

**APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
ELÁSTICOS AXISSIMÉTRICOS ESPECIAIS**

LEONARDO CAPUTO DE MOURA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

VITÓRIA, JULHO DE 2011.

**APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
ELÁSTICOS AXISSIMÉTRICOS ESPECIAIS**

LEONARDO CAPUTO DE MOURA

**Dissertação submetida ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica da Universidade Federal do
Espírito Santo como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia
Mecânica na área de concentração em
Mecânica dos Sólidos.**

ORIENTAÇÃO: PROF. DR. CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO

VITÓRIA, JULHO DE 2011.

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

M929a Moura, Leonardo Caputo de Moura, 1977-
Aplicações do método dos elementos de contorno na
resolução de problemas elásticos axissimétricos especiais /
Leonardo Caputo de Moura. – 2011.
168 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Problemas elásticos
axissimétricos. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Universidade
Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

“Aplicação do Método dos Elementos de Contorno para Resolução de Problemas Elásticos Axissimétricos Especiais”

LEONARDO CAPUTO DE MOURA

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto–Orientador
Universidade Federal do Espírito Santo–UFES

Prof. PhD. Fernando César Mera Menandro.
Universidade Federal do Espírito Santo–UFES

Prof. Eng. D.Sc. André Bulcão
Petrobras/CENPES

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, área de concentração em Mecânica dos Sólidos.

Vitória, Julho de 2011.

DADOS CURRICULARES
LEONARDO CAPUTO DE MOURA

NASCIMENTO	05.05.1977 – NITERÓI /RJ
FILIAÇÃO	Dalmi Gomes de Moura Elizabeth Moura†.
1997/2002	Curso de Graduação Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília

“Há tempo para tudo.”

Thomas A. Edison

em especial a minha esposa Paula, pelo incentivo e por sempre acreditar em mim. Seu carinho, dedicação e suporte foram imprescindíveis para o sucesso deste trabalho. E ao meu filho Gustavo, verdadeiro motivo de tudo.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela minha saúde, minha família, meus amigos e ao meu orientador, *Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto* pelo incentivo constante, pela atenção e paciência e principalmente por compreender as singularidades deste projeto desenvolvido durante estes anos de trabalho.

a minha mãe Elizabeth *in memoriam*, que sempre me incentivou, acreditou em meu potencial e nunca desistiu de lutar,

aos meus Tios Ivan, Márcia e Félix Caputo, sem a ajuda deles este trabalho não seria possível, ao amigo Flávio Costalonga, pela dedicação e paciência nas horas de estudo,

aos amigos que compreenderam minha ausência durante o desenvolvimento deste trabalho,

aos meus colegas de mestrado que me ajudaram e incentivaram durante as aulas e provas e que contribuíram de diversas maneiras para o desenvolvimento deste trabalho,

à ArcelorMittal Tubarão que acreditou e forneceu a licença do ANSYS 13 Workbench e todos os outros recursos necessários para o desenvolvimento do projeto e principalmente pelo incentivo dado ao aprimoramento contínuo de meus conhecimentos técnicos.

Aos meus gerentes da ArcelorMittal Tubarão que me incentivaram e sempre me disponibilizaram o tempo e os recursos necessários para o sucesso deste trabalho.

CAPUTO, L. M. **Aplicação do Método dos Elementos de Contorno para Resolução de Problemas Elásticos Axissimétricos Especiais**. 2011. 168 f. (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2011.

RESUMO

Neste trabalho desenvolve-se um estudo sobre o método dos elementos de contorno (MEC) aplicado a problemas elásticos axissimétricos, onde são revistas algumas formas de tratamento das integrais envolvidas considerados elementos de contorno quadráticos nos algoritmos do método. São adotados elementos isoparamétricos com funções de interpolação lineares ou quadráticas. Foi tomada como solução fundamental cartesiana tridimensional a solução de Kelvin, na qual se considera uma carga unitária concentrada em um domínio infinito com propriedades e comportamento elásticos. Na formulação clássica do MEC desenvolve-se um algoritmo em que os pontos de colocação são posicionados fora do domínio do problema, evitando-se assim qualquer tipo de singularidade. O problema, que é tridimensional e expresso em coordenadas cilíndricas (r , θ e z) originalmente, é integrado em relação a “ θ ” transformando-se em um problema bidimensional expresso somente em função de coordenadas ortogonais (r e z). Durante este procedimento há o aparecimento de integrais elípticas e suas derivadas, as quais são manipuladas para a obtenção das expressões de deformações e tensões fundamentais. Deslocamentos e tensões em pontos internos são determinados numa etapa seguinte. Um programa foi implementado utilizando as técnicas e formulações revistas, que tiveram sua eficiência avaliada por meio de alguns exemplos numéricos.

CAPUTO, L. M. **Application of Boundary Element Method for resolution of Special Elastic Axyssimetric Problems.** 2011.168 pages.(Master Degree in Mechanical Engineering) – Espírito Santo Federal University, Vitória, 2011.

ABSTRACT

In this work a study about the boundary element method applied to axysymmetric elastostatic problems is developed. Some approaches used to evaluate the integrals involved in the method are reviewed. Triangular isoparametric boundary elements are used, with linear or quadratic shape functions. The Kelvin solution, which uses a unitary concentrated load in an infinite elastic domain to generate the fundamental solution, is taken into account. In addition to the classical BEM algorithm, in order to avoid any singularities, an algorithm using the collocation points outside the problem domain is presented. The three-dimensional problem expressed in cartesian coordinates is transformed into cylindrical coordinates. Next, the mathematical expressions are integrated in the “ θ ” variable, transforming the problem in a two-dimensional solution.

In this mathematical strategy the elliptic integrals and their derivatives are manipulated to obtain the fundamental stresses. Here the positions of source points are external to the physical domain, avoiding singularities.

A program has been developed using these approaches, its efficiency was evaluated by means of some numerical examples.

This work presents the Boundary Element formulation to axisymmetric elastic problems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Componentes de tensões atuando nas faces de um volume elementar representando um ponto no interior de um corpo tridimensional	32
Figura 2 – Nós geométricos e pontos externos ao contorno de uma placa circular.	38
Figura 3 – Solução de Kelvin – onde o domínio Ω^* é infinito e apresenta propriedades e comportamento elástico.	50
Figura 4 – Coordenadas cilíndricas para o ponto “P” situado no contorno da seção de revolução, e para o ponto “Q” situado no contorno tridimensional do corpo.	52
Figura 5 – Geometria retilínea.	71
Figura 6 – Geometria retilínea - elemento diferencial.	72
Figura 7 – Geometria quadrática.	73
Figura 8 – Vetor posição e vetores unitários.	74
Figura 9 – Elemento diferencial da curva.	74
Figura 10 – Sistema de coordenadas adimensional.	77
Figura 11 – Elemento de contorno quadrático.	78
Figura 12 – Nós geométricos e pontos externos ao contorno de uma placa circular.	84
Figura 13 – Vetores Normal e Tangente.	85
Figura 14 – Ilustração de quando $\Delta\Gamma \rightarrow 0$; $\Delta t \rightarrow 0$, temos $d\Gamma = dt$	86
Figura 15 – Tela do Fortran f90 – Três subrotinas do arquivo USEPIJS.f90	92
Figura 16 – Arquivos da geometria a ser lida e arquivo executável do software.	92
Figura 17 – Arquivobackup.txt instruções dos dados de entrada.	93
Figura 18 – Tela inicial do software.	94
Figura 19 – Tela do software com as condições de contorno.	94
Figura 20 – Tela do software com apresentação da malha gerada de 16 elementos. ...	95
Figura 21 – Tela do software com apresentação dos deslocamentos.	96
Figura 22 – Arquivo gerado de resultados na extensão txt.	97
Figura 23 – Placa Circular que será submetida a um carregamento distribuído sobre sua superfície.	99
Figura 24 – Seção de revolução da Placa Circular.	100
Figura 25 – Seção em corte da Placa Circular.	101
Figura 26 – Modelo simplificado, considerando uma placa circular com carregamento q distribuído, adequadamente representada pela sua seção de revolução.	101

Figura 27 – Ilustração da distribuição dos elementos ao longo do contorno conforme o refinamento da malha utilizada na simulação: malhas menos refinadas...	102
Figura 28 – Ilustração da distribuição dos elementos ao longo do contorno conforme o refinamento da malha utilizada na simulação: malhas mais refinadas.	103
Figura 29 – Malhas geradas para Placa Circular com espessura de 0,5 m com 16, 28, 40, 78 e 100 pontos nodais.....	104
Figura 30 – Malhas geradas para Placa Circular com espessura de 0,25 m com 16, 24, 40, 76 e 100 pontos nodais.....	105
Figura 31 – Malhas geradas para Placa Circular com espessura de 0,1 m com 16, 28, 40, 78 e 100 pontos nodais.....	106
Figura 32 – Gráfico ilustrando o comportamento da tensão para espessura de 0,5. ..	111
Figura 33 – Gráfico ilustrando o comportamento da tensão para espessura de 0,25..	112
Figura 34 – Gráfico ilustrando o comportamento da tensão para espessura de 0,1. ..	112
Figura 35 – Gráfico ilustrando a deflexão da placa para a espessura de 0,5.....	113
Figura 36 – Gráfico ilustrando a deflexão da placa para a espessura de 0,25.....	114
Figura 37 – Gráfico ilustrando a deflexão da placa para a espessura de 0,1.....	114
Figura 38 – Representação Geométrica do problema de Boussinesq, destacando a região de revolução e o carregamento concentrado.	115
Figura 39 – Modelo simplificado, considerando uma seção retangular com carregamento P distribuído em uma região de comprimento r numerado conforme formulas analíticas colhidas pela literatura.	116
Figura 40 – Modelo simplificado, considerando uma seção retangular com carregamento P distribuído em uma região de comprimento r numerado conforme coordenadas utilizadas pelo software.	117
Figura 41 – Distribuição dos elementos no contorno para $r=0,1$	118
Figura 42 – Distribuição dos elementos no contorno para $r=0,05$	119
Figura 43 – Distribuição dos elementos no contorno para $r=0,02$	119
Figura 44 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 18 nós e $r=0,1$	120
Figura 45 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 30 nós e $r=0,1$	120
Figura 46 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 54 nós e $r=0,1$	121
Figura 47 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 102 nós e $r=0,1$	121

Figura 48 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 18 nós e $r=0,05$	122
Figura 49 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 30 nós e $r=0,05$	122
Figura 50 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 54 nós e $r=0,05$	123
Figura 51 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 102 nós e $r=0,05$	123
Figura 52 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 18 nós e $r=0,02$	124
Figura 53 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 30 nós e $r=0,02$	124
Figura 54 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 54 nós e $r=0,02$	125
Figura 55 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 102 nós e $r=0,02$	125
Figura 56 – Gráfico da tensão σ_{rr} para um valor de $r= 0,1$	128
Figura 57 – Gráfico da tensão σ_{rz} para um valor de $r= 0,1$	128
Figura 58 – Gráfico da tensão σ_{zz} para um valor de $r= 0,1$	129
Figura 59 – Gráfico da tensão $\sigma_{\theta\theta}$ para um valor de $r= 0,1$	129
Figura 60 – Gráfico da tensão σ_{rr} para um valor de $r= 0,05$	131
Figura 61 – Gráfico da tensão σ_{rz} para um valor de $r= 0,05$	131
Figura 62 – Gráfico da tensão σ_{zz} para um valor de $r= 0,05$	132
Figura 63 – Gráfico da tensão $\sigma_{\theta\theta}$ para um valor de $r= 0,05$	132
Figura 64 – Gráfico da tensão σ_{rr} para um valor de $r= 0,02$	134
Figura 65 – Gráfico da tensão σ_{rz} para um valor de $r= 0,02$	134
Figura 66 – Gráfico da tensão σ_{zz} para um valor de $r= 0,02$	135
Figura 67 – Gráfico da tensão $\sigma_{\theta\theta}$ para um valor de $r= 0,02$	135
Figura 68 – Gráfico Comparativo da tensão σ_{rr} para todos os valores de r adotados.	136
Figura 69 – Gráfico Comparativo da tensão σ_{rz} para todos os valores de r adotados.	136
Figura 70 – Gráfico Comparativo da tensão σ_{zz} para todos os valores de r adotados.	137
Figura 71 – Gráfico Comparativo da tensão $\sigma_{\theta\theta}$ para todos os valores de r adotados.	137
Figura 72 – Tampo de Vaso de Pressão que será submetido a um carregamento distribuído sobre sua superfície interna.	138

Figura 73 – Seção de revolução do tampo de vaso de pressão.....	139
Figura 74 – Modelo simplificado, considerando um vaso de pressão com carregamento p distribuído uniformemente e representado pela sua seção de revolução.140	
Figura 75 – Ilustração da distribuição dos elementos ao longo do contorno conforme o refinamento da malha utilizada na simulação.	141
Figura 76 – Figura com as propriedades utilizadas na simulação no ANSYS 13.	142
Figura 77 – Ilustração da geometria gerada e simulada utilizando o ANSYS 13.	142
Figura 78 - Malha com os elementos na geometria elaborada.	143
Figura 79 – Ilustração da condição de contorno – Condição de Simetria.....	143
Figura 80 – Aplicação do carregamento da pressão na superfície interna da geometria.144	
Figura 81 – Deslocamentos na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 38 à 45.	146
Figura 82 - Deslocamentos na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 46 à 57.	146
Figura 83 – Deslocamentos na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 57 à 64.	147
Figura 84 – Gráfico Comparativo entre os valores dos deslocamentos encontrados pelos diferentes métodos de análise utilizados.	147
Figura 85 – Tensão de Von Mises na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 38à45.....	150
Figura 86 – Tensão de Von Mises na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 47à53.....	150
Figura 87 – Tensão de Von Mises na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 52à60.....	151
Figura 88 – Tensão de Von Mises na região da conexão Bocal-Tampo do Vaso de pressão – Elementos 60à 67.....	151

LISTA DE TABELAS

Tabela I. Flechas máximas: $W_{m\acute{a}x}(m)$ para espessura de 0,5.....	108
Tabela II. Tensão no Engaste: $\sigma_{m\acute{a}x}(Pa)$ para espessura de 0,5.....	108
Tabela III. Flechas máximas: $W_{m\acute{a}x}(m)$ para espessura de 0,25.	108
Tabela IV. Tensão no Engaste: $\sigma_{m\acute{a}x}(Pa)$ para espessura de 0,25.	108
Tabela V. Flechas máximas: $W_{m\acute{a}x}(m)$ para espessura de 0,1.	109
Tabela VI. Tensão no Engaste: $\sigma_{m\acute{a}x}(Pa)$ para espessura de 0,1.	109
Tabela VII. Cálculo Analítico das variáveis σ_{rr} , σ_{rz} , σ_{zz} e $\sigma_{\theta\theta}$	118
Tabela VIII. Valores de carregamento utilizados na simulação numérica.....	126
Tabela IX. Resultados obtidos para a simulação numérica utilizando r igual a 0,01 m.	127
Tabela X. Resultados obtidos para a simulação numérica utilizando r igual a 0,05 m.	130
Tabela XI. Resultados obtidos para a simulação numérica utilizando r igual a 0,02 m.	133
Tabela XIIa. Resultados comparativo entre os métodos para o deslocamento.	144
Tabela XIIb. Resultados comparativo entre os métodos para o deslocamento.	145
Tabela XIIc. Resultados comparativo entre os métodos para o deslocamento.	145
Tabela XIII - Tensão de Von Mises para ambos os métodos nos pontos da calota superior.	149

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEC	Método dos Elementos de Contorno
3D	Três Dimensões
EIC	Equação Integral de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
NE	Número de Elementos Discretos
NPI	Número de Pontos de Integração
dxf	Extensão de arquivo de AutoCad
2D	Duas Dimensões
txt	Extensão de arquivo de texto

LISTA DE SÍMBOLOS

p_j	Vetor tensão
Γ	Contorno
Ω	Domínio
σ_{ij}	Tensor tensão
n_i	Número do elemento
ε_{ij}	Tensor de Green
λ	Grandeza material – Constante de Lamé
μ	Grandeza material – Constante de Lamé
E	Módulo de Elasticidade Longitudinal
G	Módulo de Elasticidade Transversal
ν	Coefficiente de Poisson
u_{ij}	Campo de Deslocamentos
Δ	Delta
ζ	Csi
$\Delta(\zeta; X)$	Delta de Dirac
δ_{ij}	Delta de Kronecker
c_{ij}	Posição do Ponto Fonte
$r(\zeta; X)$	Distancia ente o ponto fonte ζ e o ponto campo
$R(P; Q)$	Distancia Euclidiana entre os pontos P e Q
$\vec{u}(x)$	Vetor deslocamento
$\vec{p}(x)$	Vetor tensão
$T(x)$	Tensor transformação de coordenadas
Π	Pi
$K(m, \Pi/2)$	Integral Elíptica do primeiro tipo

$E(m, \Pi/2)$	Integral Elíptica do segundo tipo
N^e	Vetor função de interpolação
u_i^e	Vetor deslocamento
p_i^e	Força no ponto nodal
J^e	Jacobiano de transformação
η	Coordenada adimensional
t	Vetor tangente
ϕ_i	Função de Interpolação
M^e	Matriz com as funções de interpolação e
x_i^e	Vetor de coordenadas nodais do elemento
w_i	Fator de peso associado
P	Número total de pontos de integração
I	Matriz identidade
l_j	Valor médio dos tamanhos dos elementos adjacentes
a_i	Parâmetro escolhido numa escala
Tr	Traço do vetor
Pa	Pascal
m	metro
σ_n	Vetor normal
σ_{max}	Tensão na placa engastada
W_{max}	Deslocamento da placa engastada
a	Comprimento da placa circular
b	Distancia ao eixo de revolução
h	Espessura da placa circular

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
1.3	OBJETIVO.....	26
2	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	29
2.2	EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTOSTÁTICA	30
2.2.1	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	31
2.2.2	EQUAÇÕES CINEMÁTICAS	34
2.2.3	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	35
2.2.4	EQUAÇÃO GERAL DE GOVERNO	36
2.3	CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO AXISSIMÉTRICO	37
3	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	41
3.2	FORMULAÇÃO DO MEC NA ELASTOSTÁTICA	42
4	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS TRIDIMENSIONAIS EM COORDENADAS CARTESIANAS	50
4.2	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS AXISSIMÉTRICAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS.....	51
5	EQUAÇÃO INTEGRAL PARA CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS	65
5.2	EQUAÇÃO INTEGRAL PARA CÁLCULO DE TENSÕES EM PONTOS INTERNOS.....	66
6	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	70
6.2	PROCEDIMENTO NUMÉRICO GERAL	71
6.2.1	ELEMENTOS COM GEOMETRIA LINEAR	71
6.2.2	ELEMENTOS COM GEOMETRIA QUADRÁTICA	73
6.2.3	EXPRESSÕES DOS INTEGRANDOS	74
6.2.4	FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	76
6.2.5	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.	78
6.2.6	POSICIONAMENTO DOS PONTOS FONTE.....	81
6.3	EQUACIONAMENTO PARA CÁLCULO DE TENSÕES NO CONTORNO....	84
7	DESCRIÇÃO DO SOFTWARE.....	92
8	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	99
8.2	PLACA CIRCULAR.....	99

8.3 PROBLEMA DE BOUSSINESQ	115
8.3.1 OBTENÇÃO DOS VALORES NUMÉRICOS	126
8.4 TAMPO VASO DE PRESSÃO	138
9 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	153
10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	157
APÊNDICE A	160

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

A utilização dos primeiros computadores como ferramenta de engenharia teve início em meados do século XX, e fez com que algumas áreas de pesquisa que antes eram exclusivas dos matemáticos se difundissem e se tornassem interdisciplinares, buscando soluções para uma vasta gama de problemas. Foram desenvolvidas técnicas numéricas de solução, sendo possível tratar problemas complexos através de modelagens discretas, que geralmente resultam em sistemas de equações que podem ser resolvidos facilmente com uso de modernos métodos computacionais.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma ferramenta de simulação numérica muito vantajosa, pois permite a solução de problemas físicos empregando um reduzido número de variáveis nodais, pois o problema é representado apenas através da discretização do seu contorno. O MEC vem se firmando como uma das técnicas mais precisas e vantajosas, pois se fundamenta em diferentes princípios matemáticos, seja pela Teoria das Equações Integrais ou por formulações de Resíduos Ponderados. Numerosas simulações já ratificaram o alcance do método e sua supremacia em certas classes de problemas, como os que aqui são abordados. Estas particularidades do MEC fazem com que este método tenha elevada precisão quando aplicado a problemas elastostáticos bi e tridimensionais.

Ressalta-se que existem formulações do MEC para aplicações diversas, como para materiais anisotrópicos, análises não-lineares, problemas elastodinâmicos, elastoplásticos, viscoplásticos, placas, cascas, problemas de potencial escalar difusivos, advectivos e acústicos.

Dessa maneira, o MEC se apresenta como uma ferramenta de grande versatilidade e com sua sólida base matemática, aliada às constantes pesquisas que resultam em maior eficiência e resultados cada vez melhores, vem tendo sua aplicação prática bastante ampliada. Sabe-se que a aplicação do MEC para problemas axissimétricos pode ser bastante vantajosa se as equações integrais forem previamente integradas na direção circunferencial, resultando posteriormente num modelo bidimensional onde apenas a seção de revolução é discretizada. Desse modo, o MEC produz um modelo numérico conciso, com maior redução na quantidade de parâmetros.

É preciso ressaltar que também são frequentes os casos em que o corpo possui geometria axissimétrica, mas está sujeito a carregamentos não axissimétricos, de forma que o problema depende matematicamente também da coordenada angular. Estes casos, todavia, devido à sua maior complexidade, não são aqui tratados.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os primeiros pesquisadores modernos a explorarem o uso das equações integrais no tratamento de problemas de engenharia como um método numérico de análise, foram JASWON (1963) e SYMM (1963). Apesar de se concentrarem em problemas bidimensionais de potencial, estes trabalhos apontaram de forma visionária a extensão da abordagem proposta para problemas de elasticidade e problemas tridimensionais.

A apresentação da formulação do método de elementos de contorno para problemas elásticos tridimensionais só ocorreu no trabalho de CRUSE (1969), que usou elementos triangulares planos com aproximação constante para as grandezas do contorno. O método apresentou boa capacidade para análise de problemas com concentração de tensões, usando um refinamento mais apurado nas partes do sólido onde estas concentrações ocorriam.

LACHAT e WATSON (1976) apresentaram técnicas numéricas avançadas para lidar com integrais singulares em problemas elásticos tridimensionais, empregando elementos com aproximação geométrica quadrática e funções de interpolação quadráticas ou cúbicas para as grandezas do contorno. As novas técnicas apresentadas foram amplamente aceitas e empregadas na extensão do método para abordagem de novos problemas elásticos com materiais anisotrópicos por WILSON e CRUSE (1978). O dinamismo adquirido pelo método ao abranger diversas áreas da Mecânica dos Sólidos e outras áreas da engenharia conduziu ao surgimento de novas formulações, que possuem integrais com núcleos singulares de ordens superiores e tratamento mais difícil.

Nessa linha de desenvolvimento, em seguida foram abordados os problemas axissimétricos. Conforme já mencionado, nesse caso, o MEC apresenta-se como uma técnica extremamente interessante sob o ponto de vista da simplicidade e economia computacional no que concerne a entrada de dados: há necessidade apenas de discretizar o contorno da seção de revolução. Por outro lado, é preciso realizar uma integração circunferencial da solução fundamental tridimensional e integrais elípticas singulares aparecem no modelo matemático, requerendo tratamento numérico especial.

Para contornar essa dificuldade, neste trabalho são utilizados pontos fonte ou de colocação fora do domínio, o que evita a necessidade de solução de uma grande quantidade de integrais singulares de elevada sensibilidade numérica. O uso de pontos de colocação fora do domínio do problema foi feito por RIBEIRO (1992) e CRUZ (2001), que obtiveram sucesso ao empregar esta técnica em problemas de placas e de Potencial, respectivamente. CODA e VENTURINI (1994) também a empregam em um algoritmo desenvolvido para problemas elastodinâmicos. Os principais problemas relatados nesta abordagem estão relacionados à instabilidade dos resultados ao se posicionar o ponto fonte muito próximo do

contorno, como mostra CRUZ (2001) em problemas bidimensionais de Potencial, e à falta de generalidade, uma vez que sua aplicação torna-se bastante complicada no caso de problemas com contornos reentrantes.

Apesar dessa tática contornar as dificuldades inerentes à integração singular, existem outros problemas. As expressões das soluções fundamentais e suas derivadas não são simples, especialmente no que tange à elasticidade. Isto porque é preciso determinar os tensores fundamentais de deformação e de tensão, a partir de derivadas da solução fundamental axissimétrica, ou seja, a solução tridimensional circunferencialmente integrada.

Em trabalhos realizados por Kermanidis (1975), Cruse et al (1977), Mayr & Neureiter (1977) e ainda Brebbia et al (1984), foram apresentadas expressões para as deformações fundamentais; porém, as tensões fundamentais foram deixadas em função das derivadas das deformações. Além disso, apenas no primeiro trabalho (Kermanidis, 1975), foi apresentada a solução fundamental nas três coordenadas do sistema de coordenadas cilíndricas. Cisternas (1986) apresentou resultados da solução de problemas axissimétricos escalares e posteriormente resolveu problemas elastoplásticos com forças de volume. Entretanto, as expressões explícitas completas dos tensores de deformação não foram apresentadas nos textos.

De modo a apresentar mais detalhadamente todo o conteúdo inerente à formulação matemática do problema elástico axissimétrico, Stikan [33] deduziu as expressões das tensões e deformações no contorno e no interior e retificou alguns erros de digitação na expressão de alguns tensores apresentados em trabalhos precedentes.

Destacam-se ainda alguns trabalhos usando a formulação axissimétrica do MEC, realizados na Universidade Federal do Espírito Santo: Manfrê (2001) fez diferentes testes para avaliação numérica dos métodos mais acessíveis de solução das integrais elípticas e Batista (2003)

resolveu problemas de transmissão de calor axissimétricos transientes utilizando a formulação do MEC com Dupla Reciprocidade.

1.3 OBJETIVO

A importância do estudo de problemas elastostáticos axissimétricos, pode ser explicada pela necessidade atual da indústria de aumento na sua eficiência operacional, redução seus custos de investimento e aumento de sua eficiência em relação aos seus competidores. Para isto, torna-se necessário o desenvolvimento de novas soluções de engenharia, além de uma maior aproximação entre a teoria e a prática da engenharia. Ainda existe o fato das diversas soluções disponíveis serem bastante aproximadas e necessitarem de comparação com resultados obtidos por métodos numéricos.

Assim, neste trabalho objetiva-se aplicar o Método dos Elementos de Contorno em problemas elásticos axissimétricos estacionários, problemas esses que permitam comparações entre as suas respectivas soluções analíticas e numéricas.

De certo modo o presente trabalho dá continuidade ao já citado trabalho de Stikan (2006), mas apresenta aplicações mais elaboradas do que as apresentadas naquele, cujo objetivo foi de fazer uma primeira validação da formulação e do programa desenvolvido.

As aplicações aqui escolhidas consistem: do problema de uma placa circular com carregamento axissimétrico; do problema de Boussinesq, onde uma região tridimensional axissimétrica é carregada por um esforço concentrado; e um segmento de bocal, típico da área de tubulações e vasos de pressão. São aplicações pouco exploradas na literatura especializada do MEC, mas muito comuns e úteis de serem resolvidos por técnicas numéricas.

Infelizmente, devido à limitação de soluções e também das grandes simplificações nelas contidas, o leque de aplicações não pode ser muito extenso. Para o problema do bocal, foi necessário fazer a comparação de resultados com outro método numéricos, o Método dos Elementos Finitos (MEF). Quase que a totalidade das poucas soluções analíticas disponíveis de problemas axissimétricos envolve simplificações concernentes aos problemas de membrana, ou seja, o domínio é constituído por paredes delgadas que no caso de flexão, representadas por uma linha média. Nestes casos, o Método dos Elementos de Contorno não encontra seu melhor campo de aplicação, pois o domínio contido nesses casos é proporcionalmente reduzido em comparação ao contorno, sendo mais indicados os métodos numéricos de domínio, que discretizam todo o interior.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES GERAIS DA ELASTOSTÁTICA

2 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

Todo material sólido se deforma quando uma força lhe é exercida, interna ou externamente, mantendo-se o equilíbrio, estático ou dinâmico. Para materiais homogêneos e isotrópicos, é possível estabelecer aproximadamente relações lineares entre as deformações e os esforços aplicados. As leis de proporcionalidade assim estabelecidas constituem a Elasticidade Linear. Através do conhecimento do comportamento do material é possível definir os efeitos de sua aplicação, redefinir seu posicionamento e intensidade com relação à integridades estrutural e prever como será sua interação com os outros componentes do conjunto.

Através do uso da Mecânica dos Corpos Rígidos podem-se determinar as condições de equilíbrio estático, sem se preocupar com a distribuição interna dos esforços. Assim, quando uma força é aplicada em um ponto qualquer de uma estrutura, é admitido que sua ação é transmitida instantaneamente para todas as partes do corpo, produzindo reações imediatas nos apoios ou vínculos existentes e promovendo movimentos lineares e angulares caso não haja restrições nesse sentido.

Já a Mecânica dos Corpos deformáveis considera a flexibilidade da estrutura e as alterações na configuração geométrica original em razão da distribuição de forças em seu interior, cujos efeitos locais se traduzem em termos de grandezas como a tensão e deformação. O desenvolvimento dos estudos da Teoria da Elasticidade nos ajuda a entender o que acontece no interior de um corpo submetido a qualquer carregamento.

A Teoria da Elasticidade é a disciplina da Mecânica onde se formulam as expressões, matematicamente rigorosas, que descrevem as relações entre tensões, deformações e deslocamentos, em corpos sólidos elásticos.

A seguir serão apresentados alguns itens que tratam exatamente de resumir os princípios desta disciplina.

2.2 EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTOSTÁTICA

Em todas as descrições das equações que serão apresentadas, será utilizada uma poderosa, simples e concisa ferramenta matemática chamada Notação Indicial. Suas vantagens podem ser observadas principalmente nas operações de diferenciação e para que possa ser empregada, é necessário que o sistema de referência utilizado seja o sistema cartesiano.

Na dedução e apresentação das equações diferenciais e integrais da Elastostática é preciso estabelecer algumas considerações físicas simplificadoras do real comportamento do corpo e, através de artifícios matemáticos, facilitar o desenvolvimento dessas equações.

A primeira hipótese é a de que os corpos que estão submetidos às forças são perfeitamente elásticos, ou seja, retornam ao seu estado original assim que a ação dessas forças é interrompida. Assim torna-se necessário considerar que as deformações e seus deslocamentos correspondentes sejam extremamente pequenos, de forma que a linha de ação das forças externas não se altere, satisfazendo assim as condições de homogeneidade e superposição dos carregamentos.

Outro princípio utilizado é que a matéria que constitui um corpo elástico é homogênea e distribuída continuamente e uniformemente através do seu volume. Admite-se ainda, que o corpo é isotrópico, isto é, que seu material apresenta as mesmas propriedades elásticas em todas as direções. Assim será garantido que todas as propriedades do meio estudado variam de maneira contínua de um ponto a outro do corpo.

Todas as pequenas variações nas dimensões do corpo e os pequenos deslocamentos dos pontos de aplicação das forças externas devem ser desprezados. Assim, as equações de equilíbrio do corpo estarão sempre relacionadas à configuração inicial do carregamento no corpo.

Uma importante consideração para futuros procedimentos matemáticos consiste de que numa integração, o elemento de volume elementar estudado será suposto pequeno em relação ao volume total, porém suficientemente grande em relação ao tamanho de quaisquer descontinuidades possivelmente existentes na superfície do corpo.

Assim, através do auxílio das hipóteses explanadas anteriormente, serão apresentadas as equações básicas que governam o equilíbrio local no meio contínuo, a compatibilidade de movimentos no entorno de um ponto e as relações entre tensões e deformações geradas.

2.2.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

No momento que um corpo é submetido a um esforço externo, forças internas de coesão se desenvolvem no material a fim de garantirem a integridade estrutural da matéria. Da mesma forma as reações se distribuem de forma contínua e com diferente intensidade e direção em todas as partes do corpo, tentando obter o equilíbrio.

Assim, para melhor serem qualificados esses esforços, é necessário analisá-los localmente e normalizá-los com relação a uma dimensão característica, que é a área de aplicação. Define-se tensão como sendo a grandeza que expressa a intensidade e a direção das forças internas presentes num dado corpo, atuantes num ponto particular, agindo em determinado plano. Esta definição mostra que o estado de tensão não apenas depende da área, mas pode variar de ponto a ponto, dependendo também do plano escolhido e nele possuindo componentes vetoriais próprias. Matematicamente, o estado de tensão é um tensor de segunda ordem ou um diádico. Através da figura 1, pode-se observar que o estado de tensão em torno de um ponto requer um número maior de dados para sua caracterização do que um vetor.

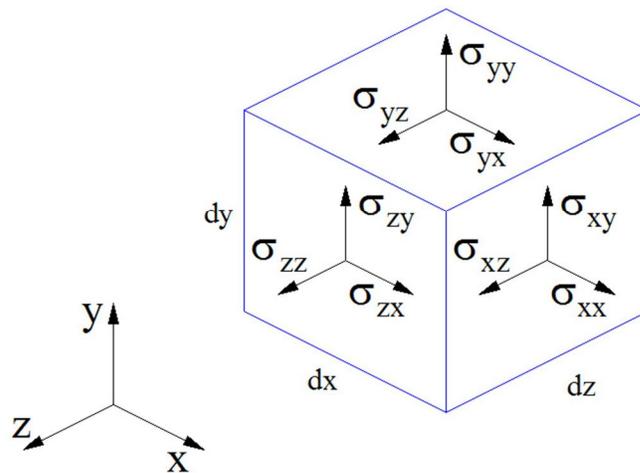


Figura 1 –Componentes de tensões atuando nas faces de um volume elementar representando um ponto no interior de um corpo tridimensional

Cada um desses três componentes apresentados é um escalar, mas apenas o trio define um vetor no plano, denominado de vetor tensão p_j . Embora possua dimensão similar a de uma pressão, representando o esforço distribuído numa superfície elementar, é uma grandeza vetorial e depende da orientação do plano considerado.

Os três vetores tensão, que usualmente são ortogonais, em planos linearmente independentes, são constituídos de nove componentes escalares, que definem o estado de tensão através do tensor tensão. Estes vetores são representados através de um paralelepípedo elementar e analiticamente através de matrizes quadradas. É importante ressaltar que as componentes escalares do tensor tensão são sempre de dois tipos: normais e cisalhantes, independentemente da forma de ação externa, atuando através de forças de contato ou por forças de interação com um campo.

Pode-se demonstrar que através do conhecimento do vetor tensão em três planos linearmente independentes é possível encontrar o vetor tensão em qualquer outro plano.

Assim, pode-se concluir que o estado de tensão num ponto pode ser completamente representado pelas suas componentes nestes três planos linearmente independentes. Pode-se também afirmar que o estado de tensão num ponto é inalterável, qualquer que seja sua representação. Assim sendo, diferentes posições do paralelepípedo elementar não alteram suas as propriedades, que são chamadas de invariantes.

As condições de equilíbrio infinitesimal para o domínio e o contorno elementares devem ser seguidas pelas componentes do tensor tensão no interior de todo o corpo e também na sua superfície externa. Essas equações de equilíbrio estático, que regem o problema no qual um corpo tridimensional é sujeito a carregamentos externos também tridimensionais, são apresentadas abaixo:

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad , \text{ no domínio } \Omega \quad (2.1)$$

$$p_j = \sigma_{ij} n_i \quad , \text{ no contorno } \Gamma \quad (2.2)$$

A equação (2.1) corresponde ao equilíbrio no domínio ou interior do corpo, e a equação (2.2) corresponde ao equilíbrio na superfície externa ou contorno. Na equação (2.2) n_i representa os cossenos diretores do vetor unitário normal à superfície sobre a qual a força de superfície atua, apontando para fora do domínio.

Através do equilíbrio estático das tensões que atuam sobre um volume elementar no que diz respeito ao somatório de momentos, na ausência de momentos concentrados e distribuídos chega-se à equação a seguir:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.3)$$

A simetria do tensor das tensões só não seria verdadeira nos pontos em que houvessem momentos concentrados aplicados; porém, esta condição não é fisicamente muito comum. Assim, pode-se afirmar que as tensões cisalhantes são recíprocas, pois apresentam o mesmo módulo quando seus planos compartilham uma mesma aresta do paralelepípedo elementar e concorrem num mesmo ponto.

2.2.2 EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

Toda vez que uma força atua na transformação da configuração original do corpo implicando num remapeamento de suas coordenadas no espaço, o processo é chamado movimento. O movimento não inclui apenas trajetórias no espaço, mas também alteração na disposição interna das partes do sistema. Para os problemas da Mecânica dos Sólidos, os vínculos do corpo são como partes fixas e fazem com que os movimentos de corpo rígido sejam limitados e os movimentos internos das partes do corpo sejam significativos numa análise com vistas à sua integridade. O diferencial entre os movimentos sofridos por essas partes tem assim grande importância; pontos vinculados não se movimentam e outros apresentam destacada alteração no seu posicionamento. Portanto, é importante acompanhar esses movimentos localmente, assim como é preciso empregar uma nova nomenclatura, que expresse o movimento local das partículas. Denomina-se então o deslocamento como sendo a distância percorrida por um ponto do corpo com relação a uma posição de referência, normalmente tomada na configuração indeformada do corpo, devido à resultante da aplicação de esforços externos,

Não se pode afirmar que o deslocamento de um ponto é uma grandeza suficiente para estabelecer uma relação satisfatória entre os esforços e o movimento resultante de sua ação no corpo, por duas principais razões. O primeiro fator, que pode ser verificado em experiências simples, como os ensaios tração, mostra que é preciso adimensionalizar a relação entre os esforços e o tamanho do corpo, de modo que a resposta elástica a um determinado nível de tensão não dependa da dimensão do corpo. O segundo fator deve-se ao fato de que as tensões surgem devido a gradientes de deslocamento, pois movimentos de corpo rígido translacionais por si só não produzem esforços internos.

É preciso então quantificar os diferenciais de movimento entre pontos adjacentes, considerando seu distanciamento original. Assim surge o conceito de deformação. Se realizar um mapeamento dos deslocamentos correspondentes à configuração anterior e à posterior e não se preservarem as distâncias entre as partículas, há deformação.

Existem várias medidas de deformação, todas envolvendo o gradiente do campo de deslocamentos como medição básica. No caso de pequenos deslocamentos e movimentos de corpo rígido desprezíveis, pode-se representar a deformação do corpo com ajuda das equações conhecidas como Equações Cinemáticas Lineares:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

Nas equações anteriores, ε_{ij} é a expressão indicial do diádico chamado de tensor de Green para pequenas deformações. A equação (2.4) representa, na realidade, um conjunto de seis equações de deformação expressas em termos de três deslocamentos. Isso indica que essas seis componentes de deformação não podem ser independentes; devem satisfazer condições adicionais, conhecidas como equações de compatibilidade de deformações, que formam um conjunto de 81 equações originais, definidas indicialmente por:

$$\varepsilon_{ij,k,l} + \varepsilon_{kl,i,j} - \varepsilon_{ik,j,l} - \varepsilon_{jl,i,k} = 0 \quad (2.5)$$

A maior parte das equações é redundante ou identicamente nula. Apenas 6 são distintas e, na realidade, somente 3 são independentes. Logo, as condições de compatibilidade introduzem 3 equações adicionais, o suficiente para permitir a relação entre deslocamentos de deformações.

2.2.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

As equações constitutivas dizem respeito às relações entre tensões e deformações que envolvem propriedades físicas que variam conforme o tipo de material. Para o caso linear, pode-se utilizar uma relação comumente denominada de Lei de Hooke Generalizada. Para o caso de um material isotrópico, as relações entre tensões e deformações são definidas por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.6)$$

Na equação (2.6), tem-se as grandezas materiais λ e μ , que são conhecidas como as constantes de Lamé. Estas constantes não são muito adequadas a estudos práticos, pois dificilmente podem ser medidas fisicamente. Assim, normalmente são expressas através de outras constantes físicas, bem conhecidas em outras disciplinas correlatas, como o módulo de elasticidade longitudinal (E), o módulo de elasticidade transversal (G) e o coeficiente de Poisson (ν). Assim pode-se expressar λ e μ segundo as seguintes relações:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.8)$$

Substituindo as duas equações acima em (2.6) tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.9)$$

na forma inversa:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (2.10)$$

2.2.4 EQUAÇÃO GERAL DE GOVERNO

As equações apresentadas em (2.1), (2.4) e (2.9) representam um conjunto de 15 equações para 15 incógnitas em problemas tridimensionais. Para se gerar uma equação denominada de equação de governo, vetorialmente concisa, o procedimento é substituir a equação (2.4) na equação (2.9) para obter a tensão em função do gradiente dos deslocamentos e, logo após, substituir o resultado em (2.1) para obter a equação diferencial parcial de segunda ordem para os deslocamentos.

A equação resultante é conhecida como Equação de Navier, dada por:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj} = 0 \quad , \text{em } \Omega \quad (2.11)$$

Na equação anterior, u_j é o vetor deslocamento.

Da mesma forma, substituindo a equação (2.4) em (2.9) e substituindo o resultado na equação (2.2), obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem para o contorno do corpo:

$$\frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,k} n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = p_i \quad , \text{em } \Gamma \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é utilizada para satisfazer as condições de contorno para as forças na superfície.

Deve-se atentar para o fato que para solução da Equação de Navier (2.11) não é necessário resolver as equações de compatibilidade de deformações, pois é uma formulação expressa apenas em termos de deslocamentos. O procedimento para a obtenção das tensões consiste em primeiramente gerar-se o campo de deslocamentos através da solução da equação de Navier (2.11), utilizar-se da equação para calcular as deformações e, finalmente, através da utilização da equação obter-se as tensões.

2.3 CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO AXISSIMÉTRICO

Até o momento, em todas as formulações apresentadas o espaço foi considerado como sendo tridimensional. Todavia, em alguns problemas, a geometria do corpo e a distribuição espacial do carregamento nele aplicado possibilitam simplificações. Assim, se torna importante compreender em que circunstâncias podem-se admitir estas simplificações.

Existem diversos tipos de problemas da engenharia que, ao satisfazer determinadas condições de geometria e carregamento, podem ser estudados utilizando apenas uma ou duas dimensões. Esta redução no número de dimensões do problema implica em significativa redução das variáveis físicas e, por consequência, em simplificação matemática das equações que o representam.

Um exemplo de problema onde pode ocorrer esta redução no número de dimensões é o dos corpos axissimétricos que estão sob carregamentos também axissimétricos.

Tem-se como corpos axissimétricos aqueles nos quais pode-se identificar a existência de um eixo de revolução, em torno do qual a rotação completa de uma seção bidimensional gera o corpo em sua totalidade. A figura 2 ilustra o exposto.

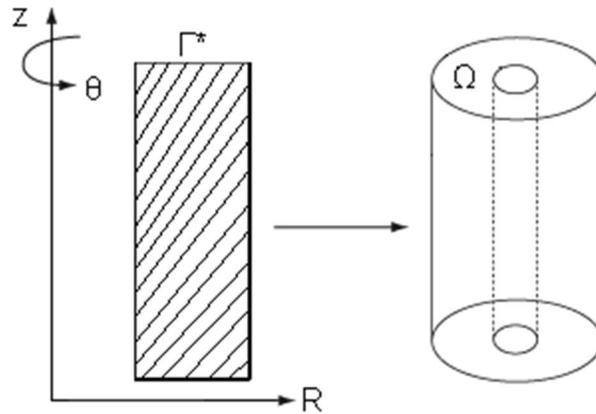


Figura 2 – Nós geométricos e pontos externos ao contorno de uma placa circular.

Através do giro completo de uma seção de revolução que representa o corpo, o equacionamento dos problemas axissimétricos pode ser expresso em termos simplificados mediante adequadas transformações, resultando num modelo bidimensional. Deve-se ressaltar que não apenas a geometria deve ser axissimétrica; o carregamento e os vínculos também, pois caso contrário o problema continua tridimensional e irreduzível às formas bidimensionais de representação, a não ser através de técnicas matemáticas mais sofisticadas. Apenas devido à simetria admitida nessas circunstâncias, pode-se afirmar que as duas componentes dos deslocamentos em qualquer secção plana do corpo ao longo de seu eixo axial de simetria, ou eixo de revolução, definem o estado de deformação e, por consequência, também o estado de tensão.

O fato do deslocamento circunferencial ou normal ao plano da seção de revolução não ser computado diretamente não significa que ele não exista. Na condição de axissimetria, qualquer deslocamento axial ou radial induz uma deformação na direção circunferencial e as componentes de deformação e de tensão associadas devem ser levadas em consideração. Desta forma, para melhor se resolver as variedades de problemas axissimétricos, deve-se adotar a utilização de coordenadas cilíndricas. Para tanto, as equações escritas em coordenadas cilíndricas que possuem origem na equação, são reescritas como:

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta})] \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})] \quad (2.14)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})] \quad (2.15)$$

$$\sigma_{rz} = 2G(\varepsilon_{rz}) \quad (2.16)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2G(\varepsilon_{r\theta}) \quad (2.17)$$

$$\sigma_{z\theta} = 2G(\varepsilon_{z\theta}) \quad (2.18)$$

Para solução de um problema real, através de qualquer método numérico, é necessário determinar, através da observação do problema físico, os valores das condições de contorno. Torna-se evidente que a grandeza denominada deformação ε_{ij} não possui visualização imediata. Desta forma se faz necessário introduzir a grandeza deslocamento u_i que, em coordenadas cilíndricas para casos axissimétricos, se relaciona com o deslocamento conforme a equação (2.04). Tais equações explicitadas se apresentam da seguinte forma:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\delta u_r}{\delta r} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\delta u_z}{\delta z} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_\theta}{\delta z} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\delta u_r}{\delta \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_\theta}{\delta z} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_r}{\delta z} - \frac{\delta u_z}{\delta r} \right) \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_\theta}{\delta z} + \frac{1}{r} \frac{\delta u_z}{\delta \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_\theta}{\delta z} \right) \quad (2.24)$$

CAPÍTULO 3

EQUAÇÃO INTEGRAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método computacional para a solução de equações diferenciais parciais, que são trabalhadas matematicamente de modo a expressarem-se em forma integral. É aplicado em diversas áreas da engenharia, como na mecânica dos fluidos, sólidos, acústica, eletromagnetismo e estudo de fraturas.

O método possui melhor desempenho que o Método dos Elementos Finitos (MEF) em certas circunstâncias, como por exemplo quando o domínio de estudo for infinito ou semi-infinito. Apesar de ser um método mais novo em relação ao MEF e ao método das diferenças finitas (MDF), o MEC já passou por intensa investigação e vem se consolidando como uma das mais importantes ferramentas para solução computacional de problemas modelados matematicamente por equações diferenciais complexas, problemas estes que na maioria das vezes têm soluções analíticas muito difíceis ou indisponíveis.

Foram dois fatores principais que resultaram no interesse pelos métodos numéricos no início da década de 60. O primeiro é o grande volume de cálculo que se passou a efetivar com a ajuda de técnicas adequadas e eficientes para processamento em computador. O segundo motivo foram as importantes pesquisas desenvolvidas tendo como base princípios matemáticos, como o cálculo variacional e a técnica de resíduos ponderados, que aprimoraram os conceitos relacionados aos métodos numéricos. Com o desenvolvimento contínuo dos computadores, com a diminuição dos seus custos e com o desenvolvimento de programas e técnicas mais eficientes, tornou-se mais comum a utilização dos métodos computacionais para a solução de problemas de engenharia cada vez mais complexos.

