

Universidade Federal do Espírito Santo

Análise Perturbativa em Modelos  
Cosmológicos Fantasma

Deborah Faragó Jardim

Orientador: Dr. Júlio César Fabris

Vitória - Espírito Santo

2010

DEBORAH FARAGÓ JARDIM

ANÁLISE PERTURBATIVA EM MODELOS COSMOLÓGICOS  
FANTASMAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.  
Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

VITÓRIA  
2010

Este trabalho é dedicado integralmente a Gastão,  
Roberta e Igor, meu esposo e meus filhos  
queridos.

“Nada é tão simples quanto, para não ser mal-entendido.”

Paradoxo de Teague

# Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus pela oportunidade do estudo e por todo o conforto espiritual que recebo sempre que preciso, mesmo quando não peço.

É interessante perceber o quanto se cresce e amadurece quando se vive numa situação *limite*. Eu, de fato, aprendi muito com todas as dificuldades que enfrentei durante o doutorado. A distância de casa, a ausência da família, do marido, a saudade dos filhos, que mesmo sem que eu percebesse, cresceram. Perdi a infância e adolescência de ambos, mas sempre tentando acreditar que o esforço valeria à pena. Quando um dito popular assegura que: "É importante saber quando parar", eu proporia uma modificação que melhor caberia dentro de minha realidade, ou seja: *É importante saber quando continuar*. Muitas vezes pensei em parar, mas haviam sempre os amigos...

Hoje, depois de tudo, não poderia fazer outra coisa senão dedicar a meus filhos todo o meu trabalho e pedir desculpas pela ausência de todos esses anos, pois mesmo quando de corpo presente, estava ainda ausente. Obrigada, Gastão, meu eterno companheiro, que esteve sempre a meu lado, em todos os momentos de minha jornada e a quem ofereço o fruto do meu trabalho. Esse doutorado não teria o menor valor se não houvesse o apoio dos três.

Agradeço ao professor Júlio Fabris pela atenção a mim dispensada e ao professor Winfried pelos comentários e correções no trabalho. Aos professores Sérgio Vitorino, Raphael Furtado e Flávio Gimenez agradeço pelo incentivo nos momentos em que me sentia completamente desanimada.

À minha família, especialmente minha mãe, minha sogra e minha cunhada, que ajudaram a educar meus filhos e com isso possibilitaram meu estudo, "muito obrigada". Ao meu

pai, Lora e Priscila, que estiveram presentes no início de minha jornada e possibilitaram tudo que estou desfrutando hoje.

Meus sinceros agradecimentos aos amigos Fracalossi, Adriano, Manuel, José André, Hermano, Stéphane, Gabriel, Juliano, Fany, Ivan, Paulo, Alex, Fernando e a todos os demais colegas de pós-graduação, pelas palavras de apoio e por todas as discussões que me possibilitaram ampliar o conhecimento.

Aos colegas Eduardo, Célia, Sandra e Enelva que me representaram junto à Univale quando precisei me ausentar para estudar.

Agradeço, ainda, às amigas sinceras Flávia, com quem tinha longas conversas e Leila, que me recebeu em sua casa sempre de braços abertos durante os anos que permaneci em Vitória. As duas foram fundamentais nessa caminhada.

Obrigada, por fim, ao professor Jérôme Martin, que me acolheu no Instituto de Astrofísica de Paris, onde fiz o doutorado sanduíche.

À CAPES, agradeço pelo suporte financeiro que possibilitou minha integral dedicação a este trabalho e à CAPES/COFECUB pelo apoio financeiro durante o estágio-doutorado realizado na França.

## Resumo

Modelos de energia escura tornaram-se bastante estudados nos últimos anos. No início desse século surgiram propostas para descrever o Universo por meio de um fluido cuja equação de estado rompia com o paradigma imposto pela cosmologia padrão. Fluidos dessa natureza necessitam violar algumas condições de energia e possuem um comportamento bastante peculiar, sendo por este motivo denominados "fantasmas". Este trabalho investiga a formação de estruturas por meio do estudo de perturbações cosmológicas num Universo cujo cenário é o da cosmologia fantasma. São propostos dois modelos, o primeiro deles resolvendo as equações perturbadas para modos escalares, utilizando um fluido em representação hidrodinâmica e de campos e prosseguindo com a análise do comportamento assintótico. O segundo modelo é uma composição de dois fluidos, sendo um componente de matéria sem pressão e o outro com pressão negativa, representado por um campo escalar auto-interagente. A solução neste caso foi obtida via cálculo numérico. Os resultados foram confrontados com os dados observacionais que mostraram que modelos fantasmas dessa natureza são perfeitamente possíveis e abrem uma nova janela de pesquisas.

## Abstract

Dark energy models have become extensively studied in recent years. Earlier proposals have emerged this century to describe the Universe by means of a fluid whose equation of state was breaking with the paradigm imposed by the standard cosmology. Fluid of this kind require to violate some energy conditions and have a very peculiar behavior, denominated for this reason "phantom fluid". This work investigates the structures formation through the study of cosmological perturbations in Universe which scenario is the phantom cosmology. They have proposed two models, the first them by solving the perturbed equations for scalar modes, using a hydrodynamic and fields representation for the fluid and then making the asymptotic behavior analysis. The second model is a composite of two fluids, one component of pressureless matter and another with negative pressure, represented by a self-interacting scalar field . In this case, the solution was obtained by numerical calculation. Results were confronted with the observational data and it showed models phantom of this nature are quite possible and its open a new window of research.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Elementos da Cosmologia Moderna</b>	<b>4</b>
1.1	Introdução . . . . .	4
1.2	Para Além da Teoria Newtoniana . . . . .	5
1.2.1	Ferramental Matemático da Relatividade Geral . . . . .	6
1.2.2	As Equações de Campo da Relatividade Geral . . . . .	7
1.3	Cosmologia Relativista . . . . .	10
1.3.1	O Universo Segundo Einstein . . . . .	11
1.3.2	A Métrica do Espaço-tempo e o Elemento de Linha . . . . .	13
1.4	A Lei de Hubble e o Universo em Expansão . . . . .	16
1.5	Equações da Dinâmica na Cosmologia de FLRW . . . . .	18
1.6	Os Parâmetros Cosmológicos . . . . .	20
<b>2</b>	<b>As Componentes Escuras do Universo e o Cenário Fantasma</b>	<b>25</b>
2.1	Introdução . . . . .	25
2.2	A Descoberta de Matéria Invisível . . . . .	26
2.2.1	Evidências de Matéria Escura no Universo . . . . .	27
2.2.2	Especulações sobre a Natureza da Matéria Escura e seu Papel na Evolução do Universo . . . . .	30
2.3	A Energia Escura . . . . .	32
2.3.1	A Expansão do Universo e a Componente em Falta . . . . .	33
2.3.2	Candidatos a Energia Escura . . . . .	35
2.3.3	A Relação entre Matéria e Energia Escuras . . . . .	40

2.4	Cosmologia Fantasma . . . . .	40
2.4.1	Introdução . . . . .	40
2.4.2	Por que <i>Fantasma</i> ? . . . . .	41
2.4.3	Violando as Condições de Energia . . . . .	42
2.4.4	Equações que Descrevem a Dinâmica do Fluido Fantasma . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Perturbações Cosmológicas</b>	<b>49</b>
3.1	Introdução . . . . .	49
3.2	Equações para o Espaço não Perturbado . . . . .	51
3.2.1	Equações de Friedmann para a Base . . . . .	51
3.2.2	Universo Descrito por um Fluido Perfeito . . . . .	52
3.3	Introduzindo as Perturbações . . . . .	55
3.3.1	Quantidades Invariantes de Calibre . . . . .	58
3.3.2	Perturbações Invariantes de Calibre e as Equações Gerais de Campo	59
3.3.3	Perturbações Hidrodinâmicas . . . . .	61
3.3.4	Perturbações para um Campo Escalar . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Modelo Fantasma em Representação Hidrodinâmica e de Campos</b>	<b>66</b>
4.1	Introdução . . . . .	66
4.2	Análise Perturbativa do Modelo Fantasma . . . . .	67
4.2.1	Analisando o caso plano ( $k = 0$ ) . . . . .	67
4.2.2	Analisando os casos com curvatura ( $k \neq 0$ ) . . . . .	71
4.3	Uma Descrição mais Fundamental . . . . .	75
4.4	Avaliação Geral do Modelo . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Espectro de Potência em Modelo Escalar-Tensorial Fantasma</b>	<b>79</b>
5.1	Introdução . . . . .	79
5.2	Descrevendo o Modelo . . . . .	80
5.2.1	Equações para a Base . . . . .	80
5.2.2	Equações para o Potencial . . . . .	81
5.3	Perturbações para o Modelo Proposto . . . . .	84

5.4	Ferramentas Estatísticas para Análise dos Dados . . . . .	86
5.4.1	Usando a Amostra <i>Gold</i> de SN Ia . . . . .	86
5.4.2	Calculando o Espectro de Potência . . . . .	87
5.5	Analisando os Gráficos e Avaliando o Modelo . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>92</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>95</b>

# Notação e Abreviações

Durante todo o trabalho, as seguintes notações e abreviações são utilizadas:

- A assinatura da métrica é dada por  $(+, -, -, -)$
- Caso não seja mencionado o um sistema utilizado aqui é o de unidades naturais onde  $c = 1$ .
- Índices gregos variam de 0 a 3 e latinos de 1 a 3 e quando repetidos obedecem a convenção de Einstein.
- Derivada parcial é representada por  $X_{,\mu} \equiv \frac{\partial X}{\partial x^\mu}$
- Derivada covariante é dada por  $X^\nu_{;\mu} \equiv X^\nu_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} X^\alpha$ .
- SN Ia  $\rightarrow$  Supernovas tipo Ia
- RG  $\rightarrow$  Relatividade Geral
- RCF  $\rightarrow$  Radiação Cósmica de Fundo
- CDM  $\rightarrow$  *Cold Dark Matter*
- MEF  $\rightarrow$  Matéria Escura Fria
- HDM  $\rightarrow$  *Hot Dark Matter*
- MEQ  $\rightarrow$  Matéria Escura Quente
- ME  $\rightarrow$  Matéria Escura
- EE  $\rightarrow$  Energia Escura
- WIMP  $\rightarrow$  *Weakly Interacting Massive Particles*

- FLRW → *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*
- HST → *Hubble Space Telescope*
- WMAP → *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*
- 2dFGRS → *Two degree Field Galaxy Redshift Survey*
- SDSS → *Sloan Digital Sky Survey*
- COBE → *Cosmic Background Explorer*
- MOND → *Modified Newtonian Dynamics*
- Ga → Giga anos
- Mpsc → *Megaparsec*
- Expressões ou denominações em outro idioma serão escritas em itálico

# Introdução

A cosmologia moderna teve seu início com o advento da teoria da relatividade geral proposta por Albert Einstein em 1915 [1]. Desde então, vários trabalhos sugerindo os mais diversos modelos cosmológicos surgiram no meio acadêmico. O modelo proposto por Einstein em 1917 [2] era uma solução para suas equações do campo gravitacional. Ele enfrentou dificuldades para encontrar um resultado que fosse compatível com sua ideia de que o Universo seria estático, uma vez que a matéria, sob o efeito da gravitação, faria com que o Universo sofresse um colapso sobre si mesmo. Deste modo, para compensar o efeito atrativo inerente à gravidade, Einstein acrescentou um termo constante em suas equações de campo que faria o papel de uma força em contraposição ao efeito gravitacional. De maneira genial ele conseguiu obter o modelo que desejava.

Em 1929, o astrônomo Edwin Powell Hubble, com a utilização de um telescópio que possibilitava visualizar estrelas de forma individual, observara que as linhas espectrais das galáxias sofriam um deslocamento para o vermelho. Ao medir as distâncias entre as galáxias ele percebera que a velocidade de afastamento era proporcional à sua distância, ou seja, quanto mais distante a galáxia se encontrasse, maior a velocidade com a qual se afastaria. Isto mostrava, portanto, que o Universo, diferente do que se imaginava, encontrava-se em processo de expansão, o que fez com que Einstein renegasse a constante cosmológica declarando que aquele teria sido o pior erro de sua vida.

Em 1998, uma vez mais, a cosmologia adentrava nova fase com um avanço significativo através de dados observacionais advindos de supernovas do tipo Ia em altos *redshifts*. Os dois maiores programas da época, o *Supernova Cosmology Project* e o *High-z Supernova Search*, de maneira independente, e usando as SN Ia como velas-padrão, chegaram a uma mesma conclusão. Ambos observaram, de fato, que as SN Ia eram menos brilhantes do

que previam os modelos de Universos não-acelerados. Este era um forte indício de que a cosmologia deveria reaver os modelos para os quais o Universo estivesse expandindo de forma acelerada.

A indicação de um Universo com este cenário implicava nova descrição para seu conteúdo material. Muitos pesquisadores recuperaram a constante cosmológica de Einstein, no intuito de produzir circunstâncias favoráveis à expansão. Esta nova componente, denominada **energia escura**, seria responsável por fazer o Universo acelerar e representaria uma enorme quantidade na fração da densidade de energia cósmica. Modelos contendo este fluido exótico se tornaram crescentes por estarem em acordo, em muitos sentidos, com os dados observacionais. Em geral, denominados de modelos de energia escura, buscam descrever o Universo utilizando um fluido com pressão negativa que seria responsável pelo efeito da expansão. Tais modelos podem ser associados ao valor do parâmetro da equação de estado, de maneira que o limite está nas condições de energia que determinado fluido deverá ou não obedecer. Modelos de quintessência, por exemplo, admitem valores para  $-1 < \alpha$ , mantendo a validade da condição de energia nula. Estas condições serão discutidas adiante.

Naturalmente, dada a grande quantidade de modelos de Universo cujo fluido obedeça uma equação barotrópica de estado com  $\alpha > -1$ , parece interessante investigar o comportamento de um fluido com pressão mais negativa, ou seja, tal que  $\alpha < -1$ . Modelos cosmológicos com esta característica são denominados **Fantasmas** e adquirem um comportamento bastante interessante. Nos últimos anos, muitos modelos teóricos admitindo um cenário fantasma têm sido propostos e os dados observacionais mais recentes parecem admitir essa possibilidade.

Uma análise simples desses modelos, para o comportamento da base, mostra que, com o passar do tempo, a densidade cresce à medida em que o fator de escala também aumenta, em contraposição ao que propõem os modelos tradicionais. Nesse caso, quando a densidade cresce para um valor infinito, num tempo finito, surge uma singularidade denominada de *Big Rip*, grande rasgo em português. Este desfecho faz com que o modelo seja fortemente criticado. Entretanto, análises do comportamento de perturbações da

matéria indicam a possibilidade de se contornar a ameaça do *Big Rip*, uma vez que deverá ocorrer também a quebra da homogeneidade e isotropia. Se nos próximos anos os dados observacionais apontarem para um favorecimento de uma pressão muito negativa, modelos como os que estão sendo propostos aqui necessitarão de maiores investigações e certamente serão mais aceitos que atualmente.

Seguindo esse contexto, o presente trabalho propõe analisar o processo de formação de estruturas em modelos fantasmas e verificar seu comportamento em comparação com os dados observacionais.

O primeiro capítulo faz um breve tratamento da cosmologia moderna e apresenta as equações que são mais fundamentais para o entendimento do trabalho, enquanto o capítulo seguinte trata da matéria e energia escuras e aborda o cenário fantasma como base para os modelos descritos nos capítulos 4 e 5.

O terceiro capítulo trata da teoria de perturbação cosmológica, que será ferramenta básica na confecção dos dois capítulos seguintes.

O capítulo quatro descreve o modelo de um fluido e discute os resultados obtidos. Parte deste capítulo refere-se a trabalhos anteriores, de outros autores, onde são considerados casos sem curvatura. A outra parte trata de investigação original, onde foram estendidas as análises para qualquer curvatura. Representando, portanto, ideia original, tornou-se um trabalho que foi submetido e publicado.

O quinto capítulo investiga um modelo contendo dois fluidos e faz a comparação com os dados observacionais. Os gráficos são apresentados e o resultado é discutido logo a seguir.

Para finalizar, o último capítulo é uma conclusão global do trabalho, apresentando argumentos para os quais modelos fantasmas são apreciáveis.

# Capítulo 1

## Elementos da Cosmologia Moderna

### 1.1 Introdução

A cosmologia tem como papel principal descrever a estrutura dinâmica do Universo como um todo, confrontando as predições de modelos teóricos com os dados observacionais obtidos de projetos como o WMAP, SDSS, COBE, etc e programas como o 2dFGRS [3–9]. Atualmente, a cosmologia teórica vem sendo confrontada com evidências observacionais com alto grau de confiabilidade, tornando os modelos de cunho teórico mais avaliados mediante a robustez de grandes projetos da cosmologia observacional que se agiganta a cada dia.

Para grandes escalas, como é o caso, a força gravitacional é predominante e exige, portanto, que a cosmologia seja sustentada por uma teoria fundamental da gravitação. A primeira proposta de se descrever os fenômenos gravitacionais com artifícios matemáticos bem fundamentados partiu de Isaac Newton. Sua teoria proporcionou o desenvolvimento da cosmologia conhecida como "Newtoniana". Entretanto, com o progresso científico e as novas observações cosmológicas, diversos problemas, que não possuíam solução dentro da cosmologia newtoniana, foram surgindo.

Um dos grandes problemas atacados por Einstein devia-se ao fato de que na visão newtoniana era permitido que uma informação se propagasse com velocidade infinita,

de modo que as interações seriam percebidas instantaneamente. Depois de propor a "Teoria da Relatividade Especial", que reformulou a mecânica newtoniana, por exemplo, admitindo uma velocidade limite para a natureza, a da luz, foi a vez de formular a "Teoria da Relatividade Geral" [10–12], que fornecia nova estrutura física e matemática na compreensão do Universo. Muitos dos modelos cosmológicos são obtidos resolvendo-se as equações desta teoria que permite descrever o comportamento do campo gravitacional.

A grande genialidade da relatividade geral está na proposição de que a distribuição de matéria determina a geometria do espaço-tempo, portanto, sua curvatura.

Este capítulo apresenta os principais elementos da cosmologia que se fundamenta na teoria da relatividade geral e os argumentos baseados no processo de formação de estruturas, assunto deste trabalho.

## 1.2 Para Além da Teoria Newtoniana

De acordo com a teoria newtoniana, a gravitação é uma força que age instantaneamente à distância. Combinando a expressão que descreve a força entre duas massas e a segunda lei de Newton, obtém-se que a aceleração é independente da massa do corpo analisado. Isto só é verdade porque as massas inercial e gravitacional são idênticas, mesmo que o significado físico de uma e da outra seja completamente diferente. Esta relação é conhecida por "Princípio de Equivalência". Mais que simplesmente propor a identidade das massas, isto é um fato, pois pode-se verificar experimentalmente que todos os corpos percebem a mesma aceleração quando estão sujeitos à gravidade.

A cosmologia newtoniana é descrita por um sistema de equações, admitindo que um fluido de densidade  $\rho$  seja o conteúdo material do Universo. Desse modo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \\ \nabla^2 \phi &= 4\pi G \rho,\end{aligned}$$

representam, respectivamente, as equações da continuidade, de Euler e de Poisson. Nesse contexto,  $\vec{v}$  é o campo de velocidade do fluido,  $p$  a pressão e  $\phi$  representa o potencial gravitacional.

Apesar da teoria newtoniana ter sido bem aceita durante muito tempo, duas questões inconvenientes fizeram com que sua revisão fosse inevitável. Além do problema da velocidade de propagação infinita, discutida anteriormente, a teoria não tratava a questão da equivalência entre as massas inercial e gravitacional. Estas questões fizeram com que Einstein propusesse uma nova descrição para a gravitação, que passou a ser vista não mais como uma força, mas como a estrutura 4-dimensional do espaço-tempo. Deste modo, todos os corpos sujeitos a uma mesma geometria espaço-temporal se deslocam da mesma maneira, garantindo assim, de forma explícita, o princípio de equivalência.

### 1.2.1 Ferramental Matemático da Relatividade Geral

A relatividade geral (RG), sendo uma teoria tensorial e covariante, necessita de elementos matemáticos baseados em tensores e suas propriedades. De forma bastante sucinta, pode-se introduzir alguns elementos importantes para a teoria. O primeiro elemento que deve ser definido, representado em termos da métrica<sup>1</sup>, é conhecido como "símbolo de Christoffel":

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} \left( \partial_{\mu}g_{\gamma\nu} + \partial_{\nu}g_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma}g_{\mu\nu} \right). \quad (1.1)$$

Em seguida, o "tensor de Riemann"

$$R_{\mu\gamma\nu}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}, \quad (1.2)$$

que caracteriza a curvatura de uma dada variedade, está relacionado à não-comutatividade das derivadas covariantes:

$$V_{;\mu;\nu}^{\alpha} - V_{;\nu;\mu}^{\alpha} = R_{\gamma\mu\nu}^{\alpha} V^{\gamma}, \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>A descrição geométrica do espaço-tempo é dada pela quantidade denominada "métrica",  $g_{\mu\nu}$ , que pode ser definida como a quantidade fundamental utilizada para representar o elemento de linha,  $ds^2$ , que serve para medir um intervalo espaço-temporal. Questões relacionadas à métrica serão discutidas mais adiante.

onde a derivada covariante é representada pelo ponto-e-vírgula.

Do tensor de Riemann, pela contração de dois índices, obtém-se o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta, \quad (1.4)$$

a partir do qual é possível construir o escalar de curvatura (ou escalar de Ricci):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

### 1.2.2 As Equações de Campo da Relatividade Geral

A dinâmica de um sistema é descrita por equações que governam seu movimento. Se o sistema é o Universo em expansão, as equações que descrevem sua dinâmica são as equações do campo gravitacional de Einstein. Há duas maneiras<sup>2</sup> de se chegar nessas equações: (1) por meio de argumentação física, utilizando como recurso a analogia com a teoria da gravitação newtoniana e (2) com elegância matemática, baseando-se em técnicas envolvendo operações tensoriais e no princípio variacional, como será feito aqui.

As equações do campo gravitacional são obtidas por meio da ação,

$$A = \frac{1}{2k} \int (R + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.6)$$

na qual  $R$  é o escalar de Ricci e a quantidade  $\Lambda$  é a constante cosmológica. A primeira integral refere-se à geometria e a segunda diz respeito à ação da matéria, onde  $\mathcal{L}_{mat}$  representa a densidade de lagrangiana da matéria.

Prosseguindo, toma-se a variação da ação, tal que

$$\delta A = \delta \left\{ \frac{1}{2k} \int (R + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g} d^4x \right\}. \quad (1.7)$$

---

<sup>2</sup>Existem diversas bibliografias [10–13] que tratam deste assunto.

Para facilitar o cálculo, separa-se as integrais, obtendo

$$\begin{aligned}
\delta A_{(1)} &= \frac{1}{2k} \delta \int R \sqrt{-g} d^4x, \\
\delta A_{(2)} &= \frac{1}{2k} \delta \int 2\Lambda \sqrt{-g} d^4x, \\
\delta A_{(3)} &= \delta \int \mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g} d^4x.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Começando com a variação da "ação de Einstein-Hilbert", escrita na primeira dessas equações, obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta \int R \sqrt{-g} d^4x &= \int R (\delta \sqrt{-g}) d^4x + \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) d^4x + \\
&+ \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) d^4x.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

A primeira integral pode ser reescrita observando-se que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

e, portanto,

$$\int R (\delta \sqrt{-g}) d^4x = -\frac{1}{2} \int R \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^4x. \tag{1.10}$$

Para resolver a segunda integral da equação (1.9) são necessárias algumas considerações que podem ser encontradas em [11,13]. A conclusão que se obtém é que esta integral resultará em quantidade nula, ou seja,

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = 0. \tag{1.11}$$

Isto posto, a equação (1.9), agora simplificada, toma a forma

$$\delta \int R \sqrt{-g} d^4x = \int \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x, \tag{1.12}$$

em que o termo entre colchetes, denominado tensor de Einstein, é definido como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} . \quad (1.13)$$

Desse modo, a primeira das equações (1.8) fica assim escrita,

$$\delta A_{(1)} = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x . \quad (1.14)$$

A segunda daquele conjunto de equações tem solução imediata, já que  $\Lambda$  é uma constante. Daí,

$$\delta \int 2\Lambda\sqrt{-g} d^4x = - \int \Lambda\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x , \quad (1.15)$$

e então,

$$\delta A_{(2)} = -\frac{1}{2k} \int \Lambda\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x , \quad (1.16)$$

Por fim, a última das integrais das equações (1.8), que se refere à variação da ação da matéria, é dada por

$$\delta \int \mathcal{L}_{mat}\sqrt{-g} d^4x = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x , \quad (1.17)$$

na qual a quantidade  $T_{\mu\nu}$ , denominada "tensor de energia-momento", é definida como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_{mat}\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} ,$$

ou ainda,

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{mat} - 2\frac{\delta\mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (1.18)$$

Portanto,

$$\delta A_{(3)} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.19)$$

O passo final é substituir as equações (1.14), (1.16) e (1.19) na (1.7), considerando o princípio variacional para o qual  $\delta A = 0$ , ficando, portanto

$$\frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x - \frac{1}{2k} \int \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x = \frac{1}{2k} \int k \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (1.20)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} d^4x = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} (k T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.21)$$

Comparando-se o lado direito com o lado esquerdo da equação acima e escrevendo  $k = 8\pi G$ , chega-se, por fim, às equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

### 1.3 Cosmologia Relativista

A Cosmologia Relativista está alicerçada sob 3 pilares básicos [10] denominados (1) Princípio Cosmológico, (2) Postulado de Weyl e (3) Relatividade Geral. A seguir serão abordadas as duas primeiras questões e, na seção seguinte, a relatividade geral será discutida à luz da cosmologia.

