UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO CENTRO TECNOLÓGICO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

LEANDRO VALOTO

APLICAÇÃO DO ESQUEMA RECURSIVO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

VITÓRIA - ES 2011

LEANDRO VALOTO

APLICAÇÃO DO ESQUEMA RECURSIVO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduaçãoem Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler

VITÓRIA - ES 2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP) (Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Valoto, Leandro, 1983-

V199a Aplicação do esquema recursivo do método dos elementos de contorno em problemas de elasticidade / Leandro Valoto. – 2011.

123 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Resistência de materiais. 3. Elasticidade. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

LEANDRO VALOTO

APLICAÇÃO DO ESQUEMA RECURSIVO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler- Orientador Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. José Antônio Fontes Santiago Universidade Federal do Rio de Janeiro

Eng. Dr. André Bulcão Centro de Pesquisas da PETROBRAS

Vitória (ES), 09 de dezembro de 2011.

AGRADECIMENTOS

A Deus por todas as bênçãos e conquistas da minha vida.

Ao Professor Dr. Carlos Loeffler pela sabedoria, orientação, tranquilidade, presença e amizade.

A minha família por todo apoio e paciência.

Aos amigos do curso de Mestrado pelo apoio e trabalho em equipe, e em especial ao amigo José Guilherme Pancieri.

À Universidade Federal do Espírito Santo – UFES e aos professores doPrograma de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM pela oportunidade de cursar o Mestrado.

Aos amigos da Concremat e VALE pelo apoio e compreensão.

A secretária do PPGEM, Zezé, pelo constante apoio e dedicação e demais colaboradores do Programa e Departamento de Engenharia Mecânica.

Resumo

Este trabalho apresenta o emprego recursivo da equação integral do Método dos Elementos de Contorno (MEC) em problemas de elasticidade linear com a finalidade de melhorar a exatidão dos seus resultados numéricos. Geralmente, os valores em pontos internos do domínio com o MEC são determinados com a aplicação recursiva da equação integral depois que todos os valores nodais no contorno são calculados. Em problemas de potencial escalar, demostra-se que a mesma ideia pode ser usada para melhorar a exatidão dos resultados no contorno. Ao invés dos novos pontos fonte serem localizados dentro do domínio, eles são posicionados sobre o contorno, com coordenadas diferentes dos pontos nodais. Assim, os valores da variável básica e de suas derivadas espaciais no contorno podem ser recalculados baseados nos valores do contornocalculados previamente. O resultado deste procedimento numérico é baseado na equivalência matemática entre o uso recursivo da equação integral de contorno e a nova aplicação da sentença de resíduos ponderados associada à equação de governo. Neste trabalho, o procedimento é aplicado a solução de problemas expressos pela Equação de Navier. Comparando-se os resultados numéricos dos erros percentuais cometidos no cálculo do deslocamento e sua derivada em exemplos da elasticidadeem que a solução analítica é conhecida e também ao MEC com integração linear, avalia-se o desempenho do procedimento proposto.

Abstract

This work presents the use of recursive integral equation of the Boundary Element Method (BEM) in problems of linear elasticity in order to improve the accuracy of their numerical results. Generally, the values at internal points of the domain with BEM are determined by applying the recursive integral equation after all the nodal values on the boundary are calculated. In scalar potential problems, demonstrates that the same idea can be used to improve the accuracy of the results on the boundary. Instead of the locating new source points within the domain, they are positioned on the boundary with different coordinates of nodal points. Thus, the values of the basic variable and its spatial derivatives at the boundary can be recalculated based on the previously calculated values of the contour. The result of this numerical procedure is based on the mathematical equivalence between the recursive use of boundary integral equation and the new application of the sentence of weighted residuals associated with the equation of government. In this paper, the procedure is applied to solve problems expressed by the Navier equation. Comparing the numerical results of the percentage errors made in calculating the potential and its derivative with examples of elasticity inwich the analytical solution is known and also the seamless integration with BEM, we evaluate the performance of the proposed procedure.

LISTA DE SÍMBOLOS

| MDF | Método das Diferenças Finitas |
|--------------------|---|
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| MEC | Método dos Elementos deContorno |
| σij | tensor de tensões |
| bj | vetor de forças de volume |
| <i>p</i> i | vetor de forças de superfície |
| Ŋj | cossenos diretores do vetor normal à superfície |
| Dijkl | tensor de quarta ordem de constantes elásticas |
| Eij | tensor de deformações |
| Ui,j | gradiente deslocamento |
| G | módulo de elasticidade transversal |
| ν | coeficiente de Poisson |
| δ_{ij} | delta de Kronecker |
| λ | constantes de Lamé |
| μ | constantes de Lamé |
| Uj [*] | Solução fundamental |
| $\Delta(\zeta, X)$ | função Delta de Dirac |
| p_i^* | forças de superfície associadas à solução fundamental |
| ζ | ponto fonte |

- π constante matemática
- *r* distância entre o ponto fonte e o pontocalculado
- N^e vetor das funções de interpolação
- \mathbf{u}_i^{e} vetor deslocamento
- $\mathbf{p_i}^e$ força do ponto nodal X
- η coordenada adimensional
- $\Gamma(\eta)$ coordenada natural
- φ_i função interpolação
- J^e jacobiano da transformação
- L comprimento do sistema
- *M^e* matriz das funções de interpolação
- w_i peso de Gauss ou fator peso
- NPI pontos de integração de Gauss
- **C** matriz dos coeficientes
- h, H matriz característica do MEC
- g, G matriz característica do MEC
- I matriz identidade
- Ra raio interno do tubo
- Rb raio externo do tubo
- $\sigma_{\theta\theta}$ tensão Angular

| σ _{rr} | tensão radial |
|-----------------|----------------------------------|
| Ur | deslocamento radial |
| М | momento fletor |
| σ _{xx} | tensão na direção xx |
| I | momento linear de inércia |
| Uy | deslocamento na direção vertical |
| τ _{xy} | tensão de cisalhamento |

LISTA DE FIGURAS

| Figura 1.1 - Domínio bidimensional discretizado em elementos finitos2 |
|--|
| Figura 1.2 - Domínio bidimensional discretizado em elementos de contorno3 |
| Figura 3.1 - (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário na direção x1), (b) componentes de força de superfície da solução fundamental (carregamento unitário na direção x2) |
| Figura 3.2 - Integração não singular: ponto fonte ξ externo ao elemento integrado32 |
| Figura 3.3 - Sistema de coordenadas adimensional33 |
| Figura 3.4 – Posicionamento do ponto fonte nos nós geométricos |
| Figura 3.5 - Função logarítmo natural de r35 |
| Figura 3.6 - Comportamento das Funções Interpolação |
| Figura 3.7 –Varedura da Integração39 |
| Figura 3.8 - Composição do vetor <i>n</i> 43 |
| Figura 3.9 – Comportamento das funções de interpolação lineares45 |
| Figura 3.10 - Geometria do Elemento47 |
| Figura 3.11 - Geometria retilínea - elemento diferencial47 |
| Figura 3.12 - Ponto do Contorno53 |
| Figura 3.13 - Contorno não suave54 |
| Figura 4.1 - Domínio quadrado atravessado por um fluxo de calor condutivo unidimensional |
| Figura 4.2 - Localização dos novos pontos fonte62 |
| Figura 4.3 – Comportamento das funções de interpolação63 |
| Figura 4.4 - Composição da Função ϕ_i 66 |
| Figura 4.5 – Composição do produto das funções69 |
| Figura 4.6 – Composição das funções $\frac{1}{r}$ 69 |
| Figura 5.1 - Tubo submetido à pressão interna73 |

| Figura 5.2 - Discretização simétrica do problema74 |
|---|
| Figura 5.3 - Tubo discretizado em 20 pontos nodais (16 + 4 duplos) e 3 pontos internos |
| Figura 5.4 - Tubo discretizado em 36 pontos nodais (32 + 4 duplos) e 7 pontos internos |
| Figura 5.5 - Tubo discretizado em 52 pontos nodais (48 + 4 duplos) e 9 pontos internos |
| Figura 5.6 - Tubo discretizado em 72 pontos nodais (68 + 4 duplos) e 15 pontos internos |
| Figura 5.7 -Gráfico de convergência do erro médio da tensão radial78 |
| Figura 5.8 - Gráfico de convergência do erro médio da tensão angular79 |
| Figura 5.9 - Gráfico de convergência do erro médio da deslocamento radial81 |
| Figura 5.10 - Viga em Balanço, geometria do problema |
| Figura 5.11 - Viga discretizada em 24 pontos nodais (20 + 4 duplos) e 16 pontos internos |
| Figura 5.12 - Viga discretizada em 44 pontos nodais (40 + 4 duplos) e 81 pontos internos |
| Figura 5.13 - Viga discretizada em 84 pontos nodais (80 + 4 duplos) e 361 pontos internos |
| Figura 5.14 - Viga discretizada em 184 pontos nodais (180 + 4 duplos) e 361 pontos internos |
| Figura 5.15 - Gráfico de convergência do erro médio da tensão normal na direção xx |
| Figura 5.16 - Gráfico de convergência do erro médio do deslocamento na direção y |
| Figura 5.17 - Barra em balanço submetida à flexão pura91 |
| Figura 5.18 - Barra discretizada em 20 pontos nodais (16 + 4 duplos) e 9 pontos internos |
| Figura 5.19 - Barra discretizada em 32 pontos nodais (28 + 4 duplos) e 54 pontos internos |
| Figura 5.20 - Barra discretizada em 44 pontos nodais (40 + 4 duplos) e 85 pontos internos |

| Figura 5.21 - Barra discretizada em 84 pontos nodais (80 + 4 duplos) e 361 pontos internos |
|--|
| Figura 5.22 - Gráfico de convergência do erro médio da tensão normal95 |
| Figura 5.23 - Gráfico de convergência do erro médio do deslocamento vertical96 |

LISTA DE TABELAS

| Tabela 4.1 - Temperaturas nos pontos nodais calculadas diretamente | .59 |
|--|-----|
| Tabela 4.2 - Fluxos normais nos pontos nodais calculados diretamente | .60 |
| Tabela 4.3 - Temperaturas calculadas pelo uso recursivo do MRP | .60 |
| Tabela 4.4 - Fluxos na direção horizontal calculados pelo uso recursivo do MRP | .60 |
| Tabela 5.1 - Erro Médio da Tensão Radial | .78 |
| Tabela 5.2 - Erro médio da tensão angular | .79 |
| Tabela 5.3 – Erro médio do deslocamento radial | .80 |
| Tabela 5.6 - Erro médio da tensão normal na direção <i>xx</i> | .86 |
| Tabela 5.7 – Erro médio do deslocamento na direção vertical | .88 |
| Tabela 5.4 - Erro médio da tensão normal | .95 |
| Tabela 5.5 - Erro médio do deslocamento vertical | .96 |

SUMÁRIO

| 1 | INT | rrodução1 |
|---|-----|---|
| | 1.1 | Comentários preliminares1 |
| | 1.2 | Motivação3 |
| | 1.3 | Objetivo4 |
| | 1.4 | Metodologia5 |
| | 1.5 | Estrutura do trabalho6 |
| 2 | TE | ORIA DA ELASTICIDADE8 |
| | 2.1 | Comentários preliminares8 |
| | 2.2 | Equações básicas da Teoria da Elasticidade8 |
| 3 | 0 | MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO12 |
| | 3.1 | Introdução12 |
| | 3.2 | Formulação do MEC na elasticidade linear13 |
| | 3.3 | Cálculo das tensões e deslocamentos para os pontos do contorno22 |
| | 3.4 | Cálculo das tensões e dos deslocamentos para os pontos internos25 |
| | 3.5 | Procedimento numérico geral27 |
| | 3.5 | .1 Aproximação do campo de variáveis28 |
| | 3.5 | .2 Integrações não singulares31 |
| | 3.5 | .3 Integrações singulares34 |
| | 3.5 | .4 Aproximação da geometria do elemento46 |
| | 3.5 | .5 Montagem do sistema matricial49 |
| | 3.6 | Determinação do termo $C_{ij}(\zeta)$ |
| 4 | PR | OCEDIMENTO RECURSIVO |
| | 4.1 | Comentários preliminares57 |
| | 4.2 | Aplicação do Procedimento Recursivo em um Problema Escalar |

| 4.3 | Integrais Singulares no Procedimento Recursivo em elasticidade | 61 |
|--------------------------------------|--|----|
| 5 SI | IMULAÇÕES NUMÉRICAS | 71 |
| 5.1 | Comentários preliminares | 71 |
| 5.2 | Tubo de parede espessa submetido a pressão interna | 73 |
| 5.3 | Viga engastada com carga na extremidade | 81 |
| 5.4 | Barra em balanço submetida à flexão pura | 90 |
| 6 C(| ONCLUSÕES | 97 |
| BIBLIC | DGRAFIA | 99 |
| Apêndice A – Campos Irrotacionais102 | | |

1 INTRODUÇÃO

1.1 Comentáriospreliminares

A importância das técnicas de solução numérica de problemas associados à elasticidade proporcionou a engenharia de projeto maior confiabilidade, rapidez e economia no que tange ao esforço alocado para a prática do dimensionamento, fabricação e aplicação do objeto em consideração, seja uma estrutura, uma máquina ou um equipamento industrial qualquer.

A dificuldade em encontrar soluções analíticas mais consistentes para problemas comuns na engenharia, ou seja, em termos de modelagem matemática, soluções das equações diferenciais que governam os problemas se devem à configuração geométrica complexa do meio, às condições de contorno e às condições iniciais impostas. Este fato obriga a que se recorramàs diversas técnicas numéricas deresolução de equações diferenciais parciais, tais como o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos deContorno (MEC).

O Método das Diferenças Finitas é o método mais antigo e com ideia mais simples. A técnica aproxima os operadores diferenciais nas equações doproblema, utilizando expansões locais para as variáveis, na maioria dos casos, as séries de Taylortruncadas. Uma série de melhorias tem sido empreendida na ideia original do MDF com bastante êxito, sobretudo na área de Termofluido ciência, de modo que atualmente existe uma classe de métodos conhecidos como Método dos Volumes Finitos de inegável alcance e precisão, Maliska [2004].

O Método dos Elementos Finitos é o método numérico mais utilizado na engenharia dedimensionamento. É uma técnica numérica baseadanos princípios variacionais, ou maisgenericamente, em expressões de resíduos ponderados, Reddy, [1993]. Consiste na divisão do volumeou domínio do sólido em um número finito de regiões chamadas elementos finitos,interconectados através de um número finito de pontos nodais chamados nós (Figura 1.1).Na maioria das vezes, o MEF é eficiente na análise de problemas com geometriascomplexas e com diferentes características dos materiais, apesar das dificuldades namodelagem de problemas envolvendo domínios semi-infinitos ou infinitos.



Figura 1.1 - Domínio bidimensional discretizado em elementos finitos

O Método dos Elementos de Contorno destaca-se dos demais métodos computacionais por ser uma técnica de contorno e não de domínio como as demais. Essa técnica é possível, porque, na formulação do método, o modelo formulado por

equações diferenciais parciais, que descrevem o problema físico num domínio espacial e temporal, é convertido em equações integrais envolvendo somente valores de contorno ou condições iniciais, Brebbia [1978]. Desta forma, para aplicação computacional em problemas composto por variáveis espaciais, o processo de discretização só se faz necessário no contorno. Essa característica peculiar do MEC é uma de suas grandes vantagens, pois ao discretizar apenas o contorno, haverá uma menor entrada de dados e embora haja redução no volume dos dados as operações matemáticas, geralmente, envolvem integrações singulares, fatores estes que, dependendo da extensão do problema, reduzem o esforço computacional.



Figura 1.2 - Domínio bidimensional discretizado em elementos de contorno

1.2 Motivação

A busca de soluçõesde problemas de engenharia com maior exatidão e menor esforço humano, em conformidadecom os avanços na ampliação da modelagem matemática e aumento da capacidade de armazenamento de dados computacionais, permitiu que algumas técnicas numéricas tradicionais fossem objeto de adaptações particulares para conseguir um melhor desempenho. Após os procedimentos tais como a relocação de pontos de discretização, refinamento de malhas e o uso de funções de forma, alguns métodos numéricos têmintroduzido um esquema iterativo na solução para melhorar sua exatidão numérica, como é o caso do Método dos Volumes Finitos, uma técnica originária do MDF, com adaptações consistentes para um melhor desempenho em termos de precisão.

