Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Existência de solução de energia mínima para uma equação de Schrödinger não linear

Karlo Fernandes Rocha
Orientadora: *Prof.ª Magda Soares Xavier*

Vitória, março de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

"Existência de solução de energia mínima para uma equação de Schrödinger não linear"

Karlo Fernandes Rocha

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 06/03/2012 por:

Magda Soares Xavier - UFES

Marcelo Fernandes Furtado - UnB

João Pablo Pinheiro da Silva – UFPA

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Aos meus pais, Antônio Cordeiro da Rocha e Alaíde Fernandes Gomes Rocha, e a minhas irmãs, Karine e Karolina, pelo apoio, incentivo e confiança. Também a todos que fazem parte da minha família, que mesmo distante, acompanharam e deram força durante todo o curso.

A Professora Magda Soares Xavier, por ter aceitado me orientar e pela sua grande dedicação a este trabalho. E também pelo conhecimento e experiência que pude adquirir ao longo do trabalho em nossas reuniões.

Aos Professores Marcelo Fernandes Furtado e João Pablo Pinheiro da Silva, por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho.

Aos amigos do mestrado que sempre deram grande apoio nos momentos difíceis e também pelos vários momentos de descontração proporcionados.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do CCE-UFES e ao apoio financeiro da CAPES.

Resumo

Neste trabalho estudamos um resultado de existência de solução para uma equação de Schrödinger quasilinear em $\mathbb{R}^N$ demonstrado por Ruiz e Siciliano. Trabalhando em um espaço de funções apropriado, utilizando uma identidade variacional demonstrada por Pucci e Serrin, obtém-se um conjunto M que contém todas as soluções não nulas da equação. Utilizando um resultado de concentração-compacidade devido a Lions, é possível demonstrar que o ínfimo do funcional associado à equação, restrito a M, é atingido em um ponto u que é uma solução positiva de energia mínima.

Abstract

In this work we study the existence of solution of a quasilinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$, demonstrated by Ruiz and Siciliano. By working in an appropriated functions space, by using a variational identity demonstrated by Pucci and Serrin, a set M containing all nontrivial solutions of the equation is obtained. By using a concentration-compactness result due to Lions, it is possible to prove that the infimum of the functional associated with the equation, restricted to the set M, is achieved at some u which is a positive ground state solution.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, consideramos uma versão modificada da equação de Schrödinger não linear

$$i\phi_t - \Delta\phi + W(x)\phi - \frac{1}{2}\Delta g\left(|\phi|^2\right) g'\left(|\phi|^2\right)\phi = f(x,\phi), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $N \geq 3$, $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial dado e $f(x,\phi)$ é um termo não linear. Essa versão quasilinear da equação de Schrödinger aparece em vários modelos de diferentes fenômenos físicos, tais como o estudo de membranas de superfluidos em física dos plasmas, teoria da matéria condensada, entre outros (veja, por exemplo, [2, 18, 20, 28]).

Nos restringimos ao caso em que $g(\phi) = \phi$ e $f(x,\phi) = |\phi|^{p-1}\phi$. Nesse caso particular, a equação (1) se torna

$$i\phi_t - \Delta\phi + W(x)\phi - \frac{1}{2}\phi\Delta|\phi|^2 = |\phi|^{p-1}\phi, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Essa equação foi introduzida em [7, 8, 15] para estudar um modelo de elétrons em retículos quadrados ou hexagonais (veja também [5, 6]).

De um ponto de vista matemático, a existência local de solução para o problema de Cauchy foi considerada primeiro por Lange, Poppenberg e Teismann em [19] e Poppenberg em [25], e melhorado posteriormente por Colin, Jeanjean e Squassina em [10]. Veja também em [17] um resultado tratando de equações de Schrödinger quasilineares muito gerais. Em [10], a estabilidade orbital de soluções estacionárias é estudada, incluindo "blow-up", um assunto também considerado em [14].

Aqui estamos interessados na existência de soluções do tipo ondas estacionárias $\phi(t,x) = e^{-i\omega t}u(x)$ com $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Tal ϕ é solução de (2) se, e somente se, u

é solução de

$$-\Delta u + V(x)\,u - \frac{1}{2}u\Delta u^2 = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

onde $V(x) = W(x) + \omega$.

Na literatura vários autores têm considerado este problema. Talvez o primeiro tenha sido Poppenberg, Schmitt e Wang em [26], onde os casos unidimensional e radial são estudados. Em [23], Liu e Wang consideraram o caso de maiores dimensões. Em ambos os artigos as demonstrações baseiam-se em técnicas de minimização com vínculo. Liu, Wang e Wang [22] e Colin e Jeanjean [9], através de uma mudança de variáveis conveniente, reduziram a equação (P) a um problema semilinear mais tratável. Liu, Wang e Wang trabalharam em um espaço de Orlicz enquanto Colin e Jeanjean trabalharam no espaço usual $H^1(\mathbb{R}^N)$, dando uma prova mais simples para os resultados de [22]. Tanto em [9] como em [22], as soluções são obtidas quando $p \geq 3$. Finalmente, Liu, Wang e Wang em [24], usaram minimização sobre uma variedade de Nehari para obter resultados de existência. O argumento deles não depende de qualquer mudança de variáveis. Além disso, eles também provaram a existência de soluções que mudam de sinal. Esses resultados também foram obtidos supondo $p \geq 3$.

Em [29], Ruiz e Siciliano demonstraram a existência de solução de (P), supondo $p \in (1, 2(2^*) - 1)$ com $2^* = 2N/(N-2)$ e que $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(V_1) $0 < V_0 \leq V(x) \leq \lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty < \infty$;

(V_2) a função $x \mapsto x \cdot \nabla V(x)$ está em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(V_3) para cada $x \in \mathbb{R}^N$, a função $\alpha_x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha_x(s) = s^{\frac{N+2}{N+p+1}} V\left(s^{\frac{1}{N+p+1}} x\right)$ é côncava.

Apesar da hipótese (V_3) ter sido usada uma única vez (veja Lema 1.11), ela o foi num ponto essencial à demonstração da existência de solução de (P). A introdução dessa hipótese (V_3), que não é usual nesse tipo de problema, possibilitou aos autores Ruiz e Siciliano permitirem que o parâmetro p tome valores no intervalo $(1,3)$. A hipótese (V_2) é técnica mas não muito restritiva, uma vez que, se $\lim\limits_{|x|\to\infty} x \cdot \nabla V(x)$ existe, ele deve ser zero por (V_1). Obviamente, se V é a função constante, então ela satisfaz $(V_1) - (V_3)$. No Capítulo 1 damos um exemplo de uma função V não constante que satisfaz $(V_1) - (V_3)$.

Observamos que, se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de (P), então multiplicando a equação (P) por $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, integrando em $\mathbb{R}^N$ e utilizando o Teorema da Divergência obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(1+u^2\right)\nabla u \cdot \nabla\psi + u|\nabla u|^2\psi + V(x)\, u\psi - |u|^{p-1}u\psi\right] dx = 0, \tag{3}$$

para toda $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Vamos considerar o conjunto $X = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)\}$. Dizemos que $u \in X$ é uma solução fraca de (P) se u satisfaz (3). Definimos o funcional $I : X \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + u^2|\nabla u|^2\right) dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx.$$

Como veremos no Capítulo 1, I está bem definido e $u \in X$ é solução fraca de (P) se, e somente se, a derivada de Gateaux de I se anula no ponto u ao longo de qualquer direção $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dizemos que $u \in X$ é uma solução de energia mínima de (P) quando

$$I(u) = \inf\{I(v);\ v \text{ é solução fraca não trivial de } (P)\}.$$

O objetivo deste trabalho é estudar o seguinte resultado, demonstrado por Ruiz e Siciliano em [29].

Teorema A *Se* $p \in (1, 2(2^*) - 1)$ *e* $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfaz* (V_1), (V_2), (V_3) *então* (P) *possui uma solução positiva de energia mínima.*

A demonstração é baseada num processo de minimização com vínculo. Utilizando uma identidade variacional devido a Pucci e Serrin [27], Ruiz e Siciliano definiram um conjunto M que contém todas as soluções não nulas de (P) e obtiveram uma caracterização desse conjunto. Por fim, eles mostraram que o ínfimo do funcional I no conjunto M é estritamente positivo. Para demonstrar o Teorema A, inspirados por [24], eles mostraram que o ínfimo do funcional I restrito a M é atingido em um ponto u que de fato é uma solução positiva de energia mínima de (P). Apresentamos tal demonstração no Capítulo 2.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Consideramos a equação

$$-\Delta u + V(x)\, u - \frac{1}{2} u \Delta u^2 = |u|^{p-1} u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

onde $N \geq 3$, $p \in (1, 2(2^*) - 1)$ e $V : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo

(V_1) $0 < V_0 \leq V(x) \leq \lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = V_\infty < \infty$;

(V_2) a função $x \mapsto x \cdot \nabla V(x)$ pertence a $L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$;

(V_3) para cada $x \in \mathbb{R}^N$, a função $\alpha_x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha_x(s) = s^{\frac{N+2}{N+p+1}} V\left(s^{\frac{1}{N+p+1}} x\right)$ é côncava.

A seguir damos um exemplo de uma função V não constante que satisfaz tais hipóteses. Escolhemos $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que, para todo $t \geq 0$,

(g_1) $0 \leq g(t) \leq \lim\limits_{t \to \infty} g(t) = g_\infty < \infty$;

(g_2) $g'(t) \geq 0$;

(g_3) $g''(t) \leq 0$;

(g_4) existe $b > 0$ tal que $g'(t)\, t \leq b$.

É fácil encontrar funções g que satisfazem tais condições, por exemplo, $g(t) = 2 - e^{-t}$ ou

$g(t) = \arctan(t)$, ou ainda, $g(t) = \dfrac{t}{1+t}$, $\quad t \geq 0$. Consideramos $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$V(x) = V_0 + g\left(|x|^2\right),$$

onde $V_0 > 0$. Por (g_1), tal V satisfaz (V_1). Também

$$x \cdot \nabla V(x) = 2|x|^2 \, g'\left(|x|^2\right).$$

A hipótese (g_4) nos garante que (V_2) é satisfeita. Vamos mostrar que podemos escolher $V_0 > 0$ suficientemente grande de modo a termos (V_3) satisfeita. Seja $\theta = 1/(N+p+1)$ e $r = (N+2)\theta$ com $N \geq 3$ e $p \in (1, 2(2^*) - 1)$. Trata-se de mostrar que, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, a função

$$f(s) = s^r V\left(s^\theta x\right), \quad s \geq 0,$$

é côncava. Ou seja, devemos mostrar que, para cada $a \geq 0$,

$$f(s) = s^r\left[V_0 + g\left(as^{2\theta}\right)\right], \quad s \geq 0,$$

é côncava. Por cálculo direto obtemos, para $s > 0$,

$$\begin{aligned} f''(s) = {} & r(r-1)s^{r-2}\left[V_0 + g\left(as^{2\theta}\right)\right] + 2\theta(2\theta + 2r - 1)s^{r-2}\left[as^{2\theta}g'\left(as^{2\theta}\right)\right] \\ & + 4a^2\theta^2 s^{4\theta+r-1} g''\left(as^{2\theta}\right). \end{aligned}$$

Usando que $0 < r = \dfrac{N+2}{N+p+1} < 1$, de (g_1) e (g_3) segue que

$$f''(s) \leq r(r-1)s^{r-2}V_0 + C_{N,p}\, s^{r-2}\left[as^{2\theta}g'\left(as^{2\theta}\right)\right] \tag{1.1}$$

onde $C_{N,p} = 2\theta(2\theta + 2r - 1)$. Observamos que $C_{N,p} > 0$ sempre que $N \geq 4$ e que, quando $N = 3$, o sinal de $C_{3,p}$ depende do valor de $p \in (1, 11)$. Mas quando $C_{N,p} \leq 0$, como $g' \geq 0$, já teremos por (1.1) que $f'' \leq 0$. Assim, podemos considerar apenas o caso em que $C_{N,p} > 0$. De (1.1) e de (g_4) segue que, para todo $a \geq 0$,

$$f''(s) \leq s^{r-2}\left[r(r-1)V_0 + C_{N,p}\, b\right].$$

Tomando

$$V_0 > \frac{C_{N,p}\, b}{r(1-r)} = \frac{2b}{N+2}\left[\frac{N+5-p}{p-1}\right]$$

teremos $f''(s) \leq 0$ para todo $s > 0$. Isso conclui a verificação de que a função V do nosso exemplo satisfaz $(V_1) - (V_3)$.

Ao longo desse trabalho, consideramos $H^1(\mathbb{R}^N)$ o espaço usual de Sobolev com o produto interno

$$(u,\, v)_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} uv$$

e a correspondente norma associada

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aqui, e no restante do texto, usamos indistintamente os símbolos

$$\int_\Omega f, \quad \int_\Omega f\, dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega f(x)\, dx$$

para denotar a integral de Lebesgue de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável num conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Também denotamos por $|\cdot|_2$ a norma usual de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Vamos trabalhar com o conjunto

$$X = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

Proposição 1.1 *O conjunto X é um espaço métrico completo com a métrica*

$$d_X(u,v) = ||u - v|| + |\nabla u^2 - \nabla v^2|_2. \tag{1.2}$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em X. Por (1.2), as sequências (u_n) e (∇u_n^2) são sequências de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\left(L^2(\mathbb{R}^N)\right)^N$, respectivamente. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $L^2(\mathbb{R}^N)$ são completos, existem $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_n \to u \;\; \text{em } H^1(\mathbb{R}^N) \;\; \text{e} \;\; \nabla u_n^2 \to v \;\; \text{em } \left(L^2(\mathbb{R}^N)\right)^N. \tag{1.3}$$

Em particular, $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\nabla u_n \to \nabla u$ em $\left(L^2(\mathbb{R}^N)\right)^N$. Pelo Teorema IV.9 em [3], passando a uma subsequência podemos supor que

$$u_n(x) \to u(x), \quad \nabla u_n(x) \to \nabla u(x), \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N \tag{1.4}$$

e

$$\nabla u_n^2(x) \to v(x), \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{1.5}$$

Por (1.4),

$$\nabla u_n^2(x) = 2u_n(x)\nabla u_n(x) \to 2u(x)\nabla u(x) = \nabla u^2(x) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Por (1.5), concluímos que $v(x) = \nabla u^2(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e portanto

$$\nabla u_n^2 \to \nabla u^2 \ \text{ em } \left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^N. \tag{1.6}$$

Para mostrar que $u \in X$, resta verificar que $u^2 \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$, isto é, $u \in L^4\left(\mathbb{R}^N\right)$. De fato, como $u_n \in X$, temos que $u_n^2 \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Pela desigualdade de Sobolev, existe $c > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^2\right|^{2^*} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u_n^2\right|^2\right)^{\frac{2^*}{2}},$$

logo (u_n^2) é limitada em $L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Como $2 < 4 < 2(2^*)$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $4 = \theta \cdot 2 + (1-\theta)\, 2(2^*)$. Pela desigualdade de Hölder com expoentes $1/\theta$ e $1/(1-\theta)$, obtemos $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_m|^4 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_m|^{2\theta} |u_n - u_m|^{(1-\theta)2(2^*)} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_m|^2\right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_m|^{2(2^*)}\right)^{1-\theta} \\
&\leq |u_n - u_m|_2^{2\theta} \left[2^{2(2^*)-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^{2(2^*)} + |u_m|^{2(2^*)}\right)\right]^{1-\theta} \\
&\leq c\,|u_n - u_m|_2^{2\theta} \leq c\,\|u_n - u_m\|^{2\theta},
\end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos a limitação de (u_n^2) em $L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Como (u_n) é de Cauchy em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, segue que (u_n) é de Cauchy em $L^4\left(\mathbb{R}^N\right)$. Como $L^4\left(\mathbb{R}^N\right)$ é completo existe $w \in L^4\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $u_n \to w$ em $L^4\left(\mathbb{R}^N\right)$. Novamente pelo Teorema IV.9 em [3], passando a uma subsequência podemos supor que

$$u_n(x) \to w(x) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Por (1.4), concluímos que $u(x) = w(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Logo $u \in L^4\left(\mathbb{R}^N\right)$ e portanto $u \in X$. Por (1.3) e (1.6),

$$d_X(u_n, u) = ||u_n - u|| + |\nabla u_n^2 - \nabla u^2|_2 \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

$\square$

Definimos o funcional $I : X \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + u^2|\nabla u|^2\right) - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}. \tag{1.7}$$

Observamos que se $u \in X$ então $u, u^2, |\nabla u|, |\nabla u^2| \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. Por (V_1),

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, u^2 \leq V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^2 < \infty.$$

Também,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^2|^2 < \infty.$$

Além disso, como $1 < \dfrac{p+1}{2} < 2^*$, pela continuidade da imersão $H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{\frac{p+1}{2}}\left(\mathbb{R}^N\right)$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^2\right)^{\frac{p+1}{2}} \leq c||u^2||^{\frac{p+1}{2}} < \infty.$$

Portanto I está bem definido.

Para $u \in X$ e $\psi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ temos que $u + \psi \in X$. De fato, como $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $\psi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ então $u\psi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ (veja Teorema 1 da seção 5.2 em [11]). Logo

$$(u+\psi)^2 = u^2 + 2u\psi + \psi^2 \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right).$$

A derivada de Gateaux de I no ponto $u \in X$ na direção de $\psi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ é

$$\langle I'(u), \psi\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{I(u+t\psi) - I(u)}{t}.$$

Calculando esse limite e procedendo como na Proposição 1.12 de [30] para o cálculo da derivada da última parcela de $I(u)$, obtemos

$$\langle I'(u), \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(1+u^2\right)\nabla u \cdot \nabla\psi + V(x)\, u\psi + u|\nabla u|^2\psi\right] - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\psi. \tag{1.8}$$

Assim, uma solução fraca de (P) é uma $u \in X$ tal que $\langle I'(u), \psi\rangle = 0$ para toda $\psi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$.

1.1 Conjunto contendo as soluções não nulas de $(\boldsymbol{P})$

Nesta seção, utilizando resultados demonstrados por Pucci e Serrin em [27], mostramos que toda $u \in X\setminus\{0\}$ que é uma solução $C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ de (P) pertence ao conjunto

$$M = \{u \in X\setminus\{0\}\,;\, J(u) = 0\},$$

onde $J : X \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\begin{aligned} J(u) = \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x)u^2(x) + u^2(x)\,|\nabla u(x)|^2\right) dx \\ + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} x\cdot\nabla V(x)\,u^2(x)\,dx - \frac{N+p+1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p+1} dx. \end{aligned} \tag{1.9}$$

A fim de demonstrarmos tal fato, consideramos

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

de classe C^2 e denotamos por

$$\mathcal{F}_s : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$
$$\mathcal{F}_z : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

as aplicações

$$\mathcal{F}_s(x,s,z) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}(x,s,z)$$

e

$$\mathcal{F}_z(x,s,z) = \left(\mathcal{F}_{z_1}(x,s,z), \ldots, \mathcal{F}_{z_N}(x,s,z)\right)$$

com $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{F}_{z_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i},\ i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Para $u \in C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ consideramos a equação de Euler-Lagrange

$$\operatorname{div} \mathcal{F}_z(x,u,\nabla u) = \mathcal{F}_s(x,u,\nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.10}$$

No restante desta seção, escrevemos $\sum\limits_{i}$ no lugar de $\sum\limits_{i=1}^{N}$ e $\sum\limits_{i,j}$ significando o somatório duplo $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}$.

