

Flávio Costalonga

FORMULAÇÃO COM DUPLA
RECIPROCIDADE HIPERSINGULAR DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADA AOS PROBLEMAS DIFUSIVO-
ADVECTIVOS

Flávio Costalonga

FORMULAÇÃO COM DUPLA
RECIPROCIDADE HIPERSINGULAR DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADA AOS PROBLEMAS DIFUSIVO-
ADVECTIVOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto.

Vitória – ES
2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

C837f Costalonga, Flávio, 1981-
Formulação com dupla reciprocidade hipersingular do método dos elementos de contorno aplicada aos problemas difusivo-advectivos / Flávio Costalonga. – 2011.
220 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Equação da Advecção-Difusão. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

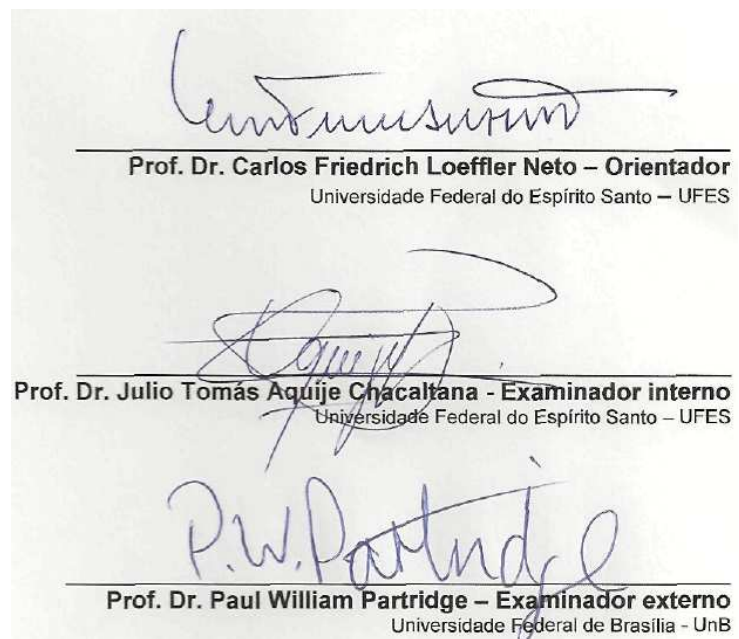
CDU: 621

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPIRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

"Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno Aplicada aos Problemas Difusivo-Advectivos"

Flávio Costalonga

COMISSÃO EXAMINADORA



Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Vitória (ES), 05 setembro de 2011

*Aos meus pais, Giumar e Izabel que me deram a vida.
A minha esposa Glauciely, meus filhos Luiz Felipe e Ana Luiza, razão de minha vida.
Ao professor Carlos Loeffler, o grande responsável pelo sucesso deste trabalho.*

AGRADECIMENTOS

À Deus por todas as bênçãos e conquistas da minha vida.

Aos meus filhos Luiz Felipe e Ana Luiza, minha esposa Glauciely, meus pais Giumar e Izabel por tudo que representam para mim.

À meu irmão Fernando a quem sempre recorri em momentos difíceis.

Ao professor Carlos Loeffler pela tranqüilidade, presença, amizade e orientação. Que acreditou em meu potencial e trabalho, mesmo quando incertezas pairavam sobre mim. Um Lorde acima de tudo.

Aos amigos do mestrado, que tornaram esta jornada mais divertida, em especial a Leonardo Caputo de Moura e Jonas Carvalho Jardim, pela amizade, presença e ajuda.

Aos irmãos de coração Markezan Basílio Serafim, Gabriel Mombrini Pigatti, Leonardo Guedes de Oliveira e Rodrigo Soares Rocha.

A secretária do PPGEM, Zezé, pelo constante apoio e dedicação e demais colaboradores do programa e Departamento de Engenharia Mecânica.

À Universidade Federal do Espírito Santo – UFES e aos professores Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM pela oportunidade de cursar o Mestrado. Por fim, agradeço aos colegas de trabalho que sempre se mostraram presentes e dispostos a ajudar no que fosse necessário, proporcionando meios para que eu pudesse comparecer as aulas. Os grandes incentivadores para o sucesso desse caminhada foram: Valter Vago, Fábio Luiz Bassetti Cavalcante, Christiano Ragazzi Pigatti e Toni José Ferreira.

RESUMO

Apresentam-se neste trabalho duas diferentes formulações do Método dos Elementos de Contorno, geradas para o modelamento de problemas bidimensionais de transferência de calor com escoamento, nos quais os fenômenos de difusão e convecção forçada estão associados. A primeira delas é fundamentada no procedimento conhecido como Dupla Reciprocidade Singular (FDRS), criado originalmente para solução de problemas de autovalor. Esta técnica foi aprimorada por diversos autores para muitas outras categorias de problemas, entre os quais o caso abordado no presente trabalho, usando uma interpolação com funções de base radial para o tratamento das derivadas espaciais dos termos convectivos. A segunda formulação é a Dupla Reciprocidade Hipersingular (FDRH), que apresenta uma estrutura similar à Dupla Reciprocidade Singular, mas é obtida a partir da equação integral inversa diferenciada com relação à direção normal ao contorno, de modo que a ordem das derivadas dos núcleos se altera. Assim os núcleos das integrais passam a ter singularidades de ordem superior ($1/r$ e $1/r^2$) em relação às existentes na FDRS ($\ln r$ e $1/r$).

Realizam-se, então, simulações com exemplos que possuem solução analítica, onde é analisada a influência de importantes parâmetros, tais como o refinamento da malha e a velocidade do escoamento. Restrições físicas, limitações numéricas, precisão e outras características importantes relacionadas a cada formulação são discutidas com detalhe.

ABSTRACT

In this work two different boundary element formulations are presented for the modeling of two-dimensional problems of heat transfer, in which the phenomena of diffusion and forced convection are associated. The first formulation is based on the procedure known as Singular Dual Reciprocity, originally created for solving eigenvalue problems and other domain source problems. This technique has been improved by several authors for application in many other categories of problems, including the case discussed in this work, related to Diffusive-advective phenomena. An important feature of this technique is the use of radial basis functions to interpolate spatial derivatives related to the convective terms. The second formulation is the Hypersingular Dual Reciprocity, which has a structure similar to the Dual Reciprocity, but is obtained from the differentiation of integral equation with respect to the normal direction on the boundary. Thus, the kernel of the integrals are changed with the singularity order being increased.

Are held, then simulations with examples that have analytical solution, where it is analyzed the influence of important parameters such as mesh refinement and the flow velocity. Physical constraints, numerical limitations, accuracy and other important characteristics related to each formulation are discussed in detail.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Modos de transferência de calor pela condução, pela convecção e pela radiação.....	39
Figura 02: Transferência de calor por condução unidimensional ‘difusão de energia’.	41
Figura 03: Desenvolvimento da camada limite na transferência convectiva de calor.....	44
Figura 04: Superfície elementar para análise energética na camada limite.....	48
Figura 05: Análise energética da superfície de controle para na camada limite.	53
Figura 06: Representação do domínio bidimensional $\Omega(X)$ e seu contorno $\Gamma(X)$.	61
Figura 07: Adaptação para a representação das condições de contorno.....	62
Figura 08: Adaptação para a representação do domínio do problema fundamental.	65
Figura 09: Domínio Estendido de um Setor Circular ao redor do Ponto Fonte ξ .	70
Figura 10: Definição dos Ângulos Internos entre os Contornos Adjacentes ao Redor do Ponto Fonte.....	72
Figura 11: Caracterização geométrica de um contorno anguloso.....	74
Figura 12: Exposição do contorno Γ_x (imaginário) devidamente discretizado.....	102
Figura 13: Representação gráfica dos diferentes tipos de elementos de contorno utilizados na discretização do domínio Γ_x .	103
Figura 14: Visualização de um volume de controle elementar com seus nós funcionais e adoção de pontos internos.	104
Figura 15: Definições do elemento linear.....	105
Figura 16: Limites de Integração ao longo do elemento singular.	113
Figura 17: Representação física para o exemplo 1.....	121
Figura 18: Malha com 16 elementos.	123

Figura 19 - Malha com 40 elementos	123
Figura 20 - Malha com 80 elementos	124
Figura 21 - Malha com 160 elementos	124
Figura 22 - Posicionamento de 9 pontos internos constitutivos	125
Figura 23: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 01	126
Figura 24: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 01	127
Figura 25: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 01	128
Figura 26: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 01	129
Figura 27: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 01	130
Figura 28: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 01	130

Figura 29: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 01	131
Figura 30: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 01	132
Figura 31: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$ (SPI). Exemplo 01.....	133
Figura 32: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$ (9PI). Exemplo 01.....	133
Figura 33: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 01.	135
Figura 34: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 01.	136
Figura 35: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 01.	137
Figura 36: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 01.	138

Figura 37: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 01.	139
Figura 38: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 01.	139
Figura 39: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 01.	140
Figura 40: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 01.	141
Figura 41: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$ (SPI). Exemplo 01.....	141
Figura 42: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$ (9PI). Exemplo 01.....	142
Figura 43: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 01.	144
Figura 44: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 01.	144

Figura 45: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 01.	145
Figura 46: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 01.	146
Figura 47: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 01.	147
Figura 48: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 01.	147
Figura 49: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 01.	148
Figura 50: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 01.	148
Figura 51: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$ (SPI). Exemplo 01.	149
Figura 52: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$ (9PI). Exemplo 01.	150

Figura 53: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 01.	152
Figura 54: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 01.	152
Figura 55: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 01.	153
Figura 56: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 01.	154
Figura 57: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 01.	155
Figura 58: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 01.	155
Figura 59: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 01.	156
Figura 60: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 01.	156

Figura 61: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$ (SPI). Exemplo 01.....	157
Figura 62: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$ (9PI). Exemplo 01.....	158
Figura 63 - Representação física para o exemplo 2.....	160
Figura 64 - Posicionamento de 16 pontos internos constitutivos.....	160
Figura 65: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 02.	161
Figura 66: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 02.	162
Figura 67: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 02.	163
Figura 68: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 02.	163
Figura 69: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 02.	164
Figura 70: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 02.	165

Figura 71: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 02.	165
Figura 72: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$. Exemplo 02.	166
Figura 73: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$ (SPI). Exemplo 02.	167
Figura 74: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$ (9PI). Exemplo 02.	167
Figura 75: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=1$ (16PI). Exemplo 02.	168
Figura 76: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 02.	170
Figura 77: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 02.	170
Figura 78: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 02.	171
Figura 79: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 02.	172

Figura 80: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 02.	173
Figura 81: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 02.	173
Figura 82: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 02.	174
Figura 83: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$. Exemplo 02.	175
Figura 84: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$ (SPI). Exemplo 02.....	175
Figura 85: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$ (9PI). Exemplo 02.....	176
Figura 86: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=2$ (16PI). Exemplo 02...	177
Figura 87: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 02.	178
Figura 88: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 02.	179

Figura 89: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 02.	180
Figura 90: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 02.	180
Figura 91: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 02.	181
Figura 92: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 02.	182
Figura 93: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 02.	182
Figura 94: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$. Exemplo 02.	183
Figura 95: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$ (SPI). Exemplo 02.	184
Figura 96: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$ (9PI). Exemplo 02.	184
Figura 97: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=3$ (16PI). Exemplo 02.	185

Figura 98: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 02.	187
Figura 99: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 02.	187
Figura 100: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 02.	188
Figura 101: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 02.	189
Figura 102: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 02.	190
Figura 103: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 02.	191
Figura 104: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 02.	192
Figura 105: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$. Exemplo 02.	193

Figura 106: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$ (SPI). Exemplo 02.....	194
Figura 107: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$ (9PI). Exemplo 02.....	195
Figura 108: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $V=5$ (16PI). Exemplo 02.....	195

LISTA DE PRINCIPAIS SIMBOLOS

- T - Campo de temperaturas.
- q - Derivada normal do campo de temperaturas.
- q''_i - Fluxo de calor condutivo unidade de área na direção i .
- q''_{rad} - Fluxo de calor irradiado por unidade de área.
- q''_{conv} - Fluxo de calor convectivo por unidade de área.
- k - Condutividade térmica.
- γ - Difusividade térmica.
- h - Coeficiente de película.
- ρ - Massa Especifica.
- C_p - Calor específico a pressão constante.
- V^2 - Componente da velocidade para o termo da energia cinética
- v - Componente de velocidade na direção x {equações $[T=e^{x+y}]$ e $[T=e^x+e^y]$ }.
- w - Componente de velocidade na direção y {equações $[T=e^{x+y}]$ e $[T=e^x+e^y]$ }.
- u - Componente da velocidade na direção x , empregada na dedução da equação da difusão-advecção.
- v - Componente de velocidade na direção y , empregada na dedução da equação da difusão-advecção.
- Ω - Domínio.
- Γ - Contorno.
- Γ_{est} - Contorno estendido total.
- Γ_ε - Contorno estendido parcial.
- u^* - Solução fundamental difusiva.
- q^* - Derivada normal da solução fundamental difusiva.
- ξ - Ponto de aplicação da carga concentrada no problema fundamental.
- n_i - Coordenadas do vetor unitário normal ao contorno.
- r - Distancia euclidiana entre dois pontos quaisquer do domínio.

- p - Ação de domínio.
- p^* - Solução fundamental Hipersingular
- f^j - Funções de interpolação.
- α^j - Coeficientes das funções de interpolação inicialmente desconhecidos
- ψ^j - Função primitiva de f^j
- η^j - Derivada normal das funções primitivas de f^j .
- β^j - Coeficientes utilizados para a segunda interpolação (eliminação das derivadas espaciais).
- \mathbf{F}^j - Matriz com funções de interpolação
- μ - Viscosidade do meio fluido.
- \bar{P} - Pressão
- \dot{n}_a - Reação química
- \dot{q} - Geração térmica
- T_s - Temperatura na superfície de controle
- T_∞ - Temperatura na região externa (referente ao fluxo de fluido).
- e - Energia interna
- i - Entalpia do fluido
- c_v - Calor específico a volume constante
- \bar{X} - Termo de forças corpo
- \bar{Y} - Termo de forças corpo
- X - Representa as variáveis cartesianas (x,y).
- \bar{u} - Aproximação da variável do problema para a condição essencial u
- \bar{q} - Aproximação da variável do problema para a condição natural q
- ε - Raio do setor circular aumentado do contorno
- θ - Ângulo interno ao redor do ponto fonte
- α - Ângulo interno entre duas normais adjacentes ao ponto anguloso
- \mathbf{H} - Matriz originada pela a formulação do MEC
- \mathbf{G} - Matriz originada pela a formulação do MEC

- V** - Matriz originada pela a formulação do MEC (velocidade direcional).
- W** - Matriz originada pela a formulação do MEC (velocidade direcional).
- S** - Matriz originada pela a formulação do MEC (aloja as velocidades direcionais)
- R** - Matriz originada pela a formulação do MEC (aloja as matrizes **S**).
- A** - Matriz originada pela a formulação do MEC
- W** - Matriz originada pela a formulação do MEC
- f** - Vetor de valores incógnitos
- d** - Vetor de termos independentes
- ϕ_k - Coeficiente de influência gerado no núcleo das integrais
- \bar{u}_i - Valores internos do potencial
- \bar{q}_i - Valores internos da derivada direcional
- X^j - Pontos nodais aplicados a FDRS e FDRH tanto no contorno quanto no interior do domínio.
- \bar{q}^* - derivada normal (em relação à ξ) de u^* empregada na FDRS e FDRH.
- J_i - Jacobiano (passagem das variáveis de integração para grandezas adimensionais)
- w_j - Pesos de Gauss
- η_j - Pontos de Gauss
- L - Número de pontos interpolantes
- $\hat{\mathbf{u}}^j$ - Os vetores que podem ser considerados colunas da matriz $\hat{\mathbf{U}}$.
- $\hat{\mathbf{q}}^j$ - Os vetores que podem ser considerados colunas da matriz $\hat{\mathbf{Q}}$.
- $\hat{\mathbf{U}}$ - Matriz originada pela a formulação do MEC

\hat{Q} - Matriz originada pela a formulação do MEC

P - Matriz originada pela a formulação do MEC (termos convectivos).

N - Pontos de interpolação no contorno

M - Pontos de interpolação internos

$\dot{E}_{adv,x}$ - Energia (relacionada a advecção na direção $x(i)$)

$\dot{E}_{adv,x+dx}$ - Energia (relacionada a advecção na superfície de controle na direção $x(i)$)

$\dot{E}_{cond,x}$ - Energia (relacionada a condução na direção $x(i)$)

$\dot{E}_{cond,x+dx}$ - Energia (relacionada a condução na superfície de controle na direção $x(i)$)

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	30
I.1 – ASPECTOS GERAIS	30
I.2 – OBJETIVO	33
I.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	35
I.4 – ESTRUTURA DO TRABALHO	36
CAPÍTULO II - PROBLEMA FÍSICO	38
II.1 – O FENÔMENO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR	38
II.1.1 – CONDUÇÃO: CARACTERÍSTICAS E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	40
II.1.2 – CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DA CONVECÇÃO	42
II.2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA CONVECÇÃO	47
CAPÍTULO III - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE	57
III.1 – FORMULAÇÃO CLÁSSICA	57
III.1.1 – OBTENÇÃO DA FORMULA CLÁSSICA	58
III.1.1.1 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MATEMÁTICO.....	60
III.1.1.2 – ESTABELECIMENTO DA FORMA INTEGRAL INVERSA.....	62
III.1.1.3 – TRANSFORMAÇÃO DA FORMA FORTE EM FORMA INVERSA	63
III.1.1.4 – SOLUÇÃO FUNDAMENTAL	65
III.1.1.5 – APLICAÇÃO DO TEOREMA DA DIVERGÊNCIA.....	67
III.1.1.6 – DEDUÇÃO DE $c(x)$ - ANÁLISE DAS SINGULARIDADES	69

III.2 – FOMULAÇÃO HIPERSINGULAR PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE.....	76
III.2.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	76
III.3 – EQUAÇÃO HIPERSINGULAR COM O PONTO FONTE NO CONTORNO	78
CAPÍTULO IV - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM A DUPLA RECIPROCIDADE SINGULAR	83
IV.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA PROBLEMAS DE DIFUSÃO- ADVECÇÃO	83
IV.2 – ELIMINAÇÃO DAS DERIVADAS ESPACIAIS.....	90
CAPÍTULO V - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM A DUPLA RECIPROCIDADE HIPERSINGULAR.....	93
V.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	93
CAPÍTULO VI - DISCRETIZAÇÃO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA	101
VI.1 – DISCRETIZAÇÃO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA A FORMULAÇÃO CLÁSSICA SINGULAR.....	101
VI.1.1 – TRATAMENTO DA PARCELA DIFUSIVA (EQUAÇÃO DE LAPLACE).....	105
VI.1.2 – CÁLCULO DOS VALORES INTERNOS DA PARCELA DIFUSIVA (EQUAÇÃO DE LAPLACE).....	108
VI.2 – DISCRETIZAÇÃO DA PARCELA ADVECTIVA PARA A FDRS.....	109
VI.3 – DISCRETIZAÇÃO DA PARCELA ADVECTIVA PARA A FDRH.....	112
VI.4 – PONTOS INTERNOS CONSTITUTIVOS.....	115
VI.4.1 – PONTOS INTERNOS NA FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE SINGULAR.....	116
VI.4.2 – PONTOS INTERNOS NA FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE HIPERSINGULAR.....	118

CAPÍTULO VII - ANÁLISE DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	120
VII.1 – ESTABELECIMENTO DOS EXPERIMENTOS	120
VII.1.1 – ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL	120
VII.1.2 – GEOMETRIA DOS PROBLEMAS.....	120
VII.1.3 – EXEMPLO 1 - CAMPO DE TEMPERATURA REGIDO PELA EQUAÇÃO $T=e^{vx}+e^{wy}$	121
VII.1.3.1 – DETALHES DA DISCRETIZAÇÃO PARA O EXEMPLO 1.....	123
VII.1.3.2 – EXEMPLO 1 - AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA A VELOCIDADE "v=1"	126
VII.1.3.2.1 – APLICAÇÃO DA FDRS	126
VII.1.3.2.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.....	129
VII.1.3.3 – EXEMPLO 1 - AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA A VELOCIDADE "v=2"	135
VII.1.3.3.1 – APLICAÇÃO DA FDRS	135
VII.1.3.3.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.....	138
VII.1.3.4 – EXEMPLO 1 - AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA A VELOCIDADE "v=3"	143
VII.1.3.4.1 – APLICAÇÃO DA FDRS	143
VII.1.3.4.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.....	146
VII.1.3.5 – EXEMPLO 1 - AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA A VELOCIDADE "v=5"	151
VII.1.3.5.1 – APLICAÇÃO DA FDRS	151
VII.1.3.5.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.....	154
VII.1.4.1 – EXEMPLO 2 - CAMPO DE TEMPERATURA REGIDO PELA EQUAÇÃO $T=e^{v(x+y)}$	159
VII.1.4.2 – EXEMPLO 2 - AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA A VELOCIDADE "v=1"	161

VII.1.4.2.1 – APLICAÇÃO DA FDRS	161
VII.1.4.2.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.....	164
VII.1.4.3 – EXEMPLO 2 - AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA A VELOCIDADE "v=2"	169
VII.1.4.3.1 – APLICAÇÃO DA FDRS	169
VII.1.4.3.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.....	172
VII.1.4.4 – EXEMPLO 2 - AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA A VELOCIDADE "v=3"	178
VII.1.4.4.1 – APLICAÇÃO DA FDRS	178
VII.1.4.4.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.....	181
VII.1.4.5 – EXEMPLO 2 - AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA A VELOCIDADE "v=5"	186
VII.1.4.5.1 – APLICAÇÃO DA FDRS	186
VII.1.4.5.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.....	189
CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES	197
VIII.1 – SOBRE A FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE SINGULAR	197
VIII.2 – SOBRE A FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE HIPERSINGULAR.....	198
VIII.3 – UMA BREVE COMPARAÇÃO ENTRE A FDRS E FDRH	200
VIII.4 – DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	201
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	202
BIBLIOGRAFIAS	204
APÊNDICE	206

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 – ASPECTOS GERAIS

A humanidade vive hoje a era digital, onde em algumas aplicações os computadores desempenham funções vitais para o conforto e bem-estar dos seres humanos. Pessoas cada vez mais lidam com estes aparelhos no trabalho, nas escolas, nas universidades, nos bancos ou em casa, etc. Através do avanço da microeletrônica eles tornaram-se compactos, ágeis e com elevada capacidade de processamento, sendo que, este último item é de fundamental interesse para a prática acadêmica.

Paralelamente a estas inovações, as técnicas numéricas de solução de problemas de engenharia também vêm experimentando constante evolução tecnológica, bem como a ampliação de seu campo de aplicação. Elas estão expandindo-se cada vez mais e, através desses avanços e acessibilidade, a modelagem matemática por métodos computacionais torna-se cada vez mais difundida, auxiliando na resolução de questões complicadas pertinentes a engenharia, entre outras disciplinas de cunho prático.

Normalmente, na solução de problemas complexos de engenharia e de física, empregam-se técnicas numéricas. Em contraste com as técnicas analíticas e experimentais, as técnicas numéricas abrangem uma imensa gama de problemas, cuja complexidade dos fenômenos físicos associados é muito maior do que os abordados nas demais. Resultados que seriam complicados de se alcançar empregando-se métodos

analíticos, consegue-se obtê-los a um menor custo de tempo com maior agilidade através do uso de métodos numéricos, em que se determina uma solução aproximada.

Os principais métodos numéricos são baseados na idéia de discretização. Os mais destacados são os seguintes: Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o método dos Elementos Finitos (MEF), todas essas classificáveis como técnicas de domínio; e ainda o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Esta última é uma técnica de contorno, pois somente a discretização do contorno é necessária, ao contrário das outras técnicas, que necessitam discretizar todo o domínio do problema.

O Método dos Elementos de Contorno é uma técnica relativamente recente, cuja divulgação ocorreu principalmente em meados dos anos setenta. Entretanto, no decorrer dos anos, vem sofrendo mudanças, atualizações e conquistando um número cada vez maior de interessados, alcançando uma abrangência cada vez maior na abordagem de problemas físicos relacionados a projetos de importância na engenharia. Engenheiros e pesquisadores de várias nacionalidades exploram cada vez mais o potencial desta ferramenta e, conseqüentemente, geram formulações mais competitivas e eficazes. Daí observa-se uma melhor eficiência da técnica na precisão dos seus resultados, na economia do processamento computacional e na facilidade de manipulação de seus programas.

Isto se deve, entre outras razões, por sua superioridade e efetividade no trato de problemas com fronteiras móveis, concentração de tensões, fratura, contato, meios

infinitos e semi-infinitos, problemas esses em que os métodos de domínio não são versáteis nem simples de empregar.

No caso de problemas de fratura, contato e concentração de tensões, constata-se que uma importante característica do Método dos Elementos de Contorno em sua equação integral de governo: o uso da solução fundamental, uma solução auxiliar cuja estrutura matemática é correlata ao modelo matemático que se deseja resolver, permitindo a obtenção de soluções aproximadas com elevado nível de precisão, quando comparadas as respostas obtidas por outros métodos numéricos.

Com o aumento da capacidade dos computadores em armazenar e processar dados, as técnicas numéricas descritas acima, pode alcançar evoluções e adaptações, visando um melhor desempenho e maior abrangência. Assim, o MEC experimentou implementações em sua formulação tradicional ou clássica como a adoção de formulações alternativas como a Dupla Reciprocidade (FDRS) e a formulação Hiper-Singular (FDRH), entre outras. As citadas formulações alternativas constituem precisamente o objeto da presente dissertação.

I.2 - OBJETIVO

Em muitos problemas de engenharia é importante conhecer as derivadas direcionais da variável primal na fronteira. Em elasticidade, para se calcular as tensões tangenciais na fronteira com precisão, é preciso determinar as derivadas espaciais dos deslocamentos. Também problemas de campo escalar, muitas aplicações requerem a determinação do campo de velocidades normal e tangencial no contorno a partir de potencial de pressão.

O procedimento mais efetivo para isso consiste em gerar uma equação integral que calcule essas derivadas com rigor matemático. Esse o objetivo é alcançado com a denominada formulação hiper-singular do Método dos Elementos de Contorno (FHS).

Deve-se notar, no entanto, o êxito da FHS em comparação com outras técnicas para modelar e resolver problemas de contato e de mecânica da fratura, casos em que estão associados elevados gradientes no comportamento das variáveis básicas do problema e há necessidade de se gerar duas distintas equações integrais para representar partículas localizadas no mesmo ponto, como no caso de uma trinca. Nesta situação, uma equação é dada pela formulação clássica do Método dos Elementos de Contorno (FCS) e outra pela formulação hiper-singular.

Por outro lado, a formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (DRF) estabeleceu-se como alternativa eficaz para solução de problemas modelados por equações diferenciais não homogêneas, que correspondem fisicamente à

presença de ações de campo ou domínio. Com o aparecimento da DRF a solução de problemas com essas características tornou-se acessível, através do uso de funções de base radial e polinômios adequados para interpolação. Problemas transientes, dinâmicos e difusivos-advectivos também puderam ser resolvidos de modo mais simples através dessa formulação.

Nesta dissertação apresenta-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade a partir da equação integral em sua forma hiper-singular aplicada a Equação da Difusão-Advecção. Demonstra-se formalmente que os arranjos matriciais são análogas aos construídos na formulação com Dupla reciprocidade singular, apenas as matrizes clássicas são substituídas pelas equivalentes hiper-singulares.

Neste trabalho é feita a comparação entre os resultados obtidos nas formulações FDR e FHR, analisando-se seus desempenhos e a convergência de ambos, utilizando-se exemplos que possuem solução analítica.

Uma das finalidades desse trabalho é ratificar se a formulação Hipersingular do MEC é adequada aos casos nos quais os gradientes de tensão ou ações em geral são elevados, conforme normalmente se destaca na literatura especializada (Prado^[1]).

Em princípio, espera-se uma melhor capacidade da formulação Hipersingular em representar problemas descontínuos e de elevados gradientes, pois que os núcleos das integrais hipersingulares são compostos por funções de ordem inversa mais elevada.

I. 3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na literatura especializada não foi identificado nenhum trabalho com abordagem direta sobre o desenvolvimento da Formulação Hipersingular com Dupla Reciprocidade em problemas difusivos-advectivos. No que tange à formulação hiper-singular em problemas de Poisson, resultados interessantes foram alcançados por Peixoto ^[2] em sua dissertação de mestrado, onde durante simulações, a formulação proposta teve um comportamento satisfatório. Excluindo-se esses trabalhos, apenas abordagens em problemas sem fontes ou ações de domínio foram realizadas.

Os trabalhos de Prado ^[1], que se iniciaram com sua dissertação de mestrado, apresentaram resultados para aplicações tanto na teoria do potencial escalar quanto na elasticidade, sem ações de domínio, conforme ressaltado anteriormente. Contudo, as simulações feitas por esse autor naquela época apresentam imprecisões, já que algumas condições matemáticas que cercam a questão da Hiper-singularidade eram pouco conhecidas. Esse mesmo problema, ligado especialmente a questões de continuidade das variáveis entre elementos, ocorreu com diversos autores que se detiveram sobre o estudo da formulação hiper-singular.

Nesse sentido deve-se destacar o trabalho elaborado por Mansur *et. al.* ^[3]. Neste foi feita extensa e cuidadosa abordagem da existência das integrais hipersingulares, que não são impróprias, existem num sentido especial. Desde que certas condições de continuidade sejam obedecidas, há estabilidade nos resultados numéricos, anteriormente não obtidos

por diversos autores. No artigo de Mansur *et. al.* ^[3] apresenta-se o formalismo que se deve seguir na obtenção da equação integral de contorno hiper-singular.

I.4 - ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho foi estruturado em oito Capítulos.

O primeiro é esta introdução.

O segundo apresenta o fenômeno físico envolvido nestes estudos.

O terceiro traz o MEC para a Equação de Laplace, que é inicialmente apresentada em sua forma diferencial e trabalhada até a forma integral inversa. Logo após é aplicada a solução fundamental de um problema correlato, formando uma equação de governo que contém apenas integral no contorno. Isto é feito para a formulação singular e Hipersingular.

No quarto capítulo temos a Formulação Matemática para problemas de Difusão-Advecção, onde é apresentada a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular (FDRS).

Já no capítulo cinco, será introduzido o método FDRH (Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular). Todas as singularidades presentes nos núcleos das integrais foram examinadas, umas com maior e outras com menor rigor matemático.

A discretização dos métodos FDRS e FDRH serão expostos no capítulo seis desta dissertação, onde serão necessários artifícios matemáticos para a formação do conjunto de matrizes e permutações, peculiares as estas formulações. No final do capítulo é apresentada a forma com que se introduzem os pontos internos constitutivos, bem como as matrizes ampliadas para inclusão destes, importantes na Formulação com Dupla Reciprocidade.

A análise das simulações numéricas é realizada no capítulo sete, onde dois exemplos regidos por campos de temperatura diferenciados são estudados. Os desenvolvimentos ficaram limitados a domínios bidimensionais e elementos de contorno constantes. Os resultados são devidamente estudados e comentados.

Por fim, no capítulo oito, algumas conclusões, considerações e sugestões para futuros trabalhos são apresentadas.

CAPÍTULO II

PROBLEMA FÍSICO

II. 1 – O FENÔMENO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR.

Conforme dito no capítulo anterior, para se obter sucesso com as Técnicas doravante empregadas, é imperativo que se tenha um problema físico bem posto, com o máximo de informações possíveis para que o trato matemático deste seja viabilizado. Diante disto, inicia-se a partir de agora o entendimento e a interpretação do problema físico, suas particularidades e a formulação do seu equacionamento de governo.

Inicialmente determina-se, mesmo que de maneira simplista, a transferência de calor, que é o princípio deste trabalho acadêmico e objeto de estudo para as formulações que virão nos próximos capítulos. Incropera e Witt^[4] definem a transferência de calor (ou calor) como sendo o transito de energia provocado por uma diferença de temperatura. Em outras palavras ele diz claramente que a diferença de temperaturas implica em um gradiente térmico podendo ocorrer em um meio contínuo, ou entre vários meios. Incropera e Witt^[4] referem-se aos diferentes tipos de processos de transferência de calor como “*modos*”.

Os modos de transferência de calor mais difundidos são a condução, a radiação e a convecção, conforme ilustrado na figura 1.

É importante que se conheçam os mecanismos que fundamentam estes modos de transferência de calor e também as equações das taxas que quantificam a energia transferida (Incropera e Witt^[4]).

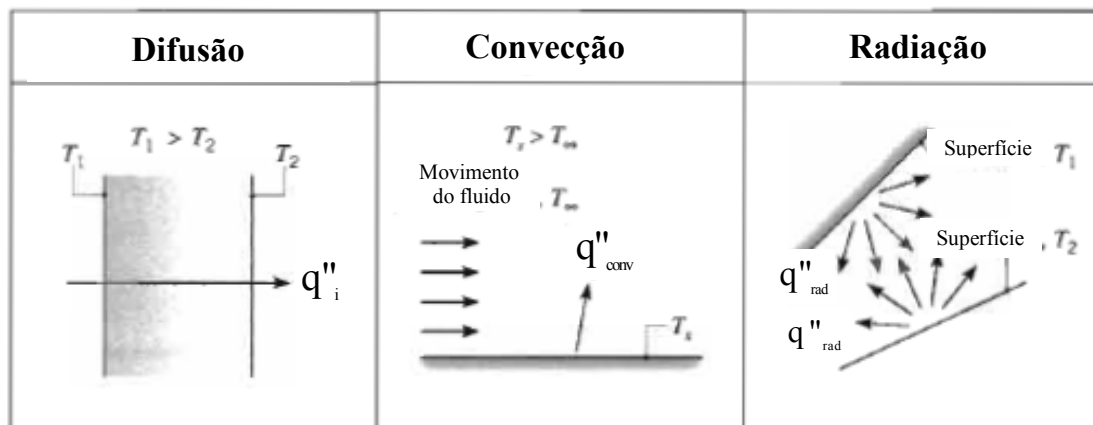


Figura 1 - Modos de transferência de calor pela condução, pela convecção e pela radiação (Incropera e Witt^[4]).

Ainda em seu capítulo introdutório, Incropera e Witt^[4] resumem de forma compacta os três modos de transferência de calor, sucinta e objetivamente. O Autor cita que quando existe uma variação de temperatura num meio estacionário, podendo ser este sólido ou fluido, haverá então condução e esta transferência de calor ocorrerá neste meio. Continuando a exploração dos modos de transferência de calor, Incropera e Witt^[4] diz que existe um contraste entre a condução e a convecção, uma vez que esta última refere-se à transferência de calor que ocorrerá entre uma superfície e um fluido em movimento, lembrando ambos os meios devem estar em temperaturas diferentes. Por fim, mas não menos importante, existe a transferência de calor pelo modo denominado radiação térmica. O mecanismo de transmissão deste modo de transferência de calor é descrito como sendo a emissão de energia na forma de ondas eletromagnéticas entre superfícies numa temperatura finita (Incropera e Witt^[4]). No livro tomado como

referência, o autor faz questão de enfatizar que na ausência de um meio interveniente, haverá uma transferência líquida de calor pela radiação entre duas superfícies em temperaturas diferentes. Entretanto, o modo de transferência de calor por radiação não será abordado nesta dissertação, uma vez que a proposta é realizar o estudo do fenômeno difusivo-advectivo através da técnica dos Elementos de Contorno, tendo a abrangência e aplicabilidade sobre os modos da condução e da convecção.

II.1.1 – CONDUÇÃO: CARACTERÍSTICAS E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.

O fenômeno da transferência de calor por condução está intimamente ligado aos conceitos de atividade atômica e atividade molecular, que são processos invisíveis a olho nu, mas são nestes níveis que estas interações alimentam esse modo de transferência de calor. Incropera e Witt ^[4] consideram a condução como a transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância para as partículas menos energéticas, graças às interações destas partículas.

Pode-se avaliar a condução em substâncias no estado gasoso, líquido e sólido.

Nesta dissertação será focada apenas a condução no estado sólido, uma vez que este modo de transmissão de calor é atribuído a atividade atômica sob a forma de vibrações da rede. Incropera e Witt ^[4] atribuem a transferência de energia a ondas na rede provocadas pelo movimento atômico. Eles também salientam que para um sólido isolante a transferência de energia se faz exclusivamente através dessas ondas, mas em contra partida para um sólido condutor, a transferência também se deve ao movimento

translacional dos elétrons livres.

A energia transferida por condução é proporcional ao gradiente de temperaturas em que o meio está sujeito, podendo ser quantificada utilizando uma constante de proporcionalidade. Define-se, então, a equação de calor transmitido por condução, conhecida como lei de Fourier (Incropera e Witt^[4]).

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{II.1})$$

Onde q_x'' é o fluxo de calor transferido na direção x por unidade de área perpendicular à direção de transferência, e é proporcional ao gradiente de temperatura, dT/dx , nesta direção. A constante de proporcionalidade k é uma propriedade de transporte conhecida como condutividade térmica e é uma característica do material onde ocorre a transferência de calor.

A figura 2 ilustra a distribuição de temperatura e ajuda a visualizar a descrição da lei de Fourier. O sinal negativo na equação deve-se ao fato do calor ser transferido na direção de temperatura decrescente (Incropera e Witt^[4]).

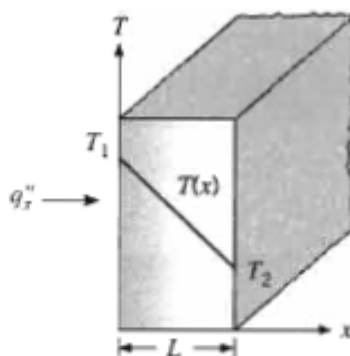


Figura 2 – Transferência de calor por condução unidimensional ‘difusão de energia’ (Incropera e Witt^[4]).

Na ilustração acima, a lei de Fourier foi aplicada para o modo de condução em regime permanente unidirecional, isto facilita a compreensão deste modo de transferência de calor e oferece o suporte necessário para o próximo nível da abordagem deste trabalho acadêmico, que é o conhecimento da condução bidimensional em regime permanente. Esta sim terá aplicação direta no equacionamento matemático do problema físico que será levado para a técnica do método dos elementos de contorno (MEC) que viabilizará a solução do problema numericamente.

Na condução bidimensional, o fluxo de calor local em um sólido é um vetor em todos os pontos, normal às linhas de temperatura constante (isotermas). Portanto, em regime permanente e sem geração de calor a forma da equação fica como mostrada em (II. 2):

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{II. 2})$$

II. 1.2 – CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DA CONVECÇÃO

Neste tópico será abordado o modo de transferência de calor por convecção, cujas particularidades e mecanismo de transmissão são de suma importância para a compreensão, preparação e organização das equações constituintes do problema físico. No capítulo III, estes conceitos de condução e convecção, serão submetidos às técnicas do método dos elementos de contorno (MEC), onde o trato de cada modo será abordado de forma distinta e em parcelas posicionadas em disposições, convenientemente, opostas na igualdade da equação.

Incropera e Witt ^[4] descrevem que na convecção a transferência de calor se dá entre meios, como exemplo pode-se dizer um líquido (fluido) e outro sólido (superfícies) em movimento relativo, na presença de um gradiente térmico. O modo de transferência de calor por convecção compreende dois mecanismos:

O primeiro é o movimento molecular aleatório (difusão), e o segundo é o movimento de massa (ou macroscópico) em que um grande número de moléculas se desloca coletivamente ou em agregados – o escoamento propriamente dito. Desta forma, um fluido ao escoar-se sobre uma superfície (ou tubulação de qualquer formato) onde a temperatura superficial é maior do que a do fluido ocorrerá o fluxo de calor por convecção. Em outras palavras, o calor será transferido da superfície para as partículas do fluido, que se encontram mais próximas desta área superficial e conseqüentemente, experimentarão um acréscimo de temperatura e energia interna. Então, quando estas partículas fluidas, que sofreram a interação descrita acima, moverem-se para regiões de menor temperatura (transportando a carga térmica e a energia interna), isto irá gerar um fluxo de fluido e também de energia.

A literatura define que a transferência total de calor se deve à superposição do transporte de energia pelo movimento aleatório das moléculas com o transporte de energia provocado pelo movimento de massa do fluido (Incropera e Witt ^[4]).

De acordo com a maior parte da literatura especializada, utiliza-se o termo convecção para identificar esse transporte acumulado (movimento aleatório com o escoamento) e o

termo advecção para identificar o transporte devido exclusivamente ao movimento de massa do fluido.

Neste tópico fica claro que o modo de transmissão de calor por convecção inclui também o modo condução, aqui chamado de difusão (mecanismo de transferência a nível molecular de interação).

A figura 3 mostra a interação citada acima, além de algumas particularidades geradas pelos modos de transferência de calor. O objeto de interesse neste caso é a transferência de calor por convecção que ocorre entre um fluido em movimento e uma superfície limitante, quando os dois estão em temperaturas diferentes (escoamento de um fluido sobre uma superfície aquecida).

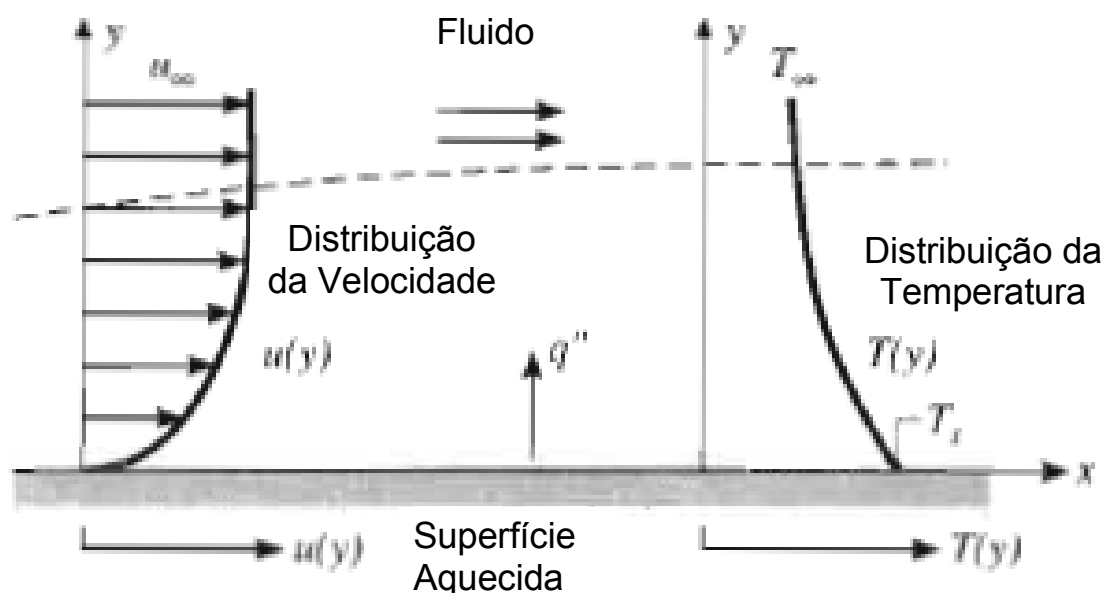


Figura 3 – Desenvolvimento da camada limite na transferência convectiva de calor (Incropera e Witt^[4]).

Incropera e Witt ^[4] mostram que uma consequência da interação do fluido com a superfície é o desenvolvimento de uma região no fluido aonde a variação da velocidade vai de zero até um valor finito, v_∞ . Assim, Incropera e Witt ^[4] definem esta região como sendo a camada hidrodinâmica ou camada limite. Quando estão em diferentes temperaturas (fluido e superfície) ocorre uma região no fluido na qual a temperatura varia de T_s em $y = 0$, até T_∞ , na região externa, conceituada como camada limite térmica. Claramente o autor evidencia o fenômeno da convecção associada à difusão molecular e o trânsito de energia devido à advecção.

Incropera e Witt ^[4] explanam que nas proximidades da superfície, onde as velocidades são baixas, o movimento molecular aleatório (difusão) tem maior contribuição para a transferência de energia em relação ao movimento macroscópico do fluido (interface superfície – fluido, a velocidade é nula). Por tanto, a transferência de calor se dá exclusivamente pela difusão. Em contrapartida, à medida que o escoamento desloca-se no sentido da direção x , ocorre um acréscimo na camada limite e, portanto, tem-se uma maior contribuição do movimento macroscópico do fluido. Desta forma o calor conduzido para essa camada é, então, arrastado pela corrente do fluido e se transfere para o fluido externo à camada limite.

