Nesta dissertação usamos a seguinte convenção para o tensor de Riemann: $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \dots$

Fazendo a variação da ação com relação à métrica temos que:

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{16\pi G_3} \int d^3x [\delta\sqrt{-g}[R + aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 16\pi G_3\mathcal{L}_m] \\ + \sqrt{-g}[\delta R + 2aR\delta R + b\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + 16\pi G_3\delta\mathcal{L}_m]]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Fazendo uso das variações conhecidas [3]:

- (1) $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$;
- (2) $\delta R = \delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$;
- (3) $\delta R_{\mu\kappa} = \nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda - \nabla_\kappa\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$, ou em termos da métrica

$$\delta R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}(\nabla_\kappa\nabla_\lambda\delta g_{\sigma\mu} + \nabla_\mu\nabla_\nu g_{\sigma\kappa} - \nabla_\sigma\nabla_\lambda\delta g_{\mu\kappa} - \nabla_\mu\nabla_\kappa\delta g_{\lambda\sigma}),$$

- (4) $\delta g^{\lambda\sigma} = -g^{\lambda\kappa}g^{\sigma\rho}\delta g_{\kappa\rho}$.

E do teorema de Gauss:

$$\int \partial_\mu A^\mu d\Omega = \oint A^\mu dS_\mu.$$

Analisemos o termo em a :

$$\begin{aligned} \int 2a\sqrt{-g}R\delta R d^3x &= \int 2a\sqrt{-g}RR_{\mu\kappa}\delta g^{\mu\kappa} d^3x \\ &+ \int 2a\sqrt{-g}Rg^{\mu\kappa}g^{\lambda\sigma}(\nabla_\kappa\nabla_\lambda\delta g_{\sigma\mu} + \\ &+ \nabla_\mu\nabla_\nu g_{\sigma\kappa} - \nabla_\sigma\nabla_\lambda\delta g_{\mu\kappa} - \nabla_\mu\nabla_\kappa\delta g_{\lambda\sigma})d^3x, \end{aligned}$$

desenvolvendo o segundo termo do lado direito da igualdade acima e sabendo que as variações da métrica são nulas nas fronteiras de integração, obtemos

$$\int 2a\sqrt{-g}R\delta R d^3x = \int 2a\sqrt{-g}RR_{\mu\kappa}\delta g^{\mu\kappa} d^3x + \int 2a\sqrt{-g}(RR_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu R + g_{\mu\nu}\square R)\delta g^{\mu\nu} d^3x.$$

Analisemos o termo em b :

$$\int b\sqrt{-g}\delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta})d^3x = \int 2b\sqrt{-g}(R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu}{}^{\lambda}R_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\nu})d^3x, \quad (\text{A.3})$$

desenvolvendo o primeiro termo da integral do lado direito da igualdade, com os mesmos argumentos utilizados para o termo em a , obtemos

$$\int b\sqrt{-g}\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})d^3x = \int b\sqrt{-g}(2R_{\mu}{}^{\lambda}R_{\nu\lambda} + \square R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\nabla_{\sigma}R^{\lambda\sigma} - 2\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}R_{\nu}{}^{\lambda})\delta g^{\mu\nu}d^3x.$$

Do princípio variacional de Hamilton $\delta S = 0$, portanto

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) - a(-2RR_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}R + \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}R - 2g_{\mu\nu}\square R) - \\ &b(-2R_{\mu}{}^{\lambda}R_{\nu\lambda} - \square R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\nabla_{\sigma}R^{\lambda\sigma} + \nabla^{\rho}\nabla_{\mu}R_{\nu\rho} + \nabla^{\rho}\nabla_{\nu}R_{\mu\rho}) = \\ &= 8\pi G_3 \left(\partial_{\mu}\sigma\partial_{\nu}\sigma - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\rho}\sigma\nabla^{\rho}\sigma - g_{\mu\nu}V(\sigma) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Analogamente, variando a ação com relação ao campo escalar obtemos:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}\delta(\nabla_{\mu}\sigma\nabla^{\mu}\sigma) - \delta V(\sigma) \right] d^3x,$$

ou seja

$$\nabla_{\mu}(\partial^{\mu}\sigma) = V'(\sigma) \equiv \frac{dV(\sigma)}{d\sigma}.$$

