UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

WELINGTON RIBEIRO DA SILVA

O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA PÚBLICA: UMA (INTER)INVENÇÃO PEDAGÓGICA NO 7º ANO COM O CONCEITO DE FRAÇÃO

Vitória

2011

WELINGTON RIBEIRO DA SILVA

O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA PÚBLICA: UMA (INTER)INVENÇÃO PEDAGÓGICA NO 7º ANO COM O CONCEITO DE FRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de mestre em Educação, na linha de pesquisa Educação e Linguagens, sublinha de Linguagem Matemática vinculada ao campo científico de Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

Vitória
2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Silva, Welington Ribeiro da, 1975-
S586e O ensino de matemática na escola pública: uma (inter)invenção pedagógica no 7º ano com o conceito de fração/ Welington Ribeiro da Silva. – 2011.
260 f.: il.

Orientadora: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.
Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Números racionais. 3. Autoestima. 4. Frações. 5. Confiança. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

WELINGTON RIBEIRO DA SILVA

O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA PÚBLICA: UMA (INTER)INVENÇÃO PEDAGÓGICA NO 7º. ANO COM O CONCEITO DE FRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Educação.

Aprovada em 02 de junho de 2011

COMISSÃO EXAMINADORA

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Carlos Eduardo Ferraço
Universidade Federal do Espírito Santo

Ivone Martins de Oliveira

Professora Doutora Ivone Martins de Oliveira
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Sandra Aparecida Fraga da Silva
Instituto Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Lilian Nasser
Universidade Federal do Rio de Janeiro/SENAI

Dedico este trabalho aos meus pais Elias e Celita, por me amarem e terem ensinado a mim e aos meus irmãos as primeiras e mais importantes palavras que marcam minha vida**,** o **respeito** e a **honestidade**.

Aos meus irmãos Edinei e Eliza, pela oportunidade de poder lhes dizer mais uma vez o quanto eu os amo.

À minha esposa Elediany, por me amar como sou com minhas limitações e nunca ter exigido mais do que posso ser. Que soube enfrentar a minha ausência para o cumprimento de mais esta etapa, a ela meu carinho e amor eterno. Por ser, junto com minha família, minha maior alegria.

AGRADECIMENTOS

Agradecer é como convidar para uma festa, é o desejo de compartilhar um momento de confraternização e cumplicidade. E uma festa, como um agradecimento, ao materializar-se, limita o que se desejaria ilimitado. Não seria possível agradecer a todos. Felizmente, são muitos.

Ao Senhor Deus, por estar sempre presente abençoando minha vida. O temor do Senhor é o princípio do saber, mas os loucos desprezam a sabedoria e o ensino (Prov. 1:7).

À minha incansável orientadora professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, pela oportunidade que me deu, por confiar no projeto e pelo caminhar que se propôs desde o início, tornando este, de fato, um estudo realizado no fazer pedagógico da sala de aula. Por não me deixar desamparado em momento algum, quer ela estivesse na Alemanha, quer no Brasil. Sempre incansável na sua função. Pela maneira como me acolheu, sabendo dosar e respeitar o ritmo de meus estudos, além da compreensão, amizade e contribuições sábias. Uma amizade que irei conservar para o resto da minha vida. Uma professora que causa inquietações capazes de provocar um desequilíbrio cognitivo, levando-me a concluir que é possível instigar alguém a querer procurar novos desafios e acreditar que pode seguir aprendendo. Por ter sido um anjo constituído por Deus para me abençoar.

Ao professor Doutor Carlos Eduardo Ferraço. De alguma forma, passamos muitos anos de nossa vida, lembrando de nossos professores que sempre deixam exemplos. Alguns desses exemplos darão contorno à nossa caminhada, ajudarão a modelar atitudes, a formar valores. Agradeço de coração pelo privilégio de aulas e ensinamentos inesquecíveis. Pelas importantes contribuições na ocasião de nossa qualificação e por estar conosco neste momento tão importante.

À professora Doutora Ivone Martins de Oliveira. Professores mostram caminhos, grandes professores ensinam a caminhar. Agradeço pelos seus ensinamentos e por me proporcionar momentos belíssimos de reflexão sobre a perspectiva da teoria sócio-histórica, quanto ao processo de construção do sujeito, a partir das relações sociais e do papel que o outro exerce nesse processo, principalmente, enfocando os estudos de Vygotsky e Bakhtin. Pelas significativas contribuições na ocasião de nossa qualificação e por estar neste momento importante.

À professora Doutora Lilian Nasser. Queria poder abraçá-la e agradecer-lhe por ter me proporcionado momentos de aprendizado no I Encontro Nacional de Ensino e Aprendizagem de Matemática - VIII ECEM, ocorrido na UFES e em oficina no X ENEM – X Encontro Nacional de Ensino de Matemática em Salvador, ambos ocorridos 2010. Por aceitar, prontamente, fazer parte da banca examinadora do meu trabalho e pelas contribuições que fez a este trabalho.

À professora Doutora Sandra Aparecida Fraga da Silva. O professor que transforma é um ser mais flexível, feliz, repleto de sonhos e pleno de amor que busca novos conhecimentos e que tem consciência da sua importância no Universo. Quero agradecer de coração por você ser assim e tê-la em minha banca, uma amiga e que tanto contribuiu para minha formação.

Aos amigos do Grupo de Estudos (GEEM/UFES), todos eles envolvidos na Educação e apaixonados pelo que fazem. Pelo convívio e pelo tanto que contribuíram para a realização deste trabalho.

À Prefeitura Municipal de Guarapari/ES, pelo apoio, adequando meu horário de trabalho na escola municipal do município, para a realização do Mestrado, pela confiança e por acreditar na seriedade, no compromisso e na importância da pesquisa desenvolvida, tendo em vista a melhoria do ensino de matemática no município.

Aos professores, colegas do mestrado e funcionários do PPGE/UFES, pela convivência, pela amizade, pelo companheirismo, pela ajuda mútua, pelas leituras e momentos de aprendizagem.

Como professor devo saber que sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho; intervindo educo e me educo.

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho investiga a aquisição do conceito de número racional em sua representação fracionária em um grupo de 36 estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental, numa escola pública do município de Guarapari/ES. Os alunos desenvolveram atividades sobre fração durante cerca de um ano. Em 2009, foi realizado um estudo piloto com os alunos no sexto ano. Em 2010 (segundo semestre), investigou-se esses alunos por meio de atividades de pesquisa e registros desenvolvidos nas aulas. Foi planejada e realizada uma intervenção pedagógica com trinta e nove aulas. Essas consideravam o desenvolvimento cognitivo, afetivo, social e moral dos estudantes. E, ao mesmo tempo, aproveitavam experiências anteriores deles com frações. A intervenção pedagógica permitia-lhes retomar conceitos iniciais de fração, já estudados em anos anteriores. Buscou-se instigar os alunos e compreender estratégias cognitivas usadas por eles, conduzindo-os no processo de (re)descoberta e (re)construção dos diferentes significados de fração. Isso ocorreu enquanto iam experimentando e manipulando com materiais concretos e/ou representações gráficas. No estudo, nós descrevemos algumas estratégias cognitivas utilizadas pelos alunos. Verificamos desconexão entre a compreensão dos alunos sobre divisão e fração. De início, e mesmo no decorrer da pesquisa, as estratégias dos alunos se limitavam a enfatizar o significado de parte-todo. Nas fases iniciais de nosso trabalho, constatamos uma forte tendência de alguns alunos em associar a ideia de fração em figuras geométricas como a relação entre as partes pintadas e as partes não pintadas de uma figura. Além de demonstrarem não compreender as outras ideias e significados de fração como parte-todo, razão, divisão ou quociente, e operador multiplicativo. Durante o caminhar da investigação levou-se em consideração o conhecimento informal dos alunos, e as diferentes estratégias utilizadas por eles em atividades individuais e em grupo. Isso valorizou conhecimentos, ações, estratégias cognitivas e diálogos dos alunos em aula. E promoveu interações entre eles e com o professor a respeito de matemática e, em particular, do conceito de fração. Isso proporcionou um olhar sobre os diversos significados associados com o tema. Ou seja, permitiu diversidade de processos de ensino e aprendizagem, assim como reflexão sobre as estratégias usadas pelos alunos e procedimentos de ensino do professor. O trabalho resgatou a autoestima de alunos que se sentiam anteriormente incapacitados de aprender matemática por terem duas ou mais reprovações anteriores em matemática. Os alunos se sentiram capazes de aprender, resolver atividades e problemas matemáticos e gostar de estudar matemática. Os resultados revelam a importância da atuação do aluno nas tarefas de aprendizagem por meio da reconstrução de significados de fração na experiência escolar para que ocorra uma situação de aprendizagem significativa. A pesquisa aponta a necessidade de explorar a aquisição de números racionais em várias situações e em diferentes contextos, e assim repensar o ensino de fração na escola.

Palavras-chave: matemática – ensino fundamental; números racionais; fração; estratégias cognitivas; autoestima; reconstrução de conceito.

ABSTRACT

The present work investigates the acquisition of the concept of rational number in its fractional representation in a group of 36 seventh grade students of the fundamental schooling, in a public school of Guarapari/ES. The students developed activities about fraction for about one year. In the year 2009, it was realized a pilot study with the students from this class when they were in the sixth grade. In the year 2010 (in the second semester), the students were investigated by research activities and records developed in the lessons. It was planned and implemented a pedagogical intervention with thirty nine classrooms. These considered the cognitive, affective, social and moral development of the students. And, at the same time, they took advantage of their previous experiences with fractions. The pedagogical intervention let them look again to initial concepts of fraction already studied in previous school years. It searched to instigate the students, and to comprehend cognitive strategies used by them, while conducting them in the process of (re)discovering and (re)constructing the different meanings of fraction. This occurred while they were experimenting and manipulating with concrete materials and/or graphical representations. In the study we describe some cognitive strategies used by the students. We verified disconnection between students' comprehension about division and fraction. At the beginning, and during the research, the students` strategies were limited to emphasize the part-whole meaning of fraction. At the initial phases of the work, we observed a strong tendency from some students in associating the fraction idea in geometrical shapes as the relationship between the colored parts to the non-colored ones of a shape. In addition to that, they showed not to comprehend the other ideas and meanings of fraction as part-whole, ratio, division or quotient and of multiplicative operator. During the investigation path, it was taken into consideration the students` informal knowledge, and the different strategies used by them in both individual and group activities. This praised students` knowledge, actions, cognitive strategies and dialogues in classroom. And this promoted interactions among the students and with the teacher with respect to mathematics, and in particular, the fraction concept. This offered a view about the several meanings linked with fraction. In other words, it offered diversity of teaching and learning processes as well as reflections about students` strategies and teacher`s teaching methods. The work restored students` self-esteem who felt completely incapable of learning mathematics because they had remained previously in the same school year two or more time due to their several failure experiences with mathematics. The students felt able to learning mathematics, solving activities and problems and enjoying studying mathematics. The results display the importance of student`s action in the learning tasks through the reconstruction of fraction meanings in the school experience in order to occur a meaningful learning situation. The investigation points out the need to explore the acquisition of rational numbers in several situations and in different contexts, and in this way to rethink the teaching of fraction in school.

Keywords: mathematics – fundamental schooling; rational numbers; fraction; cognitive strategies; self-esteem; reconstruction of concept.

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1 – Livro A 70
Fig. 2 – Livro B 72
Fig. 3 – Livro C 74
Fig. 4 – Disciplinas que mais reprovaram 100
Fig. 5 – Séries que reprovaram 100
Fig. 6 – Grau de satisfação dos alunos 114
Fig. 7 – Reg. do aluno Tião - A1 123
Fig. 8 – Reg. do aluno Duglas -A2 124
Fig. 9 – Reg. da aluna Lorrainy - A3 125
Fig. 10 – Reg. do aluno Dominguinho-A9 126
Fig. 11 – Reg. do aluno Vieira-A11 126
Fig. 12 – Reg. do aluno Lopes-A13 127
Fig. 13 – Reg. do aluno Dudu-A19 127
Fig. 14 – Reg. do aluno Fred-A14 128
Fig. 15 – Reg. do aluno Júlio-A18 128
Fig. 16 – Reg. da aluna Cadma-A20 128
Fig. 17 – Reg. da aluna Fernandes-A23 128
Fig. 18 – Reg. do aluno Luiz-A21 129
Fig. 19 – Reg. do aluno Bruno-A15 129
Fig. 20 – Reg. do aluno Lobo-A16 130
Fig. 21 – Reg. da aluna Moreninha-A17 130
Fig. 22 – Reg. do aluno Dudu-A19 130
Fig. 23 – Reg. do aluno Nego-A33 131
Fig. 24 – Imagem produzida pelo professor para o problema 139
Fig. 25 – Reg. da aluna Lorrainy-A3 139
Fig. 26 – Reg. do aluno Dominguinho-A9 140
Fig. 27 – Reg. do aluno Lobo-A16 140
Fig. 28 – Reg. do aluno Dudu-A19 140
Fig. 29 – Reg. da aluna Fernandes-A23 140
Fig. 30 – Reg. do aluno Tião-A1 141
Fig. 31 – Reg. do aluno Douglas-A2 141
Fig. 32 – Reg. do aluno William-A6 141
Fig. 33 – Reg. do aluno Vieira-A11 141
Fig. 34 – Reg. do aluno Silva-A10 142
Fig. 35 – Reg. do aluno Lopes-A13 142
Fig. 36 – Atividade 143
Fig. 37 – Reg. da aluna Cadma-A20 144
Fig. 38 – Reg.do aluno Dias-A25 146
Fig. 39 – Retirada do livro de Santos e Rezende 1996 (pág. 37) 148
Fig. 40 – Reg. dos alunos Dj-A27 e Jubileu-A24 149
Fig. 41 – Reg. do aluno Dudu-A19 150
Fig. 42 – Reg. do aluno Tião-A1 154
Fig. 43 – Reg. do aluno Douglas-A2 154
Fig. 44 – Reg. da aluna Lorrainy-A3 154
Fig. 45 – Reg. do aluno Dominguinho-A9 154
Fig. 46 – Reg. do aluno Dudu-A19 154
Fig. 47 – Reg. do aluno Dj-A27 155
Fig. 48 – Reg. Fernandes-A23 155

Fig. 49 – Peças do Tangram 157
Fig. 50 – 1ª Etapa..158
Fig. 51 – 2ª Etapa..158
Fig. 52 – 3ª Etapa..158
Fig. 53 – 4ª Etapa..159
Fig. 54 – 5ª e 6ª Etapas..160
Fig. 55 – Desenvolvimento da 1ª Etapa 160
Fig. 56 – Traçando a diagonal e repartindo ao meio a figura 160
Fig. 57 – Encontrando as peças 1 e 2 do Tangram.......................................161
Fig. 58 – Encontrando a peça 3 do Tangram 161
Fig. 59 – Encontrando as peças 4 e 5 do Tangram.......................................161
Fig. 60 – Encontrando as peças 6 e 7 do Tangram.......................................161
Fig. 61 – Tangram 162
Fig. 62 – Figuras no Tangram 162
Fig. 63 – Figuras no Tangram 162
Fig. 64 – A fração nas peças do Tangram 165
Fig. 65 – A fração nas peças do Tangram 165
Fig. 66 – A fração nas peças do Tangram 166
Fig. 67 – A fração nas peças do Tangram 166
Fig. 68 – A fração nas peças do Tangram 166
Fig. 69 – A fração nas peças do Tangram 167
Fig. 70 – Passos para a construção do Tangram..167
Fig. 71 – Tangram construido...168
Fig. 72 – Construindo o Tangram no EVA...168
Fig. 73 – Tangram no EVA...168
Fig. 74 – Atividade do livro 171
Fig. 75 – Atividade do livro 173
Fig. 76 – Atividade do aluno Júlio-A18 176
Fig. 77 – Atividade do livro 178
Fig. 78 – Demonstração da atividade..180
Fig. 79 – Tipos de geoplanos 183
Fig. 80 – Materiais para a construção de um geoplano.................................184
Fig. 81 – Figuras no geoplano...185
Fig. 82 – Figuras no geoplano...186
Fig. 83 – Figuras no geoplano...187
Fig. 84 – Figuras no geoplano...187
Fig. 85 – Figuras no geoplano...188
Fig. 86 – Figuras no geoplano circular 188
Fig. 87 – Figuras no geoplano circular 189
Fig. 88 – Figuras no geoplano circular 189
Fig. 89 – Figuras no geoplano circular 190
Fig. 90 – Figuras no geoplano circular 192
Fig. 91 – Atividades no geoplano 192
Fig. 92 – Atividades no geoplano 193
Fig. 93 – Atividades aplicadas em sala 199
Fig. 94 – Atividades aplicadas em sala 199
Fig. 95 – Atividades aplicadas em sala 200
Fig. 96 – Atividades aplicadas em sala 200
Fig. 97 – Atividades aplicadas em sala 201
Fig. 98 – Atividades aplicadas em sala 201

Fig. 99 – Atividades aplicadas em sala 202
Fig. 100 – Atividades aplicadas em sala 202
Fig. 101 – Atividades em grupo...227
Fig. 102 – Solução de um grupo 227
Fig. 103 – Solução da aluna Lorrainy-A3 228
Fig. 104 – Solução do aluno Vieira-A11 228
Fig. 105 – Solução do aluno Dominguinho-A9 228
Fig. 106 – Solução do aluno Dudu-A19..228
Fig. 107 – Solução do aluno Tião-A1 228
Fig. 108 – Solução do aluno Douglas-A2 228
Fig. 109 – Solução do aluno Lobo-A16 229
Fig. 110 – Solução da aluna Fernandes-A23 229
Fig. 111 – Solução do aluno Dudu-A19..229
Fig. 112 – Atividade em grupo...231
Fig. 113 – Ativ. envolvendo cartões com frações 233

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Informações sobre reprovações. 98
Quadro 2 – Respostas dos alunos no início da pesquisa.......................................104
Quadro 3 – Respostas dos alunos à metáfora relacionando a matemática com algum animal...105
Quadro 4 – Preferências por disciplinas escolares 110
Quadro 5 – Opiniões dos alunos sobre a aprendizagem 118
Quadro 6 – Respostas dos alunos para as atividades de 30/09/10 134
Quadro 7 – Respostas dos alunos na atividade 01...171
Quadro 8 – Respostas dos alunos na atividade 02...174
Quadro 9 – Respostas dos alunos na atividade 03...175
Quadro 10 – Respostas dos alunos na atividade 04...177
Quadro 11 – Respostas dos alunos na atividade 05...178
Quadro 12 – Respostas dos alunos na atividade 1 com o geoplano.......................190

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 17

1.1. Trajetórias de vida e caminhada profissional 19

1.2. Motivação e justificativa 26

1.3. Delineando a investigação 29

1.4. Objetivo e questão da pesquisa 31

1.5. Estrutura da dissertação 35

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO E REVISÃO DA LITERATURA 37

2.1. Ensino de matemática, concepções e autoconhecimento de professores e alunos frente à matemática 37

2.2. Um pouco da história de frações 42

2.3. Revisão de pesquisas sobre frações e números racionais 47

2.4. Fração e seus significados 54

2.5. O processo de ensino e de aprendizagem de fração 62

2.6. O estudo de fração em alguns livros didáticos 66

3. METODOLOGIA 78

3.1. Reflexões sobre o estudo exploratório inicial 79

3.2. Procedimentos metodológicos do estudo definitivo 83

3.2.1. Sujeitos e local do estudo 84

3.3. Procedimentos de coleta de dados 85

3.4. Reflexões sobre a importância de registros, fotos e estratégias pedagógicas 86

3.5. Procedimentos de escolha de alunos e de análise de dados 87

4. DISCUSSÃO DE RESULTADOS 89

4.1. Conhecimentos da turma, diálogos, hábitos de estudo dos alunos e comprometimento com a escola 89

4.1.1. Informações sobre a turma e alunos 91

4.1.2. Nossas reflexões enquanto professor/pesquisador iniciante 95

4.1.3. Trajetória escolar dos alunos do 7º ano 97

4.2. Crenças e concepções dos alunos sobre a matemática 101

4.2.1. Comparativo das respostas dos alunos sobre suas crenças em relação à matemática 103

4.2.2. Informações sobre a matemática em 2009/2010 e comparação das respostas 104

4.2.3. Comprometimento e hábitos de estudo dos alunos 109
4.2.4. Identificando o planejamento escolar e frequência dos alunos 117

4.3. Conhecimentos iniciais sobre frações, crenças e concepções relativas à fração 122

4.3.1. Refletindo sobre nossa trajetória e redefinindo o percurso 135

4.4. Alguns episódios de ensino de fração 137

4.4.1. O uso do Tangram no aprendizado de frações 156
4.4.2. A utilização do Geoplano na Educação Infantil e Ensino Fundamental..184

4.5. Trajetória escolar do aluno Dudu-A19 no decorrer da pesquisaração...194

5. CONCLUSÕES FINAIS 204

5.1. Reflexões sobre procedimentos de ensino e de aprendizagem observados na intervenção 208

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS...213

ANEXO I...219

ANEXO II..239

ANEXO III...241

1. INTRODUÇÃO

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 2001, p. 45).

Construir o texto foi muito difícil, principalmente este primeiro capítulo. Foram dias e noites, pensando em como escrevê-lo. Sentimentos de ansiedade, angústia, medo e nervosismo não me faltaram. Era uma imensa sensação de impotência diante do teclado do computador. Como poderia organizar e colocar da melhor forma possível, para o leitor, a riqueza de detalhes vividos no cotidiano da escola (turma) pesquisada? Como narrar detalhes acontecidos com o grupo de alunos e articular os conhecimentos compartilhados com vários autores lidos?

Inicialmente, optei por descrever um pouco de minha história de vida, por acreditar na perspectiva de que, ao descrever minhas experiências, estaria tecendo os fios de minha formação. De certa forma, tentei explicitar a relação entre minha história de vida e a escolha do tema que desenvolvo nesta dissertação. Desculpem-me por me expor assim, mas penso ser mais fácil e útil contar aquilo que vivemos do que estimular um conhecimento, independente da pessoa e de uma observação sem observador. Na verdade, acredito que não haja nenhuma teoria que não contenha, mesmo implicitamente, um fragmento de autobiografia.

A partir de conversas com os colegas, em um grupo de estudos[1] e de pesquisa sobre a prática pedagógica, percebi a importância de me conhecer profissionalmente, de refletir sobre minhas aulas e dar importância ao papel do aluno na construção de seu conhecimento. Nessa trajetória de estudo e de vivências com outros professores, aprendi que existem diferentes possibilidades para explorar e trabalhar conceitos matemáticos. Aprendi também a interagir com os alunos, solicitar que eles trabalhem individualmente e em pequenos grupos e avaliar, com diversos instrumentos, se ocorreu algum tipo de aprendizagem (SANTOS, 1997). Foi

[1] Grupo de estudos em educação matemática – [GEEM – ES], com foco em estudos sobre prática pedagógica e avaliação. O grupo iniciou na UFES em 2006, coordenado pela Profª. Drª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner. Atualmente, este grupo conta com a participação de alunos de graduação, professores da UFES e do IFES, professores de rede pública e privada que ensinam matemática em diferentes níveis escolares, e alunos do PPGE/UFES.

procurando me conhecer profissionalmente no grupo de estudos e, ao mesmo tempo, buscando ler, estudar e compreender alguns autores, que vários horizontes se abriram em minha prática profissional. Aprendi a ouvir, conhecer e compreender o que meus alunos pensam de matemática e de seu ensino. Assim, aprendi que diferentes meios e não somente os fins de uma atividade podem ajudar meus alunos no processo de aprendizagem (LORENZATO, 2006; SANTOS, 1997).

O presente estudo aborda uma intervenção pedagógica com alunos do 7º ano (antiga 6ª série) do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Guarapari/ES, envolvendo o tema fração. Este tema emerge da prática pedagógica como professor de matemática no ensino fundamental, onde foi possível constatar dificuldades que os alunos têm no estudo de frações.

Acreditamos no potencial da escola na formação do indivíduo e como agente promotor de interação social. O ambiente favorece e promove essa interação. A compreensão das relações sociais, que acontecem no ambiente escolar, tornam-se importantes para o estudo do processo de aprendizagem, pois reconhecemos que essas relações influenciam a postura do aluno em determinada disciplina. A atitude do aluno frente à matemática, as crenças e concepções que ele possui sobre essa disciplina, seu ensino e sua aprendizagem são decorrentes das interações sociais em seu contexto sociocultural (GÓMEZ CHACÓN, 2003; SANTOS, 1997).

Concordamos com Gadotti (1992) ao afirmar

> Todo ser humano é capaz de aprender e de ensinar, e, no processo de construção do conhecimento, todos os envolvidos aprendem e ensinam. O processo de ensino-aprendizagem é mais eficaz quando o educando participa, ele mesmo, da construção do seu conhecimento, fazendo “seu” o conhecimento e não apenas “aprendendo” o conhecimento (p. 70).

Um verdadeiro processo educativo não se restringe à aquisição de habilidades e conhecimentos, mas pressupõe o desenvolvimento do indivíduo, para que lhe seja assegurado o direito de participar ativamente no seio da sociedade e do trabalho, no lazer, na cultura, etc. Nesse sentido, entendemos que o conhecimento não se reduz ao produto, é também processo. Uma coisa é assimilar conhecimentos na forma privada de apropriação, e outra é a construção democrática do próprio conhecimento.

1.1. Trajetórias de vida e caminhada profissional

> A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao tamanho original (Albert Einstein).

Em minha casa, sou o segundo filho. Meus pais eram agricultores e sempre quiseram trabalhar apenas como tais. No entanto, assim que se casaram e tiveram o primeiro filho, mudaram-se para o Rio de Janeiro. Lá trabalharam durante quatorze anos em outras atividades. Nesse período, tiveram mais dois filhos, eu e minha irmã. No ano que completei oito anos de idade, houve uma mudança em nossas vidas. Meus pais receberam uma propriedade como herança de minha avó materna. Decidiram deixar a cidade e retornar à zona rural. Voltaram mais precisamente para a região norte do Espírito Santo, onde moram até hoje.

Sou filho de agricultores e até meus vinte anos de idade, sempre ajudei meus pais no dia a dia do trabalho na propriedade, no preparo do solo e na realização dos plantios e colheita de produtos agrícolas. Trabalhei com culturas anuais e perenes de milho, feijão, arroz e café. E também ocupei-me com as criações de pequeno, médio e grande porte, tais como aves, suínos e bovinos. Embora meus pais não tivessem concluído nem mesmo os anos iniciais do ensino fundamental, eles sempre me estimularam a estudar. Eles me matricularam na escola pública do município de Ecoporanga, onde cursei todo o ensino fundamental e médio. Era uma escola que se localizava na sede do município a dez quilômetros da comunidade onde morava. Chegar até a escola não era tarefa fácil, uma vez que, na época, não contava com transporte público. Guardo até hoje grande carinho e satisfação pelo aprendizado recebido nessa escola, por tão importante aprendizado escolar e ensinamento de vida vivenciado em tal ambiente. No entanto, esse foi, sem dúvida, um período no início da minha caminhada escolar que deixou muitas marcas em minha vida. Lembrar essa fase me dá um nó na garganta.

Em 1996, um ano após ter concluído o Ensino Médio, fui convidado pela escola do município a assumir uma substituição por licença maternidade, como professor de matemática para alunos do ensino fundamental, no noturno. Experiência que me motivou a ingressar em curso superior para me tornar professor de matemática. Em meados do ano de 1999, já trabalhava há mais de dois anos, de forma efetiva, como professor de matemática no ensino fundamental, sem ter a formação apropriada.

Matriculei-me no curso de licenciatura plena em matemática na UNIJUI – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Em 2002, eu me transferi para o Centro Universitário São Camilo – Cachoeiro de Itapemirim. Conclui nessa instituição de ensino de Cachoeiro, em 2004, a graduação e, no ano seguinte, na Faculdade da Região dos Lagos – FERLAGOS, instituição de ensino superior do Estado do Rio de Janeiro, uma especialização em nível de Pós-Graduação (Lato Sensu) também em matemática.

No período de 1997 a 2009, ministrei aulas de matemática em uma Escola Família Agrícola do município de Alfredo Chaves/ES, com alunos oriundos, especificamente, do meio rural. Neste ambiente de trabalho, pude utilizar muitos dos conhecimentos construídos na prática de trabalho na agricultura e pecuária com meus pais. De 2009 até a presente data, passei a trabalhar em uma escola municipal de ensino fundamental no município de Guarapari/ES, com alunos de zona urbana.

Na Escola Família Agrícola (EFA), os professores não são responsáveis apenas pelo processo de ensino e aprendizagem do aluno na sala de aula, mas também buscam fazer do próprio espaço físico e propriedade agrícola da escola, um ambiente propício a diferentes momentos de aprendizagem[2]. Tudo contribuía para a prática educativa e para a valorização da cultura campesina. O espaço-tempo da EFA tinha as representações teórico-metodológicas instituídas pela Pedagogia da Alternância, porém era inventado e/ou reinventado pelos sujeitos todos os dias.

O sentimento de pertença e de responsabilidade para com o processo de ensino na escola e no desenvolvimento da comunidade era assumido pelos alunos, pelos pais e por nós, monitores, enredando-nos nesse processo e nos assumindo também como tal, em referência ao trabalho do professor na escola família. Numa EFA, não é possível assumir algumas aulas, fazer a sua parte e ir embora. A pedagogia da alternância nos envolve, levando-nos a desenvolver um trabalho que transcende o fazer pedagógico da sala da aula, através do conteúdo trabalhado, proposto pela disciplina de matemática. Compromete-nos com a interação e com a vida dos alunos, seja no período em que se encontram na escola e/ou fora dela, ou mesmo

---

[2] Os professores, na Pedagogia da Alternância, são denominados de monitores porque nessa perspectiva vislumbra-se um atendimento que transcende o trabalho da sala de aula, que acompanha o aluno no período em que ele está na escola e no período em que está em casa.

em suas moradias, participando com a família dos trabalhos na propriedade e comunidade. Vivenciar essas questões não foram momentos de puro prazer, significaram renúncias, um saber ouvir, próprio de quem vive a realidade do campo, valoriza e considera o trabalho familiar como instrumento indispensável para a formação do cidadão. Vivenciar essas questões significaram também, saber ouvir e aprender com aqueles que, embora não tivessem nenhum ou com pouco estudo acadêmico, sabiam propor e defender o que queriam.

Jesus (2007), em sua dissertação sobre *Saberes e Formação de Professores na Pedagogia da Alternância,* cujo objetivo era investigar como são construídos os saberes dos professores (Monitores) das Escolas Famílias Agrícolas do Movimento de Educação Promocional do Espírito Santo (MEPES[3]), descreve que a primeira Escola Família Agrícola surgiu na França. A data oficial da primeira escola é 21 de novembro de 1935. Foi criada por iniciativa de um grupo de camponeses e de um pároco que acreditavam ser possível criar uma escola que atendesse às necessidades do meio rural e que ajudasse a ampliar as possibilidades dos conhecimentos básicos do jovem do campo.

De acordo com Nosella (1997)[4], a história das Escolas Famílias é a história da convicção de um camponês e também pároco Abbé Granereau, comprometido com o meio rural francês, que passava pelo descaso e injustiças. Isso o levou a romper com o paradigma urbano rumo a uma nova perspectiva educacional que transformasse seu entorno. A partir da sua lida com a terra, com os problemas que o meio rural vinha sofrendo surgiu a ideia dessa escola ideal: *foi de fato, nesta luta íntima com a terra, neste trabalho diário nos campos que, pouco a pouco, entendi o que havia de potencialmente grande na vida do homem do campo e também o que lhe faltava* (GRANEREAU, apud NOSELLA, 1997, p.19). Sua maior preocupação estava em relação à falta de interesse do Estado e da Igreja para com o meio rural. O discurso empreendido era o do urbano provedor da ascensão social e do lugar onde o jovem poderia reunir todas as condições para vencer na vida.

[3] Instituição filantrópica de ensino - Movimento de Educação Promocional do Espírito Santo.
[4] A história da iniciativa das EFAs na Itália e na África pode ser encontrada no trabalho de Paolo Nosella, conforme nossa bibliografia.

O padre jesuíta Humberto Pietrogrande (1976) conta em seu livro que essa experiência chegou ao Brasil nos anos 60 com seu trabalho e sob a influência das Scuole Della Famiglia Rurale da região de Veneto, na Itália, local de origem do jesuíta[5]. Nessa época, o Brasil passava por grandes transformações econômicas e políticas. O êxodo rural era intenso, muitas famílias deixavam suas terras e migravam para os centros urbanos em busca de melhores condições de vida. Por outro lado, crescia o processo de industrialização e a necessidade de mão de obra que servisse ao sistema capitalista industrial.

Sem dúvida, o trabalho que desenvolvi na Escola Família Agrícola, no município de Alfredo Chaves/ES, foi muito importante, pois proporcionou aprendizagens que hoje julgo significativas. Por exemplo, não só ter condições de pensar e problematizar algumas questões no âmbito da educação, mas também ter possibilitado uma experiência profissional com um “jeito” diferente de conceber ensino e aprendizagem. Enfim, aprendi na prática e na teoria uma pedagogia que se contrapõe muitas vezes à educação estatal, tradicional e que, por isso, é muito questionada e criticada. Acreditarmos na importância do trabalho desenvolvido pelas famílias nas comunidades rurais e a importância do ensino de qualidade para o fortalecimento das comunidades rurais e consequentemente dos grandes centros. Entendemos que através do ensino podemos excluir por vez o mito da cidade grande e a ideologia do Jeca Tatu da zona rural.

Desde a minha formação enquanto aluno de ensino fundamental, ensino médio e ensino superior, acreditei que o trabalho rural e a forma de desenvolver o mesmo contribuíram para o trabalho como professor de matemática realizado com meus alunos. Sempre tive em mente e confiei que os anos de trabalho desenvolvidos na propriedade rural com minha família e a forma como o próprio trabalho era conduzido, procurando superar as dificuldades e limitações financeiras e de recursos naturais, eram fontes de aprendizagem. Creio que o conhecimento acadêmico e a experiência vivida ao longo desses quatorze anos de trabalho em sala de aula me exigiram e têm me ensinado a me esforçar cada vez mais, a fim de exercer a docência de forma mais significativa e responsável.

---

[5] A Itália foi o primeiro país depois da França a desenvolver essa experiência.

O trabalho diário na propriedade rural de meus pais durante doze anos permitiram que o conhecimento vivido (prático) se aliasse ao conhecimento teórico (acadêmico) obtidos até o ensino médio. Os conhecimentos juntos conseguem demonstrar e concretizar vários aprendizados. Por exemplo, o significado real de algumas unidades de medida em matemática e sua aplicabilidade, naturalmente utilizadas na agricultura, tais como: o centímetro ou metro (espaçamento necessário em determinadas culturas); volume, metro quadrado e metro cúbico (capacidade, área ocupada pela planta ou mesmo número total de determinada criação em um certo espaço); área ocupada por determinada cultura.

As atividades desenvolvidas na propriedade com a família permitiram internalizar e construir conceitos de proporção de adubo e de quantidade ideal de água por planta; média de produção por planta e por área; cálculo de período entre o plantio até a colheita de determinada cultura; média de sacos de determinado produto (arroz ou café) por quilograma, após ser beneficiado; potencial, análise e correção das principais características produtivas do solo (NPK – Nitrogênio [N], Fósforo [P] e Potássio [K]); cálculo médio ideal do período entre o nascimento até o abate para o comércio da criação. Aprendi também sobre a média de peso ideal (kg e/ou arroba); média ideal de litros de leite por vaca; estabelecer diferenças e saber calcular as relações existentes e utilizadas diariamente entre quilograma e arroba; sacos de um determinado produto e a razão deste após ser o produto beneficiado. Bem como a relação existente entre lote de terra, hectare e alqueire, dentre tantas outras relações. Compreender, por exemplo, a necessidade prática do arredondamento de determinada quantidade.

Além dos conhecimentos matemáticos que o trabalho rural me permitiu desenvolver, destaco o aprendizado relacionado às normas de convivência e valores. Tudo isso foi fundamental para me constituir como pessoa e profissional na educação. Preocupo-me sempre com o desenvolvimento escolar e humano de meus alunos, pois sei que eles são oriundos de realidades diversas.

Em agosto de 2006, ao participar do I Simpósio Capixaba de Pesquisa em Educação Matemática, promovido pelo PPGE/UFES, tive a oportunidade de conhecer o trabalho desenvolvido pelo grupo de estudos em educação matemática na UFES. Nesse grupo de estudos em educação matemática [GEEM-ES], do qual faço parte desde 2007, nós discutimos nossas práticas cotidianas em sala de aula de matemática. Lá também estudamos e dialogamos sobre textos e livros de matemática, de educação e de educação matemática. Aprendemos a observar e reconhecer cada um de nós profissionalmente, e a conduzir experimentos de ensino nas turmas em que atuamos. Nessas aprendizagens, enfrentamos os desafios de redigir sobre os procedimentos de ensino e de compartilhar os mesmos oralmente e/ou por escrito com outros professores. Os encontros semanais também nos permitem tomar consciência de nós mesmos, enquanto professores que ensinam matemática.

Na escola família (EFA) de Alfredo Chaves, permaneci por doze anos e, em 2009, fui para Guarapari/ES, uma realidade totalmente diferente daquela de onde morei e trabalhei. Outra cultura, outras organizações de trabalho e outras expectativas. Nesse sentido, busquei empreender-me nessa nova realidade. A entrada no curso de Mestrado no PPGE/UFES, nesse ano, significou a ampliação de meu universo e possibilitou-me a apropriação de muitos conhecimentos e ideias. Tomei conhecimento e apropriei-me de discussões atuais de educação, de teorias, e de diferentes perspectivas que emergiam nos debates sobre as carências educacionais, dificuldades de aprendizagem, formação profissional inicial e continuada, etc. Passei a pensar mais sobre ensino, aprendizagem e avaliação de matemática, e outras questões que perpassam nossa prática.

Ao assumir o novo trabalho na escola municipal de Guarapari, passei a ter acesso a alunos com uma vivência totalmente nova para mim. Alunos que apresentavam uma visão distorcida de escola, diferente da que até então eu tinha vivenciado com alunos do meio rural. Passei a ver alunos destruindo e danificando um bem coletivo importante para a comunidade, muitas vezes pouco valorizado pelos mesmos.

Valorizo a minha prática enquanto professor de matemática na rede pública de ensino e no potencial do trabalho realizado na escola pública. Sei que o primeiro passo para melhorar a educação é entender a situação em que ela se encontra. Reconhecendo a situação da educação e a complexidade dela em meu município, em meu Estado e em meu país, reconheço que, como educador, sou um dos principais agente de melhoria da educação.

Olhando para o passado, penso que nem eu nem meus pais, como também meus irmãos e familiares, meus colegas de escola que tantos foram, ou mesmo os docentes das escolas pelas quais passei, imaginaram que eu iria tão longe em meus estudos. Até chegar neste momento único e tão importante de descrever um trabalho de Mestrado em Educação Matemática.

Como a professora Vânia Maria Santos-Wagner (minha orientadora), que não se cansa em defender e em valorizar a importância da escola pública, também creio que há escolas que são asas e que nos encorajam a voar. Escolas capazes de fazer com que os alunos possam sentir alegria ao sair de casa para ir até ela, onde o professor sinta prazer em ensinar e gostar de seus alunos. Afinal, assim como ocorreu em minha vida, a escola abriu meus caminhos para uma vida melhor.

O corpo é o sujeito da educação, porque é nele que está a vida. É o corpo que quer aprender para poder viver. É ele que dá as ordens. Nesse sentido, a inteligência de cada ser humano é um instrumento do corpo desse ser, cuja função é ajudá-lo a viver. A escola pública me permitiu e permite voar pelos caminhos do mundo, ensinou-me a compreender que não existe o saber, a verdade, a certeza, mas saberes, verdades, certezas e muitas incertezas.

Com minha inserção no mestrado, em 2009, passei a ser provocado a ler diferentes obras e a realizar trabalhos de pesquisa. Período este em que passei a ver o ambiente escolar, do qual estava fazendo parte, como um campo propício para desenvolver uma investigação. Passei a ler diferentes teóricos que, aos poucos, foram me proporcionando condições de encontrar referências e discussões interessantes sobre a prática em sala de aula e o ensino de matemática. Dentre eles, Santos (1994, 1995, 1997) nos aponta a necessidade de tomada de consciência que tanto um futuro professor quanto professor regente deve ter sobre seus conhecimentos. Ela afirma que "um professorando/a [...] precisa estar consciente de quem ele/ela é em termos de seu conhecimento, concepções e atitudes sobre a educação e a disciplina que ele/ela estará lecionando, e a motivação que ele/ela tem para aprender e ensinar" (SANTOS, 1995, p. 120).

1.2. Motivação e justificativa

> Na escola, a matemática é uma ciência ensinada em um momento definido por alguém de maior competência. Na vida, a matemática é parte da atividade de um sujeito que compra, que vende, que mede e encomenda peças de madeira, que constrói paredes, que faz o jogo da esquina (CARRAHER, CARRAHER, SCHLIEMANN, 2003, p. 19).

Alguns autores (SANTOS, 1994, 1995, 1997; SANTOS; REZENDE, 1996; NUNES; BRYANT, 1997; MERLINI, 2005) afirmam que boa parte dos alunos apresenta dificuldades ao abordarmos o conteúdo de frações em sala de aula. Nossa experiência de quatorze anos nos faz acreditar que alguns alunos nem relacionam o uso de frações às situações cotidianas. Por exemplo, alguns alunos não percebem que medidas de tempo, medidas de capacidade e outras podem ser representadas na forma fracionária. Alguns alunos também não reconhecem que uma fração possa ser representada na forma decimal ou em forma de porcentagem. Logo, entendemos ser válido um estudo que analise a aprendizagem do aluno sobre frações.

Na vida cotidiana, as frações surgem como representações de quantidades, tanto na linguagem oral quanto na escrita, manipuladas em diferentes campos, como na música, na biologia, na química, na culinária, na engenharia, entre outros. Seu ensino e aprendizado desempenha papel fundamental no desenrolar de outros conteúdos matemáticos, como os de proporção, probabilidade e porcentagem, fortalecendo o desenvolvimento mental e cognitivo dos alunos. Seu entendimento está ligado a uma das ideias importantes da matemática, qual seja determinar relações de divisão que se encontram estabelecidas entre o numerador e o denominador da fração.

Ressaltamos que a matemática não é apenas uma disciplina na vida escolar, ela faz parte da vida e está implicada, explicita ou implicitamente, em muitas atividades cotidianas. Dividir objetos com os colegas, gastar a mesada, lidar com moedas de diferentes valores, calcular o tempo e distância, fazer compras e vendas são atividades que necessitam de habilidades matemáticas. Essas atividades realizadas na vida cotidiana, muitas vezes não são vistas pelos alunos como ‘matemática’, entretanto, para realizá-las, é necessário respeitar princípios matemáticos e, frequentemente, usar técnicas matemáticas aprendidas na escola, ou fora dela (NUNES, BRYANT, 1997).

Já existem estudos e pesquisas no campo de matemática referentes aos números fracionários (SANTOS; REZENDE, 1996; SANTOS, 1997; NUNES; BRYANT, 1997; NUNES, CAMPOS, MAGINA, BRYANT, 2005; CARAÇA, 2010/1938; MERLINI, 2005). Segundo estes autores, a aprendizagem da fração ainda é um obstáculo enfrentado por alunos e professores. Devemos, então, continuar estudando e investigando esse conceito e como ele é aprendido, a fim de entendermos sua complexidade e descobrirmos formas de explorá-lo e ensiná-lo para propiciar aprendizagem na escola.

Ao analisar nossa própria prática docente, como professor de matemática para alunos do ensino fundamental, foi-nos possível constatar que alguns conteúdos nos despertavam maior curiosidade de pesquisa. Dentre eles, por ordem de prioridade, estavam: as quatro operações (em específico, a compreensão da operação de divisão); conceito de fração e operações com fração; e geometria plana (por perceber que, muitas vezes, os alunos encontram dificuldade em aplicar, na prática, os conceitos trabalhados em sala); e medida de capacidade. Em 2009, diferentes situações ocorridas no cotidiano escolar nos motivaram a investigar o tema de fração.

Em 2009, desenvolvemos um estudo exploratório piloto com atividades, envolvendo fração em uma turma de 36 alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental da escola municipal de Guarapari/ES. Nesse trabalho, constatamos que os alunos do 6º ano que participaram do estudo só reconheciam as frações com a ideia de parte-todo associadas a modelos de pizza, bolo, barra de chocolate, figuras geométricas etc. Situação semelhante foi vivenciada no mesmo ano, com 26 alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Alfredo Chaves.

Ainda no ano de 2009, trabalhamos com 15 professores das séries iniciais do ensino fundamental em um programa de formação continuada (Pró-letramento em matemática do Centro de Formação Continuada – CEFOCO/UFES, BRASIL, 2008). Constatamos que o tema “fração” também apresentava dificuldades para esses professores. O material preparado para os cursistas era direcionado e buscava auxiliar os professores que ensinam matemática nas séries iniciais a compreenderem fração (BRASIL, 2008). No entanto, os 15 professores encontravam muita dificuldade de compreensão do material e do assunto. Eles afirmaram:

"*ensinar fração não é uma tarefa fácil, uma vez que são muitos os fatores e regras associadas a elas. Para ensinar esse tema, o professor precisa realmente saber matemática".* Em seus depoimentos no grupo, observamos que 6 professoras mencionaram que ensinar fração não é fácil e que sentem dificuldades com o tema. Alguns informam que apenas trabalham com desenhos e para pintar figuras como sugerido nos livros (Registros das 15 professoras no final do Anexo I).

Schön (2000/1998) considera que as crenças, os valores, as superstições que professores possuem estão relacionadas com o ensino, a aprendizagem, os alunos, e os conteúdos e que todos esses aspectos influenciam a prática na sala de aula, a reflexão sobre a prática e na ação desenvolvida na prática. Utiliza um termo que chama de *profissional reflexivo,* usado ao comentar sobre a necessidade do professor (instrutor) estar atento como um pesquisador, para compreender as questões relacionadas ao sucesso dos alunos no cotidiano. Ele afirma que os momentos de reflexão-na-ação não são tão fáceis de serem identificados isoladamente, mas são importantes para a imediata significação na ação. O autor considera ainda, que "na reflexão-na-ação, o repensar de algumas partes de nosso conhecer-na-ação leva a experimentos imediatos e a mais pensamentos que afetam o que fazemos na situação em questão e talvez em outras que possamos considerar como semelhantes a ela" (p. 34). Ele faz um contraponto com a reflexão-na-ação com a reflexão sobre a reflexão-na-ação considerando que

> A reflexão-na-ação é um processo que podemos desenvolver sem que precisemos dizer o que estamos fazendo [...] é claro que, sermos capazes de refletir-na-ação é diferente de sermos capazes de refletir sobre nossa reflexão-na-ação, de modo a produzir uma boa descrição verbal dela. E é ainda diferente de sermos capazes de refletir sobre a descrição resultante (SCHÖN, 2000/1998, p. 35).

Destacamos que foi importante esse trabalho realizado com os professores ao abordarmos o tema fração. Enfatizamos com o grupo a necessidade de buscarmos sempre dar visibilidade ao que estamos fazendo no trabalho com os alunos. Se procurarmos estar atento como um pesquisador a fim de compreender os alunos, nós vamos aprender enquanto ensinamos. E por meio da prática de reflexão-na-ação nós temos a oportunidade de repensar nosso conhecer-na-ação docente.

Minha experiência docente de anos anteriores, e as atividades em 2009 com os professores das séries/anos iniciais, e o estudo exploratório com os alunos do 6º ano me motivaram a conceber esta investigação de mestrado. Assim, pensamos em rever e ampliar os conhecimentos de frações dos alunos do 7º ano (6ª série) que tinham participado do estudo exploratório. Por isso, construímos um trabalho sobre fração para auxiliar a aprendizagem deles. E essa investigação nos levou a avaliar a nossa prática docente com o desenvolvimento de reflexões a partir do trabalho aplicado no processo de ensino e aprendizagem de fração.

O documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN de matemática (BRASIL, 1998) destaca que fração, apesar de ser um conteúdo do ensino fundamental, apresenta dificuldade para alunos em níveis escolares posteriores. Observamos que essa dificuldade persiste até mesmo em estudantes universitários. Às vezes, eles ainda não entendem o significado de número racional, sentem dificuldades quando efetuam cálculos com as operações de frações e não reconhecem dízimas periódicas como sendo frações. Portanto, acreditamos na relevância do presente estudo como uma intervenção pedagógica no 7º ano, retomando o conceito de fração já explorado em anos anteriores.

1.3. Delineando a investigação

> Todas as nossas palavras serão inúteis, se não brotarem do fundo do coração. As palavras que não dão luz aumentam a escuridão (Madre Teresa de Calcutá).

No início da vida escolar, algumas pessoas desenvolvem pela matemática um dentre dois tipos de sentimentos opostos: paixão, por parte de uma minoria, ou aversão, por parte de uma maioria. Por isso, são poucos alunos interessados em aprender esta disciplina. Por meio de nossa experiência em sala de aula, enquanto aluno e hoje como professor, percebo com certa tristeza que, em alguns casos, os professores não estão isentos de culpa no ‘afastamento da matemática’ de crianças, adolescentes ou jovens, e jovens adultos (GÓMEZ CHACÓN, 2003). Afinal, não é difícil encontrar pessoas que tenham estudado com um professor de matemática que lhes deixou desagradáveis lembranças. O outro lado também é verdadeiro, porque encontramos alunos amantes da matemática que se recordam, com afeto, de algum saudoso professor que lhes abriu as portas do trabalho com números, formas e outros conceitos matemáticos.

Santos e Rezende (1996) comentam que pesquisadores nacionais e estrangeiros identificam inúmeras dificuldades que as crianças enfrentam ao trabalhar com números naturais e as quatro operações, frações e decimais. As autoras afirmam que a complexidade muitas vezes presentes para os alunos decorre do fato de terem de mudar as concepções que possuem referente a uma quantidade numérica. Segundo elas, Hiebert & Behr[6] (1988) afirmam que:

> As operações aditivas e multiplicativas com números racionais, assim como os próprios números racionais, estão abertas a muitas interpretações novas e distintas em comparação com as operações com números naturais (p. 4) [...] Crianças não percebem um número racional, ou fração, como um simples número. A ideia de que fração é um par de números naturais [isolados] persiste em muitas crianças por um período de tempo considerável mesmo depois de terem iniciado o estudo de números racionais. [...] O conceito de "número racional" é expansivo – é parte de um todo, um operador, uma razão, e um quociente. [...] A necessidade de coordenar estas diversas interpretações requer um entendimento mais profundo dos conceitos e das inter-relações entre eles (p. 6, apud SANTOS; REZENDE, 1996, p. 12).

Em nossa experiência profissional, percebemos que o estudo de fração gera dificuldades de aprendizagem para alguns alunos pelos motivos citados por Santos e Rezende (1996). E tal dificuldade leva esses alunos a sentirem-se desmotivados e inseguros para estudar fração, compreender o significado de fração como um número e realizar atividades. Consequentemente, afasta os alunos do gosto pelo estudo de matemática e desse conteúdo matemático. Por esses motivos, buscamos organizar este trabalho de intervenção pedagógica, enquanto professor e pesquisador iniciante, a fim de procurar (re)ensinar frações, levando em conta as diversas interpretações apontadas acima para que o aluno possa compreender a fração como representando um número racional.

O interesse pela matemática pode ser descoberto ou (re)descoberto por qualquer pessoa, mesmo por aquelas que possuem crenças negativas sobre a matemática. Conhecimentos podem ser (re)construídos e podemos criar diferentes espaços para que a matemática seja trabalhada. Ou seja, estamos conscientes de que a matemática pode abrir novas possibilidades para qualquer pessoa na escola e na vida.

---

[6] HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.). **Research agenda for mathematics education**: number concepts and operations in the middle grades. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

Informações iniciais, coletadas em um estudo exploratório realizado na escola em 2009 com os alunos da turma de 5ª série/6º ano, confirmam a importância em analisar crenças, concepções e atitudes em relação à matemática (Ver Anexo I). Objetivamos compreender algumas das atitudes e conhecimentos dos alunos em relação à matemática e, especificamente ao tema fração. Constatamos que os alunos quando foram solicitados para exibir situações de fração, utilizavam a forma mais comum para representar uma fração no desenho, indicando a ideia de parte-todo. E alguns alunos associavam nestes desenhos a ideia de fração como razão entre as partes, pois consideravam como fração a parte pintada para a parte não pintada.

Notamos que os alunos tinham dificuldades ao representar uma fração em um desenho correspondente. Também era difícil identificarem a necessidade em se considerar a unidade em relação ao número de partes de mesma área em que a mesma foi dividida. Encontramos inúmeros questionamentos por parte dos alunos, tais como: Como transformar uma fração em um número? O que devo considerar para representar em cima (numerador) e embaixo (denominador) em uma fração, a parte pintada ou a parte não pintada? Uma fração pode ser considerada como número? No dia, a dia as frações realmente são necessárias ou podem ser substituídas por números?

Realmente, tudo o que foi descrito e vivenciado no estudo exploratório em 2009 apontaram para a necessidade dessa pesquisa. Assim, construímos e desenvolvemos atividades de investigação que fossem ao encontro das dificuldades constatadas. Ou seja, procuramos desenvolver uma intervenção pedagógica na 6ª série/7º ano, que auxiliasse os alunos a compreender o conceito de fração com seus diferentes significados e o conjunto dos números racionais na sua representação fracionária.

1.4. Objetivo e questão da pesquisa

> Quando a escola promove uma condição de aprendizado em que há entusiasmo nos afazeres, paixão nos desafios, cooperação entre os partícipes, éticas nos procedimentos, está construindo a cidadania em sua prática, dando as condições para a formação dos valores humanos

> fundamentais, que são centrais entre os objetivos da educação (BRASIL, 1999, p. 269).

A partir de leituras sobre o tema, diálogo com professores de matemática, e nossa prática docente, constatamos que costumeiramente, nós, professores, damos por entendidas coisas que não estão claras para os alunos no estudo de fração. Algumas vezes, utilizamos perguntas idênticas às que foram trabalhadas no conceito de fração associada com a ideia de parte-todo em um todo, sendo um modelo contínuo para avaliar se ocorreu aprendizagem em outros contextos, abrangendo significados diferentes de fração. O que faz o aluno buscar respostas fragmentadas, fazendo parecer que entendeu. No entanto, quando o aluno é questionado em outras situações que envolvam, por exemplo, pensar em uma fração de um todo, onde esse todo é um conjunto discreto de elementos, ele nem sempre consegue responder a tal questionamento. Por tudo que já foi dito, trabalhamos em nossa pesquisa de intervenção pedagógica no 7º ano, retomando o conceito de fração e seus significados. Nossa questão de pesquisa foi:

Que aprendizagens alunos de uma 6ª série/7º ano de uma escola pública exibem sobre o conceito de fração em um processo de exploração e (re)construção desse conceito?

Esse nosso questionamento norteador traz embutido outro questionamento sobre procedimentos de ensino que o professor pesquisador está usando no processo de (re)ensinar e (re)construir significados sobre fração como um número. E lembrando que o número fracionário deve ser trabalhado em diversos contextos para explorar os significados de parte-todo, quociente, razão e operador multiplicativo. Ou seja, neste estudo vamos implicitamente buscar algumas respostas para: ***que procedimentos de ensino utilizados pelo professor contribuem para a compreensão e aprendizagem de alunos sobre alguns dos diferentes significados de fração?***

Afinal, embora possa parecer elementar para o professor entender que fração é um número que expressa uma quantidade, a partir de um valor que é dividido por um determinado número de partes iguais entre si, isso nem sempre ocorre com o aluno. No caso específico do ensino de fração, essa relação não é tão fácil de ser construída e compreendida nem por uma criança nem por um adolescente no ensino fundamental. Porque, algumas vezes, esse ensino encontra-se reduzido simplesmente à transmissão de passos e regras para encontrar frações do tipo um meio, um quarto, um terço e um quinto de figuras geométricas que lembrem pizza, bolo ou barra de chocolate. Trabalha-se apenas com esse significado de fração e com a repetição de procedimentos para realizar as operações e para a resolução de exercícios.

Os alunos precisam perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinados problemas. Nem sempre um número natural consegue exprimir a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão, pois existe a possibilidade de que a resposta seja um número racional. Além de algumas dificuldades com frações já mencionadas, como o aluno será capaz de compreender que uma fração representa um novo número na reta numérica? E como será capaz de utilizar essa informação em uma situação real, se for instigado a pensar de maneira mais ampla sobre fração e a buscar outras representações e significados associados com a mesma? Nós precisamos observar todas as questões e aspectos até aqui comentados para construir atividades que possibilitem uma compreensão mais abrangente do conceito de fração por parte dos alunos.

Sendo assim, o objetivo central desta pesquisa consistiu em ***compreender estratégias e raciocínios utilizados por alunos da 6ª série/7º ano do ensino fundamental de uma Escola Municipal de Guarapari/ES durante o processo de intervenção pedagógica retomando o conceito de fração***. As noções intuitivas dos alunos constituíram nosso ponto de partida. Iniciamos investigando conhecimentos espontâneos dos alunos do 7º ano, referentes ao tema, assim como, compromisso deles com estudo e escola, valorização da escola e sentimento de pertencimento ao ambiente escolar. Ou seja, discutimos com eles sobre o objetivo da pesquisa, comprometimento deles com os estudos, valor das disciplinas escolares e, em particular, matemática para a formação deles como cidadãos. Essas informações auxiliaram para planejar e desenvolver a intervenção de ensino.

Em 2010, propomos esse trabalho em uma turma de 7º ano por reconhecer que os alunos ainda tinham lacunas de compreensão do significado de fração, mesmo após terem estudado o tema em turmas de 1ª à 4ª série (atuais 2º a 5º ano). Já tínhamos trabalhado no ano de 2009, em um estudo piloto com essa turma. Nossa experiência com ensino fundamental e médio nos fazia crer que o professor de matemática fosse um elo fundamental no processo de ensino e aprendizagem. O professor deve intervir no processo pedagógico, modificando suas ações e estimulando os alunos a participar do processo de construção e compreensão de conceitos. Com essa preocupação, pensamos em alguns objetivos específicos e questionamentos associados aos mesmos. Listamos todos a seguir.

Objetivos específicos

A. Identificar e analisar estratégias e raciocínios utilizados pelos alunos do 7º ano do ensino fundamental para resolver problemas e atividades que envolvam o conceito de número fracionário, no que diz respeito aos significados: parte-todo, quociente, razão e operador multiplicativo.
B. Verificar se aprendem significados de fração e se existem semelhanças entre estratégias e raciocínios utilizados pelos alunos para obter as respostas e se ampliam suas aprendizagens.
C. Identificar a metodologia utilizada pelo professor para o ensino de fração e refletir sobre ela.

Para atingir esses objetivos específicos, nós estamos implicitamente buscando respostas a outros questionamentos auxiliares, diretamente relacionados aos mesmos, que são:

1A. Que estratégias e raciocínios os alunos de 7º ano utilizam para resolver atividades com fração?

2B. Como os alunos demonstram que aprenderam os diferentes significados associados com a ideia de fração e que ampliaram a noção que tinham de fração como parte-todo?

3C. Que procedimentos de ensino o professor pesquisador utilizou? Que reflexões o professor pesquisador fez e que aprendizagens obteve sobre a prática pedagógica e a pesquisa realizada?

Tendo em vista as complexidades de um pesquisador iniciante para planejar, desenvolver, organizar e interpretar informações e relatar uma pesquisa, algumas decisões foram tomadas. Destacamos que as complexidades ainda se ampliaram com o desafio de aprender a desenvolver pesquisa na própria sala de aula. Por todos esses motivos, não tivemos a pretensão de abranger todo o estudo sobre os números fracionários. Portanto, restringimos nossa sequência didática para a introdução desse tema.

1.5. Estrutura da dissertação

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. O capítulo inicial compreende o objeto de estudo, nossos questionamentos iniciais e descreve nossa trajetória de vida profissional. Indica a motivação e a justificativa do trabalho de pesquisa realizado, bem como os objetivos e questionamentos da pesquisa. Por fim, descreve a estrutura da dissertação.

O capítulo dois traz uma revisão de literatura e as perspectivas teóricas. Apresentamos um recorte histórico do surgimento do conceito de número fracionário do ponto de vista matemático e da história do surgimento dos números fracionários em diferentes culturas. Examinamos as frações do ponto de vista histórico, fazendo um breve relato de seu surgimento e desenvolvimento, chegando até os dias atuais, discutindo como têm sido entendidas dentro da matemática. Realizamos uma análise, em linhas gerais, de alguns livros didáticos utilizados pelos professores de matemática na escola pesquisada.

No capítulo três, descrevemos os percursos metodológicos. A metodologia adotada no processo de coleta de dados e informações foi pautada numa concepção de pesquisa qualitativa. Nesse mesmo capítulo, tratamos do conceito de número fracionário sob o ponto de vista da educação matemática. Apresentamos o público-alvo (sujeitos), a escolaridade e as características sociais da escola, os instrumentos diagnósticos (atividades) e a sequência de ensino proposta.

No quarto capítulo, trazemos a análise de alguns resultados e procuramos articular essa análise com a revisão teórica. Examinamos alguns episódios da intervenção pedagógica e realizamos uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos pela aplicação dos instrumentos.

E no quinto capítulo, registramos nossas conclusões e fazemos sugestões tanto para a sala de aula como para futuras pesquisas sobre o assunto. Finalizamos com referências bibliográficas e anexos.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO E REVISÃO DA LITERATURA

> Um complicado sistema de frações para calcular câmbios de moedas. É uma das ironias da história que a vantagem principal da notação posicional – sua aplicabilidade a frações – escapasse quase completamente aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência (BOYER[7], 1994/1974, p. 185-186).

Neste capítulo, trazemos um breve levantamento histórico de frações e uma revisão bibliográfica de trabalhos que abordam e/ou investigam os números racionais. Buscamos autores que nos auxiliaram a planejar atividades direcionadas sobre fração e a usar a metodologia de resolução de problemas para (re)ver e (re)ensinar frações.

Sentimos a necessidade de contextualizar nossa investigação com o que tem sido discutido em educação matemática sobre fração e seus diferentes significados, e sobre o processo de ensino e aprendizagem de fração. Assim, recorremos a dissertações, livros e artigos especializados em educação matemática. Traçamos, inicialmente, um panorama de alguns dos temas que orientaram a pesquisa realizada.

2.1. Ensino de matemática, concepções e autoconhecimento de professores e alunos frente à matemática

Diante da necessidade de ler e refletir sobre a prática pedagógica, procuramos nos autoavaliar em relação a planejamentos e procedimentos de ensino e também nos aproximar cada vez mais do pensamento do aluno. Conscientizamo-nos da importância de nos conhecermos enquanto professores e de conhecermos o aluno a fim de saber como pensa e compreender as estratégias utilizadas ao desenvolver atividades matemáticas, e assim, nos sentimos motivados a buscar compreender o que significa metacognição. Em busca de tais informações, encontramos os trabalhos de Santos (1994, 1997). No livro sobre avaliação, Santos (1997) afirma que

---

[7] BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. 11ª reimp. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1994 (1ª edição no Brasil em 1974).

> a metacognição envolve o conhecimento do indivíduo sobre seu próprio conhecimento. Isto ocorre quando o indivíduo tem consciência do que já sabe e que de fato já aprendeu e já domina com segurança e facilidade, e quando o indivíduo também está ciente sobre o que ainda não aprendeu e o que sente dificuldades. Ou seja, quando o indivíduo está desenvolvendo a sua metacognição ele tem conhecimento a nível consciente de suas potencialidades e dificuldades. Além disso, o indivíduo sabe usar seu conhecimento de modo eficaz e sabe procurar superar suas dificuldades (SANTOS, 1997, p. 20).

É importante que o professor busque conhecer suas concepções, sentimentos e valores que ele atribui ao ensino de matemática e de como aprendeu matemática (GÓMEZ CHACÓN, 2003; SANTOS, 1994). Além disso, o professor deve conhecer os sentimentos de seus alunos em relação à disciplina que atua, para que possa desenvolver práticas educativas que pensem no aluno como um ser global. Ou seja, empregando estratégias de ensino de matemática que tragam à tona um conjunto de valores e atitudes que orientem as escolhas de aprendizagem e atuação do aluno em sala de aula. Só assim, quando o aluno tiver consciência de suas concepções e atitudes frente à matemática e estiver motivado a aprender e resolver tarefas matemáticas na escola e fora dela que poderá tornar-se um aprendiz autônomo, não apenas a respeito do conteúdo matemático, mas também em relação à própria vida (GÓMEZ CHACÓN, 2003). De acordo com Piaget (1991), o desenvolvimento intelectual se pauta em dois componentes: um cognitivo e outro afetivo. É imprescindível que o professor possa despertar em cada aluno atitudes positivas que reflitam no ambiente escolar e no contrato didático estabelecido em classe. As atitudes dos alunos frente à matemática, assim como o ambiente em sala de aula podem favorecer ou desfavorecer a aprendizagem, colaborando para gerar aversão ou gosto por esta disciplina, influenciando também o desempenho na mesma (GÓMEZ CHACÓN, 2003).

Nós, professores, a partir de uma prática reflexiva, podemos ser provocados a abrir novas possibilidades para nossas ações e, quem sabe, conduzir com mais consciência o que precisamos fazer (CASTRO, 2009; SILVA, 2009). Temos a oportunidade de mudar uma prática tradicional, respeitando as atitudes dos alunos, suas diferenças e valorizando o que eles conseguem desenvolver dentro das suas potencialidades (SILVA, 2007). Se assim procedermos, estaremos formando mais do que alunos repetidores de estratégias matemática. Estaremos construindo com esses alunos uma crença, que valoriza suas experiências, e tornando os momentos da sala de aula como espaços privilegiados para uma aprendizagem com mais significado. A necessidade de comprometimento dos educadores com relação à questão de suas atitudes e a de seus alunos torna-se fundamental, na medida em que notamos que essas sejam a causa de bloqueios. Os Parâmetros Curriculares Nacional [PCN], (BRASIL, 1998) abordam a importância das variáveis afetivas no processo de aprendizagem ao afirmarem que as *atitudes têm a mesma importância que os conceitos e procedimentos, pois, de certa forma, funcionam como condições para que eles se desenvolvam* (p. 50).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais [PCN] (BRASIL, 1997, p. 37) estabelecem para a matemática no Ensino Fundamental, os seguintes objetivos:

> a) Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> b) Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
> c) Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> d) Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
> e) Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
> f) Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções;
> g) Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

É necessário que os professores tenham clareza desses objetivos e que busquem atingi-los em suas aulas de matemática. Esses objetivos devem ser alcançados gradativamente até o término do ensino fundamental de nove anos, que anteriormente totalizava oito anos. No entanto, sabe-se que na prática os professores sentem dificuldade de trabalhar os conceitos matemáticos de forma a alcançar esses objetivos previstos no documento do PCN (BRASIL, 1997).

Esse documento nacional também registra que a potencialidade do conhecimento matemático deve ser explorada de forma mais ampla possível no ensino fundamental (BRASIL, 1997). Tal argumento é feito porque se sabe que a matemática apresenta um vasto campo de relações aritméticas, algébricas, geométricas, probabilísticas, dentre outras, que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Por certo, a matemática se faz presente na vida de todas as pessoas, tanto em experiências simples, tais como: contar, comparar e operar sobre quantidades como em cálculos de salários, pagamentos, consumo e na organização de atividades ligadas à agricultura e à pesca. Também tem sua aplicabilidade nas diferentes áreas do conhecimento como nas ciências ligadas à natureza, nas ciências sociais, na composição musical, na arte e nos esportes.

Um dos problemas decorrentes de formação inicial e/ou continuada precária do professor de matemática é uma prática de aulas baseada especificamente no livro didático, que nem sempre atende e responde a todas as complexidades do processo de ensino (SANTOS, 2007). Em geral, alguns professores preocupam-se com o fato de que, de um lado, a matemática é tão importante para a vida de qualquer ser humano, e de outro, essa mesma matemática é vista como uma das disciplinas que mais contribui para o insucesso escolar em todos os níveis de escolaridade. Propostas inovadoras esbarram na falta de qualificação profissional e, muitas vezes, nas condições de trabalho de professores com jornada dupla e às vezes tripla de trabalho diário.

Complementando essa ideia, Santos (1994) ressalta ser necessário que, durante a formação, os futuros professores adquiram experiências, e desenvolvam autocrítica profissional para tomarem consciência de seus conhecimentos, suas dificuldades, suas fortalezas, e suas limitações. Enfim, que pensem e reflitam sobre quem são, em termos de conhecimento, concepções e atitudes sobre educação, a matéria que irão ministrar e a motivação que possuem para ensinar e aprender. A autora assinala a necessidade de se desenvolver a consciência metacognitiva dos futuros professores e, segundo a autora, nela estão incluídos:

> a) pensar sobre seu próprio processo de pensamento durante a resolução de problemas; b) pensar sobre suas próprias fortalezas e limitações no que diz respeito a certos tópicos matemáticos e procedimentos; c) pensar sobre seu próprio conhecimento matemático; d) pensar sobre suas crenças e concepções enquanto alunos de matemática e futuro professor de matemática (SANTOS, 1994, p. 2-3).

Conforme é esclarecido no PCN BRASIL, (1997), formar e educar um cidadão que possa sobreviver em uma sociedade que a cada dia exige mais conhecimento das pessoas traz desafios para alunos, professores, responsáveis, outros profissionais de educação e sociedade de um modo geral. Oferecer acesso escolar de qualidade e garantir condições para que os alunos possam adquirir mais conhecimentos e saber usá-los de modo adequado na sociedade é o grande desafio escolar para todas as áreas de conhecimento. E como a matemática prestará sua contribuição ou poderá contribuir, se em muitos casos é a disciplina de matemática que provoca fracasso escolar dos alunos. Por exemplo, desde 1988, com a 1ª edição do livro "Na vida dez, na escola zero" (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2003), alguns profissionais da educação e pesquisadores têm discutido o fracasso escolar e não só o fracasso do aluno. Onde o fracasso da escola pode ser atribuído ao fato de que nem sempre a escola como um todo e as disciplinas em particular refletem e discutem o problema em sua totalidade, evitando a busca apenas por culpa e culpados. Admitimos que existem caminhos alternativos, se escola e disciplinas discutirem seus papéis, métodos de ensino, critérios e métodos de avaliação. Nessa reflexão e discussão é preciso envolver alunos, professores, responsáveis e comunidade escolar em um trabalho coletivo e colaborativo que focalize nas possibilidades e no potencial da escola como comentam os autores do citado livro.

Enfrentar tais desafios torna-se um desafio maior que não é tarefa simples, nem isolada. É preciso buscar soluções coletivas para o ensino de matemática. Soluções que precisam transformar-se em ações diárias que tornem os conhecimentos matemáticos acessíveis a todos os alunos, levando-os a compreender a matemática e ter sucesso escolar (BRASIL, 1997, 2001a).

Acreditamos que a matemática escolar pode ser percebida com outros olhares, à medida que o professor de matemática puder proporcionar aos alunos a criação de estratégias intelectuais e emocionais de aprendizagem, de argumentação, de criatividade e de confiança em si mesmos como aprendizes e construtores de conhecimento matemático. Em síntese, professores e alunos reconhecendo o papel e valor da matemática na escola e na vida e abertos para conhecerem suas concepções frente à matemática e motivados para ensinar e aprender matemática em diversos contextos e usando estratégias variadas (BRASIL, 1997; CASTRO, 2009; GÓMEZ CHACÓN, 2003; LORENZATO, 2006, 2006a; SANTOS, 1994, 1997; SILVA, 2007; SILVA, 2009).

2.2. Um pouco da história de frações

> Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações (BOYER, 1994/1974, p. 9).

Afinal, quem inventou e/ou como surgiram as frações? Possivelmente, esta é uma dentre outras perguntas que fazemos ao abordar esse tema. Há um consenso entre pesquisadores da história da matemática (BOYER, 1994/1974; CARAÇA, 2010/1938; STRUIK, 1987, dentre outros) que o surgimento da matemática se deve a problemas oriundos da vida diária. Ou seja, a matemática se desenvolve na tentativa de resolver problemas diários.

No caso das frações e de sua representação, cada povo, à medida que sentia necessidade, utilizava-as a partir de seus próprios recursos. Os egípcios, os babilônios e os gregos deixaram registros de utilização dos números fracionários, mas apenas os babilônios aceitavam as representações fracionárias como números. No Oriente Antigo, com a descoberta do Papiro de Rhind (descoberto em 1858; escrito pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a. C) e do Papiro de Moscou (ou Papiro de Moscovo) pôde ser constatado, por meio dos problemas neles contidos, que o povo egípcio já tinha se familiarizado com as frações (BOYER, 1994/1974; STRUIK, 1987). De acordo com Boyer (1994/1974), o mais antigo e extenso papiro, chamado de *Papyrus Rhind,* foi encontrado num quarto de uma arruinada construção junto ao Ramasseum. Esse papiro tem como conteúdo principal questões relativas à equivalência de frações, às operações com números fracionários, às proporções, às regras de três, à regra de falsa posição, e à decomposição em partes proporcionais aritméticas ou problemas geométricos.

Segundo Boyer (1994/1974), todos os anos, no mês de julho, as águas do Rio Nilo inundavam uma vasta região, ao longo de suas margens. As águas do Rio Nilo fertilizavam os campos, beneficiando a agricultura do Egito. Cada pedaço de terra às margens desse rio era precioso e tinha que ser muito bem cuidado. Por volta do ano 3000 a.C., o Faraó Sesóstris repartiu essas terras entre uns poucos agricultores privilegiados. Só que todos os anos em setembro, quando as águas baixavam, funcionários do governo faziam a marcação do terreno de cada agricultor. Esses funcionários eram chamados de agrimensores ou estiradores de corda, por usarem cordas como uma unidade de medida assinalada. Essa corda era esticada para que se verificassem quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Mas, na maioria das vezes, acontecia da unidade de medida escolhida não caber um número inteiro de vezes nos lados do terreno. Para solucionar o problema de medição das terras, os egípcios criaram um novo número, um número fracionário, que era representado com o uso de frações, mas com simbologia diferente da nossa atual usada em matemática.

Boyer (1994/1974) e Struik (1987) falam da importância do conhecimento de fração utilizada pelos egípcios. Struik (1987) diz que, no Oriente Antigo, encontramos registros da matemática egípcia desenvolvida no continente africano com a descoberta do Papiro de Rhind e do Papiro de Moscovo (redigido em escrita hierática, isto é escrita sagrada, para distingui-la da escrita demótica ou popular) por volta de 1858 a.C.; comprado no Egito, em 1893). Essa matemática egípcia pode ser constatada nesses documentos por meio dos diversos problemas que nos mostram que esse povo já estava familiarizado com algum tipo de notação para frações.