O MEC se destaca também em relação aos outros métodos citados anteriormente por ser uma técnica de contorno, enquanto o MEF e o MDF são técnicas de domínio. Pode-se afirmar que o MEC transforma um modelo formulado por equações diferenciais parciais, que descreve matematicamente o problema físico num domínio espacial e temporal, em equações integrais envolvendo somente valores de contorno e/ou condições iniciais.

A teoria das Equações Integrais mostra que é possível realizar essa transformação através do emprego do teorema de divergência, dentro de um contexto matemático no qual as características dos operadores diferenciais viabilizem tais procedimentos. É necessário ainda que haja o apoio de funções de auxiliares denominadas soluções fundamentais.

É também possível chegar a um equacionamento integral através de uma sentença consistente de resíduos ponderados, na qual as soluções fundamentais fazem o papel de funções de ponderação.

Qualquer que seja o caminho adotado, a aplicação bem sucedida do MEC resulta na redução da dimensão do problema em uma unidade, e no caso do domínio composto por variáveis espaciais, somente o contorno precisa ser discretizado. Esta é a característica mais peculiar do método e uma de suas grandes vantagens, pois ao discretizar apenas o contorno se terá uma menor entrada de dados, menos operações matemáticas e operações numéricas mais simples. De acordo com a extensão do problema, também um menor dispêndio computacional.

Outras vantagens do MEC que podem ser mencionadas são: a possibilidade de trabalhar com regiões infinitas; a simulação precisa do efeito da concentração de tensões; a representação mais simples do problema de contato; e a operacionalização mais fácil dos casos de fronteira variável. A complexidade apresentada pela solução fundamental em alguns casos pode ser considerada uma desvantagem do método, assim como a menor flexibilidade no trato de problemas de meios heterogêneos e inadequação na abordagem de domínios delgados.

3.2 FORMULAÇÃO DO MEC NA ELASTOSTÁTICA

Nas teorias simplificadas, as quais tratam dos problemas da Mecânica dos Sólidos, são consideradas algumas idealizações nos problemas de campo vetorial, onde cada ponto está associado a grandezas cuja definição requer a identificação de módulo, direção e sentido, como no caso dos deslocamentos. As hipóteses empregadas consideram o meio contínuo, homogêneo, estático e material elástico linear, conforme exposto previamente.

A Equação de Navier, vista no capítulo 2 e rotulada como equação (2.10), é repetida aqui por conveniência:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (3.01)$$

Existe outra forma de escrever a equação, utilizando as constantes de Lamé, já apresentadas nas equações (2.7) e (2.8). Utilizando as constantes, a Equação de Navier é reescrita na sua formulação forte:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} + b_j = 0 \quad (3.02)$$

São considerados aqui os casos onde a de carga de domínio é nula, assim:

$$b_j = 0 \quad (3.03)$$

A formulação clássica do MEC consiste em ponderar a equação (3.02) com o auxílio de uma função vetorial u_j^* e depois integrá-la no domínio. Através de um tratamento matemático adequado, que será mostrado a seguir, transforma-se a equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

Devemos ressaltar que a função u_j^* , que é chamada de solução fundamental, é a solução do problema elástico correlato, cujo domínio pode ser infinito ou semi-infinito, onde as forças de corpo são ações concentradas no domínio, atuando nas direções coordenadas, assim:

$$\mu u_{j,ii}^* + (\lambda + \mu) u_{i,ij}^* + b_j = 0 \quad (3.04)$$

e

$$b_j = \Delta(\zeta, X)P_j \quad , P_j = 1 \quad (3.05)$$

Sendo que ζ representa o ponto fonte de aplicação da carga enquanto X representa o ponto campo.

A função Delta de Dirac ($\Delta(\zeta, X)$), apresentada na equação (3.05) apresenta as seguintes propriedades:

$$a) \Delta(\zeta, X) = 0 \quad , \text{se } \zeta \neq X \quad (3.06)$$

$$b) \Delta(\zeta, X) = \infty \quad , \text{se } \zeta = X \quad (3.07)$$

$$c) \int_{\Omega} f(X) \Delta(\zeta, X) d\Omega = f(\zeta) \quad , \text{se } \zeta \in \Omega \quad (3.08)$$

Através da ponderação da equação (3.02) pela solução fundamental e integração em todo o domínio, tem-se a expressão:

$$\mu \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = 0 \quad (3.09)$$

Através da propriedade da integração por partes, cuja estrutura básica consiste em:

$$\int u v_{,i} d\Omega = \int (u v)_{,i} d\Omega - \int v u_{,i} d\Omega \quad (3.10)$$

E também do Teorema da Divergência, que expressa a seguinte transformação:

$$\int (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega = \int u_{,i} u^* n_i d\Gamma \quad (3.11)$$

Assim, de posse desses recursos, desenvolvendo a primeira parcela da equação (3.09) tem-se :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega &= \int_{\Omega} [(u_{j,i} u_j^*)_{,i} - (u_{j,i} u_{j,i}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [(u_{j,i} u_j^*)_{,i} - (u_j u_{j,i}^*)_{,i} + (u_j u_{j,ii}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (u_{j,i} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_j u_{j,i}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_j u_{j,ii}^*) d\Omega \end{aligned} \quad (3.12)$$

Da mesma forma, a segunda parcela da equação (3.09) se desenvolve da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = \int_{\Omega} [(u_{i,i} u_j^*)_{,j} - (u_{i,i} u_{j,j}^*)] d\Omega \\
& = \int_{\Omega} [(u_{i,i} u_j^*)_{,j} - (u_i u_{j,j}^*)_{,i} + (u_i u_{j,ji}^*)] d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} (u_{i,i} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_i u_{j,ji}^*) d\Omega \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Trocando os índices da última parcela da equação (3.13):

$$\int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{i,i} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_j u_{i,ij}^*) d\Omega \quad (3.14)$$

Substituindo as equações (3.12) e (3.14) na equação (3.09) e rearranjando temos a equação em sua Forma Inversa:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\mu (u_j u_{j,ii}^*) + (\lambda + \mu) (u_j u_{i,ij}^*)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu (u_{j,i} u_j^* n_i - u_j u_{j,i}^* n_i)] d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu) (u_{i,i} u_j^* n_j - u_i u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma = 0 \quad (3.15)
\end{aligned}$$

A equação (3.04) apresenta u_j^* como solução fundamental, a qual deve obedecer à equação de Navier. Assim, a primeira parcela da equação (3.15) é dada:

$$\int_{\Omega} [\mu (u_j u_{j,ii}^*) + (\lambda + \mu) (u_j u_{i,ij}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta(\zeta; x) P_j u_j d\Omega = -P_j u_j(\zeta; x) \quad (3.16)$$

Substituindo-se a equação (3.16) na equação (3.15), tem-se que:

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} [\mu (u_{j,i} u_j^* n_i - u_j u_{j,i}^* n_i)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu) (u_{i,i} u_j^* n_j - u_i u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma \quad (3.17)$$

Introduzindo na equação (3.17) uma expressão auxiliar identicamente nula, dada por:

$$\int_{\Gamma} \mu (u_{i,j} u_j^* n_i - u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

Reagrupando-se os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} P_j u_j(\zeta) = & \int_{\Gamma} [\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_i + \lambda (u_{i,i}) n_j] u_j^* d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma} [\mu u_j u_{j,i}^* n_i + \lambda u_i u_{j,j}^* n_i - \mu u_{i,i} u_j^* n_j + \mu u_i u_{j,j}^* n_i + \mu u_{i,j} u_j^* n_i] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.19)$$

É importante redefinir a Equação de Navier no contorno (equação (2.12)) em termos das constantes de Lamé, de modo que passa a ser expressa da seguinte forma:

$$\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i = p_i \quad (3.20)$$

Como a equação (3.20) apresenta a mesma estrutura da primeira integral da equação (3.19), tal parcela é substituída pelo equivalente p_i . Efetuando essa substituição e reagrupando os termos tem-se:

$$\begin{aligned} P_j u_j(\zeta) = & \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu (u_{j,i}^* u_j n_i) + \lambda (u_{j,j}^* u_i n_i)] d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma} \mu (u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.21)$$

Trocando-se a ordem dos índices da primeira parcela da segunda integral do lado direito e realizando a introdução de uma nova identidade auxiliar identicamente nula, do mesmo tipo da equação (3.18), tem-se:

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu (u_{i,j}^*) n_j + \lambda (u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma +$$

$$-\int_{\Gamma} \mu (u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu (u_{j,i}^* u_i - u_{j,i}^* u_i) n_j d\Gamma \quad (3.22)$$

Reagrupando a expressão da mesma forma que foi realizado na equação (3.19):

$$\begin{aligned} P_j u_j(\zeta) &= \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda (u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma + \\ &- \int_{\Gamma} \mu (u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i - u_{j,i}^* u_i n_j) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

Na segunda integral da equação (3.23) a mesma estrutura da equação (3.20) é substituída por p_i^* . Assim:

$$\int_{\Gamma} [\mu (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda (u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad (3.24)$$

Na equação (3.23), trabalha-se a última integral, ou seja:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \mu (u_i u_{j,j}^* + u_{i,j} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu (u_{i,i} u_j^* + u_{j,i}^* u_i) n_j d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} \mu (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu (u_i u_{j,i}^*) n_j d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \mu (u_i u_{j,j}^*)_{,ji} d\Omega - \int_{\Omega} \mu (u_i u_{j,i}^*)_{,ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mu [(u_i u_{j,j}^*)_{,ji} - (u_i u_{j,i}^*)_{,ij}] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, fazendo a substituição da equação (3.25) e (3.24) na equação (3.23) tem-se finalmente a expressão da Equação Integral de Contorno:

$$P_j u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (3.26)$$

De acordo com a equação (3.05), sabe-se que o módulo de P_j é igual a unidade. Da forma como a equação (3.26) está escrita, o somatório em j no primeiro termo do lado direito da citada equação impede que cada carga concentrada p_j atue independentemente uma da outra. Assim sendo, será necessário reestruturá-la adotando uma estrutura diádica para a solução fundamental e sua derivada normal. Assim as funções que correspondem aos deslocamentos e forças de superfície fundamentais, ficam escritas na forma:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\zeta; X)P_i = u_{1j}^*P_1 + u_{2j}^*P_2 \quad (3.27)$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\zeta; X)P_i = p_{1j}^*P_1 + p_{2j}^*P_2 \quad (3.28)$$

Devido à necessidade de adequação ao modelo axissimétrico, os índices irão variar apenas até dois. Para ajustar à nova ordem, deve-se fazer também que cada componente de P_i seja considerado separadamente, assim, $P_i = \delta_{1i}$ ou $P_i = \delta_{2i}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Desta forma u_{ij}^* e p_{ij}^* passam a representar deslocamentos e forças de superfície na direção “ j ” no ponto X , resultado de uma carga unitária agindo na direção “ i ” e aplicada no ponto ζ .

Conforme demonstrado em detalhes por Brebbia (1978), pode-se afirmar que a equação anterior é um caso particular de uma expressão geral, na qual um diádico C_{ij} é introduzido em função da posição do ponto fonte que pode estar situado dentro do domínio, sobre o contorno, ou fora do contorno. Este coeficiente introduz a possibilidade de tratamento de contornos não suaves. Assim a equação integral (3.26) se transforma em:

$$C_{ij}(\zeta) u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) \quad (3.29)$$

A equação apresentada é a equação integral do Método dos Elementos de Contorno para a solução de problemas estáticos de elasticidade. Ressalta-se que esta equação pode também ser obtida alternativamente através do Princípio de Reciprocidade de Betti ou pela aplicação de uma sentença dos Resíduos Ponderados, conforme em Brebbia et al (1982).

CAPÍTULO 4

OBTENÇÃO DOS TENSORES FUNDAMENTAIS PARA PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS ELASTOSTÁTICOS

4 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS TRIDIMENSIONAIS EM COORDENADAS CARTESIANAS

O problema fundamental governado pela expressão (3.04) também obedece aos princípios de equilíbrio, ou seja:

$$\sigma_{ij,i}^* + b_j^* = \mathbf{0}, \text{ no domínio } \Omega \quad (4.01)$$

A solução fundamental de Kelvin considera que o domínio Ω^* é infinito e apresenta propriedades e comportamento elástico, onde uma carga unitária concentrada atua nas três direções coordenadas, conforme ilustra a figura 3.

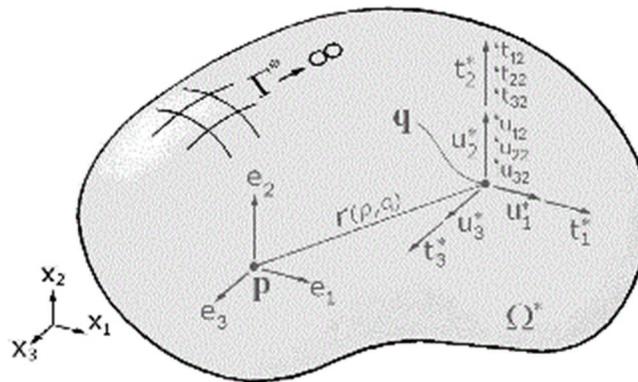


Figura 3 – Solução de Kelvin – onde o domínio Ω^* é infinito e apresenta propriedades e comportamento elástico.

Apesar da equação integral do MEC para os casos axissimétricos expressar-se em termos de duas dimensões, os deslocamentos u_{ij}^* e as forças de superfície p_{ij}^* são relativos ao espaço tridimensional e geridos pelas equações abaixo:

$$u_{ij}^*(\zeta, X) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left\{ (3-\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right\} \quad (4.02)$$

$$p_{ij}^*(\zeta, X) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad (4.03)$$

Nas equações a variável $r = r(\zeta, X)$ representa a distância entre o ponto fonte ζ de aplicação da carga e o ponto campo X enquanto n_i são os cossenos diretores.

As derivadas são tomadas com relação às coordenadas X_i .

Alguns dos componentes das equações (4.03) e (4.04) são definidos através da Notação Indicial, conforme se segue:

$$a) \quad r = (r_i r_i)^{1/2} = (r_1 r_1 + r_2 r_2)^{1/2} \quad (4.04)$$

$$b) \quad r_i = x_i(x) - x_i(\zeta) \quad (4.05)$$

$$c) \quad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(\zeta)} \quad (4.06)$$

4.2 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS AXISSIMÉTRICAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Nos problemas axissimétricos é muito usual a utilização do sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , definido pelas seguintes equações:

$$x_1 = r \cos \theta \quad (4.07)$$

$$x_2 = r \sin \theta \quad (4.08)$$

$$x_3 = z \quad (4.09)$$

Se as coordenadas cartesianas no espaço de pontos “P” e “Q” são respectivamente, $(x_1(P), x_2(P), x_3(P))$ e $(x_1(Q), x_2(Q), x_3(Q))$, então, para o ponto “P”, tem-se em coordenadas cilíndricas os seguintes pontos:

$$x_{1(P)} = r_i \cos 0 = r_i \quad (4.10)$$

$$x_{2(P)} = r_i \sin 0 = 0 \quad (4.11)$$

$$x_3(P)=z_i \quad (4.12)$$

Da mesma forma para o ponto “Q”, tem-se:

$$x_1(Q)=r_j \cos \theta_j \quad (4.13)$$

$$x_2(Q)=r_j \sin \theta_j \quad (4.14)$$

$$x_3(Q)=z_j \quad (4.15)$$

Em coordenadas cartesianas, a distância euclidiana entre os pontos “P” e “Q” é dada por:

$$R(P,Q) = \sqrt{(x_1(Q) - x_1(P))^2 + (x_2(Q) - x_2(P))^2 + (x_3(Q) - x_3(P))^2} \quad (4.16)$$

Em coordenadas cilíndricas, a mesma equação fica:

$$R(P,Q) = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos \theta_j + (z_i - z_j)^2} \quad (4.17)$$

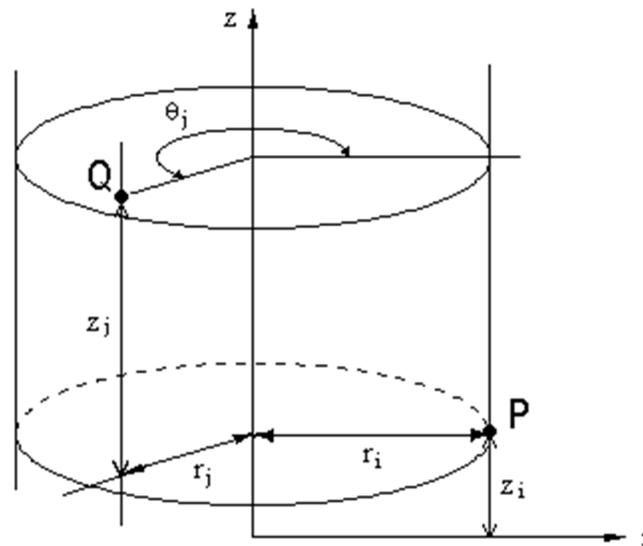


Figura 4 – Coordenadas cilíndricas para o ponto “P” situado no contorno da seção de revolução, e para o ponto “Q” situado no contorno tridimensional do corpo.

Por estratégica, a seguir apresenta-se a equação integral de contorno na sua forma matricial, utilizada pelo MEC na solução de problemas elastostáticos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}(\mathbf{P}) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\mathbf{P}) \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{P}) \\ \mathbf{u}_3(\mathbf{P}) \end{bmatrix} + \sum_1^{\text{NE}} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{11}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{p}_{12}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{p}_{13}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \\ \mathbf{p}_{21}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{p}_{22}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{p}_{23}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \\ \mathbf{p}_{31}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{p}_{32}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{p}_{33}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{u}_3(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} d\Gamma \\
 = \sum_1^{\text{NE}} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{11}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{u}_{12}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{u}_{13}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \\ \mathbf{u}_{21}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{u}_{22}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{u}_{23}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \\ \mathbf{u}_{31}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{u}_{32}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) & \mathbf{u}_{33}^*(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{p}_2(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{p}_3(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nesta última equação, NE é o número de elementos discretos escolhidos.

De agora em diante, para maior facilidade no entendimento das operações realizadas, não mais é utilizada a notação indicial e somente a notação matricial.

Para um ponto (X) qualquer no contorno, tem-se em coordenadas cartesianas os vetores deslocamento $\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$ e tensão $\underline{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$ expressos em função de seus vetores e em coordenadas cilíndricas $\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$ e $\underline{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$, da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\mathbf{X}) \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{X}) \\ \mathbf{u}_3(\mathbf{X}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{T}(\mathbf{X}) \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{T}(\mathbf{X}) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r(\mathbf{X}) \\ \mathbf{u}_\theta(\mathbf{X}) \\ \mathbf{u}_z(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

$$\underline{\mathbf{p}}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(\mathbf{X}) \\ \mathbf{p}_2(\mathbf{X}) \\ \mathbf{p}_3(\mathbf{X}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{T}(\mathbf{X}) \underline{\mathbf{p}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{T}(\mathbf{X}) \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r(\mathbf{X}) \\ \mathbf{p}_\theta(\mathbf{X}) \\ \mathbf{p}_z(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Na equação anterior apresentou-se o tensor de transformação de coordenadas $\mathbf{T}(\mathbf{X})$, cujas componentes são dadas por:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \cos \theta(\mathbf{X}) & -\text{sen } \theta(\mathbf{X}) & 0 \\ \text{sen } \theta(\mathbf{X}) & \cos \theta(\mathbf{X}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Assim, tem-se para os pontos “Q” e “P”, respectivamente, a seguinte composição:

$$T(Q) = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\text{sen } \theta_j & 0 \\ \text{sen } \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(P) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\text{sen } 0 & 0 \\ \text{sen } 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Substituindo-se $\bar{u}(X)$ e $\bar{p}(X)$, a equação (4.19) torna-se:

$$\begin{aligned} & C(P) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r(P) \\ u_\theta(P) \\ u_z(P) \end{bmatrix} + \\ & + \sum_1^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\text{sen } \theta_j & 0 \\ \text{sen } \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r(Q) \\ u_\theta(Q) \\ u_z(Q) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\theta_j d\Gamma^* \quad (4.23) \\ & = \sum_1^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\text{sen } \theta_j & 0 \\ \text{sen } \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_r(Q) \\ p_\theta(Q) \\ p_z(Q) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\theta_j d\Gamma^* \end{aligned}$$

Na equação acima Γ^* é o contorno da seção de revolução, conforme demonstra a figura 2. Assim, tem-se que:

$$d\Gamma = 2\pi r_j d\Gamma^* \quad (4.24)$$

A equação (3.29) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(P) \bar{u}(P) & + \sum_1^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \int_0^{2\pi} \bar{p}^* \frac{T(Q)}{2\pi} \bar{u}(Q) 2\pi r_j d\theta_j d\Gamma^* \\ & = \sum_1^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \int_0^{2\pi} \bar{u}^* \frac{T(Q)}{2\pi} \bar{p}(Q) 2\pi r_j d\theta_j d\Gamma^* \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para os problemas axissimétricos os tensores cartesianos \bar{u}^* e \bar{p}^* estão escritos em função da distância euclidiana entre os pontos “P” e “Q”, expressa em função das coordenadas cilíndricas. Desta forma, estas grandezas, escritas em coordenadas cilíndricas,

saem da integral, pois não variam em relação à variável θ_j . Esta é uma importante consequência da condição de axissimetria.

Assim, a equação matricial a ser resolvida pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), apresentada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(P) \begin{bmatrix} u_r(P) \\ u_\theta(P) \\ u_z(P) \end{bmatrix} + \sum_1^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} p_{rr}^* & p_{r\theta}^* & p_{rz}^* \\ p_{\theta r}^* & p_{\theta\theta}^* & p_{\theta z}^* \\ p_{zr}^* & p_{z\theta}^* & p_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r(Q) \\ u_\theta(Q) \\ u_z(Q) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* \\ = \sum_1^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} u_{rr}^* & u_{r\theta}^* & u_{rz}^* \\ u_{\theta r}^* & u_{\theta\theta}^* & u_{\theta z}^* \\ u_{zr}^* & u_{z\theta}^* & u_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_r(Q) \\ p_\theta(Q) \\ p_z(Q) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* \end{aligned} \quad (4.26)$$

As componentes das matrizes são apresentadas a seguir.

$$\begin{aligned} u_{rr}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_{11}^* \cos\theta_j + u_{12}^* \sin\theta_j) d\theta_j = \\ &= \frac{A_1}{b r_i r_j} \left\{ [(3-4\nu)a + \hat{z}^2] K(m, \pi/2) - \left[(3-4\nu)b^2 + \frac{a\hat{z}^2}{d} \right] E(m, \pi/2) \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$u_{rz}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{13}^* d\theta_j = \frac{A_1 \hat{z}}{b r_i} \left[K(m, \pi/2) + \frac{f}{d} E(m, \pi/2) \right] \quad (4.28)$$

$$u_{zr}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_{31}^* \cos\theta_j + u_{32}^* \sin\theta_j) d\theta_j = \frac{A_1 \hat{z}}{b r_j} \left[-K(m, \pi/2) + \frac{h}{d} E(m, \pi/2) \right] \quad (4.29)$$

$$u_{zz}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{33}^* d\theta_j = \frac{2A_1}{b} \left[(3-4\nu)K(m, \pi/2) + \frac{\hat{z}^2}{d} E(m, \pi/2) \right] \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} u_{\theta\theta}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_{22}^* \cos\theta_j - u_{21}^* \sin\theta_j) d\theta_j = \\ &= \frac{4A_1(1-\nu)}{b r_i r_j} \left[a K(m, \pi/2) - b^2 E(m, \pi/2) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{u}_{r\theta}^* = \mathbf{u}_{\theta r}^* = \mathbf{u}_{z\theta}^* = \mathbf{u}_{\theta z}^* = 0 \quad (4.32)$$

Nas equações (4.21) a (4.26), são apresentados os cálculos das derivadas dos deslocamentos fundamentais em relação às coordenadas do ponto “Q”, que são imprescindíveis no cálculo das componentes do tensor das tensões. Esses resultados foram obtidos por Stikan [33] na obtenção destas componentes, feita através do programa “Maple”. Os resultados foram obtidos com auxílio do software nem tanto pela complexidade do cálculo analítico das derivadas, mas pela diminuição da possibilidade de erros e economia de tempo, pois esta etapa seria bastante árdua sem o auxílio deste recurso.

Tais derivadas estão descritas abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{rr}^*}{\partial r_j} = & \frac{A_1}{b r_i r_j} \left[\frac{\hat{z}^2}{2r_j} \left(\frac{a h}{d b^2} - 3 \right) - (3-4\nu) \frac{r_i^2 + \hat{z}^2}{r_j} \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1}{b r_i r_j} \left\{ \frac{(3-4\nu)}{2r_j} \left(\frac{a h}{d} + b^2 \right) + \frac{\hat{z}^2}{d} \left[h \left(\frac{r_i}{b^2} + \frac{1}{r_j} \right) + a \left(\frac{r_i + r_j}{b^2} - 2 \frac{r_i - r_j}{d} \right) \right] \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{rz}^*}{\partial z_j} = & \frac{A_1 \hat{z}}{b r_i r_j d} \left[\frac{a \hat{z}^2}{b^2} - (5-4\nu)d \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1 \hat{z}}{b r_i r_j d} \left[(5-4\nu)a - 2a \hat{z}^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) + 3\hat{z}^2 \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{rz}^*}{\partial r_j} = & - \frac{A_1 \hat{z}}{2 b r_i r_j d} \left(\frac{h f}{b^2} + d \right) K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1 \hat{z}}{2 b r_i r_j d} \left\{ h \left[2f \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) + 1 \right] - 3f - 4r_j^2 \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{rz}^*}{\partial z_j} = & - \frac{A_1}{b r_i d} \left[\left(\frac{\hat{z}^2 f}{b^2} + d \right) K(m, \pi/2) \right] + \\ & + \frac{A_1}{b r_i d} \left\{ \hat{z}^2 \left[3 + 2f \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) \right] - f \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r_j} = & A_1 \left\{ \frac{\hat{z}}{2 b^3 r_j^2} \left(3 b^2 - \frac{h^2}{d} \right) K(m, \pi/2) \right\} + \\ & + A_1 \left\{ \frac{\hat{z}}{b r_j d} \left[h \left(\frac{h}{b^2 r_j} - \frac{2}{r_j} + 2 \frac{r_i - r_j}{d} \right) - 2 r_j \right] E(m, \pi/2) \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z_j} = & \frac{A_1}{b r_j d} \left(d - \frac{\hat{z}^2 h}{b^2} \right) K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1}{b r_j d} \left\{ \hat{z}^2 \left[-3 + 2 h \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) \right] - h \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r_j} = & - \frac{A_1}{b r_j d} \left[(3 - 4\nu) d + \frac{\hat{z}^2 h}{b^2} \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1}{b r_j d} \left[(3 - 4\nu) h + \hat{z}^2 \left(\frac{d}{b^2} + 4 r_j \frac{r_i - r_j}{d} - 4 \frac{r_j^2}{b^2} \right) \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z_j} = - \frac{2 A_1 \hat{z}^3}{b^3 d} K(m, \pi/2) + \frac{2 \hat{z}}{b d} \left[1 - 4\nu + 2 \hat{z}^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) \right] E(m, \pi/2) \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r_j} = & \frac{4 A_1 (\nu - 1)}{b r_i r_j^2 d} \left[8 r_i^2 r_j^2 + 4 r_i r_j^3 + (-6 r_i r_j - r_j^2 + b^2) b^2 \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{4 A_1 (\nu - 1)}{b r_i r_j^2 d} \left[-2 r_i^2 r_j^2 - 2 r_i r_j^3 + (4 r_i r_j + r_j^2 - b^2) b^2 \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z_j} = \frac{4 A_1 \hat{z} (\nu - 1)}{b r_i r_j} \left(K(m, \pi/2) - \frac{a}{d} E(m, \pi/2) \right) \quad (4.42)$$

Através das expressões anteriores, podem-se obter as seguintes componentes para o tensor das tensões fundamentais:

$$p_{rr}^* = \mu \left\{ n_z \left(\frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z_j} + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r_j} \right) + \frac{2 n_r}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r_j} + \nu \left(\frac{u_{rr}^*}{r_j} + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z_j} \right) \right] \right\} \quad (4.43)$$

$$p_{rz}^* = \mu \left\{ n_r \left(\frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z_j} + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r_j} \right) + \frac{2 n_z}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z_j} + \nu \left(\frac{u_{rr}^*}{r_j} + \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r_j} \right) \right] \right\} \quad (4.44)$$

$$p_{zr}^* = \mu \left\{ n_z \left(\frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z_j} + \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r_j} \right) + \frac{2 n_r}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r_j} + \nu \left(\frac{u_{zr}^*}{r_j} + \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z_j} \right) \right] \right\} \quad (4.45)$$

$$p_{zz}^* = \mu \left\{ n_r \left(\frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z_j} + \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r_j} \right) + \frac{2 n_z}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z_j} + \nu \left(\frac{u_{zr}^*}{r_j} + \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r_j} \right) \right] \right\} \quad (4.46)$$

$$p_{\theta\theta}^* = \mu \left\{ n_z \left(\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z_j} \right) + n_r \left(\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r_j} - \frac{u_{\theta\theta}^*}{r_j} \right) \right\} \quad (4.47)$$

$$p_{r\theta}^* = p_{\theta r}^* = p_{z\theta}^* = p_{\theta z}^* = 0 \quad (4.48)$$

São somente apresentadas as equações finais resultantes, pois os cálculos intermediários foram suprimidos. As expressões finais são as que seguem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r} = & \frac{A}{cr_j r_j} \left[\frac{\hat{z}^2}{2r_j} \left(\frac{ae}{dc^2} - 3 \right) - (3-4\nu) \frac{r_i^2 + \hat{z}^2}{r_j} \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A}{cr_j r_j} \left\{ \frac{(3-4\nu)}{2r_j} \left(\frac{ae}{d} + c^2 \right) + \frac{\hat{z}^2}{d} \left[e \left(\frac{r_i}{c^2} + \frac{1}{r_j} \right) + a \left(\frac{r_i + r_j}{c^2} - 2 \frac{r_i - r_j}{d} \right) \right] \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} = & \frac{A\hat{z}}{cr_j r_j d} \left[\frac{a\hat{z}^2}{c^2} - (5-4\nu)d \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A\hat{z}}{cr_j r_j d} \left[(5-4\nu)a - 2a\hat{z}^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) + 3\hat{z}^2 \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r} = & - \frac{A\hat{z}}{2cr_j r_j d} \left(\frac{ef}{c^2} + d \right) K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A\hat{z}}{2cr_j r_j d} \left\{ e \left[2f \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) + 1 \right] - 3f - 4r_j^2 \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} = - \frac{A}{cr_j d} \left[\left(\frac{\hat{z}^2 f}{c^2} + d \right) K(m, \pi/2) \right] + \frac{A}{cr_j d} \left\{ \hat{z}^2 \left[3 + 2f \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) \right] - f \right\} E(m, \pi/2) \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r} = A \left\{ \frac{\hat{z}}{2c^3 r_j^2} \left(3c^2 - \frac{e^2}{d} \right) K(m, \pi/2) + \frac{\hat{z}}{cr_j d} \left[e \left(\frac{e}{c^2 r_j} - \frac{2}{r_j} + 2 \frac{r_i - r_j}{d} \right) - 2r_j \right] E(m, \pi/2) \right\} \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} = \frac{A}{cr_j d} \left(d - \frac{\hat{z}^2 e}{c^2} \right) K(m, \pi/2) + \frac{A}{cr_j d} \left\{ \hat{z}^2 \left[-3 + 2e \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) \right] - e \right\} E(m, \pi/2) \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r} = & - \frac{A}{cr_j d} \left[(3-4\nu)d + \frac{\hat{z}^2 e}{c^2} \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A}{cr_j d} \left[(3-4\nu)e + \hat{z}^2 \left(\frac{d}{c^2} + 4r_j \frac{r_i - r_j}{d} - 4 \frac{r_j^2}{c^2} \right) \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z} = -\frac{2A\hat{z}^3}{dc^3} K(m, \pi/2) + \frac{2\hat{z}}{cd} \left[1 - 4v + 2\hat{z}^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) \right] E(m, \pi/2) \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r} &= \frac{4A(v-1)}{cr_i r_j^2 d} \left[8r_i^2 r_j^2 + 4r_i r_j^3 + (-6r_i r_j - r_j^2 + c^2) c^2 \right] K(m, \pi/2) + \\ &+ \frac{4A(v-1)}{cr_i r_j^2 d} \left[-2r_i^2 r_j^2 - 2r_i r_j^3 + (4r_i r_j + r_j^2 - c^2) c^2 \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z} = \frac{4A\hat{z}(v-1)}{cr_i r_j} \left(K(m, \pi/2) - \frac{a}{d} E(m, \pi/2) \right) \quad (4.58)$$

Tem-se que $K(m, \pi/2)$ e $E(m, \pi/2)$ são as integrais elípticas completas do primeiro e do segundo Tipo, respectivamente, de módulo m^2 . Ainda nessas expressões, as grandezas n_r , n_z e n_θ são as componentes do vetor unitário normal ao contorno no ponto “P”. Além disso, tem-se:

$$\hat{z} = (z_i - z_j) \quad (4.59)$$

$$a = r_i^2 + r_j^2 + \hat{z}^2 \quad (4.60)$$

$$b = \sqrt{(r_i + r_j)^2 + \hat{z}^2} \quad (4.61)$$

$$d = (r_i - r_j)^2 + \hat{z}^2 \quad (4.62)$$

$$h = a - 2r_j^2 \quad (4.63)$$

$$f = h - 2\hat{z}^2 \quad (4.64)$$

$$m = 2 \sqrt{\frac{(r_i r_j)}{b}} \quad (4.65)$$

$$A_1 = \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)} \quad (4.66)$$

As expressões para forças de superfície fundamentais podem ser obtidas da mesma forma que foram gerados os deslocamentos, ou seja, integrando-se a expressão tridimensional desses tensores. Isto, porém, seria bastante complicado, devido a integração angular que envolveria diversas funções elípticas. A utilização dos deslocamentos e sua inserção na Equação de Navier para o contorno é o caminho mais estratégico, por ser de mais simples solução, como demonstrado a seguir:

$$c(i) \begin{Bmatrix} u_r(i) \\ u_z(i) \end{Bmatrix} + 2\pi \sum_{j+1}^N \hat{C}_j \begin{bmatrix} P_{rr}^*(i,j) & P_{rz}^*(i,j) \\ P_{zr}^*(i,j) & P_{zz}^*(i,j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r(j) \\ u_z(j) \end{Bmatrix} r ds =$$

$$2\pi \sum_{j+1}^N \hat{C}_j \begin{bmatrix} U_{rr}^*(i,j) & U_{rz}^*(i,j) \\ U_{zr}^*(i,j) & U_{zz}^*(i,j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r(j) \\ p_z(j) \end{Bmatrix} r ds \quad (4.67)$$

Onde $\theta_j = \pi - 2\alpha$

$$U_{rr}^*(i,j) \equiv U_{rr}^*(x, x') \quad (4.68)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_{x_1x_1}^*(x, x') \cos \theta_j + U_{x_1x_2}^*(x, x') \sin \theta_j] d\theta_j \quad (4.69)$$

$$= 2A \int_0^{2\pi} \left[\frac{(3-4\vartheta)(1-2\cos^2\alpha)}{c\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}} + \frac{(r_i-r_j)^2(1-2\cos^2\alpha)-4r_i r_j \cos^2\alpha}{c^3(1-m^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \right] d\alpha \quad (4.70)$$

$$= \frac{A}{cr_i r_j} \left[(3-4\vartheta)(r_i^2 + r_j^2) + 4(1-\vartheta)(z_i - z_j)^2 \right] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{A}{cr_i r_j} \left[(3-4\vartheta)c^2 + \frac{a(z_i - z_j)^2}{d} \right] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.71)$$

$$U_{rz}^*(i,j) \equiv U_{rz}^*(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_{x_1x_3}^*(x, x') \cos \theta_j] d\theta_j \quad (4.72)$$

$$= 2A \int_0^{2\pi} \left[\frac{(r_i - r_j + 2r_j \cos^2\alpha)(z_i - z_j)}{c^3(1-m^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \right] d\alpha \quad (4.73)$$

$$= \frac{A(z_i - z_j)}{cr_j} \left[K \left(m, \frac{\pi}{2} \right) + \frac{r_i^2 - r_j^2 + (z_i - z_j)^2}{d} E \left(m, \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (4.74)$$

$$U_{zr}^*(i, j) \equiv U_{rz}^*(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_{x_3x_1}^*(x, x') \cos \theta_j + U_{x_3x_2}^*(x, x') \sin \theta_j] d\theta_j \quad (4.75)$$

$$= 2A \int_0^{2\pi} \left[\frac{(r_i - r_j + 2r_i \cos^2 \alpha)(z_i - z_j)}{c^3 (1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \right] d\alpha \quad (4.76)$$

$$= \frac{A(z_i - z_j)}{cr_j} \left[-K \left(m, \frac{\pi}{2} \right) + \frac{r_i^2 - r_j^2 + (z_i - z_j)^2}{d} E \left(m, \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (4.77)$$

$$U_{zz}^*(i, j) \equiv U_{x_3x_3}^*(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_{zz}^*(i, j)] d\theta_j \quad (4.78)$$

$$= 2A \int_0^{2\pi} \left[\frac{(3 - 4\vartheta)}{c\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{(z_i - z_j)^2}{c^3 (1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \right] d\alpha \quad (4.79)$$

$$= \frac{2A}{c} \left[(3 - 4\vartheta) K \left(m, \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(z_i - z_j)^2}{d} E \left(m, \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (4.80)$$

Onde

$$A = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1 - \vartheta)} \right] \quad (4.81)$$

$$a = r_i^2 + r_j^2 + (z_i - z_j)^2 \quad (4.82)$$

$$d = (r_i - r_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \quad (4.83)$$

A tração axissimétrica pode ser derivada analogamente, porém desde que escrita em termos de funções elípticas expressas em termo de U^* conforme demonstrado nas equações escritas de (4.73) a (4.76).

Assim, temos que:

$$P_{rr}^* \equiv P_{rr}^*(x, x') \quad (4.84)$$

$$= \mu n_z \left[\frac{\partial U_{rr}^*}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}^*}{\partial r} \right] + 2\mu n_r \left[\frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta} \frac{\partial U_{rr}^*}{\partial r} + \frac{\vartheta}{1-2\vartheta} \left(\frac{U_{rr}^*}{r} + \frac{\partial U_{rr}^*}{\partial z} \right) \right] \quad (4.85)$$

$$P_{rz}^* \equiv P_{rz}^*(x, x') \quad (4.86)$$

$$= \mu n_r \left[\frac{\partial U_{rr}^*}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}^*}{\partial r} \right] + 2\mu n_z \left[\frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta} \frac{\partial U_{rz}^*}{\partial z} + \frac{\vartheta}{1-2\vartheta} \left(\frac{U_{rr}^*}{r} + \frac{\partial U_{rr}^*}{\partial r} \right) \right] \quad (4.87)$$

$$P_{zr}^* \equiv P_{zr}^*(x, x') \quad (4.88)$$

$$= \mu n_r \left[\frac{\partial U_{zr}^*}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}^*}{\partial r} \right] + 2\mu n_r \left[\frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta} \frac{\partial U_{zr}^*}{\partial r} + \frac{\vartheta}{1-2\vartheta} \left(\frac{U_{zr}^*}{r} + \frac{\partial U_{zr}^*}{\partial z} \right) \right] \quad (4.89)$$

$$P_{zz}^* \equiv P_{zz}^*(x, x') \quad (4.90)$$

$$= \mu n_r \left[\frac{\partial U_{zr}^*}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}^*}{\partial r} \right] + 2\mu n_r \left[\frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta} \frac{\partial U_{zz}^*}{\partial z} + \frac{\vartheta}{1-2\vartheta} \left(\frac{U_{zr}^*}{r} + \frac{\partial U_{zr}^*}{\partial r} \right) \right] \quad (4.91)$$

CAPÍTULO 5

OBTENÇÃO DOS DESLOCAMENTOS E TENSÕES NO INTERIOR DO DOMÍNIO

5 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS

A Lei de Hooke para um estado tridimensional elástico é dada pela Equação (2.09), que relaciona as componentes de tensão em função das deformações, consideradas conhecidas, em qualquer ponto do corpo solicitado. Tal equação é repetida a seguir:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (5.01)$$

Sabe-se que as componentes de deformação no caso axissimétrico podem ser escritas com grande vantagem em coordenadas cilíndricas. Tais componentes, em função dos deslocamentos $u(P)$, são dadas de acordo com as seguintes expressões a seguir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} ; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} ; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} ; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] ; \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] ; \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} ; \end{aligned} \quad (5.02)$$

Pode-se afirmar, que quando o ponto “P” está situado no interior do corpo da matriz $C(P)$ e corresponde à matriz identidade. Portanto, fazendo-se uso da Equação (4.21), podem-se obter os valores dos deslocamentos nos pontos internos a partir dos deslocamentos dos pontos situados no contorno, os quais já foram previamente calculados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_r(P) \\ u_\theta(P) \\ u_z(P) \end{bmatrix} + \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} p_{rr}^* & p_{r\theta}^* & p_{rz}^* \\ p_{\theta r}^* & p_{\theta\theta}^* & p_{\theta z}^* \\ p_{zr}^* & p_{z\theta}^* & p_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r(Q) \\ u_\theta(Q) \\ u_z(Q) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* = \\ = \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} u_{rr}^* & u_{r\theta}^* & u_{rz}^* \\ u_{\theta r}^* & u_{\theta\theta}^* & u_{\theta z}^* \\ u_{zr}^* & u_{z\theta}^* & u_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_r(Q) \\ p_\theta(Q) \\ p_z(Q) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* \end{aligned} \quad (5.03)$$

As integrações dos núcleos que compõem a equação (5.03) deverão ser outra vez efetivadas, pois os pontos fonte (P) agora estão posicionados no interior do domínio. Como o cálculo computacional destes pontos no interior é bem simples, nenhuma técnica de resolução de sistemas necessitará ser empregada, pois o sistema já foi solucionado. Também deve-se destacar que a precisão dos resultados nestes pontos é mais elevada, ao contrário do que normalmente acontece em outras técnicas numéricas. Esse comportamento pode ser adequadamente explicado à luz do Método dos Resíduos Ponderados, pois o emprego da equação integral (5.03) equivale a uma nova minimização de resíduos, tomando como base as variáveis nodais de contorno já calculadas anteriormente.

5.2 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA CÁLCULO DE TENSÕES EM PONTOS INTERNOS

Para obtenção das tensões deve-se seguir um procedimento similar ao anterior utilizado para a obtenção dos deslocamentos. No entanto, existem algumas etapas intermediárias que necessitam ser realizadas. Como exemplo, no cálculo da tensão radial no ponto interno “P”, $\sigma_{rr}(P)$, faz-se uso primeiramente da Equação (2.09):

$$\sigma_{rr}(P) = 2G \varepsilon_{rr}(P) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{zz}(P) + \varepsilon_{\theta\theta}(P)) \quad (5.04)$$

Substituindo-se em (5.02), tem-se:

$$\sigma_{rr}(P) = 2G \left[\frac{\partial u_r(P)}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_z(P)}{\partial z} + \frac{u_r(P)}{r} \right) \right] \quad (5.05)$$

As derivadas dos deslocamentos podem são obtidas através da derivação da equação integral matricial (5.03), as quais tomam a forma da equação exemplificada a seguir, em termo de \mathbf{u}_r :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_r(\mathbf{P})}{\partial r_i} + \sum_I^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \left[\frac{\partial p_{r\theta}^*}{\partial r_i} u_r(\mathbf{Q}) + \frac{\partial p_{r\theta}^*}{\partial r_i} u_\theta(\mathbf{Q}) + \frac{\partial p_{rz}^*}{\partial r_i} u_z(\mathbf{Q}) \right] 2\pi r_j d\Gamma^* = \\
& = \sum_I^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \left[\frac{\partial u_{r\theta}^*}{\partial r_i} p_r(\mathbf{Q}) + \frac{\partial u_{r\theta}^*}{\partial r_i} p_\theta(\mathbf{Q}) + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r_i} p_z(\mathbf{Q}) \right] 2\pi r_j d\Gamma^* \quad (5.06)
\end{aligned}$$

As tensões internas são obtidas através do mesmo procedimento utilizado para a equação (5.05). Assim devem-se derivar os deslocamentos $u_i(\xi)$'s gerando derivadas segundas dos núcleos, pois os termos relacionados aos vetores tensão p_{ij} já estão expressos em função das derivadas primeira dos deslocamentos.

A seguir, são listadas as derivadas dos deslocamentos, incluindo as derivadas segundas.

Para facilitar a compreensão das equações, será feita a adoção das seguintes convenções:

$$r_i = r, \quad r_j = \rho \quad (5.07)$$

$$z_i = z, \quad z_j = \zeta \quad (5.08)$$

As derivadas dos u_{ij}^* 's em relação ao ponto "P" serão apresentadas no Apêndice A.

Assim, de posse destas últimas equações, pode-se integrar numericamente a equação (5.06), aqui repetida por conveniência, para encontrar os valores das derivadas dos deslocamentos.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r(\mathbf{P})}{\partial r_i} + \sum_I^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \left[\frac{\partial p_{r_i}^*}{\partial r_i} u_r(\mathbf{Q}) + \frac{\partial p_{r\theta}^*}{\partial r_i} u_\theta(\mathbf{Q}) + \frac{\partial p_{rz}^*}{\partial r_i} u_z(\mathbf{Q}) \right] 2\pi r_j d\Gamma^* = \\ & = \sum_I^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \left[\frac{\partial u_{r_i}^*}{\partial r_i} p_r(\mathbf{Q}) + \frac{\partial u_{r\theta}^*}{\partial r_i} p_\theta(\mathbf{Q}) + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r_i} p_z(\mathbf{Q}) \right] 2\pi r_j d\Gamma^* \end{aligned} \quad (5.06)$$

Os valores serão, por sua vez, serão inseridos na equação (5.05), também repetida por conveniência, para se obter as tensões nos pontos internos, ou seja:

$$\sigma_{rr}(\mathbf{P}) = 2G \left[\frac{\partial u_r(\mathbf{P})}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_z(\mathbf{P})}{\partial z} + \frac{u_r(\mathbf{P})}{r} \right) \right] \quad (5.05)$$

Deve-se ressaltar que, por simplicidade, as equações duas equações (5.05) e (5.06) estão particularizadas para uma determinada componente (plano radial, direção radial).

Deve-se proceder da mesma forma para o cálculo das tensões nas demais direções e planos, cujas componentes foram mostradas a partir da equação (5.09) repetida novamente por conveniência.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{r_i}^*}{\partial r} = & \frac{A_I}{b^3 r^2 \rho (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4a\rho^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) \left[\nu (-32r\rho^5 \hat{z}^2 - 32\hat{z}^4 r\rho^3 - \right. \right. \\ & 8h^2 r\rho^3 - 8h^2 r\rho \hat{z}^2 + 32\rho^6 \hat{z}^2 + 32\hat{z}^4 \rho^4 + 16h\rho^4 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^4 + 16h\rho^2 \hat{z}^4 + 8h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 4h^3 \rho^2 + \\ & 4h^3 \hat{z}^2) + 24r\rho^5 \hat{z}^2 + 32\hat{z}^4 r\rho^3 + 2hr\rho^3 \hat{z}^2 + 6h^2 r\rho^3 - 2hr\rho \hat{z}^4 + 10h^2 r\rho \hat{z}^2 - 24\rho^6 \hat{z}^2 - 32\hat{z}^4 \rho^4 - \\ & 14h\rho^4 \hat{z}^2 - 6h^2 \rho^4 - 14h\rho^2 \hat{z}^4 - 11h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 3h^3 \rho^2 + h^2 \hat{z}^4 - 5h^3 \hat{z}^2 \left. \right] + E(m, \pi/2) \left[\nu (-64\hat{z}^4 \rho^4 \right. \\ & - 16h\hat{z}^4 \rho^2 + 16h\hat{z}^2 \rho^4 - 16h^2 \hat{z}^2 \rho^2 - 4h^3 \hat{z}^2 + 4h^3 \rho^2) + 12\hat{z}^6 \rho^2 + 44\hat{z}^4 \rho^4 - 4h\hat{z}^4 \rho^2 - h^2 \hat{z}^4 - \\ & \left. 4h\hat{z}^2 \rho^4 + 23h^2 \hat{z}^2 \rho^2 + 5h^3 \hat{z}^2 - 3h^3 \rho^2 \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.49)$$

CAPÍTULO 6

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MEC

6 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

Os conceitos básicos do cálculo numérico como os de aproximação, discretização, convergência, entre outros, constituem os quesitos fundamentais para a resolução eficiente de equações por via computacional. Portanto, é uma etapa muito importante na resolução de um problema específico a escolha de algoritmos, técnicas e procedimentos que componham o método.