Começamos com o próximo lema, que é um resultado técnico, obtido como um caso particular da Proposição 1 em [27]. Posteriormente o aplicamos para uma função $\mathcal{F}$ particular, escolhida de forma tal que a equação (1.10) se torne a equação (P).

Lema 1.2 *Seja $u \in C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ uma solução da equação de Euler-Lagrange (1.10) e seja $a \in \mathbb{R}$. Então vale*

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[x_i \mathcal{F}(x,u,\nabla u) - \sum_j x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\mathcal{F}_{z_i}(x,u,\nabla u) - au\mathcal{F}_{z_i}(x,u,\nabla u)\right] = Q(x), \quad (1.11)$$

sendo

$$Q(x) := N\mathcal{F}(x,u,\nabla u) + \sum_i x_i \mathcal{F}_{x_i}(x,u,\nabla u) - (a+1)\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathcal{F}_{z_i}(x,u,\nabla u)$$
$$- au\mathcal{F}_s(x,u,\nabla u), \quad (1.12)$$

onde as funções u, ∇u são calculadas no ponto $x = (x_1, \ldots, x_N)$.

Demonstração. Para comodidade, denotamos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \text{ por } u_i \text{ e } u_{ji},$$

respectivamente e $\mathcal{F}(x,u,\nabla u)$ por $\mathcal{F}$. Pela regra do produto e da cadeia, no ponto $(x,u,\nabla u)$, vale

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[x_i\mathcal{F}] = \sum_i \left\{\mathcal{F} + x_i\left[\mathcal{F}_{x_i} + \mathcal{F}_s u_i + \sum_j \mathcal{F}_{z_j}u_{ji}\right]\right\}$$
$$= N\mathcal{F} + \sum_i x_i\mathcal{F}_{x_i} + \sum_i x_i\mathcal{F}_s u_i + \sum_{i,j} x_i \mathcal{F}_{z_j}u_{ji} \quad (1.13)$$

e

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\sum_j x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\mathcal{F}_{z_i}\right] = \sum_i\left[-\sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)\, u_j \mathcal{F}_{z_i} - \sum_j x_j u_{ji}\mathcal{F}_{z_i} - \sum_j x_j u_j \frac{\partial}{\partial x_i}[\mathcal{F}_{z_i}]\right]$$
$$= -\sum_i u_i\mathcal{F}_{z_i} - \sum_{i,j} x_j u_{ji}\mathcal{F}_{z_i} - \sum_{i,j} x_j u_j \frac{\partial}{\partial x_i}[\mathcal{F}_{z_i}]$$
$$= -\sum_i u_i\mathcal{F}_{z_i} - \sum_{i,j} x_j u_{ji}\mathcal{F}_{z_i} - \sum_j x_j u_j \mathcal{F}_s, \quad (1.14)$$

onde, na segunda igualdade usamos que $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)$ é zero para $i \neq j$ e 1 para $i = j$ e na terceira igualdade usamos que, por (1.10),

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{F}_{z_i} = \operatorname{div} \mathcal{F}_z = \mathcal{F}_s.$$

Usando novamente (1.10),

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-au\mathcal{F}_{z_i}\right) = -a \sum_i u_i \mathcal{F}_{z_i} - au\mathcal{F}_s. \tag{1.15}$$

Somando as equações (1.13), (1.14) e (1.15) observamos que alguns termos se cancelam e obtemos que o lado esquerdo de (1.11) é exatamente $Q(x)$. □

Definimos para $R > 0$, $B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\right\}$ e a função

$$H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

por

$$H(x,s,z) = |x| \mathcal{F}(x,s,z) - \frac{1}{|x|} \sum_{i,j} x_j z_j x_i \mathcal{F}_{z_i}(x,s,z) - \frac{1}{|x|} as \sum_i x_i \mathcal{F}_{z_i}(x,s,z). \tag{1.16}$$

Corolário 1.3 *Sob as mesmas hipóteses do Lema 1.2, vale, para todo $R > 0$,*

$$\int_{\partial B_R} H(x,u,\nabla u)\, dS = \int_{B_R} Q(x)\, dx,$$

onde H é a função dada em (1.16) e Q é a função definida em (1.12).

Demonstração. Pelo Teorema de Gauss-Green, para $w \in C^1(B_R)$ vale

$$\int_{B_R} w_{x_i} dx = \int_{\partial B_R} w\nu_i\, dS. \tag{1.17}$$

onde $\nu = \frac{x}{|x|} = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ é o vetor unitário normal exterior em ∂B_R. Integrando ambos os lados da equação (1.11) e usando (1.17), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} Q(x)\, dx = & \int_{\partial B_R} \left[\sum_i \mathcal{F}(x,u,\nabla u) \frac{x_i^2}{|x|} - \sum_{i,j}^{N} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathcal{F}_{z_i}(x,u,\nabla u) \frac{x_i}{|x|} \right. \\
& \left. - \sum_i au\mathcal{F}_{z_i}(x,u,\nabla u) \frac{x_i}{|x|} \right] dS \\
= & \int_{\partial B_R} H(x,u,\nabla u)\, dS.
\end{aligned}$$

□

Definimos $\mathcal{F}:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ por

$$\mathcal{F}(x,s,z)=\frac{1}{2}\left(1+s^2\right)|z|^2+\frac{1}{2}V(x)s^2-\frac{1}{p+1}|s|^{p+1}. \tag{1.18}$$

Por cálculo direto obtemos

$$\mathcal{F}_{z_i}(x,s,z)=\left(1+s^2\right)z_i,\quad i\in\{1,\dots,N\}, \tag{1.19}$$

$$\mathcal{F}_{z}(x,s,z)=\left(1+s^2\right)z, \tag{1.20}$$

$$\mathcal{F}_{s}(x,s,z)=s|z|^2+V(x)s-|s|^{p-1}s, \tag{1.21}$$

$$\mathcal{F}_{x_i}(x,s,z)=\frac{1}{2}s^2\frac{\partial}{\partial x_i}V(x). \tag{1.22}$$

De forma que a equação de Euler-Lagrange (1.10) se torna

$$\operatorname{div}\left[\left(1+u^2\right)\nabla u\right]=u|\nabla u|^2+V(x)u-|u|^{p-1}u.$$

Mas

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left[\left(1+u^2\right)\nabla u\right]&=2u|\nabla u|^2+\left(1+u^2\right)\Delta u\\&=u|\nabla u|^2+\Delta u+\frac{1}{2}u\operatorname{div}(2u\nabla u)\\&=u|\nabla u|^2+\Delta u+\frac{1}{2}u\operatorname{div}\left(\nabla u^2\right)\\&=u|\nabla u|^2+\Delta u+\frac{1}{2}u\Delta u^2.\end{aligned}$$

Assim a equação de Euler-lagrange (1.10) para $\mathcal{F}$ definida em (1.18) é

$$-\Delta u+V(x)u-\frac{1}{2}u\Delta u^2=|u|^{p-1}u. \tag{P}$$

Lema 1.4 *Seja $\mathcal{F}$ dada em (1.18). Se $u\in X\cap C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ é uma solução da equação (P) então Q dada por (1.12) é*

$$\begin{aligned}Q(x)=&\left(\frac{N-2}{2}-a\right)|\nabla u|^2+\left(\frac{N-2}{2}-2a\right)u^2|\nabla u|^2+\left(\frac{N}{2}-a\right)V(x)u^2\\&+\frac{1}{2}u^2x\cdot\nabla V(x)-\left(\frac{N}{p+1}-a\right)|u|^{p+1}\end{aligned} \tag{1.23}$$

e

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R}Q(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)\,dx. \tag{1.24}$$

Demonstração. Substituindo (1.18), (1.19), (1.21) e (1.22) em (1.12) obtemos (1.23). Definimos para $R > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\chi_{B_R}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B_R, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R. \end{cases}$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{R \to \infty} Q(x)\chi_{B_R}(x) = Q(x) \quad \text{ e } \quad Q(x)\chi_{B_R}(x) \le Q(x).$$

Lembramos que, por (V_1) e (V_2),

$$V_0 \le V(x) \le V_\infty \quad \text{ e } \quad x \cdot \nabla V(x) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Além disso, $u \in X$. Portanto $Q \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Assim podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\lim_{R \to \infty} \int_{B_R} Q(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)\chi_{B_R}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)\,dx.$$

□

A seguir transcrevemos a Proposição 2 de [27].

Proposição 1.5 *Suponha que* $u \in C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ *é tal que* $\mathcal{F}(x,u,\nabla u)^+$, $|\nabla u|\,|\mathcal{F}_z(x,u,\nabla u)|$, $\dfrac{|u|}{|x|+1}|\mathcal{F}_z(x,u,\nabla u)| \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Então vale*

$$\liminf_{R \to \infty} \int_{\partial B_R} H(x,u,\nabla u)\,dS \le 0.$$

No nosso caso, para $u \in X \cap C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\mathcal{F}(x,u,\nabla u) = \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}V(x)u^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}$$

e

$$|\nabla u|\,|\mathcal{F}_z(x,u,\nabla u)| = \left(1+u^2\right)|\nabla u|^2$$

pertencem a $L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, pois $u \in X$ e V é limitada. Também

$$\begin{aligned} \frac{|u|}{|x|+1}|\mathcal{F}_z(x,u,\nabla u)| &\le |u|\left(1+u^2\right)|\nabla u| \\ &= |u|\,|\nabla u| + u^2|u|\,|\nabla u| \\ &\le \frac{u^2}{2} + \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{u^4}{2} + \frac{u^2|\nabla u|^2}{2}. \end{aligned}$$

Como $u \in X$, segue que

$$\frac{|u|}{|x|+1}\left|\mathcal{F}_z\left(x,u,\nabla u\right)\right| \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Assim vemos que as hipóteses da Proposição 1.5 são satisfeitas no nosso caso e portanto

$$\liminf_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} H\left(x,u,\nabla u\right)dS \le 0.$$

No próximo lema mostramos que esse lim inf é zero.

Lema 1.6 *Seja $\mathcal{F}$ dada em (1.18). Se $u \in X \cap C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ é uma solução da equação (P) então*

$$\liminf_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} H\left(x,u,\nabla u\right)dS = 0.$$

Demonstração. Substituindo (1.18), (1.19) em (1.16) obtemos

$$\begin{aligned} H\left(x,u,\nabla u\right) = |x|\,\mathcal{F}\left(x,u,\nabla u\right) &- \frac{1}{|x|}\sum_{i,j} x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}x_i\left(1+u^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &- \frac{1}{|x|}au\sum_i x_i\left(1+u^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Para $x \in \partial B_R$, como $|x_i| \le |x| = R$ e $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right| \le |\nabla u|$ com $i \in \{1,\dots,N\}$,

$$\begin{aligned} \left|H\left(x,u,\nabla u\right)\right| &\le R\,\left|\mathcal{F}\left(x,u,\nabla u\right)\right| + \frac{1}{R}R^2\left|\nabla u\right|^2\left(1+u^2\right)N^2 + \frac{1}{R}|a|\,|u|\left(1+u^2\right)R\left|\nabla u\right|N \\ &\le R\left\{\frac{1}{2}\left(1+u^2\right)\left|\nabla u\right|^2 + \frac{1}{2}V\left(x\right)u^2 + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\right\} \\ &\quad + R\left|\nabla u\right|^2\left(1+u^2\right)N^2 + N\,|a|\left(1+u^2\right)\left[\frac{u^2}{2}+\frac{\left|\nabla u\right|^2}{2}\right], \end{aligned}$$

onde na última parcela usamos que $ab \le a^2/2 + b^2/2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Da desigualdade acima e de (V_1),

$$\begin{aligned} \left|H\left(x,u,\nabla u\right)\right| \le{}& \left[\frac{1}{2}\left(1+u^2\right) + N^2\left(1+u^2\right) + \frac{N\,|a|\,(1+u^2)}{2}\frac{1}{R}\right]R\left|\nabla u\right|^2 + \frac{1}{2}V_\infty R u^2 \\ &+ \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}R + N\,|a|\left(1+u^2\right)u^2. \end{aligned} \tag{1.25}$$

O Lema 5.10 em [24] garante que existem $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$|u(x)| \leq ce^{-\delta R}, \quad \text{para} \quad |x| = R \tag{1.26}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\nabla u|^2 \, dx \leq ce^{-\delta R}, \tag{1.27}$$

para $R > 0$ suficientemente grande e $u \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ solução de (P). Conforme observado por Ruiz e Siciliano em [29], os argumentos utilizados por Liu, Wang e Wang em [24] na demonstração de (1.26), (1.27) também valem quando $p \in (1,3)$. Por (1.26) para $|x| = R$ com $R > 0$ suficientemente grande podemos supor que $|u| \leq 1$ e, consequentemente, $|u|^{p+1} = |u|^{p-1} u^2 \leq u^2$. Daí, de (1.26) e (1.25), existem constantes $c_0, c_1 > 0$ tais que, para todo $x \in \partial B_R$ com $R > 0$ suficientemente grande, vale

$$\begin{aligned} |H(x,u,\nabla u)| &\leq c_0 R |\nabla u|^2 + c_0 u^2 + c_0 R u^2 \\ &\leq c_0 R |\nabla u|^2 + c_1 e^{-2\delta R} + c_1 R \, e^{-2\delta R}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_R} H(x,u,\nabla u) \, dS \right| &\leq \int_{\partial B_R} |H(x,u,\nabla u)| \, dS \\ &\leq c_0 R \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 \, dS + c_N c_1 e^{-2\delta R} R^{N-1} + c_N c_1 e^{-2\delta R} R^N, \end{aligned}$$

onde $c_N = N\alpha(N)$ é uma constante que depende só de N, tal que $c_N R^{N-1}$ é a área da superfície da esfera ∂B_R. Como o limite das últimas parcelas é zero quando $R \to \infty$, segue que

$$\liminf_{R \to \infty} \left| \int_{\partial B_R} H(x,u,\nabla u) \, dS \right| \leq c_0 \liminf_{R \to \infty} \left(R \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 \, dS \right). \tag{1.28}$$

Por (1.27),

$$\int_R^\infty \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 \, dS \, dr = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\nabla u|^2 \, dx \leq ce^{-\delta R}.$$

Definindo

$$f(r) = \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 \, dS,$$

a desigualdade acima se torna

$$\int_R^\infty f(r) \, dr \leq ce^{-\delta R}. \tag{1.29}$$

Afirmamos que $\liminf_{r\to\infty} rf(r) = 0$. Caso contrário, existiria $A > 0$ e $c > 0$ tal que

$$rf(r) > \frac{c}{2} > 0 \text{ para todo } r > A$$

e daí, para todo $R > A$ valeria

$$\int_R^\infty f(r)\, dr > \int_R^\infty \frac{c}{2r} dr = \infty,$$

o que contradiz (1.29). Isso mostra que

$$\liminf_{r\to\infty} r \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 \, dS = 0.$$

Combinando com (1.28) concluímos a demonstração do lema. □

Proposição 1.7 *Se $u \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de (P), então, para todo $a \in \mathbb{R}$, u satisfaz a identidade*

$$\left(\frac{N-2}{2} - a\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \left(\frac{N-2}{2} - 2a\right) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 + \left(\frac{N}{2} - a\right) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 x \cdot \nabla V(x) - \left(\frac{N}{p+1} - a\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} = 0. \tag{1.30}$$

Demonstração. Pelo Corolário 1.3, para $R > 0$

$$\int_{\partial B_R} H(x, u, \nabla u)\, dS = \int_{B_R} Q(x)\, dx,$$

onde H é dada em (1.16) e Q é dada em (1.12). Pelo Lema 1.4,

$$\liminf_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} H(x, u, \nabla u)\, dS = \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)\, dx$$

e $\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)\, dx$ é exatamente o lado esquerdo de (1.30). Aplicando o Lema 1.6, concluímos que u satisfaz (1.30). □

Tomando $a = -1$ na Proposição 1.7, obtemos que toda $u \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ que é uma solução de (P) pertence ao conjunto

$$M = \{u \in X \backslash \{0\}\, ; J(u) = 0\},$$

onde $J : X \to \mathbb{R}$ é dada em (1.9).

1.2 Caracterização do conjunto M

Nesta seção, para cada $u \in X$, definiremos uma função $f_u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f_u'(1) = J(u)$, de forma que

$$M = \{u \in X \backslash \{0\} \, ; f_u'(1) = 0\} \, .$$

Começamos definindo, para cada $u \in X$, a função $\gamma_u : [0, \infty) \to X$ por $\gamma_u(t) = u_t$, onde a função $u_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é dada por

$$u_t(x) = tu\left(\frac{x}{t}\right), \quad \text{se } \; t > 0 \; \text{ e } \; u_0 = 0. \tag{1.31}$$

Observamos que, para $t \neq 0$, pela regra da cadeia,

$$\nabla u_t(x) = \nabla u\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como $u \in X$, então $u, u^2, |\nabla u|, |\nabla u^2| \in L^2(\mathbb{R}^N)$, e portanto, para cada $t \in [0, \infty)$, temos u_t, u_t^2, $|\nabla u_t|$, $|\nabla u_t^2| \in L^2(\mathbb{R}^N)$, isto é, $u_t \in X$. Logo γ_u está bem definida. No Lema 1.9 a seguir vamos mostrar que γ_u é contínua. Para tanto, utilizamos o Lema de Brézis-Lieb [4], cuja demonstração também pode ser encontrada em [16] (veja Lema 4.6, Capítulo 1).