#### O Princípio Cosmológico

Em geral, os modelos cosmológicos apresentam como base fundamental o denominado Princípio Cosmológico, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

*"Para cada época, com exceção de irregularidades locais, o Universo apresenta o mesmo aspecto em todos os pontos."*

Equivale a dizer que *não há direções de observação privilegiadas e, portanto, o Universo pode ser visto como homogêneo e isotrópico.*

Em 2005, pesquisadores usando dados obtidos do projeto SDSS [14] mostraram que para distâncias maiores que  $3.10^8$  anos-luz, que equivale a aproximadamente  $70Mpc$ , a distribuição de galáxias é bastante homogênea. Isso permite que para grandes escalas tal consideração possa ser utilizada e que muitos modelos cosmológicos se fundamentem nesse princípio simplificador.

### O Postulado de Weyl

Em 1923, o matemático Hermann Weyl levantou a questão de como uma teoria covariante como a R.G. poderia ser utilizada na descrição de um sistema único e completo como o Universo. Ele se perguntava a respeito da possibilidade de se relacionar as propriedades observadas localmente com os efeitos à distância que se deseja estudar. A resposta poderia estar na observação de teorias válidas em nossa vizinhança, tomando-as como base para tentativa de se compreender o distante.

Weyl propôs a introdução de um *substratum*, ou fluido, que permearia o espaço tal que as galáxias se movessem como as partículas fundamentais se movimentam num fluido. A essência do postulado de Weyl está no fato desse *substratum* poder ser considerado como um fluido perfeito, que relaciona densidade de matéria  $\rho(x^\mu)$  e pressão  $p(x^\mu)$ , medidas a partir de um referencial comóvel, ou seja, um referencial em repouso em relação ao fluido. A relação entre  $\rho$  e  $p$  é estabelecida por meio de uma equação de estado e caracteriza, juntamente com a quadrivelocidade, o fluido em questão.

### 1.3.1 O Universo Segundo Einstein

Como foi dito na seção anterior, a expressão (1.22) representa as equações de campo da gravitação. Além de elegante, esta relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria sugeria certa simplicidade de interpretação. Apesar disto, esta teoria somente foi aceita pela grande maioria dos cientistas da época depois de comprovado o desvio sofrido pela luz devido ao campo gravitacional do Sol durante o eclipse solar de 1919. Einstein havia previsto matematicamente  $1,7''$  de graus para o desvio da luz de uma estrela que passava perto do sol.

Obviamente, muitos daqueles cientistas insistiam em refutar tal comprovação, ale-

gando que a precisão dos instrumentos daquela época estava no limite da medida. Atualmente, a validade da teoria nesse âmbito não é mais questionada e as medidas podem ser feitas sem a necessidade de eclipses<sup>3</sup> e com alto grau de precisão. Outras previsões da RG, como o efeito das lentes gravitacionais<sup>4</sup>, fazem da teoria uma proposição que descreve tão bem a realidade para grandes escalas que fica difícil a contestação.

Pouco depois de formular sua teoria da gravitação, Einstein voltou sua atenção para a cosmologia, aplicando suas equações com o intuito de descrever o Universo conforme seus conceitos. O termo cosmológico  $-\Lambda g_{\mu\nu}$ , que foi adicionado ao lado esquerdo da equação, relacionando-o à geometria, segundo Einstein, garantiria um Universo estático. Daí, suas novas equações assumiram a forma dada pela (1.22):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (1.23)$$

Com isto, Einstein acreditava que as novas equações, não mais admitindo o espaço plano como solução, estariam em acordo com sua proposta de Universo estático. Todavia, para a surpresa de Einstein, as observações mostraram um Universo dinâmico e o termo cosmológico se apresentou dispensável. Ademais, Willem de Sitter já havia mostrado que existia uma solução de vácuo para as equações, com espaço-tempo curvo, mesmo mantendo o termo de  $\Lambda$ . De Sitter, portanto, obtivera o primeiro modelo cosmológico [15] para um Universo em expansão.

Posteriormente, Friedmann obteve soluções [16, 17] para um Universo em expansão dominado por matéria e na ausência da constante cosmológica. As contribuições de Friedmann e Lemaître foram fundamentais para a obtenção do modelo cosmológico que seria considerado como padrão. Além do mais, com a descoberta de Hubble da relação distância-*redshift* [18], o Modelo Cosmológico Padrão estava mais perto de ser formulado.

Nesse contexto, não havia mais razão para se utilizar a constante cosmológica nos modelos que descreviam a dinâmica do Universo. Contudo, cientistas enxergavam nessa

---

<sup>3</sup>Por exemplo, medidas feitas por meio do desvio da luz de quasares, objetos que emitem grande quantidade de radiação na faixa de ondas de rádio, dispensam o acontecimento de eclipses.

<sup>4</sup>O efeito de lentes gravitacionais é responsável por produzir múltiplas imagens, por exemplo, de um mesmo quasar distante, quando esse se encontra atrás de uma galáxia relativamente próxima da Terra.

constante a possibilidade de se resolver algumas questões, como por exemplo, o problema da idade do Universo, ou mesmo para tentar explicar o aparecimento de um pico no número de quasares com desvio para o vermelho em  $z = 2$ . Porém, ambos os casos puderam ser explicados sem a necessidade de  $\Lambda$  [19] e uma vez mais a constante introduzida por Einstein parecia ser dispensável.

### 1.3.2 A Métrica do Espaço-tempo e o Elemento de Linha

Tensores são objetos definidos sobre uma entidade geométrica denominada "variedade"<sup>5</sup>. Quando essa variedade é equipada de uma quantidade chamada métrica (que descreve o espaço-tempo), como ocorre na relatividade geral, torna-se um caso particular e passa a ser denominada "variedade riemanniana".

Uma métrica pode ser definida como um tensor covariante simétrico de grau 2, normalmente representado por  $g_{\mu\nu}(x)$ . Como o próprio nome indica, esta quantidade está associada a medidas geométricas fundamentais, como distância, comprimento e ângulo. O tensor métrico possui as três propriedades necessárias para se caracterizar um espaço completamente, numa análise local, ou seja,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu} & \Rightarrow & \text{simetria,} \\ g &= \det(g_{\mu\nu}) \neq 0 & \Rightarrow & \text{determinante diferente de zero,} \\ g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} &= \delta_{\nu}^{\mu} & \Rightarrow & \text{possui elemento inverso.} \end{aligned}$$

A quantidade  $ds^2$ , denominada elemento de linha, representa uma distância infinitesimal entre dois pontos  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  e é expressa em termos da métrica por meio da equação

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (1.24)$$

onde os índices  $\mu$  e  $\nu$  variam de 0 a 3.

---

<sup>5</sup>Definir variedade com clareza é uma tarefa árdua e demanda mais esforço que se pretende dispensar ao assunto. Grosso modo, pode-se dizer que uma variedade é algo que, localmente, se assemelha a um espaço euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ .

O exemplo de elemento de linha mais simples é para o caso de um espaço plano definido sobre uma variedade 4-dimensional e dotado de uma métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , denominada de métrica de Minkowski. Sendo o espaço plano, existe, por definição, um sistema de coordenadas especial que cobre toda a variedade com a métrica diagonal

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diagonal } (+1, -1, -1, -1) , \quad (1.25)$$

tal que o elemento de linha associado a esse espaço de Minkowski é um caso particular da equação (1.24), ou seja,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu . \quad (1.26)$$

Como o espaço-tempo é plano, pode-se usar o sistema de coordenadas especial denominado sistema de coordenadas de Minkowski, expresso por

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z).$$

Portanto, o elemento de linha de Minkowski assume a forma característica

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \quad (1.27)$$

### Obtendo a Métrica de FLRW

A métrica que se deseja obter aqui descreve um Universo que seja globalmente homogêneo e isotrópico e que evolua com o tempo. A forma geométrica mais intuitiva para esse caso é uma esfera. Como o espaço-tempo é 4-dimensional, a geometria é de uma hipersfera cujo raio pode ser representado por um vetor contravariante  $X^\mu$ , tal que

$$X^2 = g_{\mu\nu}(x) X^\mu X^\nu . \quad (1.28)$$

Se, não apenas para o vetor  $X^\mu$  mas para todos os vetores  $X$ , tem-se  $X^2 > 0$  diz-se que a

métrica é **positiva-definida** e para  $X^2 < 0$  é **negativa-definida**. Para qualquer outro caso a métrica é dita **indefinida** [20].

Prosseguindo, desde que o Universo seja homogêneo e isotrópico, como sustentam as observações, a seção espacial para cada hiper-superfície de tempo constante  $t$  deve ser homogênea. Daí, a métrica descrita pela equação (1.24), pode ser reescrita com o termo que representa a contribuição temporal isoladamente, ou seja,

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}(x) dx^i dx^j , \quad (1.29)$$

onde os índices latinos  $i$  e  $j$  referem-se à parte espacial. Esta equação pode ser reescrita utilizando-se uma função  $\gamma_{ij}$  que depende apenas de  $(x^1, x^2, x^3)$  [21], ou seja,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}(x) dx^i dx^j , \quad (1.30)$$

onde  $a(t)$  é uma quantidade que depende apenas do tempo. A parte espacial desta equação pode ser representada por  $d\sigma^2$ , tal que,

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}(x) dx^i dx^j , \quad (1.31)$$

sendo  $\gamma_{ij}$  a métrica do 3-espaco considerado homogêneo e isotrópico. Por esta característica, apoiando-se em um teorema da geometria diferencial, este deve ser um espaco de curvatura constante [13, 21]. Nesse caso, o tensor 3-dimensional de quarta ordem de Riemann pode ser construído a partir da métrica, e não de suas derivadas. Deste modo, obtém-se

$$R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) , \quad (1.32)$$

onde  $k$  é uma constante. Para que o tensor de Riemann 3-dimensional da contribuição espacial dada pela (1.31) tenha a forma (1.32), a escolha de  $\gamma_{ij}$  deve obedecer a métrica expressa por

$$d\sigma^2 = \left[ 1 + \frac{1}{4}k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right]^{-2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (1.33)$$

A representação para o elemento de linha, fica, portanto:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{\left[1 + \frac{1}{4}k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right]^2}. \quad (1.34)$$

Para o caso de coordenadas esféricas, tal que  $x_1 = r \sin\theta \cos\phi$ ,  $x_2 = r \sin\theta \sin\phi$  e  $x_3 = r \cos\theta$ , a equação acima torna-se

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.35)$$

onde

$$r^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\left[1 + \frac{1}{4}k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right]^2}.$$

A equação (1.35) é conhecida como métrica de FLRW e a constante  $k$  é o parâmetro de curvatura, podendo assumir os valores 1 (caso da esfera), 0 (seção euclidiana - caso plano) e  $-1$  (pseudo-esfera). A quantidade  $a(t)$  é denominada fator de escala e está relacionada à evolução do Universo. Escrever a métrica em termos de  $a(t)$  significa trabalhar num referencial que evolui com o Universo, ou seja, um sistema de referência que está em repouso em relação ao fluido utilizado na descrição de sua dinâmica. Este referencial é denominado comóvel.

## 1.4 A Lei de Hubble e o Universo em Expansão

Dezessete anos antes que Hubble obtivesse resultados convincentes de que o universo estaria expandindo, o astrônomo Vesto Slipher<sup>6</sup> já havia observado uma nebulosa em espiral que apresentava um desvio espectral. Ele conseguiu calcular a velocidade com que Andrômeda se aproximava do Sol e, em 1917, obteve as velocidades de outras galáxias, mostrando, inclusive, que a maior parte delas estaria se afastando.

Somente em 1929, por meio de um telescópio inaugurado naquela data, Edwin Hubble observou que o desvio das linhas espectrais das galáxias, afastadas o suficiente para

---

<sup>6</sup>Slipher usou o efeito Doppler óptico para fontes luminosas em movimento para medir a velocidade de aproximação ou de afastamento das galáxias.

que se pudesse desprezar irregularidades locais, ocorriam na direção do vermelho. Esse fato permitiu concluir que as galáxias estariam se afastando entre si bem como da Via Láctea. Utilizando dados observacionais de 24 galáxias que apresentavam um desvio para o vermelho de aproximadamente 0,003 [32] e a análise dos dados obtidos por Slipher, foi possível estabelecer uma relação entre a distância  $r$  e a velocidade radial  $v$  para nebulosas extra-galácticas [18]. A expressão matemática

$$v = H(t) r \quad (1.36)$$

expressa esta relação, na qual  $H(t)$ , que será definido posteriormente, é um dos parâmetros fundamentais da cosmologia, pois está relacionado à idade do Universo, e é denominado parâmetro de Hubble<sup>7</sup>.

A equação (1.36) pode ser obtida, considerando o princípio cosmológico, por meio da distância física própria  $r(t)$ , tal que

$$r(t) = r_0 a(t) \quad (1.37)$$

onde  $r_0$  representa um valor constante para um par de galáxias, num sistema de coordenadas comóveis. Tomando a derivada da equação acima com relação ao tempo obtém-se

$$\frac{dr(t)}{dt} = r_0 \frac{da(t)}{dt} = r_0 \dot{a}(t).$$

E como  $\frac{dr(t)}{dt} = v(t)$  e  $r_0 = \frac{r(t)}{a(t)}$ , pela própria equação (1.37),

$$v(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} r(t).$$

E definindo-se o parâmetro  $H(t)$  em termos da quantidade  $a(t)$ , tal que

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.38)$$

---

<sup>7</sup>Em geral usa-se  $H_0$  quando se deseja representar o parâmetro de Hubble para os dias atuais, passando a denominá-lo constante de Hubble.

obtém-se a equação que relaciona distância e velocidade dada pela (1.36).

## 1.5 Equações da Dinâmica na Cosmologia de FLRW

Como observado em seções anteriores, a dinâmica do Universo é descrita pelas equações de campo de Einstein. Em geral, não é uma tarefa simples obter soluções para estas equações que são não-lineares. Entretanto, pode-se obter soluções simples quando se considera algumas simetrias, como é o caso, por exemplo, da métrica de FLRW, dada pela (1.35).

Representando o tensor de Einstein dado pela (1.13) na forma de um tensor misto, as equações de campo podem ser reescritas como segue:

$$G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}R\delta_{\nu}^{\mu} = 8\pi G T_{\nu}^{\mu}. \quad (1.39)$$

Em seguida, calculando o tensor e o escalar de Ricci dados pelas relações (1.4) e (1.5), tal que,

$$R_0^0 = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (1.40)$$

$$R_j^i = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)\delta_j^i, \quad (1.41)$$

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \quad (1.42)$$

obtém-se a contribuição devida à geometria das equações que descrevem a dinâmica do Universo, para a métrica de FLRW, ou seja,

$$G_0^0 = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \quad (1.43)$$

$$G_j^i = \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)\delta_j^i. \quad (1.44)$$

Para calcular a contribuição devida à matéria é necessário ditar seu comportamento. Pelas considerações de homogeneidade e isotropia o tensor  $T_{\nu}^{\mu}$  deverá assumir uma forma diagonal, que pode ser escrita de maneira conveniente, no referencial de repouso do fluido,

como  $T_{\nu}^{\mu} = \text{Diag}(\rho, -p, -p, -p)$ . Esta forma representa um fluido ideal<sup>8</sup> de pressão  $p$  e densidade  $\rho$ , tal que o tensor de energia-momento é escrito, em termos da quadrivelocidade do fluido, como

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} - p\delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1.45)$$

Deste modo, a relação (1.39) fornece duas equações independentes, uma referente à componente temporal e outra para as quantidades espaciais. Portanto,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (1.46)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p, \quad (1.47)$$

conhecidas como equações de Friedmann, quando combinadas com a equação de estado do fluido, determinam completamente o fator de escala, a densidade de energia e a pressão.

Combinando estas duas equações, obtém-se a importante relação para a quantidade  $\ddot{a}/a$ , que pode ser interpretada como a aceleração do Universo, ou seja,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.48)$$

Observa-se que, se a matéria obedece a condição  $(\rho + 3p) > 0$  implica  $\ddot{a} < 0$ , ou seja, um período de desaceleração. Porém, para que se tenha um Universo acelerado hoje, como os dados observacionais indicam, necessariamente  $\ddot{a} > 0$ , e imediatamente deve-se impor que  $(\rho + 3p) < 0$ . Significa dizer que, neste cenário, mantendo a RG como uma teoria intocável, a única forma de se obter um Universo em expansão acelerada é considerar um fluido cuja equação de estado obedeça a condição  $p/\rho < -1/3$ . Esta questão será melhor discutida no capítulo seguinte.

---

<sup>8</sup>Para caracterizar completamente este fluido é necessário conhecer a equação de estado  $p = p(\rho)$  que relaciona a densidade e a pressão.

## 1.6 Os Parâmetros Cosmológicos

A quantidade e a composição de matéria/energia no Universo são fundamentais para compreender sua dinâmica. Deste modo, os modelos cosmológicos dependem das quantidades denominadas "parâmetros cosmológicos", que caracterizam a dinâmica e curvatura do Universo. Provavelmente, o mais conhecido dentre eles é o parâmetro de Hubble,  $H(t)$ , definido na equação (1.38). Esta quantidade está relacionada com a velocidade da expansão em termos do fator de escala e é por meio dela que se estima a idade do Universo.

Quando se deseja referir ao valor desse parâmetro hoje, convencionalmente, reescreve-se a equação acima utilizando o índice 0 e trocando o fator de escala  $a(t)$  por  $a(t_0) \equiv a_0$ <sup>9</sup>. Portanto, a relação será  $H_0 \equiv \dot{a}_0/a_0$ . Os pesquisadores muitas vezes preferem escrever o parâmetro  $H$  em termos da quantidade  $h$ , o parâmetro de Hubble adimensional, e em unidades de  $100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ . Daí,

$$H_0 \equiv h \text{ 100 km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}. \quad (1.49)$$

Conforme dados obtidos do WMAP nos últimos cinco anos [41] e de pesquisas da radiação cósmica de fundo (RCF), a medida atual de  $h$  indica um valor [24] de 0.719, assumindo, em geral, valores compreendidos no intervalo de 0.60 a 0.75. Das observações do projeto HST [43], o parâmetro  $h$  está compreendido entre 0.64 e 0.80.

A densidade crítica,  $\rho_c$ , representando o valor limítrofe entre um Universo em expansão e um Universo em contração, é outra das quantidades consideradas fundamentais para a cosmologia. Pode ser expressa em termos da constante de Hubble, tomando  $k = 0$  na equação (1.46). Definida num tempo  $t$  qualquer como

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (1.50)$$

tem sua representação para o tempo presente,  $\rho_{c0}$ , apenas escrevendo  $H_0$  ao invés de

---

<sup>9</sup>Com uma escolha de escala adequada pode-se escrever o fator de escala atual como sendo a unidade, ou seja,  $a_0 = 1$ .

$H(t)$ . A determinação de seu valor é muito útil no cálculo dos parâmetros de densidade, que serão introduzidos a seguir, permitindo avaliações quanto ao conteúdo material do Universo. Estes parâmetros são representados pela razão da densidade da componente  $i$  relativamente à densidade crítica, ou seja,

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} , \quad (1.51)$$

onde  $i = M$  indica matéria,  $i = R$  é radiação e  $i = \Lambda$  significa constante cosmológica. Deste modo, cada parâmetro de densidade pode ser escrito individualmente ficando, portanto,

$$\Omega_M = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_M , \quad (1.52)$$

$$\Omega_R = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_R , \quad (1.53)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\Lambda . \quad (1.54)$$

A soma de todos os constituintes fornece o parâmetro de densidade total,  $\Omega$ , dado por

$$\Omega \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho , \quad (1.55)$$

onde  $\rho(t)$  é a densidade total, a soma de todas as contribuições, ou seja,  $\rho = \sum_i \rho_i$ . Em termos dos parâmetros de densidade fica

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda . \quad (1.56)$$

Como o parâmetro de densidade total está particularmente relacionado à curvatura da seção espacial, é importante dispensar uma atenção mais cuidadosa ao assunto.

Partindo da equação de Friedmann (1.46) e dividindo todos os termos por  $H^2$ , obtém-se:

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho - \frac{k}{a^2 H^2} . \quad (1.57)$$

Definindo

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.58)$$

como sendo o parâmetro de curvatura, e, usando a equação da densidade crítica, dada pela (1.50), obtém-se

$$\Omega + \Omega_k = 1, \quad (1.59)$$

lembrando que  $\Omega$  é a soma de todas as contribuições, ficando, portanto,

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (1.60)$$

Para  $k = 0$ , onde se tem um Universo plano, obtém-se  $\Omega = 1$ . Portanto, para o caso da seção espacial ser plana, a densidade crítica é exatamente a densidade total, ou seja, a soma de todas as contribuições, que remete à unidade. De fato, a análise de  $\Omega$  para os dois outros casos implica que, para  $\Omega > 1$  o Universo é fechado, com  $k = 1$  e quando  $\Omega < 1$  o Universo é aberto, sendo  $k = -1$ .

Outra quantidade importante relacionada à medida da aceleração do Universo pode ser obtida da equação (1.48). Usando os parâmetros calculados anteriormente para o tempo presente e multiplicando toda a equação por  $1/H_0^2$ , obtém-se

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} = -\frac{1}{2} \sum_i (1 + 3\alpha_{i0}) \frac{8\pi G}{3 H_0^2} \rho_{i0},$$

onde considerou-se que, para cada componente  $i$ , a pressão se relaciona linearmente com a densidade, ou seja,  $p_i = \alpha_i \rho_i$  (por exemplo, para a matéria  $\alpha_M = 0$ , para a radiação  $\alpha_R = 1/3$  e para a energia do vácuo  $\alpha_\Lambda = -1$ ).

Usando a (1.50) e em seguida a (1.55) na equação acima, obtém-se, ainda

$$-\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} = \sum_i \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \alpha_{i0} \right) \Omega_{i0},$$

onde  $\Omega_{i0}$  representa a contribuição da componente  $i$  para o parâmetro de densidade hoje.

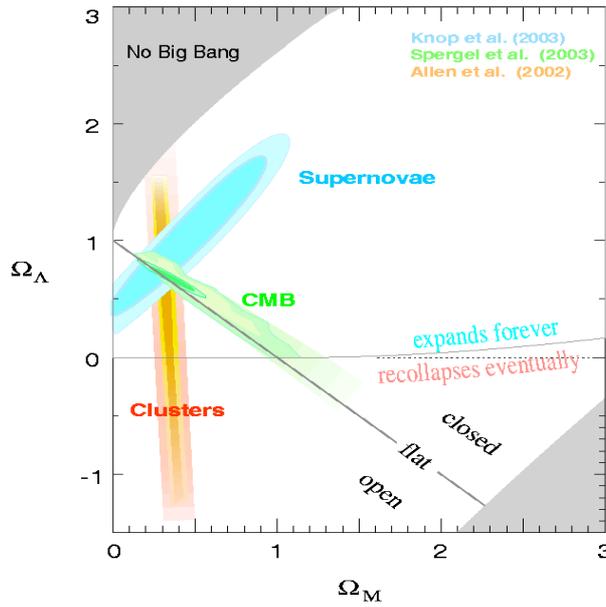


Figura 1.1: Resultados recentes da relação  $\Omega_M$ - $\Omega_\Lambda$  para três métodos diferentes mostrando, pela região de interseção, um favorecimento para  $\Omega_M \approx 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda \approx 0.7$  e  $\Omega_0 \approx 1.0$ .

Definindo

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2}, \quad (1.61)$$

chega-se, por fim, à relação

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_i (1 + 3\alpha_{i0}) \Omega_{i0}, \quad (1.62)$$

que representa o parâmetro de desaceleração medido hoje. De forma geral, o valor deste parâmetro pode ser avaliado para qualquer tempo apenas reescrevendo a equação anterior sem os subscritos 0 e considerando um tempo  $t$  qualquer.

Como foi dito anteriormente, o parâmetro de densidade  $\Omega$  é a razão da densidade de matéria referente ao conteúdo material do Universo pela sua densidade crítica. Projetos de detecção de SN Ia [5, 42] indicam que o parâmetro de desaceleração é negativo, implicando que o Universo hoje deve ser dominado por um fluido de pressão negativa. Além disto, estas observações apontam para um Universo plano, sendo  $\Omega = 1$ , e um percentual de matéria/energia tal que  $\Omega_{M0} \sim 0,3$  e  $\Omega_{\Lambda0} \sim 0,7$ . O gráfico mostrado na figura (1.1) relaciona os dados de três observações diferentes (supernovas, RCF e aglomerados),

indicando o favorecimento de um Universo plano, como se vê pela região de interseção.

Apesar de todo o ferramental matemático que foi desenvolvido no século passado, a cosmologia ainda está numa fase muito inicial no que tange ao estudo da descrição do Universo. Existem diversos modelos cosmológicos cuja elegância matemática impressiona. Apesar disto, mais que apenas propor modelos elegantes existe a necessidade de confrontar tais propostas com a realidade. Os grandes aliados da cosmologia teórica atual são os dados observacionais advindos de projetos audaciosos que buscam conhecer melhor o Universo. Através destas pesquisas se obtém informações bastante ricas acerca dos parâmetros cosmológicos e da dinâmica do Universo, fazendo com que os modelos sofram adaptações à medida em que se adquirem novos dados. A questão da expansão acelerada, por exemplo, tem pouco mais de 10 anos e os modelos cosmológicos que surgiram depois disso tiveram que levar em consideração este fato. Mais recentemente, pesquisas com alto índice de confiabilidade indicaram que um modelo de Universo descrito por meio de um fluido exótico que violasse a condição de energia fraca seria provável [78]. Fluidos com esta característica podem ser estudados no âmbito da cosmologia e denominam-se "fantasmas", assunto deste trabalho.

## Capítulo 2

# As Componentes Escuras do Universo e o Cenário Fantasma

### 2.1 Introdução

Evidências observacionais da expansão acelerada do Universo podem indicar a necessidade de uma nova componente, provavelmente de característica não-bariônica, com pressão negativa, em oposição à força atrativa da gravitação. Em contrapartida, medidas da velocidade de rotação de galáxias, dentre outras evidências, também sugerem a presença de matéria não-visível para se obter resultados teóricos condizentes com as observações. Por este motivo, as componentes do Universo ditas **escuras** são objeto de pesquisa em toda parte do mundo, tendo se tornado uma das maiores incógnitas da cosmologia moderna.

Este capítulo aborda as questões referentes ao conteúdo material do Universo, sua contribuição no processo de formação de estruturas e apresenta brevemente os resultados de alguns modelos que visam reproduzir os dados observacionais. A seção final dedica-se a uma breve introdução à cosmologia fantasma.