Equacionando tudo o que foi mostrado até agora, no que tange a convecção, chega-se a conhecida lei de Newton do Resfriamento, onde se tem que a variação de calor convectivo é proporcional à diferença de temperatura (fluido-superfície), T_s e T_∞ respectivamente. A constante de proporcionalidade, h é conceituada como o coeficiente de transferência convectiva de calor, ou como condutância da película ou simplesmente

coeficiente de película. Abaixo se apresenta a forma matemática da descrição feita da lei do resfriamento de Newton, equação II.3.

$$q''_{conv} = h(T_s - T_\infty) \quad (II.3)$$

O coeficiente de película, h , influencia todos os parâmetros de transferência convectiva de calor. Seu valor depende das condições na camada limite, e estas condições são influenciadas pela geometria da superfície, pela natureza do movimento do fluido e por um conjunto de propriedades termodinâmicas e de transporte do fluido (Incropera e Witt [4]).

O mecanismo que será abordado neste trabalho tem um caráter mais complexo onde a equação de governo será obtida a partir da camada limite térmica da convecção, contudo, algumas condições simplificadoras serão adotadas.

Entretanto, deve-se salientar que o método dos elementos de contorno (MEC) pode ser utilizado para a resolução de problemas com estas características, como da camada limite, mas também pode ser aplicado diretamente a outros problemas com características similares, não sendo exclusivo apenas para este tipo de processo.

O próximo tópico trata exatamente da construção do equacionamento de um problema convectivo, suas particularidades e condições contorno.

II. 2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA CONVECÇÃO

Agora serão deduzidas as equações de governo, onde o desenvolvimento simultâneo das camadas limites cinética e térmica é considerado. Como dito anteriormente, para simplificar a análise, serão admitidas algumas considerações e hipóteses simplificadoras, que são:

- Condições bidimensionais de escoamento em meios homogêneos isotrópicos;
- Escoamento incompressível em regime permanente;
- Escoamento Invíscido (μ desprezível);
- Condutividade térmica e calor específico são constantes;

Para cada uma das camadas limites, Incropera e Witt^[4] identificam os processos físicos relevantes e aplica as leis de conservação apropriadas a superfícies de controle e isto é mostrado na figura 04. No que tange a camada limite hidrodinâmica, uma lei da conservação pertinente é a de que a matéria nem pode ser criada nem destruída.

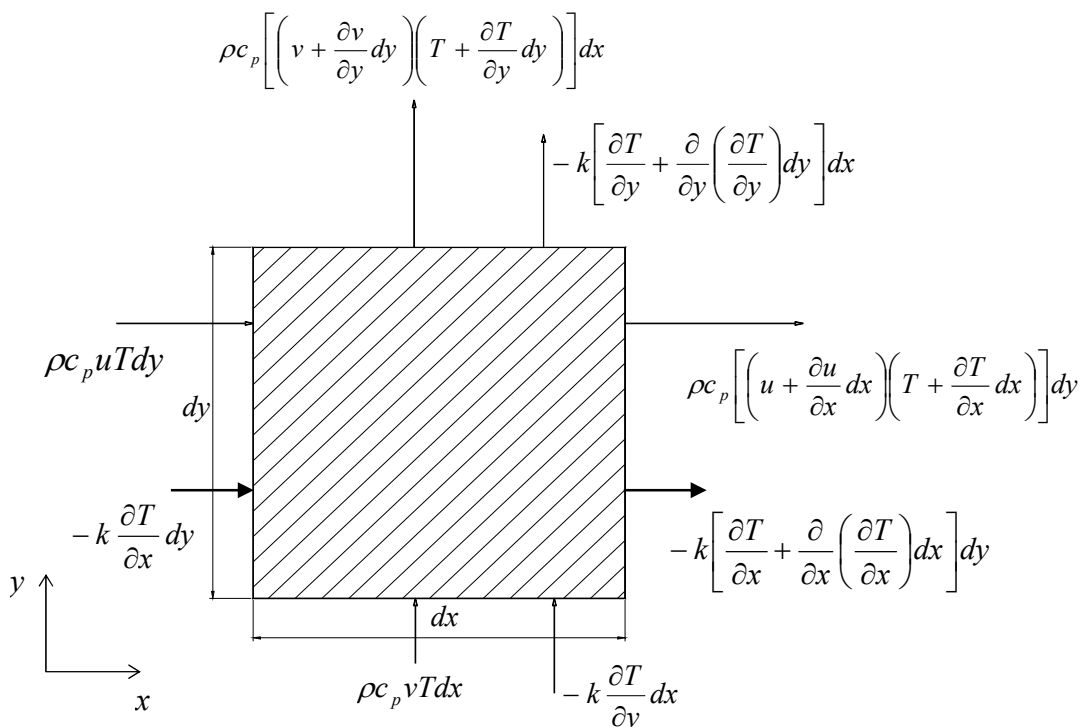


Figura 4 – Superfície elementar para análise energética na camada limite (Incropera e Witt^[4]).

As componentes de velocidade do fluido nas direções, x e y , foram convencionadas como, u e v . Já a densidade ρ , o calor específico c_p e a condutividade térmica k são constantes, além de serem propriedades intrínsecas dos materiais. Assim, as parcelas atuantes no volume de controle infinitesimal são as energias de condução e advecção.

Então, tomando como referência a figura 4, inicia-se o equacionamento referente à camada limite cinética. A entrada de massa na superfície de controle (entrada menos saída) deve ser igual a zero. A massa entra e sai do volume de controle exclusivamente em virtude do movimento geral do fluido. Com isso, Incropera e Witt^[4] mostra que o transporte devido a esse movimento é a advecção. Realizando a variação no sentido da abscissa, x , a taxa de saída de massa na superfície em, $x+dx$, pode exprimir-se como um desenvolvimento em série de Taylor com a seguinte forma:

$$\left[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy = 0 \quad (\text{II.4})$$

Com um resultado análogo para a direção y , a exigência da conservação da massa fica:

$$(\rho u) dy + (\rho v) dx - \left[(\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy - \left[(\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx = 0 \quad (\text{II.5})$$

Aplicando uma simplificação e dividindo por $dx dy$, chega-se

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.6})$$

A expressão (II. 6) é a equação da continuidade (mostrada aqui por motivos didáticos). Esta é uma expressão geral de exigência global da conservação de massa e deve ser obedecida em todos os pontos da camada limite cinética. Neste contexto, Incropera e Witt ^[4] diz que a segunda lei fundamental pertinente à camada limite cinética é a segunda lei de Newton do movimento. Eles ainda reintegram que em uma superfície de controle na camada limite cinética, esta lei afirma que a resultante de todas as forças que atuam sobre a superfície de controle é igual à taxa líquida de momento da superfície de controle (saída menos entrada). Porém, nesta dissertação não serão consideradas forças de corpo (motivo pelo qual as equações abaixo são igualadas a “0”), proporcionais ao volume e as forças de superfície proporcionais à área, conforme considerações anteriores.

A partir de agora é necessário o cálculo dos fluxos do momento linear do fluido na superfície de controle. Considerando, inicialmente, a direção x , os fluxos relevantes

surtem, conforme a figura 04. Após breve análise, observa-se uma contribuição para o fluxo do momento linear na direção x , é a do escoamento de massa em cada uma das direções. Conforme enfatizado por Incropera e Witt^[4], os fluxos podem alterar-se em cada uma das direções coordenadas, logo o momento linear em x da superfície de controle é:

$$\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x} dx(dy) + \frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y} dy(dx) = 0 \quad (\text{II.7})$$

A equação (II. 7) pode ser posta numa forma mais conveniente mediante a expansão das derivadas, o que dá:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{II.8})$$

Analogamente obtém-se uma equação similar a expressão (II. 8), isto para a direção y

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{II.9})$$

O significado físico das equações (II. 8) e (II.9), conforme dito anteriormente, é a representação do momento linear da superfície de controle. Agora que a parte de transporte de massa esta pronta, a parte térmica deve ser apreciada.

Levando em consideração as exigências da conservação de energia, para uma superfície de controle na camada limite térmica (figura 04) e os processos físicos relevantes. Assim, a energia térmica e a energia cinética, com o movimento geral do fluido, sofrem

advecção através das superfícies de controle. Logo, para a direção x , a taxa líquida de entrada da energia na superfície de controle é:

$$\dot{E}_{adv,x} - \dot{E}_{adv,x+dx} = \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dy - \left\{ \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx \right\} dy \quad (\text{II.10})$$

Da equação (II. 10), após algumas manipulações algébricas, obtém-se a expressão (II.11), que é:

$$\dot{E}_{adv,x} - \dot{E}_{adv,x+dx} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx dy \quad (\text{II.11})$$

Mas, considera-se que a energia se transfere através da superfície de controle em decorrência de processos moleculares. Entretanto, focando na contribuição que se deve ao processo de condução, a transferência líquida de energia para a superfície de controle é equacionado da seguinte forma:

$$\dot{E}_{cond,x} - \dot{E}_{cond,x+dx} = - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy - \left[-k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy \quad (\text{II.12})$$

Procedendo algumas manipulações algébrica a equação (II.12) apresenta desta maneira:

$$\dot{E}_{cond,x} - \dot{E}_{cond,x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy \quad (\text{II.13})$$

Pois bem, agora trabalhando as equações (II.11) a (II.13), assim como as equações análogas para a direção y , exprime-se a exigência da conservação da energia como se segue:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \\
& -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{P}u) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{P}v) = 0
\end{aligned} \tag{II.14}$$

Esta expressão proporciona a forma geral das exigências da conservação da energia na camada limite térmica. Entretanto, na formulação (II.14) aparece nos dois últimos termos a variável, P , que é a pressão e faz parte da exigência da expressão, contudo, como o escoamento é incompressível, nas próximas manipulações algébricas este termo será cancelado. Em seu livro, Incropera e Witt ^[4] define a expressão (II.14) como equação da energia térmica, mas para que o equacionamento do problema físico fique dentro do proposto para esta dissertação, fazem-se necessárias algumas adequações algébricas, como a mostrada na equação (II.15) a seguir:

$$\rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \bar{P} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tag{II.15}$$

Convenientemente a formulação da equação da energia térmica será trabalhada com base na entalpia do fluido, i , e não mais com sua energia interna, e , definida como:

$$i = e + \frac{p}{\rho} \tag{II.16}$$

Então realizando a introdução do termo da equação (II. 16) na equação (II. 15) chega-se a expressão (II. 17), que é:

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right) \tag{II.17}$$

Então, é necessário exprimir o primeiro membro da equação da energia térmica em termos da temperatura. Logo, mais uma condição simplificadora será adotada, que é a consideração da substância fluida como um gás perfeito, assim:

$$di = c_p dT \tag{II.18}$$

Substituído a equação (II.18) na (II.17) temos:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \right) \tag{II.19}$$

A equação (II. 19) reduz-se ao objetivado, eliminando assim o termo de pressão (momento em “y” igual a zero), conforme observado anteriormente veja:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \tag{II. 20}$$

Todo o desenvolvimento mostrado até aqui (equacionamentos, formulações, algebrismos) teve como base a superfície de controle apresentada na figura 4 e para recapitular o que foi elaborado, o balanço de energia pode ser escrito, de forma resumida como mostrado abaixo na figura 5:

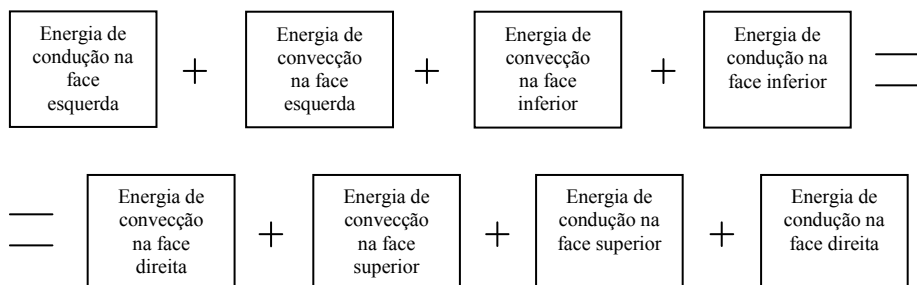


Figura 5 – Análise energética da superfície de controle para na camada limite.

A equação (II. 20) é a base para a resolução do problema difusivo-advectivo, proposto nesta dissertação de mestrado. Assim como no início desse capítulo, serão reiteradas algumas aproximações e condições de contorno especiais. A equação (II. 20) proporciona uma boa descrição dos processos físicos que influenciam as condições da camada limite cinética e térmica em condições bidimensionais e em regime permanente. Na literatura Incropera e Witt ^[4] também admitem simplificações como fluido incompressível (ρ constante), com propriedades constantes (k , μ , etc.), com forças de corpo desprezíveis ($\bar{X} = \bar{Y} = 0$), sem reação química ($\dot{n}_a=0$) e sem geração térmica ($\dot{q}=0$). Além disso, a condução de calor e difusão de massa na direção y são muito maiores que as taxas na direção x . Outro ponto de interesse é o desenvolvimento da camada limite cinética, que se caracteriza (em geral), pela existência de uma velocidade nula do fluido na superfície. Rearranjando os termos do segundo membro da equação (II. 20) obtemos:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II. 21})$$

Como a pressão não varia na direção normal à superfície, esta foi desprezada. A dissipação viscosa também foi desprezada, pois na realidade, somente em condições de escoamento sônico, ou no movimento de óleos lubrificantes a alta velocidade é que os efeitos da viscosidade são apreciados. Então a equação (II.21) é a representação da equação normalizada da transferência convectiva e ainda fazendo o um rápido manejo matemático, a expressão ficará da forma desejava da equação da energia, que estava sendo buscada para esta dissertação. Manipulando o termo referente à capacidade de

acumular energia térmica (ρc_p) do primeiro para o denominador do segundo membro, tem-se:

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.22})$$

Mas a relação entre a capacidade do material conduzir energia conduzir energia térmica (k) sobre a capacidade em acumular energia térmica (ρc_p) é definida como difusividade térmica (γ), levando a expressão (II.23):

$$\gamma = \frac{k}{\rho c_p} \quad (\text{II.23})$$

Substituindo a expressão (II.23) em (II.22) chega-se finalmente a formulação da difusão-advecção em regime bidimensional - equação (II.24):

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.24})$$

A expressão de energia (II.24) caracteriza-se pelo primeiro membro ser o termo de advecção (o lado esquerdo representa o transporte de energia na superfície de controle) e o segundo termo é o termo da difusão (onde o lado direito representa a saída de calor devida à condução). Esta situação descreve os escoamentos com convecção forçada, a baixa velocidade, que se encontra em muitas aplicações de engenharia.

Hoje, através de técnicas numéricas, é possível encontrar soluções para o problema da camada limite, através do método dos elementos de contorno (MEC) conforme será visto nos próximos capítulos.

CAPÍTULO III

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE

III.1 – FORMULAÇÃO CLÁSSICA

Neste capítulo inicia-se o estudo do Método dos Elementos de Contorno, daqui em diante representado apenas pela sigla MEC, suas formulações e equacionamento.

Para um melhor entendimento dos fundamentos matemáticos que compõem o MEC, a técnica do Método dos Resíduos Ponderados (MRP) pode ser utilizada. Pois sob a ótica do MRP, uma série de peculiaridades importantes do MEC são interpretadas claramente. Outra forma é o empregando da técnica de integração por partes juntamente com a aplicação do Teorema da Divergência. Esta segunda técnica será o foco desta dissertação.

Brebbia e Dominguez ^[5] utiliza a formulação integral clássica do MEC para o tratamento da parcela difusiva da equação de governo (difusão-advecção). Nos textos de Física Matemática esta é conhecida como Segunda Identidade de Green, ou seja, o tratamento do termo representado pelo laplaciano da temperatura é feito da mesma forma em todas as formulações propostas, pois se trata de um procedimento operacional básico, bem conhecido na literatura do MEC.

III.1.1 – OBTENÇÃO DA FORMULA CLÁSSICA

Vislumbrando a resolução da expressão da difusão-advecção em regime bidimensional via MEC, repete-se a equação (II. 26) a seguir como (III. 1), por conveniência:

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.1})$$

Observa-se que o lado direito da equação é o termo da difusão e este por sua vez enquadra-se como uma Equação de Laplace. Em contrapartida, o lado esquerdo contém o termo advectivo e sua resolução requer um tratamento similar ao empregado a problemas com características de ações de domínio ou fontes sorvedouros, como ocorre para a Equação de Poisson. No entanto, existem algumas particularidades, mas a abordagem dessa parcela advectiva será efetuada oportunamente no capítulo IV.

Algumas considerações sobre as formulações integrais devem ser observadas para que o entendimento da técnica do MEC. O modelo matemático representativo de um problema físico pode ser exposto de dois modos:

- Formulação Diferencial;
- Formulação Integral.

A Formulação Diferencial deriva da aplicação de princípios inaugurados pela Mecânica Newtoniana, fundamentados na exigência de equilíbrio (ou principio equivalente) local em todas as partes do sistema. Apesar da naturalidade de seus conceitos, em problemas

mais sofisticados é comum o aparecimento de complicadas e insolúveis equações.

Em contrapartida a Formulação Integral surge de forma mais comum, não como expressão de modelamento, mas sim como técnica de resolução. Na realidade, toda solução analítica ou semi-analítica de equações diferenciais resultam em alguma integração. Por outro lado, é possível modelar um problema físico diretamente em termos de uma Formulação Integral.

Isto ocorre naturalmente quando se aborda um problema a partir de princípios de conservação de energia (ou correlato) implicando em expressões escalares nos quais o equilíbrio é exigido em termos globais e não locais, sendo esta situação exposta no capítulo II.

No MEC busca-se demonstrar que a forma inversa de uma equação integral equivale a sua sentença do MRP, na qual estão sendo computadas minimizações de resíduos existentes na desobediência as condições ESSENCIAIS (u) e NATURAIS (q), além do próprio resíduo da solução aproximada no domínio. As etapas da formulação do MEC são as seguintes:

- Estabelecimento da forma integral inversa;
- Definição da solução fundamental;
- Discretização;
- Formulação numérica.

Entendida essa estrutura, aplica-se por plena questão de opção, a formulação do MEC é exposta segundo os formalismos tradicionais da física matemática.

Por conveniência, daqui em diante será adotada a notação indicial simples, associada ao sistema de coordenadas cartesianas.

III.1.1.1 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MATEMÁTICO

Para a definição do problema matemático, a solução fundamental, algumas considerações devem ser observadas.

1. Inicialmente admite-se que o sistema físico em estudo, aqui representado genericamente na figura 6, é composto de um domínio bidimensional $\Omega(X)$;
2. “ X ” representa as variáveis espaciais cartesianas “ x ” e “ y ”, ou seja, $X=X(x, y)$.
3. Delimita-se um contorno $\Gamma(X)$, sujeito as condições específicas que particularizam a solução.

A figura 6 exhibe estas considerações elementares.

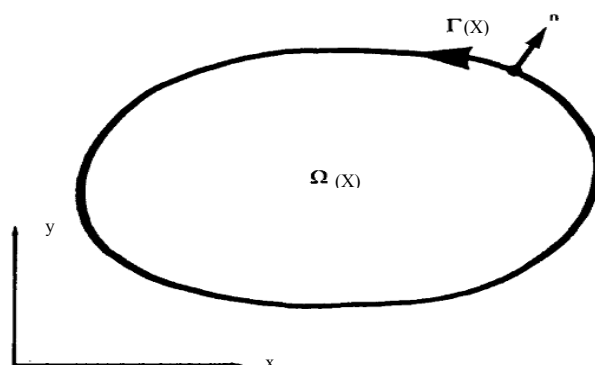


Figura 6 – Representação do domínio bidimensional $\Omega(X)$ e seu contorno $\Gamma(X)$. (Brebbia e Dominguez [5]).

A seguir o contorno recebe as condições essenciais “u” (referente à temperatura neste trabalho) e naturais “q” (que é derivada normal da temperatura, ou seja, fluxo de calor).

Brebbia e Dominguez [5] evidenciam desta mesma maneira em suas publicações, porém de forma generalista.

Então se tem a seguinte configuração e a sua ilustração na figura 7:

1. $\Gamma_u(X)$ é a parte do contorno na qual são conhecidos os valores do potencial (condição essencial “u”);
2. $\Gamma_q(X)$ são prescritos os valores da derivada normal (condição natural “q”).

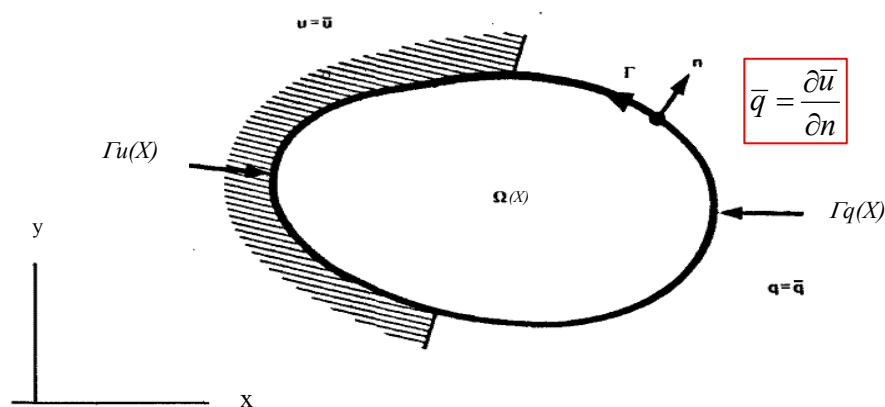


Figura 7 – Adaptação para a representação das condições de contorno. (Brebbia e Dominguez^[5]).

A união de $\Gamma u(X)$ com $\Gamma q(X)$ configura-se o contorno $\Gamma(X)$. A equação diferencial é reescrita na forma integral forte sobre o domínio $\Omega(X)$, onde se emprega uma função auxiliar $u^*(\xi, X)$, conforme mostrado na expressão (III. 2).

III.1.1.2 – ESTABELECIMENTO DA FORMA INTEGRAL INVERSA

Autores respeitados como Brebbia e Dominguez^[5] e outros utilizam-se da Equação de Laplace para realizar todo o desenvolvimento que embasa o MEC. Não alheio a este fato, esta dissertação trará a apresentação da Formulação Clássica do Método dos Elementos de Contorno desta mesma maneira. Já a Equação de Poisson necessita de outra formulação, tão sofisticada como esta, sendo abordada no capítulo seguinte.

Assim, no caso do problema de Laplace, a estratégia de formulação do MEC é, inicialmente, o estabelecimento da forma integral forte deste problema:

$$\int_{\Omega} (u_{,ii} u^*) d\Omega = 0 \quad (\text{III.2})$$

Ressalta-se que u^* é uma FUNÇÃO AUXILIAR que possui uma série de características matemáticas, dentre as quais se podem destacar a completude, continuidade e integrabilidade. Também na equação (III.2) a solução exata (u) deve ser substituída por uma função de aproximação (\bar{u}) nas equações.

Na literatura Brebbia e Dominguez^[5] destacam que é possível descrever estas sentenças integrais aproximadas a partir de identidades de Green ou formas integrais, sejam fracas, inversas ou fortes.

Na equação (III. 2), vê-se que muito se exige da função u (em termos de continuidade, etc.) que é a solução e pouco de (u^*) que pondera. O MEC utiliza funções (u^*) especiais para que o modelo aproximado resultante seja expresso exclusivamente em termos de integrais e valores de contorno.

III. 1.1.3 - TRANSFORMAÇÃO DA FORMA FORTE EM FORMA INVERSA.

Agora se apresenta o tratamento matemático, que obtêm a forma integral inversa a partir da forma integral forte.

Inicialmente, realiza-se uma integração por partes, para se obter a forma integral fraca:

$$\int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (\text{III.3})$$

A expressão (III.3) traz a forma integral fraca (ou variacional) que diminui o nível de

exigência na função (u), solicitando maior abrangência de (u*).

O MEC, na sua formulação mais comum, pode ser deduzido de duas formas:

1. Usando uma sentença completa da técnica dos resíduos ponderados;
2. Gerando uma forma integral inversa associada ao modelo diferencial, na qual se tomam aproximações \bar{u} e \bar{q} para as variáveis do problema.

Neste trabalho será seguido o segundo caminho. Desta maneira, a expressão (III. 3), após algum trabalho algébrico (procede-se a segunda integração por partes) apresenta-se como:

$$\int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u u^*)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (\text{III.4})$$

A equação (III.4) é a forma integral inversa da equação integral inicial (III.2), onde observa-se que a função de ponderação (u*) é muito mais exigida do que a função de aproximação u.

É possível demonstrar que as formas inversas e fracas contêm uma estrutura matemática equivalente a uma formulação de resíduos ponderados (MRP), onde se inclui uma minimização do resíduo no domínio e no contorno com relação às condições naturais (q) ou essenciais (u).

Por conveniência, a expressão ficará sob a forma de integral de domínio, pois adiante,

serão aplicados os artifícios matemáticos que transformarão a equação (III.4) na forma apropriada para a aplicação do MEC (quando será empregado o teorema da divergência).

III.1.1.4 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A função (u^*) é denominada SOLUÇÃO FUNDAMENTAL, e corresponde à solução analítica de um problema correlato ao abordado, ou seja, trata-se de um problema governado pela Equação de Poisson que consiste de uma ação externa concentrada num ponto particular (ξ) sobre um domínio infinito.

Ela possui propriedades especiais, que faculte a eliminação da integral de domínio restante e, sob a ótica da técnica dos Resíduos Ponderados, garanta uma boa minimização dos erros na obtenção da solução aproximada.

A figura 8 ilustra todas estas afirmações.

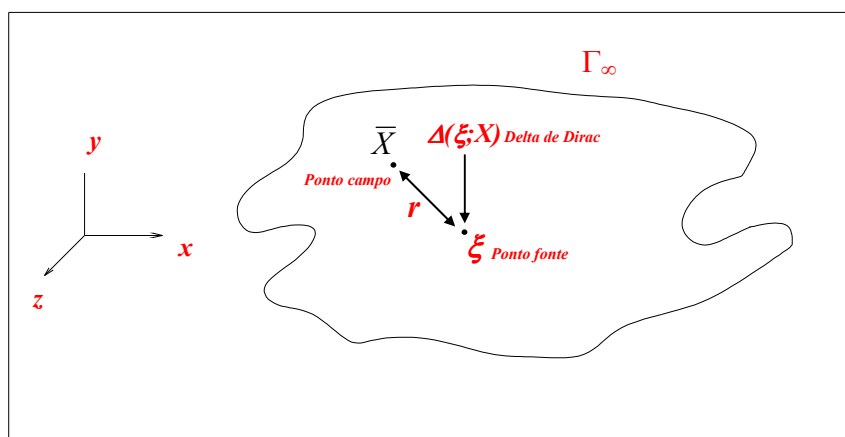


Figura 8 – Adaptação para a representação do domínio do problema fundamental.

A representação matemática do problema correlato é dada, então, por:

$$u_{,ii}^* = -\Delta(\xi; X) \quad (\text{III.5})$$

Para o caso bidimensional, a solução fundamental (u^*) é dada pela seguinte expressão:

$$u^*(\xi; X) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right) \ln r(\xi; X) \quad (\text{III.6})$$

Em contrapartida, sua derivada em relação à normal é:

$$q^*(\xi; X) = -\left[\frac{1}{2\pi r(\xi; X)}\right] \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n} \quad (\text{III.7})$$

Sendo que $r(\xi; X)$ é a distância euclidiana entre o ponto de aplicação da carga fundamental, usualmente denominado ponto fonte (ξ), e um ponto genérico do domínio, chamado ponto campo (X), conforme ilustração da figura 8.

O problema fundamental é expresso pela equação de Poisson, com o termo independente dado pelo operador delta de Dirac $[-\Delta(\xi, X)]$, que possibilita eliminação da integral de domínio que permanece na equação integral inversa. Isto será demonstrado no tópico (III. 1.2.4) a seguir e a forma que essa parcela tomará depende da posição de “ ξ ” com relação ao domínio físico do problema. Maiores informações vide apêndice A.

$$\int_{\Omega} (u_{,ii}^*) u d\Omega = -\int_{\Omega} \Delta(\xi; X) u d\Omega = -c(\xi) u(\xi) \quad (\text{III.8})$$

O valor de $c(\xi)$ depende da posição de (ξ) com relação ao domínio físico $\Omega(X)$ do problema.

Nesta dissertação será estabelecido o posicionamento dos pontos fonte (ξ) de acordo com a opção mais comum e difundida, ou seja, localizar os pontos fonte (ξ) no contorno. Outro fator relevante é a inserção destes pontos fonte (ξ) preferencialmente coincidentes com os pontos nodais (X) , e, desse modo, irá se conhecer o valor de $c(\xi)$.

Uma questão de suma importância e que deve ser tratada ainda neste capítulo é a obtenção do $c(\xi)$, pois neste tópico ele foi apenas apresentado, porém não foi exibida sua dedução. Apenas por formalidade acadêmica, é apresentada primeiramente a aplicação do Teorema da Divergência a fim de preparar a equação integral inversa da formulação do MEC para o raciocínio proposto para o $c(\xi)$. No item III.1.2.5, apresenta-se a dedução do valor de $c(\xi)$ para os casos possíveis referentes ao posicionamento do ponto fonte.

III. 1.1.5 – APLICAÇÃO DO TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

No que tange a formulação do MEC, a aplicação do Teorema da Divergência constituiu-se em uma das mais importantes etapas deste método, pois nela faz-se a passagem do domínio para o contorno. Esta é a essência matemática que o MEC traz como diferencial em relação aos demais métodos discretos (discretização apenas no contorno).

Desta forma objetiva-se transformar as integrais de domínio (conforme apresentado na equação III.4) em integrais de contorno.

Para isto, aplica-se o Teorema da Divergência que Transforma a integral de área em integral de linha. Então utilizando este artifício matemático na equação (III. 4) que esta na forma integral inversa, isto resultará em:

$$\int_{\Gamma} u_{,i} (u^* n_i) d\Gamma - \int_{\Gamma} (u u_{,i}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega = 0 \quad (\text{III.9})$$

Na equação (III. 9) o Teorema da Divergência foi empregado no primeiro e no segundo termos e desta forma as integrais de domínio são transformadas em integrais de linha.

Deve se ressaltar que as componentes do vetor normal (n) são derivadas direcionais (seno e cosseno diretores). É necessário enfatizar que a variável (q), nesta dissertação, é atribuído o conceito de fluxo de calor.

$$u_{,i} n_i = q \quad (\text{III. 10})$$

$$u_{,i}^* n_i = q^* \quad (\text{III. 11})$$

Então de posse dos conceitos descritos anteriormente (forma integral inversa, solução fundamental [delta de Dirac], Teorema da Divergência) e aplicando as equações, (III.8), (III.10) e (III.11) sobre a expressão (III.9), pode-se escrever, de modo sucinto, a equação integral do problema na forma inversa.

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = 0 \quad (\text{III.12})$$

Finalmente obtém-se a equação integral (III. 12) onde não há mais a presença de integrais de domínio, ou seja, esta expressa somente em termos de integrais de contorno. É importante ressaltar que ainda não foi feita nenhuma aproximação para os campos de variáveis (u) e (q), isto leva a conclusão de a equação (III. 12), em apreço, é uma expressão analítica exata.

III.1.1.6 – DEDUÇÃO DE $c(\xi)$ - ANÁLISE DAS SINGULARIDADES

O estudo do valor do ponto fonte (ξ) quando é posicionado no contorno exige uma análise matemática elaborada.

Repetindo a expressão (III.12) e considerando o ponto fonte (ξ) localizado internamente no domínio físico $\Omega(X)$, obtém-se a equação (III.13), ou seja:

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} \{uq^*\} d\Gamma - \int_{\Gamma} \{qu^*\} d\Gamma = 0 \quad (\text{III.13})$$

Visando obter-se o valor de $c(\xi)$ quando (ξ) esta no contorno, torna-se necessário o emprego de uma estratégia que se leva em consideração o posicionamento do ponto fonte (ξ) bem próximo à fronteira, criando assim um contorno adicional que o envolve.

A Figura 9 mostra esta estratégia de criação do domínio acrescido em torno de (ξ).

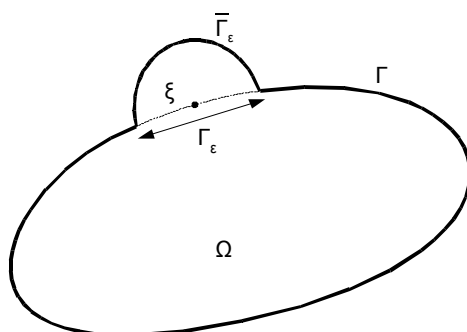


Figura 9– Domínio Estendido de um Setor Circular ao redor do Ponto Fonte ξ.

Como pode ser vista na literatura, a geometria desse contorno adicional é arbitrária. As integrais deste apêndice são devidamente examinadas.

Levando-se em consideração o domínio estendido simbolizado por $\Gamma_{est} = \Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon$. Então, serão alterados os limites de integração da expressão (III. 13), passando a ser reescrita da seguinte forma:

$$u(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma \right\} \tag{III. 14}$$

No que diz respeito às funções $u^*(\xi; X)$ e $q^*(\xi; X)$, observa-se que estas são descontínuas quando $(r = 0)$. Contudo, $u^*(\xi; X)$ é integrável ao longo do contorno e seu limite é estabelecido normalmente. Vide expressão (III. 6). Já a integral de $q^*(\xi; X)$ é singular, isto pode ser constatado ao consultar a expressão (III. 7).

Uma definição importante que deve ser levada em consideração é que as integrais singulares são aquelas cujos integrandos alcançam um valor infinito em algum ponto no domínio de integração.

Entretanto, as integrais podem ser convergentes ou não, dependendo das características de seus integrandos.

Existem outros fatores que influenciam as características citadas no parágrafo anterior e que oportunamente serão abordados. Por hora, é realizada a análise da existência das integrais, onde esta é feita exatamente tomando-se um intervalo bem reduzido, que inclui a singularidade, e obtendo-se o limite quando este espaço pequeno tende a zero.

No que tange a integral de $q^*(\xi; X)$, de fato esta não existe no senso usual se o ponto singular estiver incluso, logo sua integral deve ser examinada separadamente, como se segue:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma \right\} \quad (\text{III. 15})$$

O exame é realizado considerando-se a seguinte estratégia: Adiciona-se um potencial nulo $[u(\xi)]$ na equação (III.15), especificamente no núcleo da terceira integral do lado direito, onde se obtém a expressão a seguir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} q^*(\xi; X)[u(X) - u(\xi)]d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} q^*(\xi; X)u(\xi)d\Gamma \right\} \quad (\text{III. 16})$$

Observa-se que a integral sobre o contorno estendido foi desdobrada em duas outras, e considerando-se que $u(X)$ é uma função contínua, torna-se necessária uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, sendo aplicada no primeiro termo da equação (III. 16).

Considerando-se as seguintes relações no setor circular (ilustrado na figura 10), agrupadas como expressão (III.17), tem-se:

$$\begin{aligned} r &\equiv \varepsilon \\ \frac{dx_i}{\varepsilon} &= n_i \\ d\bar{\Gamma}_\varepsilon &= \varepsilon d\theta \end{aligned} \tag{III. 17}$$

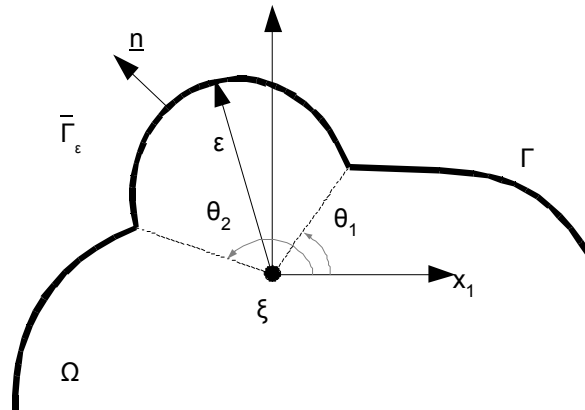


Figura 10 - Definição dos Ângulos Internos entre os Contornos Adjacentes ao Redor do Ponto Fonte.

Obtém-se, para o primeiro membro do lado direito da equação (III. 16), o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)[u(X) - u(\xi)] d\Gamma &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{[u_{,i}(\xi)\Delta x_i]}{\varepsilon} d\Gamma = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta} \frac{1}{2\pi} u_{,i}(\xi) n_i \varepsilon d\theta = 0 \end{aligned} \tag{III. 18}$$

Através da equação (III. 16) obtém-se a seguinte identidade (segundo termo do lado direito da equação integral):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)u(\xi)d\Gamma = u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)d\Gamma \tag{III. 19}$$

No entanto, este termo pode ser facilmente integrado, mas é deixado aqui em forma geral, pois caso o ponto fonte (ξ) se situe num ponto anguloso, seu valor é dependente do ângulo formado entre os elementos adjacentes.

Desta forma, escreve-se:

$$u(\xi)[1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) d\Gamma] = u(\xi)c(\xi) \quad (\text{III. 20})$$

Substituindo-se a expressão (III. 18) de $q^*(\xi; X)$ na expressão anterior (III. 20). Depois, levando-se em consideração que o contorno tenha um setor circular adicional e adotando a relação onde se tem $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{n_i}$, chega-se:

$$c(\xi) = [1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n} \varepsilon d\theta] = [1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \frac{1}{n_i} n_i \varepsilon d\theta] = [1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta] \quad (\text{III. 21})$$

Agora raciocinando para o caso de contornos suaves, podem-se considerar os limites de integração com os seguintes valores: $\theta_1=0$ e $\theta_2=\pi$. Logo se obtém:

$$c(\xi) = [1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta] = 0,5 \quad (\text{III. 22})$$

Nos casos em que o contorno é anguloso, tem-se:

$$c(\xi) = \frac{\pi - \theta_2 + \theta_1}{\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (\text{III.23})$$

No que tange o ângulo (α), vê-se que este corresponde ao ângulo interno entre duas normais adjacentes ao ponto anguloso, conforme mostra a figura 11

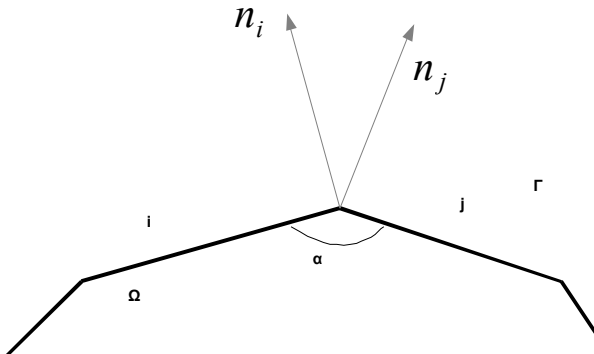


Figura 11 – Caracterização geométrica de um contorno anguloso

A partir de agora, a equação integral de governo passa a ser escrita da seguinte forma:

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma \right\} \tag{III.24}$$

Analisando a última integral do lado direito, equação (III. 24), uma existe uma condição que deve ser obedecida. A literatura enuncia que se $u(X)$ obedece à condição de Holder, então se diz que seu limite existe no sentido do *Valor Principal de Cauchy (VPC)*. Em outras palavras, a integral é convergente, já que seus valores singulares se anulam de alguma forma. Entretanto, para o caso de integrais singulares como desse tipo, a seguinte abordagem pode ser feita:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} q^*(\xi; X)d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma}^{-\varepsilon} \frac{1}{r_{,i}} n_i(X)d\Gamma + \int_{\Gamma}^{+\varepsilon} \frac{1}{r_{,i}} n_i(X)d\Gamma \right] \tag{III.25}$$

Na expressão (III. 25), as variáveis “a e b” são os limites inicial e final da integração. No núcleo das integrais observa-se a presença da função hiperbólica $q^*(\xi; X)$. Esta é uma função cuja integral isolada teria um resultado divergente. Todavia, essa função é acompanhada do produto $r_{,i} n_i$, que altera o sinal do núcleo e a torna convergente.

Nesta dissertação de mestrado, serão utilizados elementos de contorno retilíneos e especificamente para este tipo de discretização, o valor de $r_{,i} n_i$ é nulo. Isto significa que o produto escalar entre a direção do raio vetor (r, i) e a normal ao contorno é ortogonal.

Finalmente, após uma série de análises e manipulações matemáticas, a equação integral de governo pode ser escrita simplesmente como:

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma(X) - VPC \int_{\Gamma} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma(X) \quad (III.26)$$

Esta expressão (III.26) é a Formulação Singular do Método dos Elementos de Contorno.

Agora no próximo item deste capítulo, será deduzida a equação para a Formulação Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno, tomando como base o problema de Laplace.

III.2 – FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE

III.2.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O nome Hipersingular resulta do fato de que com a derivação da equação original de contorno, a ordem das derivadas dos núcleos se altera. Isto acontece graças ao posicionamento do ponto fonte (ξ) nos próprios elementos de contorno, esses núcleos das integrais passam a ter singularidades de ordem superior ($\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{r^2}$) em relação às existentes na formulação clássica ($\ln r$ e $\frac{1}{r}$).

O método Hipersingular nada mais é que uma formulação derivada da formulação clássica apresentada no tópico III. 1.2.4 deste capítulo.

Os seguintes passos devem ser observados, para que a aplicação da Formulação Hipersingular (FHS) seja bem sucedida. Inicialmente se encontra a equação integral de contorno que fornece a derivada direcional de um ponto fonte (ξ), situado no interior do domínio. Posteriormente, tal como na formulação clássica, leva-se, essa equação integral em termos da derivada do potencial em um ponto interno para o contorno.

O modelo matemático para ser bem posto, conforme abordado em capítulos anteriores exige o envolvimento das condições de contorno naturais (q), que são expressas em termos de derivadas normais.

A Formulação Hipersingular (FHS) pode ser deduzida a partir da derivação da equação integral (III. 12) com relação à direção normal, tomada, é claro, no ponto fonte (ξ), situado internamente. Em termos matemáticos, fica:

$$u_{,i}(\xi) = q(\xi) = \int_{\Gamma} u_{,i}^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q_{,i}^*(\xi; X) u(X) d\Gamma \quad \text{III.27}$$

Em decorrência da derivação efetuada nos núcleos, estes se modificam de ordem.

Desse modo, tomam-se as variáveis com relação à direção normal, onde a derivada da variável $u^*(\xi; X)$ transforma-se em $q^*(\xi; X)$. Em contrapartida o núcleo resultante da derivada de $q^*(\xi; X)$, de ordem inversa mais elevada é dado por $p^*(\xi; X)$:

$$q(\xi) = \int_{\Gamma} q^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} p^*(\xi; X) u(X) d\Gamma \quad \text{III.28}$$

Mas $p^*(\xi; X)$ que é na verdade a solução fundamental hipersingular, fica do seguinte modo:

$$p^*(\xi; X) = (1/2\pi r^2) \{ 2[r_{,i}(X)n_i(\xi)][r_{,j}(X)n_j(X)] - n_i(\xi)n_i(X) \} \quad \text{III.29}$$

Uma expressão similar à Equação (III. 28) pode ser obtida para qualquer direção, mas, apenas para um pós-processamento, pois por conta da já comentada necessidade do problema esta matematicamente bem posto, isto não será apreciado a fundo nesta dissertação.

III. 3 - EQUAÇÃO HIPERSINGULAR COM PONTO FONTE NO CONTORNO

Para se obter a equação integral na qual o ponto fonte (ξ) se situa no contorno, deve-se considerar um setor circular adicional de raio (ε), conforme já demonstrado na figura 10.