Lema 1.8 (Brézis-Lieb) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $1 \leq q < \infty$ e (f_n) uma sequência limitada de funções de $L^q(\Omega)$ convergente q.t.p em Ω para f. Então*

$$f \in L^q(\Omega) \quad e \quad |f|_q^q = \lim_{n\to\infty}\left(|f_n|_q^q - |f_n - f|_q^q\right).$$

Lema 1.9 *Para cada $u \in X$ fixado, seja $\gamma_u : [0, \infty) \to X$ dada por $\gamma_u(t) = u_t$, onde a função $u_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é dada em (1.31). Então γ_u é contínua, considerando X com a métrica d_X dada em (1.2).*

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[0, \infty)$ convergindo para t_0. Vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} d_X(\gamma_u(t_n), \gamma_u(t_0)) = 0,$$

onde d_X é a métrica de X dada em (1.2). Primeiro vamos supor que $t_0 > 0$. Nesse caso, podemos admitir que $0 < t_n \leq t_0 + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $u \in X$ é fixado, por comodidade denotamos γ_u por γ. Pela definição de d_X ,

$$d_X\left(\gamma\left(t_n\right), \gamma\left(t_0\right)\right) = \left\|\gamma\left(t_n\right) - \gamma\left(t_0\right)\right\| + \left|\nabla\left[\gamma\left(t_n\right)\right]^2 - \nabla\left[\gamma\left(t_0\right)\right]^2\right|_2.$$

Usando que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}\left[d_X\left(\gamma\left(t_n\right), \gamma\left(t_0\right)\right)\right]^2 \leq\ & 2\left|\gamma\left(t_n\right) - \gamma\left(t_0\right)\right|_2^2 + 2\left|\nabla\gamma\left(t_n\right) - \nabla\gamma\left(t_0\right)\right|_2^2 \\ & + 2\left|\nabla\left[\gamma\left(t_n\right)\right]^2 - \nabla\left[\gamma\left(t_0\right)\right]^2\right|_2^2. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Afirmamos que $\gamma\left(t_n\right)(x) \to \gamma\left(t_0\right)(x)$ e $\nabla\gamma\left(t_n\right)(x) \to \nabla\gamma\left(t_0\right)(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ quando $n \to \infty$ (e consequentemente $\nabla\left[\gamma\left(t_n\right)\right]^2(x) = 2\gamma\left(t_n\right)(x)\nabla\gamma\left(t_n\right)(x) \to \nabla\left[\gamma\left(t_0\right)\right]^2(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ quando $n \to \infty$). Admitindo essa afirmação verdadeira, vamos concluir a prova do lema utilizando o Lema 1.8 (Lema de Brézis-Lieb). Primeiro observamos que

$$\left|\gamma\left(t_n\right)\right|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N}\left|\gamma\left(t_n\right)\right|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} t_n^2 u^2\left(\frac{x}{t_n}\right) dx = t_n^{N+2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)\, dy. \tag{1.33}$$

Como $u \in X$ e $t_n \to t_0$, segue que $\left(\gamma\left(t_n\right)\right)$ é uma sequência limitada em $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\gamma\left(t_n\right)\right|_2^2 = t_0^{N+2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)\, dy = \left|\gamma\left(t_0\right)\right|_2^2.$$

Aplicando o Lema 1.8 com $f_n = \gamma\left(t_n\right)$, $f = \gamma\left(t_0\right)$ e $q = 2$, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\gamma\left(t_n\right) - \gamma\left(t_0\right)\right|_2^2 = 0. \tag{1.34}$$

Procedemos de forma análoga para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\nabla\gamma\left(t_n\right) - \nabla\gamma\left(t_0\right)\right|_2^2 = 0 \tag{1.35}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left|\nabla\left[\gamma\left(t_n\right)\right]^2 - \nabla\left[\gamma\left(t_0\right)\right]^2\right|_2^2 = 0. \tag{1.36}$$

Tudo funciona bem pois

$$\left|\nabla\gamma\left(t_n\right)\right|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\gamma\left(t_n\right)\right|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u\left(\frac{x}{t_n}\right)\right|^2 dx = t_n^N\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u(y)\right|^2 dy \tag{1.37}$$

e

$$\left|\nabla\left[\gamma\left(t_n\right)\right]^2\right|_2^2=\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left[\gamma\left(t_n\right)\right]^2\right|^2=\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left[t_n^2u^2\left(\frac{x}{t_n}\right)\right]\right|^2dx=t_n^{N+2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u^2\left(y\right)\right|^2dy \tag{1.38}$$

e podemos aplicar novamente o Lema 1.8 para concluir (1.35) e (1.36). Substituindo (1.34), (1.35) e (1.36) em (1.32), o lema fica demonstrado no caso $t_0>0$, faltando apenas verificar as convergências

$$\gamma\left(t_n\right)\left(x\right)\to\gamma\left(t_0\right)\left(x\right)\quad\text{e}\quad\nabla\gamma\left(t_n\right)\left(x\right)\to\nabla\gamma\left(t_0\right)\left(x\right)$$

q.t.p em $\mathbb{R}^N$ quando $n\to\infty$. Ora, como $u\in X\subset H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ é denso em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ existe uma sequência (u_k) em $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $\|u_k-u\|\to0$ quando $k\to\infty$. Em particular,

$$\left|u_k-u\right|_2\to0\quad\text{e}\quad\left|\nabla u_k-\nabla u\right|_2\to0\quad\text{quando}\quad k\to\infty.$$

Passando a uma subsequência, podemos supor que

$$u_k\left(x\right)\to u\left(x\right)\quad\text{e}\quad\nabla u_k\left(x\right)\to\nabla u\left(x\right)$$

q.t.p em $\mathbb{R}^N$ quando $k\to\infty$. Assim existe $Z\subset\mathbb{R}^N$ de medida nula tal que $\left|u_k\left(x\right)-u\left(x\right)\right|\to0$, para todo $x\in\mathbb{R}^N\backslash Z$, isto é, dado $\varepsilon>0$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|u_k\left(x\right)\to u\left(x\right)\right|<\varepsilon,\quad\text{para todo}\quad x\in\mathbb{R}^N\backslash Z\quad\text{e}\quad k\geq k_0. \tag{1.39}$$

Fixado $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, o conjunto $Z_n=\{t_ny:y\in Z\}$ tem medida nula. E $\dfrac{x}{t_n}\notin Z$ se, somente se, $x\notin Z_n$. Assim, segue de (1.39) que

$$\left|t_nu_{k_0}\left(\frac{x}{t_n}\right)-t_nu\left(\frac{x}{t_n}\right)\right|\leq\left(t_0+1\right)\left|u_{k_0}\left(\frac{x}{t_n}\right)-u\left(\frac{x}{t_n}\right)\right|<\left(t_0+1\right)\varepsilon,$$

para todo $x\in\mathbb{R}^N\backslash Z_n$. Tomando $N=Z_0\cup\left[\cup_{n=1}^\infty Z_n\right]$, temos que N tem medida nula e

$$\left|t_nu_{k_0}\left(\frac{x}{t_n}\right)-t_nu\left(\frac{x}{t_n}\right)\right|<\left(t_0+1\right)\varepsilon,\quad\text{para todo}\quad x\in\mathbb{R}^N\backslash N\quad\text{e}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\gamma(t_n)(x) - \gamma(t_0)(x)| &= \left| t_n u\left(\frac{x}{t_n}\right) - t_0 u\left(\frac{x}{t_0}\right)\right| \\
&\leq \left| t_n u\left(\frac{x}{t_n}\right) - t_n u_{k_0}\left(\frac{x}{t_n}\right)\right| + \left| t_n u_{k_0}\left(\frac{x}{t_n}\right) - t_0 u_{k_0}\left(\frac{x}{t_0}\right)\right| \\
&\quad + \left| t_0 u_{k_0}\left(\frac{x}{t_0}\right) - t_0 u\left(\frac{x}{t_0}\right)\right| \\
&\leq 2(t_0+1)\varepsilon + \left| t_n u_{k_0}\left(\frac{x}{t_n}\right) - t_0 u_{k_0}\left(\frac{x}{t_0}\right)\right|
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^N \backslash N$. Ora, u_{k_0} é uma função contínua e $t_n \to t_0$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\gamma(t_n)(x) - \gamma(t_0)(x)| \leq 2(t_0+1)\varepsilon + \varepsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash N$ e $n \geq n_0$. Isso mostra que

$$\gamma(t_n)(x) \to \gamma(t_0)(x) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

A prova que

$$\nabla\gamma(t_n)(x) \to \nabla\gamma(t_0)(x) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

é análoga. Com isso concluímos a demonstração do lema no caso $t_0 > 0$. Quando $t_0 = 0$, como $\gamma(0) = 0$,

$$d_X(\gamma(t_n), 0) = \begin{cases} 0, & \text{se } t_n = 0, \\ d_X(\gamma(t_n), 0), & \text{se } t_n > 0 \end{cases}$$

tenderá a zero quando $n \to \infty$ como consequência direta de (1.33), (1.37) e (1.38). □

Para cada $u \in X$ definimos $f_u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f_u(t) = I(u_t), \tag{1.40}$$

onde $u_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é dada em (1.31). Temos $f_u(0) = 0$ e, para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
f_u(t) = I(u_t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_t|^2 + V(x)u_t^2 + u_t^2|\nabla u_t|^2)\, dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p+1} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} t^2 \left|\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 \frac{1}{t^2} dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) t^2 u^2\left(\frac{x}{t}\right) dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} t^2 u^2\left(\frac{x}{t}\right) t^2 \left|\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 \frac{1}{t^2} dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} t^{p+1}\left|u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^{p+1} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $x = ty$, pelo Teorema da Mudança de Variáveis,

$$f_u(t) = I(u_t) = \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u\,(y)\,|^2 dy + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(ty)u^2\,(y)\,dy$$
$$+ \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,(y)\,|\nabla u\,(y)\,|^2 dy - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u\,(y)\,|^{p+1} dy. \tag{1.41}$$

Observamos que, fixado $u \in X\setminus\{0\}$,

$$f_u(t) = At^N + \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(ty)u^2\,(y)\,dy\right)t^{N+2} + Bt^{N+2} - Ct^{N+p+1},\ t > 0,$$

onde A, B, $C > 0$. Por (V_1),

$$0 < V_0 \leq V\,(ty) \leq V_\infty,$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$. Assim existem constantes $\tilde{B}$, $\hat{B} > 0$ tais que

$$f_u(t) \geq At^N + \tilde{B}t^{N+2} - Ct^{N+p+1}$$

e

$$f_u(t) \leq At^N + \hat{B}t^{N+2} - Ct^{N+p+1},$$

para todo $t > 0$. Como $p + 1 > 2$ concluímos que

$$f_u(t) > 0 \text{ para } t > 0 \text{ suficientemente pequeno} \tag{1.42}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} f_u\,(t) = -\infty. \tag{1.43}$$

Como $f_u = I \circ \gamma_u$ é uma função contínua de t, e sendo $f_u\,(0) = I\,(u_0) = 0$, de (1.42) e (1.43) concluímos que f_u atinge um máximo em algum $t > 0$. No Lema 1.11 mostraremos que, para $u \neq 0$, a função f_u tem um único ponto de máximo.

A partir de (1.41) calculamos a derivada de f_u, qual seja,

$$f_u'\,(t) = \frac{N}{2}t^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u\,(y)\,|^2 dy + \frac{t^{N+2}}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(ty)u^2\,(y)\,dy\right)$$
$$+ \frac{N+2}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N} V\,(ty)\,u^2\,(y)\,dy + \frac{N+2}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,(y)\,|\nabla u\,(y)\,|^2 dy$$
$$- \frac{N+p+1}{p+1}t^{N+p}\int_{\mathbb{R}^N} |u\,(y)\,|^{p+1} dy. \tag{1.44}$$

Neste ponto, gostaríamos de lembrar o seguinte corolário do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Corolário 5.9 em [1]).

Corolário 1.10 *Suponha que para algum* $t_0 \in [a,b]$, *a função* $x \mapsto f(x,t_0)$ *seja integrável em* Y, *que* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *exista em* $Y \times [a,b]$, *e que exista uma função integrável* $g : Y \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x).$$

Então a função

$$F(t) = \int_Y f(x,t)\,dx$$

é diferenciável em $[a,b]$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_Y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Pela hipótese (V_2) podemos aplicar o resultado acima com $Y = \mathbb{R}^N$, obtendo, para $t > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(ty)u^2(y)\,dy\right) &= \int_{\mathbb{R}^N} y \cdot \nabla V(ty)\,u^2(y)\,dy \\ &= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N} ty \cdot \nabla V(ty)\,u^2(y)\,dy.\end{aligned}$$

Substituindo em (1.44), vem

$$\begin{aligned}f_u'(t) = {} & \frac{N}{2}t^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy + \frac{1}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N} ty \cdot \nabla V(ty)\,u^2(y)\,dy \\ & + \frac{N+2}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N} V(ty)u^2(y)\,dy + \frac{N+2}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)\,|\nabla u(y)|^2 dy \\ & - \frac{N+p+1}{p+1}t^{N+p}\int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^{p+1} dy. \qquad (1.45)\end{aligned}$$

Note que $f_u'(1) = J(u)$ onde $J : X \to \mathbb{R}$ é dada em (1.9). Assim o conjunto $M = \{u \in X \backslash \{0\}\,; J(u) = 0\}$, que como vimos na Seção 1.1, contém todas as soluções não nulas de (P), é igual ao conjunto

$$M = \{u \in X \backslash \{0\}\,; f_u'(1) = 0\}. \qquad (1.46)$$

Afirmamos que M é não vazio. De fato, para $u \in X$, a função $u_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida em (1.31) satisfaz, para $t,\, s > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(u_t)_s (x) = s u_t \left(\frac{x}{s}\right) = s \left[t u \left(\frac{x}{ts}\right)\right] = tsu \left(\frac{x}{ts}\right) = t \left[su \left(\frac{x}{st}\right)\right] = tu_s \left(\frac{x}{t}\right) = (u_s)_t (x) .$$

Ou seja, $(u_t)_s = u_{ts} = (u_s)_t$, para todo $t,\, s > 0$. Consequentemente, a função $f_u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida em (1.40) satisfaz, para $t, s > 0$,

$$f_{u_t} (s) = I \left((u_t)_s \right) = I (u_{ts}) = f_u (ts) .$$

Derivando em relação a s, obtemos

$$f'_{u_t} (s) = t f'_u (ts) .$$

Em particular, quando $s = 1$,

$$f'_{u_t} (1) = t f'_u (t) , \quad \text{para todo } t > 0. \tag{1.47}$$

Conforme já observamos, se $u \in X \setminus \{0\}$, como $f_u (0) = 0$, por (1.42) e por (1.43), f_u possui pelo menos um ponto de máximo $t^M > 0$. Por (1.47) , $u_{t^M} \in M$. Logo M é não vazio.

1.3 O ínfimo de I em M

Nesta seção mostramos que o ínfimo do funcional I no conjunto M é estritamente positivo e é caracterizado por

$$m := \inf_M I = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \max_{t > 0} I (u_t) ,$$

onde $u_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é definida em (1.31) .

Lema 1.11 *Para qualquer $u \in X \setminus \{0\}$, a função f_u definida em (1.40), atinge seu máximo em um único ponto $t^u > 0$. Além disso, f_u é positiva, crescente para $0 < t < t^u$ e decrescente para $t > t^u$. Finalmente*

$$m = \inf_M I = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \max_{t > 0} I (u_t) .$$

Demonstração. Seja $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = s^{\frac{1}{N+p+1}}$. Para $u \in X \setminus \{0\}$, defina $g_u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $g_u = f_u \circ h$. Então, de (1.41),

$$\begin{aligned} g_u(s) &= f_u\left(s^{\frac{1}{N+p+1}}\right) \\ &= \frac{s^{\frac{N}{N+p+1}}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \frac{s^{\frac{N+2}{N+p+1}}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(s^{\frac{1}{N+p+1}}x)u^2 + \frac{s^{\frac{N+2}{N+p+1}}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 \\ &\quad - \frac{s}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Como $h(s)$ é positiva e fica próxima de zero para $s > 0$ pequeno, então por (1.42), $g_u(s) = f_u(h(s)) > 0$ para $s > 0$ suficientemente pequeno. Por (1.43) e por ser $\lim_{s\to\infty} h(s) = \infty$,

$$\lim_{s\to\infty} g_u(s) = \lim_{s\to\infty} f_u(h(s)) = -\infty.$$

Afirmamos que g_u é côncava. Admitindo esse fato, e como $g_u(0) = 0$, concluímos que o máximo de g_u é atingido em algum $s^u > 0$ e s^u é o único ponto crítico de g_u. Portanto, $g_u'(s) > 0$, para $s \in (0, s^u)$ e $g_u'(s) < 0$, para $s > s^u$. Temos

$$g_u'(s) = f_u'(h(s)) \cdot \frac{1}{N+p+1} s^{\frac{1}{N+p+1}-1}.$$

Logo

$$f_u'(h(s)) = (N+p+1)\ s^{\frac{N+p}{N+p+1}} g_u'(s).$$

Seja $t^u = h(s^u)$. Então $f_u'(t^u) = 0$ e $f_u'(t) > 0$, para $t \in (0, t^u)$ e $f_u'(t) < 0$, para $t > t^u$. Logo para $u \in X\setminus\{0\}$, t^u é o único ponto de máximo de f_u e t^u é o único ponto crítico de f_u além de $t = 0$. Quando $u \in M$, $t^u = 1$ já que $f_u'(1) = 0$ nesse caso. Como $f_u(0) = 0$, $f_u(1) > 0$, para todo $u \in M$. Assim, pelas definições de u_t e $f_u(t)$, o conjunto

$$\{I(u)\,; u \in M\} = \{I(u_1)\,; u \in M\} = \{f_u(1)\,; u \in M\}$$

é limitado inferiormente por zero. Logo está bem definido

$$m := \inf_{u\in M} I(u)$$

e $m \geq 0$. Já vimos em (1.47) que $f_{u_t}'(1) = t f_u'(t)$, para todo $t > 0$. Assim t^u é o único ponto tal que $f_{u_{t^u}}'(1) = f_u'(t^u) \cdot t^u = 0$, ou seja, t^u é o único ponto tal que

$u_{t^u} \in M = \{u \in X\backslash\{0\}; f_u'(1) = 0\}$. Agora vamos mostrar que

$$m_1 := \inf_{u \in X\backslash\{0\}} \max_{t>0} I(u_t) \quad \text{e} \quad m = \inf_M I = \inf\{I(u)\,; u \in M\}$$

são iguais. Temos que

$$m_1 = \inf_{u \in X\backslash\{0\}} I(u_{t^u}) \geq \inf_M I(u) = m,$$

onde na última desigualdade usamos o fato de que $u_{t^u} \in M$, para todo $u \in X\backslash\{0\}$. Por outro lado, $M \subset X\backslash\{0\}$ e quando $u \in M$, f_u atinge seu valor máximo em $t = 1$. Então

$$m_1 = \inf_{u \in X\backslash\{0\}} \max_{t>0} I(u_t) \leq \inf_{u \in M} \max_{t>0} f_u(t) = \inf_{u \in M} f_u(1) = \inf_{u \in M} I(u_1) = \inf_{u \in M} I(u) = m,$$

pois $u_1 = u$.