## 2.2 A Descoberta de Matéria Invisível

A maior parte das informações sobre os corpos celestes é proveniente da luz que estes corpos emitem ou da luz que absorvem, medidas por meio de aparelhos ópticos. Com o avanço tecnológico, instrumentos modernos observam os astros com o objetivo de captar a emissão de fótons destes objetos, realizando medidas na faixa dos raios-X e raios gama, por exemplo. Estes corpos emitem e absorvem partículas de luz de maneira diferente dependendo de sua composição. Portanto, alguns absorvem (ou emitem) mais que outros e isto faz com que a eficiência seja diferenciada. Esta quantidade pode ser escrita em termos da razão massa-luminosidade ( $M/L$ ) dos corpos astronômicos. Devido à variação desta medida entre as amostras, por que não imaginar que possa existir algum tipo de matéria que não absorva e nem emita luz?

Medidas da massa total de objetos conhecidos excederam enormemente sua massa luminosa estimada e, atualmente, grande parte da comunidade científica acredita que pode haver matéria que se comporte de maneira diferente, isto é, que não interaja com a radiação, ou, que a interação ocorra de forma ainda desconhecida.

Em 1932, o astrônomo Jan Henrik Oort observou o movimento vertical de estrelas e calculou a aceleração da matéria. Posteriormente, estendeu o cálculo para todas as estrelas próximas conhecidas. Para sua surpresa, a densidade destas estrelas não era suficiente para explicar seus movimentos. No ano seguinte foi a vez de Fritz Zwicky, por meio de observações do aglomerado de Coma, concluir que, de maneira a assegurar que as galáxias se mantivessem conectadas ao aglomerado seria necessária grande quantidade de matéria **invisível**. Estes dados contribuíram para a proposta de que haveria, obrigatoriamente, a necessidade de um acréscimo de matéria que, contrariamente ao que se espera pelo senso comum, não emite nem absorve luz.

Além da astronomia, a cosmologia também exerceu um papel muito importante na proposição da matéria faltante. A confirmação da expansão do Universo abriu as portas para o cálculo de quantidades fundamentais necessárias para se estudar sua dinâmica. Através da velocidade da expansão pode-se calcular a densidade crítica e fazer previsões sobre o futuro do Cosmo. Por exemplo, se a densidade média for menor que a densidade

crítica, o Universo tenderá para uma expansão eterna. Caso contrário, em algum momento a expansão cessará e poderá conduzir a um cenário de colapso.

A estimativa da densidade média pode ser feita usando a massa das galáxias e do gás presente entre uma e outra galáxia. O que se vê é que a densidade média da matéria luminosa é apenas uma pequena fração da densidade crítica.

Na década de 1970, os primeiros dados do desvio para o vermelho de galáxias luminosas mostraram que sua distribuição não se dava de maneira aleatória, mas em forma de filamentos. Curiosamente, o espaço entre esses filamentos é, em sua maior parte, destituído de galáxias. Nessa época já se supunha que a formação de estruturas no Universo tivesse ocorrido lentamente, por meio da aglomeração gravitacional originada de pequenas flutuações na densidade de matéria. A amplitude dessas flutuações deveria ser de, no mínimo, um milionésimo da própria densidade no instante da recombinação para que se pudessem formar as estruturas observadas hoje.

A discussão sobre a quantidade de matéria presente em populações de estrelas, nas galáxias e em aglomerados é bastante antiga. Em 1915, o astrônomo Ernst Julius Öpik mostrou que a soma de todas as populações estelares conhecidas, juntamente com o gás interestelar, seria suficiente para explicar as oscilações verticais de estrelas sem a necessidade, portanto, de matéria adicional.

Ao longo dos anos, muitas estimativas foram realizadas com resultados diversos, grande parte delas confirmando a versão de Öpik e outras com propostas que fugiam ao tradicional. Zwicky e outros pesquisadores, com base em seus trabalhos, perceberam a necessidade de matéria invisível no Universo, diferentemente da posição assumida por Öpik. Porém, houve muita resistência da comunidade científica em aceitar esse prognóstico e o trabalho de Zwicky ficou esquecido por muitos anos.

### **2.2.1 Evidências de Matéria Escura no Universo**

Duas evidências poderiam ser consideradas como prova razoável da existência de matéria escura (ME) no Universo. A primeira delas diz respeito à curva de rotação de galáxias e a segunda trata do efeito denominado de lente gravitacional.

### Curva de Rotação de galáxias

Medidas da razão massa-luminosidade ( $M/L$ ) e da distribuição de massa em galáxias espirais apresentaram valores muito altos para a velocidade de rotação calculada pela lei de Kepler [22]. Verificou-se que essa velocidade aumenta lentamente com a distância do centro da galáxia e permanece quase constante para distâncias radiais entre 16 e 30 kpc.

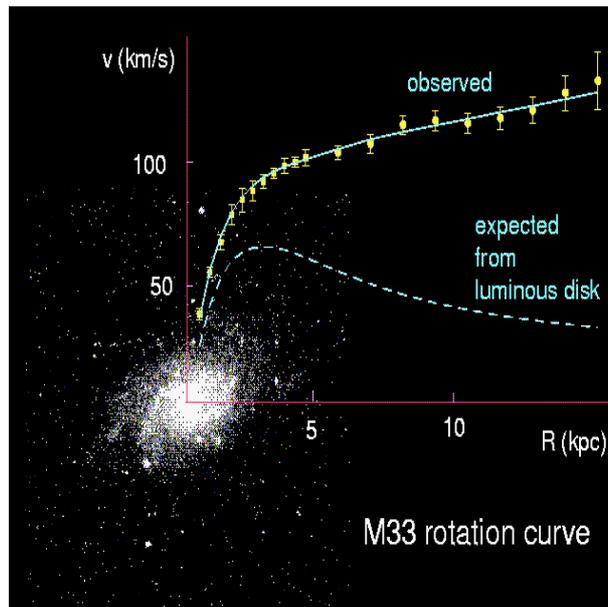


Figura 2.1: Traçado da curva de rotação de galáxias.

A presença de matéria escura tem sido estabelecida através da determinação da velocidade de rotação  $v(R)$  em galáxias individuais. Pela terceira lei de Kepler, tem-se que

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad (2.1)$$

onde  $R$  é uma dada distância radial do centro da galáxia. Quando se afasta do centro da galáxia o suficiente para que toda a matéria visível esteja no interior de uma esfera, o que se esperaria, sendo a massa  $M$  aproximadamente constante, seria uma relação entre  $v$  e  $R$  tal que  $v \propto R^{-1/2}$ . Porém, o que se obteve foi um comportamento do tipo  $v \simeq \text{constante}$ , conduzindo a uma relação  $M(R) \simeq R$ . A figura (2.1) mostra que a curva traçada por meio dos dados observacionais sugere que a massa das galáxias continua a aumentar mesmo se não houver vestígio algum de componente luminosa que possa justificar esse aumento.

Comparando a curva teórica com a observacional, vê-se um afastamento substancial no valor da velocidade quanto maior o valor de  $R$ .

Uma característica interessante e bastante importante sobre a distribuição de ME está associada à sua preferência por estruturas como galáxias. Enquanto as observações mostram que essa componente aumenta com a distância para o caso de galáxias, em aglomerados parece ocorrer o inverso, ou seja, a quantidade dessa matéria diminui com a distância.

### **Lentes gravitacionais**

Outra evidência da possível existência da componente de matéria escura no Universo é o denominado efeito de lentes gravitacionais [23]. De acordo com a RG, o espaço-tempo é curvado na presença de matéria e desse modo o fenômeno das lentes gravitacionais ocorre porque a gravidade desvia o caminho do raio de luz [24, 25].

As lentes gravitacionais se formam quando a luz de um objeto-fonte distante é desviada em torno de um objeto massivo, como galáxias e aglomerados, que se encontra entre o objeto-fonte e o observador. Nota-se que a matéria visível, devido a efeitos gravitacionais, não é capaz de provocar a deformação na geometria, suficiente para se produzir os efeitos de lentes que são observados. Na tentativa de resolver esta questão acrescenta-se uma componente de matéria desconhecida. A distribuição dessa matéria nas lentes pode ser mapeada modelando-se as distorções das galáxias, o que auxilia na descrição de suas propriedades. Portanto, a ideia de uma componente escura para a matéria é bastante pertinente.

Apesar de inúmeras pesquisas, até o momento não se conhece a verdadeira natureza da ME [27]. Entretanto, é possível, por meio de simulações numéricas, mostrar que a matéria fria<sup>1</sup> possibilita a formação de estruturas de superaglomerados tipo filamentos que se observa hoje. Mesmo assim, pode-se especular a respeito de sua natureza, aguardando que futuros experimentos possam encontrar a partícula dessa matéria invisível confirmando, assim, as propostas teóricas.

---

<sup>1</sup>A matéria escura é classificada quanto a sua natureza como "fria" ou "quente". Pode-se caracterizar a matéria escura quente por sua velocidade tipicamente relativística, ou seja,  $v \sim c$ . Por outro lado, a matéria escura fria tem sua velocidade típica não-relativística, tal que  $v \ll c$ .

## 2.2.2 Especulações sobre a Natureza da Matéria Escura e seu Papel na Evolução do Universo

O estudo da evolução do Universo, de modo geral, depende da quantidade e da natureza da matéria e energia bem como da maneira como se distribuem. A proporção, composição e seu papel no desenvolvimento das estruturas [26] observadas nos dias atuais são objeto de estudo da cosmologia. A utilização do satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE), da sonda *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP), de pesquisas como o espectrógrafo *2dF Galaxy Redshift Survey* (2dFGRS), dentre outros tantos, visa esclarecer dúvidas de caráter fundamental para a cosmologia. Por exemplo, até o presente não se tem explicação definitiva para as questões relacionadas ao conteúdo material do Universo. A natureza da energia escura, ou mesmo sua existência, permanece uma incógnita. O que se tem de mais valioso para tentar explicar a dinâmica do Universo são os dados observacionais. Um dos grandes aliados dos pesquisadores é o registro deixado pelo processo de desacoplamento da matéria-radiação nos primórdios do Universo. Essa "impressão", um tipo de radiação cuja frequência vibra na faixa das microondas, é denominada Radiação Cósmica de Fundo (RCF)<sup>2</sup>, descoberta em 1964 [28].

Para efeito de estudo, o processo de evolução do Universo pode ser dividido em 3 fases principais [34, 35], considerando que existem, para tanto, ao menos 3 componentes que evoluem de maneira diferente com  $z$ , o desvio para o vermelho cosmológico.

*1ª Fase*  $\rightarrow z > 10^4$  e  $t < 10^4$  anos. Nessa fase o Universo é dominado por radiação e as partículas existentes são fótons e neutrinos. Durante esta fase o espectro de partículas relativísticas cresce com a temperatura.

*2ª Fase*  $\rightarrow 0,2 < z < 10^4$  e  $10^4$  anos  $< t < 10^{10}$  anos. Nesse período o Universo entra numa fase denominada de era da matéria. É a fase em que a matéria se aglomera e as estruturas se formam.

*3ª Fase*  $\rightarrow z < 0,2$  e  $t > 10^{10}$  anos. Depois de passar pelo período no qual as estruturas se formaram, o Universo entra na fase atual, cuja característica principal é o fato de estar em expansão acelerada.

---

<sup>2</sup>Tradução do inglês para o português do termo *Cosmic Microwave Background Radiation* (CMBR).

A questão de que somente 4% da densidade crítica do Universo é de origem bariônica induz à afirmação de que a ME que se observa é de característica não-bariônica. Além disso, para explicar o platô que aparece na curva de rotação de galáxias ou mesmo o processo de crescimento de estruturas a partir de pequenas flutuações de densidade (dados do COBE e experimentos da RCF apontam para  $\delta \sim 10^{-5}$  quando  $z \sim 1, 100$ )<sup>3</sup>, os modelos que adotam somente matéria bariônica encontram dificuldades. Mais propriamente, pode-se dizer que a busca por um candidato à ME com esta característica é de fundamental importância pois nenhuma matéria contendo apenas bárions consegue reproduzir os dados observacionais.

A ideia de uma componente de característica não bariônica, que não interage com a radiação de forma convencional, abriu as portas para a procura do candidato que preencheria os requisitos básicos para descrevê-la. Nesse ínterim, duas categorias foram criadas: a matéria escura quente (MEQ)<sup>4</sup>, que propunha o neutrino como a partícula invisível e a matéria escura fria (MEF)<sup>5</sup>, na qual o áxion seria um candidato em potencial.

A MEQ consiste de partículas que viajam com velocidades ultrarelativísticas e por esse motivo o neutrino, que possui massa ínfima, seria um forte candidato. Entretanto, eles são difíceis de detectar pois interagem apenas fracamente. Projetos como o Super-Kamiokande se dedicam a estudar os neutrinos.

O problema da MEQ [36] vai além da dificuldade de detecção da partícula que a descreve. De fato, esse tipo de matéria, sabe-se, não pode explicar como as galáxias individuais se formaram a partir do *Big Bang*. As medidas realizadas pelo COBE indicam que a radiação cósmica de fundo é bastante homogênea e tais partículas, se movendo rapidamente, teriam dificuldades em formar estruturas menores que superaglomerados de galáxias.

Por outro lado, modelos que são compostos apenas de MEF também não atendem às expectativas das estruturas observadas. Esses modelos são caracterizados pela formação de estruturas, partindo de objetos pequenos que sofrem colapsos e dão origem a estru-

---

<sup>3</sup>Define-se  $\delta$ , o contraste de densidade, como  $\delta = \delta\rho/\rho$ .

<sup>4</sup>Da sigla inglesa HDM -*Hot Dark Matter*.

<sup>5</sup>Da sigla inglesa CDM -*Cold Dark Matter*.

ras maiores. Entretanto, a questão que permanece mais em aberto em teorias de MEF gira em torno de sua natureza. Esse tipo de teoria não faz previsões sobre a partícula que a compõem e nem mesmo sobre sua composição. A busca por partículas massivas que interagem fracamente, denominadas WIMP's (do inglês, *Weakly Interacting Massive Particles*), ocorre em laboratórios de aceleradores de partículas que possuem detectores altamente sensíveis. Como até o momento não foi possível encontrar tais candidatos, a procura continua.

Existem diversas outras propostas que tentam combinar modelagens de um único tipo de matéria com outras, por exemplo, acrescentando uma pequena fração de matéria escura quente com a fria [23,36]. Ademais, pesquisadores que trabalham com teorias modificadas da gravitação, como o MOND (*Modified Newtonian Dynamics*) [37–40], utilizam essas teorias como uma alternativa à matéria escura.

Mas, dizer qual dos modelos melhor descreveria a dinâmica do Universo é uma questão bastante subjetiva e ainda conduz a incansáveis pesquisas a respeito.

## 2.3 A Energia Escura

Dados observacionais recentes de Supernovas tipo Ia (SN Ia) [5, 6, 29, 30] para altos valores do desvio para o vermelho confirmam a aceleração da expansão do Universo. Isto indica que o parâmetro de desaceleração é negativo, ou seja,  $q_0 < 0$ . As evidências apontam uma quantidade de matéria total (matéria escura e bárions) aproximadamente igual a 1/3 da densidade crítica. Para o caso de um Universo com curvatura nula a densidade total da componente de matéria e energia é igual à unidade,  $\Omega_0 = 1$ , faltando, portanto, o equivalente a 2/3 para se fechar a contabilização. Esta quantidade em falta, um tipo de energia escura, tem características bastante curiosas que serão discutidas a seguir.

### 2.3.1 A Expansão do Universo e a Componente em Falta

Em meio a tantas descobertas nos últimos anos, a medida da expansão acelerada do Universo, por meio da equação (1.61), pode ter sido a mais surpreendente. Esta quantidade  $q_0$ , proposta inicialmente para medir o processo de desaceleração da expansão, apresenta hoje nova faceta. Por outro lado, o desvio para o vermelho pode ser escrito por meio de uma expansão em torno de  $t_0$ , ou seja [44, 45],

$$z = H_0(t_0 - t) + (1 + q_0/2) H_0^2(t_0 - t)^2 \quad , \quad (2.2)$$

onde foram feitas algumas manipulações algébricas, considerou-se expansão até segunda ordem e usou-se uma escala tal que  $a_0 = 1$ . Esta relação, onde  $q_0$  aparece no termo de ordem 2, mostra que para obter uma medida apreciável deste parâmetro é necessário observar os objetos para valores mais altos de  $z$ .

Dentre os parâmetros cosmológicos discutidos no capítulo anterior, o valor de  $h$  tem sua melhor estimativa atualmente para valores próximos a 0.70 [41]. As supernovas<sup>6</sup> do tipo Ia, consideradas como velas-padrão, são excelentes fontes de luz e extremamente úteis nestas medidas. Por causa de sua intensidade luminosa é possível observar esses objetos mesmo para altos valores de  $z$ , ou seja, olhar mais longe, tal qual se objetiva.

Para atender aos dados observacionais [5, 42] que mediram um valor negativo para  $q_0$  e considerando as equações da RG, o Universo deve ser dominado por um fluido de pressão negativa, cuja equação de estado  $p = \alpha\rho$ , assume  $\alpha \sim -1$ . Essa componente, que desempenha o papel de uma gravidade repulsiva, seria o agente causador da expansão acelerada atual. Porém, os requisistos para essa componente são bastante intrigantes: uma energia que não interage de forma convencional com coisa alguma, distribuída de maneira suave e , "curiosamente", tem desempenhado um papel fundamental no presente momento, mas não no passado, quando as estruturas estavam se formando.

---

<sup>6</sup>As supernovas surgem como consequência de explosões de estrelas. Os astrônomos as classificaram quanto às linhas de absorção dos elementos químicos de seus espectros. Quando o espectro de uma SN contém uma linha de hidrogênio esta é conhecida como supernova de tipo II. Caso contrário é uma SN do tipo I. As SN de tipo Ia, além de não apresentarem a linha de hidrogênio, apresentam apenas uma única linha de silício ionizado, para 615.0 nm.

Para que essa componente escura não atrapalhasse o processo de formação de estruturas, a densidade de energia teria que mudar mais lentamente que a matéria, não tendo sido, portanto, quantidade dominante no passado. Poderia supor-se que os 70% da quantidade faltante seria matéria distribuída suavemente. Entretanto, como a pressão e a densidade possuem a mesma ordem de grandeza e para o caso de se ter matéria espera-se que  $p \ll \rho$ , a proposta de que a quantidade faltante seja algum tipo de matéria pode ser desconsiderada [35]. Por esse motivo, a componente responsável pela aceleração foi batizada de energia escura.

Para analisar como essa energia evolui considera-se o Universo permeado por um fluido de pressão  $p$  e densidade  $\rho$ , obedecendo a equação de estado  $p = \alpha\rho$ , sendo  $\alpha$  o parâmetro que caracteriza o fluido. Utilizando a equação da conservação<sup>7</sup> para uma componente  $i$ ,

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + p_i) = 0 \quad , \quad (2.3)$$

e considerando a equação de estado para tal componente, de modo que,

$$\frac{d\rho_i}{\rho_i} = -3(1 + \alpha_i)\frac{da}{a} \quad , \quad (2.4)$$

cuja solução fornece o seguinte resultado para a densidade de energia escura:

$$\rho_{ee} \propto a^{-3(1+\alpha)} \quad . \quad (2.5)$$

Para o comportamento da densidade da matéria faz-se  $p = 0$  em  $p = \alpha\rho$ , sendo a solução, simplesmente,

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad . \quad (2.6)$$

Tomando, enfim, a razão entre essas quantidades e trocando  $a^{-1}$  por  $(1+z)$ , obtém-se

$$\frac{\rho_{ee}}{\rho_m} \propto (1+z)^{3\alpha} \quad . \quad (2.7)$$

---

<sup>7</sup>Esta equação pode ser obtida por meio da equação de conservação do tensor de energia-momento, ou, pode ser construída a partir da termodinâmica, como está feito no terceiro capítulo.

O que se observa ao analisar esta relação é que, quanto mais negativo for  $\alpha$ , mais rapidamente a razão  $\rho_{ee}/\rho_m$  vai a zero no passado. Significa que, sendo um fluido exótico cuja pressão é suficientemente negativa, a EE não representa uma componente dominante em tempos remotos, não impedindo, portanto, a formação de estruturas.

### 2.3.2 Candidatos a Energia Escura

Difícil enumerar todos os possíveis candidatos a EE. Diversas propostas podem ser encontradas na literatura para tentar solucionar esta questão. Na referência [31], por exemplo, existe uma relação com pelo menos 15 candidatos que buscam explicar, por meio de soluções exóticas ou não, a questão da EE. Pode-se citar, dentre as propostas mais conhecidas, Modelos de Quintessência, k-essência, Campos de Camaleões, Teorias Modificadas da Gravitação, Gás de Chaplygin ou, ainda, Fluidos Fantasma. Cada modelo tem um tratamento específico, mas todos procuram modelar, de alguma forma, o Universo que hoje se encontra na fase de expansão acelerada.

Nas páginas que se seguem, alguns modelos cosmológicos de EE serão abordados de forma objetiva, apenas com o intuito de tecer comparações e facilitar a compreensão a respeito de modelos fantasmas.

Como a maior parte das observações aponta para um valor do parâmetro da equação de estado próximo a  $-1$ , muitos modelos tentam caracterizar o fluido utilizado para descrever a dinâmica do Universo de modo compatível com o caso da constante cosmológica.

## A Constante Cosmológica

As equações de Einstein, dadas pela (1.23), ou seja,  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , considerando um Universo de FLRW, fornecem as equações da dinâmica, conhecidas como equações de Friedmann, apresentadas no capítulo anterior. E, conforme discutido naquele capítulo, sendo  $\rho > 0$  e  $p \geq 0$ , obtém-se  $\ddot{a} < 0$ , ou seja, o Universo estaria desacelerando.

Em 1917, acreditando que o Universo deveria ser estático, Einstein introduziu no lado esquerdo de suas equações, portanto representando geometria, um termo cosmológico que faria o papel de um fator de compensação à atração gravitacional. Esta quantidade, por-

tanto, pode ser imaginada como um termo para frear o efeito de um colapso gravitacional.

Entretanto, após a constatação de que o Universo estaria de fato expandindo aceleradamente, a constante cosmológica assume outra posição, porém agora com características físicas e filosoficamente diferentes. As equações de Einstein podem ser reescritas com a constante cosmológica [48] à direita da igualdade, lado esse que representa o conteúdo material do Universo. Desse modo, a equação toma a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} . \quad (2.8)$$

Considerando um Universo homogêneo e isotrópico e tomando a equação de Friedmann que tem dimensão de aceleração,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.9)$$

e admitindo uma equação de estado tipo poeira ( $p = 0$ ), obtém-se:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_M a + \frac{\Lambda}{3} a . \quad (2.10)$$

Observando esta equação, vê-se que o primeiro termo após a igualdade representa a força gravitacional e tem caráter atrativo. O termo da constante cosmológica, ao contrário, tem características de uma força repulsiva.

A relação entre  $\rho$  e  $p$  na (2.9), oferecida por intermédio da equação de estado, determina, em parte, a dinâmica do modelo. Se  $p = \alpha\rho$ , sendo  $\rho > 0$  e  $\alpha$  podendo assumir valores negativos, o que se obtém são modelos com pressão negativa. No caso da constante cosmológica o parâmetro da equação de estado é  $\alpha = -1$ . Outra possibilidade são os modelos conhecidos como **fantômicos**, ou **fantasmas**, cujo parâmetro da equação de estado é  $\alpha < -1$  [67, 72, 73, 82]. Este é o assunto desta tese e será, portanto, melhor discutido nos capítulos que se seguem. Mas, existem modelos que utilizam uma equação de estado reparametrizada [52] onde  $\alpha$  deixa de ser uma constante e passa a ter dependência temporal. Estas propostas buscam aliviar problemas como o do ajuste fino que

acompanha os modelos de energia escura [27].

A descrição de um Universo permeado por um fluido, de fato, permite várias proposições para a equação de estado. Por exemplo, o fluido pode ser viscoso, pode ser não adiabático, ou mesmo se pode ter uma combinação de fluidos ao invés de um componente único. Modelos bem conhecidos, como aqueles que utilizam o denominado *gás de Chaplygin* (generalizado) [49–51], com uma equação de estado do tipo

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad , \quad (2.11)$$

sendo  $A$  e  $\alpha$  parâmetros positivos, também são bastante estudados.

Existem ainda modelos que propõem uma modificação na gravitação descrita pela relatividade geral, de forma que, ao invés do escalar de Ricci,  $R$ , utiliza-se uma função do tipo  $f(R)$  a ser definida [46].

## A Energia do Vácuo

No final da década de 1960, pesquisadores estudando a física de partículas [53] mostraram que as flutuações do vácuo no ponto-zero atenderiam a invariância de Lorentz. Isto significa que em sistemas de coordenadas localmente inerciais o valor esperado do tensor de energia-momento do vácuo,  $\langle T_{\mu\nu}^{Vac} \rangle$ , deve ser proporcional à métrica  $\eta_{\mu\nu}$  de Minkowski ou, para um sistema de coordenadas geral, à  $g_{\mu\nu}$ . Desta maneira, este tensor atende a relação  $\langle T_{\mu\nu}^{Vac} \rangle = -\langle \rho_V \rangle g_{\mu\nu}$ , sendo  $\langle \rho_V \rangle$  o valor esperado da densidade de energia do vácuo. Com algumas considerações [31] pode-se fazer uma estimativa do valor esperado para a densidade de energia do vácuo, tal que

$$\rho_V^{(teórico)} \simeq 10^{74} \text{ GeV}^4 \quad . \quad (2.12)$$

Por outro lado, se a densidade de energia do vácuo é responsável por originar a constante cosmológica, sabendo por meio de dados observacionais que o valor de  $\Lambda$  é da ordem do

parâmetro de Hubble medido hoje, o que se obtém é

$$\rho_V^{(\text{observado})} \simeq 10^{-47} \text{ GeV}^4 . \quad (2.13)$$

Os problemas com respeito à constante cosmológica tratada como a energia do vácuo surgem neste momento. O valor para a energia do vácuo calculado pela teoria difere por 120 ordens de grandeza do valor medido da expansão, conduzindo a uma questão conhecida como **o problema do ajuste fino**.