Boyer (1994/1974) nos esclarece que os egípcios manipulavam livremente algumas frações no tempo de Ahmes, mas não tinham notações específicas para a fração geral. Ou seja, a fração de forma geral parece ter sido um enigma aos egípcios. Para cada número n, ao encontrarmos o inverso desse número, temos a fração unitária 1/n. Os egípcios usavam frações unitárias, ou seja, com o numerador um (01) dividido por um número inteiro, como por exemplo: 1/2, 1/3 e 1/4. Eram representadas por inscrições hieroglíficas, como exemplo, a fração 1/6 era representada da seguinte maneira . Todas as frações tinham esse sinal oval na parte superior representando o numerador 1, e o outro número com sua respectiva representação do denominador (BOYER, 1994/1974). Ou seja, as frações eram escritas pelos egípcios de forma diferente da que utilizamos atualmente. Dessa forma, esses povos concebiam as frações "unitárias" (de numerador igual a um) e exprimiam algumas frações ordinárias por meio de somas de frações unitárias. Exemplos: 1) A fração representada pelos egípcios como 1/3 + 1/15 é representada atualmente por 2/5; 2) A fração 7/12 era representada pelos egípcios como 1/3 + 1/4.

> Eles se sentiam à vontade com a fração 2/3..., ocasionalmente usavam sinais especiais para frações da forma n/(n + 1), os complementos das frações unitárias. Atribuíam à fração 2/3 um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso. Conheciam e usavam o fato de dois terços da fração unitária *1/p* ser a soma de duas frações unitárias *1/2n* e *1/6p*; também tinham percebido que o dobro da fração *1/2p* é a fração *1/p*. No entanto, parece que tirando a fração 2/3, os egípcios consideravam a fração racional própria geral da forma *m/n* não como uma "coisa" elementar, mas como parte de um processo incompleto. A fração 3/5, para nós uma única fração irredutível, era pensada pelos escribas egípcios como soma de três frações unitárias 1/3 e 1/5 e 1/15. Para facilitar a redução de frações próprias "mistas" à soma de frações unitárias, o Papiro de Rhind começa com uma tabela fornecendo 2/n como soma de frações unitárias, para todos os valores ímpares de n de 5 a 101. O equivalente de 2/5 é dado como 1/3 mais 1/15; 2/11 é escrito como 1/6 mais 1/66; e 2/15 é expresso como 1/10 mais 1/30. O último item da tabela decompõe 2/101 em 1/101 mais 1/202 mais 1/303 mais 1/606. Não se percebe por que uma forma de decomposição era preferida a outra, dentre a infinidade possível. Sugeriu-se que alguns dos itens na tabela para 2/n eram obtidos usando o equivalente da fórmula $\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}$ ou de $\frac{2}{p.q}=\frac{1}{p.\frac{p+q}{2}}+\frac{2}{q.\frac{p+q}{2}}$. Porém, nenhum desses processos fornece a combinação 2/15 que aparece na tabela. ... foi sugerido que a escolha na maior parte dos casos era ditada pela preferência dos egípcios pelas frações derivadas das frações "naturais" 1/2 e 1/3 e 2/3 por sucessivas divisões ao meio. Assim quando eles querem exprimir 2/15 como soma de frações unitárias, podem bem começar por tomar a metade de 1/15 e depois ver se ao resultado 1/30 eles podem somar uma fração unitária para formar 2/15; ou poderiam usar a relação conhecida $\frac{2}{3}.\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p}$, para chegar ao mesmo resultado 2/15 = 1/10 + 1/30. Um problema no Papiro de Rhind menciona especificamente o segundo método para achar dois terços de 1/5 e afirma que se procede de modo semelhante com outras frações (BOYER, 1994/1974, p. 10).

Percebe-se por estes procedimentos dos egípcios que eles já possuíam alguma ideia de regras gerais e métodos mais abrangentes para trabalhar com frações. Para Struik (1987),

> o princípio subjacente a esta redução especial a frações unitárias não é claro. Este cálculo com frações deu à matemática egípcia um caráter complicado e pesado, mas, apesar destas desvantagens, a maneira de operar com frações unitárias foram praticadas durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na Idade Média (p. 53).

Boyer (1994/1974) comenta que, no Papiro de Rhind, observamos como os egípcios procediam na resolução de um problema. Para acharmos dois terços de 1/5 procediam ao método, que descrevemos a seguir. Esses procedimentos indicam que os egípcios já tinham alguma percepção de regras gerais.

> Para a decomposição de 2/5 o processo de dividir ao meio é inadequado; mas começando com um terço de 1/5, encontra-se a decomposição dada por Ahmes, 2/5 = 1/3 + 1/15. No caso de 2/7 aplica-se duas vezes a divisão por dois a 1/7 para obter 2/7 = 1/4 + 1/28; sucessivas divisões por dois fornecem também a decomposição de Ahmes 2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104. A obsessão egípcia com dividir por dois e tomar a terça parte se percebe no último caso da tabela 2/n para n = 101, pois não é nada claro porque a decomposição de 2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/2.3.n é melhor que 1/n + 1/n. Talvez um dos objetivos da decomposição de 1/2n fosse chegar a frações unitárias menores que 1/n (BOYER, 1994/1974, p. 11).

Silva (1997) e Malaspina (2007) comentam que outros povos como os chineses, árabes e europeus usavam frações em diferentes épocas. Na China antiga acham-se registros de uso de frações. Do mesmo modo, encontram-se informações sobre uso de frações na Arábia Medieval e na Europa do Renascimento. Para os gregos, o uso de frações aparece nos tratados teóricos e demonstrativos, nos textos matemáticos calculatórios e nos documentos da prática, como declaração de propriedade, cálculos e registros de câmbio de moedas, taxas, realizações de arquitetura, etc. No que se refere à utilização das frações pela civilização Romana, aparecia nos cálculos com moeda e na metrologia. Cada fração tinha um nome especial e mantinha, geralmente, o denominador 12 como uma constante (SILVA, 1997; MALASPINA, 2007). Os babilônios usavam as frações para registros de suas transações comerciais, representando com os mesmos valores monetários próprios de sua cultura, por exemplo, os babilônios chamavam de ardalha o que chamamos hoje de metade, meio ou um meio ou 1/2. Os babilônios também chamavam de pada o que representamos matematicamente por quarta parte ou um quarto ou 1/4.

Entretanto, fundamentando-se no trabalho de Silva (1997), Malaspina (2007) comenta que a notação moderna de frações se deve aos hindus, pela sua numeração decimal de posição; e aos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal para separar o numerador do denominador. Na Europa, nos séculos XI e XII, enquanto a cultura aritmética hindu-arábica produzia um sistema de numeração e de escrita de frações, em que o numerador era colocado sobre o denominador, a tradição judaica exprimia as frações através de uma linguagem retórica, como quantidade de partes de unidades originadas dos pesos e medidas. Após assimilação do comércio árabe, os matemáticos judeus passaram a adotar essa nova maneira de conceber e de escrever as frações. Esclarecendo,

> na segunda metade da Idade Média, a Europa Ocidental passou de um mundo que havia desistido das frações, a um outro, onde as frações entravam na vida cotidiana do mercante, fornecendo uma ferramenta essencial à álgebra nascente e à Física em suas primeiras tentativas de matematização. O cálculo fracionário se impôs do Oriente para o Ocidente, varrendo os sistemas de frações da antigüidade que foram substituídos por tipos de representação, de modos de calculo e de conceitos melhores adaptados à solução dos problemas que se colocavam na época (SILVA, 1997, p. 21).

De acordo com Malaspina (2007) no decorrer do século XVI, os matemáticos começaram a levar em conta as frações maiores que a unidade. Certos textos passaram a considerar a fração como a expressão de uma divisão, e os tratados de aritmética já apresentavam o cálculo fracionário de uma maneira muito próxima ao que está nos livros dos séculos XIX e XX (SILVA, 1997).

Segundo Caraça (2010/1938), os números racionais surgem das necessidades do homem de comparar grandezas, quando sua habilidade de contar se tornou insuficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que a outra. Para expressar a medida de uma grandeza em relação à outra, a solução imediata seria encontrada pelo quociente de duas medidas, sempre que fosse possível efetuar a divisão entre os números inteiros que a representavam. Para esse autor é importante que se estabeleça um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie. Isto é, uma unidade de medida como centímetros para efetuar comparações com comprimentos; gramas para comparar peso; segundos para comparar tempo, etc. A questão também exige uma resposta para a pergunta: quantas vezes cabe uma medida em outra? O que se responde ao dar um número que exprima o resultado da comparação. Esse número chama-se medida da grandeza em relação a essa unidade. Podemos exemplificar esta situação tomando-se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, conforme o desenho a seguir:

A ______ B

C ____________________ D

|______|______|______|

Se tomarmos o segmento $\overline{AB}$ como unidade, quanto mede o segmento $\overline{CD}$? O problema consiste em verificar quantas vezes o segmento $\overline{AB}$ cabe no segmento $\overline{CD}$. Desta verificação obtém-se o número 3 que é a medida do segmento $\overline{CD}$, tomando se o segmento $\overline{AB}$ como unidade de medida. Por outro lado, consideremos a tarefa de medir o segmento $\overline{AB}$, tomando-se como unidade de medida o segmento $\overline{CD}$. Neste caso, não há um número inteiro capaz de identificar esta medida; recaímos, então, na necessidade de expressar esta relação por intermédio do número racional 1/3.

No entanto, como descreve Caraça (2010/1938), temos que tomar cuidado. Uma vez que em se tratando de números racionais, estamos nos referindo, neste caso, a grandezas comensuráveis. Existem, também, as grandezas incomensuráveis, por exemplo, suponha um triângulo retângulo de catetos medindo 1 cm e sua respectiva hipotenusa. Neste exemplo, não há um número racional capaz de expressar a medida da hipotenusa em relação a seus lados. É aí que surge a necessidade dos números irracionais.

2.3. Revisão de pesquisas sobre frações e números racionais

O trabalho de dissertação de Bezerra (2001) caracteriza-se pela abordagem direcionada para o ensino dos números fracionários em duas turmas de 3ª série: uma que serviu de grupo experimental (GE); e outra de mesmo nível que representou o grupo controle (GC). Ambas do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de São Paulo, na qual se pretendeu estudar a aquisição do conceito e de suas atuações, com base em situações que fossem importantes e desafiadoras para o aluno. Em seu estudo procurou responder ao questionamento:

Como abordar os conteúdos relacionados ao número fracionário de forma que o aluno compreenda o seu conceito e estabeleça a relação entre o número e sua representação?

Bezerra (2001) esclarece que foram estudadas no GE questões relacionadas à aquisição do conceito de fração. O autor elaborou uma sequência de ensino para o GE, utilizando-se das representações simbólicas e pictóricas. Bezerra (2001) explorou a resolução de situações-problema, o trabalho em grupo e vivências relacionadas ao dia a dia da criança em suas atividades. No entanto, o GC não teve qualquer contato formal com o conteúdo de fração. Os dois grupos foram submetidos a dois testes individuais: um antes (pré-teste) da aquisição dos conceitos de fração e outro (pós-teste) depois que o GE teve contato com esses conteúdos. Bezerra (2001) diz que os alunos compreendem melhor o significado do número racional se iniciarmos o estudo com situações-problema, discutindo com os alunos o significado numérico do resto de uma divisão do tipo 5:2 ou 7:3. Segundo o autor, este procedimento favorece à compreensão e aprendizagem do aluno, e é melhor do que se iniciarmos o estudo exaustivamente a partir da ideia de parte-todo, com quantidades contínuas e discretas, como ocorre em muitos casos em sala de aula e em livros didáticos. Sua pesquisa trouxe indícios de que a aquisição do conceito dos números racionais e suas representações iniciada a partir da divisão dos números naturais e procurando problematizar o significado numérico de uma representação apropriada para o resto desta divisão demonstrou resultados satisfatórios. Nas palavras de Bezerra (2001)

> ... iniciamos a sequência com o modelo quociente para a aquisição desse conteúdo, no desencadear dos encontros, apresentamos também o modelo parte-todo. Acreditamos que o modelo parte-todo é importante, mas não deve ser o único e tão pouco o início para o aprendizado das crianças, pois ele parece oferecer uma barreira maior entre os números naturais e os fracionários (p. 175).

O trabalho apresentado por Malaspina (2007) objetivou realizar um estudo intervencionista para a introdução do conceito de fração, com alunos da 2ª série do ensino fundamental. Neste estudo, a autora procurou responder à seguinte questão de pesquisa: Quais os efeitos sobre esse conceito que cada um dos quatro significados para fração (parte-todo, quociente, operador multiplicativo e medida) traz para a aprendizagem inicial dos alunos do 1º ciclo (2ª série) do ensino fundamental? Para tanto, foi realizado um estudo com 61 alunos, vindos de duas turmas de uma escola pública. Os alunos compuseram dois grupos; um dos grupos passou por uma intervenção planejada de ensino sobre o tema fração, Grupo Experimental (GE) e o outro grupo não passou por qualquer intervenção sobre o tema e, por isso, foi chamado Grupo Controle (GC). Ambos os grupos nunca tiveram contato, do ponto de vista formal da escola, com o objeto fração. Malaspina (2007) constatou que os resultados do estudo mostram que cada um dos significados teve papel importante para o início da apropriação desse objeto. Assim sendo, foi possível encontrar efeitos distintos na aprendizagem inicial de fração, dependendo do significado que foi utilizado para introduzir esse conceito.

Um trabalho que objetivou reconhecer as diferenças de tratamento entre as situações que envolvem o conceito de fração nas concepções parte-todo, medida e quociente, a fim de que os professores das séries iniciais reflitam e possam dar significados a esse conhecimento foi apresentado por Silva (1997). Este estudo contou com alunos da 3ª série do ensino fundamental sobre a formação do conceito de número fracionário. Em relação aos aspectos didáticos, a autora constatou na concepção dos professores que ao associar uma fração a uma figura, esta deveria estar, necessariamente, dividida em partes iguais, observando-se a área e a forma dessas partes, exigência essa estabelecida pelo uso da dupla contagem das partes na identificação da fração. Por outro lado, esta concepção conduz ao que se chamou de discretização do contínuo, tendo em vista a referência de o inteiro inicial ser substituído pelo número de partes conseguidas, após a divisão. Também foi observada a dificuldade de os professores assimilarem o desenho e a divisão de figuras, como suportes para a solução de algumas situações descritas no trabalho, em que as figuras aparecem previamente divididas. Houve dificuldade por parte dos alunos em notar as várias maneiras com que podemos dividir mais do que um inteiro ao mesmo tempo, assim como o fator de medição, cuja falta de entendimento representou dificuldades com unidades não usuais.

Bianchini (2001) estudou as questões de aprendizagem direcionadas à aquisição do conceito de números racionais na forma decimal com alunos da 3ª série do ensino fundamental. Trata-se de uma pesquisa realizada em sala de aula, numa abordagem qualitativa, na qual a pesquisadora acompanhou o desenvolvimento dos alunos durante uma sequência de ensino. Normalmente, encontramos a apresentação dos racionais na forma fracionária, para que posteriormente, sejam trabalhados na forma decimal. Os estudos aqui relatados demonstraram que as crianças ainda apresentavam dificuldades na forma fracionária. A autora assevera que, na relação parte-todo, a noção de números racionais pode expressar as sínteses de duas ideias matemáticas: a medida e a quantidade (fração). Logo os números racionais precisam ser compreendidos em suas várias representações.

Dentre as dificuldades encontradas por Bianchini (2001), destacamos a não compreensão do número racional em relação à medida (parte-todo). Ao dividir o todo em partes iguais, a unidade em muitos casos não ficou clara aos alunos, gerando equívocos na representação figural. Outro tipo de erro encontrado foi na localização de valores decimais na reta numérica. A linguagem também foi uma das dificuldades verificadas nas crianças, tanto relacionada à compreensão de algumas questões como nos momentos em que tinham de responder perguntas utilizando a linguagem natural escrita.

Destacamos alguns relatos de reflexões de Bianchini (2001). Um deles refere-se à conservação de quantidade, como elemento básico para a compreensão do conceito de fração, visto que o conceito pressupõe a existência de uma totalidade divisível. Finaliza, referindo-se à iniciação das frações que é feita por meio de áreas de figuras geométricas regulares, com o comentário de que é preciso observar se a criança já possui o desenvolvimento de conservação de área em uma estrutura cognitiva. Por fim, afirma que, muitas vezes, as crianças são introduzidas, prematura e inadequadamente, nos conceitos de fração, e isso poderá acarretar dificuldades na aprendizagem das operações com frações.

Além desses trabalhos, comentados anteriormente, baseamo-nos também na abordagem de Santos e Rezende (1996) ao explorarem fração de conjuntos contínuos e discretos. Segundo as autoras, cabe ao professor, orientar seus alunos através de questionamentos durante todas as atividades, evidenciando o como e o porquê de cada passo executado, para que tais descobertas se tornem claras para o aluno. Destacando ainda que o professor deve estar atento para perceber o momento certo da passagem concreto – abstrato, retornando à primeira etapa, sempre que notar alguma dificuldade por parte dos alunos.

O conceito de número fracionário não é simples de ser abstraído, e há a possibilidade de o aluno trabalhar com material concreto que pode facilitar ou não a compreensão do aluno. No que se refere à manipulação de materiais didáticos sobre fração, Lima (2004, p. 38) indica que “O desenho é a primeira forma de escrita da criança e uma atividade apreciada por ela. Mesmo que pareça apenas ilustrativo, o desenho ajuda a resolver esse tipo de problema”. Sabemos que a criança e o jovem percebem que uma barra de chocolate pode ser dividida em metades ou em terços, mas e outros elementos como gatos e pessoas, podem ser divididos? Lima (2004) comenta que, no que se refere à percepção que os alunos têm com relação a metades, quartos ou terços de um todo contínuo como bolo, ou pizza, ou barra de chocolate, já sabemos que os alunos

> ... descobrem que para dividir nem sempre precisam contar alguma coisa, mas podem fazer um tipo de medição. E já ”antecipam” que o resultado de uma divisão matemática se dá em partes de um todo com a mesma forma e o mesmo tamanho (LIMA, 2004, p. 38).

Concordamos com a afirmativa de Moreira e Costa (1998) sobre a importância de se trabalhar desenhos com as crianças, porque oferecem várias possibilidades.

> O desenho como possibilidade de brincar, o desenho como possibilidade de falar, marca o desenvolvimento da infância, porém, em cada estágio, o desenho assume um caráter próprio (MOREIRA; COSTA, 1998, p. 26).

Eles asseveram que, ao se expressar através do desenho, a criança coloca sua vida no papel, com toda a emoção. Por meio do desenho, a criança desenvolve noções de espaço, tempo, quantidade, sequência, apropriando-se do próprio conhecimento, que é construído, respeitando seu ritmo. O desenho precisa e deve ser sempre valorizado pelos educadores, e a importância dessa valorização deve ser compreendida e compartilhada pelos pais, uma vez que toda aprendizagem tem seu valor e o desenho é uma forma de aprendizagem. Segundo Moreira e Costa (1998), se valorizarmos a criança naquilo que ela sabe, ela poderá ou estará propícia a sentir prazer em aprender.

Algumas das pesquisas relacionadas com os números fracionários ou números racionais, como as de Merlini (2005), Lima (2004), Carraher (1998), Carraher (1986/1983) nos auxiliam a pensar no processo de ensino. O trabalho de Merlini (2005) teve por objetivo investigar as estratégias que os alunos de 5ª e 6ª séries do

Ensino Fundamental utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2005). O estudo se propõe a responder à seguinte questão de pesquisa: Quais as estratégias de resolução os alunos da 5ª e 6ª séries utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados de fração: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo?

O estudo de Merlini (2005) funcionou como um primeiro trabalho onde se mapeou e se diagnosticou a situação, para que, posteriormente, fosse realizada uma intervenção[8]. A investigação foi realizada com 120 alunos: sessenta alunos de 5ª série e sessenta alunos de 6ª série do Ensino Fundamental, em escolas públicas da cidade de São Paulo e envolveu também os professores dessas crianças. Trata-se de uma pesquisa diagnóstica que serviu para a coleta de dados sobre o conceito de frações com questões todas elas relacionadas às situações do cotidiano dos alunos, tanto dentro quanto fora da escola.

Os resultados indicam que, tanto na 5ª como na 6ª série, os percentuais de acerto foram baixos e próximos um do outro. Em média, o índice de acertos foi de 21,16%, demonstrando certa homogeneidade entre o desempenho das séries e indicando um resultado insatisfatório. Merlini (2005) em suas conclusões comenta sobre as estratégias cognitivas utilizadas pelos alunos da amostra. Apresentamos aqui uma síntese das ideias dessas estratégias:

> a) relação parte-parte: o aluno despreza o todo envolvido, fazendo contagem das partes sem relacioná-las com o todo, tanto com quantidades contínuas como em quantidades discretas;
> b) inversão do numerador pelo denominador: o aluno faz a inversão das posições do numerador pelas do denominador. A suposição é que o aluno não compreenda a relação que existe entre o numerador e o denominador;
> c) quociente remete para a relação parte-todo: o aluno desprezou as duas grandezas envolvidas (chocolate/criança; bolinhas de gude/criança; bolas de futebol/criança), levando em conta somente uma delas. O que de fato está sendo dividido desconsiderando para quem está sendo dividido (crianças);

[8]Esse trabalho de pesquisa fez parte de um projeto mais amplo de pesquisa desenvolvido dentro do programa de cooperação internacional entre *Oxford Brookes University,* Inglaterra, sob coordenação da Drª. Terezinha Nunes e o Centro das Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP, coordenado pelas Drª. Sandra Magina e Dr. Tânia Campos. O projeto amplo tinha o objetivo de investigar as estratégias que os alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, segundo os cinco significados propostos por Nunes *et al.* (2005) apresentados anteriormente.

> d) interpretação da fração literalmente: o aluno faz a interpretação da fração literalmente;
> e) desprezo da conservação da área: o aluno não levou em conta a conservação da área dividida;
> f) utilização dos dados do problema: o aluno elaborou sua resposta com dados contidos no enunciado e ou parte da resposta da referida questão;
> g) denominador maior que o numerador: o aluno inverteu o numerador pelo denominador, porque entende que numerador não pode ser maior que o denominador;
> h) números sobrepostos: a característica principal do uso dessa estratégia é o fato de o aluno ter tratado a fração como dois números naturais e distintos e que serão apenas separados por um traço;
> i) utilização de operação: o aluno, com o intuito de revelar a resposta, procedeu a algum tipo de algoritmo de operação (adição, subtração, divisão ou multiplicação) entre o numerador e o denominador (MERLINI, 2005, p. 197-198).

Merlini (2005) salienta que, nos resultados encontrados para um mesmo significado, há diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, e que o modo de ensino do conceito de fração, utilizado nas escolas, privilegia alguns significados como parte-todo, em detrimento de outros, não garantindo que o aluno construa o conhecimento desse conceito. Nessa mesma perspectiva, Lima (2004) analisou o desenvolvimento dos conceitos de fração e de conservação em quantidades discretas e contínuas. O autor constatou que a conservação da quantidade discreta (de coleções) antecede à conservação de quantidades contínuas (áreas, volumes etc.). Em geral, ocorre em torno de um ano, pelo fato de a criança lidar muito cedo com conjuntos e coleções. Iniciar, portanto, o estudo da fração, utilizando coleções e fracionando as mesmas, talvez seja o mais indicado.

Para aprofundar a análise sobre dificuldades na resolução de problemas com frações, Carraher (1998) investigou a utilização de frações literais e frações relativas. Concluiu que havia uma grande tendência, por parte de alunos, em relacionar o numerador e o denominador, respectivamente, ao número de elementos marcados e ao número total de elementos de um conjunto. Quando não havia essa relação muitos alunos não aceitavam a fração como uma representação da figura.

Por nos interessarmos acerca do ensino de frações, procuramos buscar também outros pesquisadores que levantassem pontos importantes para o ensino desse conteúdo. Assim, recorremos aos trabalhos de Santos (1997), Nunes & Bryant (1997), Nunes et al. (2005), Magina & Campos (2008), Caraça (2010/1938), Merlini (2005), Kamii & Declark (1986), e Polya (1978) para melhor fundamentarmos nossa investigação. Ademais, esses autores nos auxiliam a pensar na pesquisa e pensar em uma intervenção pedagógica na 6ª série/7º ano, que retorna o conceito de fração.

2.4. Fração e seus significados

O ensino de fração é um desafio para os professores. É um tema que, como já descrito, trata de um conteúdo em que os alunos têm dificuldades de aprendizagem. Portanto, esse tema é merecedor de maior atenção por parte dos professores. Fração é um conteúdo matemático importante que deve ser trabalhado de forma a abranger seus diferentes significados (não se deter em apenas um deles), tornando o processo de ensino e de aprendizagem mais completo. Conforme diz Merlini (2005), o cotidiano oferece muitas situações que permitem construir significados para fração. Entre elas, as situações envolvidas na construção civil e culinária, como exemplo.

> No cotidiano, a fração tem seu uso consagrado em escalas, razões, porcentagem e probabilidades. Somado a isso, na partição da unidade a utilização da fração pode ser mais adequada, pois é mais natural falar, por exemplo, 1/4 de uma barra de chocolate ao invés de 0,25 de uma barra de chocolate. Outros exemplos são mostrados em algumas atividades profissionais, por exemplo, na construção civil os diâmetros são comumente mensurados com base na fração de polegada: o cano hidráulico de nossas residências, em geral, tem 3/4 de polegadas, ao passo que os alicerces de grandes construções contêm barras de ferro de 1/2 polegada. Na culinária, 2/3 de um tablete de margarina, 1/4 de copo de leite, por exemplo (MERLINI, 2005, p. 1-2).

O documento dos PCN (BRASIL, 1997) recomenda que, para abordar o estudo dos números racionais, é importante recorrer aos problemas históricos, envolvendo medidas de forma a possibilitar bons contextos para o seu ensino. Por exemplo, pode-se discutir com os alunos como os egípcios já usavam os números racionais, por volta de 2000 a.C., para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles utilizavam apenas frações unitárias, com exceção de 2/3. Em uma situação na qual precisavam dividir, por exemplo, 19 por 8, sabiam que daria 2 inteiros e ficavam com o resto que representaríamos hoje como 3/8 e utilizavam um procedimento que, na nossa notação, pode ser expresso por: 2 + 1/4 + 1/8. A sugestão dos PCN (BRASIL, 1997) é de explorar e discutir esse tipo de problema com os alunos. Assim, por exemplo, esse documento dos PCN propõe que seja solicitado aos alunos para mostrar que a soma acima indicada é 19/8.

As recomendações feitas pelos PCN (BRASIL, 1997) sugerem uma inovação para o ensino de fração, pois apontam outros caminhos para a construção do conceito. Essa inovação é traduzida pela ênfase dada em integrar a história da matemática com o ensino, e em usar resolução de situações-problema. Os PCN (BRASIL, 1997) determinam que o professor considere dois aspectos fundamentais no ensino de fração: os significados que a fração assumirá em cada situação e as diferentes formas para sua representação. Os PCN (BRASIL, 1997) nos alertam para o fato de

> Que a prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre as situações que está implícita a relação parte-todo. Nesse caso, a fração indica a relação que existe entre o número de partes e o total de partes. Outro significado das frações é a do quociente, que basea-se na divisão (a : b = a/b; com b diferente de 0) (p. 103).

Trabalhando no Ensino Fundamental com alunos do 7º ano, conscientizamo-nos de que os alunos manifestam uma grande dificuldade no momento em que precisam trabalhar com frações. Quando buscamos construir os conceitos de números racionais, a impressão que temos é de que os alunos não se lembram de frações, apesar de já terem estudado este conteúdo. Essa dificuldade também é citada nos PCNs (BRASIL, 1998):

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial, os que envolvem os racionais na forma decimal (p. 100).

Verificamos que Santos (1997) propõe uma classificação para os diferentes sentidos de fração, contemplando os quatro significados: (a) fração como parte-todo; (b) fração como razão: comparando parte-todo, comparando parte-parte, ideia de probabilidade; (c) fração como divisão ou quociente e (d) fração como operador: ampliação, redução. Outras leituras e estudos mostraram que essa classificação pode ser modificada, ampliada e/ou explicada de outras formas.

Fração com o significado parte-todo

Santos (1997) propõe para trabalhar a ideia de fração com significado de parte-todo, o uso de modelos: contínuo; discreto; discreto e contínuo. No que se refere ao modelo contínuo, a autora descreve três situações: *modelo linear, modelo de área e modelo de volume ou capacidade.* Modelo linear envolve a ideia de repartição de um todo em partes de mesmo comprimento, de mesma distância. Sugere o uso de barbante, régua, metro, e outros recursos em que possamos trabalhar essa ideia. O modelo de área envolve a ideia de repartição de um todo em partes de mesma área, que ocupam a mesma superfície plana. E o modelo de volume ou capacidade envolve a ideia de repartição de um todo em partes de mesmo volume ou de mesma capacidade de líquido.

Para o conjunto discreto – Certa quantidade de elementos que não podem ser subdivididos em qualquer tipo de partes, pois isto depende da quantidade inicial. Conjunto enumerável de objetos que não podem ser subdivididos o tempo todo sem levar em conta a quantidade e o tipo de grandeza de cada objeto, tais como: livros, cadernos, pessoas, canetas, dinheiro, tempo, etc. Aqui, trabalha-se com a ideia de repartição em partes de mesma quantidade numérica. Trabalhamos, implicitamente, com a ideia de divisores da quantidade total do conjunto discreto para pensarmos nas possíveis frações deste conjunto discreto (SANTOS, 1997).

Para conjuntos discreto e contínuo – Santos (1997) comenta que nesses casos teremos certa quantidade de elementos em que os mesmos também podem ser subdivididos em partes posteriormente. Conjunto enumerável de objetos, tais como: maçãs, melancias, pizzas, garrafas de refrigerante, etc., podendo pensar na quantidade inicial total como sendo associada com o discreto, mas que ao iniciar a repartição admite também outras subdivisões. Assim, podemos pensar em termos de discreto e também de contínuo. Por exemplo: 1) Ao distribuir igualmente três maçãs para duas crianças que quantidade de maçã cada criança irá receber? 2) Se temos cinco garrafas de guaraná para repartir igualmente para três famílias, quantas garrafas de guaraná cada família receberá e como podemos continuar repartindo para cada família?

Ou seja, a fração como relação parte-todo corresponde à situação que indica quando um “todo” (contínuo ou discreto) se divide em partes equivalentes (em termos de superfície ou de quantidade de elementos ou de volume) (SANTOS, 1997). Jess (2004) explica essa situação nos seguintes termos:

> O item contempla aquelas passagens onde há uma menção a um “todo”, do qual a fração seja a parte; ou quando se torna necessário o uso de um todo de referência para compreensão da fração como parte dele. Conforme o tipo de “todo” considerado, ou conforme a “natureza” da grandeza a ser dividida, especificou-se, ainda, quando a relação utiliza “todos” contínuos, ou discretos, conforme nomenclatura já consagrada na elaboração dos livros didáticos (grifos no original) (p, 26).

A autora explica que todo envolvido contínuo pode ser representado por um todo “único" como, um barbante, uma reta numerada, uma folha de papel. O todo envolvido discreto pode ser representado por um conjunto de elementos, um conjunto de bolinhas, dinheiro, canetas ou livros, etc. Essa explicação auxilia na compreensão de que a fração indica a relação existente entre certo número das partes e o total, sendo que o todo recebe o nome de “inteiro”.

Segundo Santos (1997), a ideia presente nesse significado é a partição de um dado objeto em ***n*** partes, isto é, um todo dividido em ***n*** partes iguais e que cada parte poderá ser representada como 1/n, e que o procedimento da dupla contagem dá conta de chegarmos a uma resposta correta. Exemplo: Uma barra de chocolate foi dividida em 4 partes iguais. João me deu 3 dessas partes. Que fração representa o que João me deu? Nesse caso temos a seguinte representação 3/4.

Nessas situações, o aluno desenvolve previamente algumas competências: a identificação de uma unidade ou de um inteiro (em que o todo é tudo aquilo que considera como a unidade ou o inteiro em cada caso concreto); a realização de divisões (o todo se conserva, mesmo quando o dividimos em partes iguais, há a conservação da unidade e do que caracterizava essa unidade ou esse inteiro); há a manipulação da ideia de conservação de área no caso das representações contínuas em figuras planas (MERLlNI, 2005; SANTOS; REZENDE, 1996; SANTOS, 1997).

A partir de nossas leituras, reconhecemos que podemos pensar em medidas utilizando-se como unidade conjuntos discretos, como é o caso do exemplo que segue descrito: “Temos 6 frascos de tinta para pintar as bordas de um tecido de 100 metros. Quantos metros de tecido podem ser pintados com 27 frascos de tinta? Entendemos que 6 frascos são utilizados como unidade para medir os 27 frascos. Vinte e quatro frascos representam 4 grupos de 6 frascos e com a tinta deles pintaremos 400 metros de tecido. Os 3 frascos restantes são comparados em relação a unidade que corresponde a 6 frascos ou latas de tinta. Se os frascos forem utilizados individualmente como subunidades, isto é, um sexto da unidade, a resposta sairá como 400 metros e 3/6 do metro ou 400 e 3/6 metro. Se uma criança notar que 3 frascos também representam a metade dos 6 frascos (unidade), a unidade (6 frascos) poderia ser dividida em subunidades de 3 latas cada, chegando à resposta 400 e 1/2 metro. Nesse caso, o número racional representa uma razão entre a quantidade que está sendo medida e a unidade de medida. As medidas só fazem sentido em termos de unidade e a divisão desempenha um papel central. No caso explicitado, entendemos que a quantidade a ser medida é dividida inicialmente em partes de uma determinada medida, posteriormente, a própria unidade é dividida em subunidades.

Fração com o significado de razão

Trata-se de uma comparação que funciona como um índice a ser usado sobre outros números: “9 entre 10 rapazes usam certo perfume”, o que significa 18 em 20, 27 em 30, e assim por diante. Os números racionais resultantes destas comparações 9/10, 18/20 e 27/30 mantêm a mesma proporcionalidade e precisam ser lidos e compreendidos assim como 9 em 10, 18 em 20 e 27 em 30. A fração, portanto, se presta à comparação simples entre coleções claramente definidas. Exemplo: 1 fruta em cada grupo de 5 está estragada (ou 2 em cada grupo de 10, ou 3 em cada grupo de 15, etc). Desse significado, fração como razão, originam-se as escalas, a porcentagem, e as proporções.

Tanto os trabalhos de Santos (1997), Nunes & Bryant (1997), e Nunes e colegas (2005) destacam a importância de explorarmos o significado de fração como razão. Os trabalhos de Nunes e seus colegas ressaltam que nessa situação a fração se refere a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis. Percebemos três tipos de comparações quando a fração está associada com a ideia de razão. No primeiro caso pode-se comparar uma parte para o todo e aqui a ideia de fração com significado de razão pode confundir-se com o significado de fração como parte-todo. No segundo caso podemos comparar entre si as partes de um todo, e nesse caso, a fração está associada apenas com o significado de razão. E finalmente, temos a ideia de fração com significado de razão quando exploramos o conceito de probabilidade (SANTOS, 1997).

A - Comparação de uma parte de um todo com o todo

Ex: Número de letras de uma palavra comparado com o total de letras da palavra; número de pontos ganhos num jogo de vôlei comparado com o total de pontos; número de pontos ganhos num jogo de basquete comparado com o total de pontos da partida; número de pontos ganhos numa partida de futebol para o total de pontos do campeonato; número de meninas de uma sala de aula comparada com o total de alunos da sala; número de questões corretas em uma prova comparado com o número total de questões (SANTOS, 1997).

B - Comparação de uma parte de um todo com outra parte do todo

Ex: Comparar o que foi pintado para o que não foi pintado em uma figura repartida em partes iguais; número de pontos ganhos para o número de pontos perdidos num campeonato; número de meninas para o número de meninos em uma sala de aula; número de questões erradas em uma prova comparado com o número de questões corretas (SANTOS, 1997).

C - Ideia de probabilidade

Ex: Probabilidade de cair cara em uma moeda de 2 faces (cara e coroa) ao jogá-la várias vezes. Probabilidade de sair um número de 1 a 6 em um dado com esses números ao jogá-lo várias vezes.

Santos (1997) diz que atividades como essas sugeridas nos permitem verificar com os alunos que as ideias de fração com o significado de razão são muito utilizadas em situações do dia a dia. Além disso, a discussão e trabalho com várias situações de fração como razão, onde se comparam uma parte com o todo, permitem que o aluno perceba que essa ideia coincide com a ideia de fração no contexto geral de parte-todo. É importante que os alunos representem e registrem em termos matemáticos e em explicações orais e escritas o que compreendem dos diversos usos de fração como razão. E também como pensam para resolver diferentes situações e tarefas com os significados explorados de fração.

Fração com o significado de divisão ou quociente

Esse significado se faz presente em situações associadas à ideia de partição, ou seja, quando uma fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma variável corresponde ao numerador e a outra ao denominador. E o resultado da fração, representa o quociente de dois números.

Ex. (1): Tenho dois chocolates e quero dividir entre três pessoas. Quanto receberá cada uma? O aluno deverá reconhecer que o quociente de 2:3 ou 2/3 é igual à quantidade de chocolates que cada criança irá receber (MERLINI, 2005; SANTOS, 1997).

Ex. (2): Em uma festa foram repartidos (distribuídos) igualmente, dois bolos para seis crianças. Quanto do bolo cada criança recebeu? As crianças podem pensar em dividir 2:6 ou 2/6, como sendo a quantidade de bolo que cada criança irá receber. Assim como também podem pensar em dividir um bolo para cada três crianças e dizer que seria dividir 1:3 ou 1/3, como sendo a quantidade de bolo que cada criança irá receber. E podem dizer que pensaram assim porque sabem que os bolos são de mesmo tamanho. E podem assim concluir que 2:6 é igual a 1:3, isto é, 2/6 = 1/3 (MERLINI, 2005; SANTOS, 1997).

Ex. (3): Solicitar que os alunos efetuem divisões do tipo 5:2 ou 7:3 ou 9:5 e expliquem que número representa o resto em cada divisão (MERLINI, 2005; SANTOS, 1997).

As situações de fração com o significado de divisão ou quociente podem ser usadas para as crianças se apropriarem do invariante de ordenação das frações por meio do raciocínio lógico: quanto mais crianças para dividirem o bolo, menor o pedaço que cada uma receberá. A relação inversa entre o divisor e o quociente poderia ajudar as crianças a entender que quanto maior o denominador, menor a parte (Nunes et al. 2005).

Fração com o significado de operador

Usamos a fração com significado de operador em situações em que vamos reduzir um pôster em suas medidas ou ampliar um mapa. Ou quando procuramos descobrir se existiu uma falsa redução ou ampliação. Segundo Santos (1997), é importante que os alunos concluam que o conceito de fração trabalhado nessas situações foi de um modificador da situação inicial. Em situações reais de medições de ruas, mapas, representações de regiões urbanas, a planta baixa de uma casa, etc., usa-se também a ideia de fração como um operador. É necessário que o professor aborde com os alunos em suas aulas situações que lhes permitam explorar, compreender e resolver tarefas que envolvam tanto a ampliação quanto a redução de figuras, fotografias, mapas e a localização da escola em relação à rua, ao bairro e à cidade, dentre outras possibilidades.

Santos (1997) registra aspectos cruciais relacionados ao conceito de fração e seu estudo que os professores devem explorar com seus alunos para que eles aprendam e compreendam os significados associados com a ideia de fração. Dentre esses, nós destacamos que

> as frações representam novos números; ... devemos representar as frações desde o início na reta numerada; devemos trabalhar com as noções de frações em todos os contextos (parte-todo, razão, divisão e operador); devemos comparar e refletir os procedimentos de cálculo de adições, subtrações, multiplicações e divisões de frações com os procedimentos de cálculo destas operações com números naturais (SANTOS, 1997, p. 106-107).

Concluímos, então, que as frações abrangem diferentes significados, e se o que queremos é uma melhoria no ensino e na aprendizagem de fração, nós devemos explorar em sala de aula diversas situações que contemplem os seus significados. É oportuno perguntarmos aos nossos alunos o que percebem e compreendem em cada situação trabalhada. Ou seja, ouvirmos nossos alunos atentamente para verificarmos se estão adquirindo esses significados de fração com compreensão ou não. E também solicitar que descrevam em palavras seus raciocínios, assim como solicitar que representem visualmente com figuras, desenhos, símbolos ou outros esquemas como identificam diferentes situações com frações e como as resolvem.

2.5. O processo de ensino e de aprendizagem de fração

Não é raro ouvirmos comentários de professores a respeito de suas dificuldades para ensinar frações e por parte dos alunos em aprender esse conteúdo matemático. Essa situação torna-se inquietante, pois, são milhares de crianças que passam pelas unidades escolares e que, durante o estudo de fração e ao final dele, aparentam não compreender o mesmo.

Faz-se necessário destacar que algumas dificuldades dos alunos, conforme mencionam os PCN (BRASIL, 1997), estão relacionadas às rupturas com as ideias já construídas a respeito de números naturais. Essas rupturas demandam tempo e é preciso que haja uma abordagem que explore os vários significados de fração no ensino. Dentre as dificuldades, ressaltamos a falta de entendimento da própria representação a/b; com $b \neq 0$, como um número e não representando dois números separados por um traço. Uma outra dificuldade consiste em compreender a noção de equivalência, entender que cada fração pode ser reproduzida por diferentes e infinitas representações. Além disso, no campo das frações, os alunos precisam conceber infinitas representações para uma quantidade ou medida, enquanto os números naturais eram representados por um único símbolo (MERLINI, 2005; SANTOS; REZENDE, 1996; SANTOS, 1997).

Compreender a ordenação de fração é outra dificuldade. Uma vez que nos números naturais é possível organizá-los, segundo uma ordenação constante, na qual o sucessor de um número é ele próprio, acrescido de uma unidade e vice-versa. Situação que não ocorre nas frações. Nos números naturais, por exemplo, sabemos que $3 < 4$. Já na comparação de duas frações, dizemos que $1/3 > 1/4$.

Santos (2005) destaca que o conceito de fração é uma das mais complexas e importantes ideias matemáticas para ser trabalhada em aula e que o professor precisa estar ciente disso ao planejar seu processo de ensino. Ela informa que concorda com Behr et al.[9] (1983) (apud SANTOS, 2005) ao dizer que o processo de ensino e aprendizagem envolve três aspectos:

> o primeiro é o prático, isto é, as frações em suas diferentes representações surgem, com frequência, em diversas situações relacionadas às expressões de medida e de quantidades...; o segundo aspecto refere-se a uma perspectiva do ponto de vista psicológico, ou seja, o trabalho com frações surge como uma oportunidade privilegiada para alavancar e expandir estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual; o terceiro aspecto diz respeito à perspectiva da Matemática, pois serão justamente os primeiros estudos com as frações que fundamentarão ideias matemáticas mais complexas como, por exemplo, as operações algébricas elementares a serem desenvolvidas ao longo do ensino de Matemática (p. 21).

Como podemos verificar em livros didáticos na escola, a ideia de fração é abordada inicialmente por volta da 2ª série (atual 3º ano) do ensino fundamental. Conforme os autores Santos; Rezende (1996), e Nunes; Bryant (1997) comentam, a forma mais comum de se introduzir o conteúdo de frações às crianças é utilizando apenas o significado parte-todo com figuras geométricas comuns (retângulo, quadrado, circulo) e associando a contextos de maçã, bolo, pizza e barra de chocolate. As crianças acabam aprendendo que o número total de partes é o denominador e que as partes pintadas são o numerador. Esse comportamento das crianças ao resolverem tarefas semelhantes com fração, faz com que elas aparentem saber algo sobre frações. Portanto, as dificuldades apresentadas pelos alunos para compreender frações podem ser causadas por estar o método de ensino baseado em apenas um dos significados de fração. E isso pode ser mais um dos fatores que acarreta uma aprendizagem deficiente.

Pesquisas mostram que os alunos sentem dificuldades em adquirir o conceito de fração mesmo depois de estarem explorando o mesmo na escola. Muitos alunos, mesmo depois de extenso trabalho com frações, só as identificam como partes de números, mas não percebem que uma fração representa um número (BEZERRA, 2001; MERLINI, 2005; SANTOS; REZENDE, 1996; SANTOS, 1997). Santos (1997) comenta que se faz necessário trabalhar com uma grande variedade de atividades que permitam aos alunos construir com compreensão os conceitos de fração em

[9]BEHR, M. J.: LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. (1983). Rational number concepts. In: LESH, R; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of mathematics concepts and processes.** New York: Academic Press, 1983, p. 91-126.

diversos contextos. Tais atividades, segundo a autora, devem ser planejadas, a fim de propiciar que os alunos alcancem os seguintes objetivos:

> Identificar a ideia de fração nos conjuntos discreto e contínuo;
> Identificar a ideia de fração em vários contextos (como parte-todo, como razão, como divisão e como operador);
> Reconhecer, descrever, ampliar e criar uma grande variedade de padrões no contexto de frações;
> Compreender os conceitos de fração no contexto de comprimento;
> Desenvolver os conceitos de fração relacionados ao processo de medição e os conceitos associados às unidades de medida;
> Identificar frações utilizando estimativas de medidas;
> Fazer e utilizar medições com números fracionários em situações problemáticas do quotidiano;
> Justificar as respostas e processos usados para obter a solução;
> Explorar problemas e descrever resultados utilizando a reta numérica, modelos e representações gráficas, numéricas, físicas, algébricas e verbais;
> Compreender e apreciar a necessidade da existência de números fracionários para além dos números inteiros;
> Desenvolver os conceitos de frações e decimais;
> Desenvolver o sentido do número e suas relações de ordem relativamente a frações, decimais, inteiros, inteiros relativos e números racionais;
> Usar modelos para relacionar frações com decimais e determinar frações equivalentes;
> Usar modelos para explorar operações com frações e decimais;
> Representar e descrever relações matemáticas com frações;
> Abstrair as estruturas conceituais de frações e operar com frações;
> Explorar o uso de variáveis e de frases abertas para exprimir relações entre frações;
> Construir os significados dos números através de experiências do mundo real e com recurso a materiais físicos;
> Acreditar que a matemática faz sentido (SANTOS, 1997, p. 101).

Magina e Campos (2008) comentam que a pesquisa de Nunes e colegas (2003) foi inspirada nos trabalhos de Kieren (1980)[10]. Essas autoras afirmaram que poderá ocorrer uma aprendizagem do conceito de fração quando a representação do número racional for explorada em todos os seus significados. Ou seja, pensar em fração como sendo um novo número e podendo estar associado a quatro significados diferentes: parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. O entendimento desses significados ocorrererá se houver a compreensão lógica dos mesmos em cada um dos contextos.

No que se refere ao ensino de fração, observamos uma ênfase exagerada em procedimentos e algoritmos, e uma forte tendência para traduzir esse conceito

---

[10] KIEREN, T. Personal knowledge of rational numbers: its intutive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, N. (Eds.) **Number concepts and operations in the middle grades.** Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1980, p. 162-180.
NUNES, T. et al (2003) **The effect of situations on children´s understanding of fractions**. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, Junho de 2003.

apenas utilizando a exploração do significado parte-todo, a partir de sua representação. Nesse sentido, Santos (2005) destaca

> A aquisição de um conceito matemático pressupõe o seu reconhecimento em diversas situações e diversos contextos. Com o conceito de número racional, isso se torna bem mais evidente, pois podemos dizer que, para construir esse importante conceito matemático, torna-se necessário explorá-lo em várias situações e em diferentes contextos (p. 3).

Além disso, a autora ao concluir sua pesquisa de mestrado afirma que “a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com as ideias construídas pelos alunos a respeito dos números naturais. Portanto, ‘‘a aprendizagem dos números racionais demanda certo tempo e uma abordagem adequada” (SANTOS, 2005, p. 93). Confirmando argumentos de outros autores já comentados nas seções anteriores deste capítulo.

A preocupação com a aprendizagem do número fracionário deve-se à constatação de que as frações não representam apenas um novo número, mas também um tipo novo de número. Nunes e Bryant (1997) argumentam:

> [Em] se tratando dos números fracionários, às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba (p.191).

Importa apontar a conexão entre os números fracionários e o raciocínio multiplicativo, destacando que as frações são números produzidos por divisões que resultam sempre em partes iguais. A aquisição do conceito de número fracionário é um ponto crítico na aprendizagem da matemática, que, muitas vezes, não se consolida por conta de defasagens no pensamento multiplicativo. Dessa forma, pressupõe a capacidade de entender a lógica das situações, as invariáveis, para que possamos escolher as formas apropriadas de representar conceitos matemáticos (NUNES; BRYANT, 1997; NUNES et al. 2005).

Vimos também que tanto os conceitos cotidianos como os científicos, embora os últimos sejam transmitidos em situações formais, passam por um processo de desenvolvimento, isto é, não são apreendidos em sua forma definitiva em apenas uma situação (VYGOTSKY, 1988/1934; 1991). As experiências futuras do sujeito tenderão a fazer com que os conceitos cotidianos, em geral, se iniciem no confronto com uma situação concreta. Além disso, os conceitos cotidianos (ou espontâneos) se desenvolvem e se expandem no decorrer de atividades posteriores de leituras, trabalhos escolares, e estudos individuais e/ou em pequenos grupos que ocorrem na escola. E se aprofundam ou tornam-se significativos no diálogo sobre os mesmos com seus colegas e professores. Já os conceitos científicos são trabalhados formalmente na escola e podem surgir de experiências cotidianas, agregam elementos dessas experiências e caminham em direção a um nível de conhecimento mais elaborado e abstrato. Em alguns casos o conhecimento é construído na mente do sujeito quando os conceitos científicos e espontâneos convergem ou quando estes se complementam.

Nesse raciocínio, incluímos tais conceitos e ideias neste trabalho. Exploramos o conceito de fração como um conceito científico importante que é apresentado de maneira formal nos currículos escolares, a partir de situações contextuais. Assim, nossa preocupação ao longo da pesquisa foi detectar indícios dessa convergência entre os conceitos científicos e cotidianos. E procuramos propor atividades aos alunos que os desafiassem a (re)ver e (re)construir o conceito de fração.

2.6. O estudo de fração em alguns livros didáticos

Como também podemos verificar em nossa prática docente de mais de quatorze anos como professor de matemática no ensino fundamental, o Livro Didático (LD) é o recurso mais utilizado pelo professor em sala de aula. Além de ser o material mais utilizado pelo professor, sabe-se que não deve ser usado como o único recurso pedagógico. Existem defesas e críticas a esse recurso, que já se tornou material constante nas aulas dos professores. Concordamos com Santos (2007), quando descreve que

> o livro didático de matemática é um poderoso recurso didático utilizado pelos professores e alunos e que colabora com a educação matemática no que ela tem a oferecer para a formação da cidadania. É ele quem muitas vezes estabelece o que ensinar. Ele infere na formação do individuo, contribuindo para a sua formação cidadão. Isto porque encontramos em nossa realidade social, professores com formações deficitárias, com excesso de carga horária de trabalho, baixos salários, estressados e desmotivados (p. 147-148).

Um ponto negativo apontado é que o livro de matemática, em particular, costuma atribuir muita importância a técnicas operatórias, primando mais pela memória e mecanização que pela compreensão de conceitos de conceitos (ROMANATTO, 2004). A autora afirma que esses têm uma presença marcante em sala de aula, chegando muitas vezes a substituir o professor, quando deveria servir-lhe de apoio, e estar a serviço do professor. Por outro lado, Romanatto (2004) também esclarece que esse livro desempenha um papel importante de comunicação no tempo e espaço de sala de aula. E o livro didático é uma vasta fonte de informações.

Carvalho (2007) informa que com a implantação em 1995 do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) pelo Ministério da Educação (MEC), os LDs passaram a ter critérios definidos para a sua análise. Especialistas de diversas áreas, tais como: matemática, ciências, língua portuguesa, geografia e história, analisam os livros didáticos desde esta época. A autora avalia que essa é uma iniciativa positiva do MEC e que tem auxiliado o sistema escolar. Uma vez que os livros didáticos atuais se mostram, desde então, melhor elaborados pelos autores e melhor selecionados pelas editoras.

É o professor que seleciona e utiliza o LD, e o LD não é um instrumento neutro, mas expressa uma visão de mundo. Portanto, o professor precisa saber manipular e explorar esse material. Cabe a ele, a tarefa de saber interpretar os saberes presentes no LD, podendo, ou não, acrescentar outras informações para os alunos. O professor tem, por exemplo, o dever de fazer a seleção das opções metodológicas apresentadas no LD. Porquanto, para a aprendizagem de um conhecimento, muitos são os aspectos que se cruzam. Afinal não podemos querer uma aprendizagem efetiva de um conhecimento matemático, como fração, sem considerar o modo como este conhecimento pode chegar e como de fato tem chegado ao aluno: de modo formal via professor e LDs usados na escola e de modo informal via cotidiano do aluno, dentro e fora da escola (BEZERRA, 2001; ROMANATTO, 1997, 2004; SANTOS, 2007).

Realmente, em nossa cultura, o uso de cálculos na representação fracionária é bem reduzido. De acordo com Bezerra (2001), toda a ênfase de livros didáticos e propostas curriculares, em desenvolver esses cálculos de fração de modo mecânico, resulta em quase nenhum uso funcional autêntico. No entanto, seria relevante que o aluno aprendesse o sentido de uma fração? A resposta é positiva. Representações fracionárias e decimais são facetas de um mesmo número, o número racional, ainda que representações decimais de tipos especiais (dízimas periódicas) também possam servir para representar números não racionais.

Um conhecimento mais global do número racional positivo, que é o estudado até a 4ª série, compreende uma interpretação correta de suas duas representações. O aluno precisa saber transitar, por exemplo, com desenvoltura da representação 1/2 de kg para a representação 0,5 kg ou para a expressão 500 gramas. As frações são ainda de grande uso nas proporções e nas porcentagens, em razões e escalas, e ainda nas receitas culinárias. Mas, como verificamos, o que está em jogo é a compreensão do sentido do número fracionário, e não seus inúmeros cálculos, os quais são priorizados no sistema escolar. Como já lembrado, essa compreensão não pode ser conseguida só com a divisão de figuras geométricas em partes iguais e a memorização de regras operatórias.

Como já descrito, fração tem sido um dos temas difíceis para o professor e para o aluno compreender no Ensino Fundamental. Avaliações e pesquisas realizadas todos os anos, tais como o Programa de Avaliação Básica do Espírito Santo [PAEBES] (ESPÍRITO SANTO, 2010), atestam o baixo rendimento dos alunos no assunto. Ao contrário do que os autores de livros didáticos parecem pensar, a construção do sentido de número fracionário não é tarefa que possa ser resolvida em uma ou duas páginas. É preciso encontrar caminhos para levar o aluno a identificar essas quantidades em seu contexto cotidiano e a apropriar-se da ideia do número fracionário correspondente. É possível trabalhar vários problemas desafiantes para a criança, antes mesmo de ela começar a aprender frações formalmente na escola e no LD.

Em nosso estudo exploratório em 2009 diagnosticamos o que os alunos de 5ª série/6º ano sabiam de fração. E preocupamo-nos também em analisar os LDs de matemática utilizados pelos professores em séries/anos anteriores. Para isso, recorremos aos registros no diário escolar de matemática dos anos anteriores. Fizemos isso a fim de identificar registros de conteúdos trabalhados e do LD utilizado. Também solicitamos que os alunos localizassem o caderno da disciplina de matemática da 3ª e 4ª série e nos auxiliassem na identificação dos assuntos estudados.

Ao sermos informados pela direção da escola que o trabalho com os alunos nas séries iniciais ocorre no turno vespertino, decidimos ir até a escola nesse turno. Ficamos sabendo que duas professoras tinham trabalhado com nossos alunos. No entanto, só foi possível concretizar o objetivo de conhecer e dialogar com uma das professoras, que já trabalha na escola há quatro anos. Uma vez que a outra professora já havia se aposentado e não conseguimos localizá-la.

No diálogo realizado com essa professora PA (código de identificação dela) soubemos que ela é formada em Pedagogia. Ela descreve o trabalho em sala de aula, como algo que exige cada vez mais do professor. Este professor real, muitas vezes, não tem condições nem mesmo de preparar uma boa aula, devido à necessidade cada vez maior de trabalhar em mais do que uma escola, por conta dos baixos salários.

Ao ser questionada quanto ao LD utilizado com a disciplina de matemática com os alunos nas séries iniciais do ensino fundamental (3ª série/4º ano e 4ª série/5º ano) em anos anteriores, ela afirma que sempre buscou utilizar mais de um LD com os alunos. No entanto, destaca que utiliza com frequência as seguintes coleções de livros para a 4ª série/5º ano:

A - BONJORNO, R. A.; BONJORNO, J. R. **Pode contar comigo:** Matemática. São Paulo, SP: FTD, 1994;

B - MARSICO, M. T.; CUNHA, M. C. T. C.; ANTUNES, M. E. M.; NETO, A. C. C. **Coleção Caracol** – Matemática. São Paulo, SP: Scipione, 2004;

C - SANCHEZ, L. B.; LIBERMAN, M. P. **Fazendo e compreendendo matemática.** São Paulo, SP: Saraiva, 2008.

Comentários sobre a abordagem de frações nesses LDs

Apresentamos alguns comentários e reflexões sobre cada um dos LD. Iniciamos observando como o livro de Bonjorno, Bonjorno (1994) estava organizado e o que trazia para o estudo de frações.

BONJORNO, R. A.; BONJORNO, J. R. **Pode contar comigo:** Matemática. São Paulo – FTD, 1994;

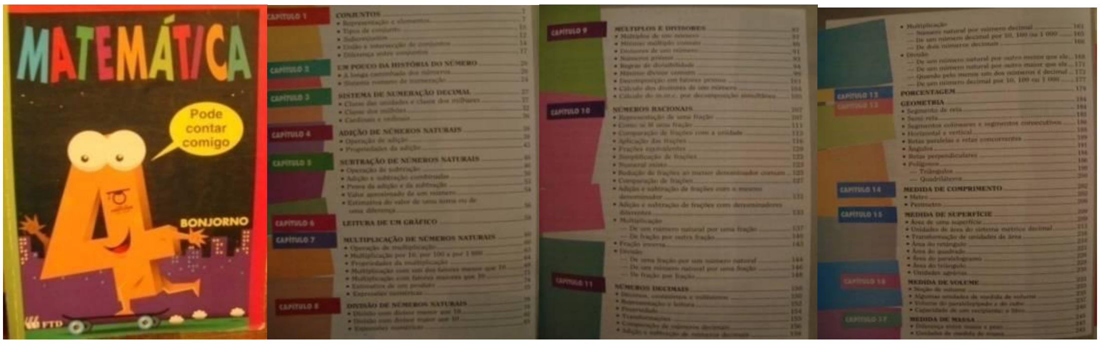


Fig. 1 – Livro A **Índice do livro** **Índice do livro** **Índice do livro**

Os autores iniciam o livro descrevendo a fundamentação e objetivos gerais do mesmo. O livro tem 245 páginas distribuídas em 17 capítulos, e outras 8 páginas contendo as soluções dos exercícios propostos. Os capítulos foram organizados assim:

- Capítulo 1 – Conjuntos (pág. 7-17);
- Capítulo 2 – Um pouco da história do número (pág. 20-24);
- Capítulo 3 – Sistema de numeração decimal (pág. 27-36);
- Capítulo 4 – Adição de números naturais (pág. 39-43);
- Capítulo 5 – Subtração de números naturais (pág. 46-56);
- Capítulo 6 – Leitura de um gráfico (pág. 56-58);
- Capítulo 7 – Multiplicação de números naturais (pág. 60-75);
- Capítulo 8 – Divisão de números naturais (pág. 78-85);
- Capítulo 9 – Multiplicação e divisão (pág. 87-105);
- Capítulo 10 – Números racionais (pág. 107-148);
- Capítulo 11 – Números decimais (pág. 150-179);
- Capítulo 12 – Porcentagem (pág. 179);
- Capítulo 13 – Geometria (pág. 184-200);
- Capítulo 14 – Medidas de comprimento (pág. 202-206);
- Capítulo 15 – Medida de superfície (pág. 209-230);
- Capítulo 16 – Medida de volume (pág. 233-240);
- Capítulo 17 – Medida de massa (pág. 245).

No capítulo 10, os autores destacam o tema ***Números Racionais***, o qual seguem descrevendo através de subtítulos. Bonjorno e Bonjorno (1994) começam com o subtítulo *Representação de uma fração*. Os autores destacam que frequentemente usamos frases que envolvem frações. Em seguida, eles apresentam exemplos com o comentário de duas crianças, a saber: a) Vou levar um quarto do queijo; b) Só quero meio copo de suco. Utilizando as frações 1/2, 2/3, 3/4, 5/9, 7/10 e 3/12 como exemplo, representam em uma tabela e comparam por meio de desenho a fração indicada através de números e, por último, como se lê a fração (descrita por extenso). Destacam que o termo *frações* ou *números fracionários* apresentam o mesmo significado. E que, para se ler uma fração, devemos enunciar primeiro o numerador e depois o denominador.

Um segundo subtítulo utilizado é *Comparação de frações com a unidade*. Aqui temos situações em que apresentam através do desenho indicando a unidade, que esta pode ser repartida, por exemplo, em duas, três, quatro e dezesseis partes de mesmo tamanho (área). Na qual através de números e utilizando os sinais de desigualdade (> ou <) descrevem que o inteiro (ou unidade) é sempre maior que a fração resultante de sua respectiva divisão em partes de mesmo tamanho.

Aplicação das frações, ao descreverem sobre esse subtema os autores trazem exemplos e exercícios em forma de resolução de problemas, tais como: Um rolo tinha 150 metros de arame. João usou 1/3 do rolo para fazer uma cerca. Quantos metros de arame ele usou? Renata vai receber 3/5 de uma herança de R$ 8.000,00. Quanto ela vai receber? Em 2/5 de um rebanho, há 80 cabeças de gado. Quantas cabeças de gado há no rebanho todo?

Os autores relatam ainda situações e exercícios que envolvem os subtemas: *frações equivalentes; simplificação de frações; numeral misto; redução de fração ao menor denominador comum; comparação de frações; adição e subtração de frações com o mesmo denominador; adição e subtração de frações com denominadores diferentes; multiplicação de um número natural por uma fração; multiplicação de uma fração por outra fração; fração inversa; divisão de uma fração por um número natural; divisão de um número natural por uma fração;* por fim, *divisão de fração por fração.*

Ao refletirmos sobre a abordagem do tema pelos autores Bonjorno e Bonjorno (1994), observamos que eles concentraram muitas informações importantes sobre o assunto em 42 páginas do livro. As explicações apareceram no início dos subtítulos e em exemplos breves de atividades, seguidos de exercícios que exigiam em grande parte apenas cálculos operatórios e não evidenciavam necessariamente se os alunos estão compreendendo e construindo significados de fração.

A seguir comentamos o livro dos autores Marsico, Cunha, Antunes, Neto (2004). Escaneamos a capa do livro e seu sumário. Listamos os capítulos do livro e analisamos a abordagem dos autores sobre os números racionais.

MARSICO, M. T.; CUNHA, M. C. T. C.; ANTUNES, M. E. M.; NETO, A. C. C. **Coleção Caracol** – Matemática, São Paulo - SP: Scipione, 2004.

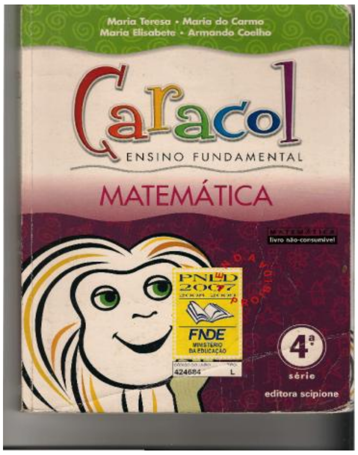


Fig. 2 – Livro B


Sumário

1 Números naturais
A história dos números 6
Idéia de número 7
Números naturais 12

2 Sistemas de numeração
Sistema de numeração decimal 15
Noção de ordens e classes 17
Valor absoluto e valor relativo 20
Numeração ordinal 22
Sistema de numeração romano 25

3 Geometria
Noção de geometria 27
Sólidos geométricos 28
Ponto, reta e plano 33
Semi-retas 37
Segmentos de reta 37

4 Sistema monetário brasileiro
Unidade monetária: real 39
Cédulas 40
Moedas 40
Usando a calculadora 42

5 Operações com números naturais
Adição 46
Subtração 53
Multiplicação 59
Múltiplos de um número natural 70
Mínimo múltiplo comum 72
Divisão 75
Divisores de um número natural 80
Máximo divisor comum 82
Critérios de divisibilidade 85
Números primos 88
Cálculo do MMC pela decomposição simultânea 94

4

Índice do livro


6 Figuras geométricas
Idéia de ângulo 96
Medida de ângulo 97
Tipos de ângulos 97
Polígonos 101
Triângulos 103
Quadriláteros 105
Circunferência e círculo 110

7 Sentenças matemáticas
Expressão com valor desconhecido 115

8 Simetria
Figuras com mais de um eixo de simetria 118

9 Números racionais: representação fracionária
Idéia de fração 119
Fração de quantidades 124
Tipos de fração 127
Números mistos 130
Frações equivalentes 134
Comparação de frações 141
Operações com frações 145

10 Medidas de tempo
Unidade fundamental: segundo 157
Outras medidas de tempo 158

11 Números racionais: representação decimal
Décimos 160
Centésimos 162
Milésimos 164
Comparação de números decimais 166
Operações com números decimais 167

12 Porcentagem
Noção de porcentagem 179
Cálculo de porcentagem 180

13 Medidas de comprimento
Unidade fundamental: metro 186
Múltiplos e submúltiplos do metro 187
Idéia de perímetro 194

14 Medidas de superfície
Idéia de área 197
Unidade fundamental: metro quadrado 198
Múltiplos e submúltiplos do metro quadrado 198
Áreas de figuras planas 202

15 Medidas de massa
Unidade fundamental: grama 206
Múltiplos e submúltiplos do grama 207

16 Medidas de volume
Unidade fundamental: metro cúbico 210
Múltiplos e submúltiplos do metro cúbico 211
Volume de figuras espaciais 214

17 Medidas de capacidade
Unidade fundamental: litro 218
Múltiplos e submúltiplos do litro 219

Glossário 225
Outras leituras 232

5

Índice do livro

Os autores iniciam descrevendo a fundamentação e objetivos gerais do o livro. É um material composto por 252 páginas distribuídas em 17 capítulos com teoria, exemplos de atividades e exercícios para o aprendizado do aluno. Além de outras 8 páginas contendo as soluções dos exercícios propostos.

- Capítulo 1 – Números naturais (pág. 6-14);
- Capítulo 2 – Sistema de numeração (pág. 15-26);
- Capítulo 3 – Geometria (pág. 27-38);
- Capítulo 4 – Sistema monetário brasileiro (pág. 39-45);
- Capítulo 5 – Operações com números naturais (pág. 46-95);

- Capítulo 6 – Figuras geométricas (pág. 96-114);
- Capítulo 7 – Sentenças matemáticas (pág. 115-117);
- Capítulo 8 – Simetria (pág. 118);
- Capítulo 9 – Números racionais: representação fracionária (pág. 119-156);
- Capítulo 10 – Medidas de tempo (pág. 157-159);
- Capítulo 11 – Números racionais: representação decimal (pág. 160-178);
- Capítulo 12 – Porcentagem (pág. 179-185);
- Capítulo 13 – Medidas de comprimento (pág. 186-196);
- Capítulo 14 – Medida de superfície (pág. 197-205);
- Capítulo 15 – Medida de massa (pág. 206-209).
- Capítulo 16 – Medida de volume (pág. 210-217);
- Capítulo 17 – Medida de capacidade (pág. 218-224);
- Glossário e outras leituras (pág. 252).

Como podemos verificar nos registros acima, Marsico, Cunha, Antunes, Neto (2004) abordam no capítulo 9 o tema ***Números racionais: representação fracionária***. Os autores iniciam com exemplos para abordar uma ideia de fração. E fazem algo semelhante ao que foi feito por Bonjorno e Bonjorno (1994). Marsico, Cunha, Antunes, Neto (2004) utilizam exemplos que buscam permitir ao aluno relacionar o desenho, sua representação fracionária e a forma de como se lê cada representação. Eles destacam também o que denominam *fração de quantidade; tipos de fração; números mistos; frações equivalentes; comparações de frações; e operações com frações*. Em cada subtítulo os autores exploram o assunto a partir de exemplos com situações envolvendo o emprego e a importância da representação de situações empregando as frações.

Ao analisar o livro de Sanchez e Liberman (2008), concentramos nosso olhar no mesmo por ser o livro que a professora PA informou ter utilizado com mais frequência com nossos alunos na 4ª série. Inicialmente apresentamos algumas páginas do livro, os temas abordados em cada capítulo e descrevemos alguns detalhes sobre a abordagem de frações desses autores.

SANCHEZ, L. B.; LIBERMAN, M. P. **Fazendo e compreendendo matemática.** São Paulo - SP: Saraiva, 2008.

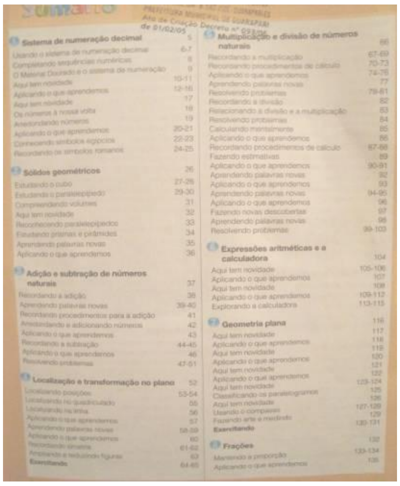


Fig. 3 – Livro C **Índice do livro** **Índice do livro**

O livro é composto por 256 páginas distribuídas em 13 capítulos, como segue:

- Capítulo 1 – Sistema de numeração decimal (pág. 5-25);
- Capítulo 2 – Sólidos geométricos (pág. 26-36);
- Capítulo 3 – Adição e subtração de números naturais (pág. 37-51);
- Capítulo 4 – Localização e transformação no plano (pág. 52-65);
- Capítulo 5 – Multiplicação e divisão de números naturais (pág. 66-103);
- Capítulo 6 – Expressões aritméticas e a calculadora (pág. 104-115);
- Capítulo 7 – Geometria (pág. 116-131);
- Capítulo 8 – Frações (pág. 132-166);
- Capítulo 9 – Combinatória e probabilidade (pág. 167-176);
- Capítulo 10 – Área e volume (pág. 177-193);
- Capítulo 11 – Representação decimal (pág. 194-226);
- Capítulo 12 – Cálculo de média e porcentagem (pág. 127-241);
- Capítulo 13 – Medidas (pág. 242-255);

Constatamos que os autores Sanchez e Liberman (2008) abordam o tema **fração** no capítulo 8 e apresentam uma série de situações em forma de exemplos de atividade. Em cada situação procuram fazer com que os alunos aprendam a representar corretamente cada fração dada com o significado de fração utilizado com a ideia de parte-todo. Eles apresentam mais exemplos que os LDs comentados anteriormente. Nos exercícios trazem situações em que o aluno precisa identificar no desenho uma fração correspondente ao mesmo, depois colocam uma situação inversa para o aluno resolver. Além disso, os autores exploram situações diversas do cotidiano (com bolos, alimentos, ovos, fotografias, relógios, balanças) que levem o aluno a identificar a representação fracionária já destacada com a fração ou que o aluno tenha que representar algo em fração. No entanto, a maior parte das tarefas colocadas no livro exigia dos alunos que resolvessem algo sem ter que explicar como pensaram ou como fizeram para resolver a tarefa. Como ocorreu com os LDs dos outros autores, Sanchez e Liberman (2008) buscam descrever a partir de subtemas o conteúdo envolvendo o tema fração proposto. Enfim, desses exemplos de atividades e exercícios, eles esperam que o LD leve os alunos a perceber em diferentes situações o emprego das frações.

Dentre os vários subtítulos explorados neste LD sobre o assunto, os autores iniciam assim: *recordando frações; recordando frações equivalentes; operações com frações; calculando frações de uma quantidade; resolução de problemas; calculando fração de fração; representando frações na reta numérica.*

Quanto ao processo de escolha do LD, a professora PA comenta que todos os anos os professores regentes efetivos da rede municipal de ensino se reúnem para escolher o LD. Nesse momento analisam algumas obras e definem a escolha no coletivo. Mesmo que tais professores se preocupem com a análise e forma como os conteúdos são trabalhados em cada obra, sempre se faz necessária uma orientação formal de um profissional da Secretaria de Educação do Município – SEMED.

Quanto ao conteúdo, abordando o tema fração, a professora reconhece sentir dificuldades em ensiná-lo por não ser um assunto fácil de compreensão. Acredita que ela mesma precisa compreender melhor o conteúdo. Comenta ainda que nunca foi boa de matemática, por esta ser uma das matérias mais difíceis e ter um alto índice de reprovação. Ela afirma que, se possível, não ensinava essa matéria de matemática. No entanto, como tem o dever de ensinar um pouco de cada matéria, por ser uma única professora atuante nas séries iniciais, não há possibibildade de ficar sem trabalhá-la.

No que se refere à utilização do LD, ela justifica ser um instrumento importante que facilita o trabalho com os alunos em sala de aula, sobretudo no trabalho do professor no ensino de fração. Como descrito anteriormente, ela comenta que não utiliza apenas um LD em suas aulas, devido à necessidade de buscar exemplos e atividades fáceis de ser compreendidas e desenvolvidas pelos alunos.

Struik (1987) nos afirma que os números decimais, o sistema monetário e os sistemas de medidas devem ser compreendidos como um estudo integrado e interessante. Sua aprendizagem não pode ser limitada apenas ao estudo de mudança de vírgula de um lado para o outro, sem compreensão, sem construção e sem o uso de materiais como embalagens, balanças, fitas métricas, enfim, ferramentas de medição, etc (SILVA, 2000). Ele considera que o papel da escola não é somente transmitir conteúdos, mas formar um cidadão capaz de viver e participar da sociedade em que vive. Em suma, o ensino de matemática deve ser prioritário no trabalho docente, procurando desenvolver nos alunos competências para compreender e transformar a realidade. E a seleção e uso do LD são importantes nesse trabalho docente.

Conforme Ferreira (2002) nos descreve, os conceitos de matemática podem ser elaborados a partir de experiências já adquiridas pelos alunos e se caracterizam por sua generalidade, diferenciação, abstração e simbolização. Por exemplo, ao analisarem uma situação de medida, eles podem constatar que, se a unidade “metro” não couber um número exato de vezes no comprimento de dado objeto, será preciso subdividi-lo em unidades menores (centímetros) e ser representado por meio de números decimais.