Resta mostrar que g_u é uma função côncava. De fato, considere para cada $x \in \mathbb{R}^N$ a função $\alpha_x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha_x(s) = s^{\frac{N+2}{N+p+1}} V\left(s^{\frac{1}{N+p+1}} x\right)$. Por (V_3), α_x é concâva. Vamos mostrar que a função $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$p(s) = s^{\frac{N+2}{N+p+1}} \int_{\mathbb{R}^N} V\left(s^{\frac{1}{N+p+1}} x\right) u^2(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_x(s)\, u^2(x)\,dx$$

é côncava. Com efeito, para $\theta \in [0,1]$ e $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^+$ então

$$\begin{aligned} p((1-\theta)s_1 + \theta s_2) &= \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_x((1-\theta)s_1 + \theta s_2)\, u^2(x)\,dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} ((1-\theta)\alpha_x(s_1) + \theta\alpha_x(s_2))\, u^2(x)\,dx \\ &\geq (1-\theta)\int_{\mathbb{R}^N} \alpha_x(s_1)\, u^2(x)\,dx + \theta\int_{\mathbb{R}^N} \alpha_x(s_2)\, u^2(x)\,dx \\ &= (1-\theta)\,p(s_1) + \theta p(s_2). \end{aligned}$$

Logo p é côncava. Temos que a função $s \mapsto s^r$ com $0 < r < 1$ é côncava. Como $p+1 > 2$, concluímos que, para cada $u \in X$, a função g_u dada em (1.48) é côncava por ser a soma de funções côncavas. $\square$

Lema 1.12 *O valor* $m = \inf_M I$ *é estritamente positivo.*

Demonstração. Seja V_0 dado na hipótese (V_1) . Definimos $I_0 : X \to \mathbb{R}$ por

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_0 u^2 + u^2|\nabla u|^2\right) - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}.$$

Por (V_1), $I_0(u(x)) \leq I(u(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Isso implica que

$$m_0 := \inf_{u \in X\backslash\{0\}} \max_{t>0} I_0(u_t) \leq \inf_{u \in X\backslash\{0\}} \max_{t>0} I(u_t) = m.$$

Portanto basta mostrar que $m_0 > 0$. Fixado $u \in X\backslash\{0\}$ definimos $g_u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $g_u(t) = I_0(u_t)$ e $M_0 = \{u \in X\backslash\{0\}; g_u'(1) = 0\}$. A função $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $V(x) = V_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ satisfaz (V_1), (V_2), (V_3). Aplicando o Lema 1.11 para g_u obtemos $m_0 = \inf\limits_{M_0} I_0(u)$. Temos

$$\begin{aligned} g_u'(t) &= \frac{N}{2}t^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{N+2}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N} V_0 u^2 \\ &+ \frac{N+2}{2}t^{N+1}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 - \frac{N+p+1}{p+1}t^{N+p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Para $u \in M_0$, $g_u'(1) = 0$ então

$$\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0 u^2 + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 - \frac{N+p+1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} = 0. \tag{1.50}$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0 u^2 + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 &= \frac{N+p+1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} - \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \\ &\leq \frac{N+p+1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Temos

$$\frac{N+p+1}{p+1}|u|^{p+1} = \frac{(N+2)}{2} \cdot V_0 \cdot q\,|u|^{p+1}, \tag{1.52}$$

onde

$$q = \frac{2}{(N+2)} \cdot \frac{1}{V_0} \cdot \left(\frac{N+p+1}{p+1}\right).$$

Como $2 < p+1 < 2(2^*)$, então existe $\theta \in (0,1)$ tal que $p+1 = (1-\theta)2 + \theta\, 2(2^*)$. Logo $q\, |u|^{p+1} = |u|^{(1-\theta)2} q\,|u|^{\theta 2 \cdot 2^*}$. Pela desigualdade de Young com expoentes $r = 1/(1-\theta)$ e $r' = 1/\theta$ temos

$$q\, |u|^{p+1} \leq \frac{|u|^{(1-\theta)2r}}{r} + \frac{q^{r'}|u|^{\theta 2(2^*) r'}}{r'} = (1-\theta)\,u^2 + \theta\, q^{\frac{1}{\theta}}|u|^{2(2^*)} \leq u^2 + q^{\frac{1}{\theta}}|u|^{2(2^*)}. \tag{1.53}$$

Assim, de (1.52) e (1.53),

$$\frac{N+p+1}{p+1}|u|^{p+1} \leq \frac{(N+2)}{2}V_0u^2 + \frac{(N+2)}{2}V_0\ q^{\frac{1}{\theta}}|u|^{2(2^*)}.$$

Substituindo em (1.51) vem

$$\frac{N+2}{2}V_0\int_{\mathbb{R}^N} u^2 + \frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 \leq \frac{(N+2)}{2}V_0\int_{\mathbb{R}^N} u^2 + c_1\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2(2^*)},$$

onde $c_1 > 0$. Da desigualdade acima e pela Desigualdade de Sobolev, existe $c_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{N+2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 &\leq c_1\int_{\mathbb{R}^N} |u^2|^{2^*} \\ &\leq c_2\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^2|\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2^*} = 2^{2^*}c_2\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\right)^{\frac{2^*}{2}}.\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\right)^{\frac{N}{N-2}-1} \geq \frac{N+2}{2\,(2^{2^*})\,c_2}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 \geq \widetilde{c} > 0, \text{ para todo } u \in M_0 \text{ e algum } \widetilde{c} > 0. \tag{1.54}$$

De (1.50) temos

$$\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} = \frac{N}{2\,(N+p+1)}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{N+2}{2\,(N+p+1)}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V_0u^2 + u^2|\nabla u|^2\right). \tag{1.55}$$

Substituindo a equação (1.55) na expressão do funcional I_0, vem

$$\begin{aligned}I_0\,(u) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + V_0u^2 + u^2|\nabla u|^2\right) \\ &\quad - \frac{N}{2\,(N+p+1)}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \frac{N+2}{2\,(N+p+1)}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V_0u^2 + u^2|\nabla u|^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2\,(N+p+1)}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{N+2}{2\,(N+p+1)}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V_0u^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{N+2}{2\,(N+p+1)}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Como $p > 1$ então

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2\,(N+p+1)}\right) > 0 \ \text{ e } \ \left(\frac{1}{2} - \frac{N+2}{2\,(N+p+1)}\right) > 0.$$

Portanto, por (1.54), $I_0(u) \geq c_0 > 0$ para todo $u \in M_0$. Como $m_0 = \inf\limits_{u \in M_0} I_0$ concluímos que $m_0 > 0$, o que finaliza a demonstração do Lema 1.12. $\square$

Capítulo 2

Existência de solução positiva de energia mínima

Neste capítulo, inicialmente provamos o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *Seja* $m = \inf\limits_{M} I$*. Então existe* $u \in M$ *tal que* $I(u) = m$.

Tal proposição será peça fundamental para demonstração do Teorema A.

Teorema A *Se* $p \in (1, 2(2^*) - 1)$ *e* $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfaz* $(V_1), (V_2), (V_3)$ *então* (P) *possui uma solução positiva de energia mínima.*

2.1 Demonstração da Proposição 2.1

A fim de demonstrar a Proposição 2.1 utilizamos os resultados a seguir. Começamos com um resultado técnico.

Proposição 2.2 *Existe* $c > 0$ *tal que* $I(u) \geq c\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2 + u^2|\nabla u|^2)$ *para todo* $u \in M$.

Demonstração. Seja $u \in M = \{u \in X\backslash\{0\}; f_u'(1) = 0\}$. Para $t \in (0,1)$, considere $u_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida em (1.31). Por (1.41) e (1.7),

$$I(u_t) = \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(tx)u^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2 - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}$$

e

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}.$$

Então

$$\begin{aligned} I(u_t) - t^{N+p+1}I(u) &= \left(\frac{t^N}{2} - \frac{t^{N+p+1}}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \left(\frac{t^{N+2}}{2} - \frac{t^{N+p+1}}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{t^{N+2}}{2}V(tx) - \frac{t^{N+p+1}}{2}V(x)\right)u^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por (V_1) temos que $0 < V_0 \leq V(x) \leq V_\infty < \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo $0 < V_0/V_\infty \leq 1$ e, além disso, $V(tx) \geq V_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então podemos tomar $0 < \delta < V_0/V_\infty$ tal que $V(tx) \geq V_0 > \delta V_\infty \geq \delta V(x)$. Note que $\delta \in (0,1)$ e depende somente de V_0 e V_∞. Como $p+1 > 2$, escolhendo $t \in (0,1)$ suficientemente pequeno, temos

$$\frac{t^{N+2}}{2}V(tx) - \frac{t^{N+p+1}}{2}V(x) \geq \frac{t^{N+2}}{2}\delta V(x) - \frac{t^{N+p+1}}{2}V(x) \geq \left(\frac{t^{N+2}}{2}\delta - \frac{t^{N+p+1}}{2}\right)V_0 := \varepsilon_t > 0. \tag{2.2}$$

Como $u \in M$ então $f_u'(1) = 0$. Pelo Lema 1.11, f_u atinge seu máximo em $t = 1$. Logo para $t \in (0,1)$ temos $f_u(t) \leq f_u(1)$, ou seja, $I(u_t) \leq I(u)$ para todo $t \in (0,1)$. Escolhendo $t > 0$ menor se necessário, temos, por (2.1) e (2.2),

$$\begin{aligned} \left(1 - t^{N+p+1}\right)I(u) &= I(u) - t^{N+p+1}I(u) \\ &\geq I(u_t) - t^{N+p+1}I(u) \\ &\geq \left(\frac{t^N}{2} - \frac{t^{N+p+1}}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \left(\frac{t^{N+2}}{2} - \frac{t^{N+p+1}}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon_t u^2 \\ &\geq \varepsilon_t\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \varepsilon_t\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon_t u^2 \\ &= \varepsilon_t\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + u^2|\nabla u|^2 + u^2\right). \end{aligned}$$

Tomando $c = \dfrac{\varepsilon_t}{1 - t^{N+p+1}}$, concluímos que

$$I(u) \geq c \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2 |\nabla u|^2 + u^2 \right).$$

□

Daqui por diante, nesta seção, denotaremos por (u_n) uma sequência em M tal que $I(u_n)$ converge para $m = \inf\limits_M I$.

Lema 2.3 *As sequências* (u_n) *e* (u_n^2) *são limitadas em* $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Consequentemente* (u_n) *é limitada em* $L^{p+1}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Demonstração. Como $I(u_n)$ é convergente então existe c_0 tal que $I(u_n) \leq c_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 2.2,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 + u_n^2 |\nabla u_n|^2 \leq \frac{I(u_n)}{c} \leq \frac{c_0}{c}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Portanto (u_n) é limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Por (2.3),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^2|^2 = 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 \leq \frac{4c_0}{c}. \tag{2.4}$$

Como $u_n \in M$ e $M \subset X$ então $u_n^2 \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Pela desigualdade de Sobolev, existe $c_1 > 0$ tal que $|u_n^2|_{2^*} \leq c_1 |\nabla u_n^2|_2$. Combinando com (2.4), obtemos c_2, $c_3 > 0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^2|^{2^*} \leq c_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^2|^2 \right)^{\frac{2^*}{2}} \leq c_3.$$

De (2.3), $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \leq \frac{c_0}{c}$. Como $2 < 4 < 2(2^*)$ então existe $\theta \in (0,1)$ tal que $4 = \theta \cdot 2 + (1-\theta)\, 2\,(2^*)$. Pela desigualdade de Hölder com expoentes $1/\theta$ e $1/(1-\theta)$ e das duas últimas desigualdades, obtemos $c_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2\theta} \, |u_n|^{(1-\theta)2(2^*)} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2(2^*)} \right)^{(1-\theta)} < c_4. \end{aligned}$$

Daí e de (2.4) concluímos que (u_n^2) é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Temos que $1 < \dfrac{p+1}{2} < 2^*$. Pela imersão contínua de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $c_5 > 0$ tal que

$$|u_n|_{p+1}^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^2|^{\frac{p+1}{2}}\right)^{\frac{2}{p+1}} \leq \left|u_n^2\right|_{\frac{p+1}{2}} \leq c_5 \left\|u_n^2\right\|. \tag{2.5}$$

Logo (u_n) é uma sequência limitada em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. □

Lema 2.4 *A sequência* $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}$, $n \in \mathbb{N}$, *converge, a menos de subsequência, para um valor A positivo.*

Demonstração. Por hipótese,

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 + u_n^2|\nabla u_n|^2\right) - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}$$

converge para m. Pelo Lema 1.12, $m > 0$. Além disso, $\|u_n\| + \|u_n^2\|$ não converge para zero. De fato, se fosse que $\|u_n\| + \|u_n^2\| \to 0$ então seria $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n^2\| = 0$. De (2.5) teríamos $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}$ convergindo para zero. Por (V_1),

$$\begin{aligned} |I(u_n)| &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \frac{V_\infty}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2 + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \\ &\leq c\left(\|u_n\|^2 + \left\|u_n^2\right\|^2\right) + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}, \end{aligned}$$

para algum $c > 0$. Assim $I(u_n)$ tenderia a zero contradizendo o fato de que $I(u_n)$ converge para $m > 0$. Logo $\|u_n\| + \|u_n^2\|$ não converge para zero. Pelo Lema 1.11, f_{u_n} atinge seu máximo num único ponto $t^{u_n} > 0$. Como t^{u_n} é o único ponto crítico de f_{u_n} e $u_n \in M$ então $t^{u_n} = 1$. Assim para qualquer $t > 1$, por (1.41)

$$\begin{aligned} f_{u_n}(1) = I(u_n) \geq f_{u_n}(t) &= I((u_n)_t) \\ &= \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\, u_n^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 u_n^2 \\ &\quad - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \end{aligned}$$

Por ser $t^2 > 1$ e por (V_1),

$$I(u_n) \geq \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V_0 u_n^2 + |\nabla u_n|^2 u_n^2\right) - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}. \tag{2.6}$$

Seja $\delta_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V_0 u_n^2 + |\nabla u_n|^2 u_n^2 \right)$. Pela Proposição 2.2,

$$0 \leq \delta_n \leq (V_0 + 1) \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2 + |\nabla u_n|^2 u_n^2 \right) \leq (V_0 + 1) \frac{I(u_n)}{c}.$$

Logo a sequência (δ_n) é limitada. Portanto, a menos de subsequência, (δ_n) converge para um δ_0. Se $\delta_0 = 0$, então as parcelas $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2$, $\int_{\mathbb{R}^N} V_0 u_n^2$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 u_n^2$ convergem para zero. Como $u_n^2 \in H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ continuamente, existe $c > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2 \right)^2 \leq c \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla u_n^2 \right|^2.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^2|^2 \to 0$ então $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^2)^2 \to 0$. Assim teríamos $||u_n|| + ||u_n^2||$ convergindo para zero, o que não pode ocorrer. Logo a sequência (δ_n) converge para δ_0 positivo e consequentemente, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\delta_n \geq \frac{\delta_0}{2}$. Por hipótese $I(u_n) \to m$ e por (2.6) temos, para n suficientemente grande,

$$m + 1 \geq I(u_n) \geq \frac{t^N}{4} \delta_0 - \frac{t^{N+p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}.$$

Logo

$$\frac{t^{N+p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \geq \frac{t^N}{4} \delta_0 - (m+1).$$

Escolhendo $t > 1$ tal que $\frac{t^N}{4} \delta_0 > 2(m+1)$, obtemos $c > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} > c > 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Como, pelo Lema 2.3, a sequência $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}$, $n \in \mathbb{N}$, é limitada, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \to A \geq c > 0.$$

$\square$

Na demonstração do próximo lema, utilizamos o seguinte resultado de concentração de compacidade, devido a Lions ([21], Lema I.1).

Lema 2.5 *Sejam* $1 < r \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$,*com* $q \neq \dfrac{Nr}{N-r}$, *se* $r < N$. *Suponha que* ψ_n *é limitada em* $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$, $|\nabla \psi_n|$ *é limitada em* $L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$ *e que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |\psi_n|^q = 0, \text{ para algum } R > 0. \tag{H}$$

Então $\psi_n \to 0$ *em* $L^\alpha\left(\mathbb{R}^N\right)$ *para todo* $\alpha \in \left(q, \dfrac{Nr}{N-r}\right)$.

Lema 2.6 *Existem* $\delta > 0$ *e uma sequência* (x_n) *em* $\mathbb{R}^N$ *tais que* $\displaystyle\int_{B_1(x_n)} |u_n|^{p+1} > \delta$.

Demonstração. Sejam $r = 2$, $N \geq 3$ e $q = \dfrac{p+1}{2}$. Como $1 < p < 2(2^*) - 1$ então $1 < q < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Pelo Lema 2.3, (u_n^2) é limitada em $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $(|\nabla u_n^2|)$ é limitada em $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. Vamos mostrar que u_n^2 não tende a zero em $L^t\left(\mathbb{R}^N\right)$ para todo $t \in \left(\dfrac{p+1}{2}, 2^*\right)$. Sejam $s \in \left(1, \dfrac{p+1}{2}\right)$ e $t \in \left(\dfrac{p+1}{2}, 2^*\right)$. Seja $\theta \in (0,1)$ tal que $\dfrac{p+1}{2} = (1-\theta)s + \theta t$. Pela desigualdade de Hölder com expoentes $1/(1-\theta)$ e $1/\theta$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2\right)^{\frac{p+1}{2}} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2\right)^{(1-\theta)s} \left(u_n^2\right)^{\theta t} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2\right)^s\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2\right)^t\right)^{\theta}. \tag{2.7}$$

Note que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2\right)^s$ é limitada pois podemos escrever $s = (1-\beta) + \beta\left(\dfrac{p+1}{2}\right)$ para algum $\beta \in (0,1)$ e, pela desigualdade de Hölder e pelo Lema 2.3,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2\right)^s \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\right)^{1-\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\right)^{\beta} \leq c.$$

Como, pelo Lema 2.4, u_n^2 não tende a zero em $L^{\frac{p+1}{2}}\left(\mathbb{R}^N\right)$, de (2.7) podemos concluir que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2\right)^t$ não tende a zero, para todo $t \in \left(\dfrac{p+1}{2}, 2^*\right)$. Então, para $\psi_n = u_n^2$, a tese do Lema 2.5 não é verdadeira. Logo a hipótese (H) do Lema 2.5 não pode ser satisfeita, uma vez que as demais hipóteses o são. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^{p+1} \neq 0$$

para todo $R > 0$, em particular, para $R = 1$. Seja $a_n := \displaystyle\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_n|^{p+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Como

(a_n) não tende a zero, existe $\delta > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ podemos tomar $n > n_0$ com $a_n > \delta$. Assim, podemos construir uma subsequência de (a_n), ainda denotada por (a_n), tal que $a_n > \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que $\int_{B_1(y_n)} |u_n|^{p+1} > \delta$. $\square$

De agora em diante, até o fim desta seção, para $R > 0$, consideramos $\eta_R : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que

(a) $\eta_R(t) = 1$ para $0 \leq t \leq R$,

(b) $\eta_R(t) = 0$ para $t > 2R$,

(c) $0 \leq \eta_R(t) \leq 1$ e $|\eta_R'(t)| \leq \dfrac{2}{R}$ para todo $t \geq 0$.

E para $n \in \mathbb{N}$, definimos v_n, $w_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$v_n(x) = \eta_R(|x - x_n|)\, u_n(x) \tag{2.8}$$

e

$$w_n(x) = (1 - \eta_R(|x - x_n|))\, u_n(x)\,, \tag{2.9}$$

onde (x_n) é a sequência obtida no Lema 2.6. Assim $u_n = v_n + w_n$.