Com o Método de Elementos de Contorno isto também acontece e várias formulações alternativas têm sido propostas, no sentido de aprimorar a precisão, ampliar a versatilidade e torná-lo computacionalmente mais eficiente.

Seguindo essa tendência, o uso recursivo da equação integral de contorno é apresentado aqui como um recurso auxiliar para melhorar o desempenho do MECem aplicações de elasticidade linear. Não é uma técnica iterativa, mas um procedimento simples baseado em umesquema comum para calcular valores internos com o MEC, onde a equação integral de contorno é usada duas vezes.

1.3 Objetivo

O objetivo dadissertação é validar a eficiência do procedimento recursivo, já testado em problemas de potencial escalar, Loeffler, Lovatte e Barroncas [2010], também paraproblemasda elasticidadelinear através da comparação de problemas com solução analítica conhecida. São encontrados os valores nodais das incógnitas, através da tática tradicional de solução do MEC, masesses valores são reintroduzidos na equação integral original, considerando novos pontos fonte, pontos esses localizados novamente no contorno.

1.4 Metodologia

Segundo Loeffler e Wrobel [2008], o uso recursivo da sentença integral inversa do Método dos Elementos de Contorno consiste em aplicar o mesmo procedimento usado para determinação de valores em pontos no interior do domínio para recalcular os valores de contorno, considerando que o uso reiterado desta equação equivale a uma nova minimização dos resíduos numéricos do método.

A técnica foi aplicada em problemas governados pela Equação de Laplace e foi bem sucedida. Foi motivada pela observação que os resultados referentes aos pontos internos apresentavam melhor precisão do que os valores nos pontos nodais de contorno.

A razão para esse comportamento é explicada pela equivalência entre o procedimento recursivo e a aplicação de uma nova sentença do método dos resíduos ponderados, minimizando os erros cometidos anteriormente, Loeffler *et a l*[2010]. Isto porque o que se faz matematicamente com o MEC no cálculo de valores em pontos internos é reutilizar a equação integral, ou seja, aplicar novamente uma sentença de resíduos ponderados em que os valores nodais estão disponíveis e os valores dos pontos fonte são minimizados.

Assim sendo, aqui os resultados numéricos são obtidos nas simulações de problemaslineares da mecânica dos sólidos, dos quais se dispõem de soluções analíticas para comparação de desempenho.

É comparada a qualidade dos resultados gerados com o uso recursivo da equação integral inversa e os resultados obtidos tradicionalmente, com o uso direto desta mesma equação.

Por analogia com o procedimento feito nos casos escalares, avalia-se também a qualidade dos resultados nos pontos internos, além dos resultados em pontos de contorno.

Foram usados elementos lineares. Em termos numéricos, para efetuar as integrações regulares em todos os elementos usa-se a quadratura de Gauss (20 pontos), chegando-se ao sistema de equações algébricas do MEC, que ao ser resolvido, fornece as incógnitas (vetor deslocamentoevetortensão) que faltavam para o completo conhecimento das variáveis no contorno.

Os novos pontos fonte de contorno, considerando que os pontos nodais originais se situam nas extremidades, foram posicionados exatamente no meio de cada elemento.

Foram obtidos apenas resultados recursivos de deslocamento no contorno, uma vez que por serem de cálculo mais simples, já propiciam a oportunidade de verificar se o procedimento recursivo aplica-se efetivamente com êxito nos casos elásticos, como foi junto à Equação de Laplace, que governa problemas escalares lineares estacionários.

1.5 Estrutura do trabalho

Além do capítulo introdutório, a dissertação é composta de mais cinco capítulos, totalizando, portanto, seis capítulos.

O Capítulo 1 apresenta o problema de interesse com várias considerações pertinentes. Dispõe comentários acerca da importância do estudo do Método dos Elementos de Contorno. Em seguida está a motivação, os objetivos, a metodologia e a estruturação da do trabalho.

O Capítulo 2 apresenta uma breve abordagem sobre a Teoria da Elasticidade, apresentando os principais conceitos e equações de governo, ambos em modelo de notação indicial.

O Capítulo 3 detalha sobre a fundamentação do MEC e sua formulação na elasticidade linear. São demonstradas, também, as equações para cálculo de deslocamentos e tensões para pontos do contorno e internos ao domínio de estudo. É discutido o método e o procedimento de integração numérica e conclui-se o Capítulo com a demonstração da determinação do coeficiente relacionado à posição do ponto fonte no contorno.

No Capítulo 4 detalha o esquema recursivo. Inicialmente é apresentado um problema de potencial escalar, validando a eficiência do método para esse tipo de problema. Posteriormente são apresentadas as equações que regem o método adaptadas para problemas de elasticidade.

No Capítulo 5 mostram-se as simulações numéricas com três problemas da mecânica dos sólidos e se discute sobre os resultados obtidos. O primeiro problema é um tubo de parede espessa submetidaà pressão interna, o segundo problema é uma barra em balanço submetidaà flexão pura e o último problema é uma viga engastada com carga na extremidade.

O Capítulo 6, por fim, apresenta análise final do trabalho destacando as conclusões e proposições para trabalhos futuros.

2 TEORIA DA ELASTICIDADE

2.1 Comentáriospreliminares

Segundo Timoshenko [1980],todo material sólido se deforma quando alguma solicitação lhe é exercida, mantendo-se o equilíbrio estático. Microscopicamente pode-se dizer que os cristais ou as moléculas que compõem um dado corpo, mesmo distando de valores ínfimos uns dos outras, ainda possuem espaço para se deslocar, alterando ou não o volume em seu entorno. No caso de materiais homogêneos e isotrópicos, existem, também, relações lineares relativamente simples entre as deformações e os esforços aplicados, da mesma maneira que um alongamento de uma mola é proporcional à força que nela é exercida. Havendo linearidade, as deformações sãoreversíveis: tão logo a mola é relaxada, a mesma retornará ao seu comprimento inicial. Estas leis de proporcionalidade constituem o que é chamado de Elasticidade Linear. Conhecer o comportamento do material é importante para definir seu correto uso e também para avaliar a interação com os outros componentes do conjunto.

Assim, a Teoria da Elasticidade é a disciplina da Mecânica que se ocupa em formular expressõesmatemáticas rigorosas, que descrevem as relações entre tensões, deformações e deslocamentos, em corpos sólidos elásticos. Os próximos itens tratam em descrever, resumidamente, os itens referidos.

2.2 Equaçõesbásicas da Teoria da Elasticidade

De acordo com Boresie Chong [1987], aequação descrita abaixo representa oequilíbrio estático no interior de umcorpo:

$$\sigma_{ij} + b_j = 0 \tag{2.1}$$

onde σ_{ij} representa o tensor de tensões e b_j o vetor de forças de volume.

A condição de equilíbrio no contorno de um corpo é dada por:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \tag{2.2}$$

onde p_i representa as componentes do vetor de força de superfície e n_j são os cossenos diretores do vetor normal à superfície, apontando para fora do corpo.

A relação constitutiva entre tensão e deformação é dada em 2.03, onde Dijkl é o tensor de quarta ordem de constantes elásticas:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{ij} \tag{2.3}$$

Na elasticidade linear, *Eij* é o tensor de Green para pequenas deformações, apresentado em 2.04:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,1} \right)$$
(2.4)

sendo u_i as componentes do vetor de deslocamento.

Realizando considerações sobre a constituição do material, considerando-o elástico linear isotrópico,no qual não existem mudanças detemperatura; simetria entre os tensores σ_{ij} e ε_{ij} ; e por fim invariância das propriedades do material com o sentido das solicitações, D_{ijkl} se reduz de 81 constantes elásticas para 2. Desse modo, tem-se:

$$D_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G\left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}\right)$$
(2.5)

onde*G* é o módulo de elasticidade transversal, v o coeficiente de Poisson, δ_{ij} é o delta de Kronecker. Do mesmo modo, a relação entre tensão e deformação geral dada em (2.03), também conhecida como Lei de Hooke, simplifica-se na forma dada por:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1 - 2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$
(2.6)

Substituindo a equação (2.04) na equação (2.06), as tensões são obtidas emfunção das derivadas de deslocamentos. Esta equação pode, então, ser substituída em(2.01) e (2.02) para fornecer as equações de equilíbrio, também em termos dedeslocamentos, que são as chamadas Equações de Equilíbrio de Navier:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1 - 2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0$$
 , em Ω (2.7)

ea expressão do vetor tensão no contorno apresenta-se da seguinte forma:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}u_{k,k}n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i})n_j = p_i \quad , \text{ em } \Gamma$$
(2.8)

As equações diferenciais vetoriais (2.07) e (2.08) compõem a base para o desenvolvimento matemático do MEC, que se fundamenta na obtenção de equações integrais equivalentes a estas, expressas estritamente em termos de valores de contorno, conforme visto no capítulo a seguir.

3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos do Método de Elementos de Contorno (MEC) com sua formulação clássica aplicada para a solução de problemas bidimensionais de elasticidade.

Segundo Brebbia[1978], o Método dos Elementos de Contorno transforma um modelo matemático formulado por equações diferenciais parciais - que descrevem matematicamente o problema físico num domínio espacial e temporal - em equações integrais envolvendo somente valores de contorno e/ou condições iniciais. No contexto da Teoria das Equações Integrais, pode-se realizar essa transformação através do emprego do Teorema de Divergência e apoio de funções de auxiliares denominadas soluções fundamentais, desde que as características dos operadores diferenciais viabilizem tais procedimentos. Mas também é possível realizar tal transformação através do estabelecimento de uma sentença consistente do Método dos Resíduos Ponderados, Brebbia e Walker [1980], na qual as soluções fundamentais fazem o papel de funções de ponderação.

Qualquer seja o caminho adotado, a aplicação bem sucedida do MEC promove a redução da dimensão do problema em uma unidade, e no caso do domínio ser composto exclusivamente por variáveis espaciais, somente o contorno precisa ser discretizado.

Em termos das particularidades que normalmente compõem os principais métodos numéricos, essa é uma característica da qual resultam diversas vantagens

operacionais significativas. A mais imediata delas é a simplicidade no manuseio dos dados de entrada, bem menos numerosos; e também pela quantidade de operações matemáticas que são requeridas para construir o modelo computacional, que são bem mais simples por conta da redução da dimensão do problema.

Outras vantagens do MEC que poderiam ser mencionadas são: a possibilidade de trabalhar com regiões infinitas devido à peculiaridades da solução fundamental; a simulação precisa do efeito da concentração de tensões, também devido ao caráter singular da solução fundamental; a operacionalização fácil dos casos de fronteira variável, pois a operação de reestruturação da malha é muito mais acessível; e, finalmente, a elevada precisão obtida nos muitos problemas, particularmente aqueles em que a equação diferencial de governo é auto-adjunta, por conta também do fato da solução fundamental ser uma função que se assemelha ao problema que se deseja resolver.

E claro que existem algumas desvantagens, como a complexidade apresentada pela solução fundamental em alguns casos, assim como a menor flexibilidade no trato de problemas de meios heterogêneos e inadequação na abordagem de problemas com domínios delgados. Também é uma desvantagem importante o fato de que as matrizes do MEC resultantes após a discretização do contorno não são simétricas e bandeadas.

3.2 Formulação do MEC na elasticidadelinear

Os problemas pertinentes à Mecânica dos Sólidos são, na sua maior parte, problemas de campo vetorial, pois a cada ponto estão associadas grandezas cuja

definição requer a identificação de módulo, direção e sentido, como no caso dos deslocamentos.

Estes problemas são estudados por teorias simplificadas nas quais são consideradas algumas idealizações. As hipóteses mais comumente empregadas consideram o meio contínuo, homogêneo, estático e material elástico linear entre outras.

Inicia-se o estudo reapresentando a Equação de Navier, vista em (2.7) e repetida aqui por conveniência:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,kj} + b_{j} = 0, \quad em \ \Omega$$
 (3.1)

Existe outra forma para escrever esta equação, correspondendo àquela que utiliza as constantes de Lamé. Empregando tais constantes, a Equação de Navier é reescrita como:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} + b_j = 0$$
(3.2)

Neste trabalho são considerados os casos onde a de carga de domínio é nula, ou seja:

$$b_j = 0 \tag{3.3}$$

De acordo com Reyna Vera-tudela [1999] a formulação tradicional do MEC, via teoria das Equações Integrais, consiste em ponderar a equação (3.2) por uma função vetorial u_j^* , com características especiais e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, mostrado a seguir, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

É interessante notar que a função u_j^* , chamada de solução fundamental, é a solução de um problema elástico correlato, cujo domínio é infinito ou semi-infinito, onde as forças de corpo são ações concentradas no domínio, atuando nas direções coordenadas, assim:

$$\mu u_{j,ii}^{*} + (\lambda + \mu) u_{i,ij}^{*} + b_{j}^{*} = 0$$
(3.4)

Na equação anterior têm-se as ações singulares b_i* representadas por:

$$b_j^* = \Delta(\zeta, X) P_j, \quad P_j = 1$$
(3.5)

Na equação (3.05) ζ representa o ponto fonte de aplicação da carga enquanto X representa o ponto campo. $\Delta(\zeta, X)$ é a função Delta de Dirac, para a qual se tem as seguintes propriedades:

a)
$$\Delta(\zeta, X) = 0$$
, se $\zeta \neq X$ (3.6)

b)
$$\Delta(\zeta, X) = \infty$$
, se $\zeta = X$ (3.7)

c)
$$\int_{\Omega} f(X) \Delta(\zeta, X) d\Omega = f(\zeta)$$
, se $\zeta \in \Omega$ (3.8)

Então, tomando-se a equação (3.02), ponderando-a e integrando-a no domínio, desconsiderando a carga de domínio, tem-se a expressão seguinte:

$$\mu \int_{\Omega} u_{j} u_{ii} u_{j}^{*} d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i} u_{j} u_{j}^{*} d\Omega = 0$$
(3.9)

O procedimento efetuado a seguir utiliza preferencialmente a propriedade da integração por partes, cuja estrutura consiste em:

$$\int u_{j,ii}v_{,j}d\Omega = \int (u_{j,i}v_{j})_{,i}d\Omega - \int v_{j,i}u_{j,i}d\Omega$$
(3.10)

Também faz uso do Teorema da Divergência, no qual:

$$\int_{\Omega} \left(u_j^* u_{j,i} \right)_i d\Omega = \int_{\Gamma} u_j^* u_{j,i} n_i d\Gamma$$
(3.11)

Desenvolvendo então a primeira parcela da equação (3.09):

$$\int_{\Omega} u_{j,ii} u_{j}^{*} d\Omega = \int_{\Omega} [(u_{j}, u_{j}^{*}), (u_{j}, u_{j}^{*}), (u_{j}, u_{j}^{*})] d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} [(u_{j}, u_{j}^{*}), (u_{j}, u_{j}^{*}), (u_{j}, u_{j}^{*}), (u_{j}, u_{j}^{*}), (u_{j}, u_{j}^{*})] d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma} (u_{j}, u_{j}^{*}) n_{i} d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_{j}, u_{j}^{*}) n_{i} d\Gamma + \int_{\Omega} (u_{j}, u_{j}^{*}) d\Omega$$
(3.12)

Da mesma forma, desenvolve-se a segunda parcela da equação (3.09):

$$\int_{\Omega} u_{i},_{ij} u_{j}^{*} d\Omega = \int_{\Omega} [(u_{i},_{i} u_{j}^{*}),_{j} - (u_{i},_{i} u_{j}^{*},_{j})] d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} [(u_{i},_{i} u_{j}^{*}),_{j} - (u_{i} u_{j}^{*},_{j}),_{i} + (u_{i} u_{j}^{*},_{ji})] d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma} (u_{i},_{i} u_{j}^{*}) n_{j} d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_{i} u_{j}^{*},_{j}) n_{i} d\Gamma + \int_{\Omega} (u_{i} u_{j}^{*},_{ji}) d\Omega \qquad (3.13)$$

Trocando os índices da última parcela da equação (3.13):

$$\int_{\Omega} u_{i},_{ij} u_{j}^{*} d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{i},_{i} u_{j}^{*}) n_{j} d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_{i} u_{j}^{*},_{j}) n_{i} d\Gamma + \int_{\Omega} (u_{j} u_{i}^{*},_{ij}) d\Omega$$
(3.14)