Conforme já exposto, a equação integral obtida em (3.29), que é repetida a seguir por conveniência, envolve uma distribuição dos deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno:

$$\mathbf{C}(\zeta) \mathbf{u}(\zeta) + \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{X}) \mathbf{p}^*(\zeta, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{X}) \mathbf{u}^*(\zeta, \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (6.01)$$

Tem-se que o ponto fonte ζ é o ponto nodal onde a força unitária produz o campo de deslocamentos \mathbf{u}^* , enquanto \mathbf{X} representa os pontos de integração sobre o contorno, os pontos campo.

O tratamento numérico desenvolvido considera uma discretização do contorno em um número finito de elementos. No presente estudo utilizam-se os elementos quadráticos, que correspondem ao uso de funções de interpolação quadráticas. Esta discretização leva a um sistema de equações algébricas envolvendo valores nodais de deslocamentos e forças de superfície.

Os métodos numéricos permitem resolver sistemas de difícil resolução analítica, mas de uma forma aproximada. Da mesma forma, o método dos Elementos de Contorno envolve um procedimento que procura minimizar o erro cometido com a solução aproximada, através de uma ponderação avaliada em todo o domínio.

6.2 PROCEDIMENTO NUMÉRICO GERAL

Somente após a discretização da equação integral geral de contorno (6.01) é possível resolvê-la aproximadamente. Inicialmente, divide-se o contorno numa série de elementos sobre os quais se interpolam as grandezas u_i e p_i em termos dos valores nodais.

$$u_i = \mathbf{N}^e \mathbf{u}_i^e \quad (6.02)$$

e

$$p_i = \mathbf{N}^e \mathbf{p}_i^e \quad (6.03)$$

onde \mathbf{N}^e é o vetor das funções de interpolação, \mathbf{u}_i^e e \mathbf{p}_i^e são os vetores deslocamento e força do ponto nodal X .

6.2.1 ELEMENTOS COM GEOMETRIA LINEAR

Pode-se observar na figura 5 a ilustração de um elemento de geometria retilínea. Nele observa-se a coordenada natural $\Gamma(\eta)$, que é definida como:

$$\Gamma_x^e(\eta) = x_1^e \phi_1 + x_2^e \phi_2 = x_1^e \frac{1}{2}(1-\eta) + x_2^e \frac{1}{2}(1+\eta) \quad (6.04)$$

$$\Gamma_y^e(\eta) = y_1^e \phi_1 + y_2^e \phi_2 = y_1^e \frac{1}{2}(1-\eta) + y_2^e \frac{1}{2}(1+\eta) \quad (6.05)$$

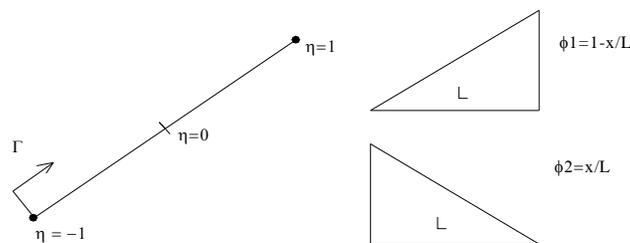


Figura 5 – Geometria retilínea.

Existem diversas formas de encontrar o valor do Jacobiano da transformação, iremos aqui demonstrar através dos princípios da geometria diferencial. Através da observação, da figura 6, pode-se escrever:

$$d\Gamma^2 = d\Gamma_x^2 + d\Gamma_y^2 \rightarrow \left(\frac{d\Gamma^e}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2 \rightarrow \frac{d\Gamma^e}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2}$$

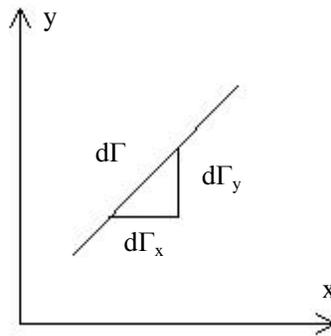


Figura 6 – Geometria retilínea - elemento diferencial.

Finalmente:

$$d\Gamma^e = |J^e| d\eta \quad (6.06)$$

Onde $|J^e|$ é o Jacobiano da transformação. Para a geometria linear e em 2D tem o valor de:

$$|J^e| = \frac{l_j}{2} \quad (6.07)$$

6.2.2 ELEMENTOS COM GEOMETRIA QUADRÁTICA

Para os casos onde uma geometria quadrática é adotada, como a forma mostrada na figura 7:

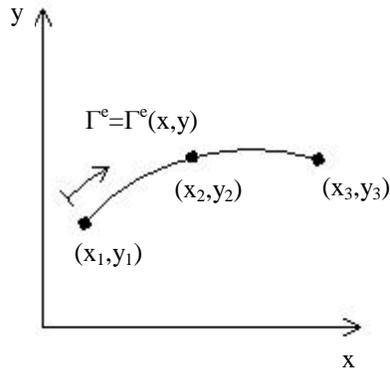


Figura 7 – Geometria quadrática.

Para este caso, tem-se:

$$\Gamma_x^e(x) = x_1^e \phi_1 + x_2^e \phi_2 + x_3^e \phi_3 = x_1^e \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2} \right) + x_2^e (1 - \eta^2) + x_3^e \left(\frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \quad (6.08)$$

$$\Gamma_y^e(x) = y_1^e \phi_1 + y_2^e \phi_2 + y_3^e \phi_3 = y_1^e \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2} \right) + y_2^e (1 - \eta^2) + y_3^e \left(\frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \quad (6.09)$$

As derivadas com relação a variável adimensional fornecem:

$$\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta} = \eta(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \quad (6.10)$$

$$\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta} = \eta(y_1 - 2y_2 + y_3) + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \quad (6.11)$$

Da mesma forma o Jacobiano é definido como na equação (6.06). Assim:

$$|J^e| = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2} \quad (6.12)$$

6.2.3 EXPRESSÕES DOS INTEGRANDOS

Para desenvolver as integrais da equação (6.01), devem-se conhecer as expressões dos integrandos em função da coordenada natural η . O Jacobiano para geometria quadrática é dado pela expressão (6.12). As coordenadas do ponto campo $x(\eta)$ e $y(\eta)$ podem ser determinadas a partir das expressões (6.08) e (6.09). Sendo assim, a distância entre os pontos fonte e campo e o vetor \mathbf{R} , como pode ser observado na figura 8, estão definidas, restando apenas obter a expressão para o vetor unitário normal $\mathbf{n}(\eta)$. Assim, seja \mathbf{t} um vetor tangente à curva Γ , conforme apresenta a figura 8.

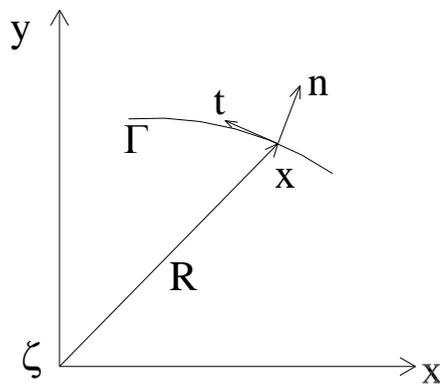


Figura 8 – Vetor posição e vetores unitários.

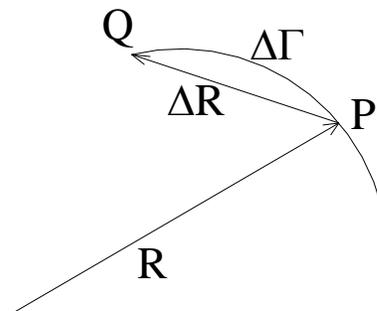


Figura 9 – Elemento diferencial da curva.

Existe uma relação entre \mathbf{R} e a curva Γ , conforme mostra a figura 9, que pode ser expressa por:

$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta \Gamma} = \frac{\mathbf{PQ}}{\Delta \Gamma} \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}}{d\Gamma} = \lim_{\Delta \Gamma \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta \Gamma} = \mathbf{t} \quad (6.13)$$

De acordo com a análise geométrica, podemos afirmar que $\Delta \Gamma \rightarrow 0$ e $Q \rightarrow P$ na direção da corda PQ e tende para a direção da tangente à curva em P.

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\Gamma} = \frac{dx}{d\Gamma} \mathbf{i} + \frac{dy}{d\Gamma} \mathbf{j} = \mathbf{t} \quad (6.14)$$

Tem-se também:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{R}}{d\Gamma} = \frac{d\mathbf{R}}{d\eta} \frac{d\eta}{d\Gamma} = \frac{d\mathbf{R}}{d\eta} \frac{1}{|J|} \quad (6.15)$$

Deve-se ainda calcular da expressão anterior o termo $d\mathbf{R}/d\eta$. Assim, tem-se:

$$\mathbf{R} = [x(x_i) - x(\zeta)] \mathbf{i} + [y(x_i) - y(\zeta)] \mathbf{j} \quad (6.16)$$

Diferenciando, encontra-se:

$$d\mathbf{R} = [dx(x_i)] \mathbf{i} + [dy(x_i)] \mathbf{j} \quad (6.17)$$

Onde dx e dy são coordenadas globais; então, escrevendo-as em termos de η :

$$\mathbf{x} = \Gamma_{\mathbf{x}}^e(\eta) = x_1^e \phi_1 + x_2^e \phi_2 + x_3^e \phi_3 = x_1^e N_1 + x_2^e N_2 + x_3^e N_3 \quad (6.18)$$

$$\mathbf{y} = \Gamma_{\mathbf{y}}^e(\eta) = y_1^e \phi_1 + y_2^e \phi_2 + y_3^e \phi_3 = y_1^e N_1 + y_2^e N_2 + y_3^e N_3 \quad (6.19)$$

Derivando as equações acima, tem-se:

$$d\mathbf{x} = x_1^e d\phi_1 + x_2^e d\phi_2 + x_3^e d\phi_3 \quad (6.20)$$

$$d\mathbf{y} = y_1^e d\phi_1 + y_2^e d\phi_2 + y_3^e d\phi_3 \quad (6.21)$$

As funções ϕ_i são dadas em função de η ; logo:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\eta} = \frac{dx(\eta)}{d\eta} \mathbf{i} + \frac{dy(\eta)}{d\eta} \mathbf{j} \quad (6.22)$$

Obedecendo a todas as condições:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{s} &= \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$T_1 = \frac{dr_i}{d\Gamma} \quad (6.24)$$

$$T_2 = \frac{dz_i}{d\Gamma} \quad (6.25)$$

Tem-se o vetor normal:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{|j|} \left(\frac{dr}{d\eta} \mathbf{i} + \frac{dz}{d\eta} \mathbf{j} \right) = T_1 \mathbf{i} + T_2 \mathbf{j} \quad (6.26)$$

Assim através da discretização, as integrais são resolvidas de forma numérica empregando a Fórmula de Gauss.

6.2.4 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Os elementos de contorno para problemas bidimensionais têm, usualmente, forma retilínea ou curvilínea, podendo as funções interpolantes serem constantes, lineares, quadráticas ou de ordem superior. Se as funções de forma, que definem a forma geométrica, e as funções de

interpolação para valores nodais têm mesma ordem, os elementos são denominados isoparamétricos.

Os elementos sub-paramétricos, com aproximação constante para os valores de contorno, não são usados em aplicações da elasticidade por apresentarem resultados com precisão muito inferiores se comparados com os obtidos, por exemplo, com aproximação linear, conforme verificam CRUSE (1974) e SOUZA (2001).

Através da adoção de um sistema de coordenadas adimensional, são definidas as funções de interpolação espacial, conhecido também como sistema de coordenadas natural.

A coordenada adimensional η , aqui é usada com vantagem por permitir o uso de funções ϕ_k padronizadas e por se ajustar com mais facilidade aos esquemas de integração aproximada.

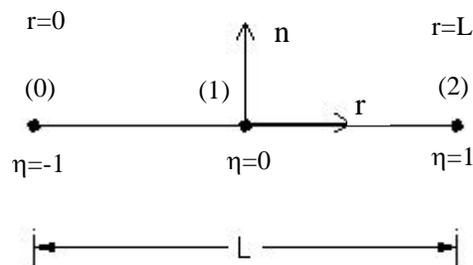


Figura 10 – Sistema de coordenadas adimensional.

Pode-se observar na figura 10 um elemento adimensional, para o qual os valores de u e p em qualquer ponto podem ser definidos em termos do seu valor nodal e as funções de interpolação ϕ_k são dadas em termos da coordenada adimensional. Pode-se observar na figura 10 que a coordenada adimensional η varia de -1 a +1.

Assim para as funções de interpolação lineares, tem-se:

$$u(\eta) = u_1 \phi_1(\eta) + u_2 \phi_2(\eta) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$p(\eta) = p_1 \phi_1(\eta) + p_2 \phi_2(\eta) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

As duas funções de interpolação são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (6.29)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (6.30)$$

Para as funções de interpolação quadráticas, da mesma forma, tem-se:

$$u(\eta) = u_1 \phi_1(\eta) + u_2 \phi_2(\eta) + u_3 \phi_3(\eta) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$p(\eta) = p_1 \phi_1(\eta) + p_2 \phi_2(\eta) + p_3 \phi_3(\eta) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Assim, as funções de interpolação são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \eta(\eta - 1) \quad (6.33)$$

$$\phi_2 = 1 - \eta^2 \quad (6.34)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \eta(\eta + 1) \quad (6.35)$$

6.2.5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.

Na figura 11 ilustra-se esquematicamente como se processa a aproximação de um contorno curvilíneo qualquer por elementos de contorno

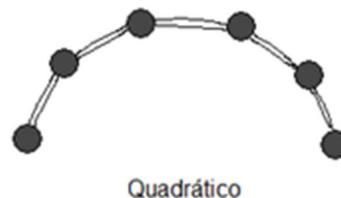


Figura 11 – Elemento de contorno quadrático.

Na figura 11 tem-se ilustrados os três tipos de elementos, o elemento do tipo constante retilíneo, onde a aproximação das variáveis básicas ou primais é constante ao longo do elemento, enquanto a descrição geométrica do elemento é linear. Portanto, um elemento hipoparamétrico, onde o posicionamento dos pontos nodais é centralizado no elemento de contorno. Conforme exposto, o uso de tal tipo de elemento é bastante restrito nas análises elásticas, sendo mais efetivo nos casos de potencial escalar.

No segundo tipo de elemento, tem-se o elemento linear retilíneo, classe isoparamétrica, no qual o campo de variáveis primais e a geometria do elemento possuem a mesma ordem. Normalmente, os pontos nodais coincidem com as extremidades do elemento de contorno, mas em algumas ocasiões podem ser empregados elementos não conformes, nos quais os pontos nodais são deslocamentos para o interior ou mesmo para o exterior.

Por último tem-se o elemento quadrático isoparamétrico, onde três nós funcionais caracterizam este tipo de elemento, que possui como característica uma maior precisão.

Assim, substituindo (6.02) e (6.03) em (6.01) tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{C}(\zeta_i) \mathbf{u}(\zeta_i) + \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{u}^{(e)} = \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{p}^{(e)} \quad (6.36)$$

Ne = Número de elementos da discretização.

A função interpolante define a geometria de cada elemento, de forma que se baseia nas coordenadas cartesianas dos pontos nodais que são naturalmente conhecidas. As coordenadas cartesianas \mathbf{x}_i dos pontos de contorno estão situadas ao longo do elemento, como demonstrado a seguir:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{M}^e \mathbf{x}_i^e \quad (6.37)$$

\mathbf{M}^e = Matriz contendo as funções de interpolação e

\mathbf{x}_i^e = Vetor de coordenadas nodais do elemento.

A montagem do sistema de equações indicado em (6.36), cada uma das integrais será calculada numericamente. Este cálculo se dará através da integração numérica unidimensional de Gauss, que segue:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^P f(\eta_i) w_i \quad (6.38)$$

Onde: η_i =Coordenada adimensional do i-ésimo ponto de integração,

w_i = Fator de peso associado ao ponto i ,

P =Número total de pontos de integração utilizado.

Assim, operando com as parcelas da equação (6.34) chega-se a:

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}|_k w_k \mathbf{N}_k \mathbf{p}_k^* \quad (6.39)$$

e

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}|_k w_k \mathbf{N}_k \mathbf{u}_k^* \quad (6.40)$$

NPI = Número de pontos de integração de Gauss.

A equação discretizada é aplicada repetidamente considerando o ponto ζ situado coincidentemente com todos os pontos nodais existentes. Deve-se levar o sistema para a forma matricial e para isso coloca-se da forma mostrada a seguir.

Na segunda parcela de (6.36), tem-se:

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma_e \right) \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e \quad (6.41)$$

e

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma_e \right) \mathbf{p}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e \quad (6.42)$$

O sistema se reduz a forma:

$$\mathbf{C}(\zeta_i) \mathbf{u}(\zeta_i) + \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e \quad (6.43)$$

Assim, temos um sistema de equações matriciais na forma:

$$(\mathbf{C} + \hat{\mathbf{H}}) \mathbf{u} = \mathbf{Gp} \quad (6.44)$$

Na equação anterior os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} possuem os valores de deslocamento e forças de superfície em todos os pontos nodais. A matriz \mathbf{C} é quase diagonal, e pode ser incorporada a $\hat{\mathbf{H}}$ para formar:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gp} \quad (6.45)$$

6.2.6 POSICIONAMENTO DOS PONTOS FONTE.

Apesar da forma condensada da equação (6.45), deve-se analisar e apresentar como determinar as sub-matrizes da diagonal H. Deve-se ressaltar que os termos dessa diagonal são compostos da sub-matriz C e de parcelas de integrais nas quais há singularidade, pelo fato do ponto fonte estar coincidente com o elemento no qual se processa a integração. A operacionalização dessas integrais singulares é analiticamente bastante complexo e numericamente também bastante sensível a imprecisões. Para se evitar tais problemas, adota-se a estratégia de se calcular estes componentes através da imposição de translações de corpo rígido, correspondentes a forças de superfície nulas. Assim, para o caso bidimensional adota-se, 2 translações independentes, $u_i = \delta_{i1}$ e $u_i = \delta_{i2}$, tendo:

$$\sum_{q=1}^t \mathbf{H}_{pq} \mathbf{u}_q = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, t) \quad (6.46)$$

\mathbf{H}_{pq} = Matrizes 2x2 de \mathbf{H} .

e

$$\mathbf{u}_q = \mathbf{I} \quad (6.47)$$

\mathbf{I} = Matriz identidade.

Pode-se calcular indiretamente as sub-matrizes da diagonal de \mathbf{H} na forma:

$$\mathbf{H}_{\alpha\alpha} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq \alpha}}^t \mathbf{H}_{\alpha q} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, t) \quad (6.48)$$

Esta estratégia não é efetiva para os casos de problemas axissimétricos, pois se é possível simular um movimento de corpo rígido na direção axial, o mesmo não pode ser feito na direção perpendicular ao eixo de revolução. Neste caso, nos restaria tentar integrar as complexas singularidades geradas por funções elípticas, não fosse possível colocar o ponto fonte P fora do domínio físico do problema, resultando numa matriz C identicamente nula.

A introdução da técnica de colocação dos pontos fonte fora do domínio não é novidade com o MEC, mas é um procedimento pouco usual, por se acreditar que há perda apreciável de precisão e requerer-se a definição de novas coordenadas para os pontos fonte, diferentes daquelas escolhidas para definição dos nós funcionais na malha de elementos.

Nesta dissertação, os pontos fonte são posicionados estrategicamente fora do domínio, o que nos leva a uma reduzida quantidade de integrais singulares a serem resolvidas. Assim :

$$C(P) \equiv 0 \quad (6.49)$$

Na equação (6.49), tem-se uma equação idêntica a equação (6.50), onde para cada ponto geométrico preestabelecido na etapa de discretização, resultaem um sistema de equações do

tipo (3Np X 3Np), onde Np representa o número total de pontos geométricos situados no contorno.

$$\sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} p_{rr}^* & p_{r\theta}^* & p_{rz}^* \\ p_{\theta r}^* & p_{\theta\theta}^* & p_{\theta z}^* \\ p_{zr}^* & p_{z\theta}^* & p_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* = \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} u_{rr}^* & u_{r\theta}^* & u_{rz}^* \\ u_{\theta r}^* & u_{\theta\theta}^* & u_{\theta z}^* \\ u_{zr}^* & u_{z\theta}^* & u_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_z \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* \quad (6.50)$$

A figura 12 esta ilustrado a técnica utilizada, onde esta representada de forma simplificada, apenas por um retângulo, uma placa circular. Pode-se observar, sobre o contorno os nós geométricos externos ao domínio e os pontos fonte. A distância d_i é dada pela equação:

$$d_i = a_i l_j \quad (6.51)$$

l_j = Valor médio dos tamanhos dos elementos adjacentes e

a_i = Parâmetro escolhido dentro de uma escala de 0,1 a 0,5.

Existem outras formas de se obter os coeficientes C_{ij} , apresentada em BREBBIA [5], porém como não apresentam nenhuma vantagem ao nosso estudo, estas opções não serão abordadas.

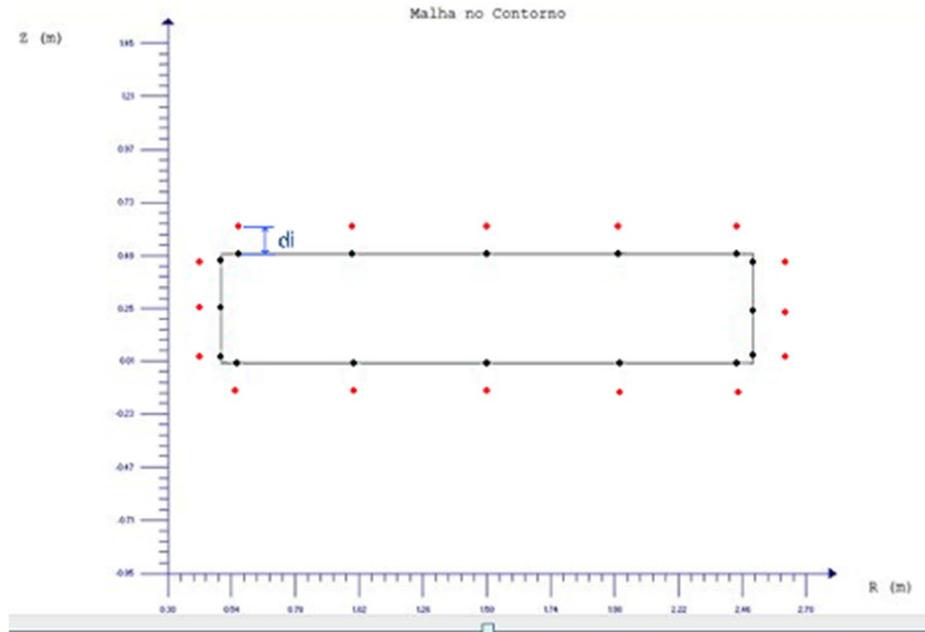


Figura 12 – Nós geométricos e pontos externos ao contorno de uma placa circular.

6.3 EQUACIONAMENTO PARA CÁLCULO DE TENSÕES NO CONTORNO

Através da obtenção de todos os vetores deslocamento e força de superfície já obtidos nos pontos nodais é possível se obter as tensões e deformações nos pontos que se encontram exatamente no contorno. Deve-se ressaltar que devem estar disponíveis para o cálculo tanto os valores nodais das variáveis básicas fornecidos ao sistema de equações como condição de contorno, quanto os valores calculados posteriormente pela solução das equações integrais discretizadas. As componentes destes vetores em cada ponto nodal de um dado elemento estão representadas de acordo com as equações (6.02) e (6.03).

$$u_i = N^e * u_i^e \quad (6.02)$$

$$p_i = N^e * p_i^e \quad (6.03)$$

Deve-se fazer uso de um eixo de coordenadas tangencial e normal à superfície de contorno, no intuito de se utilizar um plano de tensões principal, o que facilita imensamente

os cálculos. A figura 13 ilustra este sistema de coordenadas para um ponto qualquer do contorno. Os vetores que representam os vetores unitários que definem o sistema de coordenadas são \vec{t} e \vec{n} .

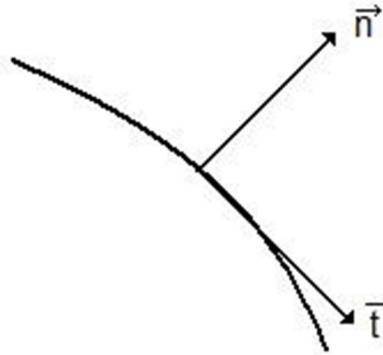


Figura 13 – Vetores Normal e Tangente.

De acordo com a equação (6.14) onde x e y serão respectivamente, em coordenadas cilíndricas r e z :

$$\vec{t} = \frac{1}{|J|} \left(\frac{dr}{d\eta} \vec{i} + \frac{dz}{d\eta} \vec{j} \right) = T_1 \vec{i} + T_2 \vec{j} \quad (6.52)$$

O vetor $\vec{u}(P)$ é o vetor deslocamento do ponto “P” nas coordenadas originais, tal que:

$$\vec{u}(P) = U_r(P) \vec{i} + U_z(P) \vec{j} + U_\theta(P) \vec{k} \quad (6.53)$$

Para se obter o deslocamento do ponto “P” na direção do vetor \vec{t} basta-se efetuar o produto escalar $\vec{u}(P) \cdot \vec{t}$:

$$U_t(P) = (U_r(P) T_1 + U_z(P) T_2) \quad (6.54)$$

É necessário obter a deformação do ponto em relação ao novo sistema de coordenadas. Desta forma, considera-se dt como um comprimento infinitesimal na direção tangencial ao contorno, de forma que:

$$\varepsilon_{tt} = \frac{dU_t(P)}{dt} = \frac{dU_t(P)}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} \quad (6.55)$$

Tendo um segmento qualquer no contorno $\Delta\Gamma$ e um na direção tangencial ao contorno Δt como mostrado na figura 14, se torna fácil a constatação de que fazendo-se ambos tenderem à zero, tem-se que:

Se $\Delta\Gamma \rightarrow 0$; $\Delta t \rightarrow 0$, então: $d\Gamma = dt$

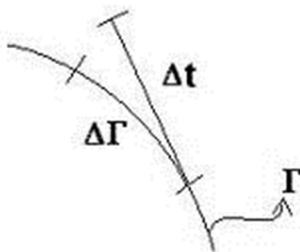


Figura 14 – Ilustração de quando $\Delta\Gamma \rightarrow 0$; $\Delta t \rightarrow 0$, temos $d\Gamma = dt$.

Pode-se verificar que:

$$\varepsilon_{tt} = \frac{dU_t(P)}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{dU_t(P)}{d\eta} \frac{d\eta}{d\Gamma} = \frac{1}{|J|} \frac{dU_t(P)}{d\eta} \quad (6.56)$$

Derivando a Eq (6.54) e substituindo-a na Eq (6.56), tem-se:

$$\varepsilon_{tt} = \frac{1}{|J|} \left[\left(\frac{dN_1}{d\eta} u_{r1}^e + \frac{dN_2}{d\eta} u_{r2}^e + \frac{dN_3}{d\eta} u_{r3}^e \right) T_1 + \left(\frac{dN_1}{d\eta} u_{z1}^e + \frac{dN_2}{d\eta} u_{z2}^e + \frac{dN_3}{d\eta} u_{z3}^e \right) T_2 \right] \quad (6.57)$$

Executando apenas uma rotação em torno do eixo θ , pode-se concluir que:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{N_1 u_{z1}^e + N_2 u_{z2}^e + N_3 u_{z3}^e}{\rho} \quad (6.58)$$

Pela Lei de Hooke tem-se:

$$\frac{\sigma_{nn}}{2\mu} = \varepsilon_{nn} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{nn} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \quad (6.59)$$

Então:

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)}{2\mu} \sigma_{nn} - \nu(\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (6.60)$$

Para os deslocamentos, é necessário realizar a rotação do vetor força para se trabalhar no sistema de coordenadas tangencial e normal. As componentes do vetor força neste sistema de coordenadas são obtidas fazendo-se o produto escalar entre o vetor força $\vec{p}(P)$ e a matriz transformação (no caso uma transformação definida por uma rotação) Tr , onde:

$$\vec{p}(P) = P_r(P) \vec{i} + P_z(P) \vec{j} + P_\theta(P) \vec{k} \quad (6.61)$$

e,

$$\text{Tr} = \begin{bmatrix} -T_2 & T_1 & 0 \\ T_1 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Logo:

$$\vec{p}_t = \vec{p} \cdot \text{Tr} = P_t(P) \vec{i} + P_n(P) \vec{j} + P_\varphi(P) \vec{k} \quad (6.63)$$

Assim para este plano de tensões, é possível montar a equação do tensor tensão. Das nove componentes, cinco já foram calculadas com os dados do vetor tensão e as outras três serão encontradas tomando-se como base as deformações e as tensões também já calculadas.

Sendo este vetor tensão $\bar{\sigma}_t$, tal que:

$$\bar{\sigma}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & \sigma_{tn} & \sigma_{t\varphi} \\ \sigma_{nt} & \sigma_{nn} & \sigma_{n\varphi} \\ \sigma_{\varphi t} & \sigma_{\varphi n} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

Através destes componentes do vetor força e como o tensor tensão é sempre simétrico, pode-se afirmar que:

$$\bar{\sigma}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & P_t & \sigma_{\varphi t} \\ P_t & P_n & P_\varphi \\ \sigma_{\varphi t} & P_\varphi & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

Completando a equação (6.60) encontra-se desta forma a deformação ε_{nn} , pois sabe-se que $\sigma_{nn} = P_n$. Tem-se:

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)}{2\mu} P_n - \nu (\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (6.66)$$

Utiliza-se a Lei de Hooke para as quatro componentes do tensor tensão restantes.

$$\sigma_{nn} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{tt} + \nu (\varepsilon_{nn} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (6.67)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu (\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{nn}) \right]$$

E para encontrar as duas componentes do tensor tensão.

$$\sigma_{tt} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{tt} + \nu(\varepsilon_{nn} + \varepsilon_{\varphi\varphi})] \quad (6.68)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu(\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{nn})] \quad (6.69)$$

Assim, deve-se desenvolver para obter a última componente de tensão que deve ser calculada $\sigma_{t\varphi}$. Todo o desenvolvimento foi feito de forma a determinar esta componente de tensão dependendo o mínimo possível do cálculo das derivadas de deslocamento. Assim, se reduzirá o erro de aproximação devido à derivação da função interpolação. Portanto, a equação matricial que transforma o tensor de deformação em coordenadas cilíndricas para o novo sistema de coordenadas.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_t \cdot T r \quad (6.70)$$

Segue a transformação dos termos necessários para obtenção de $\sigma_{t\varphi}$. Assim por multiplicação entre as matrizes teremos:

$$\varepsilon_{t\varphi} = -T_2 \varepsilon_{r\theta} + T_1 \varepsilon_{z\theta} \quad (6.71)$$

e

$$\varepsilon_{n\varphi} = -T_1 \varepsilon_{r\theta} + T_2 \varepsilon_{z\theta} \quad (6.72)$$

Segundo a Lei de Hooke, temos:

$$\varepsilon_{n\varphi} = \frac{\sigma_{n\varphi}}{2G} = \frac{P_\varphi}{2G} = T_1 \varepsilon_{r\theta} + T_2 \varepsilon_{z\theta} \quad (6.73)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{T_1} \left(\varepsilon_{z\theta} - T_2 \frac{P_\varphi}{2G} \right) \quad (6.74)$$

No caso de $T_1 = 0$, deve-se utilizar a equação (6.71).

$$\varepsilon_{t\varphi} = -T_2 \varepsilon_{r\theta} \quad (6.75)$$

Assim $\sigma_{t\varphi}$ em função de apenas uma derivada de deslocamento:

Se $T_1 \neq 0$

$$\sigma_{t\varphi} = \frac{G}{T_1} \left[\frac{\delta u_\theta}{\delta z} - T_2 \frac{P_\varphi}{G} \right] \quad (6.76)$$

E se $T_1 = 0$

$$\sigma_{t\varphi} = -GT_2 \left[\frac{\delta u_\theta}{\delta r} - T_2 \frac{u_\theta}{\rho} \right] \quad (6.77)$$

CAPÍTULO 7

DESCRIÇÃO E FUNCIONAMENTO DO SOFTWARE DE CALCULO

7 DESCRIÇÃO DO SOFTWARE

O software desenvolvido por STIKAN [33] e utilizado neste trabalho é composto inicialmente por um arquivo principal denominado **USEPIJS.F90** que se subdivide em três sub-rotinas escritas na linguagem Fortran versão 90.

```

PROGRAM base1
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  CALL INPUT(INFB)
  CALL MATRX(INFB)
  CALL SLENFO
  CALL OUTPUT
  STOP
END

SUBROUTINE INPUT(INFB)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  COMMON /A1/ IDP(400), DP(400), SE, NH, RD, ST(400), E, PO
  COMMON /A2/ B(2,2), C(400), X(400), Y(400), ZT(400,400), S
  AATX(400), AAPSI(400), VLANDA(400), WY(400,400)
  COMMON /A3/ II(20), V(20), C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C22, C23
  COMMON /A5/ IP(400), N92, ST, CO, IMP, SF
  COMMON /A6/ C5, C10, C11
  CHARACTER*8 TITLE(8)
  CHARACTER*20 ARGENT, ARGOUT
  IEC=5
  IMP=6
  WRITE(*, '(A,)', ' INFORME SOBRE DO ARQUIVO DE ENTRADA-->')
  READ(*, '(A20)', 'ARGENT')
  OPEN(IEC, FILE=ARGENT)
  WRITE(*, '(A,)', ' INFORME SOBRE DO ARQUIVO DE SAIDA ---->')
  READ(*, '(A20)', 'ARGOUT')
  OPEN(IMP, FILE=ARGOUT)
  WRITE(IMP, 1)
1  FORMAT (1H1, /1H, '*** METODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURHO *** &
  ' //, 1X, '*** PARA PROBLEMAS PLANOS DE ELASTICIDADE ***')
  READ(IEC, 150) TITLE
150 FORMAT (10A4)
  WRITE(IMP, 250) TITLE
  
```

Figura 15 – Tela do Fortran f90 – Três subrotinas do arquivo USEPIJS.f90

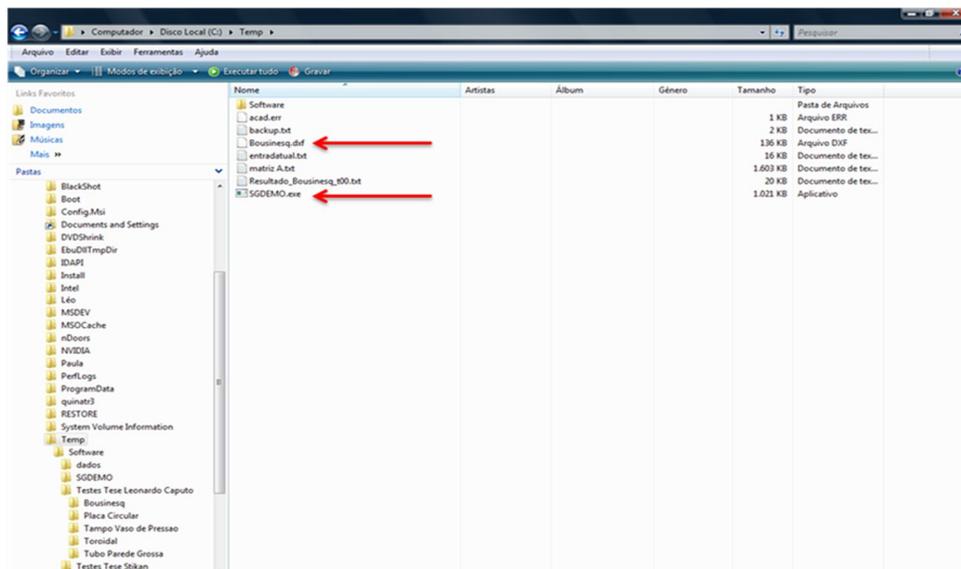


Figura 16 – Arquivos da geometria a ser lida e arquivo executável do software.

O software lê os dados da geometria do corpo a ser analisado a partir de um arquivo com extensão dxf que pode ser gerado em qualquer versão do AutoCad. A geometria deve ser criada em duas dimensões (2D), obedecendo o eixo de revolução nas coordenadas (0,0), além de todas as definições e condições para axysimetria conforme Capítulo 2.

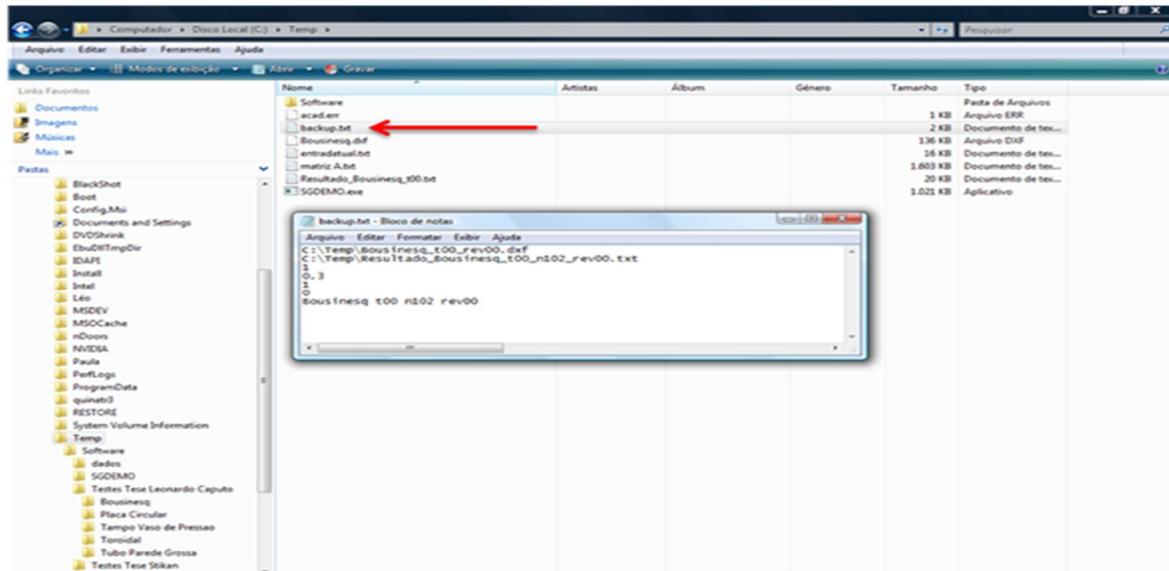


Figura 17 – Arquivobackup.txt instruções dos dados de entrada.

No arquivo backup.txt estão escritas as informações necessárias para o software ler a geometria a ser analisada, o nome do arquivo de saída e o local onde será gravado, o valor do coeficiente de Poisson a ser utilizado, o módulo de elasticidade que será utilizado, o peso específico e títulos do arquivo de trabalho. Em sua programação o software consegue gravar todas as condições de carregamento, condições de contorno e os números de elementos no arquivo da geometria utilizado. Porém, cabe ressaltar que após qualquer nova gravação no arquivo todos os dados com as condições iniciais de contorno serão apagados e deverão ser inseridas novamente.

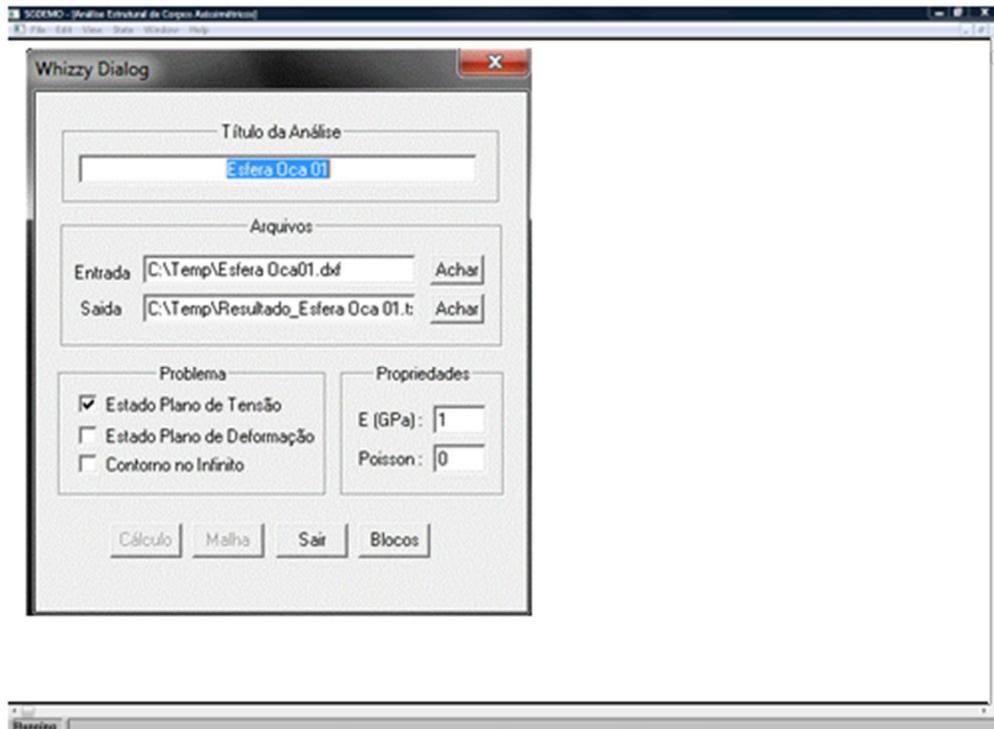


Figura 18 – Tela inicial do software.

Na Figura 18 podemos observar a tela inicial do software com as definições feitas no arquivo backup.txt. Pode-se escolher entre problemas no estado plano de tensões, estado plano de deformações e ainda se o contorno esta no infinito para geometrias maciças.

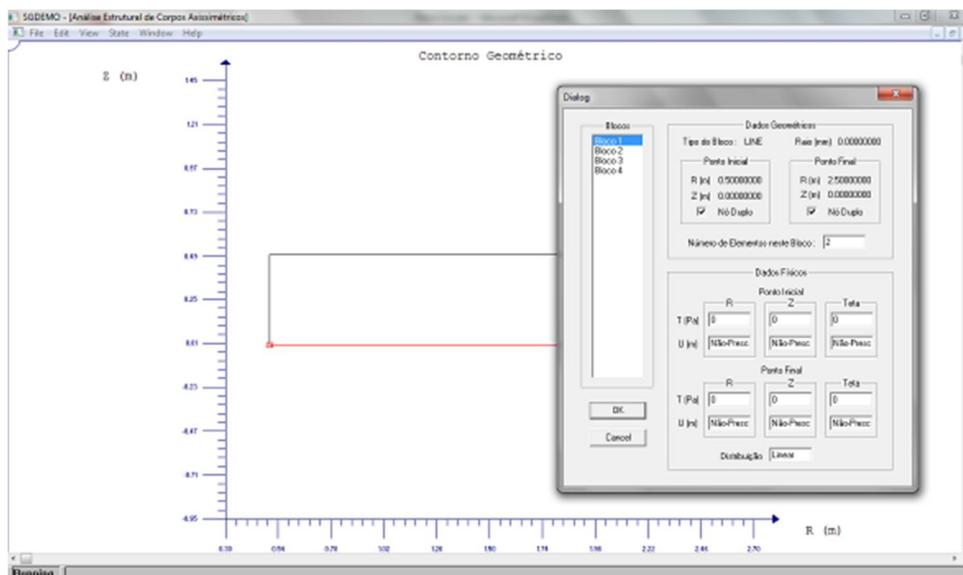


Figura 19 – Tela do software com as condições de contorno.

A entrada das condições de contorno para os pontos iniciais e finais da geometria é inserida através da opção “Blocos”. Através da caixa “Dialog”, é possível inserir as variáveis de T(Pa) e U(m), para as coordenadas R, Z e θ para os pontos iniciais e finais de cada bloco da geometria. O Software ainda possui a opção de utilização de nós duplos e de elementos lineares ou quadráticos para a solução dos problemas.

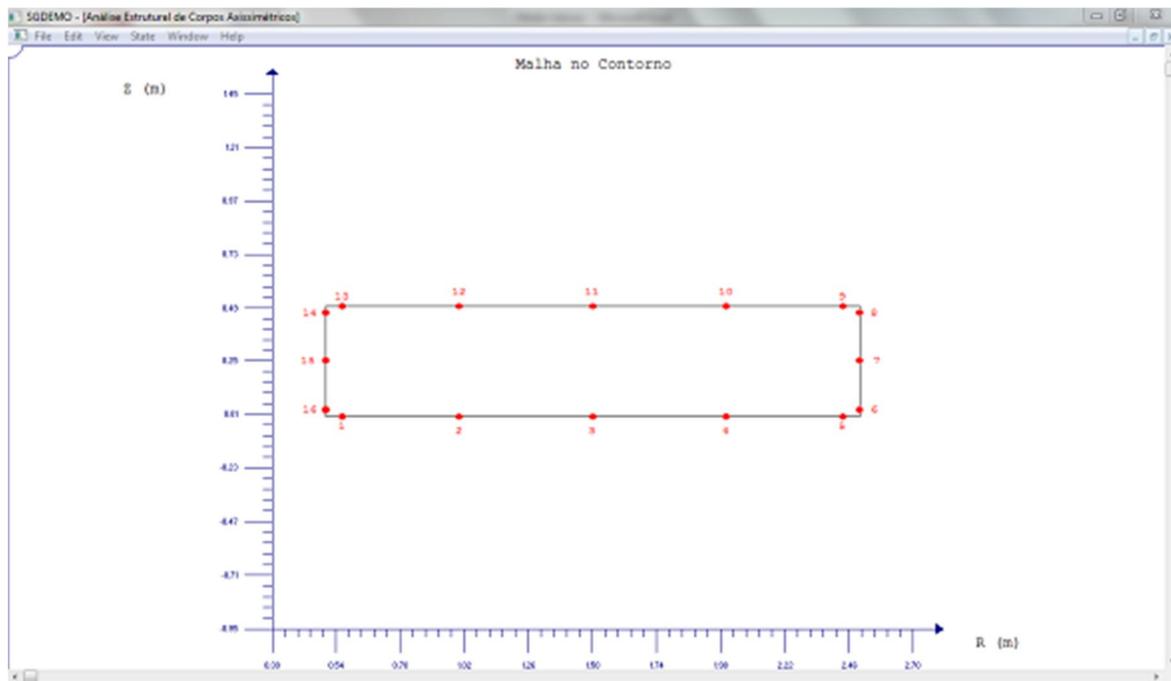


Figura 20 – Tela do software com apresentação da malha gerada de 16 elementos.

Existe a opção de visualização da malha gerada, através do botão “malha”. Esta opção é importante para avaliação visual da distribuição dos nós através do contorno da geometria em análise, assim como de sua ordem de numeração, fundamental para análise da direção do vetor normal σ_n na geometria. Além disto, se torna mais fácil a visualização do ponto em análise na geometria em questão.