A noção de números decimais tem, como ponto de partida, o domínio que os alunos costumam ter sobre as relações entre as unidades do sistema monetário (real e centavos) e certa familiaridade com algumas unidades dos sistemas de medidas de comprimento e massa. A compreensão das frações que são equivalentes aos números decimais tem, como fundamento, os conceitos de unidade e de sua subdivisão em partes iguais.

As primeiras explorações sobre esses conceitos partem das expressões utilizadas, cotidianamente, (meia hora, dez por cento, um quarto para as duas, um quarto de quilo de café, etc.) e das relações já conhecidas entre as frações e decimais. Por exemplo, se os alunos reconhecem que 1/2 é igual a 0,5; poderão concluir que 0,4 ou 0,45 é um pouco menos que 1/2; ou ainda, que 0,6 ou 0,57 é um pouco mais que 1/2.

Entendemos que o ensino de fração não pode ser apresentado ao aluno de forma descontextualizada, inflexível e imutável. O conteúdo e a metodologia devem ser articulados de modo que estimule a curiosidade, a comparação e a busca de respostas por parte dos alunos, quanto à importância do tema no desenvolvimento do individuo em sociedade. Concordamos com Fiorentini e Miorim (1996, p. 30) ao afirmarem que

> o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina.

Ao associar os erros comumente cometidos pelos alunos ao nos referirmos às atividades envolvendo fração, concluímos que os alunos muitas vezes aprendem a manipular os símbolos sem perceberem o sentido que eles têm. Os alunos aplicam as regras que lhes foram ensinadas, porém não são capazes de conectá-las nem com seu conhecimento procedimental nem com o conceitual. Por exemplo, os alunos, geralmente, sabem que 2 é menor que 5, entretanto ao ordenar frações, têm dificuldades em concluir que 1/5 é menor que 1/2, contrariando de certa forma sua percepção imediata, centrada nos números naturais (SANTOS; REZENDE, 1996; MERLINI, 2005; SANTOS, 2005). Também é necessário saber que o número fracionário se presta à representação de situações distintas, que implicam noções diversas, como por exemplo, fração como relação parte/todo e fração como quociente entre dois números.

3. METODOLOGIA

Em todos esses seis anos, que acompanhamos o trabalho da professora Vânia M. P. dos Santos-Wagner, aprendemos a importância de nos conhecermos como profissionais de forma consciente, desejarmos investigar nossa prática e nos assumirmos como nosso próprio problema de pesquisa. As leituras direcionadas pela professora permitiram adotar, em nossa experiência, como metodologia, a proposta de pesquisa-ação.

> A pesquisa-ação é um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas, sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 112).

Ao nos inserirmos no cotidiano da sala de aula, procuramos conhecê-lo mais de perto para compreender o que os alunos sabem de fração. Momento em que tivemos a oportunidade de nos conhecermos enquanto professor, bem como de notar conscientemente e de refletir sobre nossas práticas cotidianas em sala de aula de matemática. Segundo Ferraço (2003),

> Ao nos assumirmos como nosso próprio objeto de estudo, coloca-se para nós a impossibilidade de pesquisar ou de falar “sobre” os cotidianos das escolas. Se estamos incluídos, mergulhados, em nosso objeto, chegando, às vezes, a nos confundir com ele, no lugar dos estudos “sobre”, de fato, acontecem os estudos “com” os cotidianos. Somos, no final de tudo, pesquisadores de nós mesmos, somos nosso próprio objeto de investigação (p. 160).

Nessa perspectiva, estamos sempre em busca de nós mesmos, de nossas histórias de vida, de nossos lugares. Santos (1994, 1995) nos dá alguns indicativos para essa questão ao afirmar que é importante investigar nossas aquisições cognitivas, na busca de um autoconhecimento profissional. Portanto, essa dissertação foi escrita, sobretudo, a partir de uma história de vida e, principalmente, de indagações e leituras sobre fração e a realidade pesquisada. Procurou, no texto, ressaltar a construção cotidiana do saber proeminente à prática pedagógica – saber da experiência. De modo que o professor, por meio de seu trabalho, construiu metáforas, projetou concepções e vivências, defendeu a ideia da relação entre atuação e pensamento e entre aprendizagens proporcionadas aos alunos por meio de experiência.

A partir de estudos de Gómez Chácon (2003), afirmamos que as crenças são fatores determinantes da motivação do aluno e, por assim serem, interferem na aprendizagem da matemática. Essa autora alega que:

> Os estudantes chegam à sala de aula com uma série de expectativas sobre como deve ser a forma que o professor deve ensinar-lhes matemática. Quando a situação de aprendizagem não corresponde a essas crenças se produz uma grande insatisfação que interfere na motivação do aluno (GÓMEZ CHACÓN, 2003, p. 67).

Neste capítulo, descrevemos o percurso metodológico utilizado em nosso estudo, com algumas reflexões sobre o estudo exploratório inicial. A seguir, falamos sobre os procedimentos metodológicos definidos para a pesquisa definitiva. Comentamos sobre os sujeitos participantes, o local onde ocorreram a pesquisa e a intervenção pedagógica. Relatamos, em linhas gerais, instrumentos e atividades realizadas na investigação e os procedimentos usados para selecionar um grupo de alunos para interpretar os dados coletados (SANTOS-WAGNER, 2010, 2011).

3.1. Reflexões sobre o estudo exploratório inicial

Desenvolvemos este estudo de setembro a novembro de 2009. Aplicamos cinco atividades que foram desenvolvidas em nove aulas (Ver Anexo I). Lidamos com algumas dificuldades de um pesquisador iniciante, que atua como professor pesquisador em sua própria sala de aula. Planejamos atividades para trabalharmos em aulas. Foi necessário aprender a criar estratégias para registrar falas dos alunos e alguns dos diálogos que tivemos com eles. Também iniciamos o aprendizado de trabalhar com muitos dados e informações. Era conveniente organizar os dados, transcrevê-los e procurar compreender e interpretar todas essas informações. Descobrimos que analisar e compreender raciocínios e estratégias dos alunos é bem mais complexo do que pensávamos (SANTOS-WAGNER, 2009, 2010).

Ao optarmos por desenvolver um estudo exploratório que nos ajudasse a definir o foco da pesquisa definitiva, tivemos que aprender como planejar atividades diversificadas e usar outras metodologias didáticas. Foi necessário adotar uma nova metodologia de ensino em sala de aula, buscando maior interação e participação dos alunos, tanto individual como em pequenos grupos. Tivemos, também, que aprender a desenvolver registros de atividades realizadas pelos alunos e de observações de eventos ocorridos em sala de aula. E aprender a tirar fotografias focalizando nas atividades realizadas e estratégias de raciocínios usados. Tudo isso feito para compreender o que nossos alunos pensavam sobre fração.

O estudo exploratório ocorreu no segundo semestre de 2009, com os alunos cursando a 5ª série/6º ano do ensino fundamental. Aplicamos atividades nas três turmas de 5ª série/6º ano das quais éramos o professor de matemática. Mas optamos pela turma cujos dados do estudo exploratório aparecem no Anexo I, porque nesta turma existia uma grande maioria de alunos repetentes em várias séries anteriores. Verificamos que, de forma geral, os alunos da turma investigada demonstravam muita dificuldade ao desenvolver atividades aparentemente simples, relacionadas ao tema fração. Revelando, por exemplo, dificuldades: na pronúncia correta da fração, em identificar o numerador e o denominador de uma fração, em descobrir e visualizar a ideia de equivalência de uma fração, e de identificar a fração correspondente à figura representada no desenho, dentre outras.

As leituras de Santos (1997) foram determinantes para planejarmos as atividades do estudo exploratório e posteriormente da intervenção pedagógica. Concordamos com ela ao descrever a importância de fazermos com que os alunos sintam o desejo de aprender matemática, valorizem o processo de aprendizagem e sejam responsáveis ativos por esse processo de construção de conhecimento. E de que professor e alunos dialoguem o tempo todo neste ambiente escolar. Ou seja, os processos de ensino e aprendizagem ocorrem em um contexto de interações sociais entre professor-aluno e aluno-aluno, onde conhecimentos são mediados, construídos, e reconstruídos por meio de diálogos e raciocínios que ocorrem neste contexto social (VYGOTSKY, 1988/1934, 1991).

Como consta no anexo I, desenvolvemos com os alunos a 1ª atividade diagnóstica em 24/09/2009, com o objetivo de identificar as características dos alunos no que se refere à idade/ano escolar, e o que pensam sobre reprovação. Verificamos que, praticamente todos os alunos tinham ficado reprovados em anos anteriores, demonstravam pouca ou mesmo nenhuma preocupação quanto à situação, nem mesmo mudança de atitudes para um melhor aproveitamento dos estudos.

Na sequência (Anexo I) buscamos provocá-los para eles comentarem o que pensam sobre a matemática, no dia 30/09. Deixou-nos surpresos a atitude de um dos alunos ao responder pela turma sobre o fato de não gostarem da matemática por ser esta uma disciplina que só serve para reprovar os alunos. E em sequência, verificarmos que a maioria dos alunos associa a matemática a um animal, não simplesmente pela beleza, ou mesmo por ser bonito ou fofinho, mas sim pelo perigo ou condição de pavor que o animal provoca semelhante ao sentimento dos alunos pela matemática.

Concluímos que, para tornar significativo o estudo de matemática e fração para os alunos, teríamos, primeiramente, a necessidade de (re)construir novos olhares sobre a disciplina para esses alunos. Os registros dos alunos e suas colocações nos permitiram evidenciar que os professores de matemática de anos anteriores lhes deixaram, em sua maioria, uma imagem negativa e assustadora da disciplina. Consideramos ainda que a atividade fez com que, pela primeira vez, os alunos da turma fossem questionados e respondessem o que pensavam sobre matemática e como se relacionavam com a mesma.

No dia 07/10/2009, fizemos alguns questionamentos para os alunos a fim de identificarmos que associações faziam com fração. Observamos que os alunos utilizaram desenhos de figuras geométricas descrevendo ou uma barra de chocolate, ou uma pizza ou um bolo. Logo após repartir as figuras em partes menores e pintarem algumas dessas partes, eles empregaram representações fracionárias, na maioria das vezes, associando a parte colorida (ou comida) com a parte não colorida (ou não comida) do desenho. Parecia uma clara associação da ideia de fração com o significado de razão entre as partes de um todo.

No dia 15/10/2009, ao aplicarmos a quarta atividade exploratória com a finalidade de identificar nos olhares dos alunos seus conhecimentos anteriores de fração fizemos questionamentos aos alunos trabalhando em grupos e os levamos a refletir sobre os conhecimentos deles. Propusemos questionamentos do tipo: O que lembram já ter estudado sobre fração em anos anteriores? O que entendem sobre fração? E solicitamos que dessem exemplos de como uma fração pode ser representada. Estas perguntas nos permitiram fazê-los perceber a necessidade de ampliar seus conhecimentos sobre o tema, para além das associações repetitivas de bolo, barra de chocolate e pizza. Além de fazer com que pudessem entender a necessidade de diálogo e reflexão proporcionada pelo trabalho em grupo.

Dentre outras falas e comentários registrados, destacamos alguns que se seguem: *Uma fração é uma divisão de algo para comer, algo para dar, para vender (um terreno, uma casa, uma laranja, uma parte de brita...) ou outros objetos*. Constatação que nos apontava também a necessidade de trabalhar com os alunos a ideia de equivalência de fração, mostrando que ao mantermos a superfície considerada de um todo, independente de quantas divisões fossem feitas nesse todo, estaríamos tendo representações diversas, mas equivalentes, de uma mesma fração.

A aula do dia 30/10/2009, utilizando um jogo permitiu-nos fazer com que os alunos associassem cada representação fracionária a algo correspondente, que podia ser um número ou o nome da fração em linguagem escrita ou um desenho. O jogo era composto por cartões. Existiam três tipos de cartões coloridos, nos quais apresentamos a fração representada no desenho, a fração escrita por extenso e a fração representada pela linguagem simbólica matemática.

Segundo Vygotsky (1988/1934, 1991), a aprendizagem ocorre desde o início da vida humana. Aprendizagem acontece com o processo de desenvolvimento das funções psicológicas que são culturalmente organizadas e são especificamente, humanas. Ele também comenta em sua obra que a mediação é um processo de intervenção de um elemento numa relação e esse elemento pode ser um objeto ou uma pessoa, deixando a relação de ser direta, passando a ser mediada por esse elemento (VYGOTSKY, 1988/1934, 1991). Buscamos com as atividades de o estudo piloto dar oportunidades aos alunos de interagirem entre si e com o professor, para assim poderem trocar ideias, internalizar pensamentos dos outros e pensar sobre o que conversaram. Assim, as conversas, dúvidas, perguntas e diálogos ocorridos entre os alunos e entre alunos com professor durante as atividades serviram para mediar a construção de significados e conhecimentos em aula. Dessa forma, os alunos puderam agir na zona de desenvolvimento proximal dos conceitos escolares que pretendíamos que eles aprendessem. Aprendemos com os estudos de Vygotsky (1988/1934, 1991) no mestrado que através dos processos de interação social os indivíduos dialogam, trocam ideias e acabam por construir significados e conceitos, que são mediados pelas falas, exemplos e ideias dos outros, ou por objetos que foram explorados ou manipulados. Todas as possibilidades de mediação que ocorrem em aula possibilitam que cada indivíduo atue, fale, pense e assim vá aprendendo e atuando em sua zona de desenvolvimento proximal. Pois assim o indivíduo estará desenvolvendo suas funções psicológicas, e aprendizagem vai ocorrer porque estará atuando na zona proximal em direção a sua zona de desenvolvimento potencial e real.

Por meio da análise das atividades diagnósticas aplicadas neste estudo exploratório, nós descobrimos que os alunos possuíam uma visão limitada dos significados associados ao conceito de fração. Isso nos motivou a realizar a pesquisa definitiva com essa mesma turma em 2010, quando os alunos cursavam a 6ª série/7º ano do ensino fundamental.

3.2. Procedimentos metodológicos do estudo definitivo

O conhecimento matemático tem que ser construído pelo aluno por meio de atividades que lhe despertem o interesse para aprender, fazendo relações do que ele vê dentro da escola com o que ele já conhece fora da escola, compartilhado por ele, no seu convívio sociocultural. Segundo D`Ambrósio (1996), a matemática tem sido concebida e tratada como conhecimento congelado, criando barreiras entre o educando e o objeto de estudo por não possuir a dinâmica do mundo, na qual o mesmo está inserido.

Nessa perspectiva, o nosso trabalho de investigação matemática tem por objetivo desenvolver uma pesquisa em educação matemática e, não uma pesquisa em matemática. Sendo assim, Silva e Santos-Wagner (1999) ressaltam ser importante lembrar que, numa pesquisa,

> É o olhar de curiosidade e indagação do investigador acompanhado de sistematicidade, planejamento, avaliação continua ao longo do processo de pesquisa, coerência no interpretar, analisar e categorizar dados a luz dos questionamentos da pesquisa que permitem que o processo seja árduo, intenso e muito interessante. Ao encerrarmos uma pesquisa, precisamos estar levantando questões para uma próxima investigação. Precisamos mostrar as potencialidades bem como as limitações do estudo. Esse caráter

> de pesquisador possibilitara que o professor passe a atuar em sala de aula com um olhar mais crítico, mais indagador e mais reflexivo (p. 20-21).

Decidimos trabalhar com a metodologia de pesquisa qualitativa, pois consideramos a metodologia adequada para nossa investigação. Nela desejamos compreender estratégias e raciocínios utilizados pelos alunos da turma de 7º ano durante um processo de intervenção pedagógica retomando o conceito de fração. Por isso, desenvolvemos, como no estudo exploratório piloto, uma pesquisa-ação do tipo intervenção pedagógica. Atuamos como professor da turma e professor-pesquisador ao mesmo tempo.

3.2.1. Sujeitos e local do estudo

Consideramos como sujeitos os trinta e seis alunos da turma de 7º ano que já tinham trabalhado conosco no estudo piloto em 2009. Esta turma foi escolhida dentre as três turmas de 7º ano (6ª série) da escola, porque nela existia uma defasagem entre a idade e o ano escolar cursado e por ter um grande número de alunos com reprovação em matemática e outras disciplinas em anos anteriores. Por questões éticas os alunos foram consultados sobre se queriam ou não participar da pesquisa. Em seguida, assinaram um termo de autorização (Anexo II). Solicitamos a autorização dos pais para que os alunos participassem da pesquisa.

A escola municipal de ensino fundamental do Município de Guarapari, onde desenvolvemos esta investigação, vai ser identificada como Escola Municipal Cantinho do Céu. A escola encontra-se localizada em um bairro a pouco mais de dois quilômetros da sede e atende a uma clientela de alunos oriundos de famílias de baixa renda. Os alunos e suas famílias sofrem interferências diretas causadas pelo consumo e tráfico de drogas. Nem sempre os alunos podem frequentar, normalmente, a escola devido a essas interferências. Há dias em que o pessoal ligado ao tráfico de drogas os intimida e assim o número de faltosos se eleva, e o trabalho escolar fica comprometido e prejudicado. A escola funciona em três turnos. No turno matutino, funcionam turmas de sexto ao nono ano escolar (isto é, turmas das antigas 5ª a 8ª séries). À tarde, funcionam os anos iniciais do ensino fundamental, de 1º ao 5º ano (isto é, da antiga pré-escola até a 4ª série). E, no turno noturno, atende a alunos inscritos na educação de jovens e adultos.

3.3. Procedimentos de coleta de dados

Em linhas gerais, planejamos e discutimos com a orientadora sobre as atividades planejadas para as trinta e nove aulas trabalhadas na intervenção pedagógica. Construímos instrumentos, usando questionários, metáforas e atividades sobre fração, e aplicamos os mesmos nas aulas (SANTOS-WAGNER, 2010). Alguns instrumentos foram inspirados nos trabalhos de Chapman (2005, 2006), usando metáforas para acessar o pensamento de alunos e professores. Outras atividades sobre fração foram inspiradas em autores de livros didáticos (CENTURIÓN, JAKUBOVIC, LELLIS, 2000) e autores estudados (MERLINI, 2005; NUNES; BRYANT, 1997; SANTOS; REZENDE, 1996; SANTOS, 1997).

Como descrito, as aulas planejadas envolvendo números fracionários formaram a intervenção pedagógica desenvolvida neste estudo (Ver Anexo III). Em cada atividade os alunos foram orientados a descrever os procedimentos utilizados na resolução da mesma. As atividades desenvolvidas e descritas pelos alunos possibilitaram-nos compreender e verificar que estratégias e raciocínios aplicaram para chegar à solução dessas.

No estudo exploratório de 2009, as resoluções dos alunos mostraram que ainda existiam problemas de compreensão do conceito de fração. Os alunos não reconheciam fração como representando um novo número. Eles diziam que resolver uma fração consistia em saber transformar a fração em um número. Eles demonstraram ter certo conhecimento de fração e alguns sabiam identificar fração com a ideia de parte-todo em algumas figuras. Outros alunos identificavam fração com o significado de razão e comparavam parte com parte nos desenhos e figuras repartidas em partes iguais. Nem todos percebiam a necessidade de uma figura ser repartida em partes iguais e de mesmo tamanho ao associarem a ideia de fração com parte-todo. Por isso, elaboramos em 2010 para a investigação definitiva atividades de fração para compreender estratégias dos alunos, assim como para avaliar alguns processos cognitivos deles, no que diz respeito aos significados de fração como parte-todo, razão e quociente. Optamos por trabalhar, inicialmente, com esses três significados pelos motivos já mencionados anteriormente. Pensávamos que seria possível (re)explorar esses significados e trabalhar, ainda na intervenção, os outros dois significados de medida e de operador. No entanto, nesta pesquisa final ainda não foi possível explorar esses outros dois significados. Todas as questões estão relacionadas com situações do cotidiano do aluno dentro e fora da escola, objetivando abordar ideias introdutórias de fração. O trabalho escolar com as operações com números fracionários (ou números racionais) e a representação deles na reta numérica seguiram de forma convencional, usando o livro didático (CENTURIÓN, JAKUBOVIC, LELLIS, 2000).

Primeiramente, nossa meta sempre foi trabalhar uma a duas aulas por semana para o desenvolvimento da pesquisa com os alunos. Ao iniciar os diálogos com a turma para definirmos em que dias desenvolveríamos a pesquisa, decidimos por dois dias. Verificamos que quarta e quinta-feira eram os melhores dias pelo fato das aulas ocorrerem antes do horário do intervalo para o recreio. No entanto, também nos comprometemos em utilizar, dentro do possível, outros dias e horários de aula para a realização do estudo, na medida em que as necessidades fossem surgindo.

3.4. Reflexões sobre a importância de registros, fotos e estratégias pedagógicas

Dialogamos com a professora orientadora sobre as formas e estratégias que estaríamos empregando para coletar dados e organizar o diário de bordo. Pensamos nos dados que seriam construídos e fornecidos pelos alunos e professor-pesquisador ao longo do estudo. Definimos que estaríamos utilizando fichas de pesquisa com detalhes sobre os planejamentos de aulas e sobre o que ocorreu em sala, registros de falas e cadernos dos alunos, fotografias, filmagens, etc. Adotamos o diário de bordo, como local onde tais dados e informações seriam aos poucos organizadas, constituindo-se em um arquivo pessoal descrito. Sentimos a necessidade de explicar aos alunos os motivos pelos quais registrávamos algumas falas e atitudes deles. Isso porque por inúmeras vezes os alunos da turma comentavam e nos questionavam sobre diversos aspectos. *O que você tanto anota professor? Só porque levantei para perguntar o colega como ele respondeu a atividade, você anotou meu nome para entregar na direção? Com tantas anotações você irá fazer um livro, professor?* Parecia que os alunos estavam preocupados e curiosos com o uso que seria feito dos registros e anotações.

Posso colocar o boné para você tirar minha foto professor? Deixe-me ver se fiquei bonita nessa foto. Essa máquina não tem nenhuma foto de sua família professor? Que desperdício, comprar uma máquina fotográfica só para ficar tirando foto de caderno e de exercício de matemática. Questionamentos que mostram a curiosidade deles, quanto à utilidade que teriam as fotos.

Se você quiser professor, você pode ficar lá na frente, estamos conversando, mas estamos fazendo os exercícios. Se você fica aqui no fundo da sala professor, a gente nem consegue fazer os exercícios, acho que vou trocar de lugar com alguém lá da frente. Alguém aí da frente quer trocar de lugar comigo? Estratégia pedagógica que utilizamos em algumas aulas para desequilibrar os alunos que geralmente não queriam participar das aulas. A simples mudança de local onde, às vezes, o professor utilizava para ministrar as aulas, fez com que o grupo de alunos percebesse que algo estava mudando. O momento da aula já não poderia ser utilizado por eles para conversas e brincadeiras no fundo da sala, mas sim como ambiente de estudo e diálogo sobre o conteúdo delas.

Informamos para a turma que nossas anotações serviriam para nos guiar em registros após à aula (SANTOS-WAGNER, 2010). No entanto, a fim de deixá-los “preocupados” de certa forma quanto às atitudes e compromissos deles nos estudos, informamos que se fosse necessário, poderíamos encaminhar algo para a direção da escola. Como, por exemplo, a proposta de mudança no horário da turma, que sugerimos e foi atendido pela escola. Sobre as fotos, lembramos aos alunos que, em nenhum momento, estaríamos focando as faces dos alunos, e portanto poses, gestos, etc., eram desnecessários. Informamos também que todos os registros e imagens que iríamos utilizar em nossa pesquisa só seriam usados após a permissão dos alunos, de seus responsáveis e da direção da escola (Ver Anexo II).

3.5. Procedimentos de escolha de alunos e de análise de dados

No capítulo seguinte, vamos apresentar alguns episódios de aulas, interpretações de resoluções dos alunos e comentários. Vamos trazer, também, dados de alguns alunos escolhidos para comentar sobre suas estratégias de raciocínio e de resolução de atividades sobre fração. Resolvemos escolher alunos que satisfizessem a quatro critérios. O primeiro critério foi verificar que alunos participaram de todas as trinta e nove aulas. Em segundo lugar, optamos por alunos que tivessem também participado das cinco atividades do estudo piloto em 2009. O terceiro critério considerou os alunos que já haviam ficado reprovados em matemática em anos anteriores. O quarto e último critério se deu pela análise das respostas fornecidas pelos alunos, optando por respostas que não compreendíamos ou mesmo nos deixavam dúvidas quanto ao desenvolvimento correto da tarefa dada.

Nossa preocupação sempre consistiu em envolver todos os alunos da turma de 7º ano, desde as atividades iniciais de pesquisa nas aulas. Procuramos fazer com que eles pudessem perceber que, para isso, era necessária a preocupação em fazer da frequência nas aulas uma meta primeira para todos da turma. Isso porque a construção dos dados e interpretações dos mesmos eram resultantes do trabalho desenvolvido por eles, na medida em que as atividades fossem realizadas e debatidas em sala.

O processo de ir selecionando detalhes das aulas e dados construídos durante a investigação se mostrou lento e trabalhoso. O volume de dados e informações foi maior do que pensávamos no início do trabalho. Ler, reler o diário de bordo, pensar em que interpretar e em como analisar as informações todas é bem mais complexo do que se pensa no momento de conceber um projeto de pesquisa do tipo intervenção pedagógica. Resolvemos ir dialogando com a professora orientadora durante o processo da investigação e posteriormente para irmos construindo os relatos que formaram o capítulo quatro e o Anexo II. Os procedimentos utilizados para interpretar e analisar os dados e informações dessa pesquisa do tipo intervenção pedagógica ocorreram em três etapas que ocorreram muitas vezes ao mesmo tempo. Primeiro, ir olhando, lendo e relendo os detalhes colocados em cada aula do Anexo II. Em segundo lugar, ir revendo as pesquisas estudadas sobre o tema para procurar ideias que auxiliassem nossa análise. E em terceiro lugar, ir consultando novamente os autores comentados no capítulo dois. Esses foram os procedimentos principais utilizados nas várias tentativas de redigir textos preliminares com análises de episódios de aulas, de estratégias e raciocínios dos alunos (SANTOS-WAGNER, 2010, 2011).

4. DISCUSSÃO DE RESULTADOS

> O desenvolvimento integral da pessoa é o objetivo principal da educação. Educar, dizia Paulo Freire, é modificar as atitudes e condutas. É atingir mentes e corações (SOEK, 2009, p. 16).

Neste capítulo, trazemos alguns episódios da intervenção pedagógica e informações sobre alguns alunos selecionados, conforme explicamos anteriormente. Fazemos também uma reflexão e interpretação de algumas respostas dos alunos e alguns diálogos de professor/alunos e aluno/aluno, que ocorreram na pesquisa. Examinamos essas informações à luz da teoria estudada para compreender em que estado se encontra o conceito de fração para alguns alunos e refletir sobre as opções de ensino utilizadas. Organizamos a análise em quatro partes. Iniciamos, falando sobre conhecimento da turma, diálogos, hábitos de estudos dos alunos e comprometimento com a escola. Em segundo lugar, abordamos crenças e concepções dos alunos sobre a matemática. A seguir, relatamos os conhecimentos básicos sobre frações, assim como algumas crenças e concepções relativas à fração. Na quarta parte, apresentamos alguns episódios de ensino de fração onde examinamos se ocorreu algum processo de (re)ssignificação de conceitos e significados associados com fração.

4.1. Conhecimentos da turma, diálogos, hábitos de estudo dos alunos e comprometimento com a escola

Hoje, conseguimos compreender ao refletir sobre nosso trabalho profissional que, desde 1997, quando começamos o trabalho como professor de matemática, provavelmente acabamos afastando alunos da matemática. Durante anos, mesmo nos esforçando em proporcionar aos alunos um aprendizado significativo de matemática, acabávamos por reproduzir uma matemática fria e pouco significativa para os mesmos. Pois trabalhávamos uma matemática composta de muitas regras, exercícios e modelos para serem reproduzidos em aula, casa e avaliações. Por muito tempo, acreditamos que um professor de matemática era aquele que dentro do recinto escolar, através dos conteúdos, deveria impor postura de autoridade de conhecimento pelo simples fato de ser o professor da disciplina de matemática. Esta postura por si só despertava no aluno em alguns casos medo e desconfiança em aprender matemática. A reprovação consistia no castigo e/ou era necessário ao aluno que viesse proceder de maneira inapropriada nos estudos. Confessamos que, durante certo período, até tentamos incorporar essa imagem em nossa prática. Felizmente, a personalidade e história de vida nos mostraram que não nos adequávamos a esse tipo de ensino e de trabalho, uma vez que as inquietações presentes em nossa prática, mesmo após ter concluído o ensino superior, era de aprender a construir conhecimentos matemáticos em diálogos com os alunos. Nossa inserção e participação no grupo de estudos - GEEM/ES, desde 2006 e, posteriormente, em 2009, no Mestrado/PPGE-UFES, mostraram-nos dentre outras coisas que um professor/a, assim como "um professorando/a [...] precisa estar consciente de quem ele/ela é em termos de seu conhecimento, concepções e atitudes sobre a educação e a disciplina que ele/ela estará lecionando, e a motivação que ele/ela tem para aprender e ensinar" (SANTOS, 1995, p. 120).

As diversas leituras realizadas sobre educação matemática, matemática e afetividade (GÓMEZ CHACÓN, 2003; OLIVEIRA, 2007) e nossa prática docente de mais de quatorze anos de trabalho com a disciplina de matemática no ensino fundamental nos levaram a reflexões e conclusões. Percebemos que a visão de matemática do professor e suas estratégias de trabalho influenciam a visão dos alunos sobre matemática e interferem no desenvolvimento e rendimento dos mesmos. No caso específico da turma escolhida para a pesquisa, percebíamos que havia problema com o horário semanal de aulas de matemática. Ocorriam, a princípio, aulas em dois momentos, um antes e outro após o horário de recreio. Isso interferia, diretamente, no rendimento dos alunos nessas aulas. Assim, uma de nossas primeiras ações junto à direção da escola foi reorganizar o horário de aula da turma escolhida para a pesquisa, garantindo que as de matemática pudessem ser remanejadas, de modo que ocorressem sempre nos primeiros horários.

Cientes de que precisávamos beber em várias fontes, iniciamos nosso trabalho de pesquisa, propondo diálogos aos alunos sobre o projeto de investigação que seria desenvolvido com eles. Nossa preocupação desde o início foi de buscar envolver o número máximo possível de alunos da turma. Visávamos à participação deles na construção e desenvolvimento do estudo que exploraríamos em conjunto. Com isso, pensamos em envolvê-los na pesquisa. E iniciamos uma prática diferenciada de planejamento, observação, registros e reflexão de nosso trabalho em sala de aula (SANTOS-WAGNER, 2010). Não podíamos nos esquecer de nossa função de professor. Por isso, sabíamos da necessidade e do compromisso que tínhamos com a turma, em relação aos conteúdos curriculares previstos para o corrente ano.

Como professor responsável pelo trabalho com a disciplina de matemática na turma, a atividade nos exigia também uma investigação sobre a nossa própria prática. Um trabalho onde o professor e o professor/pesquisador se resumiam em uma mesma pessoa. Ao socializarmos o propósito do trabalho com os alunos da turma, foi possível propormos aos mesmos uma parceria. Esta parceria acontecia na coleta, registros e divulgação de respostas e informações que o grupo de alunos fornecia. Dessa forma, foi possível uma mudança de hábitos e posturas do professor/pesquisador no que se refere: ao planejamento das aulas; às atividades e aos objetivos; à metodologia de ensino e avaliação; à socialização das novas informações com a professora orientadora; e ao compromisso de novas leituras e estudos.

4.1.1. Informações sobre a turma e alunos

Trabalhamos com essa turma, desde 2009, quando os alunos estavam no 6º ano (antiga 5ª série) do ensino fundamental. A turma é composta por 36 alunos com idades variando entre 10 e 13 anos. Havia alunos que, desde as primeiras aulas do ano letivo de 2009, já apresentavam sérias dificuldades e sentimentos de antipatia pela disciplina de matemática. Notávamos sempre nos alunos, atitudes tais como: rejeição pela matéria; insegurança; baixa autoestima e desmotivação pelo estudo da disciplina; falta de disciplina em sala e de compromisso com os estudos; pouca frequência nas aulas; reação de indiferença em relação à reprovação, etc.

O constante rodízio de professores de matemática na escola foi outro ponto abordado pelos alunos da turma em 2009. Essa informação nos ajudou na elaboração do projeto de pesquisa definitiva realizado em 2010. Por isso, lançamos mão das informações coletadas em 2009 para auxiliar nosso planejamento da intervenção pedagógica. A princípio, firmamos o compromisso com os alunos e com a direção da escola de iniciar um trabalho sequencial, de 6º ao 9º ano do ensino fundamental, acompanhando seu percurso.

Ao comunicarmos com a turma, em 13/08/2010, que o projeto de pesquisa tinha sido aprovado e de convidar os alunos para participarem conosco da proposta de intervenção pedagógica, demos os primeiros passos para construir a parceria com a turma. Dialogamos sobre a importância da interação entre os alunos e professor/alunos no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Falamos sobre o envolvimento e compromisso da turma, que seriam necessários. Julgamos que, de certa forma, alcançamos, nesse primeiro diálogo, nossos objetivos, uma vez que eles mesmos afirmaram, ***até que enfim alguém quer saber o que nós sabemos e quer nos ajudar a aprender matemática.*** Ao ouvirmos os alunos, recordamos pensamentos de Paulo Freire (1996) sobre ensino e aprendizagem, e papéis de professor e aluno, porque aprende quem ensina e ensina quem aprende. Recordamos também Carlos Rodrigues Brandão (1999/1981), ao comentar sobre o potencial da escola de convidar pessoas a mudarem, se assim elas desejarem, porque a escola não vai mudar o mundo, mas se pessoas quiserem mudar, estas podem mudar o mundo. Pensamentos suficientes para iniciar reflexões junto com as falas dos alunos. Porque quem acredita no poder de ação de professor e aluno no cotidiano escolar e em práticas reflexivas deve seguir, arriscando e experimentando, como é o propósito desta pesquisa de intervenção.

É necessário conhecermos os procedimentos e estratégias de fração que nossos alunos utilizam em algumas tarefas, para identificarmos o que já sabem e percebem sobre frações e seus diferentes significados. Para conquistarmos a confiança dos alunos e envolvê-los, ao máximo, no nosso projeto de estudo, era preciso mostrar-lhes que este é um trabalho construído no caminhar e no compartilhar de ideias e conhecimentos. Construímos, no primeiro momento, com os alunos um diálogo que nos permitiu ainda, mostrar a importância do envolvimento da turma nessa parceria. Mostramos que, embora tivesse o professor/pesquisador como responsável pelo planejamento, orientação, encaminhamentos, registros e avaliação do percurso, toda a turma do 7º ano fazia parte do projeto. Como responsáveis pelo trabalho a ser realizado, esperávamos mudanças de hábitos nos estudos, compromisso, participação e envolvimento de todos.

Tomamos conhecimento de que muitos alunos utilizam, de forma indevida, o patrimônio físico e equipamentos da escola, tais como: ventiladores, mesas e carteiras, tranca nas portas, lixeiras, janelas, etc. Danificam, destroem e depredam os materiais e equipamentos que contribuem para o seu próprio bem-estar em sala de aula. Propusemos uma atividade de pesquisa em que os alunos estivessem coletando informações sobre o histórico da escola junto à direção e à secretaria da escola. Essas informações lhes permitiram aprender a valorizar o ambiente escolar e a interiorizar que o professor de matemática, não deve se limitar apenas em desenvolver conteúdos e explicar os mesmos, mas também deve transmitir valores e refletir sobre a responsabilidade pelas atitudes e ações. Solicitamos que os alunos, em duplas, observassem o ambiente escolar, pesquisassem e descrevessem sobre as seguintes questões: aparência física da escola; ano de fundação da escola e horários de funcionamento da escola; média de alunos atendidos por turno e o total de alunos matriculados; estrutura física, equipamentos e livros didáticos que a escola possui. Essa atividade foi apresentada e comentada na aula seguinte.

Ao realizarem a atividade, verificamos que os alunos, pela primeira vez, começaram a se indagar quanto às atitudes e ações comumente feitas por eles no ambiente escolar. Passaram a se questionar sobre o que antes não levavam em consideração, a importância e significado da escola que nem para eles nem para as famílias da comunidade era observado. Ao descreverem a respeito do histórico da escola e os fatores que motivaram sua implantação na comunidade, descobrimos diversas informações. Como os próprios alunos afirmaram, a escola foi construída e inaugurada em 2005 e, por isso, é uma obra praticamente nova. Portanto, não dá para justificar os estragos, nem dá para associar os materiais danificados e o mau estado de conservação da aparência física da escola, com o tempo de construção da escola.

Os alunos se deram conta também de que a escola possui uma estrutura física que atende às necessidades dos alunos e que as famílias acreditam na importância e qualidade do trabalho realizado pelos professores. Descobriram também que a escola possui uma boa área onde foram construídas as salas de aula, o auditório, a cozinha, a cantina e o pátio, além de uma quadra de esportes coberta, exclusivamente, para a utilização dos alunos da escola.

Desde a sua fundação em 2005, a escola municipal de ensino fundamental atende a uma média de 840 alunos por ano, distribuídos nos três turnos, matutino, vespertino e noturno. E como consta em seu estatuto, a escola atende a uma clientela de alunos de famílias com renda média baixa. Tem também um número significativo de alunos que vem de famílias desestruturadas (sem a presença do pai e/ou mãe), e que sofre influência de forma direta de problemas sociais causados pelo uso de drogas e álcool. A escola atende também a alunos oriundos de comunidades rurais do município, que utilizam todos os dias o transporte escolar. Segue abaixo a descrição do ambiente físico da escola relatado pelos alunos, na atividade desenvolvida: 10 salas de aulas; um laboratório de informática composto por 30 computadores interligados à internet, impressora a laser, ar condicionado e quadro branco; uma sala para a secretaria da escola; duas salas de coordenação; uma sala para técnicos educacionais; uma sala para professores; um auditório; uma sala para os arquivos da secretária; uma sala para almoxarifado; uma cantina; uma cozinha e refeitório; além de uma boa área de pátio.

A escola possui uma quadra poliesportiva para a prática de várias modalidades esportivas; uma biblioteca, com aproximadamente 3000 exemplares, à disposição dos alunos e da comunidade; máquina copiadora; um data-show; dois televisores, três aparelhos de ar condicionado; dois aparelhos retroprojetor e três caixas de som. Notamos a surpresa nos rostos dos alunos, à medida que os alunos socializavam as informações coletadas no grupo e realizávamos os registros no quadro da sala de aula. Os alunos, de certa forma, ficavam surpresos quanto à estrutura e quantidade de materiais que a escola possui, surgindo comentários, tais como: *teve escola onde eu já estudei que não tinha nem bola para os alunos brincar no intervalo do recreio; já estudo nesta escola a mais de quatro anos e nunca tinha observado como ela é bonita, ela é bem grande; a escola tem mais livros do que a bibliotecária nos informou, pois assim como eu, muitos colegas não devolveram os livros didáticos utilizados no ano passado; gosto de estudar nesta escola, pois ela é bonita; meu pai estuda aqui à noite e reclama que os alunos que estudam aqui durante o dia quebram as cadeiras e lixeiras das salas, inclusive estragaram o ventilador da sala e* *agora quando precisa não tem para utilizar; além disso, colam chiclete nas mesas e, às vezes, jogam no chão da sala.*

Esses depoimentos dos alunos mostram o quanto foi possível conscientizar a turma com essa atividade. As informações obtidas e compartilhadas na turma, assim como as reações e falas dos alunos, mostram que essa tarefa surtiu resultados em tratar de valores e compromissos de todos na escola. Os alunos devolveram os livros para a biblioteca depois desse momento e começaram a cuidar um pouco do espaço escolar utilizado. A atividade produziu resultados também devido ao apoio e envolvimento da direção e da profissional responsável pela secretaria da escola. Reafirmamos nosso compromisso com os alunos quanto à utilização desse patrimônio público que constitui a escola, uma vez que a sociedade tem necessidade de pessoas que têm a capacidade de pensar e refletir sobre o fazer diário, que saibam trabalhar em grupos, etc. Concordamos com o documento do PCN (BRASIL,1998), quando enfoca a importância da matemática para a formação do cidadão: "A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar" (p. 26).

4.1.2. Nossas reflexões enquanto professor/pesquisador iniciante

O aprendizado da matemática é imprescindível para essa formação, para que o aluno esteja adaptado às novas exigências da sociedade. A matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e a justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia vinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

Estamos conscientes de que muitas vezes, alunos, direção escolar e até mesmo professores considerem que qualidade no ensino está centrada na aprendizagem, no racional, no aspecto cognitivo do desenvolvimento intelectual, e que avaliam os alunos apenas por meio de provas. Ou seja, priorizando métodos e práticas que enfocam e valorizam puramente a repetição e a memorização, seguindo uma lógica de que estão sempre preparando o aluno para o “futuro”, seja este a próxima série a ser cursada, ou um exame vestibular ou até mesmo um concurso técnico profissional. Concordamos com Cury (2001, p. 142), ao afirmar que:

> Há muitas escolas que só se preocupam em preparar os alunos para entrar nas melhores faculdades. Elas erram por se focarem apenas neste objetivo. Mesmo que entrem nas melhores escolas, quando saírem, esses alunos poderão ter enormes dificuldades para dar solução a seus desafios profissionais e pessoais.

Cury (2001) evidencia a necessidade de se preparar os alunos não apenas para o futuro, mas para a vida. Portanto, as escolas devem ser espaços educativos de construção de personalidades humanas autônomas, nos quais os alunos aprendam a ser pessoas de bem. Nesses ambientes, os alunos são ensinados a valorizar e respeitar as diferenças, pela convivência com os que estão ao seu redor, pelo exemplo dos professores, pela maneira de se ensinar em sala de aula e pelo clima das relações estabelecidas em toda a comunidade escolar.

A formação para a cidadania é o ponto mais importante e supõe uma formação pessoal. Se o professor considerar que um dos objetivos da educação matemática é contribuir para a formação de cidadãos participativos e críticos, então o centro da educação não deve ser a acumulação de fatos matemáticos. Para tanto, entendemos que devemos educar o aluno para que ele adquira a capacidade de pensar matematicamente e usar a matemática em várias atividades e contextos diversos. E, também, tem que se educar o desenvolvimento da solidariedade, da tolerância, da segurança, da capacidade de gerenciar pensamentos em momentos de tensão, da habilidade de trabalharem em grupos e também com perdas e frustrações. Enfim, formar pessoas capazes de saber como lidar com a vida e serem cidadãos conscientes de seus direitos e deveres. Para Libâneo (2002, p. 7):

> É preciso que a escola contribua para uma nova postura ético-valorativa de recolocar valores humanos fundamentais como a justiça, a solidariedade, a honestidade, o reconhecimento da diversidade e da diferença, o respeito à vida e aos direitos humanos básicos, como suportes de convicções democráticas.

O autor ressalta esse papel da escola, mas também cabe ao professor, além de outras tarefas, ensinar seus alunos a tomarem decisões, ensinar o certo ou errado numa época de tantas transformações na sociedade e no mundo, onde os valores estão sendo distorcidos e se extinguindo.

4.1.3. Trajetória escolar dos alunos do 7º ano

No início do trabalho com os alunos da turma, nos causava estranheza o fato de que muitos alunos associavam a reprovação com algo insignificante, sem importância e natural. Até apresentavam certa contradição ao comentarem sobre a trajetória escolar no que se refere à idade/série. A partir das informações coletadas na secretaria da escola, constatamos que, praticamente, todos os alunos da turma já tinham sido reprovados em anos anteriores em, pelo menos, uma série/ano. Construímos uma tabela no quadro com o nome do aluno; série/ano que já reprovou; as disciplinas; número de vezes que já reprovou e os motivos da reprovação. Após termos essa tabela preenchida no quadro pelos alunos, tivemos uma nova visão da turma. Alunos e professor tiveram um diálogo diferente sobre as informações colocadas na tabela, possibilitando-nos saber um pouco mais sobre a trajetória escolar de cada um. Além disso, nos permitiu saber o que pensavam sobre a reprovação e os fatores que os levaram a ela. Dialogamos com a turma, conduzindo-os à reflexão sobre o problema e a questionar esses acontecimentos.

Dos trinta e seis alunos iniciais que estavam na turma, quatro desses foram transferidos de escola no decorrer da pesquisa. Foi possível manter contato com um deles até o término do trabalho. Quanto aos demais, nos preocupamos em fazer com que todos eles participassem de todas as etapas desenvolvidas na pesquisa. Mesmo que para isso, fosse preciso lançar mão de momentos de planejamentos e/ou alternados, de estudos das atividades dos alunos faltosos por não terem tido a oportunidade de realizar a atividade no dia da aula em que foi desenvolvida.

A análise das informações dos alunos e motivos de reprovação ressignifica a ideia preconcebida que temos de que os alunos muitas vezes atribuem o fracasso escolar apenas aos professores. No entanto, suas respostas nos mostram que nesta fase da pesquisa, os alunos já começavam a responder de forma reflexiva aos questionamentos a eles direcionados. Em síntese, trazemos esses dados no quadro a seguir.

Quadro 1 – Informações sobre reprovações[11].

Aluno (a)	Qual foi a série/ano que repetiu (reprovou)?	Em qual (is) disciplina (s) ficou reprovado?	Qual foi o motivo?
Tião - A_1	5ª série/6º ano: uma vez	Português, Matemática, Ciências e Inglês.	Os professores que eram bravos mais eram bons, mesmo assim fazíamos muita bagunça nas aulas.
Douglas - A_2	3ª série e 5ª série: duas vezes	Português, Matemática e Inglês.	Todos os alunos faziam muita bagunça nas aulas e a escola era pouca organizada.
Lorrainy - A_3	4ª série e 5ª série: duas vezes	Português, Matemática, Ciências e Inglês.	Brincava muito em sala de aula e não assistia a todas as aulas e nem fazia os exercícios.
007 - A_4	Nunca reprovou	xxxxx	xxxxx
Pastel - A_5	5ª série/6º ano: duas vezes	Português e Matemática.	Sempre tive dificuldade em matemática e não consigo aprender os exercícios. Era muito barulho em sala de aula.
William - A_6	5ª série/6º ano: duas vezes	Português, Matemática, Ciências e Inglês.	Mesmo sendo bravos os professores os alunos muitos alunos faziam bagunça em sala, e eu não fazia os exercícios.
Eduarda-A_7	Nunca reprovou	xxxxx	xxxxx
Kauan - A_8	5ª série/6º ano: duas vezes	Português, Matemática, Geografia e Inglês.	Bagunça em sala de aula e dificuldade em fazer as atividades da escola.
Dominguinho-A_9	5ª série/6º ano: quatro vezes	Português, Matemática, Ciências, História, Geografia e Inglês.	Não gosta de estudar e dos professores, bagunça em sala de aula e dificuldades na família.
Silva - A_{10}	5ª série/6º ano: duas vezes	Matemática e Inglês.	Faltava muito e não gostava de fazer os exercícios, tinha vontade estudar a noite.
Vieira - A_{11}	4ª série e 5ª série: duas vezes	Português, Matemática, Ciências e Inglês.	Dificuldades em desenvolver as atividades escolares.
Mascara-A_{12}	Nunca reprovou	xxxxx	xxxxx
Lopes - A_{13}	5ª série/6º ano: duas vezes	Português, Matemática, História, Ciências e Inglês.	Aulas vagas, desorganização da escola e professores ignorantes.
Fred - A_{14}	Nunca reprovou	xxxxx	xxxxx
Bruno - A_{15}	3ª e 4ª série: duas vezes	Português, Matemática.	Dificuldade da família em moradia.
Lobo - A_{16}	5ª série/6º ano: uma vez	Matemática, Português	Nem cheguei a fazer a recuperação de português, porque já sabia que iria ficar reprovado em matemática.
MoreninhaA_{17}	5ª série/6º ano: uma vez	Matemática	A matéria é muito difícil e não gosto de estudar.
Júlio - A_{18}	Nunca reprovou	xxxxx	xxxxx
Dudu - A_{19}	5ª série/6º ano: três vezes	Matemática e Inglês	Poucos professores davam aula por muito tempo na escola, mudava muito.
Cadma - A_{20}	5ª série/6º ano: duas vezes	Matemática, Ciências e Inglês.	Aulas chatas e difícil, muita bagunça.
Luiz - A_{21}	4ª série e 5ª série: duas vezes	Português, Matemática, Ciências e Inglês.	Dificuldades em aprender a matéria.
Lolo - A_{22}	5ª série/6º ano: duas vezes	Matemática, Português e Ciências.	Não assistia todas às aulas nem fazia os exercícios. Não gosto de estudar.
Fernandes - A_{23}	5ª série/6º ano: três vezes	Matemática e inglês	Dificuldades em desenvolver as atividades escolares e má companhia.
Jubileu - A_{24}	2ª série e 5ª série: duas vezes	Português, Matemática,	Os professores eram bons mais eu não aprendia a matéria e não tirava boas notas.
Dias - A_{25}	4ª série: uma vez	Matemática	A professora falou com minha mãe que eu era fraco e não sabia fazer contas.
Marcio - A_{26}	2ª série: uma vez	Português, Matemática	Dificuldades da família e mudança de moradia.
Dj - A_{27}	5ª série: uma vez	Matemática	Não conseguia fazer as contas na prova de recuperação. Sempre tive medo de

[11] Os registros dos alunos foram copiados na íntegra, sem efetuar correções de ortografia e de gramática. Já os nomes utilizados nos registros são fictícios, escolhidos pelos próprios alunos.

Aluno (a)	Qual foi a série/ano que repetiu (reprovou)?	Em qual (is) disciplina (s) ficou reprovado?	Qual foi o motivo?
			matemática.
Todynha - A_{28}	2ª série: uma vez	Português, Matemática	Faltava muito e não sabia escrever direito.
Ana Clara - A_{29}	5ª série/6º ano: uma vez	Matemática, Ciências e Geografia.	As vezes gostava de estudar, mais não aprendia matemática direito.
Fera - A_{30}	4ª série e 5ª série: duas vezes	Matemática e Ciências.	Gostava das aulas, mas os professores faltavam muito devido a greve.
Feroz - A_{31}	5ª série/6º ano: uma vez	Matemática, Ciências e Inglês.	Os professores que não explicavam direito e bagunça em sala.
Bibi - A_{32}	5ª série/6º ano: uma vez	Português, Matemática, Ciências, História e Inglês.	Aulas chatas e matéria difícil. Minha mãe sempre falou que na minha casa todo mundo sempre teve dificuldade em matemática.
Nego - A_{33}	4ª série: uma vez	Inglês e Português	Dificuldades em desenvolver as atividades escolares.
Ana - A_{34}	Nunca reprovou	xxxxx	xxxxx
Belo - A_{35}	5ª série/6º ano: uma vez	Matemática	É uma matéria muito difícil e o aluno precisa estudar muito.
Thiaguinho - A_{36}	5ª série/6º ano: duas vezes	Matemática	Nunca gostei de matemática por ser uma matéria muito difícil e os professores são ignorantes.

Consideramos esse questionamento importante, pois nos possibilitou tomar conhecimento de que os alunos começaram a assumir como sendo eles próprios os responsáveis pelo bom desempenho escolar e aprovação nos estudos. Comentamos que nosso objetivo não consistia apenas em identificar alunos que já ficaram reprovados alguma vez, mas fazê-los questionar de forma reflexiva sobre os fatores e as causas que levam um aluno a ficar reprovado. Isso para levá-los a sentir que eles próprios são os responsáveis primeiros pelo sucesso ou não da trajetória escolar. Assim os levamos a refletir que, primordialmente, o empenho de cada aluno em estudar e compreender a disciplina de matemática interfere na caminhada escolar deles. Sem esquecer que existem outros fatores, tais como a conduta do professor em aula (metodologia de ensino, interação com os alunos, explicações, etc), o conteúdo específico da disciplina, e a linguagem adotada no livro didático, que também podem interferir direta ou indiretamente no sucesso ou no fracasso de cada aluno.

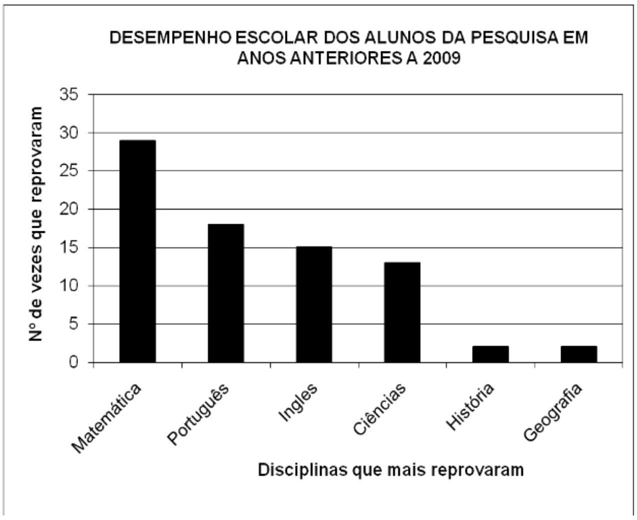


Fig. 4 – Disciplinas que mais reprovaram

De acordo com o gráfico da figura 4, temos que 29 alunos já reprovaram na disciplina de matemática; 18 alunos já reprovaram na disciplina de português; 15 alunos já reprovaram na disciplina de inglês; 13 alunos já reprovaram na disciplina de ciências; 02 alunos já reprovaram na disciplina de história e 02 alunos já reprovaram na disciplina de geografia.

Ao consultar os dados do quadro anterior, e identificar com a turma em que série ocorreu o maior número de reprovações, foi possível concluir que foi a 5ª série/6º ano que teve a maior frequência de reprovações. Observamos que houve reprovação de 24 alunos na 5ª série na disciplina de matemática, como verificamos no gráfico abaixo construído com a turma.

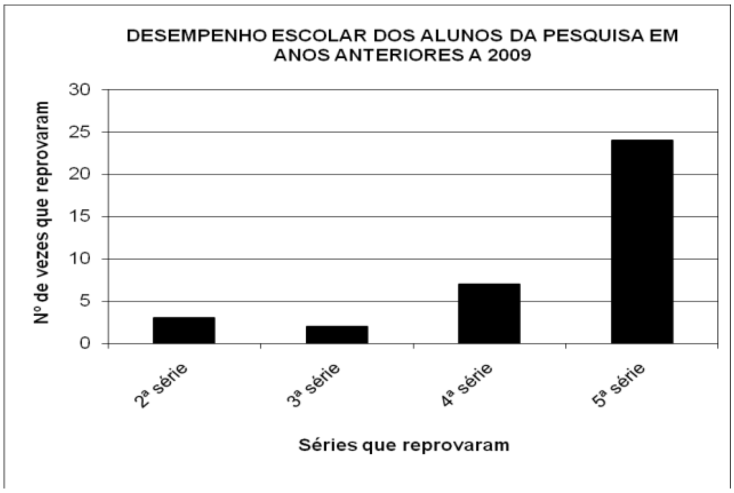


Fig. 5 – Séries que reprovaram

Quanto aos motivos que levaram à reprovação, os alunos destacaram: bagunça em sala, falta de interesse pelas aulas, frequência nas aulas, dificuldades em aprender matemática e em desenvolver as atividades, matéria difícil, etc.

Nesse processo de o aluno tomar consciência de sua trajetória escolar, Pimenta (2006) esclarece que precisamos considerar os professores como atores de sua profissão, capazes de produzir conhecimentos a partir do trabalho pedagógico que realizam. Para isso, torna-se necessário que estejam aptos a decidir, com autonomia, sobre as questões com as quais se defrontam no dia a dia de sua atividade docente, pois acreditamos que “[...] o trabalho não é primeiro um objeto que se olha, mas uma atividade que se faz, e é realizando-o que os saberes são mobilizados e são construídos” (TARDIF, 2002, p. 257).

Os alunos nos mostraram também com o desenvolvimento desta atividade que as consequências de uma reprovação influenciam diretamente em sua trajetória escolar. E, ao refletir com o aluno sobre sua trajetória escolar, o professor/pesquisador teve a oportunidade de dialogar com todos os atores envolvidos no processo pedagógico e de pensar sobre os fatores que podem conduzir à aprovação e/ou reprovação de cada aluno. Para assim, tornar o aluno (ou a aluna) consciente e responsável pelo papel ativo que deve ter nos estudos.

Constatamos também com essa atividade que, diferente do que muitas vezes é dito pelos professores, os alunos, na maioria das vezes, admitem e atribuem a reprovação ao seu pouco empenho nas aulas e à dedicação aos estudos. Ao analisarmos cada atividade trabalhada com os alunos na pesquisa, desenvolvemos uma reflexão participativa em cada resposta dada, permitindo-lhes o sentimento de pertencimento no trabalho construído e aqui apresentado. E afirmamos que houve preocupação em valorizar cada fala, cada expressão, cada atitude apresentada pelos alunos da turma durante a pesquisa desenvolvida.

4.2. Crenças e concepções dos alunos sobre a matemática

Os instrumentos aplicados para investigar crenças, concepções e atitudes dos alunos foram construídos a partir das ideias de Chapman (2005, 2006) e de Gómez

Chacón (2003). Constatamos em trabalhos de outros colegas (OLIVEIRA, 2007), investigando crenças de alunos de matemática e em dinâmicas utilizadas com professores e futuros professores em nosso grupo de estudos, GEEM-ES, que metáforas com animais e questionamentos do tipo acima permitem acessar aspectos cognitivos e afetivos. Observamos que esses instrumentos, quando aplicados em momentos diferentes durante certo período, podem sinalizar para o professor o que os alunos acreditam sobre a matemática. Indicando, também, algumas formas que o professor poderia trabalhar para permitir ao aluno outra relação com a matemática e seu ensino, como também poderia ajudar àqueles alunos que, de certo modo, demonstravam medo ou aversão à disciplina. Concordamos com Gómez Chacón (2003), ao descrever que

> as concepções ou sistemas de crenças do professor sobre a natureza da matemática estão arraigados nas diferentes visões da filosofia da matemática. Auxiliar o professor a confrontar-se com as próprias concepções epistemológicas da matemática, que influem em sua prática de ensino, é um dos desafios atuais em didática da matemática (GÓMEZ CHACÓN, 2003, p. 64).

As informações coletadas em tarefas em que os alunos tiveram que descrever sua própria trajetória escolar, hábitos de estudos e comprometimento com escola possibilitaram-nos direcionar com os alunos o foco da pesquisa. Buscamos, também, identificar crenças e concepções dos alunos em relação à matemática. Propusemos aos alunos que respondessem e completassem alguns questionamentos do tipo: Em sua opinião para que serve a matemática? Se a matemática fosse um animal, que animal ela seria? Motivos: Se fosse explicar para alguém que não conhece o que é e para que serve a matemática, o que diria para essa pessoa? Que animal a matemática nunca seria? E quais os motivos. Com respostas dessas perguntas, acessamos implicitamente pensamentos e sentimentos dos alunos relacionados com a matemática. Aproximamo-nos das marcas cognitivas e afetivas que neles ficaram de experiências anteriores com matemática, e identificamos visões, crenças e concepções de matemática que os alunos têm construído na caminhada escolar.

Já tínhamos os resultados dos questionamentos coletados com o estudo piloto em 2009. Em 2010, solicitamos novamente que respondessem aos mesmos questionamentos. Esses dois momentos nos forneceram informações de como os alunos concebem a matemática. Olhar essas respostas de 2009 e de 2010 nos permitiu observar possíveis mudanças ocorridas, avanços, retrocessos, etc. Novos desafios se colocaram para os planejamentos de ensino ao olhar e analisar as respostas. Comparando essas informações, aprendemos e compreendermos um pouco sobre como os alunos externam seus pensamentos e suas expectativas sobre aprendizagem de matemática e seu ensino. Observar e constatar as ideias que os alunos têm sobre a matemática, deu-nos margem a compreender melhor certas atitudes deles em aulas. E permitiram-nos, ainda, considerar a influência do professor de matemática durante o processo de aprendizagem desses alunos, conforme comenta Gómez Chacón (2003). A seguir, apresentamos alguns recortes de nossas interpretações das respostas dos alunos em 2009 e em 2010.

4.2.1. Comparativo das respostas dos alunos sobre suas crenças em relação à matemática

Em 2009, solicitamos à turma que descrevesse o que pensam da matemática e para que a disciplina serve. No entanto, sem dar oportunidade para que os demais alunos pudessem expor suas opiniões a respeito da questão, o aluno Dudu (A19)[12] se pronunciou: *Saber a opinião da turma em relação à matemática é fácil professor. Os demais alunos da sala não precisam nem responder, porque aqui na sala a maioria dos alunos reprovou o ano passado*. Continua dizendo, *Como alguém pode gostar dessa matéria se ela só serve para reprovar os alunos?* Em seguida, apontando para os colegas da sala, continua dizendo, *um ou outro da sala pode até falar para você professor que gosta de matemática só para te deixar feliz. Mas eu conheço a turma, quase todos aqui da sala reprovaram em matemática no ano passado, alguns estão repetindo a série/ano pela segunda vez. Eu, por exemplo, estou repetindo pela terceira vez. Os próprios professores, no ano passado diziam que se o aluno ficar para recuperação em matemática e em outras disciplinas, ele deverá primeiro fazer a recuperação em matemática e somente se passar vai fazer as demais. Caso contrário, para que perder tempo aplicando prova de recuperação?*

[12] Os registros dos alunos foram copiados na íntegra, sem efetuar correções de ortografia e gramática.

Esse aluno parecia ter uma visão panorâmica da turma em termos de reprovação e aprovação em matemática. Ele falava firme sobre a visão dele e dos colegas a respeito de matemática. Tivemos a confirmação da fala do aluno Dudu (A19), quando lemos e pensamos sobre as respostas da turma toda aos questionamentos feitos em 2009.

4.2.2. Informações sobre a matemática em 2009/2010 e comparação das respostas

Ao iniciar a pesquisa definitiva em 2010, seis meses após a realização do estudo exploratório piloto de 2009, fizemos vários questionamentos aos alunos sobre a matemática. As respostas deles foram distribuídas nos quadros que se seguem. E assim trazemos crenças e concepções deles sobre a matemática.

Quadro 2 – Respostas dos alunos no início da pesquisa

Aluno	**Resposta dos alunos em Agosto de 2010 com o início da pesquisa** Em sua opinião, para que serve a matemática?
Tião - A_1	As pessoas até conseguem viver sem a matemática, mas certamente elas podem viver melhor sabendo utilizar a matemática.
Douglas - A_2	A matemática até poderia ser uma matéria melhor se os professores ensinassem mais devagar.
Lorrainy - A_3	A matemática ajuda o homem a viver melhor. Se o aluno se dedicar, ele aprende matemática.
007 - A_4	A matemática ajuda as pessoas a viver melhor.
Pastel - A_5	A matemática é uma matéria muito difícil e poucos alunos aprendem.
William - A_6	A matemática poderia ser uma matéria melhor, se os professores fossem menos ignorantes.
Eduarda-A_7	A matemática é necessária para as pessoas e está presente em tudo.
Kauan - A_8	A matemática serve para deixar as pessoas mais inteligentes.
Dominguinho-A_9	A matemática é algo ruim é uma matéria que não deveria nem existir.
Silva - A_{10}	Essa é uma matéria que ajuda o homem a viver melhor, mais é uma matéria muito difícil e se o aluno não se dedicar ele não aprende.
Vieira - A_{11}	A matemática serve para as pessoas fazerem compras, pedir descontos, e muitas outras coisas.
Mascara-A_{12}	A matemática foi criada pelo homem que se desenvolveu graças aos conhecimentos matemáticos.
Lopes - A_{13}	A matemática até poderia ser melhor se os professores não fossem tão rápidos com a matéria.
Fred - A_{14}	A matemática ajuda as pessoas a viver melhor e a economizar dinheiro.
Bruno - A_{15}	Nós alunos precisamos aprender a dominar essa matéria tão importante.
Lobo - A_{16}	A matemática assusta os alunos, antes de iniciar o ano os alunos ficam curiosos em saber quem será o professor de matemática.
MoreninhaA_{17}	A matemática serve para reprovar os alunos. Estudar já é ruim, mais poderia ser um pouco melhor se não existisse a matemática.
Júlio - A_{18}	A matemática ajuda desenvolver a mente, em tudo existe a matemática.
Dudu - A_{19}	Se o aluno aprender a prestar atenção na hora da explicação e estudar bastante ele aprende.
Cadma - A_{20}	A matemática é uma matéria que ajuda as pessoas, mais é uma matéria muito difícil.
Luiz - A_{21}	Tem alguns alunos que até gostam de matemática, existe gosto para tudo mesmo. Só serve para dar dor de cabeça.
Lolo - A_{22}	Coitado do professor ele é uma boa pessoa, não merecia dar aula dessa matéria tão ruim.
Fernandes - A_{23}	Poucas pessoas aprendem matemática, só as pessoas inteligentes.
Jubileu - A_{24}	Gosto de matemática e acho que ajuda a desenvolver a mente e o raciocínio das pessoas.

Aluno	**Resposta dos alunos em Agosto de 2010 com o início da pesquisa** Em sua opinião, para que serve a matemática?
Dias - A_{25}	A matemática deve servir para a pessoa ir para a Lua, de preferência se ela não voltar.
Marcio - A_{26}	A matemática é uma matéria difícil, mas se o professor tiver paciência e deve saber ensinar as pessoas aprendem, pelo menos um pouco.
Dj - A_{27}	A matemática serve para deixar as pessoas meio birutas, já reparei que quase todo professor de matemática é meio esquisito.
Todynha - A_{28}	Se o professor souber ensinar o aluno até aprende, mas caso contrário ele nunca vai aprender nada. É uma matéria muito difícil e assusta as pessoas.
Ana Clara A_{29}	A matemática é uma matéria muito difícil e serve para assustar os alunos.
Fera - A_{30}	A maioria dos professores de matemática se julga os melhores da escola, querendo tirar onda com a cara dos alunos.
Feroz - A_{31}	A matemática é algo ruim e que não deveria nem existir, ela assusta, e serve para reprovar os alunos.
Bibi - A_{32}	Poucas pessoas gostam de matemática, ela é uma matéria muito difícil, será mesmo que precisava existir essa matéria.
Nego - A_{33}	O professor é até bom, mas essa matéria é muito ruim e quase ninguém gosta, tenho até pena dele.
Ana - A_{34}	A matemática torna as pessoas mais esperta, desenvolve o raciocínio.
Belo - A_{35}	A matemática existe apenas para dar dor de cabeça nas pessoas, é uma matéria ruim.
ThiaguinhoA_{36}	O professor é gente boa e até ensina bem, mas essa matéria é muito difícil para alguém gostar.

Em 2009, a turma praticamente se calou, quando o aluno Dudu (A19) falou que considerava matemática uma disciplina difícil, poucos alunos colocaram algo diferente do colega. Entretanto, a turma teve reação diferente e exibiu opinião distinta em 2010. No quadro acima, observamos o que pensam sobre matemática. Vinte alunos consideram a matemática uma matéria difícil de aprender. Treze alunos descrevem que a matemática é útil e necessária para a vida de todos. Na opinião de três alunos a matemática e o professor servem para reprovar o aluno. Ao serem orientados para que pudessem pensar em que animal a matemática seria e os motivos, obtivemos as seguintes respostas.

Quadro 3 – Respostas dos alunos à metáfora relacionando a matemática com algum animal

Aluno	Respostas no estudo piloto aplicado em Agosto de 2009	Respostas na pesquisa definitiva realizada em Agosto de 2010
Tião - A_1	A matemática é como um *Tigre*, por ser um animal forte e muito ágil.	A matemática é como uma *Lontra* percebe logo que algo está errado. É um animal muito rápido.
Douglas - A_2	A matemática é como um *Pássaro*, quando livre pode toma várias direções.	A matemática é como uma *Lontra, q*uando deseja algo, ela vai a busca e não desiste, vai até o fim.
Lorrainy - A_3	A matemática é como uma *Centopéia*, pelo fato de ter muitas pernas, vários membros.	É como uma *Onça*, se não se cuidar ela pega, é perigosa. Calcula bem sua presa.
007 - A_4	A matemática é como um *Tigre* é um animal é muito rápida, não perde tempo.	A matemática é como uma *Lontra pode mesmo a distancia perceber se algo esta errado com o seu filhote.*
Pastel - A_5	A matemática é como um *Pássaro*, sua beleza se manifesta quando esta livre na natureza.	A matemática é como uma *Lontra é um animal muito rápido.*
William - A_6	A matemática é como uma *Cobra*, de qualquer forma assusta, mesmo sabendo que algumas podem não ser perigosas.	A matemática é como um *Peixe*, esta a disposição das pessoas, basta que saibam a melhor forma de capiturá-lo no mar.
Eduarda-A_7	A matemática é como uma *Cobra*, da medo só em vê.	A matemática é como um *Peixe*, alguns são perigosos, é preciso saber como capiturá-lo.
Kauan - A_8	A matemática é como um *Tigre sabe calcular* muito bem o que vai fazer.	A matemática é como uma *Lontra (ou parecido com uma lontra)* porque é muito rápido.

Aluno	Respostas no estudo piloto aplicado em Agosto de 2009	Respostas na pesquisa definitiva realizada em Agosto de 2010
Dominguinho-A_9	A matemática é como um *Gato*, por ter desconfiança de tudo, muito ágil.	È como uma *Cobra venenosa*, quando se menos espera ela pode fazer uma nova vitima.
Silva - A_{10}	A matemática é como *as abelhas*, todas têm uma função.	Seria uma abelha, são rápidas, espertas e muito inteligentes.
Vieira - A_{11}	A matemática é como um *Gato*, por ser um animal muito ágil e esperto.	È uma *Cobra venenosa*. As cobras são traiçoeiras e perigosas como a matemática.
Mascara-A_{12}	A matemática é como uma águia calcula tudo para capturar seu alimento.	São como as abelhas, conhecem bem as formas geométricas.
Lopes - A_{13}	A matemática é como um *Gato*, embora não voe ele consegue pegar pássaros com facilidade.	È uma *Cobra é preciso ficar atenta com ela.*
Fred - A_{14}	A matemática é como as *Formigas*, não fazem nada sozinhas, todas tem papel importante.	È como um *Golfinho*, é um animal muito inteligente e bonito. Acho a matemática bonita.
Bruno - A_{15}	A matemática é como as *Formigas*, sabem trabalhar em equipe.	È como um *Golfinho*, é um animal inteligente.
Lobo - A_{16}	Não sabe que animal seria a matemática, porém é algo muito feio, como *um bicho de Sete Cabeças*, pois assusta todo mundo.	È como uma *Cobra*, a matemática é muito traiçoeira. Como as cobras a matemática sempre faz uma vitima.
MoreninhaA_{17}	A matemática é como um *Tigre*, sempre faz uma nova vítima.	A matemática é como uma *Lontra sabe encontrar atalhos.*
Júlio - A_{18}	A matemática é como um animal diferente que nem sei qual, meio assustador.	A matemática é como um Macaco é um animal muito inteligente.
Dudu - A_{19}	A matemática é como um *Leão* é bonito mais perigoso.	A matemática é como uma *Zebra*, pois a zebra é um animal muito bonito.
Cadma - A_{20}	A matemática é como um *Leão* as pessoas precisam sempre tomar cuidado.	A matemática é como uma *Zebra*, é um animal diferente dos demais.
Luiz - A_{21}	A matemática é como um *Leão* é melhor não arriscar chegar perto.	A matemática é como uma *Zebra*, um animal forte e se assemelha com outros animais.
Lolo - A_{22}	A matemática é como um *Leão* é bonito mais precisamos tomar cuidado.	A matemática é como uma *Zebra*, é bonito.
Fernandes - A_{23}	A matemática é como um *Morcego*, assustador e que pode transforma em vampiro.	Um *Porco Espinho*, ele é um animal que solta os espinhos para se defender e escapar. A matemática é uma matéria que temos que aprender a conviver com ela, gostando ou não.
Jubileu - A_{24}	A matemática é como um animal que não conhecemos, estranho, que pode assustar e causar medo.	A matemática é como um *Chimpanzé*, porque em termos de inteligência é o animal que mais se aproxima do ser humano.
Dias - A_{25}	Ela é como *um extraterrestre* é algo muito estranho e feio.	Não sei que animal seria mais devemos evitar até chegar perto.
Marcio - A_{26}	A matemática é como uma *Cobra* é um animal traiçoeiro e perigoso.	É como um *Peixe* é um alimento importante para a saúde, mais que as pessoas precisam ter paciência e comer devagar.
Dj - A_{27}	A matemática é como uma *Cobra*, as pessoas precisam tomar muito cuidado com ela.	A matemática é como um *Peixe*, ele é um animal rápido.
Todynha - A_{28}	A matemática é como uma *Cobra* pode causar grande ferida para o resto da vida.	A matemática é como um *Peixe.* Alguns peixes são pequenos mais e perigosos.
Ana Clara - A_{29}	É como um *Cão Pit Bull*, é um animal muito forte e perigoso.	A matemática é como um *Cão*, por ser o melhor amigo do homem.
Fera - A_{30}	É como um *Cão é* um animal muito inteligente e rápido, as pessoas precisam tomar cuidado.	A matemática é como um *animal importante para as pessoas*.
Feroz - A_{31}	É como um *Cão Pit Bull*, depois que ataca a pessoa, deixa marcas para o resto da vida.	A matemática é um animal perigoso mais que pode ser domesticado pelo homem.
Bibi - A_{32}	A matemática é como as *Formigas*, transportam algo muito maior que elas mesmas.	È como um *Golfinho*, é um animal muito inteligente e bonito.
Nego - A_{33}	A matemática é como *as abelhas*, semelhante às formigas, fazem o trabalho de forma coletiva, todas têm uma função.	Seria uma abelha, elas sempre estão em cima do que mais gostam.
Ana - A_{34}	Seria um animal muito feio, como *um bicho de Sete Cabeças*, causa medo.	È como uma *Cobra*, a matemática é perigosa.

Nos dois momentos, os alunos utilizaram diferentes animais e, em alguns casos, associaram matemática com animais ferozes e violentos. Dos 34 alunos que responderam a esse questionamento em 2009, tivemos apenas 11 alunos deste total associando a matemática com animais que possuem significados positivos para eles, a saber, pássaro, centopéia, gato (apenas um dos alunos), abelhas, águia e formigas. Por outro lado, em 2009, tivemos 23 alunos associando a matemática com animais de significados negativos e temerosos para eles. Por exemplo, cinco alunos comparando matemática com cobra, quatro compararam com tigre e outros quatro com leão. Três compararam a matemática com cão Pit bull, dois com bicho de sete cabeças, dois com animais assustadores/estranhos que eles nem sabiam dizer qual seria, um com gato, um com extraterrestre e um com morcego. Para a turma em 2009, as associações com os animais mostram clara as marcas negativas de matemática na vida escolar deles. E isso se confirma, quando olhamos o quadro 1 com informações sobre as disciplinas e reprovações dos alunos da turma. Muitos desses alunos já tiveram uma, duas ou três ou até quatro reprovações. Sendo a matemática a matéria em que um maior número de alunos já tinha ficado reprovado. Confirmando os argumentos de Gómez Chacón (2003), ao relacionar influências de experiências negativas com a matemática nas atitudes, crenças e concepções dos alunos e no processo de aprendizagem. Em 2010, a visão deles sofreu leves mudanças. Novamente, tivemos apenas 34 alunos respondendo a estes questionamentos pela segunda vez. Agora observamos um total que segue a mesma linha de escolha de animais associados a medo, perigo, etc. No entanto, já surgem outros animais nas associações de imagens deles com a matemática.