Considerando, então, esse contorno adicional, e o fato de que o ponto fonte (ξ) está interno ao domínio, a equação integral da derivada normal do potencial (q), fica sendo dada por:

$$q(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p^*(\xi; X)u(X)d\Gamma - \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; X)u(X)d\Gamma \right\} \quad \text{III.30}$$

Por conveniência, a fim de se explanar o conceito matemático envolvido na FHS, aplicando-se um potencial constante $u(\xi)$ em todo o domínio [o outro potencial, utilizado no tópico anterior, era $u(X)$] e considerando-se que a derivada normal do potencial $q(\xi)$, aqui nesta dissertação tratada como fluxo de calor, não é afetado por esse potencial adicional, então a equação III.30 pode ser reescrita como:

$$q(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p^*(\xi; X)[u(X) - u(\xi)]d\Gamma - \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; X)[u(X) - u(\xi)]d\Gamma \right\} \quad \text{III.31}$$

As expressões de $p^*(\xi; X)$ e $q^*(\xi; X)$ são mais simples, uma vez que no contorno adicional $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ tem-se:

$$n_i \varepsilon = r_{,i} \therefore \frac{r_{,i}}{r} \approx r \equiv \varepsilon \quad \text{III.32}$$

Logo, após observar na expressão III.32 que o produto da normal em relação à distância (ε) é exatamente o raio vetor (r), chega-se então, a seguinte equação para $p^*(\xi; X)$:

$$\begin{aligned} p^*(\xi; X) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \{2[\frac{r_j(X)}{r} n_j(\xi)][\frac{r_i(X)}{r} n_i(X)] - n_i(\xi)n_i(X)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \{2[n_j(X)n_j(\xi)][n_i(X)n_i(X)] - n_i(\xi)n_i(X)\} = \frac{n_i(\xi)n_i(X)}{2\pi\varepsilon^2} \end{aligned} \quad \text{III.33}$$

$$\therefore p^*(\xi; X) = \frac{n_i(\xi)n_i(X)}{2\pi\varepsilon^2}$$

Mas para que seja possível a operações subseqüentes, na expressão anterior (III.33), foi considerado que:

$$n_i(X)n_i(X) = n_i(\xi)n_i(\xi) = 1 \quad \text{III.34}$$

Também a expressão de $q^*(\xi; X)$ se simplifica no contorno adicional:

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r} \left[\frac{\partial r(X)}{\partial x_i(X)} \frac{\partial x_i(X)}{\partial n(\xi)} \right] - \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{r_i(X)}{r} n_i(\xi) \right] = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} [n_i(X)n_i(\xi)] \quad \text{III.35}$$

$$\therefore q^*(\xi; X) = -\frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi\varepsilon^2}$$

Efetuada-se uma expansão em Série de Taylor de primeira ordem, apenas para a quarta integral do lado direito da equação (III. 31) obtêm a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] d\Gamma \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi\varepsilon} \frac{u_{,j} \Delta x_j}{\varepsilon} \varepsilon d\theta \right\} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} & \quad \text{III.36} \\ \therefore p^*(\xi; X) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} \end{aligned}$$

Similar aproximação é obtida ao se efetuar sobre o segundo termo do lado direito da equação (III.31), que são os mesmos recursos matemáticos empregados na expressão anterior (III.36), o que conduz ao seguinte limite:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi; X) q(X) d\Gamma \right\} &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi\varepsilon} u_{,j} n_j \varepsilon d\theta \right\} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} \\ \therefore q^*(\xi; X) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{2\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} \end{aligned} \quad \text{III.37}$$

Observa-se claramente, com exceção do sinal negativo, que é a mesma equação obtida ao se analisar a expressão III.37 onde a soma das duas integrais pode ser condensada em uma única integral, deste modo reescrevendo (substituindo III.36 e III.37 em III.30) a equação III.30 ficará da seguinte maneira:

$$q(\xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} q^*(\xi; X) q(X) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p^*(\xi; X) [u(X) - u(\xi)] \quad \text{III. 38}$$

O segundo termo do lado esquerdo da equação (III.38) é resolvido fazendo-se uma integração angular, onde pode ser observado o fato de que (n_i) é função de (θ) . Maiores detalhes vide apêndice B.1. Resolvendo esta integral dependente de θ (ângulo interno no entorno do ponto singular), chega-se a expressão III.39:

$$q(\xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta_\varepsilon} \frac{n_i(X)n_i(\xi)}{\pi} u_{,j} n_j d\theta \right\} = q(\xi) - s(\xi)q(\xi) + w_i(\xi)q_i(\xi) \quad \text{III.39}$$

Assim como mencionado em capítulos anteriores, condições simplificadoras são consideradas, então se toma os contornos como suaves, o que acarreta em (w_i) nulo (0). Já o $s(\xi)$ possui valor igual a 0,5 propondo que a equação (III.40) envolve apenas o fluxo na direção normal.

No que tange às integrais restantes, observa-se que estas não são convergentes em um senso comum, mas sim, existem no sentido do *Valor Principal de Cauchy* (VPC). Isto quer dizer que a integral é convergente, pois os valores singulares se anulam de alguma forma. No caso de integrais singulares desse tipo, isto ocorre quando consideradas juntas. Desta maneira a equação (III. 39) fica:

$$0,5q(\xi) = \text{VPC} \left\{ \int_{\Gamma} p^*(\xi; X)[u(X) - u(\xi)]d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi; X)q(X)d\Gamma \right\} \quad \text{III. 40}$$

Esta expressão (III. 40) é a típica equação integral Hipersingular do Método de Elemento de Contorno. A discretização do método FHS será exposta adiante no capítulo VI desta dissertação.

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM A DUPLA RECIPROCIDADE SINGULAR

IV.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA PROBLEMAS DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO

No capítulo anterior, o termo de transporte da Equação da Difusão-Advecção foi momentaneamente colocado à parte, para que se apresentasse o procedimento usual do MEC na abordagem de problemas governados pela Equação de Laplace, cujo operador auto-adjunto garante a transformação das integrais de domínio geradas na formulação integral inversa típica do MEC, em integrais de contorno.

Nesse momento, é preciso focar o tratamento matemático a ser dado ao termo advectivo, de modo que suas integrais sejam igualmente conduzidas ao contorno.

Cabe ressaltar que o desenvolvimento de uma formulação consistente em Elementos de Contorno para os problemas difusivos-convectivos surgiu somente no início da década de 80, quando foi gerado um modelo matemático baseado na solução fundamental de um problema difusivo-convectivo similar, com fonte concentrada (Brebbia et. al. ^[6]). É uma formulação elegante e precisa, mas possui séria limitação, relacionada ao fato de não poder resolver adequadamente problemas com campo de velocidades variável no domínio.

Poucos anos após, foi apresentada por Partridge et. al. ^[7] uma formulação capaz de resolver este tipo de problema, incluindo campos com velocidades variáveis, fundamentada no procedimento da Dupla Reciprocidade.

O Método da Dupla Reciprocidade (DRM – Dual Reciprocity Method) foi idealizado e implementado por Nardini e Brebbia ^[8] em 1982 para a solução de problemas de elastodinâmica. Ele é essencialmente uma forma generalizada da construção da solução particular e pode ser usado para resolução de problemas não lineares e dependentes do tempo, os quais tratam com simplicidade estes casos escalares. Inicialmente ele foi utilizado para que aproximações pudessem ser usadas para resolver uma ampla variedade de problemas de parábolas bem como hiperbólicos dependentes do tempo.

Uma completa descrição de como o método pode ser aplicado para vibrações foi bem apresentado por Nardini e Brebbia ^[8].

Neste trabalho acadêmico o termo utilizado para designar esta formulação será FDRS (Formulação com Dupla Reciprocidade Singular). Atualmente FDRS é uma das mais importantes formulações do Método dos Elementos de Contorno, cujo principal propósito é gerar uma alternativa mais acessível e competitiva para resolver os problemas de autovalor e resposta dinâmica, sua metodologia foi generalizada e aplicada com êxito a outros casos conforme dito anteriormente (fontes, sorvedouros).

Ressalta-se a versátil característica da integração ser efetuada apenas no contorno, diferentemente de outros métodos, como o das células, que requer uma discretização do domínio.

Outra característica que não deve ser omitida entre as importantes contribuições da formulação com Dupla Reciprocidade é sua a flexibilidade, pois graças a este atributo é possível gerar formulações do Método dos Elementos de Contorno mais acessíveis em problemas cujo operador diferencial da equação de governo é relativamente complicado. Dentro dessa categoria, estão os casos térmicos como a convecção, que é o objeto de estudo desta dissertação. É necessário que o problema possua uma forma integral inversa matematicamente bem posta, tornando possível gerar outras formulações mais flexíveis através do uso da formulação com Dupla Reciprocidade.

A luz do Método dos Elementos de Contorno, o tratamento mais elegante a ser dado à integral de domínio, onde o argumento de integração é o termo de ação de domínio $p(X)$, este tratamento recebe o nome de Formulação com Dupla Reciprocidade. Tal denominação se deve ao fato de que as matrizes **H** e **G** originadas para a Formulação Clássica do MEC, são duplicadas, ou seja, reaparecem. A exibição das mesmas será efetuada no capítulo VI.

A formulação mais tradicional, apresentada por Partridge *et. al.*^[7], será aplicada no termo do lado esquerdo da equação a seguir.

$$(v_i u_{,i}) = \gamma(u_{,ii}) \quad (\text{IV. 1})$$

Originalmente esta é a equação (III. 1), repetida aqui por conveniência e já na forma indicial simples, renumerada como equação (IV.1).

O procedimento para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno permanece como apresentado anteriormente. Multiplicam-se ambos os termos da equação (IV. 1) por uma função auxiliar (u^*) e integra-se o resultado em um domínio ($d\Omega$).

$$\int_{\Omega} (v_i u_{,i}) u^* d\Omega = \gamma \int_{\Omega} (u_{,ii}) u^* d\Omega \quad (\text{IV.2})$$

A aplicação do procedimento característico da formulação com a Dupla Reciprocidade parte da consideração de que o termo convectivo da equação (IV.2), lado esquerdo da referida expressão, pode ser interpretado como se fosse uma ação de domínio (p), ou seja:

$$\int_{\Omega} p u^* d\Omega = \alpha \int_{\Omega} (u_{,ii}) u^* d\Omega \quad (\text{IV.3})$$

O lado direito pode ser operacionalizado conforme mostrado no capítulo precedente a este. Todos os esforços e atenção são agora dirigidos para o lado esquerdo da equação (IV.3).

Tradicionalmente a técnica da Dupla Reciprocidade propõe substituir a função $p(X)$ por uma série finita composta por novas funções auxiliares ($\alpha^j f^j$), onde (α^j) são coeficientes inicialmente desconhecidos e (f^j) são funções de aproximação cuja quantificação depende de pontos (X^j) escolhidos tanto no contorno, quanto no interior

do domínio. Este procedimento é descrito por Brebbia e Dominguez^[5] em seu livro *Boundary Elements an introductory course*, em outras palavras, traduzindo este parágrafo na lógica matemática fica:

$$p(X) \cong \alpha^j f^j(X) \quad (\text{IV. 4})$$

O aspecto mais importante contido na expressão (IV.4) é a interpolação aí introduzida, na qual se situa a maior fonte de erros produzida pela formulação.

Define-se uma nova função (Ψ^j), como sendo uma primitiva de (f^j), conforme a equação (IV.5):

$$f^j = \Psi_{,ii}^j \quad (\text{IV.5})$$

Desta forma, pode-se reescrever o termo da esquerda da equação (IV.3) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} pu^* d\Omega = \int_{\Omega} \alpha^j f^j u^* d\Omega = \int_{\Omega} \alpha^j (\Psi_{,ii}^j) u^* d\Omega \quad (\text{IV.6})$$

Assim, Brebbia e Dominguez^[5] aplica as mesmas transformações matemáticas que conduziram o lado direito da equação (IV.2), em outras palavras, tudo que foi utilizado para preparar a equação integral clássica do MEC e expressá-la unicamente em termos de valores de contorno.

Portanto, inserindo a equação (IV.6) no lado esquerdo da equação (IV.2) e realizando os procedimentos matemáticos necessários para o emprego do MEC, chegando a equação (IV.7):

$$\alpha^j \left[c(\xi) \Psi^j(\xi) + \int_{\Gamma} \Psi^j(X^j; X) q^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} \eta^j(X^j; X) \mu^*(\xi; X) d\Gamma \right] = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Sendo que (η^j) é a derivada normal do potencial (Ψ^j) , conforme é exibido na equação (IV.8).

$$\eta^j = \frac{\partial \Psi^j}{\partial n} \quad (\text{IV.8})$$

Ressalta-se que (Ψ^j) e (η^j) são funções conhecidas e estão relacionadas com a função (f^j) , que por sua vez, pode ser escolhida arbitrariamente. Nesta dissertação de mestrado utiliza-se a função radial simples (r) e a de terceira ordem (r^3) , pois estas apresentam soluções simples e com regularidade de resultados, independentemente da geometria do problema.

Os resultados obtidos com as funções radiais serão interpretados no capítulo VII desta dissertação.

Estas funções caracterizam a distância euclidiana entre os pontos (X) do domínio e os pontos deste relacionados à interpolação regida pela Dupla Reciprocidade, expressos por (X^j) .

No que tange a problemas de campo escalar, estas funções são muito importantes para a obtenção de soluções particulares para (Ψ^j) e (η^j) , principalmente tratando-se da função radial simples.

Para as funções de interpolação radial simples (r) e de terceira ordem (r^3), as funções primitivas são de terceira ordem e também de quinta ordem (respectivamente), onde se espera obter um comportamento mais convergente.

A forma das equações primitivas é mostrada a seguir.

$$\Psi^j(X^j; X) = r^3/9 \quad (\text{IV.9})$$

$$\eta^j(X^j; X) = r/3 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \quad (\text{IV.10})$$

Observa-se inicialmente a função primitiva ψ^j radial de terceira ordem (IV.9) e sua derivada normal (IV.10), que serão utilizadas em um primeiro momento. Por conveniência, designaremos a equação (IV.9) como simplesmente F1, já que no capítulo VII esta função será citada em várias passagens.

Após exposição e tratamento dos resultados obtidos com F1, oportunamente a função de interpolação será alterada para a forma vista na equação (IV.11), bem como a utilização de sua derivada normal (IV.12) onde serão observados os impactos ocasionados e seu comportamento no que diz respeito a FDRS.

$$\Psi^j(X^j; X) = r^5/25 \quad (\text{IV.11})$$

$$\eta^j(X^j; X) = r^3/5 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \quad (\text{IV.12})$$

Pelos mesmos motivos citados acima para equação (IV.9), a equação (IV.11) será denominada de F3.

A dedução das expressões IV.9 a IV.12 encontram-se presentes no apêndice D.1 e D.2.

IV. 2 ELIMINAÇÃO DAS DERIVADAS ESPACIAIS

Agora são apresentados os algebrismos pertinentes para a obtenção da equação integral com Dupla Reciprocidade (FDRS) explicitando as derivadas da velocidade que aparecem na equação da difusão-advecção.

Este problema é amplamente difundido na literatura voltada para engenharia e sua característica marcante é sua equação diferencial parcial que representa os casos escalares, fisicamente homogêneos e isotrópicos, em que há presença de ações de domínio.

Toma-se inicialmente a expressão (III.26), como de praxe renomeada de (IV.13), que é a Formulação Singular do Método dos Elementos de Contorno, como mostrado abaixo:

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; X)q(X)d\Gamma(X) - VPC \int_{\Gamma} q^*(\xi; X)u(X)d\Gamma(X) \quad (IV.13)$$

O próximo passo consiste em manipular algebricamente a equação (IV.13) de maneira que esta possa receber a inserção da equação (IV.7), onde o agrupamento obtido pode ser reescrito conforme visto na expressão (IV.14)

$$\begin{aligned}
& c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma(X)} u^*(\xi; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma + VPC \int_{\Gamma(X)} u(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = \\
& = \alpha^j \left[c(\xi)\Psi^j(\xi) + \int_{\Gamma(X)} \Psi^j(X^j; X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma(X)} \eta^j(X^j; X)u^*(\xi; X)d\Gamma \right] \quad (IV.14)
\end{aligned}$$

Desta forma, foi deduzida a equação para a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular (FDRS) do Método dos Elementos de Contorno, tomando como base o problema da difusão-advecção (a difusão esta representada pelo termo à esquerda e o termo da advecção é reproduzido no lado direito).

Entretanto, o valor (α^j) é dado por:

$$\alpha^j = F^{-1} p \quad (IV.15)$$

No caso do problema difusivo-advectivo, o valor de $p(X)$ corresponde à parcela advectiva que é composta de derivadas espaciais da temperatura, na forma:

$$\alpha^j = F^{-1}(v_i u_{,i}) \quad (IV.16)$$

Para se eliminar as derivadas espaciais ainda presente, faz-se:

$$u = \beta^j F^j \rightarrow \beta^j = [F^j]^{-1} u \quad (IV.17)$$

$$u_{,i} = \beta^j F_{,i}^j$$

Onde (β^j) são coeficientes e as mesmas funções de base radial podem ser utilizadas na interpolação deste campo.

A discretização do método FDRS será exposta no capítulo VI desta dissertação, onde serão necessários artifícios matemáticos para a formação do conjunto de matrizes e permutações, peculiares a esta formulação. A seguir no capítulo V, será introduzido método FDRH (Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular).

CAPÍTULO V

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM A DUPLA RECIPROCIDADE HIPERSINGULAR

V.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo será exposta uma análise objetiva e clara dos conceitos básicos inerentes ao método da Dupla Reciprocidade, que também serão aplicados a Formulação Hipersingular (FHS) do MEC.

A Hipersingularidade que já foi objeto de estudo no capítulo III, tendo sido conceituada e aplicada na formulação integral clássica do MEC.

Os artifícios e manipulações matemáticas envolvidos na Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular (FDRH) são tão sofisticados quanto aos empregados na FDRS.

O desenvolvimento da FDRH tem início com a reintrodução da forma integral (IV.14), que é a expressão típica da FDRS. Deste ponto em diante, será feita uma derivação de primeira ordem na expressão (IV.14), sendo esta em relação a uma dada direção $n(\xi)$ no ponto (ξ) , obtendo-se a expressão (V.1) a seguir.

$$\begin{aligned}
& c(\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n(\xi)} - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} q(\mathbf{X}) d\Gamma + VPC \int_{\Gamma(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} = \\
& = \alpha^j \left[c(\xi) \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial n(\xi)} + \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(X^j; X) \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Gamma - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(X^j; X) \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} d\Gamma \right] \quad (\text{V.1})
\end{aligned}$$

Após a resolução da derivada da expressão (V.1), o núcleo (argumento) de cada forma integral foi alterado, obtendo-se a forma Hipersingular aplica a FDRS, como mostrado na equação (V.2):

$$\begin{aligned}
& c(\xi)q(\xi) - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma + \int_{\Gamma(\mathbf{X})} p^*(\xi; \mathbf{X})u(\mathbf{X})d\Gamma = \\
& = \alpha^j \left\{ - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})\bar{q}^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})p^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} \quad (\text{V.2})
\end{aligned}$$

Os termos do lado esquerdo da equação anterior já receberam o tratamento detalhado no item III.2.1 do Capítulo III, referente à Formulação Hipersingular para o problema de Laplace. A exposição do método neste momento contempla apenas os termos à direita da equação (V.2).

O domínio aumentado por um setor circular de raio (ε), em torno de (ξ), agora considerado sobre o contorno, leva ao resultado (V.3), isto novamente considerando o limite de (ε) tendendo a zero ($\varepsilon \rightarrow 0$).

$$\alpha^j \left\{ - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} =$$

$$\alpha^j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} \quad (\text{V.3})$$

Agora manipulando apenas o primeiro termo (o que está à esquerda) da equação (V.3), este pode ser desmembrado como apresentado em (V.4) a seguir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (\text{V.4})$$

Agora tratando apenas da expressão (V.4), observa-se que a integrabilidade do primeiro termo (este à esquerda) é justificada pelo núcleo ser formado por funções hiperbólicas e estas estão acompanhadas do produto (r, n_i) , isto acarreta na geração de sinais distintos (antes e após a singularidade) equalizando a sentença matemática (auto-compensação), como pode ser visualizado na equação (V.5).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (\text{V.5})$$

Já a segunda integral à direita em (V.4) assume a forma apresentada em (V.6), após a introdução da expressão (III. 35), referente à $q^*(\xi; \mathbf{X})$ sobre o contorno aumentado apenas, e aplicando as relações (III.17) referente a $(d\Gamma = \varepsilon d\theta)$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) [n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right]
\end{aligned} \tag{V.6}$$

Aplicando os resultados obtidos em (V.5) e (V.6), o termo à esquerda da equação (V.3) pode ser reescrito na forma (V.7) a seguir.

$$\int_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \tag{V.7}$$

De maneira que a partir de agora os cuidados são voltados para o termo da direita da equação (V.3), que também é reescrito em duas partes na expressão (V.8). Assim como foi realizado anteriormente, será considerada uma expressão referente à região aumentada do contorno (setor circular) e outra no restante da fronteira.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \tag{V.8}$$

O termo do lado direito da expressão (V.8) pode ser escrito assim como (V.7), ficando representada pela forma visualizada na equação (V.9), considerando que a integração será realizada apenas no setor circular aumentado e que a equação (III.33), que representa $p^*(\xi; \mathbf{X})$ nessa região, é utilizada.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \right) [n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)] \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (\text{V.9})$$

Uma expansão de primeira ordem em série de Taylor é realizada para $\Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ em torno de (ξ) . Desta expansão será obtida a relação (V.10).

$$\Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \approx \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} [x_k(\mathbf{X}) - x_k(\xi)] \quad (\text{V.10})$$

Para o desenvolvimento subsequente, é necessária a consideração dos valores das componentes do vetor normal externo, apresentada em (V.11).

$$n_i(\mathbf{X}) = \frac{x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)}{\varepsilon} \quad (\text{V.11})$$

Tomando esse último termo originado em (V.9) e considerando a equação (V.11) que representa as componentes do vetor normal no setor circular aumentado, obtém-se a expressão (V.12).

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) [n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\Gamma \right] = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

Segundo Mansur et. al. ^[3] a equação integral hipersingular deve representar de modo consistente a presença de um potencial constante $u(\xi)$, de maneira que a relação do divergente do gradiente seja zerado $[u(\xi)]_{,ii} = 0$. Desta maneira, pela similaridade dos termos gerados na forma integral inversa da equação de Laplace com as integrais produzidas pela Dupla Reciprocidade, pode-se concluir que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (\text{V.13})$$

Desta forma, o primeiro termo à direita da igualdade na equação (V.12) expurga a singularidade inerente ao primeiro termo à direita na equação (V.8), que ocorre apenas quando $(\xi = \mathbf{X})$. Assim, a equação (V.8), ou o termo da expressão (V.3), assume a forma apresentada em (V.14).

$$\int_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (\text{V.14})$$

As Equações (V.8) e (V.14) substituem, respectivamente, os termos da equação (V.3), gerando a representação da carga de domínio em integrais de contorno, conforme detalhado em (V.15).

$$\begin{aligned} & \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} = \\ & \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \int_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \right. \\ & \left. - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)]}{2\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \right\} \quad (\text{V.15}) \end{aligned}$$

Ao gradiente de (Ψ^j) , aplicam-se os mesmos argumentos que precedem a equação (III.39) do capítulo III, no limite $(\varepsilon \rightarrow 0)$, sua magnitude no ponto (ξ) pode ser tomada como constante, variando apenas sua direção ao longo da integração no setor circular (θ_ε) . Com isso, tem-se que:

$$\left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})}{\partial x_k(\mathbf{X})} \right) n_k(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) \quad (\text{V.16})$$

Os dois últimos termos da equação (V.15) podem ser somados, gerando (V.17).

$$\begin{aligned} & \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} \\ & \alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta_\varepsilon} \frac{[n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)]}{\pi} \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] + \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

Antes de se definir os nós funcionais e discretizar o contorno, deve-se reescrever a integral ao longo do setor circular, contida na expressão (V.17), numa forma numericamente tratável. Isto é feito de forma idêntica ao procedimento descrito para Formulação Hipersingular (FHS) utilizado para o problema de Laplace [equação (III.39)]. Isto foi oportunamente transcrito aqui sob a forma (V.18). Maiores detalhas vide apêndice B.2.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] = s(\xi) \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) + w_k(\xi) \eta_k^j(\mathbf{X}^j; \xi) \quad (\text{V.18})$$

Assim como foi realizado na equação (III.40), os valores de $s(\xi)$ e $w_k(\xi)$ já foram dados, através de condições simplificadoras. Desta maneira, obtêm-se o novo resultado (V.19) para as integrais que representam a carga de domínio.

$$\alpha^j \left\{ \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right\} = \quad (\text{V.19})$$

$$\alpha^j \left\{ -0,5\eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) + VPC \left[\int_{\Gamma} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) p^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right] \right\}$$

No capítulo subsequente, será abordada a discretização do contorno para a Laplace utilizando a formulação Singular e Hipersingular. O mesmo procedimento será adotado para formulação com Dupla Reciprocidade, também Singular e Hipersingular.

CAPÍTULO VI

DISCRETIZAÇÃO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA

VI. 1 - DISCRETIZAÇÃO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA A FORMULAÇÃO CLÁSSICA SINGULAR

Neste capítulo serão abordados os itens, ou etapas, de discretização e formulação numérica que serão aplicadas inicialmente para a forma integral clássica do MEC, empregada no trato da equação da difusão. Na seqüência, estas técnicas também serão utilizadas para a resolução do problema da convecção através da implementação da FDRS e por fim, estes procedimentos discretos e numéricos estarão sendo aplicados na sofisticada FDRH.

Recapitulando os passos anteriores, nota-se que primordialmente foi obtida a equação integral, que compõe o modelo matemático do MEC, ou seja, uma solução fechada e agora se deseja alcançar o modelo aproximado correspondente, em outras palavras, que pode ser obtido numericamente. Nesta etapa está à essência do MEC, é onde sua formulação é baseada como técnica numérica propriamente dita. Para que a técnica em apreço tenha sucesso, uma minuciosa preparação deve ser efetuada prévia ao seu emprego.

A etapa de discretização da equação integral configura-se como uma operação simples, pois se trabalha apenas no contorno e eventualmente com alguns poucos pontos internos constitutivos, porém é imperativo que todos estes dados estejam dispostos da forma correta já que é a partir daí que se inicia a compilação destes valores.

Em relação à formulação do sistema matricial, este é carregado com as condições essenciais (u) e naturais (q), posicionamento dos elementos (estratificação em nós geométricos e funcionais) e de posse de todas estas informações procede-se o processamento computacional.

A proposta deste trabalho contempla apenas o emprego de elementos constantes e retilíneos, cujo aspecto pode ser expresso de acordo com a figura 12. O contorno $\Gamma(X)$ é discretizado em uma composição de elementos distintos.

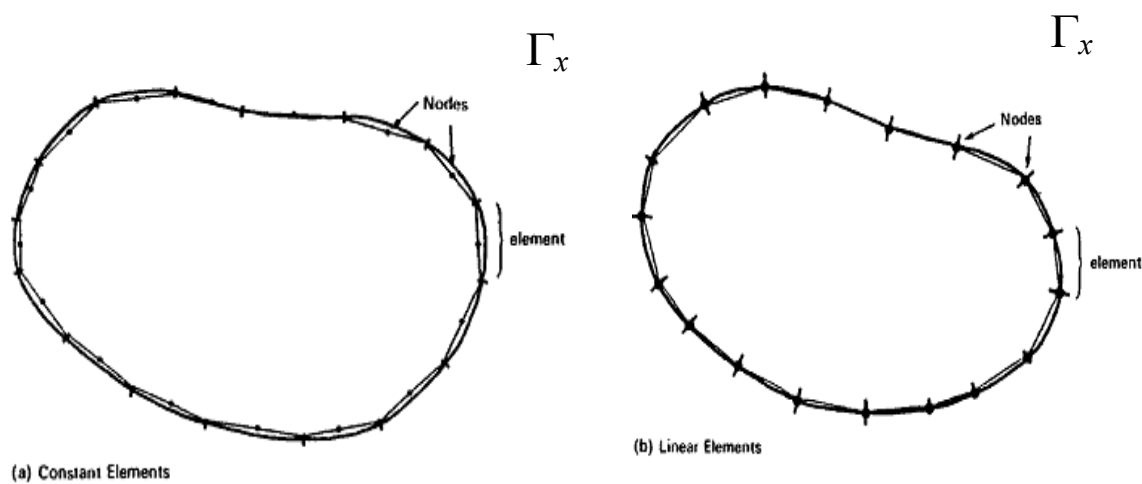


Figura 12 – Exposição do contorno Γ_x (imaginário) devidamente discretizado. (Brebbia e Dominguez^[5]).

Apenas por efeitos didáticos, é mostrado na figura 13 a mesma discretização visualizada acima, porém com a adoção de elementos quadráticos.

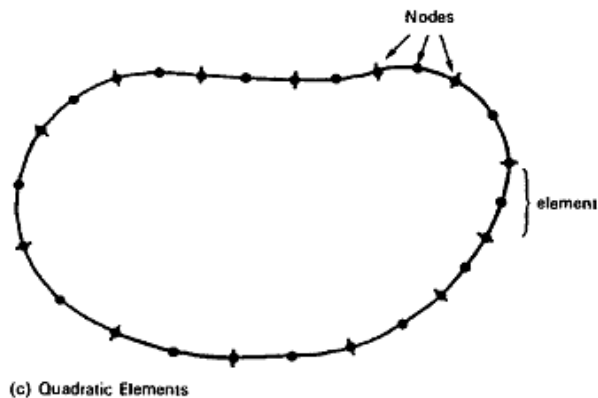


Figura 13 – Representação gráfica dos diferentes tipos de elementos de contorno utilizados na discretização do domínio Γ_x (Brebbia e Dominguez^[5]).

Cada elemento do contorno Γ_x é devidamente identificado e computado junto aos demais, podendo ser exibido conforme a seguinte sentença matemática:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \dots + \Gamma_N = \sum_{i=1}^{NE} \Gamma_i(X) \quad \text{VI. 1}$$

Na figura 14 é apresentada uma superfície de controle similar ao utilizado no trato do problema difusivo-advectivo, tema do capítulo II, coerentemente exibido nesta passagem, para embasar a técnica discreta em apreço.

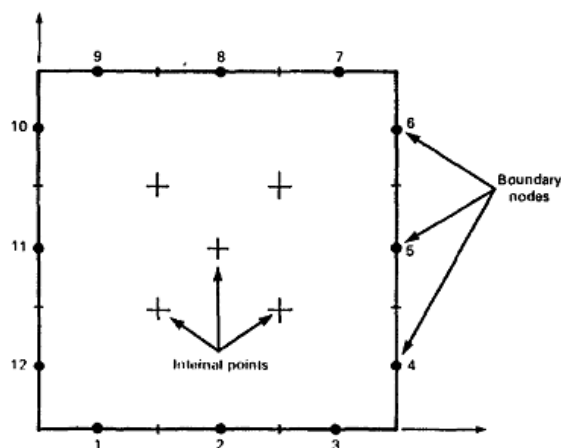


Figura 14 – Visualização de um volume de controle elementar com seus nós funcionais e adoção de pontos internos. (Brebbia e Dominguez^[5]).

Observa-se que ao longo de cada elemento são definidas variações da grandeza básica ou sua derivada normal em função de valores em determinados pontos. Brebbia e Dominguez^[5] pondera sobre estes nós ou pontos nodais, sinalizando que seu posicionamento pode ser efetuado de diversas formas, sobretudo no que tange ao nível de sofisticação e ordem de interpolação desejada.

A afim de simplificar o esquema de aproximação, o ponto nodal será considerado no elemento (mais especificamente no meio do comprimento de cada elemento), conforme figura 15, outro ponto importante é admitir que não há variação do valor calculado no ao longo deste mesmo elemento, procedendo assim uma interpolação constante, com elementos retilíneos (caso bidimensional).

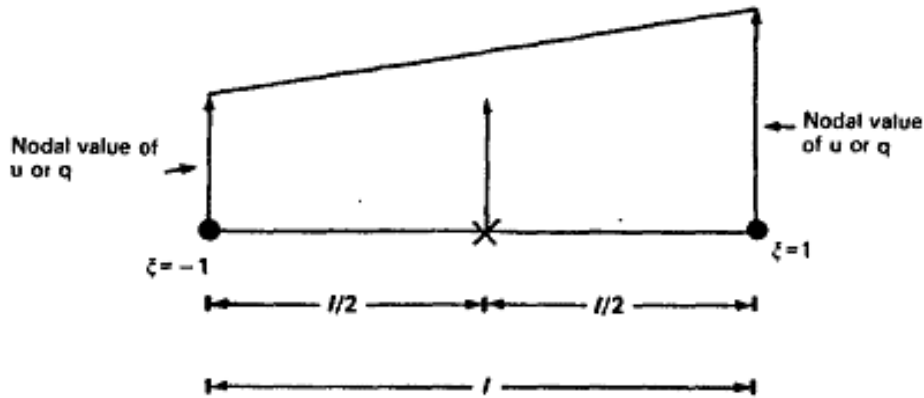


Figura 15 – Definições do elemento linear. (Brebbia e Dominguez^[5]).

VI. 1.1 - TRATAMENTO DA PARCELA DIFUSIVA (EQUAÇÃO DE LAPLACE)

O tratamento do problema de Laplace inicia-se através da discretização da equação clássica do MEC referenciada nesta dissertação como expressão integral (III.12). A discretização é realizada em termos de elementos constantes retilíneos, podendo ser reescrita como se segue:

$$c(\xi)\bar{u}(\xi) + \sum_{i=1}^{NE} \left[\bar{u}_i \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma - \bar{q}_i \int_{\Gamma_i} u^* d\Gamma \right] = 0 \tag{VI. 2}$$

Os valores \bar{u} e \bar{q} são os valores nodais aproximados para o potencial (u) e sua derivada normal (q), contudo, existe uma exceção, os valores das condições de contorno prescritas.

Matematicamente, as interpolações dos valores nodais sobre cada elemento caracterizam-se através do seguinte arranjo matricial:

$$\bar{u}(X_i) = N\bar{u}_i^n \quad \text{VI. 3}$$

$$\bar{q}(X_i) = N\bar{q}_i^n \quad \text{VI. 4}$$

Entretanto, o que está sendo tratado neste trabalho é um caso onde os elementos são constantes, então (N) (matriz para funções de interpolação) é apenas um escalar unitário e a potência (n) (indica o ponto nodal ao longo do elemento “i” de coordenadas “X”) é dispensável. Admitindo-se, também, a discretização do contorno em (NE) elementos e os valores do campo constantes ao longo do elemento.

Neste trabalho será utilizada uma técnica de aproximação para resolução das equações integrais do MEC. Neste contexto haverá o emprego da chamada Quadratura de Gauss, deixando a expressão VI. 2 com o seguinte aspecto:

$$c(\xi)\bar{u}(\xi) + \sum_{i=1}^{NE} \left[\bar{u}_i \sum_{j=1}^P q^* J_i(\eta_j) w_j - \bar{q}_i \sum_{j=1}^P u^* J_i(\eta_j) w_j \right] = 0 \quad \text{VI. 5}$$

As novas variáveis que surgiram na equação VI.5 são o Jacobiano (J) (passagem das variáveis de integração para grandezas adimensionais), os pontos de Gauss (η) e os pesos de Gauss (w), cujo propósito é tornar adimensional os elementos. Para desenvolver o sistema de equações integrais, aqui proposto, é necessário localizar os pontos (ξ) coincidentes com todos os pontos nodais (Método da Colocação). Desta maneira pode-se gerar um sistema com mesmo número de equações e incógnitas.

Escreve-se matricialmente a seguinte expressão:

$$Hu - Gq = 0 \quad \text{VI. 6}$$

Onde a matriz “H” contém as integrais:

$$H = \int q^*(\xi^i; X_i) d\Gamma_{xi} \quad \text{VI. 7}$$

E a matriz “G” contém as integrais:

$$G = \int u^*(\xi^i; X_i) d\Gamma_{xi} \quad \text{VI. 8}$$

Os procedimentos numéricos mais específicos foram aqui omitidos, por simplicidade, pois já foram apresentados em ampla literatura (Brebbia e Dominguez^[5]). Em cada ponto nodal conhece-se o valor do potencial ou da sua derivada normal, logo o sistema matricial pode ser rearranjado, colocando-se os valores incógnitos em um vetor **d** e os termos independentes em outro vetor **f**. Uma vez que todos os dados estão reunidos, forma-se o seguinte arranjo matemático:

$$f = Ad \quad \text{VI. 9}$$

Então, esta última equação é ser resolvida através de um dos diversos algoritmos computacionais (modelo computacional), disponíveis para estas aplicações em física matemática trazendo a solução deste sistema de equações algébricas. Cabe destacar que as matrizes **H**, **G** e **A** são cheias e sem simetria, uma das características positivas do MEC. Entretanto, a dimensão destas matrizes é reduzida em comparação com outros métodos numéricos, em razão da discretização se limitar ao contorno.

VI. 1.2 - CÁLCULO DOS VALORES INTERNOS DA PARCELA DIFUSIVA (EQUAÇÃO DE LAPLACE)

No que tange ao cálculo de valores internos, um pós-processamento deve ser executado, empregando os valores de contorno (u_i) e (q_i) já calculados. Para que este cálculo seja efetuado são necessários os dados de pontos do interior onde se deseja calcular o potencial e sua derivada direcional, tratando esses pontos como pontos fonte (ξ). Este desenvolvimento pode ser observado na expressão (VI.10):

$$\bar{u}(\xi) = \sum_{i=1}^{NE} \left[\bar{q}_i \int_{\Gamma_i} u^* d\Gamma - \bar{u}_i \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma \right] \quad (\text{VI.10})$$

Em relação aos fluxos, basta apenas derivar a expressão (VI.10) em relação a $X(\xi)$.

$$\frac{\partial \bar{u}(\xi)}{\partial X(\xi)} = \sum_{i=1}^{NE} \left[\bar{q}_i \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u^*}{\partial X} d\Gamma - \bar{u}_i \int_{\Gamma_i} \frac{\partial q^*}{\partial X} d\Gamma \right] \quad (\text{VI. 11})$$

Nos próximos itens são apresentados procedimentos similares a esses utilizados para a equação de Laplace. Entretanto, todos os esforços serão direcionados para a exposição da equação de Poisson (convecção - termo fonte), de acordo como se segue.

VI. 2 - DISCRETIZAÇÃO DA PARCELA ADVECTIVA – FDRS

O próximo passo consiste em reescrever a equação (IV.14) em uma forma discretizada, porém será focado o termo à direita da igualdade, que traz a forma discretizada da parcela onde foi utilizada a técnica da FDRS.

$$C\bar{u} + \sum_{k=1}^{NE} \int_{\Gamma_k} q^* \bar{u} d\Gamma - \sum_{k=1}^{NE} \int_{\Gamma_k} u^* \bar{q} d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE+L} \alpha^j \left(C\hat{u}^j + \sum_{k=1}^{NE} \int_{\Gamma_k} q^* \hat{u}^j d\Gamma - \sum_{k=1}^{NE} \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}^j d\Gamma \right) \quad \text{VI. 12}$$

Algumas convenções são adotadas:

- NE representa o número de elementos;
- L o número de pontos interpolantes;
- Ressalta-se que os elementos de contorno também são utilizados como pontos de interpolação.

Considerando elementos retilíneos e com função de interpolação constante, a equação (VI.12) pode ser expressa sob a seguinte forma matricial.

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{NE+L} (\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}^j - \mathbf{G}\hat{\mathbf{q}}^j)\alpha^j \quad \text{(VI.13)}$$

Os vetores $(\hat{\mathbf{u}}^j)$ e $(\hat{\mathbf{q}}^j)$ podem ser considerados colunas das matrizes $\hat{\mathbf{U}}$ e $\hat{\mathbf{Q}}$, assim, a equação (VI.13) fica:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} \quad \text{(VI.14)}$$

Na expressão anterior o vetor (α) poderia ser facilmente eliminado, caso (p) fosse realmente uma fonte ou ação de domínio conhecida, então, a seguinte estratégia de ser utilizada:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{P} \quad (\text{VI.15})$$

Mas, para os problemas convectivos, necessita-se fazer uma nova interpolação, segundo a metodologia empregada por Partridge *et. al.*^[7], da qual considera que cada uma das parcelas associadas à convecção é uma espécie de ação de domínio:

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{1}{K}\right)\mathbf{v} \frac{\partial u}{\partial x} \\ p_2 &= \left(\frac{1}{K}\right)\mathbf{w} \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{VI. 16})$$

Então, pode-se reescrever:

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1^j f^j \\ p_2 &= \alpha_2^j f^j \end{aligned} \quad (\text{VI. 17})$$

Aplicando-se os procedimentos expostos anteriormente, a equação (VI.14) fica:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \quad (\text{VI. 18})$$

Em termos das variáveis originais:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right) \quad (\text{VI. 19})$$

As variáveis \mathbf{v} e \mathbf{w} , no processo de discretização, representam as velocidades direcionais em cada um dos elementos de contornos, ou seja, são vetores. Mas, para garantir a

consistência do arranjo proposto na equação (VI. 19), as velocidades em cada ponto nodal são agora representadas por matrizes diagonais \mathbf{V} e \mathbf{W} .

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_x &= (\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{V} \\ \mathbf{S}_y &= (\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{W}\end{aligned}\tag{VI. 20}$$

Dessa forma, pode-se reescrever a Equação (VI. 19), como:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{S}_x \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \mathbf{S}_y \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)\tag{VI. 21}$$

Um procedimento especial deve ser implementado para relacionar os valores de (\mathbf{u}) com os valores nodais de suas derivadas em x e y . Usam-se, então, novas interpolações, similares a anteriormente empregada. Inicialmente, faz-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F} \boldsymbol{\beta}\tag{VI. 22}$$

Onde $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$. A derivação da equação anterior com relação à x e y produz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \boldsymbol{\beta} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \boldsymbol{\beta}\end{aligned}\tag{VI. 23}$$

Logo, pode-se fazer:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{F}^x \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{F}^y \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}\end{aligned}\tag{VI. 24}$$

Substituindo-se essas últimas expressões na equação (VI. 21), tem-se finalmente:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{S}_x \mathbf{F}^x \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{S}_y \mathbf{F}^y \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} = (\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y) \mathbf{u} \quad (\text{VI. 25})$$

Podendo-se reescrever a equação acima na seguinte forma:

$$(\mathbf{H} - \mathbf{R})\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = 0 \quad (\text{VI. 26})$$

Daqui em diante o mesmo procedimento exposto no item (VI. 1.1), será aplicado sobre a expressão (VI. 25), resultando num sistema de equações similar a equação (VI. 7), dando a equação (VI.26). Lembrando que \mathbf{H} é assimétrica e \mathbf{G} é simétrica.

VI. 3 - DISCRETIZAÇÃO DA PARCELA ADVECTIVA – FDRH

Tudo o que foi proposto para os itens anteriores será também empregado neste momento. Mais uma vez considerando-se elementos retilíneos constantes, os núcleos singulares e hipersingulares podem ser resolvidos de modo simples. Inferindo-se que o ponto fonte se situa exatamente no centro do elemento e os valores do potencial e fluxos não variam ao longo dos elementos, de modo que não haja problemas de descontinuidade nessas grandezas.

Levando-se em consideração que os elementos são homogeneamente retos, o valor do núcleo de mais alta ordem é dado por:

$$p^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r^2} [n_i(X)n_i(\xi)] \quad (\text{VI. 27})$$

E sua integral no elemento da Hipersingularidade, é:

$$\int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X)u(X)d\Gamma = -U^{\text{sing}} \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r^2} [n_i(X)n_i(\xi)]d\Gamma \quad (\text{VI. 28})$$

Percebe-se que, nesse caso:

$$n_i(X)n_i(\xi) = 1 \quad (\text{VI. 29})$$

Então:

$$\int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X)u(X)d\Gamma = \int_{\Gamma^{\text{sing}}} U^{\text{sing}} \left(-\frac{1}{2\pi r^2} \right) d\Gamma = -\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \int_{\Gamma^{\text{sing}}} \frac{1}{r^2} d\Gamma \quad (\text{VI. 30})$$

Dividindo-se o domínio (Γ) em dois subdomínios, ao longo do elemento singular, conforme ilustrado na figura 16 obtém:

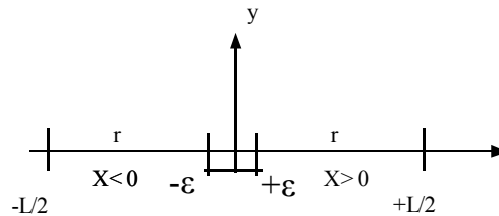


Figura16 - Limites de Integração ao longo do elemento singular.

$$-\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \int_{\Gamma^{\text{sing}}} \frac{1}{r^2} d\Gamma = -\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \int_{-L/2}^{-\varepsilon} \frac{1}{r^2} dr - \frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \int_{+\varepsilon}^{L/2} \frac{1}{r^2} dr \quad (\text{VI.31})$$

Resolvendo-se a equação (VI.31), tem-se:

$$\begin{aligned} & -\frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left(-\frac{1}{r} \right)_{-L/2}^{-\varepsilon} - \frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left(-\frac{1}{r} \right)_{\varepsilon}^{L/2} = \\ & \frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left[+\frac{1}{(-\varepsilon)} + \left(-\frac{1}{(-L/2)} \right) \right] + \frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left[+\frac{1}{(L/2)} + \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \right] = \frac{U^{\text{sing}}}{2\pi} \left(-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon} + \frac{4}{L} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.32})$$

A singularidade presente no resultado dessa última integral (VI.32) é neutralizada exatamente pelo termo:

$$-\int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X) u(\xi) d\Gamma = -u(\xi) \int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X) d\Gamma = U^{\text{sing}} \int_{\Gamma^{\text{sing}}} p^*(\xi; X) d\Gamma \quad (\text{VI.33})$$

Pois da mesma maneira como foi feito com $u(X)$, $u(\xi)$ também é uma função constante, saindo, portanto, do núcleo da integral.