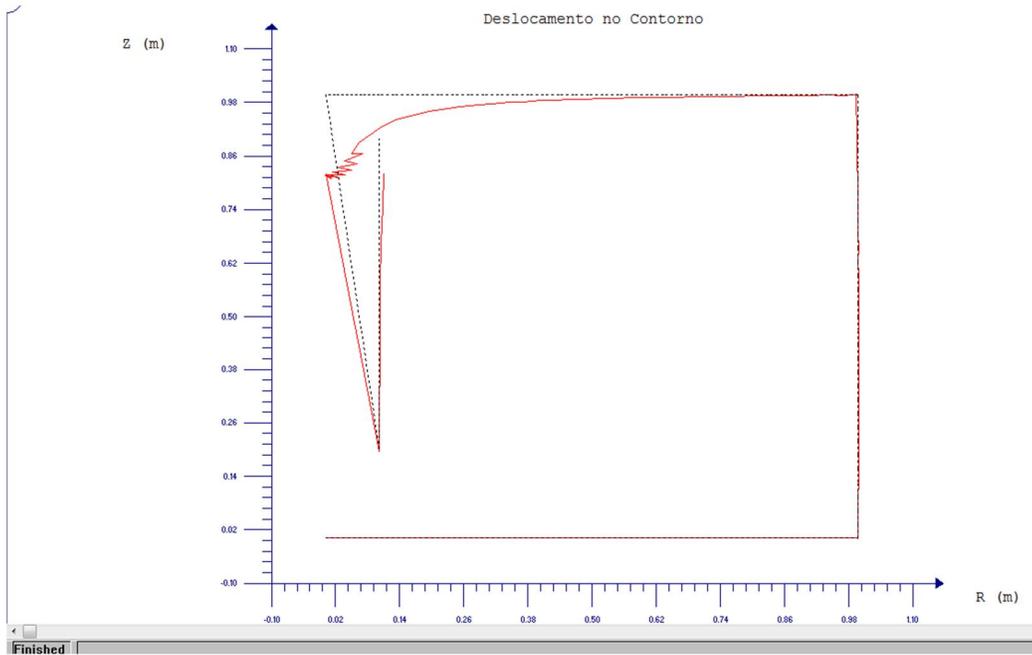


Figura 21 – Tela do software com apresentação dos deslocamentos.

O software possui uma interface gráfica para apresentação dos resultados de deslocamento da geometria analisada, porém esta interface é muito simplificada e não pode ser utilizada como resultado confiável da simulação, serve apenas como ilustração do cálculo numérico.

Resultado_Placa Circular_05_2_05_n16 - Bloco de notas

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

TRACAOES			
NO	Pr	Pz	Pteta
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	-1.0000	0.0000
10	0.0000	-1.0000	0.0000
11	0.0000	-1.0000	0.0000
12	0.0000	-1.0000	0.0000
13	0.0000	-1.0000	0.0000

VALORES PROCESSADOS						
DESLOCAMENTOS E FORÇAS DE CONTORNO						
NO	U	V	W	Pr	Pz	Pteta
1	21.067101	-8.463056	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	-43.285274	-52.293574	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	-18.200509	-137.740026	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	-39.805240	-201.675527	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	-70.691739	-276.230400	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
6	-79.503624	-276.009495	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
7	0.280640	246.512126	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
8	30.078572	-276.285804	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
9	21.298479	-276.988412	0.000000	0.000000	-1.000000	0.000000
10	40.229147	-201.948460	0.000000	0.000000	-1.000000	0.000000
11	18.562561	-137.987533	0.000000	0.000000	-1.000000	0.000000
12	43.422796	-52.567460	0.000000	0.000000	-1.000000	0.000000
13	-70.920418	-8.624934	0.000000	0.000000	-1.000000	0.000000
14	0.000000	0.000000	0.000000	-71.333486	-444.145642	0.000000
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.102379	240.465578	0.000000
16	0.000000	0.000000	0.000000	70.351085	-444.853208	0.000000

DESLOCAMENTOS E TENSÕES NOS PONTOS INTERNOS										
PT	U	V	W	Srr	Srz	Srfi	Szz	Szfi	Sfifi	SI
1	0.2106710E+02	-0.8463056E+01	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.2084186E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	-0.4328527E+02	-0.5229357E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.4925652E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	-0.1820051E+02	-0.1377400E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1368066E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
4	-0.3980524E+02	-0.2016755E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.8672777E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
5	-0.7069173E+02	-0.2762304E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.7084143E+01	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
6	-0.2806401E+00	-0.2465523E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
7	0.2129848E+02	-0.2769884E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.7679258E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.1000000E+01	0.0000000E+00
8	0.4022915E+02	-0.2019485E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.7077743E+01	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.1000000E+01	0.0000000E+00
9	0.1856256E+02	-0.1379875E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.8648620E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.1000000E+01	0.0000000E+00
10	0.4342279E+02	-0.5256746E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.1363662E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.1000000E+01	0.0000000E+00
11	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.4920364E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.1000000E+01	0.0000000E+00
12	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.7133349E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2140005E+02	0.0000000E+00
13	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.1022790E+03	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.2068359E-01	0.0000000E+00
14	-0.8890739E+01	-0.5659114E+01	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.3191510E+02	-0.1266570E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2846335E+02	0.0000000E+00
15	-0.3787296E+01	-0.2323190E+01	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.6922266E+01	-0.1552137E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1633945E+02	0.0000000E+00
16	0.3806272E+01	-0.2357102E+01	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.7041963E+01	-0.1559542E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.1696483E+02	0.0000000E+00
17	0.8923779E+01	-0.5767691E+01	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.3211578E+02	-0.1277512E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.2927338E+02	0.0000000E+00

Figura 22 – Arquivo gerado de resultados na extensão txt.

Ao executar a função “cálculo”, o software gera um arquivo txt com todas as informações referentes às condições de contorno, carregamentos, número e coordenadas dos pontos internos, deslocamentos, forças no contorno e tensões nos pontos internos. Através destes dados é possível compará-los com os dados obtidos através das fórmulas analíticas e verificar o seu grau de aproximação para avaliação dos resultados.

CAPÍTULO 8

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

8 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A seguir apresentam-se três casos analisados onde os resultados obtidos através do método do elemento de contorno são confrontados com seus respectivos resultados analíticos.

8.2 PLACA CIRCULAR

Uma placa circular pode ter sua conformação geométrica representada de forma simplificada quando se considera uma superfície de revolução, exatamente como está representado na figura 22.

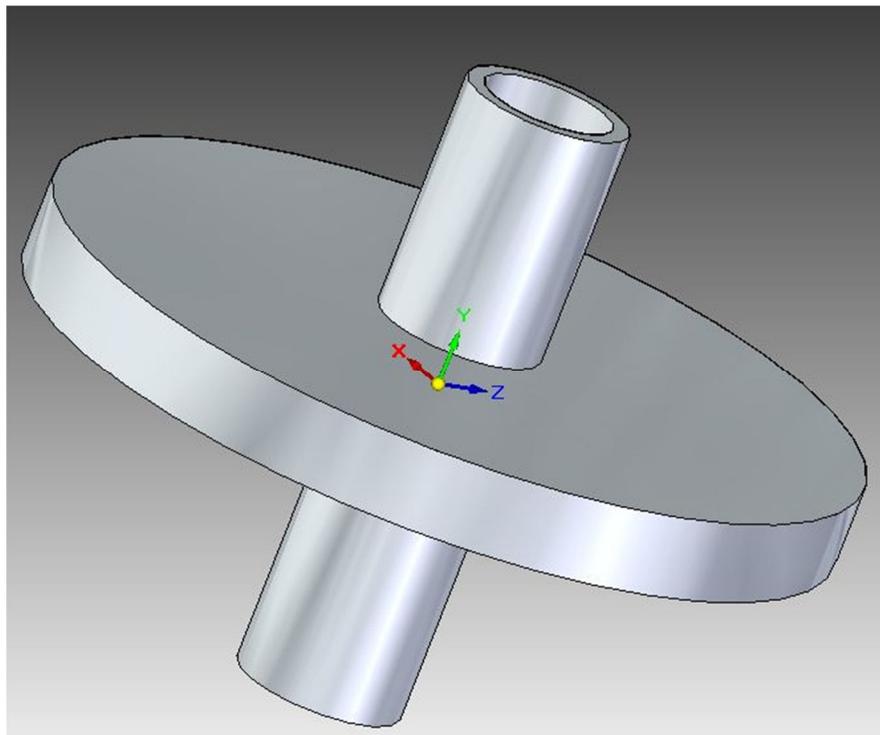


Figura 23 – Placa Circular que será submetida a um carregamento distribuído sobre sua superfície.

Além da simples representação geométrica, a identificação da superfície de revolução traz enormes benefícios computacionais ao cálculo por caracterizar-se matematicamente como um problema axissimétrico, desde que o carregamento aplicado e as restrições impostam também o sejam. Através da utilização das fórmulas desenvolvidas por TIMOSHENKO [24], tem-se como solução analítica do problema as seguintes expressões, dadas em função das principais dimensões da placa circular:

$$\sigma_{max} = k \cdot \frac{q \cdot a^2}{h^2} \quad (8.01)$$

$$W_{max} = k_1 \cdot \frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3} \quad (8.02)$$

Nas figuras que se seguem, mostram-se sucessivamente: a seção de revolução da placa (Figura 23); a seção em corte, considerando-se a placa engastada num eixo concêntrico (Figura 24); e uma vista esquemática da placa circular sob carregamento uniformemente distribuído, destacando-se a extremidade externa livre de restrições ao seu deslocamento na direção do eixo x (Figura 25).

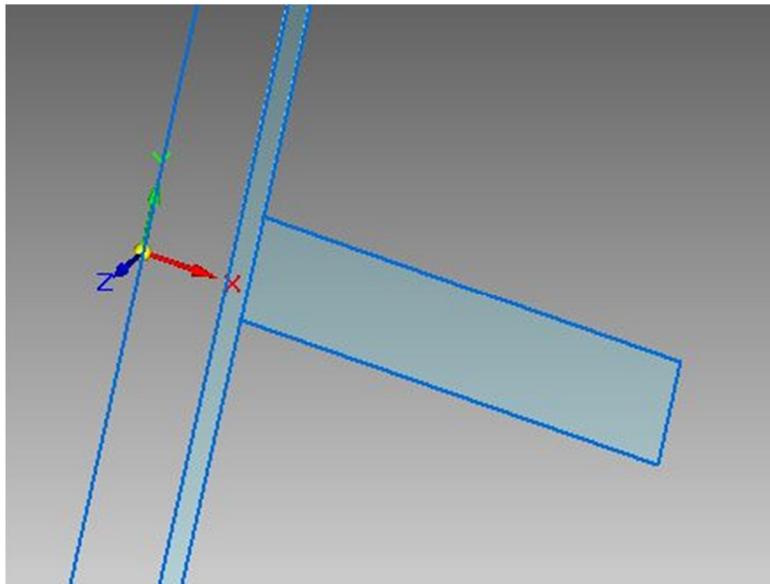


Figura 24 – Seção de revolução da Placa Circular.

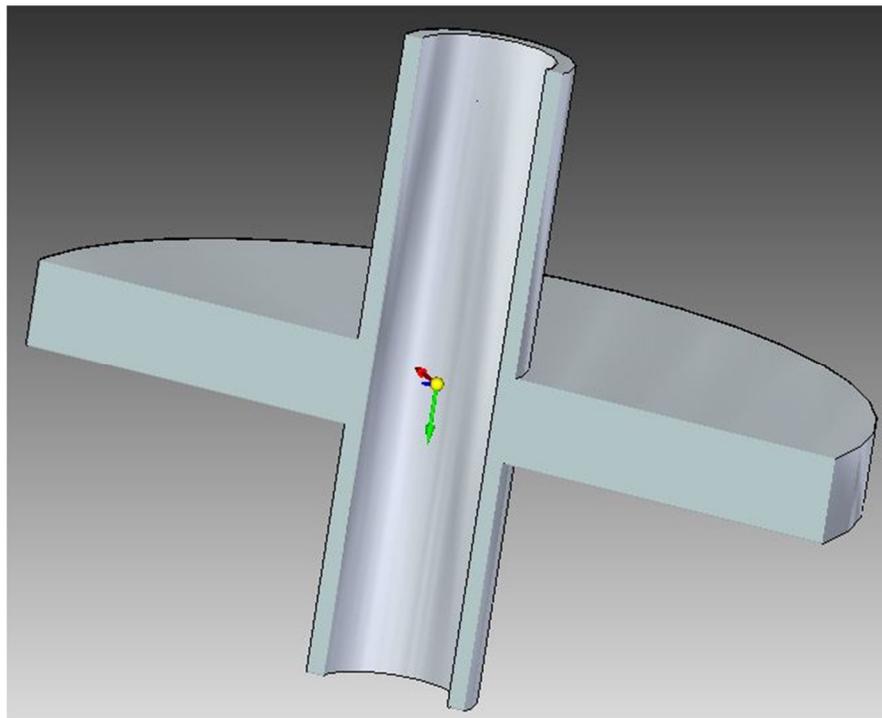


Figura 25 – Seção em corte da Placa Circular.

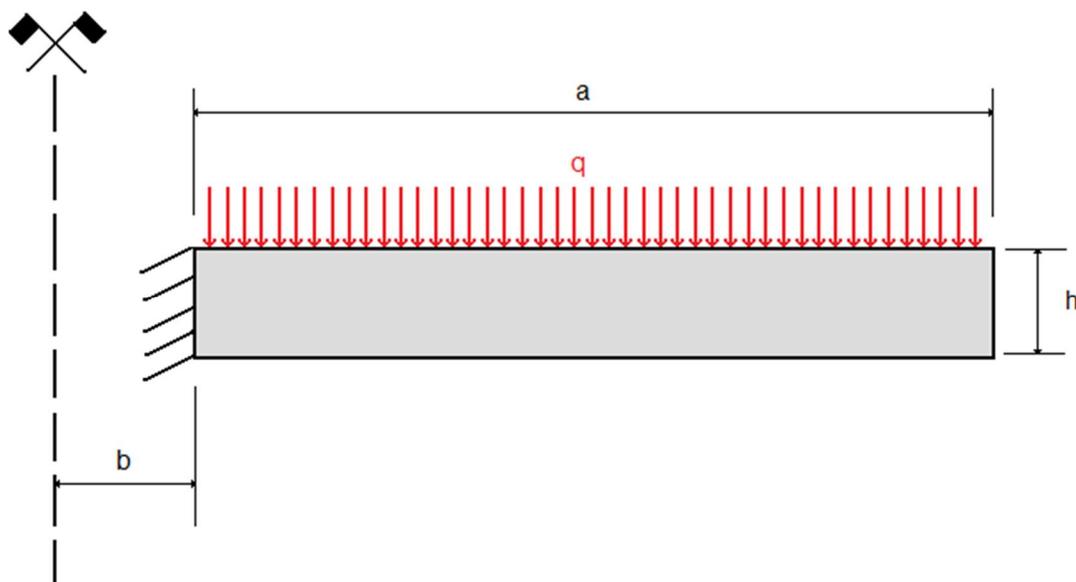


Figura 26 – Modelo simplificado, considerando uma placa circular com carregamento q distribuído, adequadamente representada pela sua seção de revolução.

Nesta primeira aplicação, considera-se uma placa circular, de comprimento igual a “ a ”, espessura igual a “ h ” e uma distância do eixo de revolução igual a “ b ”, submetida a um carregamento de valor unitário “ q ” em sua superfície. Na figura 26, em que se apresenta um esboço da geometria escolhida, a região hachurada representa o engastamento na parte interna ao eixo de revolução.

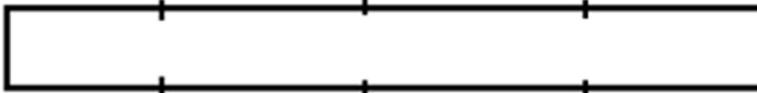
Os modelos adotados para serem resolvidos pelo Método dos Elementos de Contorno consideraram a discretização do contorno consistindo de 6, 10, 18, 34, 36, 46 e 48 elementos quadráticos, com 16, 28, 40, 76, 78, 98 e 100 pontos nodais. Os elementos não possuem todos o mesmo tamanho. A sua distribuição foi realizada conforme ilustrado na figura 27 e 28. Na figura 28 não foram tracejados os elementos devido à quantidade dos mesmos, que serão apresentados em figuras retiradas do próprio programa de solução.

Para o caso da espessura de 0,1 m, nas simulações que utilizaram 76 e 100 pontos nodais, a distribuição no engaste e na ponta da placa circular foi simulada utilizando apenas um elemento de contorno, para obtenção de melhor resultado final.

6 Elementos



10 Elementos



18 Elementos

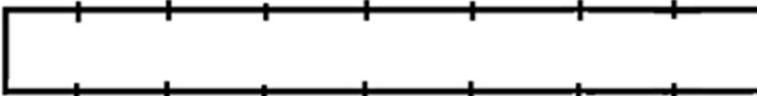


Figura 27 – Ilustração da distribuição dos elementos ao longo do contorno conforme o refinamento da malha utilizada na simulação: malhas menos refinadas.

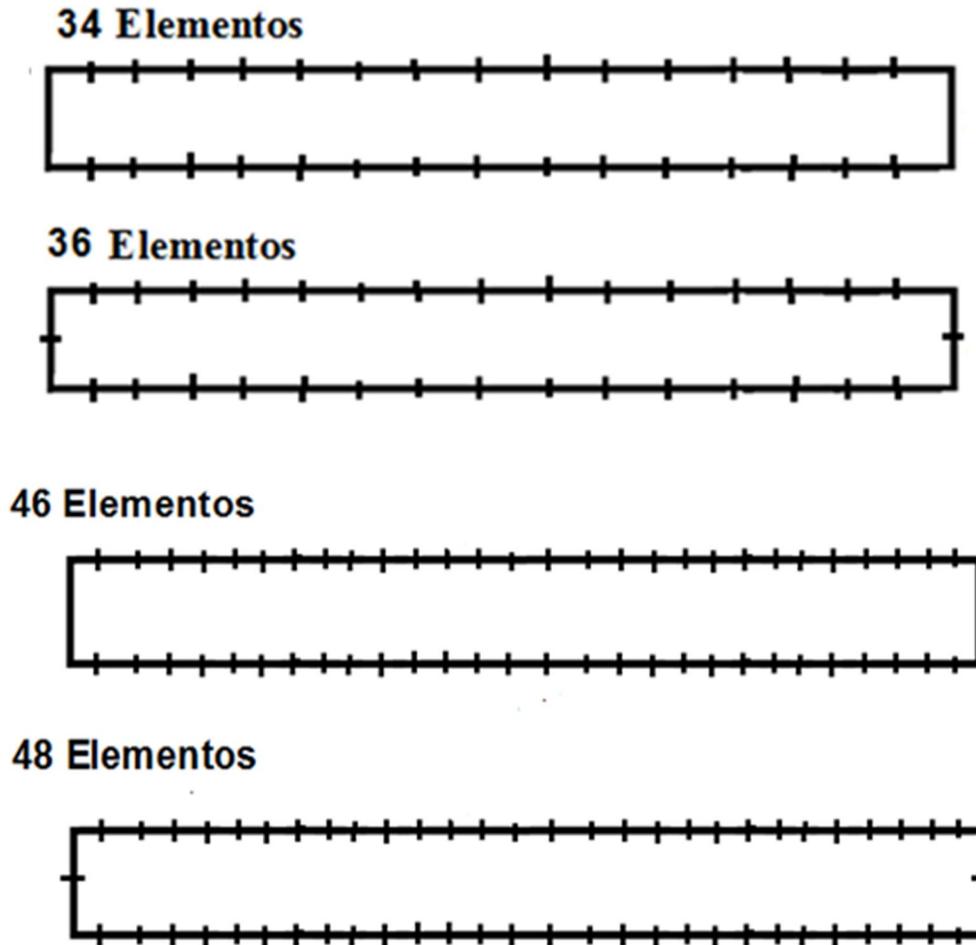


Figura 28 – Ilustração da distribuição dos elementos ao longo do contorno conforme o refinamento da malha utilizada na simulação: malhas mais refinadas.

Serão apresentadas a seguir nas figuras 29, 30 e 31 as malhas geradas para as simulações realizadas respectivamente para as espessuras de 0,5, 0,25 e 0,1 m. Nestas são destacadas os pontos nodais referentes aos elementos quadráticos empregados.

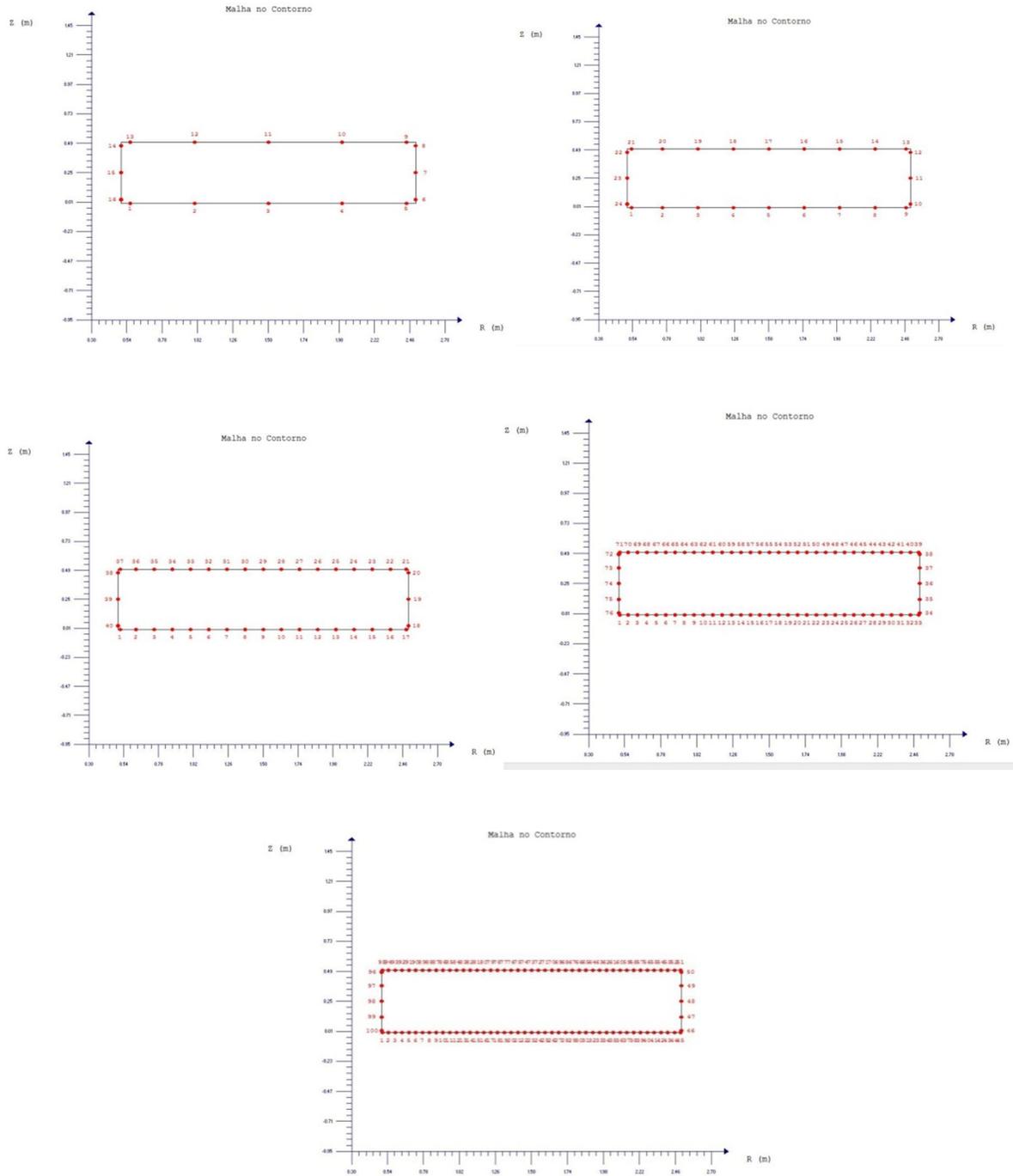


Figura 29 – Malhas geradas para Placa Circular com espessura de 0,5 m com 16, 28, 40, 78 e 100 pontos nodais.

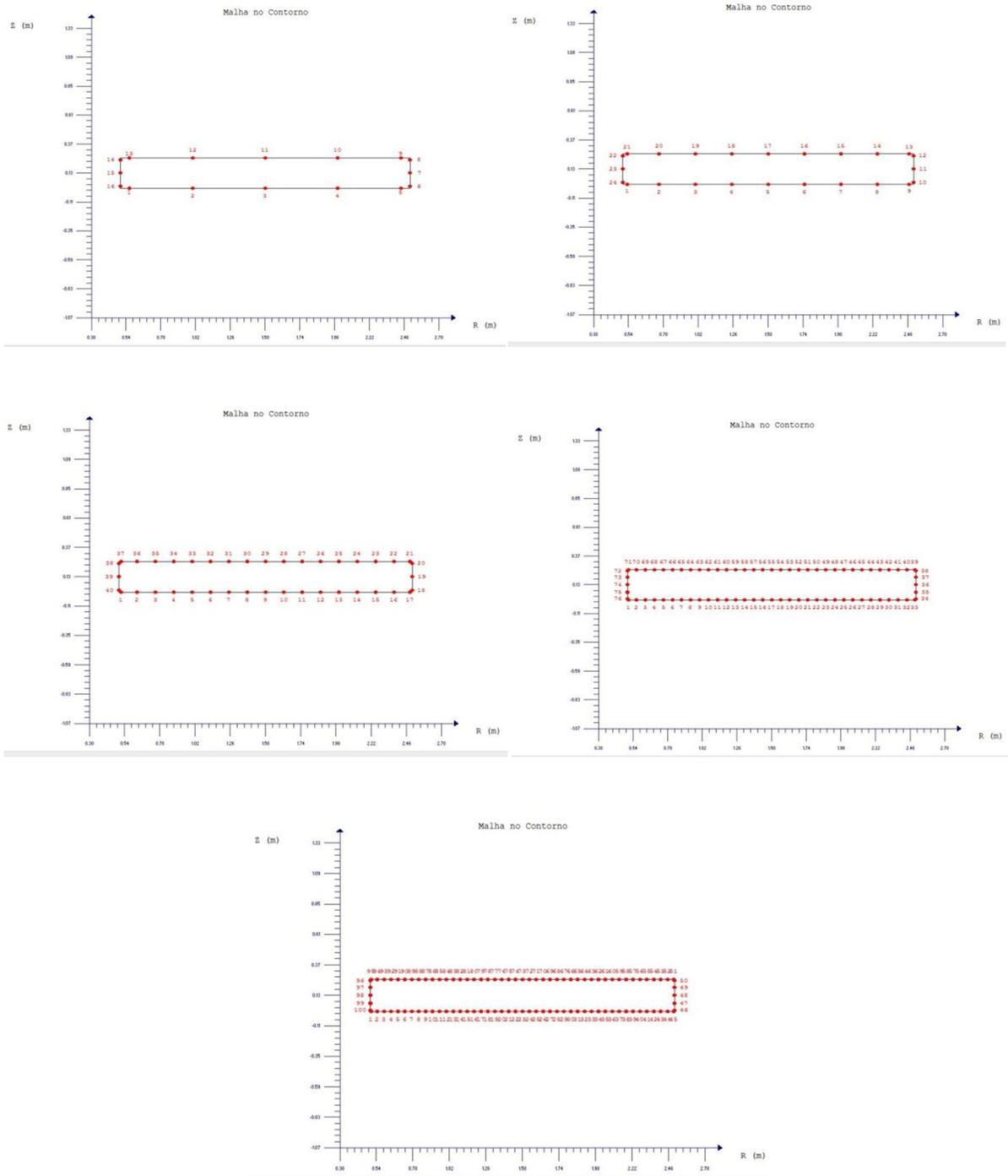


Figura 30 – Malhas geradas para Placa Circular com espessura de 0,25 m com 16, 24, 40, 76 e 100 pontos nodais.

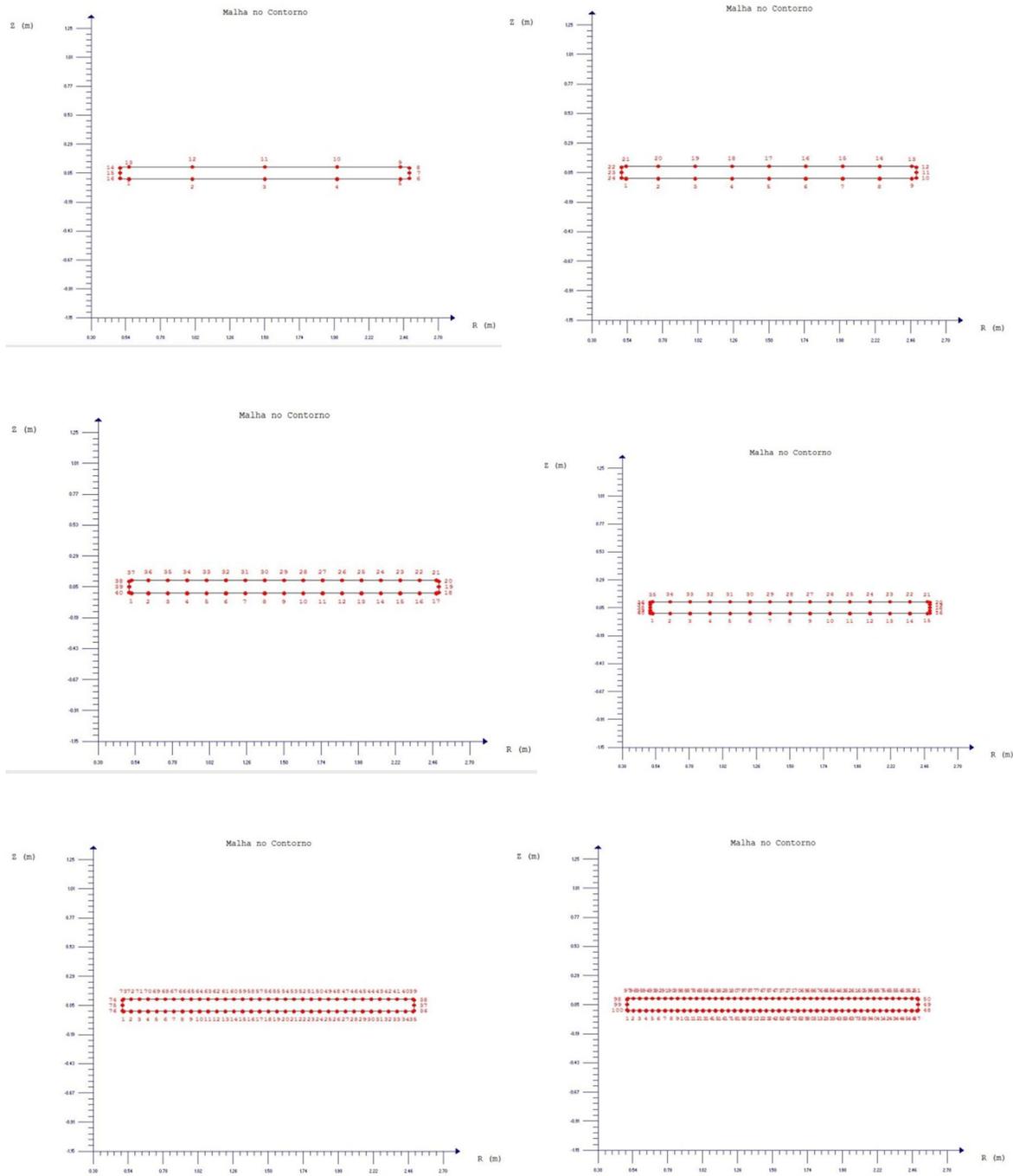


Figura 31 – Malhas geradas para Placa Circular com espessura de 0,1 m com 16, 28, 40, 78 e 100 pontos nodais.

Para o presente cálculo foram adotados os seguintes valores referentes às grandezas físicas e geométricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 2.5 \text{ m}; & \mathbf{b} &= 2 \text{ m}; & \mathbf{h} &= 0,5 \text{ m}/0,25\text{m}/0,1\text{m}; \\ \mathbf{a/b} &= 5; & \mathbf{k} &= 3,69; & \mathbf{v} &= 0,3; & \mathbf{E} &= 1,0 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Nas grandezas físicas anteriormente expostas, E significa o módulo de elasticidade longitudinal ou de Young e ν é o coeficiente de Poisson. Uma vez que a solução apresentada por TIMOSHENKO [24] é utilizada como solução de referência, tem-se, neste caso, o carregamento tipo 2 (extremidade livre de um lado e engastamento noutra) de modo que nos cálculos analíticos foi empregado:

$$\mathbf{k1} = 0,564$$

Para melhor avaliar o comportamento do MEC, foi simulado o mesmo problema empregando-se diversas relações a/h , de modo que torne a placa mais esbelta. Essa alteração favorece a maior representatividade do modelo analítico de Timoshenko; por outro lado, em princípio, desfavorece o emprego do MEC, pois o método funciona melhor quanto maior for a relação entre o domínio e o contorno do problema a ser resolvido.

Ressalta-se que, rigorosamente a solução apresentada por Timoshenko é uma solução unidimensional, ou seja, considera-se a placa como uma estrutura axissimétrica representada por um eixo neutro, perpendicular ao eixo de revolução, a partir do qual são aplicadas hipóteses cinemáticas e dinâmicas relativas à distribuição das deformações e tensões. No caso, é empregada a hipótese mais simples, que é a hipótese de Saint Venant. Assim, é de se esperar que os resultados numéricos e analíticos não sejam completamente concordantes, mas apresentem relativas similaridades, particularmente no caso de placas mais delgadas.

As tabelas numeradas de 1.1 a 1.6 a seguir apresentam comparações entre a solução analítica do problema e a solução obtida pelo método, utilizando os parâmetros mencionados anteriormente para as espessuras variando entre 0,5, 0,25 e 0,1 metros. Nestas foram apresentados relacionados à flecha máxima, que ocorre na extremidade livre, referente à superfície média. Diferentes discretizações foram empregadas e seus resultados são apresentados em conjunto, para se avaliar a tendência de convergência entre os resultados.

Tabela I. Flechas máximas: $W_{\max}(m)$ para espessura de 0,5.

Nº de Elementos	Deslocamento MEC	Deslocamento Analítico	Erro %
16	273,62	176,25	35,59
24	244,21	176,25	27,83
40	223,23	176,25	21,05
76	221,98	176,25	20,60
100	222,18	176,25	20,67

Erro Médio: 25,15%

Tabela II. Tensão no Engaste: $\sigma_{\max}(Pa)$ para espessura de 0,5.

Nº de Elementos	Tensão MEC	Tensão Analítica	Erro %
16	70,84	92,25	30,22
24	97,28	92,25	5,17
40	94,22	92,25	2,09
76	111,95	92,25	17,59
100	112,23	92,25	17,80

Erro Médio: 14,53%

Tabela III. Flechas máximas: $W_{\max}(m)$ para espessura de 0,25.

Nº de Elementos	Deslocamento MEC	Deslocamento Analítico	Erro %
16	1259,77	1410	11,93
24	1757,45	1410	19,77
40	1915,56	1410	26,39
76	1633,62	1410	13,69
100	1635,12	1410	13,77

Erro Médio: 17,11%

Tabela IV. Tensão no Engaste: $\sigma_{\max}(Pa)$ para espessura de 0,25.

Nº de Elementos	Tensão MEC	Tensão Analítica	Erro %
16	303,62	369	21,53
24	384,48	369	4,03
40	400,20	369	7,80
76	424,11	369	12,99
100	427,37	369	13,66

Erro Médio: 12,00%

Tabela V. Flechas máximas: $W_{\text{máx}}(m)$ para espessura de 0,1.

Nº de Elementos	Deslocamento MEC	Deslocamento Analítico	Erro %
16	--	--	--
24	43574,99	22031,25	49,44
40	19850,91	22031,25	10,98
40 (2)	23731,70	22031,25	7,17
76	28344,30	22031,25	22,27
100	25587,26	22031,25	13,90

Erro médio: 20,75%

Tabela VI. Tensão no Engaste: $\sigma_{\text{máx}}(\text{Pa})$ para espessura de 0,1.

Nº de Elementos	Tensão MEC	Tensão Analítica	Erro %
16	--	--	--
24	2717,91	2306,25	15,15
40	2134,73	2306,25	8,03
40(2)	2656,40	2306,25	13,18
76	2545,91	2306,25	9,41
100	2373,99	2306,25	2,85

Erro Médio: 9,72%

Com relação aos deslocamentos, pode-se perceber que os resultados referentes aos apresentam concordância satisfatória. Considerando as malhas empregadas, o erro médio percentual saiu de 25,15% com placa mais espessa, reduziu-se para 17,11 % com a placa de espessura intermediária e ampliou-se para 20,75% na espessura mais delgada. Entretanto, essa impressão de não convergência deve ser melhor avaliada. Isto porque os modelos empregados são bem distintos e é preciso ressaltar as simplificações contidas na solução analítica empregada, que não podem ser ignoradas na análise dos resultados. O modelo empregado na teoria unidimensional tem maior consistência no caso da espessura da placa mais delgada. Para espessuras grandes com relação ao comprimento, a teoria é imprecisa. Assim, no caso da espessura delgada, caso se ignore o resultado obtido com a malha mais pobre, que nessa situação desfavorece a aplicação do MEC, o erro médio cairia para 13,58% demonstrando uma maior concordância entre a solução numérica e o modelo teórico. Melhor ainda seria eliminar o refinamento nas finas arestas horizontais efetuadas na malha de 40 nós para essa espessura mais reduzida (usaram-se dois elementos de contorno), pois implicou

num aumento do erro, pois introduziu discrepâncias acentuadas entre o tamanho dos elementos de contorno empregados nas arestas horizontais e nas verticais.

No caso das tensões, mesmo sem eliminar os resultados referentes à malha mais grosseira no caso da espessura de 0,1m os resultados numéricos mostraram globalmente melhor convergência. Isto porque os erros médios caíram de 14,5% no caso da maior espessura, para 12% na espessura intermediária; e, finalmente, caíram para 9,72% no caso da placa mais delgada, que é aquele em que a teoria é mais precisa.

Numa análise localizada dos resultados das tensões para as simulações de cada espessura, nota-se que o refinamento produziu resultados distintos. Houve erros menores e certa convergência com o refinamento da malha, desconsiderando os efeitos referentes à introdução de elementos com tamanho discrepante nas arestas horizontais. Para as demais espessuras, o erro cresceu com o refinamento. A questão aqui mais uma vez está relacionada à precisão do modelo analítico. Sabe-se que sua precisão para a determinação das tensões é bem menor do que para os deslocamentos, pois o modelo analítico não representa adequadamente a distribuição das tensões no engaste, que é admitida linear, o que não é verdade para placas espessas. Como agravante, os efeitos das tensões cisalhantes não é computado. Logo, o modelo teórico é menos preciso quanto mais espessa é a placa. Assim, o fato dos resultados numéricos não convergirem para os analíticos nesse caso não é um fator tão grave.

Por outro lado, no que tange à solução numérica via MEC, sabe-se que a equação integral para deslocamentos é bem mais simples do que a expressão similar para determinação das tensões que, conforme visto anteriormente, envolve derivadas de funções elípticas e derivadas de segunda ordem. Isso exige mais do modelo numérico. Nas malhas mais pobres também se esperam resultados mais imprecisos devido ao uso de um único elemento de contorno em cada uma das arestas verticais em algumas malhas. Se na região do engaste foi usado um único elemento para representar todo o campo de tensões a ser calculado, o que pode resultar em baixa precisão, na outra extremidade, o uso de um único elemento pode introduz rigidez excessiva na estrutura da placa, interferindo negativamente nos resultados.

Em linhas gerais, pode-se perceber que isoladamente o fato de se resolver estruturas esbeltas pode reduzir a precisão do MEC, mas não de modo pronunciado. O problema maior consiste no uso de elementos com diferentes dimensões nessas mesmas condições de esbeltez: a conjugação desses dois efeitos de fato interfere na boa qualidade dos resultados.

Para melhor ilustrar a concordância dos resultados numéricos entre si e também mostrar o comportamento das grandezas físicas simuladas pelo MEC são reproduzidos as curvas referentes à distribuição das tensões normais axiais ao longo do engaste.

Percebe-se claramente a identificação de um ponto de tensão nula, refletindo a existência de uma linha neutra e a procedência das hipóteses usualmente empregadas nas Teorias de Placas com relação ao ponto de tensão normal nula.

Mesmo o resultado para a malha com 16 elementos, que apresentou erro médio percentual destoante com relação ao comportamento das demais malhas, apresenta relativa concordância visual com as demais.

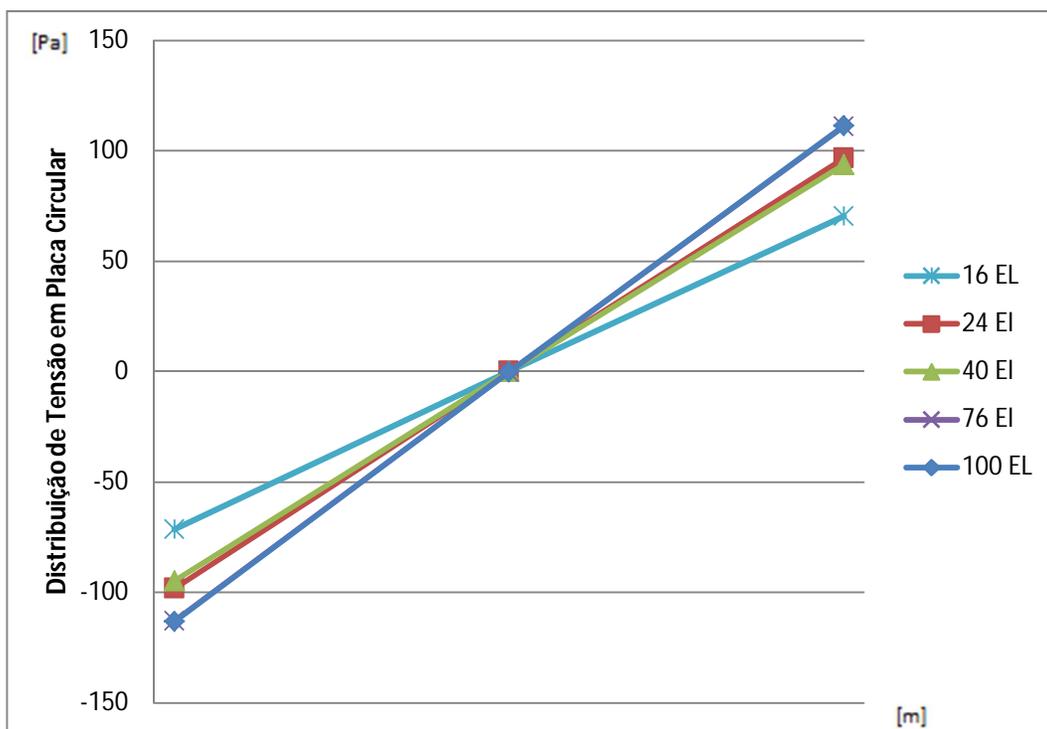


Figura 32 – Gráfico ilustrando o comportamento da tensão para espessura de 0,5.

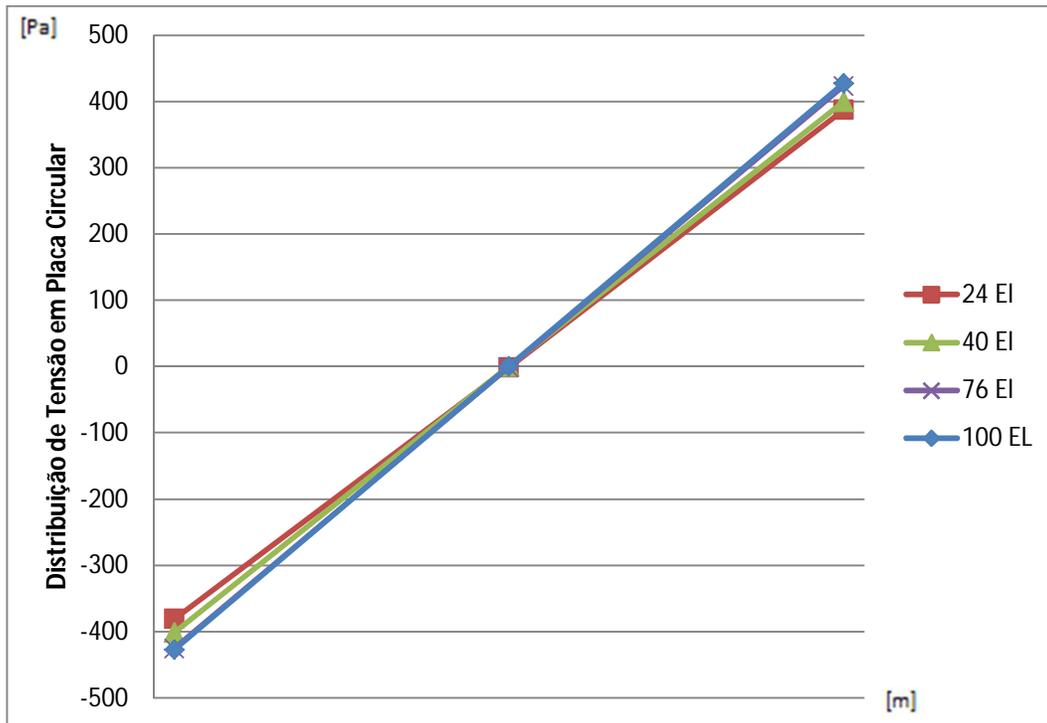


Figura 33 – Gráfico ilustrando o comportamento da tensão para espessura de 0,25.

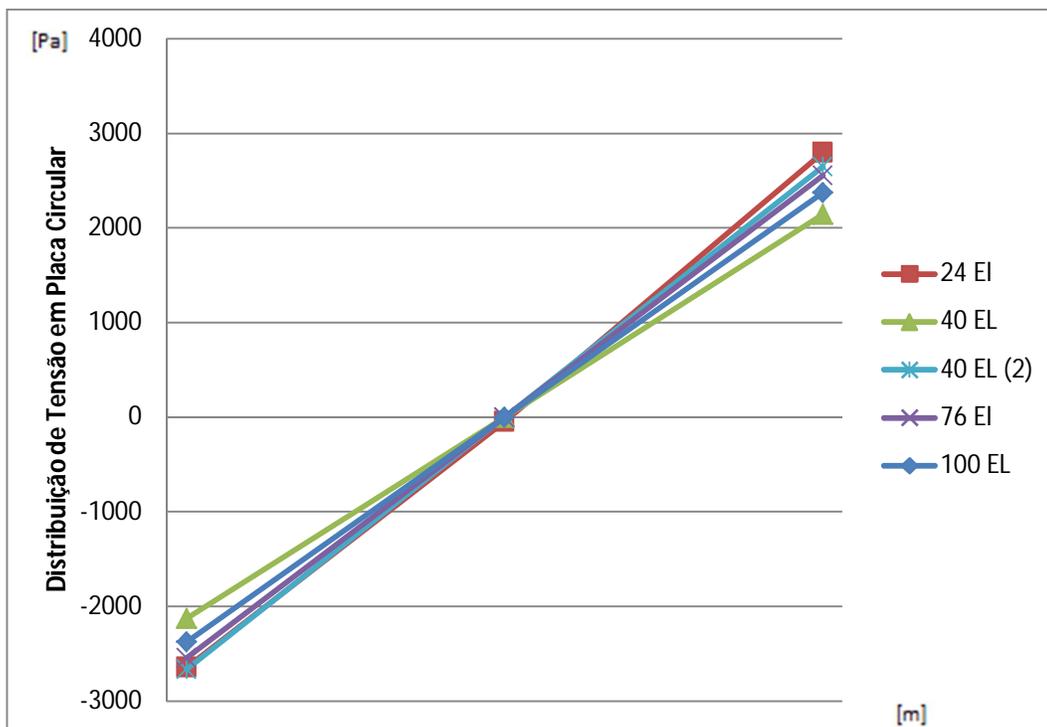


Figura 34 – Gráfico ilustrando o comportamento da tensão para espessura de 0,1.