No geral, temos agora 25 alunos associando animais com significados positivos com a matemática. Tivemos 8 alunos desse total que permaneceram associando a matemática com animais que consideram positivamente, mudando em alguns casos os animais. Nesse caso, temos oito alunos que são: Douglas (A2), Pastel (A5), Silva (A10), Máscara (A12), Fred (A14), Bruno (A15), Bibi (A32) e Nego (A33). E ressaltamos que tivemos 17 alunos desse total que mudaram para melhor suas opiniões sobre matemática de 2009 para 2010. Isso aconteceu com os alunos Tião (A1), 007 (A4), William (A6), Eduarda (A7), Kauan (A8), Moreninha (A17), Júlio (A18), Dudu (A19), Cadma (A20), Luiz (A21), Lolo (A22), Jubileu (A24), Márcio (A26), Dj (A27), Todynha (A28), Ana Clara (A29), Fera (A30). Como dissemos, parece que esses alunos mudaram os significados associados com a matemática, pois agora escolheram animais que gostam, admiram e que possuem qualidades positivas. Provavelmente pensam que a matemática possui características semelhantes às desses animais. Isso confirma o uso de metáforas sugerido por Chapman (2005, 2006) como instrumento para desvelar pensamentos, sentimentos e associações feitos entre a matemática e o animal usado na metáfora.

Interessante que os alunos Ana Clara (A29) e Fera (A30) permanecem associando a matemática com cão, mas mudaram de opinião quanto ao que destacavam e caracterizavam de particular no cão e que associavam com a matemática. Eles passaram de uma comparação com cão Pit Bull assustador, em 2009, para um cão como amigo do homem em 2010. No entanto, ainda parece que temos em 2010 um total de nove alunos associando a matemática com animais que os amedrontam e com significados negativos. Em nossas análises iniciais, incluímos nesse grupo os alunos Lorrainy (A3), Dominguinho (A9), Vera (A11), Lopes (A13), Lobo (A16), Fernandes (A23), Dias (A25), Feroz (A31), e Ana (A34). Em 2009, os alunos Lopes (A13), Lobo (A16), e Ana (A34) falaram sobre gato que pega pássaro com facilidade e bicho de sete cabeças ao comparar animal com matemática. E, em 2010, compararam a matemática com cobra por ser traiçoeira e perigosa. Os alunos Fernandes (A23), Dias (A25), e Feroz (A31) passaram de morcego assustador, extraterrestre e cão Pit Bull em 2009 para porco espinho, animal que devemos evitar chegar perto e um animal perigoso em 2010. Nos entrigaram as comparações dos alunos Lorrainy (A3), Dominguinho (A9) e, Vera (A11), pois para nós parecia que eles tinham comparado em 2009 a matemática com animais com significados positivos para nós, como a centopéia e o gato. E eles usaram em 2010 animais que nos pareciam com significados negativos como a onça e a cobra. Após termos estes dados transcritos e iniciarmos estas interpretações em 2011, voltamos a conversar com estes alunos, para termos algum feedback deles e para verificar se nossas percepções e interpretações eram apropriadas (SANTOS-WAGNER, 2011). Ao questionarmos esses alunos, em início de 2011, eles comentaram o seguinte:

a) Lorrainy (A3) disse: *Dentre outros animais considero a centopéia um animal fantástico. Além dos vários membros que ela possui e utiliza para se locomover ela utiliza todos eles em uma única sintonia, um movimento* *perfeito e belo*. *Da mesma os felinos de forma geral, nesse caso a onça encanta. Já imaginou um cálculo tão perfeito capaz de vencer um animal (ave) em seu próprio vôo. Será que é possível explicar matematicamente perfeitos movimentos?*

b) Dominguinho (A9) e Vieira (A11) dizem: Nem me recor*dava mais o animal que havia utilizado a quase um ano atrás para comparar a matemática, mas até que os utilizados agora se relacionam com o anterior, uma vez que tanto o gato quanto a cobra são animais extremamente calculistas.*

Percebemos pelas explicações dos três alunos que eles mudaram os animais escolhidos por eles, mas que seguem associando a matemática com animais que para eles possuem características positivas. Ou seja, nosso julgamento inicial ao interpretar as informações deles em 2010 como associando matemática com animais de significados negativos estava inapropriada. Isso reforça a necessidade em pesquisas que procuram desvelar pensamentos e sentimentos de participantes de ter o pesquisador compartilhando suas interpretações, análises e comentários com os sujeitos. Nem sempre os significados atribuídos pelos sujeitos participantes têm as mesmas explicações e significados que estes possuem para os pesquisadores. Com isso aprendemos que ao usar metáforas como instrumento de coleta e produção de dados que precisamos separar os significados positivos e negativos para nós, pesquisadores, do real significado destes para os participantes da investigação. E, portanto, devemos ser cautelosos em interpretações se não tivermos evidências e pensamentos suficientes dos participantes para afirmarmos algo (SANTOS-WAGNER, 2011).

4.2.3. Comprometimento e hábitos de estudo dos alunos

Fizemos alguns questionamentos para a turma para levar os alunos a descreverem seus hábitos de estudo e a refletir sobre como se relacionam com a matemática. Procedemos dessa forma, porque vivenciamos sempre um número significativo de alunos, que estavam presentes na escola, mas muitas vezes ausentes das aulas de matemática. Assim, procuramos fazer com que sentissem a necessidade de maior dedicação deles nos estudos e na participação nas aulas. Desejávamos também fazer com que os alunos pudessem refletir quanto à importância do compromisso necessário de cada aluno para os estudos. Objetivávamos que o aluno pensasse em como poderia alcançar um bom aprendizado e aprovação. Buscávamos também associar o questionamento com o nível de satisfação deles em relação à disciplina de matemática. Assim, como nas situações anteriores, distribuímos uma folha com alguns questionamentos e solicitamos que descrevessem ao máximo suas respostas em cada questão (Ver Anexo III, aula 8 de 10/09/2010.).

Pela resposta dos alunos ao primeiro questionamento, verificamos que na sala existem três grupos distintos de alunos: um pequeno grupo que está estudando na escola entre 2 e 3 anos; um segundo grupo de alunos que está estudando na escola entre 4 a 5 anos; e por fim, um terceiro grupo na sala que já estuda na escola entre 6 a 7 anos, ou seja, desde as séries iniciais do ensino fundamental. Organizamos as respostas dos alunos aos outros itens no quadro 4.

Gm – Gosto muito **G** – Gosto **R** – Regular **Ng** – Não gosto **Ngm** – Não gosto muito

Quadro 4 – Preferências por disciplinas escolares

Aluno	**Preferência pelo estudo de cada disciplina**					**Motivos relativos a matemática**	**Um bom professor**	**Uma boa aula**
	Port.	**Mat.**	**Ciên.**	**Hist.**	**Geog.**			
Tião - A_1	Gm	**Ngm**	G	Ng	R	Por estar aprendendo melhor a matéria.	É aquele que explica corretamente a matéria.	É aquela em que o aluno aprende coisas importantes.
Douglas - A_2	Gm	**Ngm**	Ng	Gm	R	É uma matéria difícil, mais aos poucos o aluno aprende.	Explica bem e tenta compreender o aluno.	O aluno aprende a comentar as respostas dadas.
Lorrainy - A_3	Gm	**G**	R	Ngm	Ng	O professor ensina direito e fica fácil aprender a matéria.	Explica a matéria até o aluno aprender.	Tem um professor gente boa e trata bem os alunos.
007 - A_4	G	**G**	Gm	Ngm	Ng	A matéria é complicada, mas é legal.	Explica bem e é paciente para explicar a matéria.	O aluno consegue fazer as atividades e aprende.
Pastel - A_5	R	**Ng**	G	Ngm	Gm	Só fica na sala passando dever.	Deixa o aluno livre e passa menos atividades.	É interativa, o aluno corre, brinca.
William - A_6	Ng	**R**	R	Gm	Ngm	O professor explica muito bem a matéria e é paciente.	Ensina muito bem, se comunica com os alunos.	Todos se dão bem e podem tirar suas duvidas.
Eduarda-A_7	Ngm	**G**	G	Gm	Ng	As vezes a matéria fica difícil de compreender.	Explica bem, é calmo e sabe controlar a turma.	O aluno tem a oportunidade de falar o que pensa.
Kauan - A_8	R	**G**	Ngm	Gm	Ng	Faz sentido aprender a matéria.	Não cansa de explicar, e sabe controlar	Chama atenção dos alunos.

Aluno	Preferência pelo estudo de cada disciplina					Motivos relativos a matemática	Um bom professor	Uma boa aula
	Port.	Mat.	Ciên.	Hist.	Geog.			
							a turma.	
Dominguinho-A_9	Ng	**R**	G	Ngm	Gm	O aluno pode demonstrar como fez as atividades.	O professor ensina muito bem e controlar a turma.	Não deixa o aluno sair da sala para ir ao banheiro.
Silva - A_{10}	R	**Gm**	G	Ng	Ngm	É minha matéria favorita.	É aquele que dá aula de matemática.	É a aula de matemática.
Vieira - A_{11}	Ngm	**R**	Gm	G	Ng	Em pouco tempo, o exercício fica fácil e complicado.	Explica bem a matéria quantas vezes necessário.	É prática e todos os alunos ajudam o professor.
Mascara-A_{12}	Ngm	**Gm**	R	Ng	G	O professor é legal, muito paciente e explica bem.	Explica bem como o professor de matemática.	Motiva o aluno a assistir a aula e fazer os exercícios.
Lopes - A_{13}	G	**R**	Gm	Ng	Ngm	Não gosto da matéria, mas não é impossível aprender.	Explica direito, ouve e respeita o aluno.	É aquela em que o professor se diverte com o que faz.
Fred - A_{14}	Ng	**Ng**	Gm	Ngm	G	O que salva é o professor, pois a matéria é difícil.	Faz com que o aluno assista à aula e goste dela.	É aquela em que o professor sabe como controlar a turma.
Bruno - A_{15}	G	**Gm**	R	Ngm	Ng	É a matéria que eu mais gosto de estudar.	Explica bem a matéria, tira dúvidas e tem paciência.	Faz com que todos participem e respeita a aula.
Lobo - A_{16}	G	**Gm**	R	Ngm	Ng	Aprendi como aprender matemática.	Sabe a hora de ficar bravo e dar uma bronca na turma.	É aquela que o aluno percebe o momento sério e de estudo.
MoreninhaA$_{17}$	Gm	**Ng**	G	Ngm	R	É uma matéria complicada.	É amigo e paciente.	Motiva o aluno a ficar em sala
Júlio - A_{18}	Ng	**G**	Gm	Ngm	R	Tenho aprendido a matéria e tirado boas notas.	Sente prazer em ensinar e de estar com os alunos.	É aquela que teve participação da turma.
Dudu - A_{19}	G	**Ngm**	R	Ng	Gm	É uma matéria difícil e complicada.	Tem um bom convívio com a turma.	Da oportunidade para que o aluno participe.
Cadma - A_{20}	G	**R**	Gm	Ngm	Ng	É uma matéria muito importante.	É criativo e paciente.	Não deixa o aluno atrapalhar a aula.
Luiz - A_{21}	Ng	**R**	G	Ngm	Gm	Aprendo a matéria.	Motiva o aluno e mostra que todos podem aprender.	Motiva o aluno.
Lolo - A_{22}	G	**Ng**	R	Ng	Gm	Não consigo aprender esta matéria, ela é muito difícil.	Tem bom diálogo com os alunos e paciência.	É onde os alunos colaboram uns com os outros.
Fernandes - A_{23}	Gm	**G**	R	Ngm	Ng	Aprendi a compreender o significado das coisas.	Preocupa-se com o futuro de seu aluno.	É aquela em que os alunos aprendem.
Jubileu - A_{24}	Gm	**Ngm**	G	Ng	R	É uma matéria difícil e reprova muitos alunos.	Tem bom diálogo com os alunos e gosta do que faz.	Não é barulhenta e os alunos não fazem o que querem.

Aluno	Preferência pelo estudo de cada disciplina					Motivos relativos a matemática	Um bom professor	Uma boa aula
	Port.	Mat.	Ciên.	Hist.	Geog.			
Dias - A_{25}	G	**Ng**	R	Ng	Gm	Não deixa boas lembranças.	Deve gostar de ensinar.	Consegue chamar a atenção dos alunos.
Marcio - A_{26}	G	**R**	G	Ngm	Ng	O aluno aprende.	Sabe como chamar a atenção da turma.	É produtiva e muda o jeito de pensar do aluno.
Dj - A_{27}	Ng	**Ngm**	G	Ngm	R	Ensina que devemos prestar atenção para aprender.	Ensina que o aluno deve explique seu pensamento.	É participativa e não deixa os alunos ficarem fora de sala.
Todynha - A_{28}	G	**R**	Gm	Ngm	Ng	Tenho melhorado minhas notas.	Passa muitas atividades para os alunos.	Mantém a turma sobre controle.
Ana Clara - A_{29}	G	**Ng**	R	Ngm	Gm	Os exercícios são difíceis e muitos.	Passa exercícios mais fáceis.	As boas aulas sempre são poucas durante a semana.
Fera - A_{30}	G	**Ng**	R	Ngm	Gm	O professor passa muita atividade e é chato.	Passa menos exercícios e brinca com a turma.	Deixa o aluno ir ao banheiro sempre que precisar.
Feroz - A_{31}	Gm	**Ng**	R	Ngm	Ng	Muitos alunos ficam de recuperação nessa matéria.	Passa continhas de somar e subtrair.	É aquela que não reprova o aluno.
Bibi - A_{32}	Gm	**Ng**	G	Ngm	R	O professor é gente boa, uma pena é que ele dá aula de matemática.	Não deve dar aula de matemática.	É de educação física, pois podemos brincar o tempo todo.

Ao observarmos as respostas dos 32 alunos e nossos registros no quadro anterior, constatamos que nem todos gostam da disciplina de matemática. Informação que confirma respostas dadas pelos alunos em 2009 e em 2010, para os questionamentos relativos à matemática que já comentamos. Do total de 32 alunos, tivemos nove alunos respondendo que ***Não gostam*** da disciplina de matemática (Pastel-A5, Fred-A14, Moreninha-A17, Lolo-A22, Dias-A25, Ana Clara-A29, Fera-A30, Feroz-A31, Bibi-A32). Alguns afirmam que esta é uma disciplina complicada de se aprender e que eles, geralmente, fazem muitos exercícios difíceis e são muitos os exercícios para serem feitos em pouco tempo. Às vezes, os alunos dizem que geralmente ficam muito nervosos por não conseguirem fazer os exercícios ou aprender a matéria, quebram a cabeça com a disciplina e mesmo gostando do professor, mencionam que não é fácil gostar de matemática.

Outros oito alunos descreveram a disciplina de matemática como sendo ***Regular***. Em seus motivos, eles afirmam que o professor explica bem a matéria e se esforça para manter o máximo da atenção do grupo (William-A6, Dominguinhos-A9, Vieira-

A11, Lopes-13, Cadma-A20, Luiz-A21, Marcio-A26, Todynha-A28). Um grupo de seis alunos assinalou a opção ***Gostam*** das aulas de matemática (Lorrainy-A3, 007-A4, Eduarda-A7, Kauan-A8, Júlio-A18, Fernandes-A23). Ao justificarem os motivos que lhes fazem gostar da disciplina, eles afirmam que esta é uma matéria que, embora tenha algumas regras, elas não mudam o tempo todo. Além disso, dizem que um bom professor de matemática reconhece as limitações dos alunos. Mesmo sendo uma matéria difícil, torna-se um desafio agradável. Confiamos na importância do papel do professor no trabalho com os alunos, tornando o conhecimento acessível a todos (GÓMEZ CHACÓN, 2003).

Cinco alunos responderam que ***Não gostam muito*** das aulas de matemática (Tião-A1, Douglas-A2, Dudu-A19, Jubileu-A24, Dj-A27). Dentre as razões alegadas, eles disseram que são muitos números, e é muito difícil aprender tanta coisa. E, por esses motivos, muitos alunos não aprendem nada e acabam reprovando. Surpreendeu-nos o aluno Dudu-A19 ao dizer que não gosta muito de matemática. Suas respostas aos questionamentos de 2009 e 2010 nos levaram a acreditar que estava melhorando sua visão de matemática. Por fim, quatro alunos afirmam que ***Gostam muito*** das aulas de matemática (Silva-A10, Máscara-A12, Bruno-A15, Lobo-A16). Em seus motivos colocaram: "gostar de matemática porque melhora o raciocínio e a mente. Porque sabem também que, quanto menos se espera, pode-se cometer um só erro e toda atividade está errada. É uma matéria muito rápida, pois, quando começamos a aprender um exercício, o professor já está em outro assunto".

Fundamentados nas informações registradas no quadro anterior, inferimos o grau de satisfação dos alunos com a disciplina de matemática. Esses dados podem e devem ser cruzados com as informações que temos dos 32 alunos nas atividades de 2009 e 2010, que também questionavam pensamentos e sentimentos relacionados com a matemática. Ainda podemos cruzar todas essas informações com o que sabemos de cada aluno, sobre o número de vezes que ficou ou não reprovado em matemática. Olhar a todo esse material, permite-nos triangular dados e informações de cada aluno para procurarmos compreender crenças, concepções e atitudes deles, frente à matemática. E vamos, também, questionar informações contraditórias e contradições que tenhamos observado em nossas aulas com os alunos (SANTOS-WAGNER, 2010). Usando os dados do quadro anterior, colocamos a opinião dos alunos sobre a matemática no gráfico abaixo.

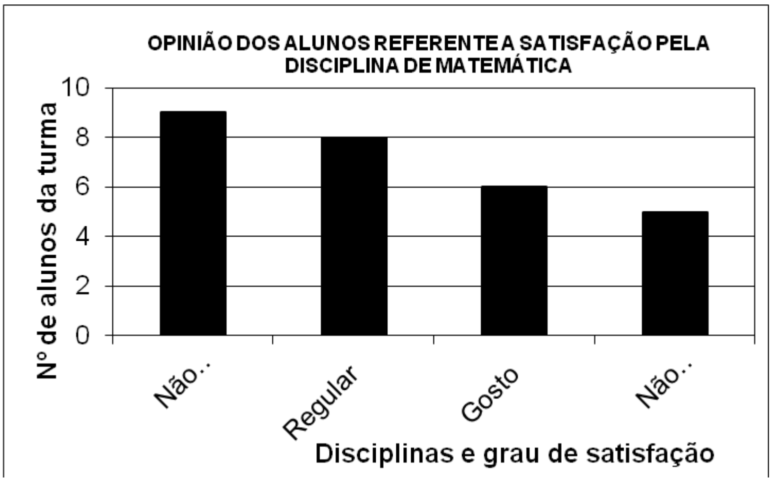


Fig. 6 – Grau de satisfação dos alunos

Algumas das respostas dos alunos nos mostram também que um bom professor de matemática é aquele que:

- é rígido, ensina corretamente a matéria e ao mesmo tempo é educado;
- respeita e é respeitado pelos alunos, não fala palavrões com os alunos;
- tem caráter e respeito com os alunos, participa com os alunos da aula, é paciente;
- se preocupa com a vida do aluno e não se limita em explicar a matéria ao aluno, caso ele não entender;
- faz o aluno sentir que é possível aprender e não, simplesmente, ignora as dificuldades;
- não, simplesmente, passa a matéria no quadro, explica um exemplo e solicita o desenvolvimento da atividade, mas sim ensina e demonstra prazer em ensinar;
- acaba conhecendo um pouco da vida de cada aluno estando disposto a ouvir até mesmo as dificuldades familiares vividas por seus alunos.

As três primeiras informações nos indicam a importância que os alunos dão ao respeito que o professor deve demonstrar pelos alunos em suas interações. A quarta e a sétima resposta nos deixam entender que os alunos destacam como característica importante do professor que ele demonstre preocupação em ouvir e conhecer seus alunos, assim como perceber as dificuldades que sentem.

Isso é semelhante ao que Lonrenzato (2006) nos diz ao comentar que o professor precisa aprender a “auscultar” seus alunos. Essas falas dos alunos chamam atenção para o professor enxergar o aluno como ser humano. Destacam também que seu papel vai além da função que exerce como professor, pois também deve exercer o papel de um educador. A quinta resposta ressalta que o professor deve demonstrar que acredita no potencial de aprendizagem de seus alunos. Já a sexta informação traz como característica do professor, aquela em que ele demonstre prazer em ensinar.

Se olharmos todas as respostas dos alunos, observamos dentre elas as características de um bom professor de matemática destacadas por eles. Eles destacam: respeito, percepção de que o aluno é um ser humano; função de educador; confiança no potencial de aprendizagem de cada aluno; e demonstrar prazer em ensinar. Lorenzato (2006) e Santos (1997) destacam as três últimas características mencionadas pelos alunos. Os alunos descrevem que uma boa aula é aquela em que: a) as dúvidas apresentadas pelos alunos são esclarecidas e trabalhadas; b) o professor consegue atrair a atenção e carinho dos alunos; c) o professor consegue chamar a atenção da turma e mostrar o sorriso, sem perder o controle da turma. E concluem que um bom professor é uma pessoa especial.

Diante dos registros dos alunos, recorremos a Santos (1997) que, ao se referir às aulas de matemática, assim se expressa:

> O ambiente escolar deve ser um ambiente que estimule o aluno a aprender e o professor a ensinar. Portanto, o professor precisa transmitir emoção e vibração enquanto ensina matemática e o aluno precisa sentir-se atraído, curioso e desafiado para aprender conhecimentos em sala de aula (p. 11).

Nossa experiência nos mostra também a necessidade de aprofundarmos nossos estudos, a fim de aproximar prática e teoria, teoria e prática. Nesse sentido, Lorenzato (2006) e Ferreira (2002) nos levam a pensar sobre esses aspectos.

> A formação de professores não se esgota em cursos pontuais, sobre temas específicos, desligados da sala de aula e do contexto da escola. A formação de professores tem de caminhar muito para além desta concepção e fomentar uma ligação cada vez mais estreita entre a teoria e a prática, prolongando-se no tempo, em contextos de escola, com grupos de professores, com mais debate, com trocas de experiências, com mais reflexão, ganhando bastante significado o seu desenvolvimento ao longo de toda sua carreira (FERREIRA, 2002, p. 238).

É importante que o professor conheça os sentimentos de seus alunos, em relação à disciplina que atua, e possa desenvolver práticas educativas que considerem o aluno como um ser global, desenvolvendo estratégias que tragam, à tona, um conjunto de valores que orientem as escolhas do mesmo, tornando-o autônomo, não apenas no que se refere ao conteúdo, mas também em relação à própria vida (GÓMEZ CHACÓN, 2003). De acordo com Piaget (1991), o desenvolvimento intelectual se pauta em dois componentes: um cognitivo e outro afetivo. Reiteramos, que o professor pode despertar nos alunos atitude positivas ou negativas, refletidas pelo ambiente estabelecido na classe. Tanto as atitudes como o ambiente em sala de aula poderá favorecer ou desfavorecer a aprendizagem, colaborando para gerar aversão ou gosto pela disciplina, influenciando também o desempenho na mesma (GÓMEZ CHACÓN, 2003; SANTOS, 1997; FERRAÇO, 2005). Os relatos dos alunos nos registros acima ilustram muito bem essa situação.

Hoje pontuamos que o modelo de educação que, muitas vezes, usamos com os alunos, também tem semelhanças com os meios pelos quais fomos educados. Seguimos usando um modelo tradicional que concebe conhecimento como

> um conteúdo, como informações, coisas e fatos a serem transmitidos ao aluno. O aluno, segundo esta visão, vai para a escola para receber uma educação. Dizer que ele aprendera significa que saberá dizer ou mostrar o que lhe foi ensinado. Segundo este modelo, o ensino é a transmissão de informações. A aprendizagem é a recepção de informações e seu armazenamento na memória (CARRAHER, CARRAHER, SCHLIEMANN, 2003/1988, p. 12).

Na educação contemporânea, o conhecimento é tratado como uma construção de ideias, com base na participação ativa de cada um dos atores envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, de seus interesses, de suas experiências anteriores e de suas capacidades e motivações. Carraher, Carraher e Schliemann (2003/1988) e Carraher (1986/1983) procuram mostrar que os estudantes entendem melhor as coisas que eles mesmos descobrem, por isso é necessário levá-los a pensar, investigar, explorar, agir sobre os fatos, permitindo, assim, que tirem suas próprias conclusões e construam o seu saber a partir de suas descobertas. Raciocinando dessa forma, vemos aprendizagem como descoberta, ou construção, ou uma atividade investigativa que respeita as diferenças individuais, o ritmo de aprendizagem e o progresso de cada aluno, no decorrer de sua vida escolar.

4.2.4. Identificando o planejamento escolar e frequência dos alunos

Trabalhamos, intencionalmente, durante as primeiras dez aulas, chamando a atenção dos alunos para a o comprometimento deles com a escola e com os estudos. Fizemos isso para despertar nos alunos consciência sobre direitos e deveres deles, alunos, e professores no cotidiano escolar. Importa investir tempo com valores, por considerarmos que esse diálogo com os alunos e essa tomada de consciência os envolveriam mais ativamente no processo de aprendizagem, no desenrolar de nossa pesquisa. Por causa das reprovações, sentimos a necessidade de mostrar para os alunos a programação de nossa intervenção pedagógica dentro do programa curricular previsto para o ano todo.

Entendíamos ser necessário que os alunos se conscientizassem de que o conteúdo da disciplina é apenas um elo da engrenagem. E que, além do conteúdo a ser ensinado, era de nosso interesse identificarmos possíveis causas que tivessem levado os alunos a conceber a matemática como um conhecimento difícil e pouco accessível para a maioria. Achamos conveniente discutir com a turma sobre a frequência deles nas aulas de matemática e outras disciplinas, como também questioná-los sobre o horário escolar semanal. Tínhamos a impressão de que alguns alunos nem tinham consciência de suas faltas nem de quantas aulas semanais tinham para as disciplinas. E isso se confirmou na atividade desenvolvida na aula do dia 16/09/2010 (Ver detalhes no Anexo III) cujo objetivo era fazer com que os alunos reconhecessem a importância do papel desenvolvido pela escola e pelas aulas, para a sistematização do conhecimento e formação social do individuo.

A proposta foi de despertar, nos alunos, a necessidade de estarem presentes nas aulas e de criarem hábitos de estudos. Dialogar com eles, a partir de suas respostas para motivá-los a utilizar procedimentos de estudos que os auxiliem no aprendizado. Ficamos ansiosos ao descobrirmos um número considerável de alunos que não demonstravam preocupação ao deixarem de assistir às aulas. Esperávamos uma conscientização por parte dos alunos quanto à importância de assistirem a todas as aulas planejadas e oferecidas pela escola. E que pensassem em faltar as aulas, apenas em uma eventual necessidade e não como uma atividade de rotina, que se preocupassem em colocar em dia as atividades desenvolvidas, referentes especificamente àquela aula. Instigamos o compromisso e fidelidade nos estudos, bem como preocupação e responsabilidade com o fator frequência nas aulas, como elemento indispensável para o aprendizado.

Resultados alcançados com a atividade:

Como segue no quadro cinco, nos foi possível verificar um número considerável de alunos que, por inúmeros motivos não apresenta um ritmo de estudo e de frequência às aulas. Na busca pela identificação das causas pela ausência nas aulas, eles afirmaram dentre outras que não gostavam de estudar e por esse motivo, faltavam. Ademais, os alunos confirmaram uma situação que já vinha ocorrendo, frequentemente, com outros alunos da escola. Percebemos que havia um elevado número de alunos que ia para a escola todos os dias, encontravam-se no ambiente escolar, porém, muitas vezes, não estavam presentes na sala de aula.

Quadro 5 – Opiniões dos alunos sobre a aprendizagem

Aluno	**Nº de aulas de matemática previstas na semana?**	**O nº de aulas é suficiente para a aprendizagem?**	**Assisti todas às aulas semanais das disciplinas?**	**Nº de aulas que realmente assiste durante a semana?**	**Um bom aluno em matemática precisa...**	**Aprender matemática significa...**
Tião - A_1	07	Não	Não	Quase todas	Gostar da matéria.	Não faltar a aula
Douglas - A_2	04	Não	As vezes	Umas quatro	Estudar muito.	Não matar aula
Lorrainy - A_3	05	Sim	Sim	Sim	Não matar aula.	Conversar menos
007 - A_4	06	São muitas	Não	Quase todas	Ser inteligente.	Não faltar aula
Pastel - A_5	05	Sim	Não	05	Gostar de estudar.	Conversar menos
William - A_6	05	Sim	Sim	05	Não faltar a aula.	Conversar menos
Eduarda-A_7	06	Sim	Sim	Quase todas	Ser dedicado.	Gostar da matéria
Kauan - A_8	07	Não	As vezes	Quase todas	Ser inteligente.	Faltar menos
Dominguinho-A_9	04	Não	Sim	Quase todas	Estudar muito.	Conversar menos
Silva - A_{10}	05	Sim	Sim	05	Gostar de estudar.	Fazer os exercícios
Vieira - A_{11}	05	Sim	Sim	05	Fazer exercícios.	Conversar menos
Mascara-A_{12}	05	Pode ser menos	Não	Quase todas	Ser dedicado.	Conversar menos
Lopes - A_{13}	05	Não	Sim	05	Não faltar a aula.	Conversar menos
Fred - A_{14}	05	Não	Sim	05	Não brincar na aula.	Fazer os exercícios
Bruno - A_{15}	05	Não	As vezes	Umas quatro	Ser estudioso.	Não faltar a aula
Lobo - A_{16}	05	Sim	Sim	05	Estudar muito.	Estudar mais
Moreninh	05	São muitas	Não	Umas três	Gostar de	Fazer os

a - A_{17}					estudar.	exercícios
Júlio - A_{18}	05	Sim	Não	Às vezes	Não matar aula.	Estudar mais
Dudu - A_{19}	06	Não	Não	Quase todas	Fazer os exercícios.	Conversar menos
Cadma - A_{20}	07	Não	Não	Às vezes	Não atrapalhar a aula	Estudar mais
Luiz - A_{21}	04	Não	Sim	Quase todas	Gostar de estudar.	Fazer os exercícios
Lolo - A_{22}	05	Sim	Sim	05	Ser esperto.	Gostar da matéria
Fernandes - A_{23}	05	Sim	Não	Quase todas	Ser inteligente.	Estudar mais
Jubileu - A_{24}	07	Não	Sim	Umas quatro	Gostar de estudar.	Fazer os exercícios
Dias - A_{25}	05	Sim	As vezes	Umas quatro	Gostar de estudar.	Estudar mais
Marcio - A_{26}	06	São muitas	Não	Umas três	Gostar de estudar.	Conversar menos
Dj - A_{27}	07	Não	Não	05	Ser inteligente	Gostar da matéria
Todynha - A_{28}	05	Sim	Sim	Quase todas	Estudar muito	Dedicar mais
Ana Clara - A_{29}	05	Não	Sim	Todas	Gostar de estudar.	Não ter preguiça
Fera - A_{30}	05	Sim	As vezes	Todas	Gostar de estudar.	Estudar mais
Feroz - A_{31}	05	Não	Não	Às vezes	Não faltar a aula	Ser dedicado
Bibi -A_{32}	06	São muitas	Não	Umas três	Gostar de estudar.	Conversar menos

Com os registros dos 32 alunos presentes nesta aula, constatamos que:

- 14 alunos da turma procuravam assistir a todas as aulas semanais de todas as disciplinas previstas, semanalmente, pela escola;
- 13 alunos da turma afirmaram que não assistem às aulas semanais das disciplinas previstas semanalmente pela escola;
- 05 alunos da turma afirmaram que, às vezes, assistem às aulas semanais previstas semanalmente pela escola.

Quanto ao número de aulas semanais de matemática, observamos que:

- 19 alunos da turma souberam descrever, corretamente, o número de aulas previstas na semana;
- 13 alunos da turma não souberam descrever, corretamente, o número de aulas previstas na semana.

Quanto ao questionamento, se o número de aulas de matemática era ou não suficiente para o aprendizado:

- 13 alunos da turma responderam que o número de aulas de matemática é suficiente para o aprendizado;
- 14 alunos da turma responderam que o número de aulas de matemática não é suficiente para o aprendizado;
- 05 alunos da turma responderam que são muitas aulas de matemática e que poderia haver menos aulas.

Na opinião do grupo de alunos, para ser um bom aluno em matemática é necessário: gostar de estudar a matéria; o aluno não pode matar aula ou faltar; precisa ser inteligente e dedicado aos estudos; não atrapalhar a aula; e fazer muitos exercícios. E acrescentaram que poderiam aprender mais a matéria de matemática, se não faltassem às aulas; e evitassem a conversa em sala, realizassem os exercícios e se dedicassem mais.

Com essas dez aulas nós concluímos que a atitude do professor no trabalho com os alunos é importante e permite criar climas de atenção e concentração, sem que percamos alegria. As aulas tanto podem inibir o aluno quanto podem levar o aluno a atuar de maneira indisciplinada. O papel do professor deve ser o de mediador e facilitador; que interage com os alunos na construção do saber (SANTOS, 1997; VYGOTSKY, 1988/1934, 1991): Enfim, professor precisa saber ensinar, garantindo assim que todos os alunos possam aprender e desenvolver seu raciocínio. Coll (1994) afirma que:

> Os alunos formam seu próprio conhecimento por diferentes meios: por sua participação em experiências diversas, por exploração sistemática do meio físico ou social, ao escutar atentamente um relato ou uma exposição feita por alguém sobre um determinado tema, ao assistir um programa de televisão, ao ler um livro, ao observar os demais e os objetos com certa curiosidade e ao aprender conteúdos escolares propostos por seu professor na escola (p. 95).

Em síntese, o relacionamento do professor com seus alunos determina o clima emocional da sala de aula. Esse clima poderá ser positivo, de apoio ao aluno, quando o relacionamento for afetuoso, cordial. Nesse caso, o aluno sentirá segurança, não temerá a crítica e a censura do professor. Seu nível de ansiedade se manterá baixo e ele poderá trabalhar descontraído, criar, render mais intelectualmente. Porém, se o aluno teme, constantemente, a crítica e a censura do professor, se o relacionamento entre eles é permeado de hostilidade e contraste, a atmosfera da sala de aula é negativa. Assim sendo, há o aumento da ansiedade do aluno, com repercussões físicas, diminuindo sua capacidade de percepção, raciocínio e criatividade.

Se a aprendizagem, em sala de aula, for uma experiência de sucesso, o aluno constrói a representação dele mesmo como alguém capaz. Se, ao contrário, for uma experiência de fracasso, o ato de aprender tenderá a se transformar em ameaça. O aluno, ao se considerar fracassado, vai buscar os culpados pelo seu conceito negativo e começa a achar que o professor é chato e que as lições não servem para nada (GÓMEZ CHACÓN, 2003; OLIVEIRA, 2007; SANTOS, 1997).

Portanto, com essas atividades iniciais, buscamos romper com a turma as diferenças entre professor e aluno consagradas pela escola tradicional. Ou seja, romper os papéis, tradicionalmente, desempenhados pelo professor de ensinar, transmitir e dominar por ser a autoridade do saber na sala e pelo aluno de aprender, receber passivamente e, simplesmente, obedecer (SANTOS, 1997). Por entendermos que a escola poderá ser diferente desse modelo tradicional para, efetivamente, atender a sua mais elevada finalidade: respeitar o aluno como um ser humano que tem conhecimentos e permitir o aluno atingir a ampliação e o desenvolvimento de outros conhecimentos.

Admitimos também que a qualidade de atuação da escola depende ainda da participação conjunta da escola, da família, do aluno e dos profissionais ligados à educação. Por esse lado, o professor deve reorganizar suas ideias e reconhecer que o aluno não é um sujeito que só recebe informações, suas capacidades vão além do conhecimento que lhes é “depositado” (FREIRE, 1996). Desde o início, nós nos preocupamos em mostrar aos alunos do 7º ano que o professor precisa ser alguém que acompanha e participa do processo de construção de novas aprendizagens.

4.3. Conhecimentos iniciais sobre frações, crenças e concepções relativas à fração

A identificação de fração em suas diferentes representações foi o tema explorado nesse bloco inicial de nove aulas, da aula 11 até a aula 19. Começamos, sempre, questionando o que os alunos pensam sobre o tema. Essas aulas tiveram por objetivos: levar os alunos a pensarem sobre o tema fração, buscando relacionar o tema em diferentes representações; associar fração em diferentes situações; identificar as associações que os alunos faziam, envolvendo frações; e identificar as diferentes situações escolares ou de vida que os alunos associam ao tema frações. Geralmente, usamos a dinâmica de propor aos alunos a realização em alguns minutos das tarefas e, em seguida, trocávamos ideias sobre as soluções apresentadas.

Iniciamos com alguns comentários sobre episódios de aulas, soluções de alunos e reflexões sobre o que identificamos de seus conhecimentos iniciais de frações e assuntos relacionados como divisão e porcentagem. Procuramos identificar também indícios de crenças e concepções sobre fração. Em alguns momentos, fizemos comentários gerais da turma e, em outros, colocamos soluções dos alunos selecionados de acordo com os critérios comentados no capítulo 3. Foram selecionados os alunos: Tião - A1, Douglas - A2, Lorrainy - A3, Dominguinho - A9, Vieira - A11, Lobo - A16, Dudu - A19, Fernandes - A23. Em alguns casos, trouxemos também soluções de outros alunos relacionadas com os alunos selecionados.

Nos dois tempos de aula inicial, em 24/09/10, as tarefas iniciais propostas para a turma responder, individualmente, foram:

1 – Descreva com suas palavras o que você entende por fração ou frações.

2 – Represente, livremente, no desenho qualquer fração que você queira.

3 – Após ter representado a fração no desenho, escreva através de números esta fração. Explique com suas palavras a representação com fração.

4 – Explique com suas palavras o que você entende por divisão.

5 – Explique com suas palavras por que motivos uma divisão tem resto e, em outros, não. Se necessário, dê exemplo.

6 – O que sabe ou se lembra sobre porcentagem.

Com o desenvolvimento da atividade, nosso propósito inicial era fazer com que os alunos representassem, livremente, no papel o que lhes vinha à mente sobre fração, bem como identificar quais representações utilizavam para representar uma fração. Além disso, ao solicitar aos alunos que pudessem descrever também sobre divisão e sobre porcentagem, nosso propósito era instigar nos alunos a percepção da relação entre fração, divisão e porcentagem. Consequentemente, fazer com que os alunos reconhecessem diferentes maneiras de se representar uma mesma quantidade, utilizando a representação em forma de fração, divisão e porcentagem. Ou seja, estávamos procurando responder parte de nossos questionamentos de pesquisa que buscam a compreensão dos vários significados associados à fração.

Descrição da aula

Aluno Tião - A_1: Ao registrar suas respostas sobre as seis questões apresentadas, observamos como ele pensa sobre fração associando a mesma com uma quantidade e alguns equívocos em seu desenho. O aluno descreve que a fração é uma forma utilizada pelas pessoas para representar uma quantidade. Representa o desenho abaixo e descreve:

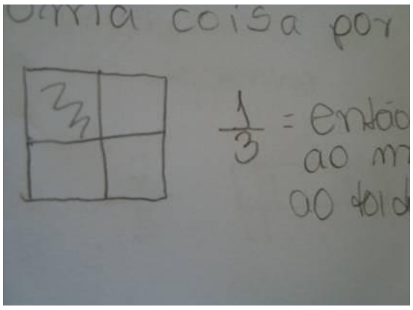


Fig. 7 – Reg. do aluno Tião - A1

Registros do aluno Tião: *Então, dividindo um quadrado ao meio e depois dividindo a outra parte também ao meio, temos quatro partes iguais. Pintando uma das quatro partes representadas, temos 1/3*. **Interpretação:** O aluno A1 redige algo que conduz a pensar em quartos a partir de duas divisões sucessivas, mas acaba por representar 1/3 e associa isto com a ideia de uma parte marcada ou riscada para três que ficaram sem marcar ou sem riscar. Que seria uma ideia de fração como razão. Ou seja, parece-nos que o aluno Tião está confundindo a ideia de fração 1/4 como fração associada com a ideia de parte-todo com a ideia de fração associada com o significado de razão. Ou será que o significado que este aluno incorporou desde as séries iniciais foi a ideia de fração associada com razão entre as partes de um todo.

Descreve que divisão *é uma forma de dividir um número por outro e que, em alguns casos, essa divisão tem resto, porque não são todos os números que podem ser repartidos em partes iguais para todos*. **Interpretação:** O aluno Tião-A1 tem uma compreensão do conceito de divisão entre números, mas ficou sem associar com a ideia de fração. Ele parece possuir clareza sobre a ideia de divisores, (pois Tião-A1 explica quando poderia existir resto da divisão). Sobre porcentagem disse: *sei que serve para as pessoas pagar as contas com juros*. Interpretação: Sobre porcentagem parece que sabe apenas de sua utilidade, mas ficou sem exibir sua ideia ou conceito sobre porcentagem. E nem associou isto com divisão ou fração.

Aluno Douglas - A_2: Fração é uma forma utilizada para dividir alguma coisa com alguém como, por exemplo, uma barra de chocolate. Representa o desenho abaixo e descreve:

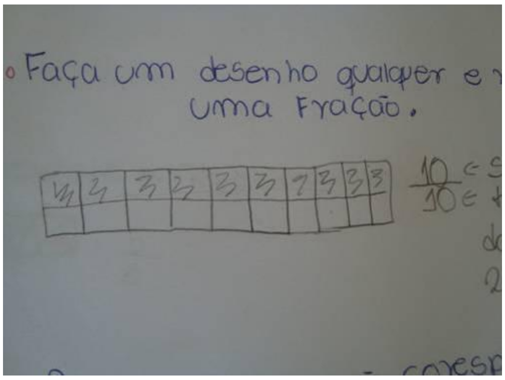


Fig. 8 – Registro do aluno Duglas -A2

Registros do aluno Douglas: *Temos* $\frac{10}{10}$, identificando o numerador e o denominador na fração, descreve que sobraram 10 e retirou 10 pedaços, do total que era 20 pedaços.

Descreve que dividir é dividir um número por outro e, se, em alguns casos, a divisão tem zero e em outras não é porque está havendo a divisão entre um número par por um número ímpar. E porcentagem é quase igual a uma divisão, porque o preço das coisas às vezes, chega a ser até a metade do preço.

A partir do desenho e dos registros descritos pelo aluno Douglas - A2, percebe que ele associou 10/10 com a ideia de razão, também entre as 10 partes tiradas e as 10 partes que sobraram. Pensou de modo semelhante ao aluno Tião - A1. Em seu desenho repartiu em 20 partes e pela imagem parece que todas são, aparentemente, de mesmo tamanho (mesma área). Douglas - A2 pensa em divisão numérica apenas e nem soube explicar, claramente, por que temos divisão com resto zero. Ele também pensa em porcentagem, em termos de sua utilidade como o aluno Tião - A1, sem deixar, claro o que sabe ou compreende por porcentagem.

Aluna Lorrainy - A_3: Fração é uma forma de repartir uma quantidade ou um objeto. Representa o desenho abaixo e descreve:

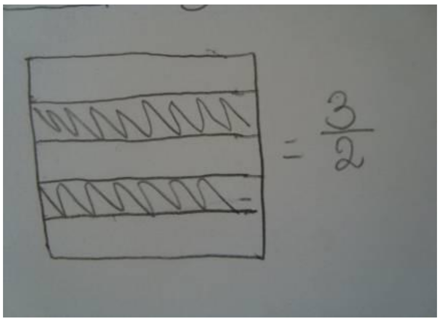


Fig. 9 – Reg. aluna da Lorrainy - A3

Registros da aluna Lorrainy: *Temos* $\frac{3}{2}$, indicando na figura, duas partes pintadas e três não pintadas.

Como comenta a aluna, dividir é repartir uma quantidade e, como algumas vezes, não é possível distribuir uma mesma quantidade para todos, em alguns casos, a divisão tem zero e em outras não. Sobre porcentagem já estudei, mas não lembro uma coisa.

Nestes três casos (aluno Tião-A1, aluno Douglas-A2 e aluna Lorrainy-A3) e em outros que veremos em seguida, chama-nos atenção nessa aluna Lorrainy-A3, o fato de que mesmo após estes já terem visto e desenvolvido atividades, envolvendo fração no corrente ano e, em anos anteriores, muitos continuam considerando a parte destacada (pintada ou comida) na figura em relação às que ainda restam ou vice-versa. Ou seja, associam apenas a ideia de razão entre as partes e nem mencionam isto com clareza. Parece também que desconsideram o total de partes em que o inteiro foi repartido. Nesse caso, ainda, a aluna Lorrainy-A3 representa, no numerador, o total de partes não pintadas e, no denominador, a parte pintada em destaque da fração, mas suas palavras parecem indicar que queria mencionar a fração como razão oposta. Ainda nos intriga muito isto ter ocorrido novamente, em 2010, pois estes alunos participaram do estudo exploratório, em setembro de 2009 e já tínhamos percebido este tipo de confusão entre as interpretações de fração como parte-todo e fração como razão. Pensávamos que nossos diálogos com os alunos e as explicações que tínhamos feito os tivessem auxiliado a compreender os significados associados em casos de fração, comparados como parte de um todo e casos de fração com o significado de razão entre partes. No entanto, as dúvidas persistiram, como mostra o desenho da aluna Lorrainy-A3.

Aluno Dominguinho-A$_9$: Descreve que fração é uma forma de repartir uma quantidade em pequenas quantidades. Ao representar no desenho, ela descreve:

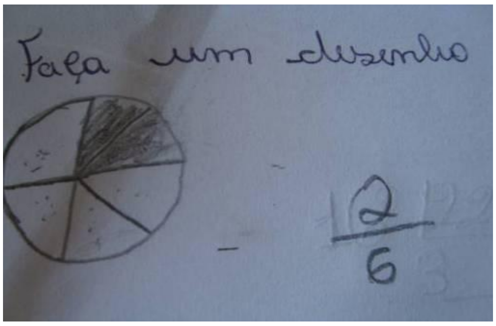


Fig. 10 – Reg. do aluno Dominguinho-A9

Registros do aluno Dominguinho: *Como podemos ver o desenho foi repartido em 6 partes iguais e 2 foram pintadas com o lápis, restando ainda 4 partes a serem consumidas na figura, logo temos a representação fracionária* $\frac{2}{6}$.

O aluno comenta que divisão é o ato de repartir certa quantidade em partes menores. Sobre porcentagem, não recorda muita coisa, a não ser que, em uma mercadoria podemos obter, por exemplo, desconto de 5%, 10%,..., mas nunca 100% de desconto.

Aluno Vieira-A_{11}: O aluno descreve que uma fração representa um pedaço de alguma coisa, uma quantidade. (Nossa interpretação: Parece que relaciona a fração com a ideia de parte-todo, quando diz que representa um pedaço de alguma coisa. No entanto, ao representar no desenho, podemos perceber mais uma interpretação da parte pintada (retirada), para as partes não pintadas (não retiradas). Ou seja, usou como outros colegas, a ideia de fração como razão entre as partes, registrando 1/3. E não relacionou nada com a convencional ideia de fração como parte-todo, que aqui seria 1/4).

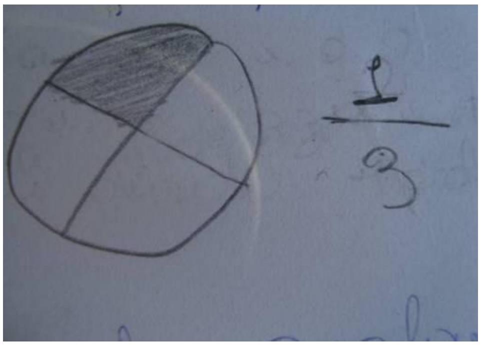


Fig. 11 – Registro do aluno Vieira-A11

Registros do aluno Vieira: *Temos uma figura repartida em 4 partes iguais e 1 já foi consumida, como vemos no desenho, restando ainda 3 pedaços. Indica a representação fracionária* $\frac{1}{3}$ para indicar a ilustração apresentada.

O aluno afirma que dividir não é muito fácil e que tem dificuldade. Em algumas contas, o valor que se pretende obter ao dividir um número por outro não dá uma quantidade igual, por isso sobra resto. Sobre porcentagem não sabe descrever, porém recorda que já estudou um pouco.

Aluno Lopes-A$_{13}$ e **Aluno Dudu-A$_{19}$:** Os alunos afirmam que uma fração é uma parte de um número e que indica quantas vezes o inteiro foi repartido (dividido). Ao representar fração no desenho, ambos utilizam um círculo repartido em cinco partes, como descrito abaixo:

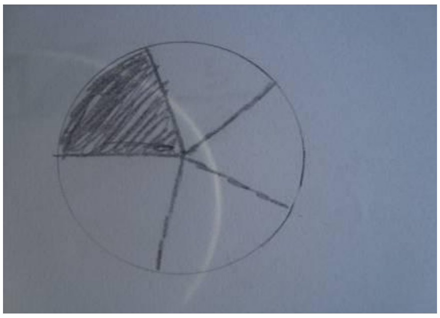


Fig. 12 – Reg. do aluno Lopes-A13

Registros do aluno Lopes: *Temos uma figura repartida em 5 partes iguais em que somente 1 foi pintada. Como apenas as outras 4 partes não foram pintadas, temos a fração* $\frac{1}{5}$. (Interpretação: Esse aluno responde de forma convencional com a ideia de fração como parte-todo e usando esse símbolo visual do círculo. Respondeu de forma correta com essa interpretação).

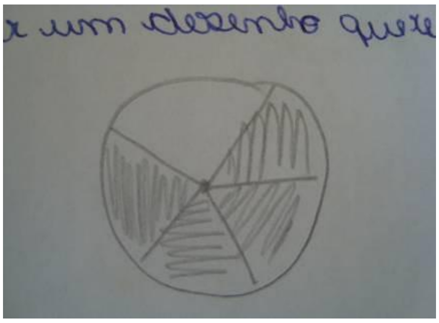


Fig. 13 – Reg. do aluno Dudu-A19

Registros do aluno Dudu: *Temos uma figura repartida em 5 partes em que 4 partes foram pintadas e 1 não. Podemos representar a parte que não foi pintada pela fração* $\frac{1}{4}$. (Interpretação: O registro desse aluno mostra que ele estava pensando em razão para comparar as partes pintadas e não pintadas. No entanto, na parte final de seu registro não deixa claro que estava comparando a parte não pintada para as outras partes pintadas. Ficamos sem saber, se ele estava utilizando as duas interpretações ou não).

Como podemos verificar, o aluno **Dudu-A$_{19}$**, ao representar a fração correspondente à situação representada (parte restante), não considera no denominador o total de partes em que a figura foi repartida e sim a parte consumida. Deixando-nos entender que interpretou como a razão entre a parte não pintada para o total de partes pintadas. Pensou de modo semelhante a vários de seus colegas.

Ao descrever sobre divisão, os alunos afirmam que, em uma divisão, sempre existe os termos dividendo, divisor, quociente e o resto, e para que a divisão não tenha resto é preciso que o divisor seja um número divisor do dividendo. Já sobre porcentagem, os alunos descrevem como sendo outra maneira de representar uma quantidade, e que, embora já tenham estudado, não sabem bem o assunto.

Aluno Fred-A$_{14}$, Aluno Júlio-A$_{18}$, **Aluna Cadma-A$_{20}$**, **Aluno Luiz-A$_{21}$** e **Aluna Fernandes-A$_{23}$:** Os alunos, a seguir, respondem essa questão de forma semelhante. Eles afirmam que uma fração serve para repartir um todo em partes menores, serve para verificar quantas fatias uma pizza será repartida para um grupo de pessoas, etc. Representando no desenho cada situação:

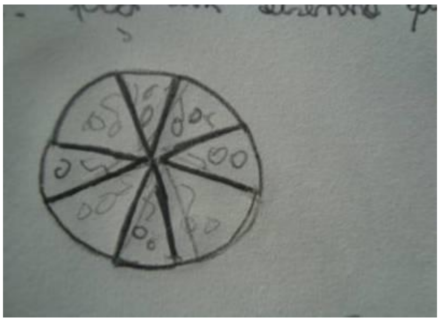


Fig. 14 – Reg. do aluno Fred-A14

Registros do aluno Fred: *No desenho, temos uma pizza grande que, geralmente é vendida por R$ 22,00, mas que nas terças e nas quintas-feiras é vendida por R$ 19,00. Se quatro pessoas forem comer a pizza, cada uma terá, pelo menos, dois pedaços para cada um.*

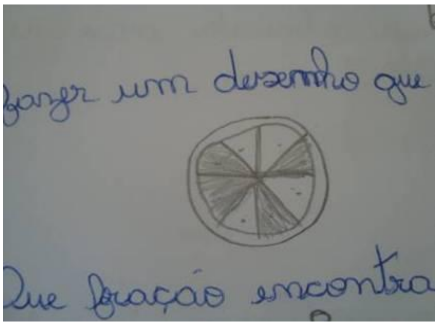


Fig. 15 – Reg. do aluno Júlio-A18

Registros do aluno Júlio: A pizza foi repartida em 8 partes, mas 4 partes já foi consumida 4/8, restando outros 4 pedaços.

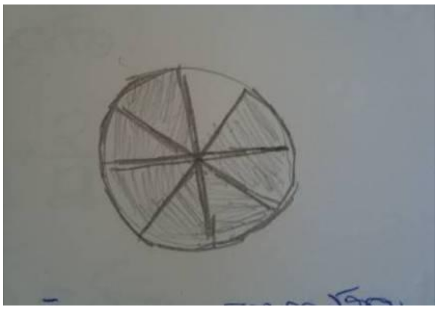


Fig. 16 – Reg. da aluna Cadma-A20

Registros da aluna Cadma: A pizza foi repartida em 8 partes, mas só resta 1 na mesa, portanto, a parte que resta corresponde a 1/8 da pizza.

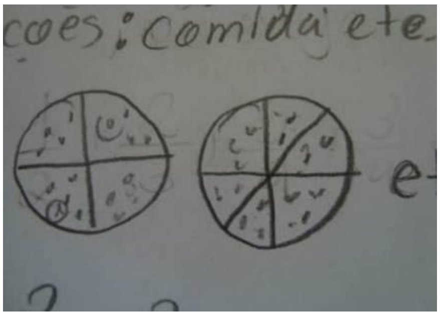


Fig. 17 – Reg. da aluna Fernandes-A23

Registros da aluna Fernandes: Nesse caso, temos duas pizzas uma é a pequena, tem 4 pedaços e é vendida por R$ 14,00, a outra é a média, um pouco maior e tem 6 pedaços, ela é vendida por R$ 18,50.

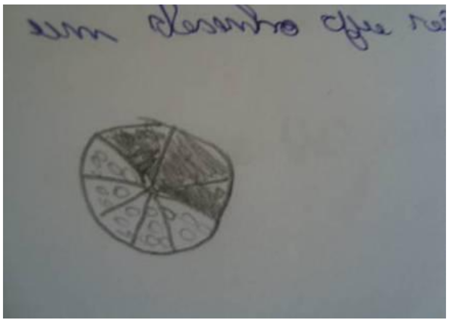


Fig. 18 – Reg. do aluno Luiz - A21

Registros do aluno Luiz: *Como o aluno* ***Fred-A_{14},*** *representa uma pizza repartida em 8 partes, destacando 4 partes consumidas e outras 4 partes que ainda restam. Ao representar, utilizando a fração 1/4*, descreve esta, representando a parte que ainda resta da pizza.

Os alunos afirmam que, em relação às quatro operações, a divisão é a mais difícil e, geralmente, é a operação em que mais cometem erros. A divisão ajuda as pessoas a repartir as coisas, como, por exemplo, a pizza, entre outros. Sobre porcentagem, afirmam já terem estudado. Contudo, entenderam muito bem. Sabem que é importante e que é muito utilizada no comércio.

Aluno Bruno-A_{15}: O aluno descreve que fração é um número sobre outro número (numerador e denominador), e que o numerador representa a parte retirada na figura, ou do bolo. Após utilizar a representação abaixo, descreve:

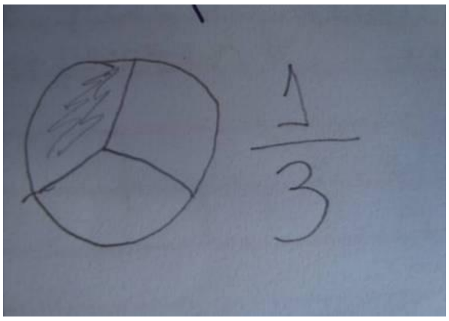


Fig. 19 – Reg. do aluno Bruno - A15

Registros do aluno Bruno: *No desenho temos um bolo que foi repartido em 3 partes, em que 1 já foi consumida. Assim, podemos representar a fração 1/3*.

O aluno descreve que, como o próprio nome diz, divisão é dividir, podemos dividir uma coisa, um objeto, etc. Já porcentagem serve para cobrar juros por alguma coisa que foi paga com atraso.

Aluno Lobo-A_{16} e **Aluna Moreninha-A_{17}:** Os alunos descrevem que uma fração representa uma quantidade repartida (dividida). Representando desenhos semelhantes e justificando suas respostas de modo também semelhantes, como podemos verificar no desenho abaixo:

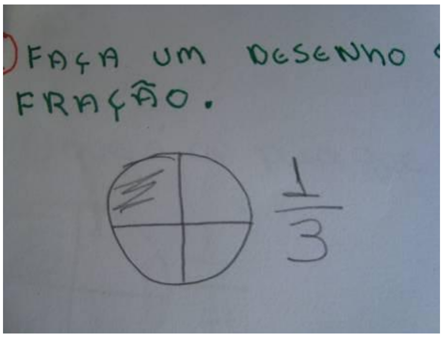


Fig. 20 – Reg. do aluno Lobo-A16

Registros do aluno Lobo: *No desenho, temos um círculo dividido em partes, nele 1 parte foi pintada e as outras 3 não foram pintadas. Assim, podemos representar a fração, como sendo 1/3*. **Interpretação:** Pensa na razão entre as partes pintadas e não pintadas, como alguns de seus colegas fizeram.

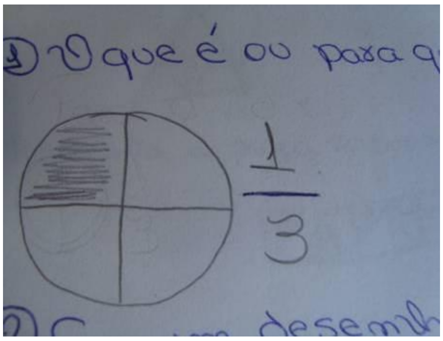


Fig. 21 – Reg. da aluna Moreninha-A17

Registros da aluna Moreninha: *O desenho representa uma figura repartida em 4 partes, só que 1 já foi retirada e as outras 3 permanecem, assim temos a fração 1/3*. **Interpretação:** Também pensou na ideia de razão entre as partes retiradas e as que permaneceram.

Afirmam que dividir é repartir, distribuir entre as pessoas, uma herança a ser repartida, por exemplo. A porcentagem é utilizada no comércio, determina o preço das coisas.

Aluno Dudu-A19: O aluno descreve que fração é um número sobre outro número (numerador e denominador), e que o numerador representa a parte retirada na figura ou do bolo. Após utilizar a representação abaixo, descreve:

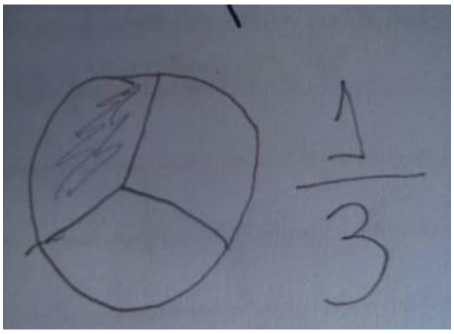


Fig. 22 – Reg. do aluno Dudu-A19

Registros do aluno Dudu: *No desenho, temos um bolo que foi repartido em 3 partes, mas que 1 já foi consumida. Assim, podemos representar a fração1/3*.

O aluno descreve que como o próprio nome diz divisão é dividir, podemos dividir uma coisa, um objeto, etc. Já porcentagem serve para cobrar juros por alguma coisa que foi paga com atraso.

Aluno Nego-A$_{33}$: Como descreve o aluno, as frações indicam uma quantidade em que o todo foi repartido. Onde em alguns casos não tem resto, ou melhor, apresentam resto zero, pois a divisão foi exata. Ao solicitar que descreva em forma de desenho, o que se entende por fração, representa:

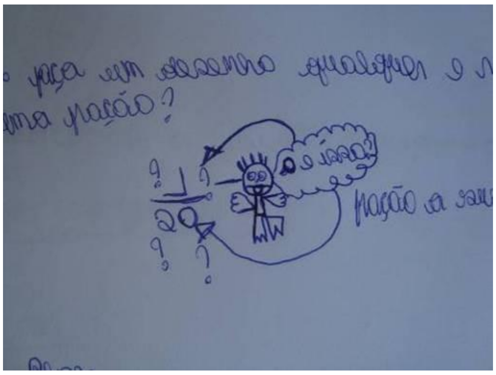


Fig. 23 – Reg. do aluno Nego - A33

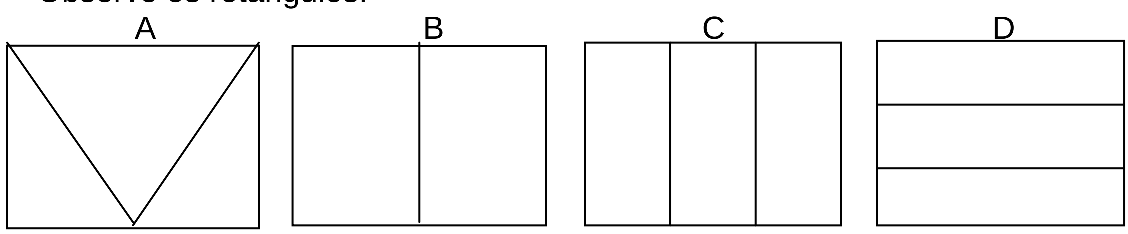
Registros do aluno Nego: *Sei que a fração assusta como também outros conteúdos de matemática.*

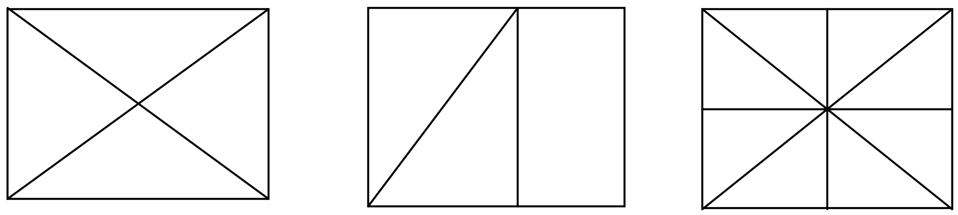
Ao descrever sobre a divisão, relata que nos permite saber quantas vezes uma determinada quantidade cabe em outro e que a porcentagem, também expressa uma quantidade.

Dos trinta e três alunos que estiveram presentes na aula, tivemos soluções bem semelhantes aos exemplos que trouxemos aqui, em que definem ou usam palavras que parecem representar fração com o significado de parte-todo. Porém, em seus desenhos representam fração e falam sobre a mesma como se estivesse com significado de razão, associando o número de partes pintadas para o número de partes não pintadas. Parece que divisão e porcentagem não têm significados claros para esses alunos. As respostas dos alunos foram comentadas com a turma toda e trouxemos outros exemplos de fração associada a tempo (hora).

No dia 30/09/10, trabalhamos nos dois tempos de aula, identificando representações fracionárias nas figuras geométricas. Os objetivos foram: levar o aluno a identificar diferenças e semelhanças entre o número de partes, em que uma mesma figura geométrica foi repartida (dividida); verificar se cada parte em que a figura foi repartida é, aparentemente, de mesmo tamanho (de mesma área); associar a representação da área de cada com sua representação fracionária; e levar o aluno a perceber a utilização da representação fracionária em diferentes situações. A atividade desenvolvida está apresentada a seguir:

1 – Observe os retângulos:





E F G

Responda:

a) Todas as figuras em forma retangular foram repartidas (divididas) em um mesmo número de partes? (   ) sim   (   ) não   Justifique sua resposta..........................

b) Todas as figuras foram repartidas em partes de mesmo tamanho? (   ) sim

(   ) não   Como podemos comprovar...

2 – Observando cada figura responda: Comente como cada figura foi repartida.

Figura A:...

Figura B:...

Figura C:...

Figura D:...

Figura E:...

Figura F:..

Figura G:..

Ao chegar à sala de aula, ficamos surpresos com a atitude dos alunos da turma do 7º ano, porque, pela primeira vez, foi possível perceber que os alunos já se encontravam organizados em sala de aula e em seus devidos lugares, para o início da aula e aplicação das atividades de pesquisa. Logo após deixar o material na mesa da sala de aula e cumprimentar a turma, o aluno Dominguinho-A9 prontificou-se a ajudar e distribuir o material (folha de atividades de pesquisa) para o grupo da sala, para que pudessem desenvolver as atividades da aula.

Marcou-nos a atitude do aluno Dominguinho-A9 e confessamos que, a princípio por conhecê-lo durante as aulas de matemática, imaginávamos que estava ironizando. Porque, inúmeras vezes o próprio aluno sempre manifestava, tanto aos colegas da turma quanto à coordenadora pedagógica da escola e ao professor de matemática da turma (pesquisador), um descontentamento em estar na escola e pelas aulas de matemática. Por várias vezes, no ano anterior e até aquele momento, sempre afirmava e repetia *vocês* (se referindo a todos os professores da escola) *me ensinaram a ter raiva das aulas e de matemática, mas agora, reconheço que mesmo continuando não gostando das aulas desta disciplina, percebo que estou aprendendo a matéria e estou mais feliz, os próprios colegas de sala também já perceberam isso.*

Concordamos que o aluno Dominguinho-A9 distribuísse a folha com atividades para seus colegas. Achamos válido observar essa mudança de atitude do aluno, e talvez nossa prática pedagógica de 2009 e 2010, aliada às atividades envolvidas na pesquisa até esse momento, tenha levado o aluno a refletir sobre si mesmo e seus atos. Nessa aula de 30/09/10, foi importante observar que o próprio aluno reconheceu que, por inúmeras vezes, era um dos primeiros a matar a aula e a se esconder nos ambientes internos da escola. Ou era convidado pelos professores da escola, a se retirar da sala de aula e se dirigir à coordenação da escola, devido ao seu comportamento agressivo e postura inadequada em sala de aula. Também é válido ressaltar que o aluno Dominguinho-A9 tinha ficado reprovado quatro vezes nas séries/anos anteriores e reconheceu que dentre os fatores que o levaram à reprovação, destacava o fato de não gostar nem de estudar nem dos professores da escola. Também relacionou a reprovação, devido à bagunça dele e colegas em sala de aula e às dificuldades na família.

Esse aluno também comentou no inicio da aula de 30/09/10, que *a atividade anterior parecia simples e fácil de resolver, mas como o próprio professor mostrou basicamente todos os alunos cometeram erros. Mesmo que eu não passe este ano, quero aprender. As coisas agora estão entrando em minha cabeça e estou entendendo matemática.* Os comentários feitos pelo aluno nos chamam atenção, pois, nesse momento, solicitamos que nos desse algum exemplo a respeito do que acredita ter aprendido. O aluno Dominguinho-A9 explica que pôde aprender com a atividade anterior sobre fração relacionada com hora. Diz *que embora já soubesse que uma hora correspondiam a 60 minutos e que meia hora é o mesmo que 30 minutos. Somente após os comentários realizados em sala pelo professor, na última aula, é que ele despertou a curiosidade em entender outras associações possíveis. Sabendo que também podemos identificar 5, 10, 15 e 20 minutos de hora com alguma fração da hora.*

Comentários sobre as atividades desenvolvidas na aula de 30/09/10

Apenas dois alunos dos trinta e quatro alunos presentes afirmaram que as figuras foram divididas em um mesmo número de partes. Já os demais perceberam que o número de partes em que a unidade foi repartida é diferente. A partir das respostas dadas no item 1(a), verificamos que:

- Os alunos reconhecem que nem todas as figuras foram repartidas em um mesmo número de partes. E também que em algumas figuras geométricas as partes não são de mesmo tamanho (área).
- Embora afirmem que, em alguns casos, as figuras não foram repartidas em partes de mesmo tamanho, praticamente todos os alunos da turma justificam ser possível representar em cada uma delas a fração correspondente, em relação ao todo na figura.

Seguem, no quadro 6 e em forma de síntese, as respostas dos 34 alunos da turma a todos os questionamentos propostos na folha de atividades de 30/09/10. Observamos pelas respostas que os alunos utilizaram estratégias comentadas por Merlini (2005) de desprezar a conservação de área, ao associar ideia de fração no contexto de parte-todo com figuras geométricas.

Quadro 6 – Respostas dos alunos para as atividades de 30/09/10

Aluno	Todas as figuras foram repartidas em um mesmo número de partes?	Justificativa	As figuras foram repartidas em partes de mesmo tamanho?	Observando as figuras, é correto representar em forma de fração as partes que cada uma foi dividida.
Tião-A_1 e Fernandes-A_{23}	Não	Porque como podemos perceber o número de partes não é o mesmo em cada figura.	Não	Sim
Douglas-A_2	Não	Não porque A, C, D, G, são os únicos que estão divididos iguais, mais o B e o único que esta dividido no meio. Somente a E e a F tem 4 partes.	Não	Sim
Lorrainy-A_3	Não	Porque tem retângulo que foi dividido em 3 partes e tem um que foi dividido em duas. Duas figuras a C e a G são iguais.	Sim	Não
007 -A_4 e Jubileu-A_{24}	Não	As figuras podem ser iguais mais todas possuem detalhes diferentes.	Sim	Sim
Pastel-A_5 e Dias-$_{25}$	Não	Porque têm algumas que estão divididas em três partes, outras em duas.	Não	Sim
Wiliam-A_6	Não	Algumas estão divididas em duas partes, outros em três e quatro partes. É só tampar com o dedo para perceber que as partes são de tamanhos	Não	Sim

Aluno	Todas as figuras foram repartidas em um mesmo número de partes?	Justificativa	As figuras foram repartidas em partes de mesmo tamanho?	Observando as figuras, é correto representar em forma de fração as partes que cada uma foi dividida.
		diferentes.		
Eduarda-A_7	Não	As figuras foram repartidas de forma e número de partes diferentes e de tamanhos também diferentes.	Sim	Sim
Kauan-A_8	Sim	Não foram repartidas em duas, três e quatro partes iguais.	Sim	Sim
Dominguinho-A_9, e Feroz-A_{31}	Não	Umas foram divididas em mais partes, outras em menos partes. Não se encontram de mesmo tamanho.	Não	Sim
Silva-A_{10}	Sim	Pois foram divididas igualmente.	Não	Sim
Vieira-A_{11} e Marcio-A_{26}	Não	Podemos ver que foi repartido em partes diferentes.	Sim	Sim
Mascara-A_{12}	Não	As letras A, C, D, G, são iguais, mais o B e o único que esta dividido no meio. Somente a E e a F tem 4 partes.	Sim	Sim
Lopes-A_{13} e Bibi-A_{32}	Não	Algumas foram divididas em três partes outras em duas.	Não	Não
Fred-A_{14}	Não	Algumas foram repartidas em mais outras em menos partes.	Não	Sim
Bruno-A_{15}	Não	Porque foram repartidos de forma diferente cada um.	Sim	Sim
Lobo-A_{16} e Dj-A_{27}	Não	Os representados com as letras A, C, D, F e G, possuem o mesmo número de partes. Os demais não.	Não	Sim
Moreninha-A_{17}, Nego-A_{33}	Não	Algumas foram repartidas em mais outras em menos partes.	Não	Sim
Julio-A_{18} e Todynha-A_{28}	Não	Observamos que são partes diferentes, apenas alguns tem a mesma quantidade.	Sim	Sim
Dudu-A_{19}	Não	Podemos contar e verificar que uns são diferentes.	Não	Não
Cadma-A_{20}	Não	Vemos que uns foram mais que outros.	Não	Não
Luiz-A_{21}	Não	Alguns foram repartidos.	Não	Sim
Lolo-A_{22}, Ana-A_{34} e Ana Clara-A_{29}	Não	Foram divididos em duas partes, outros em três e quatro partes.	Sim	Sim
Fera-A_{30}	Não	Porque nem todos foram divididos da mesma forma.	Sim	Sim

4.3.1. Refletindo sobre nossa trajetória e redefinindo o percurso

As primeiras atividades das aulas 13 e 14 foram específicas do tema de fração, utilizando representações aritméticas e geométricas. Elas objetivavam compreender as estratégias dos alunos do 7º ano do ensino fundamental durante o processo de aquisição do conceito de fração. Realizamos um breve diálogo com a turma no final da aula para destacar mais uma vez a importância do estudo do tema. Reforçamos que as frações estão presentes em muitas situações do dia a dia, tais como: que filme ele vai assistir daqui a meia hora ou como fazer para convidar três dos seus cinco amigos para jogar vídeo game e ainda se sua mãe poderia fazer aquele bolo especial (duas xícaras e meia de farinha de trigo, meia xícara de leite, três quartos de xícara de chocolate,...). Porque frações podem ser pensadas com significado de partes de um inteiro ou todo (contínuo ou discreto), com o significado de razão entre grandezas, razão entre partes e de razão entre uma parte e o conjunto todo em que se compara alguma coisa, ou proporções. E precisamos lembrar que lidamos com essas relações e significados o tempo todo em situações fora da escola e na escola.

As frações aparecem nas atividades do trabalho, nos cálculos dos salários, nas obras de arte, na fotografia, no cálculo de custo de produtos e serviços, nas escalas, nas pesquisas de opinião, na receita de massa de concreto, na receita de um bolo. Elas podem aparecer de maneira explícita na forma fracionária nas suas diversas representações ou implícita na forma de números decimais. Destacamos no grupo que não importa como apareça a fração e qual simbologia usa, importante é compreender os diversos significados associados a fração e em que contextos foram usadas. Porque se o aluno não tiver o conceito e contextos onde fração é usada, todas essas situações de vida vão parecer sem sentido e talvez causem confusão.