Substituindo (3.12) e (3.14) em (3.09) e rearranjando:

$$\int_{\Omega} [\mu(u_j u_j^*, u_j) + (\lambda + \mu)(u_j u_i^*, u_j)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu(u_j, u_j^* n_i - u_j u_j^*, n_i)] d\Gamma + \int_{\Omega} [\mu(u_j, u_j^* n_i)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu(u_j, u_j^*, u_j^* n_i)] d\Gamma + \int_{\Omega} [\mu(u_j, u_j^*, u_j^* n_i)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu(u_j, u_j^*, u_j^* n_i)] d\Gamma + \int_{\Omega} [\mu(u_j, u_j^*, u_j^* n_i)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu(u_j, u_j^*, u_j^* n_i)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [\mu(u_j, u_j^*, u_j^* n_i)] d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu)(u_{i}, u_{j}^{*}n_{j} - u_{i}u_{j}^{*}, n_{i})d\Gamma = 0$$
(3.15)

A equação (3.04) apresenta u_j^* como solução fundamental, a qual deve obedecer à equação de Navier. Desta forma a primeira parcela da equação (3.15) fica:

$$\int_{\Omega} [\mu(u_j u_j^*, u_j) + (\lambda + \mu)(u_j u_i^*, u_j)] d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta(\zeta; x) P_j u_j d\Omega = -P_j u_j(\zeta; x)$$
(3.16)

Assim, substituindo (3.16) em (3.15) tem-se:

$$P_{j}u_{j}(\zeta) = \int_{\Gamma} [\mu(u_{j}, u_{j}^{*}n_{i} - u_{j}u_{j}^{*}, n_{i})]d\Gamma + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu)(u_{i}, u_{j}^{*}n_{j} - u_{i}u_{j}^{*}, n_{i})d\Gamma$$
(3.17)

Introduzindo na equação (3.17) uma expressão auxiliar da forma seguinte:

$$\int_{\Gamma} \mu(u_{i}, {}_{j}u_{j}^{*}n_{i} - u_{i}, {}_{j}u_{j}^{*}n_{i})d\Gamma = 0$$
(3.18)

Procedendo-se ao reagrupamento de termos, obtém-se:

$$P_{j}u_{j}(\zeta) = \int_{\Gamma} [\mu(u_{i}, j+u_{j}, i)n_{i} + \lambda(u_{i}, i)n_{j}]u_{j}^{*}d\Gamma +$$

$$-\int_{\Gamma} [\mu u_{j} u_{j}^{*}, n_{i} + \lambda u_{i} u_{j}^{*}, n_{i} - \mu u_{i}, u_{j}^{*} n_{j} + \mu u_{i} u_{j}^{*}, n_{i} + \mu u_{i}, u_{j}^{*} n_{i}] d\Gamma$$
(3.19)

Neste ponto é interessante redefinir a Equação de Navier no contorno, equação (3.02), em termos das constantes de Lamé:

$$\mu(u_{i}, {}_{j}+u_{j}, {}_{i})n_{j}+\lambda u_{k}, {}_{k}n_{i}=p_{i}$$
(3.20)

Observa-se que a equação (3.20) tem a mesma estrutura da primeira integral da equação (3.19), de tal forma que se pode substituir tal parcela pelo equivalente p_i . Assim, substituindo e reagrupando os termos chega-se a:

$$P_{j}u_{j}(\zeta) = \int_{\Gamma} p_{j}u_{j}^{*}d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{j}^{*}, u_{j}n_{i}) + \lambda(u_{j}^{*}, ju_{i}n_{i})]d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu(u_{i}u_{j}^{*}, jn_{i} - u_{i}, u_{j}^{*}n_{j} + u_{i}, ju_{j}^{*}n_{i})d\Gamma$$
(3.21)

Trocando-se a ordem dos índices da primeira parcela da segunda integral do lado direito e introduzindo-se uma nova identidade auxiliar, do mesmo tipo da equação (3.18), tem-se:

$$P_{j}u_{j}(\zeta) = \int_{\Gamma} p_{j}u_{j}^{*}d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{i}^{*}, j)n_{j} + \lambda(u_{j}^{*}, j)n_{i}]u_{i}d\Gamma +$$

$$-\int_{\Gamma} \mu(u_{i}u_{j}^{*}, n_{i}-u_{i}, u_{j}^{*}n_{j}+u_{i}, \mu_{j}^{*}n_{i})d\Gamma -\int_{\Gamma} \mu(u_{j}^{*}, u_{i}-u_{j}^{*}, u_{i})n_{j}d\Gamma$$
(3.22)

Reagrupando a expressão da mesma forma que na equação (3.19):

$$P_{j}u_{j}(\zeta) = \int_{\Gamma} p_{j}u_{j}^{*}d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{i}^{*}, j + u_{j}^{*}, i)n_{j} + \lambda(u_{j}^{*}, j)n_{i}]u_{i}d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu(u_{i}u_{j}^{*}, jn_{i} - u_{i}, iu_{j}^{*}n_{j} + u_{i}, ju_{j}^{*}n_{i} - u_{j}^{*}, iu_{i}n_{j})d\Gamma$$
(3.23)

A segunda integral da equação (3.23) tem a mesma estrutura da equação (3.20), de tal forma que será substituída por p_i^* . Assim:

$$\int_{\Gamma} [\mu(u_i^*, j + u_j^*, i)n_j + \lambda(u_j^*, j)n_i]u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma$$
(3.24)

Da equação (3.23), trabalha-se a última integral:

$$\int_{\Gamma} \mu(u_i u_j^*, j + u_i, j u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_i, u_j^* + u_j^*, u_i) n_j d\Gamma =$$
$$= \int_{\Gamma} \mu(u_i u_j^*), j n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_i u_j^*), j n_j d\Gamma$$
$$= \int_{\Omega} \mu(u_i u_j^*), j_i d\Omega - \int_{\Omega} \mu(u_i u_j^*), j_i d\Omega$$
$$= \int_{\Omega} \mu[(u_i u_j^*), _{ji} - (u_i u_j^*), _{ji}] d\Omega = 0$$
(3.25)

Finalmente, substituindo (3.25) e (3.24) em (3.23) tem-se, então, a expressão da Equação Integral de Contorno:

$$P_{j}u_{j}(\zeta) + \int_{\Gamma} p_{j}^{*}u_{j}d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{j}u_{j}^{*}d\Gamma$$
(3.26)

De (3.05) sabe-se que o módulo de *Pj* é igual à unidade. No entanto, do modo como está escrita à equação (3.26), o somatório em j no primeiro termo do lado direito da citada equação impede que cada carga concentrada *Pj* atue independentemente uma da outra. É necessário, então, reestruturá-la. A maneira mais interessante de fazê-la consiste em adotar uma estrutura diádica para a solução fundamental e sua derivada normal. Desse modo, tais funções, que correspondem aos deslocamentos e forças de superfície fundamentais, ficam escritas na forma:

$$u_{j}^{*} = u_{ij}^{*}(\zeta; X)P_{i} = u_{1j}^{*}P_{1} + u_{2j}^{*}P_{2}$$
(3.27)

$$p_{j}^{*} = p_{ij}^{*}(\zeta; X)P_{i} = p_{1j}^{*}P_{1} + p_{2j}^{*}P_{2}$$
(3.28)

Por adequação às necessidades estritas do modelo bidimensional, os índices variaram apenas até dois. Para ajustar-se à nova ordem, requer-se também que cada componente de P_i seja considerado separadamente, ou seja, $P_i = \delta_{1i}$ ou $P_i = \delta_{2i}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Dessa forma u_{ij}^* e p_{ij}^* passam a representar deslocamentos e forças de superfície na direção *j* no ponto *X*, resultado de uma carga unitária agindo na direção "i" e aplicada no ponto ζ .

Pode-se demonstrar que a equação anterior é um caso particular de uma expressão geral, na qual um coeficiente diádico C_{ij} é introduzido em função do posicionamento do ponto fonte se situar dentro do domínio, fora dele ou exatamente sobre o contorno. Tal coeficiente também introduz a possibilidade de tratamento de contornos não suaves.O detalhamento matemático deste coeficiente é exposto naseção 3.7. Desse modo, a equação integral (3.26) transforma-se em:

$$C_{ij}(\zeta)u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(x)p_{ij}^*(\zeta;x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x)u_{ij}^*(\zeta;x)d\Gamma(x)$$
(3.29)

3.3 Cálculo das tensões e deslocamentos para os pontos do contorno

A equação (3.29) é a equação integral do Método dos Elementos de Contorno correspondente à Equação diferencial de Navier. Ressalta-se que até o momento não foi feita nenhuma aproximação, de modo que são expressões matematicamente equivalentes, sendo uma integral e outra diferencial. Existem outras formas integrais equivalentes: por exemplo, o Método dos Elementos Finitos usualmente emprega

uma forma integral variacional, também denominada de forma integral fraca. O MEC emprega a forma (3.29), também dita forma integral inversa.

No que concerne às soluções fundamentais, vê-se que, em princípio, qualquer função auxiliar poderia ser empregada no contexto do equacionamento integral; mas as soluções ditas fundamentais são básicas ou, como o nome já diz, fundamentais para o alcance da formulação matemática do MEC, permitindo a eliminação de uma integral de domínio que ainda persistiria na forma inversa, mesmo após a aplicação do Teorema da Divergência.

As soluções fundamentais geralmenterepresentam a solução de um corpo infinito ou semi-infinito carregado com uma força concentrada unitária, neste trabalho à solução fundamental considerada. Por serem assemelhadas ao problema que se deseja resolver, garantem o bom desempenho numérico do método. Taissoluções de forças de superfície e deslocamentos para problemas elásticos com as mesmaspropriedades do material que o corpo em consideraçãono caso de domínio infinitosãochamadas de Soluções Fundamentais de Kelvin. Aplicando uma carga unitária em um corpo infinito elástico e calculando osdeslocamentos e forças de superfície resultantes desse carregamento, obtêm-se estas soluções. Assoluções fundamentais de Kelvin para problemas bidimensionais são apresentadas por Brebbia, TelleseWrobel [1984] em 3.30e 3.31:

$$u_{lk}^{*} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right]$$
(3.30)

23

$$p_{lk}^{*} = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,k}r_{,l}) - (1-2\nu)(r_{,l}r_{,k} - r_{,k}r_{,l}) \right]$$
(3.31)

Onde $p_{lk}^{*} e u_{lk}^{*}$ representam as forças de superfície e deslocamentos nadireção *k* devido a uma força unitária na direção *l* ; *r* é a distância entre o ponto fonte e o pontocalculado; *v* é o coeficiente de Poisson e *G* é o módulo de cisalhamento. A Figura 3.1 ilustra oponto de aplicação do carregamento (ponto fonte) e o ponto que se obtêm os resultados de forçade superfície e deslocamento (ponto campo) e seus respectivos eixos.



Figura 3.1 - (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário na direção x1), (b) componentes de força de superfície da solução fundamental (carregamento unitário na direção x2)

A variável r = r(ζ ,X) representa a distância entre o ponto fonte ζ , de aplicação da carga e o campoX. As derivadas são tomadas com relação às coordenadas do pontoX_i Pode-se definir os componentes das equações 3.30 e 3.31 da seguinte forma:

$$r = (r_i r_i)^{1/2}$$
(3.32)

$$r_i = x_i(x) - x_i(\zeta)$$
 (3.33)

$$r_{i} = \frac{\partial r}{\partial x_{i}(x)} = \frac{r_{i}}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_{i}(\zeta)}$$
(3.34)

3.4 Cálculo das tensões e dos deslocamentos para os pontos internos

SegundoTellese Brebbia [1980], é usual em equações integrais de contorno, na elasticidade, começar assumindo a denominada Identidade de Somigliana, dada em (3.35), que nada mais é do que a equação (3.29) para pontos fonte situados no interior:

$$u_i(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(\zeta) p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j(X) u_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma$$
(3.35)

Derivando-a esta última expressão em relação às coordenadas do ponto ζ :

$$\frac{du_i(\zeta)}{dx_k(\zeta)} = \int_{\Gamma} p_j(X) u_{ij,k}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u_j(X) p_{ij,k}^*(\zeta; X) d\Gamma(X)$$
(3.36)

Aequação(3.36) fornece as componentes das deformações específicas que, através da Lei de Hooke, permitem encontrar as tensões nos pontos internos.

Então, pode-se escrever diretamente que a expressão das tensões para os pontos internos é:

$$\sigma_{ij}(\zeta) = \int_{\Gamma} p_k(X) u_{ijk}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u_k(X) p_{ijk}^*(\zeta; X) d\Gamma(X)$$
(3.37)

onde:

$$u_{ijk}^{*} = \frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^{2}} \left\{ (1-2\nu) \left(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij} \right) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\}$$
(3.38)

е

$$p_{ijk}^{*} = \frac{G}{2\pi\alpha(1-\nu)r^{\beta}} \{\beta \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)r_{,k}\delta_{ij} + \nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) + \gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + \beta \nu (n_{i}r_{,j}r_{,k} + n_{j}r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(\beta n_{k}r_{,i}r_{,j} + n_{j}\delta_{ij} + n_{j}\delta_{jk}) - (1-4\nu)n_{k}\delta_{ij}\}$$

$$(3.39)$$

onde α = 2,1 para 1 dimensão, β = 3,2 para 2 dimensões e γ = 5,4 para 3 dimensões.

3.5 Procedimento numérico geral

A equação integral de contorno para a elasticidade mostrado em (3.29) é repetida aqui por conveniência:

$$C_{ij}(\zeta)u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(x)p_{ij}^*(\zeta;x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x)u_{ij}^*(\zeta;x)d\Gamma(x)$$
(3.40)

Devido ao fato desta última expressão ter um caráter vetorial, para um dado ponto ζ , duas equações são geradas:

$$C_{11}(\zeta)u_{1}(\zeta) + C_{12}(\zeta)u_{2}(\zeta) + \int_{\Gamma} u_{1}(x)p_{11}^{*}(\zeta;x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_{2}(x)p_{12}^{*}(\zeta;x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{1}(x)u_{11}^{*}(\zeta;x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{2}(x)u_{12}^{*}(\zeta;x)d\Gamma(x) = 0$$
(3.41)

$$C_{21}(\zeta)u_{1}(\zeta) + C_{22}(\zeta)u_{2}(\zeta) + \int_{\Gamma} u_{1}(x)p_{21}^{*}(\zeta;x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_{2}(x)p_{22}^{*}(\zeta;x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{1}(x)u_{21}^{*}(\zeta;x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{2}(x)u_{22}^{*}(\zeta;x)d\Gamma(x) = 0$$
(3.42)

No MEC, depois de obtida a formulação integral, o próximo passo para a resolução de um problema é a discretização do contorno, em que o mesmo é dividido em um número finito de elementos e uma hipótese sobre a variação das grandezas do problema ao longo dos mesmos – no caso deslocamentos e forças de superfície – é admitida. Assim, somente após a discretização das equações integrais de contorno (3.41) e (3.42) será possível resolvê-las.

É diante da admissão de uma função para representar o comportamento de cada segmento de contorno e outras funções para representar a variação do campo de variáveis que se impõem um modelo aproximado de solução. Muitas vezes, como é o caso no presente trabalho, usam-se funções isoparamétricas, ou seja, as mesmas funções – de ordem linear – aproximam o contorno e o campo de variáveis.

É a discretização que transforma a equação integral em um sistema de equações algébricas, envolvendo valores nodais de deslocamentos e forças de superfície.

A seguir se apresentam algumas definições importantes no desenvolvimento desta teoria, tanto para a definição da geometria do elemento, quanto para a interpolação do campo de variáveis.

3.5.1 Aproximação do campo de variáveis

Dividido o contorno numa série de elementos, é preciso aproximar as grandezas u_i e p_i ao longo do elemento, o que é feito, inicialmente, em termos de interpolação com base nos valores nodais.

$$\mathbf{u}_i \cong \mathbf{N}^{\mathbf{e}} \mathbf{u}_i^{\ \mathbf{e}} \tag{3.43}$$

$$\mathbf{p}_i \cong \mathbf{N}^{\mathrm{e}} \mathbf{p}_i^{\ e} \tag{3.44}$$

28

Nas expressões anteriores, \mathbf{N}^{e} é o vetor das funções de interpolação, \mathbf{u}_{i}^{e} e \mathbf{p}_{i}^{e} são os vetores deslocamento e força do ponto nodal X.

O comportamento das funções de forma ϕ , expressas em termos de um sistema de coordenadas situado nas extremidades, nos nós geométricos é mostrado nas equações (3.45) e (3.46).

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{Le}$$
(3.45)

$$\phi_2(x) = \frac{x}{Le} \tag{3.46}$$

ondeLe é o comprimento do elemento.

