



UFES – UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CT – CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

JOÃO PAULO BARBOSA

**MODELAGEM DA CONFIABILIDADE DE EQUIPAMENTOS
POR COMBINAÇÕES OU EXTENSÕES DE DISTRIBUIÇÕES
DE WEIBULL**

VITÓRIA

2008

JOÃO PAULO BARBOSA

**MODELAGEM DA CONFIABILIDADE DE EQUIPAMENTOS
POR COMBINAÇÕES OU EXTENSÕES DE DISTRIBUIÇÕES
DE WEIBULL**

Dissertação apresentada com parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica pela da Universidade Federal do Espírito Santo, área de concentração: Confiabilidade.

Orientador: Prof. Dr. Cherlio Scandian

VITÓRIA
2008

JOÃO PAULO BARBOSA

**MODELAGEM DA CONFIABILIDADE DE EQUIPAMENTOS
POR COMBINAÇÕES OU EXTENSÕES DE DISTRIBUIÇÕES
DE WEIBULL**

Dissertação apresentada com parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica pela da Universidade Federal do Espírito Santo, área de concentração: Confiabilidade.

Entregue em 31 de outubro de 2008.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Cherlio Scandian - Orientador
UFES – Universidade Federal do Espírito Santo**

**Prof. Dr. Geraldo Rossini Sisquini – Membro interno
UFES – Universidade Federal do Espírito Santo**

**Prof. Dr. Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo – Membro externo
UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro**

VITÓRIA

2008

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

B238m Barbosa, João Paulo, 1981-
 Modelagem da confiabilidade de equipamentos por
 combinações ou extensões de distribuições de weibull / João
 Paulo Barbosa. – 2008.
 124 f. : il.

 Orientador: Cherlio Scandian.
 Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Espírito
 Santo, Centro Tecnológico.

 1. Confiabilidade (Engenharia). 2. Análise matemática. 3.
 Combinações (Matemática). 4. Distribuição de Weibull. 5.
 Manutenção. 6. Curva da banheira. I. Scandian, Cherlio. II.
 Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III.
 Título.

CDU: 621

**Dedico este trabalho aos meus Pais,
Amado Rodrigues Barbosa e
Maria Madalena Barbosa
e à minha irmã Cristina, que
estiveram sempre presentes,
incentivando-me na
realização deste sonho.**

- iv -
AGRADECIMENTOS

A DEUS, Supremo Criador, que tornou possível a realização deste trabalho, minha máxima homenagem e o mais profundo reconhecimento.

À minha mãe, Maria Madalena Barbosa e ao meu Pai, Amado Rodrigues Barbosa, responsável pela minha alfabetização e pela minha formação acadêmica. Por todo o apoio e incentivo, minha gratidão.

Ao fomento a pesquisa através de bolsa de iniciação científica e de mestrado oferecidas pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) durante a minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Cherlio Scandian pela infatigável e impecável orientação, pela sua amizade e serenidade ao passar seus conhecimentos e experiências, visto que, foram de grande valia para o meu crescimento profissional e pessoal.

Ao Prof. Dr. Geraldo Rossini Sisquini, que em seus lampejos de iluminação, identificou com muita perspicácia a origem de diversas dificuldades, propondo soluções para o problema, e, assim, evitando horas de investigação adicionais.

Aos Professores Marcelo Macedo, Carlos Loeffler, Fernando Menandro, João Donatelli e todos os outros professores pela compreensão e incentivo durante todo o curso.

A todos os colegas, hoje amigos, do Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, dentre eles, Andre Menegaz, Bruno Martins, Leandro Bitti, Leonardo Araujo, Leonardo Tutanko, Marcos Versiani, Raphael Pio, Samuel Berger e Yordan Madureira, e tantos outros que mesmo não percebendo, contribuíram positivamente na conclusão deste trabalho.

- V -
RESUMO

Neste trabalho vamos modelar a confiabilidade do processo de falha de equipamentos reparáveis cuja taxa de falha apresenta um comportamento do tipo banheira. Vamos propor dois modelos.

O primeiro modelo estudado é o da combinação de duas distribuições de Weibull para representar a função de taxa de falhas, uma representa a fase de amaciamento e a outra a fase de desgaste. Vários métodos são propostos para serem aplicados numa fase preliminar com o objetivo de substituir uma solução gráfica, com a finalidade de gerar uma solução que adequadamente descreva inicialmente um conjunto de dados de falha. A aplicação do método de máxima verossimilhança em conjunto com um procedimento de otimização, tendo como pontos de partida os parâmetros obtidos nesta fase preliminar, são usados para otimização dos parâmetros do modelo proposto. Exemplos numéricos são desenvolvidos para ilustrar o procedimento de estimação.

No segundo modelo utilizamos uma nova extensão da Weibull, chamada deste modo porque tem uma distribuição de Weibull como um caso especial e assintótico. Uma solução é obtida pelo ajuste de uma reta pelo método dos mínimos quadrados num conjunto de dados de falha, para a determinação dos parâmetros necessários para uma modelagem inicial. Antes da aplicação do método dos mínimos quadrados, este conjunto de dados sofre um tratamento matemático. Novamente, vamos aplicar o método de máxima verossimilhança em conjunto com um procedimento de otimização, tendo como pontos de partida os parâmetros obtidos nesta fase preliminar, para serem usados na determinação dos parâmetros do modelo proposto. Exemplos numéricos são desenvolvidos para ilustrar o procedimento de estimação.

Os resultados obtidos nas duas modelagens foram satisfatórios, tanto na parte visual ilustrada pelos gráficos, como na análise matemática. Os parâmetros que foram obtidos pelas modelagens proposta neste trabalho serão úteis para uma possível tomada de decisão sobre o tempo ótimo de manutenção de cada equipamento.

ABSTRACT

In this work we are going to model the reliability of the failure process of repairable equipments whose failure rate presents a bathtub type behavior. We are going to propose two models.

The first studied model is that of the combination of two Weibull distributions to represent the failure rate function, one represents the softening phase and to another the wear phase. Several methods are considered to be applied in a preliminary phase with the purpose of substituting a graphical solution, aiming to generate a solution that effectively describes initially a data set of failures. The application of maximum likelihood method in connection with the optimization procedure, having as starting points the parameters obtained in this preliminary phase, are used for the optimization of the parameters used in the considered model. Numerical examples are developed to illustrate the estimation procedure.

In the second model we use a new extension of the Weibull function, called in this way because it has a distribution of Weibull as a special and asymptotic case. A solution is obtained by the adjustment of a straight line using the least squares method in a set of failure data for the determination of the necessary parameters for an initial modeling. Before the application of the least squares method, this data set goes through a mathematical treatment. Again, we are going to apply the method of the maximum likelihood in connection with the optimization procedure, taking as starting points the parameters obtained in this preliminary phase, to be used in the determination of the parameters of the considered model. Numerical examples are developed to illustrate the estimation procedure.

The results obtained in the two modeling processes were satisfactory, both in the visual part illustrated by the graphs, and in the mathematical analysis. The parameters that were obtained by the modeling processes proposed in this work are going to be useful for a possible taking decision on the best time of maintenance for each equipment.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Idéias relacionadas ao conceito de confiabilidade	5
Figura 2.2 – Evolução das técnicas de manutenção ao longo do tempo	7
Figura 2.3 – Evolução histórica da manutenção e dos processos industriais.....	8
Figura 2.4 – Classificação da Manutenção	10
Figura 2.5 – Gráfico mostrando a curva básica de confiabilidade (linha cheia).....	15
Figura 2.6 – Etapas para a execução de uma análise de MCC completa.....	21
Figura 2.7 – Detalhamento de cada uma das etapas de uma MCC completa.....	22
Figura 2.8 - Curva da Banheira	22
Figura 2.9 – Curva da banheira característica para software	25
Figura 2.10 – Curva da banheira característica para componentes eletônicos	25
Figura 2.11 – Curva da banheira características para componentes mecânicos ..	26
Figura 2.12 – Função da Taxa de falha da distribuição normal.....	30
Figura 2.13 – Função de taxa de Falha da Distribuição Lognormal.....	31
Figura 2.14 – Função da taxa de Falha da distribuição exponencial.....	32
Figura 2.15 – taxa de falha da Distr. de Weibull com β variando de 1 a 3,5.....	34
Figura 4.1 – Linhas de procura do método de Hooke e Jeeves	69
Figura 4.2 – Possíveis resultados de um passo do algorítmico simplex de nelder-Mead de $n=2$	76
Figura 4.3 – Fluxograma de Interações, do Método Nelder-Mead.....	77
Figura 4.4 – Triângulo formado pelos pontos H, L e N.....	80
Figura 5.1 - Taxa de Falha do Modelo de Superposição de PLP's.....	86
Figura 5.2 – Comportamento da curva C e suas assíntotas L1 e L2 para os parâmetros $\beta_1 = 0,5$; $\beta_2 = 3$; $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 20$	92
Figura 5.3 - Estimação da Intensidade de Falha (Coetzee, 1996).....	95
Figura 5.4 - Resultados Obtidos na Modelagem.....	97
Figura 5.5 – Estimação da Intensidade de Falha (Kumar, 1989).....	98
Figura 5.6 - Resultados Obtidos na Modelagem.....	99
Figura 6.1 – Mostra a função da taxa de falha com $\lambda = 2$, $\alpha = 100$ e β mudando de 0,4 até 1,2.....	103

Figura 6.2 – Transformação típica de Weibull: $\alpha = 100$, $\beta = 0,6$ e $\lambda = 2$	108
Figura 6.3 – Resultados Obtidos na Modelagem.....	114
Figura 7.1 – O comportamento geral de taxa de falha versus tempo ou confiabilidade.	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Descrição das falhas presentes nas fases da curva da banheira.....	24
Tabela 3.1 – Dados de falhas não agrupados.....	49
Tabela 3.2 – Dados de falhas agrupados	49
Tabela 3.3 – Frequências teórica de 1000 observações aleatórias.....	63
Tabela 3.4 – Frequência observada de uma amostra incompleta	64
Tabela 3.5 – Resultados calculados pelo método apresentado no item 3.4.2.....	64
Tabela 3.6 – Resultados calculados pelo método apresentado no item 3.4.1	64
Tabela 3.7 – Resultados calculados pelo método da Máxima verossimilhança	65
Tabela 3.8 – Frequência observada de outra amostra incompleta	65
Tabela 3.9 – Resultados calculados pelo método apresentado no item 3.4.2.....	65
Tabela 4.1 – Resultados obtidos pelos métodos de hooke e Jeeves e de Nelder-Mead.....	81
Tabela 5.1 - Dados de um Caminhão Basculante de 180 toneladas (Coetzee, 1996).	95
Tabela 5.2 – Cálculos efetuados para determinação da função taxa de falha. ($\Delta_k = t_{i+1} - t_i = 2750$ horas)	96
Tabela 5.3 - Dados da máquina que carrega – arrasta – descarrega “LHD-A”(Kumar, 1989).....	98
Tabela 5.4 – Cálculos efetuados para determinação da função taxa de falha. ($\Delta_k = t_{i+1} - t_i = 290$ horas)	99
Tabela 6.1 – Conjunto de dados de falhas de 18 aparelhos (Wang, 2000)	112
Tabela 6.2 – Transformações realizadas nos dados de falhas de Wang (2000).	113

LISTA DE SÍMBOLOS

$H(t)$ - Taxa de falha acumulada;

HPP - Processo de Poisson homogêneo;

LLP - Processo do Log-Linear;

NHPP - Processo de Poisson Não Homogêneos;

PLP – Processo da Superposição;

TPM - Manutenção Produtiva Total - (Total Productive Maintenance);

MTBF – Time Between Failure;

TMEF – Tempo Médio de Falhas;

MTTR – Mean Time to Repair;

TMPR – Tempo Médio para Reparo;

MCC – Manutenção Centrada na Confiabilidade;

RCM – Reliability Centred Maintenance;

$R(t)$ – Confiabilidade;

$F(t)$ – Distribuição Acumulada de Falha;

$h(t)$ – Taxa de Falha;

$f(t)$ – Função da Densidade Probabilidade de Falha;

ξ - Parâmetro de escala;

μ - Média;

σ – Variância;

α - Parâmetro de escala;

β - Parâmetro de forma;

t_0 – Parâmetro de localização;

θ – Parâmetro de localização;

t – Tempo;

Δt – Intervalo de tempo;

$\bar{h}(t)$ - Taxa de Falha Média;

MTTF – Tempo Médio até Falha;

$M(t)$ – Manutenibilidade;

pdr – Função Densidade probabilidade de reparo

$g(t)$ – Estatística do reparo;

$\mu(t)$ – Taxa de reparo;

$\bar{\mu}(t)$ - Taxa de reparo média;

$A(t)$ – Disponibilidade Instantânea;

A ou A_∞ - Disponibilidade Assintótica;

$\bar{A}(t)$ - Disponibilidade Média;

\bar{A} ou \bar{A}_∞ - Disponibilidade Média Assintótica;

$U(t)$ – Indisponibilidade Instantânea;

U ou U_∞ - Indisponibilidade Assintótica;

$\bar{U}(t)$ - Indisponibilidade Média;

\bar{U} ou \bar{U}_∞ - Indisponibilidade Média Assintótica;

n – número de itens;

N – número de falhas;

a_1 e a_0 - Parâmetro de uma reta;

d – desvio (erro);

m – número de dados da amostra;

M – número da amostra;

ψ - função de suporte;

S – função de sobrevivência;

N – contagem de falhas;

F^{t-} - Filtragem;

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Introdução.....	1
1.2 Objetivo.....	2
1.3 Organização do Trabalho	3
CAPÍTULO 2 - CONFIABILIDADE E TAXA DE FALHAS.....	4
2.1 Introdução.....	4
2.2 Manutenção Industrial.....	5
2.3 Classificação da Manutenção	9
2.4 Sistemas Não reparáveis.....	14
2.5 Sistemas Reparáveis	15
2.6 Conceitos Associado à Confiabilidade.....	15
2.7 Manutenção Centrada na Confiabilidade.....	19
2.8 Curva da Banheira.....	22
2.9 Definições Matemáticas Básicas	26
2.10 Distribuições Aplicadas à Confiabilidade	28
2.11 Estimação de Máxima Verossimilhança	35
2.12 Indicadores de Manutenção.....	37
CAPÍTULO 3 - ANÁLISE ESTATÍSTICA DE FALHA	47
3.1 Introdução.....	47
3.2 Métodos Não Paramétricos	48
3.3 Métodos Paramétricos	53
3.4 Métodos de Estimação de Parâmetros da População original de Dados Incompletos.....	58
CAPÍTULO 4 - MÉTODOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DE OTIMIZAÇÃO	66
4.1 Introdução.....	66
4.2 Método de Pesquisa Direta.....	66
4.3 Método de Hooke e Jeeves	68
4.4 Método de Nelder-Mead	72
4.5 Exemplo de Aplicação	81

CAPÍTULO 5 - MODELAGEM DA CURVA DA BANHEIRA BASEADO NA SOMA DE DUAS	
DISTRIBUIÇÕES DE WEIBULL	82
5.1 Introdução	82
5.2 Modelo de Superposição de PLP's	83
5.3 Estimação da Máxima Verossimilhança	87
5.4 Geração dos Pontos de Partida	89
5.5 Resultados	93
5.6 Conclusão	100
CAPÍTULO 6 - MODELAGEM DA CURVA DA BANHEIRA UTILIZANDO UMA NOVA EXTENSÃO	
DE WEIBULL	101
6.1 Introdução	101
6.2 Uma Nova Extensão de Weibull	102
6.3 Estimação dos Parâmetros dos Modelos	106
6.4 Aplicação do Modelo na Tomada de Decisão	110
6.5 Exemplos de Aplicação	112
6.6 Conclusão	114
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	116
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:	121

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

A operação das instalações industriais, de forma que se possa garantir padrões mínimos de segurança, maior eficiência de equipamentos, máxima disponibilidade para operação e custos de manutenção adequados, requer a utilização de técnicas estruturadas e objetivas que possam atender a todas essas questões.

Numa época em que as questões voltadas à segurança e à proteção ambiental afligem toda a sociedade, aliadas à necessidade da lucratividade e produtividade, tornam-se necessária a utilização de todos os meios técnicos disponíveis para a sobrevivência das empresas, com maior eficiência nas operações, sem aumentar o risco em geral envolvido.

Muitas empresas também já perceberam que a manutenção voltada para o reparo precisa evoluir para a manutenção voltada para a confiabilidade. Para tanto é necessário mudar o paradigma de que o pessoal de manutenção precisa antes de mais nada de experiência prática. Para efetuar essa mudança, o pessoal de manutenção precisa dos conceitos teóricos de Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade como base para melhor aplicar sua experiência prática. Para a aplicação da Manutenção Centrada na Confiabilidade é preciso um conhecimento sólido das técnicas de confiabilidade, que no passado eram aplicadas essencialmente pelo pessoal de projeto.

1.2 OBJETIVO

O objetivo é estudar a modelagem do processo de falha de equipamentos reparáveis, principalmente os grandes e complexos que apresentam vários componentes, cuja taxa de falha apresenta um comportamento do tipo banheira. Iremos fazer a modelagem da confiabilidade por combinações ou extensões de Distribuições de Weibull de maneira que descreva o melhor comportamento da curva da banheira utilizando o menor numero de variáveis possíveis. Este comportamento ocorre mais freqüentemente em equipamentos grandes e complexos tendo muitos modos de falhas.

As equações da função de taxa de falha com comportamento da curva da banheira desenvolvidas neste trabalho serão úteis na tomada de decisão baseada na confiabilidade, no levantamentos dos indicadores de manutenção dos equipamentos para fins de organização, planejamento e otimização da manutenção industrial.

Iremos utilizar três bancos de dados encontrados em artigos, os dados de um Caminhão Basculante de 180 toneladas da referencia (Coetzee, 1996), os dados da Máquina que carrega – arrasta – descarrega “LHD-A” da referencia (Kumar, 1989) e vamos usar o conjunto de dados não agrupados da referência Wang (2000) que há 18 aparelhos sob teste e todos falham.

A primeira modelagem da curva da banheira é baseado na soma de duas distribuições de weibull, utilizando o modelo de superposição, aonde iremos somar a curva de amaciamento utilizando os dados iniciais e depois a curva de desgaste aonde iremos utilizar os dados finais, neste modelo teremos quatro parâmetros.

A outra modelagem da curva da banheira é utilizando uma nova extensão de Weibull, com a função da nova extensão de Weibull temos uma única equação aonde teremos três parâmetros.

Tendo os parâmetros definidos utilizaremos os métodos de otimização para ajustar a curva, logo diminuindo o erro residual.

Com esses parâmetros definidos podemos tomar decisões sobre o tempo de manutenção para cada equipamento.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão teórica sobre confiabilidade com definições e descrições de várias propriedades que são úteis na organização e planejamento da manutenção.

No Capítulo 3 são descritas as ferramentas que são utilizadas na análise estatística dos dados de falhas para serem usadas nas modelagens que serão propostas neste trabalho, com justificativas para sua escolha.

No capítulo 4 são apresentados dois métodos de procura direta (Hooke e Jeeves e Nelder-Mead) da teoria de otimização. Estes métodos de otimização são desenvolvidos com o objetivo de se encontrar um melhor ajuste das curvas.

Nos três capítulos a seguir estão os modelos propostos. No capítulo 5 será proposta a Modelagem da Curva da Banheira baseado na Soma de Duas Distribuições de Weibull, enquanto que no capítulo 6 será desenvolvido a Modelagem da Curva da Banheira utilizando uma Nova Extensão de Weibull.

Por fim, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões e algumas sugestões para a continuação deste trabalho de pesquisa.

CAPÍTULO 2

CONFIABILIDADE E TAXA DE FALHAS

2.1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, os estudos relativos à confiabilidade vêm recebendo a atenção de especialistas em diversos ramos de empresas, particularmente ligados à área da manutenção. Muitos são os trabalhos desenvolvidos e em desenvolvimento, visando à aplicação da chamada manutenção previsiva, ou controle preditivo de manutenção, que tem por objetivo executar a manutenção preventiva no ponto exato em que eles interferem na confiabilidade do sistema.

Entendemos por controle preditivo de manutenção a determinação do ponto ótimo para execução da manutenção preventiva num equipamento, ou seja, o ponto a partir do qual a probabilidade do equipamento falhar assume valores indesejáveis.

A determinação desse ponto traz como resultado índices ideais de prevenção de falhas, tanto sob o aspecto técnico quanto econômico, uma vez que a intervenção no equipamento não é feita durante o período em que ainda está em condições de prestar serviço, nem o período em que suas características operativas estão comprometidas.

Quando falamos de confiabilidade de equipamentos na forma quantitativa, podemos dizer do equipamento novo com as documentações técnicas fornecidas pelo fabricante, baseado nos indicadores de taxas de falhas, e na observação operacional ao longo do tempo, com todo o histórico das falhas e suas manutenções corretivas. As simulações feitas em laboratório utilizando métodos de ensaios de vida útil acelerada ou dos registros de campo das manutenções realizadas, buscam estabelecer quando e até como poderão ocorrer as falhas dos equipamentos.

Desta forma, o usuário ao adquirir um equipamento, espera que o mesmo funcione adequadamente por um bom período de tempo sem sofrer qualquer tipo de falha. Caso esta expectativa não se verifique na prática, o usuário se sentirá frustrado com o equipamento e procurará um equipamento alternativo e com certeza

um outro fabricante na sua próxima aquisição. Portanto, a noção de *confiabilidade* de um equipamento, associada à ausência de falhas durante a utilização do mesmo está presente na relação fabricante-usuário desde tempos muito remotos. A Fig. 2.1 dá uma noção das idéias relacionadas ao conceito de confiabilidade.

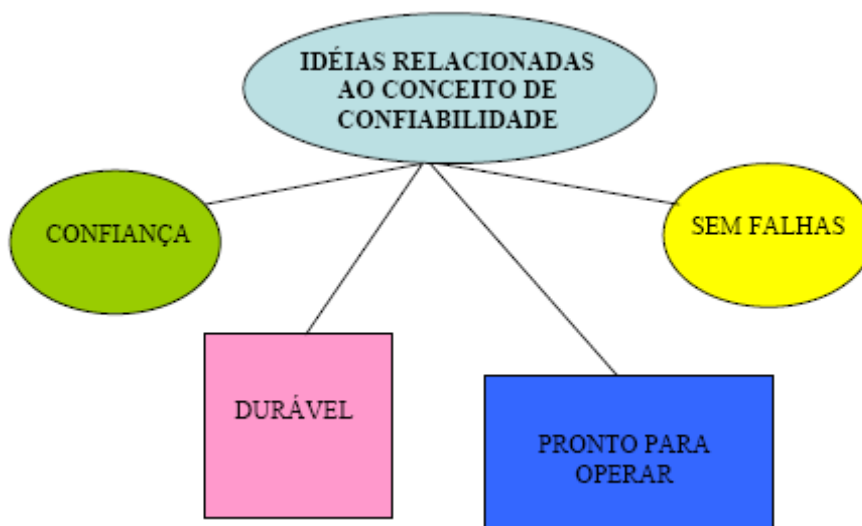


Fig. 2.1 - Idéias relacionadas ao conceito de confiabilidade.

2.2 MANUTENÇÃO INDUSTRIAL

A evolução da manutenção está ligada à própria evolução humana, principalmente à luta para se criar e conservar objetos que permitam um domínio cada vez maior da natureza. Mesmo com o constante avanço tecnológico, tanto os produtos como os equipamentos de produção têm uma duração limitada, daí a importância da manutenção para manter ou recuperar sua funcionalidade.

A manutenção envolve atividades ligadas à correção, prevenção ou predição de falhas. O dicionário da língua portuguesa define genericamente o termo manutenção como *as medidas necessárias para a conservação ou a permanência de alguma coisa ou de alguma situação*. A Associação Brasileira de Normas Técnicas define formalmente a Manutenção como:

A combinação de todas as ações técnicas e administrativas, incluindo as de supervisão, destinadas a manter ou recolocar um item em um estado no qual possa desempenhar uma função requerida. (NBR 5462, 1994).

De forma mais abrangente, o termo manutenção engloba os conceitos de prevenção (manter) e correção (restabelecer). Sendo assim, o estado específico ou serviço determinado implica na predeterminação do objetivo esperado, com quantificação dos níveis característicos. Monchy (1989) comenta ainda sobre a lacuna deixada por grande parte das definições, ao não fazerem referência ao aspecto econômico envolvido na realização de uma manutenção eficiente, que deveria assegurar que suas atividades conduzissem a um custo global otimizado. Segundo Moubray (2000), *manter* significa continuar em um estado existente, ou seja, a manutenção é o conjunto de técnicas de atuação para que os ativos físicos (equipamentos, sistemas, instalações) cumpram ou preservem sua função ou funções específicas.

Como pode ser observado, existem muitas definições e conceitos apresentados para o termo *manutenção*. Na maioria dos casos são enfocados os aspectos de prevenção do estado de funcionamento e a recuperação, no caso da ocorrência de falhas. Além disso, constata-se que, mais recentemente, os aspectos de custos e a dimensão humana das equipes de manutenção têm sido crescentemente considerados nessas definições.

Têm aparecido muitos melhoramentos nas técnicas de manutenção nos últimos 25 anos, mas ainda existe muita manutenção importante baseada em horas e trabalho do equipamento (inspeções, revisões, substituições). Nos últimos anos, houve uma mudança marcante de manutenções baseadas em horas de operação para manutenção baseada nas condições do equipamento. Quando isto é feito, os períodos de operação aumentam de 100 a 500 por cento. Mas as indústrias não estão totalmente atuando assim. Ainda há um longo caminho a percorrer como mostra a Fig. 2.2.

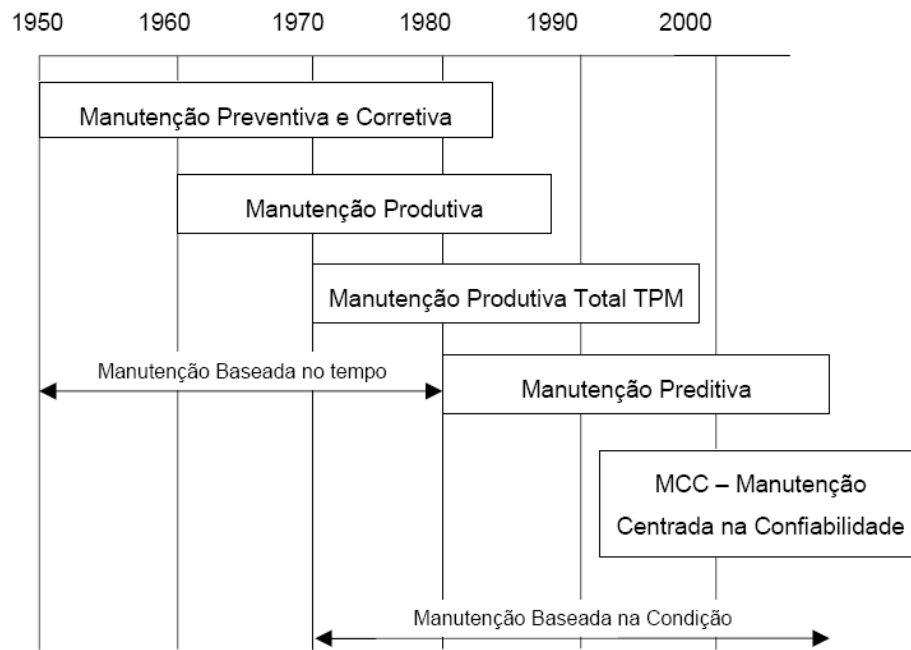


Figura 2.2 - Evolução das técnicas de manutenção ao longo do tempo.

Fonte: Lafraia, J. R. B (2008) Manual de Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade.

A maioria dos programas de manutenção estão 180° defasados do que deveriam ser. A ênfase fazer manutenção é melhor do que não fazer manutenção. O homem vai fazer o que lhe é pedido: trabalhar. Ele faz alguma coisa que não precisa ser feita. Ele introduz problemas no equipamento. A confiabilidade cai neste caso devido ao fator homem na interface homem/máquina, que é o problema, não o fator máquina. O equipamento é substancialmente mais confiável do que os profissionais de manutenção o permitem demonstrar. A ênfase deve ser na solução de problemas e não em *trabalhar*. A evolução histórica da manutenção e dos processos industriais é mostrada na Fig. 2.3, que divide as diversas gerações da função manutenção em função das respostas que a mesma tem que fornecer (Moubray, 2000).

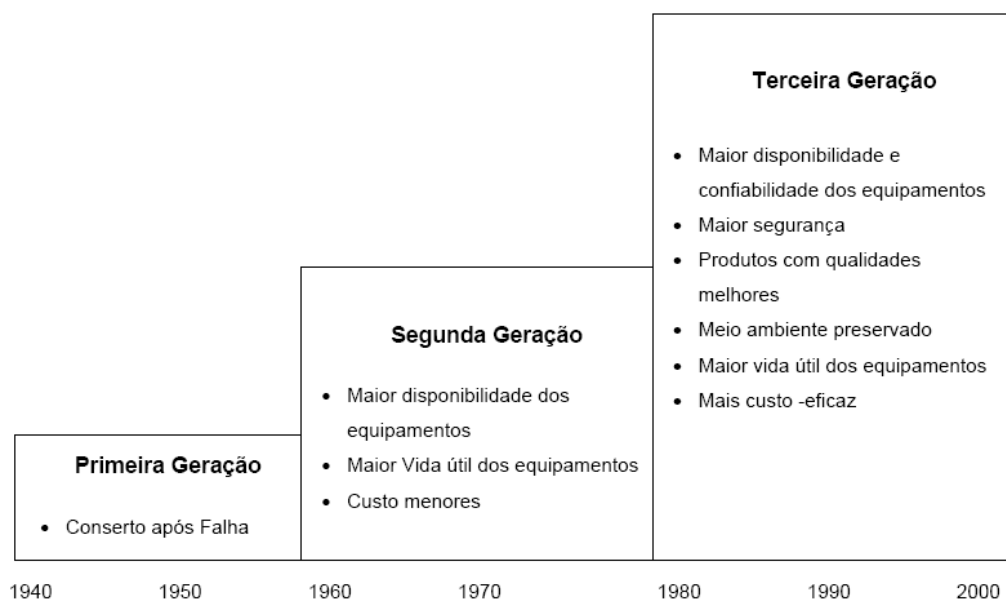


Figura 2.3 - Evolução histórica da manutenção e dos processos industriais.

Fonte: J. Moubray (1997), Reliability-Centered Maintenance

Em linhas gerais, pode-se afirmar que toda evolução tecnológica dos equipamentos, processos e técnicas de manutenção, a necessidade de controles cada vez mais eficientes e de ferramentas de apoio à decisão, o desenvolvimento de estudos relativos ao desgaste e controle das falhas e suas conseqüências, a dependência de equipes treinadas e motivadas para enfrentar estes desafios, o desenvolvimento de novas técnicas e, conseqüentemente, os custos de manutenção em termos absolutos e proporcionalmente as despesas globais, transformaram as áreas de manutenção em um segmento estratégico para o sucesso empresarial.

Cumpre-se considerar também que a falha pode ocorrer, a despeito dos esforços no sentido de prevenir sua ocorrência, ou seja, em tese, se não existissem falhas não haveria manutenção. Sendo assim, a tecnologia de manutenção deve ser desenvolvida para identificar as possíveis falhas, além de gerenciar suas conseqüências, com técnicas economicamente adequadas a serem aplicadas em cada situação específica.