Analisando-se agora a integral no elemento da singularidade, vê-se que sua solução é imediata, ou seja:

$$\int_{\Gamma^{\text{sing}}} q^*(\xi; X) q(X) d\Gamma = Q^{\text{sing}} \int_{\text{sing}} q^*(\xi; X) d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} Q^{\text{sing}} \int_{\text{sing}} \frac{r_{,i} n_i}{r} d\Gamma = 0 \quad (\text{VI.34})$$

O processo de discretização para a equação hipersingular segue o mesmo padrão apresentado anteriormente: Os pontos fonte (ξ) são posicionados em coincidência com todos os pontos nodais que caracterizam os elementos de contorno, de modo a gerar um sistema solucionável de equações, no qual o número de incógnitas seja igual ao número de valores conhecidos.

Devido à diferença nos núcleos das integrais, novos coeficientes de influência são gerados e as matrizes resultantes são distintas, ou seja:

$$H^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_k q^* d\Gamma_j \quad (\text{VI.35})$$

$$W^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_k p^* d\Gamma_j \quad (\text{VI.36})$$

Daí resultando na seguinte equação matricial:

$$(\text{VI.37})$$

VI.4 - PONTOS INTERNOS CONSTITUTIVOS

Pelo fato de que, na Formulação com Dupla Reciprocidade, as cargas de domínio presentes são aproximadas apenas por funções de interpolação entre os nós funcionais do contorno, torna-se necessária, na maioria dos casos, a introdução de novos pontos de interpolação, agora internos ao domínio, que permitam uma representação mais realista de $p(\mathbf{X})$.

Como esses pontos também promovem um aumento na dimensão das matrizes, são denominados pontos internos constitutivos e tem a vantagem adicional de gerarem resultados internos para o potencial, sem exigir uma etapa de pós-processamento.

VI.4.1 - PONTOS INTERNOS NA FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE SINGULAR

Aos (N) pontos de interpolação do contorno, somam-se (M) pontos internos, de forma que as equações (IV.4) e (IV.5) ganham novos termos, conforme registrado em (VI.38) e (VI.39).

$$p(\mathbf{X}) \approx \alpha^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \quad (\text{VI.38})$$

$$F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) = \Psi_{,ii}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \quad (\text{VI.39})$$

$$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

Onde ($j=1, \dots, N$) refere-se aos pontos no contorno e ($j=N+1, \dots, N+M$), refere-se aos pontos internos.

Considera-se aqui, como ponto de partida, a equação (IV. 14) chamada a partir de agora de (VI.40), mas com a introdução dos pontos internos.

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi; \mathbf{X})u(\mathbf{X})d\Gamma - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma =$$

$$\alpha^j \left\{ - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + c(\xi)\Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi) \right\} \quad (\text{VI.40})$$

$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$

O passo seguinte, como adotado nos demais desenvolvimentos, consiste em aplicar o método da colocação, utilizando ξ^i ($i=1, \dots, N+M$) pontos, novamente coincidentes com todos os pontos de interpolação, que agora não se limitam somente àqueles situados no contorno. Desta forma, têm-se as equações (VI.41), a seguir.

$$c(\xi^i)u(\xi^i) + \int_{\Gamma(\mathbf{X})} q^*(\xi^i; \mathbf{X})u(\mathbf{X})d\Gamma - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} u^*(\xi^i; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma =$$

$$\alpha^j \left\{ - \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})u^*(\xi^i; \mathbf{X})d\Gamma + \int_{\Gamma(\mathbf{X})} \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})q^*(\xi^i; \mathbf{X})d\Gamma + c(\xi^i)\Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) \right\} \quad (\text{VI.41})$$

$i = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$
 $j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$

Por fim, divide-se o contorno em (N) elementos constantes (Γ_e), onde o ponto médio de cada elemento, (\mathbf{X}_e), coincide com os nós funcionais ali localizados. Chega-se, desta forma, às expressões (VI.42).

$$c(\xi^i)u(\xi^i) + \sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e)d\Gamma - \sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e)d\Gamma =$$

$$\alpha^j \left\{ - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e)d\Gamma + \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e)d\Gamma + c(\xi^i)\Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) \right\} \quad (\text{VI.42})$$

$i = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$
 $j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$

As equações (VI.42) podem ser reescritas em forma matricial como a seguir, considerando sempre, contornos suaves.

$$\overline{\mathbf{H}}\{\overline{\mathbf{u}}\} - \overline{\mathbf{G}}\{\overline{\mathbf{q}}\} = [\overline{\mathbf{H}}\Psi - \overline{\mathbf{G}}\overline{\boldsymbol{\eta}}]\{\overline{\boldsymbol{\alpha}}\} = [\overline{\mathbf{H}}\Psi - \overline{\mathbf{G}}\overline{\boldsymbol{\eta}}]\overline{\mathbf{F}}^{-1}\{\overline{\mathbf{p}}\} \quad (\text{VI.43})$$

VI.4.2 - PONTOS INTERNOS NA FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE HIPERSINGULAR

Por não estarem situados no contorno, os pontos internos constitutivos, mesmo na Formulação Hipersingular, que envolve derivações do potencial com relação a uma direção normal à fronteira, devem ser tratados por equações da Formulação Singular.

Desta forma, a aproximação da carga de domínio é realizada novamente como em (VI.38) e (VI.39), como exibido no item anterior. Assume-se (N) pontos no contorno e mais (M) internos para interpolação. Com isso, as equações que formam o sistema linear podem ser divididas em dois grandes grupos, um com (N) e outro com (M) equações, representados em (VI.44) e (VI.45) respectivamente, considerando a discretização do contorno, assumido como suave, em (N) elementos constantes.

$$\sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + 0,5q(\xi^i) =$$

$$\alpha^j \left\{ 0,5\eta^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} \bar{q}^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} p^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma \right\} \quad (\text{VI.44})$$

$i = 1, \dots, N$
 $j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^N U^e \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N Q^e \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma + u(\xi^i) = \\
& \alpha^j \left\{ \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi^i) + \sum_{e=1}^N \Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} q^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma - \sum_{e=1}^N \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}_e) \int_{\Gamma_e} u^*(\xi^i; \mathbf{X}_e) d\Gamma \right\} \quad (\text{VI.45})
\end{aligned}$$

$$i = N+1, \dots, N+M$$

$$j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$$

Matricialmente, este sistema pode ser resumido na forma apresentada em (VI.46).

$$\bar{\mathbf{W}}\{\bar{\mathbf{u}}\} - \bar{\mathbf{D}}\{\bar{\mathbf{q}}\} = [\bar{\mathbf{W}}\bar{\Psi} - \bar{\mathbf{D}}\bar{\eta}]\{\bar{\mathbf{a}}\} = [\bar{\mathbf{W}}\bar{\Psi} - \bar{\mathbf{D}}\bar{\eta}]\bar{\mathbf{F}}^{-1}\{\bar{\mathbf{p}}\} \quad (\text{VI.46})$$

No capítulo VII serão apresentados os dados obtidos via FDRS e FDRH, sendo estes resultados devidamente coletados e analisados.

CAPÍTULO VII

ANÁLISE DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

VII.1 – ESTABELECIMENTO DOS EXPERIMENTOS

VII.1.1 – ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL

Como objeto de estudo desta dissertação de mestrado são abordados dois problemas de transferência de calor, sendo que em ambos os casos será focado o escoamento em uma superfície de controle na qual são estabelecidas condições de contorno de temperatura e fluxo de calor.

VII.1.2 – GEOMETRIA DOS PROBLEMAS

Conforme amplamente difundido pela literatura especializada, para este tipo de experimento será empregado uma superfície de controle de geometria simples, ou seja, trata-se de um quadrado com dimensões 1 x 1 (unidade de medida) de lado e com a origem do sistema cartesiano localizada no vértice inferior esquerdo, conforme será mostrado nos itens a seguir.

A difusividade térmica γ é considerada unitária. Dessa forma, a equação de governo do problema fica como esta exposto na expressão (II.26), repetida aqui por conveniência:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = v \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial y} \tag{VII.1}$$

Estas condições estabelecidas nos tópicos anteriores são estendidas aos dois exemplos a serem exibidos e não sofrerão alterações.

VII.1.3 – EXEMPLO 1 – CAMPO DE TEMPERATURA REGIDO PELA EQUAÇÃO

$$T = e^{vx} + e^{wy}$$

As condições de contorno prescritas são somente do tipo essenciais, ou seja, prescrevem-se temperaturas em toda a fronteira do domínio, conforme mostra a figura 17.

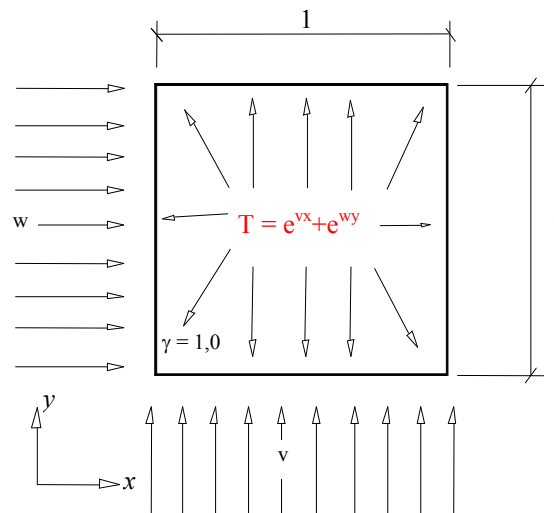


Figura 17 – Representação física para o exemplo 1.

Para estas condições dispostas acima, dispõe-se da solução analítica para o potencial, dada pela equação (VII.2).

$$T = e^{vx} + e^{wy} \quad (\text{VII.2})$$

Para o fluxo em x e em y a solução analítica é:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = ve^{vx} \quad (\text{VII.3})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = we^{wy}$$

Neste exemplo 1, as componentes do vetor velocidade são “v” no eixo da abscissa e “w” no eixo da ordenada.

Os valores prescritos para estas velocidades são 1, 2, 3 e 5. Resalta-se que os valores são arbitrados de forma idêntica nas direções x e y .

Estes resultados analíticos foram utilizados como base para testar a eficácia da Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular (FDRH), principalmente quando comparada com a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular (FDRS).

Os resultados foram retirados a partir da aresta vertical direita e aresta horizontal superior, referentes a já citada superfície de controle, nas quais os valores tendem a ser mais representativos com o acréscimo da velocidade do escoamento.

VII.1.3.1 – DETALHES DA DISCRETIZAÇÃO PARA O EXEMPLO 1

A solução numérica do problema é obtida utilizando-se malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Busca-se dessa forma, avaliar o comportamento do método com o refinamento do contorno, sem a adoção de pontos internos constitutivos do sistema.

As malhas utilizadas nestes problemas são mostradas nas figuras 18, 19, 20 e 21, a seguir:

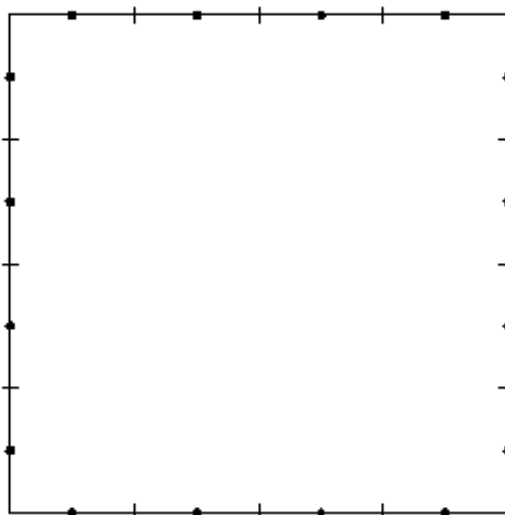


Figura 18 - Malha com 16 elementos.

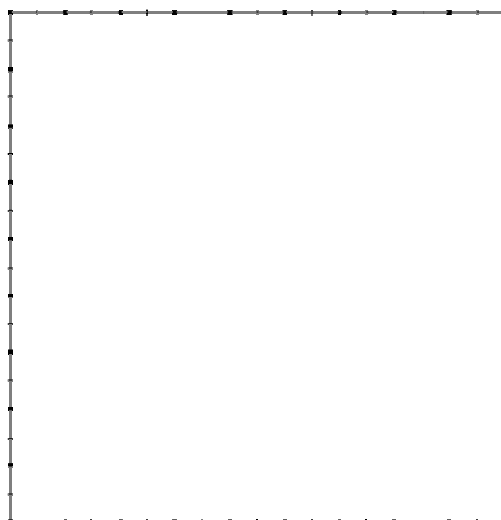


Figura 19 - Malha com 40 elementos.

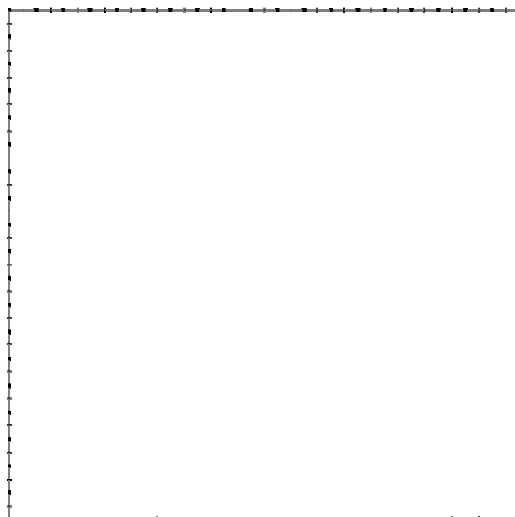


Figura 20 - Malha com 80 elementos.

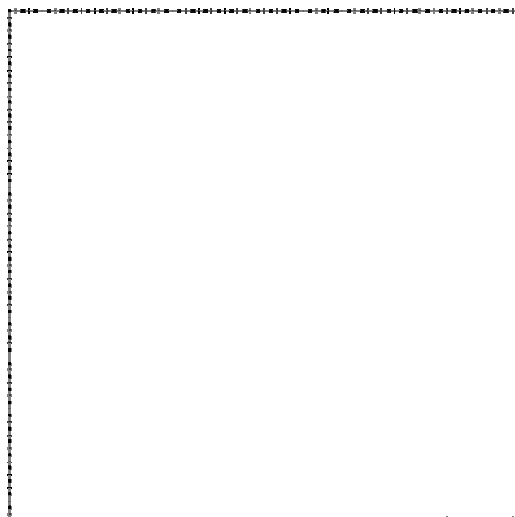


Figura 21 - Malha com 160 elementos.

Posteriormente, os pontos internos serão inseridos em cada malha, cuja a forma de discretização do contorno foi mostrada acima, de forma a verificar a performance da interpolação introduzida pela técnica da Dupla Reciprocidade.

Neste exemplo 1, foram estipuladas duas alternativas: Sem adição de pontos internos (SPI) ou serão adicionados 9 pontos internos (9PI). A disposição dos pontos internos é mostrada na figura 22 e a localização geométrica na tabela 1.

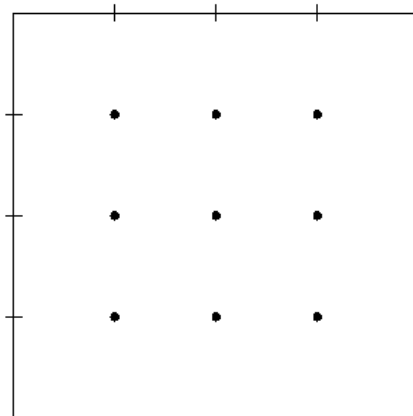


Figura 22 - Posicionamento de 9 pontos internos constitutivos.

Localização dos Pontos Internos Constitutivos		
PI	x	y
1	0.25	0.25
2	0.25	0.50
3	0.25	0.75
4	0.50	0.25
5	0.50	0.50
6	0.50	0.75
7	0.75	0.25
8	0.75	0.50
9	0.75	0.75

Tabela 1 - Configuração com 9 Pontos Internos.

O erro percentual acumulado para todas as malhas exploradas nesta dissertação de mestrado está expresso como mostrado no apêndice C.

VII. 1.3.2 – EXEMPLO 1 – AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA VELOCIDADE “ $v=1$ ”.

VII.1.3.2.1 APLICAÇÃO DA FDRS

Analisando inicialmente a velocidade do fluxo igual a 1, onde itens como refinamento da malha e função de interpolação são discutidos. Em seguida, serão comparadas as FDRS e FDRH, evidenciando as particularidades e comportamento de cada formulação.

Na FDRS adotando inicialmente uma malha de 16 elementos, observa-se que com exceção da curva que emprega a função de interpolação F1, SEM A ADOÇÃO DE PONTOS INTERNOS, o restante das curvas numéricas apresentou boa concordância com a curva de referência, inclusive para esta mesma função porem com a ADOÇÃO DE 9 PONTOS INTERNOS.

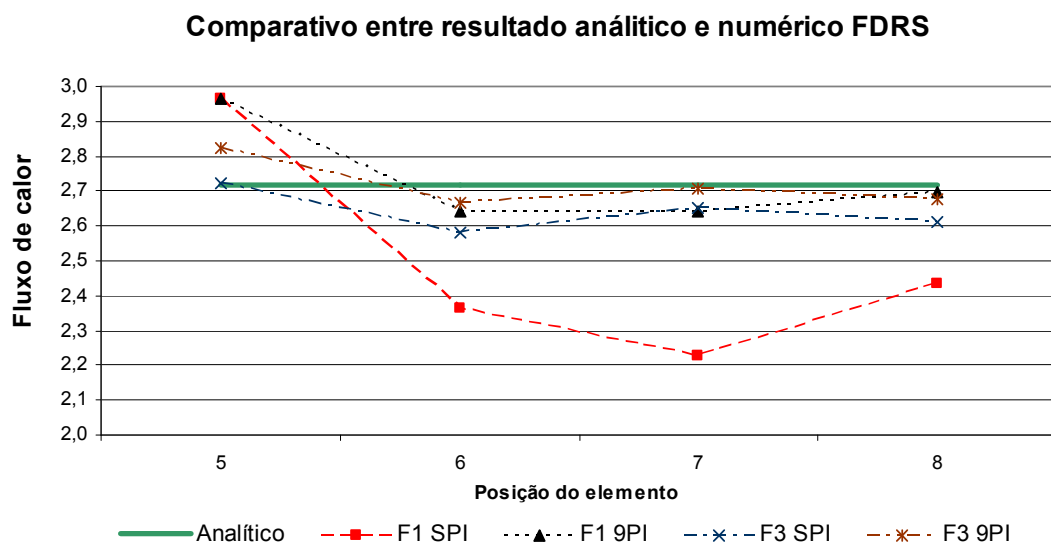


Figura 23: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Na malha um pouco mais refinada, onde o contorno foi segmentado em 40 elementos, as curvas numéricas referentes ao emprego 9 pontos internos mostraram-se concordantes com a solução analítica de referencia, com destaque para a curva onde utilização a função de interpolação F3, que apresentou boa proximidade com a solução fechada. Já para as demais curvas numéricas, foi observada uma situação satisfatória no que diz respeito ao tangenciamento da curva com solução fechada. Ressalta-se que os valores das curvas numéricas apresentam um distanciamento com relação à solução analítica próximo aos cantos, por efeito característico dos elementos constantes no MEC.

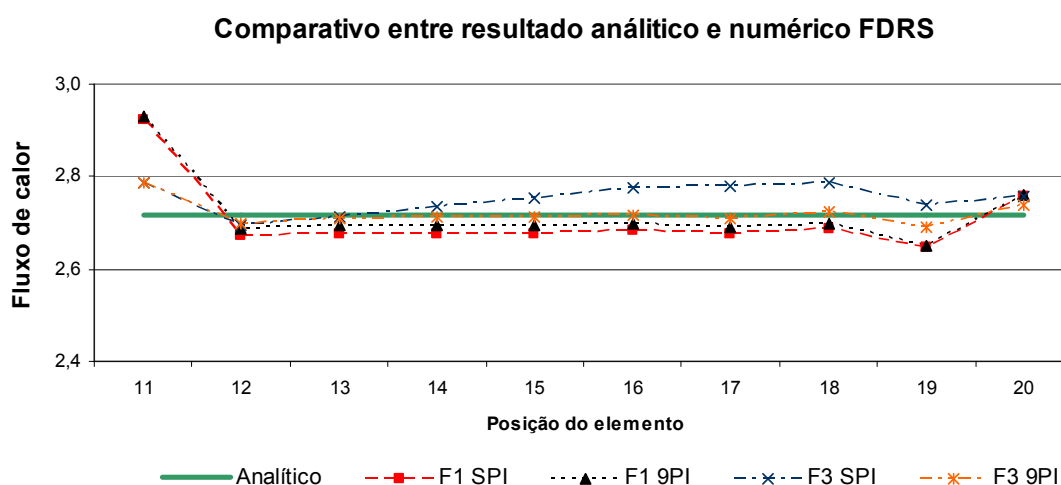


Figura 24: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Continuando o processo de refinamento do contorno, valendo-se de uma malha de 80 elementos, viu-se que todas as curvas numéricas apresentaram boa concordância em relação à curva analítica; contudo, ressalta-se que para a função de interpolação F3 sem a adoção de pontos internos ocorreu uma dispersão em relação ao referencial analítico.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRS

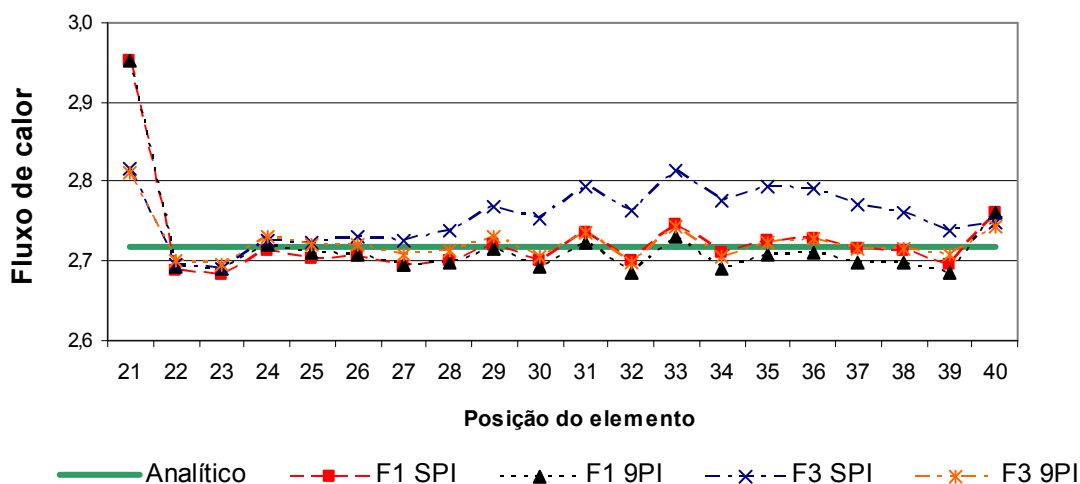


Figura 25: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Por fim, ao utilizar a discretização máxima empregada nesta dissertação de mestrado, foi visto que para o refinamento com 160 elementos, houve uma boa concordância das curvas numéricas. Entretanto, percebe-se uma flutuação dos valores obtidos ao longo da aresta, para todos os pontos. Esse efeito se deve ao emprego de funções de base radial e não caracterizam divergência ou instabilidade numérica, e sim a forma com que essas funções interpolam os valores das grandezas. Esse efeito é mais pronunciado quanto maior é a ordem da função radial empregada, e no caso da ausência de pontos internos interpolantes, o desempenho geral da interpolação tende a se tornar menos preciso, como foi o caso da função F3 SEM A ADOÇÃO DE PONTOS INTERNOS.

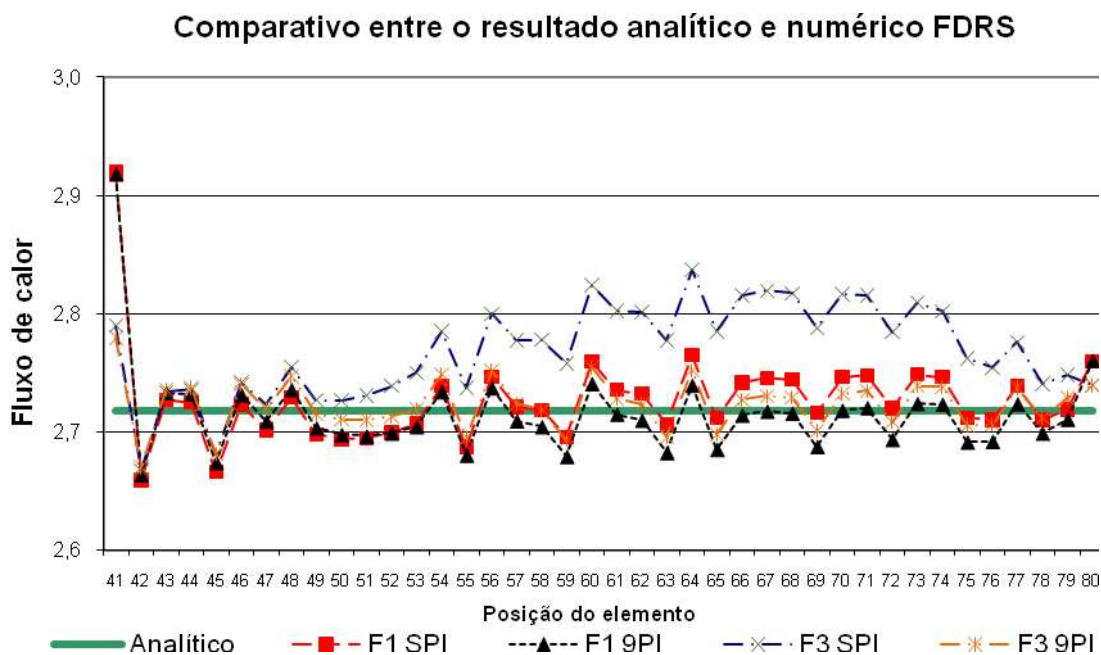


Figura 26: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

VII.1.3.2.2 APLICAÇÃO DA FDRH.

Nas simulações com a formulação Hipersingular não foram empregadas funções F1 (radiais cúbicas – referencia à equação IV.9) por conta dos melhores resultados obtidos com a função F3 (primitiva radial à terceira - referencia à equação IV.11).

De forma análoga ao realizado para a FDRS, é executado um criterioso exame dos resultados obtidos para a FDRH. Então, tomando-se a malha de 16 elementos constantes, constatou-se que para a função de interpolação F3, SEM a inserção de pontos internos, foi constatada uma boa concordância com a solução fechada, ao passo que com a inserção de pontos internos constitutivos a curva numérica distanciou-se, afastando-se de forma considerável da solução analítica.

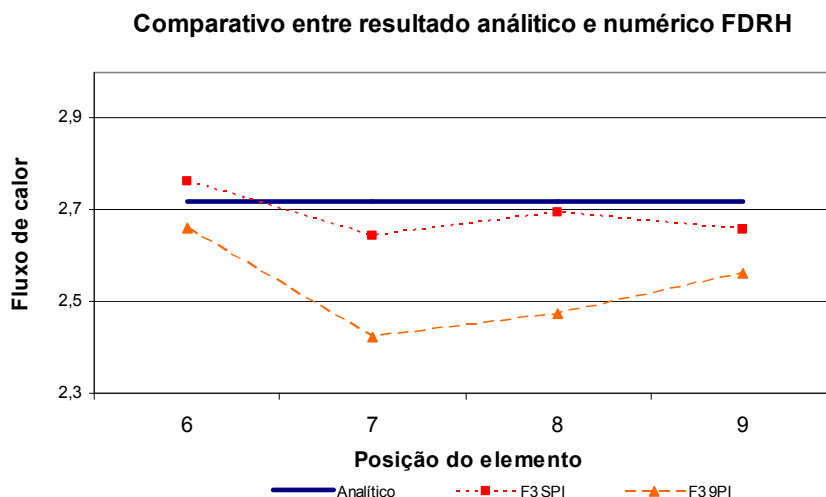


Figura 27: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Já para o contorno discretizado em 40 elementos, F3 SEM adoção de pontos internos, viu-se uma maior concordância com relação à resolução fechada. Mas, a partir da inserção de pontos internos, ocorre um distanciamento entre a curva numérica e a analítica.

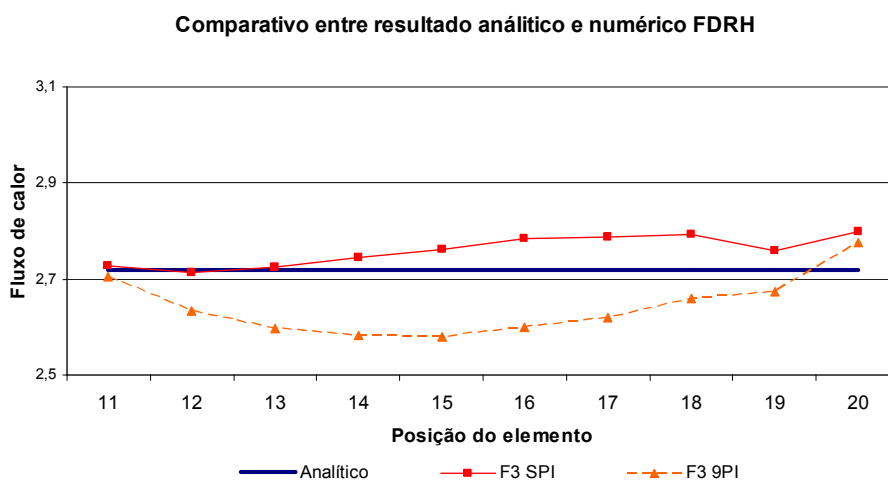


Figura 28: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

A malha com 80 elementos com F3 SEM adoção de pontos internos mostrou boa concordância em relação à curva analítica e verificaram-se os mesmos efeitos ao efetuar a inserção de pontos internos, sendo que a curva numérica experimentou o mesmo distanciamento descrito para a malha de 40 elementos.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRH

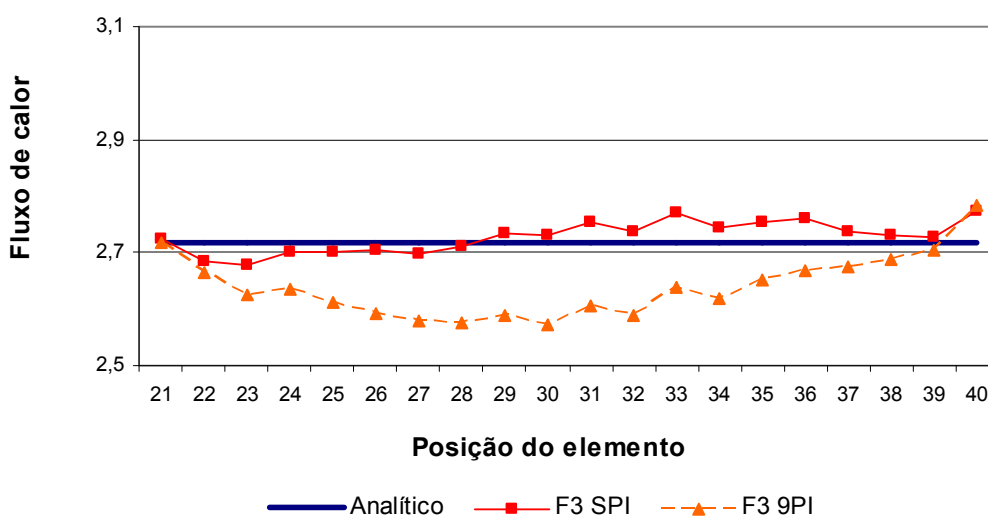


Figura 29: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Com discretização máxima fixada em 160 elementos, observou-se que para a função F3 COM adoção de 9 pontos internos a concordância das curvas numéricas com o referencial analítico permaneceu no mesmo patamar. Entretanto, para esta mesma função de interpolação, mas SEM a inserção de pontos internos constitutivos, a precisão da curva numérica em relação à solução fechada caiu consideravelmente, havendo um distanciamento entre os resultados.

Comparativo entre o resultado analítico e numérico FDRH

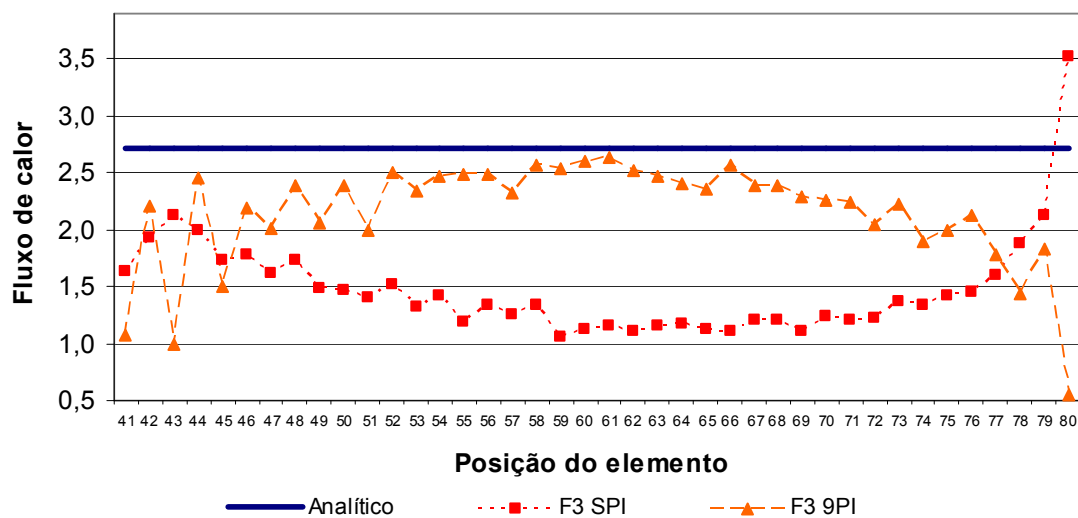


Figura 30: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

A seguir são apresentadas curvas nas quais se mostram os resultados referentes ao erro percentual médio para as duas formulações nas condições anteriores. Nesses gráficos, o efeito do refinamento da malha fica melhor destacado.

Destaca-se a piora nos resultados extraídos a partir da FDRH quando são inseridos pontos internos. Já a FDRS mostra uma maior convergência de seus resultados, principalmente quando se é utilizada a função de interpolação F3 e adoção de 9 pontos internos.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (SPI)

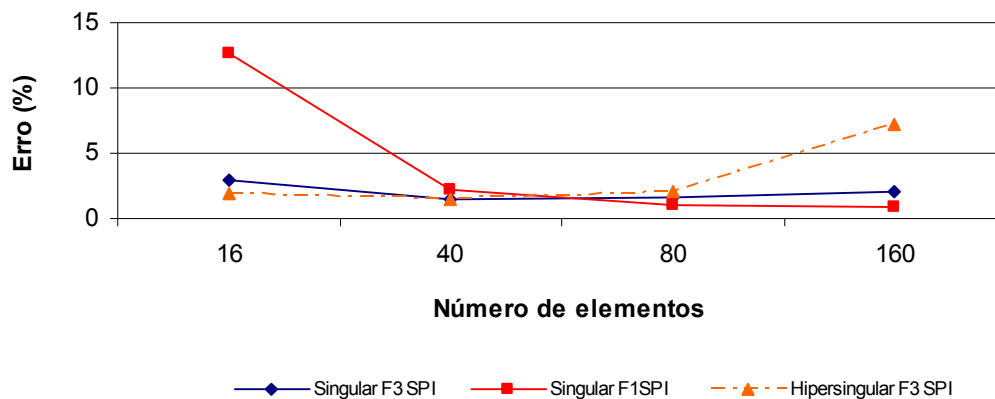


Figura 31: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (9 pontos internos)

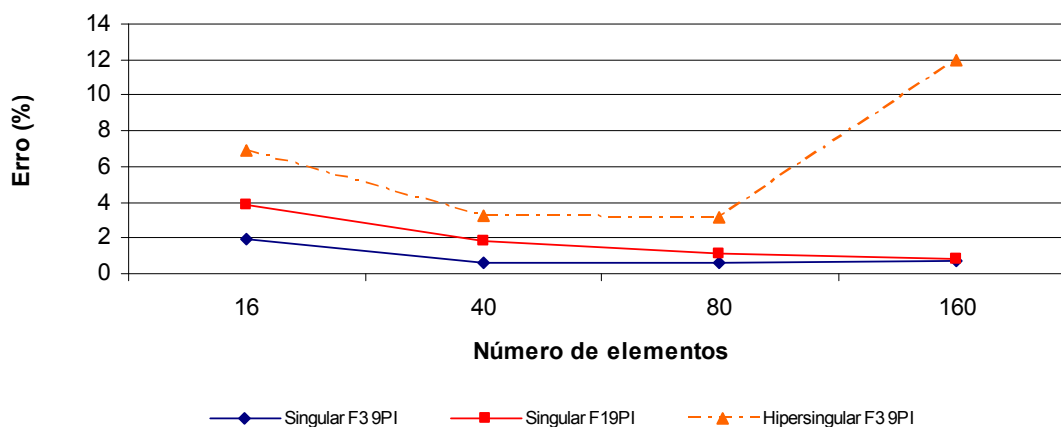


Figura 32: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Para melhor análise do conjunto dos resultados, a seguir é apresentada uma tabela comparativa do desempenho das malhas para velocidade igual a 1, tanto para a formulação Singular quanto Hipersingular, na qual é nítida a superioridade da FDRS com a função de interpolação F3 e adição de 9 pontos internos, sendo mais convergente com a solução analítica. O melhor resultado foi alcançado com o refinamento da malha para 160 elementos, conforme esperado.

Resultados para o fluxo de calor para a aresta representativa				
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS		FDRH
		Erro % $\Psi^j = r^3/9$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$
16 elementos	0	12,65	2,94	1,86
	9	3,88	1,93	6,93
40 elementos	0	2,18	1,45	1,54
	9	1,83	0,63	3,22
80 elementos	0	1,03	1,57	2,09
	9	1,08	0,58	3,15
160 elementos	0	0,91	2,03	7,15
	9	0,84	0,66	11,96

Tabela 2 - Erros percentuais médios: Fluxo de calor

VII.1.3.3 – EXEMPLO 1 – AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA VELOCIDADE “ $v=2$ ” .

VII.1.3.3.1 APLICAÇÃO DA FDRS

Repetindo a malha de 16 elementos e alterando a velocidade do fluxo de calor observa-se que apenas as curvas numéricas onde foram utilizados pontos internos constitutivos, foi onde se conseguiu maior concordância com o referencial analítico, seja empregando a função F1 quanto F3. Ressalta-se que para os experimentos realizados para estas funções de interpolação sem a inserção de pontos internos constitutivos ocorreu uma considerável dispersão nos resultados obtidos.

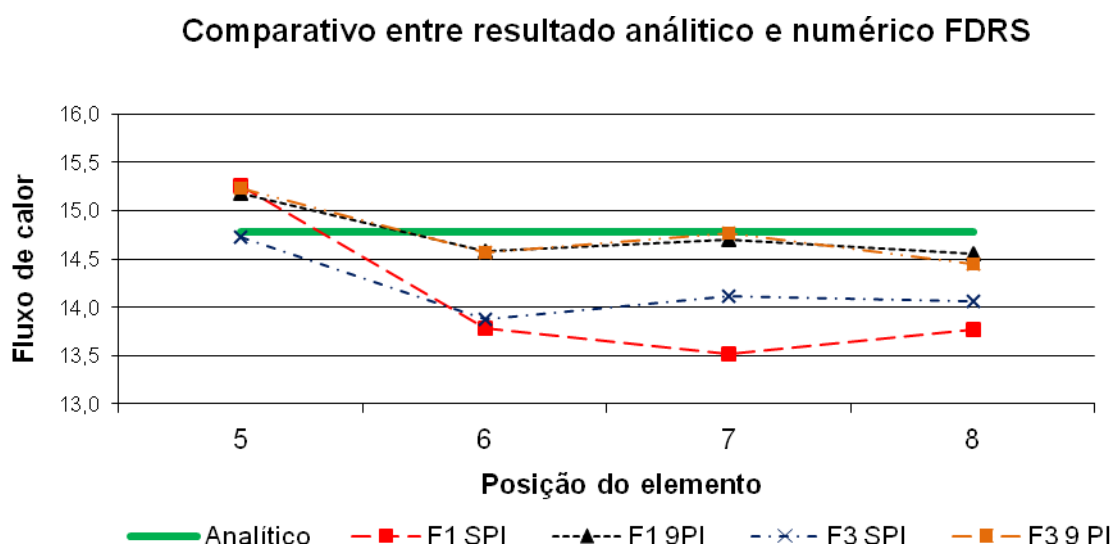


Figura 33: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Passando ao emprego da malha de 40 elementos observaram-se bons resultados no que tange a concordância entre as curvas numéricas e o referencial fechado. Ressalta-se o comportamento deficiente para a função F3 sem a utilização de pontos internos, cujo distanciamento da solução fechada foi mais pronunciado.

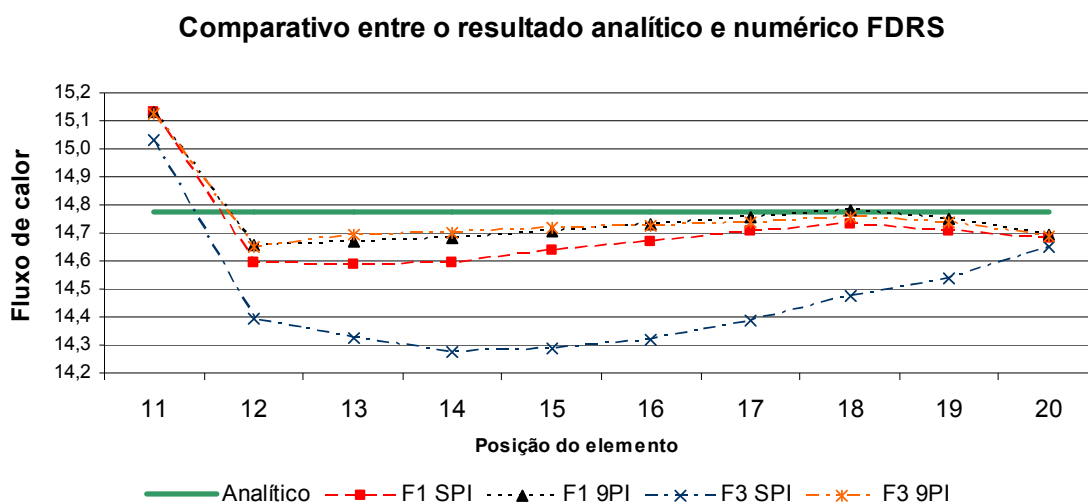


Figura 34: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Algo semelhante foi visto na malha com refinamento de 80 elementos, onde os bons resultados foram obtidos com a aplicação de pontos internos e a ausência dos mesmos causa uma considerável dispersão dos resultados.

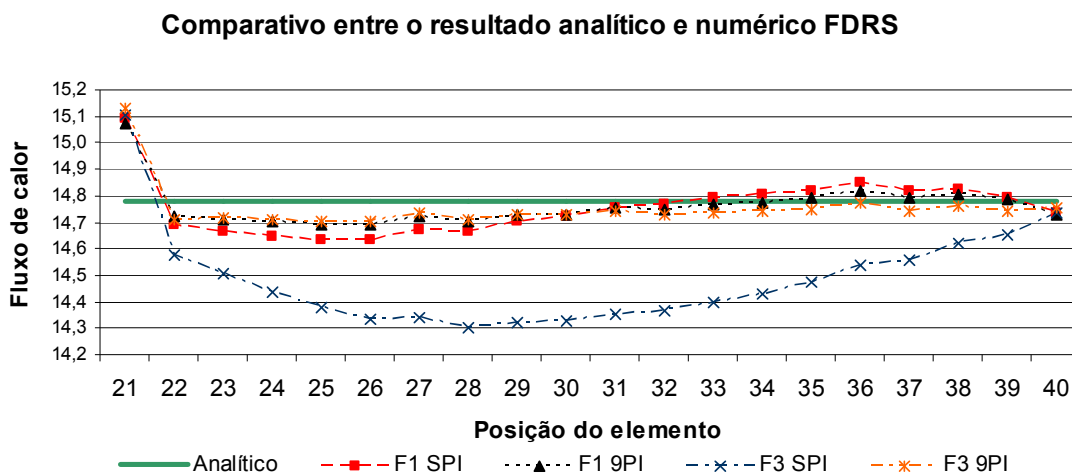


Figura 35: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Por fim, ao aplicar a discretização do contorno com 160 elementos, constatou-se a concordância costumeira as malhas mais pobres, tendo como resultado um bom tangenciamento das curvas numéricas com a curva analítica. Destaca-se positivamente a função de interpolação F3 acompanhada da adoção de 9 pontos internos que mostrou uma satisfatória constância ao delinear a solução fechada. Contudo, o destaque desfavorável fica por conta desta mesma função de interpolação sem a aplicação de pontos internos, cuja representação gráfica exibiu uma acentuada dispersão.