Mais explicitamente, no caso de elementos lineares, para cada elemento de contorno o campo de deslocamentos e forças de superfície ficam:

$$u_1^e(x) = u_1^e \phi_1(x) + u_1^e \phi_2(x)$$
(3.47)

$$u_{2}^{e}(x) = u_{2}^{e} \phi_{1}(x) + u_{2}^{e} \phi_{2}(x)$$
(3.48)

$$p_1^e(x) = p_1^1 \phi_1(x) + p_1^2 \phi_2(x)$$
(3.49)

 $p_2^e(x) = p_2^1 \phi_1(x) + p_2^2 \phi_2(x)$ (3.50)

A equação integral discretizada fica, então, na forma:

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\zeta) & c_{12}(\zeta) \\ c_{21}(\zeta) & c_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{e}u_{1} \\ {}^{e}u_{2} \end{bmatrix} + \\ + \sum_{e=1}^{N} \int_{\Gamma_{e}} \begin{bmatrix} p_{11}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{1} & p_{12}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{1} & p_{11}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{2} & p_{12}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{2} \\ p_{21}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{1} & p_{22}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{1} & p_{21}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{2} & p_{22}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{2} \end{bmatrix} d\Gamma_{e} \begin{bmatrix} {}^{e}u_{1}^{1} \\ {}^{e}u_{2}^{1} \\ {}^{e}u_{1}^{2} \\ {}^{e}u_{2}^{2} \end{bmatrix} = \\ = \sum_{e=1}^{N} \int_{\Gamma_{e}} \begin{bmatrix} u_{11}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{1} & u_{12}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{1} & u_{11}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{2} & u_{12}^{*}(\zeta;x_{e})\phi_{2} \end{bmatrix} d\Gamma_{e} \begin{bmatrix} {}^{e}p_{1}^{1} \\ {}^{e}p_{2}^{1} \\ {}^{e}p_{2}^{2} \end{bmatrix} =$$
(3.51)

A equação (3.51), também pode ser escrita da seguinte forma, considerando a integração da solução fundamental e de sua derivada:

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\zeta) & c_{12}(\zeta) \\ c_{21}(\zeta) & c_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{e}u_{1} \\ {}^{e}u_{2} \end{bmatrix} + \sum_{e=1}^{N} \begin{bmatrix} {}^{e}H_{11}^{1} & {}^{e}H_{12}^{1} & {}^{e}H_{11}^{1} & {}^{e}\zeta H_{11}^{2} & {}^{e}\zeta H_{12}^{2} \\ {}^{e}H_{21}^{1} & {}^{e}H_{21}^{1} & {}^{e}H_{21}^{2} & {}^{e}H_{21}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{e}u_{1}^{1} \\ {}^{e}u_{2}^{1} \\ {}^{e}u_{2}^{2} \end{bmatrix} = \\ = \sum_{e=1}^{N} \begin{bmatrix} {}^{e}\zeta G_{11}^{1} & {}^{e}\zeta G_{12}^{1} & {}^{e}\zeta G_{11}^{2} & {}^{e}\zeta G_{21}^{2} \\ {}^{e}\zeta G_{21}^{1} & {}^{e}\zeta G_{22}^{1} & {}^{e}\zeta G_{21}^{2} & {}^{e}\zeta G_{22}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{e}p_{1}^{1} \\ {}^{e}p_{2}^{1} \\ {}^{e}p_{2}^{2} \end{bmatrix}$$
(3.52)

Tomando como referência a matriz *H*, obtida da integração de *pij** ao longo de um elemento de contorno, verifica-se que cada coeficiente apresenta uma relação com a direção coordenada, com a posição nodal e outras referências:

$${}^{e}_{\zeta}H^{K}_{ij}$$
 (3.53)

onde*e* é o elemento integrado, *K* é o ponto nodal no elemento (inicial ou final),*i* e *j* são as direções do diádico e ζ é o ponto fonte. O mesmo ocorre para a matriz *G*.

3.5.2 Integrações não singulares

No MEC, para a obtenção de um sistema matricial resolvível é preciso gerarse tantas equações quanto incógnitas. Isto é feito comumente pelo posicionamento sucessivo dos pontos fonte em coincidência com os pontos nodais de contorno ou pontos campo.

Em termos de integração, quando os pontos fonte pertencem ao elemento que se integra, as expressões da solução fundamental e do vetor tensão fundamental induzem singularidades, que são resolvidas analiticamente, como será mostrado a seguir. Quando se integram elementos os quais não contem o ponto fonte, as integrais não são singulares e usualmente é feita a integração numérica das mesmas, vide figura 3.2.



Figura 3.2 - Integração não singular: ponto fonte ξ externo ao elemento integrado

Para facilitar a operacionalização das integrais não singulares, procura-se escrever as funções de interpolação espacial ao longo do elemento de integração em termos de um sistema de coordenadas adimensional, conhecido também como sistema de coordenadas natural. Tal coordenada adimensional η tem a vantagem de se ajustar com mais facilidade aos esquemas de integração aproximados (Gauss, por exemplo), que conforme exposto, são empregados na realização das integrais em que o ponto fonte não pertence ao elemento de integração.

Na Figura 3.3 mostra-se um elemento adimensional, para o qual é definida a nova coordenada adimensional η que é centralizada no elemento.



Figura 3.3 - Sistema de coordenadas adimensional

Da mesma forma, podem ser definidos os valores de u e p em qualquer ponto em termos do seu valor nodal e com as funções de interpolação ϕ_k agora dadas em termos da coordenada adimensional. Naturalmente, em se tratando de uma simples mudança de coordenadas, tem-se:

$$u(\eta) = u_1 \phi_1(\eta) + u_2 \phi_2(\eta) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
(3.54)

$$p(\eta) = p_1 \phi_1(\eta) + p_2 \phi_2(\eta) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$
(3.55)

Também pela Figura 3.3, observa-se que a coordenada adimensional η varia de -1 a +1 e as duas funções de interpolação expressam-se por:

$$\phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \tag{3.56}$$

$$\phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta) \tag{3.57}$$

3.5.3 Integrações singulares

É preciso examinar o comportamento das integrais singulares. O ponto fonte ζ é posicionado, em princípio, nos extremos dos elementos, em coincidência com os nós geométricos, conforme figura 3.4.



Figura 3.4 - Posicionamento do ponto fonte nos nós geométricos

O comportamento das funções de forma ϕ , expressas em termos de um sistema de coordenadas situado também nas extremidades é mostrado nas equações (3.58) e (3.59), reapresentadas a seguir por conveniência:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{Le}$$
(3.58)

$$\phi_2(x) = \frac{x}{Le} \tag{3.59}$$

Analisa-se inicialmente o comportamento da matriz *G. Vê-se* que a solução fundamental u_{ij}^* é composta de duas partes (vide equação (3.30)), uma consistindo de uma função logaritmo e outra que é constante, igual aos cossenos do ângulo entre a direção do elemento e as direçõesdas coordenadas, no caso de elementos retilíneos.

O comportamento da função logaritmo é ilustrado a seguir na Figura 3.5:



Figura 3.5 - Função logarítmo natural de r

Ressalta-se que *r* é um valor sempre positivo (vide equação (3.32)). É possível examinar graficamente o comportamento do produto das funções ϕ_1 e ϕ_2

versus $\ln r$, destacando que nesse exame é preciso considerar o comportamento das funções em sua interação com os elementos no entorno do ponto fonte.



Figura 3.6 - Comportamento das Funções Interpolação

Sabe-se que a integral de $\ln r$ é imprópria convergente, e desse modo as integrais de $\phi_1 \ln r$ e $\phi_2 \ln r$ não são singulares, mesmo contendo o ponto ζ . Para ϕ_1 a singularidade é anulada porque a função logaritmo integrada não mais é singular. Para ϕ_2 a singularidade seria anulada de qualquer modo porque no ponto ζ sua contribuição é nula. Já o comportamento da outra integral que compõe a solução fundamental ($\int r_i r_j dr$) é trivial, pois envolve apenas cossenos diretores.

Assim sendo, para cada coeficiente da matriz *G* (associado aum elemento *e*) a contribuição de outro elemento é calculada separadamente e somada no processo de compatibilidade entre os elementos. Então, a contribuição de ϕ_1 para *i* = *j* é dada por.

$$\int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} \phi_{1} \ln \frac{1}{r} dr = \int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} \left(1 - \frac{r}{L_{e}} \right) \ln \frac{1}{r} dr = \int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} \ln \frac{1}{r} dr - \frac{1}{L_{e}} \int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} r \ln \frac{1}{r} dr$$

$$= \int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} \ln r dr + \frac{1}{L_{e}} \int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} r \ln r dr = -(r \ln r - r) \Big|_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} + \frac{1}{L_{e}} \left[\left(\frac{r^{2}}{2} \ln r \right) \Big|_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} - \frac{r^{2}}{4} \Big|_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} \right]$$

$$= -(Le \ln Le - \varepsilon \ln \varepsilon - Le + \varepsilon) + \left(Le^{2} \frac{\ln Le}{2} - \varepsilon^{2} \ln \varepsilon - \frac{Le^{2}}{4} + \frac{\varepsilon^{2}}{4} \right) \frac{1}{L_{e}} = \qquad (3.60)$$

$$= -Le \ln Le + Le + \frac{Le}{2} \ln Le - \frac{Le}{4} = -\frac{Le}{2} \ln Le + \frac{3Le}{4} =$$

$$= \frac{Le}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln Le \right)$$

A outra integral relacionada à ϕ_2 , é dada por:

$$-\int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} \frac{r}{L_{e}} \ln r dr = \frac{-1}{L_{e}} \left(\int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} r \ln r dr \right) = \frac{1}{L_{e}} \left(\frac{r^{2}}{4} - \frac{r^{2}}{2} \ln r \right) \Big|_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} =$$

$$= \frac{1}{L_{e}} \left(\frac{L_{e}^{2}}{4} - \frac{L_{e}^{2}}{2} \ln L_{e} \right) =$$

$$= \frac{L_{e}}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln L_{e} \right)$$
(3.61)

Ainda há outros dois termos a serem integrados:

$$\int_{\varepsilon \to 0}^{L_e} \left[\phi_1^{\zeta} p_1^K + \phi_2^{\zeta} p_2^K \right] \cos \theta dr = \cos \theta \left\{ \left[\int_{\varepsilon \to 0}^{L_e} \left(1 - \frac{r}{L_e} \right) dr \right]^{\zeta} p_1^k + \left[\int_{\varepsilon \to 0}^{L_e} \left(\frac{r}{L_e} \right) dr \right]^{\zeta} p_2^k \right\} = \\ = \cos \theta \left\{ \left[r - \frac{r^2}{2L_e} \right]_{\varepsilon \to 0}^{L_e} \zeta p_1^k + \left[\frac{r^2}{2L_e} \right]_{\varepsilon \to 0}^{L_e} \zeta p_2^k \right\} = \\ = \cos \theta \left\{ \left[L_e - \frac{L_e}{2} \right]^{\zeta} p_1^K + \left[\frac{L_e}{2} \right]^{\zeta} p_2^K \right\} =$$

$$(3.62)$$

Assim, para cada grau de liberdade de $K e \zeta = e$:

$$\sum_{\zeta}^{D} G_{i1}^{K \zeta} p_{1}^{K} + \sum_{\zeta}^{D} G_{i2}^{K \zeta} p_{2}^{K} = \left[\int_{\varepsilon \to 0}^{Le} u_{i1}^{*} \phi_{1} dr \right]^{\zeta} p_{1}^{K} + \left[\int_{\varepsilon \to 0}^{Le} u_{i2}^{*} \phi_{2} dr \right]^{\zeta} p_{2}^{K} =$$

$$= \left[\frac{Le^{D}}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln Le^{D} \right) + K \cos \theta \frac{Le^{D}}{2} \right]^{\zeta} p_{1}^{K} + \left[\frac{Le^{D}}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln Le^{D} \right) + K \cos \theta \frac{Le^{D}}{2} \right]^{\zeta} p_{1}^{K}$$
(3.63)

ondeo sobrescrito *D* representa a integração pelo lado direito. Isto porque o mesmo ponto ζ interage não apenas com o elemento da direita, conforme foi calculado, mas também com o elemento da esquerda, conforme mostrado na figura 3.7.



Figura 3.7 – Varedura da Integração

Na interação com o elemento da esquerda, têm-se:

$$\sum_{\zeta}^{E} G_{i1}^{K\,\zeta} p_{1}^{K} + \sum_{\zeta}^{E} G_{i2}^{K\,\zeta} p_{2}^{K} = \left[\frac{Le^{E}}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln Le^{E} \right) + K \cos \theta \frac{Le^{E}}{2} \right]^{E} p_{1}^{K} + \left[\frac{Le^{E}}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln Le^{E} \right) + K \cos \theta \frac{Le^{E}}{2} \right]^{E} p_{2}^{K}$$
(3.64)

Onde o sobrescrito E representa a integração pelo lado esquerdo. Observa-se que no caso de não haver descontinuidade, o que é resolvido numericamente com o uso de nós duplos ou outros recursos, Aliabadi e Brebbia [1994],têm-se ${}^{E}p_{2}^{K} = {}^{D}p_{1}^{K}$. Assim, na condição de continuidade das forças de superfície a soma das duas contribuições dá um coeficiente ${}^{E,D}_{\zeta}G_{i\zeta}$ para o valor da força de superfície no nó ζ :

$${}^{E,D}_{\zeta}G_{i\zeta} = \frac{Le^{E}}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln Le^{E}\right) + \frac{Le^{D}}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln Le^{D}\right) + K \left[\cos\theta \frac{Le^{E}}{2} + \cos\theta \frac{Le^{D}}{2}\right] (3.65)$$

Se os elementos tem mesmo tamanho Le:

$${}^{E,D}_{\zeta}G_{i\zeta} = \frac{Le}{2}(2-2\ln Le) + KLe\cos\theta = Le(1-\ln Le) + KLe\cos\theta$$
(3.66)

Resta agora examinar o comportamento dos núcleos da matriz *H*quando se integra sobre um elemento que contém o ponto fonte. Tradicionalmente, esses termos, que compõem submatrizes diagonais na matriz global, são calculados através da técnica de deslocamentos do corpo rígido. Tal procedimento é mostrado a seguir.

Os termos singulares compõem as submatrizes da diagonal **H**. A forma de cálculo através da imposição de translação de corpo rígido correspondente a se admitir um problema hipotético no qual as forças de superfície são consideradas nulas e identificar a constituição dos termos das submatrizes diagonais através da solução esperada para o campo de deslocamentos, que deve ser totalmente nulo.

Desta forma, adotando-se para o caso bidimensional, duas translações independentes, $u_i = \delta_{i1}$ e $u_i = \delta_{i2}$, chega-se a:

$$\sum_{q=1}^{t} \mathbf{H}_{pq} \mathbf{u}_{q} = 0 \quad (p = 1, 2, ..., t)$$
(3.67)

40

Onde H_{pq} representa matrizes 2x2 de H e:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{q}} = \mathbf{I} \tag{3.68}$$

Onde I é matriz identidade.

Deste modo, podem-se calcular indiretamente as submatrizes da diagonal de **H** na forma:

$$\mathbf{H}_{\alpha\alpha} = -\sum_{\substack{q=1\\q\neq\alpha}}^{t} \mathbf{H}_{\alpha q} (\alpha = 1, 2, \dots, t)$$
(3.69)

Pela comodidade que oferece, esse processo é geralmente usado. Entretanto, mais à frente, na apresentação do procedimento recursivo, é necessário obter diretamente esses termos o que vale examiná-los detalhadamente, conforme feito a seguir.

A expressão do núcleo das matrizes *H* é dada pela força de superfície fundamental, mostrado na equação (3.31) e repetido aqui por conveniência:

$$p_{lk}^{*} = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,k}r_{,l}) - (1-2\nu)(r_{,l}r_{,k} - r_{,k}r_{,l}) \right]$$
(3.70)

Onde:

$$r_{k} = \frac{\partial r}{\partial x_{k}(\zeta)}$$
(3.71)

$$n_k = n_k(x) \tag{3.72}$$

Para elementos retilíneos $\frac{\partial r}{\partial x_k}(\xi)$ é zero, de modo que restam apenas os termos $r_i n_j - r_{,j} n_i$ para exame na integração.