Também para melhor ilustrar a concordância dos resultados numéricos entre si e também mostrar o comportamento dos deslocamentos ao longo do comprimento da placa, são mostradas as flechas calculadas para as diversas discretizações.

Nas malhas mais ricas observam-se saltos nos valores de deslocamento próximos aos cantos, efeito típico observado com o MEC nas mais diversas aplicações, ou seja, pontos de canto sempre apresentam maiores erros, mesmo no caso do emprego de nós duplos, conforme foi o caso. Esse efeito, todavia, não é mostrado explicitamente nos gráficos que se seguem, nos quais foi tomada a média dos valores dos deslocamentos quando se plota o valor referente ao deslocamento na extremidade livre.

Apresentam-se a seguir os gráficos com a distribuição de deslocamento ao longo do comprimento na placa circular para as espessuras de 0,5, 0,25 e 0,1.

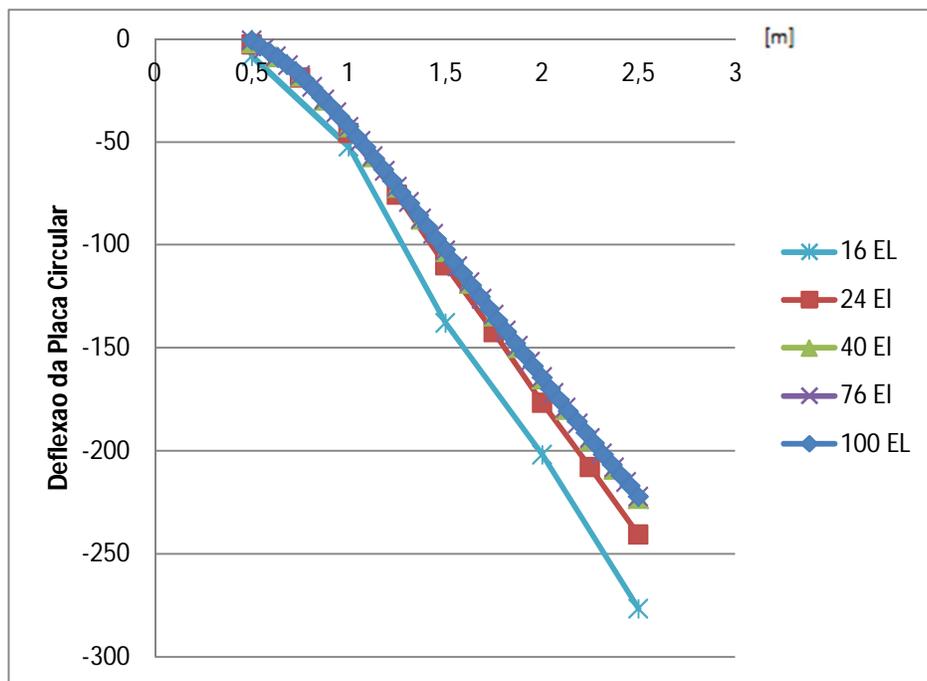


Figura 35 – Gráfico ilustrando a deflexão da placa para a espessura de 0,5.

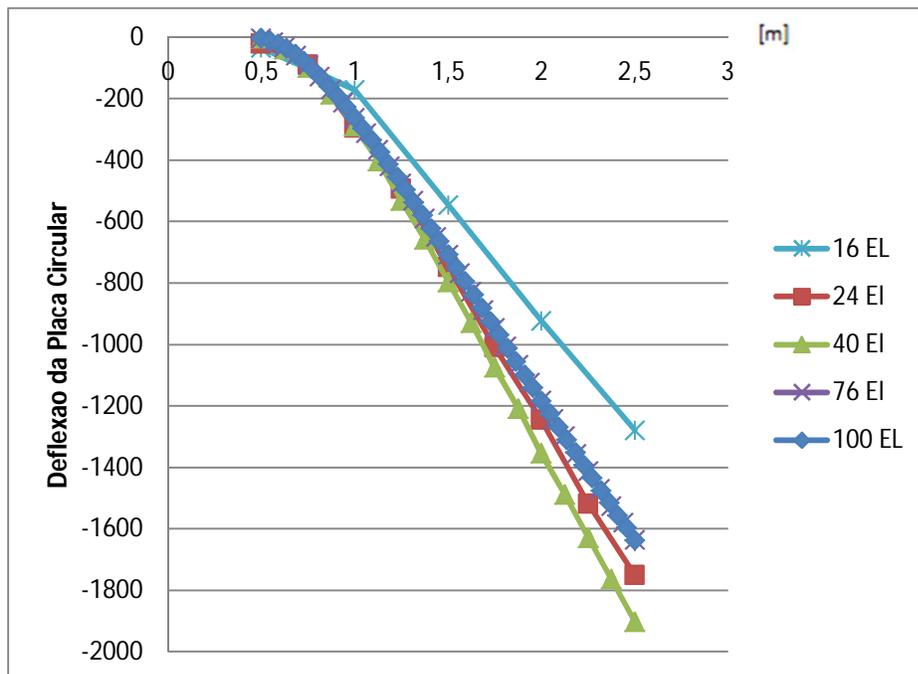


Figura 36 – Gráfico ilustrando a deflexão da placa para a espessura de 0,25.

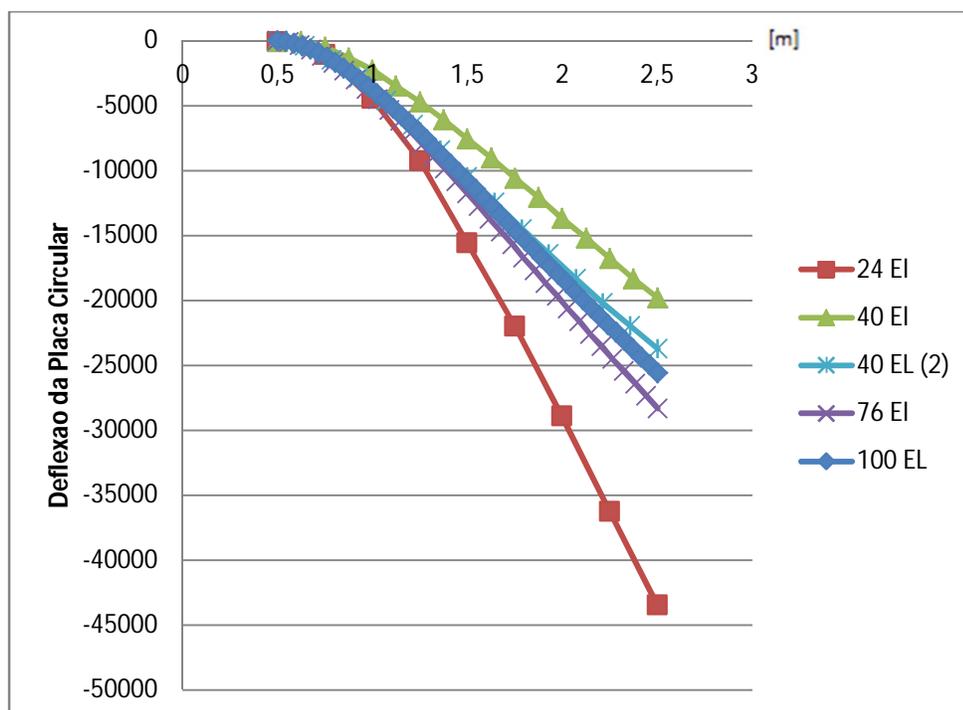


Figura 37 – Gráfico ilustrando a deflexão da placa para a espessura de 0,1.

8.3 PROBLEMA DE BOUSSINESQ

Neste segundo exemplo, tem-se o problema de Boussinesq, cujo detalhamento pode ser encontrado em TIMOSHENKO [24] e ROBERT LITTLE [22]. O problema consiste na solução analítica da distribuição do campo de tensão gerado por uma carga concentrada através de uma geometria tridimensional, como indicado na figura 37.

Para ajustar o problema de Boussinesq no contexto dos problemas axissimétricos, idealiza-se uma carga concentrada sendo aplicada em um ponto de um meio tridimensional, mais precisamente uma semi-esfera. Assim, é possível identificar uma seção de revolução e tratar o problema como axissimétrico.

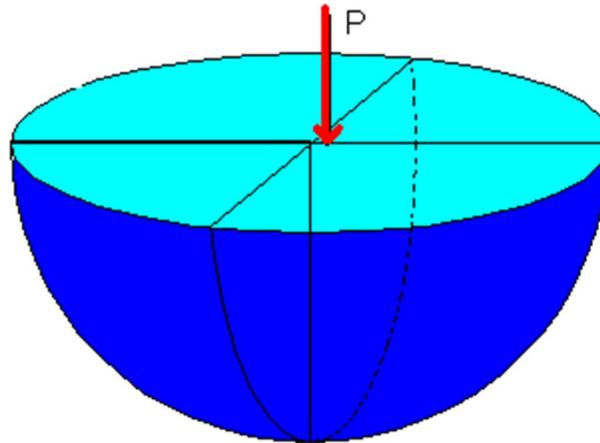


Figura 38 – Representação Geométrica do problema de Boussinesq, destacando a região de revolução e o carregamento concentrado.

Estudos matemáticos devidos ao próprio Boussinesq apresentaram distribuições de tensões σ_{rr} , σ_{rz} , σ_{zz} e $\sigma_{\theta\theta}$ dadas pelas seguintes formulas analíticas, expressas em função das variáveis P , z , e r :

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{3r^2z}{R^5} - \frac{(1-2\nu)}{R^2+Rz} \right\} \quad (8.03)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{3P}{2\pi} * \frac{Prz^2}{R^5} \quad (8.04)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{3P}{2\pi} * \frac{z^3}{R^5} \quad (8.05)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi} \left\{ \frac{-z}{R^3} + \frac{1}{R^2+Rz} \right\} \quad (8.06)$$

Nas expressões precedentes, tem-se:

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (8.07)$$

Para solução do problema teste, foram utilizados os seguintes valores:

$$P = 1 \text{ [Pa];}$$

$$\nu = 0,3;$$

$$r = 0,1 \text{ [m]}$$

Na figura 39 mostra-se esquematicamente o modelo axissimétrico adotado para utilização do MEC. A carga concentrada é representada por uma carga distribuída em uma pequena região situada próxima do eixo de revolução. Naturalmente, um erro é cometido nessa representação da carga concentrada por uma carga distribuída num pequeno setor; no entanto, com o refinamento da malha espera-se uma representação cada vez mais próxima da solução analítica, especialmente para os pontos do interior distantes do ponto de aplicação da carga, devido ao Princípio de Saint Venant. O posicionamento dos pontos internos e sua ordem de numeração varia entre o eixo de coordenadas das fórmulas analíticas e o eixo de coordenadas r, z dos resultados apresentados pelo software. Esta variação na ordem de numeração é melhor ilustrada através das figuras 39 e 40.

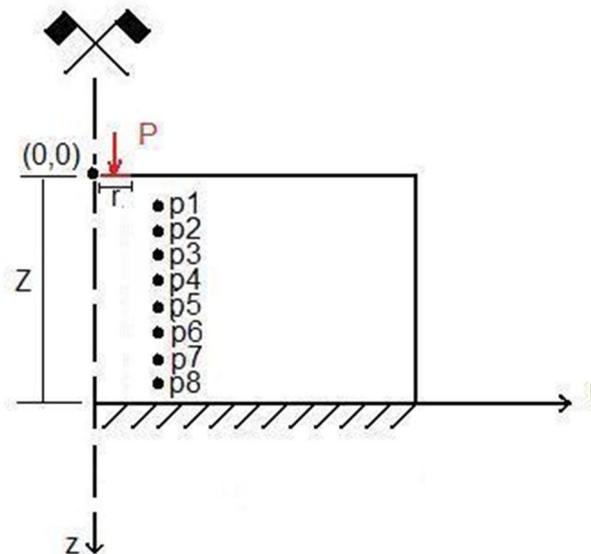


Figura 39 – Modelo simplificado, considerando uma seção retangular com carregamento P distribuído em uma região de comprimento r numerado conforme fórmulas analíticas colhidas pela literatura.

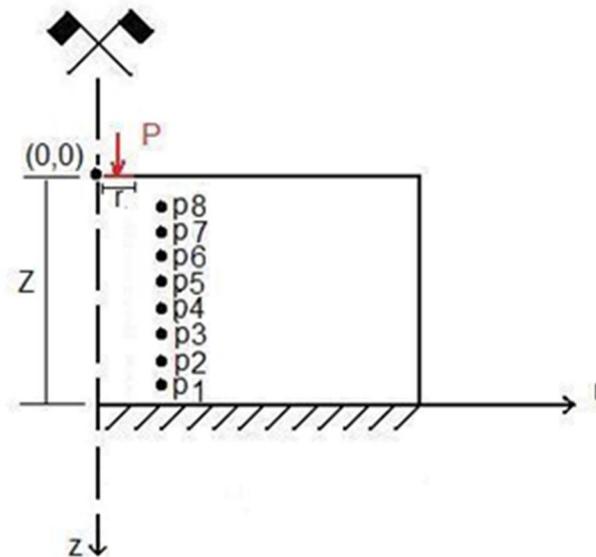


Figura 40 – Modelo simplificado, considerando uma seção retangular com carregamento P distribuído em uma região de comprimento r numerado conforme coordenadas utilizadas pelo software.

Conforme já citado anteriormente, deve-se atentar para a diferença nas coordenadas geométricas entre a formulação analítica de Boussinesq e a utilizada pelo software, pois na formulação analítica o primeiro ponto interno tem as coordenadas r e z $(0,1;0,1)$ enquanto na entrada de dados do programa computacional o mesmo ponto possui as coordenadas $(0,1;0,9)$. Este fato é muito importante, pois o sentido da numeração dos nós utilizado pelo software indica a direção do vetor normal unitário.

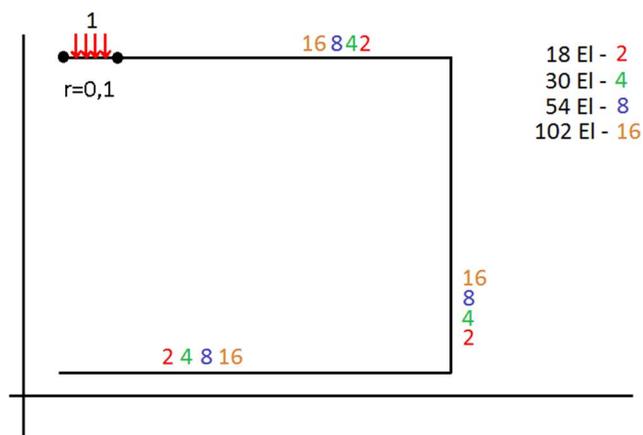
Como pode se perceber nas figuras 39 e 40, os valores foram tomados internamente, utilizando as coordenadas dos oito pontos internos da geometria analisada, onde a variável z real da geometria numérica foi transformada para a coordenada z de Boussinesq.

Na tabela VII apresentam-se os valores analíticos das tensões normais radiais, circunferenciais, longitudinais e cisalhantes, referentes ao estado axissimétrico atuante no interior do corpo finito. Naturalmente, uma vez que o modelo de Boussinesq admite o meio infinito, algum erro deve também ser observado na parte inferior da seção de revolução quando esses valores forem comparados com os resultados analíticos. Assim, como na parte superior a carga numérica não é concentrada, e na parte inferior tensões de sustentação devem ser geradas pela delimitação da malha, os pontos de melhor comparação dos resultados analíticos e numéricos devem se situar na parte central do modelo discreto.

Tabela VII. Cálculo Analítico das variáveis σ_{rr} , σ_{rz} , σ_{zz} e $\sigma_{\theta\theta}$.

Calculo Analítico								
r	Z Progr ama	z coord. fórmula	R	P	σ_{rr}	σ_{rz}	σ_{zz}	$\sigma_{\theta\theta}$
0,1	0,9	0,1	0,141421356	1	6,576043	8,440714402	-8,4407144	0,386186037
0,1	0,8	0,2	0,223606798	1	1,036163	3,416560972	6,83312194	0,466736458
0,1	0,7	0,3	0,316227766	1	0,126274	1,358928805	4,07678642	0,277266451
0,1	0,6	0,4	0,412310563	1	-0,029800	0,641138526	-2,5645541	0,173227478
0,1	0,5	0,5	0,509901951	1	-0,054370	0,346306652	1,73153326	0,116475041
0,1	0,4	0,6	0,608276253	1	-0,052218	0,206420291	1,23852174	0,083101824
0,1	0,3	0,7	0,707106781	1	-0,045078	0,132350402	0,92645281	0,062062604
0,1	0,2	0,8	0,806225775	1	-0,037948	0,089712049	0,71769639	-0,04802604

As figuras 40, 41 e 42, ilustram a quantidade e a forma de distribuição dos elementos nos contornos da geometria para o problema de Boussinesq. Na região de aplicação de carga foi utilizado apenas um elemento de contorno. Foram executadas simulações utilizando 18, 30, 54 e 102 elementos de contorno utilizando nos duplos nos cantos e em suas extremidades.

Figura 41 – Distribuição dos elementos no contorno para $r=0,1$.

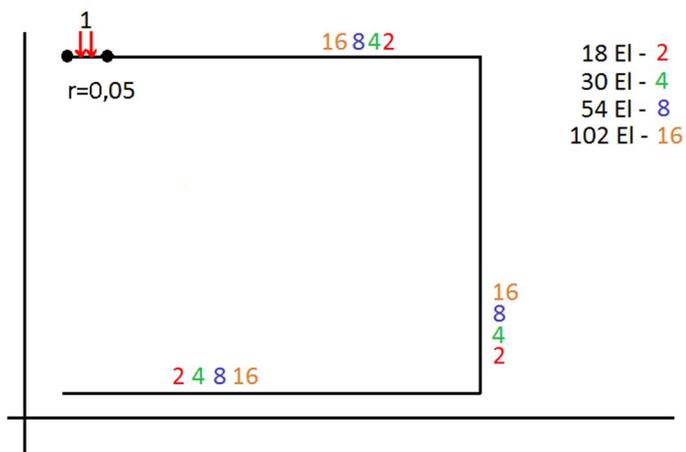


Figura 42 – Distribuição dos elementos no contorno para $r=0,05$.

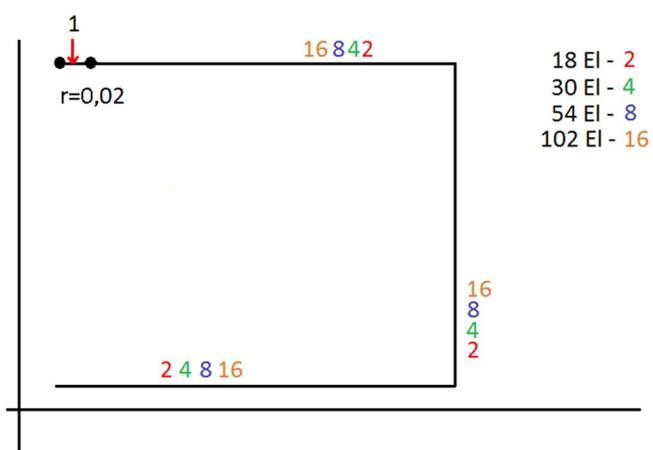


Figura 43 – Distribuição dos elementos no contorno para $r=0,02$.

As figuras 44 a 55 mostram o posicionamento dos pontos nodais nas malhas geradas para os casos simulados para o problema de Boussinesq.

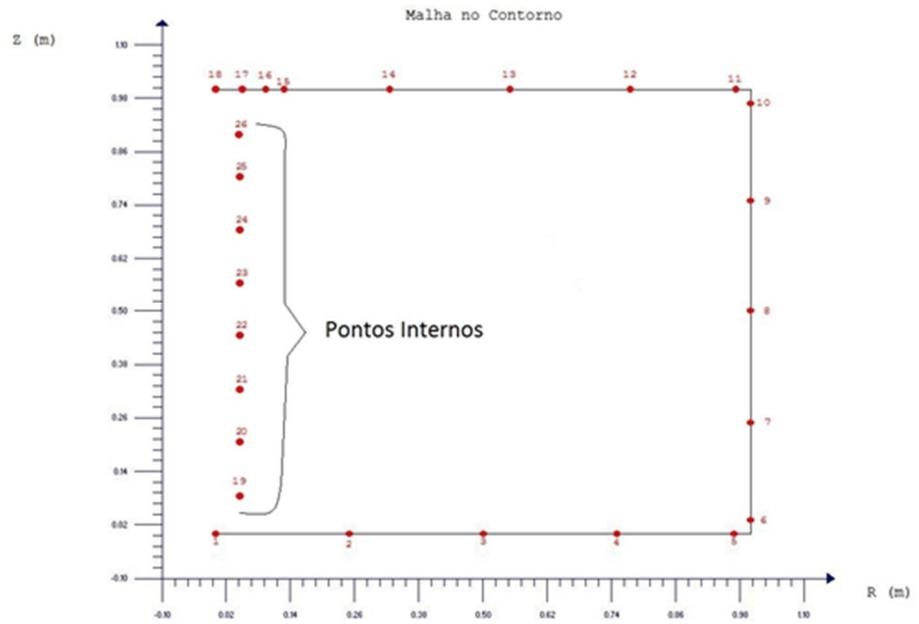


Figura 44 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 18 nós e $r=0,1$.

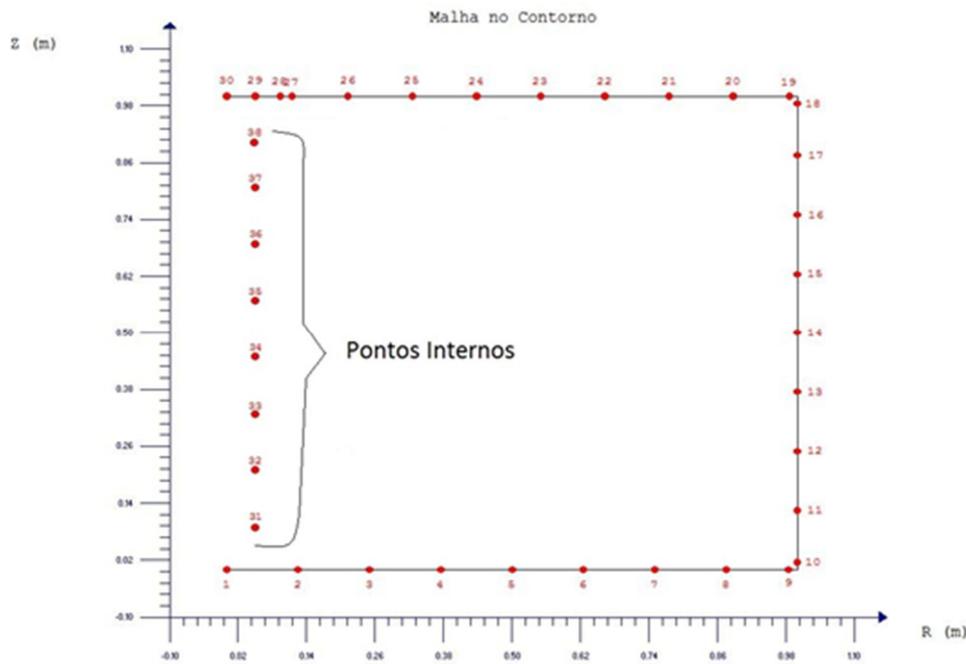


Figura 45 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 30 nós e $r=0,1$.

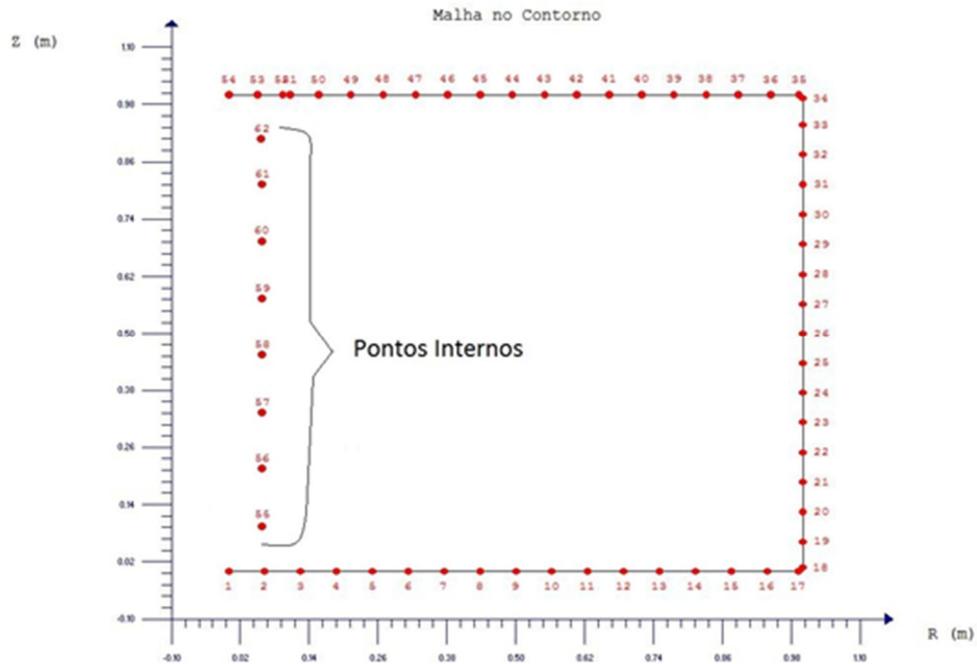


Figura 46 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 54 nós e $r=0,1$.

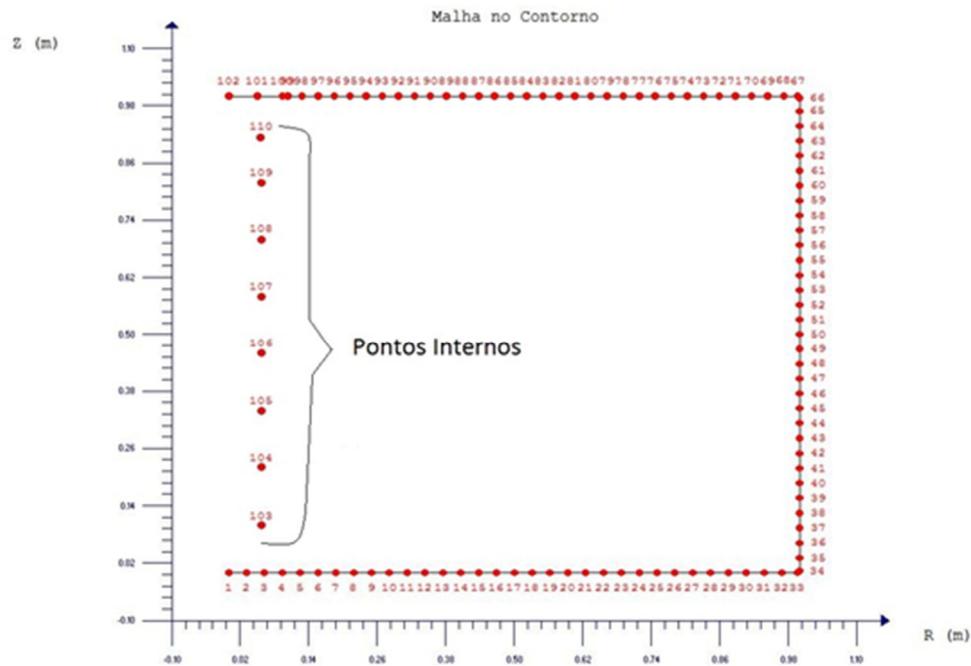


Figura 47 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 102 nós e $r=0,1$.

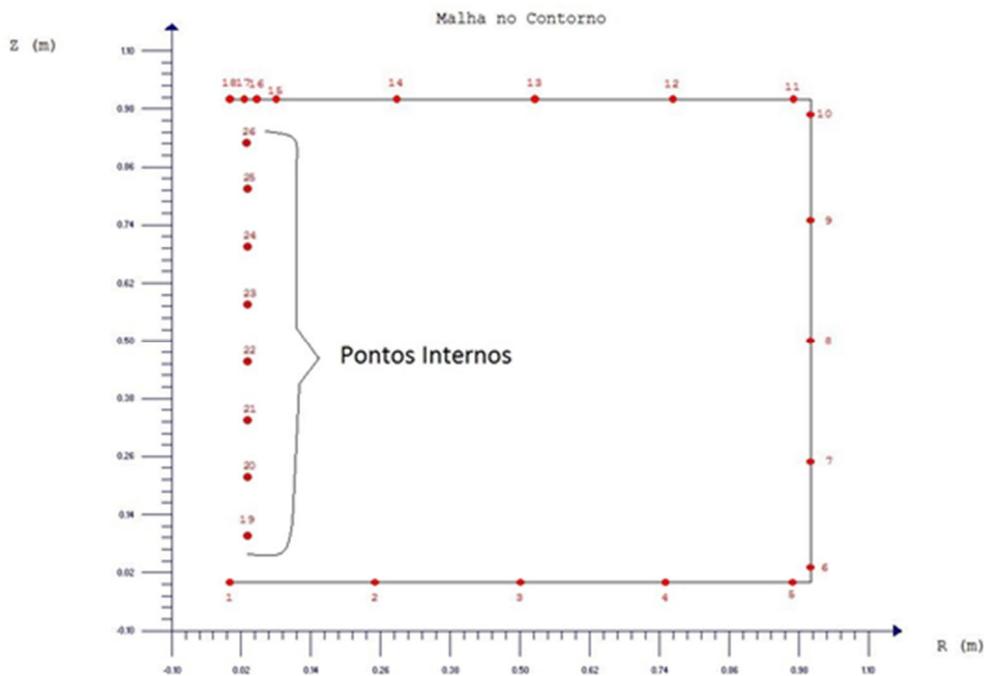


Figura 48 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 18 nós e $r=0,05$.

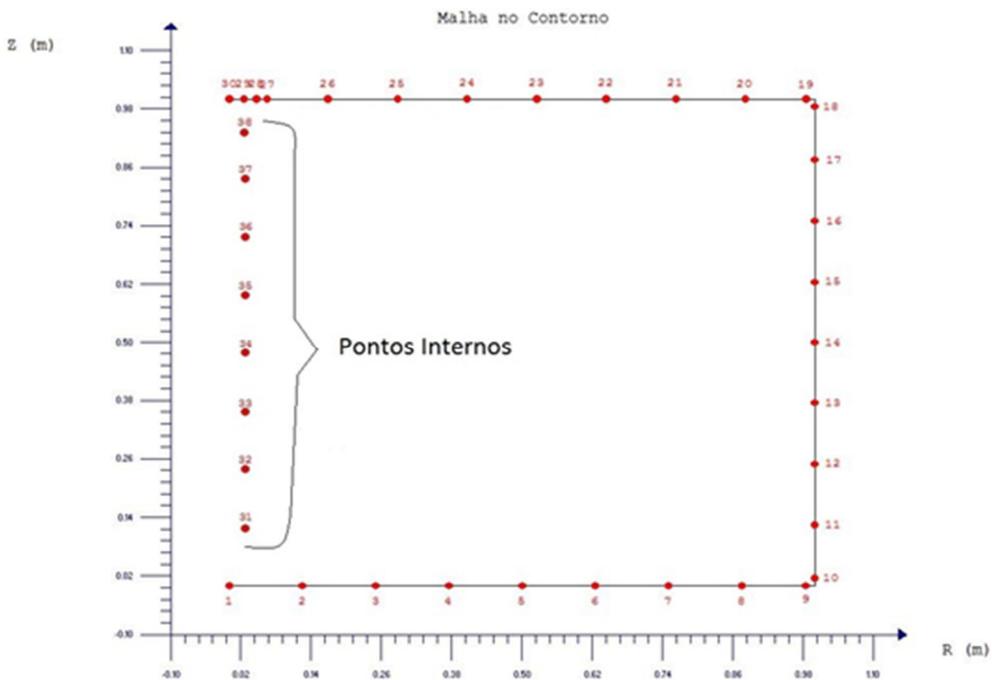


Figura 49 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 30 nós e $r=0,05$.

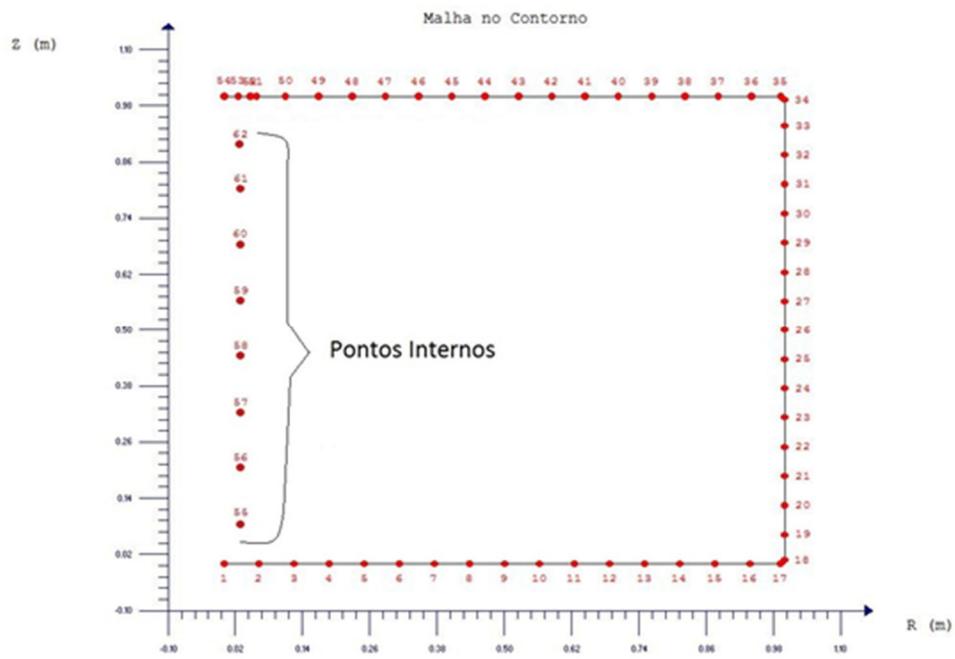


Figura 50 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 54 nós e $r=0,05$.

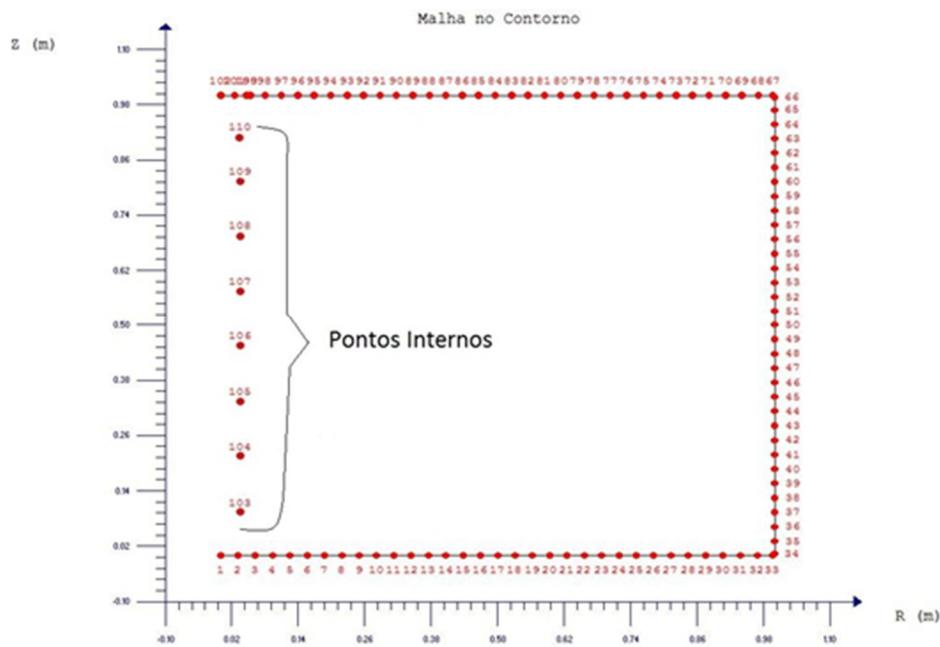


Figura 51 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 102 nós e $r=0,05$.

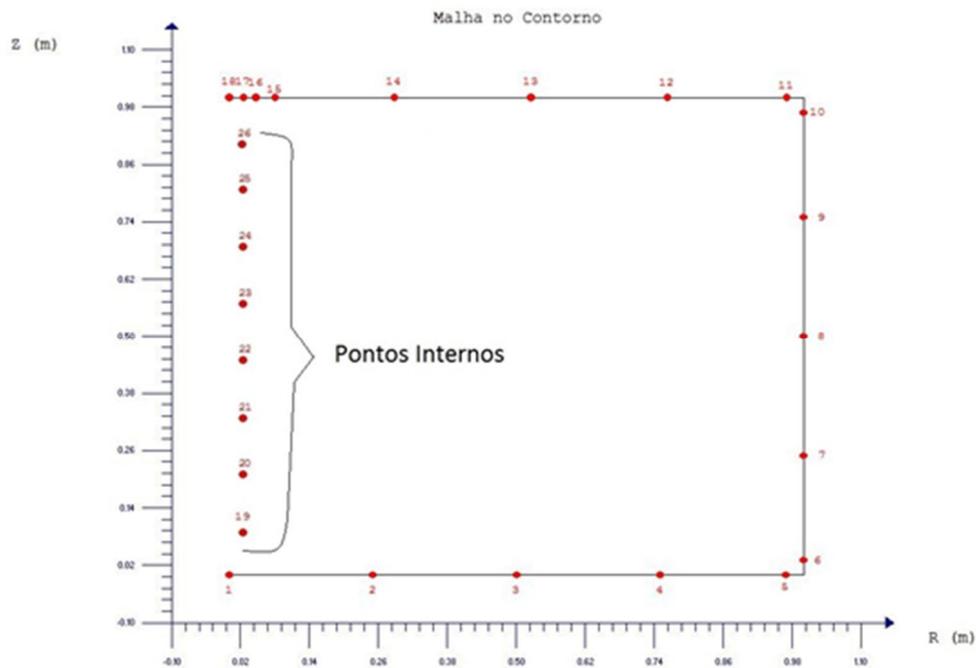


Figura 52 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 18 nós e $r=0,02$.

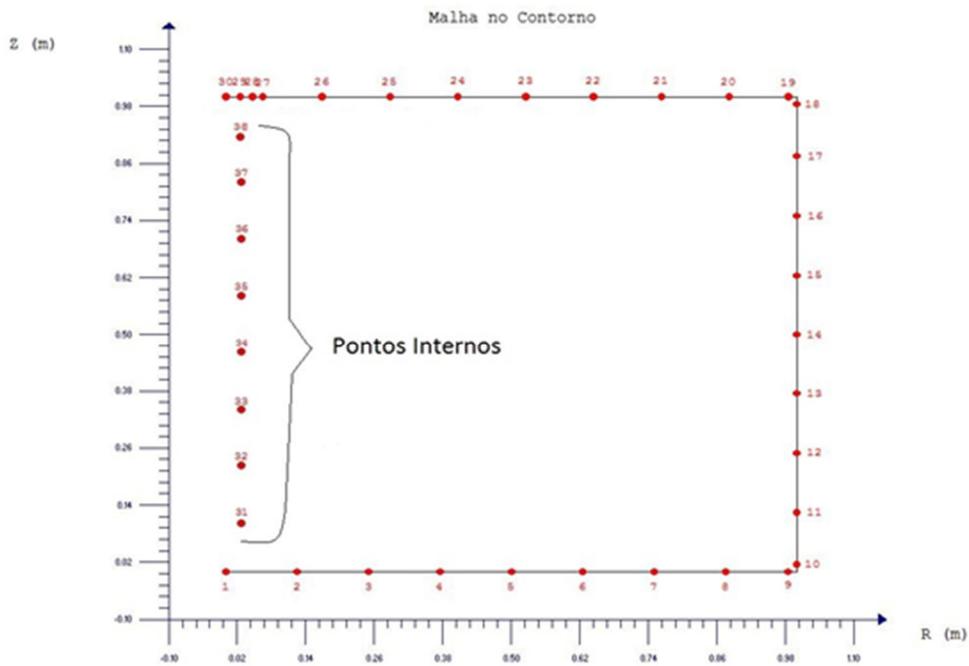


Figura 53 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 30 nós e $r=0,02$.

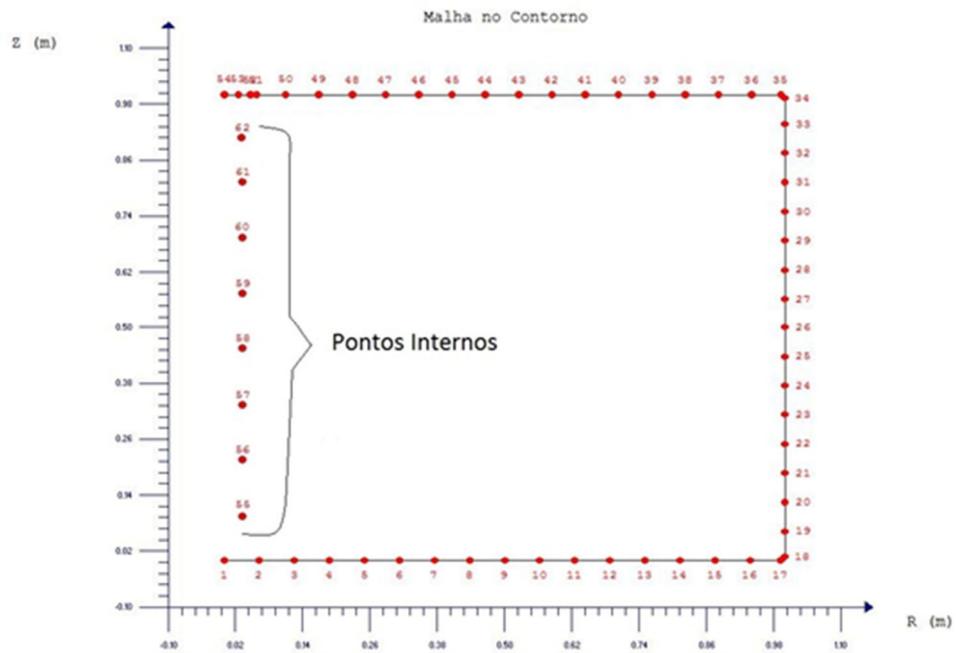


Figura 54 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 54 nós e $r=0,02$.

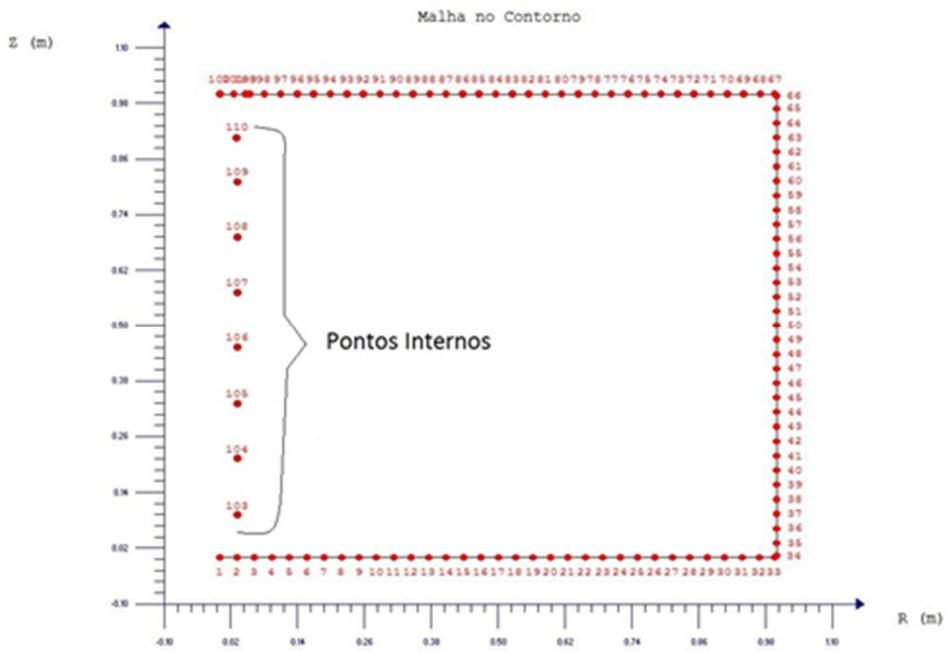


Figura 55 – Distribuição dos pontos no contorno e pontos internos para o modelo com 102 nós e $r=0,02$.

8.3.1 OBTENÇÃO DOS VALORES NUMÉRICOS

A seguir são apresentadas as tabelas como os resultados obtidos através das simulações numéricas. De forma a facilitar a avaliação e a análise, as tabelas foram organizadas para que seja possível observar a convergência e melhoria dos resultados. Foram utilizados 18, 30, 54 e 102 elementos variando o valor de r em 0,1; 0,5 e 0,02 para a distribuição da força na região de aplicação da carga.

Para o carregamento do valor de P no software deve-se colocar em função da carga q em (Pa). São apresentados na **tabela VIII** os valores utilizados para os três casos de $r = 0,1$; 0,05 e 0,02. O valor da carga distribuída aumenta uma vez que a área onde atua se reduz, ou seja, obedece-se a fórmula:

$$q = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi * r^2} \quad (8.08)$$

Tabela VIII. Valores de carregamento utilizados na simulação numérica.

r [m]	q [Pa]
0,1	31,83193
0,05	127,3277
0,02	795,7982

Espera-se que os resultados numéricos, em função do Princípio de Saint-Venant, sejam razoavelmente próximos dos analíticos a partir de $z=0,2\text{m}$ até $z=0,7\text{m}$, pois o domínio finito se diferencia do modelo de Boussinesq especialmente devido às tensões normais atuantes no fundo, ou seja, presentes na aresta horizontal inferior. Inicialmente, são apresentados os resultados para $r=0,1$. A tabela IX condensa todos os resultados referentes às diferentes malhas.

Tabela IX. Resultados obtidos para a simulação numérica utilizando r igual a 0,01 m.