Lema 2.7 *As funções v_n e w_n definidas em* (2.8) *e* (2.9), *respectivamente, pertecem a X.*

Demonstração. Como $u_n \in X$ então $u_n, u_n^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, logo, u_n, $|\nabla u_n|$, u_n^2, $|\nabla u_n^2| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Por ser $\eta_R \leq 1$, temos $|v_n| \leq |u_n|$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} v_n^4 \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 < \infty.$$

Segue que $v_n, v_n^2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Usando que $\eta_R(t) \leq 1$ e $|\eta_R'(t)| \leq \dfrac{2}{R}$ para todo $t \in [0, \infty)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\nabla v_n(x)|^2 &= \left| \eta_R(|x - x_n|)\, \nabla u_n(x) + u_n(x)\, \eta_R'(|x - x_n|)\, \frac{x - x_n}{|x - x_n|} \right|^2 \\
&\leq \left(|\nabla u_n(x)| + \frac{2}{R} |u_n(x)| \right)^2 \\
&\leq 2\, |\nabla u_n(x)|^2 + \frac{8}{R^2} |u_n(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)\,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Logo $|\nabla v_n| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Também,

$$\left|\nabla v_n^2\right| = 2|v_n|\,|\nabla v_n| \leq 2|u_n|\left(|\nabla u_n| + \frac{2}{R}|u_n|\right) \leq 2|u_n|\,|\nabla u_n| + \frac{4}{R}|u_n|^2.$$

Assim,

$$\left|\nabla v_n^2\right|^2 \leq \left(\left|\nabla u_n^2\right| + \frac{4}{R}|u_n|^2\right)^2 \leq 2\left|\nabla u_n^2\right|^2 + \frac{32}{R^2}|u_n|^4 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo $\nabla v_n^2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Utilizando cálculos semelhantes concluímos que $w_n \in X$. $\square$

Como consequência do Lema 2.6, temos que, para $R > 1$,

$$\int_{B_R(x_n)} |v_n|^{p+1} = \int_{B_R(x_n)} \eta_R^{p+1}(|x - x_n|)\,|u_n(x)|^{p+1} \geq \int_{B_1(x_n)} |u_n|^{p+1} > \delta > 0. \quad (2.11)$$

Lema 2.8 *Dado $\varepsilon > 0$, sejam $R > \min\{1, 1/\varepsilon\}$ e w_n definida em (2.9). Então existem constantes $c > 0$ e $\sigma > 0$, que não dependem de ε, e $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\|w_n\| + \left\|w_n^2\right\| \leq c\,\varepsilon^\sigma \quad \textit{para todo} \quad n \geq n_0.$$

A seguir fazemos algumas definições e provamos alguns resultados auxiliares a fim de demonstrar o Lema 2.8.

Consideramos, daqui por diante, (z_n) a sequência definida por $z_n(x) = u_n(x + x_n)$, onde (x_n) é a sequência obtida no Lema 2.6. Fazendo a mudança de variáveis $y = x + x_n$,

$$\begin{aligned}
\|z_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2(x + x_n)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x + x_n)|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(y)|^2\,dy = \|u_n\|^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|z_n^2\right\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2(x + x_n)\right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u_n^2(x + x_n)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2(y)\right)^2 dy + \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u_n^2(y)\right|^2 dy = \left\|u_n^2\right\|^2.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3, (z_n), (z_n^2) são limitadas em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, existe $z \in X$ tal que a menos de subsequência,

$$z_n \rightharpoonup z \;\text{ e }\; z_n^2 \rightharpoonup z^2 \;\text{ fracamente em }\; H^1(\mathbb{R}^N). \quad (2.12)$$

Além disso, $1 < \frac{p+1}{2} < 2^*$. Pela continuidade da imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R}^N)$ temos que $z^2 \in L^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $\int_{\mathbb{R}^N} |z|^{p+1} < \infty$.

Lema 2.9 *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $R = R(\varepsilon) > 0$ *tal que* $\displaystyle\int_{B_R^C} |z|^{p+1} < \varepsilon$.

Demonstração. Para $R > 0$,

$$\int_{B_R^C} |z|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{p+1} - \int_{B_R} |z|^{p+1} \tag{2.13}$$

Considere χ_{B_R} a função característica da bola B_R. Defina $h : \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $h(x, R) = |z(x)|^{p+1} \chi_{B_R}(x)$, então $|h(x, R)| \leq |z(x)|^{p+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $R > 0$ e $\lim\limits_{R\to\infty} h(x, R) = |z(x)|^{p+1}$. Como $|z|^{p+1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ([1], Corolário 5.7), segue que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} |z|^{p+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{p+1} \chi_{B_R} = \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{p+1}.$$

Daí e de (2.13),

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R^C} |z|^{p+1} = 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher R suficientemente grande tal que $\displaystyle\int_{B_R^C} |z|^{p+1} < \varepsilon$. □

Lema 2.10 *Para* $R > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{A(R,2R)} |z_n|^{p+1} = \int_{A(R,2R)} |z|^{p+1}$, *onde* $A(R, 2R) = B_{2R} \backslash B_R$.

Demonstração. Temos que z_n^2 converge fracamente para z^2 em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $1 < \dfrac{p+1}{2} < 2^*$ então $z_n^2 \leq h$ para alguma $h \in L_{loc}^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e $z_n^2 \to z^2$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{A(R,2R)} \left|z^2\right|^{\frac{p+1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \int_{A(R,2R)} \left|z_n^2\right|^{\frac{p+1}{2}}.$$

□

Lema 2.11 *Dado* $\varepsilon > 0$, *para* $n \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande vale*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} \right| \leq 3\varepsilon. \tag{2.14}$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $x = y + x_n$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{p+1}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y + x_n)|^{p+1}\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} |z_n(y)|^{p+1}\, dy,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^{p+1}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_R^{p+1}(|x - x_n|)\, |u_n(x)|^{p+1}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_R^{p+1}(|y|)\, |z_n(y)|^{p+1}\, dy$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |w_n(x)|^{p+1}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \eta_R(|x - x_n|))^{p+1}\, |u_n(x)|^{p+1}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \eta_R(|y|))^{p+1}\, |z_n(y)|^{p+1}\, dy.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1}\right| = \Bigg|\int_{\mathbb{R}^N} |z_n(y)|^{p+1}\, dy - \int_{\mathbb{R}^N} \eta_R^{p+1}(|y|)\, |z_n(y)|^{p+1}\, dy \\ - \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \eta_R(|y|))^{p+1}\, |z_n(y)|^{p+1}\, dy\Bigg|.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p+1} = \int_{B_R} |z_n|^{p+1} + \int_{A(R,2R)} |z_n|^{p+1} + \int_{B_{2R}^C} |z_n|^{p+1}.$$

Como $\eta_R(|y|) \equiv 1$ para todo $y \in B_R(0)$ e $\eta_R(|y|) \equiv 0$ para todo $y \in B_{2R}^C$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R^{p+1}(|y|)\, |z_n(y)|^{p+1}\, dy = \int_{B_R} |z_n(y)|^{p+1}\, dy + \int_{A(R,2R)} \eta_R^{p+1}(|y|)\, |z_n(y)|^{p+1}\, dy$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (1 - \eta_R(|y|))^{p+1}\, |z_n(y)|^{p+1}\, dy = \int_{A(R,2R)} (1 - \eta_R(|y|))^{p+1}\, |z_n(y)|^{p+1}\, dy \\ + \int_{B_{2R}^C} |z_n(y)|^{p+1}\, dy.\end{aligned}$$

Das igualdades acima e de (2.15),

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1}\right| \\
&= \left|\int_{A(R,2R)} |z_n(y)|^{p+1} dy - \int_{A(R,2R)} \eta_R^{p+1}(|y|) |z_n(y)|^{p+1} dy \right. \\
&\quad \left. - \int_{A(R,2R)} (1-\eta_R(|y|))^{p+1} |z_n(y)|^{p+1} dy\right| \\
&\leq \int_{A(R,2R)} |z_n(y)|^{p+1} dy + \int_{A(R,2R)} \eta_R^{p+1}(|y|) |z_n(y)|^{p+1} dy \\
&\quad + \int_{A(R,2R)} (1-\eta_R(|y|))^{p+1} |z_n(y)|^{p+1} dy \\
&\leq 3\int_{A(R,2R)} |z_n(y)|^{p+1} dy,
\end{aligned}$$

pois $0 \leq \eta_R \leq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, pelo Lema 2.9 podemos escolher $R > 0$ suficientemente grande tal que $\int_{A(R,2R)} |z|^{p+1} < \varepsilon$ e pelo Lema 2.10 temos $\int_{A(R,2R)} |z_n|^{p+1} < \varepsilon$ para $n > n_0(\varepsilon)$ suficientemente grande. Portanto,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1}\right| \leq 3\varepsilon.$$

□

Como (z_n) é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $\left(|\nabla z_n|^2\right)$ é uma sequência limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Pela Proposição A do Apêndice, existe uma medida μ, finita em $\mathbb{R}^N$, tal que, a menos de subsequência, $|\nabla z_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$ fracamente no sentido das medidas.

Lema 2.12 *Dado $\varepsilon > 0$ existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que* $\int_{B_R^C} d\mu < \varepsilon$.

Demonstração. Para $R > 0$,

$$\int_{B_R^C} d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} d\mu - \int_{B_R} d\mu.$$

Além disso,

$$\lim_{R\to\infty} \chi_{B_R}(x) = 1 \text{ e } |\chi_{B_R}(x)| \leq 1, \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^N,$$

onde χ_{B_R} é a função característica da bola B_R. Como $h \equiv 1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} 1 d\mu = \mu(\mathbb{R}^N) < \infty,$$

podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R} d\mu = \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{B_R}(x)\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} d\mu.$$

Assim,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R^C} d\mu = 0.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $R > 0$ suficientemente grande tal que $\int_{B_R^C} d\mu < \varepsilon$. $\square$

Lema 2.13 *Dado $\varepsilon > 0$ existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$L_n := \int_{\mathbb{R}^N}\eta_R(|x-x_n|)\,(1-\eta_R(|x-x_n|))\,|\nabla u_n(x)|^2\,dx < \varepsilon,$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Demonstração. Sejam

$$L_n := \int_{\mathbb{R}^N}\eta_R(|x-x_n|)\,(1-\eta_R(|x-x_n|))\,|\nabla u_n(x)|^2\,dx$$

e $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = \eta_R(|x|)\,(1-\eta_R(|x|))$. Fazemos a mudança de variáveis $x = y + x_n$ para obter

$$L_n = \int_{\mathbb{R}^N}\eta_R(|y|)\,(1-\eta_R(|y|))\,|\nabla u_n(y+x_n)|^2\,dy = \int_{\mathbb{R}^N}\phi(y)\,|\nabla z_n(y)|^2\,dy.$$

Como $|\nabla z_n|^2\,dy \rightharpoonup \mu$ fracamente no sentido das medidas,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_{\mathbb{R}^N}\phi\,d\mu = \int_{A(R,2R)}\phi\,d\mu \le \int_{A(R,2R)} d\mu < \int_{B_R^C(0)} d\mu < \varepsilon$$

para $R = R(\varepsilon)$ dado no Lema 2.12. Segue que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $L_n < \varepsilon$. $\square$

Daqui por diante, nesta seção, algumas vezes denotamos $\eta_R(|\cdot - x_n|)$ e $\eta_R'(|\cdot - x_n|)$ por $\eta_{R,n}(\cdot)$ e $\eta_{R,n}'(\cdot)$, respectivamente.

Lema 2.14 *Dado $\varepsilon > 0$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande vale*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 \right| \leq C\varepsilon. \tag{2.16}$$

Demonstração. Como $u_n = v_n + w_n$, temos

$$|\nabla u_n|^2 = |\nabla v_n + \nabla w_n|^2 = |\nabla v_n|^2 + 2\nabla v_n \cdot \nabla w_n + |\nabla w_n|^2,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 = 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \cdot \nabla w_n.$$

Já vimos que

$$\nabla v_n(x) = \eta_R(|x - x_n|) \nabla u_n(x) + u_n(x) \eta_R'(|x - x_n|) \frac{x - x_n}{|x - x_n|} \tag{2.17}$$

e

$$\nabla w_n(x) = (1 - \eta_R(|x - x_n|)) \nabla u_n(x) - u_n(x) \eta_R'(|x - x_n|) \frac{x - x_n}{|x - x_n|}. \tag{2.18}$$

Daí e do Lema 2.13, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \cdot \nabla w_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \eta_R(|x - x_n|) [1 - \eta_R(|x - x_n|)] |\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} [1 - 2\eta_R(|x - x_n|)] \eta_R'(|x - x_n|) u_n \nabla u_n \cdot \frac{(x - x_n)}{|x - x_n|} dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} [\eta_R'(|x - x_n|)]^2 u_n^2 \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{R,n} (1 - \eta_{R,n}) |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} 3\, \eta_{R,n}' |u_n| |\nabla u_n| dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\eta_{R,n}'\right)^2 u_n^2 dx \\
&\leq \varepsilon + \frac{6}{R} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n| |\nabla u_n| dx + \left(\frac{2}{R}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e por (u_n) ser uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n \cdot \nabla w_n| &\leq \varepsilon + \frac{6}{R} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{R^2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \\
&\leq \varepsilon + \frac{c_1}{R} + \frac{c_1}{R^2}.
\end{aligned}$$

Logo, podemos escolher $R = R(\varepsilon) > 1$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 \right| \leq \varepsilon + \frac{c_2}{R} \leq c\varepsilon.$$

$\square$

Pelo Lema 2.3, (z_n^2) é uma sequência limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Pela Proposição A do Apêndice, existe uma medida ν, limitada em $\mathbb{R}^N$, tal que, a menos de subsequência, $|\nabla z_n^2|^2 \, dx \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentido das medidas. Os resultados demonstrados para a medida μ, também podem ser demonstrados para a medida ν. Assim, dado $\varepsilon > 0$, analogamente às demonstrações dos Lemas 2.12 e 2.13, obtemos, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$Q_n := \int_{\mathbb{R}^N} \eta_R\left(|x - x_n|\right)\left[1 - \eta_R\left(|x - x_n|\right)\right] \, u_n^2 \, |\nabla u_n|^2 \, dx < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Lema 2.15 *Dado $\varepsilon > 0$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande vale*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 |\nabla v_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 |\nabla w_n|^2 \right| \leq c\,\varepsilon.$$

Demonstração. Temos $u_n = v_n + w_n$, assim

$$\begin{aligned}
\left|\nabla u_n^2\right|^2 &= 4u_n^2 |\nabla u_n|^2 \\
&= 4\left(v_n + w_n\right)^2 \cdot \left|(\nabla v_n + \nabla w_n)\right|^2 \\
&= 4\left(v_n^2 |\nabla v_n|^2 + 2v_n^2 \nabla v_n \cdot \nabla w_n + v_n^2 |\nabla w_n|^2\right. \\
&\quad +2v_n w_n |\nabla v_n|^2 + 4v_n w_n \nabla v_n \cdot \nabla w_n + 2v_n w_n |\nabla w_n|^2 \\
&\quad \left. +w_n^2 |\nabla v_n|^2 + 2w_n^2 \nabla v_n \cdot \nabla w_n + w_n^2 |\nabla w_n|^2\right),
\end{aligned}$$

daí, e usando que $u_n^2 = (v_n + w_n)^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
u_n^2 |\nabla u_n|^2 - v_n^2 |\nabla v_n|^2 - w_n^2 |\nabla w_n|^2 &= 2v_n^2 \nabla v_n \cdot \nabla w_n + v_n^2 |\nabla w_n|^2 \\
&\quad + 2v_n w_n |\nabla v_n|^2 + 4v_n w_n \nabla v_n \cdot \nabla w_n + 2v_n w_n |\nabla w_n|^2 \\
&\quad + w_n^2 |\nabla v_n|^2 + 2w_n^2 \nabla v_n \cdot \nabla w_n \\
&= 2u_n^2 \nabla v_n \cdot \nabla w_n + v_n^2 |\nabla w_n|^2 + 2v_n w_n |\nabla v_n|^2 \\
&\quad + 2v_n w_n |\nabla w_n|^2 + w_n^2 |\nabla v_n|^2 .
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(u_n^2 \left|\nabla u_n\right|^2 - v_n^2 \left|\nabla v_n\right|^2 - w_n^2 \left|\nabla w_n\right|^2\right) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{2.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \nabla v_n \cdot \nabla w_n,\\
I_2 &= 2\left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n w_n \left|\nabla v_n\right|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} v_n w_n \left|\nabla w_n\right|^2\right),\\
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 \left|\nabla w_n\right|^2,\\
I_4 &= \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 \left|\nabla v_n\right|^2.
\end{aligned}$$

Por (2.17) e (2.18),

$$\begin{aligned}
|I_1| = \Bigg| \int_{\mathbb{R}^N} & u_n^2 \left\{ \eta_R\left(|x-x_n|\right)\left[1-\eta_R\left(|x-x_n|\right)\right] \left|\nabla u_n\right|^2 \right.\\
&+ \left[1 - 2\eta_R\left(|x-x_n|\right)\right] \eta_R'\left(|x-x_n|\right) u_n \nabla u_n \cdot \frac{(x-x_n)}{|x-x_n|}\\
&\left. - \left[\eta_R'\left(|x-x_n|\right)\right]^2 u_n^2 \right\} dx \Bigg|\\
\le & \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{R,n}\left(1-\eta_{R,n}\right) u_n^2 \left|\nabla u_n\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} 3\, \eta_{R,n}' \, u_n^2 \; |u_n| \left|\nabla u_n\right| dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\eta_{R,n}'\right)^2 u_n^4 dx\\
\le & \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{R,n}\left(1-\eta_{R,n}\right) u_n^2 \left|\nabla u_n\right|^2 dx + \frac{3}{R}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\, 2\; |u_n| \left|\nabla u_n\right| dx\\
&+ \left(\frac{2}{R}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 \, dx.
\end{aligned}$$

Por (2.19), pela desigualdade de Hölder e por (u_n^2) ser uma sequência limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le \varepsilon + \frac{3}{R}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^2\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} 4\left|u_n\right|^2 \left|\nabla u_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{R}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^2\right|^2\\
&\le \varepsilon + \frac{c_1}{R} + \frac{c_2}{R^2}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Para estimar I_2 lembramos que $v_n w_n = \eta_{R,n}\left(1-\eta_{R,n}\right) u_n^2$ e que, por (2.10),

$$\left|\nabla v_n\right|^2 \le 2\left|\nabla u_n\right|^2 + \frac{8}{R^2} u_n^2. \tag{2.23}$$

Então, por (2.18),

$$\begin{aligned}
|\nabla w_n|^2 &\leq \left[(1-\eta_{R,n})\,|\nabla u_n| + |u_n|\,\left|\eta'_{R,n}\right|\right]^2 \\
&\leq \left[|\nabla u_n| + \frac{2}{R}\,|u_n|\right]^2 \\
&\leq 2\,|\nabla u_n|^2 + \frac{8}{R^2}u_n^2. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{R,n}\,(1-\eta_{R,n})\,u_n^2\left(|\nabla v_n|^2 + |\nabla w_n|^2\right) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{R,n}\,(1-\eta_{R,n})\,u_n^2\left(4\,|\nabla u_n|^2 + \frac{16}{R^2}u_n^2\right) \\
&\leq 4Q_n + \frac{16}{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 \\
&< \varepsilon + \frac{c}{R^2}, \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, usamos (2.19) e o fato de (u_n^2) ser limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. De (2.18),

