

Universidade Federal do Espírito Santo

Criação de partículas em modelos
cosmológicos

por

Stéphane Jonas Mahouton Houndjo

Tese de Doutorado

Orientador: Dr. Júlio César Fabris

Vitória - Espírito Santo

2010

À toda minha família, a qual amo muito, que sempre me ajudou e que sem ela eu nada seria.

Agradecimentos

- Aos meus pais e aos meus irmãos pela ajuda e conselhos que me deram;
- À minha esposa Estelle e ao meu filho Sylvestre pelo amor incondicional e por terem entendido meus momentos de ausência;
- A todos meus amigos da pós graduação que diretamente ou indiretamente me ajudaram na realização desta tese;
- Aos professores do grupo de cosmologia e gravitação da UFES: Prof^o 's Antonio B. Batista, Olivier Piguet, Flávio Alvarenga, Winfried Zimdahl e Oliver Piattella;
- Aos professores, Saulo Carneiro, Ilya L. Shapiro e Nelson Pinto-Neto por terem aceito participar desta banca;
- Aos professores Joel Tossa, Jean Bio Chabi Orou, Felix Hontinfindé, Carlos Ogunyandjou e Gabriel Avossevou que me deram muitos conselhos de bons amigos;
- Ao meu querido orientador, Prof^o Dr Júlio César Fabris pela paciência e confiança que teve a orientar este trabalho até o fim;
- Ao CNPq/TWAS pelo suporte financeiro durante esta tese.

Resumo

Investigamos a produção de partículas num universo em expansão preenchido por um fluido perfeito com a equação de estado $p = \alpha\rho$. O ritmo de produção de partículas, usando os coeficientes de Bogoliubov, é determinado exatamente para qualquer valor de α no caso de um universo plano. Quando a condição de energia forte é satisfeita, o ritmo de produção de partículas decresce com o tempo; o contrário ocorre quando a condição de energia forte é violada. No caso fantômico, o ritmo de produção de partículas diverge num tempo finito para cada modo representado pelo número de onda k . Num primeiro momento, usamos o corte no limite da escala de Planck para calcular a densidade de energia associada com a produção de partículas. Esta densidade de energia vai para zero quando o big rip se aproxima. A conclusão é que os efeitos quânticos não são eficazes para evitar o big rip. Porém, num segundo momento, para uma análise mais profunda dos efeitos quânticos, usamos a técnica de regularização n -wave para calcular a densidade de energia quântica e vemos que ela se torna a componente dominante do universo perto do big rip. Neste caso, concluímos que os efeitos quânticos podem impedir o acontecimento do big rip.

Por outro lado, investigamos os efeitos de produção de partículas sobre uma singularidade repentina clássica que ocorre a um tempo finito no universo de Friedmann. Usamos soluções exatas para descrever o universo inicial dominado pela radiação e que em seguida entra numa singularidade a um tempo finito. Calculamos a densidade de energia e a pressão das partículas criadas e achamos que elas são menores que a densidade e a pressão clássicas da base que produziram a singularidade repentina. Concluímos que, no exemplo estudado, a produção de partículas quânticas não permite evitar ou modificar a futura singularidade repentina.

Abstract

We investigate particle production in an expanding universe dominated by a perfect fluid with the equation of state $p = \alpha\rho$. The particle production rate, using the Bogoliubov coefficients, is determined exactly for any value of α in the case of a flat universe. When the strong energy condition is satisfied, the particle production rate decreases with time; the opposite occurs when the strong energy condition is violated. In the phantom case, the particle production rate diverges at finite time for each mode represented by a wavenumber k . In a first step, in order to compute the energy density associated with the produced particles, we use a cut-off in the Planck scale and find that it tends to zero as the big rip is approached. We conclude that quantum effects due to particle creation are not able to prevent the big rip. In the second step, in order to perform a deep analysis of the quantum effects, we use the n -wave regularization technique for calculating the quantum energy density and find that it becomes the dominant component of the universe near the big rip. We conclude in this case that quantum effects can prevent the occurrence of the big rip.

We also investigate the effects of quantum particle production on a classical sudden singularity occurring at finite time in a Friedmann universe. We use an exact solution to describe an initially radiation-dominated universe that evolves into a sudden singularity at finite time. We calculate the density of the created particles exactly and find that it is generally much smaller than the classical background density and pressure which produce the sudden singularity. We conclude that, in the example studied, quantum particle production does not avoid nor modify of the sudden future singularity.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução geral | 3 |
| 2 | Cosmologia | 6 |
| 2.1 | Introdução | 6 |
| 2.2 | A gravitação como geometria do espaço-tempo | 7 |
| 2.3 | A métrica do espaço-tempo | 11 |
| 2.3.1 | Conteúdo material | 14 |
| 2.3.2 | Condição de energia | 16 |
| 2.3.3 | Cenários cosmológicos | 19 |
| 2.4 | Parâmetros cosmológicos | 22 |
| 2.5 | Cenário inflacionário | 25 |
| 2.5.1 | Universo dominado pelo vácuo | 26 |
| 2.6 | Campo escalar em cosmologia | 26 |
| 2.6.1 | Densidade de energia e densidade de pressão | 27 |
| 3 | Teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo | 29 |
| 3.1 | Introdução | 29 |
| 3.1.1 | Conceito básico | 30 |
| 3.1.2 | Teoria quântica de campos no espaço de Minkowski | 33 |
| 3.1.3 | Efeito Casimir | 34 |
| 3.1.4 | Espaço-tempo curvo | 36 |
| 3.2 | Renormalização do tensor momento energia no espaço-tempo curvo | 39 |
| 3.2.1 | Método de DeWitt-Schwinger | 41 |
| 3.2.2 | Renormalização pela separação de pontos | 48 |
| 3.2.3 | Um exemplo de renormalização do tensor momento-energia no espaço-tempo de Robertson-Walker pela separação de pontos. | 50 |
| 3.2.4 | Anomalia de traço | 60 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2.5 | Renormalização pela regularização n -wave | 61 |
| 4 | Produção de partículas em um universo em expansão com um fluido de energia escura | 62 |
| 4.1 | Introdução | 62 |
| 4.1.1 | O modelo cosmológico do fluido perfeito | 63 |
| 4.1.2 | A quantização do campo escalar no modelo plano de FRW | 64 |
| 4.1.3 | Estado de vácuo inicial e criação de partícula | 68 |
| 4.2 | Efeitos quânticos perto do big-rip com regularização n -wave | 76 |
| 4.2.1 | O problema geral de regularização | 76 |
| 4.2.2 | Caso de fluido radiativo | 78 |
| 4.2.3 | A fase de de Sitter | 80 |
| 4.2.4 | O caso da inflação | 84 |
| 4.2.5 | Eliminação das divergências | 90 |
| 4.2.6 | Verificação da consistência do procedimento | 93 |
| 5 | Efeitos de produção de partícula quântica perto da singularidade repentina | 96 |
| 5.1 | Introdução | 96 |
| 5.2 | Modelo de singularidade repentina | 97 |
| 5.3 | A equação de Klein-Gordon | 99 |
| 5.3.1 | Fase primordial | 99 |
| 5.3.2 | Fase singular | 100 |
| 5.3.3 | O potencial | 100 |
| 5.4 | Continuidade do campo | 101 |
| 5.5 | Densidade de energia de criação de partículas | 101 |
| 6 | Conclusão geral | 108 |

Capítulo 1

Introdução geral

O fenômeno de produção de partículas num universo em expansão é devido, essencialmente, ao fato de que no espaço-tempo curvo o vácuo não é único [1–3]. Com a expansão do universo e a mudança da curvatura, o estado de vácuo também muda: o estado de vácuo inicial, representando o estado sem partícula, se torna depois um estado com partículas. A produção de partículas é diretamente ligada à curvatura do universo. Se o universo é espacialmente plano, a evolução cósmica leva assintoticamente ao espaço-tempo de Minkowski onde o fenômeno de produção de partícula nunca acontece. Porém, isto é verdade só quando a condição de energia forte é satisfeita: a densidade de energia ρ e a pressão p devem satisfazer à relação $\rho + 3p \geq 0$. Se a condição de energia forte não é satisfeita, a produção de partículas pode ser nula inicialmente e crescente com a expansão do universo.

Para calcular a produção de partículas com um dado modelo, é necessário fixar o estado de vácuo inicial. Se o universo está sempre desacelerando, não tem uma maneira natural e única de escolher o vácuo, uma vez que os modos estão inicialmente fora do raio de Hubble. Entretanto, a escolha natural do estado de vácuo inicial pode ser feita no caso de um universo em aceleração, uma vez que todos modos físicos estão inicialmente dentro do raio de Hubble e se comportam no passado como num espaço-tempo de Minkowski. Essa é uma das razões pelas quais o cenário inflacionário primordial é um sucesso teórico.

Sabemos que os dados observacionais favorecem o cenário fantômico hoje [4]. Isto significa que estamos hoje numa fase inflacionária uma vez que o universo está em aceleração [5, 6]. Assim, o mecanismo de produção de partícula deve desempenhar ainda hoje um papel muito importante. Suponha que nós definíssemos um estado quântico para um campo. A tarefa nossa é determinar o ritmo de produção de partículas. Em especial, gostaríamos

de saber se tal produção de partículas é tão importante que pode alterar, por uma contra reação, a evolução futura do universo. Estamos interessados na situação em que o universo é preenchido pelo fluido fantômico, uma vez que classicamente, nestas situações o universo vai para um estado de singularidade futura, chamado big rip. O big rip é uma singularidade para qual, num tempo finito, o fator de escala, a densidade de energia e a pressão do fluido divergem. Este tipo de fluido viola a condição de energia forte e nula. Dependendo do conteúdo do universo, várias singularidades podem ser observadas. Nesta tese, vamos tratar rigorosamente de duas: o big rip e a singularidade repentina.

Na referência [7], foi mostrado que o universo relativístico clássico de Friedmann permite em tempo finito o acontecimento de uma singularidade para a qual o fator de escala, sua derivada, e a densidade de energia, ficam finitas enquanto a singularidade acontece na pressão do fluido e, conseqüentemente, na aceleração. Notamos aqui que a condição de energia forte continua a ser mantida, $\rho + 3p \geq 0$. Muitos estudos que generalizaram estes resultados às diferentes teorias de gravidade e cosmologias [8], classificam outros tipos de singularidade futura que pode ocorrer durante a expansão do universo [9], e exploram os vínculos observacionais sobre as futuras ocorrências possíveis no nosso universo [10].

Nesta tese, vamos estender esses estudos considerando as implicações quânticas da singularidade repentina. Especialmente, queremos saber se a densidade de energia de produção de partículas pode dominar a densidade da base clássica quando a singularidade se aproxima e evitar seu acontecimento ou modificar suas propriedades, como pode ser o caso para a singularidade futura do tipo big rip [11, 12]. Os resultados desses estudos são também interessantes como prova a observação das singularidades em tempo finito. Visando realizar uma análise mais completa, vamos construir um modelo cosmológico clássico exato e simples de Friedmann com singularidade futura que vem depois da era de radiação em que não há produção de partículas quânticas sem massa. Vamos calcular a produção de partículas quânticas sem massa quando a singularidade repentina se aproxima.

Um dos desafios que temos na teoria quântica dos campos é ver se os efeitos quânticos (produção de partículas e a polarização do vácuo) podem ser importantes ao ponto de impedir, num processo de contra-reação, o acontecimento das singularidades. Para fazer essa análise, é importante calcular o tensor momento energia quântico do qual tiramos a densidade de energia associada à produção de partículas. Infelizmente, um problema que ocorre nestes cálculos é o surgimento das divergências nas expressões da densidade de energia e a pressão de criação de partículas. Para evitar isto, usaremos o problema trans-planckiano. O problema trans-planckiano é um dos aspectos discutidos nesta tese, supondo que o corte na integral possa ser feito no limite do comprimento do Planck para evitar

as divergências ultravioletas. Além do mais, para nossos cálculos de energia de criação de partículas, usaremos também a técnica de regularização n -wave [13]. Essa técnica permite dar um significado físico à energia. Existem várias técnicas de regularização entre as quais, a mais eficiente é a "separação de pontos". Apresentaremos também nesta tese a técnica de separação de pontos, que vai servir de comparação para ver a eficiência da técnica n -wave que vamos usar.

A tese se apresenta da seguinte maneira. No capítulo 2, vamos fazer uma pequena revisão das noções fundamentais da cosmologia. No capítulo 3, uma introdução à teoria quântica dos campos no espaço-tempo curvo e principalmente uma abordagem às técnicas de renormalização pela "separação de pontos" e o n -wave . No capítulo 4 vamos mostrar um trabalho bem aprofundado sobre a produção de partículas num universo em expansão com um fluido de energia escura e estudar a possibilidade de evitar ou não o big rip. No capítulo 5, o problema de singularidade repentina com a produção de partículas é estudado e no capítulo 6 está apresentado a conclusão geral da tese.

Capítulo 2

Cosmologia

2.1 Introdução

O papel da cosmologia é o estudo do Universo como um todo. Assim, ela se distingue da astrofísica que só estuda alguns objetos particulares que existem no Universo, como as estrelas, as galáxias, etc.... A cosmologia tenta responder às perguntas como:

1. O Universo é estático ou evolui com o tempo?
2. Será que o Universo é globalmente homogêneo ou suas propriedades dependem da posição no espaço?
3. Como podemos explicar a formação das galáxias e todas outras estruturas que observamos?
4. Como se formam os elementos químicos que existem no Universo?
5. Qual a natureza das componentes materiais que preenchem o Universo?

Evidentemente, esta lista não é exaustiva.

A força dominante no universo à grande escala é a gravitação. Assim, devemos ter uma teoria de gravitação para descrever a estrutura e evolução do universo. Temos atualmente uma teoria de gravitação que responde positivamente às exigências teóricas e observacionais: a Relatividade Geral. Do ponto de vista teórico, ela incorpora os princípios relativísticos e também o princípio de equivalência. A relatividade geral descreve a gravitação como uma estrutura do espaço-tempo criada pela distribuição da matéria.

Vamos admitir que o Universo é homogêneo e isotrópico à grande escala. Vamos depois obter a estrutura geométrica que deve servir para a descrição desse Universo homogêneo e isotrópico. As possíveis soluções dinâmicas serão determinadas.

2.2 A gravitação como geometria do espaço-tempo

A primeira teoria da gravitação foi formulada por Newton. Ela estipula que o módulo da força gravitacional entre dois corpos pontuais de massas m_1 e m_2 é dada pela seguinte expressão

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

onde $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ é a constante gravitacional. A teoria newtoniana trata a gravitação como uma força que age instantaneamente a distância. Quando combinamos a segunda lei de Newton com a lei da gravitação, obtemos para a força atuando sobre a massa m_2 , por exemplo,

$$m_2 a = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \rightarrow \quad a = G \frac{m_1}{r^2}. \quad (2.2)$$

Isto significa que todos os corpos sofrem a mesma aceleração independentemente das suas massas. Essa propriedade vem do fato que a massa na segunda lei de Newton é a mesma que aparece na lei da força gravitacional. Mas do ponto de vista teórico isto não é verdade: a massa que aparece na segunda lei de Newton é ligada às propriedades inerciais do corpo, isto é, a tendência de se manter num certo estado de movimento. A massa que aparece na lei de gravitação é uma medida da intensidade do campo gravitacional criado pelo corpo, sendo então um tipo de "carga gravitacional". O significado físico das duas massas é diferente e sua igualdade vem do fato experimental que todos corpos sofrem a mesma aceleração no campo gravitacional. Essa igualdade das massas inercial e gravitacional é conhecida como "princípio de equivalência"

De maneira mais precisa, no caso em que o conteúdo material é visto como um fluido, a gravitação newtoniana conduz a um conjunto de equações que podem ser aplicadas à descrição de um modelo cosmológico. A primeira é a conservação da massa. Considere um volume V definido por uma superfície fechada S . A variação da massa no interior do volume é igual ao fluxo de massa através da superfície:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \nabla \cdot \vec{j} dV \quad \longrightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad , \quad \vec{j} = \rho \vec{v}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Considere agora a segunda lei de Newton para um volume desse fluido de densidade ρ . Sobre esse elemento, age o gradiente da pressão e a força gravitacional:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \phi \quad \longrightarrow \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi \quad , \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional.

Finalmente, o potencial gravitacional devido a uma distribuição de massa se escreve como

$$\phi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad . \quad (2.5)$$

Usando o fato que

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \quad (2.6)$$

obtemos

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad . \quad (2.7)$$

Assim, o sistema de equações convenientes para descrever uma cosmologia newtoniana é:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad , \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\phi \quad , \quad (2.9)$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad . \quad (2.10)$$

A primeira equação é a equação de continuidade, a segunda, a equação de Euler e a terceira, a equação de Poisson. Nestas expressões, ρ é a densidade de um fluido, \vec{v} o campo de velocidade do fluido, p a pressão e ϕ o potencial gravitacional.

Apesar de ser aplicada ao estudo do universo em certos regimes, a teoria de Newton contém dois grandes inconvenientes do ponto de vista teórico [14]:

1.) A propagação instantânea da interação gravitacional está em contradição com os princípios da relatividade restrita que estabelecem uma velocidade limite na natureza, a velocidade da luz;

2.) O princípio da equivalência não é necessariamente contido na teoria.

Estes problemas foram abordados por Einstein, que propôs uma nova teoria da gravitação. Nesta teoria, a gravitação é vista não como uma força, mas como a estrutura do espaço-tempo quadri-dimensional. Assim, os princípios relativísticos são incluídos, já que agora temos um espaço-tempo, e também o princípio de equivalência, visto que todos os corpos se movem da mesma maneira numa dada geometria. A idéia central da teoria de Einstein é que a geometria do espaço-tempo não é um dado *a priori*, mas ela é determinada pela distribuição de matéria. A relação fundamental é do tipo,

$$\text{geometria} = \text{matéria}.$$

Matematicamente, a geometria é dada pelos coeficientes da métrica $g_{\mu\nu}$ do intervalo espaço-temporal

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.11)$$

A curvatura de uma variedade é caracterizada pelo tensor de Riemann

$$R_{\mu\gamma\nu}^\lambda = \partial_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\gamma\rho}^\lambda - \Gamma_{\mu\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \quad (2.12)$$

onde os símbolos de Christoffel se escrevem como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}). \quad (2.13)$$

O tensor de Riemann é conectado à não comutatividade das derivadas covariantes:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda = R_{\gamma\mu\nu}^\lambda V^\gamma \quad (2.14)$$

onde ∇ indica a derivada covariante num espaço-tempo curvo.

A partir do tensor de Riemann podemos obter o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ definido como

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda. \quad (2.15)$$

A partir do tensor de Ricci, se pode construir o escalar de Ricci como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Além do tensor de Riemann e do tensor de Ricci, temos também o tensor de Weyl (ou tensor conforme porque é invariante numa transformação conforme) que em n dimensões ($n \geq 4$) é definido por

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{n-2} (g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu}) \\ &+ \frac{1}{(n-1)(n-2)} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Portanto, em quatro dimensões, temos

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} (g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu}) \\ &+ \frac{1}{6} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Fazendo permutações sobre os índices, vemos que o tensor de Weyl tem as mesmas simetrias que o tensor de Riemann, isto é

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &= -C_{\alpha\beta\nu\mu} = -C_{\beta\alpha\mu\nu} = C_{\mu\nu\alpha\beta} \quad , \\ C_{\alpha\beta\mu\nu} &+ C_{\alpha\nu\beta\mu} + C_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Contudo, ele possui uma simetria adicional,

$$C^\alpha_{\beta\alpha\mu} \equiv 0 \quad . \quad (2.20)$$

Combinando (2.20) com as simetrias de (2.19), vemos que o traço do tensor de Weyl é nulo.

Os coeficientes métricos serão soluções das equações dinâmicas que ligam a geometria à distribuição de matéria:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia.

Agora temos que especificar o conteúdo material. Em geral, quando não existe cisalhamento nem transferência de calor no fluido, o tensor momento-energia se escreve como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

onde u^μ é a quadri-velocidade do fluido de densidade ρ e pressão p . Estas equações podem ser obtidas a partir da densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} R + \mathcal{L}_m \quad (2.23)$$

onde \mathcal{L}_m é a densidade lagrangiana que descreve a matéria.

Quando tratamos de um espaço-tempo cuja a variedade quadri-dimensional V^4 pode ser escrita na forma $V^4 = T \times S^3$, onde S^3 é uma híper-superfície do tipo espaço e T a linha temporal, podemos escolher um sistema de coordenadas co-móvel, tal que a quadri-velocidade toma a forma

$$u^\mu = (1, \vec{0}). \quad (2.24)$$

Com este sistema de coordenadas co-móvel, as componentes do tensor momento-energia se escrevem,

$$T^{00} = \rho \quad , \quad T^{ij} = -pg^{ij} \quad , \quad T^{0i} = 0. \quad (2.25)$$

O tensor de Riemann satisfaz as identidades,

$$R_{\mu\nu\lambda\gamma;\rho} + R_{\mu\nu\rho\lambda;\gamma} + R_{\mu\nu\gamma\rho;\lambda} = 0, \quad (2.26)$$

conhecidas como **identidades de Bianchi**. Fazendo a contração, obtemos a identidade

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right)_{;\mu} = 0, \quad (2.27)$$

que implica, devido à equação de Einstein, que

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (2.28)$$

Esta última relação exprime a conservação do tensor momento-energia.

Todas as relações devem ser completadas pela equação das geodésicas. Essa equação descreve como uma partícula se move num dado espaço-tempo. A equação das geodésicas é da forma,

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\gamma}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \quad (2.29)$$

No limite de campo fraco, a equação de Einstein (2.21) se reduz à equação de Poisson (2.7), a equação de conservação do tensor momento energia (2.28) se reduz às equações de continuidade (2.8) e de Euler (2.9). Neste mesmo limite de campo fraco, a equação das geodésicas (2.29) se reduz à equação de Newton

$$\ddot{\vec{x}} = -\nabla\phi. \quad (2.30)$$

2.3 A métrica do espaço-tempo

Na teoria da relatividade geral, a gravitação é exprimida como a geometria do espaço-tempo a quatro dimensões. Procuramos uma métrica que descreva um universo que seja globalmente homogêneo e isotrópico e que evolua com o tempo. A construção da métrica que descreve um universo homogêneo e isotrópico segue um esquema mais simples. Esta métrica é chamada, métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). O espaço-tempo é descrito pela métrica (2.11) que escrevemos como um intervalo infinitesimal

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 \quad (2.31)$$

onde dl^2 representa a parte espacial e $t = x^0$ a coordenada temporal. Vamos considerar a parte espacial da métrica. A isotropia e a homogeneidade requerem que a parte espacial da métrica de RW tenha a seguinte forma

$$dl^2 = a^2(t) [b^2(r)dr^2 + f^2(r)d\Omega^2] \quad (2.32)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Este último passo é necessário porque as distâncias têm que ser as mesmas nas duas direções θ e ϕ . Devido à isotropia, não podemos ter diferentes ritmos de expansão nas direções r e ϕ . Assim, o termo $a(t)$ tem que ser o mesmo para as duas coordenadas. Similarmente, b , f e a não podem ser funções de θ e ϕ , mas podem ser funções de r .

Vamos agora escolher uma nova coordenada χ tal que

$$b(r)dr = d\chi. \quad (2.33)$$

Obtemos então para a parte espacial

$$dl^2 = a^2(t) [d\chi^2 + S^2(\chi)d\Omega^2] \quad (2.34)$$

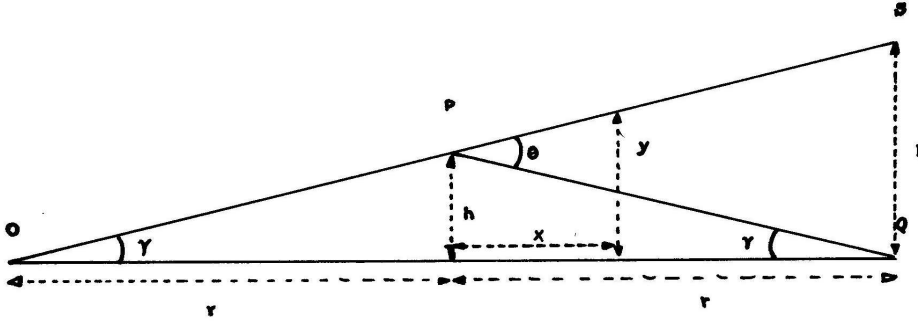


Figura 2.1: Triângulos Isósceles de Gunn.

$S(\chi)$ é uma função que permite mapear um dado ângulo $d\phi$ numa distância própria. Considere três observadores comóveis O , P e Q na Fig 2.1. Supondo que P é levemente deslocado da reta (OQ) , os ângulos γ e θ são pequenos. A distância l pode ser vista como a porção de um círculo de centro P ou O e de raios respectivos $S(\chi)$ e $S(2\chi)$. Temos então

$$l = \gamma S(2\chi) = \theta S(\chi), \quad (2.35)$$

e

$$\theta = \gamma S(2\chi)/S(\chi). \quad (2.36)$$

A distância y é

$$y = \gamma S(\chi + x) = \gamma S(\chi - x) + \theta S(x). \quad (2.37)$$

Quando derivamos com respeito a x no ponto $x = 0$, obtemos

$$2\gamma S'(\chi) = \theta S'(0). \quad (2.38)$$

Admitimos que $S(\chi) \rightarrow \chi$ para pequenos valores de χ e portanto $S'(0) = 1$. Tirando θ de (2.38) e substituindo em (2.36), obtemos

$$2S(\chi)S'(\chi) = S(2\chi). \quad (2.39)$$

Fica claro que $S(\chi) = \chi$ é uma solução da equação (2.39). Geralmente, esta equação pode ser resolvida pela expansão em série de potências e mostra que $\text{sen}(\chi)$ e $\text{senh}(\chi)$ também são soluções de (2.39).

Podemos definir

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \text{sen}(\chi) & (k = 1) \\ \text{senh}(\chi) & (k = -1) \\ \chi & (k = 0) \end{cases} \quad (2.40)$$

onde k é chamada constante da curvatura. Note também que se A é uma constante, $AS_k(\chi/A)$ é também uma solução para a equação (2.39). Porém, é muito mais fácil absorver A na definição de $a(t)$.

Por exemplo, $k = +1$ é a curvatura positiva e a métrica é a generalização tri-dimensional da superfície bi-dimensional de esfera. Esta métrica tem um volume finito, e também a superfície da esfera tem uma área finita. Este é chamado, modelo fechado.

Similarmente, $k = -1$ é a generalização da geometria hiperbólica. O volume é infinito e o modelo é chamado de aberto.

$k = 0$ conduz à geometria plana, que deixa o sistema de coordenadas co-móvel euclidiano para qualquer χ .

Portanto, a métrica de RW é

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2 \right]. \quad (2.41)$$

Fazendo a mudança de variáveis $r = S_k(\chi)$, temos $d\chi = dr/S'_k(\chi)$. Podemos também notar que para qualquer dos três valores de k , temos $S_k'^2(\chi) = 1 - kS_k^2(\chi) = 1 - kr^2$. Substituindo esta última igualdade em (2.41), obtemos para a métrica de RW

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.42)$$

A função $a(t)$ é nomeada **fator de escala** visto que ela define a escala destes espaços homogêneos como função do tempo.

Podemos, com a métrica de FRW, calcular o lado esquerdo das equações de Einstein. Por isto, devemos primeiro calcular os coeficientes de Christoffel e em seguida o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci R . Escrevemos então a métrica na forma

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}, \quad (2.43)$$

onde γ_{ij} é a métrica com curvatura constante sobre a seção espacial. Assim, os coeficientes de Christoffel ficam sendo [14]:

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \quad , \quad \Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i, \quad (2.44)$$

onde $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ é o coeficiente de Christoffel construído a partir da métrica da seção espacial γ_{ij} . Todos os outros componentes do coeficiente de Christoffel são nulos. Assim, podemos avaliar os componentes do tensor de Ricci. Obtemos:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.45)$$

$$R_{ij} = (-a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 - 2k)\delta_{ij}. \quad (2.46)$$

Para o escalar de Ricci, temos

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.47)$$

Assim, as componentes não nulas do tensor de Einstein são:

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3\frac{k}{a^2}, \quad (2.48)$$

$$G_{ij} = (-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k)\delta_{ij}. \quad (2.49)$$

2.3.1 Conteúdo material

Agora vamos tratar o lado direito da equação de Einstein. O tensor momento-energia se escreve como (2.22). Podemos sempre achar um sistema de referência que segue o fluido. Neste referencial, as partículas do fluido estão em repouso. Portanto, a quadri-velocidade se escreve como (2.24). Assim, os componentes do tensor momento-energia são as mesmas na equação (2.25). Podemos escrever para esclarecer os cálculos, $T_{ij} = -pa^2\gamma_{ij}$ e as equações de Einstein tomam as seguintes formas

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (2.50)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (2.51)$$

Além destas equações, temos a lei de conservação, expressadas pelo fato que a derivada covariante do tensor momento-energia é nula:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (2.52)$$

que também pode ser escrita da seguinte maneira

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.53)$$

As equações (2.50), (2.51) e (2.53) formam o conjunto das equações que descrevem a evolução de um universo homogêneo e isotrópico. A tarefa é achar a função $a(t)$ e também $\rho(t)$. É importante lembrar que essas três equações não são independentes: elas são ligadas pelas identidades de Bianchi. Portanto, só se pode usar duas delas. Mas neste caso, temos três funções incógnitas $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$ e somente duas equações. Isto é natural: as soluções destas equações não são as mesmas dependendo do tipo de matéria que preenche o universo. O tipo de fluido que preenche o universo é caracterizado pela *equação de estado*, que se traduz no fato que a pressão depende da densidade, $p = p(\rho)$.

No caso relativístico, a pressão em geral é proporcional à densidade. Assim, podemos supor que

$$p = \alpha\rho, \quad (2.54)$$

onde α é um parâmetro, que pode depender ou não da densidade. Quatro casos são considerados como os mais importantes em cosmologia:

- $\alpha = 0$, representa a matéria sem interação "poeira";
- $\alpha = 1/3$ representa um gás de fóton, "radiação";
- $\alpha = 1$ representa a matéria num estado altamente condensado, matéria "rígida";
- $\alpha = -1$ representa o estado de vácuo.

Na realidade, devido as razões que serão discutidas mais tarde, outras equações de estado poderão ser consideradas supondo particularmente que $\alpha < 0$.

O último ponto, $\alpha = -1$, é muito importante porque é uma consequência da presença da chamada *constante cosmológica*. A constante cosmológica é um termo matemático Λ que aparece na equação de Einstein, a partir da qual surgem todos os modelos cosmológicos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.55)$$

Matematicamente, a parte esquerda da equação, que representa a geometria do espaço-tempo, é a forma mais geral de um tensor covariante, cuja derivada covariante seja identicamente *nula*. De fato, quando a conexão está associada à métrica, temos a metricidade

$$\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.56)$$

e as identidades de Bianchi (2.27). Deduzimos que o tensor momento energia, que descreve a distribuição de matéria e energia no espaço-tempo, é covariantemente conservado, equação (2.28).

O termo que contém a constante cosmológica pode aparecer à direita da equação,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.57)$$

Porém, no lado direito, o termo toma um significado diferente, pois está ao "lado do tensor momento-energia". Procuramos então, uma forma de energia que o tensor momento-energia da matéria e/ou da radiação ordinárias não conteriam, mas que seria descrita pelo termo da constante cosmológica:

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \quad (2.58)$$

Esta é a expressão de um fluido perfeito cuja densidade de energia é

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.59)$$

e cujo a pressão é

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} = -\rho_\Lambda. \quad (2.60)$$

A constante cosmológica contribui assim à chamada energia do vácuo.

Usando (2.54) podemos facilmente integrar a equação de conservação (2.53), obtemos

$$\dot{\rho} + 3(1 + \alpha)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad \implies \quad \rho = \rho_0 a^{-3(1+\alpha)}, \quad (2.61)$$

ρ_0 sendo uma constante de integração. Assim, a equação (2.50) torna-se

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(1+\alpha)}}. \quad (2.62)$$

Esta equação admite uma solução exata na forma de funções hipergeométricas. Porém, é melhor resolvê-la para os casos particulares que têm um significado físico.

2.3.2 Condição de energia

Na teoria clássica de campo relativística da gravitação, particularmente na relatividade geral, a *condição de energia* é uma das várias condições alternativas que podem ser aplicadas ao conteúdo material de uma teoria. A esperança é que qualquer matéria razoável satisfaça a essa condição ou pelo menos preserve uma condição quando ela é satisfeita no início.

Na relatividade geral e nas teorias associadas, a distribuição da massa, do momento, e da energia devido a uma matéria ou qualquer outro campo não gravitacional é descrita pelo tensor momento energia (ou tensor material) $T^{\alpha\beta}$. Porém, a equação de Einstein não é suficiente para especificar que tipo de matéria ou de campo não gravitacional é admissível num modelo do espaço-tempo.

As condições de energia representam tais critérios. Cruamente falando, elas descrevem propriedades comuns a todos (ou quase todos) os estados da matéria e todos os campos não-gravitacionais que são bem estabelecidos na física, sendo suficientemente forte para excluir muitas "soluções" não físicas da equação de campo de Einstein.

Matematicamente falando, a característica de distinção mais evidente das condições de energia é que elas são essencialmente restritas aos autovalores e autovetores do tensor de matéria. Uma característica mais sutil é que elas são impostas ao espaço tangente.

Para entender as diferentes condições de energia, vamos usar as interpretações físicas de algumas quantidades escalares e vetoriais construídas a partir dos vetores do tipo tempo ou nulo com o tensor momento energia.

Primeiro, o vetor unitário de campo u^α pode ser interpretado como vetor tangente à linha de universo de uma família de observadores típicos do Universo. Daí, o campo escalar $T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ pode ser interpretado como a densidade total de massa-energia (matéria mais energia de campo de qualquer campo não gravitacional) medida por um dos observadores. Similarmente, o vetor com a componente $-T_{\beta}^\alpha u^\beta$ representa o momento medido pelo observador.

Dado um vetor arbitrário de campo do tipo nulo k^α , o campo escalar $T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta$ pode ser considerado como uma espécie de caso limite da densidade de massa-energia.