R=0.1										
Calculo Numérico										
NEC	z	Nó	arr	Erro %	orz	Erro %	ozz	Erro %	o00	Erro %
18	0.1	26	2,740538	140	7,272041	16	-10,69087	21	-0,1345292	187
30	0.1	38	2,771597	137	5,970643	41	-10,36692	19	-0,4355664	11
54	0.1	62	2,704898	143	5,779188	46	-10,50177	20	-0,4989085	23
102	0.1	110	2,673063	146	5,773692	46	-10,56785	20	-0,5062451	24
18	0.2	25	0,4311921	140	2,513745	36	-6,139652	11	-0,410568	14
30	0.2	37	0,4124955	151	2,437077	40	-6,23004	10	-0,3730472	25
54	0.2	61	0,4113554	152	2,443517	40	-6,257316	9	-0,3702334	26
102	0.2	109	0,4107875	152	2,447999	40	-6,265397	9	-0,3719439	25
18	0.3	24	0,05844832	116	1,080161	26	-3,744206	9	-0,3374324	18
30	0.3	36	0,06840991	85	1,088849	25	-3,801636	7	-0,3414509	19
54	0.3	60	0,06612811	91	1,09305	24	-3,812182	7	-0,3403116	19
102	0.3	108	0,06744737	87	1,094965	24	-3,815756	7	-0,3421458	19
18	0.4	23	0,1409623	121	0,5342904	20	-2,47337	4	-0,2503648	31
30	0.4	35	0,1456096	120	0,5445915	18	-2,50136	3	-0,2562895	32
54	0.4	59	0,1439977	121	0,546079	17	-2,50784	2	-0,2551611	32
102	0.4	107	0,1454517	120	0,5469853	17	-2,509251	2	-0,2568209	33
18	0.5	22	0,1324485	141	0,2941834	18	-1,763624	2	-0,1829171	36
30	0.5	34	0,1346458	140	0,2998557	15	-1,776734	3	-0,1861948	37
54	0.5	58	0,133657	141	0,3004482	15	-1,78178	3	-0,1853583	37
102	0.5	106	0,1350741	140	0,3009117	15	-1,782057	3	-0,1868653	38
18	0.6	21	0,09945179	153	0,1747272	18	-1,343011	8	-0,1258521	34
30	0.6	33	0,100282	152	0,1778453	16	-1,348723	8	-0,1271	35
54	0.6	57	0,09967856	152	0,178172	16	-1,353038	8	-0,1265491	34
102	0.6	105	0,1010188	152	0,1784363	16	-1,352683	8	-0,12793	35
18	0.7	20	0,05426876	183	0,1095528	21	-1,08067	14	-0,06953731	11
30	0.7	32	0,05431562	183	0,1120337	18	-1,081837	14	-0,06950212	11
54	0.7	56	0,05390594	184	0,1122771	18	-1,085658	15	-0,0691014	10
102	0.7	104	0,05513038	182	0,1124558	18	-1,084903	15	-0,07034432	12
18	0.8	19	-0,00501148	657	0,0722477	24	-0,9093163	21	-0,004477517	973
30	0.8	31	-0,00491457	672	0,0752428	19	-0,9060234	21	-0,004181069	1049
54	0.8	55	-0,00520761	629	0,07562	19	-0,9095493	21	-0,003715426	1193
102	0.8	103	-0,00415748	813	0,0757663	18	-0,9084857	21	-0,004774971	906

Todos os valores de z já estão nas coordenadas da fórmula analítica.

Percebe-se um desempenho razoável apenas no cálculo das tensões σ_{zz} . As tensões cisalhantes σ_{rz} , que são proporcionais a $(r/z)\sigma_{zz}$ vêm em segundo lugar.

A seguir são apresentados diversos gráficos gerados para apresentar a variação dos valores das tensões para melhor avaliação geral dos resultados.

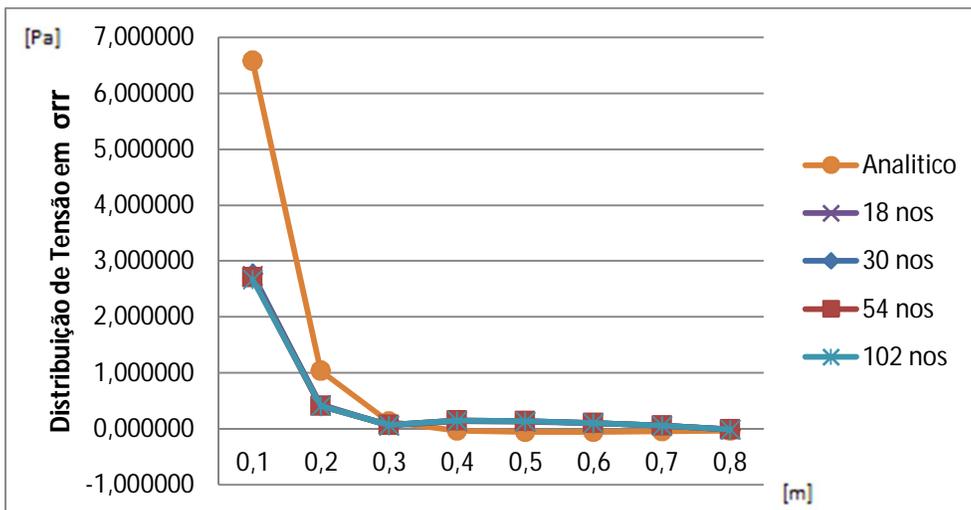


Figura 56 – Gráfico da tensão σ_{rr} para um valor de $r=0,1$.

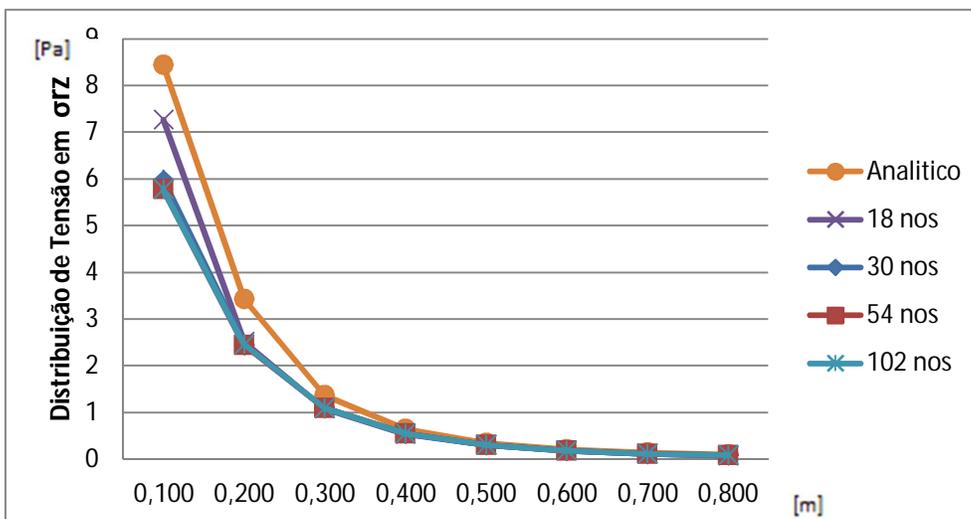


Figura 57 – Gráfico da tensão σ_{rz} para um valor de $r=0,1$.

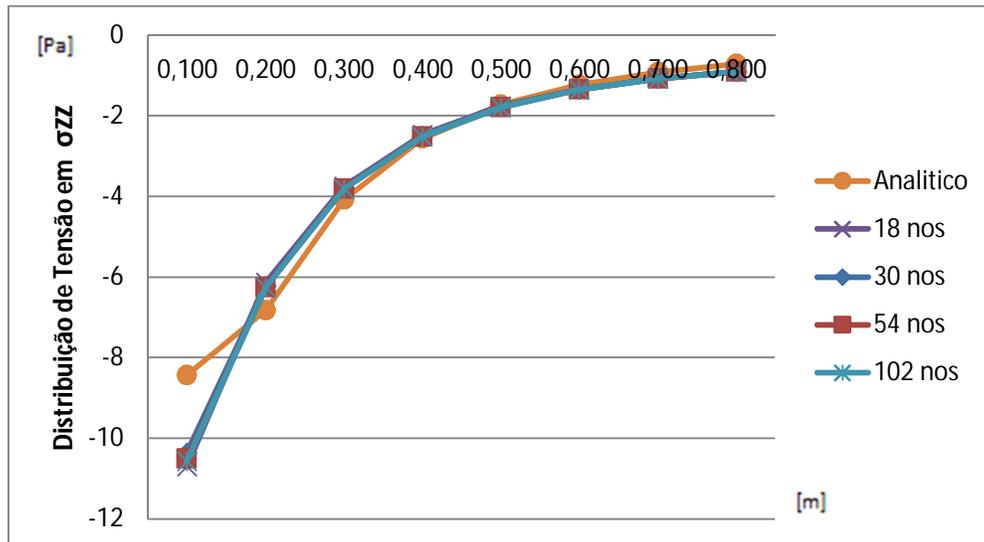


Figura 58 – Gráfico da tensão σ_{zz} para um valor de $r=0,1$.

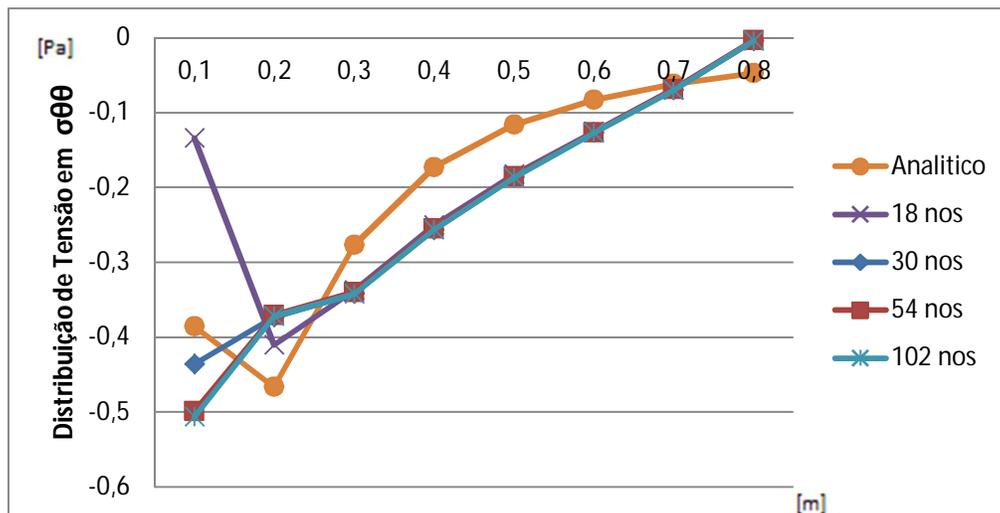


Figura 59 – Gráfico da tensão $\sigma_{\theta\theta}$ para um valor de $r=0,1$.

A seguir, com o propósito de verificar se com a menor delimitação da área de atuação do carregamento o modelo numérico capta melhor o modelo de Bousinesq, são feitas simulações para $r=0,05m$.

Tabela X. Resultados obtidos para a simulação numérica utilizando r igual a 0,05 m.

R=0.05										
Calculo Numérico										
NEC	z	Nó	arr	Erro %	arz	Erro %	azz	Erro %	$\sigma\theta$	Erro %
18	0,1	26	0,5409183	1116	12,186	31	-27,51429	69	-2,26044	83
30	0,1	38	2,007638	228	10,20812	17	-24,40951	65	-1,406592	73
54	0,1	62	1,98359	232	9,733712	13	-24,64457	66	-1,175728	67
102	0,1	110	1,916927	243	9,825584	14	-24,92659	66	-1,208521	68
18	0,2	25	0,40051	159	2,298101	49	-9,278769	26	-0,9037467	48
30	0,2	37	0,3831157	170	2,185702	56	-9,539264	28	-0,8198247	43
54	0,2	61	0,3974188	161	2,224738	54	-9,669106	29	-0,8361545	44
102	0,2	109	0,4119892	152	2,243642	52	-9,705552	30	-0,8562232	45
18	0,3	24	0,3449643	63	0,718668	89	-4,617605	12	-0,4490606	38
30	0,3	36	0,3720496	66	0,7509763	81	-4,818196	15	-0,475921	42
54	0,3	60	0,3716981	66	0,7618407	78	-4,855945	16	-0,4779982	42
102	0,3	108	0,3826267	67	0,7662808	77	-4,861329	16	-0,4897004	43
18	0,4	23	0,2552284	112	0,3139986	104	-2,8032	9	-0,2887975	40
30	0,4	35	0,2710696	111	0,3332299	92	-2,894482	11	-0,3069153	44
54	0,4	59	0,2682407	111	0,3358192	91	-2,912398	12	-0,3045474	43
102	0,4	107	0,2757514	111	0,3372935	90	-2,907878	12	-0,3122811	45
18	0,5	22	0,1859909	129	0,1640861	111	-1,91704	10	-0,2003295	42
30	0,5	34	0,1935893	128	0,1720901	101	-1,958802	12	-0,208927	44
54	0,5	58	0,1901497	129	0,1730816	100	-1,970793	12	-0,2055941	43
102	0,5	106	0,1956763	128	0,1735442	100	-1,962925	12	-0,2111985	45
18	0,6	21	0,1273321	141	0,0945913	118	-1,42567	13	-0,1346143	38
30	0,6	33	0,1313413	140	0,0982997	110	-1,446572	14	-0,1389268	40
54	0,6	57	0,1275177	141	0,0988265	109	-1,455745	15	-0,1351482	39
102	0,6	105	0,1319978	140	0,0989174	109	-1,446962	14	-0,1396532	40
18	0,7	20	0,0697687	165	0,0576191	130	-1,132612	18	-0,07397439	16
30	0,7	32	0,07190582	163	0,0605003	119	-1,141655	19	-0,07605686	18
54	0,7	56	0,06791625	166	0,0607449	118	-1,149316	19	-0,07210455	14
102	0,7	104	0,07182348	163	0,060731	118	-1,140461	19	-0,07601433	18
18	0,8	19	0,002933543	1394	0,0362595	147	-0,9503023	24	-0,005645578	751
30	0,8	31	0,004581997	928	0,0402792	123	-0,94679	24	-0,006912516	595
54	0,8	55	0,000851398	4557	0,0401266	124	-0,9540911	25	-0,003270241	1369
102	0,8	103	0,004337872	975	0,0401255	124	-0,9452951	24	-0,006750382	611

Os resultados surpreendentemente pioraram, o que pode ser reflexo de mau condicionamento numérico. Isto devido à presença de um único elemento com carregamento de elevada amplitude, enquanto em todos os demais elementos em seus nós são prescritos valores nulos de tensão e deslocamento.

Do mesmo modo, a seguir são apresentados diversos gráficos gerados para apresentar a variação dos valores das tensões para melhor avaliação geral dos resultados, com $r=0,05m$.

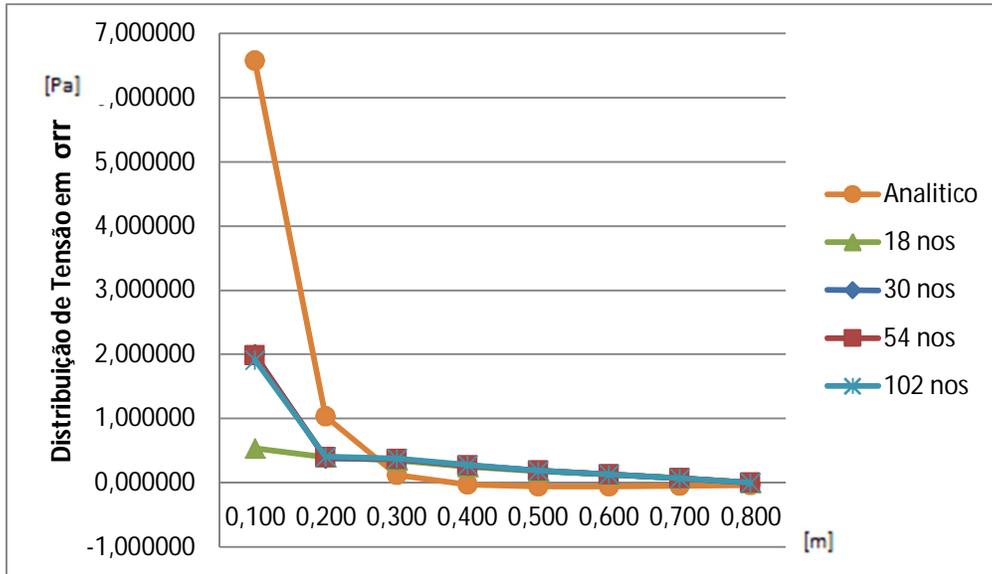


Figura 60 – Gráfico da tensão σ_{rr} para um valor de $r=0,05$.

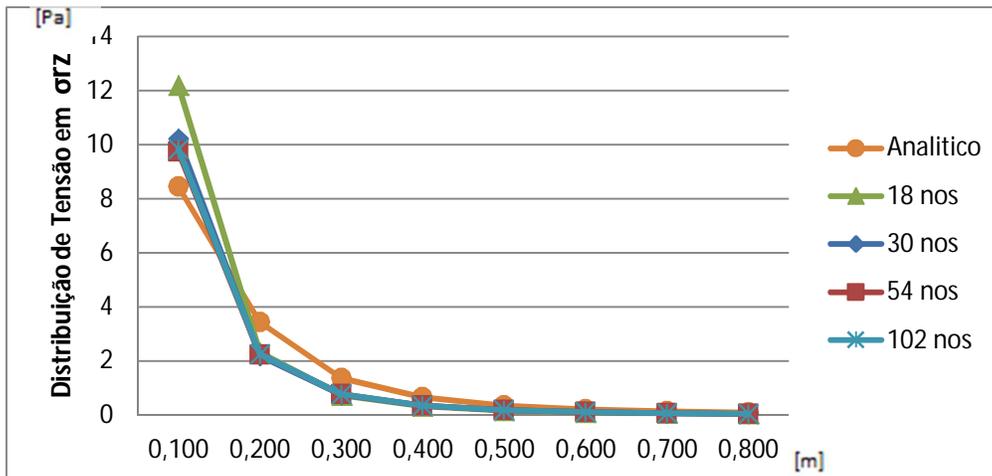


Figura 61 – Gráfico da tensão σ_{rz} para um valor de $r=0,05$.

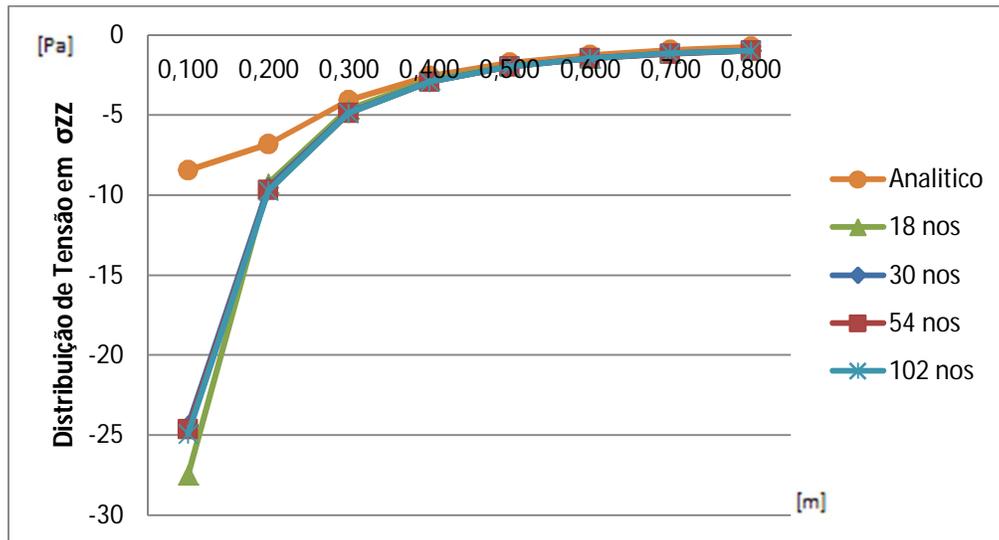


Figura 62 – Gráfico da tensão σ_{zz} para um valor de $r = 0,05$.

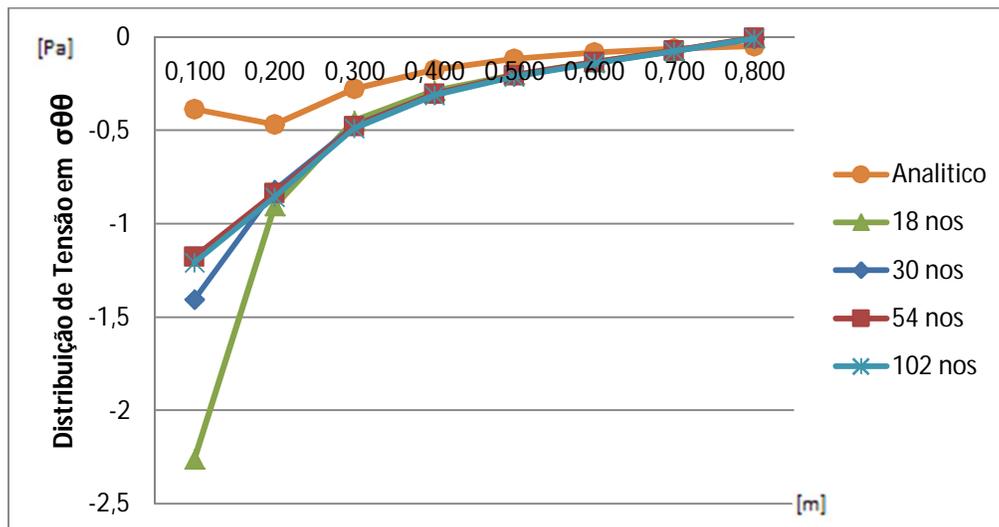


Figura 63 – Gráfico da tensão $\sigma_{\theta\theta}$ para um valor de $r = 0,05$.

Visualmente os resultados não são discrepantes. Percebe-se que mesmo nos pontos próximos da aresta horizontal inferior os resultados se mantiveram com relativa concordância. As tensões circunferenciais $\sigma_{\theta\theta}$ são as com pior representação numérica. De fato, não são calculadas diretamente pela equação integral, e sim através de manipulações com as demais componentes de tensão, considerando o estado de tensão típico na axissimetria.

Por fim, demonstrando que o problema de condicionamento numérico é bastante crítico neste problema, foi feita a simulação com $r=0,02$.

Tabela XI. Resultados obtidos para a simulação numérica utilizando r igual a 0,02 m.

R=0.02										
Calculo Numérico										
NEC	z	Nó	σ_{rr}	Erro %	σ_{rz}	Erro %	σ_{zz}	Erro %	$\sigma_{\theta\theta}$	Erro %
18	0,1	26	3,380739	95	76,16253	89	-171,9643	95	-14,12775	97
30	0,1	38	12,54774	48	63,80076	87	-152,5595	94	-8,791198	96
54	0,1	62	12,39744	47	60,8357	86	-154,0285	95	-7,348303	95
102	0,1	110	11,9808	45	61,4099	86	-155,7912	95	-7,553257	95
18	0,2	25	2,503187	163	14,36313	41	-57,9923	85	-5,648417	93
30	0,2	37	2,394473	57	13,66064	75	-59,6204	89	-5,123904	91
54	0,2	61	2,483868	58	13,90461	75	-60,43191	89	-5,225966	91
102	0,2	109	2,574933	60	14,02276	76	-60,6597	89	-5,351395	91
18	0,3	24	2,156027	52	4,491675	24	-28,86003	76	-2,806629	83
30	0,3	36	2,32531	95	4,693602	71	-30,11373	86	-2,974507	91
54	0,3	60	2,323113	95	4,761504	71	-30,34966	87	-2,987489	91
102	0,3	108	2,391417	95	4,789255	72	-30,38331	87	-3,060627	91
18	0,4	23	1,595178	92	1,962491	31	-17,52	77	-1,804985	85
30	0,4	35	1,694185	102	2,082687	69	-18,09051	86	-1,91822	91
54	0,4	59	1,676505	102	2,09887	69	-18,20248	86	-1,903421	91
102	0,4	107	1,723446	102	2,108084	70	-18,17424	86	-1,951757	91
18	0,5	22	1,162443	103	1,025538	37	-11,9815	79	-1,252059	86
30	0,5	34	1,209933	104	1,075563	68	-12,24252	86	-1,305794	91
54	0,5	58	1,188436	105	1,08176	68	-12,31745	86	-1,284963	91
102	0,5	106	1,222977	104	1,084651	68	-12,26828	86	-1,31999	91
18	0,6	21	0,7958255	107	0,5911956	41	-8,910435	81	-0,8413391	86
30	0,6	33	0,8208829	106	0,6143729	66	-9,041075	86	-0,8682926	90
54	0,6	57	0,7969857	107	0,6176655	67	-9,098409	86	-0,844676	90
102	0,6	105	0,8249861	106	0,6182337	67	-9,043513	86	-0,8728328	90
18	0,7	20	0,4360544	112	0,3601196	43	-7,078826	83	-0,46234	82
30	0,7	32	0,4494114	110	0,378127	65	-7,135345	87	-0,4753554	87
54	0,7	56	0,4244766	111	0,3796558	65	-7,183228	87	-0,4506534	86
102	0,7	104	0,4488967	110	0,3795686	65	-7,127878	87	-0,4750896	87
18	0,8	19	0,01833464	346	0,2266219	42	-5,939389	84	-0,03528487	76
30	0,8	31	0,02863748	233	0,2517451	64	-5,917437	88	-0,04320322	11
54	0,8	55	0,005321239	813	0,2507913	64	-5,963069	88	-0,020439	135
102	0,8	103	0,0271117	240	0,2507843	64	-5,908095	88	-0,04218989	14

Para cada um dos resultados analíticos apresentados acima foram gerados gráficos para as tensões σ_{rr} , σ_{rz} , σ_{zz} e $\sigma_{\theta\theta}$, onde podemos avaliar que através do refino da malha, ou do um refino da região de aplicação de força há uma melhora considerável dos resultados obtidos de forma numérica.

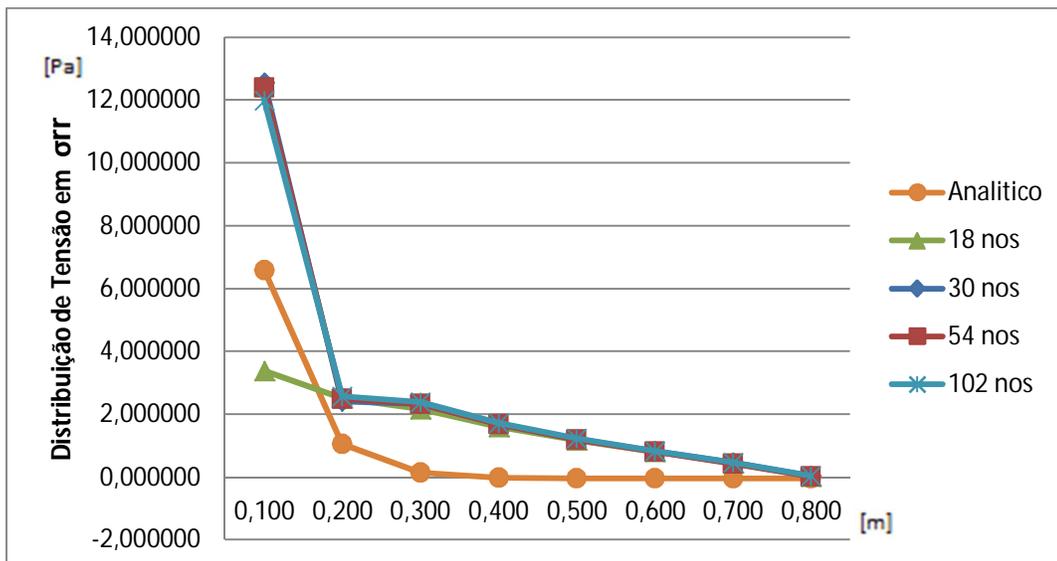


Figura 64 – Gráfico da tensão σ_{rr} para um valor de $r = 0,02$.

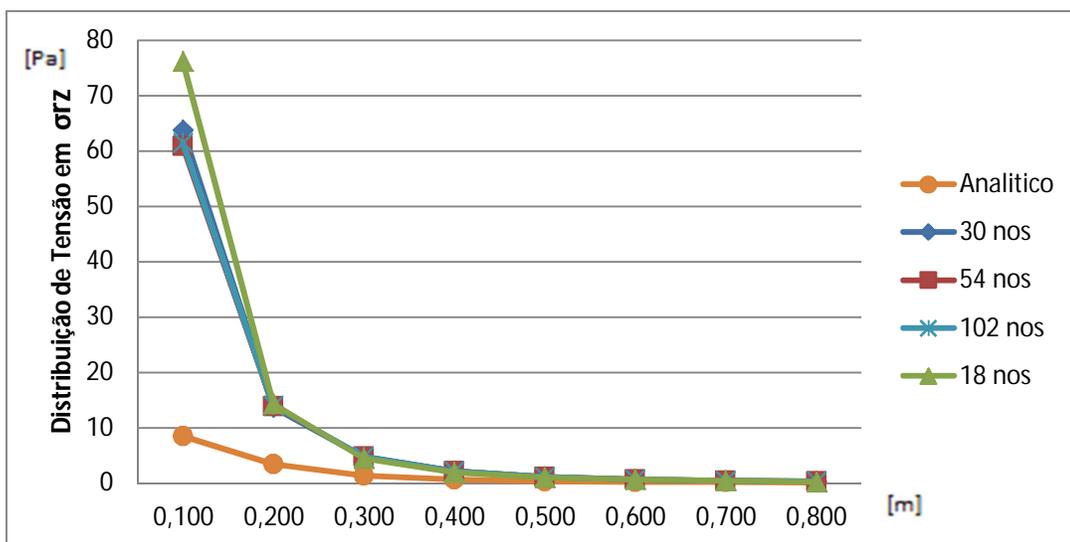


Figura 65 – Gráfico da tensão σ_{rz} para um valor de $r = 0,02$.

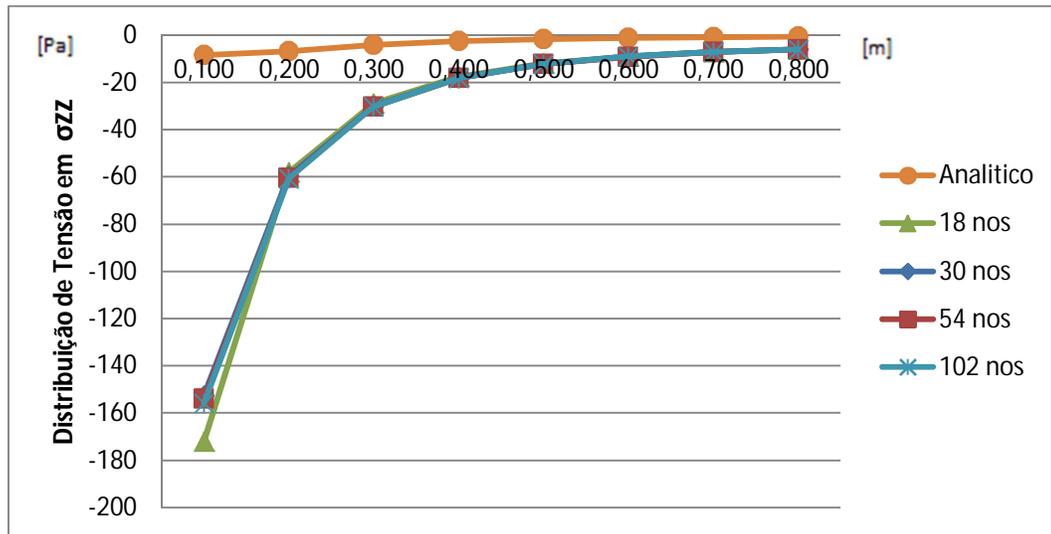


Figura 66 – Gráfico da tensão σ_{zz} para um valor de $r = 0,02$.

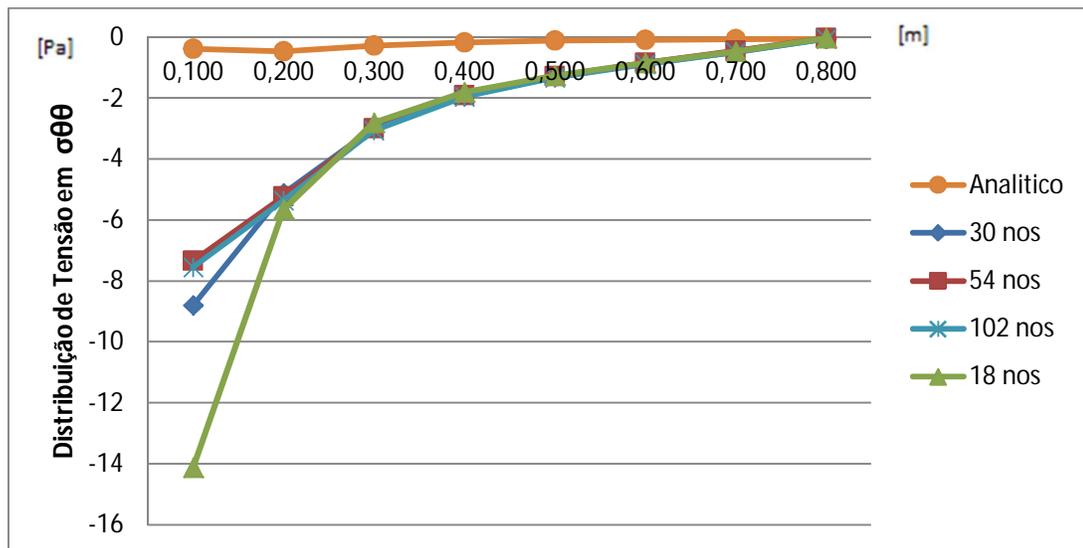


Figura 67 – Gráfico da tensão $\sigma_{\theta\theta}$ para um valor de $r = 0,02$.

Para melhor visualização dos resultados obtidos em conjunto para σ_{rr} , σ_{rz} , σ_{zz} e $\sigma_{\theta\theta}$, são apresentados os gráficos a seguir.

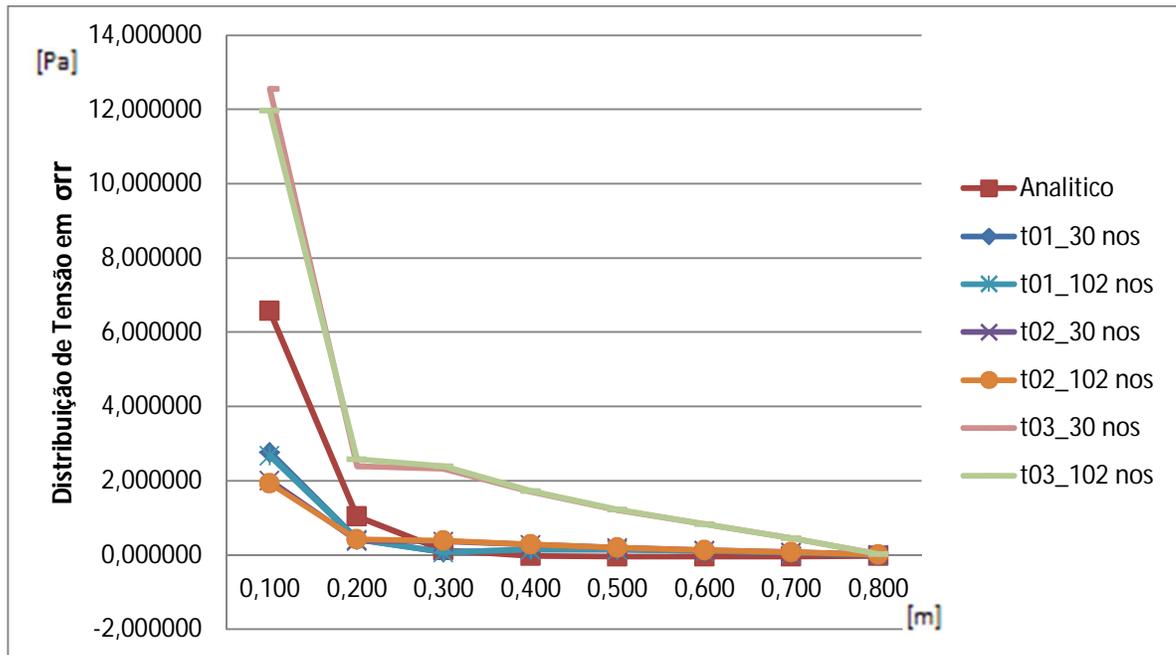


Figura 68 – Gráfico Comparativo da tensão σ_{rr} para todos os valores de r adotados.

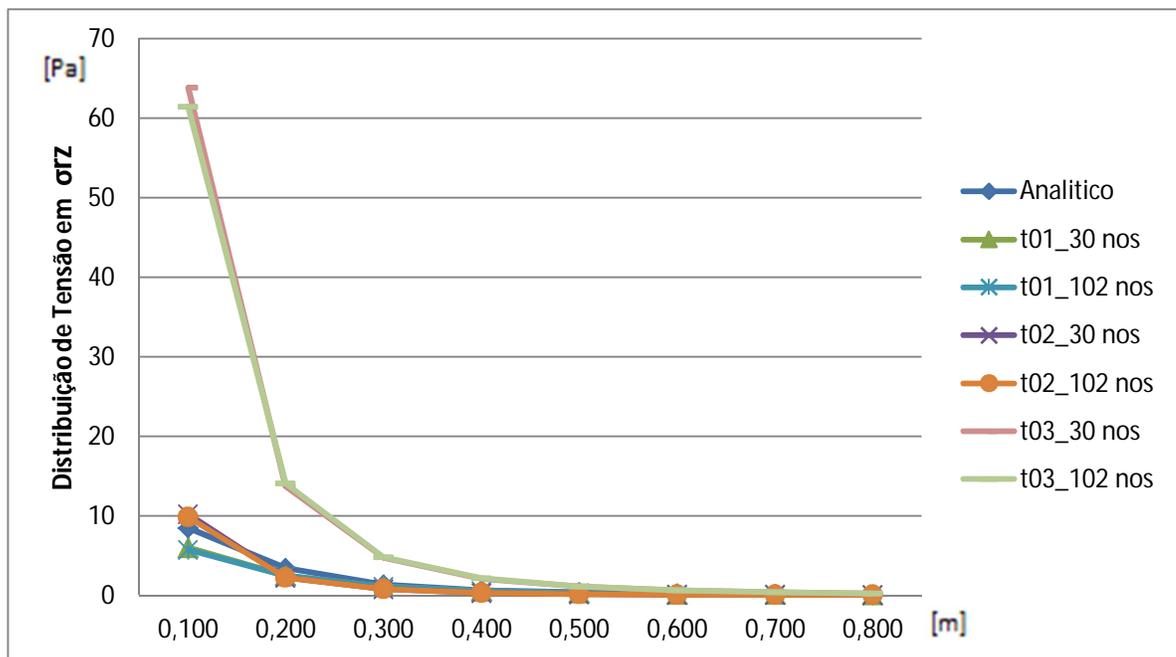


Figura 69 – Gráfico Comparativo da tensão σ_{rz} para todos os valores de r adotados.

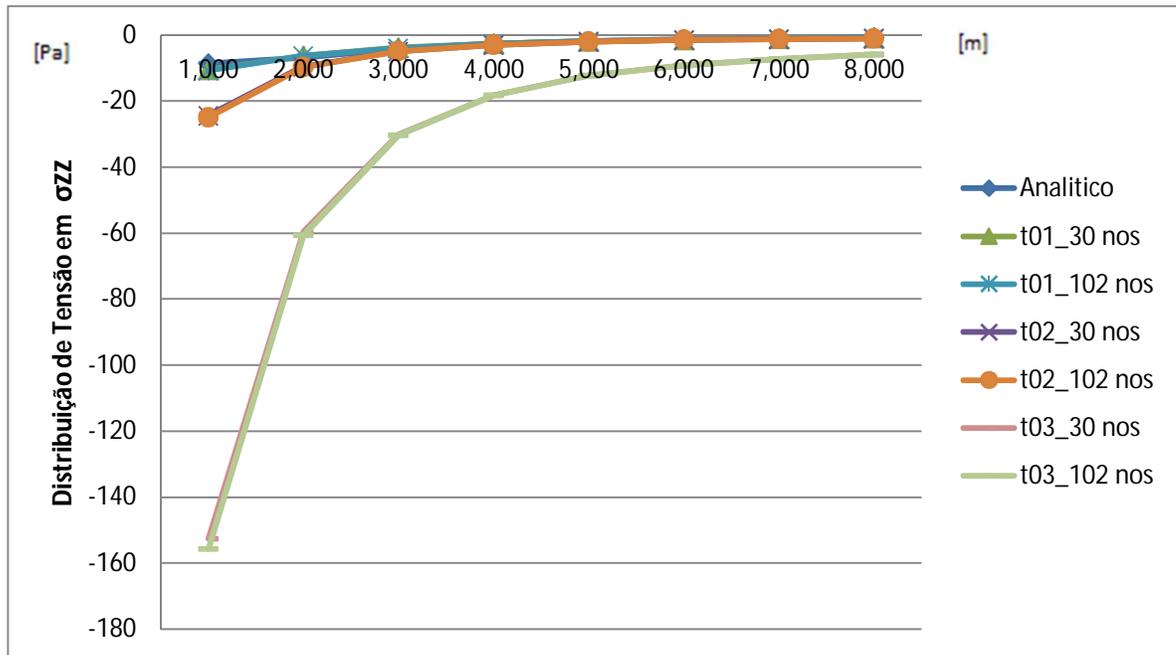


Figura 70 – Gráfico Comparativo da tensão σ_{zz} para todos os valores de r adotados.

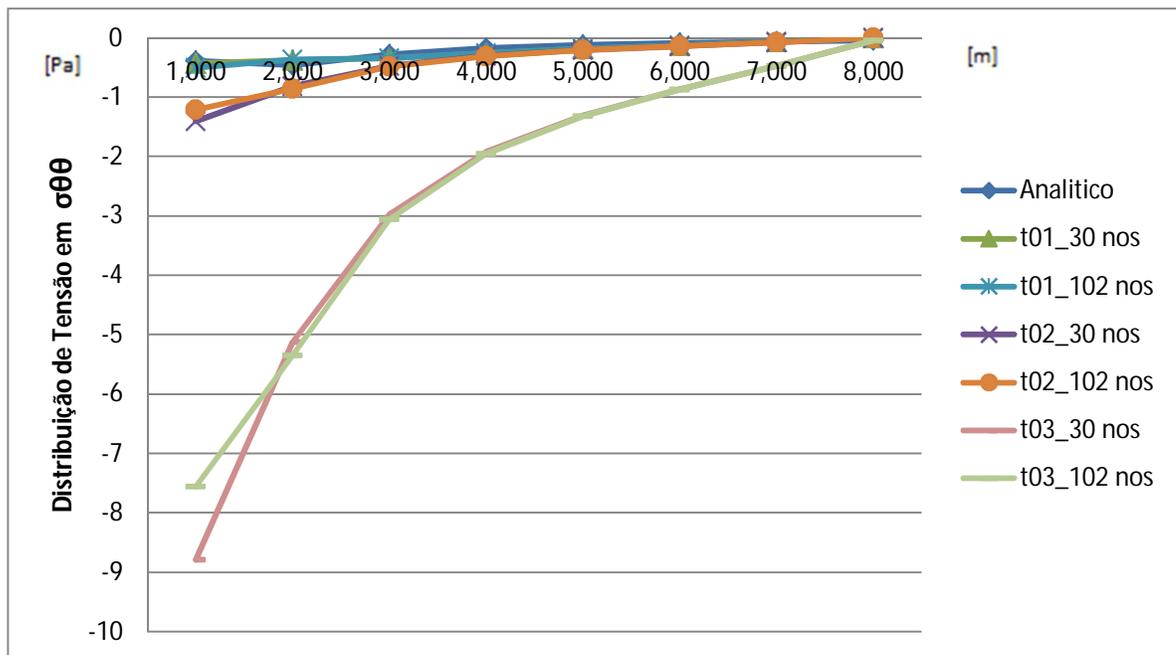


Figura 71 – Gráfico Comparativo da tensão $\sigma_{\theta\theta}$ para todos os valores de r adotados.

8.4 TAMPO VASO DE PRESSÃO

Neste exemplo, mais um problema axissimétrico de configuração geométrica desfavorável à discretização com o Método dos Elementos de Contorno é examinado, de modo a avaliar a precisão do método e seu comportamento numérico nessas condições extremas.

Trata-se de uma conexão bocal-vaso de pressão, que pode ter sua conformação geométrica representada de forma simplificada quando se considera uma superfície de revolução, conforme representado na figura 72.

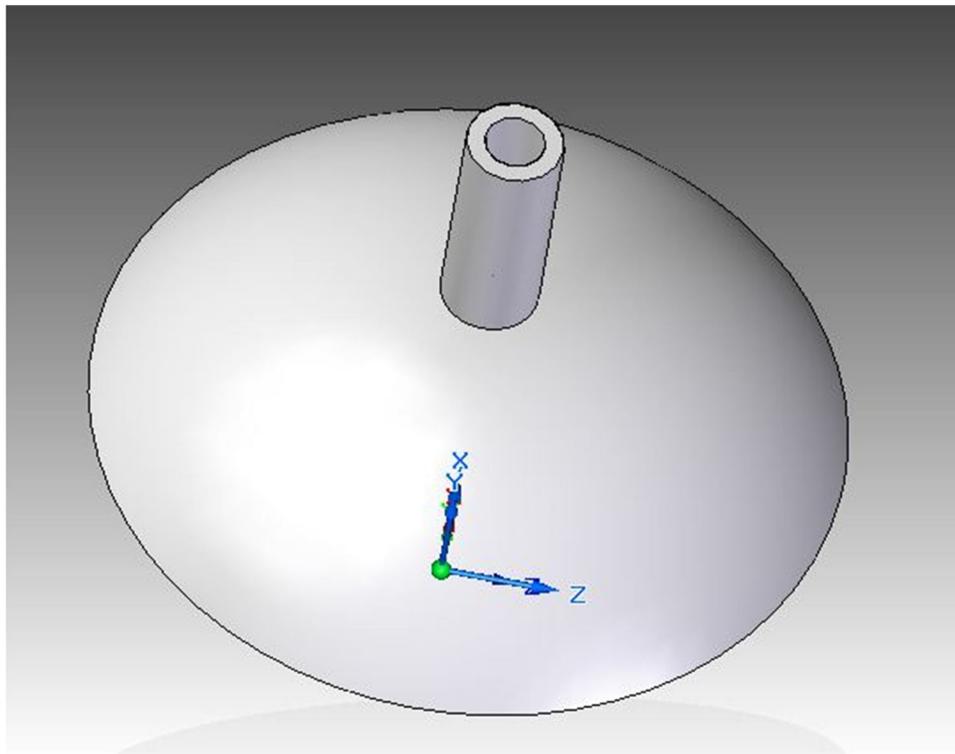


Figura 72 – Tambo de Vaso de Pressão que será submetido a um carregamento distribuído sobre sua superfície interna.

O objetivo inicialmente foi comparar a solução obtida pelo citado por Albuquerque [1] utilizando o Método dos Elementos Finitos com a simulação empreendida com Método dos Elementos de Contorno, diante da inexistência de uma solução analítica nesse caso.

Infelizmente, os resultados apresentados por Albuquerque [1] não foram suficientemente detalhados para que se pudesse fazer uma comparação mais precisa. Assim sendo, buscou-se simular o problema proposto através do programa ANSYS disponível na Companhia

ArcelorMittal Tubarão com a finalidade de comparação com o MEC. No entanto, as dificuldades operacionais para utilização do modelo axissimétrico com o ANSYS foram bastante grandes, o que resultou na escolha de um modelo tridimensional, de mais fácil manuseio e, naturalmente, de maior precisão em seus resultados.

Na figura 73, é ilustrada a seção de revolução do tampo do vaso de pressão na região da conexão bocal-tampo.

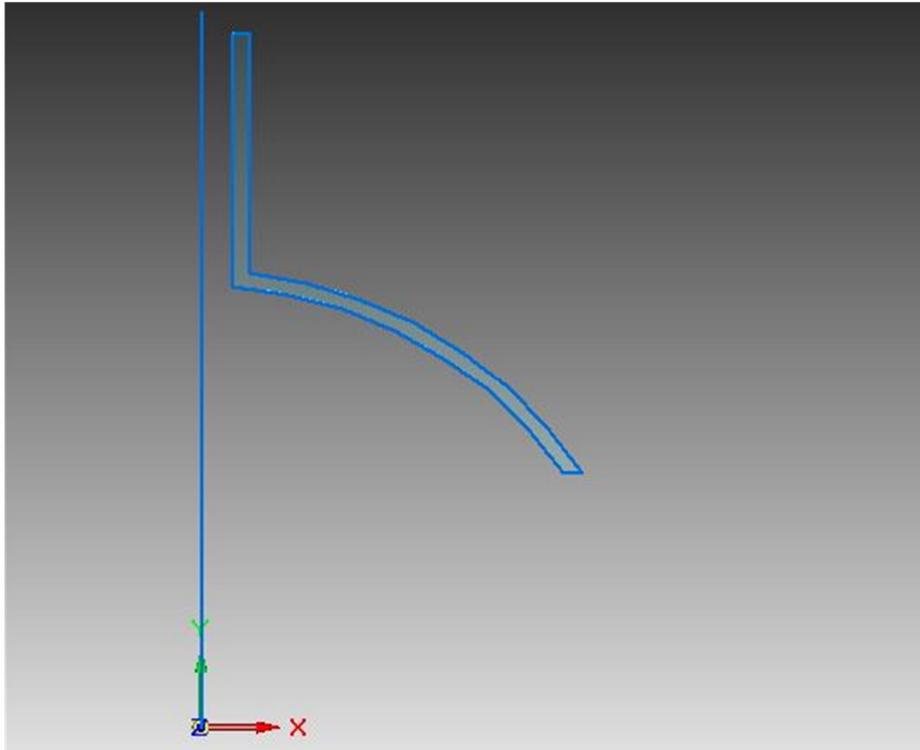


Figura 73 – Seção de revolução do tampo de vaso de pressão.