Falha: Término da condição (habilidade) ou a impossibilidade de um item para desempenhar sua função requerida. O aparecimento de uma falha leva o item, invariavelmente, ao estado indisponível, por atuação automática da proteção ou por desligamento da unidade em caráter de emergência;

Defeito: Alteração ou imperfeição do estado de uma instalação/equipamento, não a ponto de causar o término da habilidade em desempenhar a sua função requerida, já que a instalação/equipamento pode operar com restrições;

Manutenção Perfeita: É quando no ato da manutenção, além de reparar componentes do equipamento falhos ou com iminência de falha, atua-se também nos com potencialidade de falha. Nestes componentes são realizados testes assegurando o seu funcionamento nas melhores condições, ou providenciando sua substituição. Observa-se neste caso que, ao final da manutenção o equipamento estará tão bom quanto novo (*as good as new*), em termos de probabilidade de falha;

Reparo Mínimo: Restaura o equipamento ao estado em que se encontrava imediatamente antes da falha (*as bad as old*). Neste caso, atua-se somente na parte defeituosa do equipamento, substituindo-a ou restaurando a sua condição original de funcionamento. O reparo ou substituição do componente defeituoso é realizado conforme critérios técnicos rigorosos, mas por se tratar de uma intervenção pontual, não introduz melhoria no equipamento, que continua com a mesma probabilidade de falha que tinha antes de falhar.

2.3 CLASSIFICAÇÃO DA MANUTENÇÃO

As atividades de manutenção têm sido classificadas de acordo com a forma de programação e o objetivo das tarefas executadas. A Figura 2.4 ilustra como estas classes são subdivididas sobre os seguintes aspectos relacionados abaixo.

Quanto à programação

Com relação à programação, são comuns as classes de *Manutenção Programada* e *Não-Programada* para designar, respectivamente, as atividades executadas obedecendo a critérios de tempo e condições pré-definidas e as executadas em função da necessidade. As *Manutenções Programadas* podem ser *Periódicas*, se realizadas em intervalos de tempo fixos, ou *Aperiódicas*, quando realizadas em intervalos de tempo variáveis, ou dependendo de oportunidades.

Quanto aos objetivos

Os tipos de manutenção são também classificados de acordo com a atitude dos usuários em relação às falhas. Seis categorias são normalmente identificadas sob este aspecto: Manutenção Reativa ou Corretiva, Manutenção Preventiva, Manutenção Preditiva, Manutenção Proativa, Manutenção Produtiva Total e Manutenção Detectiva.

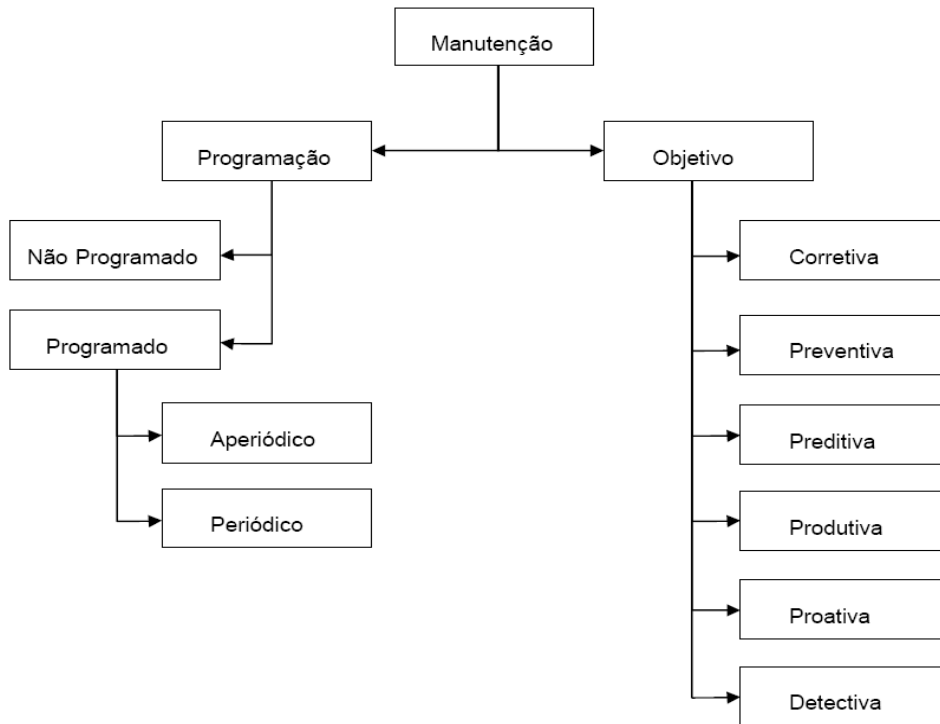


Figura 2.4 Classificação da Manutenção

2.3.1 Manutenção Reativa ou Corretiva

É a execução de tarefas de manutenção não-planejadas para restaurar as capacidades funcionais de equipamentos ou sistemas falhados. A manutenção corretiva é a forma mais primária e mais cara de manutenção. Apesar disto, torna-se impossível eliminá-la completamente, pois não se pode prever o momento exato em que ocorrerá uma falha que obrigará a uma manutenção corretiva. Portanto, o objetivo principal da manutenção corretiva é restabelecer a capacidades funcional do sistema falho dentro do menor tempo possível.

A manutenção corretiva consiste na ação de tomadas de ações para restabelecer um sistema que falhou à sua condição operacional. Isto normalmente envolve

substituir ou consertar o componente que é responsável pela falha do sistema global.

A manutenção corretiva é tipicamente executada em três passos:

- **Diagnóstico do problema.** O técnico de manutenção levar um tempo para localizar os componentes que falharam ou caso contrário avalia a causa da falha do sistema.

- **Conserto e/ou substituição de componente(s) defeituoso(s).** Uma vez que a causa da falha do sistema foi determinada, uma ação deve ser tomada normalmente e a substituição ou consertando dos componentes que causaram a falha do sistema.

- **Verificação da ação de conserto.** Uma vez que os componentes em questão foram consertados ou substituídos, o técnico de manutenção deve verificar se o sistema está novamente operando com sucesso.

2.3.2 Manutenção Preventiva

É a execução de tarefas de manutenção previamente planejadas. É desempenhada para manter um item em condições satisfatórias de operação, através de inspeções sistemáticas, detecção e prevenção de falhas incipientes. Pode ser baseada no tempo ou na condição. Será baseada no tempo quando as atividades para reter as capacidades funcionais dos equipamentos ou sistemas forem planejadas para serem realizadas em pontos específicos no tempo. Será baseada na condição, quando as tarefas forem programadas devido a anormalidades (defeitos) detectadas nos equipamentos em operação. Neste caso, ela é conhecida como *manutenção preventiva não-sistemática*.

A manutenção preventiva, diferentemente da manutenção corretiva, é a prática de substituir os componentes ou subsistemas antes que eles venham a falhar, a fim de promover a contínua operação do sistema. A programação da manutenção preventiva é baseada em observação do comportamento de sistemas anteriores, do conhecimento do mecanismo de funcionamento dos componentes e de quais componentes são vitais para continuar a operação do sistema. O custo é sempre um fator na implementação da manutenção preventiva.

2.3.3 Manutenção Preditiva

Se as tarefas de manutenção previamente planejadas originam-se do acompanhamento de parâmetros de condição ou desempenho do equipamento em operação, tem-se o tipo mais refinado de manutenção preventiva, também conhecida como Manutenção Preditiva.

Em geral, nenhuma ação de manutenção é realizada no componente durante uma manutenção preditiva, a menos que o componente se encontre falho, neste caso temos uma ação de manutenção corretiva. Porém, pode haver casos onde uma restauração parcial do componente inspecionado deve ocorrer durante a manutenção preditiva.

A manutenção preditiva, também conhecida como monitoramento da condição operacional, tem liderado o caminho para economias adicionais em relação à manutenção preventiva. O uso de tempo real ou instrumentos portáteis, tais como monitores de vibração, termografia, ferrografia, etc., têm sido eficazes no reconhecimento de sintomas de falha iminente da máquina, ou seja, descobre componentes com sinais de possíveis falhas. O maior benefício é a disponibilidade de um alerta anterior, de umas poucas horas a poucos dias, que reduzem o número de falhas *catastróficas*.

Geralmente, a manutenção preditiva é implantada juntamente com a manutenção preventiva e objetiva tanto os sinais de alerta de falha iminente como o reconhecimento de falhas pequenas que iniciam a reação em cadeia que leva às falhas grandes (isto é, controle de danos).

2.3.4 Manutenção Proativa

A Manutenção Proativa ou de *Extensão da Vida Útil* consiste em investigar as causas de falhas constantes na busca de solução definitiva para o aumento da eficiência e da confiabilidade dos equipamentos e sistemas.

A manutenção proativa tem recebido atenção mundial como o meio mais importante de alcançar economias inalcançáveis pelas técnicas de manutenção convencionais. A abordagem substitui a filosofia de manutenção de *falha reativa* pela de *falha proativa* evitando as condições subjacentes que levam a falhas e

degradação da máquina. Ao contrário da manutenção preditiva/preventiva, a manutenção proativa cria ações que objetivam causas raízes das falhas, não apenas sintomas. Seu objeto central é aumentar a vida da máquina ao invés de fazer reparos quando em geral nada está quebrado, aceitar a falha como rotina e normal, substituindo a manutenção de falha de crise pela manutenção de falha programada.

Enquanto as causas raízes das falhas são muitas, ou pelo menos se presume que são. Na maioria dos casos, os sintomas da falha mascaram a causa raiz ou são eles próprios considerados como a causa. Por exemplo, a falha súbita de um rolamento é com frequência considerada como causada por lubrificante de má qualidade ou ruim. A causa- raiz, por outro lado, é contaminação no lubrificante ou instalação defeituosa do rolamento.

Quando uma máquina é bem projetada e bem construída, as causas da falha podem ser reduzidas geralmente à aplicação indevida da máquina ou contaminação. E, entre as duas, a contaminação é claramente a mais comum e mais séria culpada pela falha. Uma grande quantidade de provas de laboratório e confirmações de campo estão agora disponíveis na literatura para comprovar este fato. Portanto, a abordagem inicial lógica para a manutenção proativa é a implantação de programas de controle rigoroso da contaminação para fluidos lubrificantes, hidráulicos, líquidos arrefecedores, ar e combustível.

2.3.5 Manutenção Produtiva Total

A Manutenção Produtiva Total também é conhecida pela sigla TPM (*Total Productive Maintenance*), que inclui programas de manutenção preventiva e preditiva.

TPM é um sistema de gerenciamento que tem como objetivo otimizar o funcionamento de máquinas e instalações, através da participação criativa de todos os colaboradores, sendo um processo que possibilita a melhoria contínua no chão de fábrica. A implantação do TPM é rigorosa no sentido de buscar sempre o “benchmark” (referencial de excelência), onde se procura medir e corrigir todas as perdas resultantes de equipamentos, processos e organizações ineficientes.

2.3.6 Manutenção Detectiva

A Manutenção detectiva é a atuação efetuada em sistemas de proteção buscando detectar falhas ocultas ou não-perceptíveis ao pessoal de operação e manutenção.

A identificação de falhas ocultas é primordial para garantir a confiabilidade. Em sistemas complexos, essas ações só devem ser levadas a efeito por pessoal da área de manutenção, com treino e habilitação para tal, assistido pelo pessoal de operação.

É cada vez maior a utilização de computadores digitais em instrumentação e controle de processo nos mais diversos tipos de plantas industriais. A principal diferença está no nível de automatização. Na manutenção preditiva, faz-se necessário o diagnóstico a partir da medição de parâmetros; na manutenção detectiva, o diagnóstico é obtido de forma direta a partir do processamento das informações colhidas junto à planta.

Há apenas que se considerar, a possibilidade de falha nos próprios sistemas de detecção de falhas, sendo esta possibilidade muito remota. De uma forma ou de outra, a redução dos níveis de paradas indesejadas por manutenções não programadas fica extremamente reduzida.

2.4 SISTEMAS NÃO REPARÁVEIS

Os sistemas não reparáveis são aqueles que não são consertados quando venham a falhar. Mais especificamente, os componentes do sistema não são consertados ou substituídos quando eles falham. A *manutenção* do mesmo compreenderia em sua completa substituição por um novo componente. A confiabilidade de sistemas/componentes não reparáveis é analisada através da distribuição do tempo de falha. Esta distribuição pode ser representada pela função de densidade de probabilidade, função de distribuição acumulada, ou taxa de falha.

A maioria dos produtos domésticos, por exemplo, são não reparáveis. Isto não necessariamente significa que eles não possam ser consertados, basta analisarmos se será viável o conserto do equipamento economicamente. Por exemplo, o conserto de um forno microondas de quatro anos de idade é economicamente inviável, se o conserto custe aproximadamente o preço de um novo forno.

2.5 SISTEMAS REPARÁVEIS

Os sistemas reparáveis recebem ações de manutenção que restauram os componentes do sistema quando eles falharem. Estas ações mudam a estrutura global do sistema. Estas ações devem agora ser levadas em consideração quando avaliamos o comportamento do sistema, porque a idade dos componentes do sistema não é mais uniforme, e nem o seu tempo de operação será contínuo.

Ao tentar entender o comportamento do sistema, informações adicionais dos modelos estão agora disponíveis de forma separada para cada componente do sistema. Quando lidamos com componentes que são reparáveis é necessário saber também quanto tempo o componente leva para ser reparado. Isto é uma necessidade do modelo que descreve como o componente será reparado (por meio de uma distribuição de probabilidade de reparo).

2.6 CONCEITOS ASSOCIADO À CONFIABILIDADE

2.6.1 Definição de Confiabilidade

É a probabilidade que uma parte, componente, aparelho, equipamento ou sistema executará sua entendida função por especificado período de tempo sob um dado conjunto de condições.

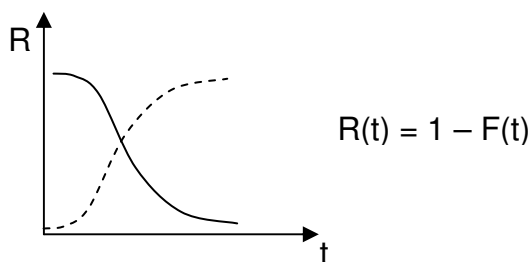


Figura 2.5 – Gráfico mostrando a curva básica de confiabilidade (linha cheia).

A Fig. 2.5 mostra o gráfico da curva básica de confiabilidade e o da curva de probabilidade de falha, seu complementar, onde:

$R(t)$ → probabilidade de que um sistema opere sem falha por um comprimento de tempo t ;

$F(t)$ → probabilidade de que ocorra falha num tempo menor ou igual a t .

2.6.2 Quando há falha

Quando o equipamento ou componente para de executar a sua função.
Exemplos:

Qualitativamente: motor pára de funcionar, estrutura entra em colapso, equipamento de comunicação não responde;

Quantitativamente: motor não é capaz de liberar um especificado torque, estrutura excede uma especificada deflexão, amplificador cai debaixo de um estipulado ganho, máquina ferramenta produz partes fora da tolerância.

2.6.3 Como o tempo pode ser especificado

Depende da natureza do sistema sob consideração.

1. Operação intermitente: tempo total ou o número de horas de operação;
2. Operação Cíclica: número de operações, freqüência de paradas e partidas.

2.6.4 Especificação das condições sob as quais um sistema opera

- Cargas de projeto: peso que uma estrutura pode suportar, carga elétrica sobre um gerador, taxa de transferência de informação sobre um sistema de comunicação, carga de impacto sobre um trem de aterrissagem, etc.
- Cargas Ambientais: temperaturas extremas, salinidade, umidade, radiação, etc.

2.6.5 Performance e confiabilidade

Qualquer produto que aparente uma melhora na performance e na confiabilidade é devido a um significativo avanço no projeto de engenharia.

A história da tecnologia pede um estudo de tais avanços. A troca (mudança) da madeira pelos metais nas estruturas e nas máquinas; de tubos de vácuo por componentes eletrônicos no estado sólido (transistores, por exemplo), etc.; levaram a avanços fundamentais tanto na performance, como na confiabilidade.

Portanto, os maiores melhoramentos na performance têm sido obtidos pela introdução de novos materiais ou aparelhos para atingir um particular objetivo.

2.6.6 Redundância

É a existência de mais de um meio de execução de uma determinada tarefa. De um modo geral, todos os meios precisam falhar, antes da quebra do sistema.

A confiabilidade pode ser aumentada pela adição de redundância ao sistema em nível de sistema ou de componente, mas somente se adequadas precauções puderem ser tomadas para assegurar que os componentes redundantes tenham muita pouca chance de falhar simultaneamente devido a uma causa comum.

Vale lembrar que a adição de componentes tem efeito sobre os custos e a performance do sistema.

2.6.7 Carga

É usada mais freqüentemente na mecânica como a tensão sobre uma estrutura. Mas de uma forma mais geral pode ser também a carga térmica causada por alta temperatura, a carga elétrica sobre um gerador, a carga de informação sobre um sistema de telecomunicação, etc.

2.6.8 Exigências de Confiabilidade

Em qualquer estágio de desenvolvimento tecnológico devem ser feitos *trade-offs* entre a confiabilidade e a performance. Isto implica que sejam feitos também *trade-offs* entre a confiabilidade e o custo.

Como um primeiro exemplo, consideramos uma corrida de carros. No caso das 500 milhas de Indianápolis, de ano em ano, a performance dos carros é continuamente melhorada, se usarmos como medida de performance a velocidade média de classificação dos carros. Entretanto a confiabilidade destes carros, medida como a probabilidade que terão de terminar a corrida, permanece uniformemente baixa, em menos de 50%. Isto não é surpresa se devemos tolerar uma alta probabilidade de quebra se quisermos ter alguma chance de vencer a corrida.

Um exemplo oposto é o projeto de um avião comercial, onde a quebra mecânica poderá resultar num acidente catastrófico. Neste caso, a confiabilidade é a consideração de projeto.

Especificações de velocidade, capacidade de carga e a economia de combustível associada a estes parâmetros são aceitas desde que possam manter a probabilidade de falha catastrófica muito pequena.

2.6.9 Histórico

Nas últimas três décadas, a utilização de técnicas de Engenharia da Confiabilidade no projeto, na operação e na manutenção vem experimentando um crescimento contínuo e acelerado em diversos setores industriais dos países industrialmente mais desenvolvidos. Esta expansão tem sido mais significativa naqueles setores que necessitam garantir um alto nível de confiabilidade para os seus processos ou produtos, seja por questões de segurança ou por exigência da grande competitividade industrial do mundo moderno. Tendo dado seus passos iniciais nos setores aeronáutico e militar nas décadas de 50 e 60, o uso da Confiabilidade expandiu-se para a área nuclear durante a década de 70, com grande ênfase até então nos problemas de segurança dos sistemas analisados. Na década seguinte, várias outras atividades industriais passaram a adotar o uso das técnicas de Confiabilidade, entre as quais podemos citar: as indústrias de processos químicos, a indústria eletrônica, o setor de geração e distribuição elétrica e as atividades aeroespaciais. Outras áreas industriais como a indústria automotiva e os setores de transporte (aéreo e ferroviário, principalmente) iniciaram mais recentemente a aplicação dos conceitos de confiabilidade no desenvolvimento dos seus produtos no gerenciamento das suas atividades. Cabe comentar aqui também, o uso cada vez mais intenso dos conceitos básicos em outras associadas, particularmente no projeto de grandes estruturas (Confiabilidade Estrutural) e no planejamento e otimização das atividades de manutenção (Manutenção Centrada na Confiabilidade).

No Brasil, a aplicação da Engenharia da Confiabilidade começou a ganhar força a partir do início da década de 80. Desta década em diante, a exemplo do que vem acontecendo internacionalmente, registrou-se um aumento significativo do uso da

Confiabilidade em vários outros setores industriais, tais como: a indústria de processos químicos (química, petroquímica e petróleo). Existem alguns outros setores aonde vêm sendo realizadas aplicações relevantes, particularmente no setor elétrico.

2.7 MANUTENÇÃO CENTRADA NA CONFIABILIDADE

A Manutenção Centrada na Confiabilidade (MCC), oriunda da expressão em inglês Reliability Centred Maintenance (RCM), é a aplicação de um método estruturado para estabelecer a melhor estratégia de manutenção para um dado sistema ou equipamento. Este método começa identificando a funcionalidade ou desempenho requerido pelo equipamento no seu contexto operacional, identifica os modos de falha e as causas prováveis e então detalha os efeitos e conseqüências da falha. Isto permite avaliar a criticidade das falhas e onde podemos identificar conseqüências significativas que afetam a segurança, a disponibilidade ou custo. A metodologia permite selecionar as tarefas adequadas de manutenção direcionadas para os modos de falha identificados.

O objetivo da manutenção na ótica da Manutenção Centrada na Confiabilidade (MCC) é assegurar que um sistema ou item continue a preencher as suas funções desejadas. No enfoque tradicional da manutenção todas as falhas são ruins e, portanto, todas devem ser prevenidas. Esta filosofia não é realista por duas razões:

- Tecnicamente, mostramos que é impossível se evitar todas as falhas;
- Ainda que se pudessem antecipar todas as falhas, os recursos financeiros não seriam suficientes.

Na MCC, determina-se o que deve ser feito para assegurar que um equipamento continue a cumprir suas funções no seu contexto operacional. A ênfase é determinar a manutenção preventiva necessária para manter o sistema funcionando, ao invés de tentar restaurar o equipamento a uma condição ideal.

Na manutenção tradicional, o enfoque é na característica técnica das falhas, enquanto na MCC, o enfoque é nos efeitos funcionais (operacionais) das falhas.

Na MCC, os objetivos da manutenção de qualquer item são definidos pelas funções e padrões de desempenho requerido deste item no seu contexto operacional.

No planejamento tradicional de manutenção, a seleção de tarefas é baseada em critérios intuitivos, tais como:

- Experiência - fazemos assim há 15 anos, deve ser bom!
- Julgamento - achamos que isto deve ser uma coisa boa!
- Recomendação do fabricante;
- Tentativa e Erro - vamos reduzir a manutenção neste item!
- Força bruta - quanto mais manutenção, melhor!

Nos casos de equipamentos/sistemas, com inúmeras tarefas de manutenção preventiva ou com um grande histórico de manutenção corretiva, é que a MCC tem o seu maior potencial, seja pela redução de manutenção preventiva desnecessária, seja pela adição de manutenção preventiva para reduzir manutenção corretiva indesejáveis.

O resultado da aplicação da MCC é que as tarefas de manutenção, dado o *contexto operacional*, são *otimizadas* através da análise das *conseqüências* de suas *falhas funcionais (operacionais)*, sob o ponto de vista de segurança, meio ambiente, qualidade e *custos*.

A aplicação da MCC resulta no decréscimo das atividades de manutenção preventiva e no custo dos programas de manutenção preventiva. A uma redução nos custos de mão-de-obra e materiais, mesmo quando o número de tarefas de manutenção preventiva aumenta.

A MCC é um processo contínuo. Sua aplicação deve ser reavaliada conforme a experiência operacional for acumulada. No início da sua aplicação a freqüência de manutenção é determinada conservadoramente, pois não há informação específica

disponível. A aplicação continuada da MCC resulta na obtenção de dados que permitem reavaliar a frequência em bases mais realistas.

Um resumo dos benefícios da MCC:

- Redução na carga de trabalho de manutenção preventiva;
- Aumento da disponibilidade dos sistemas;
- Aumento da vida útil dos equipamentos;
- Redução do número de peças sobressalentes;
- Especialização de pessoal em planejamento de manutenção;
- Rastreamento das decisões;
- Motivação para o trabalho em equipe.

A Fig 2.6 descreve as etapas para a execução de uma análise de MCC completa. Enquanto que a Fig. 2.7 detalha cada uma das etapas.

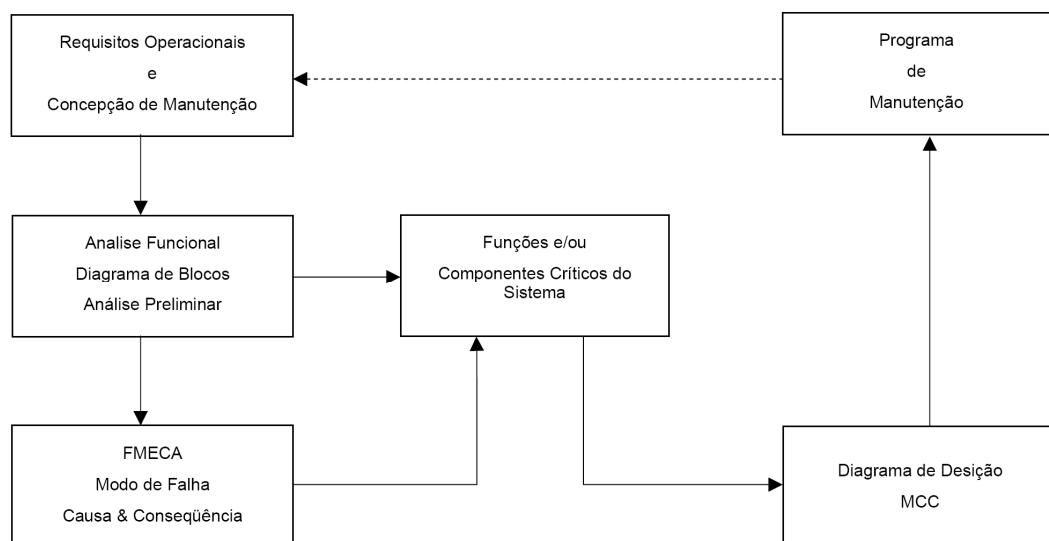


Figura 2.6 - Etapas para a execução de uma análise de MCC completa.

Requisitos Operacionais	Análise Funcional	Elaborar FMEA	Diagrama de Decisões	Programa de Manutenção
Montar equipe de análise	Identificar funções	Definir os modos de falhas	Aplicar diagrama de decisões	Comparar com atividades existentes
Identificar dados	Definir funções	Definir as causas das falhas	Identificar tarefas Manutenção Preventiva	Detalhar instruções
Coletar dados	Definir falhas funcionais	Definir efeitos das falhas	Selecionar tarefas efetivas	Revisar planos
Descrever sistema		Classificar conseqüência	Estabelecer intervalos	Conduzir auditorias
Identificar elementos		Identificar sistemas Críticos	Identificar mudanças de projeto	Conduzir mudanças de projeto
Definir fronteiras e interfaces				

Figura 2.7 - Detalhamento de cada uma das etapas de uma MCC completa.

2.8 CURVA DA BANHEIRA

A curva que representa a taxa de falha de um equipamento em função do tempo é também conhecida como curva da banheira devido ao seu formato conforme mostra a Fig. 2.8. Esta curva representa o comportamento, ao longo da vida, de vários dispositivos elétricos, mecânicos e de softwares, sendo determinada a partir de estudos estatísticos.

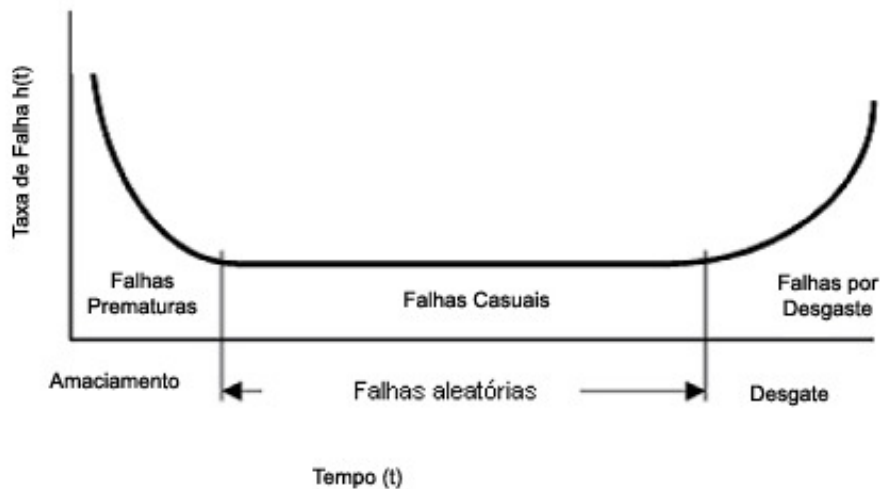


Figura 2.8 – A Curva da Banheira.

A curva da banheira apresenta três períodos distintos:

Período I: é um período curto de tempo de taxas de falhas altas, mas decrescente. No caso de populações humanas é representado pela mortalidade infantil. No caso de engenharia é o período de amaciamento, onde as altas taxas de falha iniciais são representadas por peças defeituosas de equipamentos, à não apropriadas técnicas de construção (montagem) e fabricação. Falta de peças, materiais fora de padronização, componentes fora de tolerância e danos no transporte podem ser evitadas por um rigoroso controle de qualidade. Portanto, na fase da mortalidade infantil: há grande incidência de componentes com defeito de fabricação, erro de projeto, erro de aplicação ou erro de instalação. A taxa de falha decai com o tempo.

Período II: é uma região de taxas de falha aleatórias ou de vida útil. Contém as menores e quase constantes taxas de falhas e é considerado período de vida útil do equipamento. A ocorrência dessas falhas advém de fatores menos controláveis. No caso de populações humanas, as prováveis mortes são devidas a acidentes ou a doenças infecciosas. Nos equipamentos mecânicos, as falhas são devidos a interferência indevida, tensão/resistência dos materiais menor que a esperada, defeitos abaixo do limite de sensibilidade dos ensaios, erros humanos durante uso, aplicação indevida, carregamentos externos sobre o sistema ou seus componentes são geralmente a causa da falha. Podem ter uma grande variedade de formas, dependendo do tipo de sistema sob consideração: terremotos, falta de energia, vibração, impacto mecânico, flutuações de temperatura, variação de umidade, etc. Este tipo de falha se caracteriza pela dificuldade de prevenção.

Período III: é uma região de taxas de falha crescente, onde ocorrem falhas por envelhecimento (populações humanas) ou desgaste (equipamentos de engenharia). As falhas tendem a ser dominadas por efeitos cumulativos tais como: corrosão, fragilização, trinca por fadiga, difusão de materiais, etc. O início do rápido crescimento das taxas de falha normalmente forma a base para a determinação de que partes do equipamento que devem ser trocadas para seu perfeito funcionamento e para a especificação da vida de projeto do equipamento.

Tabela 2.1 - Descrição das falhas presentes nas fases da curva da banheira.

<i>Falhas Prematuras</i>	<i>Falhas Casuais</i>	<i>Falhas por Desgaste</i>
Processos de fabricação deficiente	Interferência indevida tensão/resistência	Envelhecimento
Controle de qualidade deficiente	Fator de segurança insuficiente	Desgaste/Abrasão
Mão-de-obra desqualificada	Cargas aleatórias maiores que as esperadas	Degradação de resistência
Amaciamento insuficiente	Resistência menor que a esperada	Fadiga
Pré-teste insuficiente	Defeitos abaixo do limite de sensibilidade dos ensaios	Fluência
<i>Debugging</i> insuficiente	Erros humanos durante uso	Corrosão
Materiais fora de especificação	Aplicação indevida	Deterioração mecânica, elétrica, química ou hidráulica
Componentes não especificados	Abusos	Manutenção insuficiente ou deficiente
Componentes não testados	Falhas não detectáveis pelo melhor programa de manutenção preventiva	Vida de projeto muito curta
Componentes que falharam devido estocagem/transporte indevido	Falhas não detectáveis durante o melhor <i>debugging</i>	
Sobrecarga no primeiro teste	Causas inexplicáveis	
Contaminação	Fenômenos naturais imprevisíveis	
Erro Humano		
Instalação imprópria		

Um resumo das características de cada fase pode ser vista na Tabela 2.1 Deve-se alertar que nem todos os tipos de componentes/sistemas apresentam sempre todas as fases. Programas de computador (softwares), por exemplo, é um exemplo

típico de sistema com período de mortalidade infantil apenas, na medida em que os erros de programação são corrigidos, as falhas vão praticamente desaparecendo (Fig. 2.9).

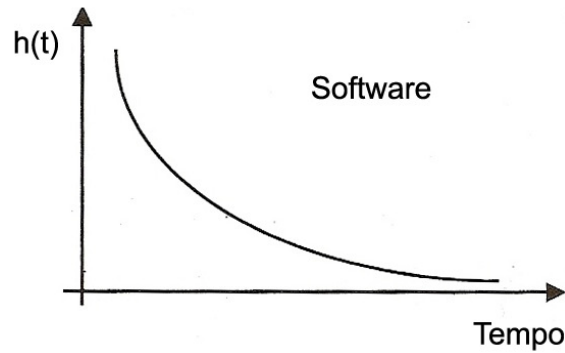


Figura 2.9 - Curva da banheira característica para softwares.