No caso da relatividade geral, dado um vetor de campo arbitrário do tipo tempo u^α , é interpretado como descrevendo o movimento de uma família ideal de observadores, o escalar de *Raychaudhuri* é um escalar obtido tomando a contração do tensor de Ricci com os vetores do espaço tangente, o que corresponde ao observador a cada evento:

$$E[u^\alpha]^\lambda_\lambda = R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \quad (2.63)$$

A partir da equação de campo de Einstein obtemos imediatamente

$$\frac{1}{8\pi}E[u^\alpha]^\lambda_\lambda = \frac{1}{8\pi}R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right)u^\alpha u^\beta \quad , \quad (2.64)$$

onde $T = T^\lambda_\lambda$ é o traço do tensor momento energia.

As condições de energia geralmente usadas são:

*** Condição de energia nula**

A condição de energia nula estipula que para qualquer vetor de campo k^α de tipo nulo, se obtém

$$T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0 \quad . \quad (2.65)$$

*** Condição de energia fraca**

A condição de energia fraca estipula que para qualquer observador podendo ser representado por um vetor de campo do tipo tempo u^α e também por um vetor do tipo luz k^α ,

a densidade de matéria observada pelo observador é sempre *não negativa*:

$$T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geq 0 \quad e \quad T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0. \quad (2.66)$$

*** Condição de energia forte**

A condição de energia forte estipula que para qualquer observador caracterizado por um vetor de campo u^α do tipo tempo, a densidade de matéria medida pelo observador é sempre *não negativa*. Isto é, a contração do tensor de Ricci com os vetores tangentes que representam o observador é sempre *não negativa*:

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right)u^\alpha u^\beta \geq 0 \quad . \quad (2.67)$$

*** Condição de energia dominante**

A condição de energia dominante estipula que, em adição à condição de energia fraca, para um vetor de campo do tipo *causal* (tipo tempo ou nulo) Y^α , o vetor de campo $-T_{\beta}^{\alpha}Y^{\beta}$ deve ser um vetor causal. Isto significa que a pressão deve sempre ser menor que a densidade de energia. Uma outra maneira de caracterizar a condição de energia dominante é que a energia não pode se propagar com uma velocidade maior que a velocidade da luz.

Vamos apresentar as condições de energia usando um fluido perfeito para o qual o tensor momento energia pode ser escrita na forma (2.22).

*** A condição de energia nula**

Para a condição de energia nula, a quantidade $T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0$ onde k^μ é um vetor de tipo luz. Isto conduz a

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta &= [(\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}]k^\alpha k^\beta \\ &= (\rho + p)(u_\alpha k^\alpha)^2 - pk^\alpha k_\alpha \end{aligned}$$

Como o vetor k^α é do tipo nulo, a quantidade $k^\alpha k_\alpha = 0$. A condição de energia nula sendo $T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0$, temos

$$(\rho + p)(u_\alpha k^\alpha)^2 \geq 0.$$

O vetor u^α e k^α sendo respectivamente do tipo tempo e nulo, a quantidade $(u_\alpha k^\alpha)^2 > 0$. Portanto, a condição de energia nula se reduz a

$$\rho + p \geq 0 \quad (2.68)$$

* A condição de energia fraca

Para a condição energia fraca, temos as condições $T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0$ e $T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geq 0$. Já sabemos que a primeira condição conduz à condição $\rho + p \geq 0$. Para a segunda condição, temos

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta &= [(\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}]u^\alpha u^\beta \\ &= (\rho + p)u^\alpha u_\alpha u^\beta u_\beta - pu^\alpha u_\alpha \\ &= (\rho + p) - p \\ &= \rho \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, a condição de energia fraca se reduz a

$$\rho + p \geq 0 \quad e \quad \rho \geq 0. \quad (2.69)$$

* A condição de energia forte

Para a condição de energia forte, temos a condição $(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta})u^\alpha u^\beta \geq 0$ onde u^α é um vetor do tipo tempo. Temos então

$$\begin{aligned} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right)u^\alpha u^\beta &= \left[(\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\rho - 3p)g_{\alpha\beta}\right]u^\alpha u^\beta \\ &= (\rho + p)u_\alpha u^\alpha u_\beta u^\beta - pu^\alpha u_\alpha - \frac{1}{2}(\rho - 3p)u^\alpha u_\alpha \\ &= (\rho + p) - p + \frac{1}{2}(3p - \rho) \\ &= \frac{1}{2}(\rho + 3p) \geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente a condição de energia forte se reduz a

$$\rho + 3p \geq 0. \quad (2.70)$$

* A condição de energia dominante.

Sabemos que a condição de energia dominante é o conjunto da condição de energia fraca e a causalidade que impõe que a pressão seja sempre menor que a densidade de energia. Temos então $\rho \geq 0$, $\rho + p \geq 0$ e $p \leq \rho$ que se reduz às condições $\rho \geq 0$ e $-\rho \leq p \leq \rho$. Finalmente, a condição de energia dominante se reduz a

$$\rho \geq 0, \quad e \quad \rho \geq |p| \quad (2.71)$$

2.3.3 Cenários cosmológicos

Existe uma solução geral quando a curvatura do Universo é nula, $k = 0$. Neste caso, a seção espacial é euclidiana (mas o espaço quadri-dimensional tem curvatura). Logo,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(1+\alpha)}} \implies a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}. \quad (2.72)$$

Muitas características do modelo cosmológico padrão podem ser deduzidas dessa solução, que é notavelmente simples. Primeiro, ela mostra um universo em expansão. Na verdade, o fator de escala cresce com o tempo. Voltando ao passado, se encontra um momento ($t = 0$) onde o fator de escala se anula. Isto corresponde a uma singularidade, a singularidade inicial. Será que esta singularidade é verdadeira? Esta é uma pergunta importante na relatividade geral, pois ela é uma teoria invariante pelas transformações arbitrárias de coordenadas: é possível que uma singularidade apareça, mas que seja uma consequência devida à escolha de coordenadas; num outro sistema de coordenadas, esta singularidade pode desaparecer. Um exemplo importante em que isto acontece é o caso das soluções com simetrias esféricas: quando se usa o sistema de coordenadas esféricas usual, aparecem duas singularidades. Mas na verdade, só uma é verdadeira e a outra é um artifício de coordenadas.

Para verificar a verdadeira natureza da singularidade inicial, o melhor é avaliar os invariantes de curvatura: são os escalares construídos a partir do tensor de Riemann, de Ricci e do escalar de Ricci. Já que eles são escalares, seus valores são independentes da escolha de coordenadas. Vamos avaliar o invariante mais simples, o escalar de Ricci. Com a métrica de FRW, ele assume a forma

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = -\frac{4}{3} \frac{1 - 3\alpha}{(1 + \alpha)^2} \frac{1}{t^2}, \quad (2.73)$$

onde usamos as soluções com $k = 0$. Note que $R \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 0$ exceto o caso da adiação em que $\alpha = 1/3$. Isto significa que a curvatura diverge na origem: temos neste caso uma verdadeira singularidade.

Podemos resolver as equações (2.50, 2.51, 2.53) quando a curvatura espacial é diferente de zero. Primeiro, vamos usar de novo as equações (2.50, 2.53) e combiná-las para ter

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(1+\alpha)}}. \quad (2.74)$$

Agora, podemos re-parametrizar o fator de escala temporal definindo o tempo conforme η pela expressão

$$dt = a d\eta \rightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.75)$$

Assim, a equação de Friedmann torna-se

$$\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{1+3\alpha}}. \quad (2.76)$$

Definindo

$$M = \frac{8\pi G}{3}\rho_0, \quad (2.77)$$

podemos escrever

$$\frac{a^{-\frac{1+3\alpha}{2}} da}{\sqrt{M - k a^{1+3\alpha}}} = d\eta \quad (2.78)$$

Escolhendo uma nova variável

$$u = a^{\frac{1+3\alpha}{2}} \longrightarrow du = \frac{1+3\alpha}{2} a^{-\frac{1+3\alpha}{2}}, \quad (2.79)$$

e a integral pode ser escrita na forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{M - k u^2}} = \frac{1+3\alpha}{2} \eta. \quad (2.80)$$

Com uma nova mudança de variáveis

$$u = \sqrt{M}v, \quad (2.81)$$

chegamos a

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 - k v^2}} = \frac{1+3\alpha}{2} \eta. \quad (2.82)$$

A solução da equação (2.82) depende de k . Para $k = 1$, podemos fazer outra mudança de variáveis

$$v = \text{sen}\theta, \quad (2.83)$$

que leva ao resultado

$$v = \text{sen} \left[\frac{1+3\alpha}{2} \eta \right] \longrightarrow a(\eta) = a_0 \text{sen}^{\frac{2}{1+3\alpha}} \left[\frac{1+3\alpha}{2} \eta \right]. \quad (2.84)$$

Para $k = -1$, escolhemos,

$$v = \text{senh}\theta, \quad (2.85)$$

e o fator de escala se escreve como

$$v = \text{senh} \left[\frac{1+3\alpha}{2} \eta \right] \longrightarrow a(\eta) = a_0 \text{senh}^{\frac{2}{1+3\alpha}} \left[\frac{1+3\alpha}{2} \eta \right] \quad (2.86)$$

A solução (2.84) representa, para $\alpha > -\frac{1}{3}$, um universo inicialmente em expansão, que entra depois numa fase de contração. Esse universo é chamado de *universo fechado*. A solução (2.86) representa, para $\alpha > -\frac{1}{3}$, um universo que está sempre em expansão chamamos *universo aberto*.

Para $\alpha < -1/3$ as soluções para $k = -1$ mostram um universo em contração, que atinge uma singularidade. Na verdade, isto corresponde ao cenário de um universo em expansão com a mudança $t \rightarrow -t$. Por outro lado, quando $k = 1$, temos um ricochete: o fator de escala tem inicialmente um valor infinito, atinge um valor mínimo para depois atingir de novo um valor infinito. Isto corresponde a um universo não singular. Para cada ciclo, o tempo cósmico é definido no intervalo $-\infty < t < \infty$. Note que as invariantes de curvatura sempre ficam limitados: isto confirma que não existe singularidade neste caso.

2.4 Parâmetros cosmológicos

Um modelo cosmológico pode ser caracterizado por um certo número de parâmetros. Para definir esses parâmetros, voltamos à equação de Friedmann,

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{k}{a^2} = 8\pi G \sum_{i=1}^n \rho_i \quad , \quad (2.87)$$

onde ρ_i representa os diferentes componentes materiais do universo. Pode ser uma combinação de radiação ($p_r = \rho_r/3$), poeira ($p_m = 0$), etc. Cada componente material obedece à equação de conservação:

$$\dot{\rho}_i + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_i + p_i) = 0 \quad . \quad (2.88)$$

Admitindo que cada um dos componentes obedece à equação de estado barotrópica, $p_i = \alpha_i \rho_i$, obtemos a partir da equação de conservação,

$$\rho_i = \frac{\rho_{i0}}{a^{3(1+\alpha_i)}} \quad . \quad (2.89)$$

Assim, a equação de Friedmann toma a forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{i0}}{a^{3(1+\alpha_i)}} - \frac{k}{a^2} \quad . \quad (2.90)$$

Definimos primeiro, o parâmetro de Hubble:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad . \quad (2.91)$$

O inverso dessa quantidade avaliada em um dado momento é proporcional à idade T_{id} do universo neste momento:

$$T_{id} \propto \frac{1}{H} \quad . \quad (2.92)$$

Uma outra quantidade em cosmologia é o parâmetro de desaceleração q definido como

$$q = - \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad . \quad (2.93)$$

Note que este parâmetro depende da segunda derivada do fator de escala. Ele informa então sobre a mudança da velocidade de expansão do universo. O sinal *menos* em (2.93) indica que o valor desse parâmetro deve ser positivo quando o universo está em desaceleração enquanto é negativo se o universo está em aceleração.

Os valores da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração hoje, são notados H_0 e q_0 . Podemos escolher uma escala impondo para o fator de escala $a(t_0) = a_0 = 1$ no caso plano. Assim, a equação de Friedmann hoje pode ser escrita como

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3}G \sum_{i=1}^n \rho_{i0} - \frac{k}{a_0} \quad , \quad (2.94)$$

onde os ρ_{i0} são as densidades dos diferentes componentes hoje. Portanto,

$$1 = \frac{8\pi}{3H_0^2}G \sum_{i=1}^n \rho_{i0} - \frac{k}{a_0 H_0^2} \quad . \quad (2.95)$$

Com as definições

$$\Omega_{i0} = \frac{8\pi}{3H_0^2}G \rho_{i0} \quad , \quad \Omega_{k0} = -\frac{k}{a_0 H_0^2} \quad , \quad (2.96)$$

obtemos a equação

$$1 = \sum_{i=1}^n \Omega_{i0} + \Omega_{k0} \quad . \quad (2.97)$$

Quando $\Omega_{k0} = 0$, obtemos a densidade crítica

$$\Omega_c = \sum_{i=1}^n \Omega_{i0} \quad . \quad (2.98)$$

A densidade crítica é o valor da densidade total para o qual a seção espacial é plana.

Usando as equações de Friedmann, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G \sum_{i=1}^n (\rho_i + 3p_i) \quad . \quad (2.99)$$

Usando a equação barotrópica $p_i = \alpha_i \rho_i$ obtemos para o parâmetro de desaceleração hoje,

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (1 + 3\alpha_i) \Omega_{i0} \quad . \quad (2.100)$$

Segundo as observações, o universo está em expansão acelerada. Já que o parâmetro de desaceleração deve ser negativo para uma aceleração da expansão do universo, vemos a partir de (2.100) que é preciso ter a condição $1 + 3\alpha < 0$, ou seja $\rho + 3p < 0$. Isto significa que o universo, hoje, deve ser dominado por um fluido de pressão negativa. Esse fluido

é chamado *exótico* e a energia correspondente é chamada *energia escura*. Vemos que a condição de energia forte $\rho + 3p > 0$ é violada para um fluido exótico. Além da condição de energia forte, também entra em jogo a condição de energia fraca $\rho + p > 0$, que também é violada por uma espécie de fluido exótico. Um fluido que viola as duas condições de energia é chamado *fluido fantômico*. Esse tipo de fluido tem uma densidade crescente com a expansão do universo. Fisicamente, a energia fantômica tem a condição $\alpha < -1$ para a equação de estado. É justamente esse valor -1 que marca a separação entre a energia escura "ordinária" (cuja a densidade decresce com a expansão do universo) e essa forma de energia muito particular. Em caso de existência de energia fantômica, esta seria responsável por uma expansão considerável do universo, o que causaria uma singularidade pelo qual o fator de escala, suas primeiras e segundas derivadas divergem a um tempo finito e conseqüentemente uma divergência da densidade de energia e da pressão: esse é o modelo cosmológico do **big rip**.

A tendência da energia escura é acelerar a expansão do universo que é o contrário no caso de fluido ordinário. A natureza exata da energia escura ainda faz parte de um domínio de especulação. Alguns estimam que a energia escura seria a energia do vácuo quântico modelizado pela *constante cosmológica* da relatividade geral. Essa é a explicação mais simples; considerar a constante cosmológica significa que a densidade de energia escura é uniforme e constante no universo inteiro. Se a energia escura tem essa forma, isto significa que ela é uma propriedade fundamental do universo.

Outros argumentos foram também considerados. Por exemplo, a energia escura poderia ser induzida pela existência de partículas desconhecidas. Esses modelos são chamados *quintessência*. Algumas teorias afirmam que essas partículas foram criadas no tempo do big bang para preencher o espaço. Se esse fosse o caso, esperaríamos que essas partículas se aglomerassem da mesma maneira que no caso da matéria ordinária e teríamos uma variação da densidade com o tempo. Nenhuma prova com respeito a isto foi observada, mas a precisão das observações não permite excluir essa hipótese. Além da quintessência, há o *gás Chaplygin* que também é um tipo de energia escura. Ele obedece à equação de estado $p_c = -A/\rho_c$, onde A é uma constante positiva. Este tipo de energia escura, tem uma pressão praticamente nula inicialmente (quando a densidade é considerada muito grande) e muito mais tarde se comporta como a constante cosmológica (a densidade diminui e a pressão se torna fortemente negativa).

Uma outra singularidade que pode aparecer num universo de Friedmann em expansão, que vamos tratar no capítulo 5 desta tese, é a **singularidade repentina**. Esse tipo de singularidade acontece pela divergência da pressão p a um tempo finito, enquanto o fator de

escala $a(t)$, sua primeira derivada $\dot{a}(t)$ e a densidade de energia de matéria ρ ficam finitos. A singularidade na pressão é acompanhada pela divergência na aceleração $\ddot{a}(t)$ do universo num tempo finito. Note que esse tipo de singularidade ocorre sem violar a condição de energia forte.

Existem outros tipos de singularidades como (singularidades do tipo III, IV e V) que não vamos tratar nesta tese.

- A singularidade III: para $t \rightarrow t_s$, $a \rightarrow a_s$, $\rho \rightarrow \infty$ e $|p| \rightarrow \infty$
- A singularidade IV: para $t \rightarrow t_s$, $a \rightarrow a_s$, $\rho \rightarrow 0$ e $p \rightarrow 0$ e as derivadas de ordens maiores de H divergem.
- A singularidade V: para $t \rightarrow t_s$, $a \rightarrow a_s$, $\rho \rightarrow \rho_s$ e $p \rightarrow p_s$ e as derivadas de ordens maiores de H divergem.

Um estudo muito detalhado sobre a produção de partículas num universo em expansão na proximidade desses dois tipos de singularidades futuras (big rip e repentina), que é o assunto chave desta tese, será apresentado nos capítulos 4 e 5.

2.5 Cenário inflacionário

O cenário inflacionário é um cenário com grande sucesso em física e cosmologia. A definição precisa da inflação é simplesmente qualquer período durante o qual o fator de escala do universo está em aceleração.

$$\ddot{a} > 0. \quad (2.101)$$

De acordo com esta definição e as novas medidas da supernova tipo IA, o universo está atualmente numa fase inflacionária.

Uma maneira equivalente para definir a inflação, que talvez forneça uma interpretação física melhor, é um período durante o qual a distância co-móvel de Hubble, $(aH)^{-1}$ decresce com o tempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0. \quad (2.102)$$

Isto é, quando usamos $a \propto t^n$ para o fator de escala, a inflação implica que $n > 1$. Visto em coordenadas fixas com a expansão, o universo vai se tornando pequeno durante a inflação por causa da expansão rápida do espaço-tempo de base.

Usando as equações (2.50) e (2.51), e na ausência da constante cosmológica ($\Lambda = 0$), temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (2.103)$$

e usando (2.101), vemos que outra maneira de definir a inflação é ter a condição:

$$\rho + 3p < 0, \quad (2.104)$$

que não depende da curvatura, e como ρ é sempre positivo, é necessário termos uma forte pressão negativa. Entretanto, isto viola a condição de energia forte.

2.5.1 Universo dominado pelo vácuo

Como exemplo de modelo de universo em expansão rápida, vamos usar o modelo de um universo dominado pela energia do vácuo, $\rho = -p$. Usamos $k = 0$ nas equações de Friedmann (2.50) e (2.51), e obtemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.105)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(-2\rho), \quad (2.106)$$

que implicam

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 0, \quad (2.107)$$

que significa que o parâmetro de Hubble é constante neste período. O fator de escala é então

$$\dot{a} = Ha \rightarrow a \propto e^{Ht}, \quad (2.108)$$

onde H é agora tratado como uma constante. O universo está se expandindo exponencialmente. Isto é o espaço-tempo de de Sitter. Assim, o elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - e^{Ht}d\vec{x}^2. \quad (2.109)$$

2.6 Campo escalar em cosmologia

Vamos considerar o campo escalar responsável pela inflação (chamado inflaton) sem massa dominando a densidade de energia do universo na era inflacionária. Vamos então derivar certas propriedades do campo escalar ϕ em cosmologia.

A ação do inflaton é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.110)$$

onde $\sqrt{-g} = a^3$ para a métrica (2.42) com $k = 0$. Das equações de Euler-Lagrange

$$\partial^\mu \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\partial^\mu\phi} - \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\phi} = 0 \quad , \quad (2.111)$$

obtemos a seguinte equação de relação

$$\square\phi + V'(\phi) = 0 \quad (2.112)$$

onde $V'(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$. Do fato que estamos em um espaço-tempo curvo obtemos o operador d'Alembertiano explícito

$$\square\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.113)$$

A equação de movimento que determina a evolução do campo de inflaton na métrica de FRW é dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (2.114)$$

Essa é a expressão que descreve a dinâmica do campo ϕ evoluindo num potencial $V(\phi)$ e com a fricção $3H\dot{\phi}$. A solução desta equação, quando existe, depende do potencial $V(\phi)$.

2.6.1 Densidade de energia e densidade de pressão

Variando a ação (2.110) com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$, obtemos a seguinte expressão para o tensor momento energia

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.115)$$

Comparando esta equação com a (2.22), o tensor momento energia relativístico para um fluido perfeito, obtemos as seguintes equações para a densidade de energia ρ e a densidade de pressão p :

$$T_{00} = \rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (2.116)$$

$$\frac{T_{ii}}{a^2} = p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (2.117)$$

Usando as expressões (2.116) e (2.117), as equações de Einstein (2.50) e (2.51) com $k = 0$ se reduzem a

$$3H^2 = 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) \quad (2.118)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 = -8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right) \quad (2.119)$$

Se o potencial, durante um certo momento da evolução do universo, domina o termo cinético ($V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$), temos

$$\rho \approx V(\phi), \quad p \approx -V(\phi) \longrightarrow p \approx -\rho. \quad (2.120)$$

Dessa maneira a inflação pode ser vista como uma quase expansão de de Sitter (*quase* por causa da aproximação).

Capítulo 3

Teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo

3.1 Introdução

No espaço-tempo de Minkowski, a simetria local do grupo de Poincaré leva à unicidade do vácuo e à existência de um conjunto natural de modos que são diretamente associados ao sistema de coordenadas (t, x, y, z) . O elemento de linha fica invariante sob a transformação de Poincaré. Especialmente, o vetor $\partial/\partial t$ é o vetor de Killing do espaço de Minkowski, ortogonal às hipersuperfícies do tipo espaço ($t = \text{constante}$).

Temos consciência que a teoria quântica do campo junto com a relatividade geral não pode ser baseada no grupo de Poincaré. É necessário uma teoria que respeite a covariância geral de Einstein para o espaço-tempo, como a variedade Riemaniana. O núcleo de qualquer teoria de interação de campos é o conjunto das correntes que descrevem a interação. As correntes da teoria da relatividade geral são as componentes do tensor momento energia. A tarefa fundamental ao desenvolver a teoria quântica dos campos no espaço-tempo curvo é de compreender o tensor momento energia. Em geral, o valor esperado do tensor momento-energia contém elementos infinitos. Isto acontece também no espaço de Minkowski e é facilmente resolvido pelo uso da ordem normal dos operadores criação e aniquilação de partículas. Isto faz com que, quando a seção espacial do espaço-tempo Minkowskiano não é compacto, não há nem a criação de partículas, nem a polarização do vácuo. Já no espaço-tempo curvo, a ordem normal dos operadores não basta em geral e portanto, é necessário

o uso de processos de regularização para dar um significado físico ao tensor momento-energia. O vácuo neste caso varia, e a simetria de Poincaré não existe mais. Temos então no espaço-tempo curvo, vários vácuos. É justamente essa não unicidade do vácuo que é a base fundamental da criação de partículas. O processo de regularização, convencionalmente, leva a usar um estado de vácuo inicial para calcular o valor esperado do tensor momento-energia. O vácuo tem que ser definido de modo que, localmente, o espaço curvo tenha as propriedades do espaço Minkowskiano (pelo menos assintoticamente).

3.1.1 Conceito básico

Recentemente um grande interesse circundou a teoria semi-clássica da gravidade quântica, que trata o campo gravitacional como espaço-tempo clássico de base e investiga o comportamento de vários campos quânticos se propagando neste campo gravitacional. Se essa aproximação faz sentido, então o campo gravitacional clássico pode aparentemente produzir vários fenômenos quânticos como a produção de partículas e a polarização do vácuo. Além do que, isto é um primeiro passo na direção da teoria completa da gravidade quântica em que o campo gravitacional é também completamente quantizado.

O problema importante é computar a contra reação das flutuações quânticas dos campos de matéria sobre a gravitação. Para um campo quântico num espaço curvo, a métrica caracteriza a base clássica. A contra reação do campo quântico sobre a métrica se encontra através da *ação efetiva* da matéria, W . No caso puramente clássico, a ação total é a soma da ação gravitacional e da ação de matéria. No caso da teoria semi-clássica, a ação total é a soma da ação gravitacional com a ação efetiva de matéria. Como no caso clássico, a variação da ação de Einstein-Hilbert com respeito à métrica, conduz ao tensor de Einstein enquanto a variação da ação efetiva de matéria, conduz ao valor esperado do tensor momento energia no vácuo:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} \quad . \quad (3.1)$$

Basta então, substituir $T_{\mu\nu}$ por $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ e obtemos a equação que descreve o problema de contra reação

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad . \quad (3.2)$$

Trabalhamos nas unidades naturais tais que $G = c = \hbar = 1$ e com a assinatura (+ - - -). O tensor de Einstein é acoplado ao valor esperado do tensor momento energia quântico. Formalmente $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ é infinito, mas várias prescrições existem para torná-lo finito, fisicamente significativo (renormalizado).

Vamos por isto rever brevemente os aspectos essenciais da teoria quântica dos campos. Para simplificar, vamos somente tratar do campo escalar livre ϕ . No espaço-tempo curvo o campo clássico $\phi(x)$ de massa m satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$\left(\square + \xi R + m^2\right)\phi(x) = 0 \quad , \quad (3.3)$$

onde $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$, R é a curvatura escalar e ξ um parâmetro ajustável conhecido como constante de acoplamento do campo escalar com o campo gravitacional. Frequentemente a escolha $\xi = 0$ (em duas dimensões) e $\xi = \frac{1}{6}$ (em quatro dimensões) é usada porque a equação é, nestes casos, invariante sob a transformação conforme $[g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega(x)g_{\mu\nu}]$ no limite de campo sem massa. Mas mesmo em quatro dimensões, usa-se também $\xi = 0$ que neste caso é o acoplamento mínimo.

A equação (3.3) é derivada da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2} \left[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - (m^2 + \xi R)\phi^2 \right] \quad , \quad (3.4)$$

onde $g = \det g_{\mu\nu}$.

Além disso, obtemos também o tensor momento energia

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2(-g)^{-1/2} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &= (1 - 2\xi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + (2\xi - \frac{1}{2})g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - 2\xi\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \\ &+ 2\xi g_{\mu\nu}\phi\nabla^\alpha\nabla_\alpha\phi - \xi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\phi^2 + \frac{1}{2}m^2g_{\mu\nu}\phi^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O traço de $T_{\mu\nu}$ é

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\mu &= (1 - 2\xi)\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi + 4\left(2\xi - \frac{1}{2}\right)\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - 2\xi\phi\square\phi \\ &+ 8\xi\phi\square\phi - \xi(R - 2R)\phi^2 + 2m^2\phi^2 \\ &= (6\xi - 1)\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + 6\xi\phi\square\phi + \phi(\xi R + 2m^2)\phi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Usando (3.3), podemos escrever $\xi R\phi = -\square\phi - m^2\phi$, e colocando em (3.6), obtemos para o traço,

$$T^\mu{}_\mu = (6\xi - 1)\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + (6\xi - 1)\phi\square\phi + m^2\phi^2 \quad . \quad (3.7)$$

Vemos que o traço é nulo quando $\xi = \frac{1}{6}$ (acoplamento conforme) e a massa $m = 0$.

O produto escalar de um par de soluções da equação (3.3) é dado por:

$$\left(\phi_1(x), \phi_2(x)\right) = i \int_\Sigma \left(\phi_2^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1(x)\right) [-g_\Sigma(x)]^{1/2} d\Sigma^\mu \quad , \quad (3.8)$$

onde $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$ com $d\Sigma$ o elemento de volume da híper-superfície do tipo espaço Σ , e n^μ um vetor unitário do tipo tempo normal à híper-superfície. Este produto escalar é independente da escolha da híper-superfície. Se Σ_1 e Σ_2 são duas diferentes hípersuperfícies sem interseção, temos

$$(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = (\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2} \quad .$$

A prova desta propriedade é simples. Nós admitimos que ϕ_1 e ϕ_2 são duas soluções da equação (3.3). Além disso, se o espaço é tal que as híper-superfícies são não-compactas, vamos assumir que essas funções desapareceriam no infinito. Seja V o quadri-volume limitado pelas híper-superfícies Σ_1 e Σ_2 e se for necessário, fronteiras de tipo tempo sobre as quais $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Assim, podemos escrever

$$(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2} - (\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = i \oint_{\partial V} \left(\phi_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1 \right) d\Sigma^\mu = i \int_V \nabla_\mu \left(\phi_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1 \right) dV \quad ,$$

onde a última integral vem do teorema de Gauss onde dV é o elemento de volume. Podemos escrever este integrando como

$$\nabla_\mu \left(\phi_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1 \right) = \nabla_\mu (\phi_2^* \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_2^*) = \phi_2^* \square \phi_1 - \phi_1 \square \phi_2^* = 0 \quad ,$$

que é a prova da propriedade.

A função de Green $G(x, y)$, que vamos usar na seção de renormalização, é uma função definida pela relação de comutação entre dois campos escalares em dois diferentes pontos x e y , da seguinte maneira

$$[\phi(x), \phi(y)] = G(x, y) = G_{ret}(x, y) - G_{adv}(x, y) \quad . \quad (3.9)$$

$G_{ret}(x, y)$ e $G_{adv}(x, y)$ são chamadas respectivamente, função de Green retardada e avançada [1].

No espaço de Minkowski, identificamos Σ com as híper-superfícies $t = \text{const}$, e achamos o conjunto completo de modos com frequência positiva para a equação (3.3):

$$f_k = (16\pi^3\omega)^{-1/2} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad , \quad (3.10)$$

com $\omega = (k^2 + m^2)^{1/2}$, $-\infty < k_1, k_2, k_3 < \infty$, daí,

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij} \quad (f_i, f_j^*) = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Podemos então expandir o operador ϕ :

$$\phi(x) = \sum_i (a_i f_i + a_i^\dagger f_i^*) \quad , \quad (3.12)$$

onde os a_i e a_i^\dagger são chamados respectivamente, operadores aniquilação e criação e \sum_i é a soma e/ou integral sobre todos modos k_1, k_2, k_3 (ou sobre o vector \vec{k}).

As relações de comutações entre os operadores são dadas por

$$\begin{aligned} [a_i, a_j] &= [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad , \\ [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij} \quad \forall \quad i, j \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nesta representação, o campo é decomposto em conjuntos infinitos de osciladores não acoplados que têm uma interpretação bem conhecida de partícula. O estado de vácuo é definido por

$$a_i|0\rangle = 0 \quad . \quad (3.14)$$

O estado com uma partícula no modo j é obtido pela atuação do operador criação a_j^\dagger sobre o estado de vácuo

$$|1_j\rangle = a_j^\dagger|0\rangle \quad . \quad (3.15)$$

Similarmente para um estado de n partículas, temos

$$|n_j\rangle = \frac{1}{(n!)^{1/2}}(a_j^\dagger)^n|0\rangle \quad . \quad (3.16)$$

O operador hermitiano

$$N_i = a_i^\dagger a_i \quad , \quad (3.17)$$

é o operador cujo valor esperado dá o número médio de partículas no modo i . Por exemplo, usando (3.14)

$$\langle 0|N_i|0\rangle = 0 \quad . \quad (3.18)$$

O operador total N , número total de partículas criadas é definido por:

$$N = \sum_i N_i \quad . \quad (3.19)$$

3.1.2 Teoria quântica de campos no espaço de Minkowski

No espaço de Minkowski, a componente temporal do tensor momento energia se reduz a

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\phi_{,t}^2 + \phi_{,x}^2 + \phi_{,y}^2 + \phi_{,z}^2 + m^2\phi^2) \quad . \quad (3.20)$$

Usando (3.12) e (3.10) obtemos o operador Hamiltoniano

$$H = \int T_{00}d^3x = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) \omega_{\vec{k}} \quad . \quad (3.21)$$

Com (3.13) podemos escrever

$$H = \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) \omega_{\vec{k}} \quad , \quad (3.22)$$

do qual vemos que

$$[H, N] = 0 \quad , \quad (3.23)$$

é uma relação também válida, modo por modo, nesta teoria linear. Assim, o número de partículas é conservado, e os estados de partículas são autoestados da energia. Repetindo (3.21) em (3.23) para $P_i = \int T_{0i} d^3x$ mostra que esses estados também são autoestados das componentes P_i do momento. Essas propriedades são também relacionadas à invariância de Poincaré, mas tudo isto devido à estrutura geométrica do espaço de Minkowski.

A primeira dificuldade com essa teoria vem quando calculamos a energia do vácuo

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \propto 2\pi \int_0^\infty k^2 (k^2 + m^2)^{1/2} dk \quad , \quad (3.24)$$

que é quarticamente divergente no limite ultravioleta ($\sim \int^\infty k^3 dk$). Em duas dimensões a divergência é quadrática:

$$\langle 0|H|0\rangle \propto \int_0^\infty (k^2 + m^2)^{1/2} dk \quad . \quad (3.25)$$

Na relatividade especial, podemos simplesmente re-escalonar ("renormalizar") o zero da energia dessa quantidade infinita. A maneira justa para fazer isto é chamada "ordenamento normal", em que voltamos a (3.21) e reordenamos o segundo produto e assim: $a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \rightarrow a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$, que conduz a (3.22) menos o termo $1/2$ que é a causa da dificuldade em (3.24). Temos então, para o valor esperado da energia no estado com "*n quanta*" no modo \vec{k}

$$\langle n_{\vec{k}} | : H : | n_{\vec{k}} \rangle = n \omega_{\vec{k}} \quad , \quad (3.26)$$

i.e, $\hbar\omega$ para cada "*quantum*". O símbolo $::$ denota a ordem normal.

3.1.3 Efeito Casimir

Vimos que no espaço Minkowskiano, o uso da ordem normal sobre os operadores criação e aniquilação, permite a eliminação da divergência ultravioleta. Isto não é sempre suficiente em todos os casos. Se a topologia do espaço não é R^4 então, a energia do vácuo vai variar de quantidade finita. Vamos mostrar isto para calcular a energia de Casimir em que além da ordem normal, introduziremos mais uma técnica necessária para descartar a divergência.