O objetivo é analisar o comportamento dos deslocamentos e tensões na região da conexão bocal-tampo de um vaso de pressão submetido a um carregamento de uma pressão interna de 1 Pa. Considera-se que a conexão bocal-tampo vaso de pressão possua as seguintes características dimensionais:

Espessura de parede= 20,00 [mm];

Raio interno = 488,50 [mm];

Raio externo = 505,00 [mm];

Distância entre a parte interna do Bocal e o Eixo de Rotação = 34,00 [mm].

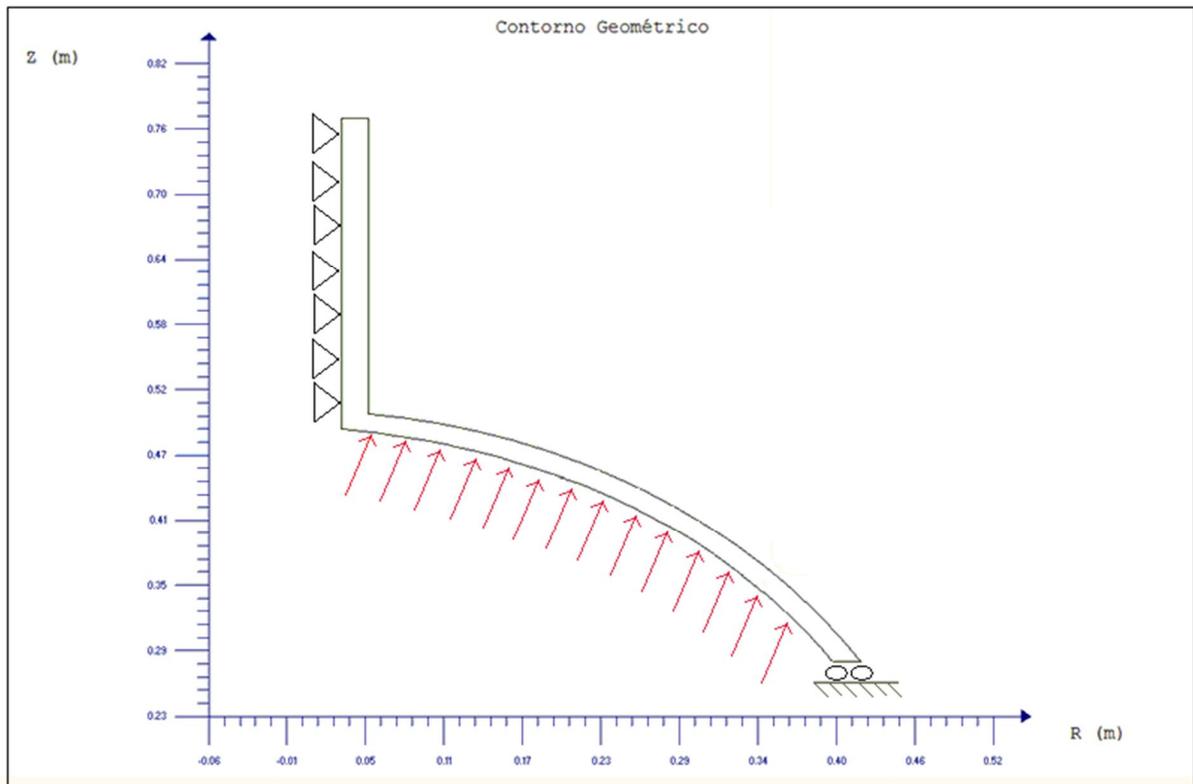


Figura 74 – Modelo simplificado, considerando um vaso de pressão com carregamento p distribuído uniformemente e representado pela sua seção de revolução.

Na figura 74 representam-se esquematicamente as condições de contorno aplicadas à geometria escolhida. A região interna ao eixo de revolução do bocal foi considerada engastada e os deslocamentos na parte do tampo foram restringidos na direção Y e Z.

O modelo adotado para a solução pelo Método dos Elementos de Contorno considera a discretização do contorno consistindo de 106 elementos quadráticos. Todos os elementos utilizados nesta simulação possuem o mesmo tamanho. A sua distribuição foi realizada conforme ilustrado na figura 75 e não foram tracejados devido à grande quantidade utilizada dos mesmos.

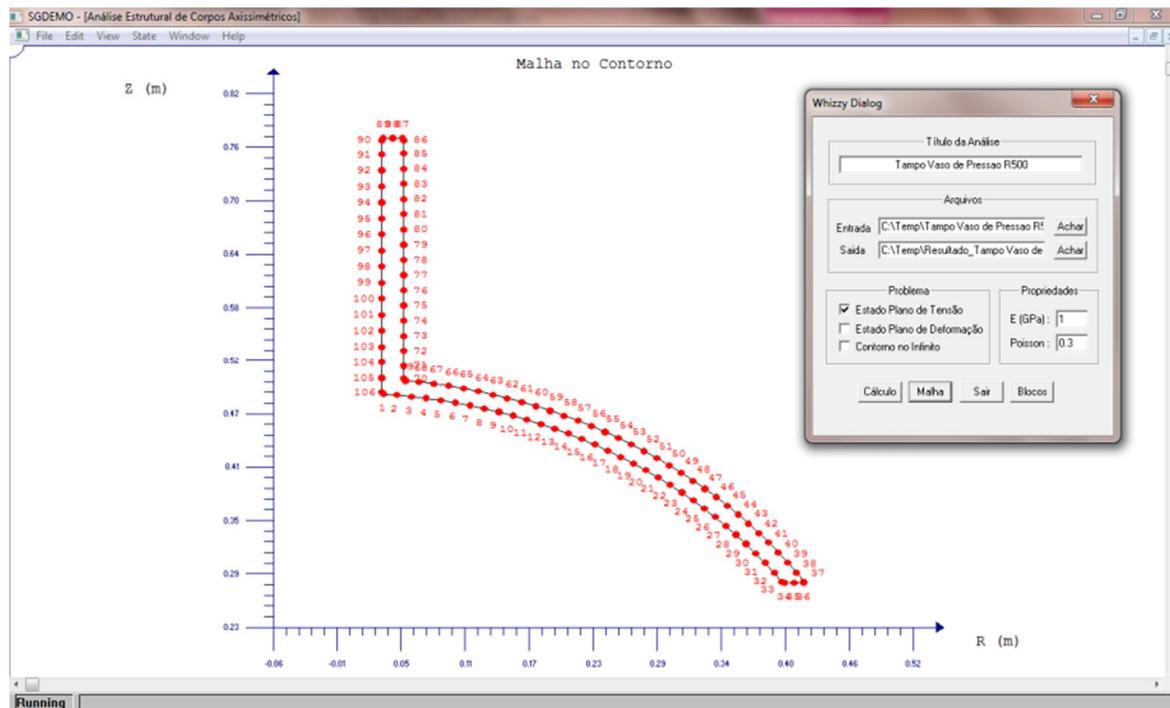


Figura 75 – Ilustração da distribuição dos elementos ao longo do contorno conforme o refinamento da malha utilizada na simulação.

Na figura 76 podem-se observar todas as propriedades utilizadas na simulação numérica do ANSYS 13.

Tipo de Análise: Estática Estrutural

$E = 1$ [Pa]

Coefficiente de Poisson = 0,3

Densidade = $7850 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$

Carregamento: Pressão = 1 [Pa]

São apresentadas a seguir nas figuras 77, 78, 79, 80 e 81 os seguintes dados: a geometria gerada no software ANSYS 13, a malha gerada para a simulação realizada e as condições de contorno aplicadas.

The screenshot displays the ANSYS Workbench interface for a simulation. The main window shows the 'Outline of Schematic A2: Engineering Data' with a table of material properties for 'Structural Steel'. The 'Table of Properties Row 2: Density' is highlighted, showing a density of 7850 kg m⁻³. The 'Properties of Outline Row 3: Structural Steel' table lists various material properties and their values.

Property	Value	Unit
Density	7850	kg m ⁻³
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion		
Coefficient of Thermal Expansion	1,2E-05	C ⁻¹
Reference Temperature	22	C
Isotropic Elasticity		
Derive from	Young's...	
Young's Modulus	1	Pa
Poisson's Ratio	0,3	
Bulk Modulus	0,83333	Pa
Shear Modulus	0,38462	Pa
Alternating Stress Mean Stress		Tabular
Strain-Life Parameters		
Tensile Yield Strength	2,5E+08	Pa
Compressive Yield Strength	2,5E+08	Pa
Tensile Ultimate Strength	4,6E+08	Pa
Compressive Ultimate Strength	0	Pa

The 'Chart of Properties Row 2: Density' shows a constant density of 7850 kg m⁻³ across the temperature range from -1 to 1. The 'Table of Properties Row 2: Density' table is also visible, showing the density value of 7850.

Figura 76 – Figura com as propriedades utilizadas na simulação no ANSYS 13.

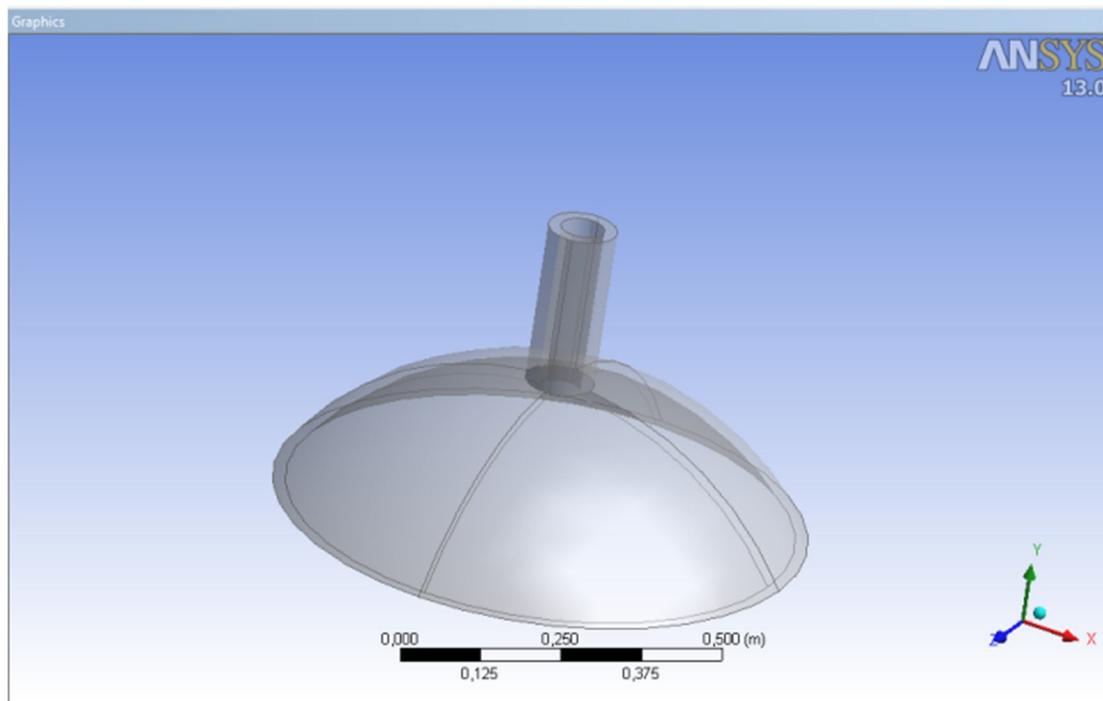


Figura 77 – Ilustração da geometria gerada e simulada utilizando o ANSYS 13.

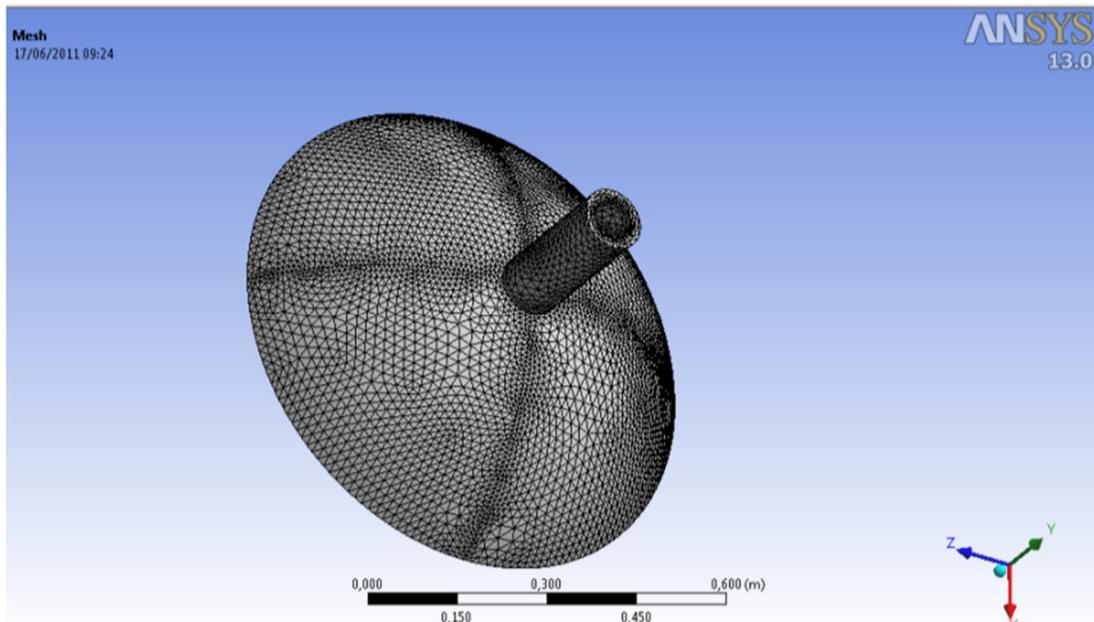


Figura 78 - Malha com os elementos na geometria elaborada.

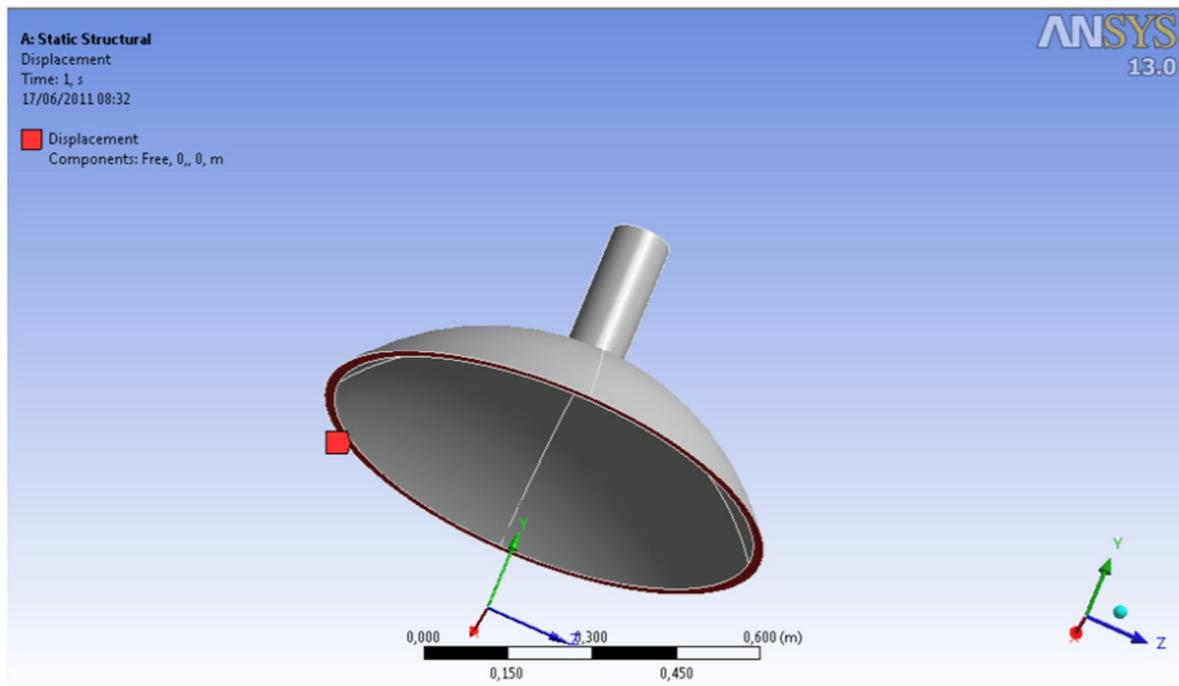


Figura 79 - Ilustração da condição de contorno – Condição de Simetria.

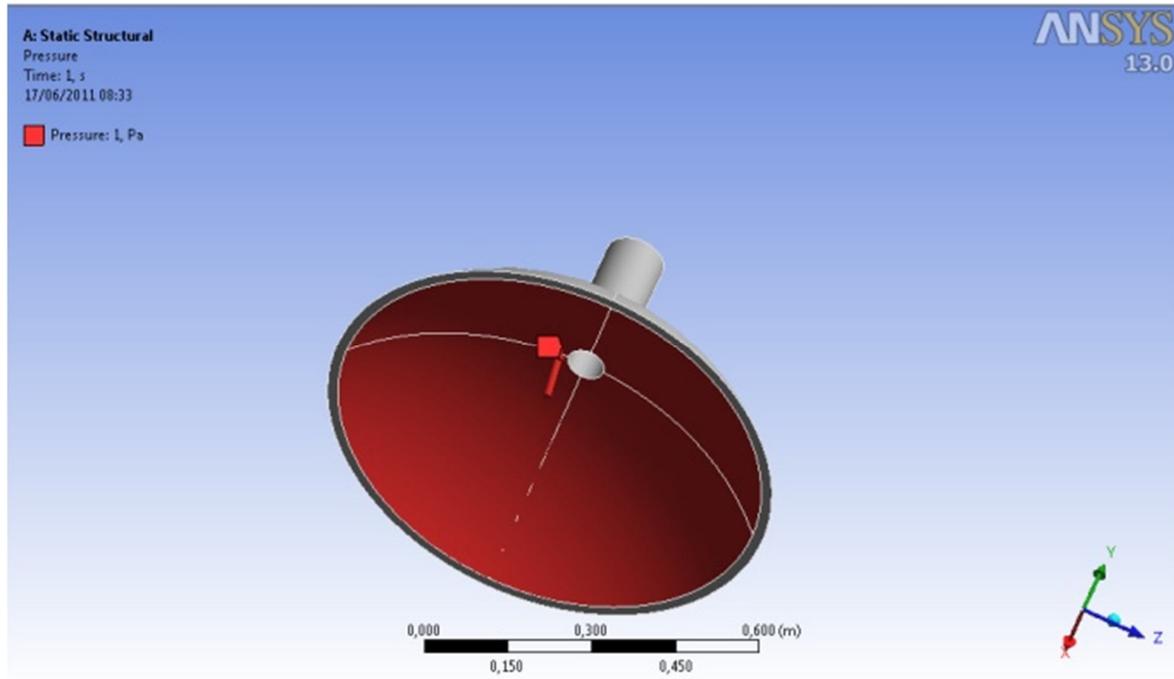
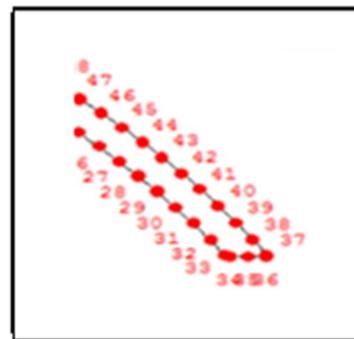


Figura 80 – Aplicação do carregamento da pressão na superfície interna da geometria.

A seguir são apresentadas tabelas comparativas entre os resultados do MEC e MEF para deslocamentos. O ponto citado na primeira coluna da tabela refere-se à numeração do ponto nodal da malha de elementos de contorno. Para facilitar a visualização, os resultados foram divididos em três grupos e a parte da malha a eles correspondente foi destacada ao lado.

Tabela XIIa. Resultados comparativo entre os métodos para o deslocamento.

Ponto	Deslocamento EC	Deslocamento Ansys	Erro
38	11,80	6,71	75,9%
39	10,44	6,58	58,7%
40	8,16	5,90	38,2%
41	6,05	5,44	11,3%
42	3,62	4,78	24,2%
43	1,70	4,04	57,8%
44	0,23	3,74	94,0%
45	1,64	2,94	44,3%
46	2,88	2,70	6,8%

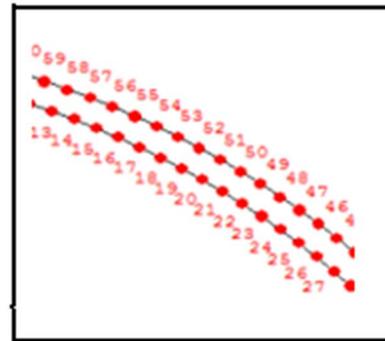


Quanto ao MEC, os valores obtidos nos primeiros nós desta tabela (Tabela XIIa), números 38 a 40, sofrem a influência do canto e, devido à presença de um único elemento de contorno na aresta horizontal, referente à espessura da parede, não deveriam apresentar precisão significativa. No entanto, logo a seguir, os erros diminuem chegando a 6,8% no nó

46. Curiosamente, na tabela XIIB, já no nó seguinte, de número 47, os resultados começam a se distanciar. Nesta faixa, de nós numerados de 47 a 55, em que se esperava maior concordância de resultados, os valores apresentam discrepância significativa. É preciso destacar, todavia, que nesta faixa esperavam-se os maiores deslocamentos, pois é a região que se situa relativamente distante das conexões inferior e superior (região do bocal), que por não serem suaves, tendem a produzir elevados níveis de tensão por conta da maior rigidez geométrica e, conseqüentemente, menores deslocamentos.

Tabela XIIB. Resultados comparativo entre os métodos para o deslocamento.

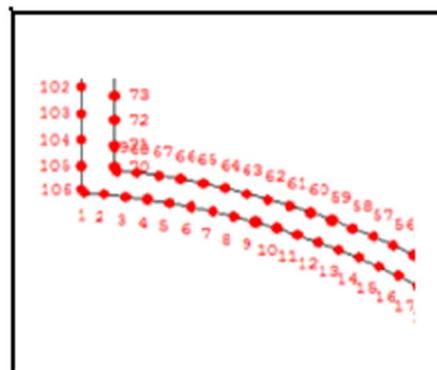
Ponto	Deslocamento		Erro
	EC	Ansys	
47	3,77	2,08	81,4%
48	4,41	1,83	141,0%
49	4,88	1,31	272,6%
50	5,08	0,83	512,4%
51	5,25	0,85	520,3%
52	5,20	1,25	315,6%
53	5,16	1,53	237,1%
54	4,97	1,88	164,2%
55	4,77	2,11	126,2%



Surpreendentemente, na parte superior, as diferenças de valores se atenuam, até chegar a uma curiosa concordância na região próxima do bocal, conforme mostra a Tabela XIIC.

Tabela XIIC. Resultados comparativo entre os métodos para o deslocamento.

Ponto	Deslocamento		Erro
	EC	Ansys	
56	4,51	2,27	98,5%
57	4,18	2,40	74,4%
58	3,84	2,44	57,3%
59	3,41	2,43	40,5%
60	2,94	2,35	24,9%
61	2,45	2,29	6,9%
62	1,79	2,18	17,9%
63	1,31	1,99	34,1%
64	0,49	1,36	63,9%
65	0,15	0,70	78,7%
66	0,67	0,67	0,7%
67	0,66	0,66	0,7%



Para melhor ilustrar, nas figuras a seguir são apresentados os valores de deslocamento obtidos com o Método dos Elementos Finitos em segmentos ao longo da calota.

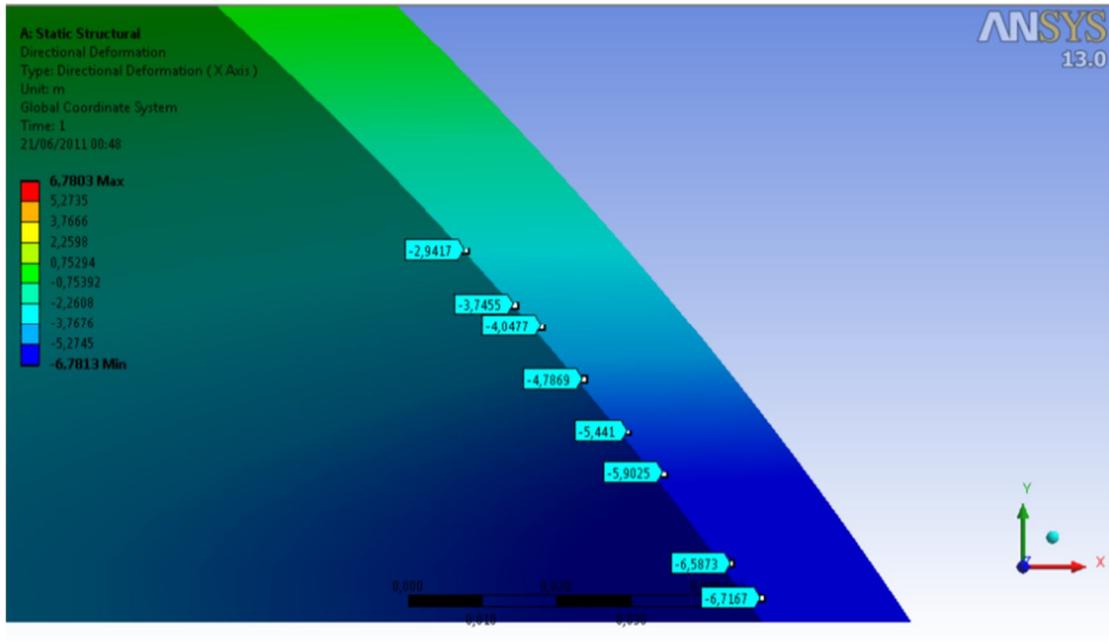


Figura 81 – Deslocamentos na região do tanque do Vaso de pressão – Elementos 38 à 45.

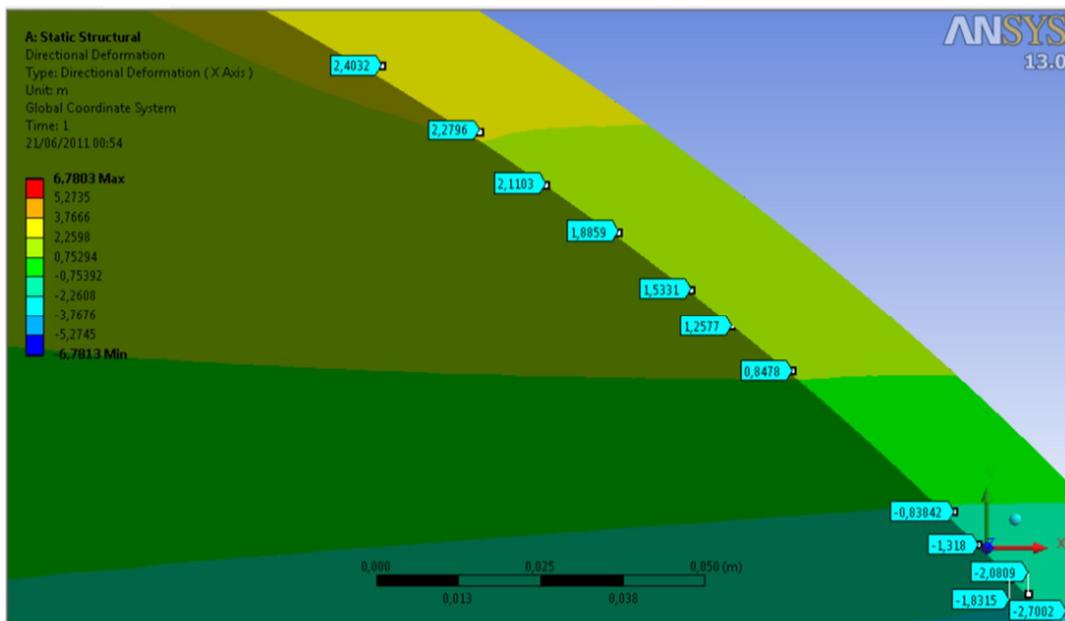


Figura 82 - Deslocamentos na região do tanque do Vaso de pressão – Elementos 46 à 57.

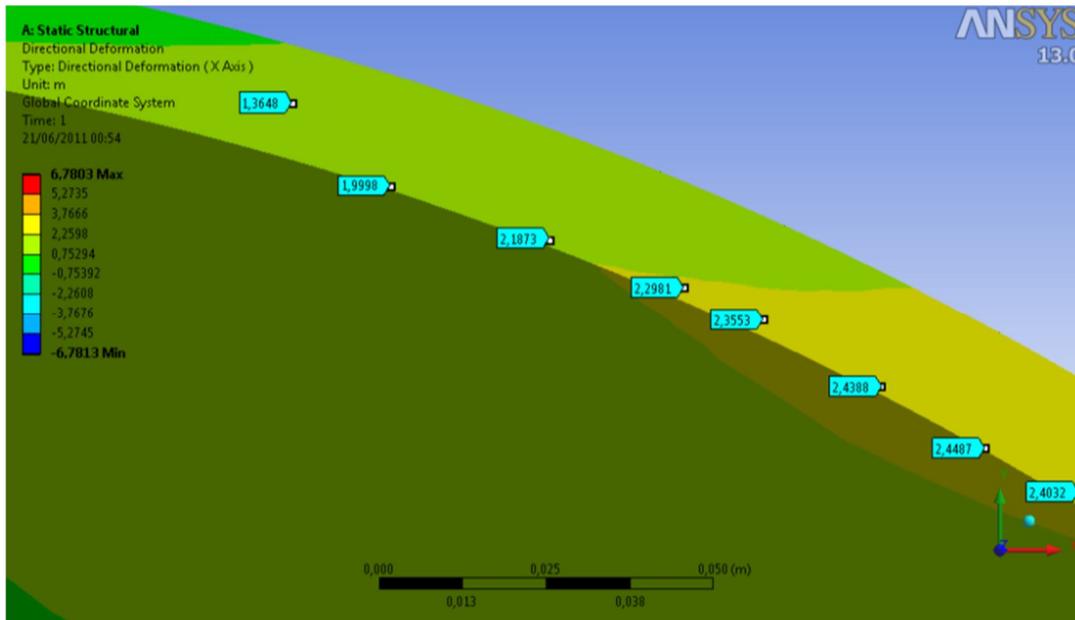


Figura 83 – Deslocamentos na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 57 à 64.

Os gráficos de deslocamento ao longo da superfície curvilínea para ambos os métodos, referente ao pontos nodais apresentados, dão uma melhor idéia da distribuição espacial das curvas de deslocamentos, ou seja, de sua tendência de comportamento na faixa citada.

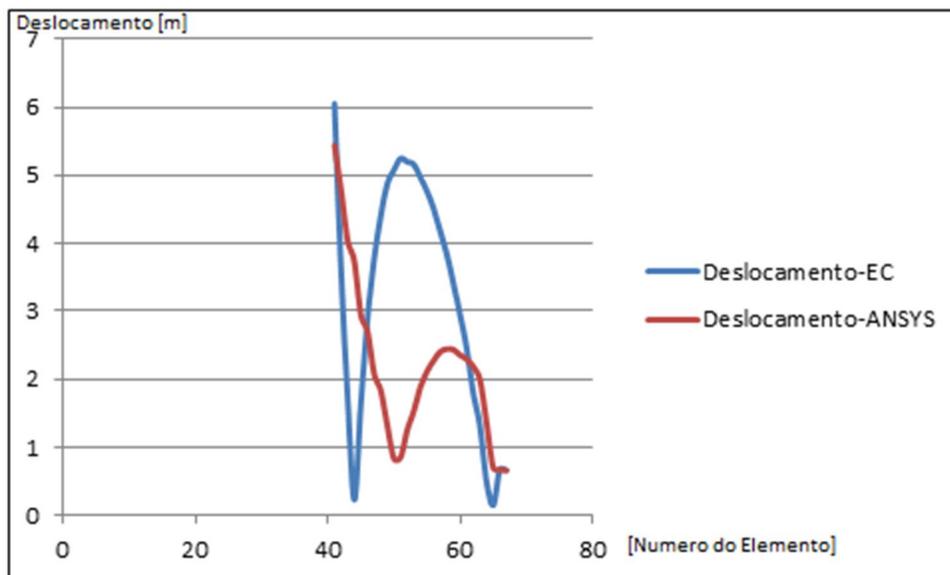


Figura 84 – Gráfico Comparativo entre os valores dos deslocamentos encontrados pelos diferentes métodos de análise utilizados.

Para as tensões, foram calculadas as tensões de Von Mises para ambos os métodos e retirados dos valores nos mesmos pontos nodais onde anteriormente foram coletados os deslocamentos. A tabela XIII mostra os valores dessas tensões equivalentes.

Tabela XIII - Tensão de Von Mises para ambos os métodos nos pontos da calota superior.

Ponto	Tensão de Von Mises		Erro
	EC	Ansys	
38	45,43	43,52	4,4%
39	16,90	16,83	0,4%
40	17,28	17,20	0,5%
41	27,41	26,77	2,4%
42	12,63	12,60	0,2%
43	21,28	20,77	2,5%
44	11,26	11,16	0,9%
45	10,83	10,86	0,3%
46	2,51	6,42	60,8%
47	5,11	6,34	19,4%
48	7,88	7,80	1,1%
49	10,26	10,19	0,7%
50	11,93	11,87	0,5%
51	14,73	14,69	0,3%
52	14,56	14,40	1,1%
53	16,77	16,72	0,3%
54	16,13	17,69	8,8%
55	16,63	18,28	9,0%
56	22,51	20,04	12,3%
57	21,64	21,08	2,7%
58	20,81	20,88	0,3%
59	20,92	20,82	0,5%
60	18,09	19,55	7,5%
61	19,66	19,66	0,0%
62	11,59	19,11	39,4%
63	10,46	18,35	43,0%
64	5,07	17,46	71,0%
65	29,60	22,03	34,4%
66	12,59	12,72	1,0%
67	33,89	25,68	32,0%

Mais uma vez, os resultados surpreendem, pois a concordância entre os valores de tensão é satisfatória, não obstante em alguns pontos perceberem-se diferenças acentuadas em alguns pontos.

Para ilustrar, nas figuras seguintes apresentam-se os valores de tensão de Von Mises em setores da calota, tal como mostrado anteriormente para os deslocamentos.

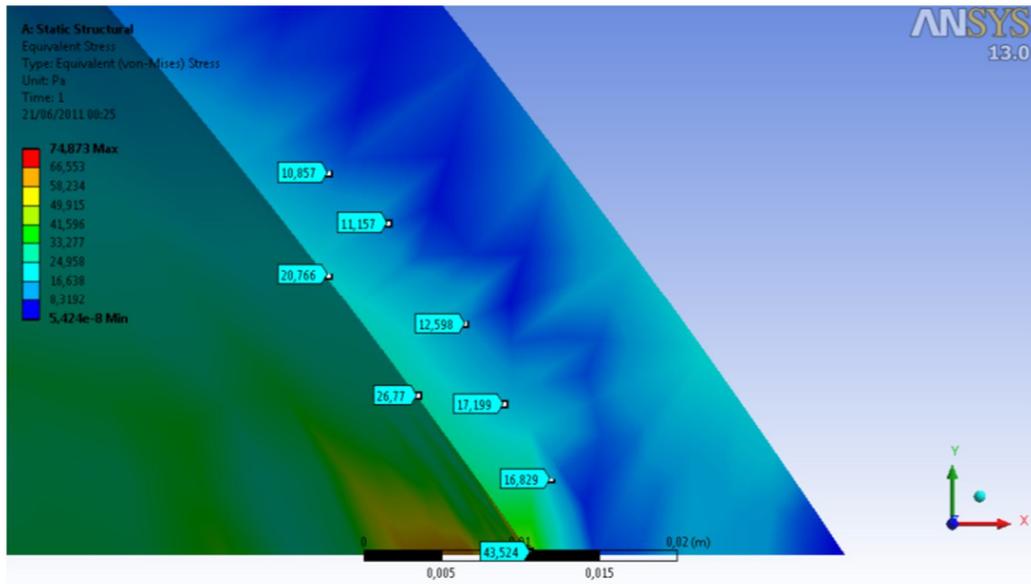


Figura 85 – Tensão de Von Mises na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 38à45.

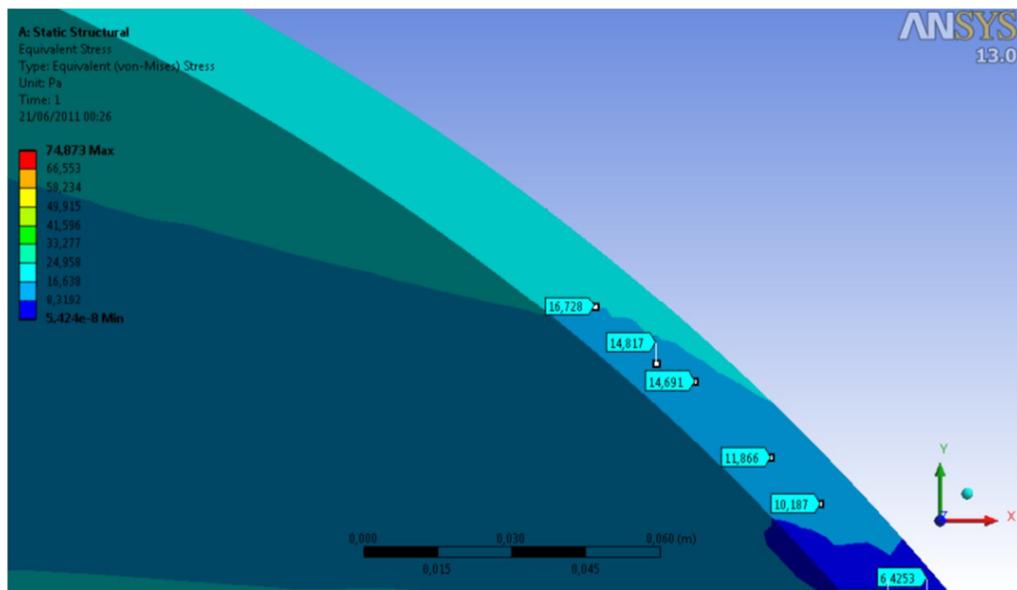


Figura 86 – Tensão de Von Mises na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 47à53.

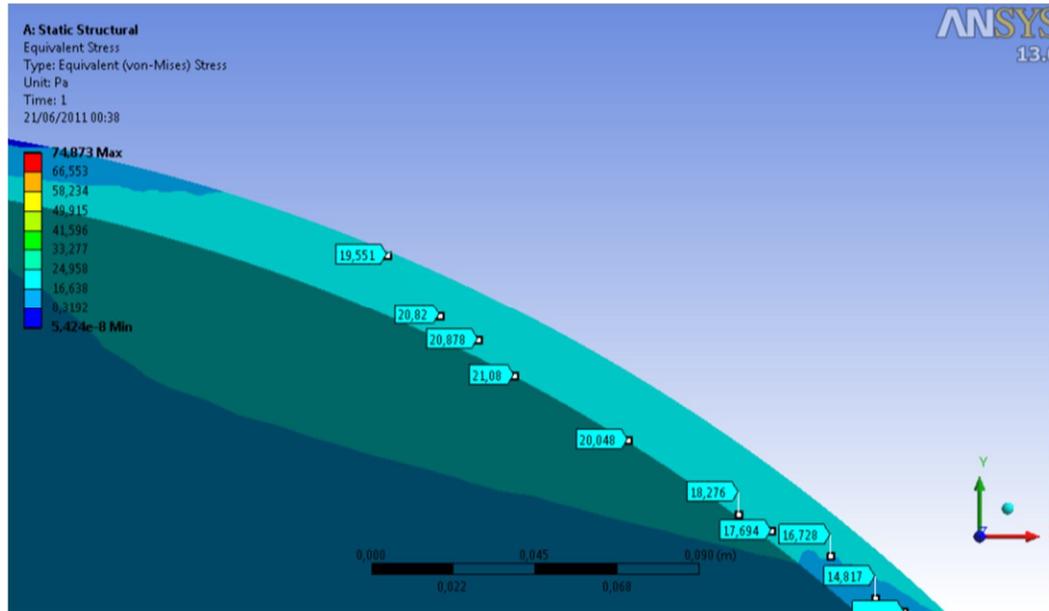


Figura 87 – Tensão de Von Mises na região do tampo do Vaso de pressão – Elementos 52à60.

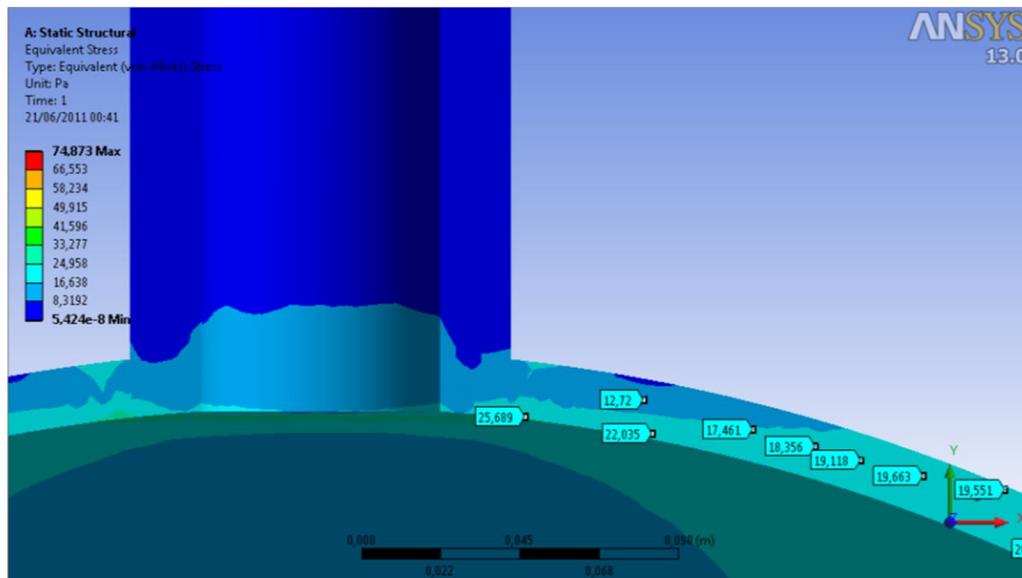


Figura 88 – Tensão de Von Mises na região da conexão Bocal-Tampo do Vaso de pressão – Elementos 60à 67.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

9 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existem atualmente diversas aplicações bem sucedidas e comprovadas do MEC em inúmeras soluções de engenharia realizadas em empresas de engenharia e universidades. Estas aplicações cada vez mais ratificam o método por sua grande capacidade em obter soluções rápidas, aproximadas e com alta precisão.

O método se apresenta como uma ferramenta de grande versatilidade e com sua sólida base matemática, aliada às constantes pesquisas que resultam em maior eficiência e resultados cada vez melhores, vem tendo sua aplicação prática bastante ampliada. Sabe-se que a aplicação do MEC para problemas axissimétricos é bastante vantajosa quando as equações integrais forem previamente integradas na direção circunferencial, resultando posteriormente num modelo bidimensional onde apenas a seção de revolução é discretizada. Esta simplificação provém do processo de integração da solução fundamental tridimensional ao longo da variável angular, que fica implícito no modelo computacional final. Desse modo, o MEC produz um modelo numérico conciso, com maior redução na quantidade de parâmetros. Na abordagem dos problemas axissimétricos encontra-se na solução das integrais circunferenciais de difícil tratamento analítico e computacional. Nesta dissertação utilizou-se a integração das equações e também a obtenção de derivadas envolvendo funções elípticas obtidas no trabalho desenvolvido por STIKAN [33].

Para os problemas de elasticidade bi e tridimensionais, o cálculo dos coeficientes C_{ij} é simples devido a técnica de imposição do deslocamento de corpo rígido nas direções dos eixos cartesianos. Além disto, para favorecer a redução do número de integrais singulares a serem resolvidas, no trabalho apresentado se fez o uso de pontos fonte fora do domínio. Tal recurso apresentou bons resultados obtidos nos exemplos apresentados.

Na teoria de placas de Timoshenko é sabido que no caso unidimensional a maior consistência nos resultados dos deslocamentos é encontrada para espessura de placas mais delgadas. Para espessuras grandes em relação ao comprimento da placa, a teoria é imprecisa.

No caso das tensões, os resultados numéricos mostraram globalmente melhor convergência conforme a malha foi sendo refinada. Analisando localmente os resultados das tensões para as simulações de cada espessura, nota-se que o refinamento produziu resultados distintos. Houve erros menores e certa convergência com o refinamento da malha, desconsiderando os efeitos referentes à introdução de elementos com tamanho discrepante nas arestas horizontais. Para as demais espessuras, o erro cresceu com o refinamento. A questão aqui mais uma vez está relacionada à precisão do modelo analítico. Sabe-se que sua precisão para a determinação das tensões é bem menor do que para os deslocamentos, pois o modelo analítico não representa adequadamente a distribuição das tensões no engaste, que é admitida linear, o que não é verdade para placas espessas. Pode-se afirmar que o modelo teórico é menos preciso quanto mais espessa é a placa. Assim, o fato dos resultados numéricos não convergirem para o caso apresentado não é um fator tão grave e já esperado considerando as limitações do método.

No segundo estudo foi analisado o Problema de Boussinesq, onde inicialmente esperava-se resultados numéricos que fossem razoavelmente mais próximos dos analíticos, porém apenas no cálculo das tensões σ_{zz} obteve-se resultados razoáveis e para os valores das tensões radiais foram obtidos as piores representações entre as tensões.

Os resultados surpreendentemente se tornaram piores, fato que pode ser reflexo de mau condicionamento numérico. Isto pode ser explicado devido à dificuldade em aplicar um carregamento de elevada amplitude em uma pequena região, enquanto na distribuição nos demais elementos foram prescritos valores nulos de tensão e deslocamento.

No terceiro caso, foi estudado o comportamento dos deslocamentos e tensões na região do tampo de um vaso de pressão através da comparação entre os resultados dos métodos dos elementos de contorno (MEC) e dos elementos finitos (MEF). Nos resultados obtidos para deslocamentos, esperavam-se valores maiores para as regiões das conexões inferior e região do bocal, que por não serem suaves, tendem a produzir elevados níveis de tensão por conta da maior rigidez geométrica.

As tensões de Von Mises para ambos os métodos e retirados dos valores nos mesmos pontos nodais onde anteriormente foram coletados os deslocamentos apresentaram bons resultados e baixa variação entre os resultados obtidos entre os métodos.

Apesar das diversas divergências encontradas em alguns casos de geometrias delgadas especiais, pode-se afirmar que a modelagem matemática é indiscutivelmente muito vantajosa, precisa e confiável. Através da elaboração de um programa computacional, seu manuseio computacional por usuários e pesquisadores é extremamente fácil; as interfaces para desenvolvimento do código e acoplamento de recursos gráficos são muito simples e seus resultados são indiscutivelmente satisfatórios para as aplicações em engenharia, com dispêndio computacional bastante reduzido.

Assim, segue como sugestão para trabalhos futuros uma revisão no programa utilizado, considerando a utilização de diferentes valores para o módulo de Young, peso específico nas simulações e uma melhor saída gráfica para os resultados obtidos nas simulações. Temos também como sugestão a adaptação do software para a utilização de sub-regiões, evitando assim as singularidades e melhorando os resultados obtidos.