Para i = jtem-se:

$$\frac{r_1}{r}n_1 - \frac{r_1}{r}n_1 = 0 = \frac{r_2}{r}n_2 - \frac{r_2}{r}n_2$$
(3.73)

Quando $i \neq j$ tem-se:

$$a = \frac{r_1(\zeta)}{r} n_2 - \frac{r_2(\zeta)}{r} n_1$$
(3.74)

$$b = \frac{r_2(\zeta)}{r} n_1 - \frac{r_1(\zeta)}{r} n_2$$
(3.75)

Naturalmente a = -b. É possível depreender o significado de $r_{,1}$ e $r_{,2}$ ao longo de um elemento retilíneo onde $\zeta = x$ observando-se a figura 3.8:



Figura 3.8 - Composição do vetor n

Desta figura verifica-se que:

$$n_1 = n_{x1} = \sin \alpha |n(x)| = \frac{x_1^I - x_1^F}{Le}$$
(3.76)

$$n_2 = n_{x2} = \cos \alpha |n(x)| = \frac{x_2^I - x_2^F}{Le}$$
(3.77)

Essas componentes $r_1(x) = x_1^I - x_1^F$ e $r_2(x) = x_2^I - x_2^F$ são tomadas com relação ao eixo de referência. Note que o argumento que denota a referência é importante, pois se as derivadas fossem tomadas com relação a ζ ou a x haveria diferença, pois:

$$r_{i}(x) = \frac{\partial r}{\partial x_{i}(x)} = \frac{1}{2} \left\{ \left[x_{i} - x_{i}(\zeta) \right]^{2} \right\}^{\frac{1}{2}} 2 \left[x_{i} - x_{i}(\zeta) \right] (1) = \frac{x_{i} - x_{i}(\zeta)}{r}$$
(3.78)

$$r_{i}(\zeta) = \frac{\partial r}{\partial x_{i}(\zeta)} = \frac{1}{2} \left\{ \left[x_{i} - x_{i}(\zeta) \right]^{2} \right\}^{\frac{1}{2}} 2 \left[x_{i} - x_{i}(\zeta) \right] (-1) = \frac{x_{i} - x_{i}(\zeta)}{r}$$
(3.79)

Embora importante, essa relação não faz diferença no cálculo de a, pois:

$$a = (r_{,1})(n_{1}) - (r_{,2})(n_{2}) =$$

$$\frac{\left(x_{1}^{F} - x_{1}^{I}\right)}{Le}(-r_{,1}) - \frac{\left(x_{2}^{F} - x_{2}^{I}\right)}{Le}(r_{,2}) =$$

$$\frac{\left(x_{1}^{F} - x_{1}^{I}\right)}{Le} \frac{\left(x_{1}^{I} - x_{1}^{F}\right)}{Le} - \frac{\left(x_{2}^{F} - x_{2}^{I}\right)}{Le} \frac{\left(x_{2}^{F} - x_{2}^{I}\right)}{Le} = -(r_{,1})^{2} - (r_{,2})^{2} \neq 0$$
(3.80)

Então, as componentes da submatriz diagonal de *H* geradas a partir da integração de p_{ij}^* não são todas nulas. E também os termos originados de c_{ij}^* não são, conforme se mostranaseção 3.6, exposto mais à frente.

Essas integrais impróprias geradas por a_{ij} , $i \neq j$ devem ser tomadas no sentido das "integrais por partes finitas", considerando que:

- $r_{,i}$ à esquerda e à direita tem sinais diferentes;
- É preciso assim considerar o que ocorre nos elementos de contorno anterior e posterior ao ponto ζ, conforme figura 3.9;

 Que o comportamento das funções de interpolação lineares são tais que φ₁ é unitário em ζ e φ₂ é nula, conforme figura 3.8, onde, por simplicidade, foram tomados dois elementos de contorno alinhados.



Figura 3.9 – Comportamento das funções de interpolação lineares

Como o comportamento da função interpolada por ϕ_1 é simétrico e as funções hiperbólicas multiplicadas por $K(r_in_j - r_in_i)$ tem sinais opostos à direita e à esquerda de ζ , essa integral é completamente nula e K é definido como parte constante da equação 3.31. Mas a integral relacionada a ϕ_2 é diferente, pois o produto antes e depois ζ têm módulos distintos; entretanto, a singularidade presente na integral é cancelada porque em ζ o valor de ϕ_2 é nulo. Logo, para $i \neq j$:

$$\int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} p_{ij}^{*} \Big[\zeta U_{1}^{K} \phi_{1} + \zeta U_{2}^{K} \phi_{2} \Big] d\Gamma = -\frac{\nu (1 - 2\nu)^{\zeta} U_{2}^{K}}{4\pi (1 - \nu)} \Big(r_{i} n_{j} - r_{j} n_{j} \Big) \int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} \frac{\phi_{2}}{r} d\Gamma - K_{3}^{\zeta} U_{2}^{K} \int_{\varepsilon \to 0}^{L_{e}} \frac{r}{L_{e}} \frac{1}{r} d\Gamma = \frac{K_{3}^{\zeta} U_{2}^{K}}{L_{e}} r = K_{3}^{\zeta} U_{2}^{K}$$
(3.81)

3.5.4 Aproximação da geometria do elemento

De acordo com Katsikadelis [2002] a geometria de cada elemento é definida em termos de uma função interpolante de forma, que se baseia nas coordenadas cartesianas dos pontos nodais que são naturalmente conhecidas. As coordenadas cartesianas \mathbf{x}_i dos pontos de contorno estão situadas ao longo do elemento, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{x}_{i} = \mathbf{M}^{e} \mathbf{x}_{i}^{e}$$
(3.82)

Onde M^{e} é a matriz contendo as funções de interpolação da geometria e \mathbf{x}_{i}^{e} é o vetor de coordenadas nodais do elemento. Essas coordenadas de posição nodal também podem ser expressas em termos de coordenadas adimensionais, se necessário.

Na Figura 3.10 observa-se o exemplo de um elemento de contorno com geometria retilínea. Nele observa-se a coordenada natural $\Gamma(\eta)$, que é definida como:

$$\Gamma_x^e(\eta) = x_1^e \phi_1 + x_2^e \phi_2 = x_1^e \frac{1}{2} (1 - \eta) + x_2^e \frac{1}{2} (1 + \eta)$$
(3.83)

$$\Gamma_{y}^{e}(\eta) = y_{1}^{e}\phi_{1} + y_{2}^{e}\phi_{2} = y_{1}^{e}\frac{1}{2}(1-\eta) + y_{2}^{e}\frac{1}{2}(1+\eta)$$
(3.84)



Figura 3.10 - Geometria do Elemento



Figura 3.11 - Geometria retilínea - elemento diferencial

Com base nos princípios da geometria diferencial e observando, também, a Figura 3.11 pode-se escrever:

$$d\Gamma^2 = d\Gamma_x^2 + d\Gamma_y^2 \tag{3.85}$$

$$\left(\frac{d\Gamma^{e}}{d\eta}\right)^{2} = \left(\frac{d\Gamma_{x}^{e}}{d\eta}\right)^{2} + \left(\frac{d\Gamma_{y}^{e}}{d\eta}\right)^{2}$$
(3.86)

$$\frac{d\Gamma^{e}}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_{x}^{e}}{d\eta}\right)^{2} + \left(\frac{d\Gamma_{y}^{e}}{d\eta}\right)^{2}}$$
(3.87)

Finalmente:

$$d\Gamma^{e} = J^{e} | d\eta$$
(3.88)

Nesta última expressão, $|J^e|$ é o Jacobiano da transformação, que para a geometria linear e em 2D tem o valor constante em cada elemento de:

$$\left|J^{e}\right| = \frac{l_{e}}{2} \tag{3.89}$$

Percebe-se que uma vez que os elementos de contorno adotados são retilíneos, qualquer conformação geométrica curva é gerada com significativo erro, que deve ser reduzido através do refinamento da malha de elementos.

3.5.5 Montagem do sistema matricial

Substituindo (3.43) e (3.44) em (3.29), ou seja, discretizando-se a sentença integral em (3.29), tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{C}(\zeta_{i})\mathbf{u}(\zeta_{i}) + \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_{j}} \mathbf{p}^{*} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{u}^{(e)} = \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_{j}} \mathbf{u}^{*} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{p}^{(e)}$$
(3.90)

Onde Ne é o número de elementos da discretização.

Durante a montagem do sistema de equações indicado em (3.90), cada uma das integrais será calculada numericamente. Este cálculo se dá através da integração numérica unidimensional de Gauss, Loeffeler e Wrobel [2011], que estabelece:

$$\int_{-1}^{1} f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^{p} f(\eta_i) w_i$$
(3.91)

onde η_i é a coordenada adimensional do i-ésimo ponto de integração, w_i é o fator de peso associado ao ponto *i*, e *P* é o número total de pontos de integração utilizado.

Desta forma trabalha-se com as parcelas da equação (3.91) como segue:

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} \quad |\mathbf{J}| \quad d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}|_k w_k \mathbf{N}_k \mathbf{p}_k^*$$
(3.92)

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}| w_k \mathbf{N}_k \mathbf{u}_k^*$$
(3.93)

onde NPI são o número de pontos de integração de Gauss.

A equação integral discretizada é aplicada repetidamente, considerando o ponto ζsituado coincidentemente com todos os pontos nodais existentes. Um sistema de 2*t* equações algébricas é gerado e envolve os 2*t* valores nodais de deslocamento e força de superfície.

Ainda é interessante levar este sistema para uma forma matricial e para isso coloca-se da forma mostrada a seguir.

Da segunda parcela de (3.91) tem-se:

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma_e \right) \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e$$
(3.94)

Similarmente,

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma_e \right) \mathbf{p}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e$$
(3.95)

O sistema fica reduzido na forma mostrada a seguir:

$$\mathbf{C}(\zeta_i)\mathbf{u}(\zeta_i) + \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e$$
(3.96)

Resulta, então, um sistema de equações matriciais na forma:

$$(\mathbf{C}+\hat{\mathbf{H}})\mathbf{u}=\mathbf{G}\mathbf{p}$$
 (3.97)

Na expressão anterior, os vetores **u** e **p**contêm os valores de deslocamento e forças de superfície em todos os pontos nodais. A matriz **C** é quase diagonal (banda pequena), e pode ser incorporada a $\hat{\mathbf{H}}$ para formar:

3.6 Determinação do termo $C_{ij}(\zeta)$

Paríse Cañas [1997] mostram que, de acordo com o Segundo Teorema de Betti, tem-se:

$$\int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} b_i^* u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma$$
(3.99)

Como anteriormente considerado, $b_i = 0$:

 $\int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma$ (3.100)

Considerando como sendo Ω_e o domínio que resta de Ω ao retirar-se um semicírculo de raio ε e de contorno e centrada no ponto ζ , conforme figura 3.12.



Figura 3.12 - Ponto do Contorno

Logo, para o domínio de $\Omega - \Omega_{\varepsilon}$ de contorno $\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \overline{\Gamma}_{\varepsilon}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^* u_i d\Gamma - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{ij}^* p_i d\Gamma + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^* u_i d\Gamma - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{ij}^* p_i d\Gamma = 0$$
(3.101)

Resolvendo a terceira integral de 3.42, tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^{*}(\zeta; X) u_{i}(X) d\Gamma(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^{*}(\zeta; X) [u_{i}(X) - u_{i}(\zeta)] d\Gamma(X) + u_{i}(\zeta) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^{*}(\zeta; X) d\Gamma(X)$$
(3.102)

Segundo Kane [1994],a primeira integral do lado direito assume o valor de zero, já que u_i obedecem as condições de continuidade de Hölder. Analisando Figura 3.13 e a segunda integral do lado direito, tem-se $r_i = -n_i$; $\frac{\partial r_i}{\partial n_i} = -1$; $r = \varepsilon$;

 $d\Gamma = \epsilon d\theta$; $r_{,1} = \cos \theta$; $r_{,2} = -sen\theta$ e $n_j r_{,i} - n_i r_{,j} = 0$:



Figura 3.13 - Contorno não suave

Assim, reescreve-se a solução da equação 3.100, da seguinte forma:

$$p_{lk}^{*} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left((1-2\nu) \delta_{ij} \right) + 2r_{i}r_{,j} \right]$$
(3.103)

por conseguinte:

$$u_{i}(\zeta)\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^{*}(\zeta; X) d\Gamma(X) = \int_{\theta_{i}}^{\theta_{2}} \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{i}r_{j}] \varepsilon d\theta$$
(3.104)

Caso i = 1 e j = 1, tem-se:

$$\int_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \Big[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{i}r_{,j} \Big] \varepsilon d\theta =$$

$$\frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \Big[2(1-\nu)(\theta_{2}-\theta_{1}) + \frac{1}{2}(sen2\theta_{2}-sen2\theta_{1}) \Big] =$$

$$\frac{1}{2\pi} (\theta_{2}-\theta_{1}) + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} (sen2\theta_{2}-sen2\theta_{1}) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \alpha + \frac{sen\alpha.\cos\gamma}{4\pi(1-\gamma)}$$
(3.105)

Nas expressões anteriores, $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ e $\gamma = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$. Similarmente pode-se calcular para as outras combinações de *i* e *j*. A equação 3.49 escreve-se como:

$$u_i(\zeta) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) = C_{ij}(\zeta) u_i(\zeta)$$
(3.106)

Daí conclui-se que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) = C_{ij}(\zeta) u_i(\zeta)$$
(3.107)

Onde $C_{ij}(\zeta)$ é a matriz de coeficientes do termo livre:

$$C_{ij}(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi}\alpha + \frac{sen\alpha.\cos\gamma}{4\pi(1-\gamma)} & \frac{sen\alpha.\cos\gamma}{4\pi(1-\gamma)} \\ \frac{sen\alpha.\cos\gamma}{4\pi(1-\gamma)} & \frac{1}{2\pi}\alpha - \frac{sen\alpha.\cos\gamma}{4\pi(1-\gamma)} \end{bmatrix}$$
(3.108)

Assim sendo, para contornos suaves, onde $\alpha = \pi$, tem-se:

$$C_{ij}(\zeta) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

(3.109)
4 PROCEDIMENTO RECURSIVO

4.1 Comentários preliminares

Neste capítulo é apresentada a metodologia da aplicação do procedimento recursivo para problemas de campo vetorial. Para melhor ilustrar o esquema, um exemplo pertinente à teoria de potencial escalar é apresentado previamente.

O procedimento recursivo foi desenvolvido a partir de observações feitas na qualidade dos resultados obtidos em valores internos, quando comparados com os valores nodais de contorno, em problemas de potencial. Um menor erro, tanto no potencial interno, quanto nas derivadas espaciais internas foi observado em diversos exemplos, Loeffler, Lovatte e Barroncas [2010].

Assim, foi desenvolvido um procedimento para realocação dos pontos fonte novamente no contorno, após a solução do sistema matricial original. Os novos pontos fonte são posicionados no contorno, em posições distintas das dos pontos nodais originais.

O procedimento é mais efetivo no caso de elementos lineares do que em elementos constantes e, nessa condição, os novos pontos fonte são localizados exatamente no meio dos elementos. Entretanto, o esquema pode ser aplicado em elementos constantes e quadráticos, havendo restrição apenas no cuidado com as condições de continuidade exigidas no primeiro tipo de elemento, caso se deseje calcular as novas forças de superfície.

Uma maior eficiência do processo foi observada para malhas pouco refinadas. Assim se a quantidade de elementos de contorno empregada foi suficiente para uma

57

boa precisão dos resultados, o esquema recursivo perde sua importância, pois seus ganhos passam a ser pouco significativos.

4.2 Aplicação do Procedimento Recursivo em um ProblemaEscalar

Como exemplo de ilustração do efeito da aplicação do procedimento considerando novos pontos no contorno, considere um domínio quadrado, isolado em suas arestas horizontais, sujeito a um campo de temperaturas e fluxos de calor conforme mostra a figura 4.1.

As condições de fluxo prescrito nulo nas arestas horizontais resultam num problema fisicamente unidimensional, no qual a temperatura varia exclusivamente na direção horizontal *x*, de modo linear. A simplicidade deste exemplo é útil para apresentar a eficiência do procedimento proposto.

Na discretização foram empregados 16 elementos de contorno constantes, uniformemente distribuídos ao longo da fronteira da superfície do sistema. O emprego de uma malha pouco refinada não traz nenhum problema com relação à qualidade da análise que se deseja empreender; ao contrário, facilita a visualização da comparação que se deseja apresentar.