Para duas placas paralelas condutoras, separadas por uma determinada distância, o tensor momento energia eletromagnético adquire um valor esperado finito e negativo no vácuo. Isto se explica como a modificação do campo eletromagnético pela reflexão plana, manifestando-se como uma força de atração, mesmo quando as placas são eletricamente neutras. Esse tipo de energia de vácuo foi observado no laboratório [15]. Sem fazer muitos comentários sobre o efeito Casimir, mostraremos apenas a técnica de subtração da divergência. Por exemplo, considere o espaço-tempo bi-dimensional (t, x) com as seções espaciais S^1 de comprimento periódico a . Os modos neste caso, não são contínuos no espaço de k como em (3.10), mas são vinculados pela periodicidade

$$(2a|k|)^{-1/2} e^{i(kx - \omega t)}, \quad k = 2\pi n/a \quad , \quad (3.27)$$

onde $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Daí, para o caso $m = 0$, devido ao fato de que a seção espacial é compacta, definimos um vácuo próprio associado aos modos discretos (3.27) que é $|0_a\rangle$. Uma propriedade muito importante desse vácuo é que ele se torna o vácuo usual do espaço de Minkowski no limite de a infinito. Isto é

$$|0_a\rangle \longrightarrow |0\rangle \quad \text{quando} \quad a \longrightarrow \infty \quad , \quad (3.28)$$

onde $|0\rangle$ é o vácuo no espaço de Minkowski.

O valor esperado do Hamiltoniano neste vácuo é

$$\langle 0_a | H | 0_a \rangle = \frac{1}{2a} \sum_k \omega = \frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \quad , \quad (3.29)$$

que também é divergente. Isto significa que, mesmo que a seção espacial compacta modifique o comprimento de onda dos modos, o comportamento ultravioleta não muda. O sistema $R^1 \times S^1$ sofre assim, a mesma propriedade ultravioleta que no caso do espaço-tempo Minkowskiano. A técnica para eliminar a divergência ultravioleta no espaço Minkowskiano ou num espaço compacto, tipo $R^1 \times S^1$, é o uso do chamado "Cut-off". Isto consiste em introduzir um fator $e^{-\alpha\omega}$ onde se faz $\alpha \rightarrow 0$ no fim da operação.

No caso do cálculo da energia do vácuo no espaço Minkowskiano (3.25), a divergência ultravioleta foi removida usando a *ordem normal* sobre os operadores criação e aniquilação para obter (3.26). No caso geral de um estado $|\psi\rangle$ qualquer, a ordem normal sobre um operador $T_{\alpha\beta}$ se reduz a:

$$\langle \psi | : T_{\alpha\beta} : | \psi \rangle = \langle \psi | T_{\alpha\beta} | \psi \rangle - \langle 0 | T_{\alpha\beta} | 0 \rangle \quad , \quad (3.30)$$

que garante que no caso em que $|\psi\rangle = |0\rangle$, temos $\langle 0 | : T_{\alpha\beta} : | 0 \rangle = 0$. No nosso caso, temos:

$$\langle 0_a | : H : | 0_a \rangle = \langle 0_a | H | 0_a \rangle - \lim_{a' \rightarrow \infty} \langle 0_{a'} | H | 0_{a'} \rangle \quad . \quad (3.31)$$

Para calcular $\langle 0_a | H | 0_a \rangle$, introduzimos o fator de Cut-off na expressão (3.29), e temos:

$$\begin{aligned} \langle 0_a | H | 0_a \rangle &= 2 \frac{\pi}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\alpha \omega} \\ &= 2 \frac{\pi}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-2\pi \alpha n/a} \\ &= 2 \frac{\pi}{a^2} \frac{e^{2\pi \alpha/a}}{(e^{2\pi \alpha/a} - 1)^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Note que aqui, para simplificar usamos $m = 0$ e portanto $\omega = k$.

Essa expressão pode ser expandida em torno de $\alpha = 0$ e obtemos:

$$\langle 0_a | H | 0_a \rangle = \frac{1}{2\pi \alpha^2} - \frac{\pi}{6a^2} + 0(\alpha^3) \quad . \quad (3.33)$$

Logo, podemos calcular:

$$\lim_{a' \rightarrow \infty} \langle 0_{a'} | H | 0_{a'} \rangle = \frac{1}{2\pi \alpha^2} \quad . \quad (3.34)$$

Finalmente, a expressão renormalizada (3.31), com o limite $\alpha \rightarrow 0$, se torna:

$$\langle 0_a | : H : | 0_a \rangle = -\frac{\pi}{6a^2} \quad . \quad (3.35)$$

A introdução do fator de cut-off, ajuda a descartar o termo divergente deixando a densidade de energia do espaço compacto, finita e negativa ($-\pi/6a^2$) enquanto vemos que o espaço Minkowskiano, sem contorno, tem uma energia de vácuo nula. Vemos imediatamente pela expressão final, que não há densidade de energia fora das placas, isto é, no limite $a \rightarrow \infty$. A força original calculada por Casimir em 1948 [16], teve a mesma forma geral como (3.35).

3.1.4 Espaço-tempo curvo

A decomposição dos modos (3.10) é ligada ao fato de que o grupo de Poincaré nos permite fazer uma escolha "natural" das coordenadas (t, x) chamadas sistema padrão Cartesiano. Isto permite também, uma escolha "natural" dos operadores a_i e a_i^\dagger e dos estados quânticos. Particularmente, o estado de vácuo $|0\rangle$ é um candidato muito plausível para a condição física de estado "sem partículas".

Há muita dificuldade em estender a quantização do campo para o espaço-tempo curvo. Mesmo se o espaço-tempo é globalmente hiperbólico (que é necessário para se ter superfície de Cauchy), geralmente não há um sistema de coordenadas privilegiado comparável ao caso das coordenadas Cartesianas no espaço Minkowskiano. Assim, não há uma única decomposição dos modos.

Para ver os problemas que isto causa, vamos considerar dois conjuntos completos de coordenadas e dois conjuntos correspondentes de modos de campo f_i e \bar{f}_i . Daí, o campo ϕ deve ser expandido nos termos dos dois conjuntos de modos supracitados.

Vejamos:

$$\phi = \sum_i (a_i f_i + a_i^\dagger f_i^*) \quad , \quad (3.36)$$

ou

$$\phi = \sum_i (\bar{a}_i \bar{f}_i + \bar{a}_i^\dagger \bar{f}_i^*) \quad .. \quad (3.37)$$

Devido ao fato de que os conjuntos são completos, podemos expandir um nos termos de outro

$$\bar{f}_j = \sum_i (\alpha_{ji} f_i + \beta_{ji} f_i^*) \quad . \quad (3.38)$$

onde os coeficientes de expansão α_{ji} e β_{ji} satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\sum_j \{ \alpha_{ij} \alpha_{kj}^* + \beta_{ij} \beta_{kj}^* \} = \delta_{ik} \quad , \quad (3.39)$$

$$\sum_j \{ \alpha_{ij} \beta_{kj} - \beta_{ij} \alpha_{kj} \} = 0 \quad . \quad (3.40)$$

A equação (3.38) se refere às transformações de Bogoliubov. Os operadores criação e aniquilação são similarmente relacionados

$$\bar{a}_j = \sum_i (\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger) \quad . \quad (3.41)$$

Se definimos o estado de vácuo por

$$a_i |0\rangle = 0 \quad ,$$

este não vai ser o estado de vácuo para os modos \bar{f}_i . De fato, o valor esperado do operador número de partículas nos modos \bar{f}_i em relação a esse vácuo é

$$\langle 0 | \bar{a}_i^\dagger \bar{a}_i | 0 \rangle = \sum_i |\beta_{ji}|^2 \quad , \quad (3.42)$$

obtida substituindo (3.41) e usando as relações (3.39) e (3.40). Assim, num sistema, o vácuo contém "quanta" de outro sistema. Somente se os modos \bar{f}_i são puramente superposições dos modos f_i com frequência positiva, o vácuo fica o mesmo para os dois sistemas, logo $\beta_{ji} = 0$.

Nos casos especiais, podem ser feito alguns progressos. Por exemplo, o espaço-tempo estático possui uma generalização natural do vácuo Minkowskiano, baseado no campo de

vetor de Killing do tipo tempo. Se escolhermos as híper-superfícies Σ para serem ortogonais ao campo de Killing, então, os modos tomam a forma $e^{-i\omega t} \times \text{espaço}$ e a quantização pode ser feita em analogia ao protótipo do espaço-tempo plano. Mesmo se o espaço-tempo não é globalmente estático, ele deve ser assintoticamente estático (ou mesmo plano), que faz com que a quantização natural do campo não possa ser construída nas regiões assintóticas *in* e *out*.

Considerando a representação de Heisenberg, se o estado do sistema é escolhido para ser o vácuo *in* em qualquer tempo, então, na região *in* ele corresponde a um estado sem partículas físicas. Todavia, na região *out* ele é um estado *out* que corresponde à presença de partículas físicas. Como em geral o vácuo *in* contém partículas *out*, isto é interpretado fisicamente como *criação* de partículas na região *out* pelo espaço-tempo curvo. Tal criação de partículas, deve ser entendida geometricamente como efeito de mudança da *geometria* do espaço-tempo, afetando os modos que conduz à uma mistura das frequências positiva e negativa. Daí, os coeficientes β_{ij} não são nulos. O vácuo *in* pode conter partículas *out*.

É importante falarmos que o responsável pela criação de partícula no campo gravitacional é a curvatura do tensor de Riemann. A produção de partículas é um efeito que se torna possível devido à natureza quântica do campo. A distância entre uma partícula e anti-partícula (par virtual) é da ordem do comprimento de Compton l_C que também caracteriza a dimensão do vácuo [3]. Pela expansão do universo, quando o campo gravitacional é suficiente para quebrar o ligamento entre a partícula e a anti-partícula, ocorre a produção de partículas. Em outras palavras, a produção de partículas ocorre quando o trabalho gerado pela força gravitacional é da ordem de $2m$. Na verdade, seria $2mc^2$ (mc^2 para a partícula e mc^2 para a anti-partícula) onde usamos $c = 1$. A força gravitacional é chamada força de maré ("tidal force") e para mostrar a condição necessária para termos criação de partículas, vamos considerar a equação do desvio geodésico

$$\frac{d^2 n^\mu}{ds^2} = R^\mu_{\nu\sigma\delta} u^\nu n^\sigma u^\delta \quad , \quad (3.43)$$

onde u^ν é a quadri-velocidade e n^μ um vetor do tipo espaço cujo módulo é da ordem do comprimento do Compton, isto é $n_\mu n^\mu = -l_C^2$. $R^\mu_{\nu\sigma\delta}$ é o tensor de Riemann. Quando escolhermos o referencial co-móvel, temos $u^\nu = (u^0 = 1, \vec{0})$. A equação (3.43) se torna

$$\frac{d^2 n^\mu}{ds^2} = R^\mu_{0\sigma 0} n^\sigma \quad . \quad (3.44)$$

Quando tomamos a quantidade $d^2 n^\mu / ds^2$ como a aceleração, seu produto com a massa fornece a força de maré. O trabalho gerado pela força é seu produto com o comprimento

de Compton e esse trabalho tem que ser maior ou igual a $2m$ para termos a criação de partículas, isto é

$$m |R_{0\sigma 0}^\mu n^\sigma| l_C = ml_C^2 |R_{0\sigma 0}^\mu| \geq 2m \quad . \quad (3.45)$$

Portanto, a condição necessária para a produção de partículas é

$$|R_{0\sigma 0}^\mu| \geq 2l_c^{-2} \quad . \quad (3.46)$$

3.2 Renormalização do tensor momento energia no espaço-tempo curvo

Uma das dificuldades encontradas na construção de uma teoria quântica de campos de matéria se propagando num espaço-tempo não quantizado é o surgimento de infinitos nos elementos de matriz do tensor momento-energia quântico. Particularmente, o valor esperado de $T_{\mu\nu}$ num estado do campo quântico, que vamos escrever $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ desde que na prática o estado é habitualmente o vácuo, é infinito e deve ser renormalizado para ser usado como fonte na equação de Einstein. No espaço-tempo curvo, nem a ordem normal, nem o cut-off permitem remover as divergências.

Várias técnicas de regularização se usam para eliminar essas divergências (Zel'dovich e Starobinsky 1971 [13], Parker e Fulling 1974 [17], Dowker e Critchley 1976 [18] etc...) e expressões finitas foram obtidas nos espaço-tempo particulares para o tensor momento-energia renormalizado $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{ren}}$. Nesta tese, vamos mostrar o mais eficiente dos métodos, a renormalização pela regularização por *separação de pontos*. Mas antes, vamos mostrar a diferença entre a regularização e a renormalização. A *regularização* consiste em introduzir na expressão do tensor momento energia um parâmetro, por exemplo ε , de modo que o valor esperado no vácuo fique finito.

$$\langle 0|T_{\mu\nu}(\varepsilon)|0\rangle \quad \text{finito para } \varepsilon \neq 0 \quad . \quad (3.47)$$

A *Renormalização* é a separação em duas partes, uma que diverge quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e outra fica finita

$$\langle 0|T_{\mu\nu}(\varepsilon)|0\rangle = \langle 0|T_{\mu\nu}(\varepsilon)|0\rangle_{\text{div}} + \langle 0|T_{\mu\nu}(\varepsilon)|0\rangle_{\text{fin}} \quad , \quad (3.48)$$

onde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle 0|T_{\mu\nu}(\varepsilon)|0\rangle_{\text{div}} = \infty \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle 0|T_{\mu\nu}(\varepsilon)|0\rangle_{\text{fin}} < \infty \quad .$$

A renormalização é então feita descartando o termo $\langle 0|T_{\mu\nu}(\varepsilon)|0\rangle_{\text{div}}$ e tomando $\varepsilon \rightarrow 0$ para obter

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{ren}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle 0|T_{\mu\nu}(\varepsilon)|0\rangle_{\text{fin}} \quad . \quad (3.49)$$

A grande dificuldade com a renormalização é como realizar a separação (3.48) e como justificar o descarte dos termos divergentes. Na realidade, os efeitos quânticos fazem aparecer os termos divergentes na expressão do valor esperado do tensor momento energia. Além dos termos divergentes proporcionais à métrica e do tensor de Einstein, podem ter outros termos geométricos com coeficientes divergentes. Para absorver esses termos divergentes que aparecem no tensor momento-energia quântico, escrevemos a equação de Einstein da seguinte maneira

$$\Lambda g_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} + \lambda_1^{(1)} H_{\mu\nu} + \lambda_2^{(2)} H_{\mu\nu} = -8\pi G \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle \quad , \quad (3.50)$$

onde Λ é a constante cosmológica, G a constante gravitacional e $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein. Os coeficientes λ_1 e λ_2 são convencionalmente tomados infinitos antes da renormalização. Os tensores $^{(1)}H_{\mu\nu}$ e $^{(2)}H_{\mu\nu}$ que se conservam covariantemente são definidos por

$$\begin{aligned} ^{(1)}H_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} R^2 d^4x \\ &= 2R_{;\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \square R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \quad (3.51)$$

e

$$\begin{aligned} ^{(2)}H_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} d^4x \\ &= R_{;\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \square R - \square R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + 2R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Isto significa que na expressão da ação gravitacional, além do termo de Einstein-Hilbert, deve ter também termos em R^2 e $R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$.

Note que na relatividade clássica temos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e habitualmente $\Lambda = 0$. Os tensores $g_{\mu\nu}$, $^{(1)}H_{\mu\nu}$ e $^{(2)}H_{\mu\nu}$ aparecem nesta teoria para ajudar na renormalização de $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$. Contudo, após a renormalização, os coeficientes desses tensores devem presumivelmente ser iguais a zero.

Na realidade, existe outro tensor, $H_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ que desaparece devido ao fato de estarmos trabalhando em dimensão quatro ao teorema de Gauss-Bonnet segundo qual

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{-g} (R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2) d^4x = 0 \quad . \quad (3.53)$$

O tensor $H_{\mu\nu}$ então se torna uma combinação linear de ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ e ${}^{(2)}H_{\mu\nu}$:

$$H_{\mu\nu} = -{}^{(1)}H_{\mu\nu} + 4{}^{(2)}H_{\mu\nu} \quad . \quad (3.54)$$

Daí, a separação é feita tomando $\langle 0|T_{\mu\nu}(\epsilon)|0\rangle_{div}$ como uma combinação linear dos tensores que aparecem no lado esquerdo da equação (3.50) e cujos coeficientes divergem no limite $\epsilon \rightarrow 0$. $\langle 0|T_{\mu\nu}(\epsilon)|0\rangle_{div}$ é então transferido para o lado esquerdo de (3.50) para renormalizar os coeficientes do lado esquerdo de (3.50). Fazendo $\epsilon = 0$, obtém-se $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{ren}$ no lado direito de (3.50) e a teoria fica livre de divergências.

No caso de separação de pontos, a renormalização do tensor momento energia não é diretamente feita com o próprio tensor. Ao contrário do que se faz no caso da renormalização pela regularização dimensional, onde o tensor momento energia é obtido pela variação da ação efetiva de matéria, o tensor momento energia é derivado da função de Hadamard $G^{(1)}(x, x')$ como veremos mais tarde. Por exemplo no caso de um campo escalar sem massa minimamente acoplado, para qual o tensor momento energia é

$$T_{\mu\nu} = \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha} \quad , \quad (3.55)$$

o valor esperado formal de $T_{\mu\nu}$ é

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\nabla_{\mu}\nabla_{\nu'} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha'} \right] G^{(1)}(x, x') \right\} \quad , \quad (3.56)$$

onde ∇_{μ} e $\nabla_{\nu'}$ denotam respectivamente as derivadas covariante com respeito a x^{μ} e x'^{ν} .

Todo o processo de regularização e renormalização se faz com a função de Hadamard. Primeiramente, é importante notar que para obter a função de Hadamard renormalizada, se subtrai da função de Hadamard, a função de DeWitt-Schwinger truncada ${}^{(4)}G_{DS}^{(1)}$ que é conhecida como a parte divergente. A razão dessa anotação ficará clara depois. Essa função divergente de Hadamard é obtida pelo método de DeWitt-Schwinger.

3.2.1 Método de DeWitt-Schwinger

O método de DeWitt-Schwinger é a maneira mais elegante de calcular as correções quânticas para os campos de matéria em espaço-tempo curvo. Neste método nós obtemos a ação efetiva de matéria em forma de potências em termos da curvatura e suas derivadas. Os termos locais que aparecem deixam esta técnica mais prática para a avaliação das divergências. Um termo local é um termo que não depende da escolha do estado de vácuo quântico em que o valor esperado do tensor momento energia é calculado. Não apresentaremos todos os detalhes

para obter essa função. Apenas mostraremos os passos mais importantes: detalhes podem ser encontrados em [1, 19].

Vamos primeiramente mostrar que as divergências no valor esperado $\langle 0, in | T_{\mu\nu} | 0, in \rangle$ são as mesmas que as contidas nos elementos de matriz

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle \equiv \frac{\langle 0, out | T_{\mu\nu} | 0, in \rangle}{\langle 0, out | 0, in \rangle} . \quad (3.57)$$

No método de integral de caminho, definimos o funcional gerador das funções de Green no espaço-tempo curvo

$$Z[J] = \langle out, 0 | 0, in \rangle = \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ i S_m[\phi] + i \int d^n x J(x) \phi(x) \right\} \quad (3.58)$$

onde $J(x)$ é uma corrente externa cuja presença pode causar a instabilidade do vácuo sendo portanto a fonte de produção de partículas. $Z[J]$, cuja obtenção pode ser vista em [19], é o funcional gerador da teoria, e fornece a amplitude de transição entre o vácuo inicial $|0, in\rangle$ e o vácuo final $|0, out\rangle$ e S_m é a ação de matéria. No espaço plano, no limite $J = 0$, não há produção de partículas e temos a condição de normalização

$$Z[0] \equiv \langle out, 0 | 0, in \rangle_{J=0} = \langle 0 | 0 \rangle = 1 . \quad (3.59)$$

Contudo, quando o espaço-tempo é curvo, em geral, $|0, out\rangle \neq |0, in\rangle$ mesmo sem a presença da fonte J e portanto não é possível aplicar (3.59).

Vamos examinar a variação de $Z[J]$ sem a presença da fonte J , isto é

$$\begin{aligned} \delta Z[0] &= i \int \mathcal{D}[\phi] \delta S_m \exp i S_m[\phi] \\ &= i \langle out, 0 | \delta S_m | 0, in \rangle . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Diferenciando (3.60) temos

$$\frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta Z[0]}{\delta g^{\mu\nu}} = i \langle out, 0 | T_{\mu\nu} | 0, in \rangle , \quad (3.61)$$

onde usamos a fórmula

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} .$$

Note que pelo fato da ação S_m aparecer exponencialmente na expressão (3.58), podemos identificar

$$Z[0] = \exp(iW) , \quad (3.62)$$

portanto,

$$W = -i \ln \langle out, 0 | 0, in \rangle \quad , \quad (3.63)$$

logo, obtemos de (3.61),

$$\frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\langle out, 0 | T_{\mu\nu} | 0, in \rangle}{\langle out, 0 | 0, in \rangle} \quad . \quad (3.64)$$

O uso da função de Hadamard também não é direto nesta técnica. Em vez da função de Hadamard, que vai aparecer depois, se usa a função de Green de Feynman $G(x, x')$ que satisfaz a seguinte equação

$$\left(\square + m^2 + \xi R \right) G(x, x') = -[-g(x)]^{-\frac{1}{2}} \delta(x - x') \quad . \quad (3.65)$$

A função $\delta(x - x')$, aqui em quatro dimensões é definida pela igualdade $\int d^4 x' f(x') \delta(x - x') = f(x)$.

Podemos escrever a função de green $G(x, x')$ em termo da função de Hadamard

$$G(x, x') = -G_s(x, x') - \frac{1}{2} i G^{(1)}(x, x') \quad , \quad (3.66)$$

onde $G_s = \frac{1}{2} (G_{ret} + G_{adv})$, G_{ret} e G_{adv} respectivamente as funções de Green retardada e avançada [1].

A tarefa é mais fácil com o uso da função $G(x, x')$, mas no final vamos fazer recurso à relação (3.66) para obter a expressão da função de Hadamard que nos interessa para fazer a renormalização do tensor momento energia.

Por estar atuando no espaço-tempo curvo, todo o procedimento vai ser covariante. Vamos introduzir o espaço de Hilbert cujos vetores de base $\{|x\rangle\}$ são auto-vetores do operador posição \hat{x}^μ e os auto-valores são as próprias coordenadas, isto é

$$\hat{x}^\mu |x\rangle = x^\mu |x\rangle \quad . \quad (3.67)$$

A condição de completeza e de ortonormalidade são respectivamente

$$\int d^4 (-g)^{\frac{1}{2}} |x\rangle \langle x| = 1 \quad , \quad (3.68)$$

$$\langle x|x'\rangle = [-g(x)]^{-\frac{1}{2}} \delta(x - x') \quad . \quad (3.69)$$

Vamos agora representar a função de Green $G(x, x')$ na forma de elemento de matriz de um operador \hat{G} atuando no espaço de Hilbert:

$$G(x, x') = \langle x | \hat{G} | x' \rangle \quad . \quad (3.70)$$

Introduzimos um novo operador \hat{F} , hermitiano, tal que

$$\hat{F}\hat{G} = -I \quad , \quad (3.71)$$

onde I é a identidade. A representação biescalar do operador \hat{F} é

$$F(x, x') = \langle x | \hat{F} | x' \rangle = F(x) [-g(x)]^{-\frac{1}{2}} \delta(x - x') \quad , \quad (3.72)$$

onde , usando (3.65) e (3.71), vemos que $F(x) = \square + \xi R + m^2$.

O operador \hat{G} que corresponde à função de Green de Feynman $G(x, x')$ aparece como solução da equação (3.71) na forma $\hat{G} = -\hat{F}^{-1}$. Mas por conveniência admitimos que $F(x)$ contém a massa $m^2 - i0$ em vez de m^2 . Isto deixa os cálculos mais simples e permite principalmente escrever a forma integral do operador \hat{G} como sendo,

$$\hat{G} = -(\hat{F} - i0)^{-1} = -i \int_0^\infty ds \exp(-i\hat{F}s) \quad . \quad (3.73)$$

Usando (3.70), podemos escrever

$$G(x, x') = -i \int_0^\infty ds \langle x(s) | x(0)' \rangle \quad ; \quad (3.74)$$

$$\langle x(s) | x(0)' \rangle = \langle x | \exp(-i\hat{F}s) | x' \rangle \quad .$$

Aqui, usando a hermiticidade de \hat{F} , denotamos $\exp(-i\hat{F}s) | x \rangle = | x(s) \rangle$ e $| x \rangle = | x(0) \rangle$. Fica óbvio que devemos considerar \hat{F} como o operador de evolução no espaço de Hilbert \mathcal{H} no "tempo" s . A "função de onda" $\langle x(s) | x(0)' \rangle$ então satisfaz a equação de Schrödinger penta-dimensional

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x(s) | x(0)' \rangle = (\square + \xi R + m^2) \langle x(s) | x(0)' \rangle \quad , \quad (3.75)$$

em que $F(x)$ desempenhar o papel de Hamiltoniano e a quinta coordenada s faz o papel do tempo.

A condição inicial para $\langle x(s) | x(0)' \rangle$ tem a forma (3.69), isto é,

$$\langle x(0) | x(0)' \rangle = [-g(x)]^{-\frac{1}{2}} \delta(x - x') \quad . \quad (3.76)$$

No espaço plano, a solução exata para a equação (3.75) é [3]:

$$\langle x(s) | x(0)' \rangle = -i(4\pi s)^{-2} \exp \left[-i \left(m^2 s + \sigma(x, x') / 2s \right) \right] \quad , \quad (3.77)$$

onde $\sigma(x, x')$ é o intervalo de geodésica, que é igual à metade do quadrado do comprimento geodésico entre os pontos x e x' :

$$\sigma(x, x') = l^2/2; \quad l = \int_{\lambda}^{\infty} d\lambda' \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'} \right)^{1/2} . \quad (3.78)$$

Em coordenadas cartesianas $\sigma(x, x') = \eta_{\mu\nu}(x^\mu - x^{\mu'})(x^\nu - x^{\nu'})/2$.

No espaço curvo, escolhemos a solução para equação (3.75) com a condição inicial (3.76) na forma [20]

$$\langle x(s)|x(0)' \rangle = -i(4\pi s)^{-2} \Delta^{1/2}(x, x') \Omega(x, x'; s) \exp \left[-i \left(m^2 s + \sigma(x, x')/2s \right) \right] , \quad (3.79)$$

onde Ω é uma função a ser determinada, e

$$\Delta(x, x') = -\det \left(\frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) [g(x)g(x')]^{-1/2} . \quad (3.80)$$

A razão da existência de Δ (chamado determinante de Van Vleck [1]) e Ω em (3.79) é devido ao fato que neste caso a métrica depende das coordenadas espaciais, isto leva em consideração a curvatura do espaço.

As funções $\sigma(x, x')$ e $\Delta(x, x')$ obedecem às equações [19]

$$\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma = 2\sigma; \quad \nabla^\mu (\Delta \partial_\mu \sigma) = 4\Delta, \quad \Delta(x, x) = 1 . \quad (3.81)$$

Substituindo (3.79) em (3.75) e usando a identidade (3.81) obtemos para a função Ω , a equação

$$i \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{i}{s} \nabla^\mu \nabla_\mu \Omega = -\frac{i}{s} \nabla^\mu \nabla_\mu \Omega + \Delta^{-1/2} \nabla^\mu \nabla_\mu (\Delta^{1/2} \Omega) + \xi R \Omega . \quad (3.82)$$

Devido ao fato que só o comportamento de $G(x, x')$ que importa no limite de $x \rightarrow x'$, nós vamos usar a aproximação de WKB para solucionar a equação (3.82), isto é [20]:

$$\Omega(x, x'; s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, x') (is)^n . \quad (3.83)$$

Usando (3.76) e (3.79), obtemos a condição

$$a_0(x, x') = \Omega(x, x'; 0) = 1 . \quad (3.84)$$

Para os outros coeficientes, a substituição de (3.83) em (3.82) fornece as seguintes equações de recorrência

$$(\partial^\mu \sigma \partial_\mu + n) a_n(x, x') + \Delta^{-1/2} \nabla^\mu \nabla_\mu (\Delta^{1/2} a_{n-1}(x, x')) + \xi R a_{n-1}(x, x') = 0 , \quad (3.85)$$

onde a derivada é feita a respeito a x .

Para determinar o coeficiente $a_1(x, x')$, tomamos $n = 1$ e portanto temos

$$(\partial^\mu \sigma \partial_\mu + 1) a_1(x, x') + \Delta^{-1/2} \nabla^\mu \nabla_\mu (\Delta^{1/2}(x, x')) + \xi R(x, x') = 0 \quad . \quad (3.86)$$

A função $\Delta^{1/2}$ pode ser expandida em termos das coordenadas normais de Riemann [20]

$$\begin{aligned} \Delta^{1/2}(x, x') &= 1 + \frac{1}{12} R_{\mu\nu} \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} - \frac{1}{24} R_{\mu\nu;\lambda} \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} \sigma^{;\lambda} \\ &+ \left(\frac{1}{288} R_{\mu\nu} R_{\lambda\tau} + \frac{1}{360} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\beta\tau} + \frac{1}{80} R_{\mu\nu;\lambda\tau} \right) \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} \sigma^{;\lambda} \sigma^{;\tau} + \dots \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde $\sigma^{;\mu}$ é um vetor normal à geodésica no ponto x e chamado coordenadas normal de Riemann . Admitimos que $a_1(x, x')$ pode ser expandido da mesma maneira em função das coordenadas normais de Riemann, isto é

$$a_1(x, x') = a_{10} + a_{11} \sigma^{;\mu} + a_{12} \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} + a_{13} \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} \sigma^{;\lambda} + a_{14} \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} \sigma^{;\lambda} \sigma^{;\tau} + \dots \quad . \quad (3.88)$$

onde os a_{1j} $j = 0, \dots, 4$ podem ser funções da curvatura R , do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, do tensor de Riemann $R_{\mu\nu\lambda\tau}$ e das suas derivadas covariantes e suas contrações.

Injetando (3.88) e (3.87) em (3.86), e após um cálculo muito intenso, identificamos os coeficientes a_{1j} e obtemos

$$\begin{aligned} a_1(x, x') &= \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R_{;\mu} \sigma^{;\mu} + \left[-\frac{1}{90} R_{\mu\alpha} R_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{180} R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{180} R_{\alpha\beta\gamma\mu} R^{\alpha\beta\gamma}_{\nu} + \frac{1}{120} R_{\mu\nu;\alpha} + \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{6} \xi \right) R_{;\mu\nu} \right] \sigma^{;\mu} \sigma^{;\nu} + \dots \end{aligned} \quad (3.89)$$

No limite $x \rightarrow x'$, temos $\sigma \rightarrow 0$ e $\sigma^{;\mu} \rightarrow 0$ e portanto

$$a_1(x) = \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R \quad . \quad (3.90)$$

Para determinar $a_2(x)$, fazemos $n = 2$ e obtemos a equação

$$(\partial^\mu \sigma \partial_\mu + 2) a_2(x, x') + \Delta^{-1/2} \nabla^\mu \nabla_\mu (\Delta^{1/2} a_1(x, x')) + \xi R a_1(x, x') = 0 \quad . \quad (3.91)$$

Fazendo a mesma coisa como no caso de a_1 , obtemos [20]

$$a_2(x) = \frac{1}{180} (R^{\mu\nu\lambda\tau} R_{\mu\nu\lambda\tau} - R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \xi \right) \nabla^\mu \nabla_\mu R + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right)^2 R^2 \quad . \quad (3.92)$$

Substituindo (3.79) com Ω na forma de (3.83) em (3.74), obtemos a expansão assintótica para a função $G(x, x')$:

$$G(x, x') = \frac{\Delta^{1/2}}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \left[-i(m^2 s + \frac{\sigma}{2s}) \right] \sum_{n=0}^\infty a_n(x, x') (is)^n \quad . \quad (3.93)$$

Fazendo a mudança de ordem para a soma e a integração e usando a representação na forma integral da função de Hankel de segunda espécie,

$$H_1^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt t^{-2} \exp \left[-iz \left(t + \frac{1}{t} \right) / 2 \right] , \quad (3.94)$$

podemos então escrever essa expansão na forma

$$G(x, x') = -\frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, x') \left(-\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^n \left[\frac{m^2 H_1^{(2)}(\sqrt{2m^2\sigma})}{\sqrt{2m^2\sigma}} \right] . \quad (3.95)$$

Para analisar o comportamento de $G(x, x')$ quando $x \rightarrow x'$, ($\sigma \rightarrow 0$), podemos usar a expansão da função de Hankel e obtemos

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{\Delta^{1/2} m^2}{8\pi^2} \left[-\frac{1}{m^2\sigma} + L \left(1 - \frac{m^2\sigma}{4} \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} + \frac{5}{16} m^2\sigma + \dots - \frac{a_1(x, x')}{m^2} \left\{ L \left(1 - \frac{m^2\sigma}{4} \right) + \frac{m^2\sigma}{2} + \dots \right\} \\ &\quad \left. + \frac{a_2(x, x')}{m^4} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{Lm^2\sigma}{2} + \frac{m^2\sigma}{4} + \dots \right\} + \dots \right] , \quad (3.96) \end{aligned}$$

onde $L = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m^2\sigma}{2} \right) + \gamma$, $\gamma = 0.577\dots$ é a constante de Euler.