Comparativo entre o resultado analítico e numérico FDRS

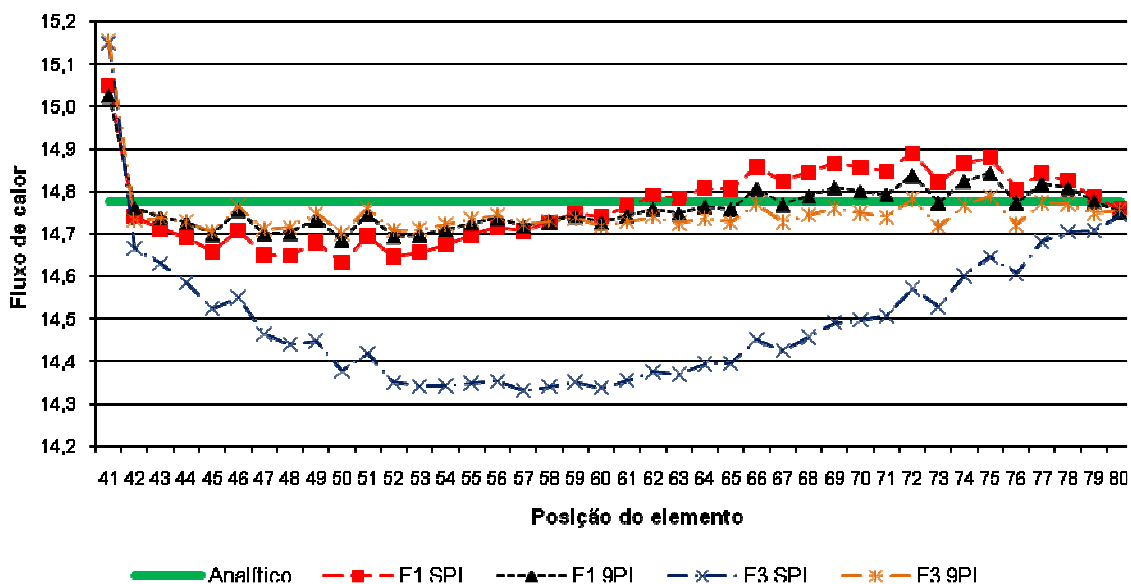


Figura 36: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

VII.1.3.3.2 APLICAÇÃO DA FDRH

Partindo da malha mais pobre discretizada nesta dissertação de mestrado, 16 elementos, observa-se que ambas as curvas numéricas ficaram afastadas da solução analítica, não apresentado um bom desempenho como era esperado.

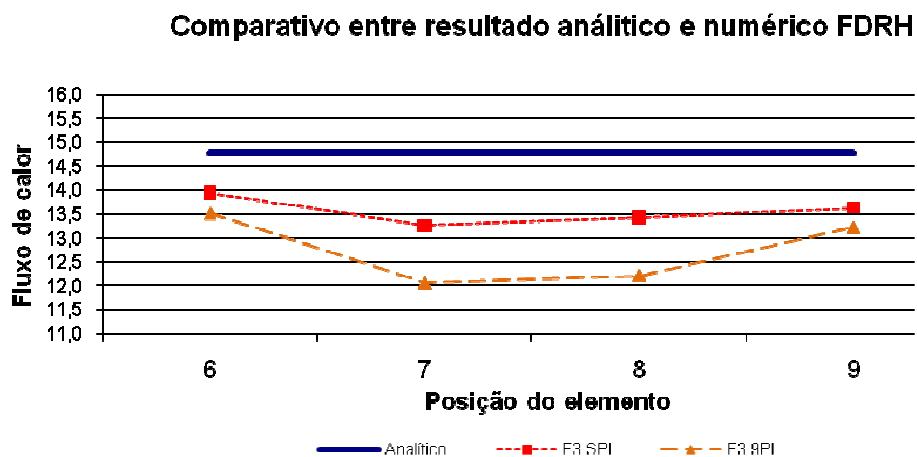


Figura 37: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Na malha de 40 elementos viu-se que os resultados pioraram quando se emprega velocidade mais elevada, ou seja, com o acréscimo da velocidade, mesmo refinando a malha, ambas as curvas numéricas divergiram da solução fechada, contudo em termos de simetria, estas curvas numéricas apresentaram certa semelhança.

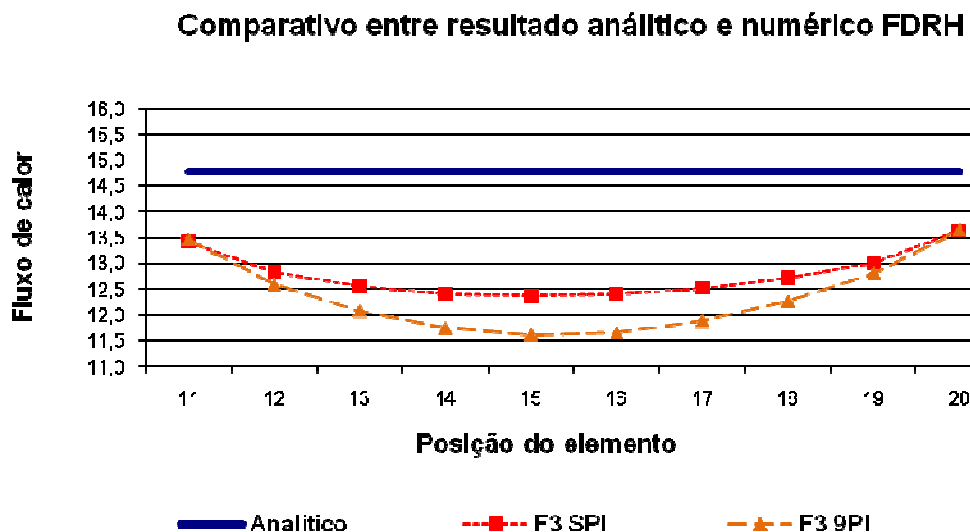


Figura 38: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Aplicando-se a malha de 80 elementos o mesmo comportamento curioso da malha de 40 elementos foi constatado, seja na divergência, seja na semelhança de simetria entre as curvas numéricas.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRH

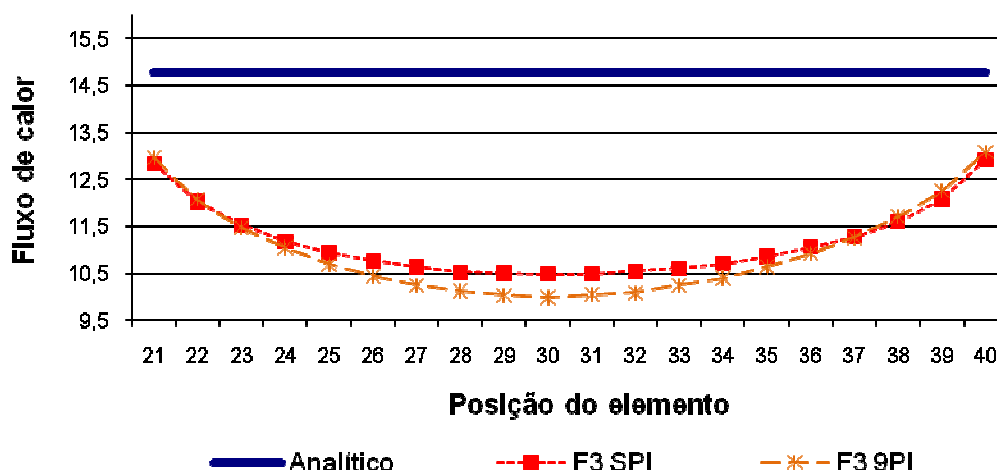


Figura 39: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Com refinamento máximo, 160 elementos, viu-se em F3 com a utilização de 9 pontos internos constitutivos a volta da boa concordância de resultados numéricos e analítico, contudo, sem a adoção de pontos internos ocorreu um espalhamento e perda da fidelidade dos dados levantados.

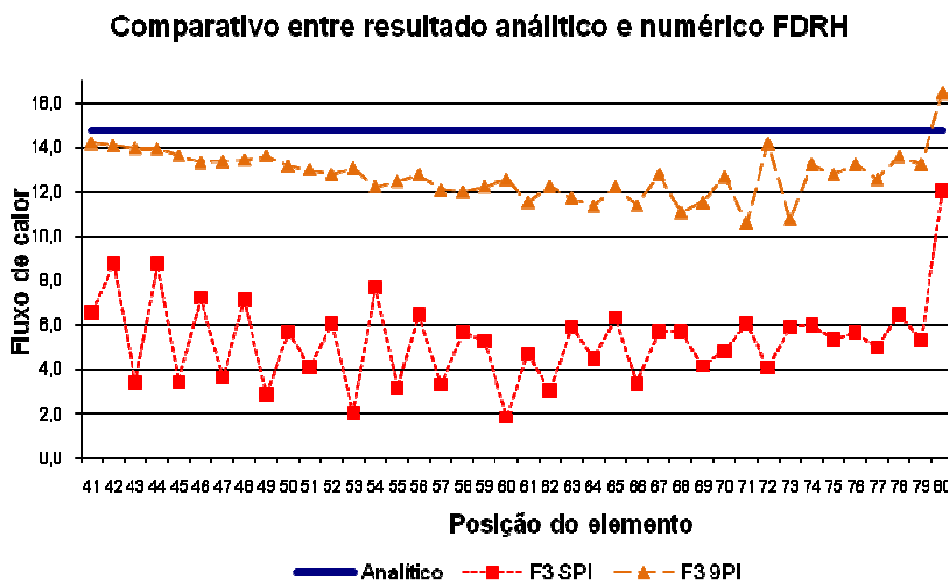


Figura 40: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Observa-se que o resultado obtido do erro percentual médio para a formulação FDRS, com emprego da função de interpolação F1, foi melhorando com o refinamento da malha, mostrando um melhor desempenho em relação a FDRS com F3 e principalmente que a FDRH (também com F3).

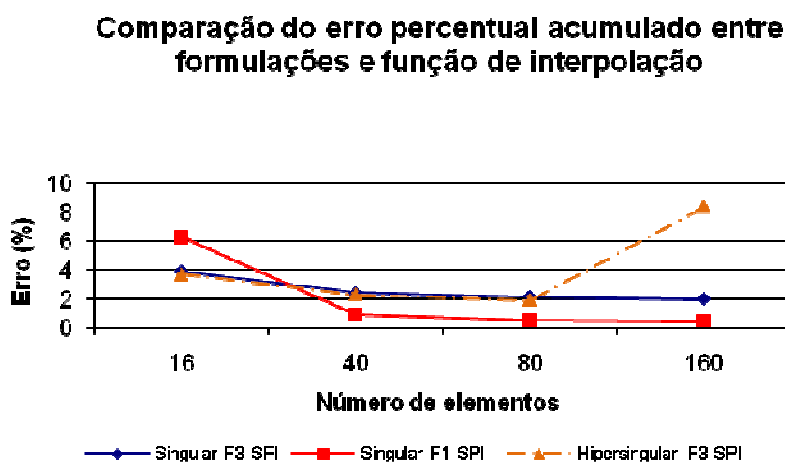


Figura 41: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Já nesta segunda situação, o resultado gráfico obtido do erro percentual médio para a formulação FDRS, com emprego tanto da função de interpolação F1 quanto com F3, mostraram-se satisfatórios e foram melhorando com o refinamento da malha, conforme esperado. Entretanto, a FDRH apresenta resultados piores, mesmo com a adição de pontos interno constitutivos.

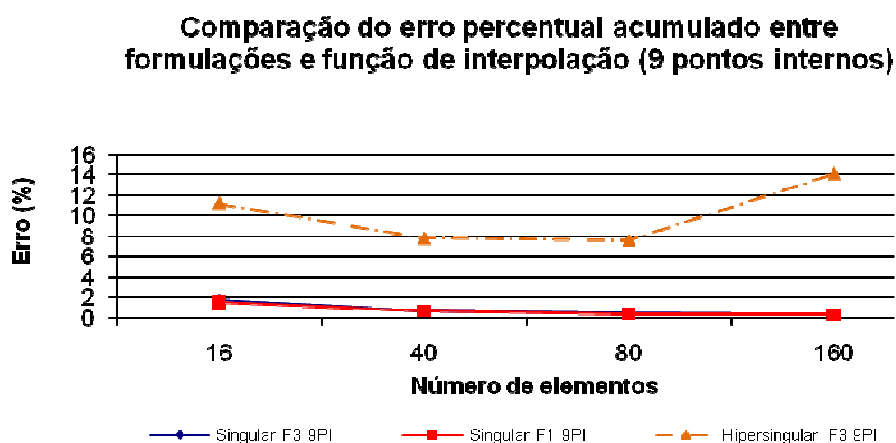


Figura 42: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Comparando o desempenho das malhas para velocidade igual a 2, a tabela apresentada abaixo, mostra a superioridade da FDRS, independente da função de interpolação. Isto fica mais evidente com a adição de pontos internos, onde os resultados alcançados pela FDRS são convergentes com a solução analítica.

Resultados para o fluxo de calor para a aresta representativa				
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS		FDRH
		Erro % $\Psi^j = r^3/9$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$
16 elementos	0	6,33	3,94	3,72
	9	1,52	1,69	11,20
40 elementos	0	0,98	2,44	2,34
	9	0,63	0,65	7,77
80 elementos	0	0,55	2,19	1,95
	9	0,38	0,42	7,59
160 elementos	0	0,50	2,03	8,41
	9	0,30	0,33	14,07

Tabela 3 - Erros percentuais médios: Fluxo de calor

VII.1.3.4 – EXEMPLO 1 – AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA VELOCIDADE “v=3”.

VII.1.3.4.1 APLICAÇÃO DA FDRS

Nesta passagem a malha de 16 elementos experimenta os efeitos do incremento de velocidade um pouco mais intensificado sendo que em F3 sem a introdução de pontos internos houve uma elevada dispersão quando comparada com a solução analítica. Já em F1 houve a presença de dispersão nos resultados, porém, menos acentuada que a curva obtida anteriormente (F3). Estas duas funções de interpolação com o emprego de pontos internos constitutivos mostraram concordância satisfatória em relação ao referencial analítico.

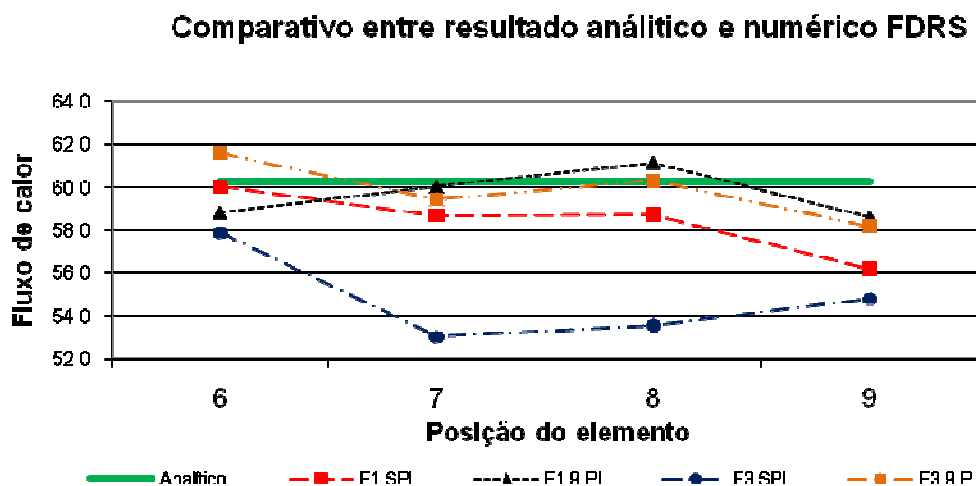


Figura 43: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Refinando a malha para 40 elementos constata-se que em F3, com 9 pontos internos, uma maior aproximação e constância de resultados no que tange a concordância das curvas numéricas e analítica. Todavia, sem pontos internos não há bons resultados.

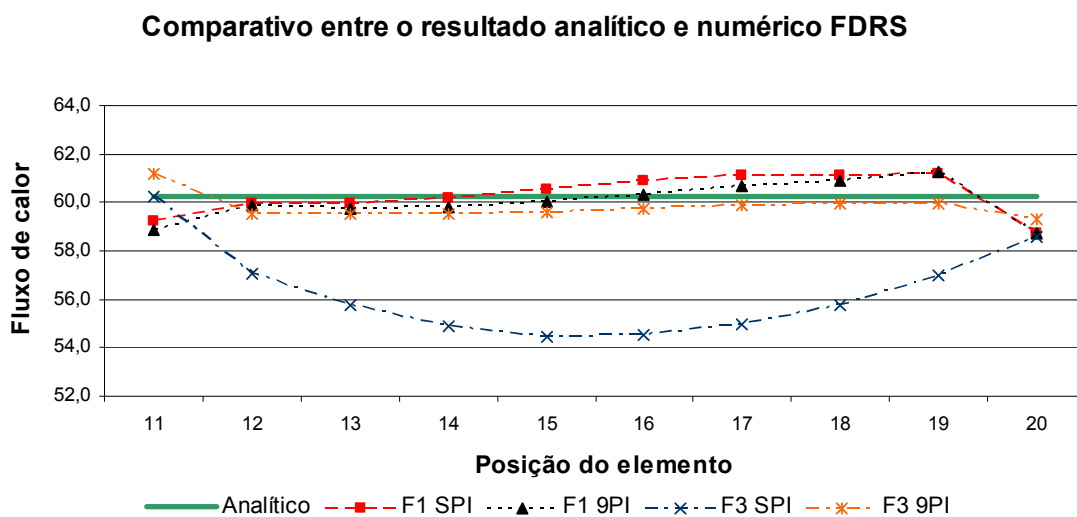


Figura 44: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Passando a malha de 80 elementos, a dispersão de F3 sem adoção de pontos internos foi ainda mais pronunciada. As demais curvas mantiveram a boa concordância rotineira, com destaque para F3 quando adicionados pontos internos, trazendo resultados satisfatórios com convergência apreciável entre solução fechada e numérica.

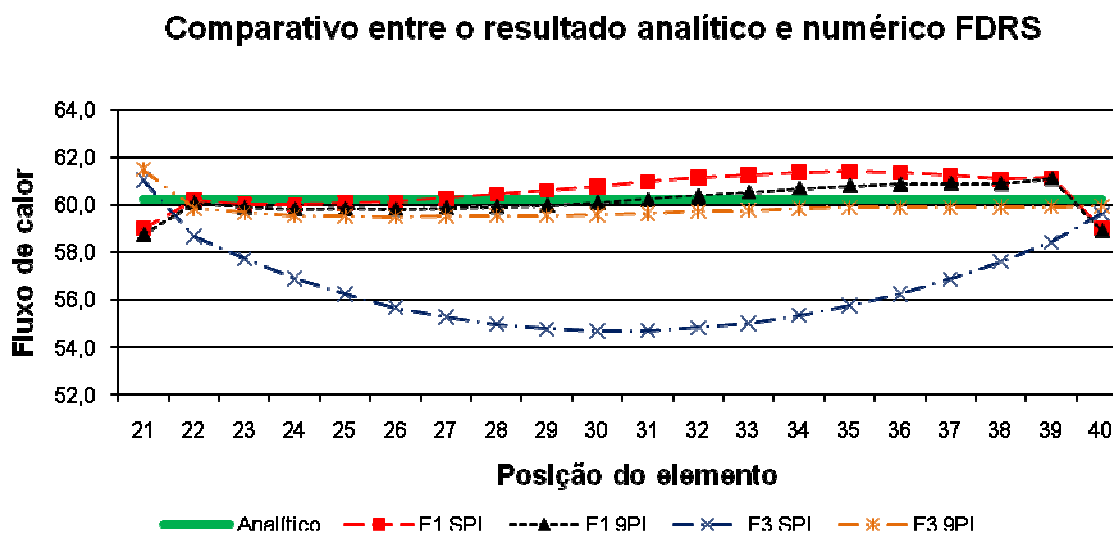


Figura 45: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Partindo para 160 elementos no contorno, registrou-se boa concordância para função de interpolação de ordem mais elevada e com adoção de pontos internos, ao passo que sem a adoção de pontos internos, essas mesmas funções tiveram seu desempenho comprometido.

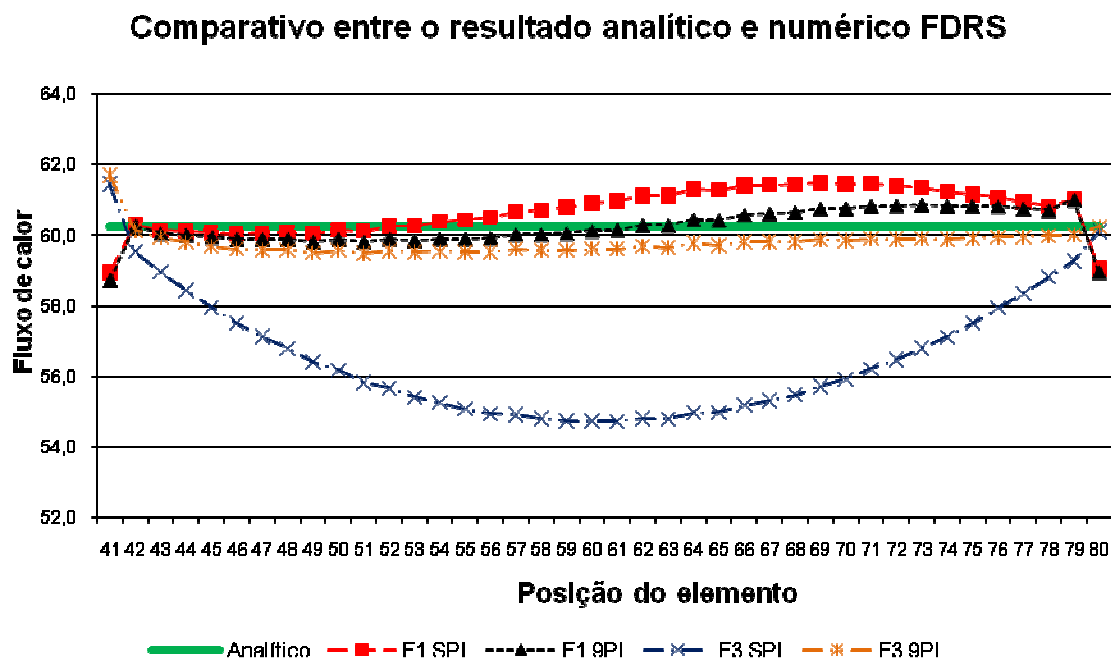


Figura 46: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$

VII.1.3.4.2 APLICAÇÃO DA FDRH

Para 16 elementos e velocidade igual a 3, observa-se uma situação idêntica a visualizada para a velocidade igual a 2, ou seja, curvas numéricas afastadas da solução analítica, não apresentando um bom desempenho. Este comportamento sintomático persiste para as malhas de 40, 80 e 160 elementos.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRH

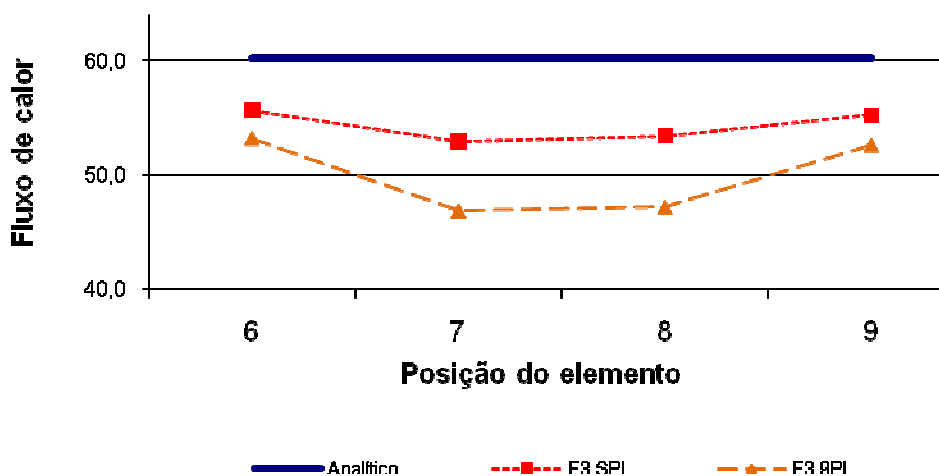


Figura 47: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$

Comparativo entre o resultado analítico e numérico FDRH

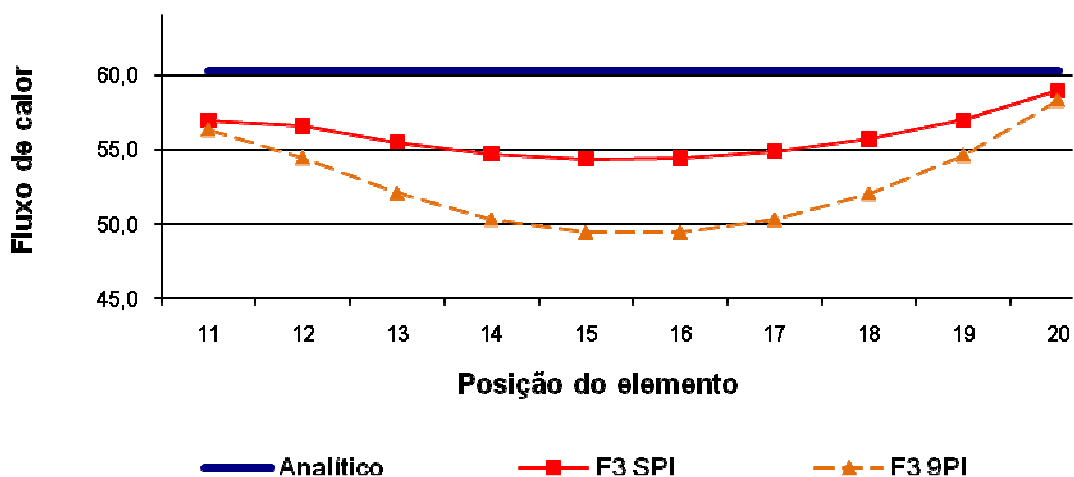


Figura 48: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$

Comparativo entre o resultado analítico e numérico FDRH

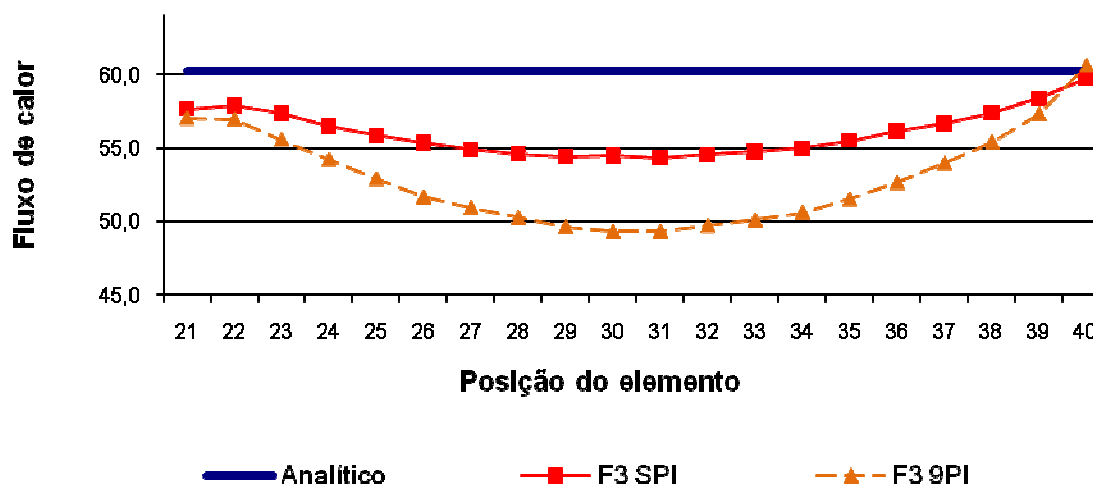


Figura 49: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$

Comparativo entre o resultado analítico e numérico FDRH

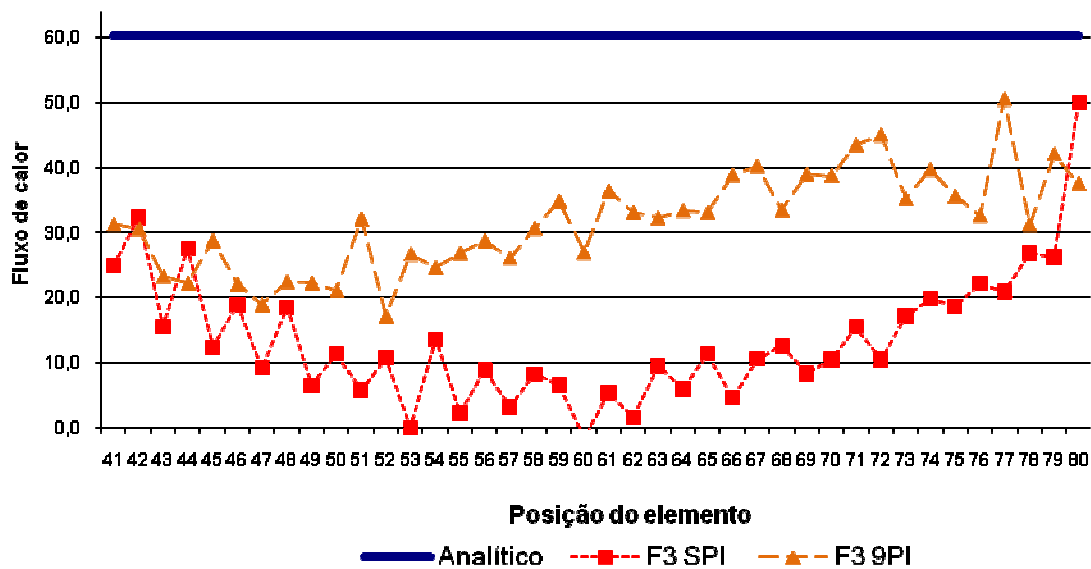


Figura 50: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$

No tocante ao erro percentual médio, o que se viu foram resultados bons alcançados pela FDRS com emprego da função F1. Os dados coletados mostram o bom desempenho obtido pela função F1 em relação a F3 para uma mesma formulação. Comparando as formulações, a FDRS com emprego da função F1 foi superior FDRH (que conta com F3), sendo que os resultados da FDRS foram melhorando com o refinamento da malha, conforme esperado. Já a FDRH experimenta um comportamento inicialmente convergente, até satisfatório, mas com o refinamento da malha acima de 80 elementos, a curva descrita pelos dados coletados fica divergente.

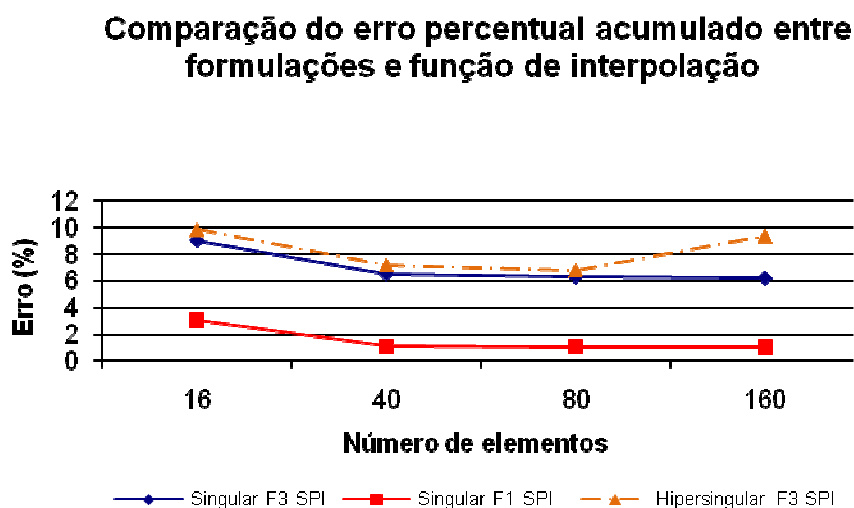


Figura 51: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Com a adoção de pontos internos, a FDRS mostra uma maior convergência de todos os seus resultados, isto tanto para a função de interpolação F1 quanto para F3. Mais uma vez, resultados melhores são obtidos quando se refina a malha. Entretanto, os resultados extraídos a partir da FDRH são ruins, com erro percentual acima de 10%.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (9 pontos internos)

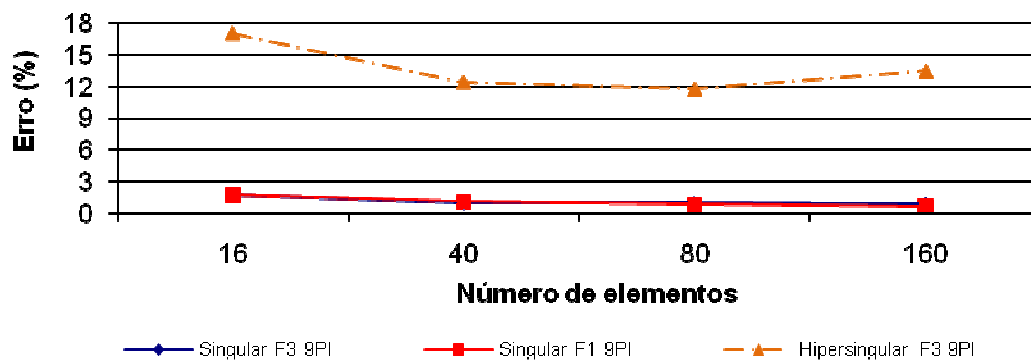


Figura 52: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Na tabela abaixo, fica visível a ligeira superioridade da FDRS com a função de interpolação F1 sobre a F3, isto quando são adicionados pontos internos, sendo F1 um pouco mais convergente com a solução analítica. O melhor resultado foi alcançado com o refinamento da malha para 160 elementos, conforme esperado. Os dados referentes a FDRH mostram que esta formulação experimentou uma queda de desempenho ao serem inseridos pontos internos. Todavia, mesmo sem a adição de pontos internos, os resultados foram pouco satisfatórios.

Resultados para o fluxo de calor para a aresta representativa				
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS		FDRH
		Erro % $\Psi^j = r^3/9$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$
16 elementos	0	3,07	9,02	9,86
	9	1,74	1,76	17,06
40 elementos	0	1,11	6,55	7,18
	9	1,09	1,05	12,46
80 elementos	0	1,08	6,33	6,79
	9	0,83	0,94	11,80
160 elementos	0	1,04	6,24	9,40
	9	0,68	0,89	13,51

Tabela 4 - Erros percentuais médios: Fluxo de calor

VII.1.3.5 – EXEMPLO 1 – AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA VELOCIDADE “v=5”.

VII.1.3.5.1 APLICAÇÃO DA FDRS

Iniciando a análise com a malha de 16 elementos confere-se o destaque negativo para a função de interpolação F3, sem ponto interno, uma vez que sua concordância foi extremamente baixa, ficando muito distante da solução fechada. As outras curvas numéricas foram concordantes com a analítica, onde a função de interpolação F3 com 9 pontos internos constitutivos, apresentou uma distribuição mais aproximada da curva analítica.

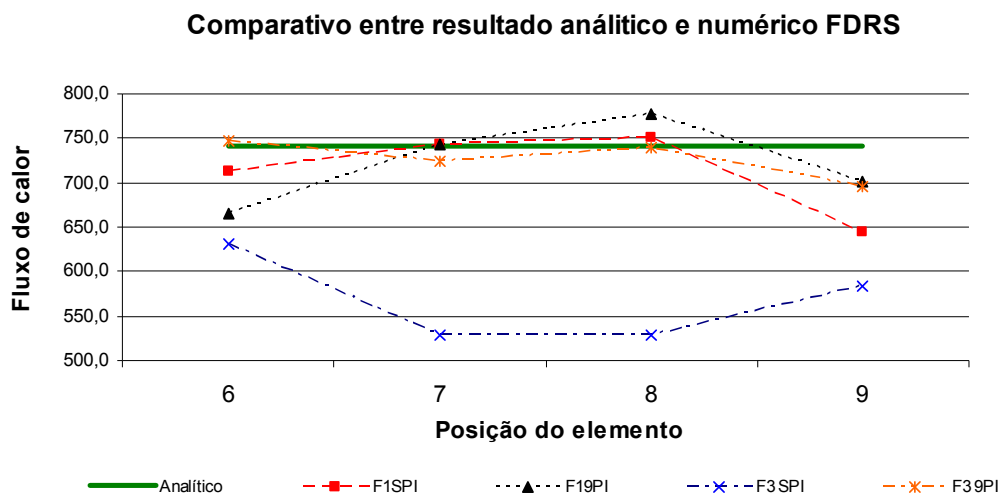


Figura 53: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$

No que diz respeito a malha com 40 elementos, observa-se a boa concordância que as funções de ordem mais elevada e com 9 pontos internos proporcionam e que o inverso é uma realidade, ou seja, funções de interpolação com ordem mais elevada e sem pontos internos tende a dispersarem o resultado.

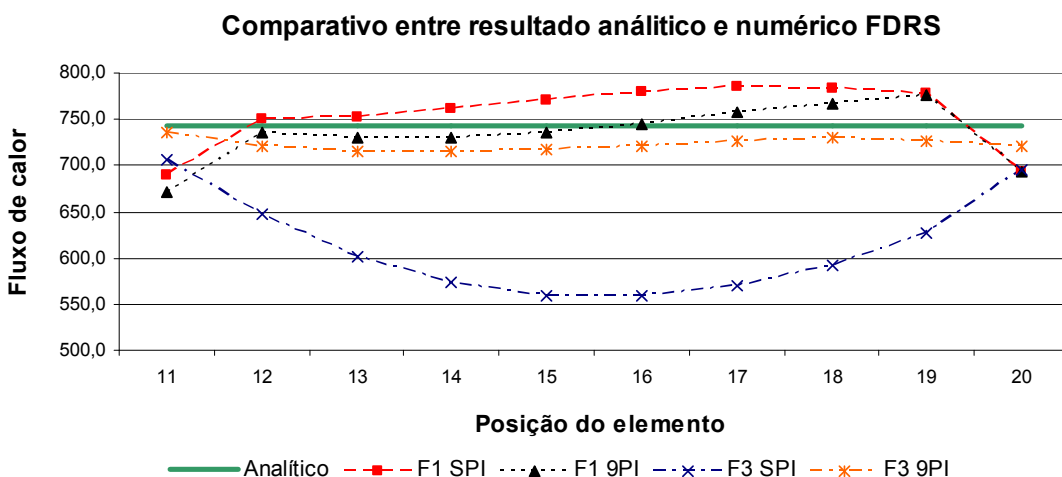


Figura 54: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Para 80 elementos não é diferente do que foi descrito para a malha de 40 elementos, principalmente no que diz respeito a funções de interpolação de maior ordem e sem pontos internos. A grata surpresa fica por conta da função F1 que ao ser trabalhada juntamente com a adoção de 9 pontos internos constitutivos, apresenta maior constância e fidelidade nos resultados, havendo uma maior harmonização entre numérico e analítico.

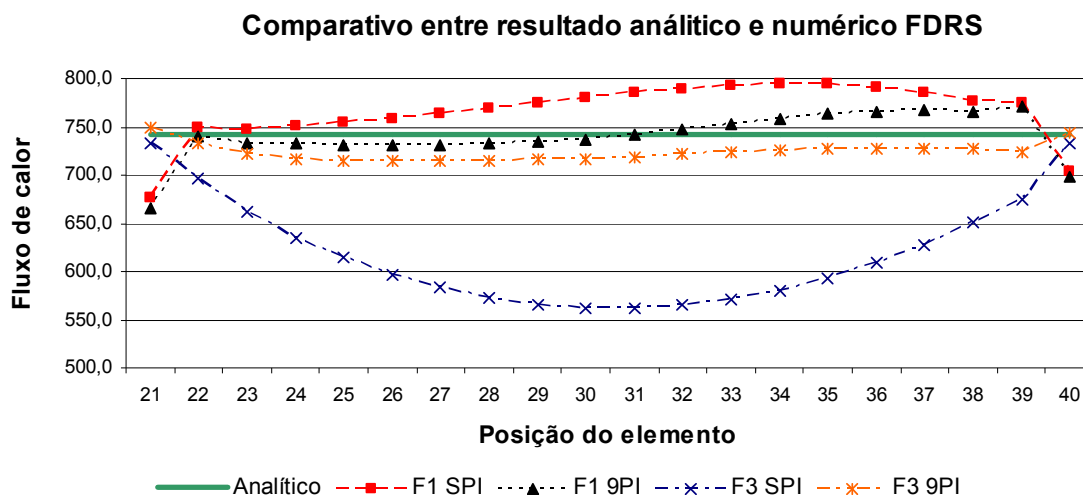


Figura 55: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Fechando esta análise para ‘V’ igual a 5 e malha de 160 elementos, as mesmas características como a boa concordância em função de ordem mais elevada e com 9 pontos internos proporcionam e que o inverso é uma realidade, ou seja, funções de interpolação com ordem mais elevada e sem pontos internos tende a dispersarem o resultado.

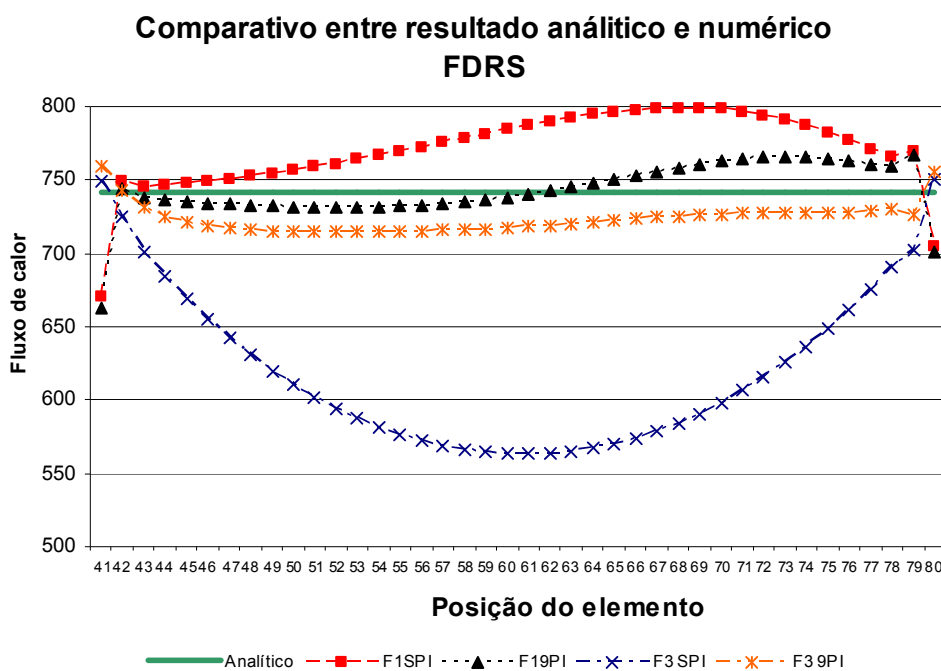


Figura 56: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

VII.1.3.5.2 APLICAÇÃO DA FDRH

Na malha de 16 elementos a curva referencial versus obtida fica afastada não caracterizando bom desempenho, mas vê-se uma maior proximidade entre as curvas numéricas. Para 40, 80 e 160 elementos o mesmo comportamento é catalogado.