Comentamos que, em sua obra de referência, Caraça (2010/1938) procura descrever o surgimento dos números racionais como a resposta do homem à necessidade de comparar grandezas. Quando a habilidade de contar, que o homem já dominava, não foi suficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que outra. Ideia que, como entendemos, está fortemente associada ao tratamento de grandezas contínuas, pois não podem ser contadas, mas comparadas com um padrão previamente estabelecido, ou seja, uma unidade de comparação. Esse problema, que hoje denominamos “expressar a medida de uma grandeza em relação a um padrão“, teria solução imediata, obtida por um quociente, sempre que a grandeza tomada como padrão coubesse um número exato de vezes na grandeza a ser medida.

Caraça (2010/1938) também afirma que um impasse viria a surgir, porém, nas situações em que a grandeza tomada como padrão não coubesse um número exato de vezes no objeto medido. Nesse caso, tanto a unidade quanto o objeto medido deveriam ser redivididos em partes iguais, e a divisão entre esses números de partes não seria exata, portanto, impossível. A busca de solução para esse problema culminou ao fim de um longo processo, na simples negação dessa impossibilidade, e a divisão indicada, antes considerada impossível, passou a ser vista como a representação de um novo tipo de número, que expressa o resultado da divisão, agora aceito como possível, apesar de não poder ser expresso por um número inteiro.

Concordamos que a compreensão do conceito de fração pelo aluno passa, principalmente, pela compreensão visual da situação do problema e também que muita coisa ficaria mais clara, visualizando o problema. Ou seja, visualizar o problema através do uso da imagem ou de uma figura ou algo manipulável que nos permitisse simular situações, envolvendo frações. Porquanto, o desenho (imagem) é um recurso esclarecedor para qualquer situação-problema, e que ajuda na interpretação e compreensão, evitando a resolução por simples memorização de regras e algoritmos, possibilitando uma reflexão sobre os resultados obtidos. Entretanto, como afirma Lorenzato (2006) um desenho ou algo manipulável não garante que os alunos compreendam ou aprendam um conceito matemático.

Concluímos a aula, reforçando mais uma vez, com os alunos, a importância dos registros deles. Informamos que nessa segunda etapa, buscaríamos aplicar uma sequência de atividades planejadas. E que levaríamos em consideração os estudos, pesquisas e exemplos presentes nos livros didáticos. Dissemos também que pretendíamos relacionar a atividade ao contexto real e à prática, se possível.

4.4. Alguns episódios de ensino de fração

Neste momento, trazemos alguns episódios de ensino e apresentamos alguns resultados ao analisar separadamente algumas situações da intervenção didática. Procuramos ir verificando se, com o trabalho, conseguimos responder os questionamentos iniciais da pesquisa. Descrevemos a atividade desenvolvida pelos alunos e destacamos as resoluções dos alunos Tião-A1, Douglas-A2, Lorrainy-A3, Dominguinho-A9, Vieira-A11, Lobo-A16, Dudu-A19, Fernando-A23, conforme mencionado anteriormente.

Na aula do dia 08/10/10, seguimos trabalhando com os alunos em outras atividades explorando o conceito de fração (Ver anexo III). Conversamos com a turma sobre número racional antes de distribuir a folha com atividades. Reconhecemos que a interpretação de um número racional como parte-todo depende diretamente da habilidade de dividir uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos em subpartes de tamanhos iguais. Ao complementar essa ideia, salientamos que essa situação se apresenta quando um todo (contínuo ou discreto) divide-se em partes 'congruentes' (equivalentes como quantidade de superfície ou quantidade de objeto). Com esta interpretação a fração indica a relação que existe entre certo número de partes e o número total de partes em que o todo foi dividido, com o significado de parte-todo.

Como sabemos, o todo recebe o nome de unidade. Nessa interpretação, olhamos para a fração a/b como uma divisão entre dois números inteiros. O símbolo a/b representa uma relação entre duas quantidades ***a*** e ***b,*** denotando uma operação, isto é, às vezes a/b ($b \neq 0$), é usado como um modo de escrever $a \div b$ (esta é a divisão indicada). A situação aparece quando um ou alguns objetos precisam ser divididos igualmente num certo número de grupos (dividir uma quantidade é separá-la em partes de tamanhos iguais). É a ideia de partilha, de fazer agrupamentos, de divisão indicada. O que significa dizer que, conhecido o número de grupos a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo.

Para Nunes et al. (2005), esse significado está presente em situações em que está envolvida a ideia de divisão; por exemplo, uma pizza a ser repartida igualmente entre 5 crianças. Nas situações de quociente, temos duas variáveis (número de pizzas e número de crianças), sendo que uma corresponde ao numerador e a outra, ao denominador, no caso 1/5. A fração, neste caso, corresponde à divisão (1 dividido por 5) e também ao resultado da divisão (cada criança recebe 1/5).

Em nossa interpretação e análise de soluções dos alunos, utilizamos as duas vertentes citadas acima. Fazemos isso, procurando também identificar os conhecimentos sobre fração que nossos alunos já traziam. Afinal, embora possa parecer simples para nós, entender que a fração é um número que expressa uma quantidade a partir de um valor que é dividido por um determinado número de partes iguais entre si, essa compreensão nem sempre ocorre com a criança ou o adolescente.

Trazemos as soluções dos alunos agrupadas em três situações. Em cada situação, os alunos resolveram as tarefas propostas, usando procedimentos semelhantes. A seguir, comentamos os procedimentos dos alunos para resolver a tarefa abaixo.

Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho. Maria comeu 1/4 do chocolate dela e Paulo comeu 1/2 do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Marque na barra de chocolate quanto cada um comeu e explique.

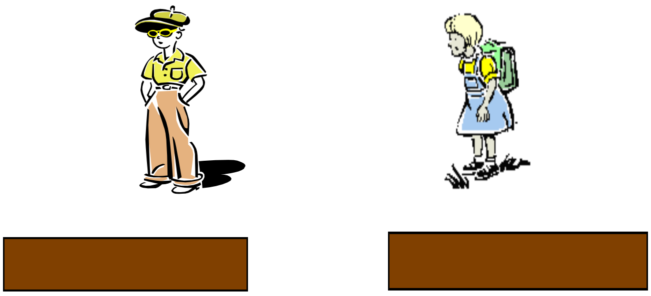
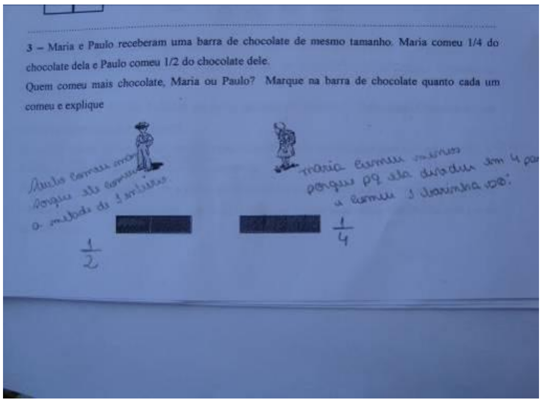


Fig. 24 – Imagem produzida pelo professor para o problema

1ª Situação: os alunos representam e justificam corretamente a atividade



3 – Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho. Maria comeu 1/4 do chocolate dela e Paulo comeu 1/2 do chocolate dele.
Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Marque na barra de chocolate quanto cada um comeu e explique

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

Dentre os procedimentos utilizados pelos alunos que desenvolveram a atividade, alguns demonstraram na figura (barra) a representação indicada. Ao justificar a resposta dada a aluna afirma que Paulo comeu mais chocolate do que Maria, mostrando na figura que Paulo comeu exatamente a metade da barra. Já Maria recebe o equivalente a uma das quatro partes em que a barra é repartida. Logo, Maria comeu menos que Paulo.

Fig. 25 – Reg. da aluna Lorrainy-A3

Eis outras explicações e representações da atividade desenvolvida pelos alunos:

Maria comeu menos que Paulo. O aluno se preocupa em repartir toda a figura, deixa evidente que a preocupação que tem com o número de partes em que o todo é repartido em cada caso e com a área de cada uma das partes.

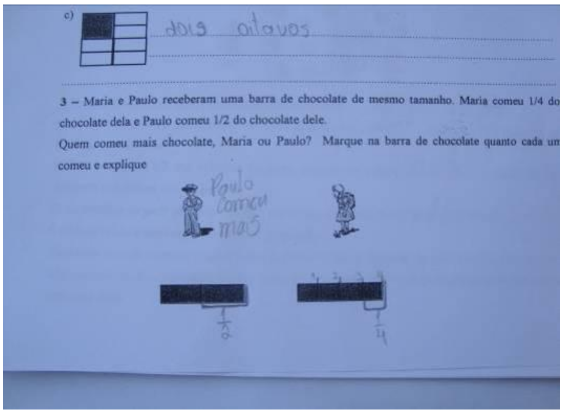


Fig. 26 – Reg. do aluno Dominguinho-A9

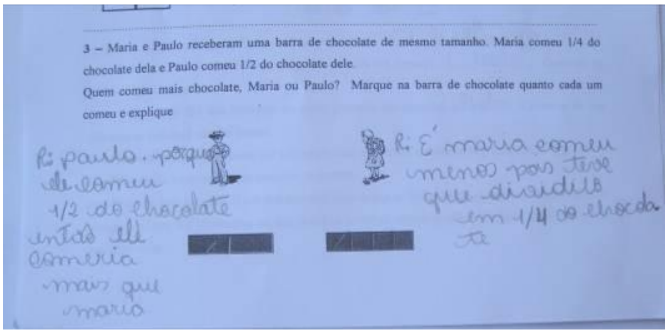


Fig. 27 – Reg. do aluno Lobo-A16

Como descrito pelo aluno, Paulo comeu a metade da barra, então ele comeu mais que Maria.
Maria comeu menos que Paulo, pois ela (aluna) pode verificar que, dividindo em quatro partes de chocolate, ela só come uma.

O aluno descreve que como podemos ver na representação ao lado, Paulo recebe a metade da barra de chocolate e Maria apenas uma das quatro partes em que a barra é repartida, ou seja, a metade da metade.

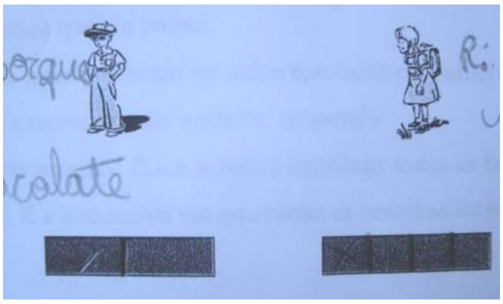


Fig. 28 – Reg. do aluno Dudu-A19

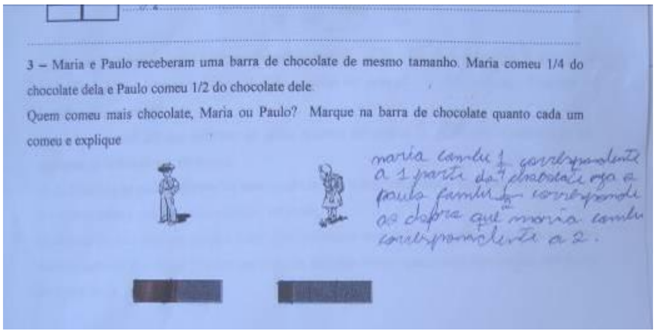


Fig. 29 – Reg. da aluna Fernandes-A23

Maria come um quarto, correspondente a uma parte das quatro partes em que o chocolate foi repartido. Já Paulo comeu a metade da barra, correspondendo ao dobro do que Maria comeu, logo ele comeu o equivalente a duas partes.

2ª Situação: os alunos representam corretamente no desenho, mas não conseguem justificar de forma correta a atividade

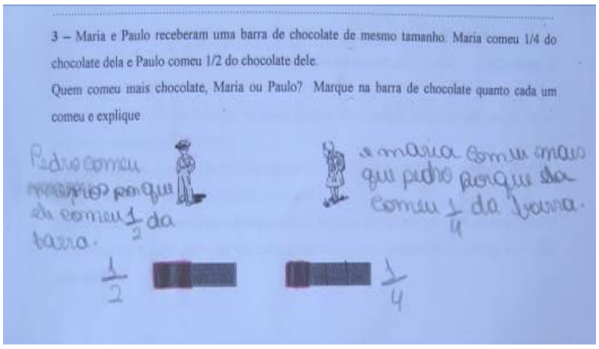


Fig. 30 – Reg. do aluno Tião-A1

Ao representar de forma correta no desenho, a quantidade correspondente a cada quantidade, o aluno não consegue extrair explicação coerente do desenho. Ele segue, afirmando: *Pedro comeu menos porque ele comeu a metade da barra. Maria comeu mais que Pedro,* porque ela comeu um quarto da barra 1/2 < 1/4.

Mesmo representando corretamente, no desenho, cada quantidade indicada, o aluno não justifica corretamente a situação apresentada. O aluno diz: *Paulo comeu a metade por isso comeu menos que Maria.*
Já *Maria comeu um quarto da barra de chocolate mais que Paulo.*

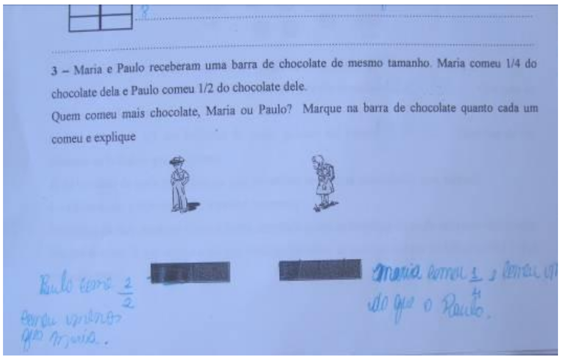


Fig. 31 – Reg. do aluno Douglas-A2

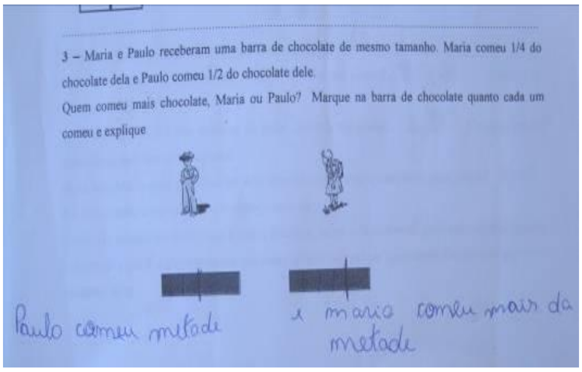


Fig. 32 – Reg. do aluno William-A6

Embora tenha representado no desenho, de forma correta, a quantidade correspondente para Paulo e Maria, o aluno não consegue justificar adequadamente. Segue descrevendo: *Paulo comeu a metade da barra, já Maria comeu mais que a metade* (Parece que esse aluno está afirmando que Maria comeu mais porque associa ao denominador quatro.).

Descreve o aluno que Paulo comeu a metade da barra de chocolate que equivale a um meio. Já Maria come um quarto da barra, descreve o aluno, corresponde mais do que a metade.

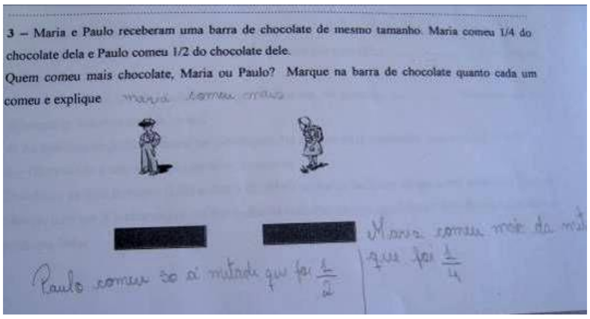


Fig. 33 – Reg. do aluno Vieira-A11

3ª Situação: o aluno não consegue representar e nem justificar, corretamente, a atividade

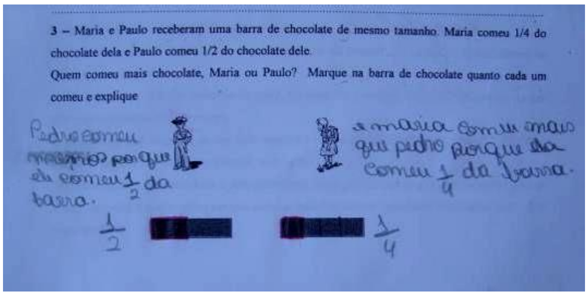


Fig. 34 – Reg. do aluno Silva-A10

Nesta resposta, primeiramente, o aluno substitui Paulo por Pedro, em seguida, afirma que Maria come a maior parte.

Aqui o aluno substitui Paulo por João, e também justifica ter sido *Maria que come a maior parte, uma vez que a metade que "João" come equivale a dois pedaços. Já um quarto que Maria come equivale a quatro pedaços da barra.* (Parece que associam com o número de partes em que foi dividida a barra para decidir como comparar as frações.).

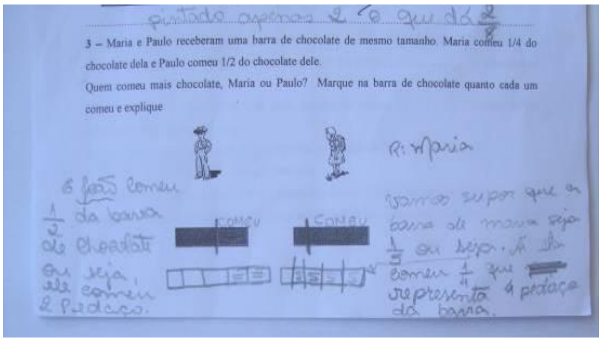


Fig. 35 – Reg. do aluno Lopes-A13

É importante destacar que uma quantidade é considerada contínua, quando o objeto dividido, sucessivamente, em partes não perde a sua característica inicial quando objeto inteiro. Por exemplo: o bolo por mais que se divida, não deixará de ser bolo. É diferente dizermos sobre as quantidades discretas, porque quando divididas em partes podem, em alguns casos, perder a característica inicial. Como no caso de uma flor, porque se dividirmos as suas pétalas deixará de ser uma flor e cada parte vai ser apenas uma pétala de flor.

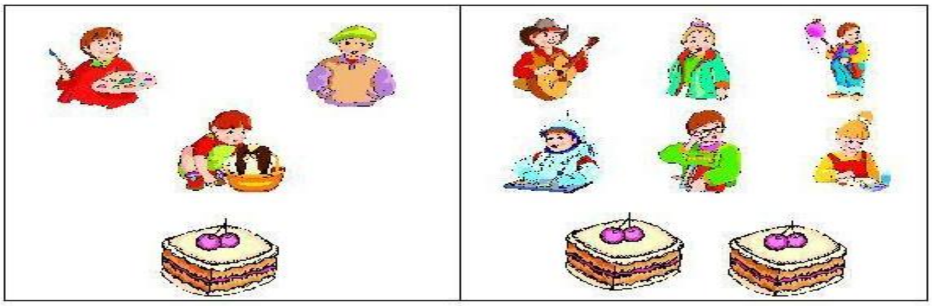
Nunes et. al. (2005) salientam que, apesar da lógica subjacente a quantidades contínuas e discretas serem muito semelhantes, as crianças apresentam mais dificuldade nas quantidades contínuas, pois, nesse caso, as diferentes unidades que compõem a quantidade não são percebidas separadamente.

Como vimos, a ideia presente no significado parte-todo é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em ***n*** partes iguais, em que cada parte pode ser representada como 1/n. Assim, assumiremos como significado parte-todo, um dado todo dividido em partes iguais em situações estáticas, na qual a utilização de um procedimento de dupla contagem é suficiente para se chegar a uma representação correta.

No exemplo acima, percebemos que, para o aluno resolver a questão, foi necessário, primeiramente, que ele identificasse o todo, para que, em seguida, pudesse dividir corretamente para cada um (Paulo e Maria) em partes iguais. Depois tinha que efetuar uma comparação entre frações, onde cada fração estava associada com a ideia de parte-todo e, no caso, era um todo contínuo, a barra de chocolate.

Análise da outra questão

Outra atividade proposta está colocada a seguir: Observando as crianças distribuídas em dois grupos, comente sobre cada representação.



A **B**

Fig. 36 – Atividade

a) Fale sobre o que podemos concluir na primeira representação (representação A).

b) Fale sobre o que podemos concluir na segunda representação (representação B).

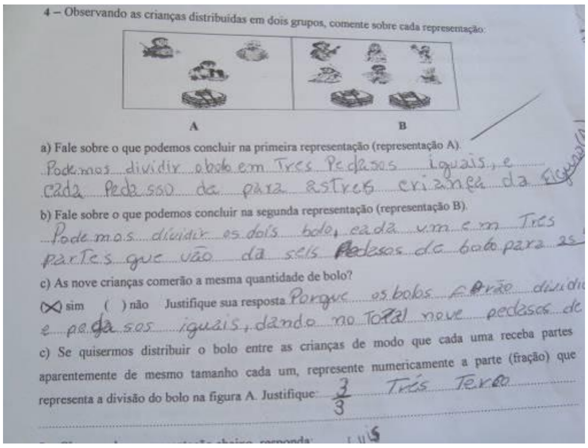
c) As nove crianças comerão a mesma quantidade de bolo?

( ) sim ( ) não Justifique sua resposta.

d) Se quisermos distribuir o bolo entre as crianças, de modo que cada uma receba partes aparentemente de mesmo tamanho cada uma, represente, numericamente, a parte (fração) que representa a divisão do bolo na figura A. Justifique:

Após analisar as respostas dadas pelos alunos, foi-nos possível constatar que os alunos entenderam ser a divisão uma estratégia utilizada para resolver a questão de repartir um bolo para as três crianças. Isto é 1/3 do bolo é o que cada criança vai receber, onde o quociente desta divisão representa a quantidade de bolo que cada criança recebe. Eles percebem que nenhuma criança vai receber um bolo inteiro. O mesmo ocorre na situação com os dois bolos para repartir entre as seis crianças.

Elas devem perceber também as situações de equivalências entre as duas situações envolvidas.


4 – Observando as crianças distribuídas em dois grupos, comente sobre cada representação:

A B

a) Fale sobre o que podemos concluir na primeira representação (representação A).
Podemos dividir o bolo em Tres Pedasos iguais, e cada Pedasso da para as Tres criança da Figura

b) Fale sobre o que podemos concluir na segunda representação (representação B).
Podemos dividir os dois bolo, cada um em Tres partes que vão da seis Pedasos de bolo para as

c) As nove crianças comerão a mesma quantidade de bolo?
(X) sim ( ) não Justifique sua resposta Porque os bolos serão dividi e pedasos iguais, dando no Total nove pedasos de

c) Se quisermos distribuir o bolo entre as crianças de modo que cada uma receba partes aparentemente de mesmo tamanho cada um, represente numericamente a parte (fração) que representa a divisão do bolo na figura A. Justifique: 3/3 Três Terço

Fig. 37 – Reg. da aluna Cadma-A20

A aluna descreve que o bolo apresentado na figura **A** pode ser dividido em três pedaços iguais. Assim, cada criança recebe o equivalente a um dos pedaços. Já no segundo caso (figura B), os dois bolos devem ser divididos em três partes cada um, totalizando seis partes. Logo, cada criança também receberá uma das partes, como no caso anterior. E todas as crianças comerão a mesma quantidade do bolo.

Diante das respostas fornecidas pelos alunos e de nossas leituras, concluímos que a aprendizagem e o uso de números racionais têm motivado várias pesquisas na área da educação matemática. E que o conceito de número racional, por ser complexo, tem gerado dificuldades em sua compreensão e, consequentemente, em suas operações. De acordo com Moreira e David (2004, p. 96), "a aquisição da noção abstrata de número racional parece estar associada a um longo processo de construção e reelaboração, quase que elemento a elemento". Soares, Ferreira e Moreira (1998)[13] *apud* Moreira e David (2004) comentam que:

> Talvez seja interessante ter em mente o processo análogo que ocorre na construção do conceito de número natural: a criança observa, no mundo, certas concretudes, como duas pessoas, dois carros, etc., e vai desenvolvendo a percepção de que uma mesma "coisa" (o que virá a constituir a sua percepção de número dois) está associada a todas as concretudes. [...] O processo de se captar o 2 como algo "livre" da concretude a que se refere originalmente é análogo ao processo de se captar o 2/7, por exemplo, como algo "livre" daquilo a que ele se "aplica" em situações concretas - 2/7 da área de um terreno, 2/7 de uma maçã, 2/7 dos alunos de uma classe, etc. Mas esse desvinculamento do concreto, que está no cerne da construção do conceito de número, não é uma ruptura cabal que desconecta abstrato e concreto. Pelo contrário, o sentido desse desvinculamento é a potencialidade de novos vínculos a novas concretudes. Por outro lado, esses novos vínculos vão proporcionar um aprofundamento no nível de abstração com que é percebido o conceito de número racional (p. 96).

Moreira e David (2004) ainda observam que:

---

[13] SOARES, E.F.; FERREIRA, M.C.C.; MOREIRA, P.C. (1998) **Números racionais e reais:** as concepções dos alunos e a formação do professor. Relatório de pesquisa. Belo Horizonte: SPEC/UFMG.

> [...] a construção do conceito de número racional e o estudo das operações, nesse campo numérico, enfatizam diferentes aspectos e se apóiam em distintos valores, conforme se adote a perspectiva da educação escolar ou da matemática científica. Enquanto esta última funde numa única expressão – a que sintetiza a essência abstrata do conceito, ou seja, aquilo que lhe dá identidade como objeto matemático científico – as várias formas de se pensar concretamente a ideia de número racional, a matemática escolar faz quase o caminho inverso. Como vimos, para o ensino escolar, é fundamental “decompor” a ideia de razão de inteiros nas suas diversas formas de manifestação e explicar as suas diferentes possibilidades de interpretação, uma vez que o processo de construção escolar da noção de número racional desenvolve-se a partir da integração progressiva dos vários subconjuntos. Nesse sentido, o conceito é uma construção em processo, e não um alvo dado e estático, a ser necessária e explicitamente atingido (p. 102).

Como nos foi possível constatar, a maioria das pesquisas sobre ensino e aprendizagem dos números racionais, como Nunes e Bryant (1997), incide o foco no professor, em sua prática, em livros didáticos, em aspectos do currículo ou na dimensão meramente cognitiva do aluno. No caso dessa investigação com a turma de 7º ano, procuramos sempre, não só abordar esses aspectos, mas sobretudo a dimensão afetiva que permeia os processos de uso dos números racionais, bem como os contextos socioculturais nos quais tal dimensão se desenvolve. Pois, como entendemos, essa abordagem é ainda pouco explorada na literatura da educação matemática.

Reconhecemos que as crenças, emoções, sentimentos, atitudes e valores são elementos presentes, fundamentais e interferentes em qualquer situação de ensino e aprendizagem da matemática. Segundo Gómez Chacón (2003, p. 23):

> existe uma relação cíclica entre os afetos e aprendizagem: por um lado, a experiência do estudante ao aprender matemática provoca diferentes reações e influi na formação de suas crenças; por outro lado, as crenças defendidas pelo sujeito têm uma consequência direta em seu comportamento em situações de aprendizagem e em sua capacidade de aprender. Os estímulos que o estudante recebe, ao aprender matemática, geram nele certa tensão e provocam reações emocionais de forma positiva ou negativa. Se o indivíduo depara-se com situações similares repetidamente, produzindo o mesmo tipo de reação afetiva, então a avaliação da reação emocional pode ser automatizada e se “solidifica” em atitudes. Essas atitudes e emoções influem nas crenças e colaboram para a sua formação.

Essa citação leva-nos a uma reflexão sobre o fato de que a identificação de crenças dos alunos em relação à matemática e, em particular, aos números racionais pode nos fornecer informações relevantes para a compreensão de dificuldades de aprendizagem na disciplina e com esses números.

Na aula do dia 21/10, exploramos com os trinta alunos presentes, equivalências de frações em algumas tarefas (Ver anexo III). Os alunos participaram ativamente e alguns foram ao quadro para explicar seus raciocínios. Nesse dia, nós nos preocupamos em realizar a leitura dos objetivos previstos para a atividade com os alunos. Nossos objetivos foram: (1) Reconhecer frações equivalentes como maneiras diferentes de escrever a mesma quantidade; (2) Identificar frações equivalentes; (3) Determinar frações equivalentes a uma fração dada, satisfazendo também condições dadas; (4) Utilizar diferentes registros gráficos desenhos, esquemas, escritas numéricas como recurso para expressar ideias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados; e (5) Compreender que duas frações são equivalentes, quando as duas representam a mesma quantidade. Nesse momento, tivemos o cuidado de lançar mão de diferentes exemplos, a fim de nos auxiliar a rever com a turma o próprio significado de frações equivalentes.

Comentamos com a turma, sabendo que 1m = 100 cm, ao representar no quadro a fração 20/100, questionamos aos alunos se é possível dividir os dois termos da fração (numerador e denominador) por um mesmo número natural, para obter a fração 1/5? Por quê?

Solicitamos a participação da turma para desenvolver a atividade no quadro com a ajuda dos alunos. Um dos alunos foi ao quadro. Ele representa e descreve a atividade da seguinte forma:

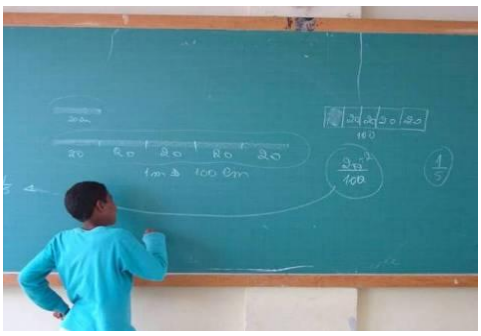


Fig. 38 – Reg. do aluno Dias-A25

Se 1m corresponde a 100 cm, podemos dividir o metro em cinco partes de 20 cm cada uma. Assim, se retirarmos uma das partes, resta ainda outras quatro partes, ou seja, 1/5. Outra maneira de expressar esse valor é dividir ambos os valores, ao máximo, por 2, 4, 5, 10 ou 20.

Como descrito, nosso objetivo com a atividade consistiu em levar o aluno a reconhecer que uma fração pode ser expressa de forma que se torna viável a identificação de um valor que nos permita ao dividirmos ou multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de 0, obtermos uma fração equivalente. Ao identificar frações equivalentes, esperávamos que os alunos utilizassem os procedimentos necessários para determinar frações equivalentes a uma fração dada, satisfazendo a condição real da situação.

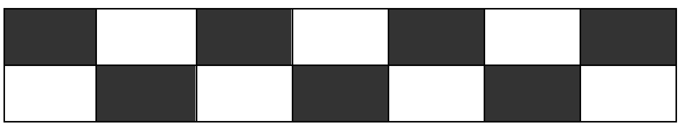
Esclarecemos que, no cotidiano das crianças (e mesmo no nosso cotidiano), o que aparece de frações é, em geral, coisa muito simples, como “meia xícara de leite” e “meia dúzia de ovos”. Se fôssemos nos prender apenas ao que é estritamente parte da vida da criança, teríamos muito pouco a trabalhar. Mas, há aspectos do uso de frações que podemos trabalhar com os alunos, como comparar razões, fazer estimativas e compreender situações simples, envolvendo frações, que não requerem técnicas complicadas.

As atividades exploratórias com frações equivalentes trazem uma ideia importante sobre estas, pois nos permitem comparar, somar e subtrair, além de ajudar a entender como frações se relacionam com razões e proporções, ideias que aparecem em quase todas as partes da matemática escolar. Dizemos que, duas frações são equivalentes, quando elas representam a mesma quantidade, mesmo que estejam escritas de formas diferentes. As atividades que propomos aqui servem apenas como exemplos, a partir dos quais, podemos criar outros exercícios e atividades. Afinal de contas, criar atividades e exercícios é parte essencial da atividade dos professores.

Passamos para os alunos algumas tarefas que comentamos a seguir. Iniciamos trazendo soluções dos alunos para a tarefa abaixo.

Dada cada representação abaixo descrita, represente duas frações equivalentes que satisfaçam cada caso:

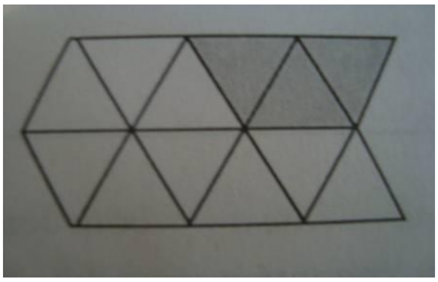
a) _______ ou ________



b) 25 cm de 01 metro = _____ ou ___ e) 45 min. de 01 hora =______ ou ______

c) 250 ml de 01 litro = ____ ou _____ f) 25 cm de 75 cm = _____ ou _____

d) 20 segundos de 01 minuto = _______ ou ________

g) 

____ou ____

Fig. 39 – Retirada do livro de Santos e Rezende 1996 (pág. 37)

Ao analisar as atividades com os alunos, apontamos ser ainda grande o número de alunos da turma do 7º ano que não consegue representar corretamente a fração representada no desenho. No item ***a*** desta atividade inicial, destacamos as seguintes representações:

- 14/7, nesse caso, entendemos que o aluno considerou o numerador como o número que se refere ao total de retângulos em que a figura foi repartida. E considerou como denominador a quantidade de retângulos que não foi pintada ou associou o denominador com a quantidade de retângulos pintada. Temos duas possibilidades de interpretação: uma foi a que já descrevemos inicialmente; outra interpretação possível seria a de que ele trocou o numerador com o denominador.
- 7/7, nesse caso, o aluno relaciona o número de partes pintadas com o número de partes não pintadas, e que esse aluno está associando a ideia de fração como razão, ao olhar para a representação feita no desenho.

Quanto ao item ***b***, praticamente todos os alunos representaram corretamente a fração correspondente. No entanto, quanto à simplificação, a fim de identificar a fração equivalente, constatamos que muitos alunos não as identificam sob a forma mais reduzida possível, simplesmente dividem numerador e denominador por um valor comum.

Respostas obtidas: 25/100 = 5/20; 25/100 = 25/100; 25/100 = 1/4.

Quanto ao item ***c***, alguns alunos nem conseguiram encontrar duas frações equivalentes. Por exemplo, um aluno colocou apenas 250/100 como sendo a resposta, deixando claro que nem percebeu ou se lembrou ou sabe que 1l corresponde a 1000ml. Outro aluno respondeu simplesmente: 25/1 como resposta e, provavelmente, estava com problemas de compreensão como o aluno anterior. A maioria dos alunos que conseguiu a resposta certa obteve 250/1000 = 25/100, mas parece que não sabem simplificar e achar uma fração equivalente mais simples.

Nesta atividade, apontamos duas dificuldades. Os alunos têm dificuldade em representar corretamente a fração 250/1000, não estabelecendo a relação do litro correspondente a 1000 ml. E os alunos deixam evidentes que desconhecem a simplificação de fração para chegar a uma fração mais simples. Nenhum dos alunos presentes na aula representou corretamente a fração equivalente à 250/1000 = 1/4.

Ao observamos alguns registros feitos pelos alunos no quadro, vemos também que:

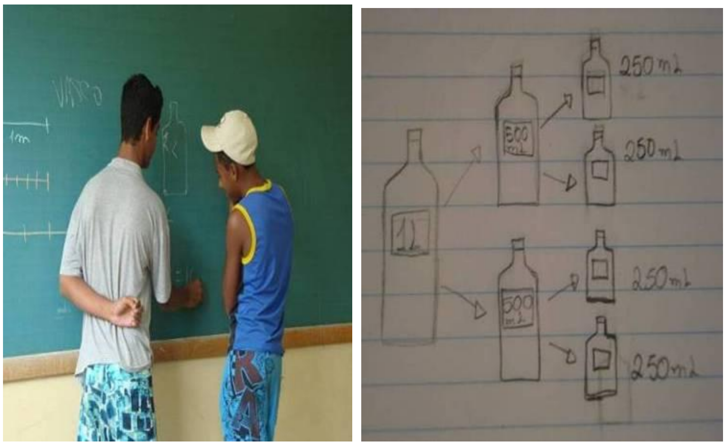


Fig. 40 – Reg. dos alunos Dj-A27 e Jubileu-A24

Em um primeiro momento os alunos não conseguem associar a fração correspondente à quantidade de líquido do recipiente. No entanto, isso não significa que eles não as identificam, ou mesmo, não sabem a quantidade ali representada. Através da ilustração, vemos que através de um processo de divisão sucessiva ele busca uma estratégia para fracionar e representar a quantidade. Mostra que em um litro, encontramos 250 ml quatro vezes, ou seja, 1/4 do litro.

Ao descreverem sobre o item ***d***, praticamente, todos os alunos representaram corretamente a fração 20/60 e nesse caso realizaram o processo de divisão sucessiva corretamente até chegar à fração 1/3. Temos, também, algumas situações encontradas: 20/60 = 10/30; 20/60 = 4/12; 20/60 = 2/6; 20/60 = 1/3.

Chama-nos atenção o item ***e***. Há algumas explicações e procedimentos dos alunos para responder a este item. Vejamos algumas estratégias utilizadas:

$Ex_{1.}$ Alunos Vieira-A11 e Fernandes-A23: Se temos 45 minutos e como sabemos que 1 hora corresponde a 60 minutos, podemos representar em forma de fração 45/60. Parece que esses alunos já conseguem perceber e representar em forma de fração 45 minutos de 1 hora.

Ex_2. Aluna Lorrainy-A3: No relógio marca 59 minutos e em seguida transforma em hora, portanto, representar a fração corresponde 45 minutos de uma hora, basta indicar como sendo 45/59. Parece que Lorrainy tinha internalizado que precisava considerar apenas 59 minutos e não 60 minutos correspondendo a uma hora. Talvez isso explique seu equivoco de registrar a fração 45/59 como sendo a resposta solicitada.

Ex_3. Aluno Tião-A1: Podemos representar a fração 45 minutos de uma hora, indicando na forma de fração 45/60, que também pode ser indicada pela fração 15/20. Este aluno além de representar corretamente a fração 45/60, consegue ainda identificar outra fração equivalente.

Ex_4. Aluno Lobo-A16: Não dá para representar em forma de fração, pois só tem 45 minutos e 1 hora. Portanto, não precisa nem representar a fração 45min/1h. Nesse caso, o aluno nos deixa entender que não consegue perceber que uma hora corresponde a 60 minutos e que assim poderia ter representado a fração 45/60. No entanto, ele tem alguma ideia sobre isso pela resposta que nos deu.

Como nas situações anteriores, os procedimentos e comentários utilizados pelo aluno Dudu-A19 na solução da atividade (Ex_5) nos chama atenção.

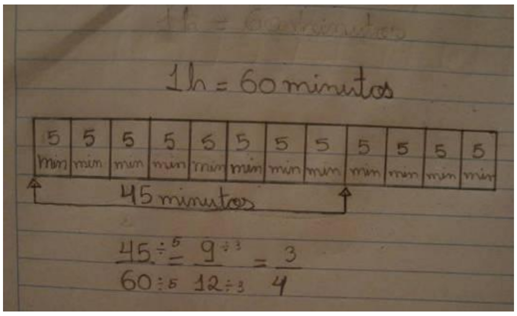


Fig. 41 – Reg. do aluno Dudu-A19

Como podemos verificar, na ilustração, o aluno representa corretamente a transformação de unidades de horas para minutos. Utilizando a representação geométrica, distribui os 60 minutos em intervalos de 5 a 5 minutos. Assim mostra que 45 minutos correspondem a 9 das 12 casas em que os minutos foram divididos. Em seguida, representa a fração 45/60 = 9/12 = 3/4.

Os itens ***f*** e ***g*** do primeiro exercício parecem ter sido os mais fáceis de serem resolvidos pelos alunos, pois praticamente todos os alunos acertaram os mesmos. Dentre as representações utilizadas pelos alunos no item ***f***, temos: 25/75; 25/75 = 5/15; 25/75 = 5/15 = 1/3.

Como nesse dia, solicitamos que os alunos resolvessem alguns itens e fomos analisando as respostas e dando alguns comentários, nós acabamos por corrigir os itens de ***a*** até ***f***, antes de solicitar que os alunos resolvessem o item ***g***. E, talvez, os comentários que fizemos e os diálogos com os alunos sobre as respostas dadas ao item ***a*** tenham auxiliado os alunos para resolver o item g.

Tivemos um alto índice de acertos no item ***g***. Parece que, ao final deste exercício 1, eles resolveram sem dificuldade. Dentre as representações temos: 3/12; 3/12 = 1/4. No entanto, quatro alunos pensam em fração associada com a ideia de razão e estabelecem ainda a relação entre a parte pintada e a parte não destacada, ou associam o total de partes não pintadas para o total de partes da figura. Dentre essas representações associadas com razão, temos: 3/9 = 1/3 e 9/12 = 1/3 e 9/12 = 12.

Seguimos, comentando a última atividade da aula do dia 21/10

A barra abaixo representa a unidade:

Para cada item, desenhe uma barra semelhante à representada acima e pinte nela as partes correspondentes a cada fração.

a) $\frac{1}{2}$ = ... b) $\frac{2}{4}$ = ... c) $\frac{4}{8}$ = ... d) $\frac{8}{16}$ = ...

Observando a fração representada e pintada nas alternativas ***a, b, c*** e ***d***. Diga se, em alguma barra, a parte pintada ocupa:

- menos da metade da barra;
- ocupa a metade da barra;
- ocupa mais que a metade da barra.

Como podemos verificar isso?

Na maioria das vezes, os alunos encontram maior facilidade ao solucionarem as atividades para comparar frações, quando usam alguma figura geométrica. Tendo realizado o desenho em forma de barra e representado as partes correspondentes a cada fração, constataram que todas as frações representam uma mesma quantidade do todo, quando este foi repartido em quantidades diferentes.

Na aula do dia 22/10/2010, desenvolvemos com os alunos atividades explorando fração, utilizando o papel A_4. Nossos objetivos consistiam em determinar a fração representada em relação ao todo. E também, identificar e comparar uma fração. Após distribuirmos a cada aluno uma folha de papel A_4, orientamos o grupo de alunos para que desenvolvessem cada etapa, seguindo nossa orientação. E que registrassem as observações ocorridas em cada etapa e as respostas aos nossos questionamentos que seriam feitos durante o processo. A atividade foi concluída em cinco passos que descrevemos a seguir.

1º Passo: Dobre a folha, exatamente ao meio, em seguida, abra novamente a folha e registre:

a) Quantas partes de tamanhos (áreas) iguais temos agora?
b) Cada uma das partes corresponde a que fração da folha inteira?

2º Passo: Com a folha já dobrada ao meio, dobre pela 2ª vez esta folha ao meio. Em seguida, abra novamente toda a folha e registre:

a) Quantas partes de tamanhos (áreas) iguais temos agora?
b) Cada uma das partes corresponde a que fração da folha inteira?

3º Passo: Com a folha completamente dobrada novamente, dobre pela 3ª vez esta folha ao meio. Em seguida, abra novamente toda a folha e registre:

a) Quantas partes de tamanhos (áreas) iguais temos agora?
b) Cada uma das partes corresponde a que fração da folha inteira?

4º Passo: Como no caso anterior e tendo mais uma vez a folha totalmente dobrada, dobre pela 4ª vez esta folha ao meio. Em seguida, abra novamente toda a folha e registre:

a) Quantas partes de tamanhos (áreas) iguais temos agora?
b) Cada uma das partes corresponde a que fração da folha inteira?

5º Passo: Para finalizar a atividade, tendo a folha totalmente dobrada, dobre pela 5ª vez esta folha ao meio. Em seguida, abra novamente toda a folha e registre:

a) Quantas partes de tamanhos (áreas) iguais temos agora?
b) Cada uma das partes corresponde a que fração da folha inteira?

Com o desenvolvimento da atividade pelo aluno, esperávamos proporcionar um ambiente em que ao desenvolverem a atividade pudessem tirar dúvidas freqüentes, relacionadas às frações, tais como: a comparação entre maior e menor; equivalência e a própria representação fracionária. Os alunos ficaram, de certa forma, surpresos com o que ocorria, ao desenvolver cada etapa da atividade, notando que o todo foi se repartindo em partes de tamanhos cada vez menores. Diante da afirmação dos próprios alunos, vimos que eles compreenderam que quanto maior se tornava o denominador da fração, menor área a fração possuía quando comparada com a folha A4 inteira inicial.

Comentários que fomos ouvindo dos alunos e registramos:

- A folha após dobrar ao meio a área total foi repartida, exatamente, em duas partes em que cada uma corresponde, exatamente, à metade da área total;
- Realizando mais uma dobra, a área total da folha passa a ser repartida, exatamente, em quatro partes, em que cada uma corresponde, exatamente, a um quarto da área total;
- Realizando mais uma dobra, a área total da folha passa a ser repartida, exatamente, em oito partes, em que cada uma corresponde, exatamente, a um oitavo da área total;
- Após realizar mais uma dobra, a área total da folha passa ser repartida, exatamente, em dezesseis partes em que cada uma corresponde, exatamente, a um dezesseis avos da área total;
- Realizando mais uma dobra, a área total da folha passa ser repartida, exatamente, em trinta e duas partes em que cada uma corresponde, exatamente, a um trinta e dois avos da área total.

A seguir, apresentamos algumas ilustrações do que os alunos foram fazendo durante as diferentes etapas da atividade. Seguindo a orientação inicial de registro, ao realizarem cada etapa muitos eram os comentários e as reações dos alunos eram diversas, como podemos verificar em alguns registros descritos abaixo:

Fig. 42 – Reg. do aluno Tião-A1

Comentários do aluno: *Quanto mais for dobrando a folha, dobra a quantidade de quadrados, retângulos...*

Comentários do aluno: *Quero ver até quantos consigo fazer.*

Fig. 43 – Reg. aluno do Douglas-A2

Fig. 44 – Reg. aluna da Lorrainy-A3

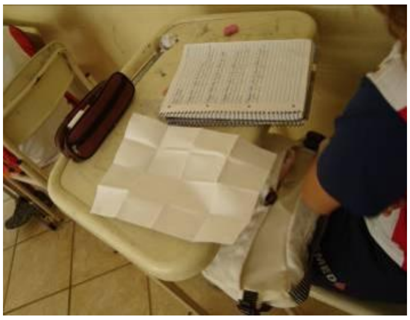
Comentários: *Os quadrinhos estão ficando cada vez menores. Posso pintar, professor, cada vez que dobrar a folha?*

Comentários: *Quantos quadrinhos podem ser formados, professor, ao dobrar toda folha? Isso é matemática ou educação artística?*

Fig. 45 – Reg. do Dominguinho-A9

Comentários: *Isso é bem legal, por que nós não fizemos isso antes, aqui? Dá pra ver, professor, o que você estava explicando no desenho, no quadro. A folha inteira é só uma, mas cada vez que dobramos, estamos encontrando partes cada vez menores da folha, e são iguais.*

Fig. 46 – Reg. do aluno Dudu-A19



Comentários: *Nem preciso fazer mais, já sei que se multiplicar sempre por dois irei encontrar a quantidade de quadradinhos seguintes [na folha A4 a partir das dobras], cada vez menores.*

Fig. 47 – Reg. do aluno Dj-A27

Comentários: *Assim é bem mais fácil de entender uma representação fracionária. Consigo pegar e eu mesma dobrar cada etapa, encontrando os valores. Questionando, porque ninguém tinha mostrado isso antes, diz professor, duvido se alguém ainda tem dúvidas em responder o que significa o numerador e o denominador em uma fração.*

Fig. 48 – Reg. Fernandes-A23

Na medida em que os alunos desenvolviam a atividade, percebíamos que os procedimentos didáticos promoveram um ambiente favorável para que estabelecessem relações amigáveis em sala de aula. Certamente, essa atividade pôde auxiliar muito os alunos no processo de aprendizagem. O momento de registro individual dos alunos foi positivo, pois possibilitou discussão e troca de informações no grupo. Os alunos, realmente, se envolveram na atividade.

Muitas vezes nós, professores, costumamos dizer que os alunos não sabem discutir uma ideia, argumentar e participar de um debate. Diante de nossa prática, acreditamos que essas habilidades não são inatas, precisam ser construídas e requerem um referencial. O professor, através de sua prática, precisa propiciar, em suas aulas, momentos de diálogo e de interação entre os próprios alunos. Observamos também, que a metodologia utilizada pelos alunos propôs que pronunciassem, argumentassem e se envolvessem. Vimos, na prática, como esses momentos de interação social entre os alunos e entre professor/aluno(s) propiciou a construção e reconstrução de conceitos de fração, e de como essa atividade serviu de mediadora no processo (VYGOTSKY, 1991).

No dia 27/10/2010, trabalhamos em dois tempos de aula, construindo com os alunos o Tangram. Levamos uma das lendas do Tangram e contamos outras para eles. Exploramos com esse material também os conceitos de fração. Os alunos foram, em aula anterior, no laboratório de informática da escola para pesquisar sobre o Tangram. Nesse dia, trabalhamos com trinta e quatro alunos em sala de aula.

Nessa aula, desejávamos explorar também conceitos de geometria. Destacamos como objetivos: (a) Proporcionar ao aluno atividades lúdicas e desafiadoras; (b) Familiarizar o aluno com as figuras básicas da geometria; (c) Viabilizar o uso do Tangram na aprendizagem das frações.

Construindo e explorando o Tangram

Dando início a aula, registramos no quadro a palavra **TANGRAM.** Em seguida, questionamos os alunos da turma do 7º ano sobre o significado dessa palavra. Disseram que antes nada sabiam sobre a palavra e que descobriram um pouco, olhando nos sites de internet no laboratório. Mas seguiam sem saber explicar o significado de Tangram. Como imaginávamos, nenhum dos alunos soube nos dizer, ao certo, do que se trata a palavra, tendo apenas o aluno Lopes - $\boldsymbol{A_{13}}$ afirmado com ar de questionamento, *"por acaso é um jogo professor"?*

Iniciamos a aula, distribuindo um material impresso com a lenda do Tangram. Fizemos a leitura compartilhada pelos alunos. Ao final, informamos que iríamos construir o Tangram para continuar estudando frações com esse material.

4.4.1. O uso do Tangram no aprendizado de frações

O Tangram é um quebra-cabeça chinês, de origem milenar, formado por sete peças, a partir de um quadrado. Ao contrário de outros quebra-cabeças, ele é formado por apenas sete peças com as quais é possível criar e montar cerca de 1700 figuras entre animais, plantas, pessoas, objetos, letras, etc. A regra desse jogo consiste em usar as sete peças em qualquer montagem, colocando-as lado a lado sem sobreposição e sempre se tocando.

O Tangram é um recurso didático que pode auxiliar o professor na composição e decomposição de figuras planas, cálculos de perímetros e áreas de formas geométricas planas, além de ângulos (DOMINGOS, 2010). É uma forma concreta de apresentar o conceito de geometria e de fração ao educando. A manipulação desse objeto concreto, de forma planejada, pode auxiliar no processo de ensino de fração. O emprego desse material e os diálogos sobre algumas tarefas têm o potencial de auxiliar nossos alunos a compreender e talvez a ressignificarem alguns conceitos de frações, tais como: representação, frações equivalentes, adição e subtração.

A LENDA DO TANGRAM

Conta a lenda que um jovem chinês se despedia de seu mestre para fazer uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre lhe entregou um espelho de forma quadrada e disse: Com esse espelho, você registrará tudo o que vir durante a viagem para me mostrar na volta. O discípulo, surpreso, indagou: Mas mestre, como, com um simples espelho, poderei mostrar-lhe tudo o que encontrar durante a viagem? No momento em que fazia essa pergunta, o espelho caiu de suas mãos e quebrou-se em sete peças, como mostra a figura:

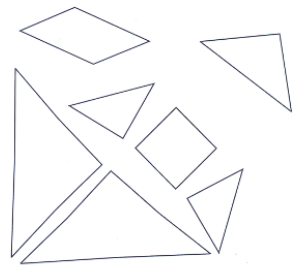


Fig. 49 – Peças do Tangram

Então, o mestre disse: - Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

Divisão dos grupos e entrega do material para a construção do Tangram

Após ter realizada a leitura do texto com os alunos e explicar cada etapa, distribuímos os alunos da sala em oito pequenos grupos, da seguinte forma:

- Seis grupos, sendo cada um composto por quatro alunos.
- Dois grupos, sendo cada um composto por cinco alunos.

Já organizados em grupos, distribuímos para cada aluno uma folha de papel **A4**, informando que, primeiramente, sem utilizar régua, iríamos construir cada um o

Tangram por meio de dobradura. Com a ajuda de um dos alunos da turma, segui orientando e demonstrando cada etapa, que também foi desenvolvida por todos.

1ª Etapa: Com a folha de papel **A4** que receberam, orientamos que escolhessem uma das quatro pontas (vértices) que a folha possui e obtivessem um quadrado, através da dobra ao meio do lado escolhido.

Fig. 50 – 1ª Etapa

Alguns comentários dos alunos: *Colocando a folha em cima da cartolina assim professor, temos a cor da camisa do Vasco, um triângulo preto e outro branco; conseguimos formar um triângulo e um retângulo na folha; ao dobrar a folha dessa forma, porque a ponta não encontra na outra ponta da folha; com a régua faria isso rapidinho,...*

2ª Etapa: Questionamos os alunos para que comentassem o que constataram ter ocorrido na folha ao abrir novamente a folha como também representada abaixo.

Comentários dos alunos: *A folha continua inteira, mas repartida em três partes; temos dois triângulos e um retângulo; temos um traço que ficou no meio separando os dois triângulos e outro separando o retângulo; a parte de cima da folha é maior do que a parte de baixo; temos um quadrado e embaixo um retângulo.*

Fig. 51 – 2ª Etapa

3ª Etapa: Recorte a parte menor da folha de papel **A4**.

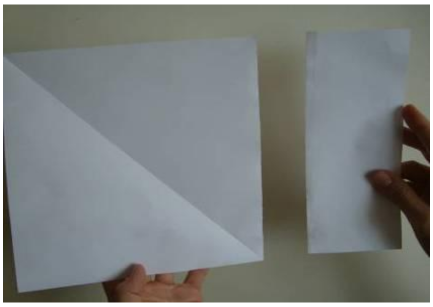


Fig. 52 – 3ª Etapa

Alguns comentários dos alunos: *Agora ficou mais fácil ver o quadrado e o retângulo; esse risco no meio da folha vai servir para alguma coisa; porque do outro lado não tem também uma dobra,...*

Nesse momento, solicitamos aos alunos que observassem as figuras obtidas na folha impressa, que havíamos entregado a todos, no início da aula, pois havíamos concluído o segundo procedimento. Informamos, também, que o risco (marca de dobra) no meio da folha, recebe o nome de diagonal do quadrado, logo concluímos juntos que um quadrado possui duas diagonais.

Orientamos os alunos, utilizando a folha quadrada já marcada na diagonal, para que recortassem ao meio, ou seja, separassem os dois triângulos. Em seguida, solicitamos que escolhessem um dos dois triângulos, dobrassem ao meio e recortassem mais uma vez. Resultando em três partes, sendo elas: 1 triângulo maior e 2 triângulos menores.

4ª Etapa: Orientamos os alunos para que pegassem o triângulo grande e mostrassem o lado maior do triângulo; indicamos com uma pequena marca, a metade do lado maior no triângulo. Com essa informação, solicitamos aos alunos do 7º ano que pegassem a ponta superior do triângulo, dobrando esta parte da folha com o triângulo até encostar ao ponto marcado no meio. Ao dobrar a figura em forma de trapézio percebem que se tocam os vértices opostos. Assim, ao efetuar mais uma marca na folha e recortar, teremos um triângulo pequeno e outra figura que recebe o nome de trapézio.

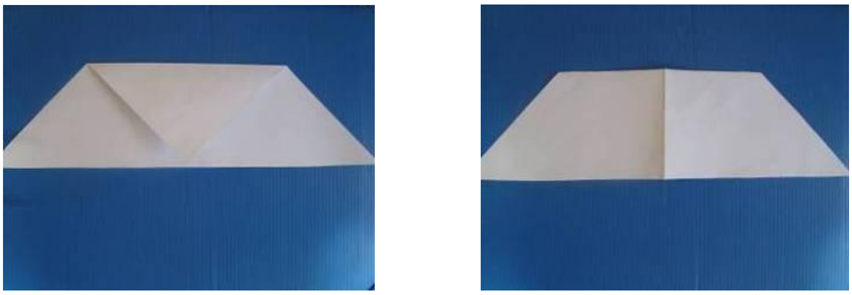


Fig. 53 – 4ª Etapa

Relembramos aos alunos que já temos quatro peças formadas de nosso Tangram, sendo elas: 2 triângulos grandes; 1 triângulo médio e 1 trapézio.

5ª Etapa: Utilizando a figura em forma de trapézio, dobre-a ao meio, volte a dobrar uma das partes e recorte-o de modo a obter um triângulo pequeno, um quadrado e um outro trapézio.

6ª Etapa: Comentamos para os alunos da turma que a única peça que não iríamos utilizar em nosso Tangram era o trapézio, assim orientamos que realizassem uma última etapa, como representamos abaixo.

Fig. 54 – 5ª e 6ª Etapas

Por fim, solicitamos que verificassem todos as sete peças que formam o Tangram e projetamos no quadro da sala de aula um Tangram com todas as etapas desenvolvidas, como descrevemos abaixo:

Resumo das etapas para a construção do Tangram

1ª. Obtenha um quadrado, através da dobradura e recorte.

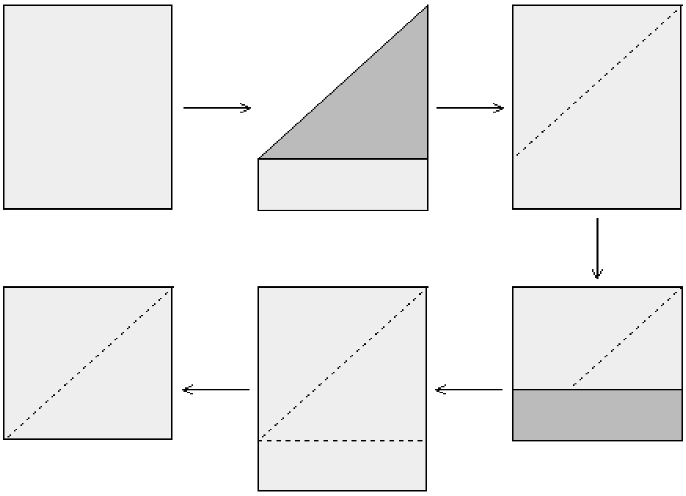


Fig. 55 – Desenvolvimento da 1ª etapa

2ª. Dobre o quadrado ao meio e recorte-o de modo a obter 2 triângulos (**A** e **B**).

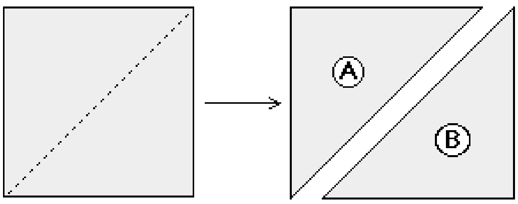


Fig. 56 – Traçando a diagonal e repartindo ao meio a figura

3ª. Dobre o **triângulo A** ao meio para obter 2 triângulos menores (1 e 2).

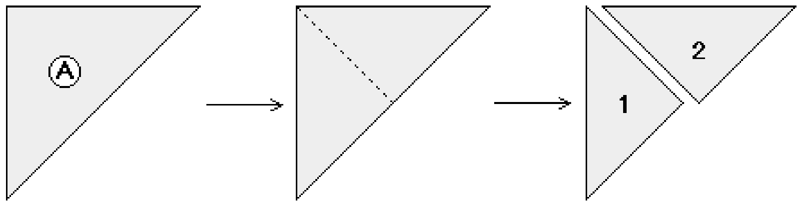


Fig. 57 – Encontrando as peças 1 e 2 do Tangram

4ª. No **triângulo B**, marque o meio, dobre o vértice oposto e recorte-o.

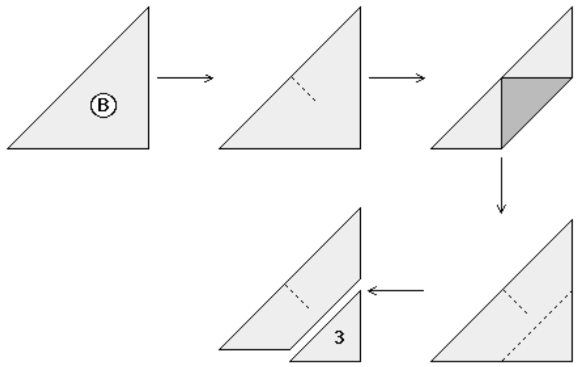


Fig. 58 – Encontrando a peça 3 do Tangram

5ª. Dobre o trapézio ao meio, volte a dobrar uma das partes e recorte-o.

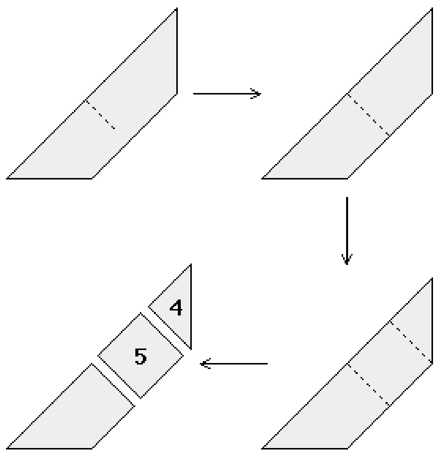


Fig. 59 – Encontrando as peças 4 e 5 do Tangram

6ª. Dobre o trapézio e recorte.

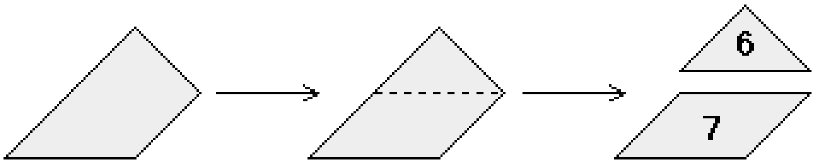


Fig. 60 – Encontrando as peças 6 e 7 do Tangram

TANGRAM

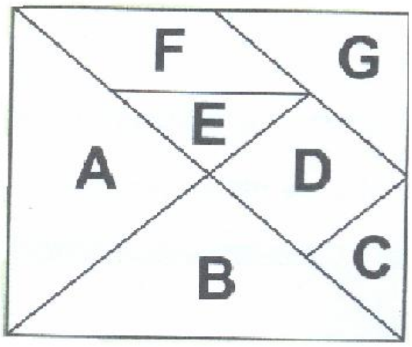


Fig. 61 – Tangram

Como já estávamos na 2ª aula, projetamos também algumas figuras, abaixo representadas, que foram construídas pelos alunos da turma, distribuídos em pequenos grupos.

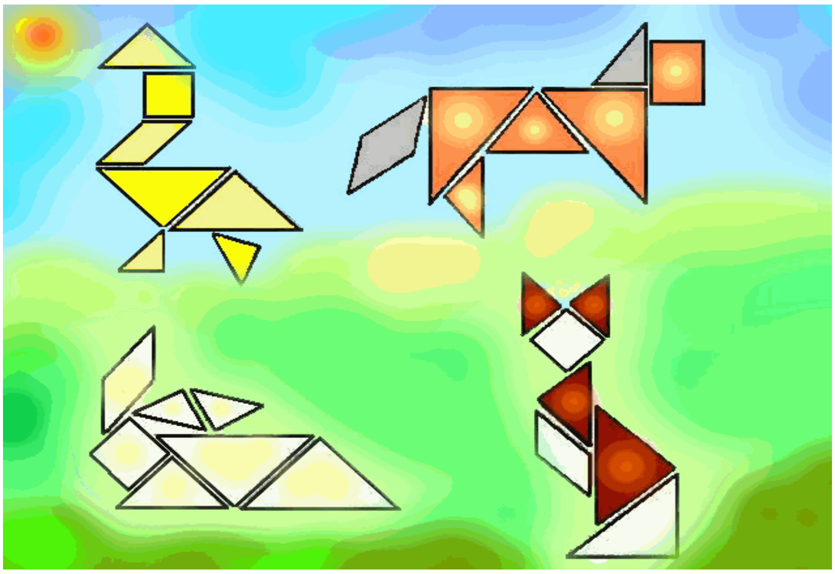


Fig. 62 – Figuras com Tangram

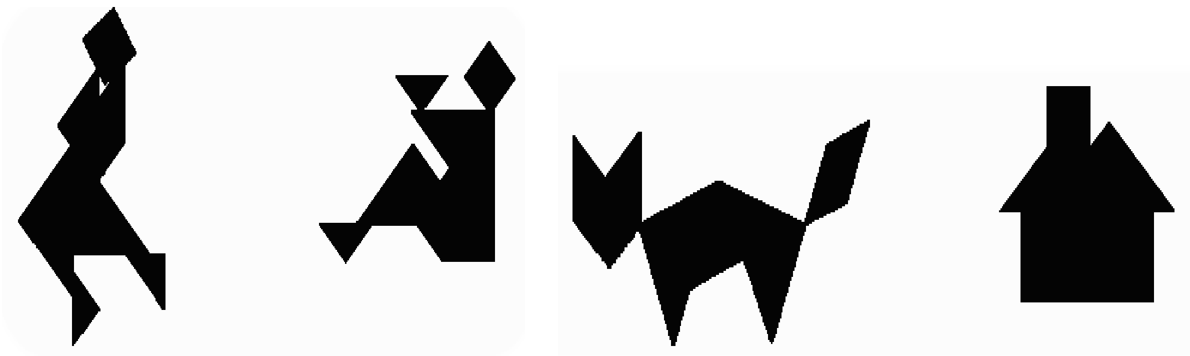


Fig. 63 – Figuras com Tangram

Encerramos as duas aulas desse dia, deixando como atividade a ser desenvolvida em casa e a ser comentada na próxima, os seguintes questionamentos:

1. Quais são as maiores peças no Tangram?
2. Quais são as menores peças no Tangram?
3. Quantas vezes a peça **A** cabe no Tangram?
4. Quantas vezes a peça **A** cabe na peça **B** do Tangram?
5. Quantas vezes a peça **E** cabe na peça **G**?
6. Existem peças de tamanhos (áreas) iguais? Se a resposta for sim, quais?
7. Que fração do Tangram representa a peça **A**?
8. Junte as peças **A** e **B,** que fração elas representam no Tangram?

Na aula do dia 29/10/10, trabalhamos com as respostas dos alunos aos questionamentos que tinham ficado para casa. Sempre iniciamos a aula cumprimentando todos os alunos da turma e solicitando informações se todos estavam presentes. E, nesse dia, não foi diferente. Nesse diálogo inicial, constatamos haver 34 alunos na sala e dois alunos haviam faltado à aula, sem identificarmos os motivos.

Ao questionarmos a turma quanto à atividade orientada e encaminhada na aula anterior a ser desenvolvida em casa, todos, sem exceção, afirmaram ter realizado a atividade. Como de costume, percorremos a sala, verificando se, realmente a atividade havia sido realizada pelos alunos. E diferente do ocorrido em outros momentos, todos os alunos haviam realizado a atividade.

Ao nos colocarmos à frente da sala, informamos que gostaríamos da colaboração de todos os alunos. Pedimos que respondesse em voz alta apenas o aluno que fosse solicitado pelo professor. Com a participação dos alunos, realizamos a correção de toda a atividade, demonstrando no Tangram as respostas de cada um dos oito questionamentos:

Questionamento do professor/pesquisador: Quais são as maiores peças no Tangram?
Resposta do Aluno Tião-A1: As maiores peças do Tangram são os dois triângulos grandes.

Nesse momento, combinamos com turma que o Tangram (inteiro a ser considerado), em alguns momentos, seria chamado de quadrado.

Professor/pesquisador: Quais são as menores peças no quadrado?

Resposta do Aluno Douglas-A_2: As menores peças são as peças **C** e a peça **E** do quadrado (Tangram).

Professor/pesquisador: Quantas vezes a peça A cabe no quadrado?

Resposta da Aluna Lorrainy-A_3: A peça **A** cabe quatro vezes no quadrado.

Professor/pesquisador: Quantas vezes a peça A cabe na peça B do quadrado?

Resposta do Aluno Dominguinho-A_9: A peça **A** cabe apenas uma vez na peça **B.** É só colocar uma em cima da outra que é possível ver.

Professor/pesquisador: Quantas vezes a peça E cabe na peça G?

Resposta do Aluno Vieira-A_{11}: Colocando a peça **E** em cima da peça **G** no Tangram, descobrimos que ela cabe duas vezes.

Professor/pesquisador: Existem peças de tamanhos (áreas) iguais? Se a resposta for sim, quais?

Resposta do Aluno Lobo-A_{16}: Sim, existem duas figuras de tamanhos iguais, as peças (A e B) são de mesmo tamanho, e as peças (C e E) também são de mesmo tamanho.

Ao questionarmos a turma, se alguém observou a existência de alguma outra figura (peça) de mesmo tamanho, o aluno Dudu **- A_{19}** respondeu: *Não anotei no caderno professor, mas observando agora cada peça, percebo que as peças A e B ocupam a metade do quadrado, então a medida das duas juntas são iguais a medida de todas as outras peças juntas.*

Aproveitando a colocação do aluno afirmamos ter gostado de todas as observações e colocações feitas até o momento por eles. Em seguida, o aluno Pastel-A_5 afirmou: *Se as peças C e E são de mesmo tamanho, e como afirmamos que co*locando a peça **E** em cima da peça **G** no Tangram, ela cabe duas vezes, então tanto a peça E, como também a peça C correspondem a metade da G.

Como nem todos, os alunos da turma conseguiram acompanhar e entender o raciocínio do colega, solicitei ao aluno que utilizasse as peças de **EVA,** que tínhamos na sala para demonstrar o raciocínio dele. Momento em que os demais alunos comentaram, *muito bem..., pra quem não gostava de matemática e só ficava matando aula, agora está de parabéns.*

Professor/pesquisador: Que fração do quadrado (Tangram) representa a peça **A**?
Resposta do Aluno Dj-A_{27}: Se as peças **A** e **B** ocupam a metade do quadrado, então a peça **A** representa a quarta parte do quadrado.

Comentários do professor/pesquisador com os alunos

Pela participação e respostas dos alunos, sentimos, enquanto pesquisador iniciante, que aquele era o momento certo de trabalhar com eles alguns conceitos de fração parte-todo e equivalência de fração presente nas peças do Tangram. Buscamos criar um ambiente que permitisse ao aluno levantar hipóteses, apresentar seu raciocínio e dar oportunidade para o grupo construir as deduções. Acrescentamos algumas informações e comentários referentes à atividade desenvolvida, como seguem descritos abaixo:

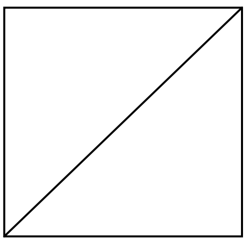


Fig. 64 – A fração nas peças do Tangram

Considerando o quadrado como o inteiro e utilizando a marca da dobra, destacamos que cada uma das partes representa um triângulo. Portanto, temos dois triângulos e cada um representa a 1/2 do inteiro considerado.

Verificar, na figura que, após dividirmos o quadrado ao meio, formando dois triângulos e tendo escolhido um dos triângulos para repartirmos mais uma vez ao meio, estamos com isso dizendo que são necessários quatro triângulos menores para formar o quadrado (o inteiro considerado). Se precisamos de 4 triângulos, então cada um vale um quarto (1/4) do quadrado.

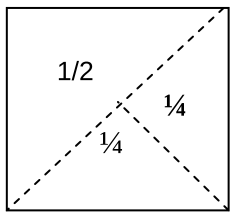


Fig. 65 – A fração nas peças do Tangram

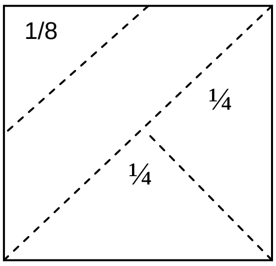


Fig. 66 – A fração nas peças do Tangram

Na 4ª etapa, solicitamos aos alunos que pegassem uma das metades do inteiro (quadrado) e marcassem o ponto médio da base maior. Ao dobrar, de forma que o vértice oposto à base encostasse ao ponto médio encontrado e recortando o triângulo obtido, notamos, ao comparar o triângulo obtido com a peça que representa 1/4 do inteiro, que esse triângulo corresponde a metade do anterior. Concluímos que esse triângulo é a metade de 1/4. Assim, precisamos de 4 peças de 1/4 para formar o inteiro, e são necessárias 8 peças de 1/8 para representar o inteiro.

Mostramos, então, para os alunos que temos quatro tipos de triângulos, como verificamos na figura ao lado, sendo que dois triângulos são idênticos e cada um representa 1/4 do quadrado. Um terceiro triângulo representa 1/8 do quadrado. Agora temos mais um triângulo menor, este que ocupa, exatamente, a metade do triângulo correspondente a 1/8 do quadrado. Logo, o menor triângulo corresponde a 1/16 do inteiro que se encontra sinalizado no quadrado.

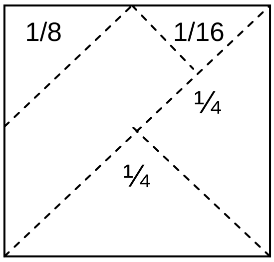


Fig. 67 – A fração nas peças do Tangram

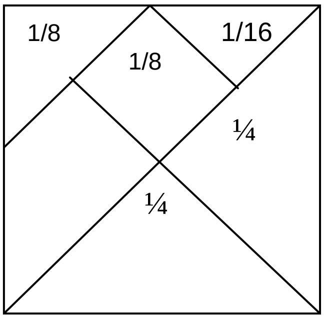


Fig. 68 – A fração nas peças do Tangram

Como realizamos, no início, ao dobrar o quadrado grande ao meio, pudemos obter dois triângulos. Do mesmo modo, observando o quadrado pequeno, percebemos que nele há dois triângulos, representando cada um 1/16 do quadrado. Ao mostrar que dentro desse quadrado cabem 2/16, da mesma maneira que no triângulo que representa o 1/8 também cabem 2/16. Portanto, podemos concluir que o quadrado menor também representa 1/8 do quadrado inteiro.

Por fim, temos, novamente um trapézio retângulo, no entanto, menor ao encostar o vértice da base maior, formando o ângulo reto, com o vértice oposto, de maneira que se obtenha um paralelogramo e um triângulo. Destacando o triângulo, que como o anterior mede 1/16, e novamente fazendo a relação, comparando o paralelogramo com o quadrado menor reconhecemos que este também representa 1/8.

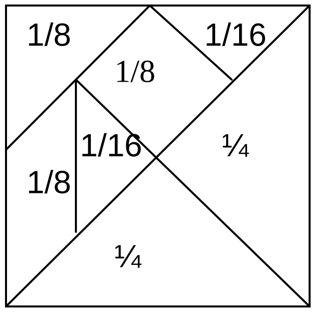


Fig. 69 – A fração nas peças do Tangram

Caminhando para o término da aula, o aluno **A31** sugeriu que pudéssemos construir na próxima aula, o Tangram utilizando **EVA,** como proposta de atividade a ser apresentada na 1ª Mostra de Matemática da Escola Municipal Cantinho do Céu em Guarapari/ES, planejada para os dias 23, 24 e 25/11/10. Por contar com a aprovação de todo o grupo de alunos da sala, definimos o desenvolvimento da atividade para a próxima aula de matemática do dia 03/11/10.