Para separar (3.96) em $(-G_s)$ e $(-\frac{i}{2})G^1$ de acordo com (3.66), podemos usar as formulas

$$(x - i0)^{-1} = x^{-1} + i\pi\delta(x); \quad \ln(x - i0) = \ln|x| - i\pi\Theta(-x) . \quad (3.97)$$

Vamos então substituir σ^{-1} por $(\sigma - i0)^{-1} = \sigma^{-1} + i\pi\delta(\sigma)$ e $\ln(\sigma - i0) = \ln|\sigma| - \pi\Theta(-\sigma)$ onde

$$\Theta(-\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma < 0 \\ 0, & \sigma > 0 \end{cases}$$

Obtemos então,

$$\begin{aligned} G_{DS}^{(1)}(x, x') &= \frac{\Delta^{1/2}}{8\pi^2} \left\{ -\frac{1}{\sigma} + m^2 \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{m^2\sigma}{2} \right| \right) \left(1 - \frac{m^2\sigma}{4} + \dots \right) - \frac{m^2}{2} + \frac{5m^2\sigma}{16} + \dots \right. \\ &\quad - a_1 \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{m^2\sigma}{2} \right| \right) \left(1 - \frac{m^2\sigma}{2} + \dots \right) + \frac{m^2\sigma}{2} - \dots \right] \\ &\quad - a_2 \sigma \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{m^2\sigma}{2} \right| \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2\sigma}{8} + \dots \right) - \frac{1}{4} + \dots \right] \\ &\quad \left. + \frac{a_2}{2m^2} + \dots \right\} . \quad (3.98) \end{aligned}$$

Essa expressão é chamada função de Hadamard de DeWitt-Schwinger. Ela inclui somente os termos que contribuem às divergências e alguns termos finitos. As divergências em $G_{DS}^{(1)}(x, x')$ aparecem nos termos σ^{-1} e $\ln \left| \frac{m^2 \sigma}{2} \right|$ quando $\sigma \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow x'$. A mesma coisa pode ser feita no caso de um campo de spin ou vetorial. Note que, poderíamos achar a expressão correspondente para a ação efetiva de matéria que da mesma maneira apresentaria as divergências que temos em $G_{DS}^{(1)}(x, x')$. Isto seria importante se fôssemos fazer a renormalização pela regularização dimensional. O objetivo nosso nesta tese é apresentar com detalhe a técnica baseada na regularização pela separação de pontos, portanto é suficiente parar na função de Hadamard de DeWitt-Schwinger que vai desempenhar um papel importante no processo de renormalização do tensor momento-energia.

Note que a verdadeira expressão que entra no processo de renormalização é uma forma truncada de $G_{DS}^{(1)}$ até $0(\sigma^2)$, isto gera uma dependência do tensor momento-energia até a quarta ordem do parâmetro de regularização como veremos mais tarde na técnica de separação de pontos. Esta expressão, denotada ${}^{(4)}G_{DS}^{(1)}$ é

$$\begin{aligned}
{}^{(4)}G_{DS}^{(1)}(x, x') &= \frac{\Delta^{1/2}}{8\pi^2} \left\{ -\frac{1}{\sigma} + m^2 \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{m^2 \sigma}{2} \right| \right) \left(1 - \frac{m^2 \sigma}{4} \right) - \frac{m^2}{2} + \frac{5m^2 \sigma}{16} \right. \\
&\quad - a_1 \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{m^2 \sigma}{2} \right| \right) \left(1 - \frac{m^2 \sigma}{2} \right) + \frac{m^2 \sigma}{2} \right] \\
&\quad - a_2 \sigma \left[\frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{m^2 \sigma}{2} \right| \right) - \frac{1}{4} \right] \\
&\quad \left. + \frac{a_2}{2m^2} + 0(\sigma^2) \right\}. \tag{3.99}
\end{aligned}$$

3.2.2 Renormalização pela separação de pontos

Vamos num primeiro tempo apresentar o esquema da renormalização de modo geral a partir da função de Hadamard.

O procedimento para calcular o tensor momento-energia renormalizado usando a técnica de separação de pontos pode ser resumido da seguinte maneira:

(1) Resolver a equação de campo (3.3) para um conjunto completo de modos normais a partir dos quais os estados de partículas podem ser definidos.

(2) Construir $G^{(1)}(x, x')$ como uma soma dos modos.

(3) Determinar $G_{\text{ren}}^{(1)}$ pela fórmula

$$G_{\text{ren}}^{(1)} = G^{(1)}(x, x') - {}^{(4)}G_{DS}^{(1)}(x, x') \quad .$$

(4) Diferenciar $G_{\text{ren}}^{(1)}$ de acordo com (3.56) para gerar $\langle 0|T_{\mu\nu}(x, x')|0\rangle_{\text{ren}}$ descartando qualquer termo de ordem maior que quatro (isto é, não passar da quarta ordem em ε).

(5) Tomar o limite $x \rightarrow x'$ para obter $\langle 0|T_{\mu\nu}(x)|0\rangle_{\text{ren}}$.

O estado $|0\rangle$ deve depender da definição do modo positivo em (1).

Um ponto muito importante na regularização é introduzir um parâmetro de regularização que até agora é a diferença entre as coordenadas x e x' , isto é $\Delta x = x' - x$. Agora vamos usar x' e x'' em vez de x e x' . Os dois pontos x' e x'' são escolhidos sobre uma geodésica não nula e separados por uma distância própria 2ε . O tensor momento-energia será avaliado no ponto x , no meio da curva entre os pontos x' e x'' , isto é, o ponto x se encontra na mesma distância ε dos pontos x' e x'' . Consideramos um vetor normalizado t^μ tangente em x à geodésica de tipo tempo ou espaço, com

$$t^\mu t_\mu = \Sigma = \pm 1 \quad . \quad (3.100)$$

Definimos a derivada covariante da distância geodésica entre os pontos x' e x'' por

$$\sigma_{;\mu} \equiv \sigma_\mu = 2\varepsilon t_\mu \quad . \quad (3.101)$$

Podemos então deduzir a contração

$$\sigma^\mu \sigma_\mu = 4\varepsilon^2 t^\mu t_\mu \quad . \quad (3.102)$$

Usando (3.102), (3.100) e a primeira equação de (3.81), temos

$$\sigma = 2\varepsilon^2 \Sigma \quad . \quad (3.103)$$

Logo, fica bem claro que a condição $\sigma \rightarrow 0$ volta a ser $\varepsilon \rightarrow 0$.

A tarefa agora, é expandir ${}^{(4)}G_{DS}^{(1)}(x, x')$ em termo de ε e t^μ , portanto teremos ${}^{(4)}G_{DS}^{(1)}(\varepsilon, t^\mu)$. Substituindo (3.87), (3.88), (3.92) e (3.103) em (3.99), usando (3.101), obtemos (no limite de massa pequena),

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{DS}^{(1)}(\varepsilon, t^\mu) &= -\frac{1}{16\pi^2\varepsilon^2\Sigma} + \frac{(\xi - \frac{1}{6})R}{8\pi^2} \left(\frac{1}{2} \ln |m^2\varepsilon^2| + \gamma \right) \\ &+ \frac{1}{48\pi^2} R_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} + \frac{\varepsilon^2 \Sigma}{48\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{2} \ln |m^2\varepsilon^2| + \gamma \right) \left[-2RR_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} \right. \\ &+ \left. R_{;\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} - \square R - 3\left(\xi - \frac{1}{6}\right)R^2 \right] \\ &+ \frac{\varepsilon^2 \Sigma}{2880\pi^2} \left[6R_{\alpha\beta;\gamma\delta} \frac{t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\delta}{\Sigma^2} - 14R_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} \frac{t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\delta}{\Sigma^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4R_{\alpha\rho}R_{\beta}^{\rho}\frac{t^{\alpha}t^{\beta}}{\Sigma} - \frac{4}{3}RR_{\alpha\beta}\frac{t^{\alpha}t^{\beta}}{\Sigma} - \square R - R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \\
& + \left. \frac{1}{3}R^2 + 30\left(\xi - \frac{1}{6}\right)\square R + 90\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2R^2 \right] \\
& + \frac{1}{2880\pi^2m^2} \left[R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 - \square R + 30\left(\xi - \frac{1}{6}\right)\square R \right. \\
& \left. + 90\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2R^2 \right] + 0(\varepsilon^4) \quad . \tag{3.104}
\end{aligned}$$

Escolhemos o caso limite ($m \rightarrow 0$), apenas porque é o caso que vamos tratar como exemplo para exibir a técnica de separação de pontos. Essa expressão fica muito mais simplificada no caso de acoplamento conforme do campo escalar com o campo gravitacional. Nesta tese, vamos considerar o campo escalar sem massa com acoplamento mínimo no espaço-tempo de Robertson-Walker. Compararemos esses resultados com os resultados que trataremos no próximo capítulo em que usaremos a técnica de regularização n -waves.

3.2.3 Um exemplo de renormalização do tensor momento-energia no espaço-tempo de Robertson-Walker pela separação de pontos.

Este exemplo é um caso já tratado num trabalho de Bunch-Davies [21] mas com os cálculos muito restritos. Nosso objetivo é detalhar melhor os cálculos e principalmente mostrar como obter os resultados usando a separação de pontos. Nosso trabalho nos capítulos 4 e 5 envolve um campo escalar sem massa minimamente acoplado. Usaremos os resultados desse exemplo para analisar a eficiência dos resultados no capítulo 4 onde usaremos a técnica de regularização n -wave.

Considerando um campo escalar sem massa e sem acoplamento, a equação (3.3) torna-se

$$\square\phi = 0 \quad . \tag{3.105}$$

Vamos usar o seguinte fator de escala para o qual existe uma solução exata para (3.105)

$$\begin{aligned}
a(t) &= a_0 t^p \quad , \\
a^2(\eta) &= C(\eta) = a_0^{2/(1-p)}(1-p)^{2p/(1-p)}\eta^{2p/(1-p)} \quad (a_0 \text{ e } p \text{ constantes}) \quad , \tag{3.106}
\end{aligned}$$

e usar o campo $\phi(x)$ na sua forma expandida

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3k \left[a_{\vec{k}}\phi_{\vec{k}}(x) + a_{\vec{k}}^{\dagger}\phi_{\vec{k}}(x) \right] \quad , \tag{3.107} \\
\phi_{\vec{k}}(x) &= (2\pi)^{-3/2}\phi_{\vec{k}}(\eta)e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad .
\end{aligned}$$

Colocando (3.106) em (3.3), obtemos a equação

$$\phi_k'' + \frac{2p}{(1-p)\eta} \phi_k' + k^2 \phi_k = 0 \quad , \quad (3.108)$$

cuja solução pode ser escrita em termos das funções de Hankel na seguinte forma

$$\phi_k(\eta) = \left(\frac{|b|}{\sigma^2 \eta} \right)^{1/2b} \left[c_1 H_\nu^{(1)}(k\eta) + c_2 H_\nu^{(2)}(k\eta) \right] \quad , \quad (3.109)$$

onde

$$b = \frac{1-p}{1-3p} \quad , \quad (3.110)$$

$$\nu = (2|b|)^{-1} \quad , \quad (3.111)$$

$$\sigma = a_0 \left[a_0^3 (1-3p) \right]^{p/(1-3p)} \quad . \quad (3.112)$$

Os coeficientes c_1 e c_2 podem ser complexos e satisfazem a condição do Wronskiano

$$|c_2|^2 - |c_1|^2 = \frac{\pi}{(4b)} \quad . \quad (3.113)$$

Usamos o vácuo definido por $c_1 = 0$ e propomos calcular a função a Hadamard da seguinte forma

$$G^{(1)}(x'', x') \equiv \langle 0 | \phi(x'') \phi(x') | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}(\vec{x}'' - \vec{x}')} \phi_k(\eta'') \phi_k^*(\eta') d^3 k \quad . \quad (3.114)$$

Usando $\vec{k}(\vec{x}'' - \vec{x}') = k|x'' - x'| \cos \theta$ e $d^3 k = k^2 \sin \theta d\theta dk d\varphi$, e usando (3.109) com a condição de vácuo ($c_1 = 0$), (3.114) torna-se

$$G^{(1)}(x'', x') = \frac{\sigma^{-2/b} |b|^{(1-b)/b}}{8|x'' - x'| \pi} (\eta'' \eta')^{1/2b} \int_0^\infty k \sin(k|x'' - x'|) H_\nu^{(2)}(k\eta'') H_\nu^{(1)}(k\eta') dk \quad . \quad (3.115)$$

Usando a seguinte fórmula do livro Gradshteyn-Ryzhik [22],

$$\int_0^\infty k K_\nu(ak) K_\nu(qk) \sin(ck) dk = \frac{\pi}{4} (aq)^{-\frac{3}{2}} c (u^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \nu\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \nu\right) P_{\nu-\frac{1}{2}}^{-1}(y),$$

$$y = (2aq)^{-1} (a^2 + q^2 + c^2) \quad \left[\operatorname{Re}(a+q) > 0, \quad c > 0, \quad |\operatorname{Re}\nu| < \frac{3}{2} \right] \quad .$$

e a igualdade

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi} (i)^{-\nu-1} K_\nu(-ix) \quad ,$$

e após alguns cálculos, obtemos

$$G^{(1)}(x'', x') = \left(16\pi^2\eta''\eta'\right)^{-1} C^{-1/2}(\eta'')C^{-1/2}(\eta') \\ \times \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) \sec(\pi\nu) {}_2F_1\left(\frac{3}{2} + \nu, \frac{3}{2} - \nu; 2; 1 + \frac{\Delta u \Delta v}{4\eta''\eta'}\right), \quad (3.116)$$

onde usamos $\Delta u = \Delta\eta - \Delta x$, $\Delta v = \Delta\eta - \Delta x$ ($\Delta\eta = \eta'' - \eta'$ e $\Delta x = x'' - x'$) e sucessivamente

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}^{-1}(y) = \frac{1}{\Gamma(2)} \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \times {}_2F_1\left(-\nu + \frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2}; 2; \frac{1-y}{2}\right),$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \times {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z) \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Usando a seguinte expansão da função hipergeométrica ${}_2F_1\left(\frac{3}{2} + \nu, \frac{3}{2} - \nu; 2; 1 + \frac{\Delta u \Delta v}{4\eta''\eta'}\right)$,

$${}_2F_1 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \nu\right)} \left\{ -\frac{4\eta''\eta'}{\Delta u \Delta v} \right. \\ + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \nu + n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \nu + n\right)}{n!(n+1)!} \left(-\frac{\Delta u \Delta v}{4\eta''\eta'}\right)^n \times \left[\ln \left| \frac{\Delta u \Delta v}{4\eta''\eta'} \right| \right. \\ \left. + \psi\left(\frac{3}{2} + \nu + n\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu + n\right) - \psi(1+n) - \psi(2+n) \right] \left. \right\}, \quad (3.117)$$

(3.116) torna-se

$$G^{(1)}(x'', x') = -\frac{C^{-1/2}(\eta'')C^{-1/2}(\eta')}{4\pi^2\Delta u \Delta v} \\ + \frac{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)}{16\pi^2\eta''\eta'C^{1/2}(\eta'')C^{1/2}(\eta')} \left[\ln\left(\frac{\Delta u \Delta v}{4\eta''\eta'}\right) + \psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) \right. \\ + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) + 2\gamma - 1 \left. \right] - \frac{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\left(\frac{9}{4} - \nu^2\right)\Delta u \Delta v}{128\pi^2\eta''^2\eta'^2C^{1/2}(\eta'')C^{1/2}(\eta')} \left[\ln\left(\frac{\Delta u \Delta v}{4\eta''\eta'}\right) \right. \\ \left. + \psi\left(\frac{5}{2} + \nu\right) + \psi\left(\frac{5}{2} - \nu\right) + 2\gamma - \frac{5}{2} \right] + \dots \quad (3.118)$$

Vamos agora introduzir os parâmetros de regularização expandindo η , x , Δu , Δv e $C^{-1/2}(\eta)$ em potências de ε e t^μ .

Podemos num primeiro tempo expandir η e x em termos de ε e t^μ [23]

$$\eta'' = \eta(+\varepsilon) = \eta_0 + \varepsilon t_1^0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t_2^0 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 t_3^0 + \frac{1}{24}\varepsilon^4 t_4^0 + \dots, \quad (3.119)$$

$$\eta' = \eta(-\varepsilon) = \eta_0 - \varepsilon t_1^0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t_2^0 - \frac{1}{6}\varepsilon^3 t_3^0 + \frac{1}{24}\varepsilon^4 t_4^0 + \dots, \quad (3.120)$$

$$x'' = x(+\varepsilon) = x_0 + \varepsilon t_1^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t_2^1 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 t_3^1 + \frac{1}{24}\varepsilon^4 t_4^1 + \dots, \quad (3.121)$$

$$x'' = x(+\varepsilon) = x_0 - \varepsilon t_1^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t_2^1 - \frac{1}{6}\varepsilon^3 t_3^1 + \frac{1}{24}\varepsilon^4 t_4^1 + \dots, \quad (3.122)$$

onde os t_i^0 e t_j^1 são determinados pela equação de geodésica

$$t^\sigma \nabla_\sigma t^\mu = 0 \quad , \quad (3.123)$$

onde o vetor t^μ tangente à geodésica pode ser expandido em termo da série de potências

$$t^\mu = t_1^\mu + \varepsilon t_2^\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t_3^\mu + \dots \quad , \quad (3.124)$$

com $\mu = 0, 1$ para (η, x) . A razão é muito simples. Quando derivamos covariantemente o bi-escalar $G(x'', x')$, obtemos um bivector. Para obter um tensor, é necessário fazer um transporte paralelo dos vetores correspondentes até o ponto (η, x) . Os vetores $t^\mu(\pm\varepsilon)$ tangentes à geodésica nos pontos (η', x') e (η'', x'') , transportados paralelamente devem portanto obedecer à equação da geodésica. Isto permite determinar os coeficientes t_i^0 e t_j^1 . Após um cálculo longo, mas relativamente simples, obtemos [24]:

$$\begin{aligned} t_2^0 &= -\frac{1}{2}D(t_1^0)^2 - \frac{1}{2}D(t_1^1)^2, \\ t_2^1 &= -Dt_1^0 t_1^1, \\ t_3^0 &= \left[-\frac{1}{2}D' + \frac{1}{2}D^2\right] (t_1^0)^3 + \left[-\frac{1}{2}D' + \frac{3}{2}D^2\right] t_1^0 (t_1^1)^2, \\ t_3^1 &= \left[-D' + \frac{3}{2}D^2\right] (t_1^0)^2 t_1^1 + \frac{1}{2}D^2 (t_1^1)^3 \\ t_4^0 &= \left[-\frac{1}{2}D'' + \frac{7}{4}D'D - \frac{3}{4}D^3\right] (t_1^0)^4 + \left[-\frac{1}{2}D'' + 5D'D - \frac{9}{2}D^3\right] (t_1^0 t_1^1)^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{4}D'D - \frac{3}{4}D^3\right] (t_1^1)^4 \\ t_4^1 &= \left[-D'' + 5D'D - 3D^3\right] (t_1^0)^3 t_1^1 + \left[2D'D - 3D^3\right] t_1^0 (t_1^1)^3 \\ t_5^0 &= \left[-\frac{1}{2}D''' + \frac{11}{4}D''D + \frac{7}{4}D'^2 - \frac{23}{4}D'D^2 + \frac{3}{2}D^4\right] (t_1^0)^5 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2}D''' + \frac{15}{2}D''D + 5D'^2 - 32D'D^2 + 15D^4\right] (t_1^0)^3 (t_1^1)^2 \\ &\quad + \left[\frac{3}{4}D''D + \frac{1}{4}D'^2 - \frac{33}{4}D'D^2 + \frac{15}{2}D^4\right] t_1^0 (t_1^1)^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_5^1 &= \left[-D''' + \frac{15}{2}D''D + 5D' - \frac{43}{2}D'D^2 + \frac{15}{2}D^4 \right] (t_1^0)^4 t_1^1 \\
&+ \left[\frac{7}{2}D''D + 2D' + 2D'^2 - \frac{47}{2}D'D^2 + 15D^4 \right] (t_1^0)^2 (t_1^1)^3 \\
&+ \left[-D'D^2 + \frac{3}{2}D^4 \right] (t_1^1)^5 \quad , \tag{3.125}
\end{aligned}$$

onde $D = C'/C$ e $C' = dC/d\eta$. Aqui o resultado é obtido no caso de curvatura espacial nula ($k = 0$).

Lembrando que $\Delta u \Delta v = (\Delta \eta)^2 - (\Delta x)^2$ e usando (3.119), (3.120), (3.121), (3.122) e (3.125), obtemos

$$\begin{aligned}
(\Delta u \Delta v)^{-1} &= C (2\varepsilon^2 \Sigma)^{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 \left[(D' - D^2) (t_1^0)^2 - D^2 (t_1^1)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon^4}{120} \left[\left(D''' - \frac{11}{2}D''D - D'^2 + \frac{13}{2}D'D^2 - \frac{1}{2}D^4 \right) (t_1^0)^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-\frac{11}{2}D''D - \frac{8}{3}D'^2 - \frac{145}{6}D'D^2 - \frac{29}{3}D^4 \right) (t_1^0 t_1^1)^2 + \left(2D'D^2 - \frac{1}{2}D^4 \right) (t_1^1)^4 \right] \right\} . \tag{3.126}
\end{aligned}$$

Aqui, de acordo com (3.100), usamos $\Sigma = C [(t_1^0)^2 - (t_1^1)^2]$.

Usando a definição $f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon(\partial f)/(\partial x)$ e algumas das igualdades de (3.125), obtemos

$$\begin{aligned}
C^{-1/2}(\varepsilon)C^{-1/2}(-\varepsilon) &= C^{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left[\left(-D' + \frac{1}{2}D^2 \right) (t_1^0)^2 + \frac{1}{2}D^2 (t_1^1)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24}\varepsilon^4 \left[\left(-D''' + \frac{7}{2}D''D + 5D'^2 - \frac{15}{3}D'D^2 + \frac{3}{2}D^4 \right) (t_1^0)^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{7}{2}D''D + 2D'^2 - \frac{31}{2}D'D^2 + 6D^4 \right) (t_1^0 t_1^1)^2 + \left(-D'D^2 + \frac{3}{2}D^4 \right) (t_1^1)^4 \right] \right\} . \tag{3.127}
\end{aligned}$$

Podemos então, calcular o primeiro termo de (3.118) multiplicando (3.127) por (3.126);

$$\begin{aligned}
-\frac{C^{-1/2}(\eta'')C^{-1/2}(\eta')}{4\pi^2 \Delta u \Delta v} &= - (16\pi^2 \varepsilon^2 \Sigma)^{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 \left[\left(-2D' + \frac{1}{2}D^2 \right) (t_1^0)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2}D^2 (t_1^1)^2 \right] + \frac{1}{120}\varepsilon^4 \left[\left(-4D''' + 12D''D + 14D'^2 - 16D'D + 2D^4 \right) (t_1^0)^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(12D''D + \frac{22}{3}D'^2 - \frac{115}{3}D'D^2 + \frac{31}{3}D^4 \right) (t_1^0 t_1^1)^2 + \left(-3D'D^2 + 2D^4 \right) (t_1^1)^4 \right] \right\} . \tag{3.128}
\end{aligned}$$

Podemos escrever (3.128) puramente em termos de quantidades geométricas no ponto (η, x) . Uma análise bem simples de (3.104) mostra que o termo em (ε^0) , no caso de massa nula, é uma combinação de $R_{\alpha\beta}$ e $Rg^{\alpha\beta}$ contraídos por $t^{\alpha}t^{\beta}$. A mesma coisa acontece em (3.128).

O cálculo para obter o resultado final é longo, mas bem simples. Vamos apenas apresentar o cálculo para a ordem ε^0 . Podemos então, escrever

$$aR_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta + bRg_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta = \left(-2D' + \frac{1}{2}D^2\right)(t_1^0)^2 + \frac{1}{2}D^2(t_1^1)^2 \quad , \quad (3.129)$$

onde a e b são constantes a serem determinadas. O lado esquerdo da equação (3.129) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$aR_{00}(t_1^0)^2 + aR_{11}(t_1^1)^2 + bRg_{00}(t_1^0)^2 + bRg_{11}(t_1^1)^2 = (aR_{00} + bRg_{00})(t_1^0)^2 + (aR_{11} + bRg_{11})(t_1^1)^2. \quad (3.130)$$

Por outro lado, usando $R_{00} = \frac{3}{2}D'$, $R_{11} = -\frac{1}{2}(D' + D^2)$ e $R = C^{-1}\left(3D' + \frac{3}{2}D^2\right)$ em (3.130) e depois em (3.129), obtemos

$$a = -2 \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{3}. \quad (3.131)$$

Portanto, obtemos para o termo de ε^0 em (3.128),

$$\frac{1}{48\pi^2} \left[R_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta - \frac{1}{6}Rg_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \right] = \frac{1}{48\pi^2} \left[R_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta - \frac{1}{6}R\Sigma \right] \quad , \quad (3.132)$$

onde usamos também (3.100).

Para o termo em ε^2 , vemos a partir de (3.104) que deve haver uma combinação linear dos tensores $R_\alpha^\lambda R_{\lambda\beta}g_{\gamma\delta}$, $RR_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}$, $R_{\sigma\lambda}R^{\sigma\lambda}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}$, $R^2g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}$, $R_{;\alpha\beta}g_{\gamma\delta}$, $(\square R)g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}$ e $R_{\alpha\beta;\gamma\delta}$ cada um contraído com $t_1^\alpha t_1^\beta t_1^\gamma t_1^\delta$. Vamos então, escrever a parte de ε^2 em (3.128) como uma combinação linear dos oito tensores com oito coeficientes que determinamos como no caso (3.129). Para conseguir essa tarefa, usamos

$$\begin{aligned} R^2 &= C^{-2} \left[9D'^2 + 9D'D^2 + \frac{9}{4}D^4 \right]; \\ R_{00;00} &= \frac{3}{2}D''' - \frac{15}{4}D''D - \frac{3}{2}D'^2 + \frac{9}{4}D'D^2; \\ R_{00;11} &= -\frac{3}{4}D''D + \frac{5}{4}D'D^2 - \frac{1}{4}D^4; \\ R_{01;01} &= -\frac{1}{2}D''D + \frac{5}{4}D'D^2 - \frac{3}{8}D^4; \\ R_{01;10} &= -\frac{1}{2}D''D - \frac{1}{2}D'^2 + \frac{3}{2}D'D^2 - \frac{3}{8}D^4; \\ R_{11;00} &= -\frac{1}{2}D''' + \frac{1}{4}D''D - \frac{1}{2}D'^2 + \frac{9}{4}D'D^2 - \frac{3}{4}D^4; \\ R_{11;11} &= D''D + \frac{3}{4}D'D^2 - \frac{1}{2}D^4; \\ R_{;\alpha\beta} &= C^{-1} \left[3D''' - \frac{9}{2}D''D - \frac{9}{2}D'D^2 + \frac{9}{4}D^4 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{;11} &= C^{-1} \left[-\frac{3}{2}D''D + \frac{3}{4}D^4 \right]; \\
\Box R &= C^{-2} \left[3D''' - \frac{9}{2}D'D^2 \right]; \\
R_0^\lambda R_{\lambda 0} &= \frac{9}{4}C^{-1}D'^2; \\
R_1^\lambda R_{\lambda 1} &= C^{-1} \left[-\frac{1}{4}D'^2 - \frac{1}{2}D'D^2 - \frac{1}{4}D^4 \right]; \\
R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} &= C^{-2} \left[3D'^2 + \frac{3}{2}D'D^2 + \frac{3}{4}D^4 \right]; \\
RR_{00} &= C^{-1} \left[\frac{9}{2}D'^2 + \frac{9}{4}D'D^2 \right]; \\
RR_{11} &= C^{-1} \left[-\frac{3}{2}D'^2 - \frac{9}{4}D'D^2 - \frac{3}{4}D^4 \right] ,
\end{aligned}$$

e obtemos para a parte em ε^2 ,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Sigma}{2880\pi^2} \left[2R_\alpha^\lambda R_{\lambda\beta} t^{\alpha\beta} \Sigma^{-1} + 4RR_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} \Sigma^{-1} - \frac{1}{3}R^2 \right. \\
&\left. - R_{;\alpha\beta} t^{\alpha\beta} \Sigma^{-1} - 14R_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} t^{\alpha\beta} t^{\lambda\delta} \Sigma^{-2} + 6R_{\alpha\beta;\gamma\delta} t^{\alpha\beta} t^{\lambda\delta} \Sigma^{-2} \right] .
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Podemos então escrever (3.128) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&-\frac{C^{-1/2}(\eta'')C^{-1/2}(\eta')}{4\pi^2\Delta u\Delta v} = -\frac{1}{16\pi^2\varepsilon^2\Sigma} + \frac{1}{48\pi^2} \left[R_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} \Sigma^{-1} - \frac{1}{6}R \right] \\
&+ \frac{\Sigma\varepsilon^2}{2880\pi^2} \left[2R_\alpha^\lambda R_{\lambda\beta} t^{\alpha\beta} \Sigma^{-1} + 4RR_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} \Sigma^{-1} - \frac{1}{3}R^2 \right. \\
&\left. - R_{;\alpha\beta} t^{\alpha\beta} \Sigma^{-1} - 14R_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} t^{\alpha\beta} t^{\lambda\delta} \Sigma^{-2} + 6R_{\alpha\beta;\gamma\delta} t^{\alpha\beta} t^{\lambda\delta} \Sigma^{-2} \right] .
\end{aligned} \tag{3.134}$$

No resto dos termos de (3.118), usamos o mesmo procedimento para obter os termos tensoriais mas particularmente para o argumento da parte logarítmica, paramos apenas nos primeiros termos das expansões, isto é:

$$\Delta u\Delta v \approx 4\varepsilon^2 \left[(t_1^0)^2 - (t_1^1)^2 \right] = 4\varepsilon^2 \frac{\Sigma}{C} , \quad \eta''\eta' \approx \eta^2 , \tag{3.135}$$

Portanto, a parte logarítmica fica sendo

$$\ln \left(\frac{\Delta u\Delta v}{4\eta''\eta'} \right) = \ln \left(\frac{\varepsilon^2\Sigma}{C\eta^2} \right) . \tag{3.136}$$

Usamos também a igualdade para a função ψ

$$\psi\left(\frac{5}{2} + \nu\right) + \psi\left(\frac{5}{2} - \nu\right) = \frac{3}{\left(\frac{9}{4} - \nu^2\right)} + \psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) \quad , \quad (3.137)$$

e substituímos $\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)$ por $-\frac{1}{6}RC\eta^2$ (igualdade simples para se mostrar). Após um longo cálculo obtemos em termo tensorial para o resto de (3.118),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{576\pi^2} \left[-12R + \varepsilon^2\Sigma \left(4RR_{\alpha\beta}t^\beta t^\beta \Sigma^{-1} - 2R_{;\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \Sigma^{-1} + 2\Box R - R^2 \right) \right] \\ & \times \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\varepsilon^2\Sigma}{C\eta^2} \right) + \gamma + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) \right] + \frac{R}{96\pi^2} \\ & - \frac{\varepsilon^2\Sigma}{288\pi^2} \left[RR_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \Sigma^{-1} - \frac{19}{24}R^2 + \frac{3R}{C\eta^2} \right] + 0(\varepsilon^4) \quad . \quad (3.138) \end{aligned}$$

Agora podemos calcular a função de Green renormalizada, isto é, subtraindo a função de Green de DeWitt-Schwinger (3.104) da soma de (3.134) e (3.138). Nesta subtração, tomamos na expressão (3.104) $\xi = 0$, o caso de acoplamento não conforme. Fazendo então (3.134)+(3.138)-(3.104), obtemos

$$\begin{aligned} G^{(1)\text{ren}}(\varepsilon, t^\mu) &= \frac{R}{144\pi^2} (1 - 3\Psi) - \frac{1}{2880\pi^2 m^2} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{13}{6}R^2 - 6\Box R \right) \\ &+ \frac{\varepsilon^2\Sigma}{2880\pi^2} \left\{ \left[-2RR_\alpha^\lambda R_{\lambda\beta} + \left(20\Psi - \frac{14}{3} \right) RR_{\alpha\beta} - (1 + 10\Psi) R_{;\alpha\beta} \right] t^\alpha t^\beta \Sigma^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{57}{12} - 5\Psi \right) R^2 + (6 + 10\Psi) \Box R + R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{30R}{C\eta^2} \right\} \quad , \quad (3.139) \end{aligned}$$

onde

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\Sigma}{C\eta^2 m^2} \right) + \psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) \right] \quad . \quad (3.140)$$

Para obter o tensor momento energia pela fórmula (3.56), usamos a função de Hadamard na forma geral

$$G^{(1)} = c + \varepsilon^2\Sigma \left[e_{\alpha\beta} \left(t^\alpha t^\beta / \Sigma \right) + f \right] + \varepsilon^2\Sigma^{-1} \left[q_{\alpha\beta} \left(t^\alpha t^\beta / \Sigma \right) + r \right] \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |m^2 \alpha^2| \right) . \quad (3.141)$$

Aplicando a fórmula (3.56), obtemos [1]

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= \left(\frac{1}{2} - \xi \right) T_{\mu\nu}^{(1)} + \left[\frac{3}{4} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \right] g_{\mu\nu} T_\sigma^{(1)\sigma} + \xi T_{\mu\nu}^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \xi T_\sigma^{(2)\sigma} - \frac{1}{2} c \xi \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R g_{\mu\nu} \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{8} - \frac{3}{4} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \right] m^2 g_{\mu\nu} c \quad , \quad (3.142) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(1)} &\equiv \langle 0 | \{ \phi_{;\mu}, \phi_{;\nu} \} | 0 \rangle \\
&= -\frac{1}{2} (q_{\mu\nu} + r g_{\mu\nu}) \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln |\alpha^2 m^{-2}| \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} q_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} \left(g_{\mu\nu} - \frac{2t_\mu t_\nu}{\Sigma} \right) - q_{(\mu\alpha} t^\alpha t_{\nu)\Sigma}^{-1} \\
&\quad - \frac{1}{4} r \left(g_{\mu\nu} + \frac{2t_\mu t_\nu}{\Sigma} \right) + \frac{1}{4} c_{;\mu\nu} - \frac{1}{2} e_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} \quad , \tag{3.143}
\end{aligned}$$

e

$$T_{\mu\nu}^{(2)} = - \langle 0 | \{ \phi, \phi_{;\mu\nu} \} | 0 \rangle = T_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} c_{;\mu\nu} \quad . \tag{3.144}$$

No nosso caso, $\xi = 0$ e portanto

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T_\sigma^{(1)\sigma} + \frac{1}{4} m^2 g_{\mu\nu} c \quad . \tag{3.145}$$