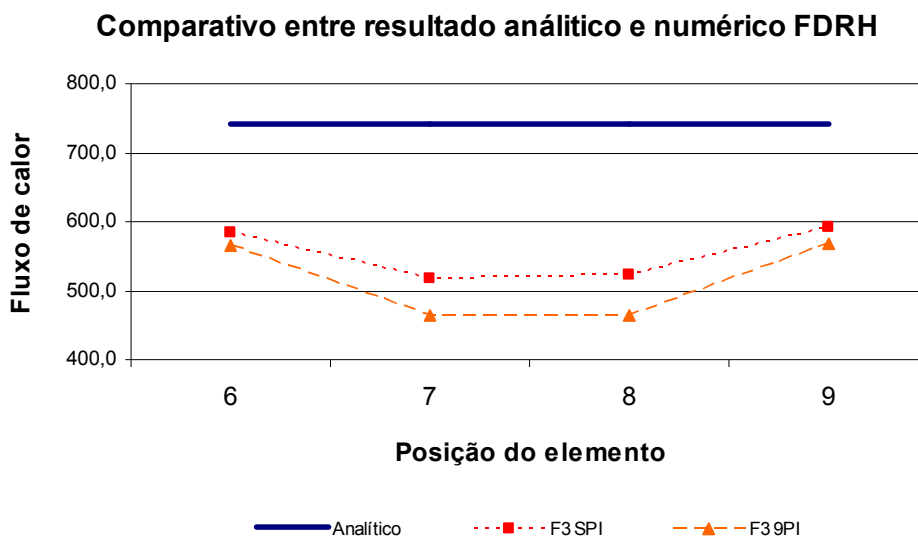


Figura 57: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

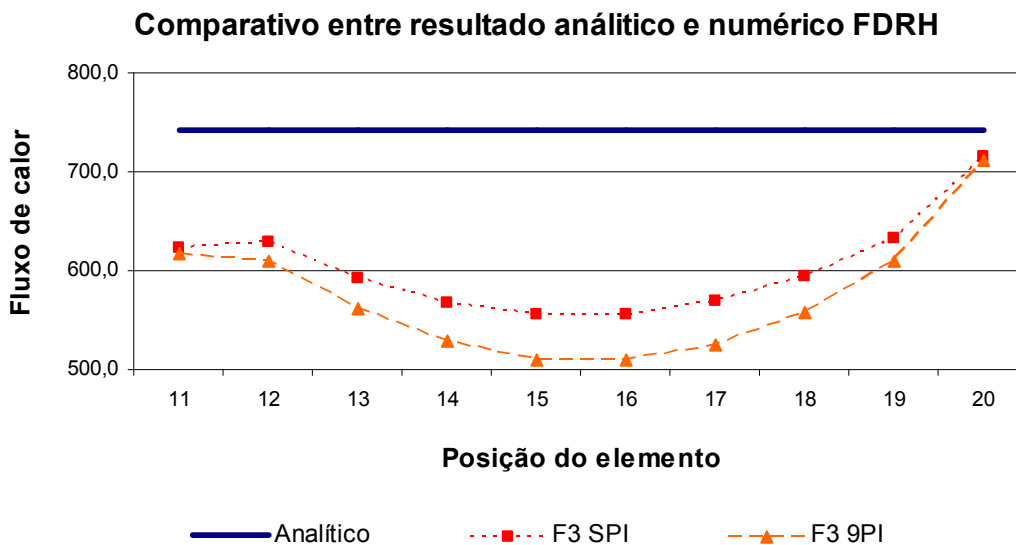


Figura 58: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

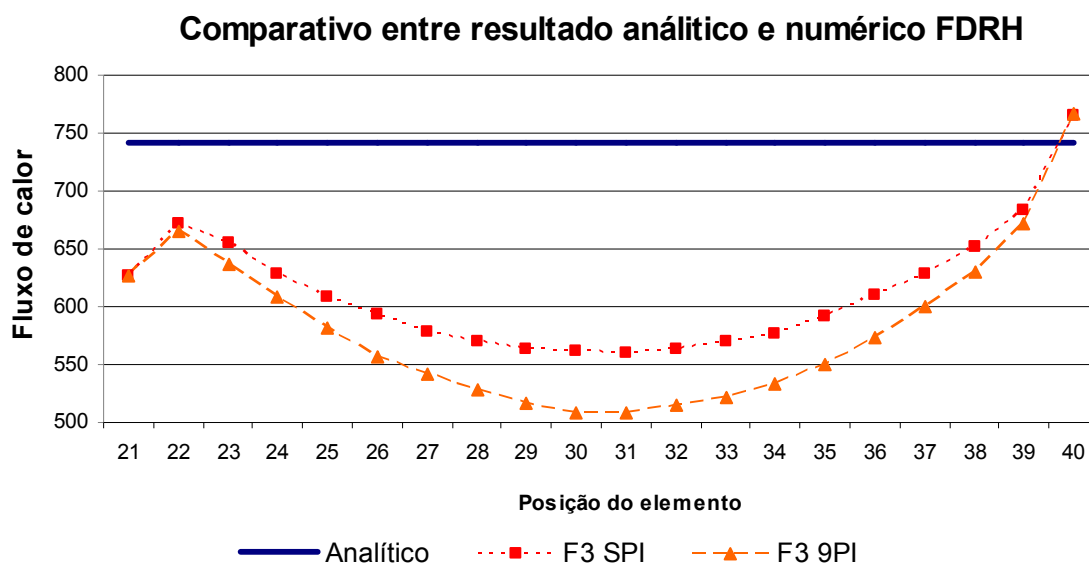


Figura 59 Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

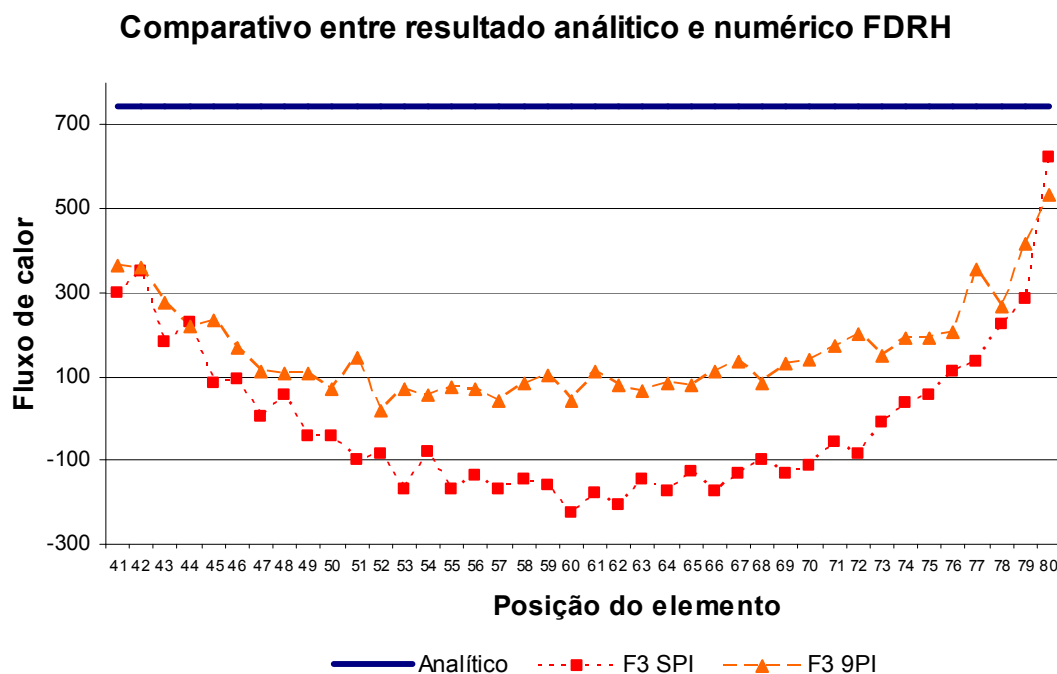


Figura 60: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Assim como foi observado para a velocidade igual a 3, aqui na velocidade 5 também houve um melhor desempenho da FDRS com F1. Enquanto seu erro percentual em relação a solução analítica permaneceu próximo a 5%, a FDRH e a mesma FDRS com F3 apresentaram um percentual de erro 3 vezes maior (acima de 15%). Mas cabe ressaltar que o valor do erro percentual não está conforme se esperava.

A FDRS com F3 apresentou um desempenho ligeiramente melhor que a FDRH. Esta última continua apresentando uma elevação no erro percentual quando a malha é refinada a 160 elementos.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação

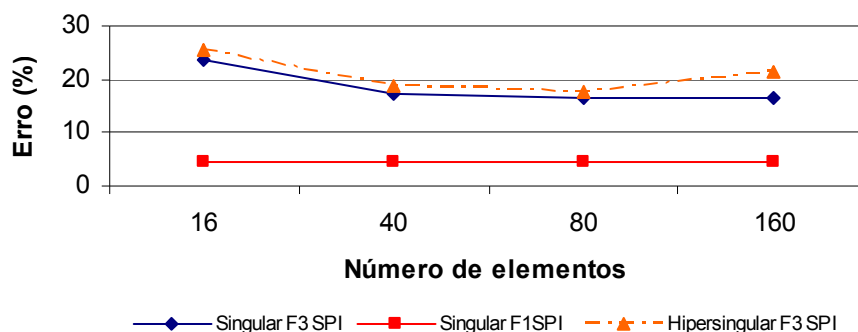


Figura 61: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Com a adoção de pontos internos, a FDRS mostra uma maior convergência de todos os seus resultados, isto tanto para a função de interpolação F1 quanto para F3. Mais uma vez, resultados melhores são obtidos quando se refina a malha. Entretanto, os resultados extraídos a partir da FDRH são ruins, com erro percentual acima de 20%.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (9 pontos internos)

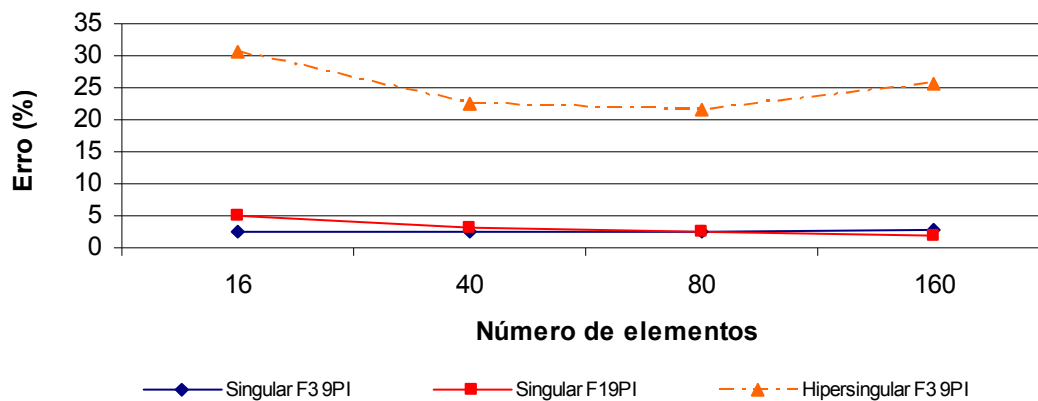


Figura 62: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Sob a ótica dos resultados apresentados na tabela a seguir, fica evidente a supremacia da FDRS com F1, quando não são inseridos pontos internos. Ao se inserir 9 pontos internos constitutivos, esta superioridade dá vez a uma ligeira vantagem a mesma formulação, porém com função de interpolação F3. À medida que ocorre o refinamento da malha para 160 elementos, a FDRS com F1 é um pouco mais convergente com a solução analítica. Com erro percentual acima de 15% para qualquer situação (sem ou com pontos internos), a FDRH mostra a mesma queda de desempenho detectada durante avaliação dos dados para a velocidade igual a 3. Todavia, mesmo sem a adição de pontos internos, os resultados foram pouco satisfatórios.

Resultados para o fluxo de calor para a aresta representativa				
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS		FDRH
		Erro % $\Psi^j = r^3/9$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$
16 elementos	0	4,62	23,49	25,34
	9	5,13	2,37	30,61
40 elementos	0	4,41	17,41	18,60
	9	3,18	2,53	22,62
80 elementos	0	4,56	16,55	17,74
	9	2,35	2,56	21,52
160 elementos	0	4,58	16,45	21,23
	9	1,92	2,69	25,64

Tabela 5 - Erros percentuais médios: Fluxo de calor

VII.1.4.1 – EXEMPLO 2 – CAMPO DE TEMPERATURA REGIDO PELA EQUAÇÃO $T = e^{v(x+y)}$

Neste exemplo, três abordagens diferentes serão realizadas em relação a pontos internos constitutivos. A primeira será sem inserção de pontos, a segunda com a adoção de 9 PI (como foi mostrado na figura 22) e a terceira chegaremos a um máximo de 16 PI, sendo estes últimos introduzidos conforme mostrado na figura 24 a seguir. A malhas utilizadas neste problemas são as mesmas mostradas nas figuras 18, 19, 20 e 21.

Assim como no exemplo precedente a este, as condições de contorno prescritas são somente do tipo essenciais, conforme mostra figura 23. Nestas condições, dispõe-se da solução analítica para o potencial dada pela equação (VII.4).

$$T = e^{v(x+y)} \quad (\text{VII.4})$$

Para o fluxo em x e em y a solução analítica é:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = ve^{v(x+y)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = ve^{v(x+y)}$$
(VII.5)

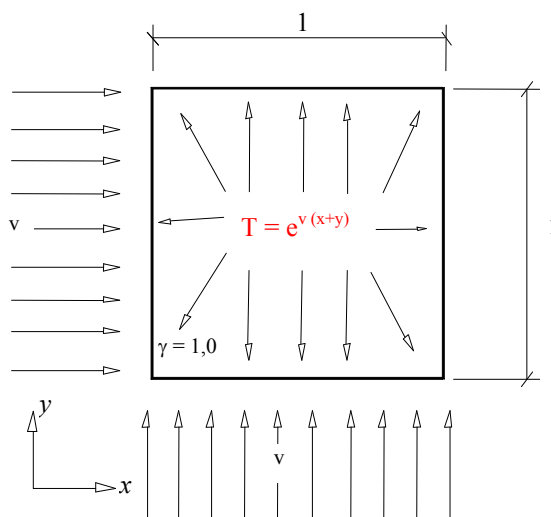


Figura 63 - Representação física para o exemplo 2.

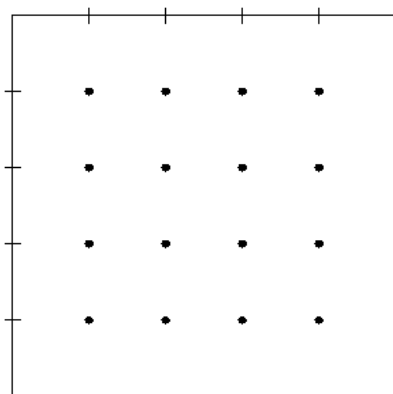


Figura 64 - Posicionamento de 16 pontos internos constitutivos.

A disposição dos 16 pontos internos foi mostrada na figura 24 e a localização geométrica encontra-se na tabela 6.

Localização dos Pontos Internos Constitutivos					
PI	x	y	PI	X	y
1	0.20	0.20	9	0.60	0.20
2	0.20	0.40	10	0.60	0.40
3	0.20	0.60	11	0.60	0.60
4	0.20	0.80	12	0.60	0.80
5	0.40	0.20	13	0.80	0.20
6	0.40	0.40	14	0.80	0.40
7	0.40	0.60	15	0.80	0.60
8	0.40	0.80	16	0.80	0.80

Tabela 6 - Configuração com 16 Pontos Internos

VII.1.4.2 – EXEMPLO 2 – AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA VELOCIDADE “v=1”.

VII. 1.4.2.1 – APLICAÇÃO DA FDRS

Avaliando os resultados obtidos para a malha de 16 elementos, imprimindo a velocidade de igual a 1, nota-se que as curvas numéricas extraídas a partir da aresta representativa apresentaram boa concordância com o referencial analítico, seja com a adoção de pontos internos ou não.

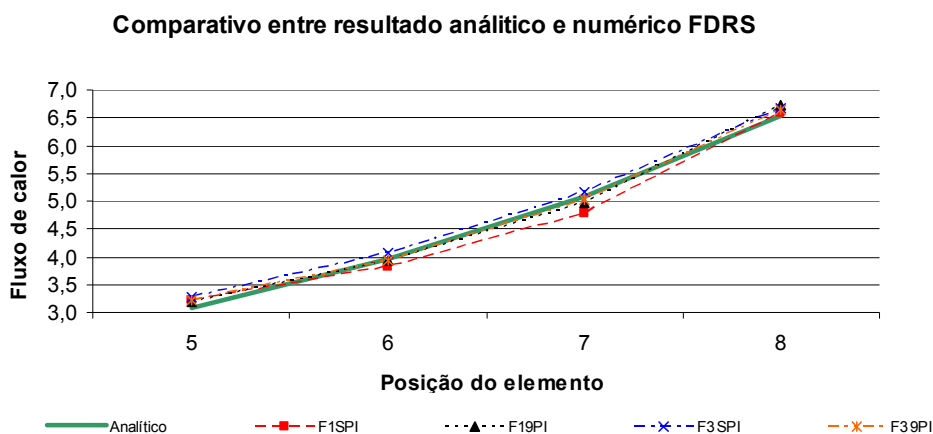


Figura 65: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é v=1.

Com o refinamento da malha para 40 elementos de contorno constantes e mantendo a baixa velocidade do fluxo, viu-se que todas as curvas numéricas com ou sem pontos internos e com funções de interpolação radiais de primeira ou de terceira ordem, a concordância com a curva analítica foi satisfatória, mostrando um bom desempenho do método.

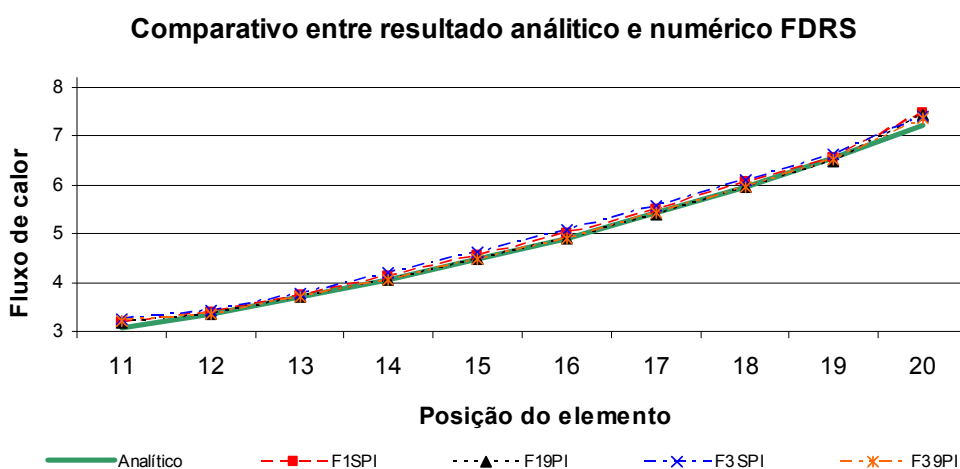


Figura 66: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Dobrando a segmentação do contorno em 80 elementos constantes, o que foi visto foi à manutenção da boa concordância entre as curvas numéricas e analíticas, onde este refinamento adicional da malha trouxe uma maior aproximação do referencial analítico.

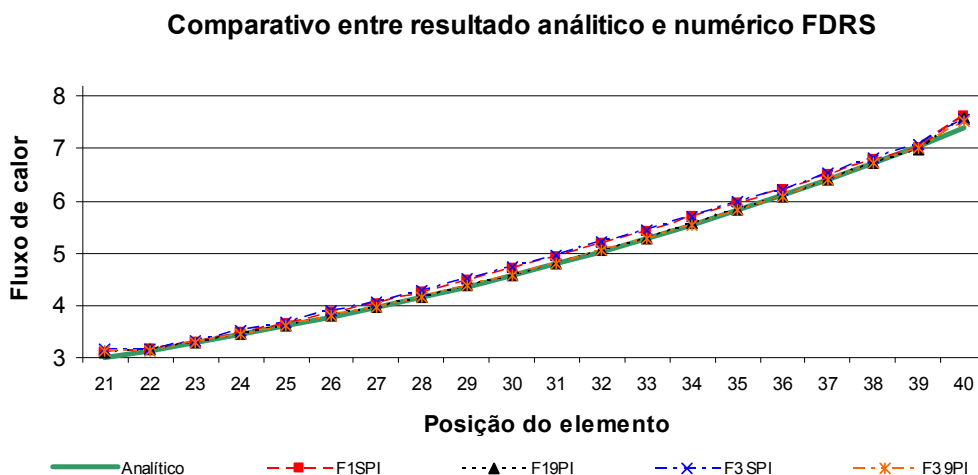


Figura 67: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Concluindo a análise proposta para esta velocidade do fluxo do fluido e refinando a malha para o máximo proposto para este estudo, 160 elementos, obtiveram-se resultados semelhantes às outras malhas com uma melhora na aproximação do referencial idealizado. A concordância foi tão pronunciada que em alguns elementos, que em certos pontos as curvas chegaram a convergir quase que totalmente. Desta forma os resultados levam a concluir que o refinamento da malha trouxe uma maior acuidade.

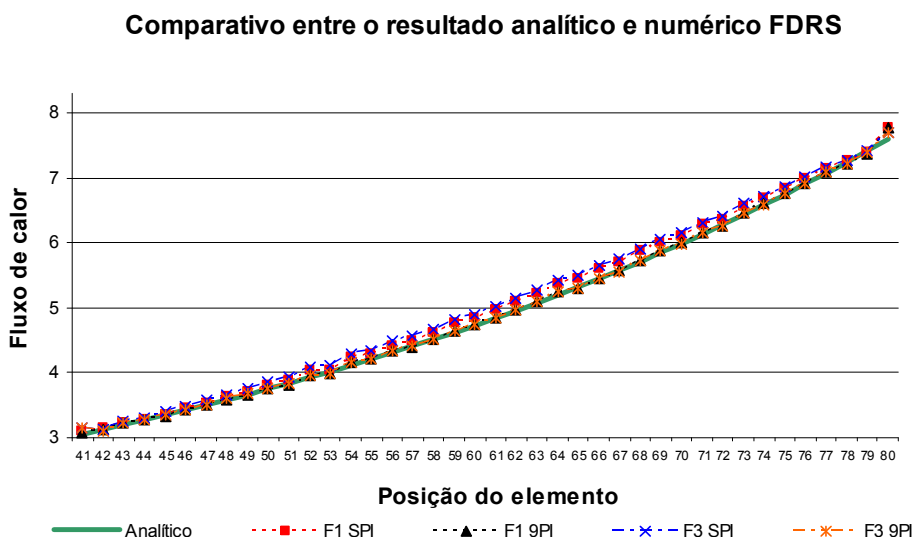


Figura 68: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

VII. 1.4.2.2 – APLICAÇÃO DA FDRH

Tomando agora a FDRH, repetindo o mesmo raciocínio empregado anteriormente, é analisada agora a malha de 16 elementos, onde se destaca a boa concordância com F3 utilizando 9 pontos internos, onde os resultados foram melhores do que com a mesma função de interpolação e emprego de 16 pontos internos. Deduz-se que o acréscimo de pontos interno para Hipersingularidade, para este tipo de problema físico proposto, causa perturbação na intrincada formulação do MEC.

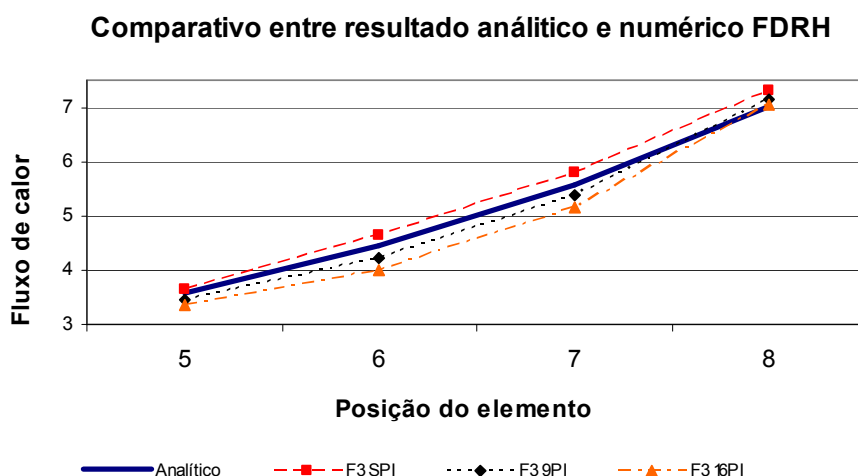


Figura 69: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Com o refinamento da malha a 40 elementos constantes, viu-se que todas as curvas numéricas apresentaram boa concordância com a curva analítica, onde se cabe destacar a curva que representa o fluxo com 9 pontos internos, que acompanhou o delinear da curva analítica.

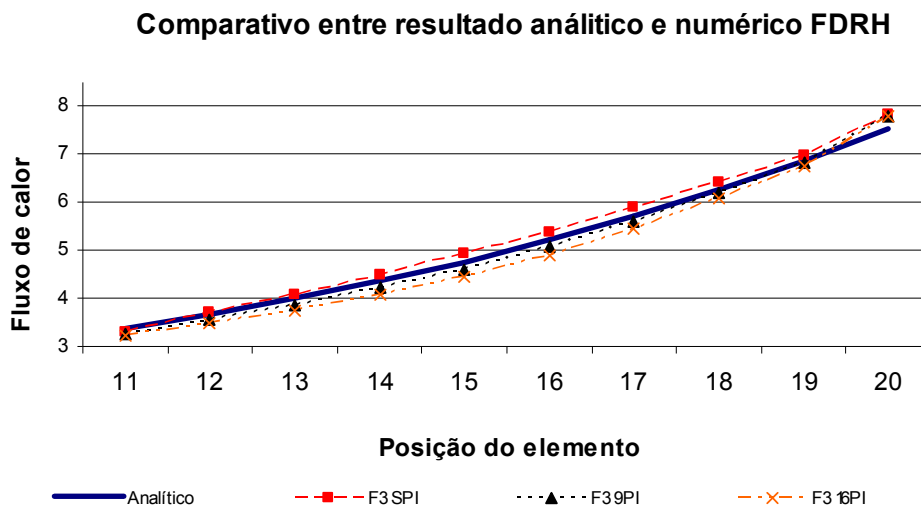


Figura 70: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Já com o contorno segmentado em 80 elementos constantes, observou-se boa concordância entre as curvas numéricas e a analítica, com destaque negativo para a curva numérica que designa o fluxo referente a 16 pontos internos, cujo distanciamento em relação ao referencial analítico foi mais evidente.

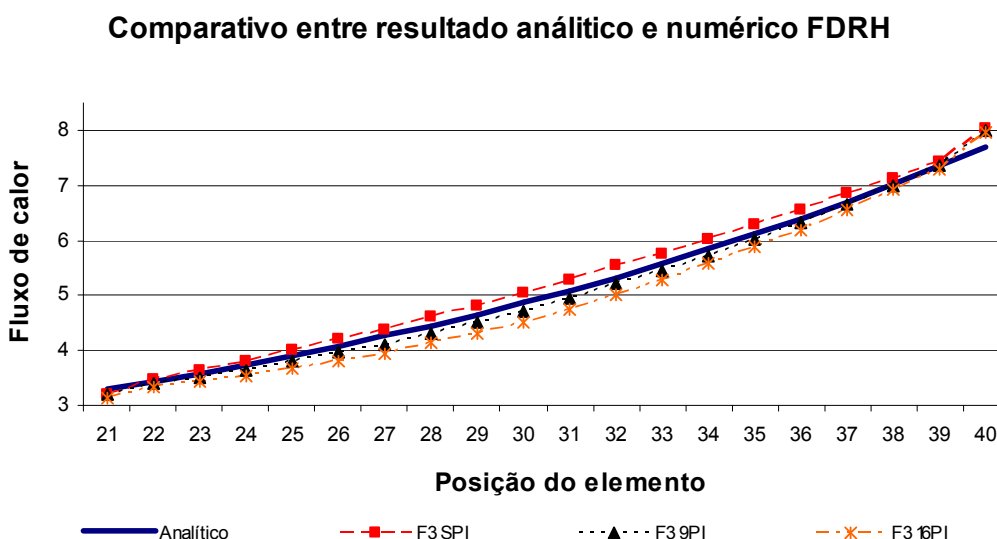


Figura 71: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Por fim, com o emprego de 160 elementos, a boa concordância entre as curvas manteve-se com certa dispersão entre os resultados.

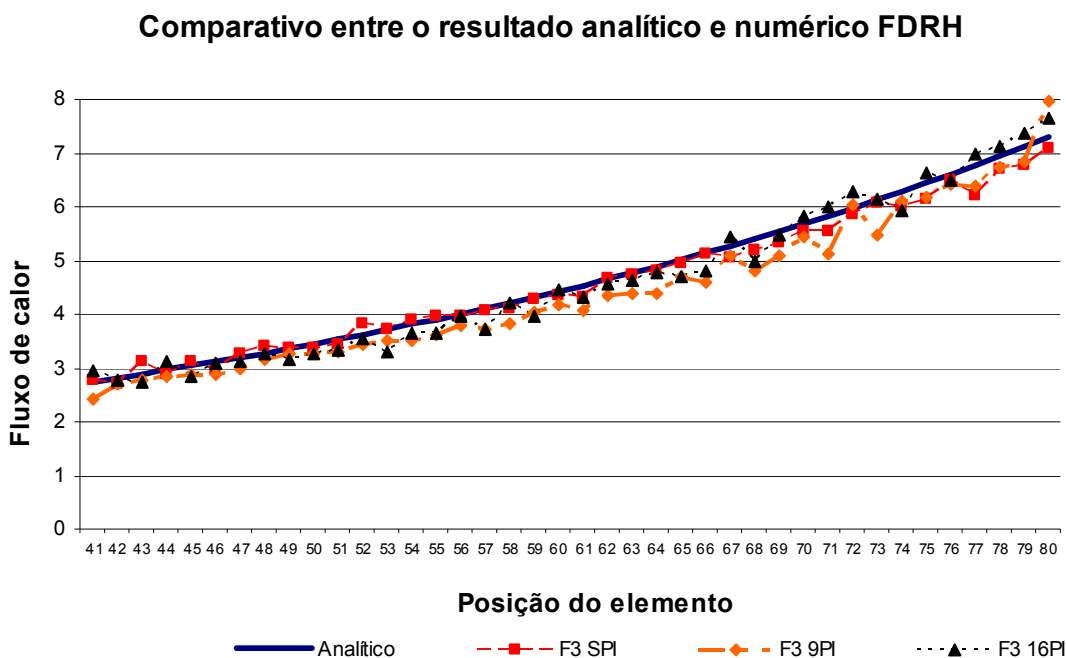


Figura 72: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

No gráfico abaixo, o que se observa é a superioridade da FDRS com a função de interpolação F1 sobre a F3 e também sobre a FDRH. O melhor resultado foi alcançado com o refinamento da malha para 160 elementos, conforme esperado.

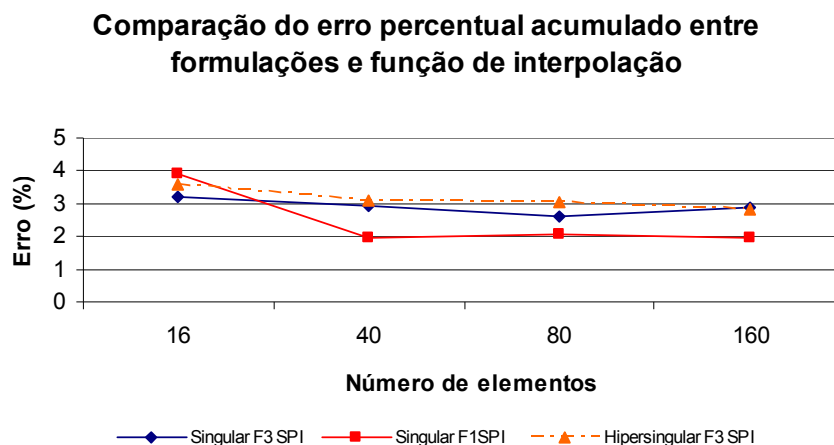


Figura 73: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Quando são adicionados 9 pontos internos, a FDRS F3 se mostra um pouco mais convergente com a solução analítica do que a FDRS F1. Com o refinamento da malha para 160 elementos, os resultados alcançados foram melhorados e as duas curvas mostram certa concordância entre si. Os dados referentes a FDRH mostram que esta formulação experimentou uma queda de desempenho ao serem inseridos pontos internos.

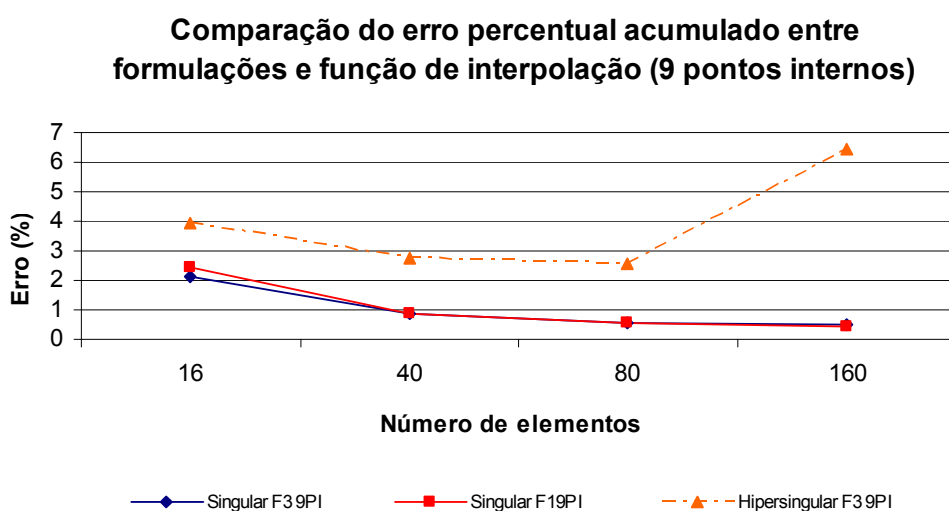


Figura 74: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

O mesmo comportamento relatado acima foi observado quando são adicionados 16 pontos internos, mas desta vez a FDRS F1 e a FDRS F3 praticamente igualam-se em termos de convergência com a solução analítica. Com o refinamento da malha para 160 elementos, os resultados alcançados foram melhorados e as duas curvas mantiveram a concordância entre si. Os dados referentes à FDRH mostram que esta formulação experimenta uma queda de desempenho ao serem inseridos pontos internos.

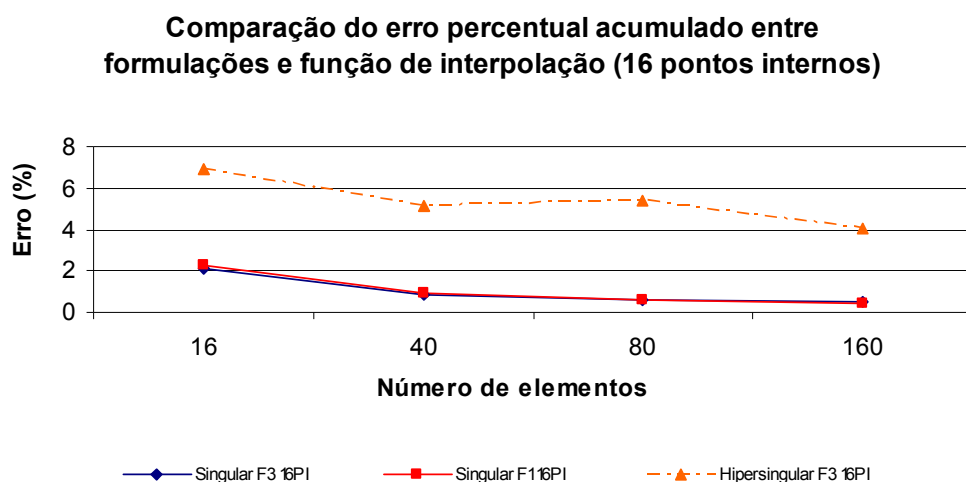


Figura 75: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=1$.

Na tabela abaixo, fica visível o bom comportamento obtido com a FDRS usando as funções de interpolação F1 e F3. Quando são adicionados pontos internos, FDRS com F1 e F3 cada vez mais convergentes com a solução analítica. O melhor resultado foi alcançado com o refinamento da malha para 160 elementos, conforme esperado. Os dados referentes à FDRH mostram-se satisfatórios em um primeiro momento sem a adição de pontos internos, mas a formulação experimentou uma queda de desempenho ao serem inseridos pontos internos.

Resultados para o fluxo de calor para a aresta representativa				
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS		FDRH
		Erro % $\Psi^j = r^3/9$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$
16 elementos	0	3,89	3,18	3,61
	9	2,45	2,12	3,93
	16	2,26	2,08	6,93
40 elementos	0	1,94	2,94	3,12
	9	0,89	0,85	2,75
	16	0,90	0,86	5,15
80 elementos	0	2,07	2,59	3,02
	9	0,57	0,57	2,58
	16	0,55	0,55	5,40
160 elementos	0	1,96	2,88	2,83
	9	0,46	0,53	6,41
	16	0,43	0,47	4,01

Tabela 7 - Erros percentuais médios: Fluxo de calor

VII.1.4.3 – EXEMPLO 2 – AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA VELOCIDADE “v=2”.

VII.1.4.3.1 – Aplicação da FDRS.

Para 16 elementos, tanto para velocidade igual a 1 quanto para a velocidade igual a 2, o comportamento foi o mesmo, com destaque para curva referente ao fluxo com 9 pontos internos e função de interpolação F3, que acompanha de forma fiel a curva analítica.

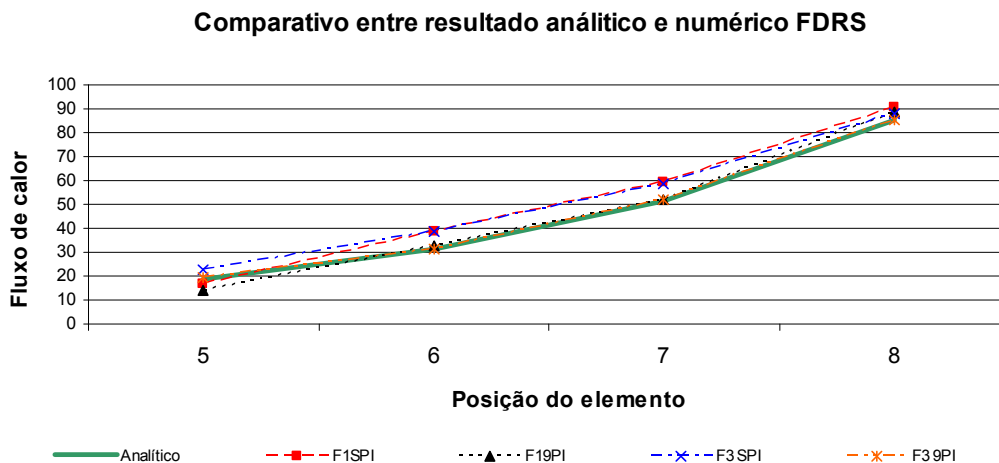


Figura 76: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Foi visto que com o incremento da velocidade ($v=2$) e refinamento da malha para 40 elementos, apenas as curvas numéricas com adoção de pontos internos mostraram boa concordância, tanto radiais cúbicas quanto radiais a quinta, já as demais mostraram certa dispersão em relação ao referencial analítico.

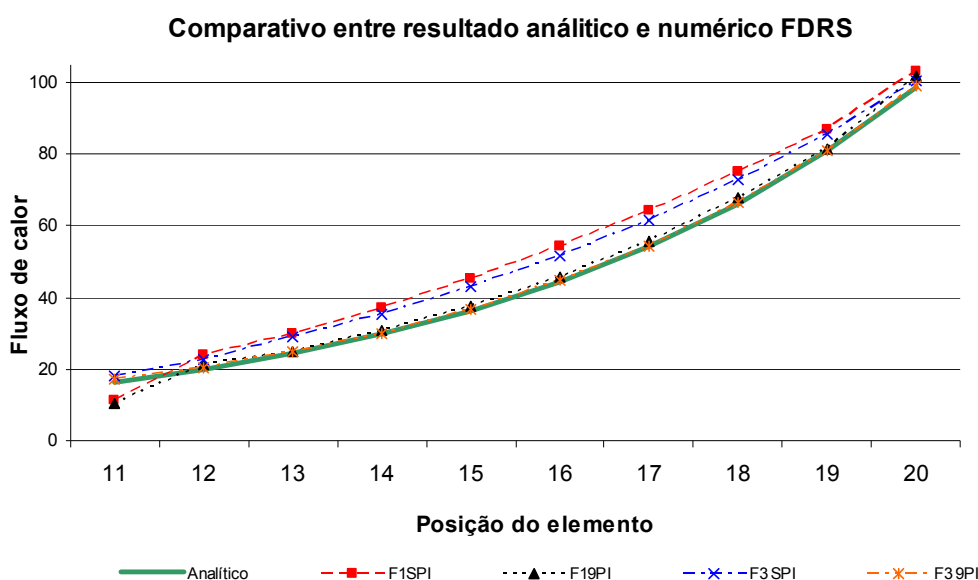


Figura 77: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Aumentando o refinamento da malha para 80 elementos constantes, apenas as curvas numéricas que representam os fluxos de calor com pontos internos permaneceram concordantes com a curva analítica, independente da ordem da função de interpolação.

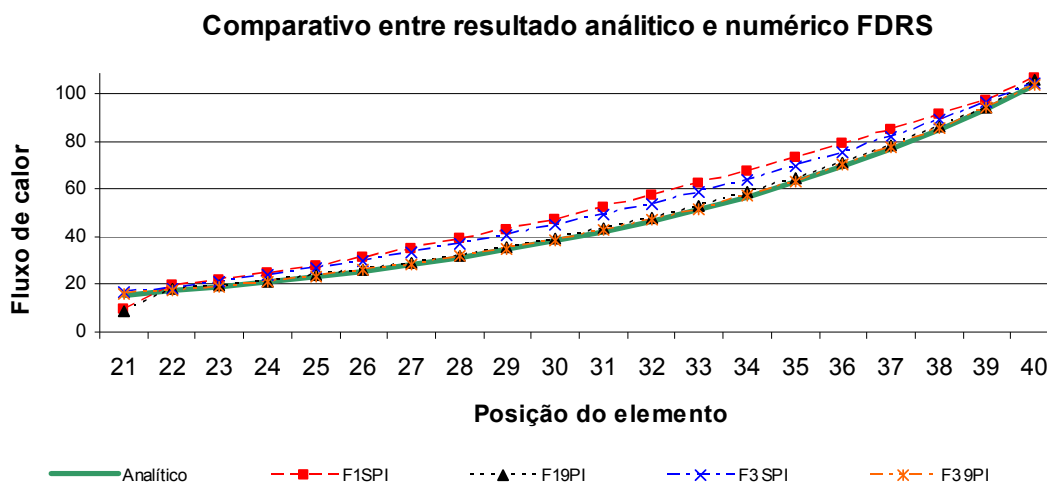


Figura 78: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Elevando o refinamento da malha para 160 elementos constantes foi constatada a permanência dos bons resultados, mas isto apenas para aquelas em que está sendo empregado o uso de pontos internos. As curvas numéricas com 16 pontos internos mostram ligeira melhora na concordância em relação às outras curvas onde foram usados apenas nove pontos internos. Enfatiza-se a permanência da boa concordância e fidelidade dos resultados destas curvas numéricas em relação ao referencial analítico. Cabe também destacar que as demais curvas numéricas, porém, sem pontos internos são concordantes entre si, mas mostram certa dispersão em relação ao referencial fechado.

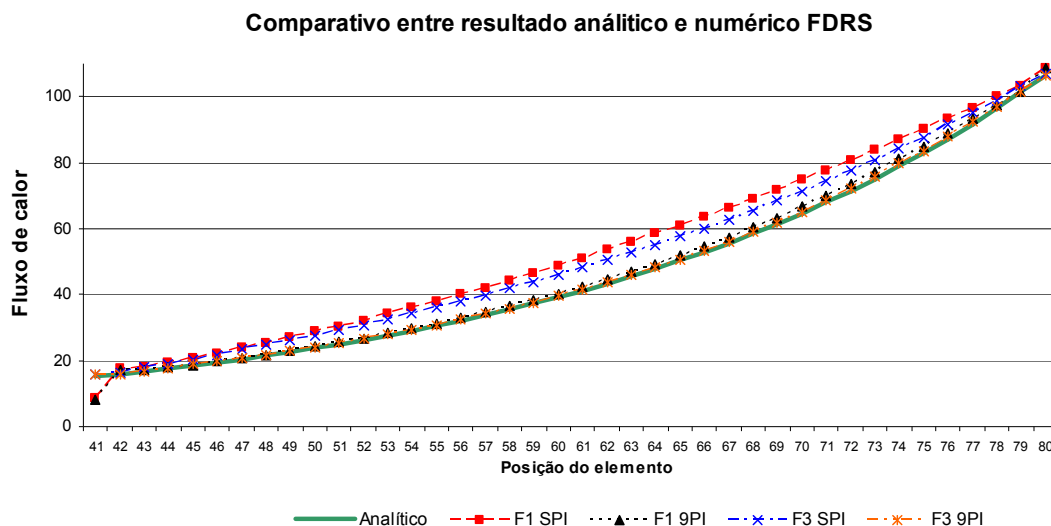


Figura 79: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

VII.1.4.3.2 – APLICAÇÃO DA FDRH.