No caso da gravitação massiva tridimensional com e e $b = -(8/3)a = -64\lambda = -\frac{1}{m^2}$ temos, além da equação acima:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 64\lambda K_{\mu\nu} = 8\pi G_3 \left(\partial_{\mu}\sigma\partial_{\nu}\sigma - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_{\rho}\sigma\partial^{\rho}\sigma - g_{\mu\nu}V(\sigma) \right),$$

onde

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left(R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - \frac{3}{8}R^2 \right) + \nabla^{\sigma}\nabla_{\mu}R_{\nu\sigma} + \nabla^{\sigma}\nabla_{\nu}R_{\mu\sigma} \\ &- \square R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla^{\sigma}\nabla^{\rho}R_{\sigma\rho} - 2R_{\sigma\mu}R_{\nu}{}^{\sigma} \\ &+ \frac{3}{8}(2RR_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}R - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}R + 2g_{\mu\nu}\square R), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

que são justamente as eq.s (2.12).

Para os muros de domínio (eq.s (2.10)) com $k = 0$ e $d = 3$ temos:

- $\Gamma_{\eta j}^i = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\delta_j^i$, $\Gamma_{ij}^\eta = -\frac{1}{2}e^\varphi\bar{g}_{ij}\dot{\varphi}$, $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{\eta\eta}^\eta = \Gamma_{\eta\eta}^i = \Gamma_{\eta i}^\eta = 0$;
- $R_{\eta\eta} = -(\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2)$, $R_{ij} = -\frac{1}{2}e^\varphi\bar{g}_{ij}(\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)$, $R = -(2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2)$;
- $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{3}{2}\ddot{\varphi}^2 + \frac{3}{4}\dot{\varphi}^4 + 2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^2$;
- $\nabla_\eta\nabla_\eta R = -2\varphi^{\dots} - 3(\dot{\varphi}\varphi^{\dots} + \ddot{\varphi}^2)$, $\nabla_i\nabla_j R = -\frac{1}{2}e^\varphi\bar{g}_{ij}\dot{\varphi}(2\varphi^{\dots} + 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi})$;
- $\square R = -(2\varphi^{\dots} + 3\ddot{\varphi}^2 + 5\dot{\varphi}\varphi^{\dots} + 3\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi})$;
- $R_{\eta\sigma}R_\eta^\sigma = \ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}^4 + \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}$, $R_{i\sigma}R_j^\sigma = \frac{1}{4}e^\varphi\bar{g}_{ij}(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4 + \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi})$;
- $\nabla_\mu\nabla_\eta R^\mu{}_\eta = -\varphi^{\dots} - \ddot{\varphi}^2 - \frac{3}{2}\dot{\varphi}\varphi^{\dots} + \frac{1}{4}\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}$;
- $\nabla_\mu\nabla_i R^\mu{}_j = -\frac{1}{4}e^\varphi\bar{g}_{ij}(\ddot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\varphi^{\dots} + \frac{7}{2}\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi})$;
- $\square R_{\eta\eta} = -(\varphi^{\dots} + 2\dot{\varphi}\varphi^{\dots} + \ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi})$;
- $\square R_{ij} = -\frac{1}{2}e^\varphi\bar{g}_{ij}(\varphi^{\dots} + \frac{5}{2}\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi} + 2\ddot{\varphi}^2 + 3\dot{\varphi}\varphi^{\dots})$;
- $\nabla^\sigma\nabla^\rho R_{\sigma\rho} = -(\varphi^{\dots} + \frac{3}{2}\ddot{\varphi}^2 + \frac{5}{2}\dot{\varphi}\varphi^{\dots} + \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi})$,

onde “ \dots ” denota a derivada em relação à variável η , fixando o potencial como $V(\sigma) = const. = 2\Lambda$ (com $16\pi G_3 = 1$), as equações de movimento tornam-se

$$\begin{aligned} \dot{u} &= uv, \\ \dot{v}(1 + 8\lambda v^2) &= \frac{1}{2}(u^2 + 4\Lambda + v^2(1 + 4\lambda v^2)), \\ v^2(1 + 4\lambda v^2) &= u^2 - 4\Lambda, \end{aligned} \tag{A.6}$$

que são justamente as eq.s (2.19).