Componentes eletrônicos, por outro lado, apresentam normalmente falhas aleatórias para estes tipos de falhas é comum lançar-se mão do conceito de substituição quando há quebra, já que a manutenção preventiva nesta fase é normalmente de pouca efetividade (Fig. 2.10).

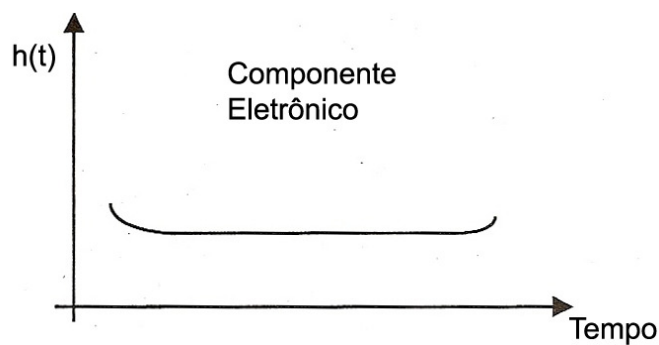


Figura 2.10 - Curva da banheira característica para componentes eletrônicos.

Componentes mecânicos, entretanto, apresentam normalmente as três fases e é comum se medir a taxa de falhas para se tentar evitar o período de falhas por desgaste (Fig. 2.11).

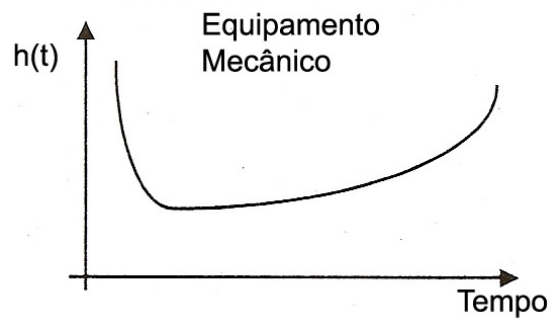


Figura 2.11 - Curva da banheira característica para componentes mecânicos.

2.9 DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS BÁSICAS

Podemos expressar em termos da variável aleatória t , o tempo de falha do sistema. A probabilidade de que a falha aconteça num tempo entre t e $t + \Delta t$ é dada por (Lewis, 1987):

$$f(t) \cdot \Delta t = P(t \leq \mathbf{t} \leq t + \Delta t). \quad (2.1)$$

A probabilidade de que a falha aconteça num tempo menor do que t é dada por:

$$F(t) = P(\mathbf{t} \leq t). \quad (2.2)$$

A probabilidade de que um sistema opere sem falha por um período de tempo t é dada por:

$$R(t) = P(\mathbf{t} > t). \quad (2.3)$$

Uma vez que o sistema não falha para $\mathbf{t} < t$, deve falhar para algum $\mathbf{t} > t$, assim temos:

$$R(t) = 1 - F(t). \quad (2.4)$$

Como a probabilidade de falha é definida por:

$$F(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt, \quad (2.5)$$

temos que

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(t).dt . \quad (2.6)$$

Algumas propriedades podem ser observadas da equação da confiabilidade, tais como:

$$R(0) = 1 \text{ e } R(\infty) = 0 . \quad (2.7)$$

A função densidade de probabilidade de falha em termos de confiabilidade e de probabilidade de falha é dada por:

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = \frac{dF(t)}{dt} . \quad (2.8)$$

A taxa de falha, também chamada de função de risco (*hazard*) ou de taxa de falha instantânea, é definida como:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.9)$$

Uma expressão muito útil é a confiabilidade em função de taxa de falha. Da Eq. (2.9) por integração podemos obter:

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(t).dt\right] \quad (2.10)$$

Para obtermos a probabilidade de falha em termos da taxa de falha, inserimos a Eq. (2.10) na Eq. (2.9) para termos:

$$f(t) = h(t) \exp\left[-\int_0^t h(t).dt\right] . \quad (2.11)$$

Um dos parâmetros mais usados para caracterizar a confiabilidade é o tempo médio ou esperado de falha, denotado também por ou esperado $E(t)$ e dado por:

$$MTTF = E(t) = \int_0^{\infty} tf(t).dt . \quad (2.12)$$

O MTTF pode ser escrito em termos da confiabilidade pela substituição da Eq. (2.8) na Eq. (2.12). Integrando por partes temos:

$$MTTF = -\int_0^{\infty} t \frac{dR}{dt} .dt = -tR(t)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t).dt \quad (2.13)$$

Como $tR(t)$ tende para zero quando t tende para zero ou infinito, temos:

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t).dt . \quad (2.14)$$

2.10 DISTRIBUIÇÕES APLICADAS À CONFIABILIDADE

Vamos abordar nesta seção as distribuições mais comuns na confiabilidade que são as distribuições exponencial, normal, lognormal e de Weibull.

2.10.1 Distribuição Normal

A distribuição normal também conhecida como gaussiana, é segundo O'Connor (2002) e Carter (1986), a mais amplamente utilizada, isto porque materiais naturais, fenômenos biológicos têm um comportamento que pode ser representado por esta distribuição.

Para Lewis (1987), esta distribuição representa equipamentos que sofrem desgaste crescente, de forma que a taxa de falha apresenta uma curva crescente em função do tempo. Esta distribuição pode ser verificada quando se observa o comportamento da vida de ferramentas de corte durante a usinagem.

Em função da variável aleatória x é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty \leq x \leq \infty . \quad (2.15)$$

A integral da Eq. (2.15), que não possui uma solução analítica exata, é dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (2.16)$$

A taxa de falha é dada por (Fig. 2.12):

$$h(t) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} .\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right] \left[1-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1} . \quad (2.17)$$

Quando usamos a distribuição normal, é benéfico fazermos uma mudança de variável para expressarmos $F(x)$ numa forma padronizada. Com esta finalidade, definiremos a variável aleatória u em termos de x por:

$$u = (x - \mu) / \sigma . \quad (2.18)$$

Isto produz:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right), \quad (2.19)$$

o que implica em $\mu_u=0$ e $\sigma_u^2=1$.

A forma padronizada é dada por:

$$F(x) = \Phi[(x - \mu) / \sigma] = \Phi(u) \quad (2.20)$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du . \quad (2.21)$$

Propriedades da distribuição normal:

- $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$;
- se x e y são variáveis aleatórias que são distribuídas normalmente, então: $z = ax + by$, onde a e b são constantes, é também distribuída normalmente.

Além disto:

$$\mu_z = a.\mu_x + b.\mu_y, \quad \sigma_z^2 = a.\sigma_x^2 + b.\sigma_y^2 .$$

As mesmas relações podem ser estendidas para combinações lineares de três ou mais variáveis aleatórias.

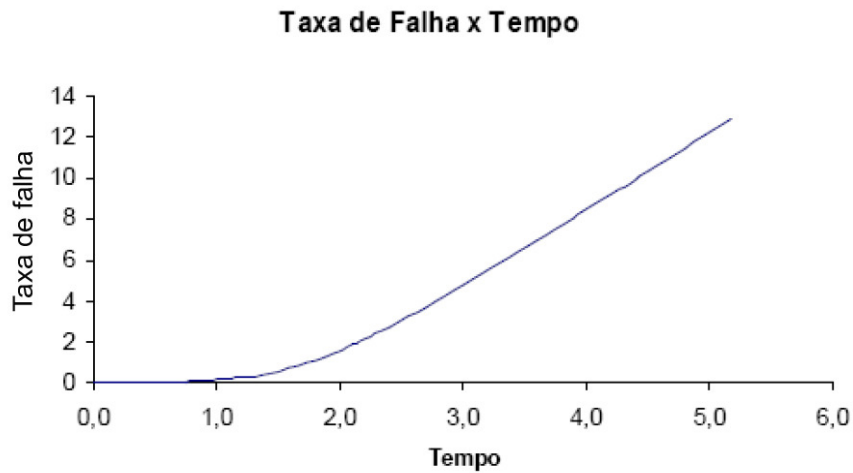


Figura 2.12 - Função da Taxa de Falha da distribuição normal.

2.10.2 Distribuição Lognormal

Podemos ter uma situação que consiste de uma variável aleatória y que é o produto das variáveis aleatórias y_i :

$$y = y_0 \cdot y_2 \cdots y_n \quad (2.22)$$

Por exemplo, o desgaste de um sistema pode ser proporcional ao produto das magnitudes das demandas que tem sido feitas sobre ele. Da Eq. (2.22), temos:

$$\ln y = \ln y_1 + \ln y_2 + \dots + \ln y_n \quad (2.23)$$

Se definirmos $x = \ln y$, e x é distribuído normalmente, então y é distribuído lognormalmente. Portanto, por analogia à distribuição normal, temos:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi y}} \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2} \left(\ln \frac{y}{y_0}\right)^2\right], \quad (2.24)$$

$$F(y) = \Phi\left[\frac{1}{\xi} \cdot \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)\right] = \Phi(u), \quad (2.25)$$

onde
$$u = \frac{1}{\xi} \cdot \ln\left(\frac{y}{y_0}\right). \quad (2.26)$$

Média:
$$\mu = y_0 \cdot \exp(\xi^2 / 2) \quad (2.27)$$

Variância:
$$\sigma^2 = \mu^2[\exp(\xi^2) - 1] \quad (2.28)$$

A distribuição lognormal (Fig.2.13) é bastante utilizada para caracterizar o tempo de vida de produtos e materiais. A distribuição lognormal é a que melhor descreve o tempo de vida de componentes semicondutores cujos mecanismos de falha envolvem interações químicas, como as encontradas em processos de corrosão, acúmulo superficial de cargas elétricas, degradação de contatos, sendo também adequada para mecanismos de fadiga em materiais (Freitas, Colossimo; 1997). Para Carter (1987) esta distribuição é a que melhor define o comportamento de equipamentos mecânicos sob a ação de fadiga.

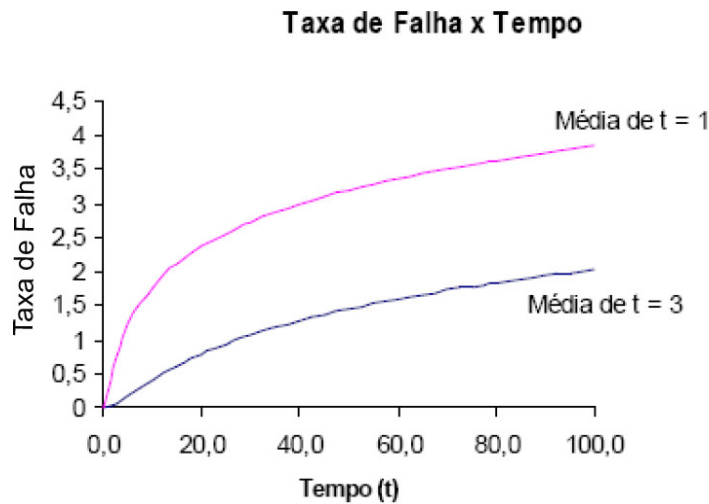


Figura 2.13 - Função de Taxa de Falha da Distribuição Lognormal.

2.10.3 Distribuição Exponencial

O modelo de taxa de falha constante ($\lambda(t) = \lambda = constante$) para sistemas operando continuamente leva a uma distribuição exponencial, que é dada por:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad (2.29)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.30)$$

Média:
$$\mu = 1 / \lambda \quad (2.31)$$

Variância:
$$\sigma^2 = 1 / \lambda^2 \quad (2.32)$$

Esta distribuição representa a faixa das falhas aleatórias da curva da banheira e está representada na Fig. 2.14.

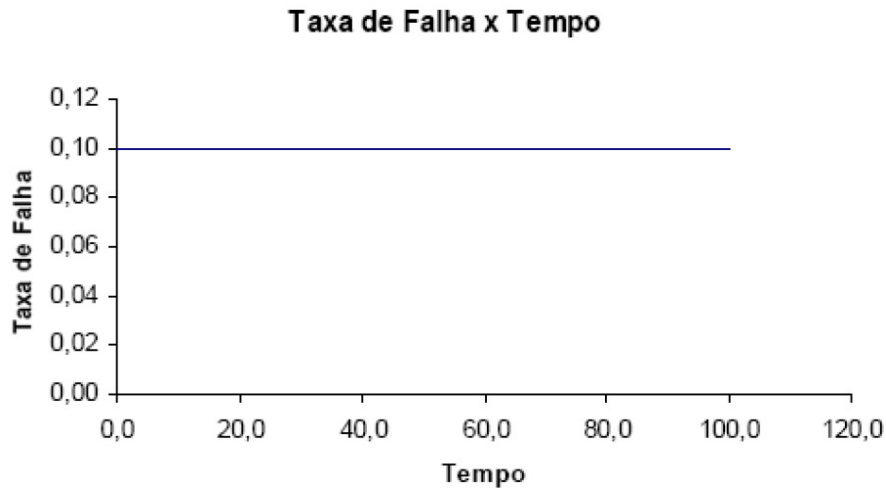


Figura 2.14 - Função Taxa de Falha da distribuição exponencial

2.10.4 Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull foi proposta originalmente por W. Weibull (1951) em estudos relacionados ao tempo de falha devido à fadiga em metais. Ela é freqüentemente empregada para descrever o tempo de vida de produtos industriais. Ela também descreve adequadamente o tempo de vida de produtos formados de várias partes (elementos) cuja falha ocorre quando a primeira parte falhar. Outra vantagem da utilização da distribuição de Weibull em aplicações práticas deve-se ao fato de ela apresentar uma grande variedade de formas, todas com uma propriedade básica: a função taxa de falha é monotônica. Isto significa que ela pode ser crescente, decrescente ou constante. Ela descreve adequadamente a vida de mancais, componentes eletrônicos, cerâmicas, capacitores dielétricos, etc. (Freitas, Colossimo; 1997).

Para Carter (1986), a distribuição de Weibull “é muito desejável, pois se tem em mãos uma distribuição que pode representar qualquer curva de taxa de falha no tempo”.

A própria distribuição exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull. No entanto, enquanto a distribuição exponencial depende exclusivamente de um

parâmetro, a distribuição de Weibull depende de dois ou três parâmetros. Estes parâmetros são definidos como:

α - É o **parâmetro de escala**, conhecido como *vida característica*. Corresponde ao valor de t no qual existe aproximadamente 63.2% de probabilidade do que o componente venha a falhar.

β - É o **parâmetro de forma**, indica o comportamento da função da taxa de falha.

Para $\beta = 1$, a função taxa de falha é constante (e equivale a distribuição exponencial).

Para $\beta > 1$, a função taxa de falha é crescente, e quanto maior é este, mais rapidamente a função cresce.

Para $\beta < 1$, a função taxa de falha é decrescente, e quanto menor é este, mais rapidamente a função decresce.

t_0 - É chamado de tempo de falhas livre, **parâmetro de localização** ou vida mínima e indica a data de início das falhas. Não será considerado nas fórmulas a seguir.

A distribuição de Weibull de dois parâmetros é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad (2.33)$$

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad (2.34)$$

$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}. \quad (2.35)$$

Média: $\mu = \alpha \cdot \Gamma(1 + 1/\beta)$ (2.36)

Variância: $\sigma^2 = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right\}$ (2.37)

A função gama completa que aparece nas Eqs. (2.36) e (2.37) é dada por:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \quad (2.38)$$

Para obtermos o valor do parâmetro β basta substituir a Eq. (2.36) na (2.37) para eliminarmos o parâmetro α e termos a equação:

$$f(\beta) = (\sigma^2 + \mu^2)g_1(\beta) - \mu^2g_2(\beta) = 0, \quad (2.39)$$

onde

$$g_1(\beta) = \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2, \quad g_2(\beta) = \Gamma(1 + 2/\beta). \quad (2.40)$$

Para acharmos o valor de precisamos determinação os zeros da função dada pela Eq. (2.39).

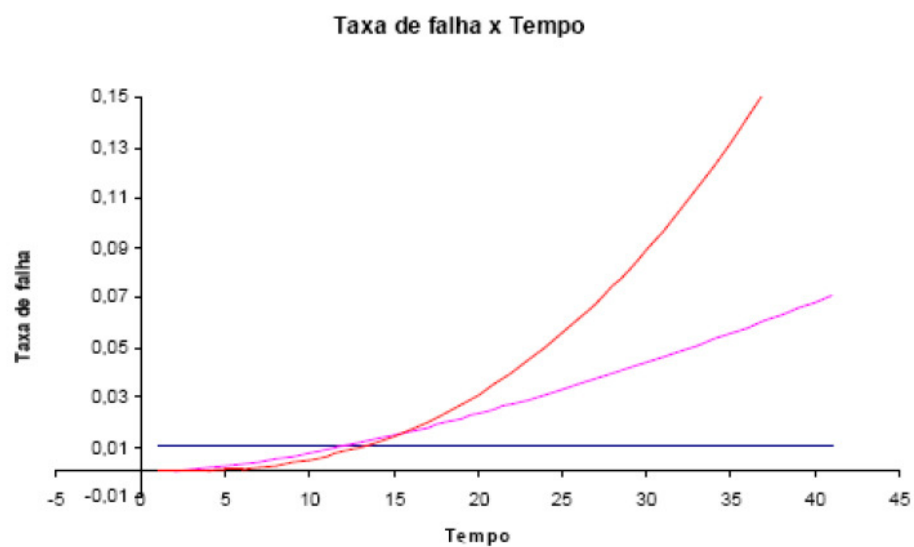


Figura 2.15 - Taxa de Falha da Distribuição de Weibull com β variando de 1 a 3,5.

2.11 ESTIMAÇÃO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

É um método geral de estimação de parâmetros muito usado no contexto da análise de confiabilidade. Para uma amostra X_1, X_2, \dots, X_n de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas apresentaremos a estimação de máxima verossimilhança para as quatro mais importantes distribuições unidimensionais contínuas (Crowder et al., 1991; Soong, 1986).

2.11.1 Distribuição Exponencial

Uma variável aleatória X segue uma distribuição exponencial (ou exponencial negativa) se tem a função densidade de probabilidade mostrada na Eq. (2.29) é dada por:

$$f(x) = \lambda \exp[-\lambda(x - \theta)], \quad x > \theta, \quad \alpha > 0, \quad (2.41)$$

onde α é o parâmetro de escala e θ é o parâmetro de localização.

A função de verossimilhança (logarítmica) e os estimadores de máxima verossimilhança, respectivamente, são dados por:

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n (X_i - \theta), \quad (2.42)$$

$$\hat{\theta} = X_1, \quad (\text{ou algum valor levemente inferior}) \quad (2.43)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})} = \frac{1}{\bar{X} - \hat{\theta}}. \quad (2.44)$$

2.11.2 Distribuição Normal

Uma variável aleatória X segue uma distribuição normal (ou gaussiana) se tem a função densidade de probabilidade dada pela Eq. (2.15) onde μ é a média e σ é o desvio padrão.

A função de verossimilhança (logarítmica) e os estimadores de máxima verossimilhança, respectivamente, são dados por:

$$\ln L = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{n}{2} \ln(2\pi), \quad (2.45)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \quad (2.46)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (2.47)$$

2.11.3 Distribuição Lognormal

Uma variável aleatória X segue uma distribuição lognormal se tem a função densidade de probabilidade mostrada na Eq. (2.24) é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{(x - \theta)\sqrt{2\pi\xi}} \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2} (\ln(x - \theta) - \beta)^2\right], \quad x > 0, \quad (2.48)$$

onde α é o parâmetro de escala, β é o parâmetro de forma e θ é o parâmetro de localização.

A função de verossimilhança e os estimadores de máxima verossimilhança, respectivamente, são dados por:

$$L = \frac{1}{(2\pi\xi^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln(X_i - \theta) - \beta}{\xi}\right)^2\right] \prod_{i=1}^n \frac{1}{(X_i - \theta)}, \quad (2.49)$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i - \theta), \quad (2.50)$$

$$\hat{\xi} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(X_i - \theta) - \hat{\beta})^2 \right]^{1/2}, \quad (2.51)$$

quando o parâmetro θ é conhecido.

2.11.4 Distribuição de Weibull

Uma variável aleatória X segue uma distribuição de Weibull se tem a função densidade de probabilidade mostrada na Eq. (2.33) é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\theta}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{x-\theta}{\alpha} \right)^\beta \right], \quad (2.52)$$

onde α é o parâmetro de escala, β é o parâmetro de forma e θ é o parâmetro de localização.

A função de verossimilhança e os estimadores de máxima verossimilhança, são dados respectivamente por:

$$L = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \theta}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \theta}{\alpha} \right)^\beta \right], \quad (2.53)$$

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^{\hat{\beta}} \right]^{1/\hat{\beta}}, \quad (2.54)$$

$$\hat{\beta} = \left\{ \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^{\hat{\beta}} \ln(X_i - \hat{\theta}) \right] \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^{\hat{\beta}} \right]^{-1} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i - \hat{\theta}) \right\}^{-1}, \quad (2.55)$$

$$(\hat{\beta} - 1) \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^{-1} = \hat{\beta} \cdot \hat{\alpha}^{-\hat{\beta}} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^{\hat{\beta}-1}. \quad (2.56)$$

A situação mais comum na estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull aparece quando θ é conhecido. Por exemplo: $\theta = 0$ e $\theta = X_1$ (ou algum valor levemente inferior).

2.12 INDICADORES DE MANUTENÇÃO

A área de manutenção nos aponta muitos indicadores que por vezes até dificultam o correto entendimento de nossas atividades. Temos sempre a intenção de fazer o melhor e acabamos por escolher e utilizar muitos indicadores, acabando por exceder na quantidade e perder na qualidade final do trabalho.

Um dos primeiro pontos que se aprende com a metodologia da gestão da qualidade total é que devemos escolher indicadores que sejam o resultado do

desdobramento dos objetivos empresariais. Isto significa que é necessário escolher o que nos dá o maior retorno, seja em termos de informação quanto no de lucratividade.

Portanto, para começarmos em um primeiro momento a organizar uma estrutura de manutenção; os seguintes indicadores:

Hora Parada ou Hora Indisponível

Representa o tempo entre a comunicação de indisponibilidade da máquina ou equipamento até a sua liberação/aprovação para funcionamento normal ou produção. É necessário o acompanhamento desse indicador para termos um controle básico sobre o funcionamento dos ativos, visando conhecer a disponibilidade do equipamento para o processo produtivo.

Hora de espera

Representa o tempo entre a comunicação da indisponibilidade da máquina ou equipamento e o momento do início do atendimento por parte do pessoal da manutenção. É importante acompanhar esse intervalo de tempo, para termos um controle mínimo sobre eventual desperdício ou ainda verificar a organização básica da equipe.

Constata-se tradicionalmente que esse intervalo de tempo é um dos grandes responsáveis pelo aumento da indisponibilidade da máquina, pois caso a equipe não seja bem organizada quanto à formação do grupo, quanto à organização do almoxarifado de manutenção, ou quanto à falta de comprometimento com os objetivos empresariais, tais perdas serão ainda maiores.

Acompanhar esse indicador poderá propiciar redução das horas paradas ao redor de 20% a 30% no primeiro ano e de cerca de 15 a 20% no segundo ano.

Hora de impedimento

Esse indicador representa todo e qualquer tempo gasto com ações que não dependem diretamente da ação do grupo da manutenção, ou seja, demandam ações de outras equipes, tais como a de compras, de projetos, de laboratório, etc. É nesse momento que poderemos verificar o grau de comprometimento das equipes auxiliares no sentido de rapidamente disponibilizar a máquina ou equipamento ao ambiente produtivo.

Caso os resultados não sejam satisfatórios poderemos atuar junto a essas equipes no sentido de ampliar seu comprometimento, demonstrando as perdas que as mesmas causam ao ambiente produtivo.

2.12.1 TERMINOLOGIA DA TEORIA DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

Adota-se para terminologia a norma (NBR-5462, 1994) que é uma adaptação da norma (IEC-60050-191, 2002) que define os seguintes conceitos principais de Confiabilidade e Manutenibilidade:

2.12.1.1 Conceitos

Item (*Item*) - Qualquer parte, componente, dispositivo, subsistema, unidade funcional, equipamento ou sistema que possa ser considerado individualmente.

Dependabilidade (*Dependability*): termo coletivo usado para descrever o desempenho da disponibilidade e seus fatores de influência: confiabilidade, manutenibilidade e suporte logístico de manutenção.

Capacidade (*Capability*): capacidade de um item atender a uma demanda de serviço de determinadas características quantitativas, sob dadas condições internas.

Disponibilidade (*Availability*): capacidade de um item estar em condições de executar uma certa função em um dado instante ou durante um intervalo de tempo determinado, levando-se em conta os aspectos combinados de sua confiabilidade, manutenibilidade e suporte de manutenção, supondo que os recursos externos requeridos estejam assegurados.

Confiabilidade (*Reliability*): capacidade de um item desempenhar uma função requerida sob condições especificadas, durante um dado intervalo de tempo.

Manutenibilidade (*Maintainability*): capacidade de um item ser mantido ou relocado em condições de executar suas funções requeridas, sob condições de uso especificadas, quando a manutenção é executada sob condições determinadas e mediante procedimentos e meios prescritos.

Falha (*Failure*) - Término da capacidade de um item desempenhar a função requerida.

Critério de Falha (*Failure Criteria*) - Conjunto de regras aplicáveis ao julgamento de tipos e gravidade de falhas, para determinação dos limites de aceitação de um item.

Falha Crítica (*Critical Failure*) - Falha que provavelmente resultará em condições perigosas e inseguras para pessoas, danos materiais significativos ou outras conseqüências inaceitáveis.

Causa de Falha (*Failure Cause*) - Circunstâncias relativas ao projeto, fabricação ou uso que conduzem a uma falha.

Mecanismo de Falha (*Failure Mechanism*) - Conjunto de processos físicos, químicos ou outros que conduzem a uma falha.

Vida Útil (*Useful Life*) - Sob dadas condições, é o intervalo de tempo desde o instante em que um item é colocado pela primeira vez em estado de disponibilidade, até o instante em que a intensidade de falha torna-se inaceitável ou até que o item seja considerado irrecuperável depois de uma pane.

Vida Média (*Mean Life*) - Média dos tempos até falha de um grupo de itens não reparados e de características semelhantes.

Vida de Projeto (*Design Life*) - Tempo de uso planejado para o sistema total.

Nota: Itens podem falhar dentro de vida de projeto do sistema contanto que substituições ou reparos sejam possíveis.

2.12.1.2 Medidas

Confiabilidade (*Reliability*): $R(t_1, t_2)$

Probabilidade de um item poder desempenhar uma função requerida, sob dadas condições, durante um dado intervalo de tempo (t_1, t_2) .

Para itens não-reparáveis, a confiabilidade $R(t_1, t_2)$ para um dado intervalo (t_1, t_2) , $0 < t_1 < t_2$, é equivalente a confiabilidade $R(0, t_2)$ para o intervalo $(0, t_2)$ e, portanto, não é freqüentemente utilizada. Mais utilizadas são as funções de confiabilidade $R(t) = R(0, t)$ e a condicional $R(t, t+x/t)$.

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(x)dx\right] = \int_t^{\infty} f(x)dx. \quad (2.57)$$

Função de Distribuição Acumulada de Falha para o Instante t (*cdf*): $F(t)$

Não-confiabilidade (*Unreliability*): $F(t)$

É a probabilidade do componente sofrer uma falha no período de 0 a t , dado que funciona em $t = 0$, ou seja, corresponde à probabilidade complementar da Confiabilidade.

$$F(t) = 1 - R(t). \quad (2.58)$$

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt. \quad (2.59)$$

Função Densidade Probabilidade de Falha para o Instante t (*pdf*): $f(t)$

$f(t)$ - Representa a estatística da falha, é a derivada de $F(t)$.

$f(t).dt$ - É a probabilidade do componente que funciona em $t = 0$ sofra uma falha entre t e $t + dt$.

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}. \quad (2.60)$$

Taxa de Falha Instantânea (*Instantaneous Failure Rate*): $h(t)$

Limite, se existir, da razão da probabilidade condicional de que a falha de um item ocorra em um dado intervalo de tempo $(t, t+\Delta t)$, visto que o item estava disponível no instante t , pela duração Δt deste intervalo, quando Δt tende a zero. Matematicamente,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_r[t < T < (t + \Delta t) / T > t]}{\Delta t}, \quad (2.61)$$

h - Representa a velocidade com que as falhas se manifestam.

$h(t) \cdot \Delta t$ - Probabilidade do componente que funciona em $t = 0$, falhe entre t e $t + \Delta t$.

$$h(t) = \frac{[F(t+\Delta t) - F(t)]}{R(t)} \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (2.62)$$

Taxa de Falha Média (*Mean Failure Rate*): $\bar{h}(t_1, t_2)$

Média da taxa de falha instantânea em um dado intervalo de tempo (t_1, t_2) .

Nota: A taxa da falha média se relaciona com a taxa de falha instantânea, pela equação:

$$\bar{h}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt. \quad (2.63)$$

Tempo Médio Até Falha (*Mean Time to Failure*): $MTTF$

$$MTTF = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (2.64)$$

Manutenibilidade (*Maintainability*): $M(t)$

Probabilidade de uma dada ação de manutenção efetiva, para um item sob dadas condições de uso, poder ser efetuada dentro de um intervalo de tempo determinado, quando a manutenção é feita sob condições estabelecidas e usando procedimentos e recursos prescritos.

É a probabilidade de restaurar um item as suas condições de funcionamento específicas, em limites de tempo desejados, quando a manutenção é conseguida

nas condições e com meios prescritos. Ou melhor, probabilidade de um componente falho no tempo $t=0$ esteja em serviço no tempo “ t ”.

$$M(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \mu(t) dt\right]. \quad (2.65)$$

Função Densidade Probabilidade de Reparo para o Instante t (Em Inglês pdr):

$g(t)$ - Representa a estatística do reparo, é a derivada de $M(t)$.

$g(t).dt$ - É a probabilidade do componente está falho em $t = 0$ seja reparado entre t e $t + dt$.

$$g(t) = \frac{dM(t)}{dt}. \quad (2.66)$$

Taxa de Reparo Instantânea (Em Inglês *Instantaneous Repair Rate*): $\mu(t)$

Limite, se existir, da razão da probabilidade condicional de que o instante T de término de uma ação de manutenção corretiva ocorra em um dado intervalo de tempo $(t, t+\Delta t)$, pela duração t deste intervalo, quando Δt tende a zero, supondo-se que a ação esteja em andamento no início do intervalo de tempo.

Matematicamente,

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t < T < (t + \Delta t) / T > t]}{\Delta t} \quad (2.67)$$

$\mu(t)$ - Representa a velocidade com que os reparos são realizados.

$\mu(t).\Delta t$ - Probabilidade do componente que se encontra em estado falho em t , seja reparado entre t e $t + \Delta t$.

Taxa de Reparo Média (Em Inglês *Mean Repair Rate*): $\bar{\mu}(t_1, t_2)$

Média da taxa de reparo instantânea em um dado intervalo de tempo (t_1, t_2)

Nota: A taxa de reparo média se relaciona com a taxa de reparo instantânea, pela equação:

$$\bar{\mu}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) dt. \quad (2.68)$$

Tempo Médio de Reparo (Em Inglês Mean Time to Repair): $MTTR = \tau$

Esse indicador nos aponta o tempo que a equipe de manutenção demanda para reparar e disponibilizar a máquina ou equipamento para o sistema produtivo. Nesse período estão todas as ações envolvidas no reparo, sejam elas da equipe de compras, de laboratório ou qualquer outra equipe de trabalho.

$$MTTR = \int_0^{\infty} t \cdot g(t) dt . \quad (2.69)$$

Tempo Médio entre Falhas (Em Inglês Mean Time Between Failure): $MTBF$

Indicador que representa o tempo médio entre a ocorrência de uma falha e a próxima, representa também o tempo de funcionamento da máquina ou equipamento diante das necessidades de produção até a próxima falha.

$$MTBF = MTTF + MTTR. \quad (2.70)$$

Disponibilidade Instantânea (Em Inglês Availability): $A(t)$

Probabilidade de um item ser capaz de desempenhar uma função requerida sob dadas condições, em um dado instante, supondo-se que os recursos externos tenham sido providos.

Disponibilidade Assintótica (Em Inglês Assymptotic Availability): A ou A_{∞}

Limite, se existir da disponibilidade instantânea, quando o tempo t_2 tende ao infinito, usado em modelos matemáticos.