A solução numérica deste problema resulta nos valores mostrados nas tabelas que se seguem. Foi tomado um valor unitário, tanto para o comprimento das arestas, quanto para a condutividade térmica, de modo que as derivadas direcionais da temperatura equivalem numericamente aos fluxos de calor.

58



Figura 4.1 - Domínio quadrado atravessado por um fluxo de calor condutivo unidimensional

Na Tabela 4.1 são mostrados os resultados obtidos de temperatura nos pontos nodais de contorno nos quais foram prescritos os valores de fluxo, através da solução direta do sistema matricial e os respectivos valores analíticos.

| Х | Y | NUM. | ANAL. | ERRO % |
|-------|-------|--------|-------|--------|
| 0.125 | 0.000 | 0.1165 | 0.125 | 6.80 |
| 0.375 | 0.000 | 0.3661 | 0.375 | 2.37 |
| 0.625 | 0.000 | 0.6143 | 0.625 | 1.71 |
| 0.875 | 0.000 | 0.8616 | 0.875 | 1.53 |
| 1.000 | 0.125 | 0.9761 | 1.0 | 2.39 |
| 1.000 | 0.375 | 0.9864 | 1.0 | 1.36 |

Tabela 4.1 - Temperaturas nos pontos nodais calculadas diretamente

Na Tabela 4.2 são apresentados os resultados para o fluxo de calor normal ao contorno nos pontos nodais em que foram prescritas as temperaturas e os correspondentes valores analíticos; por simetria, apenas os valores de dois pontos nodais são apresentados.

| Х | Y | NUM. | ANAL. | ERRO % |
|-----|-------|--------|-------|--------|
| 0.0 | 0.875 | 1.0350 | 1.00 | 3.50 |
| 0.0 | 0.625 | 0.9658 | 1.00 | 3.42 |

Tabela 4.2 - Fluxos normais nos pontos nodais calculados diretamente

Na Tabela 4.3 são mostrados os valores de temperatura calculados com o uso reiterado da sentença do MRP, considerando na nova equação os valores nodais anteriormente calculados, enquanto na Tabela 4.4 são apresentados os valores do fluxo normal. Ressalta-se que nessa etapa foram escolhidos pontos no contorno correspondentes aos nós geométricos dos elementos constantes empregados.

Tabela 4.3 - Temperaturas calculadas pelo uso recursivo do MRP

| Х | Y | NUM. | ANAL. | ERRO % |
|------|------|--------|-------|--------|
| 0.25 | 0.0 | 0.2415 | 0.25 | 3.40 |
| 0.50 | 0.0 | 0.4903 | 0.50 | 1.94 |
| 0.75 | 0.0 | 0.7381 | 0.75 | 1.59 |
| 1.0 | 0.25 | 0.9840 | 1.0 | 1.60 |
| 1.0 | 0.5 | 0.9870 | 1.0 | 1.30 |

Tabela 4.4 - Fluxos na direção horizontal calculados pelo uso recursivo do MRP

| Х | Y | NUM. | ANAL. | ERRO % |
|-----|------|--------|-------|--------|
| 0.0 | 0.75 | 0.9823 | 1.0 | 1.77 |
| 0.0 | 0.50 | 0.9833 | 1.0 | 1.67 |

Pode-se perceber que os resultados alcançados com o procedimento recursivo apresentaram melhor desempenho do que os obtidos com a solução original do sistema matricial do MEC. Como não é cabível comparar os valores para os mesmos pontos (os resultados nesses casos seriam idênticos) um exame preliminar poderia atribuir os menores valores de erro à alteração do numerador no cálculo da taxa de erro percentual; no entanto, pode-se constatar que a média dos erros na temperatura entre dois valores nodais consecutivos na Tabela 4.1 é maior do que o valor obtido na Tabela4.3 para um ponto situado entre eles, demonstrando o melhor desempenho do uso recursivo da sentença do MRP. Além disso, os valores de erro percentual nos fluxos constantes nas arestas verticais, dados pelas duas primeiras linhas da Tabela 4.4, são menores do que os valores dessa mesma variável calculada pela Tabela4.2. Foram incluídos nessas tabelas os valores de temperatura e fluxos condutivos em pontos situados entre pontos nodais com valores prescritos (duas últimas linhas das Tabelas4.3 e 4.4) com o intuito examinar o comportamento da técnica nessa região. Os valores do erro percentual encontrados foram bastante reduzidos, mas não nulos.

4.3 Integrais Singulares no Procedimento Recursivo em elasticidade

Após a solução do sistema matricial original, todas as variáveis nodais estão calculadas, seja a variável primal uquanto a sua derivada normal q. Ao se colocar o ponto ζ novamente no contorno, todos os elementos devem ser reintegrados, pois os núcleos estão referenciados aos novos pontos fonte. A maior parte das integrais não é singular e podem ser resolvidas numericamente pelo método de Gauss. Mas surgem também outras integrais singulares que devem ser resolvidas, de acordo com a ideia do procedimento recursivo. Essas integrais advêm da integração ao longo do elemento que contém o ponto fonte.

Usando-se elementos de contorno lineares, os novos pontos fonte recursivos são localizados preferentemente no centro dos elementos de contorno, conforme figura 4.2.

61



Figura 4.2 - Localização dos novos pontos fonte

Onde
$$r_{,1}^{D} = -r_{,1}^{E}$$
; $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_{i}} = \frac{r_{i}}{r}$; $r_{,2}^{D} = -r_{,2}^{E}$, mas $r_{,1}^{D}r_{,2}^{D} = r_{,1}^{E}r_{,2}^{E}$.

Ao longo do elemento retilíneo, as funções de forma lineares são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{Le} \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{Le}$$
(4.01)

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{Le} \right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{Le}$$
(4.02)

A Figura 4.3 representa o comportamento das funções ϕ_1 e ϕ_2 :



Figura 4.3 – Comportamento das funções de interpolação

Uma vez que o ponto ζ se situa no centro do elemento, inicialmente é feito o exame das integrais relacionadas à u_{ij}^* , ou seja, os termos da matriz **G** no que se refere ao ponto fonte situado sobre o próprio elemento de contorno no qual se processa a integração:

$$\xi G_{ij}^{\kappa} = \int_{\Gamma_{\zeta}} Q_{p}^{\kappa} \phi_{p} u_{ij}^{*} d\Gamma = \int_{-L_{2}}^{L_{2}} Q_{p}^{\kappa} \phi_{p} u_{ij}^{*} dr$$

$$\xi G_{ij}^{\kappa} = \frac{1}{8\mu G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \delta_{ij} \int_{-L_{2}}^{L_{2}} (Q_{1}^{\kappa} \phi_{1} + Q_{2}^{\kappa} \phi_{2}) \ln \frac{1}{r} dr + \int_{-L_{2}}^{L_{2}} (Q_{1}^{\kappa} \phi_{1} + Q_{2}^{\kappa} \phi_{2}) \left(\frac{\partial r}{\partial x_{p}} \right)^{2} dr \right] (4.03)$$

$$= K_{1} \left[K_{2} \int_{-L_{2}}^{L_{2}} (Q_{1}^{\kappa} \phi_{1} + Q_{2}^{\kappa} \phi_{2}) \ln \frac{1}{r} dr + \int_{-L_{2}}^{L_{2}} (Q_{1}^{\kappa} \phi_{1} + Q_{2}^{\kappa} \phi_{2}) \left(\frac{\partial r}{\partial x_{p}} \right)^{2} dr \right]$$

Examinam-se primeiramente as integrais com logaritmo, que se sabem não serem impróprias. A função ϕ_1 , no seu lado direito do ponto fonte resulta:

$$Q_{1}^{K} \int_{\epsilon \to 0}^{\frac{Le}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2r}{Le} \right) \ln \frac{1}{r} \right] dr = \frac{Q_{1}^{K} Le}{2} \left[\frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln \frac{Le}{2} \right]$$
(4.04)

Ainda à direita de ζ , para $\phi_{\scriptscriptstyle 2}$ tem-se:

$$Q_{2}^{K} \int_{\varepsilon \to 0}^{\frac{Le}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2r}{Le} \right) \ln \frac{1}{r} \right] dr = \frac{Q_{2}^{K} Le}{2} \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{Le}{2} \right]$$
(4.05)

A integral à esquerda para ϕ_1 , que seria com x_1 negativo fica:

$$Q_{1}^{K} \int_{\varepsilon \to 0}^{\frac{Le}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2r}{Le} \right) \ln \frac{1}{r} \right] dr = \frac{Q_{1}^{K} Le}{2} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{Le}{2} \right]$$
(4.06)

Do mesmo modo para ϕ_2 :

$$Q_{2}^{K} \int_{\epsilon \to 0}^{\frac{Le}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2r}{Le} \right) \ln \frac{1}{r} \right] dr = \frac{Q_{2}^{K} Le}{2} \left[\frac{5}{8} + \frac{3}{4} \ln \frac{Le}{2} \right]$$
(4.07)

Assim, a parte logarítmica da integral fornece:

$${}^{\zeta}G_{ij} = K_1 \left\{ K_2 \left[Q_1^{\kappa} \frac{Le}{2} \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln \frac{Le}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{Le}{2} \right) \right] + \left[Q_2^{\kappa} \frac{Le}{2} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{Le}{2} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln \frac{Le}{2} \right) \right] \right\} =$$

$$= K_1 \left\{ K_2 \left[Q_1^{\kappa} \frac{Le}{2} \left(1 + \ln \frac{2}{Le} \right) + Q_2^{\kappa} \frac{Le}{2} \left(1 + \ln \frac{2}{Le} \right) \right] \right\}$$

$$(4.08)$$

Com referência ao resultado exposto em (4.08), a média dos valores dos coeficientes de Q_1 e Q_2 corresponde ao valor obtido na integral com elementos constantes.

A outra integral envolve valores de funções trigonométricas que não mudam de valor ao longo da integração no elemento linear. O quadrado dos valores que compõem o núcleo, para i = j, certamente são positivos; mas também se pode verificar que $r_{,1}^D r_{,2}^D = r_{,1}^E r_{,2}^E$, ou seja, os sinais dessas funções não se alteram à direita ou à esquerda do ponto fonte.

Assim, uma vez que essas derivadas são funções da inclinação α do elemento com relação ao sistema de coordenadas:

$$K_{1}\left[Q_{1}^{\kappa}\int_{-\frac{Le}{2}}^{\frac{Le}{2}}f_{ij}(\theta)\phi_{1}dr + Q_{2}^{\kappa}\int_{-\frac{Le}{2}}^{\frac{Le}{2}}f_{ij}(\theta)\phi_{2}dr\right] = K_{1}\left[Q_{1}^{\kappa}f_{ij}(\theta)\int_{\varepsilon\to0}^{\frac{Le}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\frac{2r}{Le}\right)dr + Q_{1}^{\kappa}f_{ij}(\theta)\int_{\varepsilon\to0}^{\frac{Le}{2}}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2r}{Le}\right)dr + Q_{2}^{\kappa}f_{ij}(\theta)\int_{\varepsilon\to0}^{\frac{Le}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\frac{2r}{Le}\right)dr + Q_{2}^{\kappa}f_{ij}(\theta)\int_{\varepsilon\to0}^{\frac{Le}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\frac{2r}{Le}\right)dr = K_{1}\left[Q_{1}^{\kappa}f_{ij}(\theta)\frac{Le}{2} + Q_{2}^{\kappa}f_{ij}(\theta)\frac{Le}{2}\right]$$

$$(4.09)$$

onde $f_{11} = \cos^2 \alpha$, $f_{12} = \cos \alpha \sin \alpha$ e $f_{11} = \sin^2 \alpha$.

É possível inferir esses mesmos resultados mais facilmente, a partir de uma análise gráfica do produto das funções. Percebe-se que as funções de forma apresentam uma contraparte constante e outra variável. Assim, sabendo-se que o argumento *r* do logaritmo é sempre positivo, vê-se que no caso dessa função tem-se:



Figura 4.4- Composição da Função ϕ_i

Pela Figura 4.4, vê-se que a parte linear das funções se cancela antes e depois do ponto fonte. Assim, os resultados previamente obtidos poderiam ser conseguidos simplesmente fazendo:

$$Q_{1}^{\kappa} \frac{1}{2} \int_{-Le_{2}}^{Le_{2}'} \ln \frac{1}{r} dr + Q_{2}^{\kappa} \frac{1}{2} \int_{-Le_{2}'}^{Le_{2}'} \ln \frac{1}{r} dr =$$

$$Q_{1}^{\kappa} \left[r - \ln r \right]_{-Le_{2}'}^{Le_{2}'} + Q_{2}^{\kappa} \left[r - \ln r \right]_{-Le_{2}'}^{Le_{2}'} =$$

$$Q_{1}^{\kappa} \left[\frac{Le}{2} - \frac{Le}{2} \ln \frac{Le}{2} \right] + Q_{2}^{\kappa} \left[\frac{Le}{2} - \frac{Le}{2} \ln \frac{Le}{2} \right] =$$

$$Q_{1}^{\kappa} \frac{Le}{2} \left(1 - \ln \frac{Le}{2} \right) + Q_{2}^{\kappa} \frac{Le}{2} \left(1 - \ln \frac{Le}{2} \right)$$
(4.10)

Esta estratégia vai ser útil no exame das integrais referentes a integral de p_{ij}^* , ou seja, dos termos de **H**. Inicialmente, conforme mostrado no procedimento direto, para elementos retilíneos $\frac{\partial r}{\partial n}$ é nulo e as integrais restantes são referentes apenas a:

$$\int_{\Gamma} \zeta p_{ij}^{*}(\zeta; x) \left[U_{1}^{K} \phi_{1} + U_{2}^{K} \phi_{2} \right] d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{-1}{4\pi (1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) (r_{i}n_{j} - r_{j}n_{i}) \right\}$$
(4.11)

Algo fundamental na integração do elemento singular, quando o ponto fonte está centralizado, refere-se ao sinal de $r_{,i}$. Quando o ponto ζ está na extremidade do elemento se faz uma varredura ao longo da direção escolhida para integração no elemento e o sinal de $r_{,i}$ não se altera. Mas quando o ponto fonte ζ está no centro do elemento, é preciso examinar $r_{,i}$ à direita e à esquerda de ζ :

$$r_{i}^{D} = x_{i}(x) - x_{i}(\zeta)$$
 (4.12)

$$r_{i}^{E} = -x_{i}(x) - x_{i}(\zeta)$$
 (4.13)

$$r_{,i}^{D} = r_{,i}^{E}$$
 (4.14)

Quando i = j, a expressão $r_i n_j - r_j n_i$ é naturalmente nula. Mas quando $i \neq j$, esse termo não é nulo e é preciso estudar a singularidade. Verifica-se, então, que o sinal de $r_i n_j - r_j n_i$ é oposto, antes e depois de ζ , conforme é observado na Figura 4.5. Assim, considerando o mesmo esquema de composição do produto das funções constantes do núcleo de ζH_{ii} , tem-se:



Figura 4.5- Composição do produto das funções

Mas as funções $\frac{1}{r}$ são multiplicadas por a_{ij} , que quando é não nulo tem sinal invertido antes e depois de ζ , que se observa em 4.7:



Figura 4.6– Composição das funções $\frac{1}{r}$

Na parte constante, percebe-se que a área concernente ao produto das duas funções tem valores iguais no intervalo, mas com sinais contrários, anulando-se. O oposto acontece com a parte linear multiplicada por $\frac{1}{r}$ acompanhado de $r_{,i}$. O

produto de funções tem o mesmo valor e sinal, de modo que a integral no intervalo pode ser duplicada, mas com um importante detalhe: na origem, onde ζ é igual a zero, o valor da função de forma ϕ é nulo, cancelando a singularidade. Logo:

$$\int_{-Le_{2}}^{Le_{2}} K_{2} \left(\frac{r_{i}n_{j} - r_{j}n_{i}}{r} \right) d\Gamma_{\zeta} = 2 \int_{0}^{Le_{2}} K_{2} \left(\frac{r_{i}n_{j} - r_{j}n_{i}}{r} \right) d\Gamma_{\zeta}$$
(4.15)

Ressalta-se que o sinal de n_i não se altera. Então:

$$2\int U_{1}^{K} \phi_{1} \frac{K_{2}}{r} dr + 2\int U_{2}^{K} \phi_{2} \frac{K_{2}}{r} dr = 2K_{2}^{'} U_{1}^{K} \int \left(\frac{-2r}{2Le}\right) \frac{1}{r} dr + 2K_{2}^{'} U_{2}^{K} \int \left(\frac{-2r}{2Le}\right) \frac{1}{r} dr =$$

$$= \frac{2K_{2}^{'} U_{1}^{K}}{Le} \left(-\frac{Le}{2}\right) + \frac{2K_{2}^{'} U_{2}^{K}}{Le} \left(\frac{Le}{2}\right)$$

$$= -K_{2}^{'} U_{1}^{K} + K_{2}^{'} U_{2}^{K}$$
(4.16)

Destaca-se também que apenas o limite superior da integral foi introduzido, pois em $\zeta = 0$ a singularidade tomada em $\varepsilon^{D} \rightarrow 0$ é cancelada por $\varepsilon^{E} \rightarrow 0$.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 Comentários preliminares

Algunsexemplos são aqui apresentados para demonstrar o desempenho do procedimento recursivo do Método de Elementos de Contorno quando comparado com a solução direta do MEC e a solução analítica.