Para o caso cosmológico FRW (eq.s (4.1)) com $k = 0$ e $d = 3$ temos (denotando com “ $*$ ” todas as quantidades a ele relacionadas e sabendo que agora “ \cdot ” representa a derivada em t):

- $\Gamma_{tj}^{*i} = \Gamma_{\eta j}^i, \quad \Gamma_{ij}^{*t} = -\Gamma_{ij}^\eta, \quad \Gamma_{jk}^{*l} = \Gamma_{tt}^{*t} = \Gamma_{tt}^{*i} = \Gamma_{ti}^{*t} = 0;$
- $R_{tt}^* = R_{\eta\eta}, \quad R_{ij}^* = -R_{ij}, \quad R^* = -R, \quad R_{\mu\nu}^* R^{*\mu\nu} = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu};$
- $\nabla_t \nabla_t R^* = -\nabla_\eta \nabla_\eta R, \quad \nabla_i \nabla_j R^* = \nabla_i \nabla_j R;$
- $\square R^* = \square R, \quad R_{t\sigma}^* R_t^{*\sigma} = -R_{\eta\sigma} R_\eta^\sigma, \quad R_{i\sigma}^* R_j^{*\sigma} = R_{i\sigma} R_j^\sigma;$
- $\nabla_\mu \nabla_t R^{*\mu}_t = -\nabla_\mu \nabla_\eta R^\mu_\eta, \quad \nabla_\mu \nabla_i R^{*\mu}_j = \nabla_\mu \nabla_i R^\mu_j;$
- $\square R_{tt}^* = -\square R_{\eta\eta}, \quad \square R_{ij}^* = \square R_{ij}, \quad \nabla^\sigma \nabla^\rho R_{\sigma\rho}^* = \nabla^\sigma \nabla^\rho R_{\sigma\rho};$

e novamente fixando o como potencial $V(\sigma) = const. = 2\Lambda$ (com $16\pi G_3 = 1$) as equações de movimento tornam-se

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= uv, \\
 v^2(1 - 4\lambda v^2) &= u^2 + 4\Lambda, \\
 \dot{v}(1 - 8\lambda v^2) &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 4\Lambda - 4\lambda v^4),
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

que são justamente as eq.s (4.3).

É interessante notar que as eq.s (4.3) coincidem com as eq.s (2.19) com a troca formal

$$\eta \rightarrow t, \quad \lambda \rightarrow -\lambda, \quad \Lambda \rightarrow -\Lambda.$$

Logo, a construção e análise das propriedades dos muros de domínio feitas no capítulo 2 podem ser facilmente “transferidas” para as soluções cosmológicas FRW em consideração.

Apêndice B

Deslocamento para o vermelho e parâmetro de desaceleração

Agora descreveremos o fenômeno conhecido como deslocamento para o vermelho e definiremos o parâmetro de desaceleração.

Para a verificação das consequências cosmológicas da teoria da gravitação massiva tridimensional é necessário a construção explícita das soluções das equações de movimento não estacionárias do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds_3^2 = -dt^2 + e^{\varphi(t)}(dx^2 + dy^2), \quad \sigma = \sigma(t). \quad (\text{B.1})$$

Como já foi dito anteriormente, a principal característica dessas soluções é seu caráter não estacionário ($\varphi = \varphi(t)$). A melhor forma de se obter informações experimentais do fator de escala $e^{\frac{\varphi}{2}}$ é observando os deslocamentos na frequência de um feixe de luz emitido por uma fonte distante. Tal fenômeno é chamado de “deslocamento para o vermelho/azul”, e está associado ao fato da variação do fator de escala levar a uma variação na distância entre quaisquer dois corpos do universo.