Notas: a) A disponibilidade assintótica média se obtém da disponibilidade média, pela equação:

$$A \text{ ou } A_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) . \quad (2.71)$$

b) Se o limite existir ele independe de t .

Disponibilidade Média (Em Inglês Mean Availability): $\bar{A}(t_1, t_2)$

Média da disponibilidade instantânea durante um dado intervalo de tempo (t_1, t_2) .

Nota: A disponibilidade média está relacionada à disponibilidade instantânea, pela equação:

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt \quad (2.72)$$

Disponibilidade Média Assintótica (Em Inglês Asymptotic Mean Availability):
 \bar{A} ou \bar{A}_∞

Limite, se existir da disponibilidade média durante um intervalo de tempo (t_1, t_2) , quando o tempo t_2 tende ao infinito, usado em modelos matemáticos.

Notas: a) A disponibilidade assintótica média se obtém da disponibilidade média, pela equação:

$$\bar{A} \text{ ou } \bar{A}_\infty = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} A(t_1, t_2) \quad (2.73)$$

b) Se o limite existir, ele independe de t_1 .

Indisponibilidade Instantânea (Em Inglês Unavailability): $U(t)$

Probabilidade de um item não ser capaz de desempenhar uma função requerida sob dadas condições, em um dado instante, supondo-se que os recursos externos tenham sido providos.

Indisponibilidade Assintótica (Em Inglês Asymptotic Availability): U ou U_∞

Limite, se existir da indisponibilidade instantânea, quando o tempo tende ao infinito, usado em modelos matemáticos.

Notas: a) A indisponibilidade assintótica se obtém da indisponibilidade instantânea, pela equação:

$$U \text{ ou } U_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) \quad (2.74)$$

b) Se o limite existir, ele independe de t .

Indisponibilidade Média (Em Inglês Mean Unavailability): $\bar{U}(t_1, t_2)$

Média da indisponibilidade instantânea durante um dado intervalo de tempo (t_1, t_2) .

Nota: A indisponibilidade média está relacionada à indisponibilidade instantânea, pela equação:

$$\bar{U}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt \quad (2.75)$$

Indisponibilidade Média Assintótica (Em Inglês Assymptotic Mean Availability):

\bar{U} ou \bar{U}_∞

Limite, se existir da indisponibilidade média durante um intervalo de tempo (t_1, t_2) , quando o tempo t_2 tende ao infinito, usado em modelos matemáticos.

Notas: a) A indisponibilidade assintótica média se obtém da indisponibilidade média, pela equação:

$$\bar{U} \text{ ou } \bar{U}_\infty = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{U}(t_1, t_2) \quad (2.76)$$

b) Se o limite existir, ele independe de t_1 .

CAPÍTULO 3

ANALISE ESTATÍSTICA DE FALHAS

3.1 INTRODUÇÃO

O objetivo da análise estatística de falhas é determinar a confiabilidade, a taxa de falhas e outros indicadores de performance de equipamentos e produtos. Este procedimento depende muito da fonte dos dados, que podem ser coletados do campo ou através de ensaios.

No caso de dados oriundos de ensaios, para uma caracterização dos dados necessita-se das seguintes informações:

- Número de itens colocados no ensaio: n ;
- Tipo de ensaio: sem reposição das unidades que falham ou com reposição;
- Se o ensaio é concluído na r -ésima falha ou após um tempo previamente estabelecido (t_N).

No caso de se ter n observações, uma para cada unidade, temos o que chamamos de uma *amostra completa*. Ensaios com *amostras completas* são conduzidos até que todos os componentes ou peças testadas falhem.

Ensaios com *amostras censuradas* são interrompidos (*censurados*) após um determinado tempo ou quando um certo número de falhas for atingida. Existem situações nos quais as interrupções ou censuras podem ser conduzidas progressivamente com a retirada ou suspensão de itens no decorrer do teste.

Os tipos de censura mais usados são:

- Censura do tipo I: O ensaio é censurado (interrompido) após um determinado tempo. O número de falhas é aleatório. O ensaio pode ser com reposição dos componentes que falham ou sem reposição;

- Censura do tipo II: O ensaio é censurado após um determinado número de falhas. O tempo é aleatório. O ensaio pode ser com ou sem reposição.

3.2 MÉTODOS NÃO PARAMÉTRICOS

Nos métodos não paramétricos, os dados de teste ou de operação são diretamente plotados sem qualquer tentativa de ajustá-los a uma distribuição em particular. Estes métodos podem ser aplicados a dois tipos de dados, não agrupados e agrupados. Os dados não agrupados são obtidos de teste de confiabilidade e em alguns casos de medições feitas no campo. Consiste de uma série de tempos específicos em que aconteceram as falhas de equipamento de forma individual. A Tabela 3.1 é um exemplo de dados não agrupados. Os dados agrupados são obtidos mais freqüentemente de medições feitas no campo, e na forma mais simples, consistem no número de itens falhos em cada um dos intervalos (faixas) de tempos iguais. Nenhuma informação está disponível sobre os tempos específicos dentro dos intervalos em que as falhas aconteceram. A Tabela 3.2 é um exemplo típico de dados agrupados. Ambas as tabelas são exemplos de dados completos, ou seja, todas as unidades falharam antes do teste ser terminado.

3.2.1 Dados Não Agrupados

Alguns dados de campo e todos os dados dos planejados testes de confiabilidade são obtidos na forma não agrupada. Logo, os resultados consistem de uma série de tempos de falhas $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N$ para as N unidades no teste. Na nomenclatura estatística o t_i é referido como a estatística de ordem do teste. Supondo que estimamos a confiabilidade em t_i simplesmente como a fração das unidades sobreviventes, o número de unidades que sobrevivem em t_i é exatamente $n = N - i$. Conseqüentemente, a confiabilidade é dada por:

$$\hat{R}(t_i) = 1 - \frac{i}{N} \quad (3.1)$$

Correspondentemente, a probabilidade de falha é dada por:

$$\hat{F}(t_i) = 1 - \hat{R}(t_i) = \frac{i}{N} \quad (3.2)$$

Tabela 3.1 – Dados de falhas não agrupados

i	t_i	i	t_i
0	0,0	5	1,00
1	0,41	6	1,08
2	0,58	7	1,17
3	0,75	8	1,25
4	0,83	9	1,35

Tabela 3.2 – Dados de falhas agrupados

Intervalo de tempo	Números de falhas
$0 \leq t < 3$	21
$3 \leq t < 6$	10
$6 \leq t < 9$	7
$9 \leq t < 12$	9
$12 \leq t < 15$	2
$15 \leq t < 18$	1

Embora a Eq. (3.1) possa ser usada para estimar confiabilidade, tem alguns inconvenientes quando N não é um número grande, digamos menor do que 10 ou 15, o que acontece freqüentemente. Em particular, achamos que a confiabilidade é zero para tempos depois da N -ésima falha. Se um teste muito maior estiver funcionando, por exemplo, usando $10 \times N$ unidades, é altamente provável que várias

destas unidades falhariam em tempos maiores do que t_N . Portanto, a Eq. (3.1) pode subestimar seriamente a confiabilidade. A estimativa é um tanto melhorada pelo argumento de que se um número muito grande de unidades foi testado, aproximadamente um número igual de falhas acontecerão em cada um dos intervalos entre os t_i , assim o número de falhas depois de t_N provavelmente será equivalente a este número em qualquer um dos intervalos. Deste argumento podemos estimar a probabilidade de falha em t_i como:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i}{N-1}. \quad (3.3)$$

E como $R = 1 - F$ temos:

$$\hat{R}(t_i) = \frac{N+1-i}{N+1}. \quad (3.4)$$

Outras medidas estatísticas foram usadas para estimar a fração de falha que acontece antes de t_i . Uma das mais usadas é:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i-0,3}{N+0,4}. \quad (3.5)$$

Na prática, a aleatoriedade e quantias limitadas de dados introduzem mais incerteza que a forma particular que será usada para estimar F ou R . Para valores grandes de N , produzem resultados quase idênticos para $F(t)$ depois das primeiras falhas. Para a maior parte devemos usar a Eq. (3.4) como um razoável compromisso entre a facilidade e a precisão computacional. Podemos estimar valores da função densidade de probabilidade em t_i como uma fórmula de diferença simples dada por:

$$\hat{f}(t) = -\frac{\hat{R}(t_{i+1}) - \hat{R}(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)}, \quad t_i < t < t_{i+1}. \quad (3.6)$$

Com a confiabilidade dada pela Eq. (3.4), temos para a função densidade de probabilidade:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(t_{i+1} - t_i)(N+1)}, \quad t_i < t < t_{i+1}. \quad (3.7)$$

Nós podemos também estimar a taxa de falha. Porém, uma vez que $f(t)$ é descontínuo em t_i , nós não podemos simplesmente avaliar $t = t_i$. Ao invés disso, nós observamos que $h(t)\Delta t$, é uma probabilidade condicional para a falha no intervalo entre t e $t + \Delta t$, dado que o sistema é operacional em t . Deste modo, temos:

$$h(t)(t_{i+1} - t_i) = \frac{\hat{f}(t)(t_{i+1} - t_i)}{R(t_i)}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad (3.8)$$

sendo $t = t_i$ e $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Finalmente, substituindo $f(t)$ e $R(t_i)$ pelas estimativas de $R(t_i)$ e $f(t)$ dadas pelas Eqs. (3.4) e (3.7), obtemos:

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{(t_{i+1} - t_i)(N + 1 - i)}, \quad t_i < t < t_{i+1}. \quad (3.9)$$

O uso destes estimadores de dados não agrupados *para* $R(t)$, $f(t)$, e $h(t)$ será mais bem entendido quando aplicarmos nos bancos de dados selecionados por este trabalho.

A estimativa da média ou variância da distribuição de falha para dados não agrupados é direta. A média é dada por:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i. \quad (3.10)$$

Enquanto que a variância é dada por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N}{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^2 - \hat{\mu}^2 \right]. \quad (3.11)$$

3.2.2 Dados Agrupados

Suponhamos que queremos estimar a confiabilidade, a taxa de falha, *ou* outras propriedades *de* uma distribuição de dados de falha como os da Tabela 3.2. Primeiro vamos definir a confiabilidade. O teste é começado com N itens. O número de itens sobreviventes é tabulado no fim de cada dos M intervalos de tempo em que os dados são agrupados: $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_M$. O número de itens sobreviventes nestes tempos é definido como: $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_M$. Uma vez que a confiabilidade $R(t)$ é

definida como a probabilidade de que um sistema exercerá sua função com sucesso por um período de tempo t , vamos estimar a confiabilidade no tempo t_i como sendo:

$$\hat{R}(t_i) = \frac{n_i}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.12)$$

que é uma generalização direta da Eq. (3.1). Uma vez que o número de falhas em geral é significativamente muito maior para dados agrupados do que para dados não agrupados, não há muita importância em formularmos estimativas mais precisas análogas às das Eqs. (3.4) e (3.5). Conhecendo os valores da confiabilidade no tempo t_i , aproximamos os valores para $t_i < t < t_{i+1}$ por meio de interpolação linear. Com a confiabilidade dada pela Eq. (3.10) podemos uma vez mais usar a Eq. (3.11) para obtermos a função densidade de probabilidade:

$$\hat{f}(t) = \frac{n_i - n_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)N}, \quad t_i < t < t_{i+1}. \quad (3.13)$$

Semelhantemente, as Eqs. (3.10) e (3.11) podem ser introduzidas na Eq. (3.8) para estimarmos a taxa de falha:

$$\hat{h}(t) = \frac{n_i - n_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)n_i}, \quad t_i < t < t_{i+1}. \quad (3.14)$$

A estimativa da média é dada por:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=0}^{M-1} t_i f_i \Delta_i \quad (3.15)$$

onde o tempo é avaliado no ponto central do intervalo que é dado por:

$$\bar{t}_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1}) \quad (3.16)$$

A largura do intervalo é dada por:

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i \quad (3.17)$$

A variância é aproximada como:

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=0}^{M-1-2} t_i f_i \Delta_i - \hat{\mu}^2 \quad (3.18)$$

3.3 MÉTODOS PARAMÉTRICOS

A plotagem da confiabilidade ou outras quantidades versus tempo nos fornece informações valiosas. Em geral, é mais desejável ajustar os dados de confiabilidade a alguma distribuição em particular, como a exponencial, normal, lognormal ou Weibull. Para que isto possa ser feito, uma boa amostra de dados precisa ser determinada em torno da natureza dos mecanismos de falha, deste modo o modelo resultante pode ser usado mais prontamente em técnicas analíticas encontradas na literatura.

A fim de obtermos modelos paramétricos para distribuições de falhas, primeiro devemos determinar qual a distribuição que mais adequadamente representará os dados e então determinar os parâmetros. Existe uma variedade de métodos estatísticos avançados para a determinação do melhor ajuste dos dados a uma distribuição em particular, para estimação dos parâmetros da distribuição e para calcular níveis de confiança para cada parâmetro. Poderíamos limitar nossa atenção a técnicas gráficas que são relativamente simples. Tais métodos permitem-nos avaliar o melhor ajuste visualmente, sem usar técnicas matemáticas avançadas e ao mesmo tempo estimar os parâmetros que definem a distribuição.

Em geral, o procedimento consiste em escolher uma distribuição e então plotar os dados de falhas não agrupados em um papel gráfico apropriado relativo a esta distribuição. Se os dados são descritos por esta distribuição, os pontos dos dados estarão compactados ao longo de uma linha direta. Desta forma podemos estimar os coeficientes angular e linear.

Entretanto, neste trabalho vamos desenvolver analiticamente as expressões matemáticas necessárias para entendermos a construção do gráfico e calcularmos os parâmetros da linha resultante apenas para as distribuições exponencial e de Weibull.

Além disso, ao invés de plotarmos os dados num papel gráfico apropriado relativo a esta distribuição vamos ajustar estes dados à equação da reta dada por:

$$y = a_1x + a_0, \quad (3.19)$$

usando para isto o método dos mínimos quadrados para determinarmos os parâmetros a_1 e a_0 .

3.3.1 Método dos Mínimos Quadrados Aplicado à Equação de Uma Reta

Este método é utilizado para superar a dificuldade de sinais opostos existentes no cálculo do desvio (erro). Para minimizar a soma dos quadrados dos desvios, temos:

$$\sum_{i=1}^m d_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y}_i)^2, \quad (3.20)$$

onde d é o desvio, y é o valor verdadeiro encontrado na tabela e \bar{y} é um valor aproximado de y .

Supondo da observação da tendência geral dos dados que \bar{y} possa ser uma função linear dada por:

$$\bar{y}_i = a_1x_i + a_0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.21)$$

Assim a Eq. (3.20) pode ser escrita da seguinte forma:

$$S = \sum_{i=1}^m d_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - a_1x_i - a_0)^2. \quad (3.22)$$

Como só há duas grandezas desconhecidas em S : a_1 e a_0 . Se desejarmos minimizar S , as primeiras derivadas parciais de S com respeito a a_1 e a_0 devem ser nulas, ou seja:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^m 2(y_i - a_1x_i - a_0)(-1) = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^m 2(y_i - a_1x_i - a_0)(-x_i) = 0. \quad (3.24)$$

Reordenando temos:

$$ma_0 + \left(\sum x_i\right)a_1 = \sum y_i, \quad (3.25)$$

$$\left(\sum x_i\right)a_0 + \left(\sum x_i^2\right)a_1 = \sum x_i y_i. \quad (3.26)$$

Há duas equações lineares em duas variáveis: a_1 e a_0 . Portanto, supondo que as somas se estendem sobre todos os pontos de dados, ou seja, o símbolo \sum deve se entendido como $\sum_{i=1}^m$. Podemos facilmente verificar que a_1 e a_0 são dados por:

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \quad (3.27)$$

$$a_1 = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}. \quad (3.28)$$

Devemos observar que o denominador destas últimas expressões desaparece somente se todos os x_i forem idênticos. Portanto, enquanto dois ou mais valores de x são tabelados a solução das Eqs. (3.27) e (3.28) existe e é única. Esta solução quando usada na Eq. (3.19) produz a curva linear de ajuste por mínimos quadrados.

3.3.2 Distribuição Exponencial

Freqüentemente a distribuição exponencial ou modelo de taxa de falha constante é o primeiro a ser usado quando nós tentamos ajustar os dados de falhas a uma específica função densidade de probabilidade. Além de ser a única distribuição no qual somente um parâmetro deve ser estimado, fornece um razoável ponto de partida para considerarmos outras distribuições de dois ou três parâmetros. Por este método, a distribuição dos dados pode indicar se a taxa de falha é crescente ou decrescente e este por sua vez pode fornecer uma percepção se outra distribuição deve ser considerada, isto no caso de plotarmos os dados num papel gráfico apropriado relativo a esta distribuição.

Para desenvolvermos as expressões matemáticas para chegarmos à equação de uma reta, começamos tomando o logaritmo natural da função de confiabilidade da distribuição exponencial dada por $R(t) = \exp(-\lambda t)$. Desta forma temos:

$$\ln R = -\lambda t, \quad (3.29)$$

ou

$$\ln(1/R) = \lambda t \quad (3.30)$$

Na prática é muito comum usarmos a expressão $F = 1 - R$, onde $F(t)$ é dada pela Eq. (3.3). Deste modo temos:

$$\ln\left(\frac{1}{1-F}\right) = \lambda t \quad (3.31)$$

Se compararmos a Eq. (3.31) com a equação da reta dada pela Eq. (3.19) vamos estabelecer as seguintes relações:

$$y = \ln(1/(1-F)), \quad x = t, \quad a_1 = \lambda, \quad e \quad a_0 = 0.$$

Portanto, ao determinarmos a_1 pelo método dos mínimos quadrados estaremos determinando o parâmetro da distribuição exponencial λ .

3.3.3 Distribuição de Weibull

Distribuição de Weibull de dois parâmetros

Como no caso da distribuição exponencial, ao invés de plotarmos os dados de tempos de falhas num papel gráfico apropriado relativo à distribuição de Weibull de dois parâmetros, vamos ajustar estes dados à equação de uma reta.

Para desenvolvermos as expressões matemáticas para chegarmos à equação de uma reta, começamos tomando o logaritmo natural da função de confiabilidade da distribuição de Weibull de dois parâmetros por $R(t) = \exp[-(t/\alpha)^\beta]$. Desta forma temos:

$$\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln\left(\frac{1}{R}\right) \quad (3.32)$$

Então, tomando o logaritmo novamente, obtemos:

$$\ln t = \frac{1}{\beta} \ln \left[\ln \left(\frac{1}{R} \right) \right] + \ln \alpha \quad (3.33)$$

Podemos reescrever esta equação como:

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{R} \right) \right] = \beta \ln t - \beta \ln \alpha \quad (3.34)$$

Na prática é muito comum usarmos a expressão $F = 1 - R$, onde $F(t)$ é dada pela Eq, (3.3). Deste modo temos:

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right] = \beta \ln t - \beta \ln \alpha \quad (3.35)$$

Se compararmos a Eq. (3.31) com a equação da reta dada pela Eq. (3.19) vamos estabelecer as seguintes relações:

$$y = \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right],$$

$$x = \ln t, \quad m = \beta,$$

$$b = -\beta \ln \alpha.$$

Portanto, ao determinarmos β e b pelo método dos mínimos quadrados estaremos determinando o parâmetro β da distribuição de Weibull de dois parâmetros. Com a determinação deste parâmetro podemos calcular o parâmetro α por meio da Eq. (3.19).

Distribuição de Weibull de três parâmetros

A distribuição de Weibull de três parâmetros é muito útil quando nenhuma falha ocorre antes de um limiar de tempo t_0 . Se tais dados são plotados num papel gráfico apropriado relativo à distribuição de Weibull de dois parâmetros, o resultado é uma linha descendente côncava.

Uma maneira possível de corrigir a curvatura é selecionar um limiar de tempo t_0 igual ao tempo da primeira falha t_1 . Este passo tem sido adotado com frequência na prática para compensar a curvatura e torná-la ascendente. Um procedimento mais satisfatório é escolher um limiar menor dado por:

$$t_0 = at_1, \quad (3.36)$$

onde a é um número menor do que um.

A função de confiabilidade da distribuição de Weibull de três parâmetros é dada por:

$$R(t) = \exp[-((t-t_0)/\alpha)^\beta].$$

Após manipulações matemáticas, em vez da Eq. (3.31) vamos obter:

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right] = \beta \ln(t-t_0) - \beta \ln \alpha, \quad (3.37)$$

Em outras palavras simplesmente substituímos t por $t - t_0$ para o eixo horizontal. A inclinação β e, portanto, a e os parâmetros β e α , são determinados da mesma maneira que antes.

3.4 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DA POPULAÇÃO ORIGINAL DE DADOS INCOMPLETOS

No caso de dados incompletos, estimar os valores dos parâmetros da função de distribuição e realizar o teste de aderência para função de distribuição da população original, são dois problemas fundamentais de confiabilidade na engenharia. Pois, neste caso, o erro do método de máxima verossimilhança ou método dos momentos é grande e o teste não pode discriminar entre hipóteses. A seguir, serão apresentados dois métodos encontrados na literatura que dão melhores resultados do que os métodos de máxima verossimilhança e dos momentos para o caso de dados incompletos.

3.4.1 MÉTODO DE TIANJIE-ZEGONG

O método será desenvolvido para uma função de distribuição de probabilidade com dois parâmetros desconhecidos. Obviamente, o método pode ser estendido para outras funções de distribuição de probabilidade com um ou mais parâmetros desconhecidos.

Supondo que há uma amostra de dados (Tianjie and Zegong, 1988),

$$X_i \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

onde M é o tamanho da amostra de dados (ou capacidade nominal da amostra). Se esta amostra de dados vem da população original $F(X,a,b)$, onde a e b são os parâmetros desconhecidos, temos a relação entre freqüências e probabilidades:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_i}{n} = F(C_i, a, b) - F(C_{i-1}, a, b) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.38)$$

onde n é a capacidade verdadeira da amostra (que é desconhecida), m_i é o número de dados da amostra no intervalo $(C_{i-1}, C_i]$, C_{i-1} e C_i são os pontos extremos da amostra de dados nas classes e N é o número de classes.

Quando n não é infinito, mas bastante grande, a Eq. (3.38) torna-se:

$$\frac{m_i}{n} \approx F(C_i, a, b) - F(C_{i-1}, a, b) \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.39)$$

Em termos gerais, para determinarmos a , b e n , devemos escolher arbitrariamente três equações e ao mesmo tempo mudar o sinal de aproximadamente igual para o sinal de igual, tal como:

$$\frac{m_i}{n} = F(C_i, a, b) - F(C_{i-1}, a, b) \quad (3.40)$$

$$\frac{m_j}{n} = F(C_j, a, b) - F(C_{j-1}, a, b) \quad (3.41)$$

$$\frac{m_k}{n} = F(C_k, a, b) - F(C_{k-1}, a, b) \quad (3.42)$$

Como as equações. (3.40), (3.41) e (3.42) são soluções aproximadas, obteremos grupos diferentes de solução de a , b e n , para grupos diferentes de i , j e k . Através de testes de aderência, escolheremos o grupo de solução \bar{a} , \bar{b} e \bar{n} que faz a

aproximada função de distribuição $F(X, \bar{a}, \bar{b})$ ser o melhor ajuste para a amostra de dados.

Observações sobre o método:

1. Pode ser usado tanto para dados incompletos quanto para dados completos;
2. Quando os dados são incompletos, os valores estimados dos parâmetros são mais exatos do que aqueles obtidos pelo método dos momentos ou pelo método da máxima verossimilhança;
3. Se há muitos dados na amostra e não é conveniente tratá-los como um todo, podemos somente fazer uso de amostras parciais de dados para estimar os parâmetros da população original;
4. Este método se aplica quando a forma da função de densidade de probabilidade é conhecida. Serve também como estimativa inicial para a otimização dos parâmetros encontrados por este método.

3.4.2 Melhoramento de Método de TIANJIE-ZEGONG

Os resultados do método de Tianjie and Zegong (1988) mostram que os valores estimados para os parâmetros, quando os dados são incompletos, são mais exatos do que os obtidos pelos métodos dos momentos e da máxima verossimilhança. Contudo, as equações colocadas no método são complicadas, tanto que a solução dos valores dos parâmetros só pode ser obtida pelo método de iteração, portanto muitos cálculos dos valores da função de distribuição devem ser realizados. Como algumas funções de distribuição (tal como a distribuição normal, a distribuição gama, etc.) não podem ser expressas como uma função elementar, os cálculos dos valores destas funções de distribuição nem sempre são fáceis. Isto cria um inconveniente para estimar os valores dos parâmetros pelo método, o qual toma muito tempo.

Considerando estes problemas, Tianjie and Zegong (1990), apresentaram outro método baseado na relação entre a frequência e a função de densidade de probabilidade para estimar os valores dos parâmetros. Através de exemplos mostram que este método pode ser também empregado para estimar os valores dos parâmetros de dados incompletos. Além disso, as equações usadas para calcular os

parâmetros são mais simples do que as listadas no método anterior (item 3.4.1). Durante a solução dos parâmetros o cálculo do valor da função de distribuição não precisa ser realizado. Particularmente, os valores dos parâmetros de algumas funções de distribuição podem ser obtidos diretamente da fórmula numa ordem conveniente.

Como no método anterior, este método será desenvolvido para uma função de distribuição de probabilidade com dois parâmetros desconhecidos. Obviamente, o método pode ser estendido para outras funções de distribuição de probabilidade com um ou mais parâmetros desconhecidos.

Suponhamos que há uma amostra de dados (Tianjie and Zegong, 1990),

$$X_i \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

onde M é o tamanho da amostra de dados (ou capacidade nominal da amostra). Se esta amostra de dados vêm da população original $F(X, a, b)$, onde a e b são os parâmetros desconhecidos, e quando n é muito grande e h é muito pequeno, de acordo com as relações entre uma função densidade de probabilidade e sua função de distribuição e entre a função de distribuição e a freqüência, temos:

$$f(C_i; a, b) \approx \frac{F(C_i + h; a, b) - F(C_i - h; a, b)}{2h} \approx \frac{m_i}{2nh}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.43)$$

ou seja,

$$f(C_i; a, b) \approx \frac{m_i}{2nh}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.44)$$

onde n é o tamanho verdadeiro da amostra (que é desconhecido), m_i é o número de dados da amostra entre $C_i - h$ e $C_i + h$, C_i é o ponto médio dividindo a amostra de dados nos intervalos, h é a metade do comprimento de um intervalo e N é o número de intervalos.

Para determinarmos a , b e n , devemos escolher arbitrariamente três equações e ao mesmo tempo mudar o sinal de aproximadamente igual para o sinal de igual, tal como:

$$f(C_i; a, b) = \frac{m_i}{2nh}, \quad (3.45)$$

$$f(C_j; a, b) = \frac{m_j}{2nh}, \quad (3.46)$$

$$f(C_k; a, b) = \frac{m_k}{2nh}. \quad (3.47)$$

Como as equações. (3.45), (3.46) e (3.47) são soluções aproximadas, obteremos grupos diferentes de solução de a , b e n , para grupos diferentes de i , j e k . Através de testes de aderência, escolheremos o grupo de solução \bar{a} , \bar{b} e \bar{n} que faz a aproximada função de distribuição $F(X, \bar{a}, \bar{b})$ ser o melhor ajuste para a amostra de dados.

Observações sobre o método:

1. Pode ser usado tanto para dados incompletos quanto para dados completos;
2. Quando os dados são incompletos, os valores estimados dos parâmetros são mais exatos do que aqueles obtidos pelo método dos momentos ou pelo método da máxima verossimilhança, mas um pouco menos exato do que o método descrito no item 3.4.1. A razão se deve ao fato da troca da derivada pela expressão de diferença na Eq. (3.43);
3. As equações usadas para calcular os parâmetros são mais simples do que as do item 3.4.1. Por exemplo, os valores dos parâmetros das distribuições exponencial, normal e lognormal podem ser obtidos diretamente da fórmula numa conveniente ordem. No caso da distribuição de Weibull, apenas o parâmetro β pode ser obtido diretamente da fórmula, enquanto que o parâmetro α só pode ser obtido pelo método de iteração;
4. Este método também só se aplica quando a forma da função de densidade de probabilidade é conhecida. Serve também como estimativa inicial para a otimização dos parâmetros encontrados por este método.

3.4.3 Exemplo de Aplicação

Este exemplo foi retirado das referências de Tianjie and Zegong (1988 e 1990) e Zegong and Changhong (1992). Suponhamos que a faixa de distribuição de uma variável aleatória t é dividida em 14 intervalos mutuamente exclusivos. Então podemos calcular as freqüências teóricas de 1000 observações aleatórias cuja função de distribuição é especificada por completo na Tabela 3.3. Os valores exatos dos parâmetros usados para gerar os dados desta tabela são:

- Distribuição Exponencial: $\lambda = 0,25$;
- Distribuição de Weibull: $\alpha = 2,5$ $\beta = 5,5$.

Tabela 3.3 - Freqüências teórica de 1000 observações aleatórias.

Intervalo	Distribuição Exponencial	Distribuição de Weibull
Abaixo – 0,5	117,5	2,489
0,5 - 1,5	195,2	35,61
1,5 – 2,5	152,0	91,93
2,5 – 3,5	118,4	146,0
3,5 – 4,5	92,20	178,1
4,5 – 5,5	71,81	177,9
5,5 – 6,5	55,92	148,8
6,5 – 7,5	43,56	105,1
7,5 – 8,5	33,92	62,67
8,5 – 9,5	26,42	31,52
9,5 – 10,5	20,57	13,32
10,5 – 11,5	16,02	4,704
11,5 – 12,5	12,48	1,382
12-5 - Acima	43,94	0,412

Para gerarmos dados incompletos, vamos omitir algumas das classes e arredondar as freqüências teóricas do resto das classes a números inteiros. Estes inteiros são então considerados como os números das observações da amostra incompleta nos intervalos mostrados na Tabela 3.4 e podem ser empregados para estimar os valores dos parâmetros e do tamanho real da amostra para uso em métodos diferentes.

Os resultados calculados pelo método apresentado no item 3.4.2 (Tianjie and Zegong, 1990) são mostrados na Tabela 3.5. A Tabela 3.6 fornece os resultados calculados pelo método apresentado no item 3.4.1 (Tianjie and Zegong, 1988) e a Tabela 3.7 fornece os resultados calculados pelo método da Máxima Verossimilhança. Estas três tabelas mostram que os erros relativos entre os valores estimados dos parâmetros e do tamanho real da amostra e os dados pelo método apresentado no item 3.4.2 são levemente maiores do que os do método apresentado no item 3.4.1, mas muito menores do que os calculados pelo método da Máxima Verossimilhança.

Tabela 3.4 - Frequência observada de uma amostra incompleta.

Intervalo	Média do intervalo	Distribuição Exponencial	Distribuição de Weibull
5,5 – 6,5	6,0	56	-
6,5 – 7,5	7,0	44	105
7,5 – 8,5	8,0	34	63
8,5 – 9,5	9,0	26	32
9,5 – 10,5	10,0	21	13
10,5 – 11,5	11,0	16	5
11,5 – 12,5	12,0	12	-
Total		209	218

Tabela 3.5 - Resultados calculados pelo método apresentado no item 3.4.2.

	Valor exato	Valor Estimado	Erro Relativo (%)
Distribuição Exponencial	$\lambda = 0,25$ $n = 1000$	$\lambda = 0,2513$ $n = 1009$	0,52 0,90
Distribuição de Weibull	$\alpha = 2,5$ $\beta = 5,5$ $n = 1000$	$\alpha = 2,5858$ $\beta = 5,6351$ $n = 935$	3,40 2,40 6,50

Tabela 3.6 - Resultados calculados pelo método apresentado no item 3.4.1.

	Valor exato	Valor Estimado	Erro Relativo (%)
Distribuição Exponencial	$\lambda = 0,25$ $n = 1000$	$\lambda = 0,2513$ $n = 1007$	0,52 0,70
Distribuição de Weibull	$\alpha = 2,5$ $\beta = 5,5$ $n = 1000$	$\alpha = 2,4108$ $\beta = 5,4962$ $n = 1004$	0,76 0,07 0,40

Tabela 3.7 - Resultados calculados pelo método da Máxima Verossimilhança.