Comparando (3.139) com (3.141), temos no nosso caso

$$c = \frac{R}{144\pi^2} (1 - 3\Psi) - \frac{1}{2880\pi^2 m^2} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{13R^2}{6} - 6\Box R \right) \quad , \tag{3.146}$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2880\pi^2} \left[-2R_\alpha^\lambda R_{\lambda\beta} + \left(20\Psi - \frac{14}{3} \right) R R_{\alpha\beta} - (1 + 10\Psi) R_{;\alpha\beta} \right] \quad , \tag{3.147}$$

$$f = \frac{1}{2880\pi^2} \left[\left(\frac{57}{12} - 5\Psi \right) R^2 + (6 + 10\Psi) \Box R + R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{30R}{C\eta^2} \right] \quad , \tag{3.148}$$

e

$$q_{\alpha\beta} = 0 \quad r = 0 \quad . \tag{3.149}$$

Devido ao fato que tomaremos a massa igual a zero no final, usamos para simplificar,

$$c_{;\mu\nu} = \frac{R_{;\mu\nu}}{144\pi^2} (1 - 3\Psi) \quad , \tag{3.150}$$

e no produto $\frac{1}{4} m^2 g_{\mu\nu} c$ apenas

$$c = -\frac{1}{2880\pi^2 m^2} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{13R^2}{6} - 6\Box R \right) \quad . \tag{3.151}$$

Usando (3.150), (3.151), (3.147) e (3.148) em (3.145), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} &= -\frac{\Psi}{1152\pi^2} \left(4R_{;\mu\nu} - 4\Box R g_{\mu\nu} + 4R R_{\mu\nu} - R^2 g_{\mu\nu} \right) - \frac{R g_{\mu\nu}}{192\pi^2 C \eta^2} \\
&\quad + \frac{1}{69120\pi^2} \left(-168R_{;\mu\nu} + 288\Box R g_{\mu\nu} + 24R_{\mu\sigma} R_\nu^\sigma \right. \\
&\quad \left. - 12R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - 64R R_{\mu\nu} + 63R^2 g_{\mu\nu} \right) \quad . \tag{3.152}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.140) em (3.152), temos

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = & -\frac{1}{1152\pi^2} \left(2R_{;\mu\nu} - 2\Box R g_{\mu\nu} + 2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^2 g_{\mu\nu} \right) \ln \left(\frac{\Sigma}{C\eta^2 m^2} \right) \\
& -\frac{1}{1152\pi^2} \left(2R_{;\mu\nu} - 2\Box R g_{\mu\nu} + 2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^2 g_{\mu\nu} \right) \left[\psi \left(\frac{3}{2} + \nu \right) \right. \\
& \left. + \psi \left(\frac{3}{2} - \nu \right) \right] + \frac{1}{69120\pi^2} \left(-168R_{;\mu\nu} + 288\Box R g_{\mu\nu} + 24R_{\mu\sigma} R_{\nu}^{\sigma} \right. \\
& \left. -12R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - 64RR_{\mu\nu} + 63R^2 g_{\mu\nu} \right) - \frac{Rg_{\mu\nu}}{192\pi^2 C\eta^2} \quad . \quad (3.153)
\end{aligned}$$

É fácil ver que as duas primeiras expressões entre parênteses em (3.153) são dadas por (3.51). Podemos então escrever (3.153) como

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = & -\frac{{}^{(1)}H_{\mu\nu}}{1152\pi^2} \ln \left(\frac{\Sigma}{C\eta^2 m^2} \right) - \frac{{}^{(1)}H_{\mu\nu}}{1152\pi^2} \left[\psi \left(\frac{3}{2} + \nu \right) + \psi \left(\frac{3}{2} - \nu \right) \right] \\
& + \frac{1}{69120\pi^2} \left(-168R_{;\mu\nu} + 288\Box R g_{\mu\nu} + 24R_{\mu\sigma} R_{\nu}^{\sigma} \right. \\
& \left. -12R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - 64RR_{\mu\nu} + 63R^2 g_{\mu\nu} \right) - \frac{Rg_{\mu\nu}}{192\pi^2 C\eta^2} \quad . \quad (3.154)
\end{aligned}$$

Agora vemos que quando fazemos a massa igual a zero, (3.154) apresenta uma divergência no termo logarítmico. Por isto introduziremos um parâmetro arbitrário μ que tenha a dimensão de inverso da massa de modo que possamos escrever

$${}^{(1)}H_{\mu\nu} \ln \left(\frac{\Sigma}{C\eta^2 m^2} \right) = {}^{(1)}H_{\mu\nu} \ln \left(\frac{\Sigma\mu^2}{C\eta^2} \right) - {}^{(1)}H_{\mu\nu} \ln (m^2\mu^2) \quad . \quad (3.155)$$

Na verdade, qualquer termo em (3.154), proporcional a ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ com coeficiente infinito deve ser removido para o lado esquerdo da equação (3.50), para renormalizar o coeficiente λ_1 . Mas uma condição para isto é que esse coeficiente deve ser sem dimensão. No caso de $\ln \left(\frac{\Sigma}{C\eta^2 m^2} \right)$, temos o inverso da massa e portanto não podemos remover desse jeito. É por isto que introduzimos o parâmetro μ que então deixa $\ln (m^2\mu^2)$ sem dimensão mas divergente no limite de $m = 0$.

Para terminar o processo de renormalização, vamos então remover o termo ${}^{(1)}H_{\mu\nu} \ln (m^2\mu^2)$ que diverge no limite $m \rightarrow 0$ para o lado esquerdo da equação (3.50). Finalmente o tensor momento energia renormalizado fica

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = & -\frac{{}^{(1)}H_{\mu\nu}}{1152\pi^2} \ln\left(\frac{\Sigma\mu^2}{C\eta^2}\right) - \frac{{}^{(1)}H_{\mu\nu}}{1152\pi^2} \left[\psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) \right] \\
& + \frac{1}{69120\pi^2} \left(-168R_{;\mu\nu} + 288\Box Rg_{\mu\nu} + 24R_{\mu\sigma}R_{\nu}^{\sigma} \right. \\
& \left. -12R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - 64RR_{\mu\nu} + 63R^2g_{\mu\nu} \right) - \frac{Rg_{\mu\nu}}{192\pi^2C\eta^2} \quad . \quad (3.156)
\end{aligned}$$

Esta expressão pode ser escrita em termos do fator de escala através de D e C usando as expressões da pagina 55 e

$${}^{(1)}H_{00} = C^{-1} \left[-9D''D + \frac{9}{2}D'^2 + \frac{27}{8}D^4 \right] \quad (3.157)$$

$${}^{(2)}H_{11} = C^{-1} \left[6D''' - 3D''D + \frac{3}{2}D'^2 - 9D'D^2 + \frac{9}{8}D^4 \right] \quad (3.158)$$

3.2.4 Anomalia de traço

A anomalia de traço é o fato de obter um traço do tensor momento energia quântico renormalizado diferente do traço do tensor momento energia clássico.

Quando usamos (3.5) com a condição $\xi = 0$, temos

$$T_{\sigma}^{\sigma} = -\partial_{\sigma}\phi\partial^{\sigma}\phi - 2m^2\phi^2 \quad . \quad (3.159)$$

Note que mesmo que a massa seja igual a zero, o traço (3.159) não é nulo. Mas focamos aqui nossa atenção no comportamento quântico e clássico do termo $-2m^2\phi^2$ na expressão do traço (3.159) no limite de massa nula $m = 0$ na expressão do traço. Não detalhamos os cálculos em relação ao segundo termo. É muito fácil observar que no limite de massa nula, o termo $-2m^2\phi^2$ não tem nenhuma contribuição na expressão do tensor momento clássico, ou seja, este termo desaparece no limite de massa nula. Já na expressão do tensor momento energia renormalizada (3.145), vemos que o limite de massa nula fornece uma quantidade finita não nula para a parte que depende da massa. Isto fica claro no produto $-2m^2\phi^2$ de (3.159), substituindo ϕ^2 pela função de Green renormalizada (3.139). Em (3.139), existe um termo inversamente proporcional ao quadrado da massa, que, no produto com $-2m^2$ fornece o termo finito

$$\frac{1}{1440\pi^2} \left(R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \frac{13R^2}{6} - 6\Box R \right) \quad , \quad (3.160)$$

que, no caso clássico, é nulo.

Esta parte que dependente da massa no tensor momento-energia quântico tem uma contribuição não nula no limite de massa nula: isto é chamado de *anomalia de traço*. Note que a anomalia de traço mais conhecida na literatura é a anomalia conforme que corresponde à quebra de simetria observada no caso clássico. Neste caso, o acoplamento é $\xi = 1/6$ e classicamente o traço é nulo no limite de massa nula mas após a renormalização, o traço se torna não nulo. Em todos casos o significado que damos à anomalia de traço é principalmente a diferença que aparece entre os traços clássico e quanticamente renormalizado.

3.2.5 Renormalização pela regularização n -wave

Esta é uma modificação da técnica de Pauli-Villars [25]. Cada "onda" individual com uma dada massa e um vetor de onda \vec{k} é associada com uma n -onda (n -wave) com uma massa e o vetor de onda acrescentados, nm e $n\vec{k}$ e uma amplitude decrescida \sqrt{n} vezes. Na verdade, quando a quantidade $T_{\mu\nu}(k, m)$ é expandida em potências de k^{-2} , surgem três divergências: a quártica, a quadrática e a logarítmica. O tensor momento-energia $T_{\mu\nu}^{(n)}(k, m)$ do n -wave, sua primeira e segunda derivadas com respeito a n^{-2} são subtraídos do $T_{\mu\nu}(k, m)$ das partículas físicas sob a consideração que a integral $\int k^2 dk T_{\mu\nu}^{ren}(k, m)$ convirja, e aí a transição limite $n \rightarrow \infty$ é tomada.

$$\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{ren} = \int_0^\infty T_{\mu\nu}^{ren}(k, m) k^2 dk \quad (3.161)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{ren} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ T_{\mu\nu}(k, m) - \sum_{p=0}^2 \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial (n^{-2})^p} \left[\frac{1}{n} T_{\mu\nu}(nk, nm) \right] \right\} \quad (3.162)$$

O acréscimo de não só m mas também de \vec{k} , facilita substancialmente o procedimento. Assim, como $T_{\mu\nu}$, as quantidades $T_{\mu\nu}^{(n)}$ são construídas a partir das soluções da equação de onda; daí, cada uma das quantidades satisfaz a lei de conservação $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. A quantidade renormalizada $T_{\mu\nu}^{ren}$ satisfaz identicamente a lei de conservação.

No próximo capítulo, usaremos a técnica n -wave para regularizar o tensor momento energia nos universos radiativo e de de Sitter e especialmente numa análise dos efeitos quânticos perto da singularidade do tipo I (big rip). Os resultados serão comparados aos resultados que obtivemos usando a técnica de separação de pontos.

Capítulo 4

Produção de partículas em um universo em expansão com um fluido de energia escura

4.1 Introdução

As observações indicam que nós estamos hoje em uma fase inflacionária já que o universo está em aceleração [5, 6]. Assim, o mecanismo de produção de partículas deve desempenhar ainda hoje um papel muito importante. A criação de partículas, pode por um fenômeno de contra reação, alterar a evolução futura do universo. A contra reação devido aos efeitos quânticos já foi estudada no caso da constante cosmológica [26]. Particularmente, tais contra reações devem ser importantes se o universo é preenchido pelo fluido fantômico, já que classicamente, nestas situações, o universo evolui para uma singularidade futura chamada big rip. Sabemos que os dados observacionais favorecem o cenário fantômico hoje [4]. Um fluido fantômico tem vários comportamentos especiais. Em cosmologia, um universo dominado por um fluido fantômico desenvolve uma singularidade futura que ocorre num tempo finito no futuro [27]. Neste capítulo, vamos determinar o ritmo de produção de partículas quando o universo é preenchido por um fluido cuja equação de estado é $p = \alpha\rho$. Vamos adotar o cenário simplificado, sem levar em consideração as diferentes fases de transição que ocorrem no universo real. O cálculo será feito para o campo escalar sem massa e minimamente acoplado, para o qual a equação de Klein-Gordon correspondente será resolvida. Através da quantização do campo, o ritmo de produção de partículas será determinado usando as transformações de Bogoliubov. O ritmo de produção de partículas será determinado

exatamente para qualquer valor de α . Uma comparação será feita com a densidade de criação de partícula e a densidade de energia do fluido para analisar o efeito de contra reação. Os cálculos para a densidade de energia de criação de partículas serão feitos usando o corte no limite da escala do Planck em um primeiro momento e depois a técnica de regularização n -wave.

4.1.1 O modelo cosmológico do fluido perfeito

Usando (2.42) com $k = 0$ e também (2.75), a métrica de (FRW) que descreve o espaço tempo plano a dimensão quatro, escrita em termos do tempo conforme é:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \right] . \quad (4.1)$$

Com esta métrica, as equações de Einstein (2.50) e (2.51) ficam sendo:

$$\frac{(a')^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 , \quad (4.2)$$

$$2\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} = -8\pi G p a^2 \quad (4.3)$$

A densidade de energia ρ e a pressão p obedecem à equação de estado barotrópica (2.54). O fato de que a velocidade do som neste fluido deve ser igual ou menor que a velocidade da luz, implica que $\alpha \leq 1$. Das equações (4.2) e (4.3), obtemos

$$a(\eta) = a_0 |\eta|^\beta , \quad \beta = \frac{2}{1+3\alpha} . \quad (4.4)$$

Usando o fato de que o universo está se expandido e também a relação entre o tempo conforme e o tempo cósmico, dada por (2.75), podemos determinar os intervalos para o tempo cósmico e o tempo conforme para diferentes valores do parâmetro α .

Se $\alpha > -1/3$, o tempo evolui tal que $0 < \eta < \infty$ ($0 < t < \infty$). Para $\alpha < -1/3$, o intervalo é $-\infty < \eta < 0_-$, significa que $0 < t < \infty$ quando $-1/3 > \alpha > -1$; mas para $\alpha < -1$, este intervalo de η corresponde a $-\infty < t < 0_-$.

O último caso representa um universo dominado por um fluido fantômico: o fator de escala vai para infinito quando $\eta \rightarrow 0_-$ ($t \rightarrow 0_-$).

O aspecto importante das soluções descritas acima é o comportamento do raio de Hubble. O raio de Hubble é dado por $r_H = cH^{-1}$, onde H é definido por (2.91) que em tempo conforme é $\frac{a'}{a^2}$. Assim,

$$r_H \propto |\eta|^{\frac{3(1+\alpha)}{(1+3\alpha)}} . \quad (4.5)$$

O comportamento do raio de Hubble vai desempenhar um papel crucial nas análises da evolução dos modos quânticos. Notamos que, se $\alpha > -1/3$, o raio de Hubble, com relação ao tempo, cresce mais rapidamente do que as distâncias físicas representadas por $r_{phys} = a(\eta)r_c$, r_c sendo a distância co-móvel. Se $-1 < \alpha < -1/3$, o raio de Hubble ainda cresce com respeito ao tempo, mas, mais lentamente do que as distâncias físicas, que é a chave da solução inflacionária do problema conhecido das condições iniciais no modelo padrão cosmológico. O que é mais importante para as nossas próximas análises é o caso $\alpha < -1$ (o caso fantômico), em que o raio de Hubble *decrece* com respeito ao tempo e, quando aproximamos da singularidade inicial ($\eta \rightarrow -\infty$), todas as distâncias físicas estão contidas no raio de Hubble, já que ele diverge na singularidade. Nós vamos explorar esta propriedade do modelo fantômico para estabelecer mais tarde o estado do vácuo inicial.

O escalar de Ricci (2.73) tem, no caso plano ($k = 0$), a forma

$$R = -6 \frac{a''}{a^3} \propto |\eta|^{-6 \frac{1+\alpha}{1+3\alpha}} . \quad (4.6)$$

É fácil de verificar que a curvatura quadridimensional vai assintoticamente para zero quando $\alpha > -1$. Mas, se $\alpha < -1$, a curvatura é inicialmente nula e diverge assintoticamente.

4.1.2 A quantização do campo escalar no modelo plano de FRW

A densidade lagrangiana que descreve o campo escalar massivo ϕ acoplado com o campo gravitacional é dada por (3.4) e a equação de Klein-Gordon (3.3). A quantização do campo escalar no espaço-tempo curvo deve ser feita pelo método canônico. Escolhe-se primeiramente uma folheação do espaço-tempo em hipersuperfícies do tipo espaço. Seja Σ uma hipersuperfície particular com o vetor unitário n^μ para um valor constante da coordenada temporal t . A derivada de ϕ na direção normal é $\dot{\phi} = n^\mu \partial_\mu \phi$, e o momento canônico é definido por

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} .$$

Impomos a relação de comutação canônica

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

onde $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ é a função delta na hipersuperfície com a propriedade

$$\int \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d\Sigma = 1 .$$

Seja $\{\phi_k(x)\}$ um conjunto completo de soluções com frequência positiva de (3.3). Então $\{\phi_k^*(x)\}$ é o conjunto completo de soluções com frequência negativa, e $\{\phi_k(x), \phi_k^*(x)\}$ formam o conjunto de soluções em função das quais podemos expandir qualquer solução de (3.3).

Nesta subseção vamos tomar, $\xi = m = 0$.

Podemos escrever o campo escalar ϕ na forma

$$\phi(\eta, \vec{x}) = \int dk^3 \left[c_{\vec{k}} \phi_k(\eta, \vec{x}) + c_{\vec{k}}^\dagger \phi_k^*(\eta, \vec{x}) \right] \quad . \quad (4.7)$$

Além disto, redefinimos as funções $\phi_k(\eta)$ como

$$\phi_k(\eta, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\chi_k(\eta)}{a(\eta)} \quad . \quad (4.8)$$

Usando a métrica plana de Robertson-Walker, a equação não massiva de Klein-Gordon se torna,

$$\phi_k'' + 2\frac{a'}{a}\phi_k' + k^2\phi_k = 0 \quad . \quad (4.9)$$

Inserindo (4.8) em (4.9), obtemos

$$\chi_k''(\eta) + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \chi_k(\eta) = 0 \quad . \quad (4.10)$$

Usando a expressão do fator de escala (4.4), a equação acima torna-se

$$\chi_k''(\eta) + \left[k^2 - \frac{\beta(\beta-1)}{\eta^2} \right] \chi_k(\eta) = 0 \quad . \quad (4.11)$$

Esta é essencialmente a mesma equação que traduz a evolução das ondas gravitacionais num universo em expansão [28].

Esta equação admite soluções na forma das funções de Hankel:

$$\chi_k(\eta) = C\eta^{\frac{1}{2}} \left[A_k H_q^{(1)}(k|\eta|) + B_k H_q^{(2)}(k|\eta|) \right] \quad , \quad q = \left| \frac{1}{2} - \beta \right| \quad , \quad (4.12)$$

onde $H_k^{(1,2)}$ são as funções de Hankel, C é a constante ligada com o parâmetro da equação de estado α e com a_0 , enquanto (A_k, B_k) são as constantes fixadas normalizando os modos. Para fazer isto, vamos usar o Wronskiano

$$zH_q^{(2)}(z)\partial_z H_q^{(1)}(z) - zH_q^{(1)}(z)\partial_z H_q^{(2)}(z) = \frac{4i}{\pi} \quad . \quad (4.13)$$

Impondo a ortonormalização dos modos, obtemos:

$$|A_k|^2 - |B_k|^2 = 1 \quad . \quad (4.14)$$

A função $\chi_k(\eta)$ torna-se (para uma fase arbitrária e fixando convenientemente a constante C),

$$\chi_k(\eta) = \frac{\sqrt{\pi\eta}}{2} \left(A_k H_q^{(1)}(k|\eta|) + B_k H_q^{(2)}(k|\eta|) \right) . \quad (4.15)$$

Esta solução já foi estudada em [30], mas com o ponto de vista do modelo cosmológico primordial especialmente na fase de de Sitter. A solução final, para o caso de campo escalar é

$$\phi(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{a} \int d^3k \left\{ c_{\vec{k}} \chi_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + c_{\vec{k}}^\dagger \chi_k^*(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \quad (4.16)$$

com χ_k dado por (4.12).

A equação de movimento para $\chi_k(\eta)$ é obtida do lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \chi'^2 - k^2 \chi^2 - 2 \frac{a'}{a} \chi \chi' + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \chi^2 \right\} . \quad (4.17)$$

O momento conjugado é

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi'} . \quad (4.18)$$

Assim, o Hamiltoniano é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ p^2 + k^2 \chi^2 + 2 \frac{a'}{a} \chi p \right\} . \quad (4.19)$$

Depois da quantização, os operadores χ e p satisfazem a relação de comutação

$$[\chi, p] = i . \quad (4.20)$$

As expressões para os operadores criação e aniquilação, b^\dagger e b respectivamente, com respeito ao Hamiltoniano (4.19), podem ser determinadas. Para fazer isto, vamos escrever:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2k}} (b + b^\dagger) , \quad p = -i \sqrt{\frac{k}{2}} (b - b^\dagger) . \quad (4.21)$$

Estes operadores satisfazem à relação de comutação

$$[b, b^\dagger] = 1 . \quad (4.22)$$

O Hamiltoniano torna-se

$$\mathcal{H} = k b^\dagger b + \sigma(\eta) b^{\dagger 2} + \sigma^*(\eta) b^2 + \frac{i}{2} \left(k + \frac{a'}{a} \right) , \quad (4.23)$$

onde a função de acoplamento é dada por $\sigma(\eta) = ia'/2a$. Usando a ordem normal

$$: \mathcal{H} : := \mathcal{H} - \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle , \quad (4.24)$$

obtemos

$$\mathcal{H} = kb^\dagger b + \sigma(\eta)b^{\dagger 2} + \sigma^*(\eta)b^2 \quad . \quad (4.25)$$

Vamos usar a representação de Heisenberg para a qual os operadores variam com o tempo e os estados ficam fixos. Para podermos passar da representação de Schrödinger para a de Heisenberg vamos reescrever formalmente o Hamiltoniano (4.25) como a soma de dois Hamiltonianos \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 com a mesma frequência (veja a referência [29]):

$$\mathcal{H}_1 = kb_1^\dagger b_1 + \sigma(\eta)b_1^{\dagger 2} + \sigma^*(\eta)b_1^2 \quad , \quad (4.26)$$

$$\mathcal{H}_2 = kb_2^\dagger b_2 + \sigma(\eta)b_2^{\dagger 2} + \sigma^*(\eta)b_2^2 \quad . \quad (4.27)$$

Daí, o Hamiltoniano torna-se

$$\mathcal{H} = k [b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2] + \sigma(\eta) [b_1^{\dagger 2} + b_2^{\dagger 2}] + \sigma^*(\eta) [b_1^2 + b_2^2] \quad . \quad (4.28)$$

Vamos agora definir dois operadores aniquilação com momentos \vec{k} and $-\vec{k}$:

$$c_{\vec{k}} = \frac{b_1 - ib_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad c_{-\vec{k}} = \frac{b_1 + ib_2}{\sqrt{2}} \quad . \quad (4.29)$$

O Hamiltoniano, agora deve ser escrito em termos dos novos operadores:

$$\mathcal{H} = kc_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} + kc_{-\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}} + 2\sigma(\eta)c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger + 2\sigma^*(\eta)c_{\vec{k}} c_{-\vec{k}} \quad . \quad (4.30)$$

Os novos operadores obedecem às seguintes equações:

$$\frac{dc_{\vec{k}}}{d\eta} = -i [c_{\vec{k}}, \mathcal{H}] \quad , \quad (4.31)$$

$$\frac{dc_{\vec{k}}^\dagger}{d\eta} = -i [c_{\vec{k}}^\dagger, \mathcal{H}] \quad . \quad (4.32)$$

Usando (4.30),(4.31) e (4.32) obtemos:

$$\frac{dc_{\vec{k}}}{d\eta} = -ikc_{\vec{k}} + \frac{a'}{a} c_{-\vec{k}}^\dagger \quad , \quad \frac{dc_{\vec{k}}^\dagger}{d\eta} = ikc_{\vec{k}}^\dagger + \frac{a'}{a} c_{-\vec{k}} \quad , \quad (4.33)$$

cujas soluções podem ser escritas como

$$c_{\vec{k}}(\eta) = u_k(\eta)c_{\vec{k}}(0) + v_k(\eta)c_{-\vec{k}}^\dagger(0) \quad , \quad (4.34)$$

$$c_{\vec{k}}^\dagger(\eta) = u_k^*(\eta)c_{\vec{k}}^\dagger(0) + v_k^*(\eta)c_{-\vec{k}}(0) \quad , \quad (4.35)$$

onde $c_{\vec{k}}(0)$ e $c_{\vec{k}}^\dagger(0)$ são os valores iniciais dos operadores $c_{\vec{k}}(\eta)$ e $c_{\vec{k}}^\dagger(\eta)$, respectivamente.

Avaliando (4.34) a $\eta = 0$, obtemos:

$$c_{\vec{k}}^-(0) = u_k(0)c_{\vec{k}}^-(0) + v_k(0)c_{-\vec{k}}^\dagger(0) \quad , \quad (4.36)$$

que condiciona $u_k(0) = 1$ e $v_k(0) = 0$. Devido ao fato que $[c_{\vec{k}}^-(\eta), c_{\vec{k}}^\dagger(\eta)] = 1$, podemos escrever

$$\left[u_k(\eta)c_{\vec{k}}^-(0) + v_k(\eta)c_{-\vec{k}}^\dagger(0) \quad , \quad u_k^*(\eta)c_{\vec{k}}^\dagger(0) + v_k^*(\eta)c_{-\vec{k}}(0) \right] = 1 \quad , \quad (4.37)$$

que resulta em

$$|u_k(\eta)|^2 - |v_k(\eta)|^2 = 1 \quad . \quad (4.38)$$

Esta é a condição de normalização. Usando (4.33), (4.34) e (4.35) temos também as relações

$$\frac{du_k(\eta)}{d\eta} = -ik u_k(\eta) + \frac{a'}{a} v_k^*(\eta) \quad , \quad (4.39)$$

$$\frac{dv_k(\eta)}{d\eta} = -ik v_k(\eta) + \frac{a'}{a} u_k^*(\eta). \quad (4.40)$$

A soma $(u_k + v_k^*)$ satisfaz a relação

$$(u_k + v_k^*)'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) (u_k + v_k^*) = 0 \quad . \quad (4.41)$$

De (4.10) e (4.41), temos

$$\chi_k(\eta) = u_k(\eta) + v_k^*(\eta) \quad . \quad (4.42)$$

Usando finalmente (4.42), (4.39) e (4.4), obtemos

$$v_k^*(\eta) = \left[\frac{1}{2} + i \frac{\beta}{2k\eta} \right] \chi_k(\eta) - \frac{i}{2k} \chi_k'(\eta) \quad . \quad (4.43)$$

que será usada mais tarde para calcular a densidade de partículas criadas.

4.1.3 Estado de vácuo inicial e criação de partícula

Já que A_k e B_k são funções arbitrárias de k que devem satisfazer à condição (4.14), podemos impor $B_k = 0$ [30]. Isto fixa nosso estado inicial como será descrito nas seguintes linhas. Mas, como veremos mais tarde, esta escolha permite fixar sem nenhuma ambiguidade o estado inicial (o estado de vácuo de Bunch-Davies) para o modelo fantômico.

Injetando as soluções (4.15) com as condições $B_k = 0$ e (4.14) em (4.43), obtemos

$$v_k^*(\eta) = \frac{\sqrt{\pi|\eta|}}{4} \left[H_q^{(1)}(k|\eta) - iH_{q-1}^{(1)}(k|\eta) \right] \quad . \quad (4.44)$$

Assim,

$$|v_k(\eta)|^2 = \frac{\pi|\eta|}{16} \left[H_q^{(1)}(k|\eta|)H_q^{(2)}(k|\eta|) + H_{q-1}^{(1)}(k|\eta|)H_{q-1}^{(2)}(k|\eta|) \right. \\ \left. + i \left(H_q^{(1)}(k|\eta|)H_{q-1}^{(2)}(k|\eta|) - H_{q-1}^{(1)}(k|\eta|)H_q^{(2)}(k|\eta|) \right) \right] . \quad (4.45)$$

Esta expressão fornece o ritmo de produção de partículas. A expressão tem os seguintes comportamentos assintóticos :

$$k|\eta| \rightarrow 0 \quad , \quad q < \frac{1}{2} \quad (\alpha > \frac{1}{3}) \quad \Rightarrow \quad |v_k(\eta)|^2 \rightarrow \frac{1}{8k\pi} \left(\frac{k|\eta|}{2} \right)^{3-2q} ; \quad (4.46)$$

$$k|\eta| \rightarrow 0 \quad , \quad q = \frac{1}{2} \quad (\alpha = \frac{1}{3}) \quad \Rightarrow \quad |v_k(\eta)|^2 \rightarrow \frac{1}{8k\pi} ; \quad (4.47)$$

$$k|\eta| \rightarrow 0 \quad , \quad q > \frac{1}{2} \quad (\alpha < \frac{1}{3}) \quad \Rightarrow \quad |v_k(\eta)|^2 \rightarrow \frac{1}{8k\pi} \left(\frac{k|\eta|}{2} \right)^{1-2q} ; \quad (4.48)$$

$$k|\eta| \rightarrow \infty \quad , \quad \forall q \quad \Rightarrow \quad |v_k(\eta)|^2 \rightarrow \frac{1}{2k} . \quad (4.49)$$

Das expressões exatas acima, combinadas com seus comportamentos assintóticos, é fácil ver que o número total de partículas criadas a um tempo determinado η obtido pela integral

$$N = \int d^3k |v_k(\eta)|^2 \quad , \quad (4.50)$$

diverge. Em geral, esta é a consequência da divergência ultravioleta ($k \rightarrow \infty$) e da infravermelha ($k \rightarrow 0$) exibindo a fraqueza da análise. Entretanto, uma divergência dessas deve ser encarada com muito cuidado. Se $\alpha > -1/3$, momento em que o universo está sempre desacelerado, esta divergência reflete o fato de que não há um estado inicial natural: num universo desacelerando em permanência, todos os modos estão inicialmente fora do raio de Hubble, e a aproximação minkowskiana não é válida no passado. Para $-1/3 > \alpha > -1$, o cenário inflacionário habitual, tem também as divergências infravermelha e ultravioleta, mas indo para o passado, todos modos entram no raio de Hubble. Assim, a aproximação do espaço-tempo plano local é possível no passado infinito. Entretanto, para um comprimento de onda muito grande, esta condição é satisfeita muito perto da singularidade. Portanto, para fixar o estado de vácuo inicial, o modelo inflacionário necessita dois cortes, um no regime infravermelho e outro no regime ultravioleta. No regime ultravioleta o corte é bastante natural: este é a escala de Planck, da qual a teoria quântica completa deve ser usada. O regime infravermelho é muito arbitrário e depende especificamente do modelo.

Finalmente, a situação para $\alpha < -1$ (o caso fantômico) é muito claro . Neste caso, já que o raio de Hubble decresce em relação ao tempo, todos modos estão inicialmente nele

antes da singularidade futura (veja Fig 4.1). Não é preciso o corte infravermelho, como foi discutido na referência [30]. Por outro lado, o corte ultravioleta é ainda necessário no caso fantômico e reflete a habitual divergência no limite de pequeno comprimento de onda que aparece geralmente na teoria quântica dos campos. Como no caso inflacionário habitual, o corte específico pode ser usado neste limite (por exemplo, a escala de Planck), ou um procedimento de regularização pode ser usado, como foi discutido na referência [1]. Este corte pode ser aplicado, por exemplo, impondo $A_k = f(k)e^{-\frac{k}{k_c}}$, $f(k)$ sendo uma função finita de k .

Todo esquema descrito acima é modificado pelo $k \rightarrow k_c$, devido ao fato que estamos tratando de uma teoria efetiva, mas fica inalterada para $k \ll k_c$. Em qualquer caso, a introdução do corte não deve mudar nosso resultado, quer dizer aqueles modos tais que $k \ll k_c$.

Para o caso fantômico, o estado inicial com $A_k = 1$ e $B_k = 0$ representa o estado de vácuo autêntico, o vácuo de Bunch-Davies (veja [30] onde é mostrado explicitamente que tais estados não tem ambiguidade para $\alpha < -1$). Para as expressões assintóticas acima, pode ser verificado que a produção de partículas é inicialmente exatamente igual a zero (para qualquer valor de k) para o caso fantômico. Fixando o modo, podemos ver também das expressões assintóticas que a produção de partículas diverge quando o big rip se aproxima $\eta \rightarrow 0_-$ (veja Fig 4.2).

No cenário fantômico, o futuro assintótico ocorre no tempo finito. Assim, a produção de partículas deve mudar o estado final; em particular, deve levar ao impedimento do big rip. Isto deve acontecer desde que a equação de estado das partículas criadas, para um campo sem massa, seja dada por $\rho_s = p_s$, e podemos esperar que o fluido fantômico não poderá ser o componente dominante. Contudo, isto não é o caso. No cenário fantômico, a densidade de energia associada com o fluido cresce quando o universo se expande. Mas, para avaliar o efeito de contra reação, poderíamos calcular a densidade de energia associada com as partículas criadas durante a expansão. A densidade de energia correspondente a essas partículas é dada por

$$\rho_s = \langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle \quad , \quad (4.51)$$

que é o valor esperado no vácuo da componente temporal do tensor momento energia do campo quântico. O cálculo dessa densidade de energia foi feita em [31] (veja também [1,3]). Após adaptação das nossas convenções, a densidade de energia fica sendo

$$\rho_s = \frac{1}{4\pi a^4} \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \chi'_k \chi_k^{*'} - \frac{a'}{a} [\chi_k \chi_k^{*'} + \chi_k^* \chi'_k] + \left[\frac{a'^2}{a^2} + k^2 \right] \chi_k \chi_k^* \right\} . \quad (4.52)$$

De (4.15), com $B_k = 0$,

$$\chi_k \sim \frac{1}{\sqrt{2k}} \exp \left[i \left(k|\eta| - \frac{q\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad \text{quando } |\eta| \rightarrow \infty, \quad (4.53)$$

e é muito fácil ver que recuperamos a expressão habitual da densidade de energia de partículas criadas, com uma divergência quártica (assim precisamos de um corte). Mas, quando o big rip se aproxima ($|\eta| \rightarrow 0$), a solução se torna

$$\chi_k \sim -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \Gamma(q) k^{-q} \left(\frac{|\eta|}{2} \right)^\beta, \quad \beta < 0 \quad (4.54)$$

para $\alpha < -1/3$

Inserindo (4.54) em (4.52), é fácil ver que neste limite, a densidade de energia de criação de partículas vai para zero. Assim, a influência de criação de partículas é assintoticamente irrelevante, e a contra reação é ineficaz para o impedimento do big rip. Esse comportamento está ilustrado na Fig 4.3.