Portanto, apesar de parecer a opção mais simples considerar a energia associada com as partículas do vácuo quântico, que possuem uma equação de estado  $\alpha = -1$  e distribuem-se espacialmente de forma uniforme, como sendo a constante cosmológica, esta enorme divergência entre teoria e observação gera muitas discussões [35] a respeito da limitação humana para se compreender o vácuo e os mecanismos da gravitação. Modelos e teorias alternativas [54, 55], como os de quintessência, ou cordas, buscam responder às questões mais fundamentais da cosmologia, como por exemplo a questão da expansão acelerada.

## Quintessência

A ideia do vácuo quântico fazendo o papel da constante cosmológica, como visto anteriormente, implica usar o parâmetro da equação de estado como uma quantidade invariante. Entretanto, os modelos que consideram  $\alpha$  constante devem ter condições iniciais muito bem ajustadas de modo que esta quantidade não seja dominante no passado, mas apenas no presente momento. O fato de se ter um universo em expansão acelerada apenas "hoje" tem sido estudado por diversos grupos de pesquisa com observações de SN Ia distantes<sup>8</sup>.

Uma maneira para tentar aliviar esse problema é propor uma equação de estado que seja dependente do tempo, introduzindo um novo grau de liberdade para tornar a energia do vácuo dinâmica. Modelos com essa característica são, em geral, denominados *quintessência* e utilizam campos escalares minimamente acoplados à gravidade.

---

<sup>8</sup>Observações de supernova tipo Ia por meio do telescópio espacial Hubble sugerem que para  $z \gtrsim 0.5$  o Universo poderia estar desacelerando, ou seja, no passado não haviam indícios de expansão acelerada. Maiores detalhes em [6].

Supondo um campo escalar  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , a densidade de lagrangiana é dada pela equação

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \right] \sqrt{-g} \ , \quad (2.14)$$

sendo  $V(\phi)$  a energia potencial. Considerando o campo  $\phi$  como espacialmente homogêneo, ou seja,  $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t)$ , o tensor de energia-momento fica,

$$T_0^0 \equiv \rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \ , \quad (2.15)$$

$$-T_i^i \equiv p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \ , \quad (2.16)$$

onde  $\dot{\phi}^2/2$  representa a energia cinética. Usando as equações (2.15) e (2.16), o parâmetro da equação de estado fica

$$\alpha = \frac{p}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{-1 + \dot{\phi}^2/2V}{1 + \dot{\phi}^2/2V} \ . \quad (2.17)$$

Se  $\dot{\phi}^2/2V \ll 1$ , isto é, se o campo evolui muito lentamente, tem-se  $\alpha \approx -1$ , ou seja, o comportamento do campo escalar é análogo a uma energia do vácuo que varia lentamente conforme  $\rho_V(t) \simeq V[\phi(t)]$ . Por outro lado, se  $\dot{\phi}^2/2V \gg 1$ , isto é, se o campo evolui muito rapidamente, tem-se  $\alpha \approx 1$ . Além disso, de modo geral, o parâmetro da equação de estado dado pela (2.17) varia com o tempo.

Prosseguindo, a equação de movimento que governa a evolução do campo é obtida resolvendo a equação da conservação,  $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$ , utilizando a (2.15) e a (2.16). Daí,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \ , \quad (2.18)$$

onde a linha representa a derivada de  $V$  com respeito a  $\phi$ . A interpretação física para essa equação é de uma partícula de massa unitária com coordenada  $\phi$  se movendo num potencial  $V(\phi)$  sob a ação de uma força de fricção dada por  $-3H\dot{\phi}$ .

Em geral, os modelos podem ser classificados dinamicamente como de **resfriamento**, por exemplo, com um potencial que cai exponencialmente para grandes valores de  $\phi$ , ou de **aquecimento**, a exemplo de um potencial descrito em termos de um campo escalar

de massa  $m_\phi$ , ou seja,  $V(\phi) = m_\phi^2 \phi^2 / 2$ .

A solução da equação (2.18) que determina a dinâmica do campo  $\phi$  vai depender do valor de  $H$ , assim como do comportamento do potencial  $V(\phi)$ , ou seja, da maneira como esse potencial depende de  $\phi$ . Existem muitos modelos cosmológicos com campo escalar para diferentes tipos de potenciais, por exemplo,  $V_0 \exp(-\lambda\phi)$  estudado por [57], ou  $V_0 \sinh^{-\alpha}(\lambda\phi)$ , proposto por [58], ou ainda  $V_0[\exp(\alpha\kappa\phi) + \exp(\beta\kappa\phi)]$ , abordado na referência [59].

### 2.3.3 A Relação entre Matéria e Energia Escuras

Para que não haja confusão, é necessário esclarecer que a matéria e a energia escuras não são a mesma coisa, apesar de receberem denominações que possam induzir a pensar isto. Primeiramente, o argumento físico para cada uma delas é totalmente diferente. Enquanto a ME é necessária para explicar fenômenos como a curva de rotação de galáxias ou o efeito de lentes gravitacionais, a EE escura é uma proposta para se explicar a expansão acelerada. Enquanto a ME tem uma tendência de ser encontrada em maior quantidade no interior e no halo de galáxias, a EE seria um fluido distribuído por todo o Universo, sem sofrer aglomerações. Além disto, a ME possui uma equação de estado com  $\alpha = 0$ , enquanto para a EE este parâmetro deve ser mais negativo que  $-1/3$ .

Mesmo que algumas propostas de modelagem cosmológica procurem unificar as componentes de matéria e energia escuras, o efeito gerador de cada uma delas continuaria a ser bastante diferente. Apesar de contabilizarem a maior parte do conteúdo material do Universo, uma boa investigação pode mostrar que dentro da cosmologia clássica as componentes escuras do Universo foram sempre quantidades distintas.

## 2.4 Cosmologia Fantasma

### 2.4.1 Introdução

A expansão acelerada do Universo tem sido confirmada por diversas evidências observacionais diretas nos últimos anos, por exemplo através de supernovas, ou mesmo de

forma indireta, por meio de observações da radiação cósmica de fundo ou da dinâmica de estruturas cósmicas. Dentro da cosmologia padrão a possível explicação para este efeito necessita de um tipo de energia exótica que viole a condição de energia forte<sup>9</sup>. Para supernovas distantes [5, 29] as observações têm corroborado com a descrição de um Universo cujo conteúdo material dominante, caso seja descrito em termos de um fluido perfeito, possui uma equação barotrópica do tipo  $p = \alpha\rho$ , sendo  $p < 0$ .

Além disto, muitas pesquisas indicam ainda, com alto índice de confiança, que modelos de Universo em expansão acelerada seriam possíveis quando outras condições de energia são violadas e não apenas a condição de energia forte. Estas pesquisas abrem um novo leque de possibilidades de modelos teóricos que utilizem como conteúdo material um tipo de energia com características que devem ser investigadas.

Esse capítulo é uma revisão de diversos artigos [67, 69–72, 78, 85–87] que abordam a questão dos fluidos denominados **fantasmas**, em cenários cosmológicos, que é objeto de estudo nesse trabalho.

## 2.4.2 Por que *Fantasma*?

A primeira vez que surgiu na cosmologia a denominação *fantasma* foi em 2002 em artigo publicado por R. R. Caldwell [67]. Ele atribui a um fluido cuja pressão seria suficientemente negativa o nome de *fluido fantasma*<sup>10</sup>. Devido à aceleração na expansão, nas palavras de Caldwell: "*...parece então que o fluido cosmológico seria dominado por algum tipo de densidade de energia fantástica, cuja pressão é negativa, e que só teria começado a desempenhar um papel importante hoje.*"

O título de seu artigo, *Uma ameaça fantasma?*, faz alusão ao destino trágico que um modelo que utilize este tipo de fluido possa conduzir o Universo. Ainda de acordo com Caldwell "*Um fantasma é algo aparente aos olhos ou outros sentidos, mas não possui existência corpórea*", sendo uma descrição, segundo ele, "*apropriada para uma forma de*

---

<sup>9</sup>A questão relacionada à violação da condição de energia será melhor abordada mais adiante, ainda nesse capítulo.

<sup>10</sup>Não está bem definida a tradução para o português da expressão *phantomic fluid*. Alguns pesquisadores traduzem como fluido fantômico e outros como fluido fantasma. Nesse trabalho ambas serão utilizadas sem distinção.

*energia que seria necessariamente descrita por uma física não ortodoxa".*

### 2.4.3 Violando as Condições de Energia

No Universo real, o tensor de energia-momento deveria ser construído partindo de contribuições de um grande número de diferentes campos de matéria. Seria, portanto, extremamente complicado descrever de maneira exata o tensor  $T_{\mu\nu}$ , mesmo conhecendo a forma precisa da contribuição de cada campo e as equações de movimento que o governam.

O problema, na verdade, é que tem-se pouca ideia do comportamento da matéria sobre condições extremas de densidade e pressão. Portanto, há pouca expectativa de prever a ocorrência de singularidades nas equações de Einstein quando não se conhece o lado direito da igualdade. Porém, existem certas desigualdades que são fisicamente razoáveis de se assumir para o tensor energia-momento. Decorre que em muitas circunstâncias essas são suficientes para provar a ocorrência de singularidades, independente da forma exata daquele tensor.

As condições de energia que serão tratadas aqui referem-se a limites impostos ao tensor energia-momento com relação aos campos de matéria no Universo. Essas condições têm por objetivo forçar a validade das propriedades físicas desses campos. As quatro condições de energia mais conhecidas da cosmologia podem ser resumidas da seguinte forma:

- **Condição de Energia Nula - (CEN):** para qualquer vetor de campo nulo  $v^\mu$ , tem-se  $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$  ;
- **Condição de Energia Fraca - (CEf)<sup>11</sup>:** para qualquer vetor de campo do tipo-tempo  $X^\mu$ , tem-se  $T_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \geq 0$  ;
- **Condição de Energia Forte - (CEF):** para qualquer vetor de campo tipo-tempo  $X^\mu$ , tem-se  $[T_{\mu\nu} - (T/2)g_{\mu\nu}]X^\mu X^\nu \geq 0$  ;
- **Condição de Energia Dominante - (CED):** para qualquer vetor tipo-tempo  $X^\mu$  e desde que  $T_{\mu\nu}X^\mu$  não seja um vetor do tipo-espaço, tem-se que  $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ .

---

<sup>11</sup>Essa condição abrange, necessariamente, a condição de energia nula.

Como o tensor energia-momento é escrito em termos de  $\rho$  e  $p$ , isto é,  $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$ , a implicação direta para a densidade e pressão para cada caso acima será:

- **CEN:**  $\implies \rho + p \geq 0$
- **CEf:**  $\implies \rho \geq 0$  e  $\rho + p \geq 0$
- **CEF:**  $\implies \rho + 3p \geq 0$
- **CED:**  $\implies \rho \geq 0$  e  $\rho \geq |p|$

A expansão acelerada do Universo que se observa hoje [5, 6, 42, 89, 90] faz com que se busque explicações para essas evidências. Para o caso de manter a Teoria da Relatividade Geral intacta, necessita-se de um tipo de fluido que exerça o efeito de aceleração observado. Neste contexto, a condição de energia forte deve ser violada, o que implica  $p/\rho \leq -1/3$ . Existem ainda fortes evidências de que os dados observacionais favoreçam valores negativos para o parâmetro da equação de estado [67] de tal forma que a condição de energia nula seja também violada. Se isto de fato ocorrer, a densidade do fluido deverá crescer à medida em que o Universo se expande, conduzindo-o para uma singularidade num futuro finito<sup>12</sup>. Há que se observar também que existem muitos indícios de se ter uma violação da condição de energia dominante e que diversos trabalhos dedicam-se a essa questão [87].

## 2.4.4 Equações que Descrevem a Dinâmica do Fluido Fantasma

### Representação Hidrodinâmica

A expressão mais simples da hidrodinâmica que pode ser utilizada para descrever o fluido que permeia o Universo é a equação de estado

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (2.19)$$

---

<sup>12</sup>É de se notar que a singularidade devida à divergência na densidade aconteça num tempo próprio futuro, porém finito, e não assintoticamente.

onde  $\gamma = \alpha + 1$  é o índice barotrópico. O valor desse índice determina o tipo de fluido com o qual se está trabalhando. Em  $\gamma = 0$  (caso da constante cosmológica) tem-se o limite entre o fluido cosmológico considerado convencional ( $\gamma > 0$ ) e o fluido dito fantasma ( $\gamma < 0$ ). Além desta diferenciação, existem outros casos característicos determinados pelo índice barotrópico, como por exemplo,  $\gamma = 4/3$  para a radiação ou  $\gamma = 1$  sendo poeira. O caso fantasma, para o qual  $\gamma < 0$ , implica, obviamente,  $\alpha < -1$ .

Apesar de ser  $\gamma$  o índice barotrópico da equação de estado, observa-se que a maioria dos trabalhos considera o parâmetro  $\alpha$  para efeito de análises, o que também acontecerá aqui.

As equações de campo da relatividade geral para o caso de um Universo permeado por um fluido perfeito são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (2.20)$$

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.21)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu} , \quad (2.22)$$

com  $p = \alpha\rho$ .

Como foi visto no capítulo anterior, o conjunto de equações para o caso de um Universo homogêneo e isotrópico de FLRW é dado pelas equações (1.46) e (1.47),

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho , \quad (2.23)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = 8\pi G p , \quad (2.24)$$

que quando combinadas, originam a equação (1.48), ou seja,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) . \quad (2.25)$$

A simples análise de  $(\rho + 3p)$  sendo maior ou menor que zero implica um Universo em expansão acelerada ou não. Entretanto, para verificar o comportamento da densidade

com o fator de escala, é necessário recorrer à equação da conservação,

$$\dot{\rho} + 3(1 + \alpha)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0. \quad (2.26)$$

A solução desta equação fornece a relação entre  $\rho$  e  $a$ , ou seja,

$$\rho \propto a^{-3(1+\alpha)}. \quad (2.27)$$

Com este resultado, os seguintes comportamentos são observados:

- para  $\alpha > -1$   $\rightarrow$   $\rho$  e  $a$  são inversamente proporcionais;
- para  $\alpha < -1$   $\rightarrow$   $\rho$  e  $a$  são diretamente proporcionais.

A proporção direta entre o fator de escala e a densidade de energia pode indicar uma singularidade futura. Para verificar de que forma isto ocorre é preciso escrever  $\rho$  em função do tempo e analisar seu comportamento. A solução da (2.23), tomando  $k = 0$  por simplicidade, fornece a relação para  $a$  em função do tempo, ou seja,

$$a(t) \propto t^{2/3(1+\alpha)}, \quad (2.28)$$

que inserida na (2.27), fica:

$$\rho \propto t^{-2}. \quad (2.29)$$

Resumindo a análise e comparando um modelo fantasma com um não-fantasma, observa-se:

- para o fluido fantasma ( $\alpha < -1$ ) tem-se:
  - $a(t) \rightarrow \infty$  e  $\rho \rightarrow \infty$  se  $t \rightarrow 0_-$
  - $a(t) \rightarrow 0$  e  $\rho \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$
- para o fluido não-fantasma ( $\alpha > -1$ ) tem-se:
  - $a(t) \rightarrow 0$  e  $\rho \rightarrow \infty$  se  $t \rightarrow 0$

-  $a(t) \rightarrow \infty$  e  $\rho \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$ .

O resultado surpreendente para o caso fantasma mostra que  $a$  tende a infinito num tempo finito<sup>13</sup>, ou seja, quando  $t \rightarrow 0_-$ . Neste cenário, a densidade de energia também aumenta, tendendo a uma valor infinito. Este é o tipo de comportamento exatamente oposto ao do fluido não fantasma. A singularidade apresentada pelo modelo que utiliza o fluido fantasma é denominada "grande rasgo", tradução de *Big Rip* do inglês. Esta denominação foi oferecida por Caldwell e outros pesquisadores em 2002, quando analisaram o comportamento de fluidos com equação de estado  $\alpha < -1$ .

De acordo com a teoria do *Big Rip*, o Universo, expandindo aceleradamente, atingiria uma velocidade tal que toda a matéria ficaria desconectada numa incrível rapidez, violentamente. Isto começaria a acontecer com as estruturas em grande escala como os aglomerados de galáxias e rapidamente o efeito atingiria as escalas menores como galáxias, estrelas, planetas e átomos. Caldwell diz que no último momento do Universo até mesmo os átomos e os quarks seriam rasgados violentamente, tal a energia adquirida.

Obviamente, este não é um cenário muito animador. Entretanto, existem trabalhos [72] onde a EE é tratada por meio de um campo escalar, cuja escolha adequada do potencial pode desviar a ameaça fantasma à qual o Universo estaria submetido.

## Representação de Campos

Para o caso de uma representação em termos de campos, o fluido que descreve a energia escura pode ter uma densidade de lagrangiana do tipo:

$$\mathcal{L} = -(16\pi G)^{-1}R + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_f, \quad (2.30)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana da matéria, e

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (2.31)$$

---

<sup>13</sup>Na representação  $t \rightarrow 0_-$ , o sinal negativo subscrito à direita do número zero indica que  $t$  vem de um tempo inicial  $-\infty$  e tende a zero no futuro.

representa a lagrangiana da energia fantasma. A diferença entre o comportamento de um campo fantasma e de um campo considerado normal está no termo cinético, representado pelo primeiro termo à direita da igualdade na equação acima. Para o caso de um campo ordinário o termo cinético é positivo, ao contrário do que se observa aqui para o campo fantasma. Portanto, é a energia cinética negativa que difere os campos fantasmas dos demais.

As equações de campo nesse caso são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}^{\text{matéria}} + T_{\mu\nu}^{\text{fantasma}} , \quad (2.32)$$

onde  $T_{\mu\nu}^{\text{matéria}}$  é o tensor de energia-momento da matéria e radiação e  $T_{\mu\nu}^{\text{fantasma}}$  é relativo ao campo fantasma, que toma a forma

$$T_{\mu\nu}^{\text{fantasma}} = -\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\right] . \quad (2.33)$$

Portanto, a densidade de energia e a pressão na representação de campos para o fluido fantasma são:

$$\rho_\phi = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) , \quad (2.34)$$

$$p_\phi = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) , \quad (2.35)$$

de modo que  $\rho_\phi + p_\phi = -\dot{\phi}^2 < 0$ . Este resultado indica que o campo fantasma percebe a curvatura do espaço-tempo de maneira contrária ao caso da matéria comum. O parâmetro da equação de estado nesse cenário fica:

$$\alpha_\phi = \frac{-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} , \quad (2.36)$$

de onde se observa que  $\alpha_\phi < -1$  quando  $\dot{\phi}^2/2 < V(\phi)$ .

A equação de evolução do sistema, obtida a partir da (2.30) e (2.31), para esse fluido é:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - V_\phi(\phi) = 0 , \quad (2.37)$$

onde  $V_\phi(\phi) = dV(\phi)/d\phi$ . Por fim, a equação que representa a conservação, que para o caso hidrodinâmico é descrita pela (2.26), em termos do campo escalar assume a forma usual:

$$\dot{\rho}_\phi + 3(\rho_\phi + p_\phi)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (2.38)$$

A natureza bastante peculiar do campo fantasma desperta o interesse de muitos pesquisadores e requer ainda muitos estudos. A análise do comportamento de um campo fantasma depende do tipo de potencial escolhido para descrever esse campo e da escala observada. O destino trágico do Universo rumo ao *Big Rip* pode, talvez, ser contornado desde que se faça uma escolha adequada do potencial usado na solução das equações de campo.

O próximo capítulo dedica-se ao estudo da teoria de perturbações cosmológicas com aplicação, nos capítulos seguintes, aos processos de formação de estruturas em modelos fantasmas.

# Capítulo 3

## Perturbações Cosmológicas

### 3.1 Introdução

Evidências observacionais apontam para um Universo primordial bastante homogêneo e isotrópico para todas as escalas, que pode ser bem descrito pela métrica de FLRW. A evidência mais forte disto vem da isotropia da radiação cósmica de fundo. Para que se formassem as estruturas observadas hoje, como as galáxias e aglomerados de galáxias, considera-se que existiam pequenas flutuações primordiais cujas amplitudes cresceram lentamente devido à instabilidade gravitacional. Portanto, para entender o problema do crescimento dessas flutuações, os pesquisadores fazem uso de teorias de perturbações e as aplicam à cosmologia. Em geral, perturba-se um sistema para analisar questões relacionadas ao seu equilíbrio, buscando para isso compreender sua evolução, como se procede em modelos de crescimento de estruturas. Numa visão matemática, a tarefa de se fazer a teoria de perturbação cosmológica implica, no contexto da relatividade geral, resolver as equações de Einstein linearizadas num Universo cujo cenário é o da expansão.

Deste modo, para explicar as estruturas que se apresentam hoje sob a roupagem de galáxias e aglomerados de galáxias é necessário o estudo das perturbações iniciais. Na maioria dos modelos considera-se que esta perturbação é produzida num tempo muito remoto, sendo uma flutuação de pequena amplitude que cresce gradativamente em virtude

da instabilidade gravitacional. Com o decorrer do tempo, a aglomeração de matéria dá origem a regiões de maior densidade que atraem gravitacionalmente a matéria em sua vizinhança. Como resposta, a perturbação tem sua amplitude aumentada e produz um aumento da força atrativa em torno dessa aglomeração. Esse processo de amplificação é suavizado pela própria condição de expansão do universo, fazendo com que a atração gravitacional seja, em parte, neutralizada, impedindo um cenário de instabilidade exponencial.

O problema de se construir uma teoria de perturbação cosmológica, com respeito ao calibre, pode ser atacado de duas maneiras, uma delas por meio da escolha deste calibre, por exemplo, fixando-se o sistema de coordenadas. A outra possibilidade é trabalhar com uma teoria invariante por transformações de calibre. Neste contexto, as quantidades físicas da teoria, sendo todas invariantes de calibre, possibilitam uma melhor interpretação física, o que não ocorre no primeiro caso. Quando se fixa o calibre é necessário ter cautela na análise das quantidades físicas, pois uma escolha infeliz da coordenada pode produzir elementos que não são físicos. Deste modo, o resultado estaria sendo mascarado e seria preciso identificar e excluir estas quantidades, tarefa que nem sempre é simples. No método tratado em [60], baseado na proposta de J. M. Bardeen [33] na década de 1980, estuda-se as perturbações cosmológicas utilizando uma abordagem na qual se constrói quantidades que são invariantes de calibre por meio de parametrizações arbitrárias destas perturbações. Conhecido por "perturbações cosmológicas invariantes de calibre", este método é de mais simples aplicação do que o anterior [63, 65] justamente por obter-se equações onde todas as quantidades são invariantes.

A teoria de perturbação (linear) é de grande importância para a cosmologia no estudo do processo de formação de galáxias e aglomerados e pode ser aplicada desde que se considere que estas estruturas se formaram por meio de pequenas flutuações iniciais. Além disto, em estudos de anisotropia da radiação cósmica de fundo, por exemplo, a teoria de perturbação linear é bastante apropriada justamente porque até bem recentemente as flutuações observadas eram muito pequenas [64]. Ademais, além do fato de uma teoria linear ser matematicamente mais fácil de se trabalhar, possibilita cálculos computacionais

mais rápidos e precisos.

Esse capítulo é uma revisão bibliográfica baseada em referências como [25, 33, 60, 61, 63], sobre perturbações cosmológicas invariantes de calibre a nível clássico. As equações de movimento são obtidas e posteriormente aplicadas a modelos de perturbações cujas representações são hidrodinâmicas e por campo escalar, sempre para o caso fantômico.

## 3.2 Equações para o Espaço não Perturbado

Nesta seção é feita uma descrição da base<sup>1</sup> com a métrica de FLRW e escreve-se as componentes do tensor  $G_{\mu\nu}$  e  $T_{\mu\nu}$  para o espaço não perturbado. Nas seções seguintes as perturbações serão introduzidas.

As equações de Friedmann apresentadas no primeiro capítulo estão expressas em termos do tempo cósmico  $t$ . O estudo de perturbações cosmológicas será todo feito na representação do tempo conforme  $\eta$ . Esta reparametrização do tempo facilita o cálculo.

### 3.2.1 Equações de Friedmann para a Base

O Universo é descrito aqui por uma variedade pseudo-riemanniana,  $M$ , 4-dimensional, cuja métrica<sup>2</sup> é  $g_{\mu\nu}$ . O elemento de linha para a base,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

escrito em termos do tempo conforme  $\eta$ , tal que  $d\eta = a^{-1}dt$ , passa a ser

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j]. \quad (3.2)$$

A quantidade  $\gamma_{ij}$  é a métrica da base para o caso do espaço 3-dimensional, tal que,

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{\delta_{ij} dx^i dx^j}{[1 + \frac{1}{4}k \delta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta]^2}, \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>A base é a denominação que se dá ao espaço não perturbado.

<sup>2</sup>A assinatura da métrica é a mesma utilizada anteriormente, ou seja, -2.

onde  $k = 0, 1$  ou  $-1$ , correspondente à hipersuperfície  $\eta = \text{constante}$  ser plana, fechada ou aberta, respectivamente.

Para calcular as componentes  $0 - 0$  e  $i - j$  das equações de Einstein (1.39), usando a métrica (3.2) que está representada no tempo conforme, é necessário escrever as componentes  $R^\mu_\nu$ . Feito isto, as componentes não-nulas para as equações de campo fornecem a relação:

$$G_0^0 = 3 \left[ \left( \frac{a'}{a^2} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi G T_0^0 \quad (3.4)$$

$$G_j^i = \left[ \frac{2a''}{a^3} - \left( \frac{a'}{a^2} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi G T_j^i, \quad (3.5)$$

onde as quantidades com **linha** representam as derivadas com respeito a  $\eta$ . Estas são as já conhecidas equações de Friedmann, apresentadas no primeiro capítulo, porém agora expressas no tempo conforme. A solução para tais equações depende da relação entre a pressão  $p$  e a densidade  $\rho$  do fluido.