	Valor exato	Valor Estimado	Erro Relativo (%)
Distribuição Exponencial	$\lambda = 0,25$ $n = 1000$	$\lambda = 0,1244$	50,24
Distribuição de Weibull	$\alpha = 2,5$ $\beta = 5,5$ $n = 1000$	$\alpha = 9,1663$ $\beta = 8,2862$	266,7 50,66

Uma outra amostra incompleta é usada para testar o método apresentado no item 3.4.2. A Tabela 3.8 mostra a frequência arredondada para números inteiros de uma faixa diferente retirada da Tabela 3.3. Os resultados são mostrados na Tabela 3.9, da qual é visto que embora a amostra seja diferente, os resultados da Tabela 3.5 e Tabela 3.9 estão muito próximos, ou seja, podemos empregar amostras de diferentes faixas para estimar os valores dos parâmetros da população original e do tamanho verdadeiro da amostra.

Tabela 3.8 - Frequência observada de outra amostra incompleta.

Intervalo	Média do intervalo	Distribuição Exponencial	Distribuição de Weibull
0,5 – 1,5	1,0	195	36
1,5 – 2,5	2,0	152	92
2,5 – 3,5	3,0	118	146
3,5 – 4,5	4,0	92	178
4,5 – 5,5	5,0	72	178
Total		629	630

Tabela 3.9 - Resultados calculados pelo método apresentado no item 3.4.2.

	Valor exato	Valor Estimado	Erro Relativo (%)
Distribuição Exponencial	$\lambda = 0,25$ $n = 1000$	$\lambda = 0,2489$ $n = 1000$	0,44 0,00
Distribuição de Weibull	$\alpha = 2,5$ $\beta = 5,5$ $n = 1000$	$\alpha = 2,4815$ $\beta = 5,5334$ $n = 1003$	0,74 0,61 0,30

CAPÍTULO 4

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DE OTIMIZAÇÃO

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados dois métodos de procura direta (Hooke e Jeeves e Nelder-Mead) da teoria de otimização. Estes métodos serão usados para otimização dos parâmetros das funções propostas nos capítulos V e VI, para representar processo de falha de equipamentos reparáveis cuja função taxa de falha apresenta um comportamento do tipo banheira. O erro no valor do parâmetro obtido por estes modelos é menor do que o do método de máxima verossimilhança, principalmente no caso de dados incompletos.

4.2 MÉTODO DE PESQUISA DIRETA

São métodos de minimização de funções que exigem somente o cálculo da função em qualquer ponto no espaço de seus argumentos. Os argumentos da função são os parâmetros que desejamos estimar.

Um método de pesquisa direta, para minimização de uma função de vários parâmetros, é uma técnica que compara o valor da função numa seqüência de pontos no espaço de parâmetros e que tenta gerar um novo número de seqüências de pontos que têm um menor valor funcional. Na execução da comparação dos pontos, o método pode usar o sinal da diferença nos valores da função ou pode usar o tamanho relativo dos valores da função.

Os algoritmos para métodos de pesquisa direta têm geralmente convergência mais baixa do que técnicas baseadas em informação de gradiente. Apesar disto, o tempo gasto para uma solução e o esforço despendido pelo usuário são geralmente bastante baixos.

Certos métodos de pesquisa direta são relativamente fáceis de descrever. Os métodos de Hooke e Jeeves e de Nelder-Mead são baseados em cálculos simples que podem ser demonstrados graficamente para funções de 2 parâmetros.

No caso de um conjunto de dados agrupados temos que obter o histograma de freqüências. As coordenadas dos pontos médios dos intervalos no histograma de freqüências são (\bar{t}_i, y_i^*) ($i = 1, 2, \dots, n$), onde \bar{t}_i é a coordenada horizontal do ponto médio do i ésimo intervalo e y_i^* é a freqüência de ocorrência dos valores medidos na faixa da i ésima classe. Já no caso de um conjunto dados desagrupados basta que usemos os pares de dados como (\bar{t}_i, y_i^*) ($i = 1, 2, \dots, n$), onde \bar{t}_i é a coordenada horizontal (eixo das abscissas) e y_i^* é a coordenada vertical (eixo das ordenadas).

Supondo que a função de taxa de falha é dada por (veja as Eq. (3.5) e (3.6)):

$$y = f(t, \alpha_j, \beta_j), \quad (4.1)$$

onde α_j e β_j são os parâmetros de escala e de forma da função de taxa de falha.

Obviamente, o erro residual pode existir entre o valor aproximado de y_i^* (obtido dos dados agrupados ou desagrupados) e os valores da função de taxa de falha $y_i (= f(\bar{t}_i, \alpha_j, \beta_j))$, ou seja,

$$r_i(\alpha_j, \beta_j) = f(\bar{t}_i, \alpha_j, \beta_j) - y_i^* \quad (4.2)$$

A função objetivo que será minimizada pelos métodos pode ser dada pela soma dos valores absolutos do erro residual, ou seja:

$$E(\alpha_j, \beta_j) = \sum_{i=1}^n |r_i(\alpha_j, \beta_j)|, \quad (4.3)$$

ou pela soma dos quadrados dos erros, dada por:

$$E(\alpha_j, \beta_j) = \underline{r} \cdot \underline{r}^T \quad (4.4)$$

Os métodos diretos baseiam-se na comparação dos valores da função objetivo e são particularmente atrativos em situações onde derivadas da função objetivo e das funções restrições não são viáveis.

A seguir, apresentaremos os métodos de Hooke e Jeeves e Nelder-Mead, cujos detalhes e exemplos de aplicações podem ser vistos nas referências de Nash e Walker-Smith (1987), Zegong and Changhong (1992), Shetty et al. (2006) e de Chen et al. (2007). Estes métodos exigem a adoção de uma boa estimativa inicial dos parâmetros, para garantir um rápido progresso do processo de minimização dos dois métodos. Boas estimativas podem ser obtidas usando os métodos dos momentos ou da máxima verossimilhança.

4.3 MÉTODO DE HOOKE E JEEVES

Nesta seção revisaremos brevemente o método de Hooke e Jeeves (Hooke e Jeeves, 1961) com base em duas referências. A primeira revisão do método de Hooke e Jeeves será baseada no conteúdo apresentado na referência Shetty et al. (2006), no qual temos acesso a interpretações geométricas de detalhes de operações presentes no método de Nelder-Mead. A seguir, apresentaremos uma segunda revisão baseada na referência Zegong e Changhong (1992) que usa este método para a otimização dos parâmetros das funções de distribuição exponencial, normal, lognormal e de Weibull de dados incompletos.

4.3.1 Primeira Revisão do Método de Hooke e Jeeves

O método de Hooke e Jeeves executa dois tipos de procura: *procura exploratória* e *procura padrão*. As duas primeiras iterações têm seu procedimento ilustrado na Fig. 4.1. Dado x_1 , a procura exploratória ao longo das direções de coordenadas produz o ponto x_2 . Enquanto que a procura padrão ao longo da direção x_2-x_1 nos leva ao ponto y . Outra procura exploratória partindo de y fornece o ponto x_3 . A próxima procura é conduzida ao longo da direção x_3-x_2 , produzindo y' . O processo então é repetido.

Resumo do método de Hooke e Jeeves usando procura por linha

Na proposta original de Hooke e Jeeves, o método não funciona para qualquer procura por linha, mas toma passos discretos ao longo das direções de procura.

Aqui vamos apresentar uma versão contínua do método que usa procura por linhas ao longo das direções das coordenadas d_1, \dots, d_n e da direção padrão.

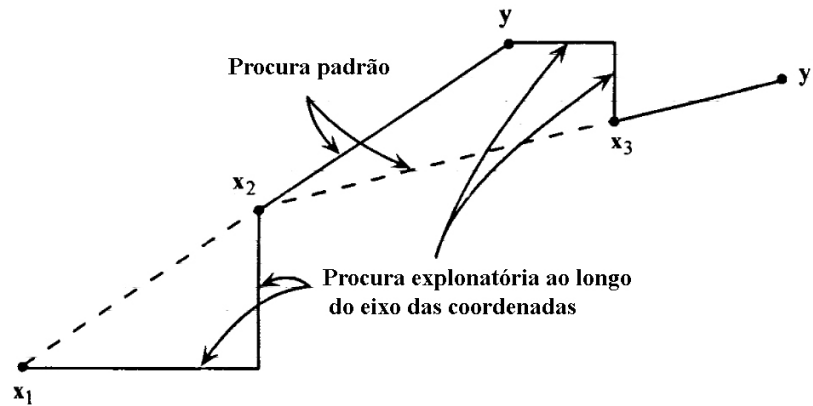


Figura 4.1 – Linhas de procura do método de Hooke e Jeeves

Inicialização do passo: Escolha um escalar $\varepsilon > 0$ para ser usado na finalização do algoritmo. Escolha um ponto inicial x_1 , faça $y_1 = x_1$ e $k = j = 1$ e vá para o passo principal.

Passo Principal

1. Seja λ_j uma solução ótima para minimizar $f(y_j + \lambda d_j)$ sujeita a $\lambda \in R$, e seja $y_{j+1} = y_j + \lambda_j d_j$. Se $j < n$, substitua j por $j+1$, e repita o passo 1. Caso contrário, se $j = n$, faça $x_{k+1} = y_{n+1}$. Se $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$, pare; caso contrário, vá para o passo 2;
2. Seja $d = x_{k+1} - x_k$, e $\hat{\lambda}$ uma solução ótima para minimizar $f(x_{k+1} + \lambda d)$ sujeita a $\lambda \in R$. Seja $y_1 = x_{k+1} + \hat{\lambda} d$, e $j = 1$, substitua k por $k+1$, e vá para o passo 1.

Método de Hooke e Jeeves com passos discretos

Como mencionado anteriormente, o método de Hooke e Jeeves, como originalmente proposto, não funciona na procura por linhas, mas, ao invés disto

adota um esquema simples envolvendo avaliações funcionais. Segue um resumo do método.

Passo inicial:

Sejam d_1, \dots, d_n as direções das coordenadas. Escolha um escalar $\varepsilon > 0$ para ser usado na finalização do algoritmo. Além disso, escolha um tamanho de passo inicial, $\Delta \geq \varepsilon$ e um fator de aceleração, $\alpha > 0$. Escolha um ponto inicial x_1 , faça $y_1 = x_1$ e $k=j=1$, e vá para o passo principal.

Passo Principal

1. Se $f(y_j + \Delta d_j) < f(y_j)$, a tentativa é chamada de sucesso, faça $y_{j+1} = y_j + \Delta d_j$, e vá para o passo 2. Porém, se $f(y_j + \Delta d_j) \geq f(y_j)$, a tentativa não é válida. Neste caso, se $f(y_j - \Delta d_j) < f(y_j)$, faça $y_{j+1} = y_j - \Delta d_j$, e vá para o passo 2; se $f(y_j - \Delta d_j) \geq f(y_j)$, faça $y_{j+1} = y_j$, e vá para o passo 2;
2. Se $j < n$, substitua j por $j+1$, e repita o passo 1. Caso contrário, vá para o passo 3 se $f(y_{n+1}) < f(x_k)$, e para o passo 4 se $f(y_{n+1}) > f(x_k)$;
3. Faça $x_{k+1} = y_{n+1}$ e $y_i = x_{k+1} + \alpha(x_{k+1} - x_k)$. Substitua k por $k+1$, faça $j=1$, e vá para o passo 1;
4. Se $\Delta \leq \varepsilon$ pare; x_k é a solução procurada. Caso contrário, substitua Δ por $\Delta/2$.

Faça $y_1 = x_k$, $x_{k+1} = x_k$ substitua k por $k+1$, faça $j=1$, e repita o passo 1.

Nos passos 1 e 2 acima o passo descreve uma procura exploratória. Além disso, o passo 3 é um passo de aceleração ao longo da direção $x_{k+1} - x_k$. Observar que a decisão de se aceitar ou rejeitar o passo de aceleração não é feita até que uma procura exploratória seja executada. No passo 4, o tamanho do passo Δ é reduzido. O procedimento pode ser facilmente modificado de tal forma que diferentes tamanhos de passos possam ser usados ao longo das diferentes direções.

4.3.2 Segunda Revisão do Método de Hooke e Jeeves

O método de Hooke e Jeeves, conhecido como o método de pesquisa padrão, entre os métodos de pesquisa direta, é o mais simples de entender, programar e usar. Exige limitada capacidade de armazenagem e tem uma aceitável confiabilidade na busca do mínimo das funções. Este método alterna seqüências de movimentos exploratórios locais com extrapolações.

Para começar o algoritmo precisamos definir:

1. O passo inicial: depende da magnitude dos parâmetros. Quando todos os parâmetros estão na faixa de (1, 10), é recomendado um valor próximo de 1,0 para o passo inicial;
2. O fator de redução do passo: um valor típico é dado por 0,1;
3. A estimativa inicial dos parâmetros (chute inicial): deve ser boa para garantir um rápido progresso do processo de minimização, pois será a base para a definição do passo inicial. Boas estimativas podem ser obtidas usando os métodos dos momentos ou da máxima verossimilhança, um método gráfico ou uma aproximação preliminar;
4. Os limites inferior e superior dos parâmetros: faixa onde se localizam os parâmetros procurados. Durante o processo de estimação do parâmetro esses limites não devem ser violados;
5. Os parâmetros mascarados: parâmetros que durante o processo de estimação não devem ser alterados.

O passo (ψ_j) controla o tamanho dos movimentos exploratórios e que não são necessariamente iguais para todos os j . Uma vez que ψ_j é selecionado, permanece fixo em magnitude. Por exemplo, para estimar os valores ótimos dos parâmetros $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ da função de Weibull, o cálculo começa pela seleção de um ponto exploratório inicial $P_1(\alpha_1, \beta_1)$ onde (α_1 e β_1) podem ser obtidos usando o método de máxima verossimilhança no plano α - β e a função objetivo é avaliada em $P_1(\alpha_1, \beta_1)$.

Conhecendo

$$E(\alpha_1, \beta_1) = \sum_{i=1}^n |r_i(\alpha_1, \beta_1)|, \quad (4.5)$$

substituímos α_1 para $\alpha_1 + \psi_1$ e avaliamos E neste novo ponto e o procedimento é repetido. Se E mostra melhoramento como um resultado deste movimento ($E(\alpha_1 + \psi_1, \beta_1) < E(\alpha_1, \beta_1)$), então, que este novo ponto seja o próximo ponto exploratório, que chamaremos de $P_{11}(\alpha_1 + \psi_1, \beta_1)$. Se não melhora em $\alpha_1 + \psi_1$, então tentamos $\alpha_1 - \psi_1$ e este será o novo ponto exploratório P_{11} . Se E agora mostra melhoramento, o procedimento é repetido. No evento que E não melhora nem em $\alpha_1 + \psi_1$ ou $\alpha_1 - \psi_1$, colocamos o novo ponto exploratório igual ao próximo ponto exploratório inicial.

No próximo ponto exploratório substituímos β_1 por $\beta_1 + \psi_2$ e isto estabelece a posição do próximo ponto exploratório P_{12} como acima. O procedimento é repetido, e no fim desta seqüência de movimentos exploratórios, teremos estabelecido um melhor ponto. Os valores ótimos estimados devem satisfazer uma determinada condição de convergência.

4.4 MÉTODO DE NELDER–MEAD

Nesta seção revisaremos brevemente o método de Nelder–Mead (Nelder e Mead, 1965) com base em duas referências. A primeira revisão do método de Nelder–Mead será baseada no conteúdo apresentado na referência Chen et al. (2007), no qual temos acesso a um fluxograma e a interpretações geométricas em detalhes dos cinco tipos de operações presentes no algoritmo de Nelder–Mead. A seguir, apresentaremos uma segunda revisão baseada na referência Zegong and Changhong (1992) que usa este método para otimização dos parâmetros das funções de distribuição exponencial, normal, lognormal e de Weibull de dados incompletos.

4.4.1 Primeira Revisão do Método de Nelder–Mead

O algoritmo de Nelder–Mead foi proposto como um método de derivação livre para a minimização da estimativa da função de valor real $f(x)$ para $x \in R^n$. O conceito essencial por trás do procedimento de procura do algoritmo de Nelder–Mead é que o pior vértice é substituído por um novo melhor vértice em cada iteração

até que haja convergência dos vértices. Além disso, toda iteração do algoritmo de Nelder–Mead tem uma interessante interpretação geométrica. Assim sendo, vamos resumir o procedimento de procura do algoritmo de Nelder–Mead da seguinte forma:

1. Antes de executar o algoritmo, quatro parâmetros escalares devem ser especificados para definir um completo método de Nelder–Mead que são os coeficientes de reflexão (ω), expansão (θ), contração (γ), e redução (σ). Lagarias et al. (1998) indicam que estes quatro coeficientes deveriam satisfazer as seguintes condições:

$$\omega > 0, \quad \theta > 1, \quad \theta > \omega, \quad 1 > \gamma > 0, \quad 1 > \sigma > 0 . \quad (4.6)$$

Na literatura usam-se quase que universalmente como padrão do algoritmo de Nelder–Mead os seguintes valores:

$$\omega = 1, \quad \theta = 2, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{2} .$$

2. No início de cada iteração, $(n + 1)$ vértices são identificados, cada um dos quais é um ponto do R^n . Assumindo que cada iteração começa ordenando e etiquetando estes vértices como x^1, x^2, \dots, x^{n+1} , tal que $f(x^1) \leq f(x^2) \leq \dots \leq f(x^{n+1})$. Define-se

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x^i}{n}$ como o centróide dos melhores pontos n (todos os vértices com exceção de x^{n+1}).

3. O resultado de qualquer iteração é ou (i) um único vértice novo, que substitui x^{n+1} no conjunto de vértices para a próxima iteração, ou (ii) uma redução (*shrinkage*), onde um conjunto de novos pontos n junto com x^1 formaria um novo conjunto de vértices para a próxima iteração. Especificamente, quatro operações diferentes, que são a REFLEXÃO, EXPANSÃO, CONTRAÇÃO PARA DENTRO e CONTRAÇÃO PARA FORA, produzem um único vértice novo enquanto que a operação de REDUÇÃO (*SHRINKAGE*) que substitui tudo, menos um dos vértices (no caso x^1), para formar um novo conjunto de vértices
4. . A operação de REFLEXÃO significa o pior ponto x^{n+1} é refletido pelo centróide \bar{x} por um fator igual a ω . Baseado no resultado da operação de REFLEXÃO, a

operação de EXPANSÃO estende o ponto de reflexão juntamente com o caminho de reflexão por um fator igual a θ .

5. A operação CONTRAÇÃO PARA FORA move o ponto de reflexão para o centróide por um fator de γ . Por outro lado, a operação CONTRAÇÃO PARA DENTRO move o pior ponto para o centróide \bar{x} por um fator de γ .
6. A operação de REDUÇÃO (*SHRINKAGE*) faz com que todos os vértices, exceto o melhor ponto, tenham suas distâncias em relação ao melhor ponto reduzidas por um fator igual a σ .

Observação: Por meio de interpretações geométricas a Fig. 4.2 mostra em detalhes os cinco tipos de operações presentes no algoritmo de Nelder–Mead.

4.4.1.1 Estrutura algorítmica para o algoritmo de Nelder–Mead

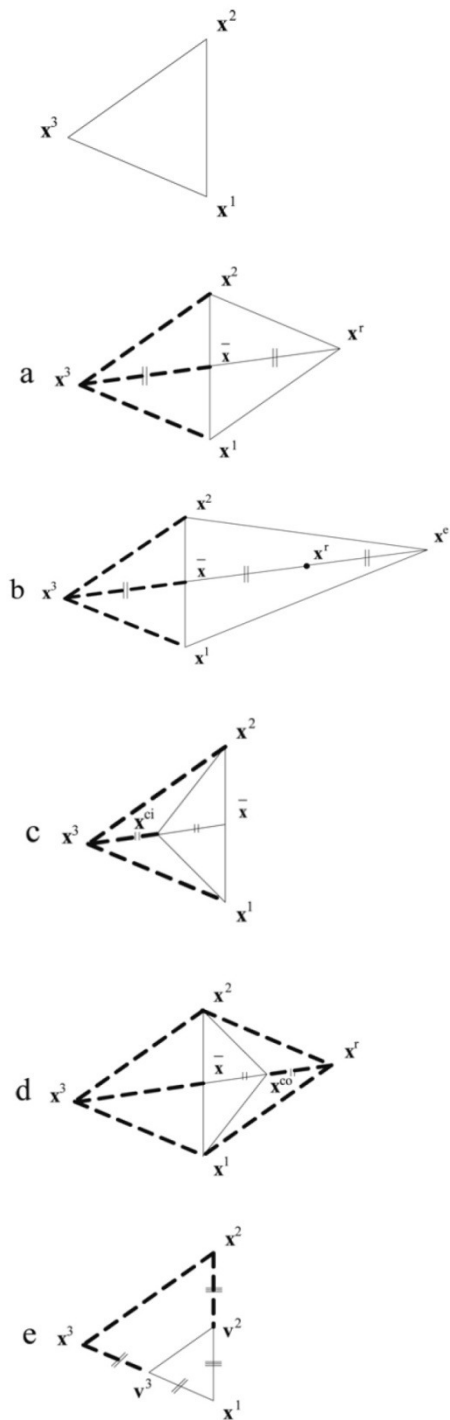
Primeiro vamos supor que temos m variáveis para determinar. Uma iteração do algoritmo de Nelder–Mead pode ser descrita da seguinte forma (Chen et al., 2007):

1. Dados os parâmetros ω , θ , γ , σ , ordenados por $(m+1)$ vértices para satisfazer $f(x^1) \leq f(x^2) \leq \dots \leq f(x^m) \leq f(x^{m+1})$, definir $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x^i}{m}$ como o centróide dos melhores pontos m (todos os vértices com exceção de x^{m+1});
2. Calcular x^r de $x^r = \bar{x} + \omega(\bar{x} - x^{m+1}) = (1+\omega)\bar{x} - \omega x^{m+1}$ e avaliar $f(x^r)$. Se $f(x^1) \leq f(x^r) \leq f(x^m)$, então substituir x^{m+1} pelo o vértice de reflexão x^r e terminar a iteração;
3. Se $f(x^r) < f(x^1)$, calcular o vértice de expansão x^e de $x^e = \bar{x} + \theta(x^r - \bar{x}) = (1+\omega\theta)\bar{x} - \omega\theta x^{m+1}$ e avaliar $f(x^e)$. Se $f(x^e) < f(x^r)$, então substituir x^{m+1} pelo vértice de expansão x^e e terminar a iteração; caso contrário, substitua x^{m+1} pelo vértice de reflexão x^r e terminar a iteração;
4. Se $f(x^m) \leq f(x^r) < f(x^{m+1})$, então calcular x^{co} de $x^{co} = \bar{x} - \gamma(x^r - \bar{x}) = (1+\omega\gamma)\bar{x} - \gamma x^{m+1}$ e avaliar $f(x^{co})$. Se $f(x^{co}) \leq f(x^r)$, então substituir x^{m+1} pelo vértice da operação fora da contração x^{co} e terminar a iteração; Caso contrário, ir para o passo 6 e executar uma operação de redução (*shrinkage*).

5. Por outro lado, se $f(x^{m+1}) \leq f(x^r)$, então calcular x^{ci} de $x^{ci} = \bar{x} - \gamma (\bar{x} - x^{m+1}) = (1 - \gamma) \bar{x} + \gamma x^{m+1}$ e avaliar $f(x^{ci})$. Se $f(x^{ci}) < f(x^{m+1})$, então substituir x^{m+1} pelo vértice da operação dentro da contração x^{ci} e terminar a iteração; Caso contrário, ir ao passo 6 e executar uma operação de redução (*shrinkage*).

6. Executar uma operação de redução (*shrinkage*). Calcular $v^i = x^1 + \sigma (x^i - x^1)$ para $i = 2, 3, \dots, m + 1$. Substituir x^2 por v^2 , x^3 por v^3 , \dots , x^m por v^m e x^{m+1} por v^{m+1} . Isto é, um novo conjunto de vertices é dado por $x^1, v^2, v^3, \dots, v^m, v^{m+1}$.

O fluxograma de iterações do método de Nelder–Mead é apresentado na Fig. 4.3.



Método de Nelder-Mead em início de passo

Uma reflexão longe do pior ponto

$$x^r - \bar{x} = w(\bar{x} - x^3) \text{ onde } w = 1 ;$$

Uma expansão longe do pior ponto

$$x^e - \bar{x} = \theta(x^r - \bar{x}) = w\theta(\bar{x} - x^3) \text{ onde } w = 1 \text{ e } \theta=2;$$

Uma contração de dentro junto com uma dimensão do pior ponto

$$x^{ci} - \bar{x} = \gamma(x^r - \bar{x}) = w\gamma(\bar{x} - x^3)$$

onde $w = 1$ e $r=1/2$;

Uma contração de fora junto com uma dimensão do pior ponto

$$x^{co} - \bar{x} = \gamma(x^r - \bar{x}) = w\gamma(\bar{x} - x^3)$$

onde $w = 1$ e $r=1/2$;

Encolher junto com todas as dimensões para o melhor ponto

$$v^2 = v^1 + \sigma(x^2 - x^1)$$

$$v^3 = x^1 + \sigma(x^3 - x^1) \text{ onde } \sigma = 1/2.$$

Figura 4.2 – Possíveis resultados de um passo do algorítmico simplex de Nelder–Mead de $n = 2$.

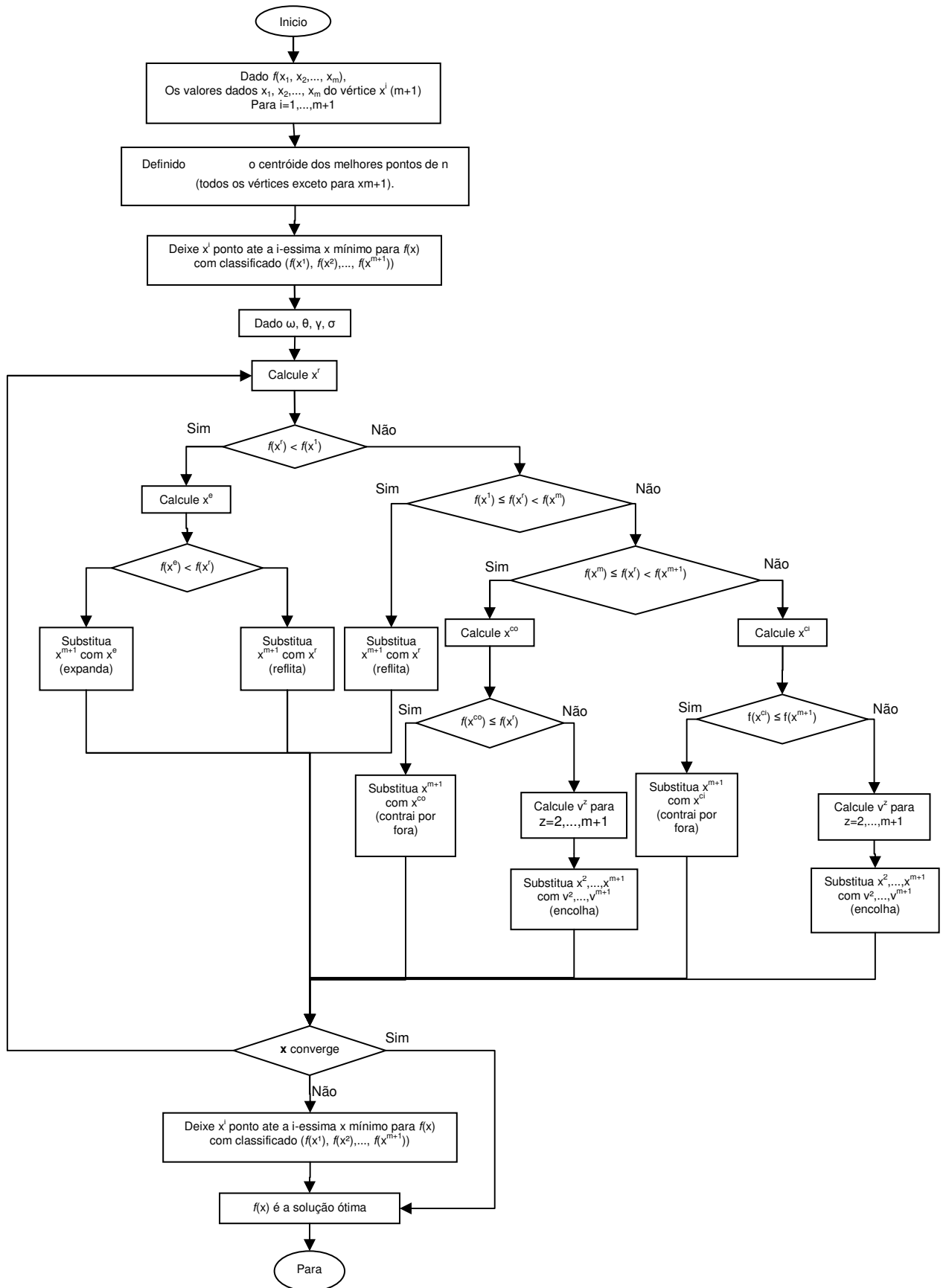


Figura 4.3 – Fluxograma de Interações, do Método Nelder-Mead

4.4.2 Segunda Revisão do Método de NELDER–MEAD

Zegong and Changhong (1992) se referem a este método como o método do *polytope* de Nelder-Mead. Considerado um dos mais satisfatórios métodos de pesquisa direta para minimização de uma função $f(\mathbf{B})$ de n parâmetros $B(j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Procura modificar um conjunto de $(n + 1)$ pontos

$$B_k, k = 1, 2, \dots, n + 1,$$

no espaço n -dimensional, tendo os parâmetros como seus eixos. O *polytope* é a figura geométrica tendo estes pontos como seus vértices. Alguns pesquisadores chamam este método de minimização de uma função como o algoritmo simplex de Nelder-Mead. Infelizmente, isto cria uma confusão com os algoritmos de programação linear. Comparado ao método de Hooke e Jeeves é geralmente mais eficiente para problemas envolvendo um moderado número de parâmetros.

Quando arrumamos os valores das funções nos vértices do *polytope*, nomeamos três vértices em particular:

H - o maior, tendo o maior valor da função;

L - o menor, ou melhor estimativa do mínimo até o momento;

N - o mais próximo do maior, tendo o segundo maior valor da função.

Táticas usadas nos métodos de *polytope*:

1. Reflexão: o centróide (ou média) de todos os pontos, menos o ponto H, é formado. Chamamos este ponto de C e movemos duas vezes a distância de H a C, ao longo da linha HC, até o novo ponto R, ou seja, teremos $HR = 2HC$. O coeficiente de reflexão α tem o objetivo de achar o ponto R. Valor normalmente adotado igual a 2;
2. Expansão: se o ponto R tem um valor menor do que o do ponto L, continuamos a estender a linha HC a algum novo ponto E, onde a função é novamente avaliada. O coeficiente de expansão γ tem o objetivo de achar o ponto E. Valor normalmente adotado: $2 < \gamma \leq 4$;
3. Contração (ou redução): quando o ponto R não é menor do que o ponto L, tentamos outros pontos sobre a linha HCR. O coeficiente de contração β tem

valores normalmente adotados na faixa: $0,25 \leq \beta \leq 0,75$ ($\beta \neq 0,5$). Temos duas situações:

- a) Se a função tem um valor em R menor do que em H, a contração tenta um ponto entre C e R;
 - b) Se R é maior do que H, tentamos um ponto entre H e C.
4. Redução geral (*general shrinkage*): o ponto L é retido. Todos os outros vértices são movidos, em relação a L, ao longo das extremidades do *polytope*. O coeficiente de redução geral tem normalmente o mesmo valor do coeficiente de contração beta.

