

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

MARCIO LUIS ZERWES

**EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE MOVIMENTOS
PERIÓDICOS EM SISTEMAS COM VIBRO-IMPACTO
COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

**VITÓRIA – ES
2012**

MARCIO LUIS ZERWES

**EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE MOVIMENTOS
PERIÓDICOS EM SISTEMAS COM VIBRO-IMPACTO
COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Sistemas Mecânicos.

VITÓRIA – ES

2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Z58e Zerwes, Marcio Luís, 1974-
 Existência e estabilidade de movimentos periódicos em
 sistemas com vibro-impacto com dois graus de liberdade / Marcio
 Luís Zerwes. – 2012.
 67 f. : il.

 Orientador: Márcio Coelho de Mattos.
 Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –
 Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

 1. Oscilações não-lineares. 2. Vibro-impacto. 3. Vibração
 aleatória. 4. Movimentos mecânicos. 5. Estabilidade. I. Mattos,
 Márcio Coelho de. II. Universidade Federal do Espírito Santo.
 Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Existência e Estabilidade de Movimentos Periódicos em Sistemas com Vibro-
Impacto com Dois Graus de Liberdade**

MARCIO LUIS ZERWES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Márcio Coelho de Mattos – Orientador

Orientador: Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. José Manoel Balthazar

Examinador Externo: Universidade Estadual Paulista

Prof. Dr. Angelo Gil Pezzino Rangel

Examinador Interno: Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória (ES), 27 de março de 2012.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às pessoas que me ajudaram. Dedico àqueles que simplesmente me ofereceram palavras de incentivo, mas palavras que me fizeram acreditar que era possível, aos meus pais que não mediram esforços para assegurar minha formação básica, à minha esposa que, enquanto eu me abstraía para os estudos e elaboração desta monografia, pacientemente cuidou de nossa família, a meu filho (sábio menino) que no auge da minha desorientação sugeriu estabelecer metas, à minha filha que de tão pequena era incapaz de compreender meu afastamento, mas com seu olhar meigo me dava garra para seguir, à um amigo especial que me incentivou a encerrar este desafio e ao meu professor orientador que me acolheu e garantiu a frutificação deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos responsáveis pelo Programa de Pós Graduação por acreditarem no meu potencial e pela oportunidade concedida.

Agradeço também ao pessoal de apoio, especialmente a Sra. Maria José, por terem me auxiliado nos procedimentos administrativos.

Estou especialmente agradecido ao Prof. Marcio por dispor seu tempo em me auxiliar e orientar, e por confiar e dispor de espaço em seu recinto para acomodar meus estudos.

Também agradeço aos membros da banca examinadora pela sua disponibilidade e dedicação.

'Uma pessoa pode impressionar com palavras, mas são suas atitudes que a fazem grande'.

Marcio Zerwes

RESUMO

Este trabalho apresenta a modelagem matemática de um sistema com vibro-impacto com dois graus de liberdade, com excitação harmônica. Sistemas de vibro-impacto têm sido estudados por vários pesquisadores nas últimas décadas, contudo, padrões específicos de movimento e estabilidade são temas ainda deficientes de maiores análises. Este trabalho mostra que vários padrões de movimentos periódicos podem ocorrer em sistemas com vibro-impacto e o seu entendimento começa pelo estudo das condições de existência e estabilidade. Neste estudo, condições de periodicidade são aplicadas sobre o estado nos instantes de impactos a fim de obter um mapa do próximo impacto, abalizado no estado da colisão anterior. Este mapa, não-linear, é aplicado para obter as condições de existência do movimento periódico com padrão específico de topologia 1-2 simétrico. Aplicando as condições de existência, a estabilidade do movimento pode ser obtida por meio da análise dos autovalores do mapa, tendo em conta estas restrições.

Palavras-chave: oscilações não-lineares, vibro-impacto, vibração aleatória, movimentos mecânicos, estabilidade.

ABSTRACT

In this work the mathematical modeling of a harmonically excited vibro-impact with 2DOF system is presented. Vibro-impact systems have been investigated by several researchers in the last decades, however, specific patterns of motion and stability still need to be more studied. Hereby, it is shown that several patterns of periodic motions can occur on vibro-impact systems, and the comprehension of their motion begins by accurately investigating their conditions of existence and stability. In this work, periodicity conditions have been applied on the state at the instants of impacts in order to obtain a map of the next impact, based on the state of the previous one. This nonlinear map is used to obtain the conditions of existence of periodic motions of a specific 1-2 symmetric topology pattern. Applying the existence conditions, the stability of the motion can be carried out by analyzing the eigenvalues of the map while taking these precincts into account.

Keywords: nonlinear oscillations, vibro-impact, random vibration, mechanical motions, stability.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1: Sistema cujo os movimentos são objeto de estudo

Figura 2-1: Sistema cujo os movimentos são objeto de estudo

Figura 2-2 - Resposta caótica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 1,0$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 2-3 - Resposta caótica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 1,0$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 2-4 – Topologia 1-5 não periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,9$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 2-5 - Topologia 1-4 quase periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,45$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 2-6 - Topologia 1-2 periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,9$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 2-7 - Topologia 1-4 periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 1,1$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 2-8 - Topologia 1-24 quase periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,1$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 2-9 - Topologia 1-8 periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,25$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 2-10 – Ampliação da crista da onda mostrada na Figura 2-

Figura 2-11 - Topologia 1-2 periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,2$; $\omega = 0,25$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 3-1 - Amplitude máxima do sistema linear para um caso particular

Figura 3-2 - η_{cr}^2 do sistema linear para um caso particular

Figura 3-3 – Topologia 2-8, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,965$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$; CIs nulas

Figura 3-4 – Top. 1-2 Sim., $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,965$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$; CIs ajustadas

Figura 3-5 – Movimento Caótico, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,97$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$; CIs nulas

Figura 4-1 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,9$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 4-2 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,9$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 4-3 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,05$; $e = 1,0$

Figura 4-4 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,1$; $e = 1,0$

Figura 4-5 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,2$; $e = 1,0$

Figura 4-6 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 4-7 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 4-8 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 4-9 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 4-10 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,5$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 4-11 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,5$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 4-12 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,2$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 4-13 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,2$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 4-14 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 4-15 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Figura 4-16 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,1$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

Figura 4-17 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,1$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

LISTA DE SÍMBOLOS

a_j :	constante de integração da solução
b_j :	constante de integração da solução
c_{ij} :	coeficiente de amortecimento
k_{ij} :	coeficiente de rigidez
m_p :	massa principal
m_a :	massa auxiliar
v_k :	velocidade em coordenadas físicas adimensionais
x_k :	coordenada física adimensional
y_1 :	deslocamento da massa principal
y_2 :	deslocamento da massa auxiliar
A_j :	constantes da solução permanente
A_{Cj} :	constantes da solução permanente multiplicada por $\cos \varphi$
A_{Sj} :	constantes da solução permanente multiplicada por $\sin \varphi$
K :	fator divisor da matriz A
T :	período da resposta
A :	matriz dos coeficientes do vetor X
B :	matriz do coeficiente da condições de fase
$\tilde{\mathbf{B}}$:	matriz do coeficiente da condições de fase no instante inicial
C :	matriz de amortecimento
F :	vetor coeficiente da força excitadora
H :	variável de transição do vetor estado
J :	matriz de transferência

- K :** matriz de rigidez
- M :** matriz de inercia
- Q :** matriz de transição
- T :** matriz de transição
- X :** vetor estado em coordenadas físicas adimensionais
- Y :** vetor estado
- \hat{Y} :** vetor de transição

Letras Gregas

- α : constantes de proporcionalidade da matriz de amortecimento
- β : constantes de proporcionalidade da matriz de amortecimento
- Δ : folga
- δ : folga adimensional
- ω_p : frequência natural do subsistema principal;
- ω_a : frequência natural do subsistema auxiliar;
- λ_{aj} : quadrado da frequência natural
- λ_{bj} : quadrado da frequência natural
- μ : razão das massas dos subsistemas;
- η_j : coordenadas modais
- ε : razão das frequências dos subsistemas,
- τ : tempo adimensionalizado
- $\hat{\tau}$: tempo adimensionalizado no impacto
- ω : frequência de excitação adimensionalizada
- ω_j : autovalor normalizado do modo (j);
- ζ_j : fator de amortecimento modal do modo (j);

$\tilde{\phi}_{ij}$: autovalor associado ao sistema homogêneo não amortecido

φ : variável de transição

$\tilde{\psi}$: matriz modal normalizada

η : vetor estado em coordenadas modais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Motivação e Relevância	16
1.2	Descrição do Problema	17
1.3	Revisão Bibliográfica.....	19
1.4	Organização da Dissertação	23
2	MODELAGEM DO SISTEMA.....	24
2.1	Equação de Movimento.....	24
2.2	Apresentação Gráfica de Alguns Padrões de Movimento	30
3	MAPA DE ESTADO E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA	36
3.1	Mapa Envolvendo os Estados nos Instantes de Colisão.....	36
3.2	Região de Existência de Impactos no Movimento Linear.....	42
3.3	Condições de Existência de Movimentos Periódicos 1-2 Simétricos	43
3.4	Região de Existência do Movimento Periódico 1-2 Simétrico	47
3.5	Aplicação do Mapa e das Condições de Existência	48
4	ANÁLISE DE ESTABILIDADE	53
4.1	Análise de Estabilidade para o Movimento Periódico 1-2 Simétrico	53
4.2	Apresentação Gráfica da Análise de Estabilidade	55
5	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e Relevância

A base de toda a existência está fundamentada em algum tipo de vibração, a começar pelo corpo humano. A visão depende da propagação de ondas luminosas, a audição da vibração dos tímpanos, os pulmões vibram na respiração, o sangue circula graças ao batimento cardíaco, o equilíbrio no andar é obtido pelo balanço do corpo e membros, além de tantos outros eventos que muitas vezes passam despercebidos pelos nossos sentidos. Há ainda inúmeros exemplos de vibrações na natureza e também na maioria das áreas de conhecimento humano.

Na Engenharia, as vibrações mecânicas têm grande relevância na concepção de máquinas, equipamentos, motores, turbinas, reatores, tubulações, pontes, edificações, etc. Subestimar os efeitos vibratórios em um projeto seguramente irá onerar a manutenção e operação do equipamento, ou até mesmo ter consequências catastróficas. Um motor ou uma turbina desbalanceados geram vibrações que além de danificar seus rolamentos e outras partes internas, pode transmitir níveis de oscilações indesejados à estrutura de apoio. A construção de uma ponte requer análise minuciosa das possíveis oscilações causadas pelo vento e pelo fluxo de veículos. Em plantas industriais é comum a leitura de instrumentos de medição ser influenciada pela vibração do equipamento ou da tubulação.

Movimentos vibratórios provocam ruído, levam componentes e estruturas a falhar por fadiga, geram desgaste de peças rotativas, etc., contudo, nem sempre são indesejados. Em muitos casos, as vibrações são grandes aliadas, como por exemplo, na segregação de material por peneiramento, ou em certos instrumentos de medições que usam os princípios da vibração como forma de funcionamento, como é o caso da medição por ultrassom, ou um medidor de vazão do tipo coriolis. A própria neutralização da vibração de um equipamento pode ser obtida por outra vibração, como acontece, por exemplo, nos absorvedores de vibração.