Considerando um observador na origem do sistema de coordenadas (poderia ser qualquer

ponto devido à total isotropia do espaço) recebendo um sinal luminoso radial, então:

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + e^\varphi dr^2,$$

$$\int_{t_G}^{t_0} e^{\frac{-\varphi}{2}} dt = r_G, \quad (\text{B.2})$$

onde t_G é o instante em que o feixe foi emitido na galáxia localizada no ponto r_G , que não varia com o tempo, e t_0 é o instante em que o feixe será observado na origem. Então se um feixe de luz for enviado da mesma galáxia no instante $t_G + \delta t_G$ ele será observado na origem no instante $t_0 + \delta t_0$:

$$\int_{t_G + \delta t_G}^{t_0 + \delta t_0} e^{\frac{-\varphi}{2}} dt = r_G, \quad (\text{B.3})$$

subtraindo (B.3) de (B.2) temos que:

$$\left(\int_{t_G + \delta t_G}^{t_0 + \delta t_0} - \int_{t_G}^{t_0} \right) e^{\frac{-\varphi}{2}} dt = \left(\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} - \int_{t_G}^{t_G + \delta t_G} \right) e^{\frac{-\varphi}{2}} dt = 0,$$

se δt_G for o período de oscilação da onda eletromagnética ($\approx 10^{-14} \text{seg}$), provavelmente δt_0 também será dessa ordem de grandeza e podemos supor $\varphi(t + \delta t_G) \approx \varphi(t)$ e $\varphi(t + \delta t_0) \approx \varphi(t)$ concluindo que:

$$\delta t_0 e^{\frac{-\varphi(t_0)}{2}} = \delta t_G e^{\frac{-\varphi(t_G)}{2}} \quad \text{ou} \quad \omega e^{\frac{-\varphi(t)}{2}} = \text{const.}, \quad (\text{B.4})$$

onde ω é a frequência da onda. Denominando ω_G a frequência do feixe enviado e ω_0 a frequência recebida, de (B.4) temos que:

$$\omega_0(t_0) = e^{\frac{\varphi(t_G) - \varphi(t_0)}{2}} \omega_G(t_G). \quad (\text{B.5})$$

Para um universo em expansão $\varphi(t + \Delta t_G) > \varphi(t)$, $\omega_0 < \omega_G$, i.e. a frequência observada é menor que a original (por isso dizemos que ela é deslocada para o vermelho), para um universo em contração $\omega_0 > \omega_G$, dizemos que ocorre um deslocamento para o azul. Na

cosmologia, usualmente, usa-se o desvio relativo do comprimento de onda do feixe de luz

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_G}{\lambda_G} = e^{\frac{(\varphi_0 - \varphi_G)}{2}} - 1, \quad (\text{B.6})$$

para descrever o deslocamento para o vermelho/azul. Deve ficar claro que tal desvio, de natureza cosmológica, não deve ser encarado como um efeito Doppler, oriundo da velocidade relativa entre fonte e observador, e sim um resultado da expansão/contração do espaço. Esta observação é importante, pois na relatividade geral o conceito de velocidade relativa só se aplica em torno de vizinhanças, já que velocidade relativa, necessariamente, exige uma soma de vetores em um mesmo ponto, sendo os vetores afastados será necessário um transporte paralelo tomado por um caminho arbitrário, tornando o conceito sem sentido.