As táticas de Nelder-Mead têm a seguinte seqüência de cálculos:

1. Pontos C e R são achados e a função em R é calculada;
2. Uma das seguintes situações aparece:
 - a) $R > H$: um ponto P_1 entre C e H é achado e a função é calculada. Se $P_1 < H$, P_1 toma o lugar de H, caso contrário, é aplicada uma redução geral;
 - b) $N < R < H$: um ponto P_2 entre C e R é achado e a função é calculada. Se $P_2 < R$, P_2 toma o lugar de H, caso contrário, R toma o lugar de H;
 - c) $L < R < N$: R substitui H;
 - d) $R < L$: achar o ponto E e avaliar a função. Se $E < R$ (que já é menor do que L), E substitui H, caso contrário, R substitui H.

No caso de uma função tendo dois parâmetros, como função de Weibull de dois parâmetros, teremos o *polytope* representado no plano x - y , onde os eixos tornam-se

$$x = B(1) = \alpha, \quad y = B(2) = \beta,$$

com o eixo z usado para representar (apropriadamente escalado) o valor da função. Os $(n + 1) = 3$ pontos formam um triângulo no plano x - y . Vamos usar este triângulo para representar os principais pontos citados pelo método na Fig. 4.4.

Para evitarmos comparações necessárias para acharmos o valor da função no vértice N, que é necessária para decidirmos se a contração do lado baixo (*low-side*) deve ser executada, arbitrariamente comparamos a função no ponto de reflexão R

com a média ponderada dos valores da função nos vértices H e L. Isto é, comparamos $f(\underline{B})$ com

$$(1 - \beta) \cdot f(B_H) + \beta \cdot f(B_L), \quad (4.7)$$

onde usamos o coeficiente de contração beta para controlar a comparação.

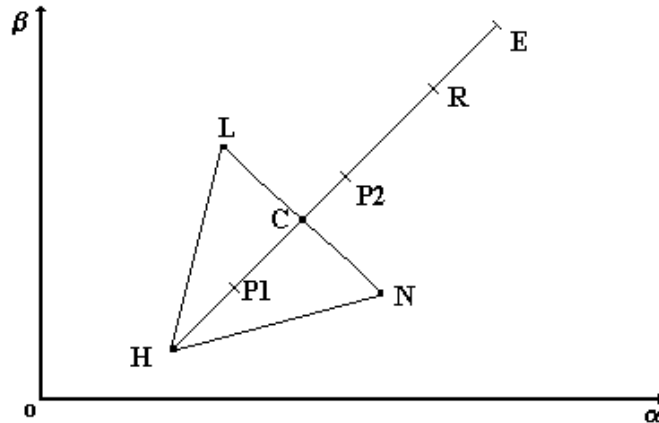


Figura 4.4 - Triângulo formado pelos pontos H, L e N.

A operação de redução move cada vértice V, exceto L, para um novo ponto entre V e L, que é dado por: $\gamma \cdot (\text{distância entre L e V})$. Se todos os vértices estão estocados na matriz \underline{W} , tal que o i -ésimo componente do j -ésimo vértice está em $W(i,j)$, então a nova posição do vértice j é dada por:

$$B(i) = W(i, L) + \gamma \cdot (W(i, V) - W(i, L)). \quad (4.8)$$

Com relação ao critério de parada do algoritmo, o teste de convergência baseado na variância (v) dos valores da função do corrente *polytope*, dado por:

$$v = \sum_{k=1}^n (f(B_k) - f_{\text{médio}})^2 / n, \quad (4.9)$$

onde

$$f_{\text{médio}} = \sum_{k=1}^n f(B_k) / n. \quad (4.10)$$

A variância é comparada a alguma tolerância. Infelizmente, tais medidas são sensíveis à graduação (*scaling*) da função, a presença de descontinuidades e a

precisão do disponível ponto aritmético flutuante. A preferência é proceder com o algoritmo até que:

1. $f(B_H) \approx f(B_L)$, isto é, não há mais ponto maior ou menor. A implementação envolve uma tolerância baseada no tamanho do valor inicial calculado da função e a precisão da máquina;
2. Ocorra falha na redução do tamanho do *polytope*;
3. Exceda um determinado número de avaliações da função. Este número é imposto pelo usuário.

4.5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Este exemplo é o mesmo apresentado no item 3.4.3. Para realização dos cálculos foram usados os dados incompletos da Tabela 3.4. Vamos usar os métodos de Hooke e Jeeves e de Nelder-Mead para estimar os parâmetros das funções de distribuição exponencial e de Weibull do conjunto de dados incompletos. Os resultados são mostrados na Tabela 4.1. Foram usados como estimativa inicial os valores obtidos pelo Método da Máxima Verossimilhança.

Tabela 4.1 – Resultados obtidos pelos métodos de Hooke e Jeeves e de Nelder-Mead.

	Valor exato	Método de Hooke e Jeeves	Método de Nelder-Mead	Método da Máxima Verossimilhança
Distribuição Exponencial	$\lambda = 0,25$ $n = 1000$	$\lambda = 0,2508$	$\lambda = 0,2505$	$\lambda = 0,1244$
Distribuição de Weibull	$\alpha = 2,5$ $\beta = 5,5$ $n = 1000$	$\alpha = 2,4971$ $\beta = 5,5370$	$\alpha = 2,4532$ $\beta = 5,4822$	$\alpha = 9,1663$ $\beta = 8,2862$

Os resultados mostrados na Tabela 4.1 mostram que os métodos de Hooke e Jeeves e de Nelder-Mead podem ser usados para estimação dos parâmetros de conjunto de dados incompletos e completos. Além disso, estes métodos são mais exatos do que o Método da Máxima Verossimilhança.

CAPÍTULO 5

MODELAGEM DA CURVA DA BANHEIRA BASEADO NA SOMA DE DUAS DISTRIBUIÇÕES DE WEIBULL

5.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é estudar a modelagem do processo de falha de equipamentos reparáveis, principalmente os grandes e complexos que apresentam vários componentes, cuja taxa de falha apresenta um comportamento do tipo banheira. Este comportamento ocorre mais freqüentemente em equipamentos grandes e complexos tendo muitos modos de falhas. O modelo selecionado neste capítulo é o da adição de duas distribuições de Weibull, que não usa o método gráfico para obtenção de estimativas iniciais como ponto de partida para um processo de otimização dos parâmetros.

Há vários trabalhos na literatura sobre modelagem de função de taxa de falha que apresenta um comportamento do tipo banheira. Hjorth (1980) propôs uma distribuição de Weibull de três parâmetros, para cada parte da curva da banheira, ou seja, regiões decrescente, constante e crescente desta curva. Xie e Lai (1996) propuseram um modelo que era a soma de duas distribuições de Weibull. Os parâmetros deste modelo foram estimados usando o método gráfico. Um modelo baseado na adição de duas distribuições de Burr XII, este modelo utiliza seis parâmetros, é apresentada por Wang (2000). Este modelo usa o método gráfico para a obtenção de estimativas iniciais como pontos de partida para o processo de otimização dos parâmetros finais. Wang et al. (2002) propuseram uma modelagem da função de taxa de falha do tipo banheira em termos da confiabilidade. Este modelo procura capturar o fenômeno físico ocorrendo durante a vida útil do sistema. Uma vez que somente uma distribuição de Weibull não é capaz de representar a curva da banheira, Xie et al. (2002) propuseram um modelo que é uma extensão da

distribuição de Weibull, com apenas três parâmetros como incógnitas, que sozinha é capaz de representar a curva da banheira. Este modelo será abordado no capítulo VI.

Os modelos mais usados na análise de confiabilidade de um equipamento reparável são os Processos de Poisson Não Homogêneo (PPNH), Processo estatísticos. Estes modelos são baseados na suposição de que, quando o equipamento falha, a ação de reparo retorna o equipamento à condição que estava antes da ocorrência de falha (reparo mínimo).

O PPNH fornece uma boa descrição do padrão de falha de equipamentos grandes e complexos onde a falha geralmente envolve somente uma pequena parte de todo o equipamento, tal que o reparo ou substituição da parte que falha tem um efeito desprezível sobre a confiabilidade do equipamento. Entre as PPNH's, grande destaque tem sido dado ao modelo do Processo de Lei de Potência (PLP) e ao modelo Processo do Log-Linear (PLL), (Cox, 1966; Crow, 1974).

Os processos PLP e LLP são capazes de modelar o padrão de falhas de um equipamento reparável que está deteriorando ou melhorando com o tempo de operação. Podem descrever situações onde a taxa de falha é monotônica com o tempo de operação, de tal forma que estes modelos não podem ser apropriadamente usados quando uma tendência não monotônica nos dados de falhas é observado.

5.2 MODELO DE SUPERPOSIÇÃO DE PLP

O PLP é um NHPP cuja taxa de falha tem a fórmula:

$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \quad t \geq 0, \alpha, \beta > 0. \quad (5.1)$$

Quando o parâmetro de forma β é igual a 1, o PLP se reduz ao processo de Poisson homogêneo (PPH) com a taxa de falha constante igual a $1/\alpha$. Quando $\beta > 1$ ($\beta < 1$) a função de taxa de falha é monotonicamente crescente (decrecente) com o tempo de operação t . Isto corresponde à situação em que os tempos entre falhas sucessivas tornam-se muito pequenas (muito grandes) com t .

Supondo que o equipamento reparável está sujeito a dois modos de falhas diferentes, e que cada modo de falha é modelado por um PLP com parâmetro de escala α_i e parâmetro de forma β_i ($i = 1, 2$). Se os PLP's são independentes, então o processo que descreve o completo padrão de falha é dado pelo modelo de superposição de PLP's (Cox and Isham, 1980), tal que sua taxa de falha seja dada por:

$$h(t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{t}{\alpha_1} \right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{t}{\alpha_2} \right)^{\beta_2-1}, \quad t \geq 0; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 > 0. \quad (5.2)$$

.O número esperado de falhas até t do modelo de superposição é dado por:

$$M(t) = \left(\frac{t}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{t}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

sendo, portanto, a soma do número esperado de falhas causado por cada modo de falha.

A derivada de $h(t)$ em relação a t é dada por:

$$h'(t) = \frac{\beta_1(\beta_1-1)}{\alpha_1^{\beta_1}} t^{\beta_1-2} + \frac{\beta_2(\beta_2-1)}{\alpha_2^{\beta_2}} t^{\beta_2-2}, \quad (5.4)$$

tal que $h(t)$ não é monotônica se e somente se o produto de $(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1)$ for negativo, isto é, se e somente se ou β_1 ou β_2 for menor que 1. Devido a esta condição, a função $M(t)$ tem um ponto de inflexão. Se ambos β_1 e β_2 são maiores ou iguais a 1 (menor que ou igual a 1), a correspondente função de intensidade é monotonicamente não decrescente (não crescente) com o tempo. Quando $\beta_1 = \beta_2$, as PLP's se reduzem a um simples PLP com parâmetro de forma $\beta = \beta_1 = \beta_2$ e o parâmetro de escala $\alpha = [1/\alpha_1^\beta + 1/\alpha_2^\beta]^{-1/\beta}$. Por fim, no caso de $\beta_1 = \beta_2 = 1$ que correspondente para um Processo de Poisson Homogêneo (PPH) com a taxa de falha constante igual a $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2$.

Uma vez que estamos interessados numa modelagem não monotônica no comportamento da intensidade de falha, examinaremos somente o caso $(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 0$ e, sem perda de generalidade, vamos considerar $\beta_1 < 1$ e $\beta_2 > 1$.

Da Eq. (5.4) observamos que $h'(t)$ é igual a 0 em $t = \tau$, onde τ é dado por:

$$\tau = \left[\frac{\beta_1(1-\beta_1)\alpha_2^{\beta_2}}{\beta_2(\beta_2-1)\alpha_1^{\beta_1}} \right]^{1/(\beta_2-\beta_1)}. \quad (5.5)$$

Em relação à derivada segunda de $h(t)$ em relação a t , com $t = \tau$, temos:

$$h''(t)|_{t=\tau} = \frac{\beta_1(1-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)}{\alpha_1^{\beta_1}} \tau^{\beta_1-3},$$

que é positiva para qualquer $\beta_1 < 1$ e $\beta_2 > 1$; assim τ é mínimo para $h(t)$ e conseqüentemente a função de intensidade dada pela Eq. (5.2) tem o comportamento da curva da banheira para quaisquer valores de α_1 e α_2 .

Este resultado está de acordo com o fato de que o comportamento curva da banheira surge quando o equipamento está sujeito tanto a falhas que acontecem muito cedo (fase de amaciamento), que é modelado por uma PLP com parâmetro de forma $\beta_1 < 1$, quanto a falhas que ocorrem devido à deterioração do equipamento (fase de desgaste), que é modelado por uma PLP com parâmetro de forma $\beta_2 > 1$. Portanto, como mostra a Fig. 5.1, a taxa de falha, dada pela Eq. (5.2), decresce com o tempo de operação de $t = 0$ até um valor mínimo ($t = \tau$), devido à predominância da fase de amaciamento, e volta crescer a partir deste mínimo devido à predominância da fase de desgaste (fenômenos de deterioração) até que ocorra a falha ou o reparo do equipamento.

Em $t = \tau$, a taxa de falha assume o seu menor valor que é dado por:

$$h(t)|_{t=\tau} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{\tau}{\alpha_2} \right)^{\beta_2-1} \frac{\beta_2 - \beta_1}{1 - \beta_1}. \quad (5.6)$$

A Fig. 5.1 mostra a taxa de falha $h(t)$ de um modelo de superposição de PLP's com $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_1 = 16$ e $\alpha_2 = 30$, bem como as correspondentes curvas dos componentes PLP's. Os comportamentos mostrados na Fig. 5.1 são típicos de um modelo de superposição de PLP's com $\beta_2 > 2$.

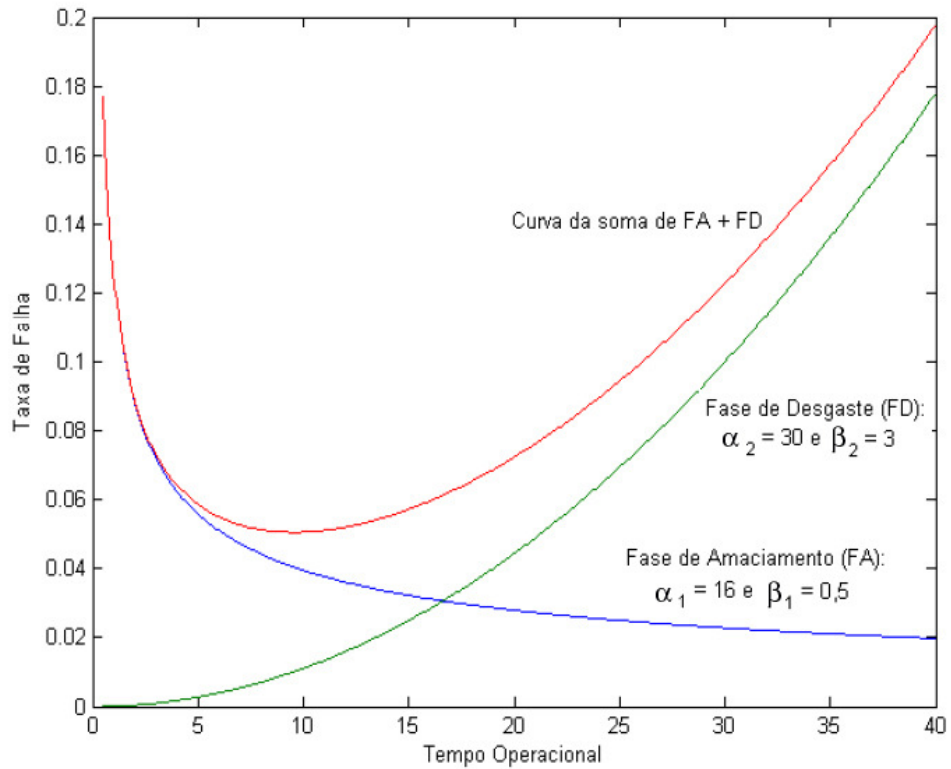


Figura 5.1 - Taxa de Falha do Modelo de Superposição de PLP's.

Uma quantidade útil é a razão $r(t)$ do número esperado de falhas que acontecem muito cedo (fase de amaciamento) pelo número esperado total de falhas ocorridas até t , que na suposição de reparo mínimo, é dado por:

$$r(t) = \frac{(t/\alpha_1)^{\beta_1}}{(t/\alpha_1)^{\beta_1} + (t/\alpha_2)^{\beta_2}} = \left[1 + \frac{t^{\beta_2 - \beta_1} \alpha_1^{\beta_1}}{\alpha_2^{\beta_2}} \right]^{-1}. \quad (5.7)$$

Quando t aumenta, $r(t)$ diminui. Em $t = \tau$; A relação $r(t)$ depende somente dos parâmetros de forma β_1 e β_2 , uma vez que

$$r(\tau) = \{1 + \beta_1(1 - \beta_1) / [\beta_2(\beta_2 - 1)]\}^{-1}. \quad (5.8)$$

Seja T esta com o comprimento do período de observação do processo de falha. Se $r(T)$ está muito próximo de 0 (de 1), isto implica que as falhas que acontecem muito cedo (fase de amaciamento) constituem uma parte bem pequena (bem grande) da fração de dados do conjunto de dados observados.

5.3 ESTIMAÇÃO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

A aplicação do método de máxima verossimilhança tem como objetivo a obtenção de uma expressão que envolva os quatro parâmetros do modelo de superposição de PLP's para que possa ser utilizado no modelo de otimização.

Seja $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ designando os n (≥ 4) tempos de falhas de um equipamento reparável observado até T cujo padrão de falha segue o modelo de superposição de PLP's com uma função de taxa de falha dada pela Eq. (5.2). Numa amostragem truncada de falha (o processo é observado até que a n ésima falha ocorra), T ($\equiv t_n$) é uma variável aleatória. Caso contrário, numa amostragem de tempo truncado, $T(> t_n)$ é uma quantidade pré-fixada.

A função de densidade de probabilidade condicional do i ésimo tempo de falha, dado que a $(i - 1)$ - ésima falha tenha ocorrido em $t = t_{i-1}$, é dada por:

$$f(t_i | t_{i-1}) = h(t_i) \exp\{-[M(t_i) - M(t_{i-1})]\}, \quad t_i \geq t_{i-1}, \quad (5.9)$$

onde $t_0 \equiv 0$; tal que a função de probabilidade relativa aos dados observados resulta em:

$$L = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{t_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{t_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2-1} \right] \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} - \left(\frac{t}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right\}. \quad (5.10)$$

As derivadas parciais da função log-verossimilhança, dada por:

$$l = \ln(L) = \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{t_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{t_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2-1} \right] - \left[\left(\frac{t}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{t}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right], \quad (5.11)$$

com respeito aos parâmetros do modelo são:

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_j} = \sum_{j=1}^n \frac{-(\beta_j / \alpha_j)^2 (t_j / \alpha_j)^{\beta_j-1}}{(\beta_1 / \alpha_1) (t_j / \alpha_1)^{\beta_1-1} + (\beta_2 / \alpha_2) (t_j / \alpha_2)^{\beta_2-1}} + \frac{\beta_j}{\alpha_j} \left(\frac{T}{\alpha_j} \right)^{\beta_j}, \quad j = 1, 2, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_j} = \sum_{j=1}^n \frac{[1 + (\beta_j \ln(t / \alpha_j))] (t_j / \alpha_j)^{\beta_j-1} / \alpha_j}{(\beta_1 / \alpha_1) (t_j / \alpha_1)^{\beta_1-1} + (\beta_2 / \alpha_2) (t_j / \alpha_2)^{\beta_2-1}} - \left(\frac{T}{\alpha_j} \right)^{\beta_j} \ln \left(\frac{T}{\alpha_j} \right), \quad j=1, 2. \quad (5.13)$$

Não existe uma solução analítica para os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}_j$ e $\hat{\beta}_j$ ($j = 1, 2$) de modo que um procedimento de maximização para a função log-verossimilhança de quatro parâmetros dada pela Eq. (5.11) deve ser realizada. Porém, a Eq. (5.12) nos fornece:

$$\left(\frac{T}{\hat{\alpha}_j}\right)^{\beta_j} = \sum_{j=1}^n \frac{(\hat{\beta}_j / \hat{\alpha}_j)(t_j / \hat{\alpha}_j)^{\hat{\beta}_j - 1}}{(\hat{\beta}_1 / \hat{\alpha}_1)(t_j / \hat{\alpha}_1)^{\hat{\beta}_1 - 1} + (\hat{\beta}_2 / \hat{\alpha}_2)(t_j / \hat{\alpha}_2)^{\hat{\beta}_2 - 1}}, \quad j = 1, 2. \quad (5.14)$$

Conseqüentemente, da Eq. (5.3) temos que a máxima verossimilhança estima que o número de falhas esperado até T é igual ao numero observado de falhas, que é dado por:

$$\hat{M}(T) = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{T}{\hat{\alpha}_j}\right)^{\beta_j} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\beta}_j / \hat{\alpha}_j)(t_i / \hat{\alpha}_j)^{\hat{\beta}_j - 1}}{(\hat{\beta}_1 / \hat{\alpha}_1)(t_i / \hat{\alpha}_1)^{\hat{\beta}_1 - 1} + (\hat{\beta}_2 / \hat{\alpha}_2)(t_i / \hat{\alpha}_2)^{\hat{\beta}_2 - 1}} = n. \quad (5.15)$$

Este resultado nos permite, por exemplo, estimar por máxima verossimilhança o parâmetro α_2 como uma função do estimador de máxima verossimilhança dos outros três parâmetros:

$$\hat{\alpha}_2 = T / \left[n - (T / \hat{\alpha}_1)^{\hat{\beta}_1} \right]^{1/\hat{\beta}_2}. \quad (5.16)$$

Portanto, para obtermos uma função de log-verossimilhança de três parâmetros, precisamos substituir a Eq. (5.16) na Eq. (5.11) para termos:

$$l' = \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{t_i}{\alpha_1}\right)^{\beta_1 - 1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{t_i}{\alpha_2}\right)^{\beta_2 - 1} \left[n - \left(\frac{T}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} \right] \right\} - n. \quad (5.17)$$

Deste modo, os estimadores de máxima verossimilhança α_1 , β_1 e β_2 podem ser obtidos pela maximização da Eq. (5.2) sujeita a restrições tais como:

$$\hat{\alpha}_1 = T / n^{1/\hat{\beta}_1} \quad \hat{\beta}_1 > 0 \quad \hat{\beta}_2 > \hat{\beta}_1. \quad (5.18)$$

A primeira restrição surge da necessidade de que $\hat{\alpha}_2 > 0$, uma vez que a última restrição permite uma única solução a ser obtida. O procedimento de maximização geralmente exige um ponto de partida.

Como n é um número inteiro conhecido podemos usar a Eq. (5.16) para verificação dos resultados no final de uma otimização. A equação com esta finalidade será dada por:

$$n = \left(\frac{T}{\hat{\alpha}_1} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{T}{\hat{\alpha}_2} \right)^{\beta_2} . \quad (5.19)$$

5.4 GERAÇÃO DOS PONTOS DE PARTIDA

A aplicação de procedimentos gráficos nos dados de falhas (Nelson, 1998) é também útil na determinação dos parâmetros de uma função de taxa de falha, que devido à falta de precisão e confiabilidade humana e por depender do manuseio humano, são usados como ponto de partida em procedimentos numéricos de otimização. O procedimento gráfico neste trabalho pode ser substituído por procedimentos matemáticos apresentados no capítulo III. Outro procedimento alternativo será apresentado a seguir.

5.4.1 Procedimento Alternativo

A taxa de falha exibida neste trabalho é derivada da distribuição de Weibull e dada pela Eq. (5.1). A função de taxa de falha é composta pela soma de duas Weibull, uma representando o amaciamento e outra o desgaste (Veja Fig. 5.1). No caso do histograma da Fig. 5.3, composto por oito classes, podemos dividi-los em duas partes, cada parte composta por quatro classes, onde uma representa o amaciamento e outra o desgaste.

Podemos analisar cada fase isoladamente e obtermos os parâmetros de escala e de forma de cada fase. Para fazermos isto, começamos com um conjunto de quatro pontos para cada fase dado por (\bar{t}_i, y_i^*) ($i = 1, 2, 3, 4$). Selecionando os dois primeiros pontos, temos da Eq. (5.3):

$$h_1 = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_1}{\alpha} \right)^{\beta-1} , \quad (5.20)$$

$$h_2 = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_2}{\alpha} \right)^{\beta-1}. \quad (5.21)$$

Dividindo a Eq. (5.20) pela Eq. (5.21), temos:

$$\frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{\beta-1}, \quad (5.22)$$

$$\ln \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = (\beta - 1) \ln \left(\frac{t_1}{t_2} \right), \quad (5.23)$$

$$\beta = 1 + \frac{\ln(h_1 / h_2)}{\ln(t_1 / t_2)}. \quad (5.24)$$

Substituindo a Eq. (5.24) na Eq. (5.20), temos:

$$\alpha = t_1 \left(\frac{\beta}{h_1 t_1} \right)^{1/\beta}. \quad (5.25)$$

Concluindo, realizando todas as combinações possíveis entre os quatro pontos disponíveis, em cada fase, temos um conjunto de seis pares de α e β , obtidos pelas Eq. (5.25) e (5.24). Selecionaremos o par de α e β que der o menor erro residual. Vamos obter desta forma quatro parâmetros que serão usados como ponto de partida no procedimento de otimização.

Observação: Este procedimento funciona muito bem para histogramas bem comportado como o da Fig. 5.3.

5.4.2 Procedimento Baseado na Curva C

A aproximação gráfica é extensivamente usada em análise de dados para determinar se um modelo particular é apropriado para descrever um conjunto de dados e para obter estimativas simples de parâmetros de modelos. Por exemplo, métodos gráficos para a análise de equipamento reparável falhando de acordo com um PLP (Lilius, 1979), (Hartler, 1985), (Nelson, 1998), (Wang, 1991).

Considere as seguintes transformações:

$$x = \ln.(t) \quad e \quad y = \ln.[M.(t)], \quad \text{para } \beta_1 < \beta_2.$$

Usando as transformações acima, temos:

$$y = y(x) = \ln \left[\left(\frac{e^x}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{e^x}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right]. \quad (5.26)$$

A Eq. (5.26) é uma função não linear de x . Plotando o gráfico y versus x definimos a curva C , que não é uma linha reta e pode ser vista na Fig. 5.2. A Eq. (5.26) pode também ser reescrita como:

$$y = y(x) = \beta_1(x - \ln \alpha_1) + \ln \left[1 + e^{(\beta_2 - \beta_1)x} \frac{\alpha_1^{\beta_1}}{\alpha_2^{\beta_2}} \right], \quad (5.27)$$

ou

$$y = y(x) = \beta_2(x - \ln \alpha_2) + \ln \left[1 + e^{(\beta_1 - \beta_2)x} \frac{\alpha_2^{\beta_2}}{\alpha_1^{\beta_1}} \right], \quad (5.28)$$

Conseqüentemente, deste que $\beta_1 > \beta_2$, temos, respectivamente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left[1 + e^{(\beta_2 - \beta_1)x} \frac{\alpha_1^{\beta_1}}{\alpha_2^{\beta_2}} \right] = 0 \quad (5.29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[1 + e^{(\beta_1 - \beta_2)x} \frac{\alpha_2^{\beta_2}}{\alpha_1^{\beta_1}} \right] = 0 \quad (5.30)$$

Portanto, das Eqs. (5.27), (5.28), (5.29) e (5.30), temos as assíntotas da curva C dadas por:

$$L_1: \quad y = y(x) = \beta_1(x - \ln \alpha_1) \quad \text{quando } x \rightarrow -\infty, \quad (5.31)$$

$$L_2: \quad y = y(x) = \beta_2(x - \ln \alpha_2) \quad \text{quando } x \rightarrow \infty. \quad (5.32)$$

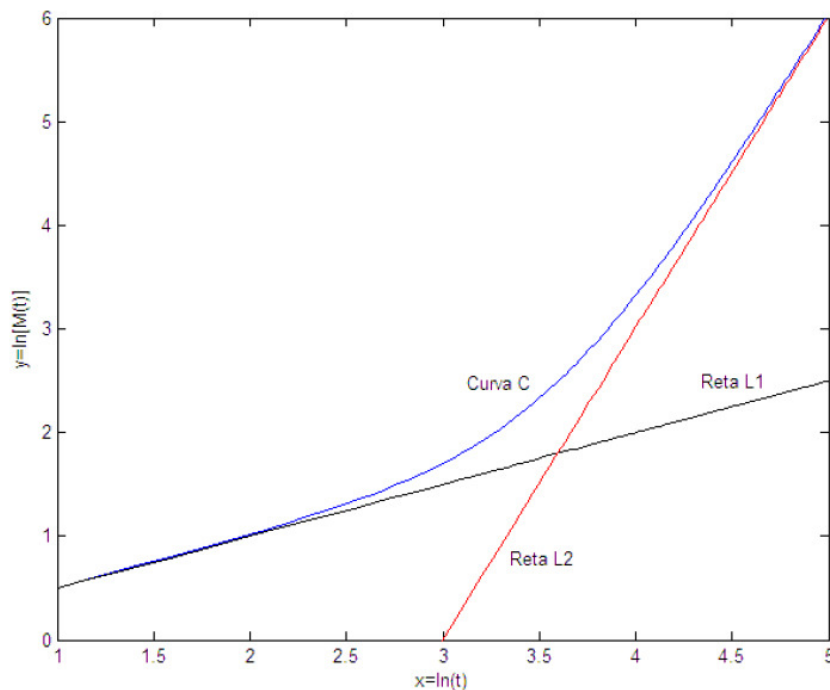


Fig. 5.2 - Comportamento da curva C e suas assíntotas L1 e L2 para os parâmetros $\beta_1 = 0,5$; $\beta_2 = 3$; $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 20$.

Deste modo, a curva C tem inclinações assintóticas iguais a β_1 e β_2 quando x tende para $-\infty$ e para ∞ , respectivamente, e está sempre dentro do cone definido pelas linhas retas L_1 e L_2 . Uma explicação intuitiva para os resultados assintóticos é que para valores muito pequenos (muito grandes) do tempo de operação t , o processo de falha é indexado pelo menor (pelo maior) valor dominante de β . Em particular, quando $\beta_1 < 1$ e $\beta_2 > 1$, resultados assintóticos indicam que valores muito pequenos (muito grandes) de t dominam as falhas no período de amaciamento (deterioração) no processo por inteiro. Como uma consequência, para valores de t muito pequenos ou muito grandes, o processo de superposição é praticamente um PLP e conseqüentemente a curva C é uma linha reta com inclinação β_1 ou β_2 .

A derivada primeira de y em relação a x é dada por:

$$y'(x) = \beta_1 S_1(x) + \beta_2 S_2(x), \quad (5.33)$$

onde

$$S_j(x) = \frac{(e^x / \alpha_j)^{\beta_j}}{(e^x / \alpha_1)^{\beta_1} + (e^x / \alpha_2)^{\beta_2}} \quad j = 1, 2. \quad (5.34)$$

Assim, para qualquer x , $S_1(x) + S_2(x) = 1$, ou seja, temos $\beta_1 < y'(x) < \beta_2$, logo a curva C tem sempre um coeficiente angular da reta tangencial à curva entre β_1 e β_2 . Pode facilmente ser mostrado que a derivada segunda $y''(x)$ é positiva para qualquer x , desta forma a curva C é côncava (não tem ponto de inflexão) e sua inclinação aumenta monotonicamente de β_1 para β_2 . Observar que este comportamento côncavo da curva C surge independente do valor de β_1 e β_2 , e somente se $\beta_1 = \beta_2$, a curva C é uma linha reta (o S-PLP se reduz a um PLP).

O objetivo desta seção é apresentar mais um procedimento de cálculo dos parâmetros β_1 , β_2 , α_1 e α_2 pelo método dos mínimos quadrados apresentado no Capítulo III, uma vez que as Eqs. (5.31) e (5.32) são equações de uma reta.

5.5 RESULTADOS

A modelagem proposta neste capítulo é aplicada nos conjuntos de dados listados na Tabela 5.1. Estes conjuntos de dados são necessários para a definição das coordenadas dos pontos médios dos intervalos no histograma de freqüências da Fig. 5.3, que são definidos neste trabalho como (\bar{t}_i, y_i^*) ($i = 1, 2, \dots, n$).