Uma vez que na solução direta do MEC aqui efetivada foram utilizados elementos lineares, nos quais os pontos nodais coincidem com os nós geométricos, os novos pontos de colocação ζ que caracterizam a solução recursiva foram colocados exatamente no meio do elemento, por conveniência.

A inclusão de malhas menos refinadasno contexto dos testeséfeitadeliberadamente,porque a principal vantagem do esquema recursivo é oferecer maior precisão quando comparados com os resultados numéricos calculados a partir de malhas com um número menorde elementos de contorno em problemas de potencial escalar.

Foi usado um programa escritoem linguagem FORTRANoriginalmentecriado por Telles [1984]para obtenção da solução direta do MEC. Nele foram implantadas três sub-rotinaspara a aplicação do esquema recursivo.

Nessas simulações, três exemplos clássicos de problemas de elasticidade são resolvidos. Na avaliação de desempenho, foi calculado o erro entre o valor analítico e o valor numérico. Esses erros referenciam o quanto os valores obtidos, através dosmétodos diretos de solução e recursivo, estão próximos ou distantes dos

71

valoresanalíticos conhecidos, oferecendo uma estimativa de precisão.No primeiro e no terceiro exemplos, a medida de desempenho foi calculada pelo quociente entre o módulo da diferença entre as soluções analíticas e numéricas e o módulo da solução analítica, sendo o resultado multiplicado por 100 por cento, equação 5.1.No segundo exemplo foi calculado pelamédia dos valores dos quocientes dos módulos das diferenças entre as soluções analíticas e as soluções numéricas pelo maior valor analítico, sendo o resultado multiplicado por 100 por cento, equação 5.2.

$$erro_{1,3} = \frac{analítico - numérico}{analítico} \times 100\%$$
 (5.1)

$$erro_{1,3} = \frac{analítico - numérico}{maior valor analítico} \times 100\%$$
(5.2)

Os valores referentes ao Método Recursivo foram tomados exclusivamente para os deslocamentos, não sendo calculadas as tensões no contorno. Por outro lado, os valores em pontos internos, que também são obtidos recursivamente, foram calculados tanto para os deslocamentos quanto para as tensões.

Nas colunas das tabelas estão descritas as malhas conforme pontos nodais de contorno, segundo discretização ilustradas nas respectivas figuras a serem mostradas. Nas linhas, onde descritos "CONTORNO", referem-se aos resultados obtidos nos pontos do contorno pelo método direto; onde descrito "INTERNO", refere-se aos resultados obtidos nos pontos internos recursivamente; e onde

descritos "RECURSIVO", refere-se aos resultados obtidos nos pontos do contorno pelo método de integração recursiva.

5.2 Tubo de parede espessa submetido a pressão interna

O problema trata de um tubo de parede espessa com pressão interna, onde somente um quarto do tubo é modelado devido à simetria angular. A geometria e condições de contorno podem ser vistas na figura 5.1e 5.2.



Figura 5.1 - Tubo submetido à pressão interna



Figura 5.2 - Discretização simétrica do problema

As medidas para o raio interno (Ra) e externo (Rb) são respectivamente 80 mm e 160 mm. As propriedades materiais empregadas são módulo de elasticidade E = 100.000Pae coeficiente de Poisson v = 0. O carregamento foi definido com valor para a pressão interna pi =150MPa e admitiu-se a condição de estado plano de tensões. Para fins de análise dos resultados utilizou-se a solução analítica da Teoria da Elasticidade apresentada por Den Hartog [1952]. Nessa solução, os valores para tensãonadireçãoangularsão dados naequação(5.3); para а tensão а na direçãoradialsão dados pela equação(5.4); e para o deslocamento na direção radialsão fornecidas pela equação(5.5). Todos são expressos em coordenadas polares, conforme a seguir:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{Ra^2 p_i}{Rb^2 - Ra^2} \left(1 + \frac{Rb^2}{r^2} \right)$$
(5.3)

$$\sigma_{rr} = \frac{Ra^2 p_i}{Rb^2 - Ra^2} \left(1 - \frac{Rb^2}{r^2} \right)$$
(5.4)

$$u_{r} = \frac{1}{E} \left(\frac{p_{i} R_{a}^{2}}{R_{b}^{2} - R_{a}^{2}} \right) r + \frac{1}{Er} \left(\frac{p_{i} \left(R_{b}^{2} R_{a}^{2} \right)}{R_{b}^{2} - R_{a}^{2}} \right)$$
(5.5)

As malhasdiscretizadas neste exemplo foram: de 20 pontos nodais e 3pontos internos; 36 pontos nodais e 7 pontos internos; 52 pontos nodais e 9 pontos internos; e por fim 72 pontos nodais e 15 pontos internos,conforme mostrado a seguir nas figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6, respectivamente. O tamanho do elemento (distância entre pontos nodais)foi dividido ao meio a cada refinamento de malha.



Figura 5.3 - Tubo discretizado em 20 pontos nodais (16 + 4 duplos) e 3 pontos internos



Figura 5.4 - Tubo discretizado em 36 pontos nodais (32 + 4 duplos) e 7 pontos internos



Figura 5.5 - Tubo discretizado em 52 pontos nodais (48 + 4 duplos) e 9 pontos internos



Figura 5.6 - Tubo discretizado em 72 pontos nodais (68 + 4 duplos) e 15 pontos internos

A seguir são mostrados os erros médios para as tensões e deslocamento em formato de tabela e o seu respectivo gráfico de convergência.Conformemencionado anteriormente, o valor, em percentual, do erro é obtidocomparando-se com a solução analítica conhecida. Nas colunas das tabelas estão descritas as malhas conforme a quantidade de pontos nodais de contorno (ilustradas nas figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6).

Inicialmente são apresentados os resultados para as tensões radiais tanto em pontos nodais no contorno quanto em pontos internos, conforme mostrado na tabela 5.1. Não foram obtidos resultados recursivos para as tensões no contorno.

A figura 5.7 ilustra o comportamento dos resultados com o refinamento, nota-se que não ocorrem ganhos representativos com o aumento do refinamento de 52 pontos nodais para 72 pontos nodais.

Tabela 5.1 - Erro Médio da Tensão Radial

| | σrr | | | |
|----------|---|-------|-------|-------|
| | 20 pontos 36 pontos 52 pontos 72 pontos | | | |
| CONTORNO | 3,58% | 1,07% | 0,33% | 0,27% |
| INTERNO | 8,07% | 2,15% | 0,36% | 0,34% |



Figura 5.7 - Gráfico de convergência do erro médio da tensão radial

Verifica-se um melhor desempenho dos resultados nos pontos nodais do contorno obtidos diretamente, do que nos pontos internos, que são obtidos recursivamente, contrariando a expectativa observada em problemas de potencial.

Aqui são apresentados os resultados para as tensões angulares tanto em pontos nodais no contorno quanto em pontos internos, conforme tabela 5.2. A figura 5.8 ilustra o comportamento dos resultados com o refinamento, nota-se que não ocorrem ganhos representativos com o aumento do refinamento de 52 pontos nodais para 72 pontos nodais.

| | σθθ | | | |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 20 pontos | 36 pontos | 52 pontos | 72 pontos |
| CONTORNO | 3,82% | 0,92% | 0,33% | 0,20% |
| INTERNO | 3,61% | 0,80% | 0,36% | 0,18% |

Tabela 5.2 - Erro médio da tensão angular



Figura 5.8 - Gráfico de convergência do erro médio da tensão angular

Verifica-se o mesmo desempenho na qualidade dos resultados nos pontos nodais do contorno e dos pontos internos, contrariando a expectativa observada em problemas de potencial.

A seguir são apresentados os resultados para os deslocamentos radiais em pontos nodais no contorno,pontos internos e nos pontos recursivamente calculados, conforme tabela 5.3. A figura 5.9 ilustra o comportamento dos resultados com o refinamento, nota-se que não ocorrem ganhos representativos com o aumento do refinamento de 52 pontos nodais para 72 pontos nodais.

| | Ur | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 20 pontos | 36 pontos | 52 pontos | 72 pontos |
| CONTORNO | 3,38% | 0,84% | 0,28% | 0,17% |
| INTERNO | 3,51% | 0,93% | 0,31% | 0,19% |
| RECURSIVO | 3,33% | 0,84% | 0,27% | 0,13% |

Tabela 5.3 – Erro médio do deslocamento radial



Figura 5.9 - Gráfico de convergência do erro médio da deslocamento radial

Verifica-se o mesmo desempenho dos resultados nos pontos nodais do contorno, nos pontos internos e nos pontos recursivamente calculados, mesmo para malhas menos refinadas, contrariando a expectativa observada em problemas de potencial com malhas de menor refinamento.

Em síntese, esses resultados contrariaram completamente a expectativa gerada em torno do emprego do esquema recursivo. Para melhor avaliação, um novo exemplo é resolvido.

5.3 Viga engastada com carga na extremidade

Como segundo exemplo, foi considerada uma viga engastada, possuindo uma seção transversal retangular delgada de largura unitária e fletida sob a ação de uma força *P* aplicada na extremidade livre, conforme ilustra a figura 5.10. Os bordos

superior e inferior da viga estão livres da ação de cargas e sobre a extremidade x = 0 existe uma distribuição de forças cisalhantes cuja resultante é igual à força aplicada *P*. Estas condições podem ser satisfeitas por uma combinação apropriada de um cisalhamento puro de variação parabólica, vide figura 5.10 com unidades de medidas dimensionais em milímetros.



Figura 5.10 - Viga em Balanço, geometria do problema

As propriedades materiais empregadas são: módulo de elasticidade E = 1.000 e coeficiente de Poisson v = 0. Admitiu-se a condição de estado plano de tensões. Para fins de análise dos resultados utilizou-se a solução analítica da elasticidade demostrado por Timoshenko e Goodier [1980]. Nessa solução, os valores para as tensões normal (σ_{xx}), na equação 5.6, e de cisalhamento (τ_{xy}), na equação 5.7, e deslocamento vertical (u_y), na equação 5.8, são respectivamente dados por:

$$\sigma_{xx} = \frac{-Pxy}{I}$$
(5.6)

82

$$\tau_{xy} = \frac{-P}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$
(5.7)

$$u_{y} = \frac{P}{12EI} \left(2x^{3} + 2L^{2} (2l - 3x) + 3h^{2} (1 + \nu)(L - x) \right)$$
(5.8)

Onde *L* é o comprimento da viga, *I* é o momento transversal de inércia, h é a altura da viga, x é a distância horizontal e y a distância vertical cotada a partir do centro de coordenadas cartesianas.

As malhas discretizadas neste exemplo foram de 24 pontos nodais e 16 pontos internos, 44 pontos nodais e 81 pontos internos, 84 pontos nodais e 361 pontos internos e 184 pontos nodais e 361 pontos internos, conforme mostrado nas figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14, respectivamente. O tamanho do elemento (distância entre pontos nodais) foi dividido ao meio a cada refinamento de malha.



Figura 5.11 - Viga discretizada em 24 pontos nodais (20 + 4 duplos) e 16 pontos internos



Figura 5.12 - Viga discretizada em 44 pontos nodais (40 + 4 duplos) e 81 pontos internos



Figura 5.13 - Viga discretizada em 84 pontos nodais (80 + 4 duplos) e361 pontos internos



Figura 5.14 - Viga discretizada em 184 pontos nodais (180 + 4 duplos) e 361 pontos internos

A seguir são mostrados os erros médios para a tensão normal e deslocamento vertical em formato de tabela e o seu respectivo gráfico de convergência. Conforme mencionado anteriormente, o valor do erro foi calculado pela média dos valores dos quocientes dos módulos das diferenças entre a solução analítica e a solução numérica pelo maior valor analítico, sendo o resultado multiplicado por 100 por cento.

Inicialmente são apresentados os resultados para as tensões na direção *xx* tanto em pontos nodais no contorno quanto em pontos internos, conforme mostrado na tabela 5.4. A figura 5.15 ilustra o comportamento dos resultados com o refinamento, nota-se que não ocorrem ganhos representativos com o aumento do refinamento de 84 pontos nodais para 184 pontos nodais para os pontos nodais no contorno, diferentemente do que ocorre para os pontos internos.

| | σχχ | | | |
|----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| | 24 pontos | 44 pontos | 84 pontos | 184 pontos |
| CONTORNO | 28,00% | 9,40% | 1,30% | 0,90% |
| INTERNO | 14,40% | 9,20% | 2,20% | 0,80% |

Tabela 5.4 - Erro médio da tensão normal na direção xx



Figura 5.15 - Gráfico de convergência do erro médio da tensão normal na direção xx

Verifica-se um melhor desempenho dos resultados nos pontos internos, obtidos recursivamente, do que para os pontos nodais de contorno, mas apenas para a malha mais pobre. De certo modo isso reflete a expectativa observada em problemas de potencial.

A seguir são apresentados os resultados para os deslocamentos verticais em pontos nodais no contorno, pontos internos e nos pontos recursivamente calculados, conforme tabela 5.5. A figura 5.16 ilustra o comportamento dos resultados com o refinamento. Nota-se que não ocorrem ganhos representativos com o aumento do refinamento de 84 pontos nodais para 184 pontos nodais para os pontos nodais no contorno. No entanto, para os pontos internos e os novos pontos recursivos, ocorreu uma melhoria mais significativa. Isso aponta uma melhor taxa de convergência para a solução direta do que para as soluções recursivas, mas sem razão aparente.

| | $U_{\mathcal{Y}}$ | | | |
|-----------|-------------------|-----------|-----------|------------|
| | 24 pontos | 44 pontos | 84 pontos | 184 pontos |
| CONTORNO | 52,20% | 16,00% | 1,30% | 1,10% |
| INTERNO | 24,10% | 13,60% | 1,60% | 1,00% |
| RECURSIVO | 25,70% | 14,00% | 2,50% | 1,20% |

Tabela 5.5 – Erro médio do deslocamento na direção vertical



Figura 5.16 - Gráfico de convergência do erro médio do deslocamento na direção y

Em geral, verifica-se o mesmo comportamento de convergência dos resultados nos pontos nodais do contorno, nos pontos internos e nos pontos de contorno recursivamente calculados. No entanto observa-se que para a malha menos refinada, os pontos nodais do contorno apresentam piores resultados do que os resultados recursivos, tanto para os pontos internos e quanto para os pontos de contorno, tal como foi observado para a tensão σ_{xx} .

No entanto, para malhas com elementos com tamanhos distintos observa-se uma diminuição da qualidade do procedimento numérico, dado as características de montagem do sistema matricial de solução numérico.

Esse comportamento se assemelha ao que ocorre em problemas de potencial com malhas de menor refinamento, mas naqueles a equivalência entre o desempenho recursivo e o direto não ocorre tão rapidamente, ou seja, a curva de desempenho recursiva é sempre melhor.

A premissa é que o procedimento recursivo se baseia numa nova minimização de resíduos e, desse modo, possui um embasamento matemático, é preciso cogitar quais são os fatores presentes nos problemas de campo vetorial, como estes da elasticidade linear, que interferem no comportamento do esquema recursivo e não foram observados nos problemas de campo escalar.

Inicialmente vale destacar que de acordo com princípios da Física Matemática, numa região R do espaço, um campo vetorial arbitrário u(X) admite a seguinte representação geral, como a soma de um campo conservativo e outro solenoidal, Coimbra [1978].

$$u(x) = grad\phi(x) + rotv(x)$$
(5.7)

Os potenciais escalar $\Phi(X)$ e vetorial v(X) são chamados de Potenciais de Stokes (vide anexoA para maiores detalhes). Na elastodinâmica, esse princípio é usado comumente, para distinguir as ondas dilatacionais (ou acústicas) das ondas

89

rotacionais. Assim, na elastostática linear vale o mesmo princípio: um problema é composto por uma contraparte dilatacional, conservativa, e outra rotacional ou selenoidal. Os problemas de potencial escalar, nos quais o procedimento recursivo foi bem sucedido, foram irrotacionais.