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{R,n}^2\,u_n^2\left[\left|(1-\eta_{R,n})\,|\nabla u_n| + |u_n|\,\eta'_{R,n}\right|\right]^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} 2\,\eta_{R,n}^2 u_n^2\left[(1-\eta_{R,n})^2\,|\nabla u_n|^2 + u_n^2\left(\eta'_{R,n}\right)^2\right] \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} 2\,\eta_{R,n}\,(1-\eta_{R,n})\,u_n^2\,|\nabla u_n|^2 + \frac{8}{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 \\
&\leq 2Q_n + \frac{8}{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 < \varepsilon + \frac{c}{R^2}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Analogamente, de (2.17),

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (1-\eta_{R,n})^2\,u_n^2\left[\left|\eta_{R,n}\nabla u_n + u_n\eta'_{R,n}\right|^2\right] \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} 2\,\eta_{R,n}\,(1-\eta_{R,n})\,u_n^2\,|\nabla u_n|^2 + \frac{8}{R^2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^4 \\
&< \varepsilon + \frac{c}{R^2}. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

De (2.22), (2.25), (2.26), e (2.27), para $R > 0$ suficientemente grande, temos

$$|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| \leq 4\varepsilon + \frac{c}{R^2} + \frac{c}{R^2} < c\varepsilon.$$

Combinando com (2.21), concluímos a demonstração do lema. $\square$

Lema 2.16 *Dado $\varepsilon > 0$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande vale*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\, u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\, v_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\, w_n^2 dx \right| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{2.28}$$

Demonstração. Uma vez que $u_n = v_n + w_n$, temos $u_n^2 - v_n^2 - w_n^2 = 2v_n w_n$. Daí, de (V_1) e da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\left(u_n^2 - v_n^2 - w_n^2\right) \right| &\leq 2V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|\,|w_n| \\
&= 2V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \eta_R(|x-x_n|)\,|u_n(x)|\,(1-\eta_R(|x-x_n|))\,|u_n(x)| \\
&\leq c\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_n} \left[\eta_R(|x-x_n|)(1-\eta_R(|x-x_n|))\,|u_n|\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $\Omega_n = B_{3R}(x_n)$ e usamos o fato de que $\eta_R(|x-x_n|) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^N \backslash B_{2R}(x_n)$. Definimos $\psi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$\psi_n(x) = \eta_R(|x-x_n|)(1-\eta_R(|x-x_n|))\,u_n(x).$$

O produto de uma função em $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ por uma função em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ pertence a $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ (veja Teorema 1, pág.247, em [11]). Logo $\psi_n \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Como ψ_n tem suporte compacto em Ω_n, segue que $\psi_n \in H_0^1(\Omega_n)$ (veja Lema IX-5 em [3]). Pela desigualdade de Poincaré, existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|\psi_n\|_{L^2(\Omega_n)} &\leq c\,\|\nabla\psi_n\|_{L^2(\Omega_n)} \\
&= c\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\eta_{R,n}(1-\eta_{R,n})\nabla u_n + |u_n\left(\eta'_{R,n} - 2\eta_{R,n}\,\eta'_{R,n}\right)\frac{x-x_n}{|x-x_n|}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \tilde{c}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left[\eta_{R.n}^2(1-\eta_{R,n})^2|\nabla u_n|^2 + (1-2\,\eta_{R,n})^2\left(\eta'_{R,n}\right)^2 u_n^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando que $0 \leq \eta_R \leq 1$ e que $|\eta_R'| \leq \dfrac{2}{R}$, obtemos, pelo Lema 2.13, para $0 < \varepsilon < 1$,

$$\|\psi_n\|_{L^2(\Omega_n)} \leq \tilde{c}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left[\eta_{R,n}^2\left(1-\eta_{R,n}\right)^2|\nabla u_n|^2 + \frac{4}{R^2}u_n^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \tilde{c}\left(\varepsilon + c\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} < \hat{c}\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Em (2.29) e pelo Lema 2.3,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\left(u_n^2 - v_n^2 - w_n^2\right)\right| \leq C\ \|\psi_n\|_{L^2(\Omega_n)} < c\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Demonstração do Lema 2.8. De (1.41) temos

$$I(u_t) = \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(tx)u^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2 - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}.$$

Pelos Lemas 2.14, 2.16, 2.15 e 2.11, para n suficientemente grande e $t > 0$,

$$\begin{aligned}
|I((u_n)_t) - I((v_n)_t) - I((w_n)_t)| &\leq \frac{t^N}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2\right| \\
&+ \frac{t^{N+2}}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}V(tx)\,u_n^2 - \int_{\mathbb{R}^N}V(tx)\,v_n^2 - \int_{\mathbb{R}^N}V(tx)\,w_n^2\right| \\
&+ \frac{t^{N+2}}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}u_n^2|\nabla u_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}v_n^2|\nabla v_n|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}w_n^2|\nabla w_n|^2\right| \\
&+ \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N}|w_n|^{p+1}\right| \\
&\leq \frac{t^N}{2}c\varepsilon + \frac{t^{N+2}}{2}c\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{t^{N+2}}{2}c\varepsilon + \frac{t^{N+p+1}}{p+1}c\varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, para $0 < \varepsilon < 1$,

$$|I((u_n)_t) - I((v_n)_t) - I((w_n)_t)| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(t^N + t^{N+2} + t^{N+p+1}\right). \tag{2.30}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam t^{v_n} e t^{w_n} os pontos de máximos de $f_{v_n}(t) = I\left((v_n)_t\right)$ e $f_{w_n}(t) = I\left((w_n)_t\right)$, respectivamente, ou seja,

$$I((v_n)_{t^{v_n}}) = \max_{t>0} I((v_n)_t) \quad \text{e} \quad I((w_n)_{t^{w_n}}) = \max_{t>0} I((w_n)_t).$$

Inicialmente, vamos supor que $t^{v_n} \leq t^{w_n}$. Então, pelo Lema 1.11,

$$f_{w_n}(t) = I((w_n)_t) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad 0 < t \leq t^{v_n}. \tag{2.31}$$

Mostraremos agora que a sequência (t^{v_n}) é limitada, obtendo $\tilde{t}$, $\bar{t}$, que não dependem de ε, tais que $0 < \tilde{t} < 1 < \bar{t}$ e $t^{v_n} \in \left(\tilde{t}, \bar{t}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Começamos observando que, pelo Lema 2.4, podemos supor que a partir de n suficientemente grande,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} > \frac{A}{2} > 0.$$

Tomamos

$$\bar{t} = \left(2\,(p+1)\,\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

com $B > 0$ tal que $\bar{t} > 1$. Pelo Lema 2.3, podemos escolher B maior se necessário, tal que

$$B \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\, u_n^2, \tag{2.32}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pela escolha de $\bar{t}$,

$$\begin{aligned} I((u_n)_{\bar{t}}) &= \frac{\bar{t}^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(\bar{t}x)u_n^2 + \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2 - \frac{\bar{t}^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \\ &\leq \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\, u_n^2 - \frac{2}{p+1}\bar{t}^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\right) \\ &\leq \frac{\bar{t}^{N+2}}{2}\,(B - 2B) \leq -\frac{B}{2}. \end{aligned}$$

De (2.30), para todo $t > 0$,

$$I\left((v_n)_t\right) + I\left((w_n)_t\right) \leq I\left((u_n)_t\right) + c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(t^N + t^{N+2} + t^{N+p+1}\right). \tag{2.33}$$

Assim,

$$I\left((v_n)_{\bar{t}}\right) + I\left((w_n)_{\bar{t}}\right) < I\left((u_n)_{\bar{t}}\right) + c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\bar{t}^N + \bar{t}^{N+2} + \bar{t}^{N+p+1}\right) < -\frac{B}{2} + c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\bar{t}^N + \bar{t}^{N+2} + \bar{t}^{N+p+1}\right).$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ menor se necessário, obtemos

$$I\left((v_n)_{\bar{t}}\right) + I\left((w_n)_{\bar{t}}\right) < 0. \tag{2.34}$$

Então $I\left((v_n)_{\bar{t}}\right) < 0$ ou $I\left((w_n)_{\bar{t}}\right) < 0$. Em qualquer caso, concluímos que $t^{v_n} < \bar{t}$. De fato, pelo Lema 1.11, $f_{v_n}(t) = I\left((v_n)_t\right)$ é positiva, crescente, para $t < t^{v_n}$ e decrescente para $t > t^{v_n}$. Logo se for $I\left((v_n)_{\bar{t}}\right) < 0$, então $t^{v_n} < \bar{t}$. E se $I\left((w_n)_{\bar{t}}\right) < 0$, novamente pelo

Lema 1.11, $t^{w_n} < \bar{t}$. Como estamos supondo $t^{v_n} \leq t^{w_n}$ segue que $t^{v_n} < \bar{t}$. Agora tome $\tilde{t} = \left(\frac{m}{B}\right)^{\frac{1}{N}}$, onde B é escolhido como em (2.32). Temos $I(u_n) \to m$ e

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 + u_n^2|\nabla u_n|^2\right) - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 + u_n^2|\nabla u_n|^2\right) \leq \frac{B}{2}.$$

Segue que $m \leq \frac{B}{2} < B$, que implica $\tilde{t} < 1$. Para $t \leq \tilde{t}$, por (V_1),

$$I((u_n)_t) \leq \frac{\tilde{t}^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \frac{\tilde{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 + \frac{\tilde{t}^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2$$
$$\leq \frac{\tilde{t}^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + V_\infty u_n^2 + u_n^2|\nabla u_n|^2\right) \leq \frac{m}{2B}B = \frac{m}{2}. \tag{2.35}$$

Como t^{v_n} é ponto de máximo de $f_{v_n}(t)$, pelo Lema 1.11, $(v_n)_{t^{v_n}} \in M$. Logo

$$I\left((v_n)_{t^{v_n}}\right) \geq \inf_M I = m. \tag{2.36}$$

Daí, de (2.33) e (2.31), para $0 < t \leq t^{v_n}$,

$$I\left((u_n)_{t^{v_n}}\right) \geq I\left((v_n)_{t^{v_n}}\right) + I\left((w_n)_{t^{v_n}}\right) - c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[\left(t^{v_n}\right)^N + \left(t^{v_n}\right)^{N+2} + \left(t^{v_n}\right)^{N+p+1}\right]$$
$$\geq m - c\varepsilon\left[\left(t^{v_n}\right)^N + \left(t^{v_n}\right)^{N+2} + \left(t^{v_n}\right)^{N+p+1}\right]. \tag{2.37}$$

Escolhendo ε menor se necessário, $I\left((u_n)_{t^{v_n}}\right) > \frac{m}{2}$. Logo $t^{v_n} > \tilde{t}$, já que (2.35) vale para todo $t \leq \tilde{t}$. E assim mostramos que a sequência (t^{v_n}) é limitada. Para $u_n \in M$ temos

$$I\left((u_n)_{t^{v_n}}\right) \leq I(u_n) = \max_{t>0} I\left((u_n)_t\right).$$

Como $I(u_n) \to m$ então, para n suficientemente grande,

$$I\left((u_n)_{t^{v_n}}\right) \leq m + \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Da desigualdade acima, de (2.37), por ser (t^{v_n}) limitada e por (2.36),

$$I\left((w_n)_{t^{v_n}}\right) \leq I\left((u_n)_{t^{v_n}}\right) - I\left((v_n)_{t^{v_n}}\right) + c_1\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq m + \varepsilon^{\frac{1}{2}} - m + c_1\varepsilon^{\frac{1}{2}} = c_2\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{2.38}$$

Para $t \in (0, t^{w_n})$ temos que $f_{w_n}(t)$ é crescente, então

$$f_{w_n}(t) \leq f_{w_n}\left(t^{v_n}\right)$$

para $t \in (0, t^{v_n})$, pois estamos supondo $t^{v_n} \leq t^{w_n}$. Portanto,

$$I\left((w_n)_t\right) \leq I\left((w_n)_{t^{v_n}}\right) \leq c_2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{2.39}$$

para n suficientemente grande e $t \in (0, t^{v_n})$. Afirmamos que existe um número $D > A$ tal que

$$D_n := \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} \leq D$$

onde

$$A = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}.$$

De fato, seja

$$A_n := \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $w_n(x) = (1 - \eta_R(|x - x_n|))\, u_n(x) \leq u_n(x)$ então

$$D_n \leq \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} = A_n.$$

Como $A_n \to A$ quando $n \to \infty$ então para n suficientemente grande $A_n \leq A + 1 := D$. Portanto $D > A$ e $D_n \leq D$ para n suficientemente grande. Seja

$$q_n := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + V_0\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2\, w_n^2.$$

Observamos que

$$\frac{t^{N+2}}{2}q_n - Dt^{N+p+1} = \frac{t^{N+2}}{4}q_n$$

se, e somente se,

$$t = \left(\frac{q_n}{4D}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Tomando D maior se necessário temos

$$t_0 := \left(\frac{q_n}{4D}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \tilde{t}.$$

Por (2.39), por (V_1) e por $\tilde{t} < 1$, para $t \in \left(0, \tilde{t}\right)$,

$$\begin{aligned}
c_2\varepsilon^{\frac{1}{2}} &\geq I\left((w_n)_{t_0}\right) \\
&\geq \frac{t_0^{N+2}}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + V_0\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2\, w_n^2\right) - \frac{t_0^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} \\
&= \frac{t_0^{N+2}}{2}q_n - D_n t_0^{N+p+1} \geq \frac{t_0^{N+2}}{4}q_n = \frac{1}{4}\left(\frac{q_n}{4D}\right)^{\frac{N+2}{p-1}} q_n = \bar{c}q_n^{\frac{N+p+1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$q_n \leq \tilde{c}\varepsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}. \tag{2.40}$$

Pela definição de q_n,

$$\begin{aligned}\|w_n\| + \left\|w_n^2\right\| &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_n^4 + \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 |\nabla w_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\, q_n^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_n^4 + c\, q_n\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Existe $\theta \in (0,1)$ tal que $4 = (1-\theta)\, 2 + \theta\, 2\,(2^*)$. Pela desigualdade de Hölder com expoentes $r = 1/\theta$ e $r' = 1/(1-\theta)$, pela desigualdade de Sobolev,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} w_n^4 = \int_{\mathbb{R}^N} w_n^{2(1-\theta)}\, w_n^{\theta\, 2(2^*)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(w_n^2\right)^{2^*}\right)^{\theta} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2\right)^{1-\theta} \left[c\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n^2|^2\right)^{\frac{2^*}{2}}\right]^{\theta}.\end{aligned}$$

Da última desigualdade, da definição de q_n e de (2.40),

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_n^4 \leq c_2 \left(c_1 \varepsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}\right)^{1-\theta} \left(\tilde{c}\varepsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}\right)^{\frac{2^*}{2}\theta} = c_3 \left(\varepsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}\right)^{1-\theta+\frac{2^*}{2}\theta}.$$

Como $1-\theta+\dfrac{2^*}{2}\theta = 1 + \left(\dfrac{2^*}{2} - 1\right)\theta > 1$, para ε suficientemente pequeno temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_n^4 \leq \varepsilon^{\frac{p-1}{2(N+p+1)}}.$$

De (2.41), (2.40) e da desigualdade acima, obtemos

$$\|w_n\| + \left\|w_n^2\right\| \leq c\varepsilon^{\frac{p-1}{4(N+p+1)}}.$$

Isto conclui a demonstração do Lema 2.8 no caso em que $t^{v_n} \leq t^{w_n}$. O caso $t^{v_n} > t^{w_n}$ levará a uma contradição. De fato, no caso anterior usamos a hipótese $t^{v_n} \leq t^{w_n}$ duas vezes, a primeira para mostrar que existem $\tilde{t}$, $\bar{t}$, que não dependem de ε, tal que $t^{v_n} \in \left(\tilde{t}, \bar{t}\right)$. E a segunda, para estimar $I\left((w_n)_t\right) \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ em (2.39). Usando agora a hipótese $t^{v_n} > t^{w_n}$ e argumentos semelhantes aos anteriores com v_n no lugar de w_n, concluímos que

$$\|v_n\| + \left\|v_n^2\right\| \leq c\varepsilon^{\frac{p-1}{4(N+p+1)}}$$

para alguma constante $c > 0$. Pela imersão contínua de $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ em $L^{\frac{p+1}{2}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} = \int_{\mathbb{R}^N} \left|v_n^2\right|^{\frac{p+1}{2}} \leq c \left\|v_n^2\right\|^{\frac{p+1}{2}} \leq c\varepsilon^{\frac{(p-1)}{4(N+p+1)}\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

Escolhendo ε menor se necessário, chegamos a uma contradição com

$$\int_{B_R(x_n)} |v_n|^{p+1}\, dx \geq \delta > 0,$$

dado em (2.11) . Portanto, vale que

$$||w_n|| + \left|\left|w_n^2\right|\right| \leq C\varepsilon^{\frac{p-1}{4(N+p+1)}}$$

e o Lema 2.8 está demonstrado. $\square$

Lema 2.17 *Seja (z_n) a sequência definida por $z_n(x) = u_n(x + x_n)$, com (x_n) obtida no Lema 2.6. Então $z_n \to z$ em $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ para todo $q \in [2,\, 2(2^*))$, onde z é o limite fraco de (z_n).*

Demonstração. Já vimos em (2.12) que existe $z \in X$ tal que

$$z_n \rightharpoonup z, \quad z_n^2 \rightharpoonup z^2 \quad \text{em} \quad H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{e} \quad z_n \to z \text{ em } L^2_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.42}$$

Afirmamos que $z \neq 0$. De fato, por (2.11) ,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(x_n)} |v_n|^{p+1}\, dx \geq \delta. \tag{2.43}$$

Por definição, $v_n(x) = \eta_R(|x - x_n|)\, u_n(x)$. Fazendo a mudança de variáveis $y = x - x_n$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^{p+1}\, dx &= \int_{B_{2R}(x_n)} \left[\eta_R(|x - x_n|)\, |u_n(x)|\right]^{p+1} dx \\
&= \int_{B_{2R}(0)} \left[\eta_R(|y|)\, |u_n(y + x_n)|\right]^{p+1} dy \\
&= \int_{B_{2R}(0)} \left[\eta_R(|y|)\, |z_n(y)|\right]^{p+1} dy \\
&\leq \int_{B_{2R}(0)} |z_n(y)|^{p+1}\, dy, \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

pois $0 \leq \eta_R \leq 1$. Por (2.43), (2.44) e como $z_n^2 \to z^2$ em $L_{loc}^{\frac{p+1}{2}}\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\begin{aligned}\delta &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(x_n)} |v_n|^{p+1} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{B_{2R}(0)} |z_n|^{p+1} = \int_{B_{2R}(0)} |z|^{p+1}.\end{aligned}$$