A distância percorrida pelo feixe de luz (Δl) da galáxia G até nós é Δt , uma informação que não temos. Necessitamos de uma quantidade observável independente de distâncias e velocidades relativas. A solução para esse quebra-cabeças é a dita “distância” luminosa (na verdade é uma seção de choque para feixes) definida como:

$$D_L^1 = \frac{L}{2\pi F}, \quad (\text{B.7})$$

onde L é a luminosidade absoluta da fonte (“potência” (energia/área)) e F é o fluxo medido pelo observador (“vetor de Poyting” (potência/área)). Essa definição vem do fato de que para um espaço-tempo tridimensional “chato”, com uma fonte a distância D_L , a razão fluxo/luminosidade é apenas o inverso do comprimento do círculo centrado em torno da fonte.

A generalização da idéia para espaços curvos é imediata, basta uma análise dimensional e a ajuda de (B.4):

$$[F_0] = \frac{\text{energia}_0(\text{frequência})}{[\text{tempo}_0][\text{área}_0]} = e^{\varphi(t_G) - \varphi(t_0)} \frac{\text{energia}_0(\text{frequência})}{[\text{tempo}_0][\text{área}_0]},$$

onde

$$\text{área}_0 = 2\pi\Delta l = 2\pi(Re^{\frac{\varphi_0}{2}}),$$

com

$$R = \int_{t_G}^{t_0} e^{-\frac{\varphi_0}{2}} dt,$$

e a luminosidade L é [energia_G/temp_G]. Fazendo $(1+z)^{-2} = e^{\varphi(t_G)-\varphi(t_0)}$, obtemos:

$$D_L = (1+z)^2(Re^{\frac{\varphi_0}{2}}). \quad (\text{B.8})$$

A distância de luminosidade é algo que temos a esperança de medir, pois existem fontes astrofísicas cujas luminosidades absolutas são conhecidas (“velas padrões”). Mas R não é um observável, então ele deve ser eliminado da equação. Para $z \ll 1$, necessariamente, $t_0 - t_G \ll 1$ (R também não pode ser muito grande), tornando a tarefa de eliminar R algo não muito complicado, na verdade escreveremos R em termos de z . Começemos expandindo o fator de escala em uma série de potências em torno do ponto $t = t_0$

$$e^{\frac{\varphi(t)}{2}} = e^{\frac{\varphi(t_0)}{2}} \left(1 + \mathcal{H}_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0\mathcal{H}_0^2(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3) \right), \quad (\text{B.9})$$

sendo $\mathcal{H} = \dot{\varphi}/2$, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(t_0)$ e

$$q(t) = -\frac{\partial_{tt}e^{\frac{\varphi(t)}{2}}}{(\partial_t e^{\frac{\varphi(t)}{2}})^2} e^{\frac{\varphi(t)}{2}} = -\left(2\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2} + 1 \right), \quad (\text{B.10})$$

que é o famoso parâmetro de desaceleração do universo, ou seja, para $q > 0$ temos um universo em desaceleração, para $q < 0$ um universo em aceleração e para $q = 0$ um universo estático. Repare que quando a aceleração do fator de escala ($\partial_{tt}e^{\frac{\varphi(t)}{2}}$) é negativa, q é positivo e vice-versa.

Voltando à idéia original de escrever R como função de z , o próximo passo é expandir z em série de potências, através de (B.7) com $t = t_G$

$$z = e^{\frac{(\varphi_0 - \varphi_G)}{2}} - 1 = \mathcal{H}_0(t - t_G) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) \mathcal{H}_0^2(t - t_G)^2 + O((t - t_G)^3),$$

invertendo

$$(t_0 - t_G) = \frac{1}{\mathcal{H}_0} \left(z - \left(1 + \frac{q_0^2}{2} \right) z^2 + O(z^3) \right). \quad (\text{B.11})$$

Com esses resultados estamos prontos para expandir R em série de potências de $(t-t_G)(z)$, resultando em $R(z)$. R é dado pela integral:

$$R = \int_{t_G}^{t_0} e^{\frac{-\varphi(t)}{2}} dt = \int_{t_G}^{t_0} e^{\frac{-\varphi(t_0)}{2}} \left(\mathcal{H}_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) \mathcal{H}_0^2(t_0 - t)^2 + O((t_0 - t)^3) \right) dt,$$

$$R = e^{\frac{-\varphi(t_0)}{2}} \left((t_0 - t_G) + \frac{\mathcal{H}_0}{2}(t_0 - t_G)^2 + O((t_0 - t)^3) \right). \quad (\text{B.12})$$

Substituindo (B.11) na equação acima temos R como função de z .

$$D_l = \frac{1}{\mathcal{H}_0} \left(z + \frac{1}{2}(3 - q)z^2 + O(z^3) \right),$$

que é o resultado desejado, essa equação é conhecida como Lei de Hubble (tridimensional).