Muitos campos da vibração mecânica ainda precisam ser apropriadamente explorados e estudados, como por exemplo, o vibro-impacto, embora vários

trabalhos sobre o tema tenham sido conduzidos nas últimas duas décadas, com diversos pesquisadores estudando a estabilidade de movimentos periódicos nestes sistemas, as condições de existência, não tiveram a devida atenção, abrindo assim espaço para este trabalho.

1.2 Descrição do Problema

Neste trabalho estudar-se-á um sistema dinâmico conforme apresentado na Figura 1.1. O sistema consiste de dois corpos rígidos, elementos visco-elásticos, uma base fixa com batentes rígidos e com excitação externa aplicada em um dos corpos.

O sistema pode ser dividido em dois subsistemas, sendo o conjunto formado pelo corpo de massa m_p e pelos elementos visco-elásticos que o conectam à base fixa denominado de subsistema principal, enquanto um conjunto secundário, chamado de subsistema auxiliar, é formado pelo corpo de massa m_a e por suportes visco-elásticos conectando-o ao subsistema principal. O corpo principal é excitado por uma força periódica e tem movimento livre, ao contrário do corpo auxiliar que tem o seu movimento limitado por batentes fixos à base, contra os quais o sistema massa-mola-amortecedor impacta repentinamente.

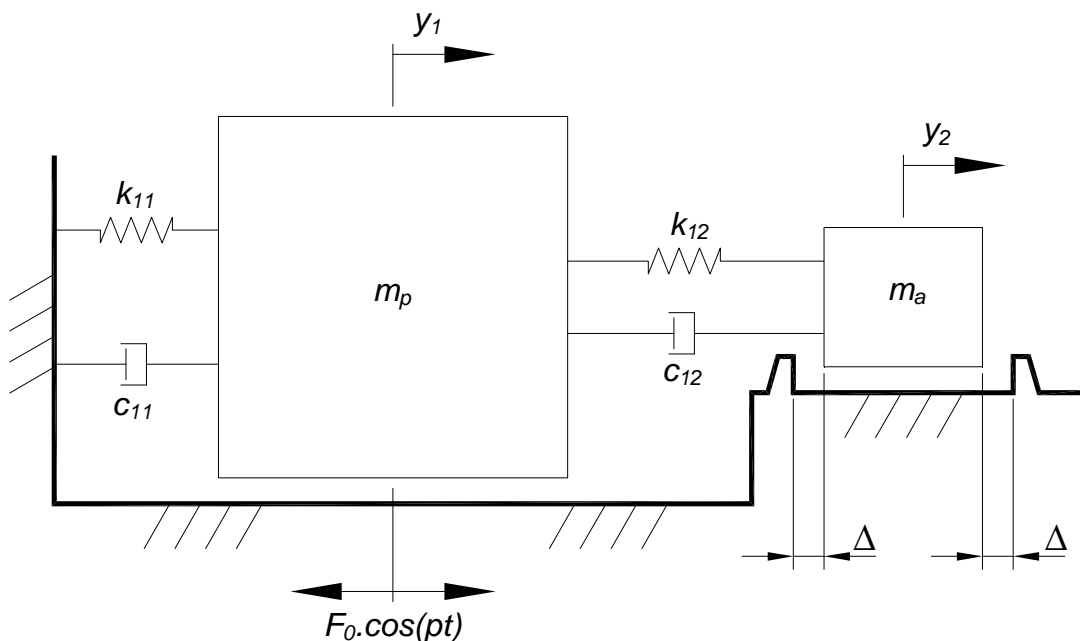


Figura 1-1: Sistema cujo os movimentos são objeto de estudo

O sistema pode ser analisado sob diferentes prismas, como, por exemplo:

- a) Resposta dinâmica global do sistema e suas particularidades, como a dependência do conjunto de parâmetros que o caracterizam, isto é, quanto a dependência da frequência natural do sistema linear associado, do amortecimento, da folga (δ) limitadora do movimento do corpo auxiliar e de sua assimetria, da excitação e das condições iniciais do movimento;
- b) Efeitos de desgaste dos impactos e sua dependência com os parâmetros que caracterizam o sistema;
- c) Características das ondas sonoras geradas pelos impactos e sua dependência com os padrões de movimento;
- d) Distribuição espectral de energia como dependência dos padrões de movimento do sistema.

Cada item anterior pode ser, ainda, desdobrado em diversos subitens. No caso da resposta dinâmica global (item a), pode-se destacar, por exemplo:

- a.1) Condições de ressonância não linear, isto é, de energia máxima na resposta com energia mínima na excitação;
- a.2) Análise de movimento para diversos modelos de contato na região de impacto;
- a.3) Condições de existência e de estabilidade de movimentos periódicos;
- a.4) Condições de ocorrência de caos;
- a.5) Relações de dissipação de energia viscosa no movimento macro e no impacto.

O presente trabalho está focado no estudo de condições de existência e estabilidade de padrões de movimentos periódicos, fixando-se, obviamente, algumas características do sistema, a saber:

- a) Os elementos que conectam os corpos a base e entre si são visco-elásticos e respondem linearmente, isto é, as molas e os amortecedores são lineares;
- b) O impacto entre a massa auxiliar e os batentes será frontal, de forma que o movimento oscilatório da massa será sempre horizontal;
- c) É admitido não haver atrito entre os corpos e a base.

O objetivo geral é a modelagem e a análise dos possíveis padrões de movimento do sistema constante da Figura 1.1, o qual depende das muitas possíveis combinações de parâmetros. Como alvos específicos têm-se:

- a) Apresentação de um mapa apropriado para determinar o próximo impacto com referência no estado anterior;
- b) Análise da existência do movimento periódico de padrão 1-2 simétrico, isto é, com dois impactos por período simetricamente distribuídos no tempo e resposta com a mesma frequência da excitação;
- c) Análise de estabilidade deste padrão de movimento.

1.3 Revisão Bibliográfica

Encontra-se na literatura farto material - livros, trabalhos de mestrado e doutorado, artigos científicos, etc. - sobre obtenção de equações de movimento para os mais variados tipos de sistemas dinâmicos. Em contrapartida, no que tange a sistemas com vibro-impacto, poucas são as obras encontradas, muito embora, vários trabalhos sobre o tema tenham surgido nas últimas duas décadas.

A seguir, alguns trabalhos e obras pertinentes a esta dissertação são comentados:

Uma abordagem genérica da equação diferencial do movimento, de sistemas de “ n ” graus de liberdade, da ortogonalidade dos autovetores e do desacoplamento das equações de movimento é exposta na obra de Ripper Neto [Ripper Neto-2007].

Ainda, no que compreende a ortogonalidade e o desacoplamento de equações, Adhikari [Adhikari-2006] propõe um modelo simples de identificar e expressar a matriz de amortecimento de sistemas reais pelo uso do modelo geral de amortecimento proporcional.

Inman [Inman-2008] apresenta no capítulo 9 de sua obra uma explanação detalhada de quatro diferentes formas de obter os autovalores e autovetores de sistemas dinâmicos cada qual adequada ao um propósito específico.

Problemas quadráticos de autovalores foram vastamente estudados por Tisseur e Meerbergen [Tisseur-2001]. Foram tratadas várias de suas aplicações, bem como suas propriedades matemáticas, e apresentadas técnicas para solução numérica.

Ainda no âmbito de problemas quadráticos de autovalores tem-se o trabalho de Scotti [Scotti-2007], no qual foram discutidos os métodos de resolução do problema de autovalores de primeira ordem, bem como seu uso em conjunto com técnicas de linearização para resolução do problema quadrático.

Já no âmbito da análise de colisões, Tipler e Mosca [Tipler-2004] escrevem em sua obra que durante uma colisão, dois corpos interagem fortemente por um período muito curto e que, durante este breve tempo, as forças externas atuantes sobre o sistema são muito menores que as forças de impacto. Logo, as forças de interação são as únicas forças importantes nesse período. Dizem, também, que a duração de um impacto é geralmente tão breve que os deslocamentos dos corpos durante este momento são desprezíveis. Por fim, reafirmam a definição de **impacto perfeitamente elástico**, aquele em que o montante da energia cinética antes e depois do impacto se mantém, e de **impacto inelástico** caso haja dissipação de energia. Este processo de colisão acaba por promover uma área de interesse voltada para o comportamento do corpo durante sucessivas colisões, onde porventura queira saber-se em que ponto ou instante um sistema, que está sob a ação de uma força excitatória externa, alcançará a estabilidade.

Hinrichs *et al.* [Hinrichs-1997] investigaram numérica e experimentalmente dois sistemas dinâmicos não suaves de um grau de liberdade com excitação harmônica externa: um sistema com vibro-impacto e um com atrito seco. Citaram que observaram boa concordância entre as curvas de fase, diagramas de bifurcação e mapas de Poincaré, com os resultados medidos e simulados.

Janin e Lamarque [Janin-2002] analisaram a estabilidade de um sistema com vibro-impacto de um grau de liberdade pelo uso do mapa de Poincaré e concluíram que a solução periódica é estável quando os multiplicadores de Floquet são reais.

Knudsen e Massih [Knudsen-2003] analisaram quatro tipos diferentes de sistemas

de um grau de liberdade amortecido e forçado, sujeitos a impactos, nos dois lados, contra batentes elásticos. Avaliaram numericamente a estabilidade de órbitas periódicas e da bifurcação local; e o impact work-rate, que é a taxa de energia dissipada nas superfícies de impacto. Essa propriedade, para eles, é dita como uma medida da energia disponível para danificar a superfície. Estenderam a simulação numérica ao experimento com uma viga em balanço apresentada por Moon e Shaw, neste encontraram algumas discrepâncias comparado aos resultados simulados, que segundo os autores é devida às considerações simplificação de aplicação da carga e de amortecimento de Rayleigh.

No trabalho de Yuan e Jian-Hua [Yuan-2007] são considerados um movimento simétrico e outro não simétrico, em um sistema com um grau de liberdade que impacta entre dois anteparos rígidos. A teoria das bifurcações do ponto fixo é aplicada a esse modelo e confirmam que o movimento periódico simétrico tem somente a bifurcação de pitchfork pela análise da simetria do mapa de Poincaré.

Aziz et. al. [Aziz-1998] estudaram os padrões de movimento de um sistema dinâmico composto por dois osciladores lineares, ambos com a amplitude limitada por batentes rígidos. Observaram diferentes padrões de impacto, uns estáveis e outros instáveis, por exemplo, uma massa colidindo apenas no batente esquerdo enquanto a outra colidia no batente direito ou ainda um corpo colidindo alternadamente nos batentes direito e esquerdo enquanto o segundo corpo não apresentava deslocamento suficiente para alcançar os batentes.

Xu et. al [Xu-2010] investigaram a existência e estabilidade do movimento com trajetória rasante periódica (grazing periodic trajectory), isto é, impacto com velocidade aproximadamente zero, em um sistema com vibro-impacto com dois graus de liberdade. Utilizaram o método de mapeamento de descontinuidade para obter o mapa de Poincaré no ponto próximo ao impacto para estabelecer uma condição de estabilidade, esta condição, foi afirmada pelos autores, estar em concordância com a simulação numérica.