Iniciando a interpretação dos dados coletados para a malha de 16 elementos, observou-se que mesmo elevando a velocidade do fluxo de 1 para 2, nota-se um bom desempenho tanto para malhas com 9 pontos internos como para 16 pontos internos. Destaca-se o comportamento concordante entre essas curvas numéricas e o referencial analítico, pois foi identificado um harmonioso delinear entre as curvas citadas acima. Cabe dizer que o resultado para as demais curvas numéricas (sem adoção de pontos internos) foi satisfatório, mas não apresentou o mesmo nível de interação.

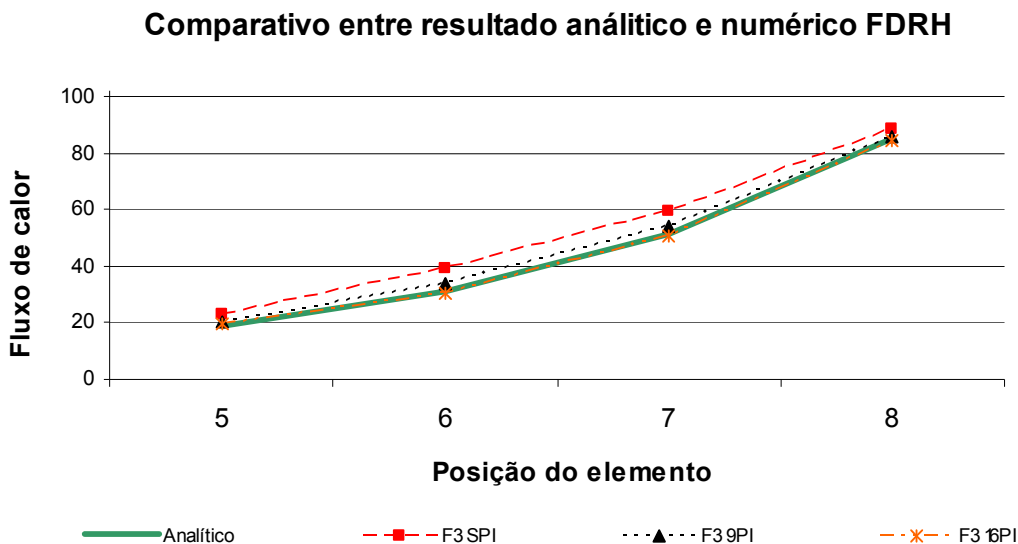


Figura 80: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Tomando como base a malha com 40 elementos, salta aos olhos a curva numérica referente ao fluxo de calor para 16 pontos internos, independente da função de interpolação, aonde a variação entre numérico e analítico chega a ser quase imperceptível em alguns segmentos.

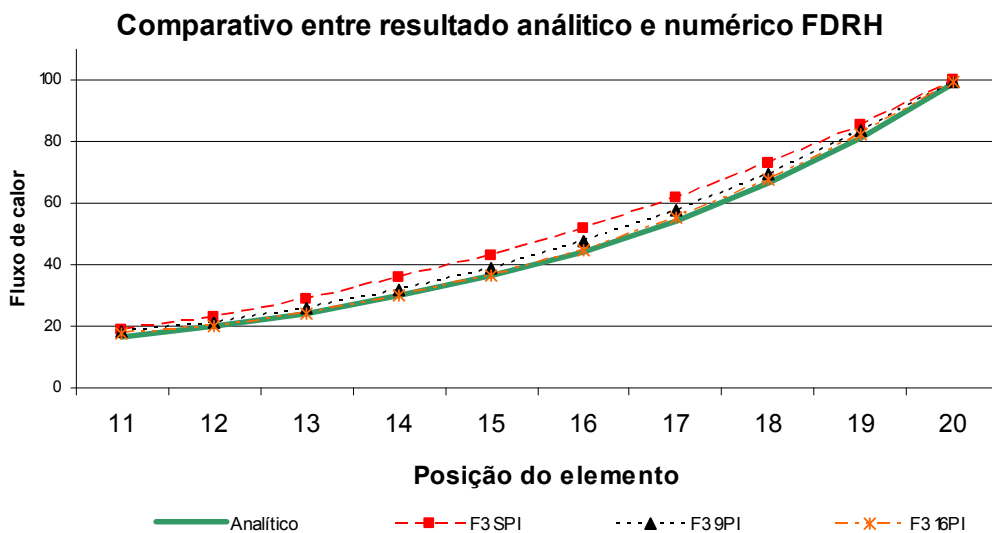


Figura 81: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Refinando a malha para 80 elementos foi detecta uma significativa melhora nos resultados em relação à concordância entre as curvas numéricas e a analítica, com destaque positivo para as curvas, independente da função de interpolação, com emprego de 16 pontos internos, onde houve um delinear mais suave destas curvas com o referencial analítico. Isto mostra a ação da malha mais refinada aumentando a fidelidade dos resultados numéricos quando comparados com aqueles onde foi obtido resultado fechado.

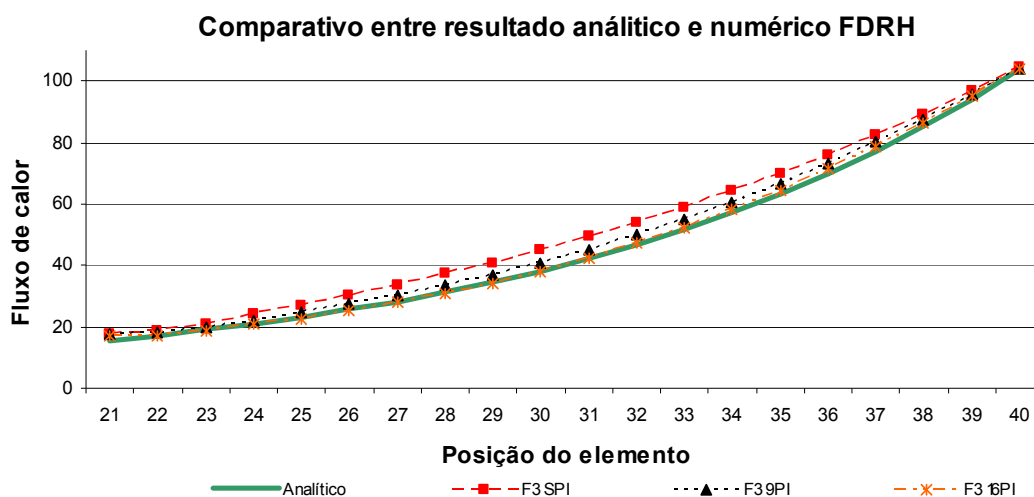


Figura 82: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Empregando o refinamento da malha do contorno em 160 elementos, ocorreu uma inversão nos resultados, onde os avanços conseguidos nas malhas de 40 e 80 caíram por terra, os dados coletados foram ruins. A curva numérica com função de interpolação F3, sem a adição de pontos internos, mostra alguns pontos de convergência, mas isto a partir dos últimos 20 elementos.

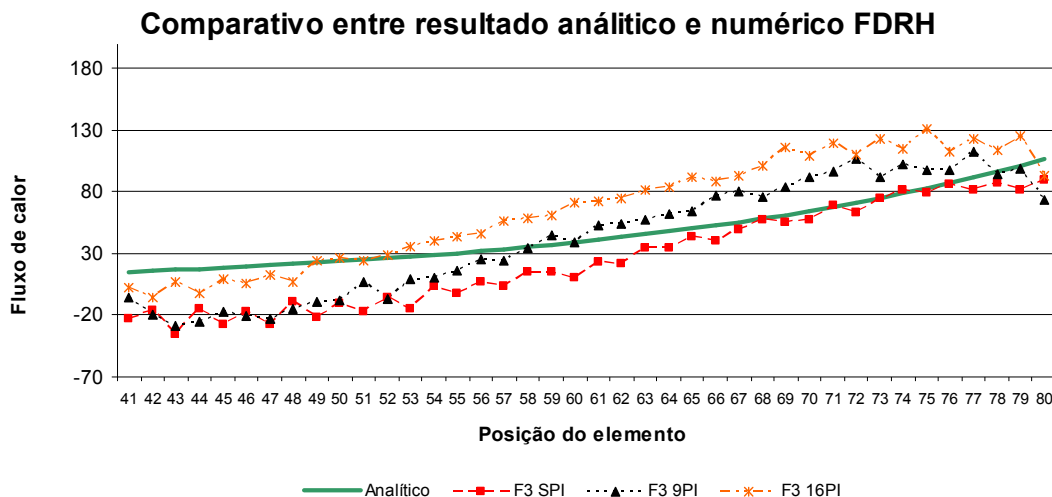


Figura 83: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

No gráfico abaixo, o que se observa é a melhora nos resultados obtidos com a FDRH, sendo melhor que a FDRS com a função de interpolação F1 também que a F3, esta melhora foi mais pronunciada com o refinamento da malha para 160 elementos, conforme esperado.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação

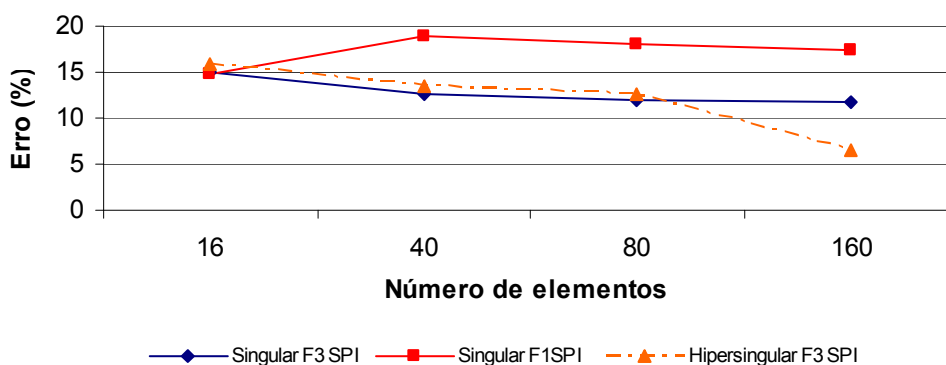


Figura 84: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Entretanto, com a adoção de pontos internos, a FDRS mostra uma maior convergência de todos os seus resultados, isto se empregando a função de interpolação F3. Quanto a FDRS com F1, mostrou um comportamento divergente em um primeiro momento, mas com o refinamento da malha para 160 elementos o erro percentual caiu a níveis satisfatórios. Contudo, os resultados extraídos a partir da FDRH são inicialmente razoáveis e com o refinamento da malha tornam-se piores.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (9 pontos internos)

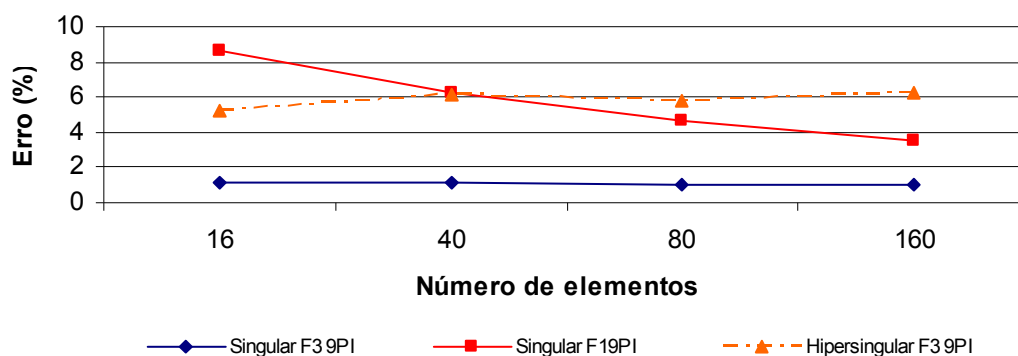


Figura 85: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

Com 16 pontos internos vê-se o domínio da FDRS com F3 em todas as malhas, atingindo níveis de erro percentual cada vez mais baixo. A FDRH acompanhou estes bons resultados citados para a FDRS com F3 até o refinamento da malha em 80 elementos. Ao refinar-se a malha para 160 elementos o que se vê é um piora súbita da FDRH e uma melhora nos resultados da FDRS com F1, que já vinha gradativamente se recuperando.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (16 pontos internos)

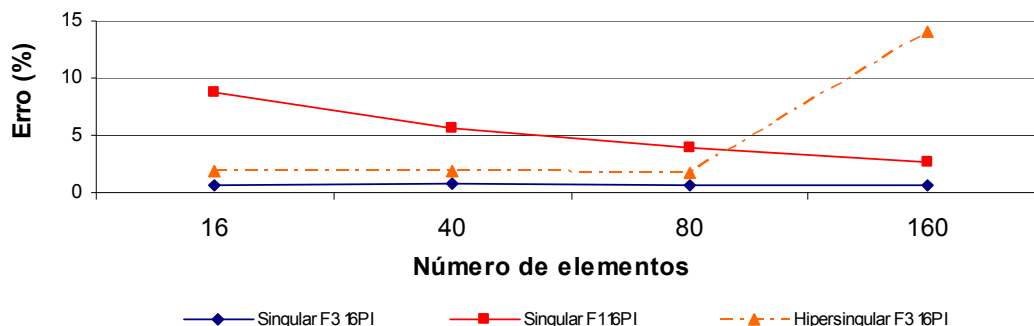


Figura 86: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=2$.

A seguir a tabela 8, exibe a constância dos resultados alcançados para a FDRS com a função de interpolação F3 e recuperação da FDRS com F1. Também mostra a alternância dos valores alcançados do erro percentual para a FDRH.

Resultados para o fluxo de calor para a aresta representativa				
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS		FDRH
		Erro % $\Psi^j = r^3/9$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$
16 elementos	0	14,81	14,98	15,86
	9	8,64	1,09	5,28
	16	8,68	0,70	1,82
40 elementos	0	18,85	12,64	13,44
	9	6,30	1,17	6,09
	16	5,58	0,78	1,90
80 elementos	0	18,14	12,04	12,56
	9	4,63	1,03	5,77
	16	3,84	0,68	1,65
160 elementos	0	17,31	11,82	6,53
	9	3,50	1,00	6,27
	16	2,69	0,65	14,04

Tabela 8 - Erros percentuais médios: Fluxo de calor

VII.1.4.4 – EXEMPLO 2 – AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA VELOCIDADE “ $v=3$ ”.

VII.1.4.4.1 – APLICAÇÃO DA FDRS

Partindo da malha com 16 elementos e com o incremento de velocidade do fluxo para 3, verifica-se que a concordância das curvas numéricas sem a adição de pontos internos foram ruins. Contudo, a partir da introdução de 9 pontos internos constitutivos, a fidelidade das curvas numéricas para com o referencial analítico foi mantida. O destaque positivo foi para a função de interpolação F3, onde a concordância para esta função de interpolação foi boa.

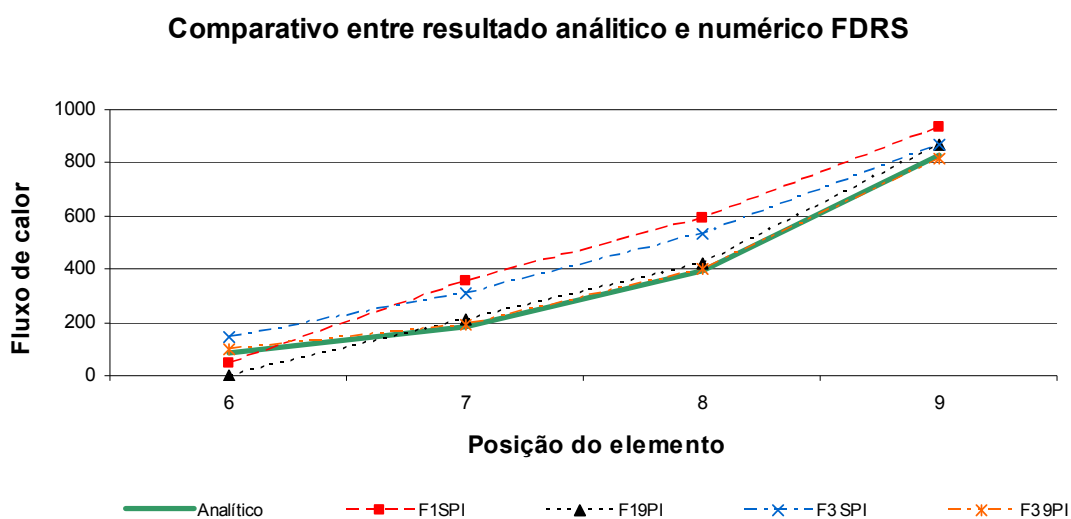


Figura 87: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Continuando o processo de refinamento da malha, passando agora para 40 elementos constantes, mesmo com o incremento da velocidade do fluxo para 3, as características e comportamento das curvas numéricas permanecem os mesmos. Isto quer dizer, apenas as curvas numéricas com a adoção de pontos apresentaram boa concordância, ou seja, tanto para função de interpolação radial simples quanto para aquelas elevadas ao cubo. As demais curvas mostraram certa dispersão em relação à solução fechada.

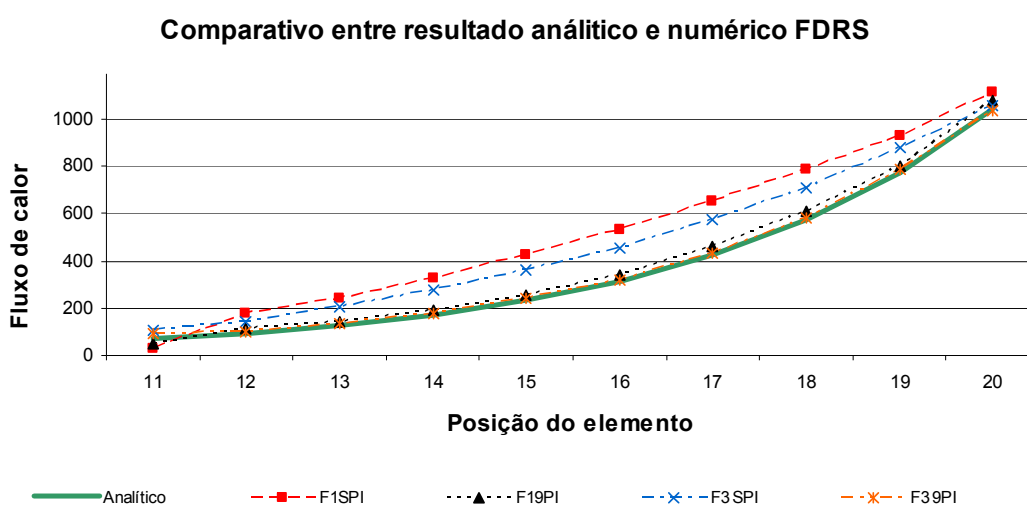


Figura 88: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Elevando o numero de elementos de 40 para 80 observa-se que apenas as curvas numéricas que representam os fluxos com pontos internos permaneceram concordantes com a curva analítica.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRS

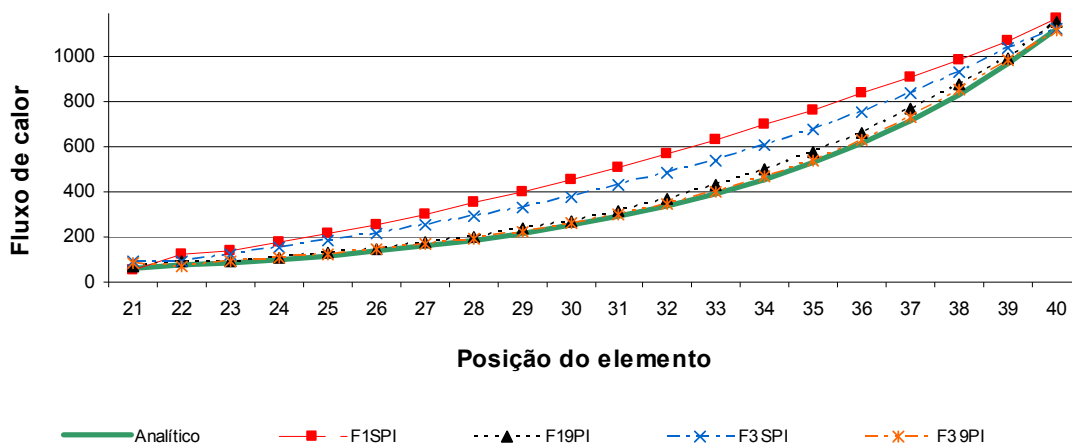


Figura 89: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Passando de 80 elementos para 160, a mesma situação foi observada, sem nenhum ganho significativo em relação ao tangenciamento da solução fechada pelos resultados computacionais. As curvas numéricas com a adoção de pontos internos permaneceram com elevada fidelidade em relação a referencial analítico e as demais soa concordantes entre si, porém com dispersão em relação ao referencial.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRS

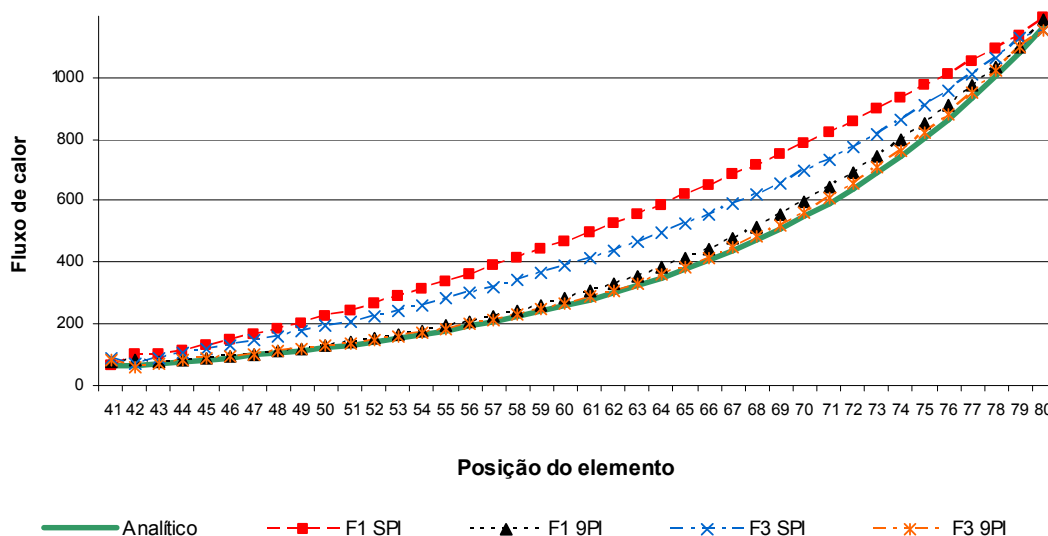


Figura 90: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

VII.1.4.4.2 – APLICAÇÃO DA FDRH

Partindo da malha de 16 elementos, no que tange a velocidade do fluxo igual a 3, observa-se um certo distanciamento das curvas numéricas em relação a analítica, com desta para a curva referente ao fluxo sem a adoção de pontos internos que demonstra uma maior aproximação em relação ao referencial, mas ainda longe do esperado.

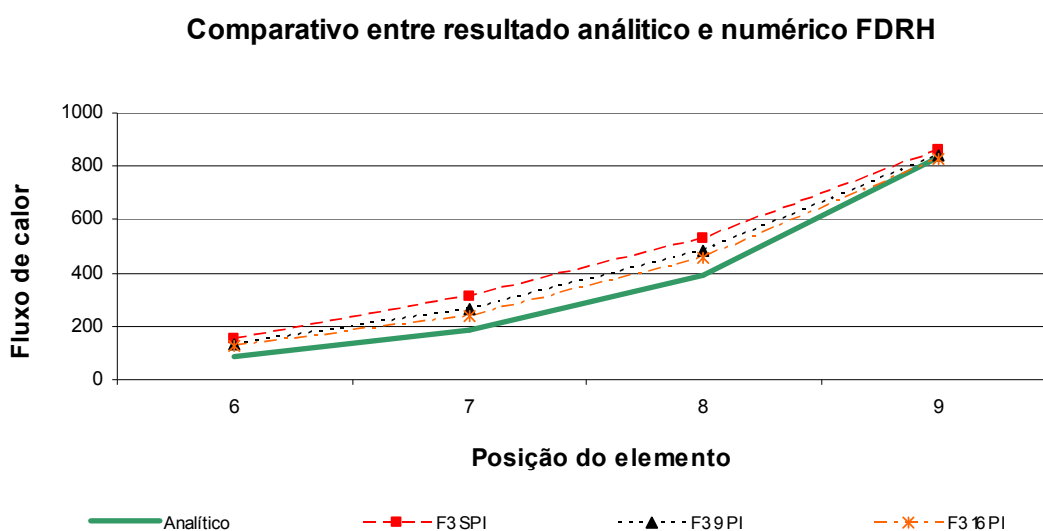


Figura 91: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Passando para 40 elementos, as curvas numéricas permaneceram juntas, mostrando boa concordância entre si, porém bem deslocadas em relação ao referencial analítico. A adição de pontos internos melhora a proximidade das curvas numéricas com a analítica gradualmente, mas de maneira pouco significativa.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRH

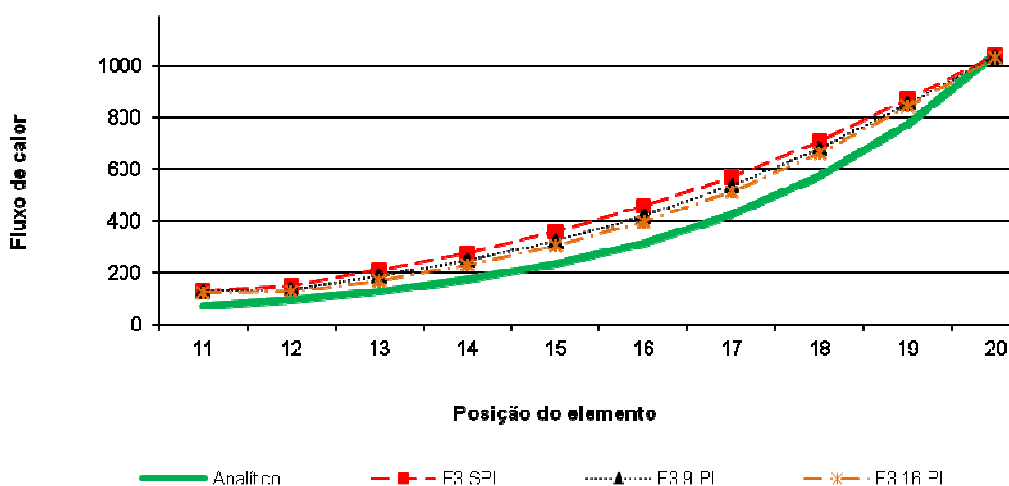


Figura 92: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Dobrando o refinamento para 80 elementos houve certo distanciamento das curvas numéricas em relação ao referencial analítico, mas a exemplo dos resultados coletados para a malha de 40, viu-se uma boa concordância entre resultados numéricos.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRH

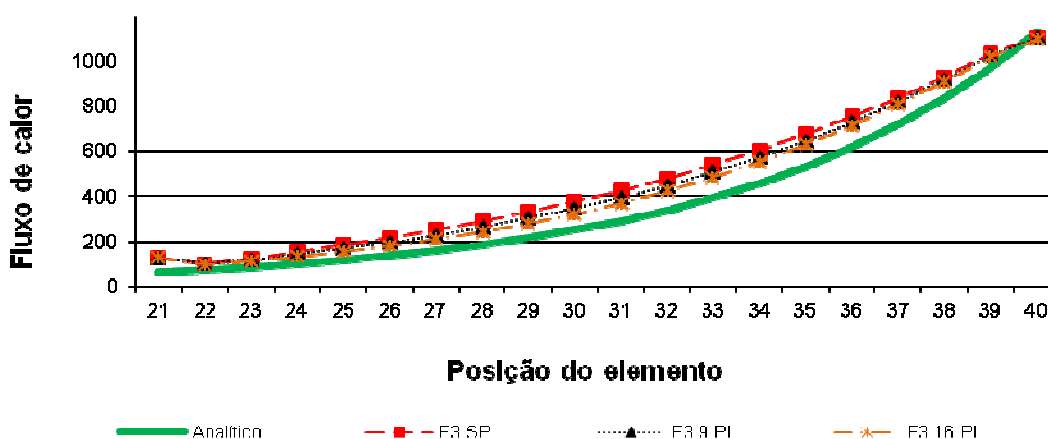


Figura 93: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Finalizando, segmentando o contorno em 160 elementos constantes, observa-se uma melhora nos resultados. Isto foi mais visível onde a função de interpolação empregada foi a F3 SEM a inserção de pontos internos. Todavia, houve uma maior concordância entre curvas numéricas, isto refletiu também em aproximação do referencial analítico. Assim deduzimos que o refinamento da malha trouxe uma razoável acuidade para a formulação empregada.

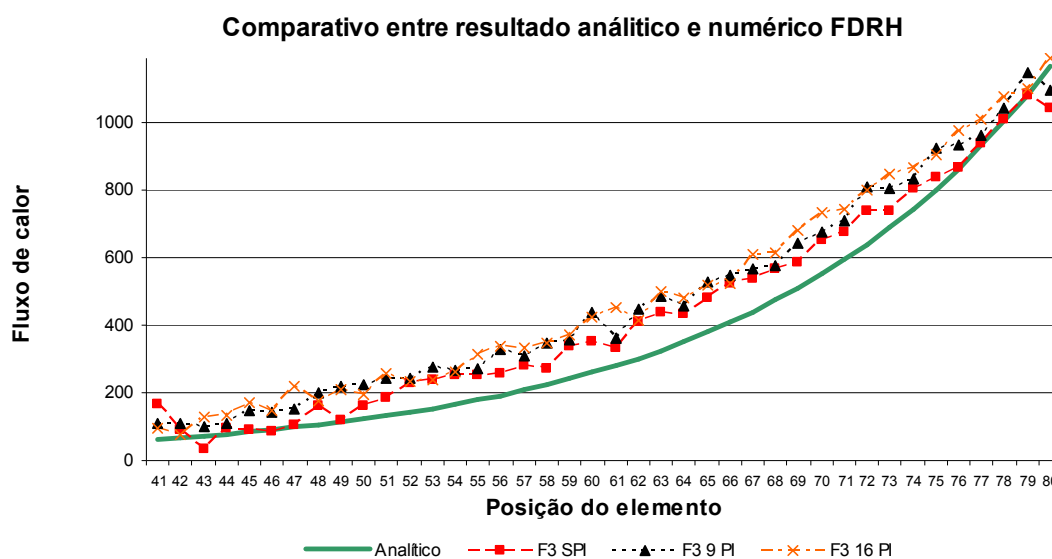


Figura 94: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Com o acréscimo da velocidade os valores de erro percentual são mais elevados. No gráfico abaixo o que se constata é o bom comportamento das FDRH e a FDRS com F1.

Com o refinamento da malha, a FDRH mostra-se mais eficiente.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação

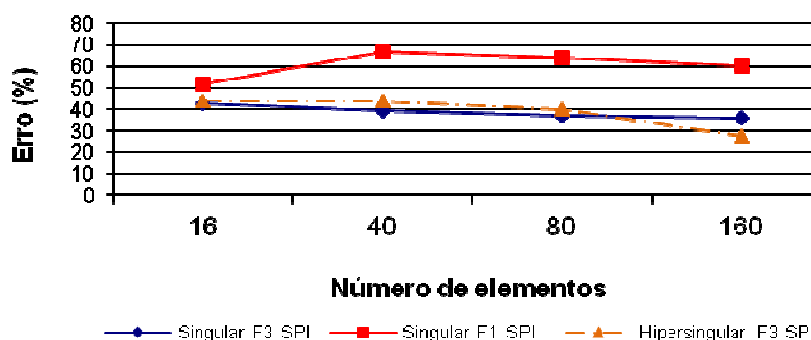


Figura 95: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Adicionando-se pontos internos, a FDRS mostra uma maior convergência de todos os seus resultados, isto se empregando a função de interpolação F3. Quanto a FDRS com F1, mostrou um comportamento divergente em um primeiro momento, mas com o refinamento da malha para 160 elementos o erro percentual caiu a níveis satisfatórios. Contudo, os resultados extraídos a partir da FDRH são inicialmente razoáveis e com o refinamento da malha tornam-se piores. Este mesmo comportamento foi constatado para a velocidade anterior ($v=2$).

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (9 pontos internos)

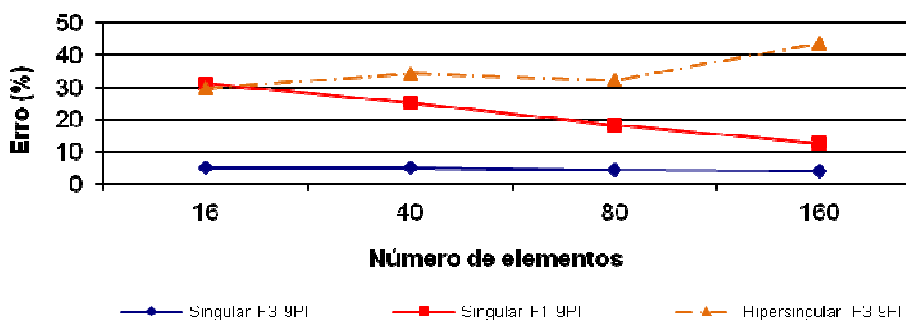


Figura 96: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Com 16 pontos internos vê-se o domínio da FDRS com F3 em todas as malhas, atingindo níveis de erro percentual cada vez mais baixo. A FDRH não acompanhou os bons resultados citados para a FDRS com F3, em um primeiro instante para a malha de 16 elementos teve convergência um pouco melhor que a FDRS com F1, mas depois divergiu, mostrando um péssimo rendimento com o refinamento da malha. Constata-se também a melhora nos resultados da FDRS com F1, que gradativamente se recupera com o refinamento da malha.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (16 pontos internos)

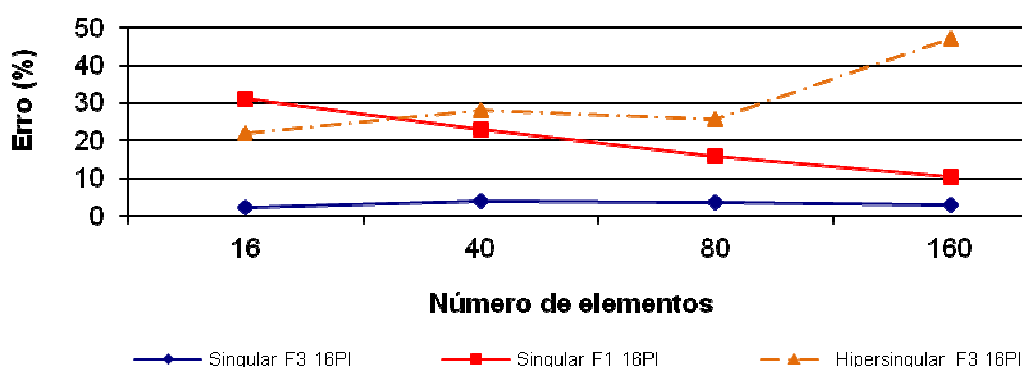


Figura 97: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=3$.

Na tabela 9, fica visível a superioridade da FDRS com a função de interpolação F3 sobre a F1 e também sobre a FDRH. Contudo, cabe destacar que sem pontos internos a FDRH alcançou melhores resultados que FDRS, independente da função de interpolação, mas isto não quer dizer que o erro percentual está a níveis satisfatórios. Uma vez que o dado mais convergente com a curva analítica exibe um valor maior que

27%. Quando são adicionados pontos internos, há um domínio da FDRS com F3, alcançando um baixo erro percentual com 160 elementos (2,87%), sendo mais convergente com a solução analítica.

Resultados para o fluxo de calor para a aresta representativa				
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS		FDRH
		Erro % $\Psi^j = r^3/9$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$
16 elementos	0	51,50	42,55	43,93
	9	31,14	4,97	29,82
	16	31,27	2,30	21,98
40 elementos	0	67,19	39,37	44,05
	9	25,23	4,95	34,33
	16	22,98	3,79	27,93
80 elementos	0	64,28	37,15	39,75
	9	18,10	4,47	32,17
	16	15,71	3,49	25,72
160 elementos	0	60,44	36,21	27,52
	9	12,82	3,88	43,77
	16	10,40	2,87	47,18

Tabela 9 - Erros percentuais médios: Fluxo de calor

VII.1.4.5 – EXEMPLO 2 – AVALIAÇÃO DO FLUXO PARA VELOCIDADE “v=5”.

VII.1.4.5.1 – APLICAÇÃO DA FDRS

Imprimindo a velocidade máxima do fluxo, para este estudo que é 5 na malha mais pobre cuja a quantidade de elementos é de 16, verifica-se que apenas a curva numérica correspondente a função de interpolação F3, com pontos internos, manteve-se com baixo desvio em relação a curva analítica.

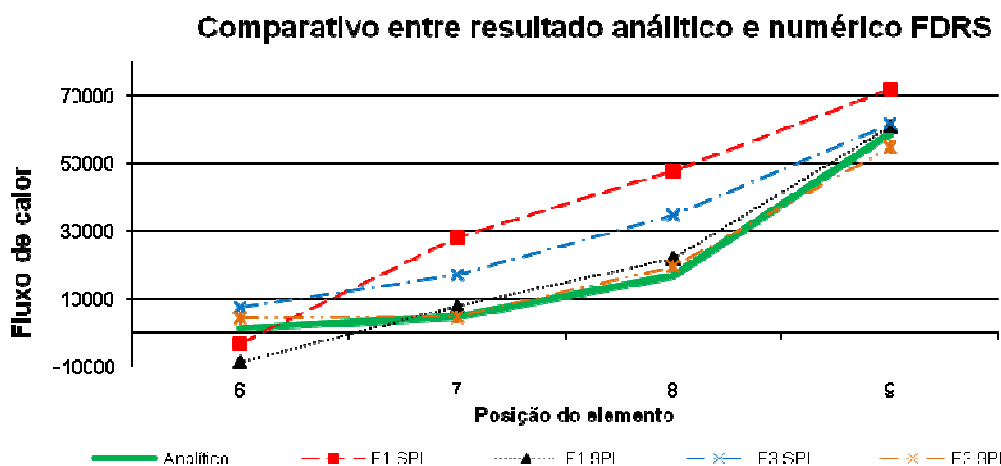


Figura 98: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Enriquecendo a malha para 40 elementos constantes, observa-se uma maior fidelidade entre curvas numérica e analítica, mas isto para a curva correspondente ao fluxo utilizando 9 pontos internos e função de interpolação F3. Em contrapartida, a função F1 com adoção de 9 pontos internos também trás boa concordância com o referencial analítico, porém sem a boa aproximação exibida pela função de ordem à terceira.

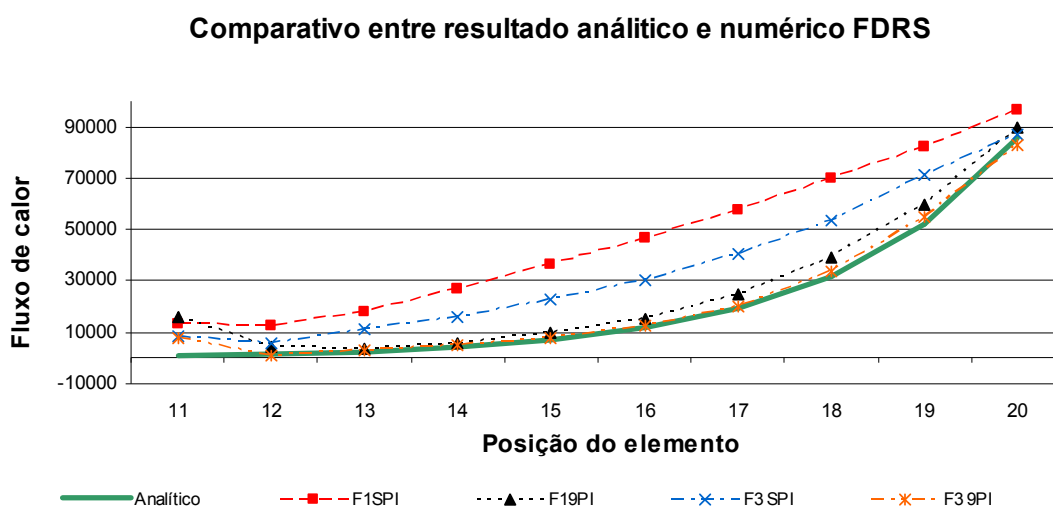


Figura 99: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Duplicando a malha para 80 elementos, vê-se que as curvas numéricas apresentam boa concordância entre si, mas com o acréscimo da velocidade ($V=5$), estas curvas distanciaram-se consideravelmente do referencial analítico, mesmo com o refinamento da adicional da malha. Esta característica foi independente da função de interpolação e adoção de pontos internos.

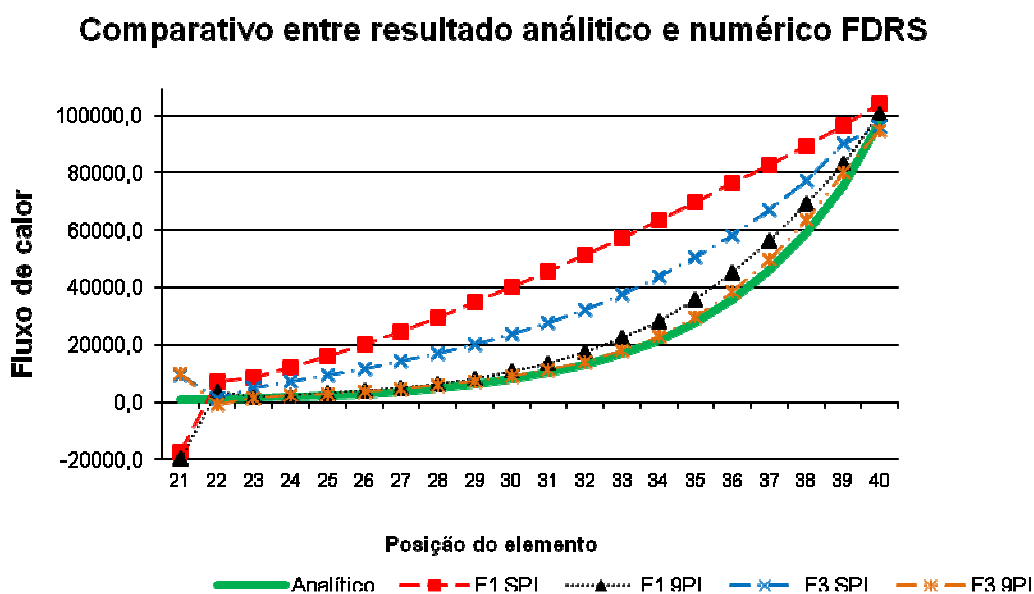


Figura 100: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Fechando este tópico, segmenta-se o contorno em 160 elementos, refinamento máximo empregado nesta dissertação e os dados obtidos foram razoáveis, onde as curvas numéricas com adoção de pontos internos permaneceram com fidelidade a curva analítica. Já as demais são concordantes entre si, porém dispersam-se em relação ao referencial. Cabe destacar que a curva numérica com função de interpolação F3 e adição de 9 pontos internos manteve a boa concordância a qual foi uma característica

desta neste estudo. Não obstante a isso, destaca-se também o comportamento ruim das curvas numéricas, em que não foram empregados pontos internos constitutivos. Tal comportamento é visualizado independente da função de interpolação empregada, levando a uma dispersão acentuada dos resultados.