Apêndice C

Funções especiais

Aqui mostraremos algumas definições, propriedades e representações das funções especiais que aparecem no texto.

C.1 Função Gamma

A função Gamma é definida como:

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} n^z; \quad n \in \mathbb{N}; \quad z \in \mathbb{C}; \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \quad . \quad (\text{C.1})$$

Substituindo z por $z + 1$ nessa definição obtemos

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (\text{C.2})$$

que é a relação de recorrência. Em particular quando $z = n \in \mathbb{N}$ temos

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad . \quad (\text{C.3})$$

Uma segunda definição da função Gamma é sua representação integral:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad (\text{C.4})$$

onde a restrição sobre z é necessária para evitar a divergência da integral. As definições (C.1) e (C.4) são equivalentes, para mostrar isso consideremos a função

$$F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{C.5})$$

como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}, \quad (\text{C.6})$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \equiv \Gamma(z). \quad (\text{C.7})$$

Por outro lado, fazendo $u = \frac{t}{n}$ em (C.5) temos

$$F(z, n) = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du, \quad (\text{C.8})$$

realizando sucessivas integrações por partes obtemos

$$F(z, n) = \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} n^z, \quad (\text{C.9})$$

tomando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) \equiv \Gamma(z), \quad (\text{C.10})$$

comparando (C.10) e (C.7) concluímos a prova.

C.2 Função Beta

A função Beta é definida como:

$$B(a, b) \equiv \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}; \quad \Re e(a), \Re e(b) > 0. \quad (\text{C.11})$$

Uma forma alternativa pode ser obtida através da forma integral de $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y} y^{b-1} dy \right), \quad (\text{C.12})$$

fazendo $x = u^2$, $y = v^2$, $dx = 2udu$ e $dy = 2v dv$ temos

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} u^{2a-1} v^{2b-1} dudv, \quad (\text{C.13})$$

fazendo $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ e $dudv = r dr d\theta$ obtemos

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 2\Gamma(a+b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2a-1} (\sin \theta)^{2b-1} d\theta, \quad (\text{C.14})$$

portanto:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2a-1} (\sin \theta)^{2b-1} d\theta. \quad (\text{C.15})$$

De outra forma, substituindo a por $a+1$, b por $b+1$ e fazendo $t = \cos^2 \theta$, $dt = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta$, obtemos

$$B(a+1, b+1) = \int_0^1 t^a (1-t)^b dt. \quad (\text{C.16})$$

A função Beta incompleta é definida como:

$$B_x(a, b) \equiv \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (\text{C.17})$$

quando $x = 1$ obtemos a função Beta.

C.3 Função Hipergeométrica

A função Hipergeométrica é definida como sendo uma das soluções da equação diferencial de segunda ordem:

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0, \quad (\text{C.18})$$

que é singular em $x = 0, 1$ e ∞ , e “ ’ ”denota a derivada em relação a x . A função Hipergeométrica é obtida através do método de Frobenius para $|x| < 1$ e $c - a - b > 0$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0, \quad (\text{C.19})$$

substituindo em (C.18) obtemos uma restrição sobre os possíveis valores de k

$$k(k-1+c) = 0, \quad (\text{C.20})$$

ou seja, $k = 0$ ou $k = 1 - c$, fornecendo duas distintas relações de recorrência:

- Caso $k = 0$.