Também Luo e Xie [Luo-2004] estudaram sistemas com vibro-impacto com dois graus de liberdade com folga simétrica. Avaliaram condições de existência e a estabilidade

do movimento de duplo impacto com período um, isto é, período de resposta igual ao de excitação, pelo uso do mapa de Poincaré, e a transição para o caos pelo uso de bifurcação de Pitchfork e bifurcação de Hopf em simulação numérica. Analisaram ainda a transição para o caos em movimentos de período um com quatro impactos por período. Os autores concluem dizendo que uma aplicação particular para o estudo realizado é na avaliação e previsão do desgaste de tubos de trocadores de calor de usinas nucleares, dado que, estes equipamentos são projetados com folga no suportes dos tubos para permitir movimentos devidos à dilatação térmica. No entanto, quando o fluido circula pelo interior destes tubos ocorre uma excitação mecânica que implica na sua vibração.

Em outro trabalho Luo *et al.* [Luo-2008] apresentam um mapa tridimensional na análise de um oscilador de dois graus de liberdade considerando o impacto perfeitamente plástico ou inelástico. A dinâmica não-linear do sistema de vibro-impacto é analisada usando o mapa de Poincaré. O foco do estudo é a atenção para os fenômenos de *rising* e *grazing*, que ocorrem nos problemas de aderência (*sticking*) em um sistema de dois graus de liberdade com impacto plástico.

Jiang *et al.* [Jiang-2004] desenvolveram um método numérico para a construção dos NNMs (non-linear normal modes) para sistemas autônomos linear por partes. Os NNMs são baseados no conceito de variedades invariantes (*invariant manifolds*) e são obtidos utilizando uma solução baseada em Galerkin. Para ilustrar a técnica, foi apresentado um estudo de caso de um sistema com dois graus de liberdade, não forçado, não amortecido e com barreira elástica de um lado. Os autores alegam que, foi investigada a existência, estabilidade e bifurcações do NNMs. Foram empregados os métodos do multiplicador característico e o mapa de Poincaré para explorar a estabilidade dos NNMs e algumas características da resposta.

Estudos similares aos de Jiang *et al.* [Jiang-2004], por meio do uso dos conceitos de mapas de Poincaré e de variedades invariantes, foram realizados por Chen e Shaw [Chen-1996]. Estes apresentaram um método numérico para a construção dos NNMs para sistemas autônomos lineares por partes.

Mikhlin *et al.* [Mikhlin-1998] utilizaram métodos analíticos do tipo NNMs para análise

de problemas de valores de contorno, o que, para eles, possibilitou o cálculo de vários ramos de solução de bifurcação periódica com diferentes características de impacto. Resultados numéricos foram obtidos pela integração da equação de movimento e, então, usados para construir os mapas de Poincaré. Para os autores, complicadas sequências de bifurcações dão razão para novos tipos de movimentos de impacto em um ou dois lados, instabilidades e respostas caóticas. A análise apresentada, para eles, pode ser usada para estudar bifurcações associadas ao problema inverso, isto é, para investigar degenerações na classe de sistemas de vibro-impacto que produzem uma órbita específica no espaço de configuração. O sistema analisado possuía dois graus de liberdade, era não amortecido, não forçado e com barreira nos dois lados de cada massa.

Um sistema consistindo de um oscilador linear, com uma massa relativamente grande, e um oscilador de vibro-impacto com uma massa relativamente pequena, que funciona como um absorvedor, é analisado usando o método NNMs por Mikhlin e Reshetnikova [Mikhlin-2006].

1.4 Organização da Dissertação

O primeiro capítulo situa e contextualiza o problema estudado;

O segundo capítulo apresenta a modelagem do sistema sob estudo e gráficos indicativos de diferentes padrões de movimento do sistema;

No capítulo três, introduz-se um mapa para a determinação do estado futuro com referência no estado anterior e expõe-se uma análise sobre a existência do padrão de movimento periódico 1-2 simétrico;

O quarto capítulo trata da análise de estabilidade do padrão de movimento periódico 1-2 simétrico. São apresentados, também, nesse capítulo, gráficos indicativos da estabilidade do movimento analisado;

O quinto capítulo apresenta uma síntese do trabalho e as conclusões.

2 MODELAGEM DO SISTEMA

2.1 Equação de Movimento

O sistema a ser modelado é o descrito na seção 1.1, repetido na Figura 2.1 abaixo. O equilíbrio dinâmico das forças atuantes sobre os corpos rígidos de massa m_p e m_a quando estes se deslocam, resulta no seguinte sistema de equações diferenciais:

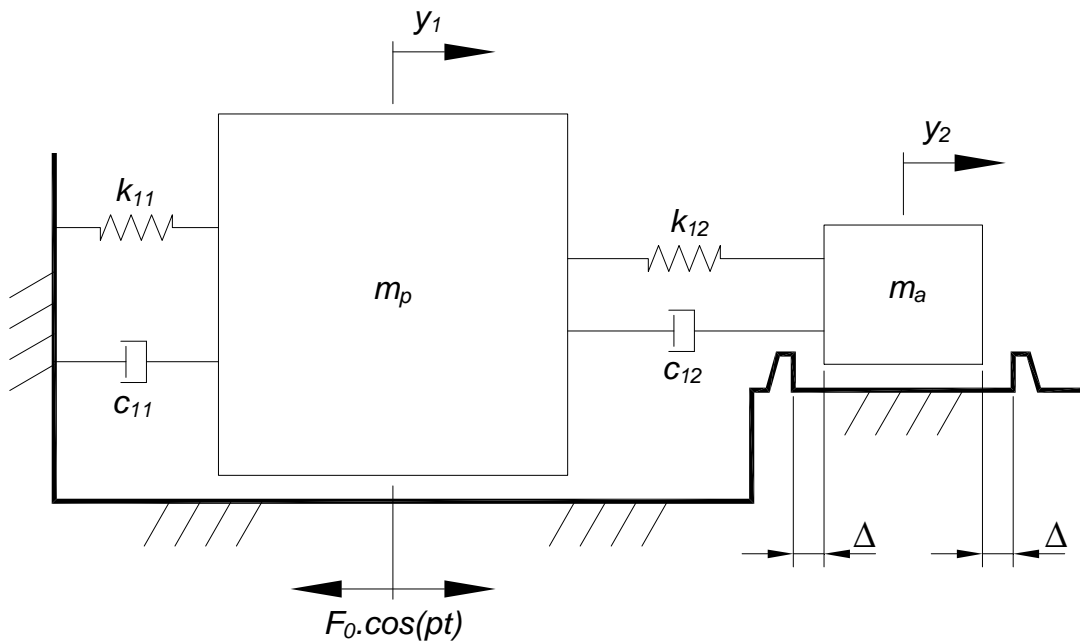


Figura 2-1: Sistema cujo os movimentos são objeto de estudo

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(pt) \quad (2.1)$$

Levando-se em consideração que este trabalho visa abordar exclusivamente sistemas visco-elásticos de amortecimento proporcional, isto é, sistemas nos quais tem-se amortecimento proporcional, nesse caso a matriz C é dada por

$$C = \alpha M + \beta K ,$$

onde α e β são constantes de proporcionalidade [Ripper Neto-2007 p.374] [Adhikari-

2006]. Então pode-se reescrever a Equação (2.1):

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha m_p + \beta(k_{11} + k_{12}) & -\beta k_{12} \\ -\beta k_{12} & \alpha m_a + \beta k_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(pt) \quad (2.2)$$

Para expressar a dinâmica do sistema numa forma adimensional definem-se, primeiro os seguintes parâmetros:

$$\omega_p^2 = \frac{k_{11}}{m_p}: \quad \text{frequência natural do subsistema principal;}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k_{12}}{m_a}: \quad \text{frequência natural do subsistema auxiliar;}$$

$$\mu = \frac{m_a}{m_p}: \quad \text{razão das massas dos subsistemas;}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_a}{\omega_p}: \quad \text{razão das frequências dos subsistemas.}$$

Assim, pode-se reescrever a Equação (2.2), conforme segue:

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & \mu m_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha m_p + \beta(1 + \mu\varepsilon^2)m_p\omega_p^2 & -\beta\mu m_p\varepsilon^2\omega_p^2 \\ -\beta\mu m_p\varepsilon^2\omega_p^2 & \alpha\mu m_p + \beta\mu m_p\varepsilon^2\omega_p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 + \mu\varepsilon^2)m_p\omega_p^2 & -\mu m_p\varepsilon^2\omega_p^2 \\ -\mu m_p\varepsilon^2\omega_p^2 & \mu m_p\varepsilon^2\omega_p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(pt) \quad (2.3)$$

Em segundo lugar, definem-se outros três parâmetros:

$$\tau = \omega_p t; \quad \dot{f} = \frac{df}{d\tau} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{p}{\omega_p},$$

logo,

$$d\tau = \omega_p dt; \quad d\tau^2 = \omega_p^2 dt^2; \quad y_i' = \omega_p \dot{y}_i \quad \text{e} \quad y_i'' = \omega_p^2 \ddot{y}_i.$$

A equação (2.3) passa a ser escrita na forma

$$\omega_p^2 \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & \mu m_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \omega_p \begin{bmatrix} \alpha m_p + \beta(1 + \mu \varepsilon^2) m_p \omega_p^2 & -\beta \mu m_p \varepsilon^2 \omega_p^2 \\ -\beta \mu m_p \varepsilon^2 \omega_p^2 & \alpha \mu m_p + \beta \mu m_p \varepsilon^2 \omega_p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 + \mu \varepsilon^2) m_p \omega_p^2 & -\mu m_p \varepsilon^2 \omega_p^2 \\ -\mu m_p \varepsilon^2 \omega_p^2 & \mu m_p \varepsilon^2 \omega_p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega \tau)$$

A esta altura, sempre que conveniente, opta-se por representar o sistema matricial da equação acima em sua forma compacta,

$$\omega_p^2 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{Y}}(\tau) + \omega_p \mathbf{C} \dot{\mathbf{Y}}(\tau) + \mathbf{K} \mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{F} \cos(\omega \tau). \quad (2.4)$$

Em terceiro lugar, define-se:

$$\mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{M}^{-1/2} \hat{\mathbf{Y}}(\tau),$$

Substituindo em (2.4) e pré-multiplicando o resultado por $\mathbf{M}^{-1/2}$, tem-se:

$$\omega_p^2 \mathbf{I} \ddot{\hat{\mathbf{Y}}}(\tau) + \omega_p \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \dot{\hat{\mathbf{Y}}}(\tau) + \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \hat{\mathbf{Y}}(\tau) = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F} \cos(\omega \tau) \quad (2.5)$$

E, por último, define-se o parâmetro:

$$\hat{\mathbf{Y}}(\tau) = \mathbf{Q} \mathbf{X}(\tau),$$

Substituindo na Equação (2.5) e dividindo por ω_p^2 , tem-se:

$$\mathbf{Q} \ddot{\mathbf{X}}(\tau) + \frac{1}{\omega_p} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \dot{\mathbf{X}}(\tau) + \frac{1}{\omega_p^2} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{X}(\tau) = \frac{1}{\omega_p^2} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F} \cos(\omega \tau) \quad (2.6)$$