### 3.2.2 Universo Descrito por um Fluido Perfeito

O tensor de energia-momento é definido em termos de seus autovalores  $\rho$  e  $p$ , a densidade de energia e a pressão. Para grandes escalas, sendo a matéria aproximada para um fluido perfeito com quadrivelocidade  $u^\mu = (a, u^i = 0)$ , a relação que descreve o tensor  $T^\mu_\nu$  é dada pela (1.45), com a restrição  $u^\mu u_\mu = 1$ :

$$T^\mu_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - p \delta^\mu_\nu. \quad (3.6)$$

A outra equação necessária nesse estudo advém da conservação da energia. Considerando que a pressão  $p$  numa esfera de volume  $V$  em expansão é significativa, a energia total  $E = \rho V$  já não se conserva porque a pressão realiza um trabalho dado por  $-p dV$ . Pela primeira lei da termodinâmica, esse trabalho deve ser igual à mudança na energia

total. Daí,

$$dE = -p dV . \quad (3.7)$$

Tomando a diferencial de  $E = \rho V$ , tem-se

$$dE = Vd\rho + \rho dV . \quad (3.8)$$

Comparando as equações (3.7) e (3.8), obtém-se a relação  $Vd\rho = -(\rho + p) dV$ . Considerando o volume  $V \propto a^3$  chega-se, portanto, à lei de conservação<sup>3</sup>:

$$d\rho = -3(\rho + p)d \ln a . \quad (3.9)$$

A equação da continuidade<sup>4</sup> para a matéria pode ser obtida tomando-se a (3.9) com relação a  $dt$  e escrevendo  $H = \dot{a}/a$ , ou seja,

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p) H . \quad (3.10)$$

### Solução da densidade para a base

O Universo pode ser descrito por meio de um fluido perfeito, cuja equação de estado relaciona sua pressão e densidade através do parâmetro  $\alpha$ , ou seja,

$$p = \alpha \rho . \quad (3.11)$$

Desse modo, a solução para a equação (3.10) será, da mesma forma que discutido anteriormente,

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\alpha)} , \quad (3.12)$$

sendo  $\rho_0$  a constante de integração. As soluções para 3 casos interessantes são:

<sup>3</sup>Para chegar até aqui todas as relações anteriores foram obtidas mantendo-se a entropia constante.

<sup>4</sup>Para um Universo homogêneo e isotrópico pode-se obter a equação da continuidade também por meio da conservação do tensor momento-energia, isto é,  $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$ .

- matéria tipo poeira,  $p_{mat} = 0$ , fornece  $\rho_{mat} \propto a^{-3}$  ;
- radiação, onde se tem  $p_{rad} = \frac{1}{3}\rho_{rad}$ , a densidade é  $\rho_{rad} \propto a^{-4}$  ;
- constante cosmológica, onde  $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$ , acarretando  $\rho_{\Lambda} = \text{constante}$ .

### Soluções do fator de escala para a base.

A solução para o fator de escala para o caso de um espaço não-perturbado pode ser obtida introduzindo a (3.12) na equação de Friedmann (1.46), porém escrita em termos de  $\eta$ , de modo que,

$$\frac{a'^2}{a^4} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3(1+\alpha)}. \quad (3.13)$$

Como esta é uma equação que depende da curvatura espacial  $k$ , o resultado final deverá ser diferente para cada um dos 3 casos,  $k = 0, 1, -1$ . Sendo assim, uma relação geral será mostrada aqui e apenas a solução para  $k = 0$  será obtida nesse capítulo, ficando as duas outras para o capítulo seguinte.

Organizando a equação anterior obtém-se

$$a^{(-1+3\alpha)/2} \frac{da}{d\eta} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} \left(1 - \frac{3k}{8\pi G\rho_0} a^{1+3\alpha}\right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Após uma mudança de variáveis, tal que

$$y = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0}} a^{(1+3\alpha)/2}, \quad (3.15)$$

chega-se à seguinte equação

$$\int \frac{dy}{(1 - ky^2)^{1/2}} = \frac{(1 + 3\alpha)}{2} d\eta. \quad (3.16)$$

Para uma curvatura espacial nula, ou seja, para  $k = 0$ , a solução da (3.16) fica, simplesmente,

$$a = a_0 \eta^{2/(1+3\alpha)}. \quad (3.17)$$

A análise deste resultado para os valores limites de  $\alpha$ , por uma questão de conveniência,

é obtida no capítulo seguinte.

### 3.3 Introduzindo as Perturbações

O modelo que descreve a dinâmica do Universo de uma maneira mais fiel necessita considerar as perturbações. Pode-se iniciar pela perturbação da métrica, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} , \quad (3.18)$$

onde  $\delta g_{\mu\nu}$  é uma pequena perturbação e  $\bar{g}_{\mu\nu}$  é a métrica da base, ou seja, da parte não perturbada. Deste modo o elemento de linha é representado da seguinte forma:

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (3.19)$$

Pode-se classificar as perturbações da métrica em 3 categorias: perturbação escalar, vetorial e tensorial<sup>5</sup>. Elas são assim classificadas pela maneira como os campos que compõem a quantidade perturbada se comportam mediante as transformações de coordenadas na hipersuperfície de tempo constante.

No estudo dessas perturbações é necessário escrever a métrica perturbada  $\delta g_{\mu\nu}$  em termos de campos escalares, vetoriais e tensoriais. Como a métrica do espaço-tempo é, por definição, um tensor simétrico de dois índices, podendo cada qual assumir quatro possibilidades, pode-se representá-la como uma matriz  $4 \times 4$ :

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} . \quad (3.20)$$

Observando a representação matricial de  $g_{\mu\nu}$  percebe-se que existem 10 componentes distintas da métrica, correspondendo, portanto, a 10 graus de liberdade. Pela equação

---

<sup>5</sup>Essas definições de escalares, vetores e tensores são feitas em relação à seção tridimensional.

(3.18), vê-se que a métrica se relaciona proporcionalmente com a perturbação e sendo esta arbitrária<sup>6</sup> conclui-se que terá também 10 graus de liberdade.

A escolha da representação dos graus de liberdade da perturbação da métrica é feita da seguinte forma. A componente 0-0, tendo apenas um grau de liberdade, pode ser escrita como uma função escalar<sup>7</sup>, ou seja,

$$\delta g_{00} \propto 2\phi . \quad (3.21)$$

Em seguida, as componentes mistas 0-i podem ser caracterizadas como um campo vetorial, representadas por uma parte paralela, o gradiente de uma função escalar<sup>8</sup>, e outra parte transversal, o rotacional de outro campo vetorial, isto é,

$$\delta g_{0i} \propto B_{;i} + S_i . \quad (3.22)$$

Por último, as componentes i-j da perturbação da métrica, de forma análoga à análise anterior, podem ser escritas como uma soma do tipo

$$\delta g_{ij} \propto 2\psi\gamma_{ij} + 2E_{;ij} + F_{i;j} + F_{j;i} + H_{ij} , \quad (3.23)$$

onde  $\psi$  e  $E$  são campos escalares,  $F_i$  representa um campo vetorial e  $H_{ij}$  um tensor de ordem 2.

A perturbação da métrica pode ser separada conforme a ordem tensorial dos objetos que a compõem, ou seja, escalares, vetoriais e tensoriais. Nesse âmbito, considerando, como dito anteriormente, que  $\delta g_{\mu\nu}$  possui 10 graus de liberdade, necessita-se fazer a seguinte análise:

- Os campos escalares  $\phi$ ,  $B$ ,  $\psi$  e  $E$ , provenientes das equações (3.21)-(3.23), correspondem a 4 graus de liberdade;

---

<sup>6</sup>Por arbitrária entende-se que a perturbação da métrica não possui qualquer simetria, como por exemplo, esfericidade, homogeneidade ou isotropia.

<sup>7</sup>Define-se função escalar como um objeto matemático que obedece a seguinte propriedade de transformação:  $\phi'(x') = \phi(x)$ , onde  $\phi'$  representa a função na nova base de coordenada ( $x'$ ).

<sup>8</sup>O ponto e vírgula seguido da letra que indica a coordenada representa a derivada covariante com relação a determinada componente.

- Os campos vetoriais  $S_i$  e  $F_i$ , que estão sujeitos à restrição de divergência nula, têm suas 6 componentes independentes reduzidas<sup>9</sup> para 4, representando, portanto, 4 graus de liberdade;
- O campo tensorial  $H_{ij}$  que possui genericamente 9 componentes distintas, devido à simetria, sofre redução de 3 componentes. Com as imposições de traço e divergência nulos, suas componentes são reduzidas em mais 4. Desse modo, dos 9 graus de liberdade tensoriais restam apenas 2.

Nem as perturbações vetoriais nem as tensoriais apresentam instabilidades significativas para o processo de formação de estruturas. Em particular, as perturbações tensoriais descrevem as ondas gravitacionais, que são os graus de liberdade do próprio campo gravitacional. Os três tipos de perturbação da métrica são desacoplados a nível linear e por este motivo permitem o estudo separadamente. Como o presente trabalho tem por finalidade justamente estudar o processo de formação de estruturas, apenas as perturbações escalares são abordadas.

Portanto, colecionando os campos escalares  $\phi$ ,  $B$ ,  $\psi$  e  $E$ , das equações (3.21)-(3.23), o termo perturbado da métrica para o caso de perturbações escalares, representado matricialmente, fica

$$[\delta g_{\mu\nu}] = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & B_{;1} & B_{;2} & B_{;3} \\ B_{;1} & 2(\psi\gamma_{11} + E_{;11}) & 2(\psi\gamma_{12} + E_{;12}) & 2(\psi\gamma_{13} + E_{;13}) \\ B_{;2} & 2(\psi\gamma_{12} + E_{;12}) & 2(\psi\gamma_{22} + E_{;22}) & 2(\psi\gamma_{23} + E_{;23}) \\ B_{;3} & 2(\psi\gamma_{13} + E_{;13}) & 2(\psi\gamma_{23} + E_{;23}) & 2(\psi\gamma_{33} + E_{;33}) \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Usando a equação (3.24) na (3.19), o elemento de linha assume a forma mais geral, ou seja,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ (1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{;i} dx^i d\eta - [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} - 2E_{;ij}] dx^i dx^j \right\}. \quad (3.25)$$

---

<sup>9</sup>Sendo  $S^i_{;i} = 0$ , pode-se sempre colocar uma das componentes em termos das outras duas, como por exemplo,  $S^1_{;1} = -(S^2_{;2} + S^3_{;3})$ .

### 3.3.1 Quantidades Invariantes de Calibre

Para se obter as quantidades que são invariantes de calibre, considera-se a transformação infinitesimal de coordenadas

$$x^\alpha \rightarrow \hat{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \quad , \quad (3.26)$$

onde  $\xi^\alpha$  são componentes infinitesimais de um vetor. Realizando expansões até primeira ordem obtém-se

$$\delta \hat{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma - \bar{g}_{\gamma\beta} \xi_{,\alpha}^\gamma - \bar{g}_{\alpha\gamma} \xi_{,\beta}^\gamma \quad , \quad (3.27)$$

onde, novamente, as quantidades barradas referem-se à base e  $\delta \hat{g}_{\alpha\beta}$  diz respeito à nova coordenada<sup>10</sup>.

Escrevendo as componentes do vetor infinitesimal na forma  $\xi^\alpha \equiv (\xi^0, \xi^i)$ , onde  $\xi^i = \xi_\perp^i + \zeta^{,i}$  representa <sup>11</sup> a parte espacial do quadrivetor  $\xi^\alpha$ , as perturbações na nova coordenada podem ser escritas como segue:

$$\delta \hat{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a(a\xi^0)' \quad , \quad (3.28)$$

$$\delta \hat{g}_{0i} = \delta g_{0i} + a^2 [\xi'_{\perp i} + (\zeta' - \xi^0)_{,i}] \quad , \quad (3.29)$$

$$\delta \hat{g}_{ij} = \delta g_{ij} + a^2 \left[ 2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \xi^0 + 2\zeta_{,ij} + (\xi_{\perp i,j} - \xi_{\perp j,i}) \right] \quad . \quad (3.30)$$

Comparando as equações acima com as (3.21)-(3.23), verifica-se as relações

$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\xi^0)' \quad , \quad \hat{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0 \quad , \quad (3.31)$$

$$\hat{B} = B + \zeta' - \xi^0 \quad , \quad \hat{E} = E + \zeta \quad . \quad (3.32)$$

Como a transformação infinitesimal de coordenadas atribuiu aos novos campos duas funções arbitrárias  $\xi^0$  e  $\zeta$ , é possível, fixando-as de modo conveniente<sup>12</sup>, anular dois dos novos campos. Esse é um caso particular onde se fixou o calibre. Entretanto, para se ob-

<sup>10</sup>Daqui em diante sempre que aparecer a letra com um circunflexo acima representará uma quantidade na nova coordenada.

<sup>11</sup>A quantidade  $\xi_\perp^i$ , que obedece a condição  $\xi_{\perp,i}^i = 0$ , representa o 3-vetor e  $\zeta$  é uma função escalar.

<sup>12</sup>Por exemplo, fixando-se  $\zeta = -E$  e  $\xi^0 = B - E'$  obtém-se  $\hat{E} = \hat{B} = 0$ .

ter combinações lineares invariantes de calibre dessas funções define-se dois novos campos escalares,

$$\Phi = \phi - \frac{1}{a} [a(B - E')]', \quad \Psi = \psi + \frac{a'}{a}(B - E') . \quad (3.33)$$

No processo descrito acima retira-se duas importantes consequências. Primeiramente, os 4 graus de liberdade das perturbações escalares são reduzidos para apenas 2. Em segundo lugar, os campos escalares definidos na equação (3.33) são grandezas invariantes por transformações de coordenadas. Portanto, se esses campos são não-nulos num dado sistema de coordenadas pode-se afirmar que existem perturbações verdadeiras da métrica. Entretanto, para os 4 campos escalares definidos na seção anterior, não se pode fazer a mesma afirmação, pois é possível, por meio de uma transformação de coordenadas conveniente, anular alguns dos campos. Assim, as quantidades perturbadas podem, na verdade, ser um efeito de uma transformação de coordenadas, induzindo a uma aparente perturbação na métrica.

As definições dos campos escalares  $\Phi$  e  $\Psi$  nas equações (3.33) não são unívocas, isto é, existem várias formas possíveis de defini-los [60].

### 3.3.2 Perturbações Invariantes de Calibre e as Equações Gerais de Campo

Para se obter as equações perturbadas como se deseja, é necessário linearizar as equações de Einstein, para pequenas inomogeneidades no Universo de Friedmann. Para o modelo da base, usando a métrica (3.2) e definindo o parâmetro de Hubble no tempo conforme, isto é,  $\mathcal{H} \equiv a'(\eta)/a(\eta)$ , tem-se,

$$\bar{G}_0^0 = \frac{3}{a^2}(\mathcal{H}^2 + k), \quad \bar{G}_i^0 = 0 \quad \text{e} \quad \bar{G}_j^i = \frac{1}{a^2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + k)\delta_j^i . \quad (3.34)$$

Comparando as equações (3.34) com (1.39), verifica-se que o tensor energia-momento para a base deve obedecer as seguintes propriedades:  $\bar{T}_i^0 = 0$  e  $\bar{T}_j^i \propto p \delta_j^i$ . Fazer uma perturbação na métrica inicial implica, necessariamente, uma perturbação do tensor  $G_\nu^\mu$ . Mantendo a veracidade também para as equações de Einstein perturbadas, tem-se, obri-

gatoriamente, que perturbar o tensor energia-momento da base. Daí,

$$\bar{G}_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu = 8\pi G (\bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu) . \quad (3.35)$$

Por outro lado, a validade das equações (1.39) para a base, implica na relação

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G \delta T_\nu^\mu . \quad (3.36)$$

Fazendo-se uma transformação arbitrária de coordenadas, vê-se que essa equação não é tensorial. Portanto,  $\delta G_\nu^\mu$  e  $\delta T_\nu^\mu$  não são invariantes de calibre. Daí, para se construir uma teoria que seja invariante necessita-se redefinir essas quantidades. Para isso utiliza-se as relações provenientes da transformação geral de coordenadas (3.26), para uma grandeza escalar  $\phi$  e uma vetorial  $v_\mu$ ,

$$\delta \hat{\phi} = \delta \phi - \phi_{,\mu} \xi^\mu , \quad (3.37)$$

$$\delta \hat{v}_\mu = \delta v_\mu - v_{\mu,\nu} \xi^\nu - v_\nu \xi_{,\mu}^\nu . \quad (3.38)$$

Utilizando as equações (3.27), (3.37) e (3.38) obtém-se as relações invariantes de calibre<sup>13</sup> para os tensores energia-momento e de Einstein, que obedecem a relação (3.36):

$$\delta \tilde{T}_0^0 = \delta T_0^0 - (T_0^0)' (B - E') , \quad \delta \tilde{G}_0^0 = \delta G_0^0 - (G_0^0)' (B - E') , \quad (3.39)$$

$$\delta \tilde{T}_i^0 = \delta T_i^0 - \left( T_0^0 - \frac{1}{3} T_k^k \right) (B - E')_{,i} , \quad \delta \tilde{G}_i^0 = \delta G_i^0 - \left( G_0^0 - \frac{1}{3} G_k^k \right) (B - E')_{,i} , \quad (3.40)$$

$$\delta \tilde{T}_j^i = \delta T_j^i - (T_j^i)' (B - E') , \quad \delta \tilde{G}_j^i = \delta G_j^i - (G_j^i)' (B - E') . \quad (3.41)$$

A quantidade perturbada do tensor de Einstein,  $\delta G_\nu^\mu$ , depende da perturbação da métrica. Com isso, pode-se escrevê-las em termos dos 4 campos escalares dados pela equação (3.25). Além disso, usando as relações (3.33), pode-se escrever  $\phi$  e  $\psi$  em termos de  $\Phi$  e  $\Psi$ . Substituindo esses campos na equação (3.36) com os termos invariantes de

---

<sup>13</sup>As quantidades invariantes de calibre estão representadas por um til sobre a letra.

calibre, obtém-se, por fim, as equações de campo:

$$\nabla^2 \Psi + 3k\Psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = 4\pi G a^2 \delta \tilde{T}_0^0 , \quad (3.42)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{;i} = 4\pi G a^2 \delta \tilde{T}_i^0 , \quad (3.43)$$

$$\left[ (2\mathcal{H} + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}(\Phi + 2\Psi)' + \Psi'' - k\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi) \right] \delta_j^i + \quad (3.44)$$

$$-\frac{1}{2}\gamma^{ik}(\Phi - \Psi)_{;kj} = -4\pi G a^2 \delta \tilde{T}_j^i .$$

### 3.3.3 Perturbações Hidrodinâmicas

A equação (3.6), que descreve o tensor energia-momento para um fluido perfeito, quando perturbada,

$$\delta T_{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})(\bar{u}_\mu \delta u_\nu + \bar{u}_\nu \delta u_\mu) + (\delta\rho + \delta p)\bar{u}_\mu \bar{u}_\nu - \delta p \bar{g}_{\mu\nu} - p \delta g_{\mu\nu} - a^2 p \pi_{\mu\nu} ,$$

fornece as seguintes relações [33]:

$$\delta T_{00} = \bar{\rho} \delta g_{00} + \delta\rho , \quad (3.45)$$

$$\delta T_{0i} = -\bar{p} \delta g_{0i} + (\bar{\rho} + \bar{p})(\delta u_{0,i} + \delta u_{\perp i}) , \quad (3.46)$$

$$\delta T_{ij} = -\bar{p} \delta g_{ij} - a^2 [\delta_{ij} \delta p + \pi_{;ij} + \pi_{j;i} + \pi_{ij} + \pi_{ij}] , \quad (3.47)$$

Nessas equações,  $\delta\rho$ ,  $\delta p$  e  $\delta u_\mu$  são as quantidades perturbadas da densidade, pressão e quadrivelocidade, respectivamente, e  $\pi$ ,  $\pi_i$  e  $\pi_{ij}$  representam as correções dissipativas (componentes de cisalhamento), sendo  $\pi_{\mu\nu}$  conhecido como tensor de pressão anisotrópica.

A quantidade  $\delta p$  pode ser expressa em termos da entropia e da densidade perturbada,

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \delta\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S \equiv c_s^2 \delta\rho + \tau \delta S , \quad (3.48)$$

onde  $c_s$  representa a velocidade adiabática do som para a matéria hidrodinâmica e  $\tau$  é simplesmente  $(\partial p / \partial S)_\rho$ .

Para escrever as equações (3.45)-(3.47) na forma invariante de calibre, considera-se,

primeiramente, perturbações adiabáticas,  $\delta S = 0$  e o tensor  $\pi_{\mu\nu}$  nulo<sup>14</sup> [25]. Em seguida, utiliza-se as relações (3.37)-(3.41). Desse modo, chega-se às seguintes equações:

$$\delta\tilde{T}_0^0 = \delta\tilde{\rho} \quad , \quad (3.49)$$

$$\delta\tilde{T}_i^0 = a^{-1}(\bar{\rho} + \bar{p})(\delta\tilde{u}_{0,i} + \delta u_{\perp i}) \quad , \quad (3.50)$$

$$\delta\tilde{T}_j^i = -\delta\tilde{p} \delta_j^i \quad . \quad (3.51)$$

Inserindo a equação (3.51) na (3.44), para  $i \neq j$ , obtém-se  $(\Phi - \Psi)_{;ij} = 0$ , que fornece como única solução consistente, com  $\Phi$  e  $\Psi$  sendo perturbações, a igualdade  $\Phi = \Psi$ . Por fim, com o objetivo de escrever as equações invariantes de calibre para as contribuições escalares, substitui-se as relações (3.49)-(3.51) nas equações (3.42)-(3.44), ou seja,

$$\Delta\Phi + 3k\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') = 4\pi G a^2 \delta\tilde{\rho} \quad , \quad (3.52)$$

$$(a\Phi)'_{;i} = 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) \delta\tilde{u}_{0,i} \quad , \quad (3.53)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - k)\Phi = 4\pi G a^2 \delta\tilde{p} \quad . \quad (3.54)$$

Usando a relação (3.48), considerando-se as perturbações de entropia ( $\delta S \neq 0$ ), as equações (3.52) e (3.54), quando combinadas, fornecem o seguinte resultado:

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' - c_s^2\Delta\Phi + [2\mathcal{H}' + (\mathcal{H}^2 - k)(1 + 3c_s^2)]\Phi = 4\pi G a^2 \tau\delta S \quad . \quad (3.55)$$

Para o caso de perturbações puramente adiabáticas, como são feitas neste trabalho, o termo de fonte, à direita da igualdade na relação acima, desaparece e as equações tornam-se homogêneas. Além disso, fazendo  $\alpha = c_s^2$ , a (3.55) fica reescrita na forma:

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + \alpha)\Phi' - \alpha\Delta\Phi + [2\mathcal{H}' + (\mathcal{H}^2 - k)(1 + 3\alpha)]\Phi = 0 \quad . \quad (3.56)$$

A solução desta equação para  $k = 0$ , tanto para valores positivos do parâmetro da equação

---

<sup>14</sup>A nulidade deste tensor ocorre por se tratar de um fluido perfeito onde não há pressão anisotrópica. Isto quer dizer que não há correções dissipativas por não existirem elementos fora da diagonal no tensor  $T^{\mu\nu}$ .

de estado, quanto negativos, foi discutida na referência [62]. Naquele trabalho os autores utilizaram as equações perturbadas no calibre síncrono, mas a solução para o contraste de densidade é basicamente a mesma que no caso invariante de calibre. A análise para aquele caso foi feita no contexto da inflação e mostrou que, para pequenas escalas, não há colapso exponencial e a matéria parece ser estável. Para escalas maiores os modos são decrescentes.

### 3.3.4 Perturbações para um Campo Escalar

Modelos que descrevem o Universo por meio de um fluido hidrodinâmico tornam-se pouco eficientes no limite de altas energias, quando surgem efeitos quânticos<sup>15</sup>. Neste caso, a melhor opção é imaginar que a matéria possa ser descrita em termos de campos, como se faz em modelos de física de partículas ao se acrescentar campos escalares.

Analogamente ao caso hidrodinâmico, com o objetivo de obter as perturbações para o modelo de Universo cuja matéria é descrita por campo escalar, é preciso perturbar o tensor energia-momento descrito em termos deste campo. Para tanto, toma-se a densidade de lagrangiana (2.14) de um campo escalar minimamente acoplado à gravidade e obtém-se

$$T_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\beta} \varphi_{,\beta} \varphi_{,\nu} - \left[ \frac{1}{2} g^{\lambda\beta} \varphi_{,\lambda} \varphi_{,\beta} - V(\varphi) \right] \delta_{\nu}^{\mu} . \quad (3.57)$$

Para um campo escalar  $\bar{\varphi}$ , que corresponde a uma possível solução de um Universo homogêneo e isotrópico, isto é,  $\bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}(t)$ , faz-se uma pequena perturbação da forma

$$\varphi(x^i, t) = \bar{\varphi}(t) + \delta\varphi(x^i, t) , \quad (3.58)$$

sendo  $|\delta\varphi| \ll \bar{\varphi}$ .

A perturbação no campo escalar causa uma perturbação em seu tensor energia-momento, que pode ser descrita como segue:

$$T_{\nu}^{\mu} = \bar{T}_{\nu}^{\mu} + \delta T_{\nu}^{\mu} , \quad (3.59)$$

---

<sup>15</sup>Para estes sistemas, a melhor descrição seria feita por uma estatística quântica ou por campos quantizados. A hidrodinâmica clássica não tem se mostrado apropriada para estes limites.

onde se impõe que a quantidade  $\delta T_{\nu}^{\mu}$  seja linear nas perturbações da matéria,  $\delta\varphi$ , e da métrica,  $\delta g_{\mu\nu}$ .