O caso particular $\alpha = -1/3$ deve ser estudado separadamente. Em função do tempo conforme, a solução neste caso fica sendo

$$a(\eta) = a_0 e^{\lambda\eta}, \quad (4.55)$$

onde a_0 e λ são constantes. A equação de Klein-Gordon se escreve agora,

$$\chi_k''(\eta) + D^2 \chi_k(\eta) = 0, \quad (4.56)$$

com

$$D^2 = k^2 - \lambda^2. \quad (4.57)$$

Não há nenhuma propagação dos modos quânticos se $D^2 \leq 0$. Entretanto, para $D^2 > 0$, a solução se torna

$$\chi_k(\eta) = \chi_0 e^{-iD\eta}. \quad (4.58)$$

A normalização implica que

$$\chi_0 = (2D)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.59)$$

Usando as expressões (4.58) e (4.42), obtemos

$$v_k^*(\eta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2D}} \left[1 - \frac{D}{k} + i \frac{\lambda}{k} \right] . \quad (4.60)$$

Neste caso, partículas são criadas com um ritmo constante durante toda a evolução do universo, para os modos que estão dentro do raio de Hubble, enquanto nenhuma partícula é criada para os modos que estão fora do raio de Hubble. É importante notar que neste caso, um modo que inicialmente está dentro do raio de Hubble fica sempre dentro. É fácil ver que a densidade de energia de um dado modo só depende de k . A densidade de energia decresce quando o universo se expande devido ao fator a^4 na expressão (4.52), que também vai zerando assintoticamente.

Vimos que um universo preenchido por um fluido fantômico pode apresentar o big-rip. Mostramos também que a densidade de energia associada à produção de partículas vai para zero quando o tempo do big-rip se aproxima. Assim, a contra reação da produção de partículas não é efetiva para impedir o big rip no caso de um campo escalar sem massa. A razão fundamental desse resultado é que os cálculos foram feitos introduzindo o termo de corte na escala de Planck para evitar a divergência ultravioleta.

Ao deixarmos de introduzir o termo de corte, o resultado provavelmente será outro. É isto que vamos investigar na próxima seção em que, em vez do corte, usaremos uma técnica de regularização (**n-wave**) para calcular o tensor momento energia quântico no mesmo caso de campo escalar sem massa e sem acoplamento.

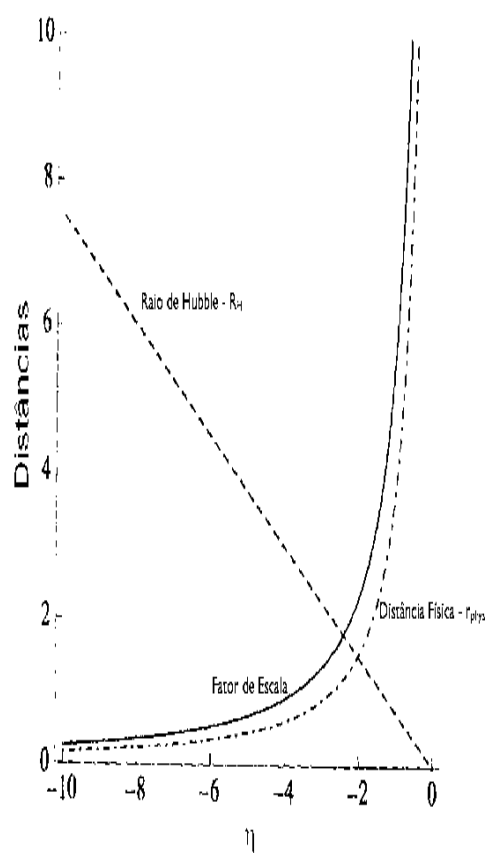


Figura 4.1: A evolução do fator de escala em função do tempo (linha cheia), do raio de Hubble (em traços e pontos) e do modo físico (em linha tracejada) num modelo fantômico com $\alpha = -3/2$.

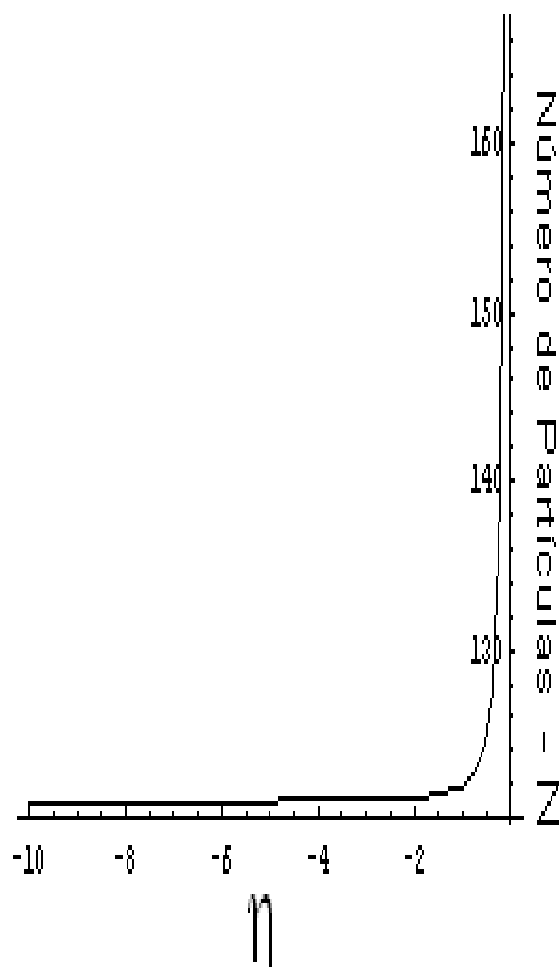


Figura 4.2: Comportamento da produção de partículas com o modo $k = 1$ e $\alpha = -3/2$ quando o big rip está aproximado.

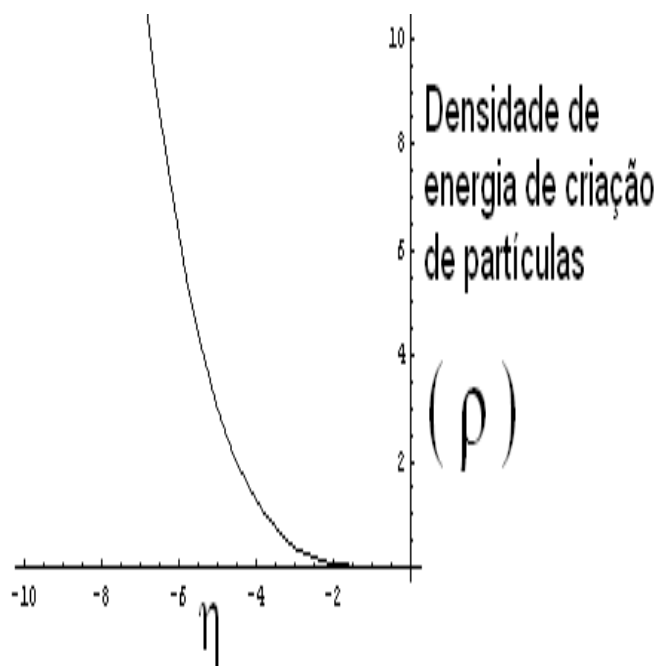


Figura 4.3: Comportamento da densidade de energia com o modo $k = 1$ e $\alpha = -3/2$ quando o big rip está se aproximando.

4.2 Efeitos quânticos perto do big-rip com regularização n -wave

O problema de produção de partículas no universo de Friedmann foi analisado na seção anterior. A análise desse problema mostra que o tensor momento energia para o campo escalar se torna divergente no limite ultravioleta. Assim, um processo de regularização tem que ser usado. No caso de espaço-tempo, a tarefa não é fácil. Na seção passada, introduzimos o corte ultravioleta conectado com a frequência Planckiana. Nesta seção, vamos regularizar o tensor momento energia para um campo escalar sem massa usando o método de n -wave que é bem conveniente para um universo isotrópico. Porém, isto parece não satisfatório devido à existência da divergência logarítmica no limite ultravioleta. Propomos uma técnica de corte para completar a resolução desse problema e obtemos um tensor momento energia finito. Veremos que, usando a expressão regularizada, a densidade de energia associada aos efeitos quânticos diverge perto do big-rip, e pode se tornar a componente dominante da energia, alterando o estado final do universo.

4.2.1 O problema geral de regularização

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)(4.1) descreve um universo espacialmente plano. Se o universo é preenchido por um fluido perfeito barotrópico, com a equação de estado $p = \alpha\rho$, as equações de Friedmann são (4.2) e (4.3).

A equação fundamental para um campo escalar sem massa no espaço de (FLRW) é,

$$\phi_{;\mu}{}^{;\mu} = 0, \quad (4.61)$$

onde (;) denota a derivada covariante. Usando a métrica de FLRW e fazendo a decomposição de Fourier, esta equação se reduz à seguinte equação de modo k :

$$\phi_k'' + 2\frac{a'}{a}\phi_k' + k^2\phi_k = 0 \quad . \quad (4.62)$$

As expressões gerais para a energia e a pressão do campo escalar quantizado são dadas pela seguintes expressões:

$$\rho = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \left\{ \phi_k' \phi_k'^* + k^2 \phi_k \phi_k^* \right\} k^2 dk \quad ; \quad (4.63)$$

$$p = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \left\{ \phi_k' \phi_k'^* - \frac{k^2}{3} \phi_k \phi_k^* \right\} k^2 dk \quad . \quad (4.64)$$

Essas expressões podem ser escritas como

$$\rho = \int_0^\infty k^2 E_k dk, \quad E_k = \frac{1}{a^2} \left\{ \phi'_k \phi_{k'}^* + k^2 \phi_k \phi_{k'}^* \right\}, \quad (4.65)$$

$$p = \int_0^\infty k^2 P_k dk, \quad P_k = \frac{1}{a^2} \left\{ \phi'_k \phi_{k'}^* - \frac{k^2}{3} \phi_k \phi_{k'}^* \right\}. \quad (4.66)$$

Em geral, as expressões acima para a energia e a pressão contém divergências quártica, quadrática e logarítmica no limite ultravioleta, enquanto elas são regulares no limite infravermelho, pelo menos quando $\alpha < -1/3$. Para eliminar essas divergências, vamos usar o método de n -wave descrito na referência [13]. Essencialmente, esse método consiste em subtrair os termos divergentes obtidos expandindo E_k e P_k em potência de k^{-2} :

$$E_k^{ren} = E_k - E_k^0 - E_k^1 - \frac{1}{2} E_k^2, \quad (4.67)$$

$$P_k^{ren} = P_k - P_k^0 - P_k^1 - \frac{1}{2} P_k^2, \quad (4.68)$$

onde

$$E_k^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^p E_k^n}{\partial (n^{-2})^p}, \quad P_k^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^p P_k^n}{\partial (n^{-2})^p}, \quad (4.69)$$

com as definições,

$$E_k^n = \frac{1}{n} E_k(nk), \quad P_k^n = \frac{1}{n} P_k(nk). \quad (4.70)$$

Fica mais conveniente exprimir as derivadas como

$$\frac{\partial f}{\partial (n^{-2})} = \frac{\partial n}{\partial (n^{-2})} \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{n^3}{2} \frac{\partial f}{\partial n}, \quad (4.71)$$

e conseqüentemente para as derivadas de ordem elevada, f sendo ambas E_k ou P_k . Assim, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial (n^{-2})} = -\frac{n^3}{2} \frac{\partial f}{\partial n}, \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (n^{-2})^2} = \frac{3}{4} n^5 \frac{\partial f}{\partial n} + \frac{n^6}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}. \quad (4.73)$$

É necessário usar as seguintes expressões para as funções de Hankel no limite de grande valor do argumento:

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P(\nu, x) + iQ(\nu, x) \right\} e^{ix}; \quad (4.74)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P(\nu, x) - iQ(\nu, x) \right\} e^{-ix}, \quad (4.75)$$

onde $\chi = \left[x - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]$ e

$$P(\nu, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k)}{(2x)^{2k}} = 1 - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)(4\nu^2 - 49)}{4!(8x)^4} + \dots \quad (4.76)$$

$$Q(\nu, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k+1)}{(2x)^{2k+1}} = \frac{4\nu^2 - 1}{8x} - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)}{3!(8x)^3} + \dots \quad (4.77)$$

$$(\nu, k) \equiv \frac{\Gamma(1/2 + n + k)}{k! \Gamma(1/2 + n - k)} \quad (4.78)$$

Vamos considerar quatro casos particulares, o caso radiativo e o caso de de Sitter, o caso de inflação geral e o caso fantômico.

4.2.2 Caso de fluido radiativo

Vamos considerar agora o caso particular do universo plano dominado pelo fluido radiativo. Já que o fluido radiativo é conformalmente invariante, e o universo é isotrópico e homogêneo, devemos esperar que o ritmo de produção de partículas seja zero, como é mostrado na referência [13] (veja também [17]).

Para um universo radiativo, o fator de escala é $a = a_0 \eta$. Assim, a equação (4.62) se torna agora,

$$\phi'' + 2 \frac{\phi'}{\eta} + k^2 \phi = 0 \quad (4.79)$$

A solução geral é

$$\phi = c_1(k) \frac{e^{i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})}}{\eta} + c_2(k) \frac{e^{i(k\eta + \vec{k} \cdot \vec{x})}}{\eta} \quad (4.80)$$

Obtemos o vácuo inicial de Bunch-Davies, definido pelo estado fundamental de um oscilador harmônico, se, por exemplo,

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2k}}, \quad c_2 = 0 \quad (4.81)$$

Agora a densidade de energia e a pressão são,

$$\rho = \frac{1}{2a^2} \int_0^{\infty} \left\{ 2k^2 + \frac{1}{\eta^2} \right\} \frac{k}{\eta^2} dk = \frac{1}{2a_0^2} \int_0^{\infty} \left\{ 2k^2 + \frac{1}{\eta^2} \right\} \frac{k}{\eta^4} dk \quad (4.82)$$

$$p = \frac{1}{2a^2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{3}k^2 + \frac{1}{\eta^2} \right\} \frac{k}{\eta^2} dk = \frac{1}{2a_0^2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{3}k^2 + \frac{1}{\eta^2} \right\} \frac{k}{\eta^4} dk \quad (4.83)$$

Essas expressões para a energia e a pressão obedecem à lei de conservação,

$$\rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0 \quad . \quad (4.84)$$

De (4.65,4.66), obtemos:

$$E_k = \left\{ 2k^2 + \frac{1}{\eta^2} \right\} \frac{1}{k\eta^4} \quad , \quad (4.85)$$

$$P_k = \left\{ \frac{2}{3}k^2 + \frac{1}{\eta^2} \right\} \frac{1}{k\eta^4} \quad . \quad (4.86)$$

Nas expressões da densidade de energia e da pressão, têm as divergências quártica e quadrática. Mas, não há a divergência logarítmica.

Para darmos sentido às expressões da densidade de energia e da pressão, vamos usar o procedimento de regularização descrito na subseção 2. Usando as expressões para E_k^p e P_k^p , obtemos as seguintes relações:

$$E_k^0 = 2\frac{k}{\eta^4}, \quad E_k^1 = \frac{1}{k\eta^6}, \quad E_k^2 = 0 \quad , \quad (4.87)$$

$$P_k^0 = \frac{2}{3}\frac{k}{\eta^4}, \quad P_k^1 = \frac{1}{k\eta^6}, \quad P_k^2 = 0 \quad (4.88)$$

Assim, temos,

$$E_k^{ren} = E_k - E_k^0 - E_k^1 - \frac{1}{2}E_k^2 = 0 \quad , \quad (4.89)$$

$$P_k^{ren} = P_k - P_k^0 - P_k^1 - \frac{1}{2}P_k^2 = 0 \quad . \quad (4.90)$$

Consequentemente, a expressão inicial para a densidade de energia diverge mas, após a regularização, ela se torna igual a zero, de acordo com o fato de que não há produção de partícula durante uma fase radiativa. Note que a equação (4.79), após a redefinição $\phi = \frac{\xi}{a}$, toma a forma

$$\xi'' + k^2\xi = 0 \quad . \quad (4.91)$$

Dessa expressão, fica claro que não poderíamos esperar nenhuma produção de partícula desde o começo.

Mas o resultado não é o mesmo para a polarização do vácuo. A razão para isto é bem simples. Explicaremos isto detalhadamente no caso de de Sitter, onde a mesma situação ocorre.

4.2.3 A fase de de Sitter

Numa fase de de Sitter, que resulta da equação de estado $p = -\rho$ ($\alpha = -1$), o fator de escala é dado por

$$a = -\frac{1}{\eta} \quad . \quad (4.92)$$

A equação de Klein-Gordon fica,

$$\phi'' - 2\frac{\phi'}{\eta} + k^2\phi = 0 \quad . \quad (4.93)$$

A solução é,

$$\phi = \eta^{3/2} \left\{ c_1 H_{3/2}^{(1)}(k\eta) + c_2 H_{3/2}^{(2)}(k\eta) \right\} \quad . \quad (4.94)$$

Note que, a partir de agora, fizemos a substituição $\eta \rightarrow -\eta$, para evitar de estar repetindo o módulo do valor do parâmetro original η , que é definido na parte negativa do eixo das abscissas.

A condição inicial é imposta a $\eta \rightarrow \infty$, onde

$$\phi = \eta^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi k \eta}} \left\{ c_1 e^{i(k\eta - \pi)} + c_2 e^{-i(k\eta - \pi)} \right\} \quad . \quad (4.95)$$

Podemos obter o estado de vácuo inicial de Bunch-Davies se

$$c_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad c_2 = 0 \quad . \quad (4.96)$$

Assim, temos a solução final

$$\phi = \eta^{3/2} c_1 H_{3/2}^{(1)}(k\eta) \quad . \quad (4.97)$$

Esta solução, que corresponde ao estado de vácuo adiabático, implica que não há produção de partícula, veja [1]. Tem outras escolhas possíveis e o uso de outro sistema de coordenadas, que correspondem ao recobrimento do espaço-tempo de de Sitter, que deve implicar outro estado de vácuo inicial [1, 18, 23]. É suficiente nos limitarmos ao vácuo descrito por (4.97).

Usando as relações de recorrência para as funções de Hankel

$$H_{\nu-1}^{(1,2)}(z) + H_{\nu+1}^{(1,2)}(z) = \frac{2\nu}{z} H_{\nu}^{(1,2)}(z) \quad ;$$

$$H_{\nu-1}^{(1,2)}(z) - H_{\nu+1}^{(1,2)}(z) = 2 \frac{dH_{\nu}^{(1,2)}(z)}{dz} \quad ;$$

$$\frac{dH_\nu^{(1,2)}(z)}{dz} = H_{\nu-1}^{(1,2)}(z) - \frac{\nu}{z} H_\nu^{(1,2)}(z) \quad ;$$

$$\frac{dH_\nu^{(1,2)}(z)}{dz} = -H_{\nu+1}^{(1,2)}(z) + \frac{\nu}{z} H_\nu^{(1,2)}(z) \quad ,$$

obtemos as seguintes expressões para a densidade de energia e a pressão:

$$\rho = 4\pi c_1^2 \eta^5 \int_0^\infty k^4 \left\{ H_{1/2}^{(1)}(k\eta) H_{1/2}^{(2)}(k\eta) + H_{3/2}^{(1)}(k\eta) H_{3/2}^{(2)}(k\eta) \right\} dk \quad , \quad (4.98)$$

$$p = 4\pi c_1^2 \eta^5 \int_0^\infty k^4 \left\{ H_{1/2}^{(1)}(k\eta) H_{1/2}^{(2)}(k\eta) - \frac{1}{3} H_{3/2}^{(1)}(k\eta) H_{3/2}^{(2)}(k\eta) \right\} dk \quad . \quad (4.99)$$

Essas expressões contêm as divergências quártica e quadrática como no caso radiativo, de novo sem a divergência logarítmica. De fato, essas expressões podem ser simplificadas usando as seguintes formas assintóticas, quando $x \rightarrow \infty$, para as funções Hankel:

$$H_{1/2}^{(1)}(x) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix} \quad , \quad H_{1/2}^{(2)}(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix} \quad ; \quad (4.100)$$

$$H_{3/2}^{(1)}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ 1 + \frac{i}{x} \right\} e^{ix} \quad , \quad H_{3/2}^{(2)}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ 1 - \frac{i}{x} \right\} e^{-ix} \quad . \quad (4.101)$$

Com essas expressões para as funções de Hankel, a expressão para o campo escalar toma a forma

$$\phi = \eta^{3/2} c_1 \sqrt{\frac{2}{\pi k \eta}} \left[1 + \frac{i}{k\eta} \right] e^{ik\eta} \quad . \quad (4.102)$$

Conseqüentemente, as expressões para a densidade de energia e a pressão se reduzem a:

$$\rho = 8c_1^2 \eta^4 \int_0^\infty k^3 \left\{ 2 + \frac{1}{(k\eta)^2} \right\} dk \quad ; \quad (4.103)$$

$$p = \frac{8}{3} c_1^2 \eta^4 \int_0^\infty k^3 \left\{ 2 - \frac{1}{(k\eta)^2} \right\} dk \quad . \quad (4.104)$$

Vemos que as divergências usuais, quártica e quadrática aparecem no limite ultravioleta . Não há nenhuma divergência no limite infravermelho. As expressões são similares às obtidas no caso radiativo. Particularmente, não há nenhuma divergência logarítmica no limite ultravioleta, nem no limite infravermelho. Por outro lado, essas expressões são compostas somente de termos divergentes, e só podemos esperar que o processo de regularização os cancele.

O procedimento de regularização da energia e da pressão é feita com o campo quantizado.

- Regularização da energia.

$$E_k^n = \frac{\eta^4}{2\pi^2} \left\{ 2k + \frac{1}{k\eta^2 n^2} \right\} ; \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial E_k^n}{\partial n^{-2}} = \frac{\eta^2}{2\pi^2 k} ; \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial^2 E_k^n}{\partial n^{-2^2}} = 0 . \quad (4.107)$$

No limite $n \rightarrow \infty$, temos

$$E_k^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} E_k^n = \frac{\eta^4 k}{\pi^2} ; \quad (4.108)$$

$$E_k^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial E_k^n}{\partial n^{-2}} = \frac{\eta^2}{2\pi^2 k} ; \quad (4.109)$$

$$E_k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 E_k^n}{\partial n^{-2^2}} = 0 . \quad (4.110)$$

Assim, a energia regularizada é:

$$E_k^{ren} = \frac{2}{\pi} \eta^4 \left\{ 2k + \frac{1}{k\eta^2} - 2k - \frac{1}{k\eta^2} \right\} \equiv 0 . \quad (4.111)$$

- Regularização da pressão:

$$P_k^n = \frac{\eta^4}{6\pi^2} \left\{ 2k - \frac{1}{k\eta^2 n^2} \right\} ; \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial P_k^n}{\partial n^{-2}} = -\frac{\eta^2}{6\pi^2 k} ; \quad (4.113)$$

$$\frac{\partial^2 P_k^n}{\partial n^{-2^2}} = 0 . \quad (4.114)$$

No limite $n \rightarrow \infty$, temos

$$P_k^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_k^n = \frac{\eta^4 k}{3\pi^2} ; \quad (4.115)$$

$$P_k^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial P_k^n}{\partial n^{-2}} = -\frac{\eta^2}{6\pi^2 k} ; \quad (4.116)$$

$$P_k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 P_k^n}{\partial n^{-2^2}} = 0 . \quad (4.117)$$

Assim, a pressão regularizada é:

$$P_k^{ren} = \frac{2}{3\pi} \eta^4 \left\{ 2k - \frac{1}{k\eta^2} - 2k + \frac{1}{k\eta^2} \right\} \equiv 0 . \quad (4.118)$$

O espaço-tempo de de Sitter tem simetria máxima, pelo menos localmente. Como consequência, existe vetor de Killing do tipo tempo, e nenhuma partícula pode ser criada, pelo menos para uma certa escolha do vácuo inicial, como feito em [32] - e a densidade de energia e a pressão associadas à criação de partículas devem ser zero. Mas neste caso, a polarização do vácuo e a anomalia de traço, que podem aparecer na técnica de separação de pontos, é ausente. Esse resultado poderia ser esperado também, a partir da semelhança com o caso radiativo, como foi mostrado acima: as expressões para a densidade de energia e a pressão contêm somente termos divergentes, como pode ser notado em (4.103,4.104). Este resultado, que reflete a ausência da divergência logarítmica, é uma consequência direta do fato de ter tomado $m = 0$ desde o início. Quando a massa é levada em consideração, a expressão geral para a densidade de energia quântica (4.63) muda e se escreve da seguinte maneira

$$\rho = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \left\{ \phi'_k \phi'^*_k + (k^2 + m^2 a^2) \phi_k \phi^*_k \right\} k^2 dk \quad . \quad (4.119)$$

Fica claro que, tomar a massa igual a zero desde início neste caso, esconde o termo $m^2 a^2 k^2 \phi_k \phi^*_k$ que no caso de de Sitter produz a divergência logarítmica e também é o termo fundamental pela geração de anomalia de traço e de polarização do vácuo [33]. Aqui, o uso da massa permite então obter a anomalia de traço e também a polarização do vácuo mas é importante notar que, em geral, para obter a anomalia de traço e a polarização, o uso da massa diferente de zero não é sempre necessário [34]. Mas neste caso de n-wave, é necessário o uso da massa para obter um resultado finito para o caso de de Sitter. Quando resolvemos a equação de Klein-Gordon com massa no caso de de Sitter, a solução se apresenta na forma de função de Hankel. Na ordem dessa função, está presente a massa que deve ser multiplicada pelo parâmetro de regularização n na técnica de regularização. Para eliminar o parâmetro n , faz-se o limite ($n \rightarrow \infty$). Não levar a massa em consideração desde o início parece fazer o produto $0 \times \infty$. Isto mostra porque é necessário fazer o limite $m \rightarrow 0$ só no final do processo de renormalização para obter um resultado finito. O mesmo problema pode ser observado no caso do exemplo de Bunch-Davies que tratamos no capítulo 3. A massa foi tomada igual a zero na equação de Klein-Gordon, mas a vantagem naquele caso foi que na técnica de separação de pontos, a função de DeWitt-Schwinger carrega termo proporcional ao inverso do quadrado da massa. Uma outra coisa que é muito importante lembrar é que no caso de separação de pontos, a massa não é rigorosamente tomada igual a zero. O único efeito de massa nula só aparece na equação de Klein-Gordon, portanto muda apenas os modos. Na expressão do tensor momento-energia e também da função de DeWitt-Schwinger a massa é mantida diferente de zero. Só no final do processo que a massa

é tomada igual a zero. Isto permite recuperar ao longo do processo, alguns termos não nulo que ficam independentes da massa no limite $m = 0$ [33]. Portanto, o fato de usar a massa igual a zero desde o início, longe de ser um procedimento errado, só pode ter como consequência, o resultado nulo para a polarização do vácuo e também a ausência da divergência logarítmica no caso de de Sitter e também no caso radiativo.

Nosso resultado acima, que está de acordo com as interpretações dos resultados discutidos nas referências [1, 3] no ponto de vista de criação de partículas, também está em acordo com os resultados da referência [23], onde o cálculo geral para o campo escalar massivo minimamente acoplado com a gravidade foi feito. Quando tomamos os termos da massa e da constante de acoplamento iguais a zero, existe um termo não nulo para o tensor momento energia renormalizado: este é um termo de polarização do vácuo.

Note que após a renormalização, os termos finitos, chamados *termos locais*, são característicos da criação de partículas e da polarização do vácuo. Os termos locais são independentes do estado quântico em que o valor esperado do tensor momento energia é calculado. Os termos locais que zeram quando a curvatura vai para zero, caracterizam a polarização do vácuo e os outros que não zeram mesmo quando a curvatura é nula, são termos de criação de partículas. No caso da referência [23], fica claro que não há criação de partículas porque o termo finito vai para zero no caso de curvatura nula.

A situação geral analisada na referência [23], contém a divergência logarítmica, que é ausente quando a massa e o parâmetro de acoplamento são ambos nulos desde o início. Note também que a função de Green usada em [23] se torna singular quando a constante de acoplamento e a massa são tomadas iguais a zero, e conseqüentemente, o resultado obtido não pode ser usado para achar diretamente o resultado para o caso em que a massa e o parâmetro de acoplamento são tomados não nulos desde o início.

4.2.4 O caso da inflação

Vamos considerar o caso inflacionário geral. O fator de escala fica sendo,

$$a = a_0 \eta^{2/(1+3\alpha)} \quad . \quad (4.120)$$

Existe inflação se $\alpha < -1/3$. A equação de Klein-Gordon se escreve,

$$\phi'' + 2\beta \frac{\phi'}{\eta} + k^2 \phi = 0 \quad , \quad \beta = \frac{2}{1+3\alpha} \quad . \quad (4.121)$$

A solução geral é

$$\phi = \eta^\nu \left\{ c_1 H_\nu^{(1)}(k\eta) + c_2 H_\nu^{(2)}(k\eta) \right\} \quad , \quad \nu = \frac{1}{2} - \beta \quad . \quad (4.122)$$

Como antes, podemos escolher c_1 para obter o vácuo de Bunch-Davies no limite $k \rightarrow \infty$, e $c_2 = 0$. Assim, a expressão final é

$$\phi = \eta^\nu c_1 H_\nu^{(1)}(k\eta) \quad , \quad (4.123)$$

onde c_1 não depende de k .

As expressões correspondentes para a energia e a pressão são

$$\rho = A\eta^{2\nu-2\beta} \int_0^\infty k^4 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(k\eta) H_{\nu-1}^{(2)}(k\eta) + H_\nu^{(1)}(k\eta) H_\nu^{(2)}(k\eta) \right\} dk \quad , \quad (4.124)$$

$$p = A\eta^{2\nu-2\beta} \int_0^\infty k^4 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(k\eta) H_{\nu-1}^{(2)}(k\eta) - \frac{1}{3} H_\nu^{(1)}(k\eta) H_\nu^{(2)}(k\eta) \right\} dk \quad , \quad (4.125)$$

onde $A = 4\pi c_1^2$.

A lei de conservação

$$\rho' + 3\frac{\beta}{\eta}(\rho + p) = 0 \quad (4.126)$$

é obedecida.

Como nos casos precedentes, não há nenhuma divergência no limite infravermelho. Vamos primeiro, achar as divergências que devem ocorrer no limite $k \rightarrow \infty$. Usando a expansão (4.74,4.75), devemos ir até a ordem k^{-5} nos colchetes dos integrandos (4.124,4.125): devido ao termo k^4 nas integrais da energia e da pressão, todos termos até esta ordem no produto das funções de Hankel são divergentes. Particularmente, o termo de ordem k^{-5} fornece a divergência logarítmica, o termo k^{-3} a divergência quadrática, e o termo k^{-1} a divergência quártica, e todos outros termos na expansão são zero no limite $k \rightarrow \infty$. Note que nos dois primeiros exemplos tratados, a divergência logarítmica é ausente.

As expressões para E_k and P_k , obtidas de (4.124,4.125), são

$$E_k = A\eta^{2\nu-2\beta} k^2 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(k\eta) H_{\nu-1}^{(2)}(k\eta) + H_\nu^{(1)}(k\eta) H_\nu^{(2)}(k\eta) \right\} \quad , \quad (4.127)$$

$$P_k = A\eta^{2\nu-2\beta} k^2 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(k\eta) H_{\nu-1}^{(2)}(k\eta) - \frac{1}{3} H_\nu^{(1)}(k\eta) H_\nu^{(2)}(k\eta) \right\} \quad , \quad (4.128)$$

e de (4.74,4.75), temos

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x)H_{\nu-1}^{(2)}(x) &= \frac{2}{\pi x}[-iP_\nu(x)P_{\nu-1}(x) - P_\nu(x)Q_{\nu-1}(x) + \\ &Q_\nu(x)P_{\nu-1}(x) - iQ_\nu(x)Q_{\nu-1}(x)] \quad ; \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} H_{\nu-1}^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x) &= \frac{2}{\pi x}[iP_{\nu-1}(x)P_\nu(x) + P_{\nu-1}(x)Q_\nu(x) - \\ &P_\nu(x)Q_{\nu-1}(x) + iQ_\nu(x)Q_{\nu-1}(x)] \quad ; \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} H_{\nu-1}^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x) + H_\nu^{(1)}(x)H_{\nu-1}^{(2)}(x) &= \frac{4}{\pi x}[Q_\nu(x)P_{\nu-1}(x) - \\ &P_\nu(x)Q_{\nu-1}(x)] \quad . \end{aligned} \quad (4.131)$$

Usando essas expansões para as funções P e Q , as expressões para E_k e P_k se tornam:

$$E_k = A\eta^{2\nu-2\beta-2} \frac{2}{\pi} x \left\{ 2 + \frac{(2\nu-1)^2}{4x^2} + 3 \frac{(2\nu-3)(2\nu-1)^2(2\nu+1)}{64x^4} + \dots \right\}, \quad (4.132)$$

$$P_k = A\eta^{2\nu-2\beta-2} \frac{2}{\pi} x \left\{ \frac{2}{3} + \frac{4\nu^2 - 12\nu + 5}{12x^2} + \frac{(2\nu-3)(2\nu-1)(2\nu-9)(2\nu+1)}{64x^4} + \dots \right\}, \quad (4.133)$$

onde $x = k\eta$. Fica claro, com essa aproximação, que aparecem as divergências quártica, quadrática e logarítmica no limite ultravioleta. As divergências logarítmicas são ausentes somente quando $\beta = 1(\nu = 1/2)$ or $\beta = -1(\nu = -3/2)$, que corresponde aos casos radiativo e de de Sitter estudados antes. Vamos calcular as diferentes componentes que devem ser subtraídos das expressões acima no caso geral, como fizemos para os casos particulares da radiação e do universo de de Sitter.