Pode-se ainda pré-multiplicar a Equação (2.6) por \mathbf{Q}^{-1} . Daí vem que:

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{X}}(\tau) + \frac{1}{\omega_p} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \dot{\mathbf{X}}(\tau) + \frac{1}{\omega_p^2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{X}(\tau) = \frac{1}{\omega_p^2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F} \cos(\omega \tau). \quad (2.7)$$

É possível demonstrar que, ao definir-se

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{F_0}{\omega_p^2 \sqrt{m_p}} & 0 \\ 0 & \frac{F_0}{\omega_p^2 \sqrt{m_p}} \end{bmatrix},$$

a Equação (2.7) adquire a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega_p} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\omega_p} + \beta(1 + \mu\varepsilon^2)\omega_p & -\beta\omega_p\varepsilon^2\sqrt{\mu} \\ -\beta\omega_p\varepsilon^2\sqrt{\mu} & \frac{\alpha}{\omega_p} + \beta\omega_p\varepsilon^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 + \mu\varepsilon^2) & -\varepsilon^2\sqrt{\mu} \\ -\varepsilon^2\sqrt{\mu} & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega\tau) \quad (2.8)$$

A Equação (2.8) é, na verdade, um conjunto de duas equações acopladas representadas em termos das coordenadas físicas adimensionais $\{\mathbf{X}(\tau)\}$. Por conveniência, para se obter a resposta do sistema a excitação harmônica, aplica-se o método da análise modal clássica, obtendo-se duas equações desacopladas representadas em termos da matriz modal normalizada do sistema não amortecido, $\tilde{\psi}$, e das coordenadas modais, $\{\boldsymbol{\eta}(\tau)\}$ [Ripper Neto-2007 p.336].

O método acima exposto requer a seguinte transformação de coordenadas

$$\mathbf{X}(\tau) = \tilde{\psi} \boldsymbol{\eta}(\tau) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11} & \tilde{\phi}_{21} \\ \tilde{\phi}_{12} & \tilde{\phi}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

Fazendo a substituição na Equação (2.8) e pré-multiplicando o resultado pela transposta da matriz modal normalizada $\tilde{\psi}^T$, tem-se:

$$\tilde{\psi}^T \mathbf{I} \tilde{\psi} \boldsymbol{\eta}(\tau) + \tilde{\psi}^T \hat{\mathbf{C}} \tilde{\psi} \boldsymbol{\eta}(\tau) + \tilde{\psi}^T \hat{\mathbf{K}} \tilde{\psi} \boldsymbol{\eta}(\tau) = \tilde{\psi}^T \hat{\mathbf{F}} \cos(\omega\tau). \quad (2.9)$$

Lembrando que trata-se de um sistema visco-elástico de amortecimento proporcional, pode-se reescrever a Equação (2.9) na seguinte forma [Ripper Neto-2007 p.374]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11} & \tilde{\phi}_{12} \\ \tilde{\phi}_{21} & \tilde{\phi}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega\tau) \quad (2.10)$$

onde,

ω_j : autovalor normalizado do modo (j);

ζ_j : fator de amortecimento modal do modo (j);

$$\omega_j^2 = \{\tilde{\psi}_j\}^T [\hat{K}] \{\tilde{\psi}_j\}, \quad \zeta_j = \frac{\alpha + \beta \omega_j^2}{2\omega_j} \quad \text{e} \quad j = 1, 2$$

A Equação (2.10) é a forma adimensional desacoplada da Equação (2.2), escrita em função das coordenadas modais, e obviamente vale apenas enquanto o deslocamento de m_a em relação ao seu ponto de repouso for menor que a folga, isto é:

$$|y_2| = \left| \frac{(\eta_1 \tilde{\phi}_{12} + \eta_2 \tilde{\phi}_{22}) F_0}{m_p \omega_p^2 \sqrt{\mu}} \right| < \Delta,$$

ou nas coordenadas físicas adimensionais,

$$|x_2| = \left| \frac{m_p \omega_p^2 \sqrt{\mu}}{F_0} y_2 \right| = |\eta_1 \tilde{\phi}_{12} + \eta_2 \tilde{\phi}_{22}| < \delta,$$

onde $\delta = \Delta \frac{m_p \omega_p^2 \sqrt{\mu}}{F_0}$ corresponde à folga adimensional.

Para debelar a descontinuidade introduzida na resposta pelo impacto, deve-se proceder a atualização do estado nos instantes das colisões, isto é, quando $|\eta_1 \tilde{\phi}_{12} + \eta_2 \tilde{\phi}_{22}| = \delta$.

Quando m_a atinge um dos batentes, inicia-se um processo de colisão que deve ser adequadamente modelado. Neste trabalho, vamos aplicar o modelo de colisão convencional [Tipler-2004], no qual:

- a) O lapso temporal da colisão será considerado nulo, o que, na verdade, torna nosso sistema ideal, já que haverá conversão de energia (entre cinética e potencial), bem como dissipação de energia, num intervalo de tempo zero;

- b) A força do impacto entre o corpo e o batente, tem magnitude muito maior do que todas as demais forças atuantes sobre o sistema.
- c) A perda da energia durante a colisão será representada por um coeficiente de restituição, que é função das energias cinéticas no final e no início do processo de colisão;

Não obstante as hipóteses acima parecerem muito restritivas em relação aos sistemas reais, elas têm sido aplicadas por diversos autores na modelagem de sistema com impactos, como por exemplo Brach [Brach 1991 p.48].

Com a hipótese de lapso temporal nulo na colisão, a solução da Equação (2.10) pode ser expressa, no intervalo de validade, em função do estado do sistema ao término do impacto, isto é, em função da posição e da velocidade ao fim do processo de colisão. Considerando-se estas condições como as de início do movimento subsequente, o tempo será também contado a partir do instante final da colisão.

Denominando-se este tempo por $\hat{\tau}$, a respectiva posição por $\hat{\eta}_j$, a velocidade por $\hat{\dot{\eta}}_j$ e desde que o sistema seja sub-amortecido, isto é, $\zeta < 1$, tem-se a seguinte solução para a Equação (2.10) [Ripper Neto-2007 p.127]:

$$\eta_j(\tau) = a_j e^{\lambda_{aj}(\tau-\hat{\tau})} + b_j e^{\lambda_{bj}(\tau-\hat{\tau})} + A_j \cos \varphi \cdot \cos(\omega\tau) + A_j \sin \varphi \cdot \sin(\omega\tau), \quad (2.11)$$

$$\dot{\eta}_j(\tau) = a_j \lambda_{aj} e^{\lambda_{aj}(\tau-\hat{\tau})} + b_j \lambda_{bj} e^{\lambda_{bj}(\tau-\hat{\tau})} - A_j \omega \cos \varphi \cdot \sin(\omega\tau) + A_j \omega \sin \varphi \cdot \cos(\omega\tau),$$

$$\ddot{\eta}_j(\tau) = a_j \lambda_{aj}^2 e^{\lambda_{aj}(\tau-\hat{\tau})} + b_j \lambda_{bj}^2 e^{\lambda_{bj}(\tau-\hat{\tau})} - A_j \omega^2 \cos \varphi \cdot \cos(\omega\tau) - A_j \omega^2 \sin \varphi \cdot \sin(\omega\tau),$$

onde,

$$j = 1, 2 \quad \text{e} \quad i = \sqrt{-1};$$

$$\lambda_{aj} = \left(-\zeta_j - i \cdot \sqrt{1 - \zeta_j^2} \right) \omega_j \quad \text{e} \quad \lambda_{bj} = \left(-\zeta_j + i \cdot \sqrt{1 - \zeta_j^2} \right) \omega_j;$$

$$A_j \sin \varphi = \tilde{\phi}_{j1} \frac{(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_j \omega_j \omega)^2} \quad \text{e} \quad A_j \cos \varphi = -\tilde{\phi}_{j1} \frac{(2\zeta_j \omega_j \omega)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_j \omega_j \omega)^2};$$

$$a_j = \frac{\lambda_{b_j}(\hat{\eta}_j - A_j \cos \varphi \cdot \cos \omega \hat{\tau} - A_j \sin \varphi \cdot \sin \omega \hat{\tau}) - (\hat{\eta}_j + A_j \omega \cos \varphi \cdot \sin \omega \hat{\tau} - A_j \omega \sin \varphi \cdot \cos \omega \hat{\tau})}{\lambda_{b_j} - \lambda_{a_j}},$$

$$b_j = \frac{-\lambda_{a_j}(\hat{\eta}_j - A_j \cos \varphi \cdot \cos \omega \hat{\tau} - A_j \sin \varphi \cdot \sin \omega \hat{\tau}) + (\hat{\eta}_j + A_j \omega \cos \varphi \cdot \sin \omega \hat{\tau} - A_j \omega \sin \varphi \cdot \cos \omega \hat{\tau})}{\lambda_{b_j} - \lambda_{a_j}}.$$

Passando para coordenadas físicas adimensionais, tem-se:

a) Equação da posição

$$x_k(\tau) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\phi}_{jk} \eta_j(\tau),$$

$$x_k(\tau) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\phi}_{jk} \left(a_j e^{\lambda_{a_j}(\tau-\hat{\tau})} + b_j e^{\lambda_{b_j}(\tau-\hat{\tau})} + A_j \cos \varphi \cdot \cos(\omega \tau) + A_j \sin \varphi \cdot \sin(\omega \tau) \right),$$
(2.12)

b) Equação da velocidade

$$v_k(\tau) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\phi}_{jk} \dot{\eta}_j(\tau),$$

$$v_k(\tau) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\phi}_{jk} \left(a_j \lambda_{a_j} e^{\lambda_{a_j}(\tau-\hat{\tau})} + b_j \lambda_{b_j} e^{\lambda_{b_j}(\tau-\hat{\tau})} - A_j \omega \cos \varphi \cdot \sin(\omega \tau) + A_j \omega \sin \varphi \cdot \cos(\omega \tau) \right),$$

onde, $k = 1, 2$.

2.2 Apresentação Gráfica de Alguns Padrões de Movimento

A relação entre estados do sistema no instante de colisão, para resposta periódica com ' n ' impactos por período, pode ser escrita na forma:

$$x_{i+n} = x_i, \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}, \quad i > i_0$$

onde i_0 representa o número de impactos a partir do qual o estado estacionário é alcançado.

A topologia do movimento do estado estacionário pode ser caracterizada por um par $m - n$, $(m, n) \in \mathbb{N}$, [De Nadai-2010], no qual

- m indica a razão entre o período da resposta do subsistema auxiliar e o período da excitação, que será denominada de ordem do período da resposta; e
 - n representa o número de impactos que ocorrem dentro do período da resposta.
- Assim, por exemplo, um movimento de topologia 1-2 indica que o período da resposta é o mesmo da excitação e nele ocorrem dois impactos a cada período do movimento.

A depender dos parâmetros de entrada, o sistema pode apresentar as mais variadas formas de movimento, desde comportamento totalmente caótico – Figura 2.2 e Figura 2.3, padrão razoavelmente definido, porém não periódico – Figura 2.4, movimento com padrão definido quase periódico – Figura 2.5, ou ainda padrão definido e periódico – Figura 2.6.