Logo $z \not\equiv 0$. Pela definição de v_n e w_n temos $u_n = v_n + w_n$. Pela desigualdade de Hölder com expoentes $r = 2$ e $r' = 2$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^2 - v_n^2\right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |w_n| \left(|u_n| + |v_n|\right) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n| + |v_n|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.45)\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.8, dado $\varepsilon > 0$ temos, para n suficientemente grande,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|w_n\| \leq ||w_n|| + \left|\left|w_n^2\right|\right| \leq C\varepsilon^{\frac{p-1}{4(N+p+1)}}.$$

Como $0 \leq \eta_R \leq 1$, então

$$\begin{aligned}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n| + |v_n|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n| + |\eta_{R,n}\, u_n|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} 4u_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left|u_n^2\right|_2 \leq 2\left\|u_n^2\right\| \leq c.\end{aligned}$$

Em (2.45),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^2 - v_n^2\right| \leq C\varepsilon^{\frac{p-1}{4(N+p+1)}}. \qquad (2.46)$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x - x_n$, obtemos similarmente a (2.44) que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^2 dx &= \int_{B_{2R}(x_n)} \left[\eta_R\left(|x - x_n|\right)|u_n(x)|\right]^2 dx \\ &\leq \int_{B_{2R}(0)} |z_n(y)|^2 dy,\end{aligned}$$

pois $0 \leq \eta_R^2 \leq 1$. Por (2.42),

$$\int_{B_{2R}(0)} |z_n|^2 \to \int_{B_{2R}(0)} |z|^2.$$

Logo, para n suficientemente grande,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 + \varepsilon. \tag{2.47}$$

Agora, de (2.46) e (2.47), segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |z_n(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x + x_n)|^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)|^2\, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n^2(y) - v_n^2(y)\right|\, dy + \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2(y)\, dy \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{p-1}{4(N+p+1)}} + \int_{\mathbb{R}^N} |z(y)|^2\, dy + \varepsilon.\end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^N} z^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} z_n^2 \leq c\varepsilon^{\frac{p-1}{4(N+p+1)}} + \int_{\mathbb{R}^N} z^2 + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi dado arbitrariamente então

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} z_n^2 = \int_{\mathbb{R}^N} z^2.$$

Assim, passando a uma subsequência podemos supor que

$$\int_{\mathbb{R}^N} z_n^2 \to \int_{\mathbb{R}^N} z^2.$$

Por ([16], Corolário 4.7) segue, a menos de subsequência, que

$$z_n \to z \ \text{ em } L^2\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.48}$$

Seja $t \in (2,\, 2\,(2^*))$ então existe $\theta \in (0,\, 1)$ tal que $t = (1-\theta)\, 2 + \theta\, 2\,(2^*)$. Pela desigualdade de Hölder com expoentes $r = 1/\theta$ e $r' = 1/(1-\theta)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |z_n - z|^t &= \int_{\mathbb{R}^N} |z_n - z|^{(1-\theta)2}\, |z_n - z|^{\theta\, 2(2^*)} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |z_n - z|^2\right)^{(1-\theta)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |z_n - z|^{2(2^*)}\right)^{\theta}.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Pela continuidade da imersão de $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ em $L^{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$, e por (z_n^2) ser limitada em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n - z|^{2(2^*)}\, dx \leq c_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{2(2^*)}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{2(2^*)}\, dx\right) < \infty.$$

De (2.48) e de (2.49) segue que

$$z_n \to z \quad \text{em} \quad L^q\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{para todo} \quad q \in [2,\, 2\,(2^*))\,.$$

$\square$

Observamos que, pelo Lema 2.3, (u_n) e (u_n^2) são limitadas em $H^1(\mathbb{R}^N)$, logo existe $u \in X$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{e} \quad u_n^2 \rightharpoonup u^2 \quad \text{fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n \to u \quad \text{e} \quad u_n^2 \to u^2 \quad \text{em} \;\; L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo } 2 \le s < 2^*,$$

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

No lema anterior provamos que a sequência $z_n(x) = u_n(x + x_n)$, com (x_n) obtida no Lema 2.6, converge fortemente para z em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in [2, 2(2^*))$, onde z é o limite fraco de (z_n). Quando (x_n) é uma sequência convergente em $\mathbb{R}^N$, digamos, $x_n \to x_0$, o lema a seguir nos garante que (u_n) converge em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para a função $z(\cdot - x_0)$ e, consequentemente, a menos de subsequência, $u_n(x) \to z(x - x_0)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Logo, no caso em que $x_n \to x_0$, a função u (o limite fraco de (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$) é igual a $z(\cdot - x_0)$.

Lema 2.18 *Se a sequência (x_n) dada no Lema 2.6 converge para x_0, então $u_n \to u$ em $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ para todo $q \in [2,\, 2\,(2^*))\,,$ com $u\,(\,\cdot\,) = z\,(\cdot - \,x_0)\,.$*

Demonstração. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n\,(x) - z\,(x - x_0)|^q \le \int_{\mathbb{R}^N} [\,|u_n\,(x) - z\,(x - x_n)| + |z\,(x - x_n) - z\,(x - x_0)|\,]^q$$

$$= c\,(E_n + F_n)\,,$$

onde

$$E_n = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n\,(x) - z\,(x - x_n)|^q$$

e

$$F_n = \int_{\mathbb{R}^N} |z\,(x - x_n) - z\,(x - x_0)|^q\,.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = y + x_n$ em E_n, obtemos

$$E_n = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n\,(y + x_n) - z\,(y)|^q\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} |z_n\,(y) - z\,(y)|^q\,dy.$$

Pelo Lema 2.17, $z_n \to z$ em $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ para todo $q \in [2,\, 2\,(2^*))$. Segue que $E_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Resta mostrar que $F_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Seja (φ_k) uma sequência em $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $\varphi_k \to z$ em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_k - z\|^q < \varepsilon, \quad \text{para todo} \;\; k \geq k_0. \tag{2.50}$$

Pelo Teorema da Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned} F_n &\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |z\,(x - x_n) - \varphi_{k_0}\,(x - x_n)|^q\, dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{k_0}\,(x - x_n) - \varphi_{k_0}\,(x - x_0)|^q\, dx \\ &\quad + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{k_0}\,(x - x_0) - z\,(x - x_0)|^q\, dx \\ &= 2c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |z\,(y) - \varphi_{k_0}\,(y)|^q\, dy + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{k_0}\,(x - x_n) - \varphi_{k_0}\,(x - x_0)|^q\, dx. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Pela Desigualdade de Interpolação e por (2.50),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |z - \varphi_{k_0}|^q &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |z - \varphi_{k_0}|^2\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |z - \varphi_{k_0}|^{2(2^*)}\right)^{\theta} \\ &\leq \|z - \varphi_{k_0}\|^{2(1-\theta)}\, c_2 \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(z^2\right)^{2^*} + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\varphi_{k_0}^2\right)^{2^*}\right]^{\theta} \\ &= c_3\, \|z - \varphi_{k_0}\|^{2(1-\theta)} \\ &< c_3 \varepsilon^{\frac{2(1-\theta)}{q}}, \end{aligned}$$

para algum $\theta \in (0,1)$. Em (2.51),

$$F_n \leq c_4 \varepsilon^{\frac{2(1-\theta)}{q}} + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{k_0}\,(x - x_n) - \varphi_{k_0}\,(x - x_0)|^q\, dx. \tag{2.52}$$

Seja $r > 0$ tal que $\operatorname{supp} \varphi_{k_0} \subset B_r$ e $|x_n| \leq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\psi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $\psi_n\,(x) = |\varphi_{k_0}\,(x - x_n) - \varphi_{k_0}\,(x - x_0)|^q$. Afirmamos que $\psi_n\,(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{2r}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{2r}$. Se fosse $\psi_n\,(x) \neq 0$, teríamos

$$\varphi_{k_0}\,(x - x_n) \neq 0 \;\; \text{ou} \;\; \varphi_{k_0}\,(x - x_0) \neq 0.$$

Se $\varphi_{k_0}\,(x - x_n) \neq 0$, então $x - x_n \in B_r$ e portanto

$$|x| \leq |x - x_n| + |x_n| < 2r,$$

uma contradição com o fato de que $|x| > 2r$. Analogamente, se $\varphi_{k_0}(x - x_0) \neq 0$ então $x - x_0 \in B_r$ e

$$|x| \leq |x - x_0| + |x_0| < 2r,$$

novamente uma contradição com $|x| > 2r$. Logo $\operatorname{supp} \psi_n \subset B_{2r}$. Como $x_n \to x_0$, pela continuidade de φ_{k_0},

$$\psi_n(x) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

E além disso, existe uma constante $E > 0$ tal que

$$|\varphi_{k_0}(x)| \leq E \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo, para todo $x \in B_{2r}$,

$$\psi_n(x) \leq 2^q |\varphi_{k_0}(x - x_n)|^q + 2^q |\varphi_{k_0}(x - x_0)|^q \leq 2^{q+1} E^q \in L^1(B_{2r}).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n = \lim_{n \to \infty} \int_{B_{2r}} \psi_n = 0.$$

Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_n < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n > n_0.$$

Em (2.52), segue que

$$F_n \leq c_4 \varepsilon^{\frac{2(1-\theta)}{q}} + c_1 \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Isso mostra que $F_n \to 0$ quando $n \to \infty$, o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Com os resultados provados até agora, já podemos demonstrar a Proposição 2.1, que nos garante que o funcional I atinge seu ínfimo no conjunto M.

Demonstração da Proposição 2.1. Vamos considerar dois casos. Primeiro vamos supor que a sequência (x_n) dada no Lema 2.6 é limitada em $\mathbb{R}^N$. Assim, a menos de subsequência, podemos supor que $x_n \to x_0$ em $\mathbb{R}^N$. Como $u_n \in M$, de (1.40), (1.46) e pelo Lema 1.11, para todo $t > 0$,

$$I((u_n)_t) = f_{u_n}(t) \leq f_{u_n}(1) = I(u_n). \tag{2.53}$$

Portanto, para todo $t > 0$,

$$m = \lim_{n\to\infty} I(u_n) \geq \liminf_{n\to\infty} I\left((u_n)_t\right). \tag{2.54}$$

De (1.41),

$$\begin{aligned} I((u_n)_t) &= \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u_n^2 \\ &+ \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2 - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} I((u_n)_t) \geq \liminf_{n\to\infty} &\left[\frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2\right] + \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u_n^2\right] \\ + \liminf_{n\to\infty} &\left[\frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2\right] - \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\right]. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \liminf_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\right) \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 = \|u\|^2.$$

Mas, pelo Lema 2.18, $u_n \to u$ em $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. Logo

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2. \tag{2.56}$$

De maneira análoga, como $u_n^2 \rightharpoonup u^2$ fracamente em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, aplicando novamente o Lema 2.18,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^2|^2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^2|^2. \tag{2.57}$$

Por (2.56) e (2.57), pelo Lema de Fatou e pelo Lema 2.18 com $q = p+1$, podemos concluir de (2.55) que

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} I((u_n)_t) &\geq \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u^2 + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \\ &= I(u_t), \end{aligned} \tag{2.58}$$

para todo $t > 0$. Combinando com (2.54), segue que $I(u_t) \leq m$ para todo $t > 0$. Como t^u é ponto de máximo de f_u então, de (1.47), temos $u_{t^u} \in M$. Assim,

$$m \leq I(u_{t^u}) = f_u(t^u) = \max_{t>0} f_u(t) = \max_{t>0} I(u_t) \leq m.$$

Portanto, o ínfimo de I é atingido em $u_{t^u} \in M$. Isso conclui o primeiro caso. No segundo caso, consideramos a sequência (x_n) ilimitada em $\mathbb{R}^N$. Passando a uma subsequência, podemos supor que $|x_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Fazemos a mudança de variáveis $x = y + x_n$, e obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)\, u_n^2\,(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} V(t\,(y+x_n))\, u_n^2\,(y+x_n)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V(t\,(y+x_n))\, z_n^2\,(y)\, dy.\end{aligned}$$

Sejam $t > 0$ e $\varphi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_n\,(y) = V(t\,(y+x_n))\, z_n^2\,(y)$. Por (V_1) ,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n\,(y) = V_\infty\, z^2\,(y)$$

e

$$|\varphi_n\,(y)| \le V_\infty\, z_n^2\,(y)\,.$$

Pelo Lema 2.17, existe uma $h \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $z_n\,(y) \le h\,(y)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Logo $\varphi_n\,(y) \le V_\infty\, h^2\,(y) \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Assim podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e (V_1) para obter

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx) u_n^2\,(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(t\,(y+x_n)) z_n^2\,(y)\, dy \\ &= V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} z^2\,(y)\, dy \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^N} V(ty) z^2\,(y)\, dy, \qquad (2.59)\end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Temos, por (2.54),

$$\begin{aligned} m &\ge \liminf_{n\to\infty} I\left((u_n)_t\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n\,(x)\,|^2 dx + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx) u_n^2\,(x)\, dx\right. \\ &\qquad \left. + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\,(x)\,|\nabla u_n\,(x)\,|^2 dx - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n\,(x)\,|^{p+1} dx\right] \\ &= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_n\,(y)\,|^2 dy + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx) u_n^2\,(x)\, dx\right. \\ &\qquad \left. + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} z_n^2\,(y)\,|\nabla z_n\,(y)\,|^2 dy - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |z_n\,(y)\,|^{p+1} dy\right]. \qquad (2.60)\end{aligned}$$

Por termos $z_n \rightharpoonup z$ e $z_n^2 \rightharpoonup z^2$ fracamente em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, pelo Lema 2.17, por (2.60) e (2.59),

$$\begin{aligned} m &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_n(y)|^2 dy + \liminf_{n\to\infty} \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(tx)u_n^2(x)\,dx \\ &\quad + \liminf_{n\to\infty} \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} z_n^2(y)\,|\nabla z_n(y)|^2 dy - \limsup_{n\to\infty} \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |z_n(y)|^{p+1} dy \\ &\geq \frac{t^N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z(y)|^2 dy + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(ty)z^2(y)\,dy \\ &\quad + \frac{t^{N+2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} z^2(y)\,|\nabla z(y)|^2 dy - \frac{t^{N+p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |z(y)|^{p+1} dy \\ &= I(z_t), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Logo $I(z_t) \leq m$ para todo $t > 0$. Pelo Lema 1.11, t^z é ponto de máximo de f_z então, de (1.47), temos $z_{t^z} \in M$. Assim

$$m \leq I(z_{t^z}) = f_z(t^z) = \max_{t>0} f_z(t) = \max_{t>0} I(z_t) \leq m.$$

Logo o ínfimo de I é atingido em $z_{t^z} \in M$. Portanto, em qualquer um dos casos o ínfimo de I é atingido no conjunto M. □

2.2 Demonstração do Teorema A

Inicialmente vamos mostrar o seguinte resultado:

Proposição 2.19 *Se $u \in M$ é tal que $I(u) = \inf_M I = m$ então u é solução fraca de (P).*

Na demonstração da Proposição 2.19 utilizamos o seguinte lema.

Lema 2.20 *Sejam $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, $t, \sigma \in \mathbb{R}$ e $u \in X$. Então*

$$|\langle I'(u_t + \sigma\phi), \phi\rangle - \langle I'(u), \phi\rangle| \to 0 \text{ quando } t \to 1 \text{ e } \sigma \to 0.$$

Demonstração. Consideramos sequências (t_n) e (σ_n) em $\mathbb{R}$ tais que $t_n \to 1$ e $\sigma_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Trata-se de mostrar que, para todos $u \in X$ e $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$|\langle I'(v_n), \phi\rangle - \langle I'(u), \phi\rangle| \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty,$$

onde $v_n = u_{t_n} + \sigma_n \phi$. Como $t_n \to 1$ e $\sigma_n \to 0$, sem perda de generalidade, podemos supor que $1/2 < t_n < 2$ e $|\sigma_n| < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ao longo de toda a demonstração usaremos que como $\phi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, existe uma constante $M > 0$ tal que $|\phi(x)| \le M$ e $|\nabla \phi(x)| \le M$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Primeiro vamos mostrar que

$$d_X(v_n, u) = \|v_n - u\| + \left|\nabla v_n^2 - \nabla u^2\right|_2 \to 0 \ \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.61}$$

De fato, como $|\sigma_n| < 1$,

$$\begin{aligned} d_X(v_n, u) &= \|u_{t_n} + \sigma_n \phi - u\| + \left|\nabla (u_{t_n} + \sigma_n \phi)^2 - \nabla u^2\right|_2 \\ &\le \|u_{t_n} - u\| + |\sigma_n| \|\phi\| + \left|\nabla u_{t_n}^2 - \nabla u^2\right|_2 + 2|\sigma_n| |\nabla (u_{t_n}\phi)|_2 + \sigma_n^2 |\nabla \phi|_2 \\ &\le \|u_{t_n} - u\| + \left|\nabla u_{t_n}^2 - \nabla u^2\right|_2 + (\|\phi\| + 2|\nabla(u_{t_n}\phi)|_2 + |\nabla\phi|_2)\, |\sigma_n|. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Observamos que existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$|\nabla (u_{t_n}\phi)|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_{t_n}\nabla\phi + \phi \nabla u_{t_n}|^2 dx \le c_1 \int_{\mathbb{R}^N} u_{t_n}^2(x)\, dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{t_n}(x)|^2 dx.$$

Pela defnição de u_t dada em (1.31) e fazendo a mudança de variáveis $x = t_n y$, obtemos $c_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\nabla (u_{t_n}\phi)|_2^2 &\le c_1 \int_{\mathbb{R}^N} t_n^2 u^2\left(\frac{x}{t_n}\right) dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u\left(\frac{x}{t_n}\right)\right|^2 dx \\ &\le c_1 t_n^{N+2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)\, dy + c_1 t_n^N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy \le c_2, \end{aligned}$$

já que $1/2 < t_n < 2$ e $u \in X$. Combinando com (2.62) podemos escrever

$$d_X(v_n, u) \le \|u_{t_n} - u\| + \left|\nabla u_{t_n}^2 - \nabla u^2\right|_2 + c_3 |\sigma_n|. \tag{2.63}$$