5.5.1 Dados de um Caminhão Basculante de 180 toneladas

Serão considerados os dados da Tabela 5.1, que consiste de $n = 128$ tempos de falha (em horas) observados até $T = t_n = t_{128} = 21982$ horas. Estes dados foram usados para gerar o histograma da Fig. 5.3. São 128 tempos de falha (em horas) do equipamento.

A estimação não paramétrica da taxa de falha, como é mostrada no histograma da Fig. 5.3, é dada por:

$$h_k = n_k / \Delta_k, \quad (5.35)$$

onde n_k é o número de falhas ocorridas no k -ésimo intervalo de tempo de comprimento $\Delta_k = t_{i+1} - t_i$. Este histograma é relativo a uma situação real de dados de falhas de um Caminhão Basculante de 180 toneladas (Coetzee, 1996). O histograma deste exemplo mostra que a presença de um comportamento de banheira na taxa de falha é visualmente evidente. Estes dados serão úteis na aplicação dos procedimentos matemáticos desenvolvidos neste trabalho.

Tabela 5.1. Dados de um Caminhão Basculante de 180 toneladas (Coetzee, 1996).

78	158	331	381	523	620	664
1805	1817	2068	3253	4489	4725	4961
5138	5200	5278	5711	6400	6444	6677
7999	8001	8489	9000	9086	10262	10817
11062	11082	11086	11122	11534	12031	12339
12733	13265	13508	13673	13780	14443	14501
14656	14906	14983	15004	15062	15072	15136
15206	15247	15700	15714	15972	16186	16284
16329	16425	16605	16723	16731	16797	16859
17090	17305	17484	17510	17511	17536	17621
17703	17809	17968	17984	18175	18443	18458
18667	18669	18701	18723	18822	18860	18922
18935	18945	18960	18961	18979	19013	19032
19034	19169	19184	19201	19416	19455	19525
19595	19601	19613	19643	19671	19713	19785
19801	19937	19990	20432	20433	20434	20698
21460	21543	21584	21602	21645	21706	21762
21867	21912	21914	21937	21938	21939	21951
21954	21982					

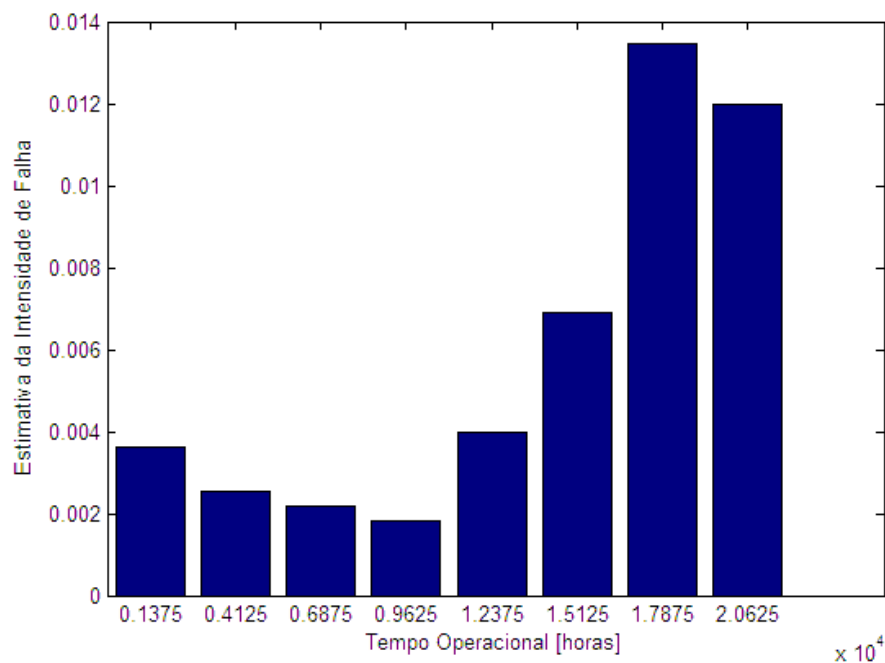


Figura 5.3 - Estimação da Intensidade de Falha (Coetzee, 1996).

A Tabela 5.2 fornece as coordenadas dos pontos médios dos intervalos no histograma de freqüências da Fig. 5.3, que são definidos neste trabalho como (\bar{t}_i, y_i^*) ($i = 1, 2, \dots, n$), que por sua vez são usados nos cálculos a seguir e na construção da Fig. 5.4.

Tabela 5.2 – Cálculos efetuados para determinação da função taxa de falha.

$$(\Delta_k = t_{i+1} - t_i = 2750 \text{ horas})$$

i	t _i	n _i	h(t)
1	1375	10	0,003636
2	4125	7	0,002545
3	6875	6	0,002182
4	9625	5	0,001818
5	12375	11	0,004
6	15125	19	0,006909
7	17875	37	0,013455
8	20625	33	0,012

Parâmetros da função de taxa de falha, obtidos pelo procedimento apresentado no item 5.3, que serão usados como ponto de partida no procedimento de otimização:

$$\alpha_1 = 70,9385 \text{ horas}, \quad \beta_1 = 0,6753, \quad \alpha_2 = 6177 \text{ horas}, \quad \beta_2 = 3,7286.$$

Parâmetros da função de taxa de falha obtidos pelo procedimento de otimização apresentado no capítulo IV (Método de Hooke e Jeeves):

$$\alpha_1 = 73,0159 \text{ horas}, \quad \beta_1 = 0,6375, \quad \alpha_2 = 7394 \text{ horas}, \quad \beta_2 = 4,1282.$$

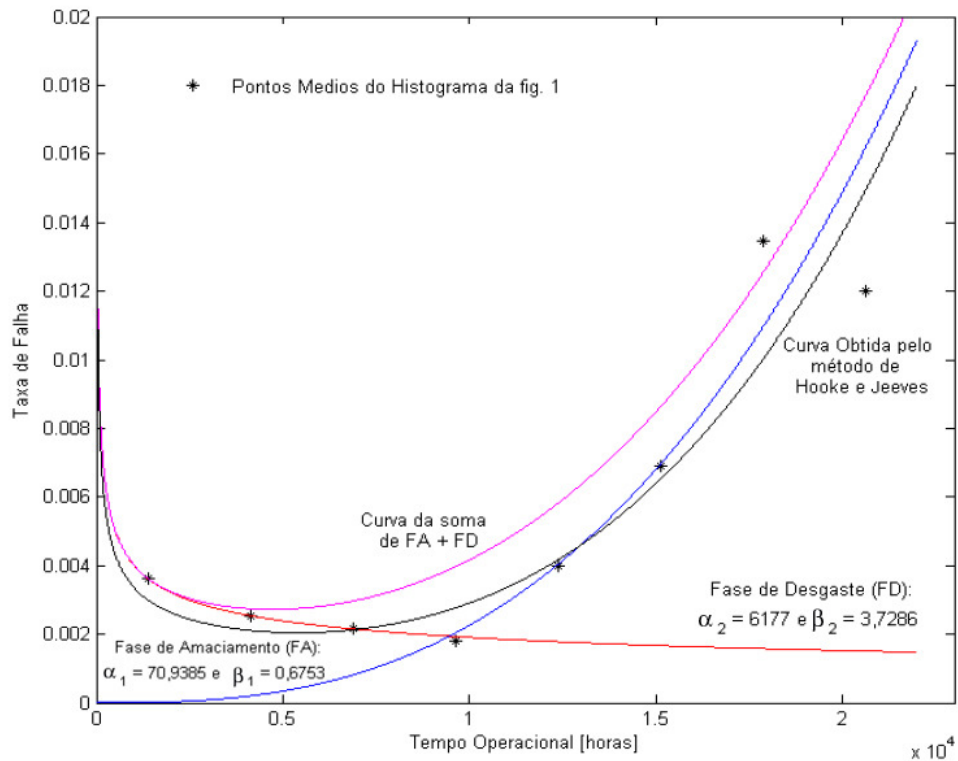


Figura 5.4 - Resultados Obtidos na Modelagem.

5.5.2 Dados de uma Máquina que Carrega – Arrasta – Descarrega LHD-A.

Serão considerados os dados da Tabela 5.3, que consiste de $n = 44$ tempos de falha (em horas) do equipamento observados até $T = t_n = t_{44} = 2317$ horas. Estes dados foram usados para gerar o histograma da Fig. 5.5.

A estimação não paramétrica da taxa de falha, como é mostrada no histograma da Fig. 5.5, é dada pela Eq.(5.35). Este histograma é relativo a uma situação real de dados de falhas de uma Máquina que Carrega – Arrasta – Descarrega LHD-A (Kumar, 1989). O histograma deste exemplo mostra que a presença de um comportamento de banheira na taxa de falha é visualmente evidente. Estes dados serão úteis na aplicação dos procedimentos matemáticos desenvolvidos neste trabalho.

Tabela 5.3. Dados da Máquina que carrega – arrasta – descarrega “LHD-A” (Kumar, 1989).

16	39	71	95	98	110	114
226	294	344	555	599	757	822
963	1077	1167	1202	1257	1317	1345
1372	1402	1536	1625	1643	1675	1726
1736	1772	1796	1799	1814	1868	1894
1970	2042	2044	2094	2127	2291	2295
2299	2317.					

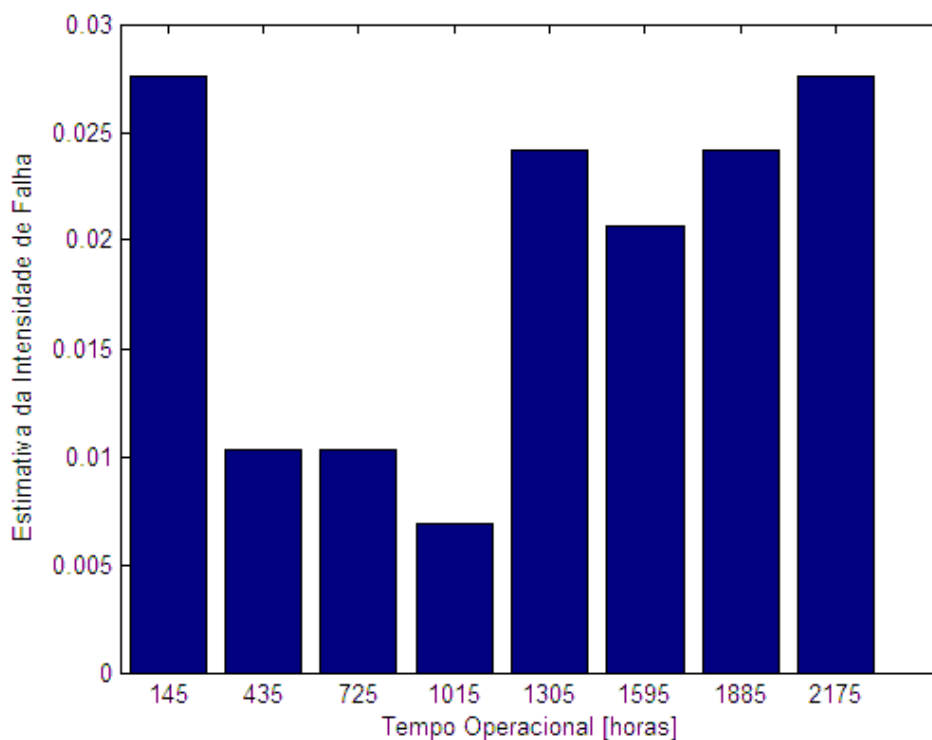


Figura 5.5 - Estimação da Intensidade de Falha (Kumar, 1989).

A Tabela 5.4 fornece as coordenadas dos pontos médios dos intervalos no histograma de freqüências da Fig. 5.5, que são definidos neste trabalho como (\bar{t}_i, y_i^*) ($i = 1, 2, \dots, n$), que por sua vez são usados nos cálculos a seguir e na construção da Fig. 5.6.

Tabela 5.4 – Cálculos efetuados para determinação da função taxa de falha.

$$(\Delta_k = t_{i+1} - t_i = 290 \text{ horas})$$

i	t _i	n _i	h(t)
1	145	8	0,027586
2	435	3	0,010345
3	725	3	0,010345
4	1015	2	0,006897
5	1305	7	0,024138
6	1595	6	0,02069
7	1885	7	0,024138
8	2175	8	0,027586

Parâmetros da função de taxa de falha, obtidos pelo procedimento apresentado no item 5.3, que serão usados como ponto de partida no procedimento de otimização:

$$\alpha_1 = 13 \text{ horas}, \quad \beta_1 = 0,62, \quad \alpha_2 = 1000 \text{ horas}, \quad \beta_2 = 3,5.$$

Parâmetros da função de taxa de falha obtidos pelo procedimento de otimização apresentado no capítulo IV (Método de Hooke e Jeeves):

$$\alpha_1 = 11,89 \text{ horas}, \quad \beta_1 = 0,603, \quad \alpha_2 = 912 \text{ horas}, \quad \beta_2 = 3,211.$$

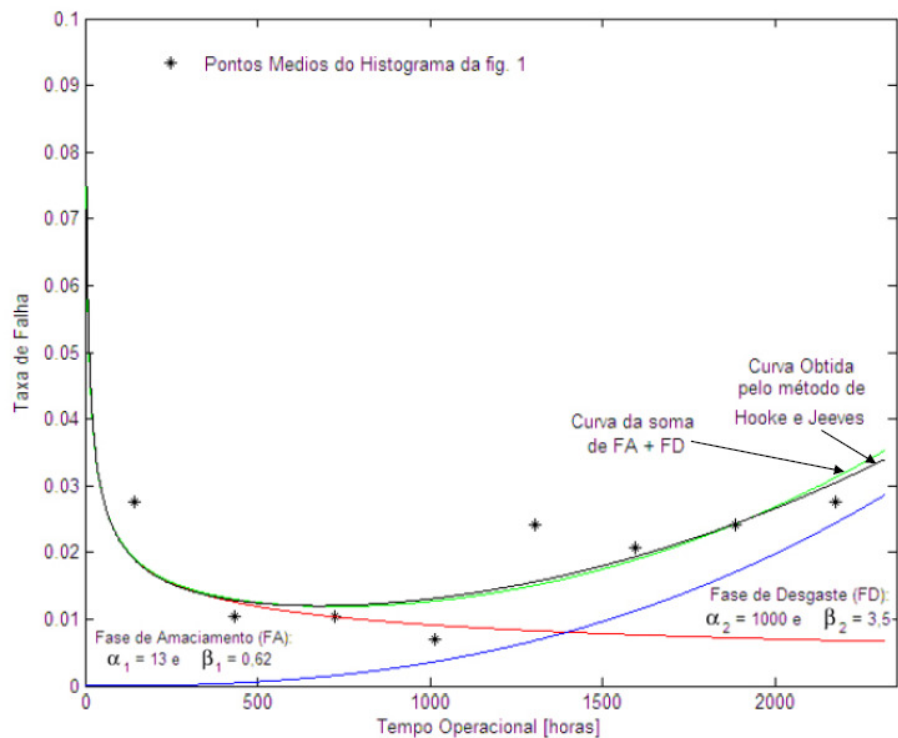


Figura 5.6 - Resultados Obtidos na Modelagem.

5.6 CONCLUSÃO

Ao analisarmos os resultados obtidos no neste capítulo podemos verificar que $(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 0$, ou seja, este teste demonstra que os dados de falha avaliados possuem um comportamento do tipo banheira. A própria inspeção visual da Fig. 5.4 e 5.6 mostra isto. Portanto, o modelo de superposição de PLP's representa adequadamente o padrão de falha observado, ou seja, do tipo banheira.

Podemos verificar os resultados final da otimização pela Eq. (5.19).

Para os paramentros encontrado com os dados da Tab. 5.1

$$n = \left(\frac{t_{128}}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t_{128}}{\alpha_2}\right)^{\beta_2} = \left(\frac{21982}{70,9385}\right)^{0,6753} + \left(\frac{21982}{6177}\right)^{3,7286} = 160,3253$$

Analisando os dados otimizados teremos:

$$n = \left(\frac{t_{128}}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t_{128}}{\alpha_2}\right)^{\beta_2} = \left(\frac{21982}{73,0159}\right)^{0,6375} + \left(\frac{21982}{7394}\right)^{4,1282} = 127,8595$$

Para os paramentros encontrado com os dados da Tab. 5.3

$$n = \left(\frac{t_{44}}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t_{44}}{\alpha_2}\right)^{\beta_2} = \left(\frac{2317}{13}\right)^{0,62} + \left(\frac{2317}{1000}\right)^{3,5} = 43,800$$

Analisando os dados otimizados teremos:

$$n = \left(\frac{t_{44}}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t_{44}}{\alpha_2}\right)^{\beta_2} = \left(\frac{2317}{11,89}\right)^{0,603} + \left(\frac{23172}{912}\right)^{3,211} = 43,99128$$

Podemos ver que nos dois modelos os dados otimizados se ajustam melhor a curva.

CAPÍTULO 6

MODELAGEM DA CURVA DA BANHEIRA UTILIZANDO UMA NOVA EXTENSÃO DE WEIBULL

6.1 INTRODUÇÃO

Para sistemas complexos, a função de taxa de falha freqüentemente pode ser da forma da curva da banheira. Modelos para tal função de taxa de falha são necessários na análise de confiabilidade e tomada de decisão quando o ciclo completo de vida do sistema precisa ser modelado. Uma possibilidade é usar por partes a distribuição de Weibull, mas como muitos parâmetros estão envolvidos, a estimação não é precisa a menos que esteja à disposição uma amostra de dados muito grande. Também é inconveniente aplicar três distribuições de Weibull diferentes para modelar a curva de banheira, que é o caso quando a distribuição de Weibull por partes é usada, ao aplicarmos as três distribuições iremos trabalhar com um numero maior de parâmetros.

Existem vários trabalhos na literatura que lidam com modelos para a função taxa de falha com a forma da curva da banheira. A introdução do Capítulo V cita vários destes trabalhos. A maior parte dos modelos para a função de taxa de falha com a forma da curva da banheira não são uma simples generalização da distribuição de Weibull. Como a distribuição de Weibull é muito usada, seria útil que os modelos com função de taxa de falha com a forma da curva da banheira fossem uma extensão da distribuição de Weibull. Portanto, o objetivo deste capítulo é apresentar um modelo baseado na generalização de Weibull para modelar a função de taxa de falha com a forma da curva da banheira. Devemos destacar também que a maioria dos modelos contém muitos parâmetros, nestes casos quando a quantidade de dados for limitada, a estimação dos parâmetros não pode ser exata, assim é importante considerar modelos com poucos parâmetros.

6.2 UMA NOVA EXTENSÃO DE WEIBULL

A função de confiabilidade de nova extensão de Weibull e dada por:

$$R(t) = \exp\left\{\lambda\alpha\left[1 - e^{(t/\alpha)^\beta}\right]\right\}, \quad \lambda, \alpha, \beta > 0, \quad t \geq 0. \quad (6.1)$$

Como será mostrado mais tarde, este modelo tem distribuição de Weibull como um caso especial e assintótico e conseqüentemente pode ser considerado como uma extensão de Weibull.

A função de taxa de falha correspondente tem a seguinte forma:

$$h(t) = \lambda\beta(t/\alpha)^{\beta-1} \exp\left[(t/\alpha)^\beta\right]. \quad (6.2)$$

A função de distribuição cumulativa para a extensão da distribuição de Weibull é dada por:

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \exp\left\{\lambda\alpha\left[1 - e^{(t/\alpha)^\beta}\right]\right\}. \quad (6.3)$$

Deste modo a função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \lambda\beta(t/\alpha)^{\beta-1} \exp\left[(t/\alpha)^\beta + \lambda\alpha\left(1 - e^{(t/\alpha)^\beta}\right)\right]. \quad (6.4)$$

6.2.1 Caracterização da função de taxa de falha

Para estudar a forma da função de taxa de falha, primeiro derivamos a Eq. (6.2) e obtemos:

$$h'(t) = \frac{\lambda\beta}{\alpha}(t/\alpha)^{\beta-2} \exp\left[(t/\alpha)^\beta\right] \left[\beta(t/\alpha)^\beta + (\beta-1)\right]. \quad (6.5)$$

A forma da função de taxa de falha dependerá somente do parâmetro de forma β . Os seguintes dois casos serão considerados.

Caso 1: $\beta \geq 1$

1. Neste caso, para qualquer $t > 0$, $h'(t) > 0$, e, portanto, $h(t)$ é uma função crescente;
2. $h(0) = 0$ se $\beta > 1$ e $h(0) = \lambda$, se $\beta = 1$;
3. $h(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Caso 2: $\beta < 1$

1. Seja $h'(t^*) = 0$, temos que $\beta(t^*/\alpha)^\beta + \beta - 1 = 0$, e pela solução da equação, o ponto aonde a taxa de falha é mínima pode ser obtido por:

$$t^* = \alpha \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (6.6)$$

Pode ser observado que quando $\beta < 1$, t^* existe e é finito. Quando $t < t^*$, $h'(t) < 0$, a função da taxa de falha é decrescente, quando $t > t^*$, $h'(t) > 0$, a função de taxa de falha é crescente. Portanto, a função de taxa de falha tem propriedades de uma curva com a forma da banheira.

2. $h(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow +\infty$.
3. A mudança de aumento no ponto t^* como a diminuição do parâmetro de forma β de 1,0 até 0.

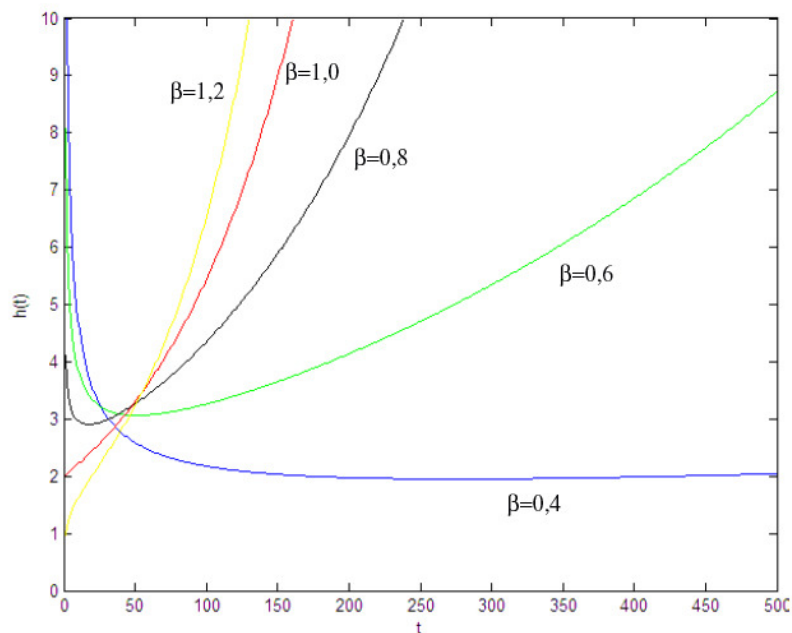


Figura 6.1 - Mostra a função da taxa de falha com $\lambda=2$, $\alpha=100$, e β mudando de 0,4 até 1,2.

A Fig. 6.1 mostra os gráficos da função da taxa de falha para algumas diferentes combinações dos parâmetros. Da Fig. 6.1 podemos observar que a função de taxa de falha é uma função crescente quando $\beta \geq 1$ e $h(t)$ é uma função com a forma da curva da banheira quando $\beta < 1$.

6.2.2 Média e Variância do Tempo de Falha

O tempo esperado para falhar da distribuição, ou o tempo médio para falhar (MTTF) é definido como:

$$\mu = \int_0^{+\infty} t dF(t) = \int_0^{+\infty} R(t) dt = \int_0^{+\infty} \exp\left\{\lambda\alpha \left[1 - e^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]\right\} dt. \quad (6.7)$$

O cálculo da Eq. (6.7) inclui uma integração numérica que não tem uma solução analítica. Assim a integração numérica é normalmente necessária. Entretanto, isto também é necessário para a distribuição de Weibull de dois parâmetros.

A variância do tempo para falhar pode ser obtida por:

$$\text{Var}(T) = \int_0^{+\infty} t^2 dF(t) - \mu^2 = \int_0^{+\infty} tR(t) dt - \mu^2 = 2 \int_0^{+\infty} t \exp\left\{\lambda\alpha \left[1 - e^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]\right\} dt - \mu^2. \quad (6.8)$$

Novamente, esta equação tem que ser calculada numericamente.

6.2.3 Relação com Outras Distribuições

O modelo deste capítulo está principalmente relacionado ao modelo de Chen (2000) com a adição do parâmetro de escala. Podemos mostrar também que o modelo tem a distribuição de Weibull como um caso especial e assintótico.

6.2.3.1 Relação com o Modelo de Chen (2000)

Quando $\alpha = 1$; o modelo se reduz ao modelo de Chen (2000) dado por:

$$R(t) = \exp\left\{\lambda\left[1 - e^{(t)^\beta}\right]\right\}. \quad (6.9)$$

Este modelo é interessante do ponto de vista teórico; os intervalos exatos de confiança para os parâmetros correspondentes são discutidos no artigo original de Chen (2000). Não existe nenhum parâmetro de escala assim iremos perder estas propriedades estatísticas.

Contudo, um parâmetro de escala é importante para aplicação prática do modelo. Podemos observar que o ponto aonde a taxa de falha é mínimo, introduzido como indicado na Eq. (6.6), depende principalmente do parâmetro de escala introduzido. Sem isto, o ponto de mudança será fixo para qualquer valor dado do parâmetro β . Observar que o parâmetro β tem uma função importante neste modelo já que é um parâmetro de forma como pode ser visto na Fig. 6.1.

6.2.3.2 Relação com a Distribuição de Weibull

O modelo deste capítulo está relacionado com a distribuição de Weibull de um modo interessante. A distribuição de Weibull pode ser vista como um caso assintótico da distribuição proposta neste capítulo. Quando o parâmetro de escala α torna-se muito grande ou aproxima-se do infinito, temos que:

$$1 - e^{-(t/\alpha)^\beta} \approx 1 - [1 + (t/\alpha)^\beta + o(t^\beta)] \approx -(t/\alpha)^\beta. \quad (6.10)$$

Neste caso, temos que:

$$R(t) = \exp\left\{\lambda\alpha\left[1 - e^{-(t/\alpha)^\beta}\right]\right\} \approx \exp\{-\lambda\alpha^{1-\beta}t^\beta\}. \quad (6.11)$$

A Eq. (6.11) é uma distribuição de Weibull padronizada de dois parâmetros com um parâmetro de forma β e um parâmetro de escala $\alpha^{\beta-1}/\lambda$. Portanto, no caso limite quando α aproxima-se do infinito enquanto $\alpha^{\beta-1}/\lambda$ permanece constante, a nova distribuição torna-se uma distribuição padronizada de Weibull de dois parâmetros. Neste caso limite, o modelo é capaz de manusear ambas as taxa de falha crescente e decrescente, que é de fato, um caso especial de curva da banheira.

Um caso adicional especial é, quando $\beta = 1$, α é suficientemente grande e $\alpha^{\beta-1}/\lambda$ é uma constante. O modelo reduz-se à distribuição exponencial com parâmetro $\alpha^{\beta-1}/\lambda$. Sabemos que a distribuição exponencial tem uma taxa de falha constante, que é novamente, um caso muito especial da curva de banheira.

6.3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS MODELOS

A estimação de parâmetros é normalmente um problema difícil até mesmo para a distribuição de Weibull de dois parâmetros. Métodos como a estimação de máxima verossimilhança não fornecerão uma solução analítica. Métodos diferentes podem ser usados para estimar os parâmetros do modelo. Entre estes métodos, o método gráfico, ou seja, o método do papel de probabilidade de Weibull e o de estimação de máxima verossimilhança são os mais comumente usados para a estimação de parâmetros dos modelos.

6.3.1 Método Gráfico

6.3.1.1 Caso 1: Quando $\alpha\lambda = 1$

Um caso especial quando $\alpha\lambda = 1$ permite a obtenção de estimativas gráficas simples. Quando $\alpha\lambda = 1$, o modelo é simplificado para:

$$R(t) = \exp\{1 - e^{(t/\alpha)^\beta}\}. \quad (6.12)$$

Um método gráfico pode ser desenvolvido para a estimação dos parâmetros com esta hipótese. Uma transformação semelhante para a distribuição de Weibull usada no Capítulo III pode fornecer:

$$y = \ln\{\ln[1 - \ln(R(t))]\} \quad e \quad x = \ln t. \quad (6.13)$$

Se os dados de vida seguem o novo modelo com $\alpha\lambda = 1$, então o gráfico y versus x que pode ser ajustado com uma reta. Além disso, β é o inclinação da linha de

regressão no gráfico. A estimação de α é obtida da intercessão do eixo y e $\hat{\lambda} = 1/\hat{\alpha}$. Em outras palavras, a linha é dada pela seguinte equação:

$$y = \beta \ln t - \beta \ln \alpha = \beta x - \beta \ln \alpha, \quad \text{para } -\infty < x < +\infty. \quad (6.14)$$

6.3.1.2 Caso 2: Caso geral

Como o modelo deste capítulo tem três parâmetros, o gráfico tradicional de Weibull não produzirá uma reta. Contudo, usando a assíntota na transformação de Weibull, pode ser desenvolvido um procedimento gráfico.

Para o caso geral, considere-se a primeira parte dos dados num gráfico de Weibull quando t é pequeno. Podemos observar a estimação aproximada dos parâmetros. Temos que $1 - e^{-(t/\alpha)^\beta} \approx -(t/\alpha)^\beta$ quando $t \rightarrow 0$. Assim, podemos produzir a seguinte transformação:

$$y = \ln\{-\ln R(t)\} \quad e \quad x = \ln t. \quad (6.15)$$

Plotando y versus x, obtemos uma linha, que satisfaz a seguinte equação:

$$y = \beta x + \ln(\lambda \alpha^{1-\beta}). \quad (6.16)$$

Conseqüentemente, o parâmetro β é facilmente estimado pela inclinação da linha de regressão (Veja a Fig. 6.2). A intercessão do eixo y é igual $\ln(\lambda \alpha^{1-\beta})$.

No caso geral, a transformação de Weibull é dada por:

$$\ln[-\ln R(t)] = \ln\left\{-\lambda \alpha \left[1 - e^{-(t/\alpha)^\beta}\right]\right\} = \ln\left\{\lambda \alpha \left[e^{-(t/\alpha)^\beta} - 1\right]\right\} = \ln(\lambda \alpha) + \ln\left\{e^{-(t/\alpha)^\beta} - 1\right\}. \quad (6.17)$$

Para o segundo termo, quando t é grande, temos que:

$$\begin{aligned} & \ln\{\exp[(t/\alpha)^\beta] - 1\} \\ &= \ln\{1 - \exp[-(t/\alpha)^\beta]\} - \ln\{\exp[-(t/\alpha)^\beta]\} = -\exp[-(t/\alpha)^\beta] + (t/\alpha)^\beta. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Uma vez que o primeiro termo aproxima-se de zero, quando t é grande, a curva assintótica é $(t/\alpha)^\beta$ neste caso. Portanto, aplicando outro logarítmico, uma reta para um t muito grande pode ser usada e estimativas gráficas podem ser obtidas.

A Fig. 6.2 mostra o gráfico de Weibull de y versus x com as transformações do novo modelo com parâmetros $\alpha=100$, $\beta=0,6$ e $\lambda=2$. Na Fig. 6.2, podemos observar que a primeira parte do gráfico, quando o tempo de falha é comparativamente pequeno, a linha ajustada é uma reta. Esta parte dos dados de vida pode dar a estimativa do parâmetro de forma imediatamente.