Para efeito de clareza de apresentação, define-se, linha tracejada para a curva do movimento da massa principal e linha cheia para a curva da massa auxiliar para todos os gráficos a seguir. Esclarece-se também, que por algumas vezes, optar-se-á por plotar apenas o movimento pertinente a massa auxiliar sempre no intuito de proporcionar facilidade de compreensão ao leitor.

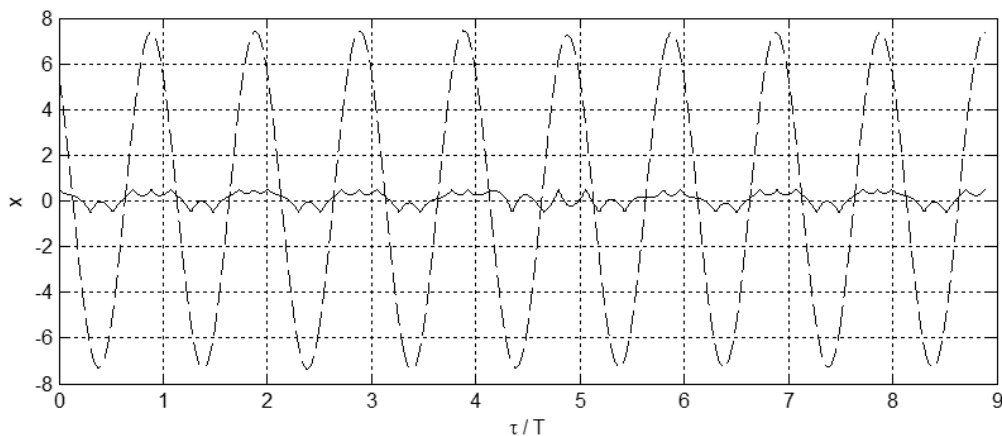


Figura 2-2 - Resposta caótica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 1,0$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

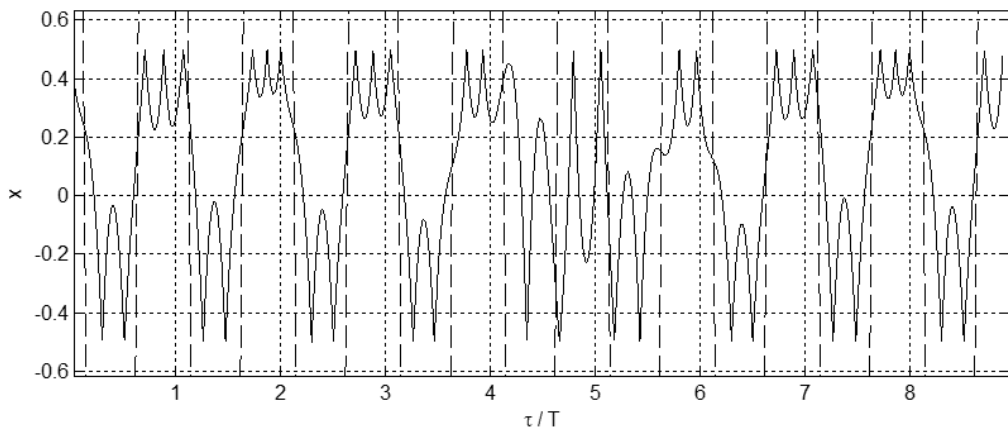


Figura 2-3 - Resposta caótica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 1,0$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

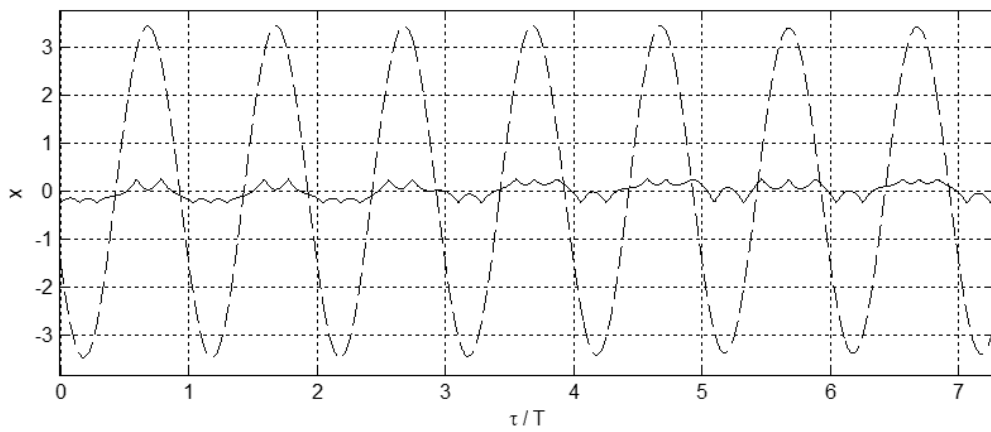


Figura 2-4 – Topologia 1-5 não periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,9$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

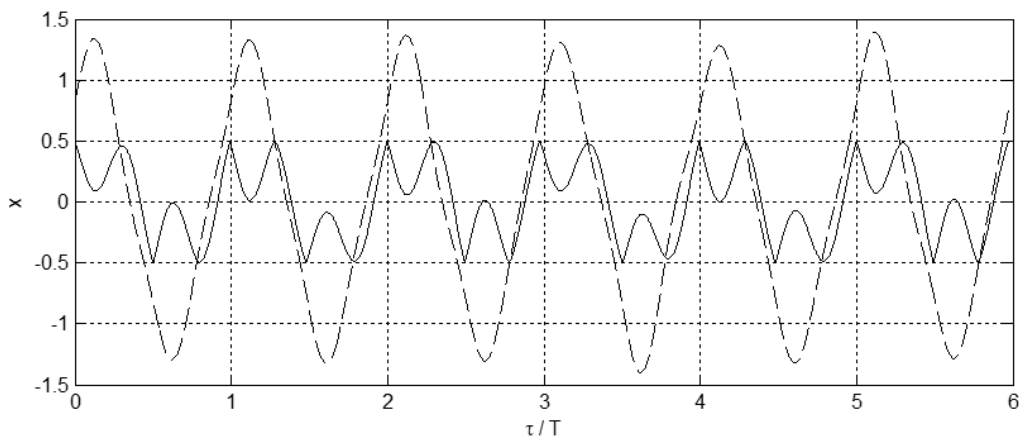


Figura 2-5 - Topologia 1-4 quase periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,45$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

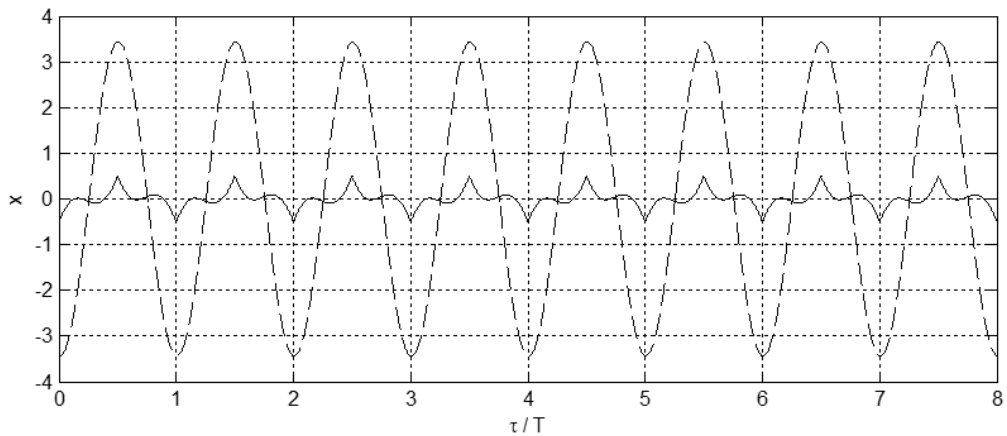


Figura 2-6 - Topologia 1-2 periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,9$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Ainda quanto à variação de parâmetros, o sistema pode mostrar-se um tanto quanto curioso. Um exemplo interessante é a mudança de topologia do movimento em função de uma pequena variação da frequência. Na comparação da Figura 2.6 anterior com a Figura 2.7 a seguir, observa-se que o movimento passa de topologia 1-2 para topologia 1-4 quando a frequência de excitação é aumentada de $\omega = 0,9$ para $\omega = 1,1$.

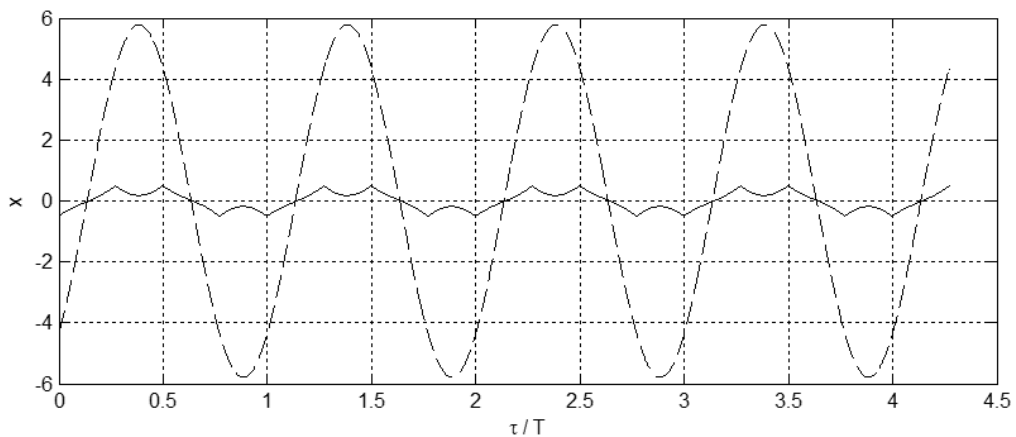


Figura 2-7 - Topologia 1-4 periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 1,1$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

Uma observação importante é que, quanto menor a frequência de excitação, a tendência é de se ter topologias com cada vez mais impactos por período. Isto ocorre devido a natureza do sistema forçar a massa auxiliar a acompanhar a massa principal, dado que, para baixas frequências, a massa principal leva mais tempo para completar um ciclo. Chega então um momento em que a massa auxiliar não consegue mais acompanhar a principal devido à restrição do batente. Então, ela fica

ciclicamente impactando no batente até o retorno da massa principal. Este comportamento é visto claramente quando se compara a Figura 2.8 com a Figura 2.9.