CAPÍTULO 10

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALBUQUERQUE, LEVI BARCELOS, 1999. Categorização de Tensões em Modelos de Elementos Finitos de Conexão Boca-Vaso de Pressão, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, (SP), Brasil.
- [2] BLANDORF G. E., INGRAFFEA A. R., LIGGET J. A. (1981): Two-dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method .pp.387–404.
- [3] BONNET, M. (1999): *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. Wiley, WestSussex.
- [4] BREBBIA, C.A., 1978, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, 1978.
- [5] BREBBIA, C. A., 1981, *Progress in Boundary Element Methods*, Halsted Press, New York.
- [6] BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. (1984): *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin.
- [7] BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. (1992): *Boundary Element: An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK
- [8] CHAVES, ALISSON PINTO, 2003, Estudo e Implementação das Equações Integrais de Contorno para Problemas Tridimensionais de Elasticidade, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, (MG), Brasil.
- [9] CISTERNAS, M.A.C., Elastoplasticidade Axissimétrica com Forças de Volume pelo Método do Elementos de Contorno. Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.
- [10] CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. (1990), Alternative boundary element formulation for elastodynamics. In: INTERN. CONFERENCE ON BOUNDARY ELEM. IN ENGG, 12., CMP. v.1, p.517-534.
- [11] CROUCH, S. L., STARFIELD, A. M. (1983): *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*. George Allen and Unwin, London
- [12] CRUSE, T. A., SNOW, D. W. & WILSON, R. B., 1977, Numerical Solutions in Axisymmetric Elasticity, *Computers & Structures*, vol. 7, pp. 445-451.

- [13] HARTOG, J.P., 1952, *Advanced Strength of Materials* - McGRAW-Hill Book Company
- [14] JORGE, A. B.; RIBEIRO, G. O.; CRUSE, T. A.; FISHER, T. S. (2001): Self-Regular Boundary Integral Equation Formulations for Laplace's Equation in 2-D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, n. 1, pp. 1–29.
- [15] KERMANIDIS, T., 1975, A numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems, *Int. J. Solids Structures*, vol. 11, pp. 493-500.
- [16] KYTHE, P. K., 1995, *An Introduction to Boundary Element Methods*, CRC Press, Boca Raton.
- [17] LOVE A. E. H. (1944): *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover: New York.
- [18] LUTZ, E.; INGRAFFEA, A. R.; Gray, L. J. (1992): Use of 'Simple Solutions' for Boundary Integral Methods in Elasticity and Fracture Analysis. pp.1735 - 1751.
- [19] MAYR, M., DREXLER, W. & KUHN, G., 1980, A Semianalytical Boundary Integral Approach for Axisymmetric Elastic Bodies with Arbitrary Boundary Conditions, *J. Solids Structures*, vol. 16, pp. 863-871.
- [20] JASWON, M.A., SYMM, G.T., *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics- Computational Mechanics and Applications-* Academic Press, 1977, 287 p.
- [21] LACHAT, J. C., WATSON, J. O. Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three Dimensional Elastostatics. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.10, p.991-1005, 1976.
- [22] LITTLE, ROBERT, Wm., 1973, *Elasticity – 1st Edition – N.M. Newmark and W.J.Hall editors.*
- [23] SCUCIATO, R, FERNANDO, 2007, *Estudo Teórico e Implementação Computacional do Método de Elementos de Contorno Aplicado a Problemas Eletostáticos Lineares Bidimensionais – Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná–Brasil.*
- [24] TIMOSHENKO, S., GOODIER, J. N., 1966, *Resistência dos Materiais – Volume II – 3ª Edição - Livro Técnico S.A*
- [25] TIMOSHENKO, S., GOODIER, J. N., 1970, *Theory of Elasticity – Third Edition McGRAW-Hill International Editions.*
- [26] PISSARENKO, G.S.; IAKOLEV, A.P.; MATVEIEV, V.V., 1985, *Prontuário de Resistência de Materiais. Editora MIR.*

- [29] POLCH, E. Z., CRUSE, T. A., HUANG, C. J. Traction BIE Solutions for Flat Cracks.
Comp. Mech., v.2, p.253-267, 1987.
- [30] PORTO, PAULO AUGUSTO CAPETTI RODRIGUES, 2006. Modelagem de Problemas Bidimensionais através de Formulação Variacional Auto-regularizada do Método dos Elementos de Contorno, Dissertação de Mestrado, Universidade de Itajubá, (MG), Brasil.
- [31] RIBEIRO, T.S.A. *Algoritmos não-singulares do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais de elasticidade*. 2003. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais.
- [32] SHIGLEY, JOSEPH EDWARD, 1984. Elementos de Máquinas. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- [33] STIKAN, RAFAEL PACHECO, 2006. Tensores Fundamentais da Formulação dos Problemas Elásticos Axissimétricos pelo Método dos Elementos de Contorno, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, (ES), Brasil.

APÊNDICE A

$$\frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r} = \frac{A_1}{b^3 r^2 \rho (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) \left[v(-32r\rho^5 \hat{z}^2 - 32\hat{z}^4 r\rho^3 - 8h^2 r\rho^3 - 8h^2 r\rho \hat{z}^2 + 32\rho^6 \hat{z}^2 + 32\hat{z}^4 \rho^4 + 16h\rho^4 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^4 + 16h\rho^2 \hat{z}^4 + 8h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 4h^3 \rho^2 + 4h^3 \hat{z}^2) + 24r\rho^5 \hat{z}^2 + 32\hat{z}^4 r\rho^3 + 2hr\rho^3 \hat{z}^2 + 6h^2 r\rho^3 - 2hr\rho \hat{z}^4 + 10h^2 r\rho \hat{z}^2 - 24\rho^6 \hat{z}^2 - 32\hat{z}^4 \rho^4 - 14h\rho^4 \hat{z}^2 - 6h^2 \rho^4 - 14h\rho^2 \hat{z}^4 - 11h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 3h^3 \rho^2 + h^2 \hat{z}^4 - 5h^3 \hat{z}^2 \right] + E(m, \pi/2) \left[v(-64\hat{z}^4 \rho^4 - 16h\hat{z}^4 \rho^2 + 16h\hat{z}^2 \rho^4 - 16h^2 \hat{z}^2 \rho^2 - 4h^3 \hat{z}^2 + 4h^3 \rho^2) + 12\hat{z}^6 \rho^2 + 44\hat{z}^4 \rho^4 - 4h\hat{z}^4 \rho^2 - h^2 \hat{z}^4 - 4h\hat{z}^2 \rho^4 + 23h^2 \hat{z}^2 \rho^2 + 5h^3 \hat{z}^2 - 3h^3 \rho^2 \right] \right\} \quad (5.09)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r \rho (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) \left[v(32\hat{z}^2 \rho^3 r + 8h^2 r\rho - 32\hat{z}^2 \rho^4 - 16h\rho^2 \hat{z}^2 - 8h^2 \rho^2 - 4h^3) - 36\hat{z}^2 \rho^3 r + 2hr\rho \hat{z}^2 - 10h^2 r\rho + 36\hat{z}^2 \rho^4 + 16h\rho^2 \hat{z}^2 + 10h^2 \rho^2 - h^2 \hat{z}^2 + 5h^3 \right] + E(m, \pi/2) \left[v(32\hat{z}^2 \rho^4 + 16h\rho^2 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^2 + 4h^3) - 24\hat{z}^2 \rho^4 - 12\hat{z}^4 \rho^2 - 4h\rho^2 \hat{z}^2 - 10h^2 \rho^2 + h^2 \hat{z}^2 - 5h^3 \right] \right\} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r^2 (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left[K(m, \pi/2) (12\hat{z}^2 r\rho^3 - 4\hat{z}^4 r\rho + 4hr\rho \hat{z}^2 + 2h^2 r\rho - 12\hat{z}^2 \rho^4 + 4\hat{z}^4 \rho^2 - 10h\hat{z}^2 \rho^2 - 2h^2 \rho^2 + 2h\hat{z}^4 - 2h^2 \hat{z}^2 - h^3) + E(m, \pi/2) (8\hat{z}^2 \rho^4 + 12h\rho^2 \hat{z}^2 - 2h^2 \rho^2 - 8h\hat{z}^4 + 12h^2 \hat{z}^2 - 3h^3) \right] \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} = \frac{A_1}{b^3 r (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left[K(m, \pi/2) (-8\rho^3 r\hat{z}^2 + 4r\rho \hat{z}^4 - 2hr\rho \hat{z}^2 - 2h^2 r\rho + 8\rho^4 \hat{z}^2 - 4\hat{z}^4 \rho^2 + 6h\hat{z}^2 \rho^2 + 2h^2 \rho^2 - 2h\hat{z}^4 + h^2 \hat{z}^2 + h^3) + E(m, \pi/2) (-12\hat{z}^4 r^2 - 4fr^2 \hat{z}^2 + f^2 \hat{z}^2 + f^3) \right] \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r \rho (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left[K(m, \pi/2) (-4\hat{z}^2 \rho^3 r + 2hr\rho \hat{z}^2 - 2h^2 r\rho + 4\hat{z}^2 \rho^4 + 2h^2 \rho^2 - h^2 \hat{z}^2 + h^3) + E(m, \pi/2) (-12r^4 \rho^2 - 12r^2 \rho^4 + 16ar^2 \rho^2 - a^2 r^2 - a^2 \rho^2) \right] \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z} = \frac{C24}{b^3 \rho (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot [K(m, \pi/2) (-4rp \hat{z}^4 + 8r^3 \rho \hat{z}^2 - 2f \rho \hat{z}^2 r + 2f^2 \rho r - 2f \hat{z}^4 + 4\hat{z}^4 r^2 - 8r^4 \hat{z}^2 + 6f \hat{z}^2 r^2 - f^2 \hat{z}^2 - 2f^2 r^2 + f^3) + E(m, \pi/2) (12\hat{z}^4 \rho^2 - 4h \hat{z}^2 \rho^2 - h^2 \hat{z}^2 + h^3)] \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r} = \frac{A_1}{b^3 r (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(32r^3 \rho^3 - 16ar^2 \rho^2 - 8a^2 r \rho + 4a^3) + 4r^5 \rho - 2ar^4 - 20r^3 \rho^3 - 6ar^3 \rho + 10ar^2 \rho^2 + 3a^2 r^2 - 2ar \rho^3 + 8a^2 r \rho + a^2 \rho^2 - 4a^3] + E(m, \pi/2) [v(16fr^2 \hat{z}^2 + 4f^3) - 12\hat{z}^4 r^2 - 20fr^2 \hat{z}^2 + f^2 \hat{z}^2 - 3f^3] \right\} \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) \cdot \hat{z}^2 (-4rp + 2a) + E(m, \pi/2) [v(-32r^2 \rho^2 + 8a^2) + 8ap^2 + 8r^2 \rho^2 + 8ar^2 - 10a^2] \right\} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r} = \frac{A_1 \cdot (v-1)}{b^3 r^2 \rho d} \cdot [K(m, \pi/2) (16r^4 \rho^2 - 16ap^2 r^2 - 4a^2 r^2 + 4a^3) + E(m, \pi/2) (-16r^3 \rho \hat{z}^2 + 8f \rho r^3 - 8f^2 \rho r - 16r^4 \hat{z}^2 + 8f \hat{z}^2 r^2 + 8fr^4 - 12f^2 r^2 + 4f^3)] \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z} \cdot (v-1)}{b^3 r \rho d} \cdot [K(m, \pi/2) (-16\hat{z}^2 \rho^2 - 4h^2) + E(m, \pi/2) \cdot a(8r \rho + 4a)] \quad (5.18)$$

Assim como as derivadas dos p_{ij}^* 's em relação ao ponto "P" que serão apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial p_{rr}^*}{\partial r} = \mu \left\{ n_z \left(\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \zeta \partial r} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial r} \right) + \frac{2n_r}{(1-2v)} \left[(1-v) \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial r} + v \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \zeta \partial r} \right) \right] \right\} \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial p_{rz}^*}{\partial r} = \mu \left\{ n_r \left(\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \zeta \partial r} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial r} \right) + \frac{2n_z}{(1-2v)} \left[(1-v) \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \zeta \partial r} + v \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial r} \right) \right] \right\} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial p_{zr}^*}{\partial r} = \mu \left\{ n_z \left(\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \zeta \partial r} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial r} \right) + \frac{2n_r}{(1-2v)} \left[(1-v) \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial r} + v \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \zeta \partial r} \right) \right] \right\} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial p_{zz}^*}{\partial r} = \mu \left\{ n_r \left(\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \zeta \partial r} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial r} \right) + \frac{2n_z}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \zeta \partial r} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial r} \right) \right] \right\} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial p_{\theta\theta}^*}{\partial r} = \mu \left[n_r \left(\frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \rho \partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r} \right) + n_z \frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \zeta \partial r} \right] \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial p_{rr}^*}{\partial z} = \mu \left\{ n_z \left(\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \zeta \partial z} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial z} \right) + \frac{2n_r}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial z} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \zeta \partial z} \right) \right] \right\} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial p_{rz}^*}{\partial z} = \mu \left\{ n_r \left(\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \zeta \partial z} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial z} \right) + \frac{2n_z}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \zeta \partial z} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial z} \right) \right] \right\} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial p_{zr}^*}{\partial z} = \mu \left\{ n_z \left(\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \zeta \partial z} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial z} \right) + \frac{2n_r}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial z} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \zeta \partial z} \right) \right] \right\} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial p_{zz}^*}{\partial z} = \mu \left\{ n_r \left(\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \zeta \partial z} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial z} \right) + \frac{2n_z}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \zeta \partial z} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial z} \right) \right] \right\} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial p_{\theta\theta}^*}{\partial z} = \mu \left[n_r \left(\frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z} \right) + n_z \frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \zeta \partial z} \right] \quad (5.28)$$

Seguindo um desenvolvimento similar são apresentadas a seguir as derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1}{\left[\begin{array}{l} c^3 r^2 \rho^2 (-32 r \rho^5 z^2 - 16 e r \rho^3 z^2 - 8 e^2 r \rho^3 - 4 e^3 r \rho + 32 \rho^6 z^2 - 16 z^4 \rho^4 + 32 e \rho^4 z^2 + \\ 8 e^2 \rho^4 + 8 e^3 \rho^2 + e^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left\{ K(m, \pi/2) [v(-64 \hat{z}^4 r^7 \rho + 192 \hat{z}^6 r^5 \rho + 64 f r^5 \hat{z}^4 - 16 f^2 r^5 \hat{z}^2 + 80 f^2 r^3 \hat{z}^4 + 16 f^3 r^3 \hat{z}^2 + \right.$$

$$8 f^4 r \hat{z}^2 + 64 \hat{z}^4 r^8 - 192 \hat{z}^6 r^6 - 96 f r^6 \hat{z}^4 + 16 f^2 \hat{z}^2 r^6 + 96 f r^4 \hat{z}^6 - 48 f^2 \hat{z}^4 r^4 - 24 f^3 \hat{z}^2 r^4 +$$

$$40 f^3 \hat{z}^4 r^2 + 4 f^5 \hat{z}^2) + 32 \hat{z}^4 r^7 \rho - 176 \hat{z}^6 r^5 \rho + 24 f^2 r^5 \hat{z}^2 - 40 f r^3 \hat{z}^6 - 132 f^2 r^3 \hat{z}^4 - 24 f^3 r^3 \hat{z}^2$$

$$- 2 f^3 r \hat{z}^4 - 10 f^4 r \hat{z}^2 - 32 \hat{z}^4 r^8 + 176 \hat{z}^6 r^6 + 16 f r^6 \hat{z}^4 - 24 f^2 \hat{z}^2 r^6 - 48 f r^4 \hat{z}^6 + 132 f^2 \hat{z}^4 r^4 +$$

$$36 f^3 \hat{z}^2 r^4 - 20 f^2 \hat{z}^6 r^2 - 64 f^3 \hat{z}^4 r^2 - 2 f^4 \hat{z}^2 r^2 - f^4 \hat{z}^4 - 5 f^5 \hat{z}^2] + E(m, \pi/2) [v(-128 \hat{z}^4 r^8 +$$

$$256 \hat{z}^6 r^6 + 256 f \hat{z}^4 r^6 - 192 f \hat{z}^6 r^4 - 64 f^2 \hat{z}^4 r^4 + 32 f^3 r^4 \hat{z}^2 + 8 f^4 r^4 - 64 f^3 r^2 \hat{z}^4 - 32 f^4 r^2 \hat{z}^2 -$$

$$8 f^5 r^2 - 4 f^5 \hat{z}^2) + 32 \hat{z}^4 r^8 - 56 \hat{z}^6 r^6 + 32 f \hat{z}^4 r^6 + 48 f^2 r^6 \hat{z}^2 - 120 \hat{z}^8 r^4 - 120 f \hat{z}^6 r^4 - 222 f^2 \hat{z}^4 r^4$$

$$- 96 f^3 r^4 \hat{z}^2 - 6 f^4 r^4 + 38 f^2 \hat{z}^6 r^2 + 118 f^3 r^2 \hat{z}^4 + 44 f^4 r^2 \hat{z}^2 + 6 f^5 r^2 + f^4 \hat{z}^4 + 5 f^5 \hat{z}^2] \left. \right\} \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[\begin{array}{l} b^3 r \rho^2 (-32 \rho^5 r \hat{z}^2 - 16 h r \rho^3 \hat{z}^2 - 8 h^2 r \rho^3 - 4 h^3 r \rho + 32 \rho^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 \rho^4 + 32 h \hat{z}^2 \rho^4 + \\ 8 h^2 \rho^4 + 8 h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left\{ K(m, \pi/2) [v(-192 \hat{z}^4 \rho^5 r + 32 h \hat{z}^2 \rho^5 r - 80 h^2 \hat{z}^2 \rho^3 r + 8 h^3 \rho^3 r - 8 h^4 r \rho + 192 \hat{z}^4 \rho^6 - 32 h \hat{z}^2 \rho^6 \right.$$

$$+ 96 h \hat{z}^4 \rho^4 + 64 h^2 \hat{z}^2 \rho^4 - 8 h^3 \rho^4 + 40 h^3 \rho^2 \hat{z}^2 + 4 h^4 \rho^2 + 4 h^5) + 200 \hat{z}^4 \rho^5 r - 8 h \hat{z}^2 \rho^5 r - 40 h r \rho^3 \hat{z}^4$$

$$+ 122 h^2 \hat{z}^2 \rho^3 r - 10 h^3 \rho^3 r - 2 h^3 \hat{z}^2 r \rho + 10 h^4 r \rho - 200 \hat{z}^4 \rho^6 + 8 h \hat{z}^2 \rho^6 - 60 h \hat{z}^4 \rho^4 - 118 h^2 \hat{z}^2 \rho^4 +$$

$$10 h^3 \rho^4 + 20 h^2 \hat{z}^4 \rho^2 - 59 h^3 \rho^2 \hat{z}^2 - 5 h^4 \rho^2 + h^4 \hat{z}^2 - 5 h^5] + E(m, \pi/2) [v(192 r^4 \rho^6 - 192 a r^4 \rho^4$$

$$- 32 a^2 r^2 \rho^4 + 64 a^3 r^2 \rho^2 - 4 a^4 \rho^2 - 4 a^5) - 120 r^6 \rho^4 - 360 r^4 \rho^6 + 476 a r^4 \rho^4 - 38 a^2 r^4 \rho^2 + 116 a r^2 \rho^6$$

$$- 114 a^2 r^2 \rho^4 - 39 a^3 r^2 \rho^2 + a^4 r^2 + 3 a^3 \rho^4 + 3 a^4 \rho^2 + 4 a^5] \left. \right\} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \zeta \partial z} = \frac{A_1}{\left[\frac{b^3 r \rho (-32 \rho^5 r \hat{z}^2 - 16 h r \rho^3 \hat{z}^2 - 8 h^2 r \rho^3 - 4 h^3 r \rho + 32 \rho^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 \rho^4 + 32 h \rho^4 \hat{z}^2 + 8 h^2 \rho^4 + 8 h^3 \rho^2 + h^4)}{K(m, \pi/2) [v(-128 \rho^5 r^5 + 32 a \rho^5 r^3 + 64 a \rho^4 r^4 - 16 a^2 \rho^4 r^2 + 32 a \rho^3 r^5 + 32 a^2 \rho^3 r^3 - 8 a^3 \rho^3 r - 16 a^2 \rho^2 r^4 - 16 a^3 \rho^2 r^2 + 4 a^4 \rho^2 - 8 a^3 \rho r^3 + 4 a^4 r^2) + 40 \rho^7 r^3 - 20 a \rho^6 r^2 + 240 \rho^5 r^5 - 144 a \rho^5 r^3 + 6 a^2 \rho^5 r - 120 a \rho^4 r^4 + 72 a^2 \rho^4 r^2 - 3 a^3 \rho^4 + 40 \rho^3 r^7 - 144 a \rho^3 r^5 + 36 a^2 \rho^3 r^3 + 4 a^3 \rho^3 r - 20 a \rho^2 r^6 + 72 a^2 \rho^2 r^4 - 18 a^3 \rho^2 r^2 - 2 a^4 \rho^2 + 6 a^2 \rho r^5 + 4 a^3 \rho r^3 - 3 a^3 r^4 - 2 a^4 r^2] + E(m, \pi/2) [v(128 \hat{z}^4 r^6 - 192 \hat{z}^6 r^4 - 192 f \hat{z}^4 r^4 - 32 f^2 \hat{z}^4 r^2 - 32 f^3 r^2 \hat{z}^2 - 8 f^4 r^2 + 4 f^4 \hat{z}^2 + 4 f^5) - 96 \hat{z}^4 r^6 + 152 \hat{z}^6 r^4 + 48 f \hat{z}^4 r^4 - 48 f^2 r^4 \hat{z}^2 + 116 f \hat{z}^6 r^2 + 198 f^2 \hat{z}^4 r^2 + 88 f^3 r^2 \hat{z}^2 + 10 f^4 r^2 - 3 f^3 \hat{z}^4 - 8 f^4 \hat{z}^2 - 5 f^5] \right]} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \zeta \partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[\frac{b^3 r^2 \rho (-32 \rho^5 r \hat{z}^2 - 16 h r \rho^3 \hat{z}^2 - 8 h^2 r \rho^3 - 4 h^3 r \rho + 32 \rho^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 \rho^4 + 32 h \rho^4 \hat{z}^2 + 8 h^2 \rho^4 + 8 h^3 \rho^2 + h^4)}{K(m, \pi/2) [v(192 r^5 \rho^5 - 32 a r^5 \rho^3 - 96 a r^4 \rho^4 + 16 a^2 r^4 \rho^2 - 80 a^2 r^3 \rho^3 + 8 a^3 r^3 \rho + 40 a^3 r^2 \rho^2 - 4 a^4 r^2 + 8 a^4 r \rho - 4 a^5) - 40 r^7 \rho^3 + 20 a r^6 \rho^2 - 280 r^5 \rho^5 + 120 a r^5 \rho^3 - 6 a^2 r^5 \rho + 140 a r^4 \rho^4 - 60 a^2 r^4 \rho^2 + 3 a^3 r^4 + 40 a \rho^5 r^3 + 54 a^2 r^3 \rho^3 - 6 a^3 r^3 \rho - 20 a^2 r^2 \rho^4 - 27 a^3 r^2 \rho^2 + 3 a^4 r^2 - 2 a^3 r \rho^3 - 8 a^4 r \rho + a^4 \rho^2 + 4 a^5] + E(m, \pi/2) [v(192 \hat{z}^4 r^6 + 128 f r^6 \hat{z}^2 - 192 f r^4 \hat{z}^4 - 32 f^2 r^4 \hat{z}^2 + 32 f^3 r^4 - 64 f^3 r^2 \hat{z}^2 - 20 f^4 r^2 - 4 f^5) - 80 \hat{z}^4 r^6 - 32 f r^6 \hat{z}^2 - 120 \hat{z}^6 r^4 - 36 f r^4 \hat{z}^4 - 112 f^2 r^4 \hat{z}^2 - 40 f^3 r^4 + 38 f^2 r^2 \hat{z}^4 + 107 f^3 r^2 \hat{z}^2 + 25 f^4 r^2 + f^4 \hat{z}^2 + 5 f^5] \right]} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1}{\left[\frac{b^3 r^2 \rho (-32 r^5 \rho \hat{z}^2 + 16 f r^3 \rho \hat{z}^2 - 8 f^2 r^3 \rho + 4 f^3 \rho r + 32 r^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 r^4 - 32 f r^4 \hat{z}^2 + 8 f^2 r^4 - 8 f^3 r^2 + f^4)}{K(m, \pi/2) [-8 \rho r^5 \hat{z}^5 + 24 f \rho r^5 \hat{z}^3 - 40 f r^3 \rho \hat{z}^5 - 42 f^2 r^3 \rho \hat{z}^3 - 2 f^3 \rho r^3 \hat{z} - 2 f^3 \rho r \hat{z}^3 - 2 f^4 \rho r \hat{z} + 8 \hat{z}^5 r^6 - 24 f r^6 \hat{z}^3 + 36 f r^4 \hat{z}^5 + 54 f^2 r^4 \hat{z}^3 + 2 f^3 r^4 \hat{z} - 20 f^2 \hat{z}^5 r^2 - 19 f^3 \hat{z}^3 r^2 + f^4 r^2 \hat{z} - f^4 \hat{z}^3 - f^5 \hat{z}] + E(m, \pi/2) [-80 \hat{z}^5 \rho^6 + 96 h \hat{z}^3 \rho^6 + 64 \hat{z}^7 \rho^4 - 276 h \rho^4 \hat{z}^5 + 192 h^2 \hat{z}^3 \rho^4 - 8 h^3 \rho^4 \hat{z} + 116 h \hat{z}^7 \rho^2 - 220 h^2 \hat{z}^5 \rho^2 + 115 h^3 \hat{z}^3 \rho^2 - 11 h^4 \rho^2 \hat{z} - 3 h^3 \hat{z}^5 + 5 h^4 \hat{z}^3 - 2 h^5 \hat{z}]} \right]} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{rz}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1}{b^3 r \rho (-16 \rho^4 r^4 + 16 a \rho^3 r^3 - 4 a^3 \rho r + a^4)} \cdot [K(m, \pi/2) (32 \hat{z}^4 r \rho^5 - 40 \hat{z}^6 r \rho^3 + 32 h r \rho^3 \hat{z}^4 + 6 h^2 r \rho \hat{z}^4 - 8 h^3 r \rho \hat{z}^2 + 2 h^4 r \rho - 32 \hat{z}^4 \rho^6 + 40 \hat{z}^6 \rho^4 - 48 h \rho^4 \hat{z}^4 + 20 h \rho^2 \hat{z}^6 - 22 h^2 \hat{z}^4 \rho^2 + 8 h^3 \rho^2 \hat{z}^2 - 2 h^4 \rho^2 - 3 h^3 \hat{z}^4 + 4 h^4 \hat{z}^2 - h^5) + E(m, \pi/2) (-192 r^6 \rho^4 + 116 a r^6 \rho^2 - 192 r^4 \rho^6 + 440 a r^4 \rho^4 - 200 a^2 r^4 \rho^2 + 3 a^3 r^4 + 116 a r^2 \rho^6 - 200 a^2 r^2 \rho^4 + 82 a^3 r^2 \rho^2 - 2 a^4 r^2 + 3 a^3 \rho^4 - 2 a^4 \rho^2)] \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{rz}^*}{\partial \zeta \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[b^3 r (-32 r \rho^5 \hat{z}^2 - 16 h \hat{z}^2 \rho^3 r - 8 h^2 r \rho^3 - 4 h^3 r \rho + 32 \rho^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 \rho^4 + 32 h \hat{z}^2 \rho^4 + 8 h^2 \rho^4 + 8 h^3 \rho^2 + h^4) \right]} \cdot [K(m, \pi/2) (-40 \hat{z}^4 r^3 \rho - 8 f \rho \hat{z}^2 r^3 + 6 f^2 \rho \hat{z}^2 r + 6 f^3 \rho r + 40 \hat{z}^4 r^4 - 20 f r^2 \hat{z}^4 + 8 f \hat{z}^2 r^4 - 10 f^2 \hat{z}^2 r^2 + 3 f^3 \hat{z}^2 - 6 f^3 r^2 + 3 f^4) + E(m, \pi/2) (-16 \hat{z}^4 r^4 - 32 f r^4 \hat{z}^2 + 116 f r^2 \hat{z}^4 + 112 f^2 r^2 \hat{z}^2 + 24 f^3 r^2 - 3 f^3 \hat{z}^2 - 3 f^4)] \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{rz}^*}{\partial \zeta \partial r} = \frac{A_1}{\left[b^3 r^2 (-32 r \rho^5 \hat{z}^2 - 16 h \hat{z}^2 \rho^3 r - 8 h^2 r \rho^3 - 4 h^3 r \rho + 32 \rho^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 \rho^4 + 32 h \hat{z}^2 \rho^4 + 8 h^2 \rho^4 + 8 h^3 \rho^2 + h^4) \right]} \cdot [K(m, \pi/2) (-32 \hat{z}^4 r^5 \rho - 40 f \hat{z}^4 r^3 \rho - 32 f^2 \hat{z}^2 r^3 \rho - 2 f^3 \hat{z}^2 r \rho - 2 f^4 \rho r + 32 \hat{z}^4 r^6 + 24 f \hat{z}^4 r^4 + 32 f^2 r^4 \hat{z}^2 - 20 f^2 r^2 \hat{z}^4 - 14 f^3 r^2 \hat{z}^2 + 2 f^4 r^2 - f^4 \hat{z}^2 - f^5) + E(m, \pi/2) (-120 \hat{z}^6 r^4 + 32 \hat{z}^4 r^6 - 144 f r^4 \hat{z}^4 + 38 f^2 r^2 \hat{z}^4 - 48 f^2 \hat{z}^2 r^4 + 32 f^3 r^2 \hat{z}^2 + f^4 \hat{z}^2 + 2 f^4 r^2 + f^5)] \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{zr}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^5 r \rho^2 (8 r \rho^5 - 8 a r \rho^3 + 8 r \rho^3 \hat{z}^2 - 6 a^2 r \rho - 12 a \rho^4 - 12 a \hat{z}^2 \rho^2 + 12 a^2 \rho^2 + a^3)} \cdot [K(m, \pi/2) (56 \hat{z}^4 r^5 \rho + 24 f \rho r^5 \hat{z}^2 - 40 \hat{z}^6 r^3 \rho - 56 f \rho r^3 \hat{z}^4 - 18 f^2 \rho r^3 \hat{z}^2 - 2 f^3 \rho r^3 + 6 f^2 \rho r \hat{z}^4 + 10 f^3 \rho r \hat{z}^2 + 4 f^4 \rho r - 56 \hat{z}^4 r^6 - 24 f r^6 \hat{z}^2 + 40 \hat{z}^6 r^4 + 84 f r^4 \hat{z}^4 + 30 f^2 r^4 \hat{z}^2 + 2 f^3 r^4 - 20 f r^2 \hat{z}^6 - 34 f^2 r^2 \hat{z}^4 - 19 f^3 \hat{z}^2 r^2 - 5 f^4 r^2 + 3 f^3 \hat{z}^4 + 5 f^4 \hat{z}^2 + 2 f^5) + E(m, \pi/2) (-112 \hat{z}^4 \rho^6 + 96 h \rho^6 \hat{z}^2 + 120 \hat{z}^6 \rho^4 - 228 h \rho^4 \hat{z}^4 + 144 h^2 \rho^4 \hat{z}^2 - 8 h^3 \rho^4 - 38 h^2 \rho^2 \hat{z}^4 + 43 h^3 \rho^2 \hat{z}^2 - 5 h^4 \rho^2 - h^4 \hat{z}^2 + h^5)] \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1}{b^5 \rho^2 (8r\rho^5 - 8ar\rho^3 + 8r\rho^3 \hat{z}^2 - 6a^2 r\rho - 12a\rho^4 - 12a\hat{z}^2 \rho^2 + 12a^2 \rho^2 + a^3)} \cdot$$

$$\left[K(m, \pi/2) (-32\hat{z}^4 r\rho^5 + 16\hat{z}^6 r\rho^3 - 24f\hat{z}^4 r^3 \rho - 32f^2 \hat{z}^2 r^3 \rho + 32f\hat{z}^6 r\rho + 52f^2 \hat{z}^4 r\rho + 18f^3 \hat{z}^2 r\rho - 2f^4 r\rho + 32\hat{z}^4 r^6 - 16\hat{z}^6 r^4 + 8fr^4 \hat{z}^4 + 32f^2 r^4 \hat{z}^2 - 24fr^2 \hat{z}^6 - 64f^2 r^2 \hat{z}^4 - 34f^3 r^2 \hat{z}^2 + 2f^4 r^2 + 16f^2 \hat{z}^6 + 26f^3 \hat{z}^4 + 9f^4 \hat{z}^2 - f^5) + E(m, \pi/2) (-120\hat{z}^6 \rho^4 + 32\hat{z}^4 \rho^6 + 144h\rho^4 \hat{z}^4 + 38h^2 \rho^2 \hat{z}^4 - 48h^2 \hat{z}^2 \rho^4 - 32h^3 \hat{z}^2 \rho^2 + h^4 \hat{z}^2 + 2h^4 \rho^2 - h^5) \right] \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \zeta \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[b^3 \rho (-32r^5 \rho \hat{z}^2 + 16f\rho r^3 \hat{z}^2 - 8f^2 \rho r^3 + 4f^3 \rho r + 32r^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 r^4 - 32fr^4 \hat{z}^2 + 8f^2 r^4 - 8f^3 r^2 + f^4) \right]} \cdot$$

$$\left[K(m, \pi/2) (24\hat{z}^4 r^3 \rho + 32f\rho \hat{z}^4 r - 8f\rho \hat{z}^2 r^3 + 38f^2 \rho \hat{z}^2 r + 6f^3 \rho r - 24\hat{z}^4 r^4 - 20f\hat{z}^4 r^2 + 16f^2 \hat{z}^4 + 8f\hat{z}^2 r^4 - 42f^2 \hat{z}^2 r^2 + 19f^3 \hat{z}^2 - 6f^3 r^2 + 3f^4) + E(m, \pi/2) (16\hat{z}^4 \rho^4 - 32h\rho^4 \hat{z}^2 + 116h\rho^2 \hat{z}^4 - 112h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 24h^3 \rho^2 - 3h^3 \hat{z}^2 + 3h^4) \right] \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \zeta \partial r} = \frac{A_1}{\left[b^3 \rho (-32r\rho^5 \hat{z}^2 - 16hr\rho^3 \hat{z}^2 - 8h^2 r\rho^3 - 4h^3 r\rho + 32\rho^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 \rho^4 + 32h\rho^4 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^4 + 8h^3 \rho^2 + h^4) \right]} \cdot$$

$$\left[K(m, \pi/2) (32\hat{z}^4 r\rho^5 - 40\hat{z}^6 r\rho^3 + 32hr\rho^3 \hat{z}^4 + 6h^2 r\rho \hat{z}^4 - 8h^3 r\rho \hat{z}^2 + 2h^4 r\rho - 32\hat{z}^4 \rho^6 + 40\hat{z}^6 \rho^4 - 48h\rho^4 \hat{z}^4 + 20h\rho^2 \hat{z}^6 - 22h^2 \rho^2 \hat{z}^4 + 8h^3 \rho^2 \hat{z}^2 - 2h^4 \rho^2 - 3h^3 \hat{z}^4 + 4h^4 \hat{z}^2 - h^5) + E(m, \pi/2) (32\hat{z}^4 \rho^6 - 40\hat{z}^6 \rho^4 + 144h\rho^4 \hat{z}^4 - 48h^2 \rho^4 \hat{z}^2 - 116h\rho^2 \hat{z}^6 + 166h^2 \rho^2 \hat{z}^4 - 56h^3 \rho^2 \hat{z}^2 + 2h^4 \rho^2 + 3h^3 \hat{z}^4 - 4h^4 \hat{z}^2 + h^5) \right] \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \zeta \partial z} = \frac{A_1}{b^5 (8\rho^5 r - 8a\rho^3 r + 8\rho^3 r\hat{z}^2 - 6a^2 r\rho - 12a\rho^4 - 12a\hat{z}^2 \rho^2 + 12a^2 \rho^2 + a^3)} \cdot$$

$$\left\{ K(m, \pi/2) [v(64\hat{z}^4 r^3 \rho + 16f^2 \rho r\hat{z}^2 - 64\hat{z}^4 r^4 + 32fr^2 \hat{z}^4 - 16f^2 \hat{z}^2 r^2 + 8f^3 \hat{z}^2) - 32\hat{z}^4 r^3 \rho + 32f\rho r\hat{z}^4 + 8f^2 \rho r\hat{z}^2 + 32\hat{z}^4 r^4 - 48fr^2 \hat{z}^4 - 8f^2 \hat{z}^2 r^2 + 16f^2 \hat{z}^4 + 4f^3 \hat{z}^2] + E(m, \pi/2) [v(128\hat{z}^4 r^4 - 128fr^2 \hat{z}^4 - 32f^3 \hat{z}^2 - 8f^4) - 96\hat{z}^4 r^4 + 72\hat{z}^6 r^2 + 192fr^2 \hat{z}^4 + 48f^2 r^2 \hat{z}^2 - 46f^2 \hat{z}^4 - 16f^3 \hat{z}^2 + 2f^4] \right\} \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[\begin{array}{l} b^3 \rho (-32r^5 \rho \hat{z}^2 + 16f \rho r^3 \hat{z}^2 - 8f^2 \rho r^3 + 4f^3 \rho r + 32r^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 r^4 - 32fr^4 \hat{z}^2 + 8f^2 r^4) \\ -8f^3 r^2 + f^4 \end{array} \right]} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(64\hat{z}^4 r^3 \rho + 32f\hat{z}^2 r^3 \rho + 16f^2 \hat{z}^2 r \rho + 8f^3 r \rho - 64\hat{z}^4 r^4 - 32fr^4 \hat{z}^2 + 32fr^2 \hat{z}^4 - 8f^3 r^2 + 8f^3 \hat{z}^2 + 4f^4) - 40\hat{z}^4 r^3 \rho - 40f\hat{z}^2 r^3 \rho + 32f \rho r \hat{z}^4 + 22f^2 \hat{z}^2 r \rho - 2f^3 r \rho + 40\hat{z}^4 r^4 + 40fr^4 \hat{z}^2 - 52fr^2 \hat{z}^4 - 42f^2 r^2 \hat{z}^2 + 2f^3 r^2 + 16f^2 \hat{z}^4 + 11f^3 \hat{z}^2 - f^4] + E(m, \pi/2) [v(-192\hat{z}^4 \rho^4 + 128h\hat{z}^2 \rho^4 - 32h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 32h^3 \rho^2 + 4h^4) + 208\hat{z}^4 \rho^4 - 160h\hat{z}^2 \rho^4 + 116h\hat{z}^4 \rho^2 - 80h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 8h^3 \rho^2 - 3h^3 \hat{z}^2 - h^4] \right\} \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1}{\left[\begin{array}{l} b^3 \rho (-32\rho^5 \hat{z}^2 - 16h\hat{z}^2 \rho^3 r - 8h^2 \rho^3 - 4h^3 \rho + 32\rho^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 \rho^4 + 32h\hat{z}^2 \rho^4 + 8h^2 \rho^4 + 8h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(64\hat{z}^4 \rho r^5 + 32f \rho r^3 \hat{z}^4 + 48f^2 \rho r^3 \hat{z}^2 + 8f^3 \rho r \hat{z}^2 + 8f^4 \rho r - 64\hat{z}^4 r^6 - 48f^2 r^4 \hat{z}^2 + 16f^2 r^2 \hat{z}^4 + 16f^3 r^2 \hat{z}^2 - 8f^4 r^2 + 4f^4 \hat{z}^2 + 4f^5) - 32\hat{z}^4 \rho r^5 - 40\hat{z}^6 \rho r^3 - 64f \rho r^3 \hat{z}^4 - 48f^2 \rho r^3 \hat{z}^2 + 6f^2 \rho r \hat{z}^4 - 6f^4 \rho r + 32\hat{z}^4 r^6 + 40\hat{z}^6 r^4 + 48fr^4 \hat{z}^4 + 48f^2 r^4 \hat{z}^2 - 20fr^2 \hat{z}^6 - 38f^2 r^2 \hat{z}^4 - 24f^3 r^2 \hat{z}^2 + 6f^4 r^2 + 3f^3 \hat{z}^4 - 3f^5] + E(m, \pi/2) [v(-128\hat{z}^4 r^6 + 192\hat{z}^6 r^4 + 192fr^4 \hat{z}^4 + 32f^2 r^2 \hat{z}^4 + 32f^3 r^2 \hat{z}^2 + 8f^4 r^2 - 4f^4 \hat{z}^2 - 4f^5) + 160\hat{z}^4 r^6 - 232\hat{z}^6 r^4 - 336fr^4 \hat{z}^4 - 48f^2 r^4 \hat{z}^2 + 116f\hat{z}^6 r^2 + 134f^2 r^2 \hat{z}^4 + 24f^3 r^2 \hat{z}^2 - 6f^4 r^2 - 3f^3 \hat{z}^4 + 3f^5] \right\} \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \zeta \partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^5 r (8\rho^5 r - 8a\rho^3 r + 8\rho^3 r \hat{z}^2 - 6a^2 \rho - 12a\rho^4 - 12a\hat{z}^2 \rho^2 + 12a^2 \rho^2 + a^3)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(-64\hat{z}^4 r \rho^3 + 32hr \rho^3 \hat{z}^2 - 16h^2 r \rho \hat{z}^2 + 8h^3 r \rho + 64\hat{z}^4 \rho^4 - 32hr \rho^4 \hat{z}^2 + 32hr \rho^2 \hat{z}^4 - 8h^3 \rho^2 + 8h^3 \hat{z}^2 - 4h^4) + 40\hat{z}^4 r \rho^3 - 40hr \rho^3 \hat{z}^2 + 32hr \rho \hat{z}^4 - 22h^2 r \rho \hat{z}^2 - 2h^3 r \rho - 40\hat{z}^4 \rho^4 + 40hr \rho^4 \hat{z}^2 - 52hr \rho^2 \hat{z}^4 + 42h^2 \hat{z}^2 \rho^2 + 2h^3 \rho^2 - 16h^2 \hat{z}^4 + 11h^3 \hat{z}^2 + h^4] + E(m, \pi/2) [v(-64\hat{z}^4 \rho^4 + 128hr \rho^4 \hat{z}^2 - 128hr \rho^2 \hat{z}^4 + 96h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 32h^3 \rho^2 - 32h^3 \hat{z}^2 + 28h^4) + 112\hat{z}^4 \rho^4 - 160hr \rho^4 \hat{z}^2 - 72\hat{z}^6 \rho^2 + 244hr \rho^2 \hat{z}^4 - 192h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 8h^3 \rho^2 + 46h^2 \hat{z}^4 - 35h^3 \hat{z}^2 - 7h^4] \right\} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{\theta\theta}^*}{\partial \rho \partial r} &= \frac{A_1}{b^3 r^2 \rho^2 (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(48\hat{z}^4 r \rho^3 + 48\hat{z}^2 r \rho^5 - \right. \\
&48ar\hat{z}^2 \rho^3 + 8a^2 r \rho \hat{z}^2 - 24ap^2 \hat{z}^4 - 24a\hat{z}^2 \rho^4 + 24a^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 4a^3 \hat{z}^2) - 48\hat{z}^4 r \rho^3 - 48\hat{z}^2 r \rho^5 + \\
&48ar\hat{z}^2 \rho^3 - 8a^2 r \rho \hat{z}^2 + 24ap^2 \hat{z}^4 + 24a\hat{z}^2 \rho^4 - 24a^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 4a^3 \hat{z}^2] + \\
&E(m, \pi/2) [v(-32\rho^6 \hat{z}^2 + 64\hat{z}^4 \rho^4 - 64h\rho^4 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^4 + 48h\rho^2 \hat{z}^4 - 32h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 8h^3 \rho^2 + 4h^3 \hat{z}^2) \\
&\left. + 32\rho^6 \hat{z}^2 - 64\hat{z}^4 \rho^4 + 64h\rho^4 \hat{z}^2 - 8h^2 \rho^4 - 48h\rho^2 \hat{z}^4 + 32h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 8h^3 \rho^2 - 4h^3 \hat{z}^2] \right\} \quad (5.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{\theta\theta}^*}{\partial \rho \partial z} &= \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r \rho^2 (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(-48\hat{z}^2 r \rho^3 + 8h\rho^3 r - \right. \\
&8h^2 \rho r + 48\hat{z}^2 \rho^4 - 8h\rho^4 + 24h\rho^2 \hat{z}^2 + 4h^2 \rho^2 + 4h^3) + 48\hat{z}^2 r \rho^3 - 8h\rho^3 r + 8h^2 \rho r - 48\hat{z}^2 \rho^4 + \\
&8h\rho^4 - 24h\rho^2 \hat{z}^2 - 4h^2 \rho^2 - 4h^3] + E(m, \pi/2) [v(-48\hat{z}^2 \rho^4 + 32h\rho^4 - 48h\hat{z}^2 \rho^2 + 20h^2 \rho^2 \\
&\left. - 4h^3) + 48\hat{z}^2 \rho^4 - 32h\rho^4 + 48h\hat{z}^2 \rho^2 - 20h^2 \rho^2 + 4h^3] \right\} \quad (5.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{\theta\theta}^*}{\partial \zeta \partial z} &= \frac{A_1}{b^3 r \rho (-4arp - 4r^4 + 4ar^2 - 4r^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(-16r^3 \rho \hat{z}^2 - 8f\hat{z}^2 r \rho - \right. \\
&8f^2 r \rho + 16r^4 \hat{z}^2 + 8f^2 r^2 - 4f^2 \hat{z}^2 - 4f^3) + 16r^3 \rho \hat{z}^2 + 8f\hat{z}^2 r \rho + 8f^2 r \rho - 16r^4 \hat{z}^2 - 8f^2 r^2 + 4f^2 \hat{z}^2 \\
&+ 4f^3] + E(m, \pi/2) [v(32\rho^4 \hat{z}^2 - 48\hat{z}^4 \rho^2 + 48h\rho^2 \hat{z}^2 - 8h^2 \rho^2 + 4h^2 \hat{z}^2 - 4h^3) - 32\rho^4 \hat{z}^2 + \\
&\left. 48\hat{z}^4 \rho^2 - 48h\rho^2 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^2 - 4h^2 \hat{z}^2 + 4h^3] \right\} \quad (5.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{\theta\theta}^*}{\partial \zeta \partial r} &= \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r^2 \rho (-4arp - 4r^4 + 4ar^2 - 4r^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(48\hat{z}^2 r^3 \rho + 8fpr^3 + \right. \\
&8f^2 \rho r - 48\hat{z}^2 r^4 - 8fr^4 + 24fr^2 \hat{z}^2 - 4f^2 r^2 + 4f^3) - 48\hat{z}^2 r^3 \rho - 8fpr^3 - 8f^2 \rho r + 48\hat{z}^2 r^4 + 8fr^4 - \\
&24fr^2 \hat{z}^2 + 4f^2 r^2 - 4f^3] + E(m, \pi/2) [v(-16\hat{z}^2 \rho^4 + 32h\rho^4 + 48\hat{z}^4 \rho^2 - 64h\rho^2 \hat{z}^2 + 44h^2 \rho^2 \\
&\left. - 4h^2 \hat{z}^2 + 8h^3) + 16\hat{z}^2 \rho^4 - 32h\rho^4 - 48\hat{z}^4 \rho^2 + 64h\rho^2 \hat{z}^2 - 44h^2 \rho^2 + 4h^2 \hat{z}^2 - 8h^3] \right\} \quad (5.48)
\end{aligned}$$