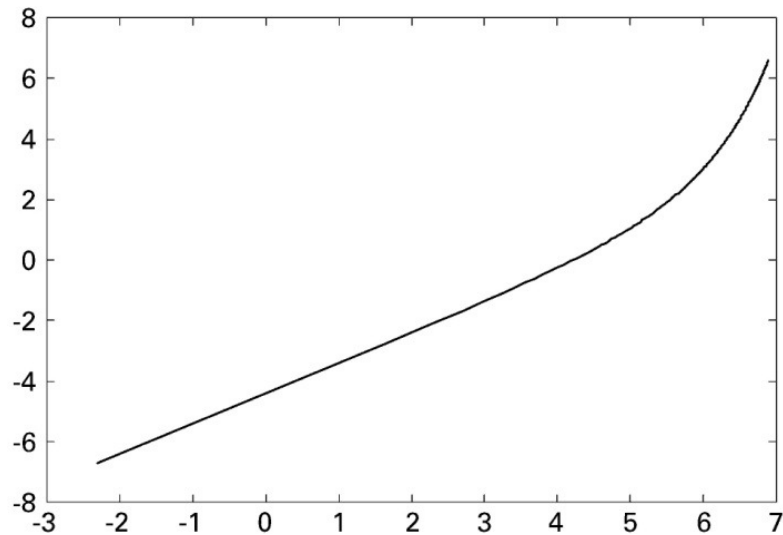


Figura 6.2 - Transformação típica de Weibull: $\alpha=100$, $\beta=0,6$ e $\lambda=2$.

6.3.2 Estimação da Máxima Verossimilhança

Técnicas estatísticas usuais como o método de máxima verossimilhança também podem ser usados neste caso. As equações de máxima verossimilhança para conjunto de dados completos ou censurados de falhas podem ser escritas e resolvidas. Supondo, por exemplo, o caso de censura do Tipo II, sejam $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ os tempos de falha de k componentes falhos de uma amostra que consiste em n componentes. A função de verossimilhança básica é:

$$L(\lambda, \alpha, \beta) = \lambda^k \beta^k \prod_{i=1}^k \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^k (t_i / \alpha)^\beta + \sum_{i=1}^k \lambda \alpha x [1 - \exp(t_i / \alpha)^\beta] + (n-k) \lambda \alpha [1 - \exp(t_k / \alpha)^\beta] \right\} \quad (6.19)$$

A função de log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda, \alpha, \beta) &= k \ln \lambda + k \ln \beta + n \lambda \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^k \ln \frac{t_i}{\alpha} \\ &+ \sum_{i=1}^k \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \lambda \alpha \sum_{i=1}^k \exp \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - (n - k) \lambda \alpha \exp(t_k / \alpha)^\beta. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Derivando a Eq. (6.20) com respeito ao parâmetro λ obtemos:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{k}{\lambda} + n \alpha - \alpha \sum_{i=1}^k \exp(t_i / \alpha)^\beta - (n - k) \alpha \exp(t_k / \alpha)^\beta. \quad (6.21)$$

Igualando a zero e reorganizando os termos teremos:

$$\lambda = \frac{k}{\alpha \sum_{i=1}^k \exp(t_i / \alpha)^\beta - (n - k) \alpha \exp(t_k / \alpha)^\beta - n \alpha}. \quad (6.22)$$

Finalmente, calculando as derivadas parciais com respeito ao parâmetro de forma β e ao parâmetro de escala α , e igualando-as a zero, as estimativas para α e β podem ser obtidas como a solução das seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= \frac{k}{\beta} + \sum_{i=1}^k \ln \frac{t_i}{\alpha} + \sum_{i=1}^k \left[\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right] - \lambda \alpha \sum_{i=1}^k \left[\exp(t_i / \alpha)^\beta \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right] \\ &- (n - k) \lambda \alpha e^{(t_k / \alpha)^\beta} (t_k / \alpha)^\beta \ln(t_k / \alpha) = 0, \end{aligned} \quad (6.23)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} &= \frac{k(\beta - 1)}{\alpha} + n \lambda - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \lambda \sum_{i=1}^k \left\{ e^{(t_i / \alpha)^\beta} (1 - (t_i / \alpha)^\beta) \right\} \\ &- (n - k) \lambda e^{(t_k / \alpha)^\beta} (1 - (t_k / \alpha)^\beta) = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Estas equações não podem ser resolvidas analiticamente, como no caso da distribuição de Weibull de dois parâmetros, ou seja, só podem ser resolvidas de forma numérica. Como estamos trabalhando com dados sem censura, deste modo podemos fazer $n = k$. Aplicando esta consideração nas Eqs. (6.22), (6.23) e (6.24), temos:

$$\lambda = \frac{n}{\alpha \sum_{i=1}^n \exp(t_i / \alpha)^\beta - n\alpha}, \quad (6.25)$$

$$\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^k \ln \frac{t_i}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right] - \lambda \alpha \sum_{i=1}^n \left[\exp(t_i / \alpha)^\beta \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \frac{t_i}{\alpha} \right] = 0 \quad (6.26)$$

e

$$\frac{n(\beta-1)}{\alpha} + n\lambda - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \lambda \sum_{i=1}^n \left\{ e^{(t_i / \alpha)^\beta} (1 - (t_i / \alpha)^\beta) \right\} = 0. \quad (6.27)$$

6.4 APLICAÇÃO DO MODELO NA TOMADA DE DECISÃO

As funções de taxa de falha com comportamento da curva da banheira são úteis para tomada de decisão baseada na confiabilidade. Vamos ilustrar algumas aplicações possíveis como a determinação do *burn-in* e do tempo de substituição baseada em critérios de taxa de falha e de confiabilidade. No Capítulo I são citados vários indicadores de manutenção que podem se beneficiar das funções desenvolvidas neste capítulo e no capítulo anterior, além de outras propriedades baseadas na confiabilidade citadas no Capítulo II.

O *burn-in* é o período onde ocorre um decréscimo da taxa de falhas. Tipicamente é a fase onde os fabricantes costumam fornecer a assistência técnica gratuita (garantia), responsabilizando-se pelo desempenho do produto. O *burn-in* é uma técnica muito usada para melhorar a confiabilidade dos produtos. Quando introduzimos um novo produto, a taxa de falha pode ser extremamente alta durante

o período de mortalidade infantil (amaciamento), devido à debilidade do projeto, imperfeições na fabricação ou defeitos de instalação e assim por diante.

Por outro lado, quando há o período de desgaste e o produto se aproxima do fim da sua vida de projeto, a taxa de falha começa a aumentar rapidamente. Neste caso, a substituição é necessária para prevenir a falha.

6.4.1. Caso 1: Determinação do Tempo de Burn-in

(Mi J, 1995) desenvolveu a seleção do *burn-in* pela maximização da vida residual média. Uma vez que o modelo deste capítulo e do capítulo anterior têm uma função de taxa de falha da forma de curva da banheira diferenciável, com um ponto onde a taxa de falha é mínimo, temos que $0 < t^* < +\infty$, então a vida residual média é dada por:

$$\mu(t) = E\{x - t \mid X > t\} = \left[\int_t^{+\infty} R(x) dx \right] / R(x). \quad (6.28)$$

O tempo b^* do Burn-in pode ser obtido também pela minimização da função de taxa de falha. Isto pode ser obtido quando b^* for igual ao ponto de mudança

$$b^* = \alpha(1/\beta - 1)^{1/\beta}. \quad (6.29)$$

Resumindo, b^* aumenta quando α aumenta ou quando β diminuí de 1 até 0.

Outro critério na aplicação de confiabilidade pode ser a exigência de um determinado valor da taxa de falha, supondo que o produto é aceitável quando a taxa de falha for menor do que r_b para satisfazer esta condição. O *burn-in* ótimo é determinado pela seguinte equação:

$$r_b = \lambda\beta(b^*/\alpha)^{\beta-1} \exp[(b^*/\alpha)^\beta] \quad (6.30)$$

Existem duas soluções possíveis para a Eq. (6.30). Porém, é claro que b^* deve ser o menor dos dois.

6.4.2. Caso 2: Determinação do Tempo de Substituição

Quando a determinação do tempo de substituição é importante para garantia e manutenção de um produto, o modelo deste capítulo e do capítulo anterior também podem facilmente ser usados para este propósito, supondo que o critério seja o de que a função de taxa de falha não deva ser mais alta do que um nível aceitável de r_c . Seja w^* o tempo no qual o sistema deva ser substituído. Com os critérios de taxa de falha, w^* pode ser obtido resolvendo a seguinte equação:

$$r_c = \lambda\beta(w^*/\alpha)^{\beta-1} \exp[-(w^*/\alpha)^\beta] \quad (6.31)$$

uma vez que a taxa de falha exibe uma curva em forma de banheira. Existem também duas soluções possíveis para esta equação. Depois do ponto de mínimo da função taxa de falha, a taxa de falha aumentará, deste modo, vamos escolher a solução com um valor mais alto.

6.5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Vamos usar o conjunto de dados não agrupados da referência Wang (2000), que tem a função de taxa de falha com comportamento da curva da banheira. Há 18 aparelhos sob teste e todos falham. Logo, temos $n = k = 18$.

O método gráfico como descrito neste capítulo será usado para estimar os parâmetros do modelo. Para simplificar o procedimento, consideraremos o modelo quando $\alpha\lambda = 1$. As transformações realizadas neste conjunto de dados são mostradas na Tabela 6.2.

Tabela 6.1 – Conjunto de dados de falhas de 18 aparelhos (Wang, 2000).

5	11	21	31	46	75	98
122	145	165	196	224	245	293
321	330	350	420			

Tabela 6.2 – Transformações realizadas nos dados de falhas de Wang (2000).

i	t_i	$\ln t$	$F_1(t)$	$y_1(t)$	$F_2(t)$	$y_2(t)$
1	5	1,609	0,038	-3,269	0,053	-2,944
2	11	2,398	0,092	-2,380	0,105	-2,249
3	21	3,045	0,147	-1,915	0,158	-1,841
4	31	3,434	0,201	-1,597	0,211	-1,550
5	46	3,829	0,255	-1,353	0,263	-1,322
6	75	4,317	0,310	-1,154	0,316	-1,134
7	98	4,585	0,364	-0,985	0,368	-0,973
8	122	4,804	0,418	-0,837	0,421	-0,830
9	145	4,977	0,473	-0,704	0,474	-0,702
10	165	5,106	0,527	-0,581	0,526	-0,583
11	195	5,273	0,582	-0,468	0,579	-0,473
12	224	5,412	0,636	-0,359	0,632	-0,368
13	245	5,501	0,690	-0,254	0,684	-0,266
14	293	5,680	0,745	-0,150	0,737	-0,165
15	321	5,711	0,799	-0,044	0,789	-0,063
16	330	5,799	0,853	0,069	0,842	0,045
17	350	5,858	0,908	0,198	0,895	0,165
18	420	6,040	0,962	0,373	0,947	0,316

Nota: $F_1(t) = (i-0,3)/(n+0,4)$, $F_2(t) = i/(n+1)$ e $y_i(t) = \ln(\ln(1-\ln(1-F_1(t))))$.

Ao plotarmos os dados da Tabela 6.2 e ajustá-los a uma linha reta, conforme as Eqs. (6.13) e (6.14), e aplicarmos o método dos mínimos quadrados descrito no Capítulo III, vamos obter a equação da reta dada por:

$$y = 0,7398x - 4,2855.$$

Aplicando a Eq. (6.14) e a relação $\alpha\lambda = 1$, referente ao caso 1, temos:

$$\alpha = 327,92 \qquad \beta = 0,7398 \qquad \lambda = 0,00305.$$

Parâmetros da função de taxa de falha obtidos pelo procedimento de otimização apresentado no capítulo IV (Método de Hooke e Jeeves):

$$\alpha = 277,10 \qquad \beta = 0,7652 \qquad \lambda = 0,00332.$$

Observar que β é menor do que 1, o que demonstra que o conjunto de dados de falhas tem uma função de taxa de falha com comportamento da curva da banheira. O

ponto de mudança (mínimo) da curva de taxa de falha é $t^* = 59,1729$. Isto pode ser observado na construção da Fig. 6.3.

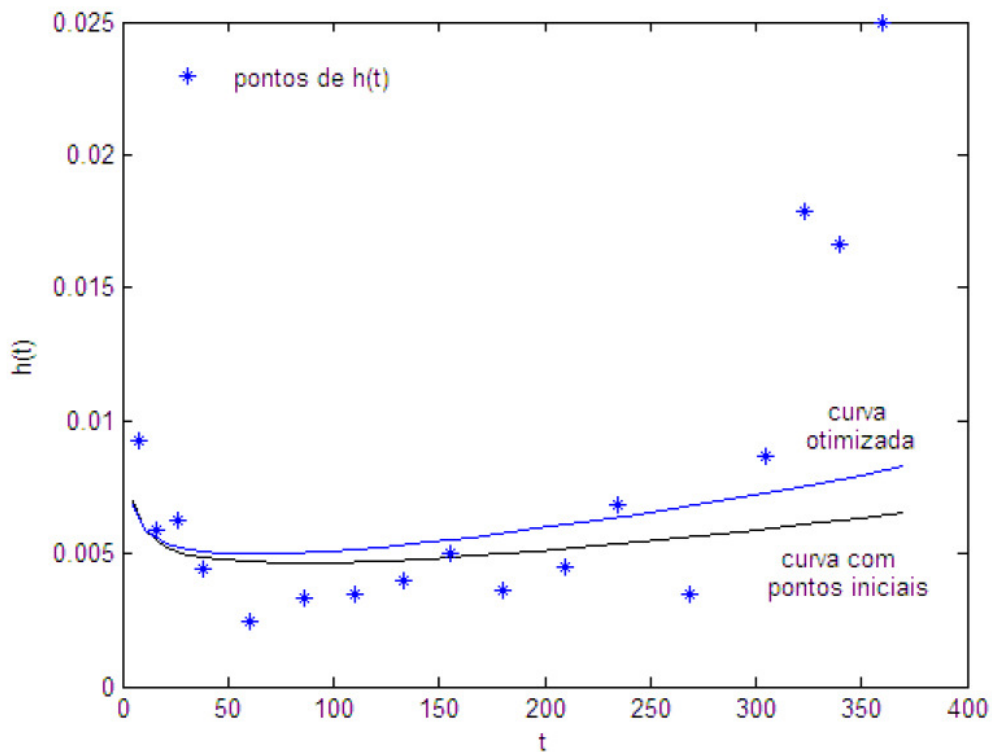


Figura 6.3 - Resultados Obtidos na Modelagem.

6.6 CONCLUSÃO

Este capítulo mostra que o modelo proposto é capaz de modelar os dados de falhas cuja função de taxa de falha tenha o comportamento da curva da banheira. Além disso, é mais flexível, mais fácil de ser usado e apresenta uma boa exatidão quando comparado com outros modelos encontrados na literatura, como o de Chen (2000). Contém somente três parâmetros e está relacionado às distribuições exponencial e de Weibull numa forma assintótica.

Os parâmetros do modelo proposto podem ser estimados graficamente, com o uso do método dos mínimos quadrados descrito no Capítulo III. Esta aproximação a uma equação de uma reta serve também para validar o modelo e para proporcionar estimativas iniciais para métodos numéricos de otimização.

Concluindo, o modelo proposto serve como uma boa alternativa na modelagem de modelos com a função de taxa de falha com a forma da curva da banheira.

Podemos verificar os resultados final da otimização utilizando a Eq. (6.22) como $k=n$, teremos:

$$n = \frac{\lambda \alpha \sum_{i=1}^k \exp(t_i / \alpha)^\beta}{1 + \lambda \alpha} \quad (6.32)$$

Para os parâmetros encontrado com os dados da Tab. 6.1

$n = 16,9351$.

Analisando os dados otimizados teremos:

$n = 17,9982$.

Podemos ver que os dados otimizados se ajustam melhor à curva, observando a Fig. 6.3 e pelo resultados encontrados pela Eq. (6.22).

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho foram desenvolvidas duas modelagens da confiabilidade do processo de falha de equipamentos reparáveis cuja taxa de falha apresenta um comportamento do tipo banheira, comportamento este que ocorre mais freqüentemente em equipamentos grandes e complexos tendo muitos modos de falhas. Os resultados das ajustagens foram satisfatórios e são demonstrados nas conclusões finais dos capítulos V e VI.

Um dos objetivos iniciais que era o de encontrar modelagens que descrevessem a curva da banheira utilizando o menor numero de variáveis possíveis foi alcançado, pois a modelagem do capítulo V usa apenas quatro parâmetros e a do capítulo VI usa apenas três parâmetros.

As equações da função de taxa de falha com comportamento da curva da banheira desenvolvidas neste trabalho poderão ser usadas na tomada de decisão baseada na confiabilidade, nos levantamentos dos indicadores de manutenção dos equipamentos para fins de organização, planejamento e otimização da manutenção industrial.

No decorrer do trabalho foram apresentados vários métodos que poderiam ser utilizados na análise estatística de dados de falhas. Apesar de nem todas terem sido utilizadas nas duas modelagens, estes métodos podem ser úteis para outros estudos.

Apresentamos os métodos de otimização de Hooke e Jeeves e Nelder-Mead para serem usados nos processos de otimização das modelagens das curvas da banheira, estes métodos possuem uma característica em comum, que é a de não fazer uso da derivação, muito comum na maioria dos métodos de otimização. Como os dois métodos têm a mesma precisão para poucas variáveis, optamos em só usar o método de Hooke e Jeeves porque é mais simples de implantar.

Sugestões:

Muitos estudos estão concentrados no estudo da relação dependente do tempo de h ou/e R , como é o caso dos estudos desenvolvidos nos Capítulos V e VI deste trabalho. Estes estudos focalizam seu esforço em determinar a forma geométrica da curva de banheira com menos discussão nos significados físicos. Em geral, um sistema ajusta sua performance continuamente de acordo com a capacidade em relação à:

Adaptação entre união de subsistemas e as vizinhanças do sistema; e

Resistência ao dano cumulativo.

Estes dois mecanismos afetam simultaneamente a performance do sistema, o primeiro domina o comportamento na fase de mortalidade infantil e o último a fase de desgaste, como mostra Fig. 7.1.

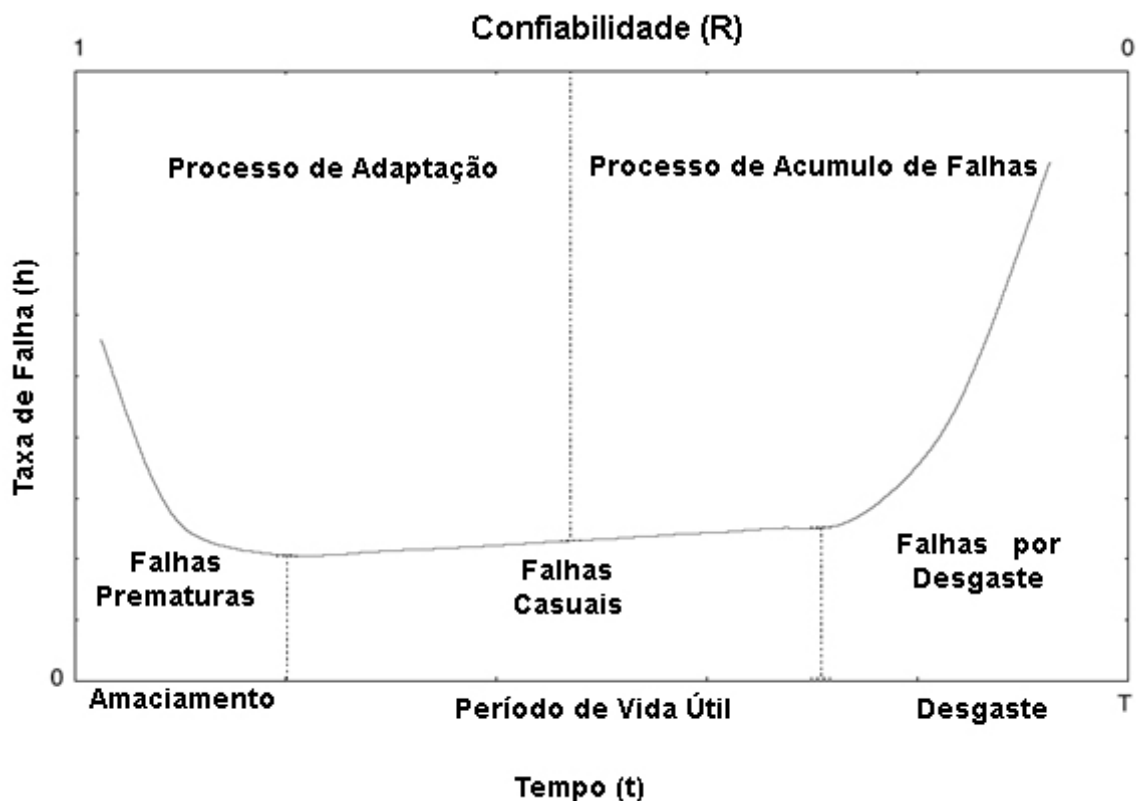


Figura 7.1 - O comportamento geral de taxa de falha versus tempo ou confiabilidade

Uma sugestão de continuidade é desenvolver um modelo preocupado com o comportamento de taxa de falha em todas as fases da curva da banheira, baseados nos mecanismos de falha. A relação entre a taxa de falha e a confiabilidade de um sistema é definida como:

$$h(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR}{dt} \quad (7.1)$$

Como a confiabilidade diminui monotonicamente com o tempo, existe uma correspondência ponto a ponto entre R e t , ou seja, a função de taxa de falha também pode ser expressa como:

$$h(t) = -\frac{1}{R} \frac{1}{dt/dR} = f(R) \quad (7.2)$$

Deste modo, em vez do procedimento habitual de estimar $h(t)$, a proposta é ajustar a relação de $h(R)$ baseada nos dados disponíveis. A mudança da expressão $h(t)$ para $h(R)$ tem certas vantagens:

A taxa de falha é analisada no domínio finito $[1,0]$ quando comparando com aquele no domínio infinito de seqüência de tempo;

Às vezes a ajustagem de $h(t)$ tem que se preocupar se ou não os dados coletados no domínio do tempo são suficientes para descrever as circunstâncias reais, mas isto não é preciso na ajustagem de $h(R)$.

Uma equação completa encontrada na literatura que representa todas as fases da curva da banheira é dada por (Wang *et al.*, 2002):

$$h(R) = e + aR^m + c(1-R)^n + l(1-R)^n \quad (7.3)$$

As explicações físicas da participação de cada parcela da Eq. (7.3) como proposta de uma relação dependente da confiabilidade é descrita como:

(a) *Falhas imprevisíveis (Ruído branco)*: refere-se a falhas imprevisíveis ocorrendo ou de aumento súbito de carga aplicada devido a variações ambientais ou a imprevisível debilidade intrínseca embutido num novo sistema (Wang, 1993). Tais condições farão o sistema falhar aleatoriamente durante a vida de serviço. Suponha que a ocorrência de falha segue um processo de Poisson, isto é, que este tipo de falha é representado por uma constante e .

(b) *Dano Acumulativo*: indica que o enfraquecimento da resistência acontece continuamente devido à tensão aplicada, exemplo típico é mostrado no fenômeno de fadiga. Este tipo de taxa de falha enfatiza as características de memória de degradação da resistência. Uma vez que $R_0 - R$ representa a probabilidade de falha, então a relação com a confiabilidade é proposta como (Haur-Lin Chang, 1999):

$$h_c = c(R_0 - R)^n, \quad c > 0, n > 0. \quad (7.4)$$

O parâmetro c representa a diminuição na confiabilidade quando o dano cumulativo torna-se significativo na possibilidade de falha, portanto, pode ser pensado como o coeficiente de degradação da resistência. O expoente n representa o início da óbvia mudança em confiabilidade, deste modo, refere-se às características de memória de dano. Sem perda de generalidade, impondo $R_0 = 1$, a Eq. (7.4) torna-se:

$$h_c = c(1 - R)^n, \quad c > 0, n > 0. \quad (7.5)$$

(c) *Interferência homem-sistema*: pode resultar em um efeito positivo ou negativo na falha do sistema. Normalmente a taxa de falha mudaria ligeiramente no período de vida útil. A explicação de tal pequena variação é muito complicada. Assumir a chance de termos um erro depende da probabilidade de falha, ou seja, $1 - R$, enquanto isso a habilidade de recuperação por aprendizagem pode ser medida por uma potência de confiabilidade. Uma vez que o aprendizado humano e o comportamento de falha do sistema interagem um com o outro, a taxa de falha deste tipo pode ser proposta na forma:

$$h_m = IR^{m'}(1 - R)^{n'}, \quad m', n' > 0, \quad (7.6)$$

onde o coeficiente de aprendizagem, I , pode ser positivo ou negativo, m' e n' representam os expoentes de aprendizagem e de recuperação, respectivamente. Para I positivo a Eq. (7.6) representa que a operação humana (pode vir de procedimentos desqualificados) pode levar o sistema em uma situação pior e, assim, sobe a taxa de falha. Podemos observar freqüentemente que a taxa de falha da relação homem-sistema no sistema aumenta ligeiramente devido à falta de treinamento para as operações. Enquanto que I negativo, significa que a aprendizagem ajusta os efeitos da operação no caminho certo e deste modo a taxa

de falha é reduzida. Em alguns casos, as características de recuperação não podem ser sensíveis à confiabilidade, assim h_m pode ser simplificado para:

$$h_m = l(1-R)^{n'}, \quad (7.7)$$

A Eq. (7.5) é diferente da Eq. (7.7), a primeira descreve o comportamento da taxa de falha na fase de desgaste enquanto a última indica um leve aumento da taxa de falha na fase da vida útil, isto é, $n > n'$ e $c > l > 0$. Porém, poucos exemplos podem ser achados na literatura para mostrar a melhoria de taxa de falha de um sistema complicado devido à correção da aprendizagem pelo pessoal de operação.

(d) *Adaptação*: refere-se ao processo de melhoria na taxa de falha quanto à adaptação entre a união (contato) dos componentes ou subsistemas. Porém, tal mecanismo reduz a resistência dos componentes quando o contato torna-se mais suave, deste modo a confiabilidade cai com o decréscimo da taxa de falha, ou seja,

$$h_a = aR^m, \quad a > 0, m > 0, \quad (7.8)$$

onde a e m são a resistência e características de adaptação, respectivamente.

Referências Bibliográficas

Associação Brasileira de Normas técnicas. NBR-5462: confiabilidade e manutenibilidade. Rio de Janeiro, 1994.

Alkaim, L; Metodologia para incorporar conhecimento intensivo às tarefas de Manutenção Centrada na Confiabilidade aplicada em ativos de sistemas elétricos. Tese de Doutorado submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Produção. Brasil 2003.

Carter, A. D. S.; Mechanical reliability. 2nd ed., Ed. Macmillan, London, 1986.

Chen Z. A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. Stat Probab Lett 2000; 49:155-61.

Coetzee J.L., 1996, "Reliability degradation and the equipment replacement problem". In: Proc. Int. Conf. of Maintenance Societies (ICOMS-96). Melbourne, Paper 21.

Cox DR, Lewis PAW. The statistical analysis of series of events. London: Methuen, 1966.

Cox DR, Isham V. Point processes. London: Chapman and Hall, 1980.

Crow LH. Reliability analysis for complex repairable systems. In: Proschan F, Serfling RJ, editors. Reliability and biometry, SIAM, 1974. p. 379-410.

Crowder, M.J., Kimber, A.C., Smith, R.L. and Sweeting, T.J., *Statistical Analysis of Reliability Data*, Chapman & Hall, London, 1991.

Freitas, M.A., Colossimo E.A.; Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados. Ed. Fundação Christiano Ottoni, Belo Horizonte, 1997.

Edelstein-Keshet Leah. Mathematical models in biology. New York: Random House, 1988.

Härtler G. Graphical Weibull analysis of repairable systems. Quality and Reliability Engineering International 1985;1(1):23-6.

Haur-Lin Chang. The relationship between system reliability and hazard rate. Master Thesis, National Central University, Taiwan, ROC, 1999.

Hjorth U. A reliability distribution with increasing, decreasing, constant and bathtub-shaped failure rates. Technometrics 1980;22:99-107.

Hooke, R.; Jeeves, T. A. (1961). Direct search solution of numerical and statistical problems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 8, pp. 212-229.

IEC-60050-191, International Electrotechnical Vocabulary - Chapter 191: Dependability and Quality of Service, First Edition, Amendment 1 03/1999; Amendment 2 01/2002 (Current) 1990-12-01.

Jiang S, Kececioglu D. Graphical representation of two mixed Weibull distributions. *IEEE Trans Reliab* 1992;41:241-7.

Jiang R, Murthy DNP. Exponentiated Weibull family: a graphical approach. *IEEE Trans Reliab* 1999;47:68-72.

Jiang R, Murthy DNP. Modeling failure-data by mixture of 2 Weibull distributions: a graphical approach. *IEEE Trans Reliab* 1995;44:477-88.

Jiang R, Murthy DNP. Reliability modeling involving two Weibull distributions. *Reliab Engng Syst Safety* 1995;47:187-98.

Lafraia, J. R. B. Manual de Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade, Qualitymark, 2008.

Lagarias, J.C., Reeds, J.A., Wright, M.H. and Wright, P.E. Convergence properties of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions, *SIAM, Journal of Optimization* 9 (1) (1998) 112–147.

Lai CD, Xie M, Murthy DNP. Bathtub-shaped failure rate life distributions. *Handbook of statistics, Advances in reliability*, vol. 20. London: Elsevier, 2001 p. 69-104.

Lewis, E.E.; Introduction to reliability engineering. 2nd ed., Ed. J. Wiley, New York, 1996.

Lewis, E.E., *Introduction to Reliability Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1987.

Lilius WA. Graphical analysis of repairable systems. In: Proc. 1979 Annual Reliability & Maintainability Symposium. Washington, DC, 1979, p. 403-6.

MI, J. Bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life. *IEEE Trans Reliab* 1995;44:388-91.

MONCHY, F. A função manutenção. São Paulo: EBRAS/DURBAN, 1989.

MOUBRAY, J. RCM II: Reliability-Centred Maintenance. Butterworth Heinemann, London, 2000.

MOUBRAY, John. RCM II – Reliability – Centered Maintenance. second edition, New York: Industrial Press Inc, 1997 .

Mudholkar GS, Srivastava DK. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data IEEE Trans Reliab 1993;42:299-302.

Nash, J.C. and Walker-Smith, M., 1987, *Nonlinear Parameter Estimation*, Marcel Dekker, New York.

Nelder, J.A. and Mead, R. A simplex method for function minimization, Computer Journal 7 (1965) 308–313.

Nelson, W., “Graphical Analysis of System Repair data”, Journal of Quality Technology, 1998, Vol. 20, No 1, pp.24-35.

Noriega, H., Um Modelo para análise da Confiabilidade de Sistemas Reparáveis Baseados em Processos Pontuais, Tese de D.Sc., UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, 1998.

O’Connor, P.D.; Practical reliability engineering. 4 ed., Ed. Willey, England, 2002.

Pulcini, G, Modeling the failure data of a repairable equipment with bathtub type failure intensity. Reliability Engineering and System Safety, 71 (2001), 209-218.

Rajarshi S, Rajarshi MB. Bathtub distributions-a review. Commun Stat- Theory Meth 1988;17:2597-621.

Ross, S.M. (2000), *Introduction to Probability Models*, San Diego, CA: Academic Press. pp. 284-286

Soong, T., Modelos Probabilísticos em Engenharia e Ciências, LTC, Rio de Janeiro, 1986.

Zegong, Z. and Changhong, L., 1992, “Optimization Method to Estimate Distributional Parameter Values and Optimum Distribution Function from Incomplete Data”, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 36, pp. 123-126.

Wang KS, Chang ST, Shen YC. Dynamic reliability models for fatigue crack growth problem. J Engng Fract Mech 1996;54(4): 543-56.

Wang KS, Hsu FS, Chang HL. The relationship study between dynamic reliability and damage cumulation. Chinese J Mech, Series B 2000; 16(2): 131-9.

Wang KS, Wan EH, Yang WC. A preliminary investigation of new mechanical product development based on reliability theory. *Reliab Engng Syst Safety* 1993;40:187-94.

Xie M, Lai CD. Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function. *Reliab Engng Syst Safety* 1996;52:87-93.

Wang FK. A new model with bathtub-shaped failure rate using an additive Burr XII distribution. *Reliab Engng Syst Safety* 2000;70:305-12.

Wang CJ. Graphical analysis of ill-collected interval data for a repairable system in vehicles. In: *Proc. 1991 Annual Reliability & Maintainability Symposium*. Orlando, FL, 1991, p. 93-7.