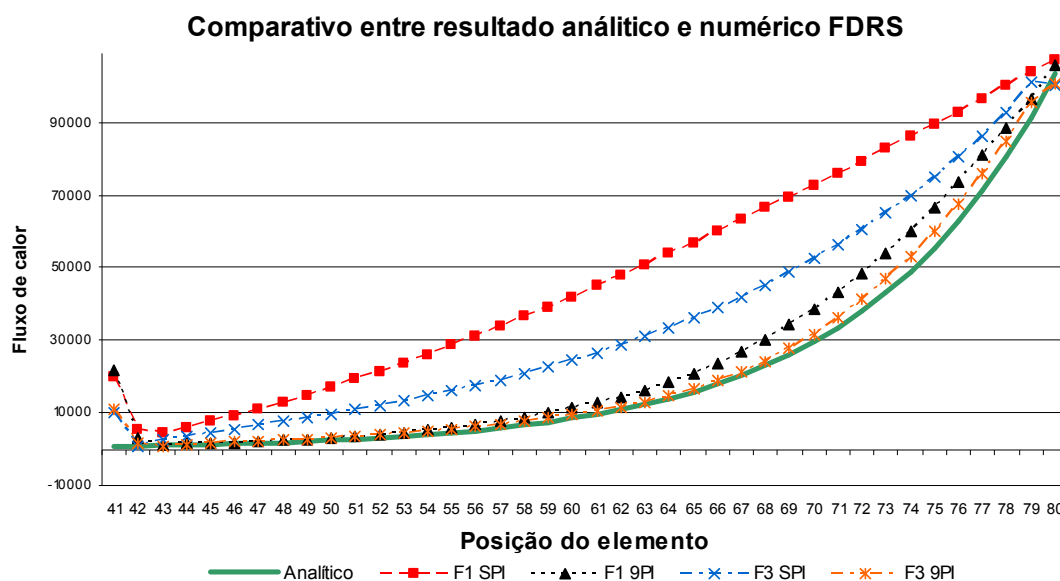


Figura 101: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRS com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

VII.1.4.5.2 – APLICAÇÃO DA FDRH

Finalizando as análises pertinentes ao comportamento do fluxo de calor em relação à formulação empregada, tipo de função de interpolação, refinamento da malha e influência da velocidade, chegamos a FDRH com a máxima velocidade do fluxo neste estudo ($V=5$) na malha mais pobre (16 elementos). Consta-se a pouca aproximação as

curvas numéricas e o referencial fechado. Entretanto, pode ser frisada, mais uma vez, a disposição destas curvas numéricas, pois se apresentam próximas umas das outras e concordantes entre si. Cabe salientar que a função de interpolação F3, com pontos internos igual a 16, mostrou certa tendência a aproximar-se da curva analítica, exibindo um desempenho um pouco melhor que as demais propostas para esta situação de estudo.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRH

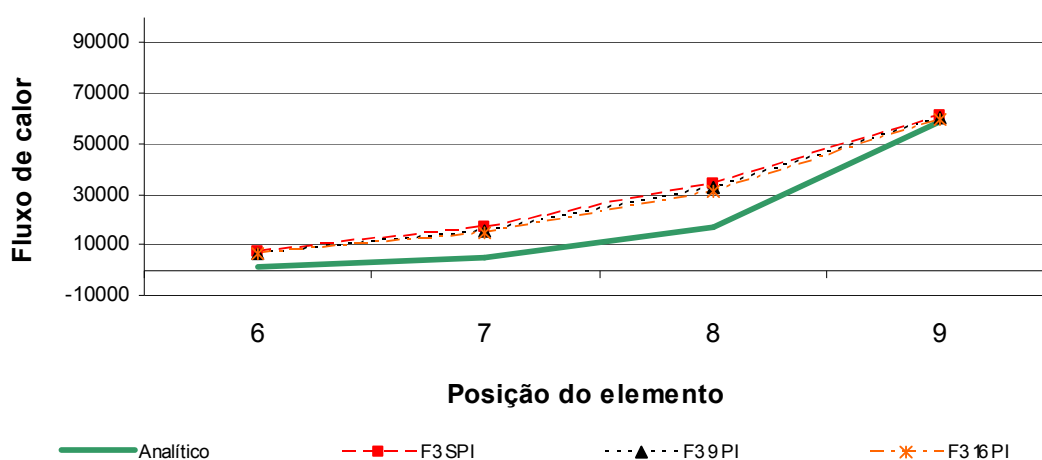


Figura 102: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 16 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Elevando de 16 para 40 elementos o refinamento do contorno e mantendo a velocidade em seu máximo ($V=5$), as curvas numéricas permaneceram juntas, mostrando boa concordância entre si, porém com um distanciamento cada vez maior do referencial analítico. Mais uma vez, a adição de pontos internos melhora a proximidade das curvas numéricas com a analítica, gradualmente, mas de maneira pouco significativa.

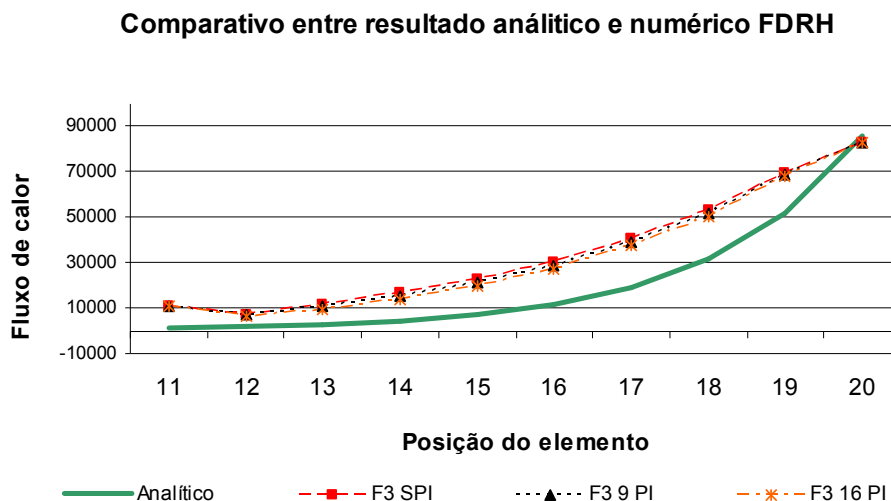


Figura 103: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 40 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Discretizando o contorno em 80 elementos, para as mesmas condições estabelecidas na malha anterior, os resultados mostram a curva numérica de F3 SEM adoção de pontos internos e a curva de mesma função, mas com 16 pontos internos, próximas uma da outra. Isto exhibe certa concordância entre os resultados, mas muito longe do referencial, divergindo do comportamento que se esperava. Outro fato a ser comentado é o resultado obtido com a curva numérica que descreve o fluxo de calor para uma situação de 9 pontos internos, que exhibe certa concordância em alguns elementos, mas dispersa acentuadamente em outros. Isto foi mais evidente nos elementos próximos aos cantos da superfície de controle, por efeito característico dos elementos constantes no MEC.

Comparativo entre resultado analítico e numérico FDRH

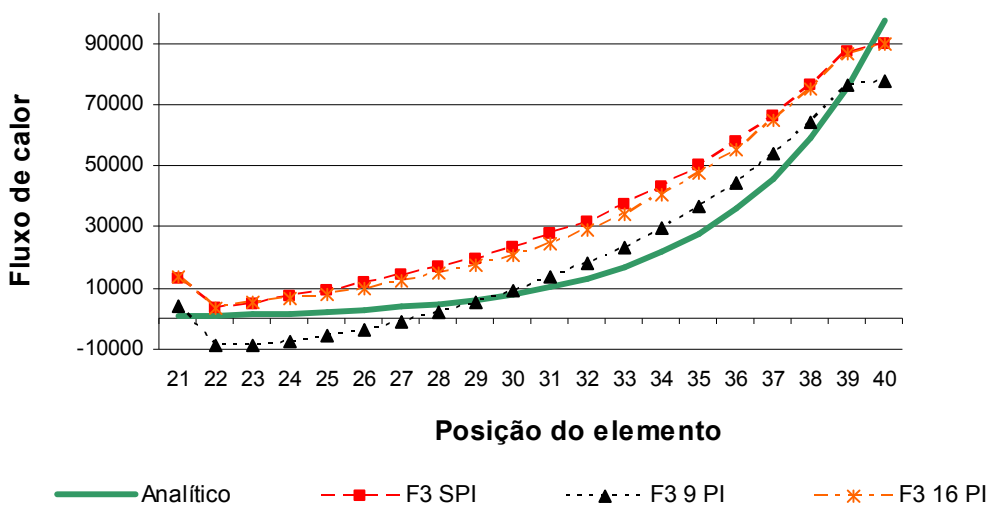


Figura 104: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 80 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Encerrando a discussão proposta para este tópico, segmenta-se o contorno em 160 elementos e fazendo a velocidade do fluxo igual a 5, os resultados obtidos foram similares aos extraídos para a velocidade igual a 2. Mesmo com o refinamento máximo da malha, os dados coletados foram ruins. O que se vê é a piora dos resultados extraídos a partir da curva numérica referente a função de interpolação F3 com adição de 16 pontos internos e a melhora dos resultados relacionados a mesma função de interpolação mas SEM pontos internos constitutivos. F3 SEM pontos internos foi mais concordante com o referencial analítico, porém, por apenas um segmento de aresta (aproximadamente os 20 elementos iniciais). O comportamento das curvas numéricas é visivelmente disperso, independente da quantidade de pontos internos empregados, levando a uma dispersão acentuada dos resultados.

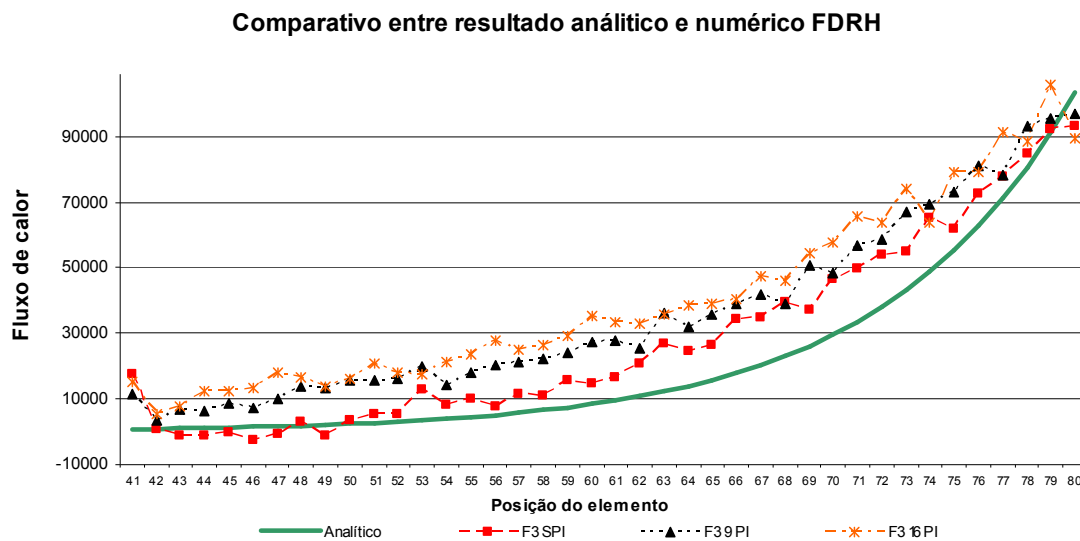


Figura 105: Comportamento do fluxo de calor em relação aos elementos da aresta representativa, para a FDRH com contorno discretizado em 160 elementos, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Chegando ao experimento final, elevando a velocidade para 5, sem a adoção de pontos internos constitutivos, o que se obtém é um erro percentual absurdamente elevado (acima dos 100% para FDRS com F1, F3 e FDRH). A FDRH ainda exibe um comportamento um pouco melhor para 16 elementos e também quando há o refinamento da malha para 160 elementos. No intervalo entre 40 e 80 elementos a FDRS com F3 mostra-se ligeiramente melhor que a FDRH. Em contrapartida, a FDRS com F1 exibe erro percentual bastante elevado para todas as malhas.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação

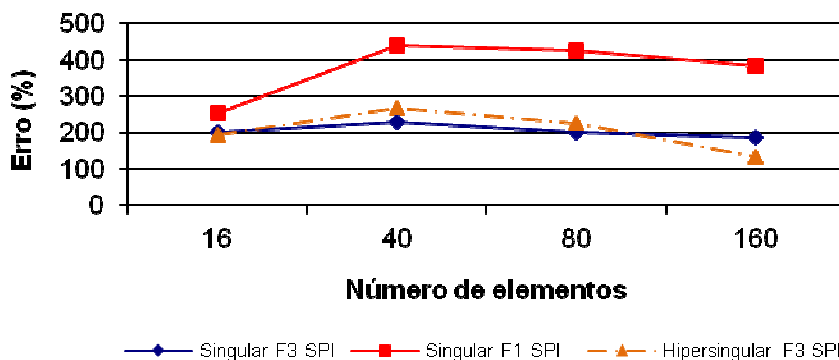


Figura 106: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

No gráfico a seguir ao se inserir pontos internos, constata-se um decréscimo acentuado do erro percentual para a FDRS com F3, a patamares mais aceitáveis. O erro continua alto (próximo da casa dos 50%), para a citada formulação e sua respectiva função de interpolação. A FDRS com F1 teve o pior desempenho com a malha de 16 elementos e foi alcançando resultados mais significativos com o refinamento da malha. A FDRH não repete os bons resultados obtidos sem pontos internos, esboçando um início que parecia promissor com a malha de 16 elementos e que não se concretizou nas demais malhas. A partir da malha de 40 elementos, a FDRH apresenta péssimos resultados, divergindo cada vez mais da solução analítica (erro percentual de aproximadamente 250%).

O mesmo cenário se repete para as malhas acrescidas de 16 pontos internos constitutivos, conforme exibido no gráfico da figura 108.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (9 pontos internos)

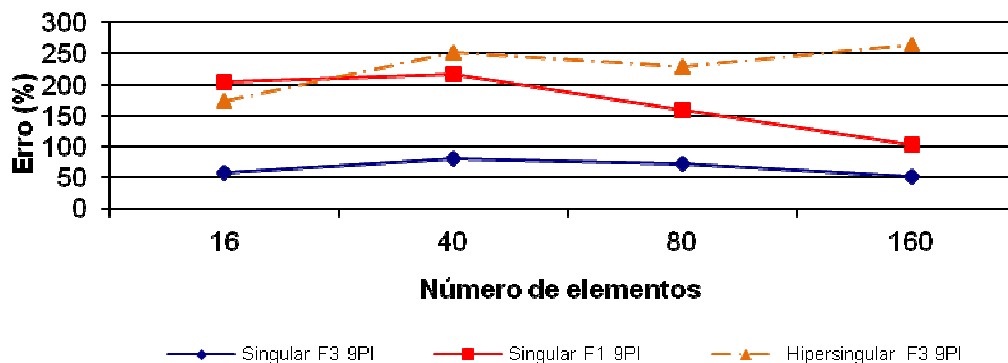


Figura 107: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

Comparação do erro percentual acumulado entre formulações e função de interpolação (16 pontos internos)

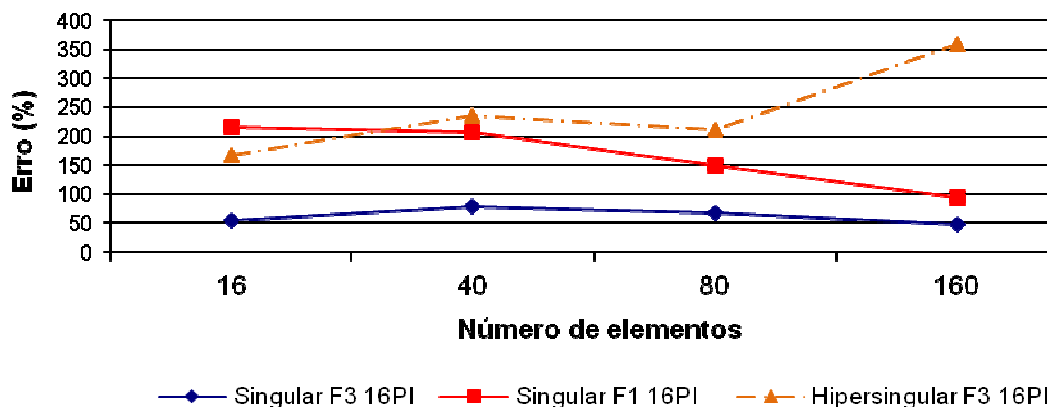


Figura 108: Erro percentual obtido para a aresta representativa, com o emprego da FDRS e FDRH, quando a velocidade de escoamento do fluido é $v=5$.

O que se vê na tabela 10, é o domínio da FDRS com a função de interpolação F3 sobre a F1, sendo a F3 sempre mais convergente com a solução analítica (mas a valores acima de 50% de erro percentual). O melhor resultado foi alcançado com o refinamento da malha para 160 elementos, conforme esperado. A FDRS com F3 apresentou 48,87% de erro percentual, praticamente 20% melhor que a FDRS com F1. Imaginava-se um melhor desempenho para a FDRH, mas que na prática não se cumpriu. Os dados referentes a FDRH mostram que esta formulação experimentou uma queda de desempenho ao serem inseridos pontos internos. Não se esperava um resultado tão ruim desta formulação para a condição tida com a melhor, dentro do que foi proposto nesta dissertação, ou seja, contorno discretizado em 160 elementos constantes e adoção de 16 pontos internos. Para esta velocidade igual 5, o erro percentual esteve acima da casa dos 350%, mostrando uma péssima performance da formulação. Todavia, mesmo sem a adição de pontos internos, os resultados foram melhores, porém pouco satisfatórios para a FDRH.

Resultados para o fluxo de calor para a aresta representativa				
Número elementos contorno	Número PI constitutivos	FDRS		FDRH
		Erro % $\Psi^j = r^3/9$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$	Erro % $\Psi^j = r^5/25$
16 elementos	0	252,49	201,29	191,73
	9	204,93	58,46	173,86
	16	215,20	53,73	166,33
40 elementos	0	438,71	227,60	266,46
	9	216,19	80,70	251,97
	16	207,69	79,68	236,21
80 elementos	0	423,84	198,73	225,90
	9	158,82	71,41	228,47
	16	150,16	68,65	211,38
160 elementos	0	383,89	185,71	134,44
	9	102,80	52,13	263,58
	16	94,12	48,87	359,90

Tabela 10 - Erros percentuais médios: Fluxo de calor

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES

VIII. 1 - SOBRE A FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE SINGULAR

A aplicação desta formulação aos dois problemas-teste descritos no Capítulo VII forneceu resultados bastante satisfatórios quando comparados com as respectivas soluções analíticas, mas deve-se ressaltar que o melhor comportamento da formulação foi a baixas velocidades. Para o problema 1 (equação VII.2 para $T = e^{vx} + e^{wy}$) os desvios médios ficaram na ordem de 0,3% para a velocidade igual a 2, malha de 160 elementos, adoção de 9 pontos internos constitutivos e função de interpolação F1. Já para a velocidade igual a 5, os erros médios ficaram na casa de 1,92%, sendo usada a malha de 160 elementos, 9 pontos internos e função de interpolação F1. Enfatiza-se que não foram excluídos os erros nos vértices, que são inerentes ao Método dos Elementos de Contorno quando são usados elementos constantes.

Para o exemplo 2, (equação VII.4 para $T = e^{v(x+y)}$) os desvios médios ficaram na ordem de 0,43% para a velocidade igual a 1, malha de 160 elementos, adoção de 16 pontos internos constitutivos e função de interpolação F1. Já para a velocidade igual a 5, os erros médios ficaram na casa de 48,87%, sendo usada a malha de 160 elementos, 16 pontos internos e função de interpolação F3. Enfatiza-se, novamente, que não foram excluídos os erros nos vértices, que são inerentes ao Método dos Elementos de Contorno quando são usados elementos constantes.

Os desvios percentuais atingem patamares muito elevados para o fluxo de calor em velocidades mais altas, sendo que as experiências anteriores mostraram menor precisão do método com esse aumento da velocidade do fluxo de calor.

Pode-se concluir desta forma, que a Formulação com Dupla Reciprocidade Singular é bastante satisfatória para simulação de problemas difusivos-advectivos para valores baixos de velocidade, ou de modo mais geral, para número de Peclet baixos.

VIII. 2 - SOBRE A FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE HIPERSINGULAR

Para a FDRH foi constatado um rendimento satisfatório no que tange ao comparativo entre a solução aproximada e a solução numérica. Algo que chama a atenção é a piora dos resultados quando são inseridos pontos internos constitutivos, que teoricamente deveriam melhorar a interpolação introduzida pela formulação com Dupla Reciprocidade. Como exemplo, toma-se o problema 1 (equação VII.2 para $T = e^{vx} + e^{wy}$) os desvios médios ficaram na ordem de 1,54% para a velocidade igual a 1, malha de 40 elementos, sem a adoção de pontos internos constitutivos e função de interpolação F3. Já para a velocidade igual a 5, os erros médios ficaram na casa de 17,74%, sendo usada a malha de 80 elementos, sem a adição de pontos internos e função de interpolação F3. Enfatiza-se que não foram excluídos os erros nos vértices, que são inerentes ao Método dos Elementos de Contorno quando são usados elementos constantes.

Outro fato curioso é a dispersão dos resultados com o refinamento máximo da malha, onde, como visto acima, os melhores resultados foram tomados com relação a malhas intermediárias (40 e 80 elementos respectivamente).

Para o exemplo 2, (equação VII. 4 para $T = e^{v(x+y)}$) os desvios médios ficaram na ordem de 2,58% para a velocidade igual a 1, malha de 16 elementos, adoção de 9 pontos internos constitutivos e função de interpolação F3. Já para a velocidade igual a 5, os erros médios ficaram na casa de 166,33%, sendo usada a malha de 16 elementos, 16 pontos internos e função de interpolação F3. Enfatiza-se, novamente, que não foram excluídos os erros nos vértices, que são inerentes ao Método dos Elementos de Contorno quando são usados elementos constantes.

Aqui, novamente, visualiza-se a dispersão dos resultados com o refinamento máximo da malha, onde, como visto acima, os melhores resultados foram tomados com relação a malhas bastante pobres, com apenas 16 elementos. Outro ponto em apreço é o baixo desempenho obtido com malhas refinadas ao máximo (no caso deste trabalho foram 160 elementos) e adoção de pontos internos. Mas faz-se a ressalva de que o melhor resultado obtido para $v=5$ foi extraído de uma malha pobre com 16 pontos internos, causando certo desconforto durante as análises.

A Formulação com Dupla Reciprocidade Singular também exibiu uma perda de eficiência quando a velocidade foi elevada, mas não tão pronunciado quanto o que se pode observar para a FDRH.

Assim como Peixoto ^[2], não se pode confirmar, no caso na FDRH, *a priori*, a afirmação recorrente na literatura de que a formulação Hipersingular se comporta melhor quando gradientes elevados da variável primal estão envolvidos. Novos estudos merecem ser realizados nesse sentido.

Cabe ressaltar, no entanto, que a FDRH o programa implementado em linguagem Fortran não contava com Dupla Precisão, podendo assim ter influenciado na obtenção de melhores resultados.

VIII. 3 - UMA BREVE COMPARAÇÃO ENTRE A FDRS E A FDRH

Nos problemas abordados, a FDRH não teve o mesmo nível de precisão que o alcançado pela FDRS, quando comparadas.

Quando gradientes maiores do potencial foram inseridos em conjunto com a adoção de pontos internos, a perda de desempenho da FDRH foi certamente mais elevada, o que nos leva a resultados mais favoráveis obtidos com a FDRS.

Ambos os exemplos possuem a particularidade da ocorrência de grandes erros nos vértices. A magnitude destes erros diminui, em alguns casos com o aumento da ordem da função radial interpolante (de F1 para F3), já para outros o ocorre o inverso. A inserção de pontos internos, também pode influenciar positiva ou negativamente, permitindo ou não que valores aceitáveis para o quesito erro nos vértices seja

melhorado. Para malhas bem dimensionadas, parece ser justamente o tipo de função interpolante o fator predominante para variação nesta magnitude, mas com esse incremento nas malhas, o tipo de formulação passa a ser o fator preponderante, onde os desvios para a FDRH são maiores.

VIII.4 - DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Assim como Peixoto ^[2], as simulações numéricas realizadas foram suficientes para validar a Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno aqui exposta. Entretanto, não permitiram que sugestões fossem comprovadas. Cita-se como exemplo a boa eficácia da formulação quando o potencial possui gradientes de ordem elevada. Para que esta hipótese seja realmente examinada, uma gama maior de problemas (outras equações de governo) deve ser abordada pela formulação.

Este trabalho, de certa forma, é uma continuação de Peixoto ^[2] que também testou as mesmas duas funções interpolantes para a FDRH (radial simples e cúbica), onde os resultados obtidos para sólidos (barras homogêneas, etc.) foram melhores do que os resultados obtidos para fluxo de calor, a velocidades constantes examinados neste trabalho acadêmico. Aqui se aplicou diretamente a função interpolante radial cúbica e não foram extraídos resultados tão significativos quanto os de Peixoto ^[2].

O tema da hipersingularidade, de maneira geral, excluindo os casos específicos de análises de trincas na mecânica da fratura, tem sido pouco explorado e, pelos resultados que vem sendo apresentados, merece ser abordado com maior profundidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Prado A. A., **Uma Formulação Hiper-singular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais**. *Dissertação de Mestrado*. PEC/COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 1991.
2. Peixoto R.G., **Formulação com Dupla Reciprocidade Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas de Potencial Escalar Bidimensionais**. *Dissertação de Mestrado*. PPGEM/Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil, 2009.
3. Mansur W. J., Fleury Jr. P. e. Azevedo J.P.S. **A Vector Approach to the Hyper-singular BEM Formulation for Laplace's Equation in 2D**. *Int. Journal of BEM Comm.* 8, 239-250, 1997.
4. INCROPERA, F.P. e WITT, D.P. de, **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**, LTC S.A, Rio de Janeiro, 1992, pág. 2 a 155.
5. BREBBIA, C.A. E J. DOMINGUEZ. **Boundary Elements: an Introductory Course**. Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill Book Company, Southampton, England, United Kingdom, Boston, MA. 1989 ISBN-13: 9780070074149 ISBN: 0070074143.
6. BREBBIA, C.A, J.C. TELLES e L.C. WROBEL, **Boundary Element Techniques**, Springer Verlag, Berlim. 1984.

Referências Bibliográficas

7. PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C.A. & WROBEL, L.C., **The Dual Reciprocity, Boundary Element Method**, Computational Mechanics Publications, London, 1992.
8. NARDINI, D.; BREBBIA, C.A. - **A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements** - Proceeding of the Fourth International Seminar - Boundary Element Methods in Engineering - Southampton, 1982.

BIBLIOGRAFIA

1. Brebbia, C.A, **The boundary element method for engineers**, Pentech Press, London, 1978.
2. KREITH, F., **Princípios da Transmissão de Calor**, Edgard Blücher, São Paulo, 1977.
3. HOLMAN, J. P., **Heat Transfer**, McGraw-Hill, New York, 1981
4. Telles J.C.F. e Prado A. A. **Hyper-singular Formulation for 2-D Potential Problems. Advanced Formulations in Boundary Element Method**. Chap. 6, Elsevier, London, 1993.
5. BARROWS, A.P., LOEFFLER, C.F., **Análise e Simulação da Transferência de Calor por Convecção em Escoamentos Potenciais através do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade**, Anais do IV SIMMEC, Uberlândia, 2000.
6. BARROWS, A.P., LOEFFLER, C.F., **Alguns Casos Especiais da Teoria de Campo Escalar resolvidos através do Método dos Elementos de Contorno**, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, 1999.

Bibliografia

7. MASSARO, C.A.M., LOEFFLER, C.F., BULCÃO, A., **O Método dos Elementos de Contorno aplicado a Problemas de Condução de Calor**, Anais do V Creem, Vitória, 1998.
8. MASSARO, C.A.M., LOEFFLER, C.F., BULCÃO, A., **Simulação Computacional de Escoamentos Potenciais através do Método dos Elementos de Contorno**, Anais do V Creem, Vitória, 1998.
9. MASSARO, C. A. M., LOEFFLER, C.F., **Boundary Element Formulation applied to solution of Convective Diffusional Heat Transfer Problems**, submetido ao XVI COBEM, Uberlândia, 2001.

APÊNDICE

APÊNDICE A - PROBLEMA CORRELATO E SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

No desenvolvimento das equações do Método dos Elementos de Contorno, a escolha da função de ponderação a ser aplicada na formulação integral inversa do problema de Laplace deve ser tal que elimine a integral de domínio remanescente. Desta forma, é conveniente definir $u^*(\mathbf{X})$ como sendo a solução de um problema de domínio infinito, regido pela equação de Poisson, onde a carga externa atua pontualmente em ξ , conforme descrito na Equação (A.1) e ilustrado na Figura A.1.

$$\nabla^2 u^*(\mathbf{X}) = -\Delta(\xi; \mathbf{X}) \quad (\text{A.1})$$

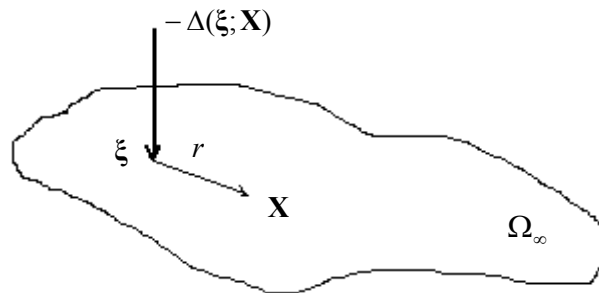


Figura A.1 - Problema correlato para equação de Laplace

O termo $[\Delta(\xi; \mathbf{X})]$ é a função Delta de Dirac, cuja propriedade principal é apresentada na Equação (A.2), válida para pontos ξ internos ao domínio de integração.

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{X}) \Delta(\xi; \mathbf{X}) d\Omega = f(\xi) \quad (\text{A.2})$$

Considerando domínios bidimensionais, a solução do problema (A.1), denominado *problema correlato*, é apresentada na Equação (A.3) e recebe o nome de *solução fundamental*.

$$u^*(\xi; \mathbf{X}) = \frac{-1}{2\pi} \ln(r) \quad (\text{A.3})$$

Nesta relação, r representa a distância euclidiana entre o ponto fonte ξ e os demais pontos do domínio, conforme destacado na Equação (A.4) e na Figura A.2.

$$r = \{[x_1(\mathbf{X}) - x_1(\xi)]^2 + [x_2(\mathbf{X}) - x_2(\xi)]^2\}^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

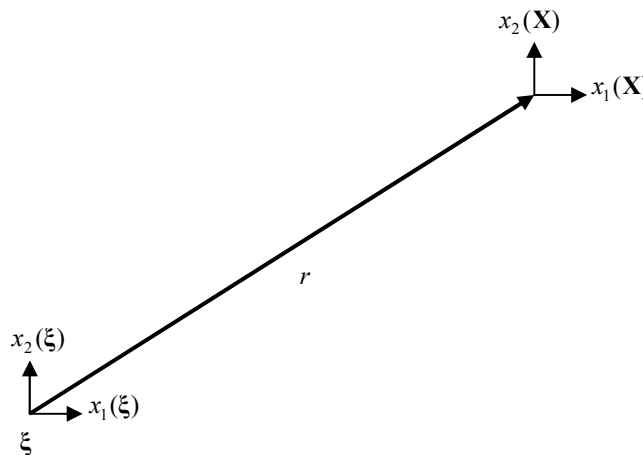


Figura A.2 - Distância entre o ponto fonte do problema correlato e um ponto qualquer do domínio

As Equações (A.5) a (A.8) destacam algumas derivadas direcionais importantes de r , enquanto que as Equações (A.9) a (A.11) apresentam derivadas da solução fundamental.

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(\mathbf{X})} = \frac{1}{2r} \{2[x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)]\} = \frac{x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)}{r} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} = \frac{1}{2r} \{-2[x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)]\} = \frac{x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})}{r} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial r}{\partial n(\mathbf{X})} = \frac{\partial r}{\partial x_i(\mathbf{X})} \frac{\partial x_i(\mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})} = \left[\frac{x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)}{r} \right] n_i(\mathbf{X}) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial r}{\partial n(\xi)} = \frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \frac{\partial x_i(\xi)}{\partial n(\xi)} = \left[\frac{x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})}{r} \right] n_i(\xi) \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} q^*(\xi; \mathbf{X}) &= \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})} = \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial x_i(\mathbf{X})} \frac{\partial x_i(\mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})} = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i(\mathbf{X})} \right) n_i(\mathbf{X}) = \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2} [x_i(\mathbf{X}) - x_i(\xi)] n_i(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \bar{q}^*(\xi; \mathbf{X}) &= \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} = \frac{\partial u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial x_i(\xi)} \frac{\partial x_i(\xi)}{\partial n(\xi)} = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \right) n_i(\xi) = \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2} [x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})] n_i(\xi) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
p^*(\xi; \mathbf{X}) &= \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\xi)} = \frac{\partial^2 u^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X}) \partial n(\xi)} = \frac{\partial q^*(\xi; \mathbf{X})}{\partial x_i(\xi)} \frac{\partial x_i(\xi)}{\partial n(\xi)} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i(\xi)} \left\{ \frac{x_i(\xi) n_i(\mathbf{X})}{2\pi r^2} - \frac{x_i(\mathbf{X}) n_i(\mathbf{X})}{2\pi r^2} \right\} \frac{\partial x_i(\xi)}{\partial n(\xi)} = \\
&= \left\{ \frac{-1}{\pi r^3} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \right) [x_j(\xi) - x_j(\mathbf{X})] n_j(\mathbf{X}) + \frac{n_i(\mathbf{X})}{2\pi r^2} \right\} n_i(\xi) = \\
&= \frac{-1}{\pi r^4} [x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})] [x_j(\xi) - x_j(\mathbf{X})] n_i(\xi) n_j(\mathbf{X}) + \frac{n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi)}{2\pi r^2} = \\
&= \frac{1}{2\pi r^4} \left\{ 2[x_i(\xi) - x_i(\mathbf{X})] [x_j(\mathbf{X}) - x_j(\xi)] n_i(\xi) n_j(\mathbf{X}) + r^2 n_i(\mathbf{X}) n_i(\xi) \right\}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

APÊNDICE B - INTEGRAIS AO LONGO DO CONTORNO AMPLIADO PARA FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR

B.1 Termo Oriundo do Laplaciano do Potencial

O desenvolvimento a seguir visa transformar as equações (III.36 e III.37), agrupadas e repetidas aqui no termo (B.1), numa expressão passível de ser tratada numericamente.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (\text{B.1})$$

Considerando apenas o núcleo da integral acima, tem-se a relação (B.2) apresentada a seguir, para um domínio bidimensional.

$$\begin{aligned} & [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) = \\ & [n_1(\mathbf{X})n_1(\xi) + n_2(\mathbf{X})n_2(\xi)] \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\mathbf{X}) + \frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\mathbf{X}) \right] = \\ & \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\xi) \right] [n_1(\mathbf{X})n_1(\mathbf{X})] + \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\xi) \right] [n_2(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})] + \\ & + \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_2(\xi) + \frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_1(\xi) \right] [n_1(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})] = \\ & \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\xi) \right] (\text{B.2a}) + \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\xi) \right] (\text{B.2b}) + \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_1(\xi)} n_2(\xi) + \frac{\partial u(\xi)}{\partial x_2(\xi)} n_1(\xi) \right] (\text{B.2c}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Apenas os termos (B.2a), (B.2b) e (B.2c) permanecem como argumentos da integral em (B.1). Desta forma, tem-se três integrais que podem ser resolvidas analiticamente como a seguir, após a substituição das Equações (B.3) e (B.4), obtidas da simples análise da Figura B.1.

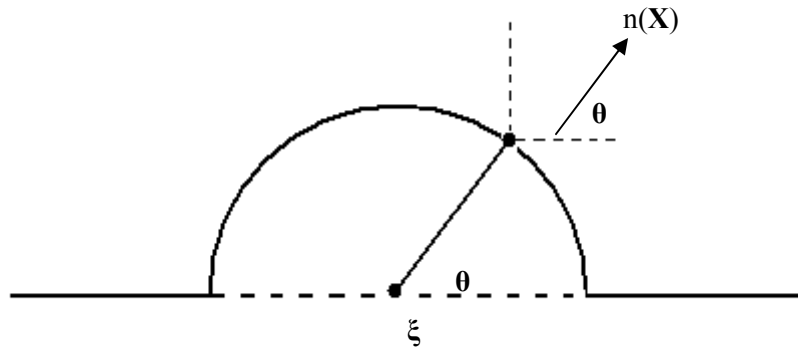


Figura B.1 - Setor circular de integração

$$n_1(\mathbf{X}) = \cos(\theta) \tag{B.3}$$

$$n_2(\mathbf{X}) = \text{sen}(\theta) \tag{B.4}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [n_1(\mathbf{X})n_1(\mathbf{X})]d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\cos(\theta)]^2 d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \tag{B.5}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [n_2(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})]d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\text{sen}(\theta)]^2 d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \tag{B.6}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [n_1(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})]d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\cos(\theta)\text{sen}(\theta)]d\theta = \left[\frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (\text{B.7})$$

Com o desenvolvimento apresentado em (B.2) e considerando as relações (B.5) a (B.7), o termo (B.1) assume a forma destacada em (B.8).

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_j(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] = \\ & \frac{1}{\pi} \left\{ q_1(\xi)n_1(\xi) \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + q_2(\xi)n_2(\xi) \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \right. \\ & \left. + [q_1(\xi)n_2(\xi) + q_2(\xi)n_1(\xi)] \left[\frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} = \\ & [q_1(\xi)n_1(\xi) + q_2(\xi)n_2(\xi)] \left[\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \right] + \quad (\text{B.8}) \\ & + q_1(\xi) \left[\frac{n_1(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_2(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \right] + \\ & + q_2(\xi) \left[-\frac{n_2(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_1(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \right] = \\ & s(\xi)q(\xi) + w_k(\xi)q_k(\xi) \end{aligned}$$

B.2 Termo Oriundo da Carga de Domínio

Aqui, a integral a ser trabalhada encontra-se na equação (V.18) e é destacada a seguir, em (B.9).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) d\theta \right] \quad (\text{B.9})$$

Comparando (B.9) com a integral (B.1), percebe-se que o desenvolvimento a ser dado aqui se trata de uma repetição do que foi realizado no item B.1 acima, com a simples substituição de $\Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)$ por $u(\xi)$. Por coerência, o procedimento é detalhado a seguir.

Desta forma, considerando agora, apenas o núcleo da integral (B.9), tem-se a relação (B.10) apresentada a seguir, para um domínio bidimensional.

$$\begin{aligned} & [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_k(\mathbf{X}) = \\ & [n_1(\mathbf{X})n_1(\xi) + n_2(\mathbf{X})n_2(\xi)] \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\mathbf{X}) + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\mathbf{X}) \right] = \\ & \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\xi) \right] [n_1(\mathbf{X})n_1(\mathbf{X})] + \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\xi) \right] [n_2(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})] + \\ & + \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_2(\xi) + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_1(\xi) \right] [n_1(\mathbf{X})n_2(\mathbf{X})] = \quad (\text{B.10}) \\ & \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_1(\xi) \right] (\text{B.10a}) + \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_2(\xi) \right] (\text{B.10b}) + \\ & + \left[\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_1(\xi)} n_2(\xi) + \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_2(\xi)} n_1(\xi) \right] (\text{B.10c}) \end{aligned}$$

Novamente, apenas os termos (B.10a), (B.10b) e (B.10c) permanecem como argumentos da integral em (B.9). Assim, as três integrais geradas, são resolvidas exatamente como em (B.5), (B.6) e (B.7).

A substituição desses resultados em (B.9) leva à Equação (B.11), pronta para ser tratada numericamente.

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta_\varepsilon} [n_i(\mathbf{X})n_i(\xi)] \left(\frac{\partial \Psi^j(\mathbf{X}^j; \xi)}{\partial x_k(\xi)} \right) n_j(\mathbf{X}) d\theta \right] = \\
& \frac{1}{\pi} \left\{ \eta_1^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_1(\xi) \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \eta_2^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_2(\xi) \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \right. \\
& \left. + [\eta_1^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_2(\xi) + \eta_2^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_1(\xi)] \left[\frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} = \\
& [\eta_1^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_1(\xi) + \eta_2^j(\mathbf{X}^j; \xi) n_2(\xi)] \left[\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \right] + \tag{B.11} \\
& + \eta_1^j(\mathbf{X}^j; \xi) \left[\frac{n_1(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_2(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \right] + \\
& + \eta_2^j(\mathbf{X}^j; \xi) \left[-\frac{n_2(\xi)}{4\pi} [\text{sen}(2\theta_2) - \text{sen}(2\theta_1)] + \frac{n_1(\xi)}{2\pi} [\text{sen}^2(\theta_2) - \text{sen}^2(\theta_1)] \right] = \\
& s(\xi) \eta^j(\mathbf{X}^j; \xi) + w_k(\xi) \eta_k^j(\mathbf{X}^j; \xi)
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – OBTENÇÃO DO ERRO PERCENTUAL**EQUAÇÃO PARA CÁLCULO DO ERRO PERCENTUAL ACUMULADO**

O erro percentual acumulado para todas as malhas exploradas nesta dissertação de mestrado seguem a seguinte expressão:

$$\mathcal{E}_{\text{erro}} = \frac{\textit{Solução numérica} - \textit{Solução analítica}}{\textit{Solução analítica}} \quad (\text{C.1})$$

**APÊNDICE D – OBTENÇÃO DAS FUNÇÕES PRIMITIVAS RELATIVAS ÀS
FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO “r” E “r³”.**

D.1 – Cálculo da função primitiva $\frac{r^3}{9}$ à partir da função de interpolação “r”.

$F^j(X^j; X) = \Psi_{,ii}$ mas, temos que:

$$\Psi_{,ii} = r$$

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} = r$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Psi}{dr} \right] = r$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{dr}{dr} \frac{d\Psi}{dr} + r \frac{d^2\Psi}{dr^2} \right] = r$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} + r \frac{1}{r} \frac{d^2\Psi}{dr^2} = r$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d\Psi}{dr} + r \frac{d^2\Psi}{dr^2} \right] = r$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{manipulando o termo } \frac{1}{r}, \text{ que passará para o lado} \\ \text{direito da igualdade multiplicando na forma} \\ \text{de } r, \text{ temos:} \end{array} \right)$$

(D.1)

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Psi}{dr} \right] = r^2$$

$$d \left[r \frac{d\Psi}{dr} \right] = r^2 dr$$

$$\int d \left[r \frac{d\Psi}{dr} \right] = \int r^2 dr$$

$$r \frac{d\Psi}{dr} = \frac{r^3}{3} dr + c$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Dividindo tudo} \\ \text{por } \frac{1}{r} \text{ teremos:} \end{array} \right)$$

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{r^2}{3} + \frac{c}{r}$$

$$\int \frac{d\Psi}{dr} = \int \frac{r^2}{3} + c \ln r + d$$

$$\Psi = \frac{r^3}{9}$$

Encontrando a derivada da primitiva: $\frac{d\Psi}{dn}$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{d\Psi}{dr} \frac{dr}{dn}$$

Mas, sabendo que: $\frac{d\Psi}{dr} = \frac{r^2}{3} + \frac{c}{r}$

E que :

$$\frac{dr}{dn} = \frac{dr}{dx_1} \frac{dx_1}{dn} + \frac{dr}{dx_2} \frac{dx_2}{dn}$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{r^2}{3} [r_{,1} + r_{,2}]$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{r^2}{3} \left[\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} \right]$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{r^2}{3} \frac{1}{r} [r_1 + r_2]$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{r}{3}$$

D.2 – Cálculo da função primitiva $\frac{r^5}{25}$ à partir da função de interpolação r^3 .

$F^j(X^j; X) = \Psi_{,ii}$ mas, temos que:

$$\Psi_{,ii} = r^3$$

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} = r^3$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Psi}{dr} \right] = r^3$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{dr}{dr} \frac{d\Psi}{dr} + r \frac{d^2\Psi}{dr^2} \right] = r^3 \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} + r \frac{d^2\Psi}{dr^2} = r^3$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d\Psi}{dr} + r \frac{d^2\Psi}{dr^2} \right] = r^3 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{manipulando o termo } \frac{1}{r}, \text{ que passará para o lado} \\ \text{direito da igualdade multiplicando na forma} \\ \text{de } r, \text{ temos:} \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Psi}{dr} \right] = r^4$$

$$d \left[r \frac{d\Psi}{dr} \right] = r^4 dr$$

$$\int d \left[r \frac{d\Psi}{dr} \right] = \int r^4 dr$$

$$r \frac{d\Psi}{dr} = \frac{r^5}{5} + c \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Dividindo tudo} \\ \text{por } \frac{1}{r} \text{ teremos:} \end{array} \right)$$

$$\frac{d\Psi}{dr} = \left[\frac{r^5}{5} + c \right] \frac{1}{r}$$

$$d\Psi = \left[\frac{r^5}{5r} + \frac{c}{r} \right] dr$$

$$d\Psi = \left[\frac{r^4}{5} + \frac{c}{r} \right] dr$$

$$\int d\Psi = \int \left[\frac{r^4}{5} + \frac{c}{r} \right] dr$$

$$\Psi = \frac{r^5}{25} + c \ln r + d$$

$$\Psi = \frac{r^5}{25}$$

Encontrando a derivada da primitiva: $\frac{d\Psi}{dn}$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{d\Psi}{dr} \frac{dr}{dn}$$

(D.2)

Mas, sabendo que: $\frac{d\Psi}{dr} = \frac{r^4}{5} + \frac{c}{r}$

E que :

$$\frac{dr}{dn} = \frac{dr}{dx_1} \frac{dx_1}{dn} + \frac{dr}{dx_2} \frac{dx_2}{dn}$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{r^4}{5} [r_{,1} + r_{,2}]$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{r^4}{5} \left[\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} \right]$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{r^4}{5} \frac{1}{r} [r_1 + r_2]$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{r^3}{5}$$