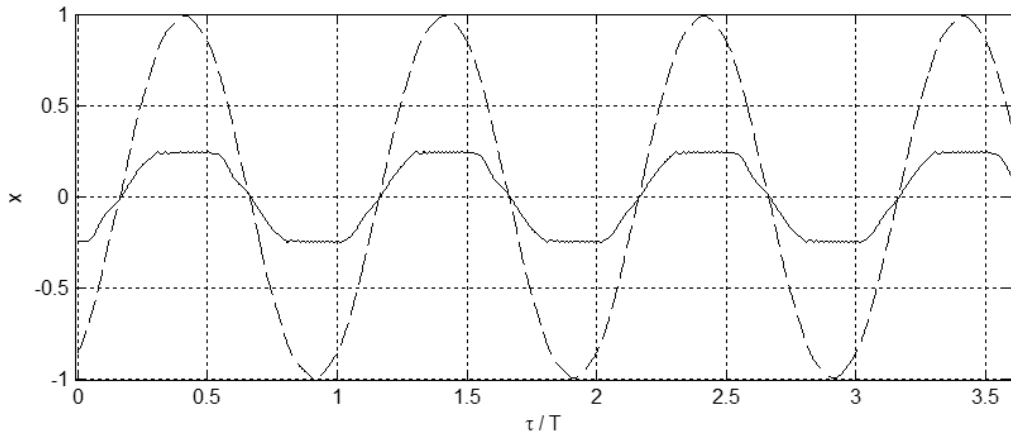


Figura 2-8 - Topologia 1-24 quase periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,1$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$, $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

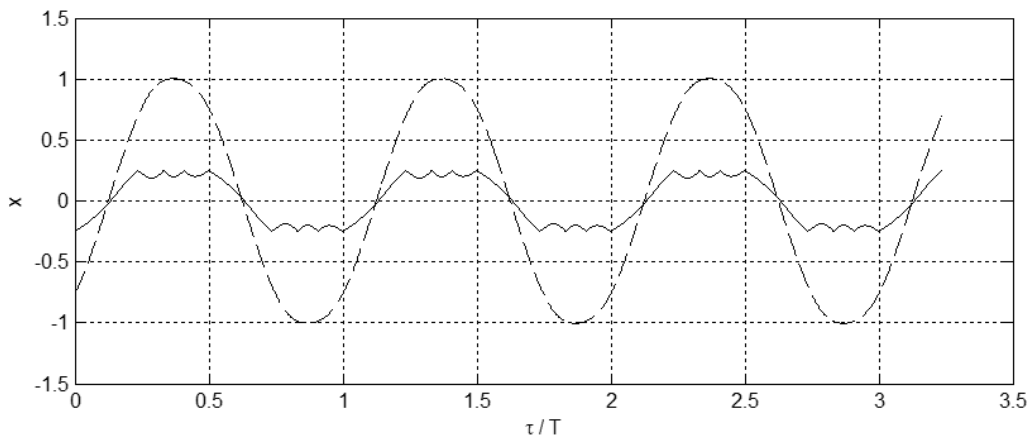


Figura 2-9 - Topologia 1-8 periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,25$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$, $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

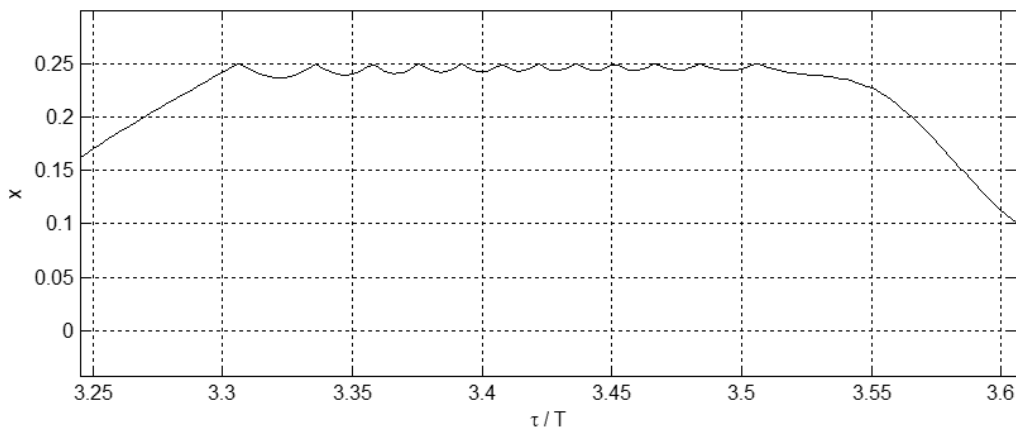


Figura 2-10 – Ampliação da crista da onda mostrada na Figura 2-8

A Figura 2.10 acima mostra, ampliada, a crista da onda do deslocamento da massa auxiliar na região de impactos cíclicos para o sistema mostrado na Figura 2.8.

Na indústria em geral, muitas vezes alguns elementos mecânicos tem seu deslocamento limitado por batentes rígidos. Como exemplo, o caso citado por Luo e Xie [Luo-2004], que trata de tubos de trocadores de calor de usinas nucleares, projetados com folga nos suportes para permitir movimentos devidos a dilatação térmica. No entanto, quando o fluido circula pelo interior destes tubos ocorre uma excitação mecânica que implica em vibração e, em consequência, impactos dos mesmos com os suportes.

Um padrão de movimento com muitos impactos por ciclo pode ser indesejado, como é, por exemplo, o caso dos tubos acima citados. Felizmente, os sistemas em geral são bastante sensíveis à variação de seus parâmetros. Assim sendo, o movimento dado na Figura 2.9 pode facilmente ser alterado para um padrão mais adequado, apenas atuando sobre a relação de frequência naturais dos subsistemas. A alteração da relação de frequências de $\varepsilon = 1,0$ para $\varepsilon = 0,2$ implica em levar o sistema de topologia 1-8 para a topologia 1-2. Este resultado é mostrado na Figura 2.11 a seguir.

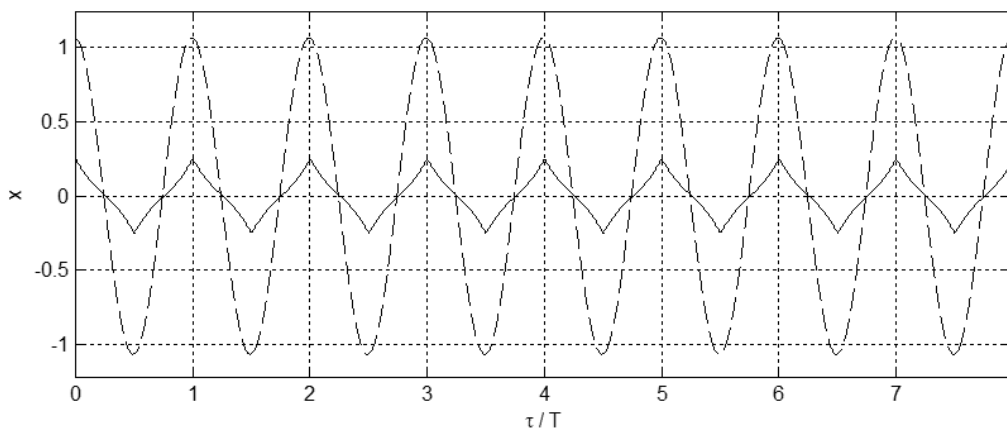


Figura 2-11 - Topologia 1-2 periódica, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,2$; $\omega = 0,25$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$, $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

3 MAPA DE ESTADO E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

3.1 Mapa Envolvendo os Estados nos Instantes de Colisão

Embora o modelo estudado neste trabalho tenha comportamento não-linear devido aos impactos, nos intervalos entre colisões ele é perfeitamente linear conforme pode ser percebido pela Equação (2.12).

Apresenta-se a seguir uma metodologia para impetrar uma escrita mais condensada da solução e para obter mapas que relacionam os estados do sistema nos instantes de colisão. Abordagem similar foi feita por De Nadai [De Nadai-2010] para sistemas de um grau de liberdade. No entanto, neste trabalho, equações para sistemas de 2 graus de liberdade são requeridas.

Supondo-se que seja conhecido o estado do sistema no instante τ_i . Então, enquanto não ocorrer colisão da massa auxiliar com um dos batentes, o estado em um instante futuro poderá ser determinado a partir da Equação (2.12), conforme segue:

$$x_k(\tau) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\phi}_{jk} \left(a_j e^{\lambda_{a_j}(\tau-\tau_i)} + b_j e^{\lambda_{b_j}(\tau-\tau_i)} + A_{C_j} \cos(\omega\tau) + A_{S_j} \sin(\omega\tau) \right), \quad (3.1)$$

$$v_k(\tau) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\phi}_{jk} \left(a_j \lambda_{a_j} e^{\lambda_{a_j}(\tau-\tau_i)} + b_j \lambda_{b_j} e^{\lambda_{b_j}(\tau-\tau_i)} - A_{C_j} \omega \sin(\omega\tau) + A_{S_j} \omega \cos(\omega\tau) \right),$$

onde,

$$k = 1, 2 \quad \text{e} \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\lambda_{a_j} = \left(-\zeta_j - i \cdot \sqrt{1 - \zeta_j^2} \right) \omega_j \quad \text{e} \quad \lambda_{b_j} = \left(-\zeta_j + i \cdot \sqrt{1 - \zeta_j^2} \right) \omega_j,$$

$$A_{S_j} = A_j \sin \varphi = \tilde{\phi}_{j1} \frac{(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_j \omega_j \omega)^2},$$

$$A_{C_j} = A_j \cos \varphi = -\tilde{\phi}_{j1} \frac{(2\zeta_j \omega_j \omega)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_j \omega_j \omega)^2},$$

$$a_j = \frac{\lambda_{b_j} (\eta_{j_i} - A_{C_j} \cos \omega \tau_i - A_{S_j} \sin \omega \tau_i) - (\dot{\eta}_{j_i} + A_{C_j} \omega \sin \omega \tau_i - A_{S_j} \omega \cos \omega \tau_i)}{\lambda_{b_j} - \lambda_{a_j}},$$

$$b_j = \frac{-\lambda_{a_j} (\eta_{j_i} - A_{C_j} \cos \omega \tau_i - A_{S_j} \sin \omega \tau_i) + (\dot{\eta}_{j_i} + A_{C_j} \omega \sin \omega \tau_i - A_{S_j} \omega \cos \omega \tau_i)}{\lambda_{b_j} - \lambda_{a_j}},$$

$$\eta_{1i} = \frac{x_{1i} \tilde{\phi}_{22} - x_{2i} \tilde{\phi}_{21}}{\tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22} - \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21}}; \quad \eta_{2i} = -\frac{x_{1i} \tilde{\phi}_{12} - x_{2i} \tilde{\phi}_{11}}{\tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22} - \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21}},$$

$$\dot{\eta}_{1i} = \frac{v_{1i} \tilde{\phi}_{22} - v_{2i} \tilde{\phi}_{21}}{\tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22} - \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21}}; \quad \dot{\eta}_{2i} = -\frac{v_{1i} \tilde{\phi}_{12} - v_{2i} \tilde{\phi}_{11}}{\tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22} - \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21}},$$

onde o índice “i” indica que o valor da variável é tomado no instante τ_i .