A recorrência é:

$$a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (\text{C.21})$$

nos dando

$$y(x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2} + \dots, \quad (\text{C.22})$$

ou seja, se a e $b \in \mathbb{N}^*$, temos

$$y(x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} \equiv {}_2F_1(a, b; c; x), \quad (\text{C.23})$$

que é a função Hipergeométrica propriamente dita. Repare que se a ou $b = 0 \longrightarrow$

$y = 1$ (solução trivial), e se a ou $b = -n$, $n \in \mathbb{N}^*$, a série trunca em um polinômio de grau n .

- Caso $k = 1 - c$.

A recorrência é:

$$a_{n+1} = \frac{(n+a+1-c)(n+b+1-c)}{(2-c+n)(1+n)} a_n, \quad c \neq 2, 3, \dots, \quad (\text{C.24})$$

nos dando

$$y(x) = x^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x). \quad (\text{C.25})$$

A representação integral da função Hipergeométrica é:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt; \quad (\text{C.26})$$

$$\Re(c) > \Re(b) > 0, \quad |z| < 1.$$

Seus assintóticos são:

- $|z| \rightarrow \infty$

$${}_2F_1(a, b; c; z) \stackrel{|z| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b}. \quad (\text{C.27})$$

- $z \rightarrow 1$

$${}_2F_1(a, b; c; z) \stackrel{|z| \rightarrow 1}{\approx} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b}. \quad (\text{C.28})$$

Sua relação com a função Beta incompleta é:

$$B_x(a, b) \equiv \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = a^{-1} x^a {}_2F_1(a, 1-b; a+1; x). \quad (\text{C.29})$$

Utilizando a eq. (C.29), nós vamos calcular as integrais abaixo:

$$\begin{aligned}
y(z) &= \int_0^z \frac{dx}{(\cosh bx)^{\delta/2}} = \frac{1}{2b} \int_0^z \frac{d(\tanh^2 bx)}{\tanh bx} \frac{1}{(\cosh bx)^{\delta/2-2}} \\
&= \frac{(\text{sinal } z)}{2b} \int_0^z d(\tanh^2 bx) \underbrace{(\tanh^2 bx)^{-1/2}}_{\frac{1}{|\tanh bx|}} (1 - \tanh^2 bx)^{\delta/4-1}
\end{aligned} \tag{C.30}$$

com a troca $X = \tanh^2 bx$

$$\begin{aligned}
y(z) &= \frac{(\text{sinal } z)}{2b} \underbrace{\int_0^{\tanh^2 bz} dX X^{1/2-1} (1-X)^{\delta/4-1}}_{=B_{\tanh^2 bz}(1/2, \delta/4)} \\
&= \frac{(\text{sinal } z)}{2b} 2|\tanh bz| {}_2F_1(1/2, 1 - \delta/4; 3/2; \tanh^2 bz) \\
&= \frac{\tanh bz}{b} {}_2F_1\left(1/2, 1 - \delta/4; 3/2; \tanh^2 bz\right).
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Para $b = B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}}$, $\delta = -\frac{2\epsilon|m^2|}{B^2}$ e $z = \eta - \eta_0$ obtemos a eq. (3.10).

Da mesma forma

$$\begin{aligned}
y(z) &= \int_0^z \frac{dx}{(\sinh bx)^{\delta/2}} - \text{const} = \frac{1}{2b} \int_z^0 d\left(\frac{1}{\cosh^2 bx}\right) \frac{\cosh^3 bx}{\sinh bx} \frac{1}{(\sinh bx)^{\delta/2}} - \text{const} \\
&= \frac{1}{2b} \int_z^0 d\left(\frac{1}{\cosh^2 bx}\right) \left(\frac{1}{\cosh^2 bx}\right)^{-3/2} \frac{1}{(\cosh^2 bx - 1)^{1/2+\delta/4}} - \text{const} \\
&= \frac{1}{2b} \int_z^0 d\left(\frac{1}{\cosh^2 bx}\right) \left(\frac{1}{\cosh^2 bx}\right)^{\delta/4-1} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 bx}\right)^{1/2-\delta/4-1} - \text{const}
\end{aligned} \tag{C.32}$$