Desenvolvemos a aula de 03/11/10 com o objetivo de criar oportunidades ao aluno de levantar hipóteses, de apresentar seu raciocínio certo ou errado, e dando oportunidades também para que o grupo construísse as deduções. Distribuímos os seguintes materiais para cada grupo (uma folha de EVA, uma régua e uma tesoura). Em seguida, com o data show da escola, projetamos, no quadro da sala de aula, os passos abaixo descritos para a construção do Tangram, utilizando EVA.

Passos para a construção do Tangram

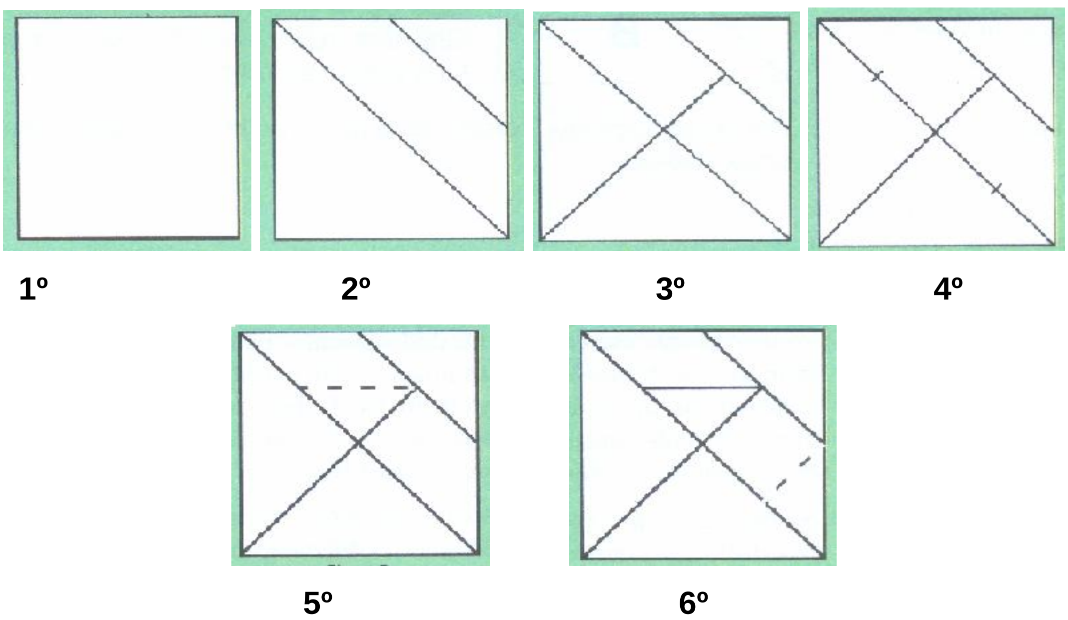


Fig. 70 – Passos para a construção do Tangram

Eis o Tangram pronto, como podemos observar mais uma vez, as peças foram demarcadas, facilitando a identificação.

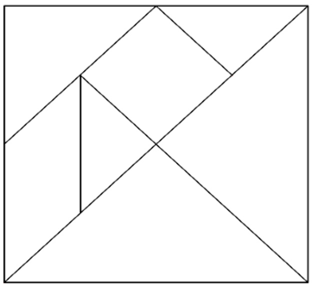


Fig. 71 – Tangram construído

Desenvolvimento e comentários da atividade pelos alunos em grupo

Fig. 72 – Construindo o Tangram no EVA

Nesta foto, vemos dois grupos de alunos reunidos, que após usarem duas folhas de EVA, sendo uma de cor azul e outra de cor vermelha, construíram vários tabuleiros de Tangram. Em seguida, selecionaram o material impresso, contendo a lenda do Tangram. Assim, dividiram o grupo, ficando três alunos responsáveis pela montagem das figuras e outros três para comentar sobre a história do jogo.

Após representarem um pato, um cachorro, um homem, um gato e um coelho no quadro, utilizando as peças do Tangram, selecionaram e definiram, com outros colegas da sala, algumas figuras que consideraram mais simples de serem representadas na Mostra de Matemática.

Fig. 73 – Tangram no EVA

Na experiência de nossa prática docente como professor de matemática no ensino fundamental, observamos que, muitas vezes, o aluno não consegue deduzir nas aulas que a matemática aplicada naquele momento é a mesma aplicada no seu dia-a-dia. Conforme Onuchic e Allevato (2005, p. 213) “Sempre houve muita dificuldade para se ensinar matemática. Apesar disso, todos reconhecem a importância e a necessidade da matemática para se entender o mundo e nele viver.” E para complicar um pouco mais, na maioria das vezes é disponibilizada uma infinidade de atividades iguais para o aluno resolver, mas totalmente fora de seu contexto. Dessa forma, o trabalho com materiais manipuláveis leva o aluno a construir seu conhecimento, despertando curiosidade, incentivando a criatividade e efetivando a aprendizagem porque o aluno passa a ser o sujeito da mesma.

Como descrito inicialmente, no momento em que exploramos o Tangram em sala, os alunos tiveram conhecimento da lenda que envolve o jogo chinês. Antes de trabalharmos com o Tangram, envolvendo o tema fração, dissemos para os alunos que eles poderiam manusear as peças e montar as mais variadas figuras que quisessem. Os alunos iam sempre comemorando em cada figura construída a conquista que obtiam. Conforme Freire (1996, p.26)

> Não temo dizer que inexiste validade no ensino em que não resulta um aprendizado em que o aprendiz não se tornou capaz de recriar ou de refazer o ensinado. [...] nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado [...]. Percebe-se, assim, que faz parte da tarefa docente não apenas ensinar conteúdos, mas também ensinar a pensar certo.

Faz-se necessário destacar que, conforme comenta Dante (2005, p.11),

> É preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela.

A atividade proposta com a construção do Tangram no EVA permitiu, dentre outras coisas, várias deduções e aprendizagens aos alunos do 7º ano. Eles concluíram que quanto maior o numerador, maior a fração, sempre que comparavam frações de mesmo denominador. Sucessivamente, as peças foram sobrepostas até ficar claro para o aluno que quanto maior o denominador menor o número representado pela fração. Nessa reflexão, foram se formando conceitos de frações equivalentes, adição e subtração de frações com mesmo denominador, frações com denominadores diferentes e quando uma fração representa um inteiro.

Na realização de cada atividade de aula, houve a mediação necessária onde coube ao professor/pesquisador circular pela sala, observar o trabalho de cada grupo e responder às suas dúvidas. Nesses momentos de interação e mediação, verificamos que todos estavam trabalhando com muito entusiasmo, ocorrendo troca de ideias e experiências entre eles. Com o mesmo conteúdo de frações, foram iniciadas explorações de outros conceitos com o Tangram, partindo já para a geometria, onde a dificuldade, no início, foi grande.

Vygotsky (1988/1934) salienta que o desenvolvimento dos conceitos ou dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de muitas outras funções como: memória lógica, abstração, capacidade de comparar objetos e de diferenciá-los. A experiência prática mostra que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Nas aulas em que apresentamos o Tangram, construímos e exploramos o mesmo, tivemos a oportunidade de trabalhar com estas funções mentais mencionadas.

Concluímos a aula do dia 03/11/10, informando aos alunos em grupo a importância de não só explorarem as figuras representadas com as sete peças do Tangram na 1ª Mostra de Matemática, mas também a relação existente entre cada peça do Tangram e o estudo de fração, como visto nas últimas aulas. Ao término da aula, comunicamos que, nos dias 24/11/10 e 25/11/10, estaríamos preparando a sala de aula para o desenvolvimento e apresentação da atividade na Mostra de Matemática.

Ao planejarmos e desenvolvermos a aula de preparação das atividades para a Mostra de Matemática, a partir do interesse e da proposta lançada pelos próprios alunos, nós constatamos o quanto os alunos já se encontravam envolvidos e motivados pelas atividades e pelas aulas de matemática. Observamos, também, que os alunos já desenvolviam trabalhos em grupo e socializavam respostas de forma compartilhada. Ou seja, não eram respostas pessoais, mas respostas resultantes da reflexão e do diálogo no grupo, obtidas a partir dos argumentos e compreensões que ocorreram no grupo.

Constatamos que nossos objetivos com cada atividade de pesquisa, envolvendo fração, aos poucos foram alcançados. À medida que novas atividades foram apresentadas aos alunos, mais indícios eles demonstravam que conseguiam associar o conhecimento construído e sistematizado, através das tarefas do dia e do que tinha sido realizado antes. Seguimos com atividades do livro de Santos e Rezende (1996).

A primeira atividade foi retirada da pág. 22 do livro Números: linguagem universal – Projeto Fundão/RJ, (SANTOS; REZENDE, 1996).

1 – Pedro comprou esta caixa de balas: a) Quantas balas Pedro comprou?
b) Cinco quintos das balas de Pedro correspondem a quantas balas?
c) Três quintos das balas são de mel. Pinte de azul a quantidade correspondente às balas de mel.
d) As outras, Pedro vai dar para o irmão. Quantas balas o irmão de Pedro vai ganhar?
e) Que fração do total, o irmão de Pedro recebeu?
f) Quem recebeu mais balas, Pedro ou seu irmão?

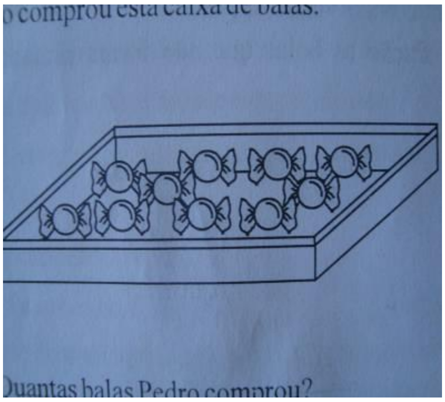


Fig. 74 – Atividade do livro

É importante destacarmos que nem conseguimos analisar tudo durante o estudo. Isso ocorreu em função da inexperiência do professor/pesquisador, e do desejo de dialogar com os alunos e explicar o maior número possível de atividades. Aliado ao excessivo volume de trabalho na época da pesquisa, somente após o término da mesma foi possível tabular e interpretar, por completo, os dados. Abaixo colocamos no quadro as respostas de todos os 34 alunos presentes na aula, nesse dia.

Respostas dos alunos na Atividade 01

Quadro 7 – Respostas dos alunos na atividade 01

Aluno	Nº de balas que Pedro comprou	Cinco quintos das balas	Identificou que três quintos das balas são de mel e pintou de azul	O restante das balas Pedro irá dar ao irmão. Quantas balas ele vai ganhar	Que fração do total, o irmão de Pedro recebeu	Quem recebeu mais balas, Pedro ou seu irmão
Tião - A_1	10	05	3/5	07	7/10	O irmão de Pedro
Douglas - A_2	10	10	06	04	2/5	Pedro
Lorrainy - A_3	10	10	06	04	2/5	Pedro
007 - A_4	10	10	06	04	2/5	Pedro
Pastel - A_5	10	05	03	07	3/7	O irmão de Pedro
William - A_6	10	10	06	04	2/5	Pedro
Eduarda-A_7	10	10	06	04	2/5	Pedro
Kauan - A_8	10	10	06	04	2/5	Pedro
DominguinhoA_9	10	10	06	04	2/5	Pedro
Silva - A_{10}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Vieira - A_{11}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Mascara-A_{12}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Lopes - A_{13}	10	10	06	07	3/7	O irmão de Pedro
Fred - A_{14}	10	05	03	07	3/7	O irmão de Pedro
Bruno - A_{15}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Lobo - A_{16}	10	10	06	04	2/5	Pedro
MoreninhaA_{17}	10	05	06	04	2/5	Pedro
Júlio - A_{18}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Dudu - A_{19}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Cadma - A_{20}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Luiz - A_{21}	10	10	06	04	2/5	Pedro

Aluno	Nº de balas que Pedro comprou	Cinco quintos das balas	Identificou que três quintos das balas são de mel e pintou de azul	O restante das balas Pedro irá dar ao irmão. Quantas balas ele vai ganhar	Que fração do total, o irmão de Pedro recebeu	Quem recebeu mais balas, Pedro ou seu irmão
Lolo - A_{22}	10	05	04	10	3/5	O irmão de Pedro
Fernandes-A_{23}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Jubileu - A_{24}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Dias - A_{25}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Marcio - A_{26}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Dj - A_{27}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Todynha - A_{28}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Ana Clara A_{29}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Fera - A_{30}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Feroz - A_{31}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Bibi - A_{32}	10	05	3/5	07	3/5	O irmão de Pedro
Nego - A_{33}	10	10	06	04	2/5	Pedro
Ana - A_{34}	10	10	06	04	2/5	Pedro

Ao tabularmos todas as respostas dadas pelos alunos, com maior cuidado, nesse momento de registro final da pesquisa, constatamos alguns equívocos desenvolvidos, como ressaltamos nos seguintes registros.

Ao desenvolvemos a atividade, verificamos que os alunos descrevem corretamente o número de balas representadas no conjunto, mas não conseguem estabelecer a relação correta correspondente à fração e ao número de elementos representados (balas). Em seguida, até respondem corretamente, utilizando a fração correspondente a 3/5, como sendo as balas de mel e descrevem serem seis as balas de mel. No entanto, não conseguem identificar corretamente que fração do total as balas restantes representam, nem mesmo quem recebe mais bala, deixando entender que o aluno não consegue compreender com significado a relação existente entre a linguagem fracionária e a quantidade correspondente no conjunto. Isto ocorreu com o aluno Tião - A1.

Identificamos, na tabela, que dois alunos estabelecem corretamente o número de balas representadas no desenho (aluno Douglas-A5 e Aluno Fred-A14). No entanto, não conseguem determinar a relação correta entre: cinco quintos das balas e o número total de balas representadas; três quintos das balas e o número total de balas correspondentes; a quantidade de balas restantes e a fração que esta corresponde do total. É importante destacar que, ao analisar esta e outras atividades desenvolvidas pelo aluno, Fred (A14), é possível ressaltar a evolução de seu aprendizado de fração e um melhor entendimento referente ao tema.

Chama-nos atenção essa aluna Moreninha-A17 pelo fato de desenvolver corretamente, basicamente, toda atividade. No entanto, não consegue assimilar que cinco quintos do conjunto corresponde ao próprio conjunto representado pelas dez balas. Situação que exigiu do pesquisador maior atenção visto que, em muitos casos, os alunos até conseguem determinar, corretamente, a relação existente entre a fração e a quantidade de elementos, correspondente à fração dada. Ou seja, perceber que a linguagem fracionária se constitui como sendo outra maneira de expressar uma quantidade. Por outro lado, mesmo os alunos que conseguem captar, com certa facilidade, essa relação encontram dificuldade ao notar que a quantidade total de elementos de um conjunto também pode ser representada por uma fração que denominamos como fração aparente.

O aluno Lolo-A22 não consegue representar, sem erros, a quantidade de balas correspondentes a cinco quintos. Analisando as suas respostas deixa-nos entender que ele não percebe que, no conjunto composto, por dez balas, podemos obter:

- 1 único conjunto formado por todas as dez balas;
- 2 grupos, sendo cada um composto por cinco balas;
- 5 grupos formados por duas balas cada um dos grupos.

Concluindo essa análise, destacamos também a aluna Bibi (A32) e o aluno A1 identificam o número de balas no conjunto e representam correspondente a fração 3/5 (três quintos) mas, não conseguem estabelecer, corretamente, a relação presente entre a fração e o número de balas do conjunto. Ao analisar o desenvolvimento dos argumentos e a representação dos alunos, sentimos que, em todos esses casos, ao ler a fração os alunos associaram o denominador da fração como sendo a quantidade de balas a ser representada. Não considerando o significado correspondente à fração.

Atividade 02 (página 23)

Observe o desenho. Pinte a parte correspondente a 3/4 do total de bandeiras.

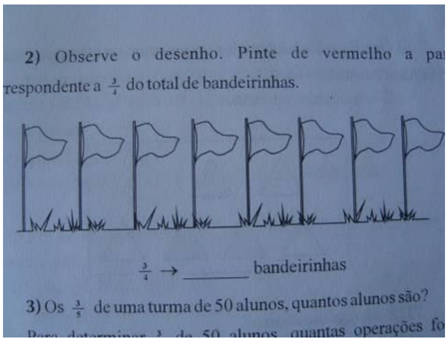


Fig. 75 – Atividade do livro

Respostas dos alunos na Atividade 02

Quadro 8 – Respostas dos alunos na atividade 02

Aluno	Nº total de bandeiras	Três quartos (3/4) do total de bandeiras
Tião - A_1	08	06
Douglas - A_2	08	06
Lorrainy - A_3	08	06
007 - A_4	08	06
Pastel - A_5	08	6/8
William - A_6	08	06
Eduarda-A_7	08	06
Kauan - A_8	08	06
Dominguinho-A_9	08	06
Silva - A_{10}	08	06
Vieira - A_{11}	08	06
Mascara-A_{12}	08	06
Lopes - A_{13}	08	06
Fred - A_{14}	08	06
Bruno - A_{15}	08	06
Lobo - A_{16}	08	06
MoreninhaA_{17}	08	06
Júlio - A_{18}	08	06
Dudu - A_{19}	08	06
Cadma - A_{20}	08	06
Luiz - A_{21}	08	06
Lolo - A_{22}	08	2/4
Fernandes - A_{23}	08	06
Jubileu - A_{24}	08	06
Dias - A_{25}	08	06
Marcio - A_{26}	08	06
Dj - A_{27}	08	06
Todynha - A_{28}	08	06
Ana Clara A_{29}	08	06
Fera - A_{30}	08	06
Feroz - A_{31}	08	06
Bibi - A_{32}	08	06
Nego - A_{33}	08	06
Ana - A_{34}	08	06

Analisando o quadro, verificamos que trinta e dois alunos responderam corretamente a essa questão. Apenas o aluno Pastel-A5 e o aluno Lolo-A22 não conseguiram chegar à solução exata. Podemos, então, inferir que esses alunos já começaram a dominar alguns dos conceitos de frações relacionados a representações em conjuntos discretos.

No dia 11/11/2010, desenvolvemos, a aula em dois momentos, explorando o conceito de fração em conjuntos discretos, empregando as ideias contidas no livro de Santos e Rezende (1996). Em um primeiro momento, devolvemos aos alunos a atividade desenvolvida por eles na aula do dia 29/10, incluindo as atividades 1 e 2 do livro (pág. 22 e 23), tendo como objetivos explorar o conceito de fração em conjuntos discretos e rever com a turma as ideias de múltiplos e divisores. Com a atividade em mãos e tendo a presença na escola da professora Vânia M. P. dos Santos-Wagner, realizamos um debate participativo de cada item previsto nas atividades. Aula que contou com a presença de 34 alunos.

Assim que chegamos à sala e cumprimentamos os alunos, a professora se apresentou para a turma. Ela comentou, em poucas palavras, o trabalho que desenvolve na UFES/ES. Falou, mais precisamente, de orientar-me na realização do trabalho de pesquisa com a turma na escola. Nesse momento, um dos alunos questionou a professora, perguntando, *como a professora orienta e sabe sobre as atividades que o professor/pesquisador desenvolve com a turma, mesmo morando tão longe?* A professora falou sobre os telefonemas semanais e as mensagens de email, como sendo os instrumentos que possui para ficar mesmo a distância, sabendo de tudo que ocorre na investigação na turma. Com isso, a professora comenta um pouco mais sobre o trabalho que realiza junto aos professores de matemática, que ela orienta no PPGE/UFES. Além da presença da professora orientadora na aula desse dia, contamos também com a presença do professor João Bosco (professor de matemática que também trabalha na escola).

Iniciamos a aula devolvendo algumas tarefas dos alunos. Comentamos que iríamos trocar ideias com eles sobre algumas outras e trabalhar com outras atividades também retiradas do livro de Números: linguagem universal redigido por Santos e Rezende (1996) junto com outros professores no Projeto Fundão no Rio de Janeiro.

Atividade 03 - página 23 do Livro Números: linguagem universal, (SANTOS; REZENDE, 1996).

Os 3/5 de uma turma de 50 alunos, quantos alunos são? Para determinar 3/5 de 50 alunos, quantas operações foram necessárias? Quais foram elas?

Respostas dos alunos na Atividade 03

Quadro 9 – Respostas dos alunos na atividade 03

Aluno	3/5 de uma turma de 50 alunos correspondem	Nº de operações necessárias	Quais foram elas
Tião - A_1	20	01	Divisão
Douglas - A_2	15	01	Divisão
Lorrainy - A_3	30	02	Divisão e soma

Aluno	3/5 de uma turma de 50 alunos correspondem	Nº de operações necessárias	Quais foram elas
007 - A_4	30	02	Divisão e soma
Pastel - A_5	20	02	Divisão e soma
William - A_6	05	01	Divisão
Eduarda-A_7	30	02	Divisão e soma
Kauan - A_8	30	02	Divisão e soma
Dominguinho-A_9	30	02	Divisão e soma
Silva - A_{10}	30	02	Divisão e soma
Vieira - A_{11}	20	02	Divisão e soma
Mascara-A_{12}	30	02	Divisão e soma
Lopes - A_{13}	20	02	Divisão e soma
Fred - A_{14}	30	02	Divisão e soma
Bruno - A_{15}	30	02	Divisão e soma
Lobo - A_{16}	20	02	Divisão e soma
Moreninha - A_{17}	30	02	Divisão e soma
Júlio - A_{18}	30	01	Soma
Dudu - A_{19}	30	02	Divisão e soma
Cadma - A_{20}	30	02	Divisão e soma
Luiz - A_{21}	30	02	Divisão e soma
Lolo - A_{22}	10	02	Divisão e soma
Fernandes - A_{23}	30	02	Divisão e soma
Jubileu - A_{24}	30	02	Divisão e soma
Dias - A_{25}	30	02	Divisão e soma
Marcio - A_{26}	30	02	Divisão e multiplicação
Dj - A_{27}	30	02	Divisão e soma
Todynha - A_{28}	30	02	Divisão e soma
Ana Clara A_{29}	30	02	Divisão e soma
Fera - A_{30}	30	01	Divisão
Feroz - A_{31}	30	02	Divisão e soma
Bibi - A_{32}	20	02	Divisão e soma
Nego - A_{33}	30	02	Divisão e soma
Ana - A_{34}	30	02	Divisão e soma

Dos 25 alunos que acertaram, 22 afirmaram ter utilizado duas operações, sendo elas a divisão e a soma; Um afirmou ter empregado as operações de divisão e de multiplicação; Outro afirma ter utilizado somente a divisão e um outro afirmou ter feito uso apenas da operação da adição. Ao questionarmos os alunos que utilizaram apenas uma operação para descreverem o procedimento aplicado no desenvolvimento da atividade, o aluno A18 apresenta os seguintes registros.

Descrição da atividade pelo aluno

Se 50 alunos correspondem ao total de alunos de uma turma 3/5, representa mais que a metade da turma. Sendo 5 os grupos que devemos representar e que devemos considerar 3 desses. Devemos somar 10 + 10 + 10 = 30 alunos.

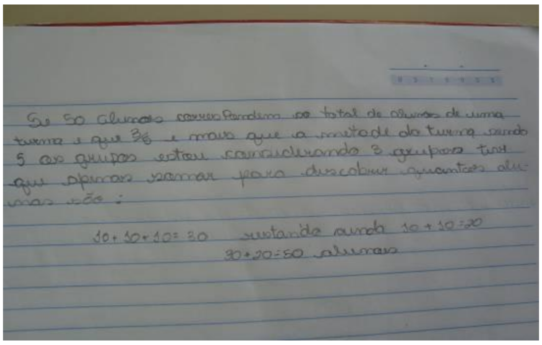


Fig. 76 – Atividade do aluno Júlio-A18

A estratégia de raciocínio utilizada pelo aluno Júlio-A18 foi bem interessante, pois buscou, primeiramente, mostrar entender que 3/5 é mais que a metade do número total de alunos. Ao mesmo, tempo nos mostrou que com o total de 50 alunos poderia formar, por exemplo, cinco grupos com 10 alunos em cada grupo. O raciocínio de Júlio-A18 e sua explicação auxiliou a compreensão de seus colegas que passaram a utilizar procedimentos semelhantes em problemas parecidos.

Atividade 4 - pág. 23 do livro Números: linguagem universal, (SANTOS; REZENDE, 1996). Aline recebeu 1/3 de sua mesada. Qual a mesada de Aline se ela recebeu R$ 5,00?

Respostas dos alunos na atividade 04

Quadro 10 – Respostas dos alunos na atividade 04

Aluno	Valor da mesada de Aline	Aluno	Valor da mesada de Aline
Tião - A_1	R$ 10,00	Júlio - A_{18}	R$ 15,00
Douglas - A_2	R$ 15,00	Dudu - A_{19}	Não respondeu
Lorrainy - A_3	Não respondeu	Cadma - A_{20}	R$ 15,00
007 - A_4	R$ 15,00	Luiz - A_{21}	R$ 5,00
Pastel - A_5	R$ 15,00	Lolo - A_{22}	R$ 10,00
William - A_6	R$ 5,00	Fernandes - A_{23}	R$ 15,00
Eduarda-A_7	R$ 15,00	Jubileu - A_{24}	Não respondeu
Kauan - A_8	R$ 2,00	Dias - A_{25}	R$ 15,00
Dominguinho-A_9	R$ 15,00	Marcio - A_{26}	R$ 15,00
Silva - A_{10}	R$ 10,00	Dj - A_{27}	Não respondeu
Vieira - A_{11}	R$ 15,00	Todynha - A_{28}	R$ 15,00
Mascara-A_{12}	Não respondeu	Ana Clara A_{29}	R$ 10,00
Lopes - A_{13}	R$ 15,00	Fera - A_{30}	R$ 15,00
Fred - A_{14}	R$ 15,00	Feroz - A_{31}	Não respondeu
Bruno - A_{15}	R$ 15,00	Bibi - A_{32}	R$ 15,00
Lobo - A_{16}	R$ 15,00	Nego - A_{33}	R$ 15,00
Moreninha - A_{17}	Não respondeu	Ana - A_{34}	R$ 10,00

Ao analisar a atividade desenvolvida pelos alunos, constatamos que um grande número de alunos apresentam dificuldades ao relacionar a fração, partindo da parte para o todo. Uma vez que dos trinta e quatro alunos que desenvolveram a atividade, sete (07) alunos não a responderam e oito (08) alunos cometeram erros ao desenvolvê-la.

Atividade 05 - pág. 23 do livro Números: linguagem universal, (SANTOS; REZENDE, 1996).

5 – Observe as figuras do quadrado e responda:

a) Os quadrados representam que fração do total das figuras?

b) Pinte os triângulos. Quantos triângulos há?

c) Os triângulos representam que fração do total das figuras?

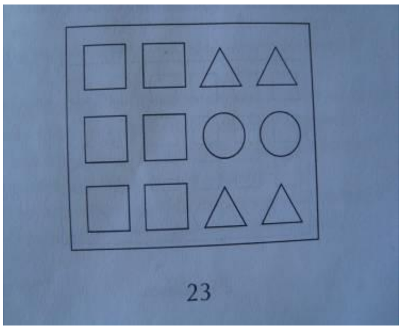


Fig. 77 – Atividade do livro

Respostas dos alunos na atividade 05

Quadro 11 – Respostas dos alunos na atividade 05

Aluno	Os quadrados representam que fração do total das figuras	Nº total de triângulos	Fração correspondente ao total das figuras
Tião - A_1	6/12	04	4/12
Douglas - A_2	1/2 (metade)	04	4/12 = 1/3
Lorrainy - A_3	6/12	04	4/12
007 - A_4	6/12	04	4/12
Pastel - A_5	6/12	04	4/12 = 2/6
William - A_6	1/2 (metade)	04	4/12 = 1/3
Eduarda-A_7	1/2 (metade)	04	4/12 = 1/3
Kauan - A_8	6/12	04	4/12
Dominguinho-A_9	6/12	04	4/12
Silva - A_{10}	6/12	04	4/12 = 2/6
Vieira - A_{11}	6/12	04	4/12
Mascara-A_{12}	6/12	04	4/12
Lopes - A_{13}	1/2 (metade)	04	4/12 = 1/3
Fred - A_{14}	6/12	04	4/12
Bruno - A_{15}	6/12	04	4/12 = 2/6
Lobo - A_{16}	1/2 (metade)	04	4/12 = 1/3
Moreninha - A_{17}	6/12	04	4/12
Júlio - A_{18}	6/12	04	4/12
Dudu - A_{19}	6/12	04	4/12
Cadma - A_{20}	6/12 = 1/2	04	4/12 = 1/3
Luiz - A_{21}	6/12	04	4/12
Lolo - A_{22}	6/12	04	4/12
Fernandes - A_{23}	6/12	04	4/12 = 1/3
Jubileu - A_{24}	1/2 (metade)	04	4/12 = 1/3
Dias - A_{25}	6/12	04	4/12
Marcio - A_{26}	6/12	04	4/12
Dj - A_{27}	6/12	04	4/12 = 2/6
Todynha - A_{28}	6/12	04	4/12
Ana Clara A_{29}	6/12	04	4/12
Fera - A_{30}	1/2 (metade)	04	4/12 = 1/3
Feroz - A_{31}	6/12	04	4/12
Bibi - A_{32}	6/12	04	4/12 = 1/3
Nego - A_{33}	6/12	04	4/12
Ana - A_{34}	6/12	04	4/12 = 1/3

Comentários sobre os procedimentos usados pelos alunos nas atividades

Observando as respostas dos alunos, nós percebemos que um número considerável encontrou dificuldades em desenvolver corretamente as atividades 3 e 4. Buscamos refletir sobre tais atividades. Ou seja, compreender o que ocorreu e, ao mesmo tempo, procurar fazer com que os alunos soubessem interpretar e representar corretamente uma quantidade fracionária de um todo, representado por um conjunto discreto. Enfim, queremos que compreendam como encontrar a quantidade correspondente a 3/5 de uma turma de 50 alunos. E que saibam resolver problemas em que a representação fracionária é utilizada, expressando uma quantidade ou parte do todo, para além da representação em imagens e desenhos.

Ao representar no quadro a fração 5/5 (cinco quintos), a professora orientadora questiona os alunos da turma do 7º ano do ensino fundamental: O que quer dizer esta fração?

Alunos da turma: Ah! é um inteiro professora.
A professora continua, questionando os alunos. Por que a resposta não poderia ser 5 (cinco)?
Alunos: Após alguns instantes responderam: não, professora, porque se dividirmos cinco por cinco o resultado é igual a um. Portanto, um corresponde ao inteiro, ou seja, todos os elementos do conjunto.

Diante das respostas dos alunos, a professora registra outras quantidades no quadro: 26 alunos; 12 balas; 18 pessoas; e dos números 36 e 13. Ela faz vários questionamentos para os alunos, a fim de chamar atenção deles quanto aos divisores desses números e as possibilidades de frações para calcular em cada caso. Ao perceber que nem todos acompanhavam os raciocínios e as explicações orais ela resolveu mudar de estratégia pedagógica. Pensou em dramatizar com os alunos algumas situações. Após solicitar a colaboração de treze alunos que se dispuseram a ir até a frente da sala, representando a quantidade treze, ela instiga a turma, para que verifiquem quantos grupos, com a mesma quantidade de pessoas, poderiam ser formados com os treze alunos.

Fig. 78 – Demonstração da atividade

Os alunos verificaram que a quantidade treze só lhes permite formar dois tipos de grupos com a mesma quantidade de pessoas. Sendo eles: um único grupo com todos os treze alunos, ou então, distribuindo-os individualmente, formando assim treze grupos, composto cada um por apenas um aluno.

Ela falou com a turma que, então, com a quantidade de treze alunos, nós poderíamos calcular do total de treze alunos as frações denominadas de treze avos.

Do mesmo modo a professora questionou a turma e com a participação dos alunos, chegamos à conclusão de que:

a) Utilizando um grupo (conjunto) composto por 26 alunos (elementos), podemos obter:

- Um único grupo (conjunto) composto pelos 26 alunos (elementos).
- Dois grupos (conjuntos) compostos cada um por 13 alunos (elementos).
- Treze grupos (conjuntos) compostos cada um por 2 alunos (elementos).
- Ou, então, vinte e seis grupos (conjuntos) compostos por 1 único aluno (elementos) cada um.

Ou seja, os divisores de 26 = $\{1,2,13,26\}$ nos auxiliam a pensar nas frações possíveis de serem calculadas do total de 26 elementos. E, portanto, podemos calcular do total de 26 alunos as frações como meios (metade), treze avos e vinte e seis avos.

A seguir ela falou para eles pensarem em 12 balas e em como poderiam reparti-las em grupos contendo a mesma quantidade de balas. Ou seja, que frações podemos calcular com um conjunto de 12 balas. Através de vários questionamentos foi possível concluir com a turma que:

b) Utilizando um conjunto composto por 12 balas, podemos obter:

- Um único conjunto composto por todas as 12 balas (elementos).
- Dois conjuntos compostos cada um por 6 balas (elementos).
- Três conjuntos compostos cada um por 4 balas (elementos).

- Quatro conjuntos compostos cada um por 3 balas (elementos).
- Seis conjuntos compostos cada um por 2 balas (elementos).
- Ou então, doze conjuntos composto por 1 única bala (elemento) cada um.

Ou seja, os divisores de 12 = $\{1,2,3,4,6,12\}$ nos auxiliam a pensar nas possibilidades de frações e vamos poder calcular do total de 12 balas frações como meios (ou metades), terços, quartos, sextos e doze avos.

A seguir propôs para os alunos o desafio de tentar descobrir as possíveis frações para um conjunto de 18 elementos. Usando diálogos semelhantes com os alunos foi possível concluir que:

c) Utilizando um conjunto composto por 18 elementos, temos:

- Um único conjunto composto por todos os 18 elementos.
- Dois conjuntos compostos cada um por 9 elementos.
- Três conjuntos compostos cada um por 6 elementos.
- Seis conjuntos compostos cada um por 3 elementos.
- Nove conjuntos compostos cada um por 2 elementos.
- Dezoito conjuntos compostos por 1 único elemento cada um.

Ou seja, os divisores de 18 = $\{1,2,3,6,9,18\}$. E, nesse momento, comentamos com os alunos que poderíamos calcular do total de 18 elementos as frações como meios (metades), terços, sextos, nonos e dezoito avos.

Finalizamos com o desafio de encontrar as frações de um conjunto formado por 36 elementos. Assim, concluímos também que:

d) Utilizando um conjunto composto por 36 elementos, temos:

- Um único conjunto composto por todos os 36 elementos.
- Dois conjuntos composto cada um por 18 elementos.
- Três conjuntos composto cada um por 12 elementos.
- Quatro conjuntos composto cada um por 9 elementos.
- Seis conjuntos composto cada um por 6 elementos.
- Nove conjuntos composto cada um por 4 elementos.
- Doze conjuntos composto cada um por 3 elementos.

- Dezoito conjuntos composto por 2 elementos.
- Trinta e seis conjuntos composto por 1 único elemento cada um.

Ou seja, os divisores de 36 = $\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$. Podemos calcular do total de 36 elementos frações como meios (metades), terços, quartos, sextos, nonos, dezoito avos e trinta e seis avos.

Tendo desenvolvido a atividade com os alunos, concluímos agradecendo à turma pela participação de todos e informando que, na próxima semana, a professora Vânia Maria estaria com a turma em mais uma aula. E nos despedimos da turma.

No dia 12/11/2010, trabalhamos com 33 alunos em sala. Nos dois tempos de aula, desse dia, exploramos o conceito de fração com o geoplano. Após cumprimentarmos os alunos da turma do 7º ano, comunicamos para a turma que dividiríamos a aula em dois momentos. Na 1ª aula estaríamos desenvolvendo uma aula, basicamente, teórica com apresentação do geoplano, utilizando para isso o data-show da escola. Já na 2ª aula, exploraríamos o material (geoplano) para o estudo de fração.

Apresentamos o geoplano para os alunos, comunicamos à turma que a atividade surgiu de uma situação em que sentia a necessidade de trabalhar materiais didáticos para serem utilizados e manipulados pelos alunos em aulas de matemática. Conforme destaca o documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental [PCNEF] (BRASIL, 1998), o ensino da matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Como já tínhamos utilizado o geoplano em aulas de matemática em diferentes escolas nos últimos anos, conhecíamos o potencial do material, pensamos em utilizá-lo para que os alunos usassem e manipulassem o mesmo no trabalho com o tema de fração. Porque o geoplano, permite ao aluno dispor de material concreto ou manipulável, que manuseie e eles observem o que acontece em determinadas situações. Essas observações e constatações auxiliam o processo de descoberta de relações matemáticas, através de percepções, ações e abstrações (LORENZATO, 2006a).

Com o data show, apresentamos informações aos alunos sobre a definição de um geoplano, que tipos existem, para que serve, etc. Usamos sempre linguagem clara e esclarecemos que eles poderiam questionar e argumentar, como geralmente, faziam nas aulas. Deveriam também expor suas ideias e solicitar explicações sobre a apresentação, se fosse necessário. Informamos aos alunos que o objetivo principal da atividade explorando o geoplano circular era proporcionar ao grupo ações lúdicas. Porque estas estimulam percepção visual e imaginação, levando-os à descoberta ativa, para desenvolver raciocínio indutivo e realizar inferências que são essenciais para construção de conceitos (SERRAZINA; MATOS, 1988).

Nas atividades de pesquisa realizadas em 2010 utilizando o geoplano, percebemos que esse é um recurso a mais para auxiliar na aprendizagem, pois por meio dele podemos visualizar várias formas geométricas. Além disso, podemos visualizar formas e figuras geométricas que, muitas vezes, não se encontram nas mesmas posições em que elas são costumeiramente apresentadas em sala de aula. E esse material didático manipulável ainda nos permite desenvolver atividades que permitem o aluno comparar, refletir, verificar e ampliar conhecimentos geométricos e outros conhecimentos matemáticos (DOMINGOS, 2010; PAVANELLO, 1993).

Material apresentado (projetado) na sala para os alunos

Podemos observar, nas figuras abaixo, alguns tipos de geoplano:

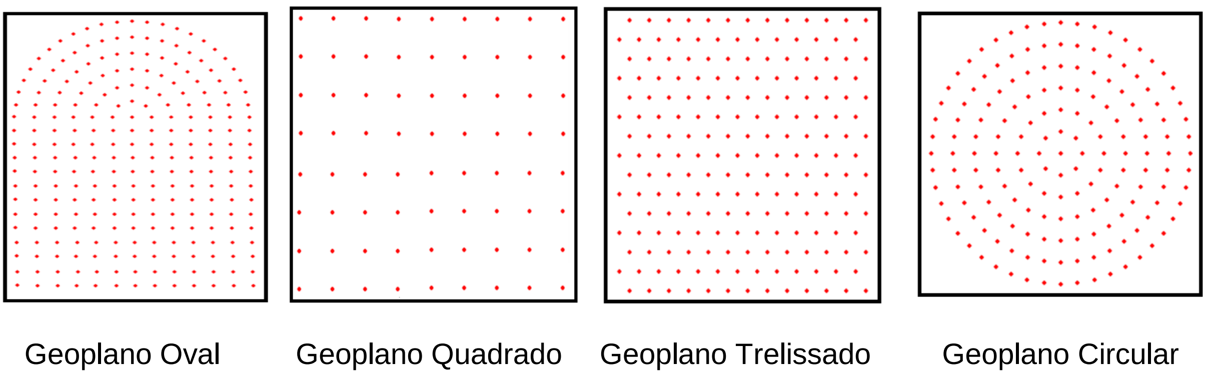


Fig. 79 – Tipos de geoplano

Comunicamos aos alunos que os materiais básicos necessários para a construção de um geoplano são: pregos, martelo, base de madeira, régua, lápis, compasso e uma folha de tamanho A4.

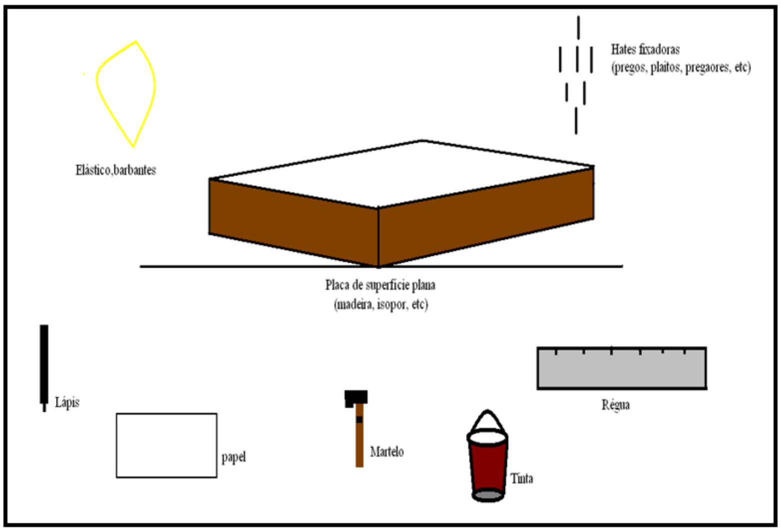


Fig. 80 – Materiais para a construção de um geoplano

4.4.2. A utilização do Geoplano na Educação Infantil e Ensino Fundamental

Após ter mostrado na figura acima, para os alunos da turma, alguns modelos de geoplano, distribuímos dois desses modelos nos grupos, para que pudessem manuseá-los (geoplano quadrado e circular). E mais, distribuímos três elásticos a cada grupo, para que pudessem identificar algumas formas geométricas. Dissemos que podiam fazer algumas comparações entre elas, utilizando o elástico, mostrar o formato das figuras no geoplano e a quantidade de pregos usados para a formação das devidas figuras.

Comentamos para a turma que a utilização do geoplano nos proporciona vários benefícios educacionais. Isso ocorre tanto em nível de desenvolvimento de conceitos matemáticos, como em nível de outras aprendizagens. Destacamos algumas potencialidades do geoplano: a) favorece o desenvolvimento do pensamento abstrato; e b) favorece a capacidade de representação gráfica. Além disso, o geoplano permite: i) diferenciar e identificar figuras geométricas; ii) visualizar figuras geométricas em diferentes posições; iii) explorar, construir e transformar modelos geométricos e estabelecer relações entre eles; iv) explorar, construir, sistematizar, e consolidar conceitos geométricos. Introduzindo-se lentamente o vocabulário próprio e as noções elementares de geometria: interior e exterior; ângulos; v) explorar linhas abertas, linhas fechadas; e vi) explorar e construir noções de: dentro/fora; direita/esquerda.

Devemos ressaltar que, ao manusear o geoplano, o aluno: a) amplia seu desenvolvimento de capacidade de visualização espacial; b) desenvolve coordenação visual e motora, memória visual, auxiliando a construção e formação do conceito de números, através da contagem dos pregos que constituem o geoplano; c) desenvolve capacidades lógico-matemáticas de relacionar, comparar, classificar, e ordenar; d) desenvolve a criatividade; e) pode experimentar para modificar, dividir ou combinar formas/figuras; f) resolve problemas usando a linguagem na exploração dos conceitos geométricos através da descoberta; g) pode tomar consciência que há problemas que têm uma solução, outros com mais do que uma e há outros ainda, que não têm solução (DOMINGOS, 2010).

Figuras geométricas

A fim de explorar algumas características presentes nas figuras geométricas, projetamos no quadro da sala de aula algumas figuras, identificando com a turma do 7º ano a quantidade de lados e arestas que formam as figuras e classificando-as. Algumas figuras (polígonos) construídas no geoplano abaixo:

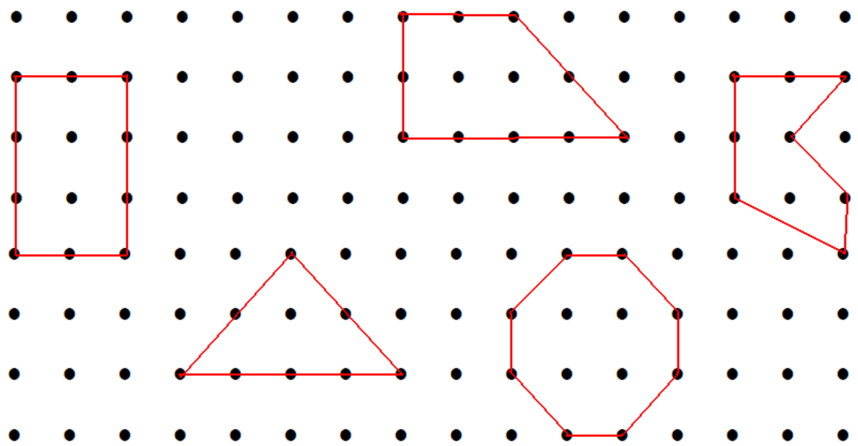


Fig. 81 – Figuras no geoplano

Ângulos

Após apresentarmos algumas figuras geométricas construídas no geoplano, exploramos algumas características presentes em cada representação. Chamamos a atenção dos alunos quanto aos ângulos formados em cada figura representada abaixo, a fim de identificar alguma congruência entre os ângulos.

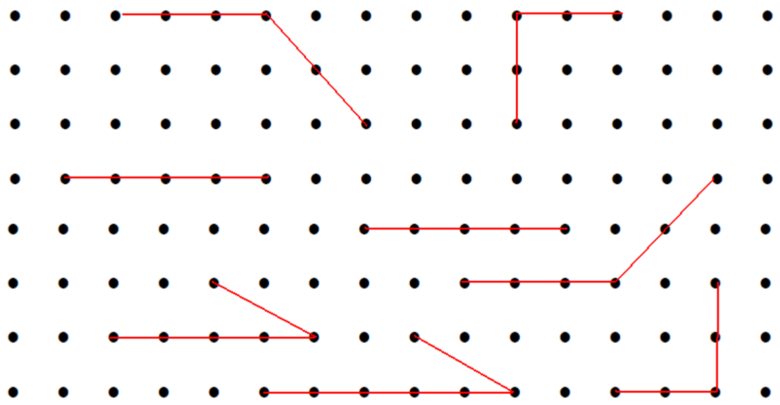


Fig. 82 – Figuras no geoplano

Como vemos na representação no desenho acima, existem alguns ângulos congruentes. Solicitamos que os alunos observassem e identificassem ângulos. Após todos os alunos terem verificado que alguns ângulos são congruentes e outros não, nós solicitamos que nos mostrassem quais eram os ângulos congruentes. Depois, introduzimos (revisamos) com a turma a classificação de ângulos. Lembramos que os ângulos se classificam em agudos, retos e obtusos.

Sistema de Numeração

A fim de evidenciarmos para os alunos o sistema de numeração, com emprego do geoplano, apresentamos para a turma alguns números que estão representados no sistema de numeração romano. Em seguida, observando a representação romana, solicitamos aos alunos que resolvessem os seguintes itens:

a) Escreva os números representados utilizando o sistema indo-arábico.

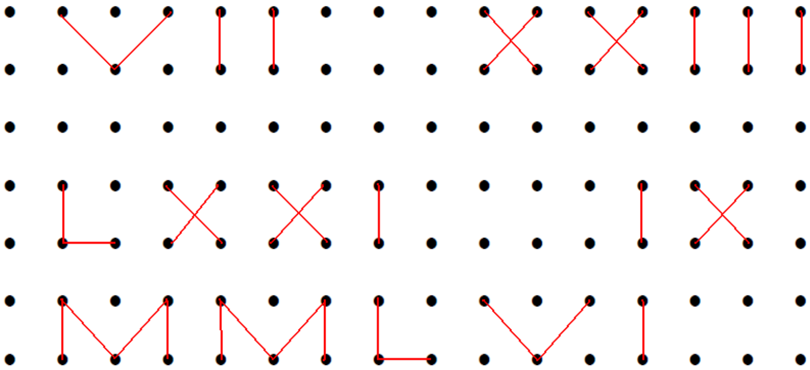


Fig. 83 – Figuras no geoplano

b) Identifique os números romanos abaixo, efetue as operações e forneça o resultado em romanos.

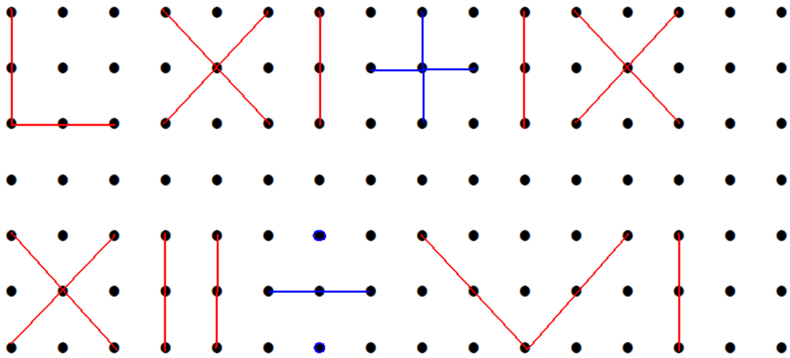


Fig. 84 – Figuras no geoplano

Sequências

O geoplano nos permite dar a oportunidade para que o aluno identifique sequências numéricas. Solicitamos que eles observassem as figuras representadas no geoplano e que relatassem suas observações. Depois, pedimos que observassem as figuras formadas, buscando através da atividade, identificar a figura formada e conceitos, envolvendo o tema fração. Procuramos chamar a atenção dos alunos de que poderiam pensar em ampliar os quadrados ou reduzir os mesmos, respeitando a razão de ampliação. Ou seja, procuramos instigar os alunos a prestar atenção, pois cada quadrado pequeno se constitui como sendo uma parte dos quadrados maiores e que existe uma razão entre estas partes. Raciocínio semelhante pode ser feito com os triângulos que aparecem nas figuras seguintes do geoplano.

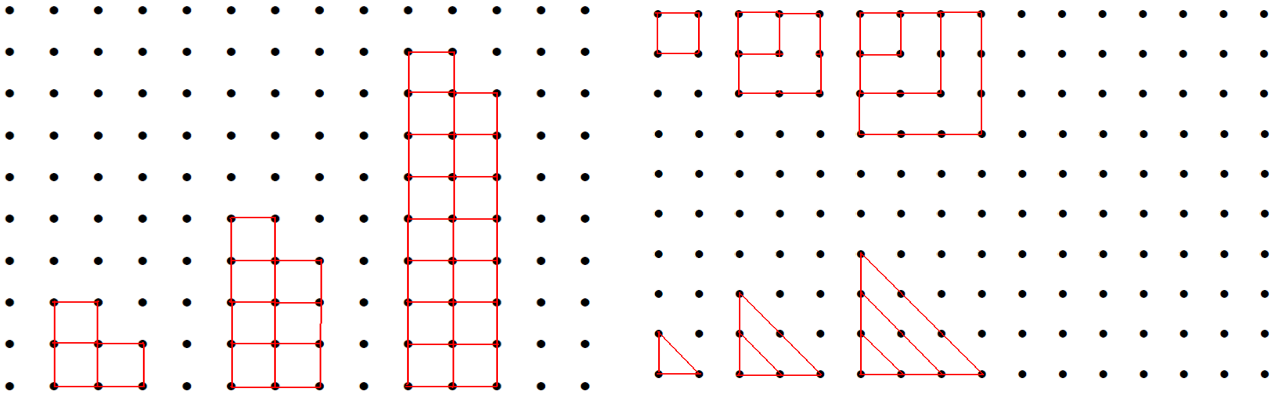


Fig. 85 – Figuras no geoplano

Concluímos essa parte teórica com a apresentação do geoplano e mostrando alguns de seus usos para os alunos. Pensamos que exploramos, pelo menos, em partes, o potencial que o geoplano nos permite trabalhar com os alunos. Depois dessa apresentação, distribuímos um geoplano para cada grupo, como o representado abaixo. E orientamos os alunos para o desenvolvimento de algumas atividades, tentando explorar a representação fracionária.

Atividades desenvolvidas pelos alunos

Fig. 86 – Geoplano circular

Diferente dos outros modelos de geoplano que já havíamos trabalhado com os alunos (quadrado e circular), também utilizamos nesta aula, esse outro modelo. Como podemos verificar na ilustração, ao confeccionar o material, deixamos de preencher, propositalmente, um dos quadrantes do círculo.

Pretendíamos construir esse modelo de geoplano para o trabalho com os alunos, por aproximar, de maneira clara, a relação que se queria estabelecer com a turma entre o material e o tema fração. Assim, antes mesmo que utilizassem qualquer elástico, solicitamos que os alunos respondessem os seguintes questionamentos:

Atividade 1

1 - Observando o geoplano é possível saber quantos pregos foram utilizados para confeccioná-lo? Justifique.

2 - Levando em consideração a parte do geoplano preenchida por pregos, podemos afirmar que ela é:

a) (   ) de mesmo tamanho que a parte do geoplano não preenchida por pregos;

b) (   ) o dobro do tamanho da parte não preenchida por pregos no geoplano;

c) (   ) o triplo do tamanho da parte não preenchida por pregos no geoplano.

3 – Considerando a parte do geoplano não ocupada por pregos, podemos afirmar que ela é:

a) (   ) do mesmo tamanho que a parte do geoplano preenchida por pregos;

b) (   ) duas vezes menor que a parte do geoplano ocupada por pregos;

c) (   ) três vezes menor que a parte do geoplano ocupada por pregos.

4 - Levando em consideração a parte do geoplano não ocupada por pregos, podemos descobrir em quantas partes de mesmo tamanho (área) o geoplano foi repartido?

5 - Que fração representa a parte não preenchida por pregos no geoplano?

Algumas das etapas desenvolvidas pelos alunos

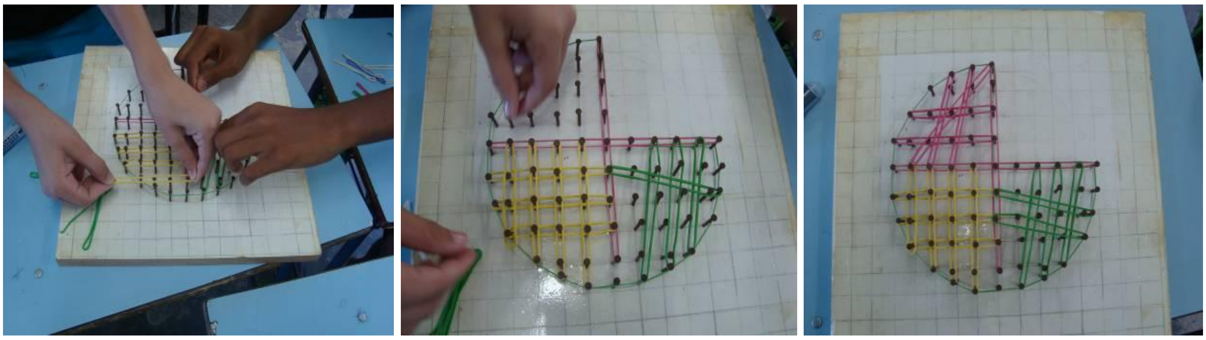


Fig. 87 – Figuras no Geoplano Circular

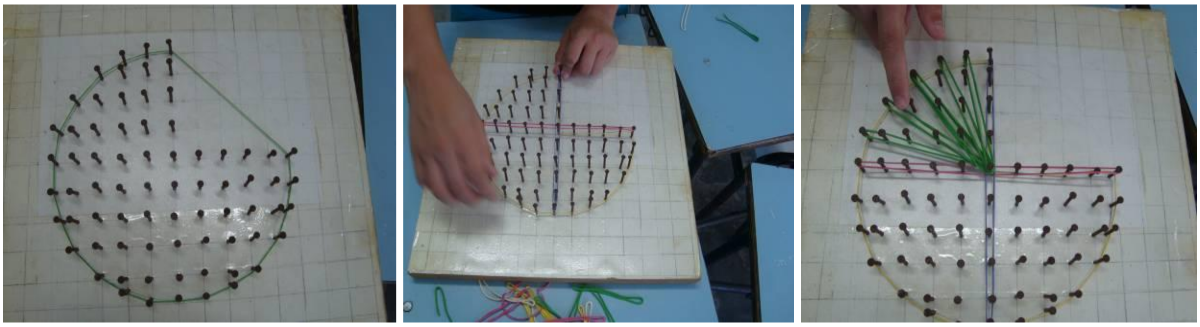


Fig. 88 – Figuras no Geoplano Circular

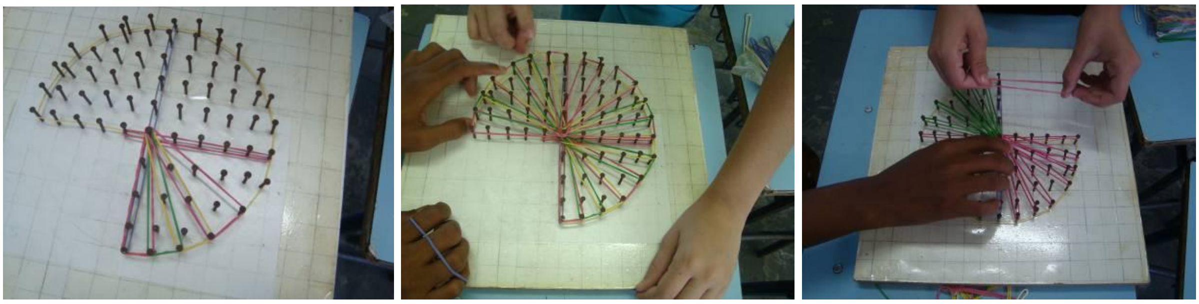


Fig. 89 – Figuras no Geoplano Circular

Tabulação das respostas dos alunos na atividade com o geoplano

Quadro 10 – Respostas dos alunos na atividade 1 com o geoplano

Aluno	Nº de pregos no geoplano	A parte preenchida do geoplano é ...	A parte não ocupada por pregos é ...	As partes são	Fração correspondente
Tião - A_1	Sim, contando	é o triplo da não preenchida	três vezes menor	4 partes	1/4
Douglas - A_2	Sim, são 72	letra c	três vezes menor	4 partes	um quarto
Lorrainy - A_3	Sim, contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
007 - A_4	Sim,contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/3
Pastel - A_5	Sim, 72	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
William - A_6	Sim, contando	letra c	três vezes menor	4 partes	um quarto
Eduarda - A_7	Sim, é só contar	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Kauan-A_8	Sim, contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Dominguinho - A_9	Sim, 72	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Silva-A_{10}	Sim, contar	Alternativa c	três vezes menor	4 partes	um quarto
Vieira-A_{11}	Sim, contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Mascara-A_{12}	Sim, 72	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	uma das quatro
Lopes A_{13}	Sim, contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Fred - A_{14}	Sim, contando	letra c	três vezes menor	4 partes	um quarto
Bruno-A_{15}	Sim, é só contar	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Lobo-A_{16}	Sim, contar	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/3
Moreninha - A_{17}	Sim, contar	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Júlio - A_{18}	Sim, contar	o triplo	três vezes menor	4 partes	um quarto
Dudu - A_{19}	Sim, 72	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Cadma-A_{20}	Sim, é só contar	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Luiz - A_{21}	Sim, 72	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4 do geoplano
Lolo - A_{22}	Sim, 72	alternativa c	três vezes menor	4 partes	um quarto
Fernandes A_{23}	Sim, contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Jubileu - A_{24}	Sim, é só contar	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	uma parte
Dias - A_{25}	Sim, contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Marcio-	Sim, 72	letra c	três vezes menor	4 partes	um quarto

Aluno	Nº de pregos no geoplano	A parte preenchida do geoplano é ...	A parte não ocupada por pregos é ...	As partes são	Fração correspondente
A_{26}					
Dj - A_{27}	Sim, contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Todynha - A_{28}	Sim, é só contar	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	um quarto
Ana Clara A_{29}	Sim, contando	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Fera - A_{30}	Sim, 72	alternativa c	três vezes menor	4 partes	um quarto
Feroz - A_{31}	Sim, 72	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Bibi - A_{32}	Sim, 72	é o triplo da não preenchida	três vezes menor	4 partes	uma das quatro partes
Nego - A_{33}	Sim, é só contar	é o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4
Ana - A_{34}	Sim, contando	o triplo do tamanho	três vezes menor	4 partes	1/4

Nossas observações e aprendizados

Como podemos constatar no quadro acima, praticamente todos os alunos desenvolveram, corretamente, todos os itens desta atividade. Entretanto, nos chamou atenção o fato de os alunos 007-A4 e Lobo-A16 terem representado de forma equivocada a fração correspondente, a parte não preenchida por pregos no geoplano. Dessa forma, procuramos ambos os alunos para conversar com eles, a fim de compreender melhor a resposta que eles deram. Nesse momento de conversa com os alunos 007-A4 e Lobo-A16, verificamos que os alunos compararam a parte não ocupada por pregos no geoplano com a parte ocupada. Ou seja, eles pensaram em fração associada com o significado de razão e em razão entre as partes. No entanto, o item 5 questionava que fração representava aquela parte do geoplano e, nesse caso, era preciso que os alunos pensassem na ideia de fração associada à ideia de parte-todo.

Algumas atividades desenvolvidas pelos alunos com geoplano e comentários

Professor/pesquisador: Após contornarem com um elástico o geoplano, registre o que observaram.

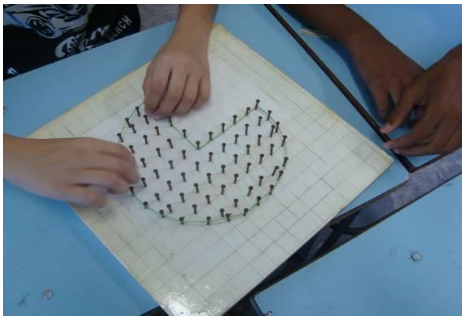


Fig. 90 – Figuras no Geoplano Circular

Respostas dos alunos: Ao contornar o geoplano com um elástico professor, representamos: um come-come do jogo; um bolo sem um pedaço; parte de uma pizza; um CD; um disco. Vemos que uma parte do geoplano não foi preenchida por pregos.

Professor/pesquisador: Represente no caderno o desenho correspondente à figura no geoplano e indique a fração correspondente à parte não ocupada no desenho.

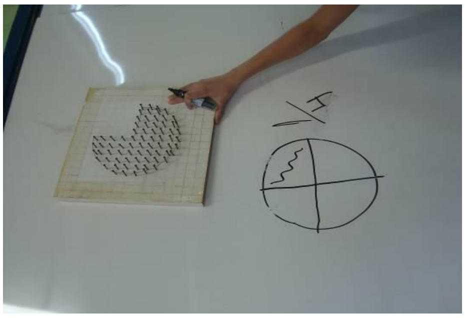


Fig. 91 – Atividades no geoplano

Ao representarem, no desenho, a figura correspondente ao geoplano, praticamente todos os alunos utilizaram a representação ao lado, indicando como um círculo, pizza, bolo. Observando a fração 1/4 (um quarto).

Professor/pesquisador: Utilizando outros elásticos, como podemos certificar no geoplano a fração 1/4?

Como os próprios alunos afirmavam, um resultado eles já tinham certeza, a de que o geoplano seria repartido em quatro partes de tamanhos iguais, isso porque como também descreveram, o desenho mostra a representação da parte da figura que não recebeu nenhum prego. Na medida em que buscavam localizar o ponto (fileira de pregos) que seria utilizada para dividir a figura, notávamos que procuraram utilizar vários elásticos, ocupando todas as fileiras para que pudessem ter a certeza de a maior fila ser utilizada; assim traçaram as duais maiores linhas (diâmetro), uma na horizontal e outra na vertical.

Estas serão as duas fileiras utilizadas para mostrar que iríamos dividir o geoplano em quatro partes iguais.

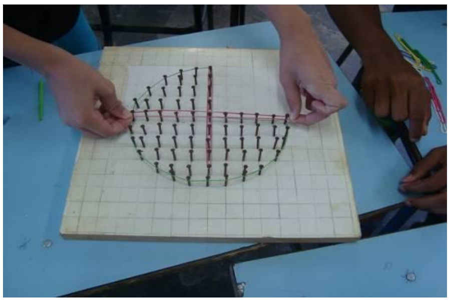


Fig. 92 – Atividade no geoplano

Um estudo sobre as possibilidades do Geoplano

Em nossas pesquisas, descobrimos que um dos primeiros trabalhos sobre o geoplano foi o realizado pelo Dr. Caleb Gattegno[14] em 1961. E a partir deste, muitos outros pesquisadores em educação matemática utilizam o geoplano como uma forte ferramenta para o ensino de geometria plana elementar e frações, dentre outros. Entre os pesquisadores, que trabalharam com o geoplano, encontra-se Schons (2008) afirmando que este é

> um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo, através do qual é possível construir, movimentar e desfazer figuras geométricas. Tal recurso contribui para explorar problemas geométricos e algébricos, possibilitando suposições, podendo-se registrar o trabalho em papel ou reproduzi-lo em papel quadriculado (p. 20).

O geoplano é muito útil para o ensino de matemática, pois nos mostra uma alternativa diferente na resolução de problemas e nos permite visualizar os mais diferentes polígonos geométricos. O que o torna um instrumento interessante quando se está trabalhando dentro do primeiro nível do desenvolvimento do raciocínio geométrico (DOMINGOS, 2010).

Além disso, Schons (2008) afirma que

> o Geoplano facilita o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial, comparação, relação, discriminação, seqüência, envolvendo conceitos de frações e suas operações, simetria, reflexão, rotação e

[14] Caleb Gattegno - Nasceu em Alexandria, Egito, em 1911. Ele atuou em várias áreas do conhecimento. Formou-se em física e química, fez mestrado em educação, doutorado em matemática e doutorado em psicologia (Ver biografia, artigos e outras informações sobre Caleb Gattegno, por ex., nos sites: calebgattegno.org; math.buffalo.edu/mad/special/Gattegno_Caleb1911-1988.html; uneeducationpourdemain.org/fr/caleb-gattegno; en.wikipedia.org/wiki/Caleb_Gattegno).

> translação, perímetro e área. O Geoplano é um meio, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes (p. 20).

Esse material é um recurso a mais para auxiliar na representação mental e visualização de formas geométricas, pois visualizamos com o geoplano formas em posições diferentes das que são costumeiramente apresentadas em aula e em livros didáticos. Os trabalhos de Pavanello (1989, 1993, 1994) fazem-nos entender algumas limitações de livros didáticos que apresentam figuras fixas no papel sem qualquer mobilidade. Essa limitação em observar figuras fixas no papel dentro de um livro ou em listas de exercícios ou em desenhos no quadro de giz mostra que não é possível girá-las, ou colocá-las em posições diferentes ou colocar umas sobre as outras para facilitar a comparação de figuras. De acordo com Knijnik, Basso e Klüsener (2004) e Schons (2008), podemos dizer que o geoplano é um modelo matemático que permite traduzir ou sugerir ideias matemáticas. Segundo esses pesquisadores, os materiais concretos constituem-se em alternativas interessantes para que alunos formulem hipóteses, troquem ideias, façam descobertas, e em outras palavras, enriqueçam o momento de aprendizagem.

Nas pesquisas que realizamos em 2008 e 2009, concluímos que o geoplano é um recurso a mais a auxiliar nesse aspecto porquanto, por meio dele, podemos visualizar formas geométricas que, muitas vezes, não se encontram nas mesmas posições em que elas são, costumeiramente, apresentadas em sala de aula (SILVA, DOMINGOS, SANTOS-WAGNER, 2009).

Finalizamos este capítulo trazendo a trajetória escolar do aluno Dudu-A19. Achamos interessante apresentar detalhes da aprendizagem desse aluno por dois motivos. Primeiro por ser ele um dos alunos da turma com três reprovações. E em segundo lugar, por ele ter assumido no estudo piloto de 2009 um papel de liderança na sala em questionamentos sobre matemática e seu ensino.

4.5. Trajetória escolar do aluno Dudu – A19 no decorrer da pesquisa

O foco de análise do estudo sempre esteve voltado à valorização do conhecimento dos alunos da turma, por considerarmos que o conhecimento não se desenvolve de maneira linear, mas de forma recursiva em que há retornos ao conhecimento inicial. O trabalho aos poucos se desenvolveu, pretendendo, primeiramente, estimular os alunos a compreender a fração como representação de um número racional, por acreditarmos que os conhecimentos podem ser (re)construídos e que podemos direcioná-los para patamares mais elaborados. Nessa parte do presente trabalho, apresentamos os resultados obtidos na análise das estratégias utilizadas pelo aluno Dudu (A19) no desenvolvimento das atividades. Dentre outros motivos, nos motivou a escolha do aluno Dudu o fato de afirmar não gostar de estudar, ter ficado reprovado quatro vezes e por suas respostas nas atividades de 2009 e 2010 que instigavam suas concepções de matemática.

Desde o início do trabalho com a turma em 2009, percebemos que muitas concepções negativas apresentadas pelos alunos em relação ao ambiente escolar, ao ensino oferecido pela escola e, principalmente, sobre a disciplina de matemática, eram influenciadas pela liderança do aluno Dudu – A19 na turma.

Como já descrito, em nossa primeira atividade em forma de estudo piloto, realizada com a turma na aula do dia 24/09/2009, buscamos fazer com que os alunos pudessem refletir sobre questões relacionadas à idade/série em que se encontravam e sobre o que pensam sobre a reprovação. O aluno já havia antecipado a fala dos demais colegas de sala, e argumentando: *Saber a opinião da turma em relação à matemática é fácil, professor. Não precisa nem esperar para cada um responder, duvido que alguém da sala gosta. Com exceção de seis alunos que não são repetentes, eu e os demais da sala reprovaram em matemática no ano anterior. A matemática só serve para reprovar os alunos. Além disso, os próprios professores afirmavam para a turma que o aluno está de recuperação em matemática e em outras disciplinas. Ele primeiro deve fazer a recuperação em matemática e somente, se passar, poderá fazer as demais disciplinas, caso contrário nem precisa ficar perdendo tempo.*

No dia 07/10/2009 (Anexo I) do mesmo ano, dia em que tínhamos duas aulas com a turma, ao orientá-los a refletirem sobre as frações, buscando representar livremente em forma de desenho o que é uma fração, o aluno Dudu-A19 descreve que *uma fração é um pedaço de alguma coisa, como um bolo, uma pizza ou uma barra de* *chocolate. E que as pessoas precisam aprender fazer várias contas difíceis para transformar uma fração em um número.*

No dia 15/10/2009, explorando o tema no estudo piloto fizemos vários questionamentos para a turma: O que se lembram já terem estudado sobre frações em anos anteriores? O que entendem sobre frações? Percebem alguma relação sobre a utilização das frações em situações cotidianas? E por fim, perguntamos como uma fração pode ser representada.

Dentre outros alunos, o aluno Dudu-A19, descreve que *uma fração é um pedaço (uma parte) de algo que foi consumido, e que embora já tenham estudado o tema em anos anteriores, não recorda muita coisa. E que envolve muitas contas complicadas. Quanto à utilização das frações em situações diárias, descreve que as pessoas até devem se deparar com as representações fracionárias no dia a dia, mas na maioria das vezes, não relacionam aos números.*

Mostramos também para os alunos nessa aula alguns usos curiosos associados às frações, que se encontram no Anexo I. Na aula do dia 30/10/2009, concluindo o estudo piloto aplicamos um jogo envolvendo cartões com frações na qual permitimos que os alunos identificassem frações em diferentes representações. Nesse jogo levamos os alunos a associar cada representação fracionária ao seu correspondente, que pode ser um número ou linguagem escrita ou desenho.

Percebemos que Dudu (aluno A19) fazia a inversão do numerador pelo denominador: A suposição é que o aluno não sabia distinguir a relação que existe entre o numerador e o denominador; o aluno trata a fração como dois números naturais e distintos que são apenas separados por um traço; o aluno despreza o todo envolvido, faz a contagem das partes sem relacioná-las com o todo. Ou seja, ele evidencia dificuldades comentadas por outros pesquisadores (BEZERRA, 2001; MERLINI, 2005; SANTOS, REZENDE, 1996).

A nossa 1ª atividade definitiva de pesquisa com fração aconteceu em 13/08/10. Ou seja, um ano após o estudo piloto. Utilizamos os quatro primeiros encontros compartilhando com os alunos nosso propósito de trabalho, bem como a importância de participação e envolvimento deles nas atividades e construção do trabalho.

Relembramos à turma que o tema do projeto surgiu dos debates e dificuldades, deles com fração. E, por esse motivo, o sentimento de pertencimento na pesquisa seria o de envolver toda a turma, o professor responsável pela disciplina de matemática e também pesquisador, a coordenação e equipe pedagógica da escola.

No encontro do dia 25/08/10, 5º encontro do estudo definitivo, o aluno A19 descreve que já havia reprovado, até então, quatro vezes na 5ª série/6º ano, principalmente devido à disciplina de matemática. E dentre os motivos, o aluno destacava o fato de não gostar de estudar e dos professores, bagunça em sala de aula e dificuldades na família.

Ao responder alguns questionamentos na aula do dia 27/08 diz que a matemática é algo ruim. E que é uma matéria que não deveria nem existir. Ao comparar as respostas dadas pelo aluno quando compara, em agosto de 2009 (estudo piloto) e exatamente um ano após, em agosto de 2010 (estudo definitivo) com o animal que a matemática seria e os motivos, obtivemos as seguintes respostas: 2009, a matemática é como um *Gato*, por ter desconfiança de tudo, muito ágil; 2010, a matemática é como uma *Cobra venenosa*, quando menos se espera, ela pode fazer uma nova vitima.

As respostas do aluno Dudu-A19 nos deixam evidências de que seus professores de matemática transmitiram para ele uma imagem negativa em relação à matemática do que sentimentos de utilidade e dedicação nos estudos.

No dia 10/09/2010, ao ser questionado quanto às aulas de matemática que tem presenciado, no corrente ano, argumenta que considera regular as aulas de matemática, justificando que tem a oportunidade de demonstrar como fez as atividades. E comenta também que o professor ensina muito bem e controla a turma, não deixando os alunos saírem da sala nem para ir ao banheiro. Descreve ainda que, um bom professor de matemática é aquele que se preocupa com a vida do aluno e não se limita em explicar a matéria aos alunos, caso ele não entenda. E que um bom professor de matemática é uma pessoa especial.

Essa resposta acima nos deixou evidências de que o aluno Dudu-A19 começa a alterar sua visão em relação à matemática e ao seu ensino. Parece também que sua percepção sobre o professor de matemática e as características de um bom professor tinham se alterado.