Seja o estado do sistema no instante τ definido pelo vetor $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ v_1(\tau) \\ v_2(\tau) \end{bmatrix}$. Então pode-

se reescrever as equações (3.1) conforme segue:

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \mathbf{X}(\tau_i) + \tilde{\mathbf{B}}(\tau, \tau_i) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega \tau_i) \\ \sin(\omega \tau_i) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega \tau) \\ \sin(\omega \tau) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde,

$$\mathbf{A}(\tau, \tau_i) = K \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.2)\text{-a}$$

Sendo,

$$K = \frac{1}{(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})(\tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22} - \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2})},$$

$$a_{11} = (\lambda_{a_1} e^{\lambda_{b_1}(\tau - \tau_i)} - \lambda_{b_1} e^{\lambda_{a_1}(\tau - \tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22} \\ - (\lambda_{a_2} e^{\lambda_{b_2}(\tau - \tau_i)} - \lambda_{b_2} e^{\lambda_{a_2}(\tau - \tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1}) \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{12} = [-(\lambda_{a_1} e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} - \lambda_{b_1} e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \\ + (\lambda_{a_2} e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} - \lambda_{b_2} e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})] \tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{13} = (-e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} + e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22}, \\ + (e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1}) \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{14} = [(e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) - (e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})] \tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{21} = [(\lambda_{a_1} e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} - \lambda_{b_1} e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \\ - (\lambda_{a_2} e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} - \lambda_{b_2} e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})] \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{22} = -(\lambda_{a_1} e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} - \lambda_{b_1} e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21} \\ + (\lambda_{a_2} e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} - \lambda_{b_2} e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1}) \tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22},$$

$$a_{23} = [-(e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) + (e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})] \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{22},$$

$$a_{24} = (e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21} \\ + (-e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} + e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1}) \tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22},$$

$$a_{31} = [\lambda_{a_1} \lambda_{b_1} (e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})](\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \tilde{\phi}_{11} \tilde{\phi}_{22} \\ + [\lambda_{a_2} \lambda_{b_2} (-e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} + e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})](\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1}) \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{32} = [(\lambda_{a_1} \lambda_{b_1} (-e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} + e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)}))(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \\ + (-\lambda_{a_2} \lambda_{b_2} (e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)}))(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})] \tilde{\phi}_{12} \tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{33} = (-\lambda_{b_1} e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} + \lambda_{a_1} e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2})\tilde{\phi}_{11}\tilde{\phi}_{22} \\ - (-\lambda_{b_2} e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} + \lambda_{a_2} e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})\tilde{\phi}_{12}\tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{34} = [-(-\lambda_{b_1} e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} + \lambda_{a_1} e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \\ + (-\lambda_{b_2} e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} + \lambda_{a_2} e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})] \tilde{\phi}_{11}\tilde{\phi}_{21},$$

$$a_{41} = [(\lambda_{a_1}\lambda_{b_1}(e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)}))(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \\ + (-\lambda_{a_2}\lambda_{b_2}(-e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} + e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)}))(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})] \tilde{\phi}_{12}\tilde{\phi}_{22},$$

$$a_{42} = [\lambda_{a_1}\lambda_{b_1}(-e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} + e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})](\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2})\tilde{\phi}_{12}\tilde{\phi}_{21} \\ + [\lambda_{a_2}\lambda_{b_2}(e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} - e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})](\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})\tilde{\phi}_{11}\tilde{\phi}_{22},$$

$$a_{43} = [(-\lambda_{b_1} e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} + \lambda_{a_1} e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2}) \\ - (-\lambda_{b_2} e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} + \lambda_{a_2} e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})] \tilde{\phi}_{12}\tilde{\phi}_{22},$$

$$a_{44} = -(-\lambda_{b_1} e^{\lambda_{b_1}(\tau-\tau_i)} + \lambda_{a_1} e^{\lambda_{a_1}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_2} - \lambda_{b_2})\tilde{\phi}_{12}\tilde{\phi}_{21} \\ + (-\lambda_{b_2} e^{\lambda_{b_2}(\tau-\tau_i)} + \lambda_{a_2} e^{\lambda_{a_2}(\tau-\tau_i)})(\lambda_{a_1} - \lambda_{b_1})\tilde{\phi}_{11}\tilde{\phi}_{22},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11}A_{C_1} + \tilde{\phi}_{21}A_{C_2} & \tilde{\phi}_{11}A_{S_1} + \tilde{\phi}_{21}A_{S_2} \\ \tilde{\phi}_{12}A_{C_1} + \tilde{\phi}_{22}A_{C_2} & \tilde{\phi}_{12}A_{S_1} + \tilde{\phi}_{22}A_{S_2} \\ (\tilde{\phi}_{11}A_{S_1} + \tilde{\phi}_{21}A_{S_2})\omega & -(\tilde{\phi}_{11}A_{C_1} + \tilde{\phi}_{21}A_{C_2})\omega \\ (\tilde{\phi}_{12}A_{S_1} + \tilde{\phi}_{22}A_{S_2})\omega & -(\tilde{\phi}_{12}A_{C_1} + \tilde{\phi}_{22}A_{C_2})\omega \end{bmatrix}, \quad (3.2)\text{-b}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\tau, \tau_i) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} \\ \tilde{b}_{41} & \tilde{b}_{42} \end{bmatrix}.$$

A exemplo do estudado por De Nadai [De Nadai-2010], observou-se que, também para este sistema, $\tilde{\mathbf{B}}(\tau, \tau_i) = -\mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B}$. Contudo, esta demonstração bem como os termos da matriz \mathbf{B} não estão exibidos neste trabalho.

Assim sendo, a Equação (3.2) passa a:

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_i)\mathbf{X}(\tau_i) - \mathbf{A}(\tau, \tau_i)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) \\ \text{sen}(\omega\tau) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Uma característica importante do sistema é o fato de $\mathbf{A}(\tau_i, \tau_i) = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Esta propriedade é facilmente observada pela substituição de $\tau = \tau_i$ na matriz \mathbf{A} , e será muito útil nas deduções a seguir.

Então, considerando-se o instante $\tau = \tau_i$ na Equação (3.3), a solução trivial é obtida, isto é, $\mathbf{X}(\tau_i) = \mathbf{X}(\tau_i)$, visto que $\mathbf{A}(\tau_i, \tau_i) = \mathbf{I}$.

Da Equação (3.3), observa-se que o estado futuro do sistema $\mathbf{X}(\tau)$ é obtido pela multiplicação de uma matriz \mathbf{A} por um vetor de um estado conhecido $\mathbf{X}(\tau_i)$, menos o produto matrizes $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$ vezes a excitação no tempo do estado conhecido (τ_i), somado a multiplicação da matriz \mathbf{B} pela excitação no instante futuro desejado (τ). No entanto, a Equação (3.3) é adequada exclusivamente para análise linear, isto é, sua funcionalidade é restrita a determinar o estado do sistema entre impactos. Portanto, precisa-se determinar um estratagema para levar de um instante infinitesimalmente anterior (τ^-) à colisão para o instante infinitesimalmente posterior (τ^+).

A seguir, apresenta-se uma matriz de transferência do estado do sistema imediatamente antes do impacto, para o estado imediatamente após o impacto. A exemplo do considerado por De Nadai [De Nadai-2010], admite-se neste trabalho o modelo de colisão perfeitamente elástico sem deformação do corpo e do batente, com coeficiente de restituição e . Em coordenadas adimensionais:

$$\begin{bmatrix} x_1(\tau^+) \\ x_2(\tau^+) \\ v_1(\tau^+) \\ v_2(\tau^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(\tau^-) \\ x_2(\tau^-) \\ v_1(\tau^-) \\ v_2(\tau^-) \end{bmatrix},$$

Ou na forma compacta,

$$\mathbf{X}(\tau^+) = \mathbf{J}\mathbf{X}(\tau^-). \quad (3.4)$$

Um mapa entre dois impactos sucessivos pode ser obtido por intermédio das equações (3.3) e (3.4). Com este intuito, faz-se as seguintes considerações:

a) Supõe-se que seja conhecido o estado do sistema no instante τ_0 , isto é:

$\mathbf{X}(\tau_0) = [x_{1_0} \ x_{2_0} \ v_{1_0} \ v_{2_0}]^T$. Então, até a primeira colisão:

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_0)\mathbf{X}(\tau_0) - \mathbf{A}(\tau, \tau_0)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_0) \\ \text{sen}(\omega\tau_0) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) \\ \text{sen}(\omega\tau) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Seja τ_1 o instante da primeira colisão. Daí, até a segunda colisão ter-se-á:

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_1)\mathbf{J}\mathbf{X}(\tau_1^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_1)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_1) \\ \text{sen}(\omega\tau_1) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) \\ \text{sen}(\omega\tau) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

A esta altura pode-se demonstrar que, de fato, $\mathbf{X}(\tau_1^+) = \mathbf{J}\mathbf{X}(\tau_1^-)$, conforme sugerido pela Equação (3.4). Para tanto, substitui-se o valor $\mathbf{X}(\tau_1^-)$ obtido da Equação (3.5) na Equação (3.6), e faz-se $\tau = \tau_1^+$ que é o instante imediatamente após o impacto, então:

$$\mathbf{X}(\tau_1^+) = \mathbf{A}(\tau_1^+, \tau_1)\mathbf{J}\mathbf{X}(\tau_1^-) - \mathbf{A}(\tau_1^+, \tau_1)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_1) \\ \text{sen}(\omega\tau_1) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_1^+) \\ \text{sen}(\omega\tau_1^+) \end{bmatrix}.$$

Dado que o limite de $\mathbf{A}(\tau_1^+, \tau_1)|_{\tau_1^+ \rightarrow \tau_1} = \mathbf{I}$, tem-se $\mathbf{X}(\tau_1^+) = \mathbf{J}\mathbf{X}(\tau_1^-)$ conforme esperava-se.

b) Logo, seja τ_i o instante da i -ésima colisão. Daí até a $(i+1)$ -ésima colisão ter-se-á:

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_i)\mathbf{J}\mathbf{X}(\tau_i^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_i)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) \\ \text{sen}(\omega\tau) \end{bmatrix}.$$

A partir do apresentado acima, pode-se escrever a Equação para o instante infinitesimalmente antes da $(i+1)$ -ésima colisão, isto é, em τ_{i+1}^- . Assim segue:

$$\mathbf{X}(\tau_{i+1}^-) = \mathbf{A}(\tau_{i+1}^-, \tau_i)\mathbf{J}\mathbf{X}(\tau_i^-) - \mathbf{A}(\tau_{i+1}^-, \tau_i)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_{i+1}^-) \\ \text{sen}(\omega\tau_{i+1}^-) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Multiplicando ambos os lados por \mathbf{J} , e tendo em conta que a matriz \mathbf{J} é não nula, tem-se:

$$\mathbf{J}\mathbf{X}(\tau_{i+1}^-) = \mathbf{J}\mathbf{A}(\tau_{i+1}^-, \tau_i)\mathbf{J}\mathbf{X}(\tau_i^-) - \mathbf{J}\mathbf{A}(\tau_{i+1}^-, \tau_i)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} + \mathbf{J}\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_{i+1}^-) \\ \text{sen}(\omega\tau_{i+1}^-) \end{bmatrix}.$$

Denominando $\mathbf{X}_i = [x_{1i} \ x_{2i} \ v_{1i} \ v_{2i}]^T$ o estado do sistema no instante final da i -ésima colisão e $\mathbf{X}_{i+1} = [x_{1i+1} \ x_{2i+1} \ v_{1i+1} \ v_{2i+1}]^T$ o estado ao término da colisão seguinte, tem-se que:

$J\mathbf{X}(\tau_i^-) = \mathbf{X}_i$ e $J\mathbf{X}(\tau_{i+1}^-) = \mathbf{X}_{i+1}$. Então a Equação anterior passa a:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{J}\mathbf{A}(\tau_{i+1}^-, \tau_i^-)\mathbf{X}_i - \mathbf{J}\mathbf{A}(\tau_{i+1}^-, \tau_i^-)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} + \mathbf{J}\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_{i+1}^-) \\ \text{sen}(\omega\tau_{i+1}^-) \end{bmatrix}.$$

Definindo-se $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$ e as matrizes $[\mathbf{A}(\Delta\tau)]$ e $[\mathbf{B}]$ conforme apresentadas nas equações (3.2)-a e (3.2)-b respectivamente, tem-se:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{J} \left(\mathbf{A}(\Delta\tau)\mathbf{X}_i - \mathbf{A}(\Delta\tau)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_{i+1}) \\ \text{sen}(\omega\tau_{i+1}) \end{bmatrix} \right). \quad (3.8)$$

Pode-se então dizer que, conhecido o estado do sistema \mathbf{X}_i no momento de um impacto qualquer, o estado no próximo impacto, \mathbf{X}_{i+1} , é dado pela multiplicação de uma matriz \mathbf{A} função do tempo entre impactos menos o produto matricial de $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$ vezes a excitação no instante da i -ésima colisão, mais o produto da matriz \mathbf{B} pela excitação no instante do impacto seguinte ($i + 1$), sendo ainda este montante multiplicado pela matriz de transferência \mathbf{J} .