- **Cálculo para a energia**

Vamos escrever o termo da energia como,

$$E_k = A\eta^\gamma x^2 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(x) H_{\nu-1}^{(2)}(x) + H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)}(x) \right\}, \quad (4.134)$$

onde $\gamma = 2(\nu - \beta) - 2 = -\frac{3(3+\alpha)}{1+3\alpha}$ e $x = k\eta$. Como consequência, obtemos

$$E_k^n = A\eta^\gamma n x^2 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(nx) H_{\nu-1}^{(2)}(nx) + H_\nu^{(1)}(nx) H_\nu^{(2)}(nx) \right\}. \quad (4.135)$$

Portanto, a expressão da energia pode ser reescrita como:

$$E_k^n = A\eta^{\gamma+1} k f(y), \quad f(y) = y \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(y) H_{\nu-1}^{(2)}(y) + H_\nu^{(1)}(y) H_\nu^{(2)}(y) \right\}, \quad (4.136)$$

onde $y = nk\eta$. Assim, obtemos:

$$E_k^0 = \lim_{y \rightarrow \infty} A\eta^{\gamma+1} k y \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(y) H_{\nu-1}^{(2)}(y) + H_\nu^{(1)}(y) H_\nu^{(2)}(y) \right\}; \quad (4.137)$$

$$E_k^1 = A \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{2\nu-1}{2k} \eta^{\gamma-1} y^3 \left[H_{\nu-1}^{(1)}(y) H_{\nu-1}^{(2)}(y) - H_\nu^{(1)}(y) H_\nu^{(2)}(y) \right] \right\}; \quad (4.138)$$

$$E_k^2 = A \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2\nu-1}{4k^3} \eta^{\gamma-3} y^5 \left\{ (2\nu+1) H_{\nu-1}^{(1)}(y) H_{\nu-1}^{(2)}(y) + (2\nu-3) H_\nu^{(1)}(y) H_\nu^{(2)}(y) - 2y \left[H_\nu^{(1)}(y) H_{\nu-1}^{(2)}(y) + H_{\nu-1}^{(1)}(y) H_\nu^{(2)}(y) \right] \right\}. \quad (4.139)$$

Agora podemos calcular E_k^0 , E_k^1 , E_k^2 e E_k . Usando primeiramente a relação

$$\begin{aligned} H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) + H_{\nu}^{(1)}(y)H_{\nu}^{(2)}(y) = \\ \frac{2}{\pi y} \left\{ 2 + \frac{4\nu^4 - 4\nu + 1}{4y^2} + \frac{48\nu^4 - 96\nu^3 + 24\nu^2 + 24\nu - 9}{64y^4} \right\} \quad , \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) + H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu}^{(2)}(y) = \\ \frac{2}{\pi y} \left\{ \frac{2\nu - 1}{y} + 4 \frac{384\nu^3 - 576\nu^2 - 96\nu + 144}{3(8y)^3} - \right. \\ \left. \frac{1}{3(8y)^5} \left[(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 8\nu + 3)(2\nu - 1)(16\nu^4 - 32\nu^3 - \right. \right. \\ \left. \left. 140\nu^2 + 456\nu + 1736) \right] \right\} \quad , \end{aligned} \quad (4.141)$$

obtemos de (4.137),

$$E_k^0 = A \frac{4k}{\pi} \eta^{\gamma+1} \quad . \quad (4.142)$$

Por outro lado, usando

$$\begin{aligned} H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) - H_{\nu}^{(1)}(y)H_{\nu}^{(2)}(y) = \frac{2}{\pi y} \left\{ \frac{-8\nu + 4}{8y^2} + \right. \\ \left. \frac{3(-64\nu^3 + 96\nu^2 + 16\nu - 24)}{2 \cdot 64y^4} \right\} \quad , \end{aligned} \quad (4.143)$$

e inserindo em (4.138), obtemos

$$E_k^1 = A \frac{1}{2\pi k} \eta^{\gamma+1} (2\nu - 1)^2 \quad . \quad (4.144)$$

Da mesma maneira, mostramos que

$$E_k^2 = A \frac{2\nu - 1}{2\pi k^3} f(\nu) \eta^{\gamma-3} \quad , \quad (4.145)$$

onde

$$\begin{aligned} f(\nu) = \frac{1}{12288} \left(128\nu^9 - 576\nu^7 - 256\nu^7 + 5968\nu^6 + 2127\nu^5 \right. \\ \left. - 102040\nu^4 + 14432\nu^3 + 554155\nu^2 - 1978\nu - 10794 \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.146)$$

De (4.74,4.75) E_k pode ser escrito, no limite ultravioleta, como

$$\begin{aligned} E_k(k \rightarrow \infty) = A \left\{ \frac{4k}{\pi} \eta^{\gamma+1} + \frac{(2\nu - 1)^2}{2\pi k} \eta^{\gamma-1} \right. \\ \left. + \frac{48\nu^4 - 96\nu^3 + 24\nu^2 + 24\nu - 9}{32\pi k^3} \eta^{\gamma-3} \right\} \quad . \end{aligned} \quad (4.147)$$

Consequentemente

$$E^{ren} = E_k - E_k^0 - E_k^1 - \frac{1}{2}E_k^2 = A \frac{h(\nu)}{349152\pi k^3} \eta^{\gamma-3} \quad , \quad (4.148)$$

onde

$$\begin{aligned} h(\nu) &= -256\nu^{10} + 1280\nu^9 - 64\nu^8 - 12192\nu^7 - 3657\nu^6 \\ &- 225352\nu^5 - 57176\nu^4 - 1241334\nu^3 \\ &+ 5954975\nu^2 + 37044\nu - 14903 \quad . \end{aligned} \quad (4.149)$$

Finalmente, obtemos

$$\rho^{ren} = A \frac{h(\nu)\eta^{\gamma-3}}{49152\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \quad , \quad (4.150)$$

que revela que a divergência logarítmica permanece.

• Cálculo da pressão

A expressão para a pressão é

$$P_k = A\eta^{\gamma+2}k^2 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(k\eta)H_{\nu-1}^{(2)}(k\eta) - \frac{1}{3}H_\nu^{(1)}(k\eta)H_\nu^{(2)}(k\eta) \right\} \quad . \quad (4.151)$$

Da definição (4.70) vem que,

$$P_k^n = A\eta^{\gamma+2}k^2n \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) - \frac{1}{3}H_\nu^{(1)}(y)H_\nu^{(2)}(y) \right\} \quad , \quad (4.152)$$

onde, como antes, $y = nk\eta$. Assim,

$$P_k^0 = A \lim_{y \rightarrow \infty} \eta^{\gamma+1}k y \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) - \frac{1}{3}H_\nu^{(1)}(y)H_\nu^{(2)}(y) \right\} \quad , \quad (4.153)$$

$$\begin{aligned} P_k^1 &= A \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{\eta^{\gamma-1}y^3}{6k} \left\{ (2\nu-1) \left[3H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) + H_\nu^{(1)}(y)H_\nu^{(2)}(y) \right] \right. \\ &- \left. 4y \left[H_\nu^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) + H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_\nu^{(2)}(y) \right] \right\} \quad , \end{aligned} \quad (4.154)$$

$$\begin{aligned} P_k^2 &= A \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\eta^{\gamma-3}y^5}{12k^3} \left\{ (12\nu^2-3)H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) \right. \\ &+ (-4\nu^2+8\nu-3)H_\nu^{(1)}(y)H_\nu^{(2)}(y) \\ &+ y(-4\nu-10) \left[H_\nu^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) + H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_\nu^{(2)}(y) \right] \\ &- \left. 8y^2 \left[H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) - H_\nu^{(1)}(y)H_\nu^{(2)}(y) \right] \right\} \quad . \end{aligned} \quad (4.155)$$

Usando (4.74) e (4.75) obtemos,

$$H_{\nu-1}^{(1)}(y)H_{\nu-1}^{(2)}(y) - \frac{1}{3}H_{\nu}^{(1)}(y)H_{\nu}^{(2)}(y) = \frac{2}{\pi y} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{4\nu^2 - 12\nu + 5}{12y^2} + \frac{16\nu^4 - 96\nu^3 + 104\nu^2 + 24\nu - 27}{64y^4} \right\} , \quad (4.156)$$

que conduz a

$$P_k^0 = \frac{4}{3\pi}\eta^{\gamma+1}k \quad . \quad (4.157)$$

Da mesma maneira, obtemos

$$P_k^1 = A \frac{4\nu^2 - 12\nu + 5}{6\pi k} \eta^{\gamma-1} \quad , \quad (4.158)$$

$$P_k^2 = A \frac{g(\nu)}{73728\pi k^3} \eta^{\gamma-3} \quad , \quad (4.159)$$

onde

$$g(\nu) = 256\nu^{10} - 512\nu^9 - 3456\nu^8 + 12672\nu^7 + 239168\nu^6 - 642912\nu^5 - 278328\nu^4 - 67762\nu^3 - 246453\nu^2 - 150032\nu + 29838 \quad . \quad (4.160)$$

De (4.151), temos no limite ultravioleta,

$$P_k(k \rightarrow \infty) = A \frac{4}{3\pi} \eta^{\gamma+1} k + \frac{4\nu^2 - 12\nu + 5}{6\pi k} \eta^{\gamma-1} + \frac{16\nu^4 - 96\nu^3 + 104\nu^2 + 24\nu - 27}{32\pi k^3} \eta^{\gamma-3} \quad . \quad (4.161)$$

Consequentemente,

$$P^{ren} = P_k - P_k^0 - P_k^1 - \frac{1}{2}P_k^2 = A \frac{l(\nu)}{147456\pi k^3} \eta^{\gamma-3} \quad , \quad (4.162)$$

onde

$$l(\nu) = -256\nu^{10} + 512\nu^9 + 3456\nu^8 - 12672\nu^7 - 239168\nu^6 + 642912\nu^5 - 204600\nu^4 + 235256\nu^3 + 725685\nu^2 + 260624\nu - 154254 \quad . \quad (4.163)$$

A pressão regularizada toma a forma,

$$p^{ren} = A \frac{l(\nu)}{31474456\pi} \eta^{\gamma-3} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \quad , \quad (4.164)$$

que também mostra que a divergência logarítmica não foi eliminada..

4.2.5 Eliminação das divergências

A presença da divergência logarítmica nas expressões originais para a energia e a pressão, aparece como o aspecto geral do problema de produção de partículas em cosmologia. Veja por exemplo [1]. Um aspecto importante que tem a ver com a divergência logarítmica é que o método de regularização usado parece ineficiente no sentido que ele não elimina a divergência logarítmica no limite ultravioleta, mas também traz a divergência logarítmica no limite infravermelho. Assim, propomos um esquema alternativo para eliminar essas divergências.

O procedimento proposto é o seguinte. Antes de tudo, reescrevemos as expressões para a energia e a pressão como

$$\rho = A\eta^{\gamma-3} \int_0^\infty x^4 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(x) H_{\nu-1}^{(2)}(x) + H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)}(x) \right\} dx \quad , \quad (4.165)$$

$$p = A\eta^{\gamma-3} \int_0^\infty x^4 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(x) H_{\nu-1}^{(2)}(x) - \frac{1}{3} H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)}(x) \right\} dx \quad , \quad (4.166)$$

onde $x = k\eta$. Esta redefinição simples é justificada se $\eta \neq 0$, isto é, a energia e a pressão são calculadas fora da singularidade. Mas o cálculo poderia ser feito perto da singularidade. Assim, obtemos

$$E_k = A\eta^{\gamma-3} x^2 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(x) H_{\nu-1}^{(2)}(x) + H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)}(x) \right\} \quad , \quad (4.167)$$

$$P_k = A\eta^{\gamma-3} x^2 \left\{ H_{\nu-1}^{(1)}(x) H_{\nu-1}^{(2)}(x) - \frac{1}{3} H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)}(x) \right\} \quad . \quad (4.168)$$

As divergências podem ser escritas como, no limite $x \rightarrow \infty$ (que corresponde a $k \rightarrow \infty$, desde que $\eta \neq 0$)

$$E_k = A\eta^{\gamma-3} \frac{2}{\pi} x \left\{ 2 + \frac{(2\nu-1)^2}{4x^2} + 3 \frac{(2\nu-3)(2\nu-1)^2(2\nu+1)}{64x^4} + \dots \right\} \quad , \quad (4.169)$$

$$P_k = A\eta^{\gamma-3} \frac{2}{\pi} x \left\{ \frac{2}{3} + \frac{4\nu^2 - 12\nu + 5}{12x^2} + \frac{(2\nu-3)(2\nu-1)(2\nu-9)(2\nu+1)}{64x^4} + \dots \right\} \quad . \quad (4.170)$$

Subtraímos as expressões divergentes para a energia e a pressão como

$$E_k^{ren} = E_k - E_k^0 - E_k^1 - E_k^{log} \quad , \quad (4.171)$$

$$P_k^{ren} = P_k - P_k^0 - E_k^1 - P_k^{log} \quad , \quad (4.172)$$

com as definições

$$E_k^{log} = A\eta^{\gamma-3} \frac{6}{\pi} \frac{(2\nu-3)(2\nu-1)^2(2\nu+1)}{64x^3} (1-e^{-\sigma x}) \quad , \quad (4.173)$$

$$P_k^{log} = A\eta^{\gamma-3} \frac{2}{\pi} \frac{(2\nu-3)(2\nu-1)(2\nu-9)(2\nu+1)}{64x^3} (1-e^{-\sigma x}) \quad , \quad (4.174)$$

onde o novo termo foi adicionado para garantir que a divergência no limite ultravioleta seja eliminada sem criar uma nova divergência no limite infravermelho. O parâmetro σ define a eficiência deste mecanismo, o resultado final deve ser independente de σ para garantir a consistência do procedimento proposto.

A energia e a pressão são agora dadas por

$$\rho^{ren} = \int_0^\infty x^2 (E_k - E_k^0 - E_k^1) dx - \int_{1/\sigma}^\infty x^2 E_k^{log} dx \quad , \quad (4.175)$$

$$p^{ren} = \int_0^\infty x^2 (P_k - P_k^0 - P_k^1) dx - \int_{1/\sigma}^\infty x^2 P_k^{log} dx \quad . \quad (4.176)$$

Essencialmente, devemos calcular uma integral do tipo

$$I = \int_{1/\sigma}^\tau \frac{1 - e^{-\sigma x}}{x} dx \quad , \quad (4.177)$$

mostrando que a divergência logarítmica pode ser eliminada no limite ultravioleta, quando $\tau \rightarrow \infty$, sendo o resultado final independente de σ . De fato, esta expressão pode ser definida como

$$I = \int_1^\tau \frac{1 - e^{-z}}{z} dz \quad , \quad (4.178)$$

onde $z = \sigma x$. O resultado é

$$I = \ln \tau - \int_1^\tau \frac{e^{-z}}{z} dz \quad . \quad (4.179)$$

O primeiro termo elimina a divergência logarítmica ultravioleta no limite $\tau \rightarrow \infty$ enquanto o segundo fica finito no mesmo limite. Além do mais, o resultado é independente de σ . Este procedimento pode ser facilmente generalizado se o cut off é introduzido como

$$I = \int_{1/\sigma^{1/n}}^\tau (1 - e^{-\sigma x^n}) \frac{dx}{x} \quad , \quad (4.180)$$

onde n é um número positivo qualquer.

Como resultado, ficamos com as seguintes expressões para a energia e a pressão:

$$\rho^{ren} = \bar{A}_1 \eta^{\gamma-3} I_1 = \bar{A}_1 \eta^{\frac{-12(1+\alpha)}{1+3\alpha}} I_1 \quad , \quad (4.181)$$

$$p^{ren} = \bar{A}_2 \eta^{\gamma-3} I_2 = \bar{A}_2 \eta^{\frac{-12(1+\alpha)}{1+3\alpha}} I_2 \quad , \quad (4.182)$$

onde \bar{A}_1 e \bar{A}_2 são constantes e I_1 e I_2 são as integrais finitas que resultam do procedimento de regularização.

Note que, desde que o escalar de Ricci pode ser escrito como

$$R = -6 \frac{a''}{a^3} \propto \eta^{-6 \frac{1+\alpha}{1+3\alpha}} \quad , \quad (4.183)$$

a pressão e a energia são proporcionais ao quadrado da curvatura de Ricci. Assim, quando a condição de energia nula é violada ($\alpha < -1$), a densidade de energia quântica diverge quando a singularidade se aproxima, enquanto no caso em que a condição de energia forte é violada mas a condição de energia nula é satisfeita, a densidade de energia quântica é muito grande no início e decresce com a expansão do universo.

Assim, usando o processo de regularização proposto aqui, a densidade de energia quântica deve ser suficiente para evitar o big rip, que é o contrário do que achamos na seção anterior ou em [12]. De fato, o quociente da densidade de energia regularizada com a densidade de energia do fluido de energia escura ρ_x é

$$\frac{\rho^{ren}}{\rho_x} \propto \eta^{-6 \frac{1+\alpha}{1+3\alpha}} \quad , \quad (4.184)$$

que vai para zero quando $-1/3 > \alpha > -1$ e para infinito quando $\alpha < -1$. O caso do espaço-tempo de de Sitter $\alpha = -1$, é apenas um caso limite, a energia de partículas criadas não decresce nem cresce, sendo sempre igual a zero.

Uma questão importante é: quanto tempo antes do big rip os efeitos quânticos se tornam suficientemente importantes para começar a dominar o conteúdo material? Esta é uma pergunta que se faz visando um resultado mais detalhado da evolução do universo. Mas, podemos tentar responder a esta pergunta de uma maneira semi-quantitativa. As integrais I_1 e I_2 devem ser computadas numericamente. Vemos que seus valores são $I_1 \sim I_2 \sim 0.5$. Assim, a forma geral para a densidade de energia e a pressão é dada por

$$\rho_q = \rho_{q0} \eta^{-12 \frac{1+\alpha}{1+3\alpha}} \quad , \quad (4.185)$$

onde ρ_{q0} é a densidade de energia quântica hoje. Por outro lado, a densidade de energia do fluido fantômico é dada por $\rho_f = \rho_{f0} \eta^{-6 \frac{1+\alpha}{1+3\alpha}}$. Portanto, seu quociente é dado por

$$\frac{\rho_q}{\rho_f} = \frac{\rho_{q0}}{\rho_{f0}} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{-6 \frac{1+\alpha}{1+3\alpha}} \quad , \quad (4.186)$$

onde η_0 caracteriza o tempo conforme hoje. O fator de escala é normalizado no tempo presente, a $a_0 = 1$. Vamos supor que o quociente entre as duas densidades hoje não pode

ser maior que o quociente da radiação total observada hoje com respeito a densidade total, isto é 10^{-5} . Assim, as densidades de energia quântica e do fluido fantômico se tornam comparáveis quando

$$\frac{\eta_e}{\eta_0} \sim 10^{-\frac{5}{6} \frac{1+3\alpha}{1+\alpha}} \quad . \quad (4.187)$$

Isto permite estimar de quanto o fator de escala vai decrescer de hoje até o tempo da igualdade. Normalizando o fator de escala hoje à unidade, e o reescrevendo em termos do tempo cósmico,

$$a = \left(\frac{t + t_s}{t_0 + t_s} \right)^{\frac{2}{3(1+\alpha)}} \quad . \quad (4.188)$$

onde t_0 é o tempo cósmico atual, t_s é o tempo singular, que ocorre a $t = -t_s$ (lembrando que para um universo preenchido por um fluido fantômico $-\infty < t < t_s$). Usando as estimativas feitas antigamente vemos que a igualdade das energias ocorre a

$$t_e \sim 10^{-\frac{5}{2}}(t_0 + t_s) - t_s, \quad (4.189)$$

onde t_e é o tempo de igualdade das energias. Assim, a densidade de energia quântica começa a dominar a fração da idade atual do universo antes da singularidade e é suficiente para evitar o big rip.

4.2.6 Verificação da consistência do procedimento

Nossos resultados foram obtidos usando o método de decomposição de n -wave para regularizar o tensor momento energia. Com a aplicação usual desse método, aparece uma novidade: o tratamento proposto para a divergência logarítmica no limite ultravioleta. O resultado obtido, que implica que a densidade de energia quântica se comporta como o quadrado do escalar de Ricci, e conseqüentemente crescendo quando a singularidade se aproxima, pode ser comparado com aqueles obtidos com outros métodos.

Não fizemos aqui a renormalização completa. Mas, podemos usar alguns resultados conhecidos na literatura para confirmar a consistência de nosso resultado, particularmente o caso de campo escalar sem massa e minimamente acoplado, a energia quântica se torna dominante quando o big rip é aproximado. O método tradicional para renormalizar o tensor momento energia efetivo é o procedimento de separação de pontos, onde as divergências são subtraídas através da função de Green como mostramos no terceiro capítulo dessa tese. Uma aplicação ao caso de um campo massivo e acoplado no espaço-tempo de de Sitter foi feita em [23]. A equação que resulta de uma tal configuração é dada por

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \xi R \phi = -m^2 \phi \quad . \quad (4.190)$$

onde ξ é a constante de acoplamento. Na referência [23] esta equação é particularizada para o caso do universo de de Sitter onde $a = a_0/\eta$, η sendo o tempo conforme. Neste caso, a equação (4.190) se reduz a

$$\phi'' - 2\frac{\phi'}{\eta} + \left\{ k^2 + \left[\frac{m^2 a_0^2}{\eta^2} + 12 \frac{\xi}{\eta^2} \right] \right\} \phi = 0 \quad . \quad (4.191)$$

Vamos agora considerar o campo escalar minimamente acoplado, cuja equação é

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad . \quad (4.192)$$

Se agora o espaço de base é preenchido por um fluido barotrópico que satisfaz a equação de estado $p = \alpha\rho$, o fator de escala se comporta como $a = a_0\eta^{2/(1+3\alpha)}$, e a equação (4.192) toma a forma

$$\phi'' + \frac{4}{1+3\alpha} \frac{\phi'}{\eta} + \left\{ k^2 + m^2 a_0^2 \eta^{4/(1+3\alpha)} \right\} \phi = 0 \quad . \quad (4.193)$$

Fazendo a transformação

$$\phi = \eta^{-3\frac{1+\alpha}{1+3\alpha}} \chi \quad , \quad (4.194)$$

a equação (4.193) torna-se

$$\chi'' - 2\frac{\chi'}{\eta} + \left\{ k^2 + \left[m^2 a_0^2 \eta^{4/(1+3\alpha)} + 18 \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+3\alpha)^2} \frac{1}{\eta^2} \right] \right\} \chi = 0 \quad . \quad (4.195)$$

As equações (4.191) e (4.195) coincidem se $m = 0$ e

$$\xi = \frac{3}{2} \frac{(1+\alpha)\alpha}{(1+3\alpha)^2} \quad . \quad (4.196)$$

Assim, o campo escalar sem massa e não minimamente acoplado no espaço de de Sitter é equivalente ao problema do campo escalar sem massa minimamente acoplado num universo em expansão. Assim, os resultados da referência [23] devem ser usados para nosso caso impondo na equação (3.15) daquele trabalho, $m = 0$ e o valor de ξ achado acima. Isto implica

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \frac{g_{\mu\nu}}{64\pi^2} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{2160} \right\} R^2 \quad , \quad (4.197)$$

com ξ dado por (4.196).

Particularmente, usando esta aproximação, obtemos

$$\rho_{ren} \propto R^2 \quad , \quad (4.198)$$

como foi obtido usando o método de decomposição de n -wave.

Todavia, o resultado obtido em [23] não contém as derivadas do escalar de Ricci R porque no espaço-tempo de de Sitter R é constante. A análise geral da renormalização do tensor momento energia para um campo escalar sem massa e minimamente acoplado no espaço-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker foi feita em [21, 24], e bem detalhada no terceiro capítulo desta tese. A comparação com nosso caso particular deve ser feita com muito cuidado porque nestas análises foi necessário considerar também a divergência infravermelha, que é ausente no cenário fantômico. Descartando o termo logarítmico associado com a divergência infravermelha e principalmente no limite de massa nula, como sugerido para investigar os resultados das referências [21, 24] para o caso do espaço-tempo de de Sitter e comparando com os resultados de [23] foi obtido (veja o capítulo 3 desta tese),

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = & -\frac{{}^{(1)}H_{\mu\nu}}{1152\pi^2} \left[\psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) \right] \\ & + \frac{1}{69120\pi^2} \left(-168R_{;\mu\nu} + 288\Box R g_{\mu\nu} + 24R_{\mu\sigma}R_{\nu}^{\sigma} \right. \\ & \left. -12R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - 64RR_{\mu\nu} + 63R^2g_{\mu\nu} \right) - \frac{Rg_{\mu\nu}}{192\pi^2 C\eta^2} . \end{aligned} \quad (4.199)$$

Particularizando para o universo de FLRW, a densidade de energia renormalizada se comporta como

$$\rho_{\text{ren}} \propto \eta^{\frac{-12(1+\alpha)}{1+3\alpha}} \quad (4.200)$$

que está em completo acordo com os resultados que obtivemos.

Tivemos discussões com Bates e Anderson [35] em que foi colocado que é necessário a presença de termos logarítmicos nas expressões para estar em acordo com [1]. Esta é uma consequência de partir desde o início com uma massa não nula. A razão por ter assumido a massa nula deste o início nesta tese é que no caso fantômico, não há a divergência infravermelha, que em geral é evitada com o uso da massa no caso de renormalização completa. Mas a diferença de partir com uma massa é que no processo, se faz uma reescalonagem da massa para eliminar a quantidade com coeficiente proporcional a ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ (veja capítulo 3). Com isto, a parte que depende da massa desaparece e só um parâmetro arbitrário introduzido pela reescalonagem permanece. Este termo que sobra após eliminação da divergência é proporcional a ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ com um coeficiente com termo logarítmico. Contudo, nosso resultado não deixa de ser válido já que partimos com uma hipótese de massa nula desde o início e principalmente após a renormalização, a densidade de energia e a pressão obedecem à lei de conservação e melhor, a densidade de energia quântica é proporcional ao quadrado da curvatura.

Capítulo 5

Efeitos de produção de partícula quântica perto da singularidade repentina

5.1 Introdução

Na referência [7], foi mostrado que o universo relativístico clássico de Friedmann permite em tempo finito o acontecimento da singularidade repentina. Notamos aqui que a condição de energia forte continua a ser mantida. Esta singularidade é semelhante à singularidade de tipo *IV* em que as divergências só aparecem nas derivadas de altas ordens do parâmetro de Hubble [36]. Muitos estudos que generalizaram estes resultados para diferentes teorias de gravidade e cosmologias [8], classificam outros tipos de singularidades futuras (que já apresentamos no segundo capítulo desta tese) que podem ocorrer durante a expansão do universo [9], e exploram os vínculos observacionais sobre as futuras ocorrências possíveis no universo [10].

Neste capítulo, vamos estender esses estudos considerando as implicações quânticas na singularidade repentina. Especialmente, queremos comparar a densidade de produção de partículas quânticas com a densidade de energia de base clássica quando a singularidade repentina se aproxima. Isto permitirá saber se os efeitos quânticos associados à produção de partículas podem ser efetivos para impedir ou não o acontecimento da singularidade repentina. Vamos usar várias considerações no cálculo da densidade de energia. Num primeiro tempo, vamos fazer um esboço numérico, depois, levar em consideração os problemas trans-Planckianos e num segundo tempo usaremos uma técnica de regularização mais conservativa

e compararemos com os resultados bem conhecidos na literatura [1, 11].

5.2 Modelo de singularidade repentina

Vamos usar o exemplo simples do universo isotrópico espacialmente plano de Friedmann com singularidade repentina, apresentado em [7]. As equações cosmológicas para o fator de escala são, com $k = 0$, obtidas a partir de (2.50), (2.51) e (2.53) são:

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho, \quad (5.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (5.2)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (5.3)$$

Usamos as seguintes soluções para o fator de escala, sua primeira e segunda derivadas:

$$a = \left(\frac{t}{t_{s0}}\right)^q (a_{s0} - 1) + 1 - \left(1 - \frac{t}{t_{s0}}\right)^n, \quad (5.4)$$

$$\dot{a} = \frac{q}{t_{s0}} \left(\frac{t}{t_{s0}}\right)^{q-1} (a_{s0} - 1) + \frac{n}{t_{s0}} \left(1 - \frac{t}{t_{s0}}\right)^{n-1}, \quad (5.5)$$

$$\ddot{a} = \frac{q(q-1)}{t_{s0}^2} \left(\frac{t}{t_{s0}}\right)^{q-2} (a_{s0} - 1) - \frac{n(n-1)}{t_{s0}^2} \left(1 - \frac{t}{t_{s0}}\right)^{n-2}. \quad (5.6)$$

Impondo $0 < q \leq 1$ e $1 < n < 2$, vemos que $a \rightarrow a_{s0}$, $\dot{a} \rightarrow \frac{q(a_{s0}-1)}{t_{s0}}$ e $\ddot{a} \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow t_{s0}$. Assim, o fator de escala e sua primeira derivada ficam finitos, implicando que a densidade também fica finita, enquanto a segunda derivada do fator de escala, e consequentemente a pressão, divergem. Assumimos a condição $0 < q < 1$ para ter um universo em desaceleração quando $t \rightarrow 0$, mas essa condição poderia ser abandonada sem afetar nossos resultados. Não existe solução exata para a equação de Klein Gordon para a forma (5.4) do fator de escala. Daí, consideramos as simplificações. Dividimos a evolução do universo em duas fases: uma que caracteriza a fase primordial $t \rightarrow 0$, e outra que caracteriza a fase singular $t \rightarrow t_{s0}$. Para a fase primordial, vamos usar a fase radiativa do modelo padrão (i.e. $q = 1/2$), para a qual é possível resolver a equação do Klein-Gordon e portanto a solução contém naturalmente a estrutura do estado de vácuo dos campos quânticos.

Vamos considerar os comportamentos assintóticos da solução (5.4):

- Fase primordial radiativa ($t \rightarrow 0$):

$$a = \frac{a_{s0} - 1}{t_{s0}^{1/2}} t^{1/2}, \quad (5.7)$$

$$\dot{a} = \frac{(a_{s0} - 1)}{2 t_{s0}^{1/2}} t^{-1/2}. \quad (5.8)$$

- Fase singular ($t \rightarrow t_{s0}$):

$$a = a_{s0}, \quad (5.9)$$

$$\dot{a} = \frac{(a_{s0} - 1)}{2 t_{s0}}. \quad (5.10)$$

Vamos introduzir o tempo conforme, η , definido por $ad\eta = dt$ e deixar o fator de escala durante a fase de radiação na forma $a = r t^{\frac{1}{2}}$, onde a constante $r = \frac{a_{s0}-1}{\sqrt{t_{s0}}}$, portanto $\eta = \frac{2}{r} t^{\frac{1}{2}}$. Isto conduz finalmente às seguintes expressões:

- Fase primordial radiativa ($\eta \rightarrow 0$):

$$a = a_0 \eta, \quad (5.11)$$

$$a' = a_0. \quad (5.12)$$

- Fase singular ($\eta \rightarrow \eta_{s0}$):

$$a = a_{s0}, \quad (5.13)$$

$$a' = \frac{a_0 a_{s0}}{2\sqrt{t_{s0}}}. \quad (5.14)$$

Nas expressões acima, $a_0 = \frac{r^2}{2}$ e $' = d/d\eta$. A transição para a fase singular ocorre agora no tempo conforme $\eta = \eta_0$ e obtemos

$$a_p(\eta_0) = a_s(\eta_0), \quad a'_p(\eta_0) = a'_s(\eta_0), \quad (5.15)$$

onde os índices p e s denotam as *fases primordial* e *singular*, respectivamente. Isto implica que

$$\eta_0 = \frac{a_{s0}}{a_0} = \frac{2a_{s0}t_{s0}}{(a_{s0} - 1)^2}. \quad (5.16)$$

As condições enumeradas implicam

$$a_0 = \frac{a_{s0}}{\eta_0}, \quad a_{s0} = 2\sqrt{t_{s0}}, \quad (5.17)$$

e as soluções para as duas fases são:

1. Fase primordial radiativa:

$$a = a_{s0} \frac{\eta}{\eta_0}, \quad a' = a_0 = \frac{a_{s0}}{\eta_0}; \quad (5.18)$$

2. Fase singular:

$$a = a_{s0}, \quad a' = a_0 = \frac{a_{s0}}{\eta_0}. \quad (5.19)$$

Para construir o modelo simplificado que descreva melhor o fenômeno de singularidade repentina, vamos considerar η_0 , η_s e a_{s0} parâmetros livres e independentes.

5.3 A equação de Klein-Gordon

No universo espacialmente plano de Friedmann, a equação de Klein-Gordon para o campo sem massa ϕ , é

$$\square\phi \equiv \phi'' + 2\frac{a'}{a}\phi' + k^2 c^2 \phi = 0, \quad (5.20)$$

onde introduzimos a velocidade da luz, c e se k é o número de onda da expansão de Fourier:

$$\phi(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \phi_k(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k. \quad (5.21)$$

Para simplificar, excluimos o índice de Fourier na função ϕ . Agora, escalamos por H_0^2 , onde H_0 é o parâmetro de Hubble no momento da transição, η_0 . Além disto, definimos $\bar{k} = k l_H$, onde l_H é o raio de Hubble em η_0 . Notamos também que o campo escalar tem a dimensão de (distância)^{1/2}. Agora consideramos a equação de Klein-Gordon para as duas fases definidas acima. Para simplificar, vamos desprezar as barras fazendo $\bar{k} \rightarrow k$, e $H_0\eta \rightarrow \eta$. Com essa parametrização, $\eta_0 = 1$ (desde que $H_0\eta_0 = 1$ nas antigas variáveis).