Para aferir isso, o terceiro exemplo é basicamente um problema de flexão pura, onde não há distorções e seu conteúdo é basicamente dilatacional.

5.4 Barra em balanço submetidaà flexão pura

Para o terceiroproblema foi considerado uma barra fletida pela ação de dois conjugados *M*, iguais e de sentidos opostos, que atuam em um de seus planos principais. Tomando como origem das coordenadas o centróide da seção transversal coincidente com o plano principal da flexão, a teoria da flexão fornece para as componentes de tensão o valor de σ_{xx} máxima de 3 unidades de medida e $\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$, segundo figura 5.17.



Figura 5.17 - Barra em balanço submetida à flexão pura

As propriedades materiais empregadas são: módulo de elasticidade E = 1 e coeficiente de Poisson v = 0. Admitiu-se a condição de estado plano de tensões. Para fins de análise dos resultados utilizou-se a solução analítica da Elasticidade demostrada por Popov [1999]. Nessa solução, os valores para a tensão normal (σ_{xx}),na equação 5.8, e deslocamento vertical (u_y), na equação 5.9, são respectivamente dados por:

$$\sigma_{xx} = \frac{My}{I} \tag{5.8}$$

$$u_y = \frac{-Mx^2}{2EI} \tag{5.9}$$

Nestas últimas expressões, M é o momento fletor aplicado na viga, I o momento de transversal de inercia, x é a distância horizontaley a distância vertical do centro de coordenadas cartesianas.

As malhas discretizadas neste exemplo foram de 20 pontos nodais e 9 pontos internos; 32 pontos nodais e 54 pontos internos; 44 pontos nodais e 85 pontos internos; e 84 pontos nodais e 361 pontos internos, conforme mostrado nas figuras 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21, respectivamente.



Figura 5.18 - Barra discretizada em 20 pontos nodais (16 + 4 duplos) e 9 pontos internos


Figura 5.19 - Barra discretizada em 32 pontos nodais(28 + 4 duplos) e 54 pontos internos



Figura 5.20 - Barra discretizada em 44 pontos nodais(40 + 4 duplos) e 85 pontos internos



Figura 5.21 - Barra discretizada em 84 pontos nodais(80 + 4 duplos) e 361 pontos internos

A seguir são mostrados os erros médios para a tensão normal e deslocamento vertical em formato de tabela e o seu respectivo gráfico de convergência. Conforme mencionado anteriormente, o valor do erro, em percentual, é obtidopelacomparaçãodo valor numérico com a solução analítica conhecida. Nas colunas das tabelas estão descritas as malhas conforme pontos nodais de contorno visto discretização ilustrada nas figuras 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21.

Inicialmente são apresentados os resultados para as tensões na direção *xx* tanto em pontos nodais no contorno quanto em pontos internos, conforme mostrado na tabela 5.4. A figura 5.22 ilustra o comportamento dos resultados com o refinamento, nota-se que não ocorrem ganhos representativos com o aumento do refinamento de 44 pontos nodais para 84 pontos nodais.

94

| | σχχ | | | | |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|
| | 20 pontos | 36 pontos | 44 pontos | 84 pontos | |
| CONTORNO | 3,73% | 1,06% | 0,71% | 0,20% | |
| INTERNO | 1,03% | 0,36% | 0,27% | 0,10% | |

Tabela 5.6 - Erro médio da tensão normal



Figura 5.22 - Gráfico de convergência do erro médio da tensão normal

Verifica-se um melhor desempenho dos resultados nos pontos internos, que são obtidos recursivamente, do que para os pontos nodais de contorno, obtidos diretamente, refletindo a expectativa observada em problemas de potencial.

A seguir são apresentados os resultados para os deslocamentos verticais em pontos nodais no contorno, pontos internos e nos pontos recursivamente calculados, conforme tabela 5.5. A figura 5.23 ilustra o comportamento dos resultados com o refinamento.

| | Uy | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|
| | 20 pontos | 36 pontos | 44 pontos | 84 pontos | |
| CONTORNO | 4,09% | 1,56% | 1,15% | 0,42% | |
| INTERNO | 5,27% | 1,90% | 1,37% | 0,49% | |
| RECURSIVO | 3,05% | 1,19% | 1,16% | 0,47% | |

Tabela 5.7 - Erro médio do deslocamento vertical



Figura 5.23 - Gráfico de convergência do erro médio do deslocamento vertical

Verifica-se o mesmo comportamento de convergência dos resultados nos pontos nodais do contorno, nos pontos internos e nos pontos nodais calculados recursivamente. No entanto, observa-se que para todas as malhas, especialmente a menos refinada, o procedimento recursivo apresenta melhores resultados, assim como ocorre em problemas de potencial com malhas de menor refinamento.

6 CONCLUSÕES

A formulação do Método dos Elementos de Contorno para a solução de problemas de elasticidade tem os seus resultados validados por muitos testes e experiências realizadas por vários pesquisadores.De certo modo, os resultados mostrados confirmaram essa assertiva, pois em todos os exemplos as malhas mais refinadas conduziram a erros percentuais menores, através do uso de elementos lineares, tanto no cálculo do potencial quanto de sua derivada, em comparação com os resultados analíticos disponíveis. E estes resultados são o ponto de partida para avaliar as potencialidades do esquema recursivo.

A utilização do procedimento recursivo para recalcular valores no contorno e não apenas em pontos no interior do domínio, ainda está pouco discutido na literatura especializada, leva a erros numéricos percentuais ainda menores, quando se analisam problemas de campo escalar.

Entretanto, a generalidade observada nos problemas de campo escalar não pode ser aplicada globalmente nos problemas de elasticidade. O problema clássico da tubulação submetida à pressão interna demonstrou isso, no entanto é preciso levar em consideração os erros da discretização com elementos lineares ao se discretizar um perfil cilíndrico.

Confirmando a suspeita de que poderia ser o conteúdo rotacional da solução elástica seria o responsável pelo mau desempenho do esquema recursivo, foi resolvido um exemplo onde não havia distorção e os resultados obtidos ficaram de

97

acordo com os problemas de potencial, somado ao problema ter sido discretizado com malha regular.

Esse fator pode conter a chave para a solução do comportamento irregular do problema recursivo nos casos da elasticidade, mas não encerra a discussão, pois o problema da tubulação apresenta geometria cilíndrica com simetria angular, não apresentando rotações em sua solução. O coeficiente de Poisson adotado também foi igual a zero, desacoplando as equações vetoriais deste problema.

Com relação ao fundamento matemático do procedimento recursivo, que se baseia em nova minimização de resíduos quando se realocam os novos pontos fonte, é preciso cogitar em que ponto o modelo integral do MEC se distancia da sentença de resíduos ponderados equivalente. Uma possibilidade reside na constituição da equação integral (3.26), que é a equação integral do MEC original, e a forma final impressa por (3.27) e (3.28). A equação (3.26) é escalar e é a sentença do MEC equivalente à sentença de resíduos ponderados. Pela necessidade de se gerar equações distintas em maior quantidade, considerou-se a forma diádica da solução fundamental e sua derivada, o que resultou em uma forma vetorial para a equação integral do MEC. Isto pode ter conduzido a uma ruptura entre as relações de minimização existentes originalmente entre a equação do MEC e o Método dos Resíduos Ponderados.

Como sugestões para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação do esquema recursivo para Equação de Poisson e da Difusão-advecção. Sugere-se, também, a aplicação do mesmo método do trabalho presente em elementos quadráticos.

98

BIBLIOGRAFIA

- 01 ALIABADI, M. H., BREBBIA, C. A. E PARTON, V. Z. "Static and dynamic fracture mechanics", Southampton, CMP, UK, 1994
- 02 BREBBIA, C. A., "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, London, 1978.
- 03 BREBBIA, C.A., WALKER, S., **"Boundary Element Techniques in Engineering"**, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- 04 BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., "Boundary Element Techniques", Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- 05 BORESI, A. P. E CHONG, K. P., "Elasticity in Engineering Mechanics", Elsevier, New York, 1987.
- 06 COIMBRA A. L., "Lições de Mecânica do Contínuo", Ed. Edgard Blücher, Rio de Janeiro 1978.
- 07 DEN HARTOG, J. P., "Advanced Strength of Materials", MacGRAW-HILL BOOK, New York, 1952.
- 08 ELMORE, W.C, HEALD, M. A., "Physics of Waves", MacGRAW-HILL BOOK, New York, 1969
- 09 KANE, J. H., "Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics." Prentice Hall, USA, 1994.
- 10 KATSIKADELIS, J.T. "Boundary Elements Theory and applications" LSEVIERSCIENCE Ltd, The Boulevard, Langford Lane Kidlington, Oxford OX5 IGB, UK, 2002.

- 11 MALISKA, C. R, "Transferência De Calor e Mecânica Dos Fluidos", Ltc Editora, 2004.
- 12 LITTLE, R.W., "Elasticity", Prentice-Hall, New.Jersey, 1973.
- 13 LOEFFLER NETO, C. F, LOVATTE, E., BARRONCAS CORREA H. "Emprego Recursivo da Equação Integral do Método dos Elementos de Contorno em Problemas Governados pela Equação de Laplace", Artigo aprovado e apresentado no SIMMEC 2010, 26 a 28 de Maio de 2010 em São João del Rey, Minas Gerais.
- 14 LOEFFLER NETO, C. F.; WROBEL, L. C., "A Simple Procedure to Improve the Accuracy of the Boundary Element Method" Artigo Publicado e Apresentado na International Conference on Boundary Element Techniques, BE TEQ IX, 9 de Julho de 2011 - Sevilha – Espanha. Proceedings in CD ROM.
- 15 LOEFFLER NETO, C. F.; WROBEL, L. C., "Um Procedimento Simples para Melhorar a Precisão Numérica da Solução do Método dos Elementos de Contorno". In: XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2008, Belém - PA. Anais do XXXI CNMAC. Campinas : Sociedade Brasileira de Mecânica Computacional, 2008. v. Único. p. 1-13.
- 16 PARÍS. F.: CAÑAS. J. "Boundary Element Method Fundamental and applications", Oxford, 1997.
- 17 POPOV, ERGOR P., "**Mecánica de Sólidos**", Prentice-Hall Inc.,New Jersey, 1999.
- 18 REDDY, J. N., "An introduction to the finite element method". New York: McGraw-Hill, 1993
- 19 REYNA VERA-TUDELA, C. A.. "Elastodinâmica Bidimensional através do Método dos Elementos de Contorno com dupla reciprocidade", Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 1999.

- 20 TELLES, J.F, "BoundaryElementTechniques", Oxford, 1984.
- 21 TELLES, J. C. F. E BREBBIA, C. A., "Elastoplastic boundary element analysis", in proc. Europe, Springer-Verlag Berlin, 1980.
- 22 TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., "**Teoria da Elasticidade**", Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 1980.

Apêndice A – Campos Irrotacionais

Um campo u(X) é chamado campo vetorial potencial ou conservativo se é um campo dos gradientes de um campo escalar suave $\Phi(X)$, isto é, Coimbra [1978]:

$$u(x) = grad\phi(x) \tag{A.1}$$

A função $\Phi(X)$ é chamada potencial escalar do campo u(X). Nesta condição prova-se que:

$$rot \quad u(x) = 0 \tag{A.2}$$

Ou seja, todo campo potencial é irrotacional. Já um campo vetorial solenoidal u(X) é o campo da rotação de outro campo vetorial suave, isto é:

$$u(x) = rot \quad v(x) \tag{A.3}$$

onde $\mathbf{v}(X)$ é o vetor potencial do campo $\mathbf{u}(X)$.

Um campo vetorial u(X) pode ser simultaneamente potencial e solenoidal, ou seja, pode ser ao mesmo tempo irrotacional e livre de fontes ou sumidouros numa

da região R. Nesse caso, tem-se u=grad $\Phi(X)$ e como divu(X)=0 (incompressibilidade) então:

$$div grad\phi(x) = lap\phi(x) = 0$$
 (A.4)

Numa região R, um campo vetorial arbitrário u(X) admite a seguinte representação geral:

$$u(x) = grad\phi(x) + rotv(x)$$
(A.5)

Sendo, portanto, a soma de um campo conservativo e outro solenoidal. Os potenciais escalar $grad\Phi(X)$ e *vetor* v(X) são chamados de Potenciais de Stokes.

Já Little [1973] é mais restritivo e diz que pelo uso do Teorema de Helmholtz, qualquer campo vetorial que desaparece no infinito pode se representado pela soma de um vetor solenoidal $u_s(X)$ e um vetor irrotacional $u_p(X)$:

$$u(x) = u_s(x) + u_p(x) + u_c(x)$$
(A.6)

Onde $u_c(X)$ é um campo constante, Elmore e Heald [1969] fazem afirmação semelhante, no qual qualquer vetor, desde que sujeito a certas restrições matemáticas, pode se expresso como a soma de uma campo irrotacional e um campo solenoidal, o que sugere claramente a possibilidade de separar conteúdos irrotacionais dos solenoidais num campo vetorial.

Na elasticidade pode-se exemplificar isso facilmente, a partir das Equações de Navier:

$$(\lambda + \mu)\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \mu\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right] = 0$$

$$(\lambda + \mu)\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right] + \mu\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right] = 0$$
(A.7)

Podem-se reorganizar as equações anteriores de modo que a dilatação volumétrica θ , dada por:

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_{1'}} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$
(A.8)

Possa aparecer explicitamente, ou seja:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right] = (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 = 0$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right] = (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 = 0$$
(A.9)

No caso da expansão volumétrica θ ser nula, ou seja, haver apenas distorção e rotação tem-se:

$$\mu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right] = 0$$

$$\mu \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right] = 0$$
(A.10)

Essas equações correspondem a um problema de campo vetorial, no qual dois deslocamentos, u_1 e u_2 precisam ser contabilizados. No caso oposto, considerando-se irrotacionalidade, deve vigorar a condição:

$$\mu\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right] = 0 \tag{A.11}$$

Desse modo, pode-se eleger uma função potencial $\Phi(X)$ tal que:

$$u_{1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_{1}}$$

$$u_{2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_{2}}$$
(A.12)

Naturalmente:

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \nabla^2 \phi$$
(A.13)

Logo, o primeiro termo de cada uma das Equações de Navier pode ser escrito como:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 \phi = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) = \nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) = \nabla^2 (u_1)$$

$$(A.14)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 \phi = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) = \nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) = \nabla^2 (u_2)$$

Substituindo essas duas últimas relações nas Equações de Navier, tem-se:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \mu\nabla^2 u_1 = (\lambda + \mu)\nabla^2 u_1 + \mu\nabla^2 u_1 = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 u_1 = 0$$

$$(A.15)$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \mu\nabla^2 u_2 = (\lambda + \mu)\nabla^2 u_2 + \mu\nabla^2 u_2 = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 u_2 = 0$$

Essas equações também correspondem a um problema de campo vetorial, no qual dois deslocamentos, u_1 e u_2 precisam ser contabilizados. No entanto, nessa última categoria, é possível eleger variáveis escalares cujas derivadas representam u_1 e u_2 , de modo que uma única equação escalarrepresente o problema.

Com essa intenção, aplica-se o operador divergente em ambas as equações anteriores, que por estarem desdobradas, consiste na aplicação de derivadas parciais em cada uma delas:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \nabla^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = 0$$
(A.16)
$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \nabla^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0$$

Somando-as, tem-se:

$$\nabla^{2}\left(\frac{\partial u_{1}}{\partial x_{1}}\right) + \nabla^{2}\left(\frac{\partial u_{2}}{\partial x_{2}}\right) = \nabla^{2}(\theta) = 0$$
(A.17)

Ressalte-se que mesmo que as equações relacionadas à distorção estejam desacopladas, não será possível eleger uma função única capaz de representá-las em termos bidimensionais, através de uma estrutura escalar. As exceções, naturalmente, consistem de teorias nos quais o próprio campo possa ser simplificado o suficiente para ser representado por uma única variável (como no caso do movimento anteplano e certos casos de torção) e se possa eleger uma única variável estratégica para representar completamente o comportamento do problema.