Lembramos que $u_{t_n} = \gamma_u(t_n)$ e $u = \gamma_u(1)$, onde γ_u é a função definida no início da Seção 2.2. Pelo que foi demonstrado no Lema 1.9 e como $t_n \to 1$,

$$\|u_{t_n} - u\| + \left|\nabla u_{t_n}^2 - \nabla u^2\right|_2 = d_X(\gamma_u(t_n), \gamma_u(1)) \to 0, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Daí, de (2.63) e como $\sigma_n \to 0$, concluímos a verificação de (2.61). Agora, sendo

$$\nabla u^2 \cdot \nabla(u\phi) = 2u\nabla u \cdot (u\nabla\phi + \phi\nabla u) = 2u^2 \nabla u \cdot \nabla\phi + 2u\phi |\nabla u|^2,$$

a expressão (1.8) de $\langle I'(u), \phi\rangle$ pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
\langle I'(u), \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, u\phi + \int_{\mathbb{R}^N} \left(u^2\nabla u\cdot\nabla\phi + u\phi\,|\nabla u|^2\right) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}\, u\phi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, u\phi + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^2\cdot\nabla(u\phi) - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}\, u\phi\,. \qquad (2.64)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\langle I'(v_n), \phi\rangle - \langle I'(u), \phi\rangle = I_1 + I_2 + I_3,$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n - \nabla u)\cdot\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,(v_n - u)\,\phi, \\
I_2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla v_n^2\cdot\nabla(v_n\phi) - \nabla u^2\cdot\nabla(u\phi)\right)
\end{aligned}
$$

e

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}\, u\phi - |v_n|^{p-1}\, v_n\phi\,. \qquad (2.65)$$

Para concluir a demonstração do lema, basta mostrar que cada uma dessas integrais tende a zero quando $n\to\infty$. De fato, por (V_1) e pela desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n - \nabla u|\,|\nabla\phi| + V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - u|\,|\phi| \\
&\le c\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n - \nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n - u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\le 2c\,\|v_n - u\|\,.
\end{aligned}
$$

Logo, por (2.61), $I_1\to 0$ quando $n\to\infty$. Agora, podemos reescrever o integrando de I_2 como

$$
\begin{aligned}
\nabla v_n^2\cdot[\nabla(v_n\phi) - \nabla(u\phi)] + \left[\nabla v_n^2 - \nabla u^2\right]\cdot\nabla(u\phi) &= \nabla v_n^2\cdot[\phi\,(\nabla v_n - \nabla u) + (v_n - u)\,\nabla\phi] \\
&\quad + \left[\nabla v_n^2 - \nabla u^2\right]\cdot\nabla(u\phi)\,.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
|I_2| \leq M \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla v_n^2\right| |\nabla v_n - \nabla u| + M \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla v_n^2\right| |v_n - u| \\
+ \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla v_n^2 - \nabla u^2\right| |\nabla (u\phi)| .
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq M \left|\nabla v_n^2\right|_2 (|\nabla v_n - \nabla u|_2 + |v_n - u|_2) + \left|\nabla v_n^2 - \nabla u^2\right|_2 |\nabla (u\phi)|_2 \\
&\leq 2M \left|\nabla v_n^2\right|_2 \|v_n - u\| + \left|\nabla v_n^2 - \nabla u^2\right|_2 |\nabla (u\phi)|_2 . \qquad (2.66)
\end{aligned}
$$

Observamos que

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla v_n^2\right|_2^2 &= 4 \int_{\mathbb{R}^N} |u_{t_n} + \sigma_n \phi|^2 |\nabla u_{t_n} + \sigma_n \nabla \phi|^2 \, dx \\
&\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_{t_n}|^2 + \sigma_n^2 |\phi|^2\right) \left(|\nabla u_{t_n}|^2 + \sigma_n^2\right) dx \\
&= c_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_{t_n} \nabla u_{t_n}|^2 + \sigma_n^2 |u_{t_n}|^2 + \sigma_n^2 |\nabla u_{t_n}|^2 + \sigma_n^4 |\phi|^2\right) dx \\
&= c_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left| t_n u\left(\frac{x}{t_n}\right) \nabla u \left(\frac{x}{t_n}\right)\right|^2 dx + \sigma_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} t_n^2 \left| u\left(\frac{x}{t_n}\right)\right|^2 dx \right. \\
&\qquad \left. + \sigma_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u \left(\frac{x}{t_n}\right)\right|^2 dx + c_4 \sigma_n^4 \right\} \\
&\leq c_3 t_n^{N+2} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y) \nabla u(y)|^2 \, dy + c_3 t_n^{N+2} \sigma_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 \, dy \\
&\quad + c_3 t_n^N \sigma_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 \, dy + c_5 \sigma_n^4 .
\end{aligned}
$$

Usando que $1/2 < t_n < 2$, $|\sigma_n| < 1$ e $u \in X$, então

$$
\left|\nabla v_n^2\right|_2 \leq c.
$$

Usando essa limitação em (2.66), por (2.61) concluímos que $I_2 \to 0$ quando $n \to \infty$. Resta mostrar que $I_3 \to 0$ quando $n \to \infty$. Ora,

$$
|I_3| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1} u(x) \phi(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x)|^{p-1} v_n(x) \phi(x) \, dx \right| ,
$$

onde

$$v_n(x) = t_n u\left(\frac{x}{t_n}\right) + \sigma_n \phi(x).$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = t_n y$, obtemos

$$\begin{aligned} |I_3| = \bigg| & \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1} u(x) \phi(x) \, dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} |t_n u(y) + \sigma_n \phi(t_n y)|^{p-1} (t_n u(y) + \sigma_n \phi(t_n y)) \phi(t_n y) t_n^N dy \bigg|. \end{aligned}$$

Como $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $R > 0$ tal que $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_R$. Como $t_n > 1/2$, $\phi(t_n y) = 0$ para $y > 2R$. Então

$$|I_3| \leq \int_{B_{2R}} |f_n(x)| \, dx, \tag{2.67}$$

onde

$$f_n(x) = |u(x)|^{p-1} u(x) \phi(x) - |t_n u(x) + \sigma_n \phi(t_n x)|^{p-1} (t_n u(x) + \sigma_n \phi(t_n x)) \phi(t_n x) t_n^N.$$

Pela continuidade da ϕ, como $t_n \to 1$ e $\sigma_n \to 0$,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \;\; \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.68}$$

Além disso, usando a desigualdade triangular, a desigualdade $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, para todo $a, b \geq 0$ e $p > 1$, usando que $t_n \in (1/2, 2)$, $|\sigma_n| < 1$ e que ϕ é limitada em $\mathbb{R}^N$, obtemos uma constante $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq |u(x)|^p |\phi(x)| + |t_n u(x) + \sigma_n \phi(t_n x)|^p |\phi(t_n x)| 2^N \\ &\leq |u(x)|^p |\phi(x)| + c |u(x)|^p |\phi(t_n x)| + c. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young com expoentes $\dfrac{p+1}{p}$ e $p+1$, obtemos uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq c_1 |u(x)|^{p+1} + c_1, \;\; \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{2.69}$$

Agora, $g := c_1 |u|^{p+1} + c_1 \in L^1(B_{2R})$, pois $u \in X$. Assim, de (2.67), (2.68), (2.69) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que $I_3 \to 0$ quando $n \to \infty$, concluindo a demonstração do lema. □

Demonstração da Proposição 2.19. Seja $u \in M$ tal que $I(u) = m$. Usando argumento de contradição, supomos que u não é uma solução fraca de (P). Nesse caso, existe $\phi_0 \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $\langle I'(u), \phi_0\rangle = c_0 \neq 0$. Tomando $\phi = -\dfrac{2}{c_0}\phi_0$, temos que

$$\langle I'(u), \phi\rangle < -1. \tag{2.70}$$

Pelo Lema 2.20 podemos escolher $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que

$$|\langle I'(u_t + \sigma\phi), \phi\rangle - \langle I'(u), \phi\rangle| < \frac{1}{2},$$

para todos t, σ tais que $|t-1| < \varepsilon$, $|\sigma| < \varepsilon$. Combinando com (2.70) obtemos que

$$\langle I'(u_t + \sigma\phi), \phi\rangle < -\frac{1}{2} \quad \text{para todos} \;\; t, \sigma \;\; \text{tais que} \;\; |t-1| < \varepsilon \;\; \text{e} \;\; |\sigma| < \varepsilon. \tag{2.71}$$

Consideramos a função corte $\eta \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $0 \leq \eta(t) \leq 1$ se $\varepsilon/2 < |t-1| < \varepsilon$ e

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \;\; |t-1| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{se} \;\; |t-1| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Lembramos que na Seção 2.2 definimos uma curva $\gamma_u : [0, \infty) \to X$ por $\gamma_u(t) = u_t$, sendo a função $u_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_t(x) = tu\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{se } t > 0 \;\; \text{e } u_0 \equiv 0.$$

Agora perturbamos tal curva, definindo $\gamma : [0, \infty) \to X$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} u_t, & \text{se} \;\; |t-1| \geq \varepsilon \\ u_t + \varepsilon\eta(t)\phi, & \text{se} \;\; |t-1| < \varepsilon. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$I(\gamma(t)) < m, \quad \text{para todo} \;\; t \geq 0. \tag{2.72}$$

De fato, como $u \in M$, f_u atinge seu único ponto de máximo em $t = 1$. Logo

$$I(u_t) = f_u(t) \leq f_u(1) = I(u_1) = I(u) = m, \tag{2.73}$$

sendo essa desigualdade estrita quando $t \neq 1$. Assim, se $|t-1| \geq \varepsilon$,

$$I(\gamma(t)) = I(u_t) < m,$$

o que mostra (2.72) nesse caso. Quando $|t-1|<\varepsilon$, consideramos $g:[0,\,\varepsilon]\to\mathbb{R}$ definida por

$$g\left(\sigma\right)=I\left(u_t+\sigma\eta\left(t\right)\phi\right).$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\tilde{\sigma}\in(0,\,\varepsilon)$ tal que

$$g\left(\varepsilon\right)=g\left(0\right)+g'\left(\tilde{\sigma}\right)\varepsilon,$$

ou seja,

$$I\left(u_t+\varepsilon\eta\left(t\right)\phi\right)=I\left(u_t\right)+\langle I'\left(u_t+\tilde{\sigma}\eta\left(t\right)\phi\right),\,\eta\left(t\right)\phi\rangle\varepsilon.$$

Como $|\tilde{\sigma}\eta\left(t\right)|<\varepsilon$, segue daí, de (2.71), (2.73) e da definição de η, que

$$I\left(u_t+\varepsilon\eta\left(t\right)\phi\right)<I\left(u_t\right)-\frac{1}{2}\varepsilon\eta\left(t\right)\leq m-\frac{1}{2}\varepsilon\eta\left(t\right)<m,$$

o que conclui a verificação de (2.72). Na Seção 2.2 mostramos que

$$J\left(u\right)=f_u'\left(1\right)$$

onde $J:X\to\mathbb{R}$ é dado em (1.9). Pela definição de γ, quando $|t-1|=\varepsilon$, por (1.47),

$$J\left(\gamma\left(t\right)\right)=J\left(u_t\right)=f_{u_t}'\left(1\right)=tf_u'\left(t\right).$$

Como $u\in M$, f_u atinge seu único máximo em $t=1$. Logo

$$J\left(\gamma\left(1-\varepsilon\right)\right)>0 \ \text{ e } \ J\left(\gamma\left(1+\varepsilon\right)\right)<0.$$

Observamos que, da expressão (1.45) de $f_u'\left(t\right)$ e usando (V_1) e (V_2), podemos concluir que a aplicação $\varphi\left(t\right)=J\left(\gamma\left(t\right)\right),\,t>0$, é contínua. Então existe $t_0\in(1-\varepsilon,\,1+\varepsilon)$ tal que

$$J\left(\gamma\left(t_0\right)\right)=0.$$

Pela definição de M,

$$\gamma\left(t_0\right)=u_{t_0}+\varepsilon\eta\left(t_0\right)\phi\in M$$

e, por (2.72),

$$I\left(\gamma\left(t_0\right)\right)<m=\inf_M\,I,$$

uma contradição. Isso mostra que u é uma solução fraca de (P). $\square$

Agora sim, finalmente temos condições de demonstrar a existência de uma solução positiva de energia mínima de (P).

Demonstração do Teorema A. Pela Proposição 2.1, existe $u \in M$ tal que

$$I(u) = \inf_M I = m.$$

Pela Proposição 2.19, u é uma solução fraca de (P). Pelo Lema 1.12, $I(u) = m > 0 = I(0)$. Logo $u \not\equiv 0$. Pelo Lema 7.6 em [13], $|\nabla |u|| = |\nabla u|$. Logo

$$J(|u|) = J(u) = 0,$$

para $u \in M$. Portanto $0 \not\equiv v := |u| \in M$. Além disso, $I(v) = I(u) = m$ e, consequentemente, pela Proposição 2.19, $v \geq 0$ é também solução fraca de (P). Pela teoria de regularidade podemos admitir que v é de classe C^2 e satisfaz

$$-\Delta v + V(x) v - \frac{1}{2} v \Delta v^2 = |v|^{p-1} v, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como $\Delta v^2 = 2|\nabla v|^2 + 2v\Delta v$, segue que

$$\left(1 + v^2\right) \Delta v - V(x) v = -v |\nabla v|^2 - |v|^{p-1} v \leq 0.$$

Daí, e de (V_1),

$$\Delta v - V_\infty v \leq \Delta v - \frac{V(x)}{1+v^2} v \leq 0.$$

Pelo Princípio do Máximo Forte (Teorema 3.5 em [13]), se existisse $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x) = 0$ então $v \equiv 0$, uma contradição. Logo $v > 0$. Como vimos na Seção 2.1 toda solução não trivial de (P) pertence ao conjunto M. Consequentemente, $v = |u|$ é solução positiva de energia mínima de (P). $\square$

Apêndice

Aqui enunciamos alguns conceitos e resultados da Teoria de Medida que podem ser encontrados em [12].

Definição: *Seja μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}^N$ e $B \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto de Borel. μ é regular exterior em B se $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \supset B,\ U \text{ é aberto}\}$ e μ é regular interior em B se $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B,\ K \text{ é compacto}\}$. Dizemos que μ é regular se μ é regular exterior e regular interior em todos os conjuntos de Borel.*

Definição: *Uma medida de Radon em $\mathbb{R}^N$ é uma medida de Borel que é finita em conjuntos compactos, regular exterior em todos os conjuntos de Borel e regular interior em todos os conjuntos abertos.*

Denotamos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ o espaço das medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^N$. Dizemos que uma sequência $(\omega_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ converge fracamente no sentido das medidas para ω em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ se $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \phi \, d\omega_n \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi \, d\omega$ para toda $\phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Proposição A *Seja λ uma medida positiva de Radon em $\mathbb{R}^N$ e $(f_n) \subset L^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f_n| d\lambda \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para alguma constante C. Então existe uma medida positiva de Radon λ_0 tal que, a menos de subsequência, $\lambda_n = |f_n| d\lambda \rightharpoonup \lambda_0$ fracamente no sentido das medidas.*

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, R.G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. John Wiley and Sons, New York, 1995.

[2] BOROVSKII, A.V; GALKIN, A.L. Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter. **Journal of Experimental and Theoretical Physics,** v. **77,** p. 562–73, 1993.

[3] BRÉZIS, H. **Analyse Fonctionnelle**. Masson, Paris, 1983.

[4] BRÉZIS, H; LIEB, E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. **Proc. Amer. Math. Soc**, 88, p. 486-490, 1983.

[5] BRIHAYE, Y; HARTMANN, B; ZAKRZEWSKI, W.J. Spinning solitons of a modified nonlinear Schrödinger equation**. Physical Review D,** v. 69, 2004.

[6] BRIHAYE, Y; HARTMANN, B. Solitons on nanotubes and fullerenes as solutions of a modified nonlinear Schrödinger equation Advances in Soliton. **Research Hauppauge, NY: Nova Sci. Publ**, p. 135–51, 2006.

[7] BRIZHIK, L; EREMKO, A; PIETTE, B; ZAKRZEWSKI, W.J. Electron self-trapping in a discrete two-dimensional lattice, **Physical Review D,** v. 159, p. 71–90, 2001.

[8] BRIZHIK, L; EREMKO, A; PIETTE, B; ZAKRZEWSKI, W.J. Static solutions of a D-dimensional modified nonlinear Schrödinger equation. **Nonlinearity,** v**.** 16, p**.** 1481–97, 2003.

[9] COLIN, M; JEANJEAN, L, Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach. **Nonlinear Analysis,** v.56, p. 213–26, 2004.

[10] COLIN, M; JEANJEAN, L; SQUASSINA, M. Stability and instability results for standing waves of quasi-linear Schrödinger equations. **Nonlinearity**, v. 23, p. 1353, 2010.

[11] EVANS, L.C. **Partial Differential Equations**. American Math Society, Providence, 1998.

[12] FOLLAND, G. B. **Real analysis modern techniques and their applications**, John Wiley and Sons, 1999.

[13] GILBARG, D; TRUNDINGER, N.S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[14] GUO, B; CHEN, J; SU, F. The blow-up problem for a quasilinear Schrödinger equation. **Journal Mathematical Physics,** v. 46, p. 073510–073519, 2005.

[15] HARTMANN, B; ZAKRZEWSKI, W.J. Electrons on hexagonal lattices and applications to nanotubes. **Physical Review B**, v. 68, p. 184–302, 2003.

[16] KAVIAN, O. **Introduction a La Theorie Des Points Critiques: Et Applications Aux Problemes Elliptiques.** Springer-Verlag, 1993.

[17] KENIG, C.E; PONCE, G; VEGA, L. The Cauchy problem for quasi-linear Schrödinger equations. **Inventiones Mathematicae**, v. 158, p. 343–88, 2004.

[18] KURIHURA, S. Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 50, p. 3262–7, 1981.

[19] LANGE, H; POPPENBERG, M; TEISMANN, H. Nash–Moser methods for the solution of quasilinear Schrödinger equations. **Communications in Partial Differential Equations,** v. 24, p. 1399–418, 1999.

[20] LANGE, H; POPPENBERG, M; TEISMANN, H. Nonlinear singular Schrödinger type equations. **Proc. Workshop on Nonlinear Theory of Generalized Functions (Wien: Erwin- Schrödinger-Institut) Oberguggenberger M (ed) Pitman Research Notes,** v. 401, p. 113–28, 1999.

[21] LIONS, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case Part 2. **Annales de l'Institut Henri Poincaré**, v. 4, p. 223–83, 1984.

[22] LIU, J; WANG, Y; WANG, Z-Q. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: II. **Journal of Differential Equations**, v. 187, p. 473–93, 2003.

[23] LIU, J; WANG, Z-Q. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: I. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 131, p. 441–8, 2003.

[24] LIU, J; WANG, Y; WANG, Z-Q. Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 29, p. 879–901, 2004.

[25] POPPENBERG, M. On the local well posedness of quasi-linear Schrödinger equations in arbitrary space dimension. **Journal of Differential Equations,** v. 172, p. 83–115, 2001.

[26] POPPENBERG, M; SCHMITT, K; WANG Z-Q. On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 14, p. 329–44, 2002.

[27] PUCCI, P; SERRIN, J. A general variational identity. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 35, p. 681–703, 1986.

[28] RITHIE, B. Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions. **Physical Review E**, 50, p. 687–9, 1994.

[29] RUIZ, D; SICILIANO, G. Existence of ground states for a modified nonlinear Schrödinger equation. **Nonlinearity,** v. 23, p. 1221–1233, 2010.

[30] WILLEM, M. **Minimax Theorems.** Birkhäuser, Basel, 1996.