5.3.1 Fase primordial

Neste caso, $a(\eta) = a_0\eta$. Assim,

$$\phi'' + 2\frac{\phi'}{\eta} + k^2\phi = 0. \quad (5.22)$$

A solução dessa equação é

$$\phi_k(\eta) = \eta^{-1/2} \left[c_1 H_{1/2}^{(1)}(k\eta) + c_2 H_{1/2}^{(2)}(k\eta) \right], \quad (5.23)$$

onde $H_\nu^{(1,2)}(x)$ são as funções de Hankel. As funções de Hankel são definidas da seguinte maneira:

$$H_{1/2}^{(1)}(x) = J_{1/2}(x) + i N_{1/2}(x); \quad H_{1/2}^{(2)}(x) = J_{1/2}(x) - i N_{1/2}(x), \quad (5.24)$$

onde $J_\nu(x)$ e $N_\nu(x)$ são as funções usuais de Bessel e Neumann. Usando o fato que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\sin x}{x}; \quad N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\cos x}{x}, \quad (5.25)$$

a solução para o campo escalar pode ser reescrita como

$$\phi_k(\eta, \vec{x}) = \frac{i}{\eta} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left[-c_1 e^{i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} + c_2 e^{-i(k\eta + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right]. \quad (5.26)$$

Usamos

$$c_1 = i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{3}{2} l_p}, \quad c_2 = 0, \quad (5.27)$$

onde o fator $\sqrt{\frac{3}{2} l_p}$ foi escolhido devido à dimensão do campo escalar, e obtém-se o comportamento típico do estado quântico de vácuo normalizado junto com um fator do tempo:

$$\phi_k(\eta, \vec{x}) = \sqrt{\frac{1}{2k}} \frac{e^{i(k\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})}}{\eta}. \quad (5.28)$$

5.3.2 Fase singular

Nesta fase, a equação de Klein-Gordon se reduz a

$$\phi'' + 2\phi' + k^2\phi = 0. \quad (5.29)$$

As soluções são

$$\phi = A_+ e^{p_+ \eta} + A_- e^{p_- \eta}, \quad (5.30)$$

onde

$$p_{\pm} = -1 \pm i\sqrt{k^2 - 1}. \quad (5.31)$$

A solução final pode ser escrita da seguinte forma

$$\phi_k(\eta, \vec{x}) = e^{-\eta} \left[A_+ e^{i(\omega\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} + A_- e^{-i(\omega\eta + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right], \quad (5.32)$$

onde $\omega = \sqrt{k^2 - 1}$, e portanto, o campo se propaga só se $k > H_0$. Incluímos também o fator $\sqrt{\frac{3}{2} l_p}$ na definição das constantes A_{\pm} , para deixá-las sem dimensão.

5.3.3 O potencial

Um jeito adequado para estudar o comportamento dessas soluções é redefinir o campo escalar tal que

$$\phi = \frac{\lambda}{a}, \quad (5.33)$$

e a equação de Klein-Gordon toma a seguinte forma

$$\lambda'' + [k^2 - V(a)]\lambda = 0, \quad (5.34)$$

onde $V(a) = \frac{a''}{a}$. Assim, tem propagação quando $k^2 > V(a)$, e o campo decai quando $k^2 < V(a)$. Isto significa que temos um problema da mecânica quântica para a propagação de partícula na barreira de potencial. Para um universo radiativo, $a \propto \eta$, o que conduz a $V(a) = 0$ na fase primordial: todos modos propagam [37]. No caso da fase singular, a situação, em vez ao que acontece no caso primordial, é muito complicada devido ao fato que temos que avaliar a segunda derivada do fator de escala perto da singularidade. Obtemos,

$$\ddot{a} \sim -\frac{n(n-1)}{t_s^2} \left(\frac{y}{t_s}\right)^{n-2}, \quad y = t_s - t. \quad (5.35)$$

Desde que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4}, \quad (5.36)$$

vemos que o potencial nesta fase é

$$V(a) = \frac{a''}{a} = -n(n-1) \frac{a_{s0}}{t_{s0}} \left(\frac{a_{s0}}{t_{s0}} \eta\right)^{n-2} + H_0^2. \quad (5.37)$$

Isto confirma que não há nenhuma propagação para $k < H_0$.

5.4 Continuidade do campo

Usando as soluções de Klein-Gordon nas duas fases, igualamos o campo e suas derivadas a $\eta = \eta_0$. Isto resulta nas seguintes expressões:

$$\sqrt{\frac{1}{2k}} e^{ik} = e^{-1} \left\{ A_+ e^{i\omega} + A_- e^{-i\omega} \right\}, \quad (5.38)$$

$$(-1 + ik) \sqrt{\frac{1}{2k}} e^{ik} = A_+ (-1 + i\omega) e^{(i\omega-1)} - A_- (1 + i\omega) e^{-(i\omega+1)}. \quad (5.39)$$

Usando a combinação $((1+i\omega) \times (5.38) + (5.39))$, e depois $((1-i\omega) \times (5.38) + (5.39))$, obtemos:

$$A_+ = \frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{1}{2k}} e^{[i(k-\omega)+1]} (\omega + k), \quad (5.40)$$

$$A_- = \frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{1}{2k}} e^{[i(k+\omega)+1]} (\omega - k) \quad . \quad (5.41)$$

5.5 Densidade de energia de criação de partículas

A densidade de energia das partículas criadas é dada por (veja [31]),

$$\rho_s = \frac{\hbar H_0^5}{4\pi^2 c^6 a^2} \int_0^\infty dk k^2 \left\{ \phi'_k \phi'^*_k + k^2 \phi_k \phi_k^* \right\} \quad . \quad (5.42)$$

Essa expressão é obtida calculando-se o valor esperado do Hamiltoniano no vácuo para um campo escalar quantizado sem massa. Isto é completamente equivalente à derivação alternativa da densidade de energia usando os coeficientes de Bogoliubov [?, 1]. A pressão associada à criação de partículas é dada por [31]:

$$p_s = \frac{\hbar H_0^5}{4\pi^2 c^8 a^2} \int_0^\infty dk k^2 \left\{ \phi'_k \phi'^*_k - \frac{k^2}{3} \phi_k \phi_k^* \right\} . \quad (5.43)$$

Agora, usando (5.32), (5.40) e (5.41), obtemos a seguinte expressão para a energia:

$$\rho_s = \frac{3 \hbar H_0^5 l_{pl} e^y}{2 c^6 4\pi^2 a_s^2} \int_0^{k_c} dk \frac{4k}{k^2 - 1} \left\{ (2k^2 - 1)k^2 \right. \quad (5.44)$$

$$\left. - \cos[\sqrt{k^2 - 1}y] + \sqrt{k^2 - 1} \sin[\sqrt{k^2 - 1}y] \right\} , \quad (5.45)$$

onde $y = 2(1 - \eta)$. A transição ocorre a $\eta = \eta_0 = 1$ ($y = 0$). O limite máximo para a integração é dado por k_c , que é identificado com o número de onda de Planck e permite evitar a divergência ultravioleta. A razão para isto é que a equação de Klein-Gordon não deve manter sua forma simples (5.20) para as energias mais altas do que a escala de Planck, onde a gravidade quântica entra em jogo e modifica a relação de dispersão. A modificação da relação de dispersão é habitualmente tratada introduzindo um termo que decresce exponencialmente, e que conduz a uma eliminação importante na integração em região transplankiana. O uso desse procedimento consiste em parar a integração perto da frequência de Planck [38], já que a extrapolação do regime transplankiano é muito especulativa, vamos ignorar este problema transplankiano e adotar um procedimento de regularização mais conservativo [1]. Vamos voltar a esse problema depois.

Vamos escolher a escala de modo que $a_{s0} = 1$. As expressões acima podem ser escritas como

$$\rho_s = \frac{l_{pl}^3 \rho_0}{l_H^3 \pi} e^y \int_0^{k_c} dk \frac{4k}{k^2 - 1} \left\{ (2k^2 - 1)k^2 \right. \quad (5.46)$$

$$\left. - \cos[\sqrt{k^2 - 1}y] + \sqrt{k^2 - 1} \sin[\sqrt{k^2 - 1}y] \right\} , \quad (5.47)$$

onde ρ_0 é a densidade cosmológica de base no tempo de transição.

Essa integral pode ser resolvida exatamente e temos

$$\rho_s = 2 \frac{l_{pl}^3 \rho_0}{l_H^3 \pi} e^y \left\{ k_c^4 + k_c^2 + \ln[k_c^2 - 1] - 2Ci[-\sqrt{k_c^2 - 1}y] \right. \quad (5.48)$$

$$\left. + 2Chi[-y] - 2 \frac{\cos[\sqrt{k_c^2 - 1}y]}{y} + 2 \frac{\cosh y}{y} \right\} . \quad (5.49)$$

Nesta expressão, $Ci[x]$ é a função coseno integral e $Chi[x]$ é a função coseno hiperbólica integral. O comportamento geral indica que a densidade de energia das partículas criadas decresce, veja a Fig 5.1. Esta expressão é rigorosamente válida só depois da transição. A condição inicial é o número de partículas criadas durante a primeira fase (radiativa). O esboço é feito na unidade do número inicial, que é, no melhor dos casos, pequeno. A densidade de energia das partículas criadas é muito menor que a densidade de energia da base, e vai rapidamente para zero quando a singularidade repentina se aproxima. Daí, podemos concluir que os efeitos quânticos devido à produção de partículas não foram eficazes para evitar a singularidade repentina.

Se tomarmos agora o limite $k_c \rightarrow \infty$, usando a equação de Klein-Gordon na sua forma tradicional (ignorando os problemas transplackianos), vemos que existem os termos de divergência quártica, quadrática e logarítmica. Tais divergências podem ser removidas usando a regularização do tensor momento-energia. O resultado geral depende altamente da base, que no nosso caso não é trivial. Se considerássemos o cenário simplificado com a fase radiativa precedendo a fase singular, a regularização poderia ser executada na fase em que a radiação domina (que é um resultado conhecido em [1]). A existência da descontinuidade na segunda derivada não deixa a aplicação da expressão habitual simples. Mas, podemos proceder do jeito mais simples, já que na fase singular onde estamos avaliando a criação de partículas, o fator de escala se torna constante. Isto dá uma segurança ao uso da subtração dos infinitos para a densidade e a pressão [?],

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{reg} = \langle T_{\mu\nu} \rangle_0 - \langle T_{\mu\nu} \rangle_{div} \quad , \quad (5.50)$$

onde $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{reg}$ representa o tensor momento-energia regularizado, $\langle T_{\mu\nu} \rangle_0$, o tensor momento-energia usando as expressões acima, e $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{div}$ a parte divergente correspondente. As partes divergentes são representadas pelo primeiro termo na integral (5.44). A densidade de energia e a pressão são dadas por (desprezando os termos menos importantes),

$$\rho_s = \frac{1}{a^2} e^y \int_0^\infty \frac{k}{\omega^2} \left\{ (2k^2 - 1)k^2 - \cos(\omega y) + \omega \sin(\omega y) \right\} dk \quad , \quad (5.51)$$

$$p_s = \frac{1}{a^2} e^y \int_0^\infty \frac{k}{\omega^2} \left\{ (2k^2 - 1) \frac{k^2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}k^2 \right) \cos(\omega y) + \omega \sin(\omega y) \right\} dk \quad . \quad (5.52)$$

Nestas expressões, $\omega = \sqrt{k^2 - 1}$ e $y = 2(1 - \eta)$ onde η é o tempo conforme (que é proporcional ao tempo cósmico t quando a é constante). Agora, vamos considerar a lei de conservação,

$$\rho' + 3 \frac{a'}{a} (\rho + p) = 0 \quad . \quad (5.53)$$

Isto pode ser reescrito, após redefinição da variável de tempo usando o parâmetro de Hubble, em termos da derivada com respeito a y :

$$-2\dot{\rho} + 3(\rho + p) = 0 \quad . \quad (5.54)$$

É fácil ver que as expressões (5.51) e (5.52) satisfazem (5.54). É importante notar que, mesmo sendo a constante, devemos derivá-lo, já que \dot{a} (equivalentemente, a') não é zero, sendo também constante. Além disto, se escrevemos (5.51) e (5.52) como

$$\rho_s = \rho_{s1} + \rho_{s2} \quad , \quad (5.55)$$

$$p_s = p_{s1} + p_{s2} \quad , \quad (5.56)$$

onde

$$\rho_{s1} = \frac{1}{a^2} e^y \int_0^\infty \frac{k}{\omega^2} (2k^2 - 1) k^2 dk \quad , \quad (5.57)$$

$$\rho_{s2} = \frac{1}{a^2} e^y \int_0^\infty \frac{k}{\omega^2} \left\{ -\cos(\omega y) + \omega \sin(\omega y) \right\} dk \quad , \quad (5.58)$$

$$p_{s1} = \frac{1}{a^2} e^y \int_0^\infty \frac{k}{3\omega^2} (2k^2 - 1) k^2 dk \quad , \quad (5.59)$$

$$p_{s2} = \frac{1}{a^2} e^y \int_0^\infty \frac{k}{\omega^2} \left\{ -\left(1 - \frac{2}{3}k^2\right) \cos(\omega y) + \omega \sin(\omega y) \right\} dk \quad . \quad (5.60)$$

Daí os pares (ρ_{s1}, p_{s2}) e (ρ_{s2}, p_{s1}) satisfazem (5.54) separadamente.

Agora, podemos facilmente mostrar que ρ_{s2} é finito. De fato, ele pode ser escrito como

$$\rho_{s2} = -\frac{1}{a^2} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{k dk}{\omega^2} \left[e^y \cos(\omega y) \right] \quad . \quad (5.61)$$

A integral pode ser feita, conduzindo a

$$\rho_{s2} = \frac{1}{a^2} \frac{d}{dy} \left(e^y \text{Chi}(-y) \right) \quad , \quad (5.62)$$

onde usamos o fato que a função coseno é par. Essa função é finita, exceto em $y = 1$, o efeito de transição da segunda derivada no modelo simplificado não aparece na integração numérica. Agora podemos obter a pressão p_{s2} . O resultado é

$$p_{s2} = \frac{1}{3a^2} \left\{ \text{Chi}(-y) + \frac{\cosh y}{y} - 2 \frac{\cosh y}{y^2} + 2 \frac{\sinh y}{y} \right\} \quad , \quad (5.63)$$

que vai para zero assintoticamente.

Assim, após subtração das partes divergentes ρ_{s1} e p_{s1} , obtemos expressões finitas para a energia e para a pressão, que têm o limite do espaço-tempo ordinário de Minkowski e que satisfazem a lei de conservação covariante do tensor momento energia.

O processo de regularização usado aqui é baseado na técnica de n -wave [40, 41] (veja também [42]) que usamos no capítulo 4. Aqui, sua aplicação é muito simples devido à divisão natural entre as partes divergentes e finitas da densidade de energia e a pressão, que separadamente satisfazem a lei de conservação.

A expressão final é dada por

$$\rho_s = \frac{p_s}{3} = 4 \frac{l_{pl}^3}{l_H^3} \frac{\rho_0}{\pi} \left\{ e^y \left[Chi[-y] + \frac{\cosh y}{y} \right] \right\}. \quad (5.64)$$

É muito importante acentuar que o limite de Minkowski, obtido impondo $\rho_0 \rightarrow 0$, conduz a um resultado nulo, o mesmo que obteríamos se o valor esperado fosse calculado no espaço-tempo de Minkowski e subtraindo as divergências. Ao mesmo tempo, o tensor momento-energia resultante é conservado. Isto confirma a consistência do procedimento usado acima. Note que, neste caso, a equação de estado não coincide com a equação de estado clássica para o campo escalar sem massa no modelo de FRW, que é do fluido de matéria rígida ($p = \rho$). Em geral, a quantização do sistema clássico deve mudar a equação de estado clássico. A forma geral da densidade de energia regularizada de partículas criadas é exibida na Fig 5.1, mostrando o comportamento decrescente como antes. É possível obter no mínimo, alguma informação a respeito dos efeitos devidos ao uso do modelo simplificado, onde a evolução do universo é descrito por duas fases, integrando numericamente a equação exata de Klein-Gordon usando (5.4) e (5.5). Os resultados refletem o problema da divergência ultravioleta. Mas, podemos parar a integração na alta frequência e comparar o resultado com a expressão (5.48), ou mesmo com (5.64). A condição inicial é dada pelo mesmo estado de vácuo que usamos acima. Os resultados da base e os resultados para a densidade de energia de partículas criadas são comparados na Fig 5.1, onde também temos inserido as expressões da energia de partículas criadas usando o corte da frequência de Planck (5.48) e o tensor momento-energia regularizado (5.64), conforme a computação numérica. A expressão regularizada (5.64) concorda com a integração numérica só na forma geral; isto é natural desde que a contribuição divergente foi extraída para obter (5.64). Ainda, estes resultados estão em acordo no sentido que eles prevêm o decrescimento da energia de partículas criadas quando o universo se aproxima da singularidade repentina. Este é o comportamento que geralmente permanece se os parâmetros livres, como a_{s0} e H_0 , são variados. O resultado numérico que se encaixa na expressão simplificada é melhor quando a duração da fase singular é menor comparado com a da fase radiativa precedente. Além disto, a integração numérica revela o efeito de transição (que não foi mostrada nos gráficos): na (5.48) e (5.64) tem divergência na energia a $y = 0$, que não aparece na computação numérica. Isto é um

efeito da descontinuidade na segunda derivada, que fica claro quando a equação de Klein-Gordon é escrita como em (5.34).

Para obter mais detalhes sobre o resultado descritos acima, podemos usar a expressão de produção de partículas exibida na referência [1]. A densidade de energia pode ser escrita como

$$\rho_s = \frac{\hbar c}{a} \int_0^\infty N_k k d^3 k, \quad (5.65)$$

onde N_k é a densidade de produção de partículas. Comparando com (5.46), e retendo só o termo relevante depois da regularização, a densidade de produção de partículas é então dada por

$$N_k \propto \frac{e^y}{k^2(k^2 - 1)} \left\{ (-\cos[\sqrt{k^2 - 1}y] + \sqrt{k^2 - 1} \sin[\sqrt{k^2 - 1}y]) \right\}. \quad (5.66)$$

Dessa expressão podemos reparar que a densidade de produção de partículas decresce quando a singularidade repentina se aproxima.

Podemos tentar comparar nossos resultados com os obtidos em [11]. Entretanto, o contexto é muito diferente do que foi feito nesta tese já que os autores de [11] consideraram um conjunto de campos quânticos conformes (enquanto nós consideramos somente um campo escalar não conforme e sem massa) gerando a anomalia de traço usando a aproximação da ação efetiva onde a gravidade é modificada requerendo que os campos quânticos sejam renormalizados sobre a métrica de base. Eles acharam que a singularidade repentina pode ser modificada pelos efeitos quânticos. No nosso cálculo, estes efeitos quânticos são inoperantes. A razão possível para essas diferenças é a expressão usada em [11] para a anomalia conforme: ela foi derivada perto da singularidade inicial de grande curvatura ($a \rightarrow 0$, $\dot{a}/a \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 0$). Desde que o fator de escala se torna constante perto da singularidade repentina (a, \dot{a}, ρ são todos finitos mas $\ddot{a} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t_s$), é possível que a expressão usada para anomalia conforme, não fique constante em relação à sua forma num cenário com um fator de escala dependente do tempo perto da singularidade inicial onde a densidade diverge. Os efeitos quânticos em [11] têm seu domínio natural de aplicabilidade no começo do universo, perto do big-bang mais do que no tempo da singularidade repentina onde as geodésicas se encontram. A singularidade repentina tem vários comportamentos que a distinguem da singularidade inicial (big-bang): a divergência aparece só na segunda derivada do fator de escala (ou, equivalentemente, na pressão) e o ritmo de expansão e a densidade ficam finitos. Particularmente, se os efeitos de produção de partículas de outros tipos de campos (como campos escalares massivo ou conforme, ou igualmente campo quântico vetorial e espinorial) produzem uma tal contra reação forte em que uma singularidade repentina se torna singularidade big-rip, daí, é difícil descrever isto

de modo consistente se baseando numa base fixa porque a expansão da base é fortemente perturbada.

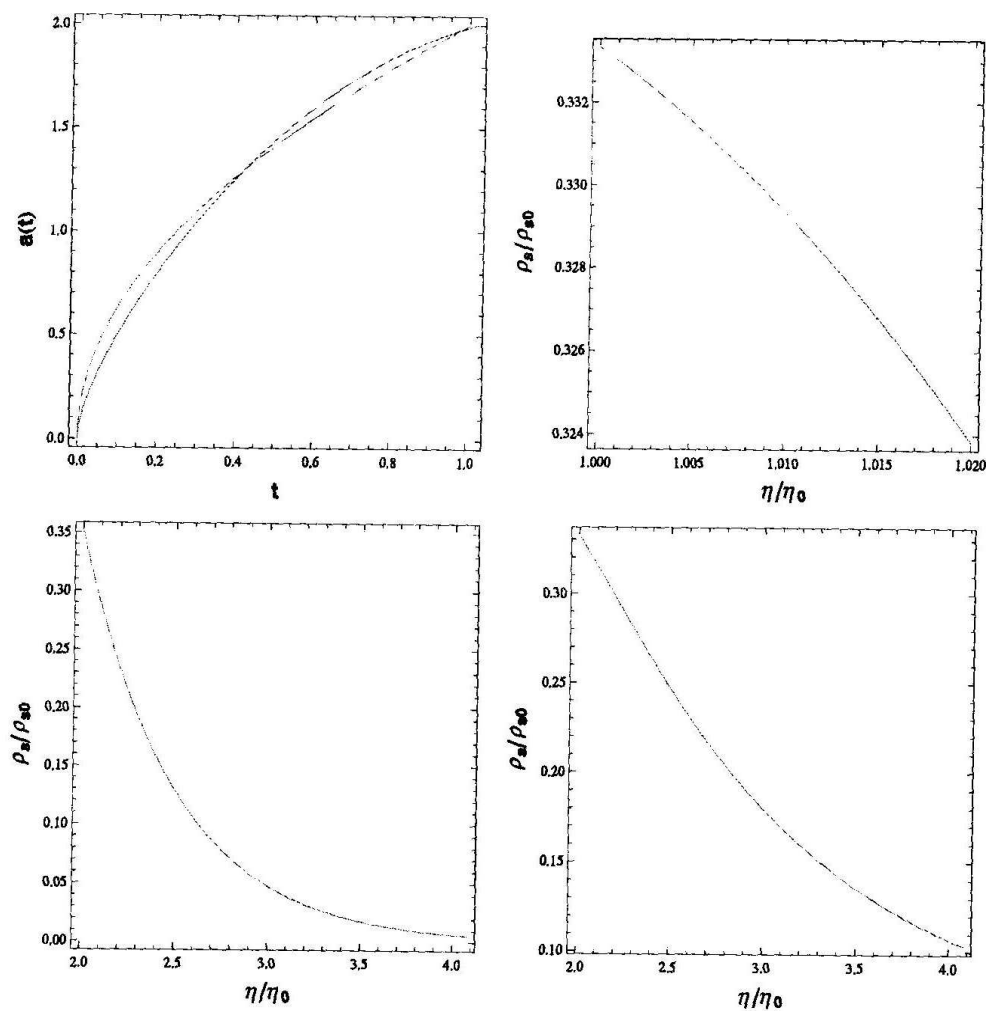


Figura 5.1: A figura do primeiro quadrado à esquerda mostra a evolução do fator de escala da base, modelo simplificado (curva tracejada) e o modelo exato (curva contínua). No primeiro quadrado à direita, o comportamento da energia de partículas criadas usando os resultados numéricos. No segundo quadrado à esquerda, o comportamento da densidade de energia de partículas criadas com o uso do corte e no segundo quadrado à direita, o comportamento da mesma densidade de energia com as expressões regularizadas.

Capítulo 6

Conclusão geral

Avaliamos o ritmo de criação de partículas escalares sem massa num universo preenchido por um fluido com a equação de estado $p = \alpha\rho$. Uma expressão analítica foi obtida em termos das funções de Hankel. Desde que não consideramos o cenário cosmológico completo, com a sequência das diferentes fases, com a fase inflacionária inicial (como no modelo cosmológico padrão), os cálculos feitos fazem sentido, somente quando a condição de energia forte é violada, isto é $\alpha < -1/3$. Para tal caso, existe um estado de vácuo natural a partir do qual a produção de partículas pode ser determinada. Todavia, estendemos formalmente o cálculo para qualquer valor de α . Vimos que para esses cenários de "energia escura", o ritmo de produção de partículas diverge quando $t \rightarrow \infty$, isto é, no futuro infinito.

Focamos nossa atenção no caso do cenário fantômico. A razão é que um universo preenchido por um fluido fantômico deve apresentar uma singularidade num tempo finito no futuro, o big rip. Neste caso, vimos que a densidade de energia associada às partículas criadas se torna estritamente zero quando o universo se aproxima do big rip. Assim a contra reação devida à criação de partículas não é efetiva no caso do campo escalar sem massa e minimamente acoplado.

Essa conclusão é devido ao fato de que introduzimos um corte na integral da energia na escala do Planck. Isto parece natural porque pode ser esperado que a equação de Klein-Gordon habitual deve ser modificada fora da escala do Planck, e portanto é necessário introduzir um termo exponencial decrescente com o número de onda k , suprimindo a contribuição devido às escalas transplanckianas [43].

Num segundo momento, em vez de usar o corte, regularizamos o tensor momento energia usando a técnica n -wave descrita no terceiro capítulo desta tese e também em [13]. Primeiramente, mostramos que o método conduz ao resultado esperado para a criação de

partículas nos casos radiativo e do universo de de Sitter, mas com uma ausência da polarização do vácuo. A expressão da energia diverge, mas após a regularização, ela se torna zero.

Quando aplicamos o mesmo método ao caso do modelo geral de energia escura, uma dificuldade aparece devido à divergência logarítmica no limite ultravioleta. Propomos um método para eliminar essa divergência, introduzindo um novo corte. O resultado final é independente do cut-off. Além do mais, as expressões finais para a energia e a pressão são covariantemente conservadas.

O resultado para a energia difere daquele obtido no caso da primeira parte do quarto capítulo ou também em [12], já que no segundo caso a densidade de energia diverge quando o big rip é aproximado, e se torna a componente dominante. Assim, seguindo esse resultado, os efeitos quânticos podem ser efetivos para evitar o big rip. De fato, a energia renormalizada fica proporcional ao quadrado do escala de Ricci. Outra consequência é que nos modelos de energia escura não fantômicos, a energia regularizada vai assintoticamente para zero. O caso de de Sitter é o caso fronteira entre os dois diferentes comportamentos. Um ponto importante tem a ver com a unicidade do resultado. Uma comparação deve ser feita com os métodos de renormalização completa, por exemplo aquele que descrevemos no terceiro capítulo ou também em [44]. O procedimento que usamos poderia ser modificado adicionando os termos de correção logarítmicos nas expressões finais da energia e da pressão, sem mudar nossa conclusão [35]. Isto seria necessário se a massa não fosse assumida igual a zero na expressão do tensor momento energia desde o início. A razão por ter assumido a massa nula deste o início nesta tese é que no caso fantômico, não há a divergência infravermelha, que em geral é evitada com o uso da massa no caso de renormalização completa. Quando a massa é assumida diferente de zero desde o início, uma reescalonagem com a introdução de um parâmetro μ como mostramos no terceiro capítulo, no limite de massa nula após renormalização, mostraria a presença de termo logarítmico na densidade de energia e da pressão.

Porém, a ausência de qualquer parâmetro de corte usado para regularizar a energia, e também o fato de que a energia e a pressão regularizadas obedecem à lei de conservação covariante, indicam que nosso resultado é inteiramente consistente.

Uma outra singularidade que foi o assunto do quinto capítulo é a singularidade repentina. Consideramos a produção de partículas que pode ocorrer quando um universo isotrópico e homogêneo se aproxima da singularidade repentina onde o fator de escala e sua primeira derivada, e conseqüentemente a densidade de energia ficam finitos enquanto a segunda derivada do fator de escala e então a pressão divergem num tempo finito. Se a

produção de partículas fosse significativo, tal efeito quântico poderia modificar ou remover a singularidade repentina num tempo finito. Tratamos o modelo simples em que o universo inicial dominado pela radiação que depois desenvolve uma singularidade repentina num tempo finito. Calculamos a produção de partículas quando o universo se aproxima da singularidade repentina e mostramos que seus efeitos ficam desprezíveis com respeito à energia e à pressão clássica da base na fase singular.

Note que os assuntos desta tese continuam abertos. Usamos para todos os cálculos um campo escalar sem massa e minimamente acoplado. Poderíamos também estudar os efeitos da anomalia conforme no caso da singularidade repentina [45]. É muito importante levarmos em consideração os efeitos da viscosidade, já que a criação de partículas pode se explicar também introduzindo na expressão do tensor momento energia um termo de viscosidade dependendo do tempo, que pode ser simplesmente a constante cosmológica variável. Isto pode ser investigado para analisar os efeitos quânticos devido à criação de partículas perto das singularidades em nossos futuros trabalhos.

O problema que tivemos, assumindo a massa igual a zero na equação de Klein-Gordon e também do tensor momento-energia, pode ser revisto no caso de de Sitter deixando a massa não nula desde o início e usando a mesma técnica de regularização (n -wave).

Referências Bibliográficas

- [1] N.D.Birrel and P.C.W Davies, *Quantum Fields in Curved Space*,(Cambridge University Press,Cambridge,1982)
- [2] T.Jacobson, *Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and the Hawking Effect*, gr-qc/0308048.
- [3] A. A. Grib, S. G. Mamayev, and V. M. Mostepanenko, **Vacuum Quantum Effects in Strong Fields**, Friedmann Lab. Publ., St. Petersburg (1994).
- [4] R. Caldwell, Phys. Lett. **B545**, 23 (2002).
- [5] J-Ph. Uzan, *The Acceleration of the Universe and the Physics Behind It*, astro-ph/0605313
- [6] D. N. Spergel et al, Astrophys. J. Suppl. **170**, 377 (2007).
- [7] J. D. Barrow, Class. Quantum Gravity **21**, L79 (2004).
- [8] Y. Shtanov and V. Sahni, Class, Quantum Grav. **19**, L101, (2002); J. D. Barrow and C. G. Tsagas, Class. Quantum Grav. **22**, 1563 (2005); M. P. Dabrowski, Phys. Rev. D **71**, 103505 (2005); S. Nojiri, and S. D. Odintsov, arXiv:hep-th/0412030v1.
- [9] S. Nojiri, S.D. Odintsov and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **71**, 063004 (2005); C. Cattoen and M. Visser, Class. Quantum Grav. **22**, 4913 (2005), M. Dabrowski, Phys. Lett. B **625**, 184 (2005); H. Stefancic, Phys. Rev. D **71**, 084024 (2005).
- [10] M. P. Dabrowski, T. Denkiewicz and M. A. Hendry, arXiv:gr-qc/0704.1383.
- [11] S. Nojiri, S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **595**, 1 (2004)
- [12] A.B. Batista, J.C. Fabris and S. Houndjo, Grav.&Cosmol.**14**, 140 (2008).

- [13] Ya. B. Zel'dovich and A. A. Starobinsky, *Sov. Phys. JETP* **34**, 1159 (1972); M. Bordag, J. Lindig and V. M. Mostepanenko, *Class. Quantum Grav.* **15**, 581 (1998); Yu. V. Pavlov, *Theor. Math. Phys.* **138**, 383 (2004).
- [14] J. C. Fabris, *Introduction à la cosmologie*, arXiv: gr-qc/0412017v1
- [15] S. K. Lamoreaux, *Phys. Rev. D* **78**, 5 (1997).
- [16] H. B. G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **58**, 793 (1948).
- [17] L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562 (1968).
- [18] J. S. Dowker and R. Critchley, *Phys. Rev.* **D13**, 3224 (1976).
- [19] I. L. Buchbinder, S. D. Odintov and I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, (IOP Publishing-Bristol, 1992).
- [20] S. M. Christensen, *Phys. Rev.* **14**, 2490(1976).
- [21] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *J. Phys.* **A11**, 1315(1978).
- [22] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, (University of Newcastle upon Tyne, England).
- [23] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *Proc. R. Soc. Lond.* **A360**, 117(1978).
- [24] P. C. W. Davies, S. A. Fulling, S. M. Christensen and T. S. Bunch, *Ann. of Phys.* **109**, 108(1977).
- [25] D. Anselmi, *Phys. Rev D* **48**, 5751 (1993).
- [26] L. H. Ford, in *On The Nature of Dark Energy*, Ed. by Ph. Brax, J. Martin, and J-Ph. Uzan (Frontier Group, Paris, 2002).
- [27] P. H. Frampton and T. Takahashi, *Phys. Lett. B* **557**, 135 (2003)
- [28] L. P. Grishchuk, *Phys. Rev. D* **48**, 3513 (1993).
- [29] L. P. Grishchuk, *Class. Quantum Grav.* **10**, 2449 (1993)
- [30] C. Pathinayake and L. H. Ford, *Phys. Rev. D* **37** 2099 (1988)
- [31] A. Guanguì, J Martin, and M Sakellariadou, *Phys. Rev. D* **66**, 083502 (2002)

- [32] K. Kirsten and J. Garriga, Phys. Rev. **D48**, 567(1993).
- [33] Ph. Spindel, private communication.
- [34] Ilya L Shapiro, Class. Quantum Grav. **25** 103001 (2008)
- [35] J. Bates and P. R. Anderson, comunicação privada.
- [36] J. D. Barrow, Class. Quantum Grav. **21**, 5619 (2004).
- [37] L. Grishchuk, Sov. Phys. JETP **40**, 409 (1975).
- [38] J. D. Barrow, A. B. Batista, J. C. Fabris and S. Houndjo, Phys. Rev. **D78**, 123508 (2008).
- [39] V. N. Lukash and A. A. Starobinskii, Sov. Phys. JETP **39**, 742 (1974).
- [40] Flavio. G. Alvarenga, A.B. Batista, J.C. Fabris and S. Houndjo, Grav.&Cosmol.**16**, 105 (2010).
- [41] Y. B. Zeldovich and A. A. Starobinskii, Sov. Phys. JETP **34**, 1159 (1972), Y. B. Zeldovich, in *Confrontation of Cosmological Theories with Observation*, ed. M. S. Longair Reidel, Dordrecht (1974), pp.329-333; B.L. Hu, Phys. Lett. B **108**, 19 (1982).
- [42] Yu. V. Pavlov, Theor. Math. Phys. **138**, 383 (2004).
- [43] M. Lemoine, J. Martin and J-Ph. Uzan, Phys. Rev. **D67**, 103520 (2003).
- [44] Yu. V. Pavlov, Teor. Mat. Fiz. **126**, 92 (2001).
- [45] S. Houndjo, hep-th/arXiv:1008.0664v1