O aluno Dudu-A19 disse não saber, ao certo, quantas aulas semanais de matemática são planejadas pela escola para a turma. Ele reconheceu que nem sempre assistiu a todas as aulas de matemática na semana, e que para ser um bom aluno de matemática se faz necessário estudar muito e conversar menos nas aulas. Suas respostas nos deixam evidências de que inúmeras vezes bateu de frente com o professor/pesquisador. Parece que ele começa a se dar conta de que as mudanças atitudinais em seu fazer, enquanto aluno, também se faziam necessárias. E que todos os alunos da sala tinham a obrigação de permanecer em sala de aula, cumprindo e respeitando aquele local como um importante local de aprendizado.

Ao ter que responder sobre as aulas semanais em 16/09/2010 ele se surpreendeu. Parece que atingimos nosso objetivo de levar os alunos a refletirem sobre seus atos na escola. Na aula do dia 24/09/10, ao iniciarmos explorando atividades específicas de fração, o aluno Dudu-A19, descreve que *uma fração, representa a forma de repartir uma quantidade em pequenas quantidades. Que divisão é o ato de repartir certa quantidade em partes menores e que porcentagem, representa juros e descontos.* Respostas que nos mostram que como os demais alunos, ele não consegue estabelecer, com clareza, nenhuma correlação entre fração, divisão e porcentagem, entendendo cada um como conteúdo específico e isolado dentro da matemática.

Ao aplicar atividades, representando frações nas figuras geométricas, em aula realizada no dia 30/09/10, observamos que o aluno consegue perceber que nem todas as figuras foram repartidas em um mesmo número e em tamanhos iguais (mesma área). No entanto, afirma que é possível representar, em forma de fração as partes em que cada figura foi repartida.

Na aula do dia 08/10/10, ao demonstrar no desenho a fração da barra de chocolate consumida por Maria e Paulo, descreve corretamente que:

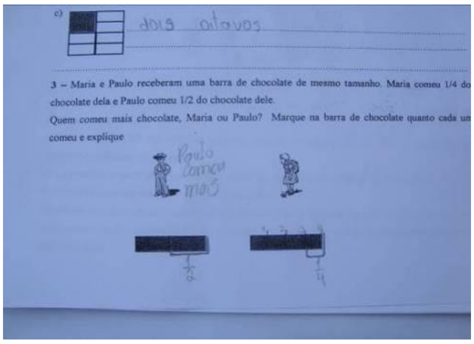


Fig. 93 – Atividade aplicada em sala

Maria comeu menos que Paulo. Preocupando-se em repartir toda a figura e mostrando no desenho a parte correspondente a cada fração. Deixando evidente a preocupação que tem com o número de partes em que o todo é repartido em cada caso e com a área de cada uma das partes. Além disso, o aluno argumenta entender melhor a relação entre o numerador e o denominador de uma fração. E ainda que não é o valor numérico alto no denominador que indica o maior tamanho da fração.

Na atividade do dia 22/10/10, quando propusemos aos alunos explorar fração, utilizando a folha de papel A4, depois de já ter desenvolvido algumas etapas, o aluno A19 faz alguns questionamentos do tipo: Quantos quadrinhos podem ser formados professor ao dobrar toda *folha? Podemos fazer com uma folha de cartolina só para ver a quantidade de quadrinho que iremos conseguir? Agora eu entendo que o tamanho da folha é o mesmo, mas que ao realizar cada etapa (dobra) a fração vai ficando com o denominador maior, já o tamanho da figura fica cada vez menor. Isso é matemática ou educação artística?*

O aluno nos revela que ficou surpreso ao descobrir o significado do denominador da fração, na qual entrou em conflito com as ideias iniciais de que quanto maior o denominador da fração, maior é sua área. E ainda se surpreende ao fazer uma matemática divertida, nem mesmo crendo ser aquela uma aula de matemática.

Na aula do dia 29/10/10 construímos e utilizamos o Tangram com os alunos. Após construirmos o Tangram e fazê-los comparar a área correspondente a cada peça em relação a área total do tabuleiro, bem como entre as próprias peças, o aluno Dudu-A19 afirma que:

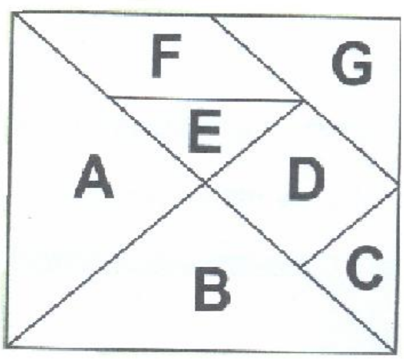


Fig. 94 – Atividade aplicada em sala

*A peça **A** cabe apenas uma vez na peça **B.** Juntas as peças **A** e **B** representam a metade do tabuleiro. É só colocar uma em cima da outra que é possível ver. E que além dessas peças, todas as demais estabelecem relações entre elas e entre a área total do tabuleiro.*

Na aula do dia 12/11/10, explorando atividades no Geoplano, chamou-nos atenção as várias tentativas do aluno Dudu-A19, em demonstrar no geoplano tudo aquilo que já havia visto nas atividades anteriores. Ele procurava principalmente, aplicando os debates realizados nas aulas com o papel A4 e o Tangram.

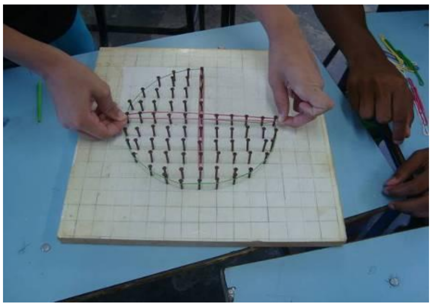


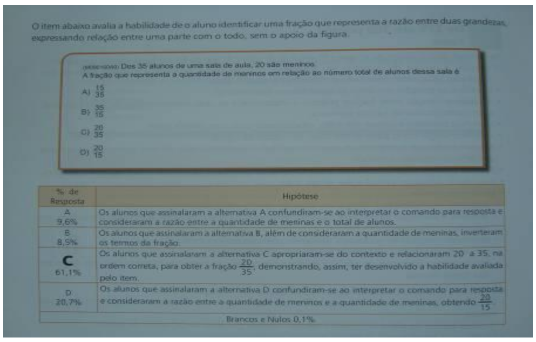
Fig. 95 – Atividade aplicada em sala

Argumento do aluno no trabalho em grupo: *Quando repartimos ao meio na horizontal ou na vertical, cada uma das partes do circulo corresponde a metade (1/2). Ao utilizar o segundo elástico, no sentido inverso ao anterior, cada parte corresponde a um quarto da área total da figura (1/4), e assim por diante.*

Atividade desenvolvida pelo aluno Dudu-A19

Ao lançarmos mão da Revista Educador PAEBES [Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo] (2010), percebemos que existiam ideias sobre frações. Continha algumas questões sobre fração, e apresentavam o resultado do desempenho de alunos das séries finais do ensino fundamental de uma escola estadual do município e seus respectivos percentuais de acertos. Julgamos conveniente aplicar em 2011 aos alunos da turma pesquisada estas questões. Fizemos isso com o objetivo de verificar os procedimentos e desempenho dos mesmos. Destacamos as estratégias e raciocínios do aluno Dudu-A19 nas três questões.

Questão 1: Dos 35 alunos de uma sala de aula, 20 são meninos. A fração que representa a quantidade de meninos em relação ao número total de alunos dessa sala é: a) 15/35 b) 35/15 c) 20/35 d) 20/15



O item abaixo avalia a habilidade de o aluno identificar uma fração que representa a razão entre duas grandezas, expressando relação entre uma parte com o todo, sem o apoio da figura.

Dos 35 alunos de uma sala de aula, 20 são meninos.
A fração que representa a quantidade de meninos em relação ao número total de alunos dessa sala é

A) $\frac{15}{35}$

B) $\frac{35}{15}$

C) $\frac{20}{35}$

D) $\frac{20}{15}$

% de Resposta	Hipótese
A 9,6%	Os alunos que assinalaram a alternativa A confundiram-se ao interpretar o comando para resposta e consideraram a razão entre a quantidade de meninas e o total de alunos.
B 8,5%	Os alunos que assinalaram a alternativa B, além de consideraram a quantidade de meninas, inverteram os termos da fração.
C 61,1%	Os alunos que assinalaram a alternativa C apropriaram-se do contexto e relacionaram 20 a 35, na ordem correta, para obter a fração $\frac{20}{35}$, demonstrando, assim, ter desenvolvido a habilidade avaliada pelo item.
D 20,7%	Os alunos que assinalaram a alternativa D confundiram-se ao interpretar o comando para resposta e consideraram a razão entre a quantidade de meninos e a quantidade de meninas, obtendo $\frac{20}{15}$.
Brancos e Nulos 0,1%	

Fig. 96 – Atividade aplicada em sala

Na revista Educador PAEBES (2010) ao descrever o item informa que esse avalia a habilidade de o aluno identificar uma fração que representa a razão entre duas grandezas, expressando relação entre uma parte com o todo, sem o apoio da figura.

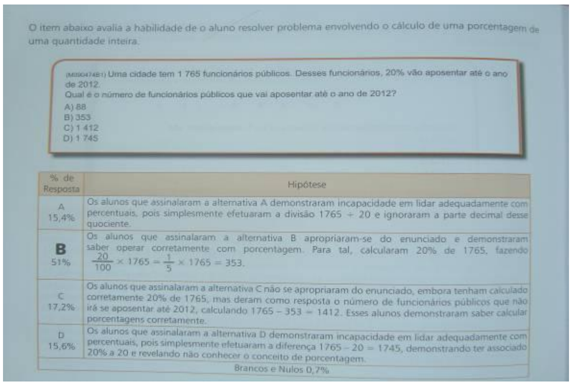
Ele representou os 35 alunos em um desenho. Ele foi agrupando sempre de cinco em cinco. O aluno percebeu que cinco cabia sete vezes em trinta e cinco. Sua representação dos 35 alunos foi a seguinte:

5	5	5	5	5	5	5

Ele assinalou que quatro desses cinco representavam os vinte meninos. E em seguida colocou que a fração correspondente é 20/35 e assinalou a alternativa c.

Desempenho dos alunos da turma pesquisada na resolução desta questão:
Total de alunos presentes e que responderam a questão = 32
Total de alunos que acertaram a questão = 24 => **75%**
Total de alunos que erraram a questão = 08 => **25%**

Questão 2: Uma cidade tem 1765 funcionários públicos. Desses funcionários, 20% vão aposentar até o ano de 2012. Qual é o número de funcionários públicos que vai aposentar até o ano de 2012?   a) 88   b) 353   c) 1412   d) 1745


O item abaixo avalia a habilidade de o aluno resolver problema envolvendo o cálculo de uma porcentagem de uma quantidade inteira.

(M050474E1) Uma cidade tem 1 765 funcionários públicos. Desses funcionários, 20% vão aposentar até o ano de 2012.
Qual é o número de funcionários públicos que vai aposentar até o ano de 2012?
A) 88
B) 353
C) 1 412
D) 1 745

% de Resposta	Hipótese
A 15,4%	Os alunos que assinalaram a alternativa A demonstraram incapacidade em lidar adequadamente com percentuais, pois simplesmente efetuaram a divisão 1765 ÷ 20 e ignoraram a parte decimal desse quociente.
B 51%	Os alunos que assinalaram a alternativa B apropriaram-se do enunciado e demonstraram saber operar corretamente com porcentagem. Para tal, calcularam 20% de 1765, fazendo $\frac{20}{100} \times 1765 = \frac{1}{5} \times 1765 = 353$.
C 17,2%	Os alunos que assinalaram a alternativa C não se apropriaram do enunciado, embora tenham calculado corretamente 20% de 1765, mas deram como resposta o número de funcionários públicos que não irá se aposentar até 2012, calculando 1765 – 353 = 1412. Esses alunos demonstraram saber calcular porcentagens corretamente.
D 15,6%	Os alunos que assinalaram a alternativa D demonstraram incapacidade em lidar adequadamente com percentuais, pois simplesmente efetuaram a diferença 1765 – 20 = 1745, demonstrando ter associado 20% a 20 e revelando não conhecer o conceito de porcentagem.
Brancos e Nulos 0,7%	

Fig. 97 – Atividade aplicada em sala

Na revista Educador PAEBES (2010) ao descrever o item informa que esse avalia a habilidade de o aluno identificar uma fração no conjunto.

Esse item avalia a habilidade do aluno resolver problema, envolvendo o cálculo de uma porcentagem de uma quantidade inteira.

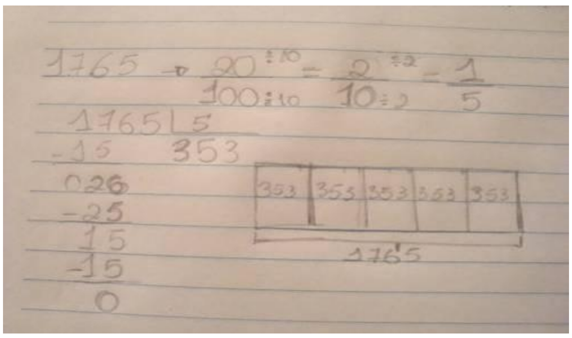


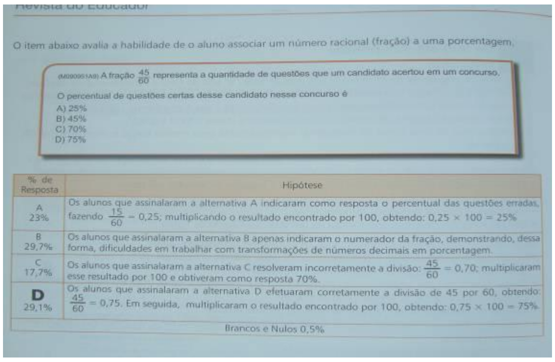
Fig. 98 – Atividade aplicada em sala

Total de alunos presentes e que responderam a questão = 32
Total de alunos que acertaram a questão = 21 => **67%**
Total de alunos que erraram a questão = 11 => **33%**

Analisando a estratégia utilizada pelo aluno ao desenvolver a questão 2, foi-nos possível verificar que ele já consegue estabelecer de forma clara a relação entre a simplificação de uma fração. E que já compreende o papel do denominador em uma fração. O que nos deixou bastante satisfeitos ao verificar a atividade e saber como houve avanço no aprendizado de fração.

Questão 3: A fração 45/60 representa a quantidade de questões que um candidato acertou em um concurso. O percentual de questões certas desse candidato nesse concurso é:

a) 25% b) 45% c) 70% d) 75%



Revista do Educador

O item abaixo avalia a habilidade de o aluno associar um número racional (fração) a uma porcentagem.

A fração $\frac{45}{60}$ representa a quantidade de questões que um candidato acertou em um concurso.

O percentual de questões certas desse candidato nesse concurso é

A) 25%
B) 45%
C) 70%
D) 75%

% de Resposta	Hipótese
A 23%	Os alunos que assinalaram a alternativa A indicaram como resposta o percentual das questões erradas, fazendo $\frac{15}{60} = 0{,}25$; multiplicando o resultado encontrado por 100, obtendo: $0{,}25 \times 100 = 25\%$
B 29,7%	Os alunos que assinalaram a alternativa B apenas indicaram o numerador da fração, demonstrando, dessa forma, dificuldades em trabalhar com transformações de números decimais em porcentagem.
C 17,7%	Os alunos que assinalaram a alternativa C resolveram incorretamente a divisão: $\frac{45}{60} = 0{,}70$; multiplicaram esse resultado por 100 e obtiveram como resposta 70%.
D 29,1%	Os alunos que assinalaram a alternativa D efetuaram corretamente a divisão de 45 por 60, obtendo: $\frac{45}{60} = 0{,}75$. Em seguida, multiplicaram o resultado encontrado por 100, obtendo: $0{,}75 \times 100 = 75\%$
Brancos e Nulos 0,5%	

Fig. 99 – Atividade aplicada em sala

Na revista Educador PAEBES (2010) ao descrever o item informava que esse avalia a habilidade de o aluno identificar uma fração que representa a razão entre duas grandezas, expressando relação entre uma parte com o todo, sem o apoio da figura.

Essa terceira e última atividade aplicada aos alunos da turma, em que nos preocupamos em destacar a trajetória do aluno Dudu-A19, consiste em avaliar a habilidade de o aluno associar um número racional (fração) a uma porcentagem.

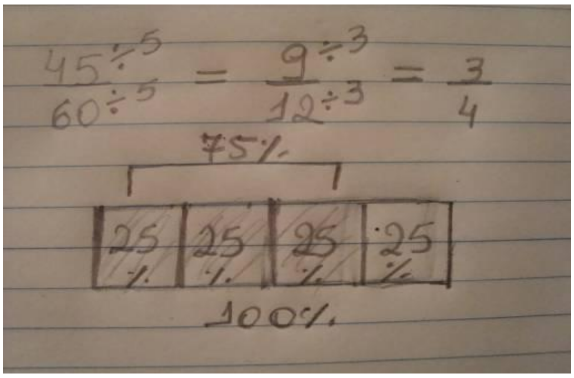


Fig. 100 – Atividade Aplicada em sala

Total de alunos presentes e que responderam a questão = 32

Total de alunos que acertaram a questão = 21 => **66%**

Total de alunos que erraram a questão = 11 => **34%**

Ficamos felizes em verificar o procedimento descrito pelo aluno Dudu-A19 ao desenvolver e demonstrar a atividade. Inicialmente ele tentou encontrar uma fração equivalente a 45/60 escrita em uma forma mais simples. Após perceber que 45/60 era equivalente a 3/4 usou outra estratégia cognitiva. O aluno pensou em como distribuiria 100% em quatro partes iguais. Momento em que desenha um inteiro dividido em quatro partes iguais e tendo em cada parte 25%. Verifica que três dessas partes correspondem a 3/4 que é igual a 75%. Já sabia que 45/60 era igual a 3/4 por sua estratégia inicial. Assim concluiu que 45/60 = 3/4 = 75%. Em seguida assinalou a resposta correta dessa questão 3.

Ele empregou uma estratégia de raciocínio semelhante ao que tinha usado para resolver a questão um, mas mostrou que foi pensando em outras estratégias trabalhadas em sala de aula na pesquisa no estudo de fração. A resposta dele e de outros alunos a essa questão nos permitiu comparar as estratégias cognitivas utilizadas pelos alunos do 7º ano. Parece que os alunos conseguiram assimilar e aprender conceitos de fração. Eles sentiram-se felizes de resolver as atividades da prova do PAEBES e em compartilhar seus raciocínios e soluções.

5. CONCLUSÕES FINAIS

Neste trabalho tivemos por objetivo compreender estratégias e raciocínios utilizados por trinta e seis alunos do 7º ano do ensino fundamental de uma Escola Municipal de Guarapari/ES, durante o processo de intervenção pedagógica, retomando o conceito de fração. De início, nosso ponto de partida constituiu em focalizar nosso olhar em noções intuitivas dos alunos sobre escola e matemática. Isto é, formalizamos uma investigação dos conhecimentos espontâneos dos alunos referentes a temas como o compromisso deles com estudo e escola, a valorização da escola, e o sentimento de pertencimento ao ambiente escolar. Ou seja, discutimos com eles sobre o objetivo da pesquisa, comprometimento deles com os estudos, valores das disciplinas escolares e, em particular, da matemática para a sua formação como cidadãos. Essas informações auxiliaram a planejar e a desenvolver uma intervenção de ensino.

Em 2010, propusemos este trabalho à uma turma de 7º ano, por reconhecer que os alunos ainda tinham lacunas de compreensão do significado de fração, mesmo após terem estudado o tema de 1ª e 4ª série (atuais 2º a 5º ano). Destarte, consistia numa continuidade do trabalho já iniciado em 2009, em um estudo piloto com essa turma. Nossa experiência com ensino fundamental e médio nos fazia crer que o professor de matemática é um elo fundamental no processo de ensino e aprendizagem. O professor deve intervir no processo pedagógico, modificando suas ações e estimulando os alunos a participar do processo de construção e compreensão de conceitos. Nesse propósito, pensamos em alguns objetivos específicos e questionamentos associados aos mesmos. Como mencionamos no capítulo 1, listamos a seguir nossa questão central: **Que aprendizagens alunos de 6ª série/7º ano exibem sobre o conceito de fração em um processo de exploração e reconstrução desse conceito?**

Após o estudo piloto, em 2009, realizamos, em 2010 a intervenção pedagógica como pesquisa definitiva. Nessa intervenção foram planejadas e aplicadas várias atividades sobre o tema fração. Procuramos desafiar os alunos a construir e/ou reconstruir, de modo significativo, os conceitos. Era nosso objetivo também envolver a turma toda no trabalho, procurando valorizar o conhecimento dos alunos, motivá-los quanto à importância da participação em todas as atividades propostas. Concordamos, como propõe Vygotsky (1988/1934, 1991) que a criança é um ser social e a velocidade de sua aprendizagem depende dos diálogos que ela estabelece com os seus pares e com adultos e dos processos de mediação para construção de conceito.

Nosso trabalho propiciou-nos indícios de que a abordagem utilizada por nós, para a (re)construção do conceito dos números fracionários e suas representações, obteve resultados satisfatórios, conforme descrito no capítulo interior. Com isso, confiamos ter respondido o nosso primeiro questionamento.

Pela análise de dados apresentada, podemos afirmar que uma sequência de ensino que interfere no contexto cultural e social do aluno fez com que os alunos pudessem compreender alguns significados de fração. Por exemplo, parece que ficou mais compreensível a ideia básica de fração como parte-todo de conjuntos contínuos e discretos. Alguns alunos confundiam a ideia da fração como parte-todo com a ideia de fração como razão; no caso de compararmos as partes entre si e ao final da intervenção, algumas dessas dúvidas se esclareceram. Trabalhamos com mais profundidade a ideia de número fracionário ou número racional quanto à importância de sua utilização e de que os números naturais eram insuficientes para representar determinadas quantidades e medidas. Os alunos conseguiram compreender que, em situações fracionárias, na qual consideramos a área de uma superfície, as frações representam partes que possuem mesma área. No caso, relacionado ao volume, as frações representam partes que tenham mesmo volume ou mesma capacidade. Exploramos situações de fração trabalhando com medidas de comprimento, de tempo, e de capacidade. Os alunos foram aprendendo a argumentar e seguiram aprendendo mesmo tendo cometido erros em algumas etapas.

Atividades significativas e desafiadoras, como algumas que usamos na intervenção didática, influenciam efetivamente na formação do conceito de número fracionário e na sua representação. É importante que o professor selecione e planeje atividades que permitam que os alunos construam significados do número fracionário. Isso permitirá que eles aprendam e obtenham resultados satisfatórios na conceituação desse campo numérico.

Sabemos que, usualmente, existem diversas formas de introduzirmos o conceito dos números fracionários. Porém, o mais usual nem sempre é o melhor. Nossos resultados indicam que os alunos compreendem o novo número que lhes foi apresentado e conseguiram, satisfatoriamente, representá-los com um menor número de erros. Os problemas e as dificuldades de aprendizagem de números racionais constatados, ao iniciar este estudo, foram identificados e trabalhados ao longo da intervenção.

Construímos uma sequência de ensino abordando fração com várias atividades distribuídas em trinta e nove aulas. Buscamos contemplar nas atividades um número razoável de situações que propiciassem reflexão, desafio, e dessem um significado ao aluno adolescente do porquê de aprender um novo campo numérico. Além do planejamento das atividades, sabíamos que nossos registros durante o desenvolvimento da atividade pelos alunos seriam determinantes para nossa compreensão do que ocorria no processo de ensino e no processo de aprendizagem. Esse conhecimento mais amplo de todo o processo pedagógico auxiliou nossos planejamentos para o processo de ensino e interferiu no processo de aprendizagem de nossos alunos e na formação deles enquanto cidadãos.

Santos-Wagner (2009, 2010, 2011) comenta que o diário de bordo se constitui em um importante instrumento a ser utilizado pelo pesquisador desde as primeiras atividades de pesquisa. Segundo ela, a preocupação em registrar de forma coerente o maior número de informações resultantes das ações desenvolvidas com os alunos na pesquisa, sempre deve ser apontada como prioridade para o pesquisador. Pois, esses registros auxiliam-no a compor o corpo de dados e informações a serem interpretadas na investigação Rocha (2009), citando Santos-Wagner (2008)[15], diz que *o caderno de bordo é onde registramos quase tudo que realizamos em uma pesquisa de campo, ou seja, o que se pensa, o que se planeja, o que se sente e o que acontece ao longo de todo o trabalho* (p. 69). Fiorentini & Lorenzato (2006) dizem que:

> Um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações durante o trabalho de campo é o diário de bordo. É nele que o pesquisador registra

[15]SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. **Conversas, mensagens e notas de aula da orientadora sobre como elaborar um projeto de pesquisa, desenvolver a pesquisa, analisar as informações obtidas e redigir relato final**. 2008.

> informações e fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos. Quanto mais próximo do momento da observação for feito o registro maior será a acuidade da informação (p. 118 e 119).

Fundamentados nas informações e nos registros do diário de bordo avaliamos o quanto evoluímos no caminhar do estudo e em nossas observações, registros e análises. Temos a consciência de que não conseguimos anotar todos os detalhes de cada aula, cada atividade de pesquisa, mas os fragmentos e/ou recortes nos recordam detalhes sobre o que aconteceu de fato. Esses registros foram e são importantes, pois nos permitiram fazer uma retrospectiva do que realmente conseguimos desenvolver e realizar em aulas e na investigação como um todo.

Das vinte e oito aulas trabalhadas com o conceito de fração, temos muito material sobre fração já transcrito e com uma interpretação inicial. No entanto, o volume de dados ficou tão grande para analisar e selecionar evidências que ainda não foi possível explorar tudo neste relato final da pesquisa. Por isso, acreditamos ter futuramente um percurso importante a percorrer, para completar interpretações e análises iniciadas. Pensamos em seguir esse caminho, a fim de não só valorizar e registrar todos os dados e informações disponibilizadas pelos alunos ao trabalharem as atividades de pesquisa, assim como de seguir, aprendendo a ser um pesquisador. Em síntese, desejamos dar um retorno da investigação completa para os nossos alunos e também para os membros da equipe pedagógica, da direção da escola e para outros investigadores.

Temos consciência de que nossa meta foi audaciosa. Queríamos poder trabalhar os diferentes significados associados às frações, como propusemos ao apresentar nosso trabalho de qualificação e ao descrever os registros iniciais da investigação. No entanto, nesse trabalho, exploramos um pouco melhor os significados de parte-todo, nos modelos contínuo, discreto, discreto e contínuo; significado de razão e significado de divisão. Estudamos um pouco também de fração com o significado de operador no momento em que pesquisamos atividades com geoplano.

Em síntese, podemos dizer que durante o caminhar da investigação levou-se em consideração o conhecimento informal dos alunos, e as diferentes estratégias utilizadas por eles em atividades individuais e em grupo. Isso valorizou conhecimentos, ações, estratégias de resolução e diálogos dos alunos em aula. E promoveu interações entre eles e com o professor a respeito da matemática e, em particular, do conceito de fração e proporcionou um olhar sobre os diversos significados associados com o tema. Ou seja, permitiu diversidade de ensino e aprendizagem e reflexão sobre as estratégias usadas pelos alunos. O trabalho resgatou a autoestima de alunos que se sentiam anteriormente incapacitados de aprender matemática por terem duas ou mais reprovações anteriores em matemática. Os alunos se sentiram capazes de aprender, resolver atividades e problemas matemáticos e gostar de estudar matemática. Os resultados revelam a importância da atuação do educando nas atividades de aprendizagem, por meio da reconstrução e ressignificação de experiência para que ocorra uma aprendizagem significativa. A pesquisa aponta a necessidade de explorar a aquisição de números fracionários em várias situações e em diferentes contextos, repensando o ensino de fração na escola.

5.1. Reflexões sobre procedimentos de ensino e de aprendizagem observados na intervenção

Nós, professores, temos a oportunidade de mudar uma prática tradicional, respeitando as atitudes dos alunos, suas diferenças e valorizando o que eles conseguem desenvolver dentro de suas potencialidades. Se assim procedermos, estaremos formando mais do que alunos repetidores de conceitos matemáticos. Estaremos construindo com esses alunos um conceito de escola que valoriza suas experiências, tornando os momentos da sala de aula como espaços privilegiados para uma aprendizagem com significado. A necessidade de comprometimento dos educadores com relação à questão de suas atitudes e a de seus alunos torna-se fundamental, na medida em que percebemos que podem ser a causa de bloqueios de aprendizagem. O documento dos PCN (BRASIL, 1998) aborda a importância das variáveis afetivas no processo de aprendizagem ao afirmar que ... *as atitudes têm a mesma importância que os conceitos e procedimentos, pois, de certa forma, funcionam como condições para que eles se desenvolvam* (p. 50).

Tardif (2002), ao discorrer sobre os saberes dos professores, destaca o caráter plural e heterogêneo dos saberes mobilizados pelos docentes em sua prática. Para ele, o professor incorpora, em sua prática saberes provenientes de seu processo de formação (inicial e continuada) que se constituem como saberes pedagógicos e disciplinares. Os professores também se apropriam de saberes curriculares e de experiências. Para Tardif (2002), o docente raramente atua sozinho:

> Ele se encontra em interação com outras pessoas, a começar pelos alunos. A atividade docente não é exercida sobre um objeto, sobre um fenômeno a ser conhecido ou uma obra a ser produzida. Ela é realizada concretamente numa rede de interações com outras pessoas [...] Elas exigem, portanto, dos professores [...] a capacidade de se comportarem como sujeitos, como atores e de serem pessoas em interação com pessoas [...] (p. 50).

De fato, nos inserimos no cotidiano da sala de aula de uma escola pública municipal com o intuito de conhecê-lo mais de perto. Tomamos os planejamentos do professor como momentos de discussão e reflexão acerca dos conhecimentos que possuímos sobre a matemática. Um fator importante que nos motivou a tomar consciência de nós mesmos enquanto professores foi a inserção em um grupo de estudos em educação matemática na UFES – Universidade Federal do Espírito Santo [GEEM-ES]. Nesse grupo, discutimos nossas práticas cotidianas em sala de aula de matemática, estudamos e dialogamos nosso entendimento sobre textos e livros de matemática, de educação e de educação matemática. Aprendemos, também, a observar e reconhecer cada um de nós profissionalmente; a conduzir experimentos de ensino nas turmas em que atuamos; a enfrentar os desafios de redigir sobre os mesmos; e a compartilhar ideias, trabalhos e textos com outros professores.

Desde o início de nossa pesquisa, sempre tentávamos fazer com que nossos alunos percebessem e passassem a valorizar a fonte inesgotável de força que nos impulsiona a caminhar. Procurávamos enxergar com outros olhos nossos alunos, saber o que eles sentem e nessa forma de reflexão, passamos a compreender que a melhor maneira de perceber o que nossos alunos sentem é procurar viver na pele dos mesmos. É isso que possibilita uma mudança de postura, ficando mais fácil reconhecer que só há aprendizado quando há mudança de comportamento.

O desenvolvimento dessa pesquisa com os alunos nos possibilitou interiorizar a importância do professor buscar conhecer-se enquanto professor num processo contínuo de interação entre os sujeitos. Os dados apresentados nos registros da investigação apontam indícios de que estamos no caminho certo, entendendo que se, realmente, queremos saber como se apropriam de determinado tema da matemática, temos que buscar nos aproximar o máximo possível do conhecimento dos alunos. E trabalhar em diferentes momentos e, de forma diversificada, os conceitos matemáticos.

Em nossa prática, enquanto professor/pesquisador, procuramos nunca dar a resposta pronta para os nossos alunos. Mas, provocá-los para que construíssem e/ou (re)construíssem a solução para cada atividade a partir da compreensão e (re)significação do enunciado ou da questão, por entendermos que é o caminho para construirmos juntos afirmações e para expandirmos nossos conhecimentos. Em outras palavras, importa que, no processo de ensino e aprendizagem da matemática, não se privilegie só o raciocínio individual, mas se provoque também a partilha de ideias e raciocínios entre alunos e professor, estimulando conexões com outros saberes matemáticos. Ademais, concluímos que para o ensino e a aprendizagem alcançarem um nível satisfatório, professor precisa: conhecer o nível intelectual e as informações que os alunos já possuem; conhecer a proveniência social dos alunos, evitando conflitos entre a escola e o meio social; conhecer como os alunos se relacionam com a matemática em termos de pensamentos e sentimentos construídos nos anos escolares anteriores; e utilizar estratégias conducentes ao interesse dos alunos e de acordo com as informações obtidas sobre o intelectual, social e afetivo dos alunos.

Portanto, ensinar é fazer pensar, estimular o aluno para a identificação e resolução de problemas, ajudando-o a criar novos hábitos de pensamento e ação. O professor precisa conduzir o aluno à problematização e ao raciocínio, e nunca à absorção passiva de ideias e informações transmitidas (SANTOS, 1997). O professor deve sempre ter em mente e no coração a consciência de que determinados conceitos, tornados evidentes para ele, nem sempre são claros para os alunos. E ainda que, quando esses conhecimentos não são absorvidos pelos discentes, não se pode avançar para matérias mais complicadas

A partir de nossa prática docente com os alunos do ensino fundamental e das discussões e reflexões em um grupo de estudos (GEEM-ES), concluímos que, para resolver certos problemas, o aluno deve dentre outras coisas: (1) aprender associações ou fatos específicos e diferenciá-los; (2) seguidamente, aprender conceitos que começam por ser gerais até se tornarem específicos. Só depois o aluno atinge o conhecimento de certos princípios que lhe permitirão resolver os problemas iniciais. Trata-se, assim, de um processo lógico que começa no geral e acaba no particular, iniciando-se no simples e terminando no complexo.

Do mesmo modo, entendemos que os professores aprendem mais sobre as aprendizagens dos alunos e mais sobre o ensino, ao registrarem e, posteriormente, lerem, refletirem e estudarem os registros de suas aulas. Nessa intervenção pedagógica, procuramos planejar o que desejávamos realizar em aulas e registrar o máximo de detalhes em cada aula. Posteriormente, transcrevemos os dados e as informações coletadas, organizamos as mesmas, lemos, relemos e refletimos o tempo todo, desde o momento da intervenção didática.

É importante salientar que tanto as respostas corretas como incorretas podem disfarçar a verdadeira aprendizagem dos alunos. Respostas incorretas podem representar, ou não, bons raciocínios mesmo que baseados em conceitos errados. Respostas corretas, especialmente, repetições de palavras do livro didático ou do professor, podem mascarar falhas de compreensão da matemática subjacente. Ao resolvermos problemas, as crianças e/ou os adolescentes, muitas vezes, cometem erros que se repetem consistentemente. Isso indica que sua compreensão do problema falhou, no entanto, inventou alguma regra própria para encontrar a solução. O professor deve estar alerta para descobrir esses erros que se repetem e tentar conhecer e entender o que a criança ou o jovem não compreende. A partir daí, o docente procurará apresentar a solução adequada que ajude o aluno a construir seu conhecimento.

Os resultados deste estudo nos alertam para a necessidade de rever a prática de ensino de matemática, nas séries finais do ensino fundamental. Uma mediação pedagógica apropriada possibilita a ampliação do horizonte de compreensão dos números fracionários do aluno.

Finalmente, é importante ressaltar que a análise da pesquisa propiciou um olhar para nossa própria prática como professor de matemática nas séries/anos finais do ensino fundamental. Olhar para a prática docente nos leva a olhar também para um espelho e rever nossas ações, numa difícil reflexão.

A pesquisa, no contexto escolar da sala de aula, com o desafio dos papéis de professor e professor pesquisador, nos permitiu ouvir os alunos e a nós mesmos, sentir, avaliar, agir e questionar o nosso fazer pedagógico. Enfim, nos permitiu sentirmo-nos presentes no cotidiano, avaliarmo-nos no fazer permanente, e fazermos parte de uma mistura homogênea. E nos cobra investigar a nós mesmos. No entanto, ao nos assumirmos como o próprio objeto de pesquisa, temos que lapidar toda e qualquer prática de resistência e postura tradicional de ensino. E aceitar a complexidade do contexto escolar, da prática pedagógica, dos processos de ensinar, aprender e avaliar e de aprender a pesquisar em sala de aula (SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2010).

Enfim, deixo o relato deste estudo como estímulo para outros que, assim como eu, buscam um ensino de matemática com qualidade e criatividade. Um ensino que propicie ao aluno oportunidade de reflexão e desenvolvimento da criatividade tão necessária. Aprender deixa de ser memorizar e repetir, para significar aquisição de habilidades e conhecimentos integrados ao contexto em que serão utilizados, em uma interação total dos aspectos cognitivos e emocionais.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEZERRA, F. J. B. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações:** uma abordagem criativa para a sala de aula. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BIANCHINI, B. L. **Estudo sobre a aplicação de uma sequência didática para o ensino dos números decimais.** 2001. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BONJORNO, R. A.; BONJORNO, J. R. **Pode contar comigo:** matemática. São Paulo – FTD, 1994.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 11ª reimp. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1994 (1ª edição no Brasil em 1974).

BRANDÃO, R. (org.). **Pesquisa participante**. São Paulo: Brasiliense, 1999 (1ª edição em 1981).

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_______. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática – 3º e 4º ciclos. Brasília, MEC/SEF, 1998.

_______. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática – ensino médio. Brasília, MEC, 1999.

_______. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

_______. **Relatório SAEB 2001**. Matemática, Sistema de Avaliação do Ensino Básico. Brasília: INEP, MEC, 2001a.

_______. **Pró-Letramento:** Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental: matemática. ed. rev. e ampl. incluindo SAEB/PROVA BRASIL matriz de referência. Secretaria de Educação Básica – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

CARAÇA, B. J., **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 2010 (Publicado originalmente em 1938.).

CARRAHER, D. W. Relações entre razão, divisão e medida. In: SCHLIEMANN, A. L.; CARRAHER, D. W. (org.). **A compreensão de conceitos aritméticos:** ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998. p, 53-72.

CARRAHER, T. N. (org.). **Aprender pensando**: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. 1. ed. Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco e Universidade Federal de Pernambuco, 1983. 2. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1986.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2003 (1ª edição em 1988).

CARVALHO, C. C. S. de. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CASTRO, R. A. **Alunos em dependência em matemática no curso técnico de construção de edifícios integrado com o ensino médio no CEFETES: uma análise de seus motivos**. 2009. 240f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. **Novo matemática na medida certa,** 6ª série. São Paulo: Scipione, 2000.

CHAPMAN, Olive. Researching mathematics teacher's knowledge and practice. **Caderno de Pesquisa em Educação,** Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória: Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, v. 11, n. 21, p. 120-157, jan./jun. 2005.

______. Researching teaching: qualitative techniques**. Caderno de Pesquisa em Educação,** Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória: Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação. v. 12, n. 23, p. 105-135, jan./jun. 2006.

COLL, C. **Aprendizagem escolar e construção do conhecimento.** Tradução de Emília de Oliveira Dihel. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

CURY, H. N. (org.). **Formação de professores de matemática:** uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação e matemática. 2. ed. São Paulo: Sumus Editorial, 1996.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12 ed. São Paulo, 2005.

DOMINGOS, J. **Um estudo sobre polígonos a partir dos princípios de van Hiele**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da Educação. **Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES)**. Vitória, ES, 2010.

FERRAÇO, C. E. (org.). **Cotidiano escolar, formação de professores(as) e currículo**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

_______. Eu, caçador de mim. In: GARCIA, R. L. (org.). **Método:** pesquisa com o cotidiano. 1 ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2003, p. 157-175.

FERREIRA, E. Da professora à formadora. In: GTI (org.). **Refletir e investigar sobre a prática profissional.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2002, p. 235-256.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática.** Boletim SBEM, São Paulo, v.4, n.7, p.4-9, 1996.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 12. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GADOTTI, M. **Diversidade cultural e educação para todos**. Rio de Janeiro: Graal, 1992.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

JESS, L. C. **Frações em um livro didático na 5ª e 6ª séries:** uma aproximação através da história da matemática. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

JESUS, J. G. **Saberes e formação dos professores na pedagogia da alternância**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. 2. ed. Tradução de Elenisa Curt. Campinas, SP: Papirus, 1986.

KNIJINIK, G.; BASSO, M.V.; KLÜSENER R. **Aprendendo e ensinando matemática com o geoplano**. Ijui, RS: Ed. UNIJUI, 2004.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 2002.

LIMA, Elza de S. **Nova Escola**, São Paulo, abr. 2004.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006.

_______ (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006a.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema**, Rio Claro: IGCE-Unesp (SP), Ano 21, nº 31, p. 23-40, 2008.

MALASPINA, M. C. O. **O início do ensino de fração:** uma intervenção com alunos de 2ª série do Ensino Fundamental. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MARSICO, M. T.; CUNHA, M. C. T. C.; ANTUNES, M. E. M.; NETO, A. C. C. **Coleção Caracol** – Matemática, São Paulo - SP: Scipione, 2004.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MOREIRA, M. A.; COSTA, S. S. C. **Pesquisa em resolução de problemas em matemática:** uma visão contemporânea. I Escuela de verano sobre investigación en enseñanza de las ciencias. Actas. Universidad de Burgos, 1998.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na Escola Básica. Rio Claro, **Bolema,** ano 17, n. 21, p. 1-19, 2004.

NOSELLA, P. **Uma nova educação para o meio rural. Sistematização e problematização da experiência educacional das Escolas Famílias Agrícolas do Movimento de Educação Promocional do Espírito Santo**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; CAMPOS, T.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação matemática 1:** números e operações. São Paulo: Cortez, 2005.

OLIVEIRA, C. da C. M. **Componentes de contexto local na matemática escolar**: uma opção para o ensino-aprendizagem. 2007. 218f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagemm de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (org.), **Educação matemática:** pesquisa em movimento. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 2005, p. 213-231.

PAVANELLO, R. M. **O abandono da geometria**: uma visão historica. 1989. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, CEMPEM/F. E. UNICAMP, ano 1 – n° 1, p. 7-18; 1993.

______. Educação matemática e criativa. **A Educação Matemática em Revista,** São Paulo, n. 3, p. 5-11, 1994.

PIAGET, J. **Para onde vai a educação?** Tradução de Ivete Braga. Rio de Janeiro: José Olympio, 1991.

PIETROGRANDE, H. **Pedagogia da Alternância.** Doc. Mimeografado. MEPES – Anchieta/ES: 1976.

PIMENTA, S. G. (org.). **Didática e formação de professores:** percursos e perspectivas no Brasil e em Portugal. 4. ed. São Paulo, Cortez, 2006.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. (Publicado originalmente em inglês em 1945.).

ROCHA, M. M. **Um estudo do desenvolvimento de atividades investigativas na aprendizagem de matemática no ensino médio**. 2009. Dissertação (Mestrado em

Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

ROMANATTO, M. C. **Número racional:** relações necessárias à sua compreensão. 1997. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ROMANATTO, M. C. O livro didático: alcances e limites. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais**...São Paulo: SBEM/SP, 2004.

SANCHEZ, L. B.; LIBERMAN, M. P. **Fazendo e compreendendo matemática.** São Paulo - SP: Saraiva, 2008.

SANTOS, A. Os números racionais e seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: SBEM/SP, 2004. 11p.

SANTOS, A. **O conceito de fração e seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, L. G. **Introdução do pensamento algébrico:** um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SANTOS, V. M. P. dos. (org.). **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

_______ Matemática: conhecimento, concepções e consciência metacognitiva de professores em formação e em exercício. In: NASSER, L. (ed.), **Anais do 1º seminário internacional de educação matemática do Rio de Janeiro,** 28 a 30/07/93. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, UFRJ, 1995, p. 117-133.

______. Consciência metacognitiva de futuros professores primários numa disciplina de matemática e um exame de seu conhecimento, concepções e consciência metacognitiva sobre frações. **INEP Série Documental**: Eventos, n. 4, 2ª parte, abr./1994, p. 1 - 20.

SANTOS, V. M. P. dos; REZENDE, J. F. (coord.). **Números:** linguagem universal. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1996.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. **Conversas, mensagens de e-mail, e notas de aula da orientadora sobre como elaborar um projeto de pesquisa para o estudo piloto.** 2009.

______. **Conversas, mensagens de e-mail, e notas de aula da orientadora para elaboração do projeto de pesquisa de mestrado e relato final de pesquisa.** 2010, 2011.

SCHONS, L. M. B. **O geoplano como recurso didático para a aprendizagem de conceitos e aplicações de triângulos e quadriláteros.** 2008. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Pós-graduação do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Rio Grande do Sul.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo:** um novo design para o ensino e a aprendizagem. Tradução de Roberto Cataldo Costa (título original ‘‘Educating the reflective practitioner’’. New York: Jossey-Bass, 1998). Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SERRAZINA L.; MATOS, J. M. **O geoplano na sala de aula.** Lisboa: APM, 1988.

SILVA, C. M. S. da; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos S. O que um iniciante deve saber sobre a pesquisa em Educação Matemática? **Caderno de pesquisa em educação,** Vitória, Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Pedagógico, Programa de Pós-Graduação em Educação, Unifersidade Federal do Espírito Santo, v. 10, n. 19, p. 10-23, jan/jun. 1999.

SILVA, E. C. **Prática matemática:** um exame de sua influência nas concepções e atitudes dos professores e alunos do ensino médio. 2007. 220f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SILVA, M. J. F. da. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário.** 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, S. A. F. da. **Aprendizagens de professoras num grupo de estudos sobre matemática nas séries iniciais.** 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SILVA, V. et al. Uma experiência de ensino de fração articulada ao decimal e à porcentagem. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo: Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Ano 7, n. 8. p.16-23, Jun. 2000.

SILVA, W. R. da; DOMINGOS, J.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Geoplano circular: uma alternativa para se introduzir a geometria plana no ensino fundamental. In: 13º ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Jequié. **Anais...** Jequié – BA: UESB, 2009.

SOEK, A. M. (org.). **Mediação pedagógica na educação de jovens e adultos**. Curitiba: Editora Positivo, 2009.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 3. ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1988. (Publicado pela primeira vez em 1934.).

______. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, Editora Ltda. 1991.

ANEXO I

Relato do estudo piloto exploratório – 2º Semestre de 2009

Inicialmente, optamos por desenvolver um estudo exploratório que ajudasse a definir o foco da pesquisa definitiva. Desejávamos aprender como registrar dados em nossa realidade de sala de aula, assim como aprender a ouvir e compreender o que nossos alunos pensavam sobre fração. Em suma, queríamos experimentar alguns procedimentos metodológicos, como planejar instrumentos de coleta de dados e informações dos alunos e pensar em formas de registro, análise e interpretação das informações coletadas (SANTOS-WAGNER, 2009, 2010). Desejávamos saber que desafios poderiam surgir, e/ou descobrir alguns desafios práticos e vivenciados em uma sala de aula ao desenvolver uma pesquisa. Concordamos que

> [...] um professor de profissão não é somente alguém que aplica conhecimentos produzidos por outros, não é somente um agente determinado por mecanismos sociais: é um ator no sentido forte do termo, isto é, um sujeito que assume sua prática a partir dos significados que ele mesmo lhe dá, um sujeito que possui conhecimentos e um saber-fazer proveniente de sua própria atividade e a partir do qual ele a estrutura e a orienta. Nessa perspectiva, toda pesquisa sobre o ensino tem, por conseguinte, o dever de registrar o ponto de vista dos professores, ou seja, sua subjetividade de atores em ação, assim como os conhecimentos e o saber-fazer por eles mobilizados na ação cotidiana. De modo mais radical, isso quer dizer também, que a pesquisa sobre o ensino deve se basear num diálogo fecundo com os professores, considerados não como objetos de pesquisa, mas como sujeitos que detêm saberes específicos ao seu trabalho (TARDIF, 2002, p. 230).

A pesquisa de campo no estudo exploratório ocorreu no segundo semestre de 2009 em uma turma da 5ª série/6º ano do ensino fundamental, no turno matutino, de uma escola pública municipal de Guarapari/ES. A turma tinha trinta e seis alunos. Esses alunos nos forneceram informações importantes sobre fração. Elaboramos nossa proposta pedagógica sobre o conceito de fração especificamente para a turma. Nós nos comprometemos com a Secretaria de Educação do Município, direção e coordenação pedagógica da escola, com os alunos e seus responsáveis, que nossa proposta de trabalho em forma de pesquisa não se limitaria com o trabalho de dissertação de mestrado. E que nossa meta consistia em desenvolver um trabalho sequencial em forma de pesquisa também após o mestrado. Portanto, informamos que coletaríamos dados com a turma durante os quatro anos finais do ensino fundamental.

Ressaltamos a importância de pesquisar a própria prática no processo de produção de novos conhecimentos a fim de ampliar o grau de compreensão do fenômeno educativo, bem como possibilitar ao professor reflexão e mudança consciente de seu fazer pedagógico. Também, por acreditarmos que a docência é fonte de aquisição de conhecimento, por se tratar de uma forma de investigação e experimentação.

Pensamos em estar sempre analisando e discutindo com a turma a compreensão deles de alguns conceitos, pois nos interessava o processo de formação de conceitos sobre fração. Optamos por preparar atividades e desenvolver um planejamento de aulas que nos permitissem avaliar os conhecimentos que traziam e os que fossem resultantes do desenvolvimento da atividade. Nosso propósito consistiu em mediar o conteúdo previsto da disciplina com os alunos de forma que os mesmos pudessem evidenciar com compreensão a lógica sequencial dos conteúdos (VYGOTSKY, 1991). E que pudessem perceber a importância sequencial do conteúdo estudado em anos anteriores, e não como um conteúdo isolado (conhecimento fragmentado). Interessava-nos desmistificar para os alunos a ideia de que matemática é um conhecimento acessível apenas para poucos, mas deixar claro que matemática é um conhecimento necessário e que pode ser aprendido com prazer por todos. Acreditávamos que, ao aproximar a matemática escolar da realidade dos alunos, estavamos encoranjando-os a aprender os conteúdos, e este seria um dos caminhos para torná-los mais confiantes e parceiros no trabalho com a disciplina e a pesquisa. Tínhamos várias perguntas em mente para serem respondidas, tais como: Que formação possui o professor que ensina matemática nas séries iniciais? Por que inúmeras vezes muitos alunos não entendem e/ou rejeitam tanto essa matéria? Por que alguns professores de matemática demonstram tanto autoritarismo em suas aulas?

Alguns estudos realizados nos permitiram compreender que a formação permanente mais sólida e frutífera é a que se aprende com a reflexão sobre a prática. Pois essa nos obriga a modificar as propostas originárias sobre as concepções de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, consideramos também importante a abordagem de Elvira Ferreira (2002) ao nos dizer que

> A formação de professores não se esgota em cursos pontuais, sobre temas específicos, desligados da sala de aula e do contexto da escola. A formação de professores tem de caminhar muito para além desta concepção e

> fomentar uma ligação cada vez mais estreita entre a teoria e a prática, prolongando-se no tempo, em contextos de escola, com grupos de professores, com mais debate, com trocas de experiências, com mais reflexão, ganhando bastante significado o seu desenvolvimento ao longo de toda sua carreira (p. 238).

Consideramos também importante *a discussão* sobre *ciência, sociedade, paradigma dominante, sua crise e paradigma emergente* de Santos (2000), em que suscita questionamentos sobre a necessidade de uma escola que rompa com o cientificismo inoperante e que promova o conhecimento *"prudente para uma vida decente",* como é muito bem discutido por ele. Bem como, a necessidade de uma escola como *lócus* de formação do cidadão como um espaçotempo privilegiado de produção/socialização do conhecimento e não como um lugar de reprodução dos modos de fazer e pensar a educação e a ciência na perspectiva da racionalidade técnico-instrumental (CARVALHO, 2009).

As leituras do livro de Santos (1997), *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos* foram determinantes na delimitação do objeto do estudo exploratório. Segundo a autora é importante que os alunos sintam o desejo de aprender matemática, percebam sua importância no processo de aprendizagem e sejam responsáveis ativos por esse processo de construção do conhecimento matemático, que ocorre em um contexto de interações sociais entre professor-aluno e aluno-aluno.

Ademais, além dos questionamentos iniciais outros começaram a emergir, como por exemplo: a) Como planejar e aprimorar o planejamento de aulas incorporando resultados de outros estudos? b) O que os alunos aprendem com compreensão dos conteúdos abordados nas aulas? c) Sobre frações, o que eles lembram e sabem do assunto? d) A forma como temos abordado o tema tem contribuído com o aprendizado dos alunos? e) Será que o desinteresse presente por parte de alguns alunos nas aulas é reflexo de uma abordagem negativa do conteúdo? f) Por que, em geral, os alunos não conseguem transferir seus conhecimentos em situações fora do contexto escolar? Procuramos pensar e responder a estes e outros questionamentos que fomos tendo ao implementar o estudo exploratório piloto. A seguir, descrevemos as cinco atividades desenvolvidas. E inserimos alguns comentários e reflexões. Elas totalizaram nove aulas que foram desenvolvidas de final de setembro até novembro de 2009. Colocamos em alguns momentos interpretações das informações obtidas com as respostas dos alunos em diferentes tarefas.

Atividade 1 - Atividade diagnóstica e de ensino

Data: 24/09/09 **Nº de Aulas:** 01 (50 minutos)

Objetivos:

- Identificar as características dos alunos no que se refere à idade/ano;
- Identificar o que os alunos pensam sobre a reprovação.

Recurso utilizado:

Em uma folha e no quadro de giz, colocamos o nome de todos os 36 alunos da turma, solicitamos que preenchessem a tabela no quadro e fomos registrando esses dados na folha. Na folha e no quadro, foram solicitadas as seguintes informações: idade; tempo que estuda na escola; se já reprovou ou perdeu algum ano, descreva: o número de vezes e a série; e motivos.

Os resultados obtidos foram importantes para obter uma primeira visão da turma, pois pudemos constatar que apenas seis (06) alunos não tinham reprovado em anos anteriores. Os demais trinta (30) alunos já haviam sido reprovados, tendo de um a três anos de reprovação em alguns casos sendo exatamente a matemática na 5ª série/6º ano a disciplina responsável pelo maior índice de reprovação dos alunos da sala. Ao registrarem quanto aos motivos pela reprovação, os alunos destacaram: a postura do professor; a não regularidade das aulas e do funcionamento da escola; o barulho em sala; pouca explicação dos conteúdos.

Atividade 2 - Atividade diagnóstica de ensino: Identificando o que pensam sobre a matemática

Data: 30/09/09 **Nº de Aulas:** 02 (totalizando 100 minutos)

Objetivo:

- Saber o que os alunos pensam sobre a matemática.

Recurso utilizado:

Em forma de questionamento solicitamos que os alunos individualmente respondessem aos questionamentos:

a) Em sua opinião, para que serve a matemática?
b) Se você fosse comparar a matemática a algum animal, que animal a matemática seria? Por que?

c) Que animal a matemática nunca seria? Motivos?

Esse momento foi surpreendente, pois parecia que os alunos jamais imaginariam que fossemos lhes fazer questionamentos como esses. Momento em que um dos alunos em bom tom, comenta o seguinte:

Aluno Dudu - A19: *Professor, saber a opinião da turma em relação à matemática é fácil, não precisa nem responder, duvido se alguém da sala gosta. Aponta para os colegas e continua, um ou outro pode até falar que gosta só para te agradar, mas eu conheço a turma. Com exceção aos seis que não são repetentes, os demais todos reprovaram em matemática no ano anterior. Eu e alguns outros já estamos repetindo a série/ano pela terceira vez. Ou seja, a matemática só serve para reprovar os alunos. Aliás, os próprios professores no ano passado disseram, se o aluno está de recuperação em matemática e em outras disciplinas vamos fazer o seguinte: Ele primeiro fará a recuperação em matemática. Ai então, se passar poderá fazer as demais, caso contrário pra que perder tempo aplicando prova de recuperação.*

Quando questionados para que pudessem descrever, se a matemática fosse um animal, que animal ela seria... porque ..., obtivemos como respostas que:

- Na opinião de 08 alunos a matemática seria um *tigre ou Leão*, por serem animais fortes e muito ágeis. Do mesmo modo a matemática é muito rápida, quando o aluno começa a entender a matéria o professor logo muda de assunto;
- Para 07 alunos a matemática é como um *Pássaro*, quando livre toma várias direções, por isso pode estar em lugares diferentes em pouco tempo;
- Na opinião de 06 alunos a matemática é como uma *Centopéia*, pelo fato de ter muitas pernas;
- Segundo outros 06 alunos a matemática é como uma *Cobra*, de qualquer forma assusta, mesmo sabendo que algumas cobras podem não ser perigosas;
- Para 05 alunos a matemática é como um *Gato*, por causar desconfiança sempre.
- Para 03 alunos a matemática é como uma *Formiga ou como as abelhas*, nunca estão fazendo algo sozinha;

- Na opinião de 01 aluno não saberia que animal seria a matemática, porém que seria algo muito feio, como *um bicho de Sete Cabeças*, pois mesmo sem aprender muita coisa de matemática todas as pessoas vivem.

Na opinião dos alunos, a matemática nunca seria um animal como:

- Uma *Lesma*, pois a matemática deixa todo mundo agitado, até meio louco;
- Nunca seria um *Cão*, pois o cão mesmo tendo medo de alguma coisa, tende a não demonstrar. Já a matemática incomoda o aluno mesmo antes de a aula iniciar;
- A matemática não seria um *Beija Flor*, pois os pássaros são perfeitos;
- Não seria um *Leão*, pois o leão assusta sempre, mas a matemática, nem sempre.

Com esses registros, a partir das colocações dos alunos, podemos evidenciar que os professores de matemática de anos anteriores, lhes deixaram, em sua maioria, uma imagem negativa da disciplina. Parece também que tinha sido a primeira vez que alguém lhes perguntava o que pensavam sobre matemática e como se relacionavam com esta disciplina.

Atividade 3 - Atividade diagnóstica e de ensino: Perguntas abertas sobre fração

Data: 07/10/09 **Nº de Aulas:** 02 (totalizando 100 minutos)

Objetivo:

- Identificar que associações fazem os alunos com frações.

Recurso utilizado - Questionamentos

a) Represente no desenho livremente qualquer fração que você queira;
b) Após a representação no desenho, represente através de números a fração representada;
c) Justifique cada resposta.

Ao olhar e analisar as atividades desenvolvidas pelos alunos em grupo, verificamos que algumas duplas utilizaram procedimentos que eram semelhantes tanto na representação no desenho quanto na justificativa para os números colocados na fração. Logo, iniciamos uma segunda leitura cuidadosa de cada trabalho das duplas e começamos a registrar as interpretações dos alunos e fizemos questionamentos sobre algumas das soluções. Percebemos que cinco grupos de alunos utilizaram estratégias semelhantes ao desenvolverem as atividades. Segue nossa interpretação inicial desses trabalhos.

Grupo 01 e 02

Após cada dupla ter representado em uma folha uma figura retangular, repartiram a figura em dez retângulos menores, aparentemente de mesmo tamanho, tendo pintado cinco desses de forma alternada. Após a representação no desenho, os alunos utilizaram três frações, sendo estas:

a) $\frac{5}{10}$ b) $\frac{10}{5}$ c) $\frac{2}{5}$

Justificando, que a representação fracionária representada na letra ***a*** seria a representação correta, isso porque a figura representada no desenho estava indicando cinco partes consumidas, dos dez pedaços da figura. Quanto às representações indicadas nas letras ***b*** e ***c***, as duplas afirmam que não são respostas corretas, pois a figura não foi repartida em cinco pedaços. Disseram também para as respostas das letras **b** e **c** que primeiro, porque a figura representada não está representando dez quintos; segundo, porque a figura foi dividida em dez partes e não em cinco. E que foram consumidas cinco e não duas partes.

Em uma análise inicial, observamos que esses alunos associam o desenho a algo que lhes permite pensar em retirar/consumir partes. Os alunos parecem estar associando nesta atividade fração com a ideia de parte-todo e lembrando dos exemplos que lhes foram mostrados em séries anteriores, tais como: bolo, pizza, barra de chocolate, maçã, etc. Além de demonstrarem uma preocupação quanto ao papel que exerce o numerador e o denominador em uma fração.

Grupo 03, 04 e 05

Os seis alunos representaram no desenho uma figura que nos lembra um retângulo, mas, descrevem a figura como sendo um quadrado. Semelhante ao que foi feito pelos grupos anteriores, esses grupos representam mais do que uma forma fracionária para justificar a figura com a fração correspondente.

a) $\frac{8}{6}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{6}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{6}{8}$

Afirmando que as alternativas *a, b, c* e *d* não seriam a representação correspondente ao desenho feito, mas sim a alternativa *e*, pois a figura foi repartida em oito partes e foram pintadas seis dessas partes.

Esses alunos no grupo utilizam ainda outras representações no desenho e em forma de fração, que se assemelham à questão descrita anteriormente.

No entanto, outros três grupos composto por um total de quatorze alunos embora tenham utilizados procedimentos semelhantes aos grupos anteriores, não se atentaram em utilizar figuras e/ou representações em partes proporcionais.

Essas soluções nos permitiram em uma primeira análise concluir que os alunos da 5ª série/6º ano da escola, só reconhecem a fração com ideia de parte-todo.

Atividade 4 - Atividade diagnóstica e de ensino: Perguntas sobre fração

Data: 15/10/09 **Nº de Aulas:** 02 (totalizando 100 minutos)

Objetivo:

- Identificar ideias nos olhares dos alunos frente às frações.

Recurso utilizado - Questionamentos

Dando continuidade às questões trabalhadas na aula anterior, julgamos necessários explorar outros quatro questionamentos com os alunos. Fizemos perguntas para os grupos que demonstraram pensamentos semelhantes aos pontos colocados anteriormente. Sendo estes:

a) Lembra já ter estudado alguma coisa sobre frações em anos anteriores?
b) O que entendem sobre fração?
c) Já se deparou com alguma representação em forma de fração no cotidiano?
d) Dê exemplos de como uma fração pode ser representada?

Resultados obtidos

Como anteriormente, os alunos demonstraram conhecimento superficial sobre a questão colocada, identificando mais claramente fração como parte de algo. E que embora tenham estudado o tema em anos anteriores, recordam que além das operações, as frações servem para representar pedaço de bolo, pizza e barra de chocolate, ou seja, parte de algo. E que no dia a dia, embora as pessoas se deparem com as representações fracionárias, não as identificam como números representantes de um novo conjunto numérico.

Fig. 101 – Atividades em grupo

Alunos trabalhando em pequenos grupos representam e justificam suas respostas envolvendo o tema fração.

Nós solicitamos aos alunos em pequenos grupos que questionassem entre eles o seu entendimento sobre fração. Pensamos em estar criando possibilidades de uma situação de debate entre o grupo, para que cada aluno pudesse expor ao seu colega seu entendimento sobre fração. Uma consequência desta atividade em forma de diálogo nos grupos foi perceber que tinham dúvidas e que não sabiam explicar nem argumentar sobre seus entendimentos. Percebemos alunos inseguros de sua ideia de fração e do entendimento que possuíam sobre a mesma. A partir daí, houve maior envolvimento da turma, e indicamos um aluno para registrar os questionamentos, dúvidas e entendimentos dos alunos sobre fração em uma folha. Registros de algumas respostas apresentadas pelos alunos:

Fração: *É parte de algo; é um número dividido pelo outro; representa a divisão de alguma coisa.* Uma pizza, dividida em oito pedaços, e que foram consumidos três pedaços aleatoriamente.

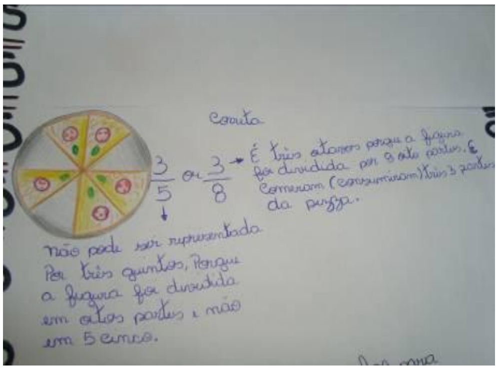


Fig. 102 – Solução de um grupo

Após representar no desenho, descreve e justifica as seguintes frações 3/5 e 3/8, como incorreta e correta.
A fração 3/5 indica uma representação incorreta, pois a pizza foi dividida em oito partes e não em cinco. A fração que representa corretamente a parte consumida da pizza é 3/8. Justificando que três partes da pizza foram consumidas.

Outros alunos fizeram representações semelhantes desenhando pizza, bolo, barra de chocolate ou maçã. Repartiam alguns desenhos em oito partes iguais, diziam que tinham comido apenas três partes e solicitavam que fosse representada a fração associada com essa situação. E diziam que a resposta seria 3/5, porque tinham comido três partes e ainda tinham cinco partes para comer. Ou seja, estavam comparando o número de partes comidas com o número de partes que ainda tinham para comer. Nesse caso, os alunos estavam associando a representação no desenho à ideia de fração com o significado de razão comparando as partes entre si (SANTOS, 1997). Em outros casos, associavam uma situação semelhante a essa com a ideia de fração com o significado de fração como parte-todo, e nem percebiam que essas ideias eram interpretações diferentes.

Após representarmos no quadro algumas figuras geométricas (desenhos), com estas repartidas em partes pequenas, e tendo pintado algumas dessas partes, orientamos os alunos da turma para que pudessem desenvolver cada uma das seguintes tarefas: a) transcreva para o caderno cada uma das figuras representada; b) represente a fração correspondente em cada caso; c) comente sobre a solução encontrada. Com o desenvolvimento dessa tarefa pelos alunos da turma e análise das respostas, nós nos deparamos com algumas soluções e justificativas. Dentre elas, destacamos as soluções de: Tião-A1, Douglas-A2, Lorrainy-A3, Domingos-A9, Vieira-A11, Lobo-A16, Dudu-A19 e Fernando-A23, que seguem descritas abaixo.

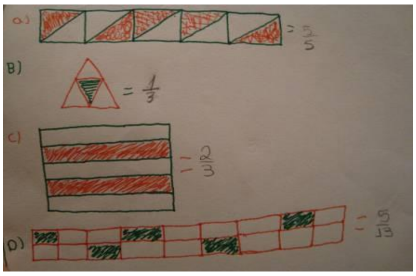


Fig. 103 – Solução da aluna Lorrainy-A3

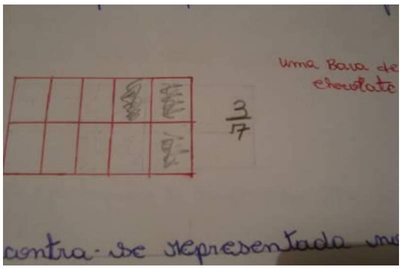


Fig. 104 – Solução do aluno Vieira-A11

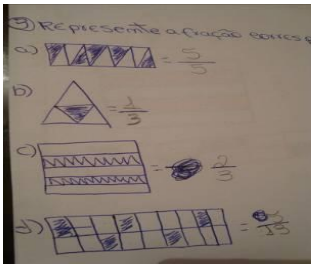


Fig. 105 – Solução do aluno Dominguinho-A9

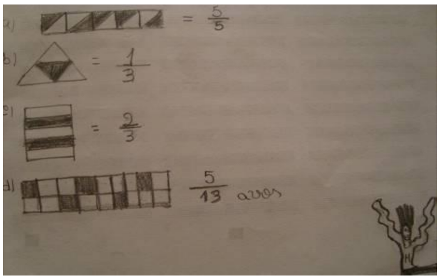


Fig. 106 – Solução do aluno Dudu-A19

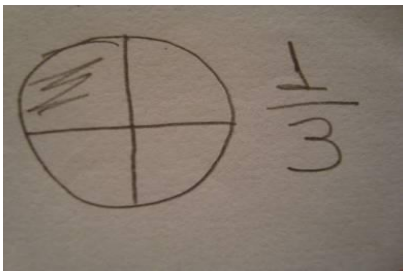


Fig. 107– Solução do aluno Tião-A1

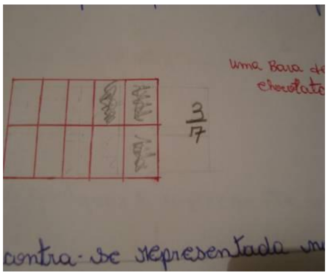


Fig. 108 – Solução do aluno Douglas-A2

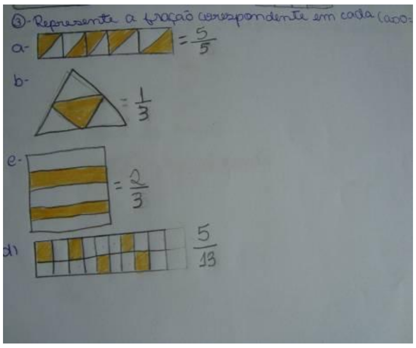


Fig. 109 – Solução do aluno Lobo-A16

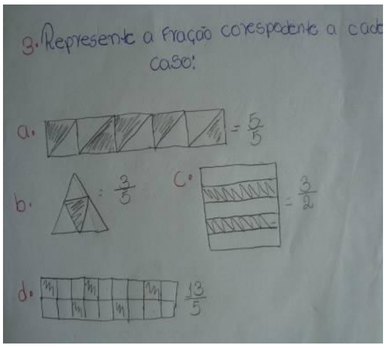


Fig. 110 – Solução da aluna Fernandes-A23

Como descrito anteriormente, ao verificarmos as respostas dadas pelos alunos da turma e específicamente dos alunos aqui mencionados, podemos verificar que de modo geral os alunos apresentavam uma forte necessidade de associar o número de partes pintadas em cada figura, com o número de partes não pintadas nas figuras. Não fazem nenhuma menção quanto à situação envolvendo a parte em destaque em cada figura e a unidade ou todo (figura) ora representado. Ou seja, não percebem que em cada caso temos uma ou mais partes que foram pintadas de um total de partes iguais em que a unidade ou todo (figura) foi repartido.

Diante dos questionamentos e debate das respostas que ocorreu em sala de aula, um aluno se dispôs em ir ao quadro para explicar a situação que seu grupo tinha pensado. Esse aluno A19 – Dudu diz que, em seu grupo, foram discutidas três possibilidades de respostas para o desenho que eles haviam representado. Informa

Fig. 111 – Solução do aluno Dudu-A19

que alguns colegas pensavam que a fração correta seria 10/4. Outros argumentavam que era 4/10. E apenas um aluno acreditava que a resposta também poderia ser 2/5. Com a participação dos colegas de sala, ele justifica através do registro no quadro que a maneira correta de representar a fração correspondente ao desenho é 4/10. Porque a figura se encontra dividida em dez partes, e destas quatro delas estão pintadas e a figura não está dividida em quatro ou cinco partes. Nesse caso, o aluno A9 não percebe a equivalência entre as frações 4/10 e 2/5. No entanto, ele nos diz que, após concordar com a opinião do seu grupo, começou a pensar que 2/5 também poderia ser possível. E fez o seguinte comentário: *Acredito* *que embora a figura esteja dividida em dez partes, ela também poderia ser representada por 2/5, uma vez que os números quatro e dez são números pares, mas eu tenho dúvidas de como faria para de 4/10 chegar em 2/5.*

Reconhecemos aspectos do contrato didático entre professor e alunos e dos procedimentos de interação social entre todos na sala de aula ao analisar registros desenvolvidos por outros alunos, assim como a ilustração e explicação do aluno Dudu-A19. Essa situação permitiu-nos sentir a importância de valorizarmos ideias dos alunos e darmos atenção aos processos de resolução de cada aluno. O que pôde levá-los a ampliar suas análises sobre os problemas e a experimentar caminhos alternativos na busca de estratégias para a resolução de situações-problema. Gonçalez e Brito (2005) reforçam isso ao afirmarem que:

> Em muitas salas de aula, é observado que apenas as respostas certas dos alunos são aquelas passiveis de recompensa, sendo dada pouca ou nenhuma atenção aos diferentes procedimentos que o estudante usa para resolver um problema. Ocorrendo situações como essa, o ensino pode apresentar um desvio, pois é enfatizado apenas o produto final e não o processo. Embora a resposta final correta seja desejável, o excesso de cobranças e punição quando ocorrem as respostas erradas acabam gerando atitudes negativas e alta ansiedade durante as provas e exames (p. 224).

A matemática é um campo científico em permanente evolução, que se constituiu ao longo da evolução histórica pela necessidade do homem de intervir no meio que o cerca e de organizar e ampliar seus conhecimentos. Ela não é algo que diz respeito somente aos números, mas sim à vida, no mundo em que vivemos. Lida, por exemplo, com ideias sobre quantidades, formas, regularidades, e longe de ser aborrecida e estéril, como muitas vezes é retratada, ela possibilita criatividade. Ao nos focarmos no ensino da matemática, concluímos que, para muitos professores que atuam nas séries iniciais do ensino fundamental, a matemática se constitui como uma disciplina teórica que envolve muitos conceitos sistematizados com busca de resultados que, às vezes, são de difícil compreensão para alunos (LORENZATO, 2006, 2006a, BRASIL, 2001). Por sua vez, os livros didáticos, instrumentos mais usados pelos professores, apresentam de maneira geral os conceitos e resultados de forma bastante linear. Assim, os livros trazem alguns exemplos que nem sempre possuem significados para os alunos. Diante do exposto, os alunos ficam desmotivados para o estudo de matemática e criam mitos de que só alguns aprendem matemática. Sentem-se inseguros e isso pode causar fracassos na aprendizagem em matemática e levar a reprovações (SANTOS, 1997).

Dando continuidade às atividades, os alunos mais uma vez representam a fração no desenho, indicando uma fração a partir da parte colorida. No entanto, como podemos observar a representação 2/4 e 1/2 na concepção dos alunos são completamente diferentes. Pois sempre afirmavam que, embora pudessem ser representadas em figuras semelhantes, 2/4 e 1/2 são quantidades diferentes.

Assim, segundo o aluno a representação 1/2 não corresponde corretamente à figura desenhada, porque o desenho foi dividido em quatro partes e não em duas. Esse aluno também não percebe a equivalência entre as frações dois quartos e um meio como representando uma mesma fração.

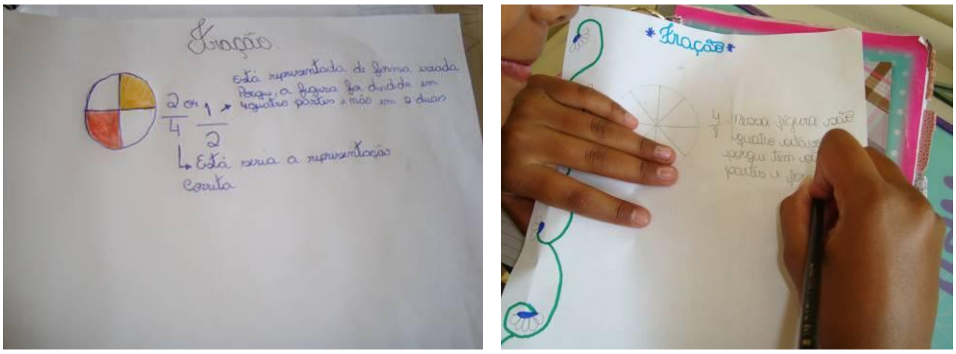


Fig. 112 – Atividade em grupo

Os alunos fizeram as seguintes observações: Uma fração é uma divisão de algo para comer, algo para dar, para vender (um terreno, uma casa, uma laranja, uma parte de brita...) ou outros objetos.