com a troca $X = \frac{1}{\cosh^2 bx}$

$$\begin{aligned}
y(z) &= \frac{1}{2b} \int_{\frac{1}{\cosh^2 bz}}^1 dX X^{\delta/4-1} (1-X)^{1/2-\delta/4-1} - \text{const} \\
&= \underbrace{\int_0^1 dX X^{\delta/4-1} (1-X)^{1/2-\delta/4-1}}_{=\text{const}} - \frac{1}{2b} \int_0^{\frac{1}{\cosh^2 bz}} dX X^{\delta/4-1} (1-X)^{1/2-\delta/4-1} - \text{const} \\
&= -\frac{1}{2b} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{\cosh^2 bz}} dX X^{\delta/4-1} (1-X)^{1/2-\delta/4-1}}_{B_{\frac{1}{\cosh^2 bz}}(\delta/4, 1/2-\delta/4)} \\
&= -\frac{2}{b\delta} \frac{1}{(\cosh bz)^{\delta/2}} {}_2F_1\left(\delta/4, 1/2 + \delta/4; 1 + \delta/4; \frac{1}{\cosh^2 bz}\right), \quad 1/2 + \delta/4 \neq -n, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Para $b = B^2 \sqrt{\frac{2}{|m^2|}}$, $\delta = \frac{2\epsilon|m^2|}{B^2}$ e $z = \eta - \eta_0$ obtemos a eq. (3.12).

Através da fórmula assintótica da função hipergeométrica, *i.e.* da eq. (C.28), obtemos as eqs. (3.11) e (3.13).

Referências Bibliográficas

- [1] T.P.Sotiriou, V. Faraoni; **f(R) theories of gravity** arXiv:08051726
- [2] U. Camara da Silva; **Propriedades Críticas dos Muros Dilatônicos Gravitacionais**; Dissertação de mestrado, junho 2009, UFES, Vitória-ES.
- [3] R. M. Wald; **General Relativity**, The University of Chicago Press, 1984
- [4] K.S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**953(1977)
- [5] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, P.K. Townsend, *Phys.Rev.Lett.***102**,201301(2009)
- [6] E.A. Bergshoeff, O. Hohm, P.K. Townsend, *Phys.Rev.D* **79**,124042(2009)
- [7] I. Oda, *JHEP*0905064(2009); M. Nakasone, I.Oda, *Phys. Rev. D* **79**,104012(2009)
- [8] Y. Liu, Y.W. Sun, *Phys. Rev.D* **79**,126001(2009); Y. Liu, Y.W. Sun, *JHEP* 0905,039(2009)
- [9] S. Deser, *Phys. Rev. Lett.***103**:101 302(2009)
- [10] G. Clement, *Class. Quant. Grav.***26**,1050 015(2009)
- [11] E. Ayon-Beato, G. Giribet, M. Hassaine, *JHEP*0905,029 (2009)
- [12] J. Oliva, D. Tempo, R. Troncoso, *JHEP* 0907:011(2009)
- [13] I. Gullu, B. Tekin, *Phys. Rev.D***80**:064 033(2009)
- [14] M. Cvetič, S. Griffies, S.J. Rey **381**1992301 K. Behrndt, G. Lopes Cardoso, D. Lust **607**2001391

- [15] D.Z. Friedman, C. Nunez, M. Schnabl, K. Skenderis, Phys. Rev.**D 69**,104 027(2004)
- [16] J. Sonner, P.K. Townsend , Class. Quant. Grav.**23**,441 (2006) K. Skenderis, P.K. Townsend, Phys.Rev.Lett. **96**:191 301 (2006)
- [17] I. Low and A. Zee **B585**(2000)395
- [18] H.L.C. Louzada, U. Camara dS and G.M. Sotkov, **Massive 3-D Gravity Big Bounce**, Phys. Lett.**686B** (2010) 268.