Pelas equações (3.57) e (3.2), obtém-se as seguinte componentes não-nulas para o tensor energia-momento do campo escalar da base:

$$\bar{T}_0^0 = \frac{1}{2a^2}\bar{\varphi}'^2 + V(\bar{\varphi}) = \bar{\rho} \quad , \quad (3.60)$$

$$\bar{T}_j^i = \left[ -\frac{1}{2a^2}\bar{\varphi}'^2 + V(\bar{\varphi}) \right] \delta_j^i = -\bar{p}\delta_j^i \quad . \quad (3.61)$$

Para se obter as quantidades perturbadas  $\delta T_{\nu}^{\mu}$ , basta tomar a variação da equação (3.57), de modo que,

$$\delta T_0^0 = a^{-2} \left[ -\bar{\varphi}'^2\phi + \bar{\varphi}'\delta\varphi' + \frac{dV}{d\varphi}a^2\delta\varphi \right] \quad , \quad (3.62)$$

$$\delta T_i^0 = a^{-2} \bar{\varphi}'\delta\varphi_{,i} \quad , \quad (3.63)$$

$$\delta T_j^i = a^{-2} \left[ \bar{\varphi}'^2\phi - \bar{\varphi}'\delta\varphi' + \frac{dV}{d\varphi}a^2\delta\varphi \right] \delta_j^i \quad . \quad (3.64)$$

Para representar as equações (3.62)-(3.64), na forma invariante de calibre, é necessário observar as transformações (3.37) e (3.39)-(3.41) (com respeito ao tensor energia-momento), levando em consideração as quantidades da base (3.60) e (3.61). Daí, obtém-se

$$\delta\tilde{T}_0^0 = a^{-2} \left[ -\bar{\varphi}'^2\Phi + \bar{\varphi}'\delta\tilde{\varphi}' + \frac{dV}{d\varphi}a^2\delta\tilde{\varphi} \right] \quad , \quad (3.65)$$

$$\delta\tilde{T}_i^0 = a^{-2} \bar{\varphi}'\delta\tilde{\varphi}_{,i} \quad , \quad (3.66)$$

$$\delta\tilde{T}_j^i = a^{-2} \left[ \bar{\varphi}'^2\Phi - \bar{\varphi}'\delta\tilde{\varphi}' + \frac{dV}{d\varphi}a^2\delta\tilde{\varphi} \right] \delta_j^i \quad . \quad (3.67)$$

Analogamente ao estudo das perturbações hidrodinâmicas, nota-se, pela equação (3.67), que  $\delta\tilde{T}_j^i$  é proporcional a  $\delta_j^i$  também para o caso do campo escalar. Inserindo, portanto, a expressão (3.67) em (3.44), para  $i \neq j$ , obtém-se  $\Phi = \Psi$ . Desse modo, substituindo as relações (3.65)-(3.67) nas equações (3.42)-(3.44), chega-se às equações de campo invariantes de calibre:

$$(\Delta + 3k)\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G \left( \bar{\varphi}'\delta\tilde{\varphi}' + a^2\frac{dV}{d\varphi}\delta\tilde{\varphi} \right), \quad (3.68)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = 4\pi G\bar{\varphi}'\delta\tilde{\varphi}, \quad (3.69)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 - k)\Phi = 4\pi G \left( \bar{\varphi}'\delta\tilde{\varphi}' - a^2\frac{dV}{d\varphi}\delta\tilde{\varphi} \right), \quad (3.70)$$

onde usou-se a equação de movimento da base<sup>16</sup>:

$$4\pi G \bar{\varphi}'^2 = \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'. \quad (3.71)$$

É possível obter a equação diferencial parcial de segunda ordem para  $\Phi$  combinando as relações (3.68) e (3.70) e considerando a (3.69) e a (3.71). Além disto, a relação  $\frac{dV}{d\varphi}a^2 = -\bar{\varphi}'' - 2\mathcal{H}\bar{\varphi}'$ , proveniente da equação de Klein-Gordon, deve ser utilizada. Deste modo, obtém-se:

$$\Phi'' + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'}\right)\Phi' - \Delta\Phi + 2\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'}\right)\Phi = 0, \quad (3.72)$$

cuja solução depende do potencial  $\phi$ .

Nesse capítulo foram obtidas equações de perturbações para um fluido perfeito e para um Universo permeado por matéria descrita por campo escalar. Esta ferramenta será utilizada daqui em diante.

No próximo capítulo o tratamento hidrodinâmico será aplicado a um modelo descrito por fluido fantasma e o comportamento assintótico das funções será analisado, com discussões a respeito tanto em representação hidrodinâmica quanto de campos. No capítulo seguinte será a vez da análise do espectro de potência para o caso de perturbações de densidade em modelo de dois fluidos.

---

<sup>16</sup>Essa expressão é obtida derivando a equação de Friedmann para o campo escalar com respeito ao tempo e subtraindo a equação (2.18).

# Capítulo 4

## Modelo Fantasma em Representação Hidrodinâmica e de Campos

### 4.1 Introdução

À medida em que os dados observacionais mais recentes corroboram o cenário de um Universo que se expande de maneira acelerada, diferentes propostas de modelos cosmológicos surgem com o objetivo de cumprir a tarefa de reproduzir as observações. Modelos que utilizam fluidos com pressão negativa têm sido amplamente divulgados em pesquisas recentes. De fato, mesmo antes que se pensasse que o Universo pudesse estar se expandindo de maneira acelerada, fluidos com esta característica já haviam sido propostos no contexto do cenário inflacionário do Universo primordial [66], onde este passou por um período bastante curto de expansão acelerada.

O sucesso da teoria inflacionária juntamente com a indicação observacional de uma expansão acelerada fez com que o universo dos modelos cosmológicos transcendesse para além do senso comum, abrindo as portas para fluidos ditos **exóticos** como componentes de caráter fundamental. Em [67], Caldwell denominou o fluido exótico que descreveria a EE para o qual a equação barotrópica teria  $\alpha < -1$ , como componente escura fantasma. A partir de então, o termo fantasma, do inglês *phantom*, passou a ser utilizado em cosmologia

para designar modelos de Universo cujo parâmetro da equação de estado fosse menor que  $-1$ .

O capítulo 3 apresentou o estudo de perturbações cosmológicas em dois âmbitos diferentes: à luz da hidrodinâmica, para o caso de um fluido com equação barotrópica de estado  $p = \alpha\rho$ , e sob a ótica da teoria de campos, com a introdução de um campo escalar. A próxima seção tratará da análise das perturbações para o primeiro caso, considerando o modelo fantasma, e a seção seguinte se encarregará da análise do modelo com campo escalar.

## 4.2 Análise Perturbativa do Modelo Fantasma

Para o caso de perturbações adiabáticas, tal que a equação (3.48) se resume em

$$\delta p = \alpha \delta \rho , \quad (4.1)$$

a relação que representa as equações perturbadas invariantes de calibre para o caso hidrodinâmico é dada pela (3.56):

$$\Phi'' + 3\mathcal{H} (1 + \alpha) \Phi' + [2\mathcal{H}' + (1 + 3\alpha)(\mathcal{H}^2 - k) + \alpha q^2] \Phi = 0 , \quad (4.2)$$

sendo  $k$  o parâmetro de curvatura espacial. A quantidade  $q$  surge da solução  $\nabla^2\Phi = -q^2\Phi$ , onde  $q^2$  é o autovalor do operador Laplaciano  $\nabla^2$ .

Como a (4.2) é a forma geral da perturbação nesta representação, faz-se necessário analisar os resultados para cada caso, isto é, para  $k = 0, 1$  e  $-1$ , como será feito a seguir.

### 4.2.1 Analisando o caso plano ( $k = 0$ )

O estudo das perturbações hidrodinâmicas para o caso plano, feito em [72], inicia-se substituindo  $k = 0$  na equação (4.2), de modo que se tem

$$\Phi'' + 3\mathcal{H} (1 + \alpha) \Phi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3\alpha) + \alpha q^2] \Phi = 0 . \quad (4.3)$$

É preciso agora escrever  $\mathcal{H}$  em termos de  $\eta$ , lembrando que  $\mathcal{H} = a'/a$  e que a solução do fator de escala para a base é dada pela equação (3.17),

$$a = a_0 \eta^{2/(1+3\alpha)} . \quad (4.4)$$

Desta equação se observa que a evolução temporal ocorre, conforme o Universo se expande, da seguinte forma:

- para  $\alpha > -1/3$ ,  $a \rightarrow \infty$  quando  $\eta \rightarrow \infty$
- para  $\alpha < -1/3$ ,  $a \rightarrow \infty$  quando  $\eta \rightarrow 0$ .

Usando a solução de  $a$  para escrever  $\mathcal{H}$ , tal que,

$$\mathcal{H} = \frac{2}{(1+3\alpha)\eta}, \quad \mathcal{H}^2 = \frac{4}{(1+3\alpha)^2 \eta^2}, \quad \mathcal{H}' = \frac{-2}{(1+3\alpha)\eta^2} \quad (4.5)$$

e substituindo na equação (4.3), obtém-se a relação

$$\Phi'' + \frac{6(1+\alpha)}{(1+3\alpha)} \frac{\Phi'}{\eta} + \alpha q^2 \Phi = 0 . \quad (4.6)$$

Após algumas manipulações algébricas para que se possa chegar numa relação conhecida, a solução para a equação (4.6) se assemelha a tipos especiais escritos em termos de funções de Bessel [76],

$$\Phi = (q\eta)^{-\nu} \{c_1(q) J_\nu(\sqrt{\alpha} q\eta) + c_2(q) J_{-\nu}(\sqrt{\alpha} q\eta)\} \quad \text{para } \alpha > 0 \quad (4.7)$$

$$\Phi = (q\eta)^{-\nu} \{c_1(q) I_\nu(\sqrt{-\alpha} q\eta) + c_2(q) K_\nu(\sqrt{-\alpha} q\eta)\} \quad \text{para } \alpha < 0 . \quad (4.8)$$

Nestas equações,  $J_\nu$  é denominada função de Bessel de primeiro tipo,  $I_\nu$  e  $K_\nu$  são funções de Bessel modificadas de argumentos imaginários, os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração e  $\nu = (5 + 3\alpha)/(2 + 6\alpha)$ . Obviamente, somente a solução (4.8) é válida no limite tratado aqui, onde o modelo utiliza equação de estado cujo parâmetro assume valores negativos.

A análise assintótica é realizada por meio da verificação do limite de grandes e pequenos valores do argumento das funções de Bessel. No limite em que o argumento vai a zero, isto é,  $q\eta \rightarrow 0$ , para qualquer valor de  $\nu$ , as soluções têm o seguinte comportamento:

$$\Phi \sim \tilde{c}_1(q) + \tilde{c}_2(q)(q\eta)^{-2\nu}, \quad (4.9)$$

onde as constantes de integração foram redefinidas. Esta solução apresenta um modo constante,  $\tilde{c}_1$ , e outro modo que depende de  $\eta$ , dado por  $\tilde{c}_2(q)(q\eta)^{-2\nu}$ . Como o Universo em expansão atende a condição  $a \rightarrow \infty$ , existem duas possibilidades para este segundo termo: uma para  $\alpha > -1/3$ , tal que  $\eta \rightarrow \infty$  e outra para  $\alpha < -1/3$ , que implica  $\eta \rightarrow 0$ . Uma análise simples mostra que o segundo termo será sempre decrescente a menos que  $\alpha < -5/3$ . Abaixo deste limite, ou seja, se o parâmetro da equação de estado for mais negativo que  $-5/3$ , o segundo termo deverá crescer. Portanto, se o fluido em questão violar a condição de energia dominante, caracterizando-o como fantasma, com pressão suficientemente negativa ( $\alpha < -5/3$ ), as perturbações devem crescer para escalas grandes, conduzindo à destruição da homogeneidade não apenas localmente, como requer o cenário padrão de formação de estruturas, mas de maneira global.

A análise do comportamento assintótico no limite de valores grandes do argumento das funções de Bessel, ou seja,  $q\eta \rightarrow \infty$ , fornece a solução:

$$\Phi \sim \eta^{-(\nu+1/2)} \{ \tilde{c}_1(q) e^{\sqrt{-\alpha}q\eta} + \tilde{c}_2(q) e^{-\sqrt{-\alpha}q\eta} \}. \quad (4.10)$$

Neste caso verifica-se instabilidades para alguns intervalos do parâmetro da equação de estado. Existe uma relação entre os limites destes argumentos e as escalas que são observadas no Universo. É possível fazer esta conexão fixando alguns parâmetros. Primeiramente deve-se fixar o fator de escala para os dias atuais como sendo igual à unidade, ou seja,  $a_0 = 1$ .

Com isto, o parâmetro de Hubble "hoje", que é definido em termos do fator de escala, é escrito como:

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t_0} = \left. \frac{a'}{a^2} \right|_{\eta_0} = \frac{2}{|1 + 3\alpha|} \frac{1}{|\eta_0|}.$$

Nestas igualdades percebe-se uma relação inversa entre o tempo conforme  $\eta_0$  e o parâmetro de Hubble  $H_0$ , representados hoje, de modo que  $\eta_0 \sim H_0^{-1} = l_H$ , onde considerou-se o sistema de unidades tal que  $c = 1$ . Isto mostra que é o comprimento de Hubble,  $l_H$ , que delimita os regimes de pequenas e grandes escalas. Conforme análise feita em [72], quando  $\alpha > -1/3$  o tempo conforme aumenta com a expansão do Universo implicando que, quando o tempo evolui, mais modos satisfazem a condição  $q\eta \gg 1$  podendo ser interpretada como a entrada destes modos no horizonte de Hubble com a evolução temporal.

Quando  $\alpha < -1/3$  ocorre o inverso, ou seja, com a evolução temporal mais modos satisfazem a condição  $q\eta \ll 1$ , que é a situação normal para um Universo em fase de expansão acelerada. No intervalo  $-5/3 < \alpha < -1/3$ , os modos são esticados para fora do horizonte de Hubble e, ou decaem, ou são **congelados**<sup>1</sup>, não acarretando riscos para a homogeneidade. Entretanto, para  $\alpha < -5/3$  estes modos tornam-se fortemente instáveis e podem destruir a homogeneidade.

Os resultados discutidos acima, se analisados em termos do comprimento de Hubble,

$$l_H(\eta) = \frac{|1 + 3\alpha|}{2} \frac{|\eta|^{3(1+\alpha)/(1+3\alpha)}}{|\eta_0|^{-2/(1+3\alpha)}}, \quad (4.11)$$

tal que os argumentos das funções de Bessel em termos de  $l_H(\eta)$  sejam

$$q\eta \sim q [l_H(\eta)]^{(1+3\alpha)/3(1+\alpha)}, \quad (4.12)$$

conduzem, para o caso de um Universo permeado por um fluido fantasma, a um  $l_H(\eta)$  decrescente à medida em que o Universo se expande.

A seção seguinte é uma obtenção de soluções para os casos com curvatura, representando uma complementação ao trabalho da referência [72]. Daqui em diante, todos os resultados foram obtidos durante o estudo de doutorado e publicados em [73] representando, de fato, ideias originais.

---

<sup>1</sup>O sentido aqui da expressão **modos congelados** é de uma onda cuja amplitude permanece constante.

### 4.2.2 Analisando os casos com curvatura ( $k \neq 0$ )

O estudo dos casos  $k = 1$  e  $k = -1$  é feito de forma análoga à anterior, escrevendo a solução do fator de escala para a base. As equações para os dois casos são bastante parecidas, razão pela qual o tratamento  $k = 1$  será completamente desenvolvido e para  $k = -1$  as soluções serão adaptadas e seguidas dos devidos comentários.

**Caso  $k=1$**  Iniciando pelo caso fechado e substituindo, portanto, o valor do parâmetro de curvatura  $k = 1$  na equação (3.16) obtém-se:

$$\frac{(1+3\alpha)}{2} \eta = \int \frac{1}{(1-y^2)^{1/2}} dy, \quad (4.13)$$

lembrando que  $y = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0}} a^{(1+3\alpha)/2}$ . A solução da (4.13) é obtida fazendo  $y = \sin \theta$ , tal que  $\theta = \frac{1+3\alpha}{2} \eta$ , de modo que se tem

$$a = \left( \frac{8\pi G\rho_0}{3} \right)^{1/(1+3\alpha)} \left[ \sin \left( \frac{1+3\alpha}{2} \eta \right) \right]^{2/(1+3\alpha)}. \quad (4.14)$$

Em seguida, escrevendo as quantidades

$$\mathcal{H} = \cotg \left( \frac{1+3\alpha}{2} \eta \right) \quad e \quad \mathcal{H}' = - \left( \frac{1+3\alpha}{2} \right) \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{1+3\alpha}{2} \eta \right), \quad (4.15)$$

e substituindo na equação (4.2) para  $k = 1$ , obtém-se,

$$\Phi'' + 3(1+\alpha) \cotg \left( \frac{1+3\alpha}{2} \eta \right) \Phi' + [\alpha q^2 - 2(1+3\alpha)] \Phi = 0. \quad (4.16)$$

Para encontrar a solução da equação acima é preciso fazer algumas redefinições de variáveis. Reescrevendo  $\Phi' = d\Phi/d\eta$  como  $\Phi_\theta(d\theta/d\eta)$ , onde novamente  $\theta = \frac{1+3\alpha}{2}\eta$ , e  $\Phi_\theta = d\Phi/d\theta$ , chega-se a

$$\Phi_{\theta\theta} \left( \frac{d\theta}{d\eta} \right)^2 + 3(1+\alpha)(\cotg\theta) \Phi_\theta \frac{d\theta}{d\eta} + [\alpha q^2 - 2(1+3\alpha)] \Phi = 0. \quad (4.17)$$

Tomando a derivada de  $\theta$  com relação a  $\eta$ , substituindo na equação acima e multiplicando tudo por  $4/(1 + 3\alpha)^2$ , obtém-se

$$\Phi_{\theta\theta} + \frac{6(1 + \alpha)}{(1 + 3\alpha)}(\cotg \theta) \Phi_{\theta} + \tilde{q}^2 \Phi = 0, \quad (4.18)$$

sendo  $\tilde{q}^2 = 4[\alpha q^2 - 2(1 + 3\alpha)]/(1 + 3\alpha)^2$ .

Ainda com o intuito de obter a solução da equação perturbada é preciso simplificá-la ainda mais, absorvendo a função trigonométrica  $\cotg \theta$ , escrevendo uma nova variável  $x = \cos \theta$  e em seguida fazendo  $z = (1 + x)/2$ . Após algumas manipulações algébricas, chega-se, finalmente, à seguinte equação diferencial hipergeométrica para a perturbação:

$$(1 - z)z\Phi'' + \frac{7 + 9\alpha}{2(1 + 3\alpha)}(1 - 2z)\Phi' + \tilde{q}^2 \Phi = 0 \quad (4.19)$$

A solução da equação acima pode ser representada na forma de funções hipergeométricas:

$$\Phi_q(\eta) = c {}_2F_1[A, B; C; z] + b z^{1-C} {}_2F_1[A - C + 1, B - C + 1; 2 - C; z] \quad (4.20)$$

sendo

$$A = \frac{1}{2} \left\{ 6 \frac{1 + \alpha}{1 + 3\alpha} + \sqrt{36 \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + 3\alpha)^2} + 4\tilde{q}^2} \right\}, \quad (4.21)$$

$$B = \frac{1}{2} \left\{ 6 \frac{1 + \alpha}{1 + 3\alpha} - \sqrt{36 \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + 3\alpha)^2} + 4\tilde{q}^2} \right\}, \quad (4.22)$$

$$C = \frac{7 + 9\alpha}{2(1 + 3\alpha)} \quad (4.23)$$

e  $c$  e  $b$  são constantes.

A análise para o caso de um espaço curvo é um pouco mais complicada que o caso plano, uma vez que existem duas escalas para serem analisadas, uma dada pelo raio de

Hubble e outra devida à curvatura. Por este motivo, é mais fácil, e mais relevante segundo a proposta deste trabalho, considerar-se o comportamento nos extremos do intervalo de tempo. Para cumprir esta tarefa é preciso levar em conta as seguintes propriedades de transformações nas funções hipergeométricas [76]:

$$\begin{aligned}
{}_2F_1[A, B; C; z] &= \frac{\Gamma(C) \Gamma(C - A - B)}{\Gamma(C - A) \Gamma(C - B)} {}_2F_1(A, B; A + B - C + 1; 1 - z) + \\
&+ \frac{\Gamma(C) \Gamma(A + B + C)}{\Gamma(A) \Gamma(B)} (1 - z)^{C-A-B} {}_2F_1(C - A, C - B; C - A - B + 1; 1 - z)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
{}_2F_1[A, B; C; z] &= \frac{\Gamma(C) \Gamma(B - A)}{\Gamma(B) \Gamma(C - A)} (-z)^{-A} {}_2F_1(A, A + 1 - C; A + 1 - B; \frac{1}{z}) + \\
&+ \frac{\Gamma(C) \Gamma(A - B)}{\Gamma(A) \Gamma(C - B)} (-z)^{-B} {}_2F_1(B, B + 1 - C; B + 1 - A; \frac{1}{z})
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Baseando-se nisto, os seguintes comportamentos assintóticos são observados:

$$z \rightarrow 0 \quad \text{implica } {}_2F_1[A, B; C; z] \sim 1$$

$$z \rightarrow 1 \quad \text{implica } {}_2F_1[A, B; C; z] \sim \frac{\Gamma(C) \Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A) \Gamma(C-B)} + \frac{\Gamma(C) \Gamma(A+B+C)}{\Gamma(A) \Gamma(B)} (1-z)^{C-A-B}$$

$$z \rightarrow \infty \quad \text{implica } {}_2F_1[A, B; C; z] \sim \frac{\Gamma(C) \Gamma(B-A)}{\Gamma(B) \Gamma(C-A)} (-z)^{-A} + \frac{\Gamma(C) \Gamma(A-B)}{\Gamma(A) \Gamma(C-B)} (-z)^{-B}.$$

Com as expressões acima é possível determinar o comportamento das perturbações, observando as duas extremidades do intervalo de tempo, ou seja,  $0 \leq \eta \leq \frac{2\pi}{1+3\alpha}$  para  $\alpha > -1/3$  e  $\frac{2\pi}{1+3\alpha} \leq \eta \leq 0$  para  $\alpha < -1/3$ . As perturbações comportam-se, portanto, da seguinte maneira:

- para  $\alpha > -1/3$  existem dois modos decrescentes, para  $\eta = 0$ , e quando o Universo se aproxima do *Big Crunch*<sup>2</sup>, que ocorre para  $\eta = \frac{2\pi}{1+3\alpha}$ , um modo constante e um crescente;
- para  $-5/3 < \alpha < -1/3$  existem, inicialmente, durante a fase de contração, um modo crescente e um constante e quando o fator de escala diverge, no outro limite assintótico, um modo constante e um modo decrescente;

---

<sup>2</sup>*Big Crunch* é uma teoria que prevê que, devido à atração gravitacional, o Universo começará a contrair-se no futuro tendendo para um colapso.

- para  $\alpha = -5/3$  existem, tanto no começo da fase de contração quanto no final da fase de expansão, somente modos constantes;
- para  $\alpha < -5/3$  existem um modo constante e um decrescente no início da fase de contração e dois modos crescentes quando se aproxima do *Big Rip*.

**Caso  $k = -1$**  As equações para o Universo aberto possuem em sua essência a mesma forma que as do caso anterior, porém com funções hiperbólicas ao invés de trigonométricas simples. A (4.14) é reescrita como

$$a = \left( \frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/(1+3\alpha)} \left[ \sinh \left( \frac{1+3\alpha}{2} \eta \right) \right]^{2/(1+3\alpha)} \quad (4.26)$$

e a (4.16) fica:

$$\Phi'' + 3(1+\alpha) \operatorname{cotgh} \left( \frac{1+3\alpha}{2} \eta \right) \Phi' + \frac{(1+3\alpha)^2}{4} \bar{q}^2 \Phi = 0, \quad (4.27)$$

onde

$$\bar{q}^2 = [\alpha q^2 + 2(1+3\alpha)] \frac{4}{(1+3\alpha)^2}. \quad (4.28)$$

Novamente, fazendo certas mudanças de variáveis e algumas manipulações algébricas obtém-se uma equação análoga à (4.19), porém com sinal negativo no termo de  $\Phi$ :

$$(1-z)z\Phi'' + \frac{7+9\alpha}{2(1+3\alpha)}(1-2z)\Phi' - \bar{q}^2\Phi = 0, \quad (4.29)$$

onde

$$z = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cosh \left( \frac{1+3\alpha}{2} \eta \right) \right]. \quad (4.30)$$

A solução da (4.29) é representada pela (4.20), onde A, B e C são dadas pelas equações (4.21)-(4.23), sendo que A e B têm seus sinais que antecedem a raiz trocados e o termo  $+4\bar{q}^2$  fica negativo.

O tratamento do caso aberto é mais complicado que para o caso fechado pois aqui o comportamento assintótico dos modos depende da escala da perturbação. Neste caso, a análise será feita considerando a situação para a qual os autovalores do operador laplaciano

são nulos.

Para  $k = -1$  os comportamentos assintóticos são análogos ao caso anterior, mas, observando o intervalo de tempo  $0 \leq \eta \leq \infty$  para  $\alpha > -1/3$  e  $-\infty < \eta \leq 0$  para  $\alpha < -1/3$ , o comportamento das perturbações segue a seguinte análise:

- para  $\alpha > -1/3$  existem, tanto inicialmente quanto no futuro infinito, dois modos decrescentes;
- para  $-5/3 < \alpha < -1/3$  existem, inicialmente, dois modos decrescentes e no futuro infinito, um modo constante e outro decrescente;
- para  $\alpha = -5/3$  existem, tanto no começo quanto no final, somente modos constantes;
- para  $\alpha < -5/3$  existem, inicialmente, dois modos decrescentes que tornam-se modos crescentes quando se aproxima do *Big Rip*.