Esta constatação nos mostra que seria necessário trabalhar com esses alunos a ideia de equivalência, mostrando que ao manter a superfície considerada de um todo, independente de quantas divisões fossem feitas nesse todo, estaríamos tendo representações diversas de uma mesma fração. Por isso, acreditamos que a construção do conhecimento com compreensão pelo aluno pode favorecer o entendimento do assunto trabalhado, o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento crítico. Só o conhecimento sobre fração e fração equivalente construído com compreensão e com argumentos claros de como identificar uma fração, e de como reconhecer quando duas frações podem ser equivalentes, porque estão mantendo a mesma área representada, pode permitir que o aluno resolva com segurança outras situações-problema.

Comentamos em sala de aula que há alguns usos curiosos de frações. Por exemplo, as pessoas que professam a religião católica rezam o terço, assim chamado porque corresponde a um terço de um rosário. O rosário é um colar com 165 contas, que é usado para não perder a conta das rezas. Ele corresponde a 15 dezenas de ave-marias e quinze padre-nossos. Assim, o terço rezado na igreja é um colar que corresponde a um terço de um rosário, onde se rezam 5 dezenas de ave-marias e 5 padre-nossos. Ou seja, a relação entre 50 ave-marias e 5 padre nossos e um rosário que corresponde a um total de 150 ave-marias e 15 padre-nossos é a de um terço de um rosário. Com essa situação do rosário, envolvendo uma situação contextualizada de fração, destacávasse a ideia de parte-todo onde o todo era um conjunto discreto dividido em três partes iguais.

Também falamos sobre outro uso curioso de frações. Dissemos que isto ocorre na expressão corriqueira “vá para os quintos!”. Fomos explicando para os alunos que antigamente os colonizadores portugueses cobravam um imposto sobre todo o ouro extraído no Brasil, correspondendo a um quinto do ouro extraído. E este imposto era mandado para Portugal em navios chamados, naturalmente, “o navio dos quintos”. Nessa expressão dos portugueses colonizadores estava presente a ideia fracionária. Já a expressão corriqueira “vá para os quintos!”, quer dizer “vá para longe!”. Ou seja, nessa expressão coloquial, perdemos o significado de fração.

Atividade 5 - Atividade diagnóstica e de ensino: Jogo com cartões

Data: 30/10/09 **Nº de Aulas:** 02 (totalizando 100 minutos)

Objetivos:

- Identificar frações em diferentes representações;
- Associar cada representação fracionária ao seu correspondente, que pode ser um número ou linguagem escrita ou desenho.

Recurso utilizado:

Cartões para os alunos trabalharem com os mesmos em jogos realizados em grupos. Os alunos foram distribuídos em grupos com 03 componentes em cada grupo.

Orientação dada aos alunos para desenvolver a atividade:

1 - Embaralharem as cartas para, em seguida, dividi-las entre os jogadores;

2 – Organizem suas cartas na mão de forma que os demais não conseguissem vê-las;

3 – Cada jogador deveria verificar se havia cartas em sua mão que formassem uma trinca. Ou seja, se tinha em sua mão a carta correspondente a uma fração na linguagem simbólica matemática, e uma outra carta correspondente a mesma fração tendo seu nome em linguagem corrente e também uma outra carta com sua representação gráfica. Se tivesse formado uma trinca, o jogador deverá colocar essas cartas na mesa para que os outros jogadores pudessem ver a trinca formada;

4 – Decidia-se quem iria começar o jogo através de um sorteio. Após o sorteio do dado, o aluno que obtivesse o maior valor numérico no dado seria o primeiro jogador. Assim, o primeiro jogador deveria retirar uma carta do colega que estivesse à sua direita e verificar se conseguiria formar uma trinca com as outras cartas que já tivesse em suas mãos. Se conseguisse formar uma trinca, ele deveria colocá-la na mesa. Se o jogador não conseguisse formar uma trinca, ele deveria segurar essa carta junto com as demais em sua mão e deveria passar a vez para o colega à sua direita;

5 - O jogo prosseguiria dessa forma e seria considerado vencedor o jogador que tivesse formado em primeiro lugar trincas com todas as suas cartas.

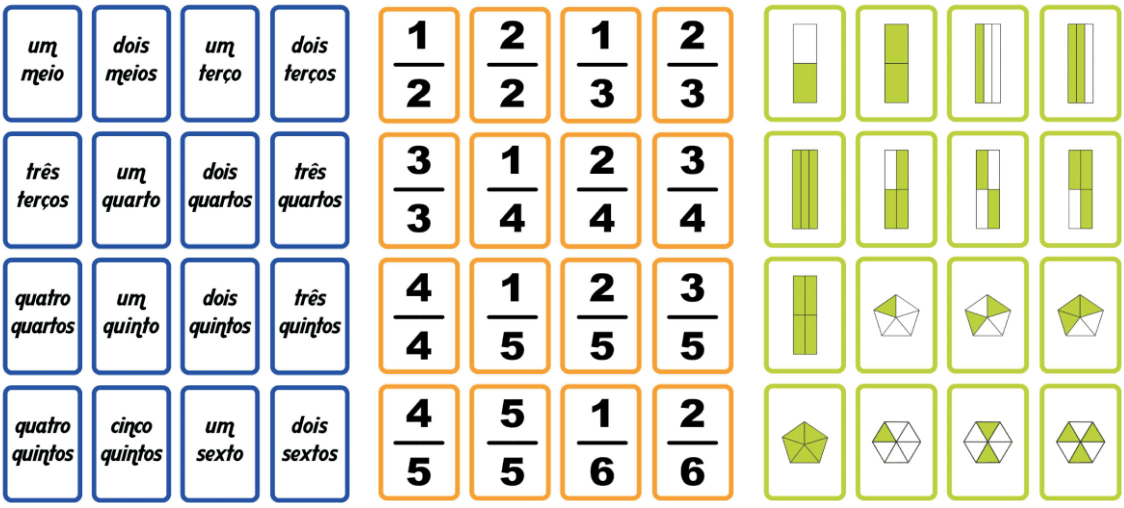


Fig. 113 – Ativ. envolvendo cartões com frações

Na medida em que os alunos distribuídos em pequenos grupos desenvolviam a atividade, nossa preocupação era observar e registrar os diálogos ocorridos. Ao realizarem a atividade em forma de jogo, os alunos foram estimulados a pensar em situações específicas envolvendo fração. Buscamos relacionar a fração na representação simbólica matemática, na representação em linguagem escrita e fracionária através do desenho. Entendemos ser saudável para o aprendizado escolar que os alunos trabalhem em pequenos grupos. Percebíamos que era importante mostrar para os alunos que eles podiam aprender trabalhando em grupos. E ressaltar a importância de criar o hábito de explorar atividades matemáticas em pequenos grupos, por que permiti trocar ideias de uns com os outros sobre o que fazem, como fazem e porque fazem. Tínhamos a intenção de que os alunos aprendessem a: (a) solicitar ajuda e oferecer ajuda; (b) ouvir a opinião do colega; (c) interagir; (d) construir significados, e mediar pensamentos. Ou seja, se queremos que nossos alunos construam conhecimentos a partir de interações sociais, isso só será realmente possível a partir do momento em que eles aprendam a trabalhar em grupo (SANTOS, 1994, 1997); (VYGOTSKY, 1988/1934). Procuramos com a atividade dar oportunidades aos alunos de interagirem e de poderem mediar conhecimentos entre si, de agirem na zona de desenvolvimento proximal, conceitos explorados na teoria de Vygotsky e estudados no mestrado.

Segundo Vygotsky (1988/1934, p. 101) *a aprendizagem está relacionada ao desenvolvimento desde o início da vida humana, como sendo um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas.* Também comenta em sua obra (VYGOTSKY, 1988/1934) que a mediação é um processo de intervenção de um elemento numa relação; onde a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento. Ao longo do desenvolvimento mental do indivíduo as relações mediadas passam a predominar sobre as relações diretas. Vygotsky trabalhou com a noção de que a relação do homem com o mundo deveria ser uma relação direta, mas, é fundamentalmente, uma relação mediada.

Depoimentos de professores participantes do Programa de Formação Continuada em Matemática no Município Alfredo Chaves em 2009

Dentro das atividades previstas para o trabalho com os professores dos anos iniciais durante um período de seis meses usávamos algumas do material do Pró-letramento (BRASIL, 2008) e preparávamos outras. A partir dos estudos de Gómez

Chacón (2003) e situações vivenciadas no GEEM-ES decidimos investigar como os professores se relacionavam com alguns conteúdos matemáticos (SILVA; SANTOS-WAGNER, 2010). Aqui trazemos respostas de quinze participantes relativas aos seus pensamentos e sentimentos quando ensinam frações. Essas respostas surgiram quando passamos duas tarefas aos professores no inicio da formação continuada.

Tarefas propostas: a) Diga três conteúdos matemáticos que gosta de ensinar para seus alunos. Explique seus motivos. b) Agora descreva três conteúdos matemáticos que não gosta de ensinar. Explique os motivos. Ao ler as respostas do grupo de professores ficamos surpresos ao perceber que muitos comentavam ter dificuldade de compreender o conceito de fração e ensinar o mesmo. Por isso, transcrevemos parte das respostas dos professores com os trechos relativos a esse tema. Colocamos as respostas em itálico e sublinhamos palavras ou trechos sobre fração. Observamos que esse assunto é difícil para esses professores, que eles se recordam de suas dificuldades e que eles não sabem como ensinar o mesmo. Os poucos que comentam algo do processo de ensino, falam sobre ideias de bolo e repartição. Ou seja, eles associam nesse caso fração com a ideia de parte-todo.

Professora A1: *Já trabalho como professora nas séries iniciais há dezoito anos e fico feliz quando hoje vejo que muitos de meus alunos são filhos de meus ex-alunos. <u>Ao mesmo tempo, reconheço que, mesmo hoje, contribuo pouco no entendimento de meu aluno quanto às frações.</u>*

Professora A2: *Trabalho como professora nas séries iniciais há dezoito anos e gosto do meu trabalho. No entanto, nunca gostei de matemática e percebo que meus alunos também não gostam dessa matéria. <u>Quanto ao tema fração, só ensino para os meus alunos a representar no desenho.</u>*

Professora A3: *Trabalho como professora de matemática nas séries iniciais há treze anos e gosto. <u>Ensinar fração não é fácil, por ser um número diferente daquele que os alunos estão começando a aprender. Acho que nem deveria ser um conteúdo das séries iniciais.</u>*

Professora A4: *Trabalho como professora nas séries iniciais há dez anos, mas só ensino matemática por fazer parte do programa do ensino fundamental.* <u>*Quanto ao tema fração, tenho muita dificuldade.*</u>

Professora A5: *Trabalho como professora nas séries iniciais há onze anos.* <u>*Me esforço para que meus alunos aprendam ao máximo, mas tem alguns assuntos que são difíceis para o próprio professor, dentre eles, fração.*</u>

Professora A6: *Trabalho como professora nas séries iniciais há seis anos.* <u>*Tento ensinar um pouco, recordando como aprendi. Levei para a sala de aula um bolo e reparti com os alunos, dando um pedaço para cada um. Acho que entenderam.*</u>

Professora A7: *Trabalho como professora nas séries iniciais há dez anos, e* <u>*não dá para saber se os alunos aprendem ou não fração, porque é uma matéria muito difícil,*</u> *e eu* <u>*não fico perdendo muito tempo se sei que eles não vão aprender mesmo.*</u> *São muito novos e mais na frente irão aprender.*

Professora A8: *Trabalho como professora nas séries iniciais há oito anos. Penso que o professor nas séries iniciais não deveria ensinar matemática, uma vez que não tem base para isso.* <u>*Nunca ensinei fração, apenas peço aos alunos para pintar algumas figuras como vêm nos livros.*</u>

Professora A9: *Trabalho como professora nas séries iniciais há treze anos. Me formei em pedagogia porque aprendi a não gostar da matemática desde o ensino fundamental.* <u>*Me lembro que, na sexta série, fiquei reprovada em matemática porque, na prova final de recuperação, o professor só passou continhas, envolvendo as quatro operações com frações, e eu tinha dificuldade em diferenciar as regras para cada caso.*</u> *Por* <u>*esse motivo, nunca mais estudei esse tema e tenho raiva.*</u>

Professora A10: *Trabalho como professora nas séries iniciais há dezesseis anos.* <u>*Ensino fração para meus alunos e busco utilizar diferentes materiais, como o disco com frações.*</u> *No entanto,* <u>*é um conteúdo muito difícil e que o professor perde muito tempo tentando ensinar o aluno.*</u> *Este que* <u>*nem sempre consegue fazer as contas por ter dificuldade em multiplicar e dividir.*</u>

Professora A11: *Trabalho como professora nas séries iniciais há dois anos, estou começando agora, mas também percebo que preciso aprender esse assunto se pretendo ensinar para os meus alunos. Gostaria de poder trabalhar apenas com as outras matérias.*

Professora A12: *Trabalho como professora nas séries iniciais há sete anos. Não gosto de matemática e, por esse motivo, também cursei Pedagogia. Ensino fração só no final do ano, quando o aluno já compreende melhor, mas tenho dificuldade em ensinar.*

Professora A13: *Trabalho como professora nas séries iniciais há oito anos. Os alunos aprendem fração quando inicio mostrando um bolo e reparto com eles. Mas as operações são difíceis.*

Professora A14: *Trabalho como professora nas séries iniciais há seis anos. Os alunos têm dificuldade em saber que número a fração representa e, por isso, acho que deveria ser ensinado por um professor de matemática.*

Professora A15: *Trabalho como professora nas séries iniciais há vinte anos. Hoje tenho menos dificuldade em ensinar fração para os meus alunos, embora seja uma matéria difícil. Passo muitos exercícios para que possam fazer até aprenderem e tirar boa nota. Para aprender fração, o aluno precisa gravar as regras.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

_______. **Pró-Letramento:** Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental: matemática. ed. rev. e ampl. incluindo SAEB/PROVA BRASIL matriz de referência. Secretaria de Educação Básica – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

CARVALHO, J. M. **O cotidiano escolar como comunidade de afetos.** Petrópolis, Rio de Janeiro: DP et all, Brasília, DF: CNPq, 2009.

FERREIRA, E. Da professora à formadora. In: GTI (org.). **Refletir e investigar sobre a prática profissional.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2002, p. 235-256.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

GONÇALEZ, M. H. C. de C.; BRITO, M. R. F. de. A aprendizagem de atitudes positivas em relação à matemática. In: BRITO, Márcia Regina F. de. **Psicologia da educação matemática:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2005, p. 221-233.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006.

_______ (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006a.

SANTOS, B. S. **A crítica da razão indolente:** contra o desperdício da experiência. São Paulo: Editora Cortez, 2000.

SANTOS, V. M. P. dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

______. Consciência metacognitiva de futuros professores primários numa disciplina de matemática e um exame de seu conhecimento, concepções e consciência metacognitiva sobre frações. **INEP Série Documental**: Eventos, n. 4, 2ª parte, abr./1994, p. 1 - 20.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. **Notas de aula, mensagens de email e conversas sobre como redigir projeto de pesquisa e como analisar dados**, 2009, 2010.

SILVA, W. R. da; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Formação profissional do professor de ensino fundamental: o que sentem e pensam sobre matemática. In: I ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, VIII ENCONTRO CAPIXABA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Vitória. **Anais...** Vitória – ES: UFES, 2010.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 3. ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1988. (Publicado pela primeira vez em 1934.).

______. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, Editora Ltda. 1991.

ANEXO II

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Prezado aluno (a), eu, professor Welington Ribeiro da Silva, gostaria de convidá-lo a participar de uma pesquisa em educação matemática. Para tanto gostaria de solicitar a sua autorização para participar como sujeito dessa pesquisa em educação que estarei iniciando com vocês. Essa pesquisa vai focalizar um aprofundamento do estudo de fração, com o objetivo de compreender o que você sabe do assunto e de explorar outros significados e abordagens. Pensamos, assim, em rever o processo de ensino e aprendizagem de fração em sua turma. Em qualquer momento, o aluno poderá desistir de participar desta investigação. Todas as informações que forem compartilhadas e analisadas irão permanecer em sigilo. Além disso, informo que todos os nomes e informações para identificarem o aluno (a) serão mantidos em sigilo. No relato final da investigação, nós utilizaremos um código para identificação dos alunos.

Desde já agradeço a todos que tanto têm colaborado conosco.

Nome do Aluno: ____

Nome do responsável: ____

Local: ____ Data: __/___/ 2010

Assinatura do responsável: ____

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Prezado diretor, eu, professor Welington Ribeiro da Silva, gostaria de pedir a sua autorização para desenvolver uma pesquisa em educação matemática neste estabelecimento de ensino. Gostaria então de solicitar a permissão para participação na pesquisa, dos alunos da 6ª série/7º ano da turma que será pesquisada, como sujeitos da minha pesquisa em educação que estou iniciando. Essa pesquisa vai focalizar a realização de atividades matemáticas de natureza investigativa retomando o conceito de fração, com o objetivo de diversificar o cotidiano da sala de aula, visando compreender estratégias e raciocínios utilizados pelos alunos durante o processo de intervenção pedagógica retomando o conceito de fração. Na tentativa de facilitar o ensino e aprendizagem de matemática na escola. Tentarei fazer com que os alunos percebam como essas atividades e a maneira que conduziremos suas realizações podem facilitar a aprendizagem matemática. Ao longo da pesquisa compartilharemos os dados coletados e analisados. Todas as informações que forem compartilhadas sobre os alunos e o local de trabalho serão mantidas em sigilo. No relato final da investigação, nós utilizaremos nomes fictícios combinados posteriormente.

Desde já agradeço a todos que tanto têm colaborado conosco.

Nome: ____

Local: ____ Data: __/___/ 2010

Assinatura: ____

ANEXO III

Intervenção pedagógica: Atividades desenvolvidas em 2010

Aula (s)	Data	Nº de Aulas	Duração	Assunto trabalhado na aula
01	13/08/2010	01	50 min.	Conversa informal sobre a pesquisa
02	18/08/2010	01	50 min.	Conversa sobre o histórico da escola
03	19/08/2010	01	50 min.	Síntese de informações sobre a escola
04	20/08/2010	01	50 min.	Dinâmica: Aprenda a seguir instruções
05	25/08/2010	01	50 min.	Conhecendo a trajetória escolar dos alunos do 7º ano
06 e 07	27/08/2010	02	100 min.	Crenças e concepções dos alunos do 7º ano em relação à matemática.
08	10/09/2010	01	50 min.	Conhecendo os hábitos de estudos dos alunos
09 e 10	16/09/2010	02	100 min.	Planejamento escolar e freqüência dos alunos
11 e 12	24/09/2010	02	100 min.	Identificar fração em suas diferentes representações
13 e 14	30/09/2010	02	100 min.	Identificando representações fracionárias nas figuras geométricas
15 e 16	01/10/2010	02	100 min.	Explorando fração como parte-todo e como razão
17	08/10/2010	01	50 min.	Explorando fração como parte-todo e como razão
18 e 19	13/10/2010	02	100 min.	Explorando fração em conjuntos discretos
20	21/10/2010	01	50 min.	Equivalência de frações
21	22/10/2010	01	50 min.	Explorando fração utilizando o papel A4
22 e 23	27/10/2010	02	100 min.	Frações no Tangram explorando o capítulo Espaço e Forma
24	29/10/2010	01	50 min.	O conceito de fração no Tangram
25	03/11/2010	01	50 min.	Construindo e explorando o Tangram no EVA
26 e 27	04/11/2010	02	100 min.	Socialização do currículo anual e aprofundamento do conteúdo previsto para o 1º bimestre
28	05/11/2010	01	50 min.	Números racionais no Livro Didático
29	10/11/2010	01	50 min.	Números racionais no Livro Didático
30 e 31	11/11/2010	02	100 min.	Conceito e representação de fração em conjuntos discretos
32 e 33	12/11/2010	02	100 min.	Atividades de fração no geoplano
34	18/11/2010	01	50 min.	Atividades de fração no Livro Didático
35	25/11/2010	02	100 min.	Participação dos alunos na 1ª Mostra de matemática na escola com a apresentação das atividades com fração utilizando o Tangram
36 e 37	01/12/2010	01	50 min.	Números racionais no Livro Didático
38 e 39	03/12/2010	02	100 min.	Números racionais no Livro Didático

Aula 01 – Data: 13/08/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 8h 40 min**.**

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 32 alunos

1ª Atividade - Conversa informal com a turma para apresentação do projeto de pesquisa

Objetivo da atividade:

Apresentar o projeto de pesquisa aprovado, com o tema: Um estudo exploratório sobre aprendizagem de fração com alunos do 7º ano do ensino fundamental.

Aula 02 – Data: 18/08/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 8h 40 min. às 9h 30 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 30 alunos

2ª Atividade - Tomada de consciência e valorização da escola na vida dos alunos

Objetivos da atividade:

Refletir com os alunos a respeito do histórico da escola e os fatores que motivaram sua implantação na comunidade; Ouvir dos alunos as informações coletadas a respeito do histórico da escola, comparado aos registros da escola; Fazer com que os alunos reflitam quanto à importância em preservar a escola como espaço público.

Encaminhamentos da aula:

Distribuímos os alunos em pequenos grupos e orientamos o que deveria ser feito para o desenvolvimento do trabalho de observar detalhes sobre a escola e investigar outros detalhes sobre o histórico da escola e seu funcionamento na secretaria. Questionamentos sugeridos:

1. Aparência física da escola;
2. Ano de fundação da escola e horários de funcionamento da escola;
3. Média de alunos atendidos por turno e total de alunos atualmente matriculados;
4. Estrutura física e equipamentos didáticos que a escola possui.

Aula 03 – Data: 19/08/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 9h 30 min. às 10h 40 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 32 alunos

3ª Atividade - Compartilhando informações sobre a escola

Objetivos da atividade:

Descrever e sistematizar a atividade em grupo sobre a escola, falar seu histórico e funcionamento – Síntese.

Aula 04 – Data: 20/08/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 8h 40 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 30 alunos

4ª Atividade - Dinâmica em grupo

Objetivos da atividade:

Compartilhar com os alunos a importância de se registrar em um local específico (caderno, etc.) tudo que ocorre em sala de aula; Sistematizar os registros para melhor entender determinado tema, assunto, conteúdo, etc.

Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com a seguinte atividade a ser desenvolvida individualmente pelos alunos.

VOCÊ SABE SEGUIR INSTRUÇÕES

(..........,..........,.........)

A: ______________________________________ .

B: ______________________________________ .

01 – Leia tudo, antes de executar qualquer tarefa indicada.

02 – Escreva o seu nome na linha "A", acima.

03 – Escreva a data de hoje na linha "B", acima.

04 – Faça um círculo em volta da palavra "nome" da frase 02.

05 – Desenhe cinco quadrinhos no canto esquerdo superior da folha.

06 – Ponha um "X" dentro de cada quadrinho.

07 – Abaixo do título, escreva no parêntese: "sim, sim, sim".

08 – Faça um "X" no canto direito desta folha.

09 – Desenhe um retângulo em torno do "X" que foi feito no canto direito desta folha.

10 – Desenhe um retângulo em torno da palavra "folha" da frase 05.

11 – Ao chegar a esta parte do teste, diga seu primeiro nome em voz alta.

12 – Conte, em tom de voz alto, de um a dez.

13 – Se você chegou até este ponto, diga em voz alta: **"PROVEI QUE SEI SEGUIR INSTRUÇÕES".**

14 – Sublinhe todos os números pares ao lado: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

15 – Agora que acabou de ler tudo com atenção, execute apenas a instrução de número 02.

TERMINADO O TESTE, VIRE A FOLHA E PERMANEÇA EM SILÊNCIO.

Aula 05 – Data: 25/08/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 9h 50 min. às 10h 40 min.

N^o de alunos da turma: 36 alunos **N^o de alunos presentes na aula:** 34 alunos

5ª Atividade - Histórico da trajetória escolar dos alunos do 7º ano

Objetivo da atividade:

Conhecer a trajetória escolar dos alunos da turma pesquisada.

Encaminhamentos da aula:

Construímos uma tabela no quadro e solicitamos que cada aluno por ordem de fileira, como a sala é organizada, completasse os seus dados na tabela abaixo:

Nome do aluno	Série/ano que reprovou	Disciplina (s)	Nº de vezes	Motivos da reprovação

Aula 06 e aula 07– Data: 27/08/2010 **Aula e Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

N^o de alunos da turma: 36 alunos **N^o de alunos presentes na aula:** 32 alunos

6ª Atividade - Identificando crenças e concepções dos alunos em relação à matemática

Objetivo da atividade:

Conhecer os alunos do 7º ano do ensino fundamental em termo de suas crenças, concepções e atitudes em relação à matemática.

Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com os seguintes questionamentos a serem respondidos individualmente pelos alunos.

Questionamentos

1 – Em sua opinião para que serve a matemática. Por quê?

2 – Se a matemática fosse um animal, ela seria ... Por quê?

3 – Se fosse explicar para alguém que não conhece o que é e para que a matemática serve, diria que...

4 – Que animal a matemática nunca seria? Motivos?

Aula 08 – Data: 10/09/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 8h 40 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 32 alunos

7ª Atividade – Identificando os hábitos de estudos dos alunos

Objetivos da atividade:

Identificar os hábitos de estudos da turma do 7º ano do ensino fundamental; Fazer com que os alunos reflitam sobre como se relacionam com as aulas de matemática; Mostrar a necessidade de maior dedicação aos estudos e participação nas aulas.

Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com a seguinte atividade a ser respondida individualmente pelos alunos.

Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cantinho do Céu"

Aluno (a):...

Mora em Comunidade próxima onde a escola está localizada (   )

Mora no Interior do Município onde a escola está localizada (   )

1 – Quanto tempo estuda na escola:

( ) 1º ano ( ) 2 a 3 anos ( ) 4 a 5 anos ( ) 6 a 7 anos ( ) mais de 7 anos

2 – Para cada disciplina abaixo, olhe a coluna ao lado e marque para cada uma como você se relaciona com a mesma:

(   ) Português (1) Gosto muito

(   ) Matemática (2) Gosto

(   ) Ciências (3) Regular

(   ) História (4) Não gosto muito

(   ) Geografia (5) Não gosto

3 – Diante das respostas descritas anteriormente, descreva:

a) Gosto muito da disciplina de........................... porque...

b) Gosto da disciplina de .... porque...

c) Gosta mais ou menos da disciplina de.............porque...

d) Não gosto da disciplina de.............................. porque...

4 – Em sua opinião um bom professor é aquele que...

5 – Em sua opinião uma boa aula é aquela que...

Aula 09 e aula 10 – Data: 16/09/2010 **Aula e Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 32 alunos

8ª Atividade – Identificando o planejamento escolar e frequência dos alunos

Objetivos da atividade:

Identificar possíveis causas que têm levado os alunos a ver a matemática como um conhecimento pouco accessível; Mostrar aos alunos do 7º ano do ensino fundamental a importância de se conhecer a programação das atividades planejadas e previstas para o ano letivo; Fazer com que os alunos percebam a importância do papel desenvolvido pela escola e das aulas para a construção e sistematização do conhecimento e formação social do individuo.

Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com a seguinte atividade a ser respondida individualmente pelos alunos.

Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cantinho do Céu"

Aluno (a):..

1 – Quanto ao planejamento anual proposto pela escola, responda:

a) Você geralmente procura assistir as aulas semanais de todas as disciplinas?

(   ) sim (   ) não Motivos: ....

b) Quantas aulas de matemática são previstas por semana para os alunos do 7º ano? Geralmente assiste todas (   ) sim (   ) não Motivos: ....

c) Acredita que o número de aulas é suficiente para sua aprendizagem?

(   ) sim (   ) não Motivos: ....

d) Você procura se esforçar para assistir todas as aulas de matemática da semana?

(   ) sim (   ) não Motivos:...

e) Das aulas de matemática, geralmente, quantas você realmente assiste durante a semana?

(   ) todas as aulas (   ) mais de metade do total de aulas (   ) menos da metade do total de aulas.

Motivos:..

2 – Em sua opinião, para ser um bom aluno em matemática é necessário..

3 – Poderia aprender mais matemática se...

Aula 11 e aula 12 – Data: 24/09/2010 **Aula e Horário:** 02 aulas de 9h 30 min. às 11h 30 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 34 alunos

9ª Atividade – Identificar fração em suas diferentes representações

Objetivos da atividade:

Levar os alunos a pensarem sobre o tema fração, buscando relacionar o tema em diferentes representações; Associar fração em diferentes situações; Identificar as associações que os alunos faziam envolvendo frações; Identificar as diferentes situações escolares ou de vida que os alunos associam ao tema frações.

Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com a seguinte atividade a ser respondida individualmente pelos alunos.

Escola Municipal de Ensino Fundamental “Cantinho do Céu”

Aluno (a):..

1 – Descreva com suas palavras o que você entende por fração ou frações.

2 – Represente no desenho livremente qualquer fração que você queira.

3 – Após ter representado no desenho a fração, escreva através de números esta fração. Explique com suas palavras a representação com fração.

4 – Explique com suas palavras o que você entende por divisão.

5 – Explique com suas palavras porque motivos uma divisão tem resto e em outros não. Se necessário de exemplo.

6 – O que sabem ou se lembram sobre porcentagem.

Aula 13 e aula 14 – Data: 30/09/2010 **Aula e Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 40 min.

N^o de alunos da turma: 36 alunos **N^o de alunos presentes na aula:** 34 alunos

10ª Atividade – Explorando fração nas figuras geométricas

Objetivos da atividade: Levar o aluno a identificar diferenças e semelhanças entre o número de partes em que uma mesma figura geométrica foi repartida (dividida); Verificar se cada parte em que a figura foi repartida é aparentemente de mesmo tamanho (de mesma área); Associar a representação da área de cada com sua representação fracionária; Levar o aluno a perceber a utilização da representação fracionária em diferentes situações.

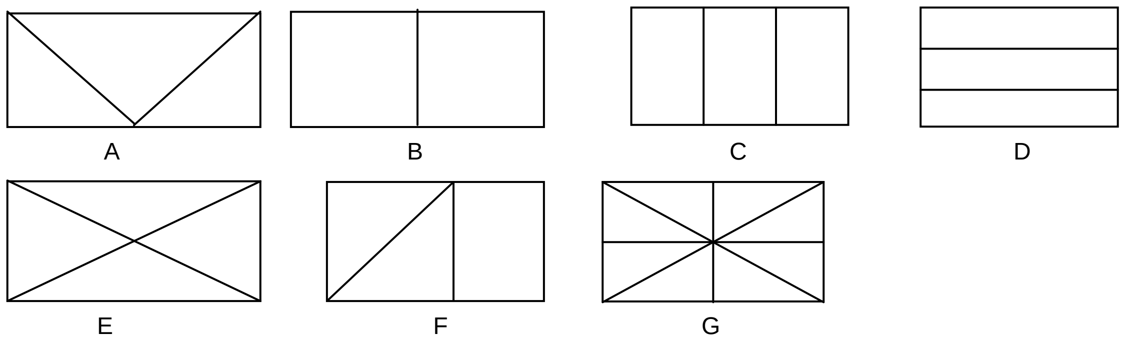
Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com a seguinte atividade a ser respondida individualmente pelos alunos.

Escola Municipal de Ensino Fundamental “Cantinho do Céu”

Aluno (a):..

1 – Observe os retângulos abaixo e responda:



a) Todas as figuras em forma retangular foram repartidas (divididas) em um mesmo número de partes? ( ) sim ( ) não Justifique sua resposta...

b) Todas as figuras foram repartidas em partes de mesmo tamanho? ( ) sim ( ) não

Como podemos comprovar...

2 – Observando cada figura responda: Comente como cada figura foi repartida.

Figura A:..

Figura B:..

Figura C:..

Figura D:..

Figura E:..

Figura F:...

Figura G:..

Aula 15 e aula 16 – Data: 01/10/2010 **Aula e Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

N^o de alunos da turma: 36 alunos **N^o de alunos presentes na aula:** 33 alunos

11ª Atividade – Identificar fração em suas diferentes representações

Objetivos da atividade:

Finalizar análise das respostas dadas pelos alunos nos questionamentos da atividade trabalhada nas aulas anteriores; Levar o aluno a representar a fração correspondente representada em cada figura; Levar o aluno a identificar a fração correspondente à parte restante em cada figura; Criar mecanismos para que os alunos saibam representar corretamente a fração correspondente à parte restante de uma figura.

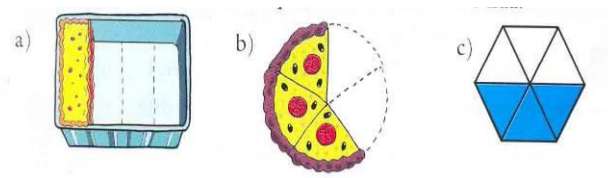
Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com a seguinte atividade a ser respondida individualmente pelos alunos.

Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cantinho do Céu"

Aluno (a):..

1 – Escreva a fração que representa as partes em destaque em cada figura.



( ) Não é possível saber quais frações são representadas em cada caso.

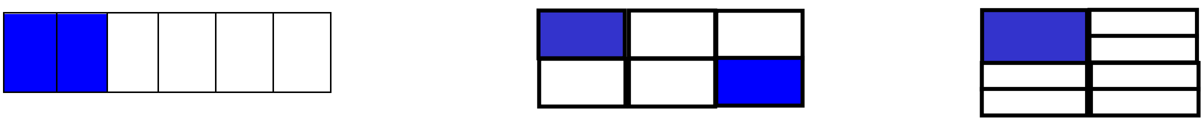
( ) Sim é possível saber, a fração correspondente a cada figura é:

a) .... b) .... c) .... Justifique:..

2 – Observe os registros e descreva:

a) Que fração representa a quantidade pintada em cada figura? Justifique.

b) Que fração representa a quantidade não pintada em cada figura? Justifique.



Aula 17 – Data: 08/10/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 8h 40 min.

N^o de alunos da turma: 36 alunos **N^o de alunos presentes na aula:** 30 alunos

12ª Atividade – Explorando fração como parte-todo e como razão

Objetivos da atividade:

Levar o aluno a representar a fração correspondente representada em cada figura; Identificar a ideia de fração como parte-todo em um conjunto contínuo.

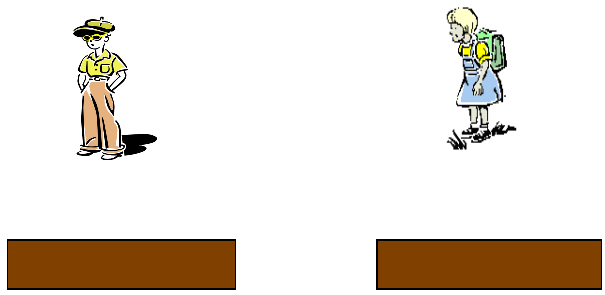
Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com as atividades 3 e 4 que davam sequência às atividades 1 e 2 trabalhadas na aula anterior. As atividades também eram para ser respondidas individualmente pelos alunos.

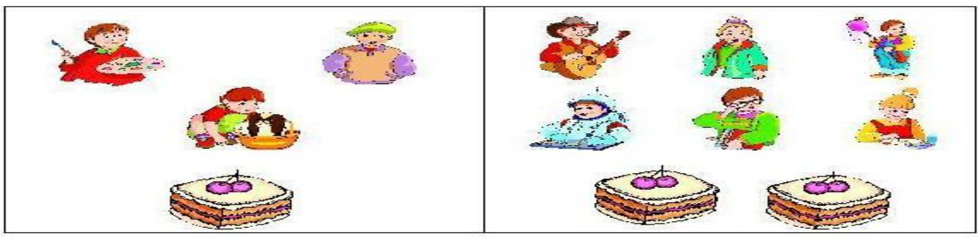
Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cantinho do Céu"

Aluno (a):...

3 – Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho. Maria comeu 1/4 do chocolate dela e Paulo comeu 1/2 do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? Marque na barra de chocolate quanto cada um comeu e explique.



4 – Observando as crianças distribuídas em dois grupos, comente sobre cada representação:



A **B**

a) Fale sobre o que podemos concluir na primeira representação (representação A).

b) Fale sobre o que podemos concluir na segunda representação (representação B).

c) As nove crianças comerão a mesma quantidade de bolo?

( ) sim ( ) não Justifique sua resposta...

c) Se quisermos distribuir o bolo entre as crianças de modo que cada uma receba partes aparentemente de mesmo tamanho cada um, represente numericamente a parte (fração) que representa a divisão do bolo na figura A. Justifique:..

Aula 18 e Aula 19 – Data: 13/10/2010 **Aula e Horário:** 02 aulas de 7h às 8h 40 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 30 alunos

13ª Atividade – Explorando fração em conjuntos discretos

Objetivos da atividade:

Explorar com os alunos a ideia de fração como parte-todo de um conjunto discreto; Explorar a ideia de divisores e a ideia de fração equivalente em conjuntos discretos.

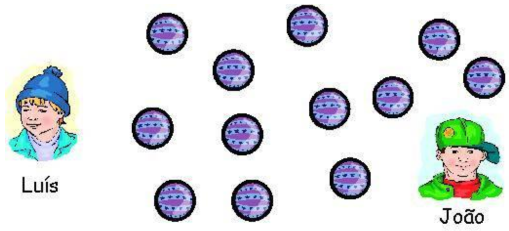
Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com atividades que dão sequência às atividades trabalhadas nas aulas anteriores. Também era para ser respondida individualmente pelos alunos.

Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cantinho do Céu"

Aluno (a):...

5 – Observando a representação abaixo responda:



a) Quantas bolinhas de gude estão sendo representadas..

b) Se João possui 1/3 das bolinhas de gude, quantas ele possui.Contorne as bolinhas que ele possui.

c) Se Luís possui 2/3 das bolinhas de gude, quantas ele possui.. Contorne as bolinhas que ele possui.

6 – Observando a representação anterior, responda:

Decidindo os dois meninos (Luís e João) distribuir todas as bolinhas de gude em pequenos grupos. Marque com um **X** a alternativa em que todas as bolinhas seriam igualmente distribuídas sem sobrar nenhuma delas.

a) 1/5 das bolinhas de gude   d) 1/6 das bolinhas de gude   g) 1/8 das bolinhas de gude

b) 3/4 das bolinhas de gude   e) 2/3 das bolinhas de gude   h) 4/6 das bolinhas de gude

c) 1/12 das bolinhas de gude   f) 2/6 das bolinhas de gude   i) 7/12 das bolinhas de gude

Aula 20 – Data: 21/10/2010   **Aula e Horário:** 01 aula de 7h às 7h 50 min.

N^o de alunos da turma: 36 alunos   **N^o de alunos presentes na aula:** 30 alunos

14ª Atividade – Explorando fração em conjuntos discretos

Objetivos da atividade:

Reconhecer frações equivalentes como maneiras diferentes de escrever a mesma quantidade; identificar frações equivalentes; Determinar frações equivalentes a uma fração dada, satisfazendo também condições dadas; Utilizar diferentes registros gráficos, tais como, desenhos, esquemas, escritas numéricas como recurso para expressar ideias e comunicar estratégias e resultados; Compreender que duas frações são equivalentes quando as duas representam a mesma quantidade.

Encaminhamentos da aula:

Distribuímos uma folha com a seguinte atividade a ser respondida individualmente pelos alunos.

Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cantinho do Céu"

Aluno (a):...

1 – Dada cada representação abaixo descrita, represente duas frações equivalentes que satisfaçam cada caso:

a) _______ ou ________

b) 25 cm de 01 metro = _______ ou ________

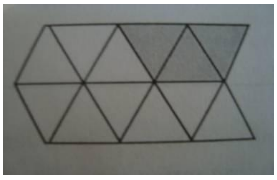
c) 250 ml de 01 litro = _______ ou ________

d) 20 segundos de 01 minuto = _______ ou ________

e) 45 min. de 01 hora =_______ ou ________

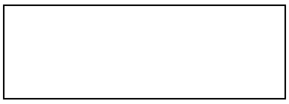
f) 25 cm de 75 cm = _______ ou ________

g)



_______ ou ________

2 – A barra abaixo representa a unidade:



Para cada item, desenhe uma barra semelhante a representada acima e pinte nela as partes correspondentes a cada fração.

a) 1/2 = ... c) 4/8 = ...

b) 2/4 = ... d) 8/16 = ...

Observando a fração representada e pintada nas alternativas ***a, b, c*** e ***d***. Diga se em alguma barra a parte pintada ocupa:

- menos da metade da barra; b) ocupa metade da barra; c) ocupa mais que metade da barra.

Como podemos verificar isso?

Aula 21 – Data: 22/10/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 7h às 7h 50 min.

N° de alunos da turma: 36 alunos **N° de alunos presentes na aula:** 30 alunos

15ª Atividade – Explorando fração utilizando o papel A_4

Objetivos da atividade:

Determinar a fração representada em relação ao todo; Utilizar procedimentos que permitam ao aluno identificar e comparar uma fração.

Escola Municipal de Ensino Fundamental "Cantinho do Céu"

Aluno (a):..

Encaminhamentos da aula:

Distribuímos para cada aluno da sala uma folha de papel A_4. Orientamos o grupo para seguir os seguintes passos e responder os questionamentos em cada passo.

1º Passo: Dobre a folha exatamente ao meio, em seguida abra novamente a folha e registre:

a) Quantas partes da folha de tamanhos iguais (áreas iguais) nós temos agora?

b) Cada uma das partes da folha corresponde a que fração da folha inteira.

2º Passo: Com a folha já dobrada ao meio, dobre pela 2ª vez esta parte da folha ao meio. Em seguida abra novamente toda a folha e registre:

a) Quantas partes da folha de tamanhos iguais (áreas iguais) nós temos agora?

b) Cada uma das partes da folha corresponde a que fração da folha inteira.

3º Passo: Com a folha completamente dobrada novamente, dobre pela 3ª vez esta parte da folha já dobrada ao meio. Em seguida abra novamente toda a folha e registre:

a) Quantas partes da folha de tamanhos iguais (áreas iguais) nós temos agora?

b) Cada uma das partes da folha corresponde a que fração da folha inteira.

4º Passo: Como no caso anterior e tendo mais uma vez a folha totalmente dobrada, dobre pela 4ª vez esta parte da folha já dobrada ao meio. Em seguida abra novamente toda a folha e registre:

a) Quantas partes da folha de tamanhos (áreas iguais) nós temos agora?

b) Cada uma das partes da folha corresponde a que fração da folha inteira.

5º Passo: Para finalizar a atividade, tendo a folha totalmente dobrada, dobre pela 5ª vez esta parte da folha já dobrada ao meio. Em seguida abra novamente toda a folha e registre:

a) Quantas partes da folha de tamanhos iguais (áreas iguais) nós temos agora?

b) Cada uma das partes da folha corresponde a que fração da folha inteira.

Aula 22 e Aula 23 – Data: 27/10/2010 **Aula e Horário:** 02 aulas de 7h às 8h 40 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 34 alunos

16ª Atividade – Fração no Tangram e exploração de formas geométricas

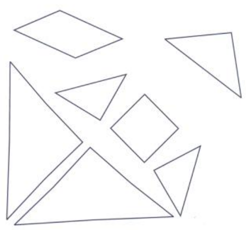
Objetivos da atividade:

Proporcionar ao aluno atividades lúdicas e desafiadoras; Familiarizar o aluno com as figuras básicas da Geometria; Viabilizar o uso do Tangram na aprendizagem das frações.

A LENDA DO TANGRAM

Conta à lenda que um jovem chinês despedia-se de seu mestre para fazer uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou a ele um espelho de forma quadrada e disse: Com esse espelho, você registrará tudo o que vir durante a viagem para me mostrar na volta.

O discípulo, surpreso, indagou: Mas mestre, como, com um simples espelho, eu poderei mostrar-lhe tudo o que encontrar durante a viagem? No momento em que fazia essa pergunta, o espelho caiu de suas mãos e quebrou-se em sete peças, como mostra a figura:

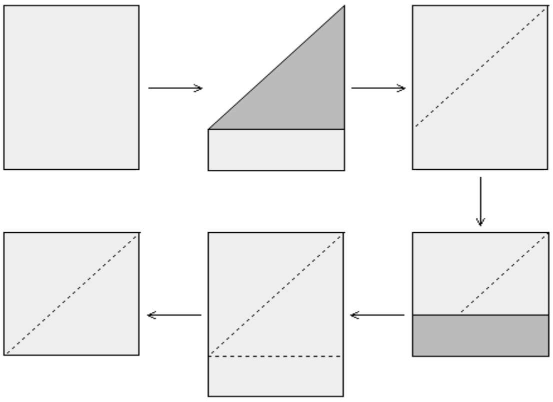


Então, o mestre disse:

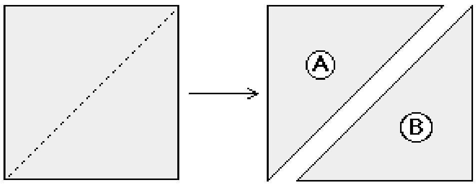
- Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

Procedimentos para a construção do TANGRAM

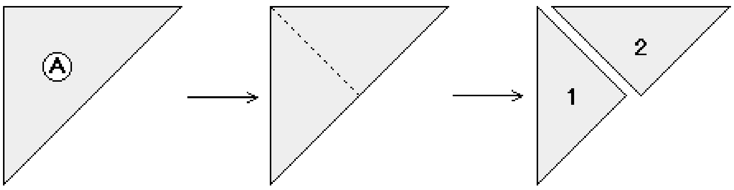
1ª Etapa. Obtenha um quadrado, através da dobradura e recorte.



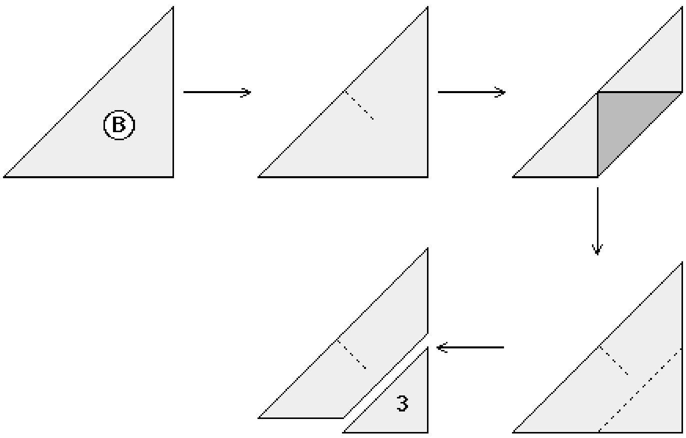
2ª Etapa. Dobra o quadrado ao meio e recorta-o de modo a obter 2 triângulos (**A** e **B**).



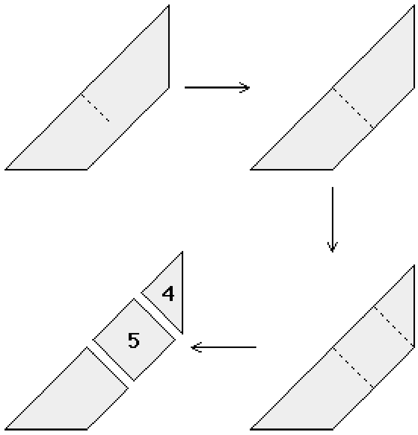
3ª Etapa. Dobra o **triângulo A** ao meio para obteres 2 triângulos mais pequenos (1 e 2).



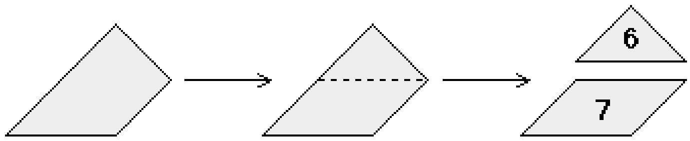
4ª Etapa. No **triângulo B**, marca o meio, dobra o vértice oposto e recorta-o.



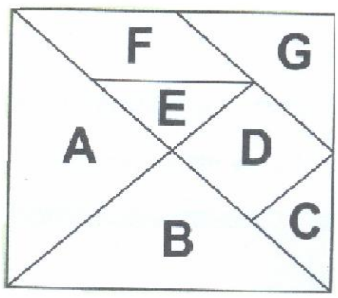
5ª Etapa. Dobra o trapézio ao meio, volta a dobrar uma das partes e recorta-o.



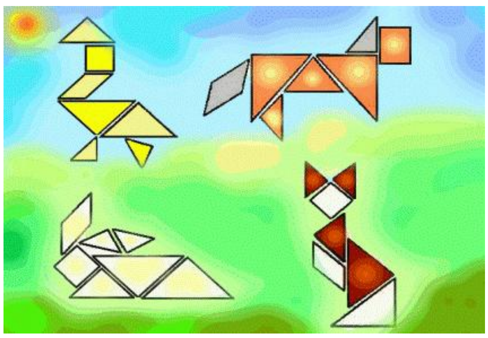
6ª Etapa. Dobra o trapézio e recorte.

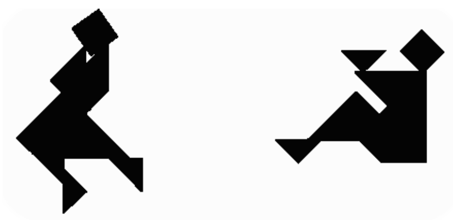


TANGRAM



Explorando o Tangram





Questionamentos:

1. Quais são as maiores peças no Tangram?
2. Quais são as menores peças no Tangram?
3. Quantas vezes a peça **A** cabe no Tangram?
4. Quantas vezes a peça **A** cabe na peça **B** do Tangram?
5. Quantas vezes a peça **E** cabe na peça **G**?
6. Existem peças de tamanhos iguais (áreas iguais)? Se a resposta for sim, quais?
7. Que fração do Tangram representa a peça **A**?
8. Junte a peça **A** e a peça **B,** e diga que fração representam do Tangram?

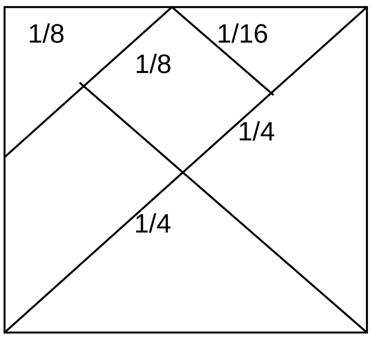
Aula 24 – Data: 29/10/2010 Aula e **Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 8h 40 min.

N° de alunos da turma: 36 alunos **N° de alunos presentes na aula:** 34 alunos

17ª Atividade: O conceito de fração no Tangram

Objetivos da atividade:

Trabalhar um dos conceitos de fração parte todo e equivalência de fração; Criar oportunidade ao aluno de levantar hipóteses, de apresentar seu raciocínio certo ou errado e dar a oportunidade para que o grupo decida e construa as deduções.



Aula 25 – Data: 03/11/2010 Aula e **Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 8h 40 min.

N° de alunos da turma: 36 alunos **N° de alunos presentes na aula:** 34 alunos

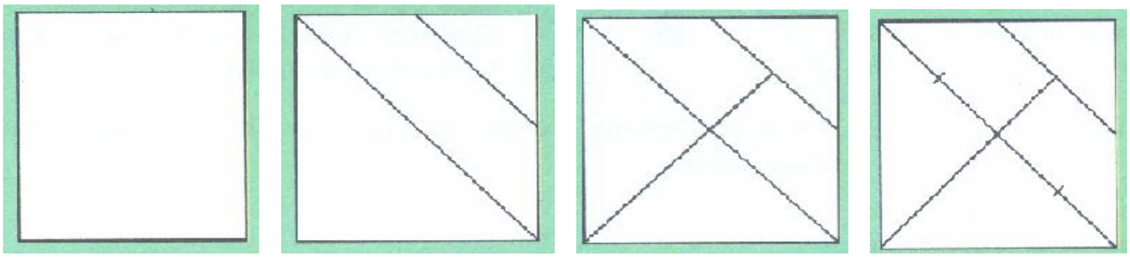
18ª Atividade: Construindo e explorando o Tangram no EVA

Objetivos da atividade:

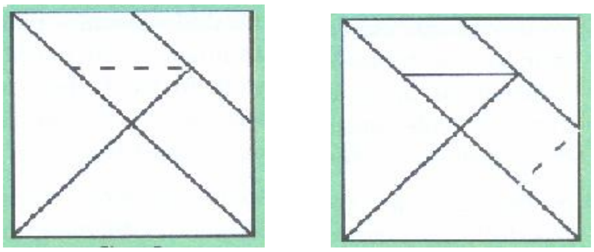
Criar oportunidades para o aluno levantar hipóteses, apresentar seu raciocínio certo ou errado, e dar a oportunidade ao grupo de decidir sobre os raciocínios e construir as deduções.

Iniciamos a aula distribuindo os seguintes materiais para cada grupo (uma folha de EVA, uma régua e uma tesoura). Em seguida, utilizando data show da escola, projetamos no quadro da sala de aula os passos abaixo descritos para a construção do Tangram, agora utilizando EVA.

Passos para a construção do Tangram

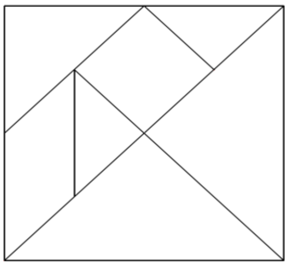


1º **2º** **3º** **4º**



5º **6º**

Aqui temos o Tangram pronto. Como podemos observar mais uma vez as peças foram demarcadas facilitando a identificação.



Aula 26 e Aula 27 – Data: 04/11/2010 Aula e **Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 34 alunos

Assunto: Socialização do currículo escolar para o ano letivo e aprofundamento do conteúdo que tinha sido definido para o primeiro bimestre do ano letivo envolvendo os números racionais.

Objetivo da atividade:

Localizar com os alunos nossa caminhada no planejamento anual da disciplina previsto para o ano letivo de 2010; Reconhecer que as frações indicam partes, medidas ou resultados de divisões; Reconhecer números racionais em situações cotidianas; Representar números racionais nas formas decimais e fracionárias.

Informamos que nesta aula e nas próximas seis aulas estaríamos desenvolvendo atividades extraídas do livro didático utilizado por eles. Comunicamos também aos alunos como estavam distribuídos os conteúdos de matemática ao longo do ano.

1º bimestre: As quatro operações; potenciação; radiciação; números naturais (expressões numéricas e resolução de problemas); Reconhecimento de figuras planas e espaciais; Divisores e números primos; MMC de dois ou mais números naturais; Decomposição de fatores primos e Operações com frações.

2º bimestre: Equações do 1° grau; Inequações do 1º grau; Igualdade e desigualdades; Diferença entre equação e inequação; Resolução de problemas e Sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas.

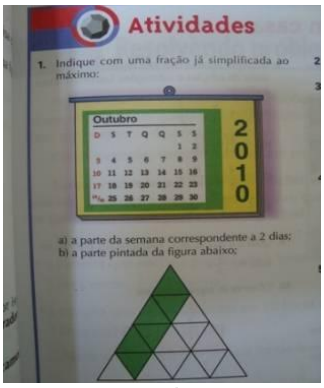
3º bimestre: Ângulos consecutivos; Bissetriz de um ângulo; Ângulos complementares e suplementares; Ângulos opostos pelo vértice; Propriedades dos ângulos e Cálculo com medidas de ângulos.

Assim, nesse **4º bimestre** estaríamos dando os aprofundamentos necessários referente ao capítulo 2 envolvendo "Os números inteiros e racionais relativos: as operações, representação na reta numérica, expressões numéricas e resolução de problemas".

19ª Atividade: Atividade 01, da página 71 do livro didático: Novo Matemática na medida certa, de CENTURIÓN, JAKUBO e LELLIS, 6ª série. São Paulo: Scipione, 2000.

Livro didático: CENTURIÓN, JAKUBO e LELLIS. **Novo Matemática na medida certa,** 6ª série. São Paulo: Scipione, 2000.

Atividade 01: página 71.



Como podemos verificar na primeira situação a atividade solicita que os alunos observando o calendário do mês de Outubro representado ao lado, indiquem com uma fração já simplificada ao máximo:

a) a parte da semana correspondente a 2 dias;
b) a parte pintada da figura.

Aula 28 – Data: 05/11/2010 Aula e **Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 8h 40 min.

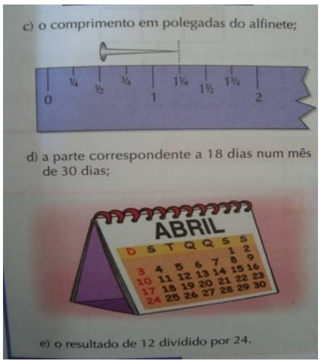
Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 34 alunos

20ª Atividade: Números racionais

Objetivo da atividade:

Explorar atividades envolvendo fração presentes no livro didático da 6ª série/7º ano utilizado pelos alunos.

Atividade 01: página 71.


c) o comprimento em polegadas do alfinete;
d) a parte correspondente a 18 dias num mês de 30 dias;
e) o resultado de 12 dividido por 24.

1. Indique com uma fração já simplificada ao máximo:
   - c) o comprimento em polegadas do alfinete;
   - d) a parte correspondente a 18 dias num mês de 30 dias;
   - e) o resultado de 12 dividido por 24.

Aula 29 – Data: 10/11/2010 Aula e **Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 8h 40 min.

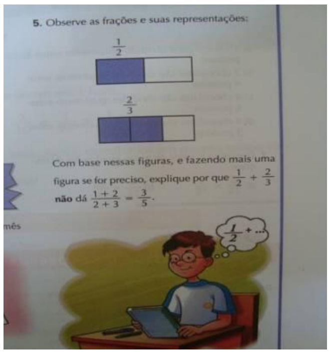
N^o de alunos da turma: 36 alunos **N^o de alunos presentes na aula:** 34 alunos

21ª Atividade: Números racionais

Objetivo da atividade:

Explorar atividades envolvendo fração presentes no livro didático do 7º ano utilizado pelos alunos.

Atividade 5: página 71.


5. Observe as frações e suas representações:
$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$
Com base nessas figuras, e fazendo mais uma figura se for preciso, explique por que $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ não dá $\frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$.

Com base nas figuras, e fazendo mais uma figura se for preciso, explique por que 1/2 + 2/3 ***não dá*** 3/5.

Aula 30 e Aula 31 – Data: 11/11/2010 Aula e **Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

N^o de alunos da turma: 36 alunos **N^o de alunos presentes na aula:** 34 alunos

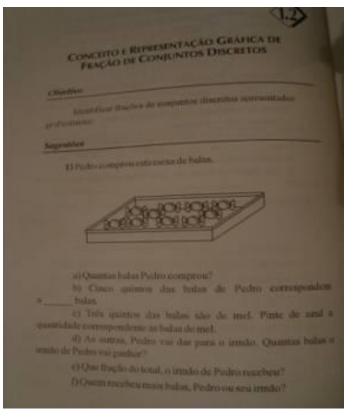
22ª Atividade: Conceito e representação de fração em conjuntos discretos

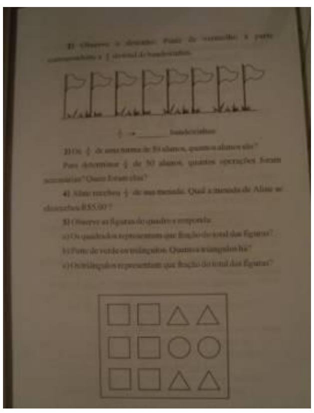
Objetivo da atividade:

Identificar frações de conjuntos discretos apresentados graficamente.

Atividade do Livro Números: linguagem universal (SANTOS; REZENDE, 1996) – Projeto Fundão/RJ, Pág. 22, 23

Atividades das páginas 22 e 23.


Conceito e Representação Gráfica de Fração de Conjuntos Discretos



1ª Atividade do Livro Números: linguagem universal

Aula 32 e Aula 33 – Data: 12/11/2010 Aula de **Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 33 alunos

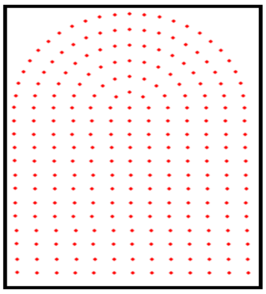
23ª Atividade: Atividades de fração com Geoplano

Objetivo da atividade:

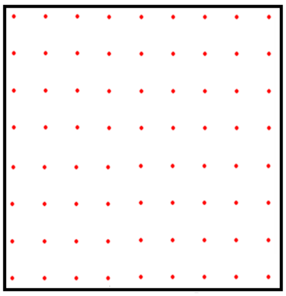
Mostrar que o Geoplano pode auxiliar o aluno para a exploração de temas ligados à geometria plana, e o ensino de frações, dentre outros.

Material apresentado (projetado) na sala para os alunos

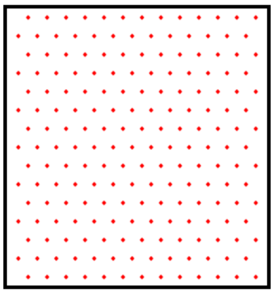
Alguns tipos de geoplano:



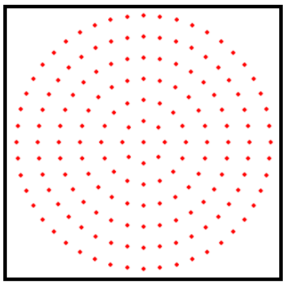
Geoplano Oval



Geoplano Quadrado

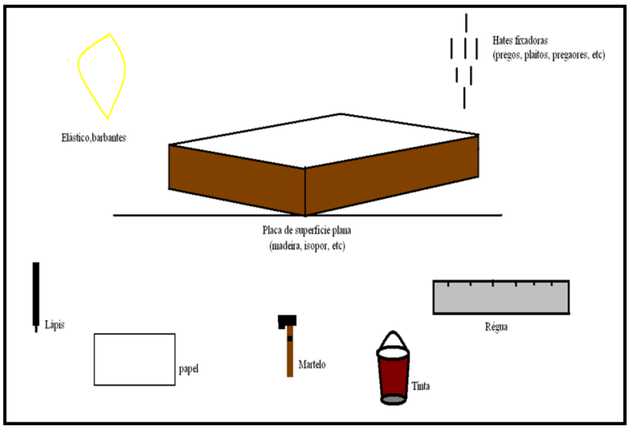


Geoplano Trelissado



Geoplano Circular

Materiais para a construção de um Geoplano são: pregos, martelo, base de madeira, régua, lápis, compasso, e uma folha de A4.



Materiais utilizados no geoplano

Geoplano explorado com os alunos

Atividade 1

1 - Observando o geoplano é possível saber quantos pregos foram utilizados para confeccioná-lo? Justifique.

2 - Levando em consideração a parte do geoplano preenchida por pregos, podemos afirmar que é:

a) (   ) de mesmo tamanho que a parte do geoplano não preenchida por pregos;

b) (   ) o dobro do tamanho da parte não preenchida por pregos no geoplano;

c) (   ) o triplo do tamanho da parte não preenchida por pregos no geoplano.

3 – Considerando a parte do geoplano não ocupada por pregos, podemos afirmar que ela é:

a) (   ) de mesmo tamanho que a parte do geoplano preenchida por pregos;

b) (   ) duas vezes menor que a parte do geoplano ocupada por pregos;

c) (   ) três vezes menor que a parte do geoplano ocupada por pregos.

4 - Levando em consideração a parte do geoplano não ocupada por pregos, podemos descobrir em quantas partes de mesmo tamanho (área) o geoplano foi repartido?

5 - Que fração representa a parte não preenchida por pregos no geoplano?

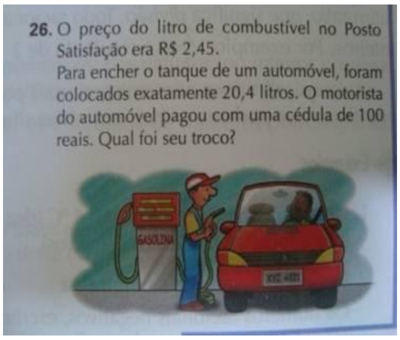
Aula 34 – Data: 18/11/2010 **Aula e Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

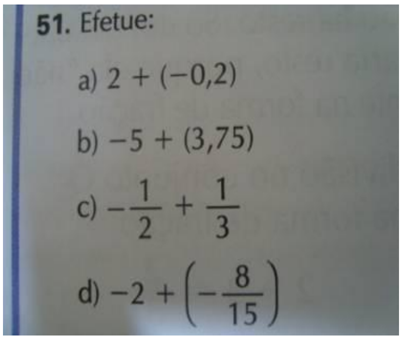
N^{o} de alunos da turma: 36 alunos **N^{o} de alunos presentes na aula:** 34 alunos

24ª Atividade: Exercícios do livro didático (Novo Matemática na medida certa, de CENTURIÓN, JAKUBO e LELLIS, 6ª série. São Paulo: Scipione, 2000)

Objetivos da atividade:

Efetuar operações com números racionais.


26. O preço do litro de combustível no Posto Satisfação era R$ 2,45. Para encher o tanque de um automóvel, foram colocados exatamente 20,4 litros. O motorista do automóvel pagou com uma cédula de 100 reais. Qual foi seu troco?

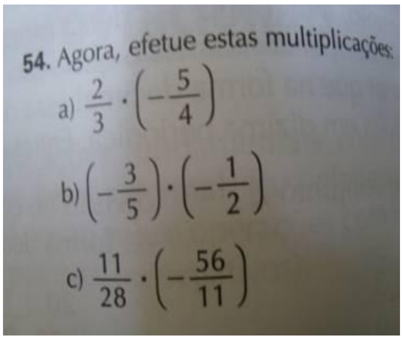

51. Efetue:

a) $2 + (-0,2)$

b) $-5 + (3,75)$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

d) $-2 + \left(-\frac{8}{15}\right)$


54. Agora, efetue estas multiplicações:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$

b) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{11}{28} \cdot \left(-\frac{56}{11}\right)$

Aula 35 – Data: 25/11/2010 Aula e **Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

N^{o} de alunos da turma: 36 alunos **N^{o} de alunos presentes na aula:** 34 alunos

25ª Atividade: Mostra cultural de matemática

Objetivos da atividade:

Preparar atividades com frações usando o Tangram, o geoplano circular e resolução de problemas; Verificar o aprendizado dos alunos sobre frações; Desenvolver a autonomia dos alunos para selecionar e decidir que atividades de frações deveriam preparar para explorar e explicar aos visitantes da mostra cultural.

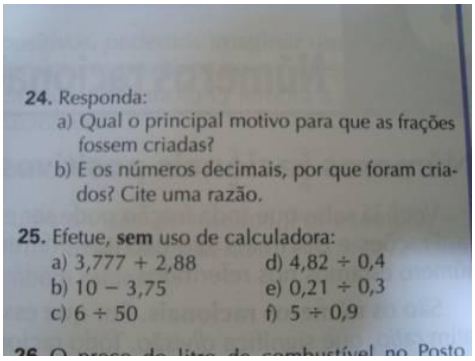
Aula 36 – Data: 01/12/2010 **Aula e Horário:** 01 aula de 7h 50 min. às 9h 30 min.

N^{o} de alunos da turma: 36 alunos **N^{o} de alunos presentes na aula:** 34 alunos

26ª Atividade: Exercícios do livro didático (Novo Matemática na medida certa, de CENTURIÓN, JAKUBO e LELLIS, 6ª série. São Paulo: Scipione, 2000)

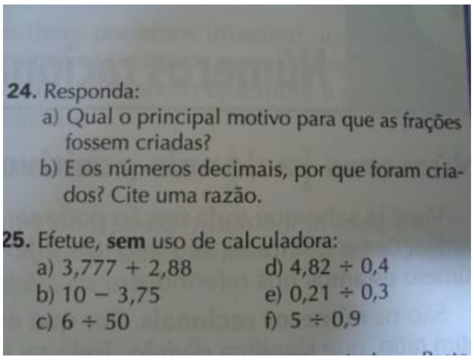
Objetivos da atividade:

Efetuar operações com números racionais.



24. Responda:
a) Qual o principal motivo para que as frações fossem criadas?
b) E os números decimais, por que foram criados? Cite uma razão.

25. Efetue, **sem** uso de calculadora:
a) 3,777 + 2,88
b) 10 − 3,75
c) 6 ÷ 50
d) 4,82 ÷ 0,4
e) 0,21 ÷ 0,3
f) 5 ÷ 0,9



24. Responda:
a) Qual o principal motivo para que as frações fossem criadas?
b) E os números decimais, por que foram criados? Cite uma razão.

25. Efetue, **sem** uso de calculadora:
a) 3,777 + 2,88
b) 10 − 3,75
c) 6 ÷ 50
d) 4,82 ÷ 0,4
e) 0,21 ÷ 0,3
f) 5 ÷ 0,9

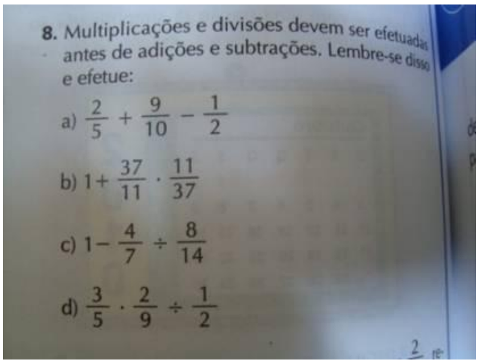
Aula 37 e aula 38 – Data: 03/12/2010 Aula e **Horário:** 02 aulas de 7h 50 min. às 9h 30 min.

Nº de alunos da turma: 36 alunos **Nº de alunos presentes na aula:** 34 alunos

26ª Atividade: Exercícios do livro didático (Novo matemática na medida certa, de CENTURIÓN, JAKUBO e LELLIS, 6ª série. São Paulo: Scipione, 2000)

Objetivos da atividade:

Resolva os problemas e operações indicadas envolvendo números racionais.



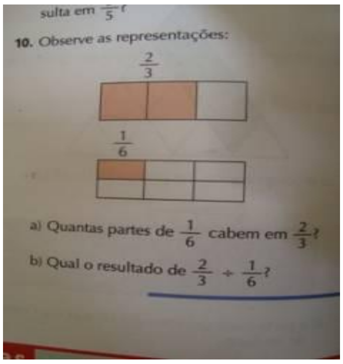
8. Multiplicações e divisões devem ser efetuadas antes de adições e subtrações. Lembre-se disso e efetue:

a) $\frac{2}{5} + \frac{9}{10} - \frac{1}{2}$

b) $1 + \frac{37}{11} \cdot \frac{11}{37}$

c) $1 - \frac{4}{7} \div \frac{8}{14}$

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} \div \frac{1}{2}$



10. Observe as representações:

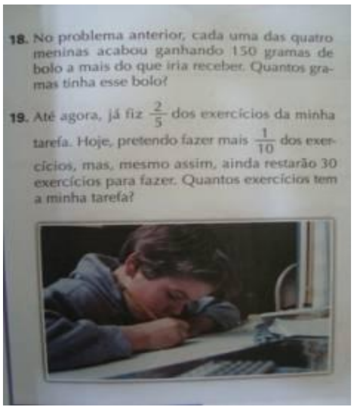
$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{6}$

a) Quantas partes de $\frac{1}{6}$ cabem em $\frac{2}{3}$?

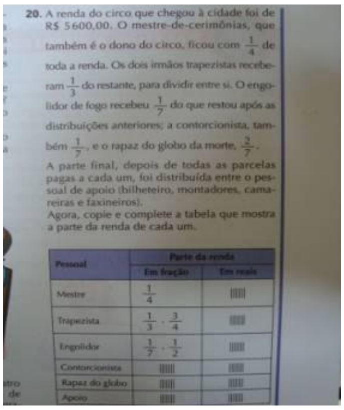
b) Qual o resultado de $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$?

17. Cinco meninas compraram um bolo e iam dividi-lo igualmente. Mas, na hora de dividir, a mais gulosa não quis a sua parte: ela já tinha tomado sorvete demais. Por isso, o bolo foi igualmente dividido entre as quatro meninas restantes.
a) Que fração do bolo cada uma receberia se a mais gulosa também quisesse a sua parte?
b) Que fração do bolo cada uma das quatro recebeu?
c) Cada uma das quatro acabou ganhando uma certa fração do bolo a mais do que iria receber. Qual é essa fração?



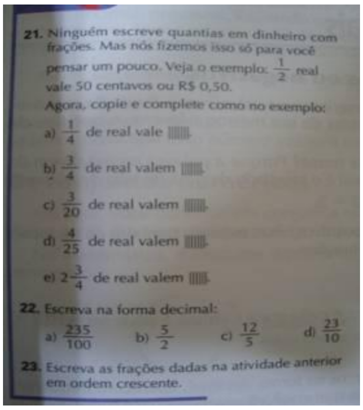
18. No problema anterior, cada uma das quatro meninas acabou ganhando 150 gramas de bolo a mais do que iria receber. Quantos gramas tinha esse bolo?

19. Até agora, já fiz $\frac{2}{5}$ dos exercícios da minha tarefa. Hoje, pretendo fazer mais $\frac{1}{10}$ dos exercícios, mas, mesmo assim, ainda restarão 30 exercícios para fazer. Quantos exercícios tem a minha tarefa?



20. A renda do circo que chegou à cidade foi de R$ 5600,00. O mestre-de-cerimônias, que também é o dono do circo, ficou com $\frac{1}{4}$ de toda a renda. Os dois irmãos trapezistas receberam $\frac{1}{3}$ do restante, para dividir entre si. O engolidor de fogo recebeu $\frac{1}{7}$ do que restou após as distribuições anteriores; a contorcionista, também $\frac{1}{7}$, e o rapaz do globo da morte, $\frac{2}{7}$.
A parte final, depois de todas as parcelas pagas a cada um, foi distribuída entre o pessoal de apoio (bilheteiro, montadores, camareiras e faxineiros).
Agora, copie e complete a tabela que mostra a parte da renda de cada um.

Pessoal	Parte da renda	
	Em fração	Em reais
Mestre	$\frac{1}{4}$	▮▮▮
Trapezista	$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$	▮▮▮
Engolidor	$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}$	▮▮▮
Contorcionista	▮▮▮	▮▮▮
Rapaz do globo	▮▮▮	▮▮▮
Apoio	▮▮▮	▮▮▮



21. Ninguém escreve quantias em dinheiro com frações. Mas nós fizemos isso só para você pensar um pouco. Veja o exemplo: $\frac{1}{2}$ real vale 50 centavos ou R$ 0,50.
Agora, copie e complete como no exemplo:
a) $\frac{1}{4}$ de real vale ▮▮▮.
b) $\frac{3}{4}$ de real valem ▮▮▮.
c) $\frac{3}{20}$ de real valem ▮▮▮.
d) $\frac{4}{25}$ de real valem ▮▮▮.
e) $2\frac{3}{4}$ de real valem ▮▮▮.

22. Escreva na forma decimal:
a) $\frac{235}{100}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{23}{10}$

23. Escreva as frações dadas na atividade anterior em ordem crescente.