### 4.3 Uma Descrição mais Fundamental

As instabilidades que surgem para pequenas escalas não são tão relevantes uma vez que o problema se deve, principalmente, à aproximação hidrodinâmica. Para que se possa fazer um tratamento mais fundamental na representação dos fluidos fantasmas, deve-se considerar um campo escalar auto-interagente, que reproduza, do ponto de vista do comportamento experimentado pela base, a mesma aproximação hidrodinâmica empregada anteriormente. Analisando o caso  $k = 0$ , pode-se obter o fator de escala com comportamento dado pela equação (4.4), para o fluido fantasma, considerando-se um campo escalar minimamente acoplado auto-interagente [72], tal que

$$V(\phi) = V_0 \exp \left[ \pm \sqrt{-3(1 + \alpha)} \phi \right], \quad (4.31)$$

$$\phi = \pm \frac{\sqrt{-3(1 + \alpha)}}{1 + 3\alpha} \ln \eta. \quad (4.32)$$

Neste cenário, a equação para o potencial de Bardeen é dada por:

$$\Phi'' + 2\left[\mathcal{H} - \frac{\phi''}{\phi'}\right]\Phi' + \left[q^2 + 2\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\phi''}{\phi'}\right)\right]\Phi = 0. \quad (4.33)$$

Usando as relações da base para  $\mathcal{H}$  e  $\phi$ , a (4.33) torna-se,

$$\Phi'' + \frac{6(1+\alpha)}{1+3\alpha} \frac{\Phi'}{\eta} + q^2\Phi = 0, \quad (4.34)$$

com as soluções

$$\Phi = (q\eta)^{-\nu} [c_1(q)J_\nu(q\eta) + c_2(q)J_{-\nu}(q\eta)] \quad (4.35)$$

que são válidas para qualquer valor do parâmetro  $\alpha$ . No pequeno limite assintótico, as soluções se comportam da mesma maneira que na representação hidrodinâmica e ainda existe um modo crescente para  $\alpha \leq -5/3$ . Usando a expressão assintótica das funções de Bessel para valores grandes do argumento, o potencial que se encontra no regime  $q\eta \gg 1$ , pode ser expresso como

$$\Phi \sim (q\eta)^{-[(1+\alpha)/(1+3\alpha)]} \cos(q\eta + \delta) \quad (4.36)$$

onde  $\delta$  é a fase. Pode-se verificar que, quando  $\alpha > -1$  o potencial oscila com amplitude decrescente, enquanto que, para  $\alpha < -1$ , o potencial cresce. Portanto, nestas circunstâncias o campo fantasma pode exibir instabilidade para grandes e pequenas escalas. Porém, deve-se fixar que o comportamento para pequenas escalas é bastante dependente do modelo, de maneira que outra representação para o campo fantasma pode modificar as conclusões para pequenas escalas [74, 75]. Entretanto, para grandes escalas parece sempre existir um modo crescente, para  $\alpha \leq -5/3$ , independente da representação escolhida.

Portanto, um fluido considerado super-fantasma como o que foi descrito aqui, ou seja, com equação barotrópica de estado dada por  $\alpha \leq -5/3$  é gravitacionalmente instável para todas as escalas e pode levar a um Universo inhomogêneo. Com isto seria possível evitar o *Big Rip*, que ocorre sob as condições de isotropia e homogeneidade.

## 4.4 Avaliação Geral do Modelo

Com o objetivo de produzir uma conclusão sobre o modelo pode-se fazer uma avaliação global das análises feitas nas seções anteriores. Pode-se dizer de forma incisiva que a principal conclusão sobre o estudo realizado até aqui é que um cenário cosmológico fantasma é altamente instável com relação a perturbações escalares, para um Universo de fundo homogêneo e isotrópico e cuja pressão é bastante negativa ( $\alpha < -5/3$ ). Significa dizer que as perturbações escalares crescem quando se aproxima do *Big Rip*. Outra observação é que o raio de Hubble encolhe com o tempo quando a análise é feita para o caso plano. Isto quer dizer que a aproximação para escalas grandes torna-se essencialmente válida assintoticamente para todas as escalas no caso fantômico.

Em geral, a condição para que os processos das perturbações não sintam a microfísica é  $\lambda_{\text{físico}} \gg d_H$ , sendo  $\lambda_{\text{físico}} = a(t)\lambda_c$  o comprimento de onda físico,  $\lambda_c$  o comprimento de onda co-móvel e  $d_H = a/\dot{a}$  é o raio de Hubble. Escrevendo, para simplificação da análise<sup>3</sup>,  $a \propto t^{-\gamma}$ , sendo  $\gamma = \alpha + 1$ , pode-se, desde que para os casos curvos seja considerado um período de tempo curto, tomar uma aproximação válida em quaisquer dos três casos estudados, ou seja,

$$\frac{\lambda_{\text{físico}}}{d_H} \propto t^{-1-\gamma}. \quad (4.37)$$

Pode-se verificar, por esta relação, que todos os modos terminam satisfazendo a condição de comprimento de onda grande no cenário fantasma (desde que  $t \rightarrow 0$  quando o Universo evolui), e, portanto, todos os modos devem deixar de sentir os processos microfísicos e começar a crescer quando  $\alpha < -5/3$ .

Uma outra avaliação interessante observada aqui diz respeito ao ponto crítico  $\alpha = -5/3$ , que não corresponde a qualquer condição de energia, a exemplo do que ocorre com  $\alpha = -1/3$  e  $\alpha = -1$ . Também não parece indicar qualquer relação com os parâmetros de Hubble, de desaceleração ou de *statefinder* [79]. Entretanto, parece tratar-se realmente de um ponto crítico geral em análises perturbativas, mas que não reflete nas quantidades cinemáticas em questão nesse trabalho. Além do mais, nenhuma característica particular

---

<sup>3</sup>Para o regime fantômico dito "normal" tem-se  $1 < \gamma < \infty$ ; para o intervalo  $0 < \gamma < 1$  o regime é denominado "super-fantômico" (denominação feita por [78])

com relação às equações da base é observada numa análise do sistema dinâmico [80] revelando que  $\alpha = -5/3$  não representa um ponto crítico para o *background*. Mesmo para a equação perturbada, por exemplo a (4.3), não existe uma relação explícita para o valor particular do parâmetro  $\alpha = -5/3$ .

Diversos trabalhos, como [78–81], apresentam este ponto como sendo um valor crítico e fazem suas considerações a respeito. Por exemplo, na referência [81] mostrou-se que se  $-5/3 < \alpha < -1$ , um observador não acelerado pode encurtar o tempo decorrido até o *Big Rip* aumentando sua velocidade. Isto pode auxiliar na compreensão deste ponto crítico, que naquele trabalho supõe que  $\alpha = -5/3$  está conectado ao comportamento das geodésicas.

No modelo apresentado aqui a análise foi feita usando apenas um fluido perfeito como conteúdo material, descrito por representação hidrodinâmica e por um campo escalar. No capítulo seguinte uma representação de dois fluidos é proposta de modo a fornecer uma descrição mais completa.

# Capítulo 5

## Espectro de Potência em Modelo

## Escalar-Tensorial Fantasma

### 5.1 Introdução

Fundamentado em observações que indicam que o Universo está numa fase de expansão acelerada, e ainda, considerando que a violação da condição de energia fraca é permitida, o modelo proposto nesse capítulo considera um caso simples onde a energia escura satisfaz uma equação barotrópica de estado do tipo  $p = \alpha\rho$ . A quantidade  $\alpha$  representa o parâmetro da equação e da mesma forma que para o modelo anterior, discutido no quarto capítulo, é tomado como um valor constante.

Para iniciar a construção do modelo propõe-se uma composição de dois fluidos, sendo uma componente com pressão  $p = 0$  e outra componente com pressão  $p \neq 0$ . O conteúdo material da quantidade cuja pressão é nula é uma combinação de bárions e matéria escura. Para a outra componente utiliza-se um fluido perfeito com pressão  $p$ , que tem por objetivo descrever a energia escura. A representação do fluido será por meio de um campo escalar auto-interagente  $\phi$  com um potencial  $V(\phi)$ . Neste modelo não são considerados *priors*<sup>1</sup> na

---

<sup>1</sup>Nas referências [83, 84] é possível encontrar discussões sobre a influência de *prior* na evolução de parâmetros cosmológicos usando dados observacionais.

análise estatística e a seção espacial é tomada como sendo plana, fazendo desta proposta um caso ainda não investigado na literatura.

Como forma de testar o modelo em questão serão considerados dois testes observacionais. Em um dos casos a comparação ocorrerá por meio da análise do espectro de potência da matéria utilizando para isto dados do programa observacional 2dFGRS [8]. O outro teste utilizará os dados da amostra *gold* proveniente de observações de SN do tipo Ia [6]. Após obter as equações para as perturbações com os dados do modelo, as soluções são obtidas via cálculo numérico e, em seguida, faz-se a comparação com os testes observacionais.

O resultado final é apresentado graficamente por meio de curvas da função de distribuição de probabilidade, traçadas em termos da variável investigada. São analisados os 3 parâmetros livres:  $\alpha$ , o parâmetro da equação de estado,  $\Omega_{dm}$ , o parâmetro de densidade da matéria escura e  $h$ , o parâmetro de Hubble. Depois de maximizar as funções, os valores mais prováveis para cada caso são determinados e discutidos no final do capítulo.

## 5.2 Descrevendo o Modelo

Como foi dito acima, a descrição do modelo a seguir utiliza dois fluidos, sendo uma componente de matéria escura juntamente com bárions e outra componente de energia escura. Tal fluido deve obedecer a equação de estado  $p = \alpha\rho$ , sendo  $\alpha$  uma constante, que para o caso de um fluido exótico cuja pressão é negativa e densidade positiva, deve atender a condição  $\alpha < 0$ .

### 5.2.1 Equações para a Base

Antes de escrever as equações perturbadas é necessário obter as relações para a base, entrando com os dados do modelo investigado. A quantidade  $\rho_b$  representa os bárions e  $\rho_{dm}$  a matéria escura. Portanto, a densidade de matéria considerada nas equações,  $\rho_m$ , é a soma dessas duas contribuições, ou seja,  $\rho_m = \rho_{dm} + \rho_b$ . A outra componente, representada por  $\rho_x$ , é a de densidade de energia escura. Após estas considerações, o

passo seguinte é escrever as equações da dinâmica para o modelo.

Partindo da equação de Friedmann (1.46) com  $k = 0$ , e usando a relação  $\rho = \rho_m + \rho_x$ , obtém-se

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_x). \quad (5.1)$$

As soluções da densidade para as duas componentes do fluido são, para a matéria,  $\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}$ , e para a energia escura,  $\rho_x = \rho_{x0} a^{-3(1+\alpha)}$ . Em seguida, dividindo toda a equação (5.1) pela densidade crítica hoje e considerando as relações (1.50) e (1.51), com  $\Omega_{m0} = \Omega_{dm0} + \Omega_{b0}$ , chega-se a

$$H^2 = \Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{x0} a^{-3(1+\alpha)},$$

ou ainda, em termos de  $\eta$ ,

$$\mathcal{H}^2 = \Omega_{m0} a^{-1} + \Omega_{x0} a^{-(1+3\alpha)}, \quad (5.2)$$

onde  $\mathcal{H}$  está escrito em unidade de  $H_0$ , devido a uma redefinição temporal.

A solução para o fator de escala quando se tem uma equação de estado  $p = \alpha\rho$  para o fluido é dada pela (3.17), isto é,

$$a = a_0 \eta^{2/(1+3\alpha)}. \quad (5.3)$$

A equação (5.2) juntamente com a solução (5.3) fornecem a dinâmica do sistema para o caso da base.

## 5.2.2 Equações para o Potencial

O teste observacional de SN Ia restringe apenas a relação da base por meio da função distância-luminosidade, que será definida mais adiante. A análise do espectro de potência da matéria, por outro lado, depende fortemente da natureza do conteúdo material representado por suas componentes. Neste caso, a representação por meio de um fluido ou de um campo escalar conduz a resultados bem diferentes para a estimativa dos parâmetros cosmológicos.

Quando se considera, como no caso da energia escura, alguma componente cuja pressão seja negativa, a situação claramente se torna mais delicada. Para o caso da representação hidrodinâmica a velocidade do som se torna imaginária, sendo instável para pequenas escalas. Entretanto, na representação de campos, utilizando um campo escalar auto-interagente, a velocidade do som fica positiva para escalas de sub-horizonte [69]. Portanto, se os dados observacionais para o espectro de potência da matéria consideram modos de sub-horizonte, é de fundamental importância para a interpretação dos dados uma descrição específica para a matéria e energia escuras.

Para lidar com esse problema de instabilidade a energia escura pode ser modelada [72, 73] por um campo escalar auto-interagente. A forma do potencial para este caso representa a descrição de campo mais simples para uma dada componente cosmológica. Certamente não se trata da única possibilidade de escolha, tão pouco representa a descrição mais próxima da realidade. Entretanto, é uma boa proposta para este trabalho a investigação de um modelo com estas características, mesmo porque, escolhas que poderiam ser consideradas mais convenientes necessitariam do conhecimento a respeito da origem do campo de energia escura, o que, até o momento, é uma questão especulativa, ainda em aberto.

Na ausência de campo de matéria é relativamente simples reproduzir o comportamento da energia escura por meio de um campo escalar auto-interagente. A equação de Friedmann acoplada a um campo escalar com este comportamento é a seguinte:

$$3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \epsilon \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi)a^2 . \quad (5.4)$$

A equação de Klein-Gordon para o campo  $\phi$  neste cenário é:

$$\phi'' + 2\frac{a'}{a}\phi' = -\epsilon \frac{dV(\phi)}{d\phi}a^2 , \quad (5.5)$$

onde a vírgula significa derivada com relação ao tempo conforme<sup>2</sup>. Observa-se nestas relações a quantidade  $\epsilon$  que serve para definir o modelo quanto ao tipo de fluido, isto é,

---

<sup>2</sup>Lembrando que o tempo conforme é definido como  $dt = a(\eta)d\eta$ .

um fluido de energia escura "convencional" possui  $\epsilon = +1$ , enquanto  $\epsilon = -1$  descreve um fluido fantasma.

O fator de escala, para o caso de ausência de campo de matéria, se comporta como na expressão (5.3). Este é o tipo de comportamento que pode ser reproduzido [72, 73] por um campo escalar auto-interagente, semelhante àquele descrito pelas equações (4.31) e (4.32), ou seja,

$$\phi(\eta) = \pm 2 \frac{\sqrt{3\epsilon(1+\alpha)}}{1+3\alpha} \ln \eta, \quad (5.6)$$

$$V(\phi) = V_0 e^{\pm \sqrt{3\epsilon(1+\alpha)} \phi}, \quad (5.7)$$

sendo  $V_0$  uma constante. Novamente, a quantidade  $\epsilon$  diferencia um modelo descrito por um fluido fantasma de um convencional. Além disto, a descrição do potencial<sup>3</sup> em termos de uma função exponencial não representa surpresa e pode ser encontrada, por exemplo, na referência [85].

Entretanto, é importante observar que quando a matéria sem pressão está presente, o potencial descrito acima não representa exatamente a dinâmica do fluido de energia escura. Na verdade, esta representação só é exata no limite assintótico. Na presença da matéria, o potencial que reproduz o sistema acoplado matéria/energia escura é mais complicado e, aparentemente, não pode ser representado usando funções elementares. Ainda assim, o campo escalar e seu potencial neste caso podem ser expressos de forma implícita em termos do fator de escala. A relação de  $\phi$  e  $V$  com  $a$  é obtida impondo-se que:

$$\epsilon \frac{\phi'^2}{2} + Va^2 = 8\pi G \rho_x \quad \text{e} \quad \epsilon \frac{\phi'^2}{2} - Va^2 = 8\pi G p_x .$$

Como  $p_x = \alpha \rho_x$  e  $\rho_x = \rho_{x0} a^{-(1+3\alpha)}$ , as expressões acima se tornam:

$$\epsilon \frac{\phi'^2}{2} + Va^2 = 8\pi G \rho_{x0} a^{-(1+3\alpha)} \quad (5.8)$$

$$\epsilon \frac{\phi'^2}{2} - Va^2 = 8\pi G \alpha \rho_{x0} a^{-(1+3\alpha)} \quad (5.9)$$

Uma observação interessante é que para o caso particular  $\alpha = -1$  pode-se notar

---

<sup>3</sup>Para o caso de uma equação de estado não-constante, cujos potenciais se comportem como lei-de-potência, há análises interessantes em [86].

pelas equações acima que a derivada do campo torna-se zero e o termo cinético se anula restando apenas o potencial, que passa a ser constante. Fazendo isto reproduz-se o caso da constante cosmológica.

### 5.3 Perturbações para o Modelo Proposto

Para se obter as equações que descrevem as perturbações para o modelo composto por dois fluidos, deve-se recorrer às relações obtidas no terceiro capítulo. Para o caso de uma representação hidrodinâmica, as expressões são a (3.52) e (3.54), com  $k = 0$ , ou seja,

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad , \quad (5.10)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p \quad . \quad (5.11)$$

Na representação de campos as equações análogas, também com  $k = 0$ , são as expressões (3.68) e (3.70), isto é,

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G (\phi'\delta\phi' + a^2 V_\phi \delta\phi) \quad , \quad (5.12)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G (\phi'\delta\phi' - a^2 V_\phi \delta\phi) \quad , \quad (5.13)$$

onde se fez a redefinição  $\bar{\varphi} = \phi$ ,  $\delta\bar{\varphi} = \delta\phi$  e  $V_\phi = \frac{dV}{d\phi}$ .

Após a comparação das relações (5.10) e (5.12), e, (5.11) e (5.13), as equações perturbadas para o caso em que se combina a matéria sem pressão e o campo escalar considerado são:

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - \left[3\mathcal{H}^2 - \epsilon\frac{\phi'^2}{2}\right]\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho + \epsilon\frac{\phi'}{2}\delta\phi' + \frac{V_\phi}{2}a^2\delta\phi, \quad (5.14)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + \left[2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \epsilon\frac{\phi'^2}{2}\right]\Phi = 4\pi G a^2 \delta p + \epsilon\frac{\phi'}{2}\delta\phi' - \frac{V_\phi}{2}a^2\delta\phi, \quad (5.15)$$

onde  $\Phi$  é o potencial de Bardeen. Além destas duas, existe ainda a equação de movimento para a perturbação do campo escalar,  $\delta\phi$ , proveniente da linearização da equação de Klein-

Gordon ,

$$\phi'' - 2\mathcal{H}\phi' = V_\phi a^2. \quad (5.16)$$

Deste modo, a equação perturbada [61] fica representada por

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi + \epsilon V_{\phi\phi} a^2 \delta\phi = 4\phi'\Phi' - 2\epsilon V_\phi a^2 \Phi, \quad (5.17)$$

onde  $V_{\phi\phi}$  é a segunda derivada de  $V(\phi)$  com respeito a  $\phi$ .

Se o fluido representa matéria tem-se que  $\delta p = 0$  e a equação relevante, neste caso, é a (5.15). O passo seguinte é escrever as equações (5.15) e (5.17) em termos do fator de escala e não mais em termos do tempo conforme. É mais conveniente fazer isto para proceder o cálculo numérico, que utilizará os limites do fator de escala, de  $a = 10^{-3}$  até o tempo presente, para o qual  $a = 1$ . Deste modo, após algumas manipulações algébricas tem-se:

$$\ddot{\Phi} + \left[ \frac{3}{a} + \frac{a''}{a'^2} \right] \dot{\Phi} + \left[ 2\frac{a''}{aa'^2} - \frac{1}{a^2} + \epsilon \frac{\phi'^2}{2a'^2} \right] \Phi = \epsilon \frac{1}{2} \frac{\phi'}{a'} \delta\dot{\phi} - \frac{V_\phi}{2} \frac{a^2}{a'^2} \delta\phi, \quad (5.18)$$

$$\delta\ddot{\phi} + \left[ \frac{2}{a} + \frac{a''}{a'^2} \right] \delta\dot{\phi} + \left\{ \left( \frac{ql_0}{a'} \right)^2 + \epsilon V_{\phi\phi} \frac{a^2}{a'^2} \right\} \delta\phi = 4\frac{\phi'}{a'} \dot{\Phi} - 2\epsilon V_\phi \frac{a^2}{a'^2} \Phi, \quad (5.19)$$

onde o pontinho acima da letra representa a derivada da respectiva quantidade com respeito ao fator de escala.

Ao observar-se as relações acima, vê-se que foram obtidas duas equações diferenciais acopladas. Para inserir essas equações, que serão avaliadas no programa que fará o cálculo numérico, é necessário escrever as relações da base em termos do fator de escala, ou seja:

$$a' = \sqrt{\Omega_{m0}a + \Omega_{x0}a^{(1-3\alpha)}}, \quad (5.20)$$

$$a'' = \frac{1}{2}[\Omega_{m0} + (1 - 3\alpha)\Omega_{x0} a^{-3\alpha}], \quad (5.21)$$

$$\phi' = \sqrt{3|1 + \alpha|\Omega_{x0}a^{-(1+3\alpha)/2}}, \quad (5.22)$$

$$V(a) = \frac{3}{2}\Omega_{x0}(1-\alpha)a^{-3(1+\alpha)}, \quad (5.23)$$

$$V_\phi(a) = -\frac{3}{2}(1-\alpha)\sqrt{3\Omega_{x0}|1+\alpha|}a^{-(7+3\alpha)/2}a', \quad (5.24)$$

$$V_{\phi\phi}(a) = \frac{a'}{\phi'}\frac{d}{da}V_\phi(a), \quad (5.25)$$

onde novamente o subscrito  $\phi$  significa derivada com respeito ao campo escalar. Além do mais,  $q$  é o número de onda da perturbação proveniente da decomposição de Fourier e  $l_0 = 3000 h \text{ Mpc}$  é o raio de Hubble hoje.

## 5.4 Ferramentas Estatísticas para Análise dos Dados

### 5.4.1 Usando a Amostra *Gold* de SN Ia

As análises de SN tipo Ia podem ser feitas utilizando-se a distância *moduli*, que é a quantidade definida por

$$\mu = 5 \log_{10}(D_L/\text{Mpc}) + 25, \quad (5.26)$$

onde a distância-luminosidade  $D_L$  é dada por

$$D_L = (1+z)\frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z')^3 + (1-\Omega_{m0})(1+z')^{3(1+\alpha)}}}, \quad (5.27)$$

sendo  $z$  o desvio para o vermelho. Esta expressão é válida quando se tem um Universo plano para o qual  $\Omega_{m0} + \Omega_{x0} = 1$ . O parâmetro de Hubble pode ser escrito de forma conveniente em termos da constante de Hubble adimensional,  $h$ , de modo que,  $H_0 = 100 h \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

O modelo analisado possui 3 parâmetros livres,  $\alpha$ ,  $\Omega_{dm0}$  e  $h$ , mas a componente de matéria bariônica é fixada e assume o valor  $\Omega_{b0} = 0.04$ . Utiliza-se a amostra *gold* relativa à SN Ia, cuja tabela pode ser encontrada na referência [88].

A estatística  $\chi^2$  para este cálculo é definida por

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{\text{teórico}} - \mu_i^{\text{observac}})^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.28)$$

onde  $\mu_i^{\text{observac}}$  é o dado observacional para a distância *moduli* da *i*-ésima SN,  $\mu_i^{\text{teórico}}$  o correspondente valor calculado teoricamente e  $\sigma_i^2$  é a barra de erro observacional que inclui a velocidade de dispersão. A função de distribuição de probabilidade, cuja sigla adotada aqui foi mantida em inglês, PDF (*probability distribution function*), é obtida através da expressão

$$P_1(h, \Omega_{m0}, \alpha) = Ae^{-\chi_{SN}^2/2}, \quad (5.29)$$

sendo  $A$  uma constante de normalização. A função de distribuição de probabilidade é tridimensional, mas pode-se obter as funções correspondentes unidimensional integrando em duas variáveis e bidimensional integrando em apenas uma.

### 5.4.2 Calculando o Espectro de Potência

O cálculo do espectro de potência da matéria é definido por

$$\mathcal{P}_k = |\delta_k|^2, \quad (5.30)$$

onde  $\delta_k$  é a componente de Fourier do contraste de densidade da matéria.

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, o parâmetro estatístico  $\chi^2$  tem a seguinte representação:

$$\chi_{PS}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mathcal{P}_{q_i}^{\text{teórico}} - \mathcal{P}_{q_i}^{\text{observac}})^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.31)$$

onde  $k_i$  corresponde ao  $i^{\text{ésimo}}$  modo de Fourier,  $\mathcal{P}_{q_i}^{\text{teórico}}$  é o valor teórico para este modo,  $\mathcal{P}_{q_i}^{\text{observac}}$  é o correspondente dado observacional, e  $\sigma_i$  sua incerteza observacional. A equação (5.31) fornece a qualidade da curva traçada dos dados observacionais em relação ao modelo teórico.

Com o valor calculado acima para  $\chi_{PS}^2$  pode-se definir a função de distribuição de probabilidade, tal que

$$P_2(\Omega_{dm0}, \alpha) = Be^{-\chi_{PS}^2/2}, \quad (5.32)$$

onde  $B$  é o fator de normalização. Como se pode observar, ele depende de dois parâmetros livres, isto é, de  $\Omega_{dm0}$ , que representa a fração de densidade de matéria escura e de  $\alpha$ , que

é o parâmetro da equação de estado. Novamente a densidade de bárions é mantida fixa.

## 5.5 Analisando os Gráficos e Avaliando o Modelo

Os resultados obtidos a partir de cálculos numéricos representam a flutuação na densidade de matéria para este modelo. As amostras citadas anteriormente que serviram como teste para o modelo proposto neste trabalho foram obtidas, como comentado no início do capítulo, de projetos de SN Ia e espectro de potência para a matéria. Os resultados estão apresentados graficamente, seguidos das devidas análises e interpretações.

### **Amostra *Gold***

Observa-se na figura 5.1 as curvas referentes à função de distribuição de probabilidade bi e unidimensional para o caso dos dados da amostra *gold* de SN Ia. Se a seção espacial for suposta plana existirão três parâmetros independentes:  $h$ ,  $\Omega_{dm0}$  e  $\alpha$ . Minimizando  $\chi^2_{SN}$ , obtém-se  $\Omega_{dm0} = 0.47$ ,  $\alpha = -2.40$ ,  $h = 0.66$ , sendo  $\chi^2_{SN} = 1.11$ .

As funções de distribuição de probabilidade bi e unidimensional, como dito anteriormente, são obtidas integrando-se sobre um e dois parâmetros, respectivamente. Pela distribuição de probabilidade bidimensional pode-se perceber um favorecimento para  $\alpha = -2$  e  $h = 0.65$ . Isto se confirma após a marginalização: os picos de probabilidade ocorrem para  $\alpha = -2.29$  e  $h = 0.66$ . Observa-se ainda que a probabilidade para  $\alpha$  diminui após o máximo, porém lentamente.

A extrapolação dos valores de  $\alpha$  para quantidades muito negativas gerou um pequeno acréscimo no valor estimado de  $h$  com relação ao valor previsto pelo teste CMB que fica em torno de  $h = 0.72$ . De modo geral, esses resultados estão em acordo com aqueles tratados na referência [87], onde a origem da componente de energia escura é obtida a partir de efeitos quânticos e seus vínculos são obtidos impondo-se que o campo escalar resultante não tenha uma massa muito maior que a massa de Planck. Comparando-se o cenário que se configura naquele trabalho com o que está sendo proposto nesse, existe um máximo de probabilidade em torno de  $\alpha = -2$ .

Para  $\Omega_{dm0}$  a análise é um pouco mais delicada. A função de distribuição de probabilidade prediz um pico para  $\Omega_{m0} = 0.49$  que é um valor grande se comparado ao modelo

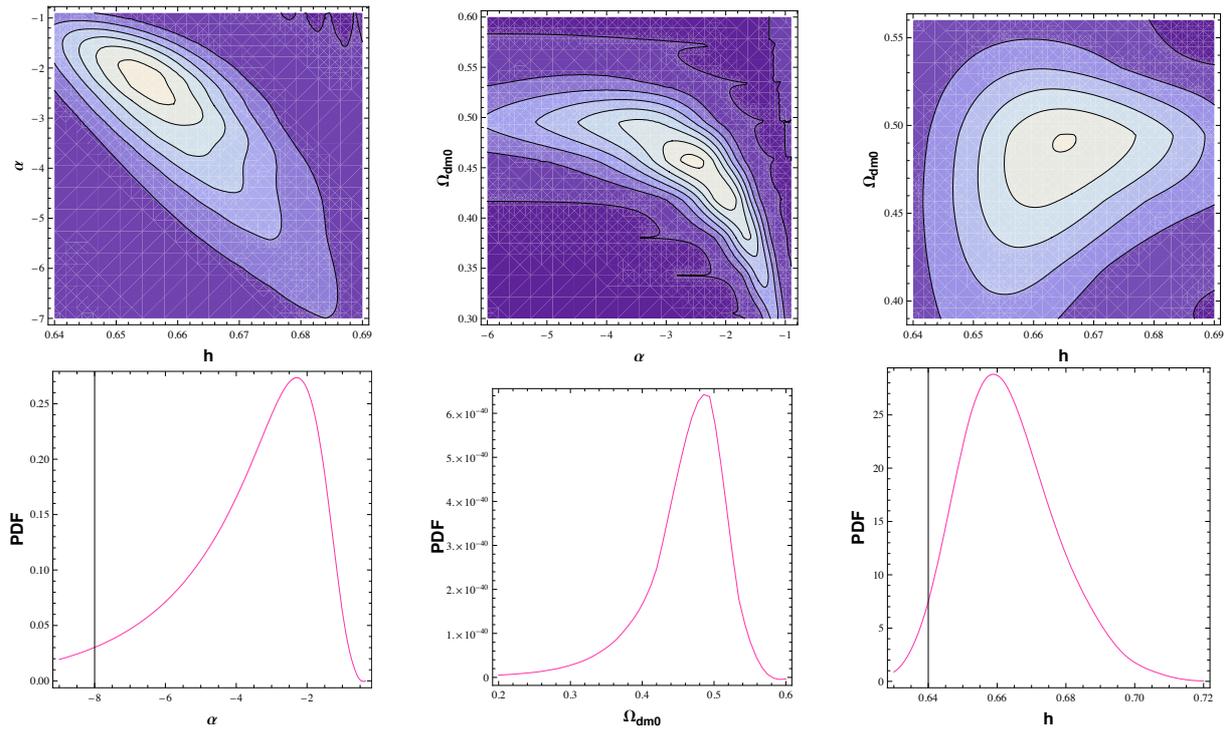


Figura 5.1: Os três gráficos superiores mostram a função de distribuição de probabilidade bidimensional usando dados de SN Ia para diferentes combinações de  $h$ ,  $\Omega_{dm0}$  e  $\alpha$ . Abaixo destes são mostrados os gráficos unidimensionais correspondentes.

$\Lambda$ CDM, para o qual  $\Omega_{dm0} \sim 0.25$  [6, 89]. Mas, nota-se, observando a 5.1 referente à PDF para  $\alpha$  e  $\Omega_{dm0}$ , que valores bastante negativos do parâmetro da equação de estado exigem valores maiores para o parâmetro de densidade da matéria escura. Portanto, após a normalização, estender a integração para valores bastante negativos de  $\alpha$  implica aumento no valor previsto para  $\Omega_{dm0}$ .

### Análise do Espectro de Potência

Na figura 5.2 a análise do espectro de potência traz novas restrições aos parâmetros da equação de estado e de densidade de matéria escura, que são os dois parâmetros livres nesse caso. O melhor cenário de curvas traçadas conduz aos seguintes resultados em função de  $h$ :  $\alpha = -0.90$ ,  $\Omega_{dm0} = 0.95$  e  $\chi^2_{PS} = 0.38$ . Pelo gráfico fica claro que valores positivos de  $\alpha$  são excluídos e após  $\alpha \sim -1/3$  atinge-se um platô.

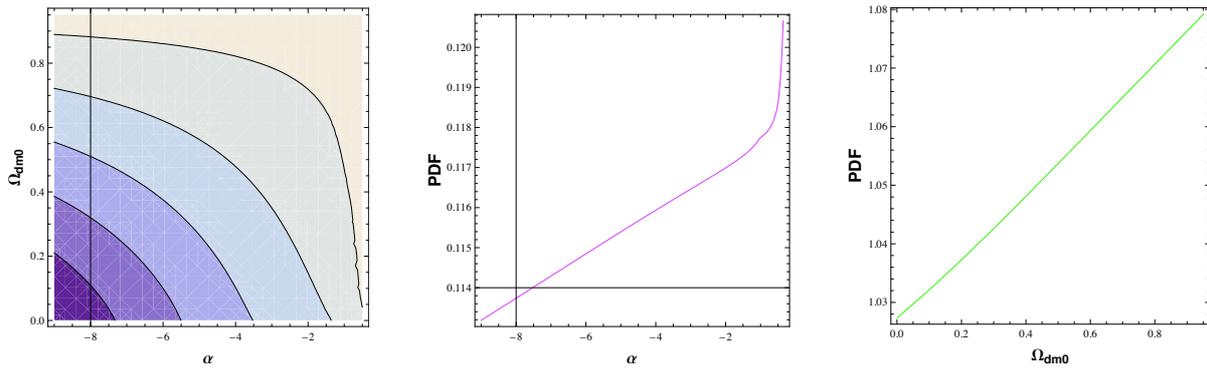


Figura 5.2: O painel da esquerda mostra a função de distribuição de probabilidade bidimensional usando dados do espectro de potência da matéria para  $\Omega_{dm0}$  e  $\alpha$ . No centro e à direita estão os correspondentes unidimensionais. Observa-se que a probabilidade é quase constante.

Uma questão que vale ressaltar é que nada em especial parece acontecer para  $\alpha = -5/3$ , o novo ponto crítico identificado nas referências [72, 73]. Entretanto, vale lembrar que o espectro de potência para a componente de matéria foi calculado e, portanto, não há contradição com as referências citadas. Após a marginalização, a probabilidade é essencialmente constante de  $\alpha \sim -0.3$  em diante; para  $\Omega_{dm0}$  ocorre próximo a 1. A variação na função de distribuição de probabilidade é muito pequena para ambos os parâmetros enquanto  $\alpha < -0.3$ .

### Combinando os Dados

Uma nova verificação pode ser feita quando se combina os dados da amostra *Gold* das SN Ia com o espectro de potência da matéria. Matematicamente significa simplesmente multiplicar as probabilidades do primeiro caso com as do segundo. O resultado mostra que os resultados das SN Ia dominam.

Na figura 5.3 observa-se graficamente o resultado da composição de ambos os dados representados pelas figuras 5.1 e 5.2. O máximo da função para o parâmetro de densidade da matéria escura é novamente  $\Omega_{dm0} = 0.49$ , ou seja, o mesmo valor obtido para o caso da SN Ia. Da mesma forma, o valor máximo da PDF para o parâmetro da equação de estado ocorre para  $\alpha = -2.29$ , como no caso da SN Ia puro.

É importante frisar que nenhum *prior* especial foi utilizado, ao contrário por exemplo de análises feitas em [6, 89]. Ademais, particularizando o valor da componente de energia escura para aquele utilizado na referência citada, obtém-se essencialmente os mesmos

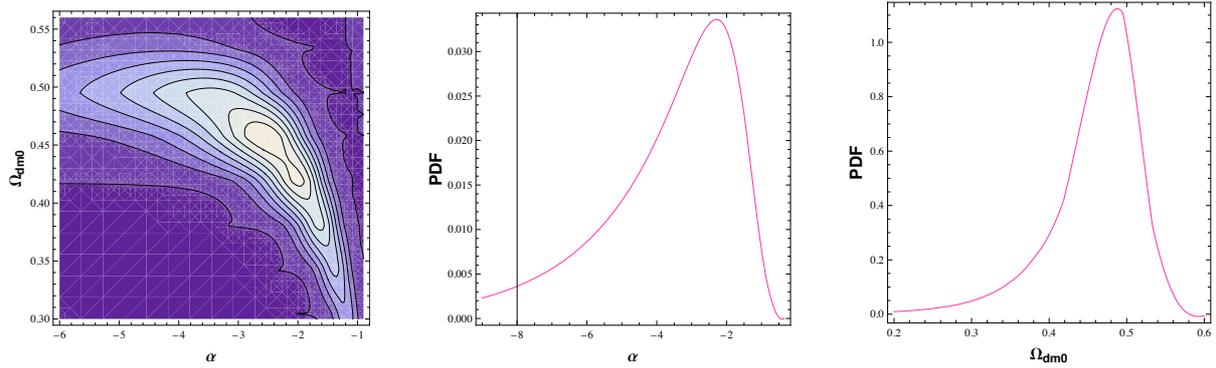


Figura 5.3: O gráfico à esquerda representa a função de distribuição de probabilidade bidimensional para  $\Omega_{dm0}$  e  $\alpha$  usando os dados de SNIa e do espectro de potência da matéria. Os gráficos do centro e da direita são os correspondentes unidimensionais.

resultados da [6, 89], com o valor do pico da distribuição de probabilidade para  $\alpha \sim -1$ . Outra observação relevante é que os resultados obtidos são altamente dependentes do modelo, ou seja, qualquer pequena alteração pode conduzir a resultados bastante diferentes.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Modelos de energia escura tem sido cada vez mais estudados, favorecidos pelos dados observacionais crescentes nesta última década. O Universo está de fato expandindo, mas não apenas isto, ele está acelerando. Neste cenário, fluidos com pressão negativa podem descrever a dinâmica observada. Depois de exaustivos trabalhos de investigação em busca do candidato a energia escura, tal que  $\alpha \sim -1$ , surgem propostas que analisam o outro lado, ou seja,  $\alpha < -1$ . Além do mais, modelos fantasmas deixaram de ser apenas especulação ou coisa parecida e tornaram-se possibilidade real como conteúdo material dominante do Universo.

Numa representação mais simples a matéria fantasma é descrita por um fluido com parâmetro  $\alpha < -1$ . Entretanto, um tratamento mais fundamental é obtido quando se utiliza uma representação de campo para descrever o conteúdo material. Para o caso fantasma, isto pode ser feito utilizando-se um campo escalar auto-interagente de maneira que o termo cinético possua sinal trocado em relação ao caso padrão.

Neste trabalho, o processo de formação de estruturas foi investigado através da análise das perturbações e verificou-se o comportamento das instabilidades nos modos escalares perturbativos. O fluido utilizado na descrição de ambos os modelos obedece a equação barotrópica de estado  $p = \alpha\rho$ , com  $\alpha < -1$  para o caso fantasma. Utilizou-se o formalismo invariante de calibre para descrever as equações perturbadas e considerou-se perturbações escalares adiabáticas.

No quarto capítulo mostrou-se que as instabilidades das perturbações escalares podem crescer durante uma fase de cosmologia fantasma onde a equação de estado obedeça  $\alpha < -5/3$  e viu-se que tais resultados independem da curvatura espacial. As equações foram resolvidas para qualquer valor dos parâmetros de curvatura e da equação de estado. A análise assintótica mostrou que existem modos crescentes para  $\alpha < -5/3$  e que  $\alpha = -5/3$ , apesar de não corresponder a qualquer condição de energia, representa, de fato, um comportamento crítico, como ocorre com outros modelos apresentados na literatura.

Uma descrição mais fundamental em termos de campos mostrou que, um fluido considerado super-fantasma, tal que o parâmetro da equação de estado seja  $\alpha < -5/3$ , é instável gravitacionalmente para todas as escalas. Isto conduziria a um Universo inhomogêneo que poderia evitar seu destino trágico num *Big Rip*, que ocorre sob condições de isotropia e homogeneidade.

O capítulo quinto apresentou um modelo de dois fluidos em representação de campos onde a componente de energia escura foi descrita por um campo escalar auto-interagente. Permitindo-se a violação da condição de energia nula, o fluido pôde ser representado por um campo fantasma. O modelo foi testado usando dados de SN Ia, que conduziram a valores preferenciais na representação do fluido fantasma, e dados do espectro de potência da matéria, cujas restrições implicam um parâmetro da equação de estado para a EE altamente degenerado.

A análise para esse modelo se restringe ao caso em que a componente de energia escura é descrita por um campo escalar auto-interagente, conduzindo a uma equação de estado constante. Deste modo, a evolução com uma equação de estado constante corresponde a um ponto crítico no espaço de fase, mas não é a única possibilidade. Ao introduzir as perturbações a equação de estado efetiva muda e isto porque as instabilidades não aparecem mesmo quando  $\alpha$  é negativo. Isto é conveniente para se representar a análise do espectro de potência.

A mensagem principal dos resultados obtidos nesse modelo sugere as seguintes conclusões: - existem fortes evidências de um fluido fantasma com um valor muito negativo para o parâmetro da equação de estado  $\alpha$ , principalmente devido a restrições para os dados

de SN Ia; - por outro lado, usando somente o espectro de potência da matéria, a única restrição clara é que  $\alpha$  deve ser menor que  $\alpha \sim -1/3$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, DOI:10.1002/andp.200590044 (1916);
- [2] A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152 (1917);
- [3] C.L. Bennett et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)*, astro-ph/0302207 (2003)
- [4] Tegmark, M., *et al*, *Cosmological parameters from SDSS and WMAP*, astro-ph/0310723v2 (2004)
- [5] Riess, A. G., *et al.*, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron. J. **116**, 1009, (1998)
- [6] Riess, A.G. *et al*, *Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution*, [astro-ph/0402512], Astrophys.J. **607**, 665-687 (2004)
- [7] Tegmark M., *et al.*, *Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies*, [astro-ph/0608632], (2007)
- [8] Cole, S., *et al.*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **362**, 505 (2005)
- [9] Turner, M., *Cosmological Parameters*, [astro-ph/9904051], (1999)
- [10] D’Inverno, Ray, *Introducing Einstein’s Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1993)

- [11] Wald, Robert M., *General Relativity*, Chicago Press, London, (1984)
- [12] Dirac, Paul A. M., *General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, New York (1975)
- [13] Weinberg, Steven, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, New York (1972)
- [14] Yadav, J., *et al*, *Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One*, Mon. Not.Roy. Astron. Soc. **364**, 601 [astro-ph/0504315] (2005)
- [15] Bernstein, J., Feinberg, G., *The Cosmological Constants*, Columbia University Press, New York (1986)
- [16] Friedmann, A., Z.Phys. **10**, 377 (1922)
- [17] Friedmann, A., Z.Phys. **21**, 326 (1924)
- [18] Hubble, E., *A Relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc Nat Acad Sci,**15**, 168-173 (1929)
- [19] Corasaniti, Pier Stefano, *Phenomenological aspects of dark energy dominated cosmologies*, Tese de doutorado, The University of Sussex (2003)
- [20] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R., *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, USA, (1973)
- [21] Islam, J. N., *An Introduction to Mathematical Cosmology*, Cambridge (2004)
- [22] Einasto, J., *Dark Matter*, [astro-ph/0901.0632v1] (2009)
- [23] Moustakas, L. *et al.*, *Strong Gravitational Lensing Probe of the particle Nature of Dark Matter*, [astro-ph/0902.3219v1], (2009)
- [24] Weinberg, Steven, *Cosmology*, Oxford, New York (2008)
- [25] Patrick, P., Uzan, J-P., *Cosmologie Primordiale*, Belin, Paris (2005)

- [26] Primack, J. R., *Dark Matter and Structure Formation in the Universe*, [astro-ph/9707285v2] (1997)
- [27] Sahni V., *Dark matter and dark energy* Lect. Notes Phys., **653**, 141 (2004)
- [28] A. A. Penzias and R. W. Wilson, "A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s," *Astrophysical Journal* **142** (1965)
- [29] Perlmutter, S. J., *et al.*, *Nature* **391**, 51, (1998)
- [30] Perlmutter, S. J.; Turner, M. S.; White, M., *PRL* **83**, 670, (1999)
- [31] Copeland, E. J., Sami, M., Tsujikawa, S., *Dynamics of Dark Energy*, *International Journal of Modern Physics D*, **15**, 1753 (2006)
- [32] Cunha, J. V. Jr., *Energia Escura: Origem, Candidatos e Vínculos Observacionais*, Tese de doutorado, UFRN (2006)
- [33] Bardeen, J., *Gauge-invariant Cosmological Perturbations*, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980)
- [34] Turner, M. S., *Dark Matter and Dark Energy in the Universe*, [astro-ph/9811454v1] (1998)
- [35] Turner, M. S., *Dark Matter and Dark Energy: The Critical Questions*, [astro-ph/0207297v1] (2002); Turner, M. S., *Making sense of the new cosmology*, [astro-ph/0202008v1] (2002)
- [36] Primack, J. R., Gross, M. A. K., *Hot Dark Matter in Cosmology*, [astro-ph/0007165v1] (2000)
- [37] Milgrom, M., *MOND - A Pedagogical Review*, [astro-ph/0112069v1] (2001)
- [38] Sanders, R.H., *From Dark Matter to Mond*, [astro-ph/0806.2585v1] (2008)
- [39] Fabris, J.C., Velten, H.E.S., *MOND mass-to-light ratio for the COMA cluster*, [astro-ph/09060109] (2009)

- [40] Moffat, J.W., Toth, V.T., *Testing modified gravity with globular cluster velocity dispersions*, [astro-ph/07081935] (2007)
- [41] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/parameters.cfm>
- [42] Perlmutter, S. J., *et al.*, *Astrophys. J.*, **517**, 565 (1999)
- [43] Freedman, W.L., *et al.*, *Astrophys. J.*, **553**, 47 (2001)
- [44] Garcia-Bellido, J., *Cosmology and astrophysics*, [astro-ph/0502139] (2005)
- [45] Fabris, J.C., *Introduction a la cosmologie*, [astro-ph/0412017] (2004)
- [46] Alcaniz, J.S., Santos, J., Rebouças, M.J., *Energy conditions constraints on a class of  $f(R)$  gravity*, [astro-ph/0807.2443] (2008)
- [47] Alcaniz, J.S., Santos, J., Carvalho, F.C., Pires, N., *Latest supernovae constraints on  $f(R)$  cosmologies*, [astro-ph/0808.4152] (2008)
- [48] Carroll, S.M., *The Cosmological Constant* [astro-ph/0004075] (2000)
- [49] Alcaniz, J.S., Lima, J.A.S., *Measuring the Chaplygin gas equation of state from angular and luminosity distances*, [astro-ph/0308465] (2004)
- [50] Abha Dev, Alcaniz, J.S., Jain, D., *Cosmological consequences of a Chaplygin gas dark energy*, [astro-ph/0209379] (2002)
- [51] Fabris, J.C., Gonçalves, S.V.B., Zimdahl, W., Velten, H.E.S., *Matter power spectrum for the generalized chaplygin gas model: The Newtonian Approach* [astro-ph/08104308] (2008)
- [52] Barboza Jr, E.M., Alcaniz, J.S., Zong-Hong Zhu, Silva, R., *A generalized equation of state for dark energy*, [astro-ph/0905.4052] (2009)
- [53] Zel'dovich, Ya.B., *Sov. Phys. Uspekhi* **11**, 381 (1968)
- [54] Sami, M., *Dark energy and possible alternatives*, [astro-ph/0901.0756v1] (2009)

- [55] Caldwell, R.R., Dave, R., Steinhardt, P.J., *Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state*, [astro-ph/9708069v2] (1998)
- [56] Peebles, P.J.E., Ratra, B., *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 559 (2003)
- [57] Ferreira, P.G., Joyce, M., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4740 (1997); *Phys. Rev. D* **58**, 023503 (1998)
- [58] Matos, T., Urena-Lopez, L. A., *Class. Quant. Grav.* **17**, L75 (2000)
- [59] T. Barreiro, E. J. Copeland and N. J. Nunes, *Phys. Rev.* **D61**, 127301, [astro-ph/9910214] (2000)
- [60] Mukhanov, V., *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge, UK (2005)
- [61] Mukhanov, V., Feldman, H.A., Brandenberger, R.H. *Theory of cosmological perturbations*, *Phys. Report*, **215** (1992) 203-333
- [62] Fabris, J., Martin, J., *Amplification of density perturbations in fluids with negative pressure*, *PRD*, **55**, 8, (1997)
- [63] Hawking, S. W., *Perturbations of an expanding universe*, *Astrophys.J.*, **145**, 544 (1966)
- [64] Durrer, R, *The Cosmic Microwave Background*, Cambridge University Press, Cambridge, (2008)
- [65] Ellis, G. F. R., Bruni, M., *Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations*, *Phys.Rev.D*, **40**, 1804 (1989)
- [66] S. Blau and A.H. Guth, *300 years of gravitation*, edited by S. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge (1987);
- [67] Caldwell, R.R., *A Phantom menace?*, *Phys. Lett. B* **545**, **23** (2002) [astro-ph/9908168]
- [68] Sahni V., Shtanov, Y. *Braneworld models of dark energy*, [astro-ph/0202346v3] (2003)

- [69] Fabris, J.C., Gonçalves, S.V.B., Tomimura, A. *An analysis of cosmological perturbations in hidrodynamical and field representations.*, Class. Quant. Grav., **17**, 2983 (2000)
- [70] Bronnikov, K. A., Fabris, J. C., Gonçalves, S. V. B., *Different faces of the phantom*, [gr-qc/0611038v1] (2006)
- [71] Singh, P., Sami, M., Dadhich, N., *Cosmological Dynamics of Phantom Field*, [hep-th/0305110v2], (2003)
- [72] Fabris, J.C., Gonçalves, S.V.B. *Scalar perturbations and the possible self-destruction of the "phantom menace".*, Phys. Rev. D, **74**, 027301(2006)
- [73] Fabris, J.C., Jardim, D.F., Gonçalves, S.V.B. *Instability of scalar perturbations in a phantom cosmological scenario.*, E.P.L., **82**, 69001(2008)
- [74] Piazza, F., Tsujikawa, S., J. Cosmol. Astropart. Phys. **07**, 004 (2004).
- [75] Bagla, J. S., Jassal, H. K., Padmanabhan, T., Phys. Rev. **D67**, 063504 (2003).
- [76] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., *Table of integrals, series and products*, Academic Press, USA, ISBN-13: 978-0-12-373637-6 (2007)
- [77] Hawking, S.W., Ellis, G.F.R., *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, USA, ISBN 0-521-09906-4 (1973)
- [78] Dabrowski M. P., Stachowiak T. and Szydlowski S., Phys. Rev. D, **68** (2003) 103519
- [79] Sahni, V., Sami, M., Starobinsky, A.A., Alam, U., *Statefinder - A New Geometrical Diagnostic of Dark Energy*, JETP Lett. **77**, 201 (2003)
- [80] Batista, A.B., Fabris, J. C., Gonçalves, S.V.B., Tossa J., *Qualitative Analysis of a Scalar-Tensor Theory with Exponential Potential*, Int. J. Mod. Phys. A, **16** (2001) 4527
- [81] Fernandez-Jambrina L., *Hidden past of dark energy cosmological models*, Phys. Lett. B, **656** (2007) 9

- [82] Fabris, J.C., Jardim, D.F., *Some remarks on the observational constraints on the self-interacting scalar field model for dark energy*, EPL - Europhys. Lett., **89**, 69002, DOI: 10.1209/0295-5075/89/69002 (2010)
- [83] Parkinson, D., Mukherjee, P., Liddle, A. R., *Bayesian model selection analysis of WMAP3*, Phys. Rev. **D73**, 123523 (2006)
- [84] Valkenburg, W., Krauss, L.M., Hamann, J., *The Impact of Prior Assumptions on Bayesian Estimates of Inflation Parameters and the Expected Gravitational Waves Signal from Inflation*, Phys. Rev. **D78**, 063521 (2008)
- [85] Kujat, J., Scherrer, R. J., Sen, A. A., *Phantom dark energy models with negative kinetic term*, Phys. Rev. **D74**, 083501 (2006)
- [86] Saridakis, E. N., *Phantom evolution in power-law potentials*, [gr-qc/0902.3978v2] (2009)
- [87] Saridakis, E. N., *Theoretical limits on the equation-of-state parameter of phantom cosmology*, [hep-th/0811.1333v2] (2009)
- [88] Zong-Kuan Guo, Zong-Hong Zhu, Alcaniz, J. S., Yuan-Zhong Zhang, *The Astrophysical Journal*, **646**, 1-7, (2006)
- [89] Tonry, J. L., *et al.*, *Cosmological results from high- $z$  SNe*, *The Astrophysical Journal*, **594**, 1 - 24, (2003)
- [90] Astier, P., *et al.*, *The Supernova Legacy Survey: measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set*, *Astron. Astrophys.*, **447**, 31-48, (2006)