3.2 Região de Existência de Impactos no Movimento Linear

Para ocorrência de impactos é requerido que a amplitude do movimento do sistema linear não restrito exceda a folga. Da Equação (2.10) percebe-se que a amplitude máxima para o regime permanente, no intervalo linear, equivale ao valor de A_j correspondente a cada modo de vibração, logo, em coordenadas modais tem-se:

$$A_j = \frac{\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11} \\ \sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_1\omega_1\omega)^2} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{21} \\ \sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_2\omega_2\omega)^2} \end{bmatrix}},$$

respeitando a relação $A_k = \tilde{\psi}A_j$ para coordenadas físicas adimensionais, tem-se a amplitude máxima irrestrita da massa auxiliar é dada por:

$$A_2 = \frac{\tilde{\phi}_{11}\tilde{\phi}_{12}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_1\omega_1\omega)^2}} + \frac{\tilde{\phi}_{21}\tilde{\phi}_{22}}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_2\omega_2\omega)^2}},$$

Para facilitar o entendimento, mostra-se na Figura 3-1 a seguir, como exemplo, a curva limite para ocorrência de impactos para $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$, $\omega_1 = 0.8543$, $\omega_2 = 1.1705$ e $\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} 0.6495 & 0.7603 \\ 0.7603 & -0.6495 \end{bmatrix}$. Observam-se dois máximos locais, que ocorrem quando a frequência de excitação se iguala às frequências naturais do sistema.

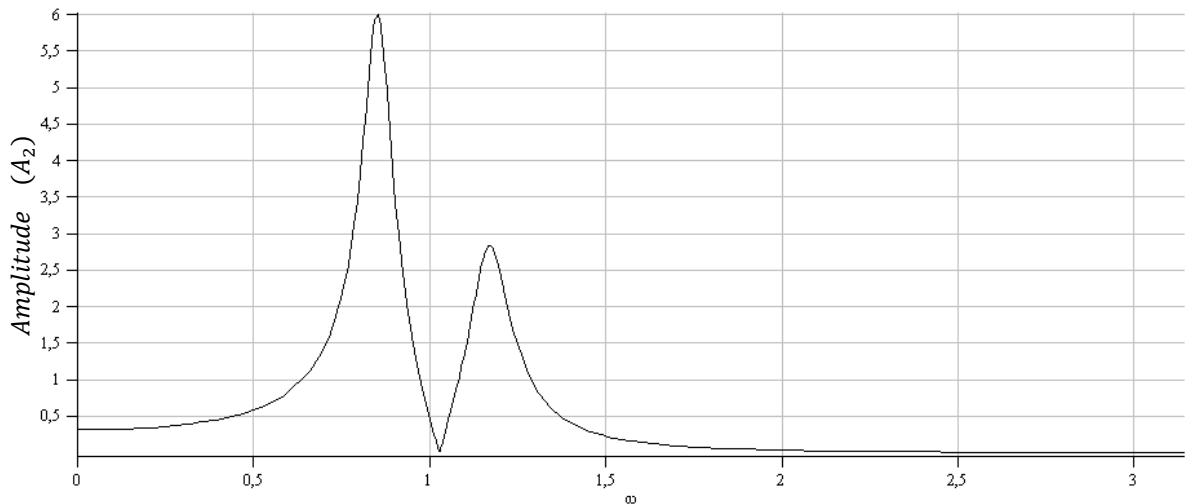


Figura 3-1 - Amplitude máxima do sistema linear para um caso particular

3.3 Condições de Existência de Movimentos Periódicos 1-2 Simétricos

Mencionou-se anteriormente que poucas são as obras encontradas tratando de sistemas com vibro-impacto. Em compensação, vários trabalhos sobre o tema surgiram nas últimas duas décadas. Diversos autores estudaram a estabilidade de movimentos periódicos neste sistemas [Knudsen-2003],[Luo-2008],[Mikhlin-1998],[Shaw-1983],[Luo-2004] e [Janin-2002], seja por mapas de Poincaré [Yuan-2007],[Luo-2008],[Hinrichs-1997] e [Knudsen-2003], por multiplicador característico [Jiang-2004], multiplicadores de Floquet [Janin-2002] e por variedades invariantes [Chen-1996] e [Jiang-2004]. As condições de existência, no entanto, não foram objeto de grande atenção, tendo sido encontrado apenas um artigo [Luo-2008] e duas dissertações sobre o tema [Barbosa-2009] e [De Nadai-2010].

Um movimento simétrico no tempo, de topologia 1-2, é definido pela relação abaixo:

$$\tau_{i+2} - \tau_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i = \frac{T}{2}.$$

Dado que o movimento é periódico, sabe-se *a priori* que as relações de estado e fase necessárias para ocorrência deste padrão de movimento são:

$$\mathbf{X}_{i+2} = \mathbf{X}_i \Rightarrow \begin{cases} x_{j_{i+2}} = x_{j_i} \\ v_{j_{i+2}} = v_{j_i} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \tau_{i+1} = \tau_i + \frac{T}{2} \\ \tau_{i+2} = \tau_i + T \end{cases}, \quad (3.9)$$

onde $j = 1, 2$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Tomando-se a Equação (3.8) juntamente com as Equações (3.9) obtém-se:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{J} \left(\mathbf{A} \left(\frac{T}{2} \right) \mathbf{X}_i - \mathbf{A} \left(\frac{T}{2} \right) \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\omega\left(\tau_i + \frac{T}{2}\right)\right) \\ \text{sen}\left(\omega\left(\tau_i + \frac{T}{2}\right)\right) \end{bmatrix} \right). \quad (3.10)$$

Levando em conta as relações,

$$\cos\left(\omega\left(\tau_i + \frac{T}{2}\right)\right) = \cos(\omega\tau_i + \pi) = -\cos(\omega\tau_i), \text{ e}$$

$$\text{sen}\left(\omega\left(\tau_i + \frac{T}{2}\right)\right) = \text{sen}(\omega\tau_i + \pi) = -\text{sen}(\omega\tau_i),$$

obtidas pela substituição de $T = \frac{2\pi}{\omega}$, e aplicação de propriedades trigonométricas,

pode-se escrever a Equação (3.10) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i+1} &= \mathbf{J}\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{X}_i - \mathbf{J}\left(\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix}, \text{ e} \\ \mathbf{X}_{i+2} &= \mathbf{J}\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{X}_{i+1} + \mathbf{J}\left(\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right)\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A soma destas duas equações resulta em:

$$\mathbf{X}_{i+1} + \mathbf{X}_{i+2} = \mathbf{J}\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right)(\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_{i+1}).$$

A partir da Equação (3.9) substitui-se $\mathbf{X}_{i+2} = \mathbf{X}_i$. Então:

$$\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{J}\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right)(\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_{i+1}).$$

Como soluções possíveis têm-se:

$$\mathbf{J}\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) = \mathbf{I}, \text{ solução trivial; e}$$

$$\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_{i+1} = 0, \text{ esta solução é a de interesse, pois implica em } \mathbf{X}_{i+1} = -\mathbf{X}_i.$$

Então, tem-se que o movimento periódico com dois impactos por período igualmente espaçados no tempo, exige que $X_{i+1} = -X_i$ e, conseqüentemente, como já era esperado, $X_{i+2} = -X_{i+1} = X_i$.

Em conseqüência do apresentado no parágrafo anterior, vale comentar-se, que de fato, era esperado que, devido às restrições impostas pelos batentes, se tivesse $x_{2i+1} = x_{2i}$ ou $x_{2i+1} = -x_{2i}$, mas nada se podia dizer a respeito de x_{1i+1} . No entanto sabe-se agora que $x_{1i+1} = -x_{1i}$ e $x_{2i+1} = -x_{2i}$ e ainda, que $v_{1i+1} = -v_{1i}$ e $v_{2i+1} = -v_{2i}$.

Diante do acima exposto, conclui-se que as relações de estado e fase apresentadas pelas Equações (3.9) são necessárias e suficientes para existência do padrão de movimento periódico 1-2 simétrico. Substituindo-se estas relações nas equações dadas em (3.10) obtêm-se o seguinte resultado:

$$X_i = \left(JA \left(\frac{T}{2} \right) + I \right)^{-1} J \left(A \left(\frac{T}{2} \right) + I \right) B \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Algumas observações em relação à Equação (3.12):

- se o sistema passar por um estado dado por X_i , conforme definido por esta Equação, um movimento de topologia 1-2 simétrico no tempo é possível e os estados do sistema nos impactos subsequentes podem ser obtidos da Equação (3.11);
- a dependência de $\cos(\omega\tau_i)$ e $\text{sen}(\omega\tau_i)$ impõe duas condições de fase entre a excitação e a resposta a serem satisfeitas para a existência de X_i .

Neste momento, cabe alertar o leitor para atentar que a Equação (3.11) apresenta as relações de estado, entre impactos sucessivos, e de fase, entre a excitação e a resposta, intrínsecas ao padrão de movimento sob estudo, enquanto que a determinação das condições de estado e fase exigidas para ocorrência deste padrão de movimento são ainda objeto de estudo dos próximos parágrafos.

Para determinar as condições de fase da excitação, é preciso atentar para o estado do sistema no instante da i -ésima colisão, $X_i = [x_1 \ x_2 \ v_1 \ v_2]^T$. Devido ao impacto da massa auxiliar, tem-se $x_2 = \delta$.

$$\mathbf{X}_i = \left(\mathbf{J} \mathbf{A} \left(\frac{T}{2} \right) + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{J} \left(\mathbf{A} \left(\frac{T}{2} \right) + \mathbf{I} \right) \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \delta \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

Para simplificar a análise, define-se:

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{J} \mathbf{A} \left(\frac{T}{2} \right) + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{J} \left(\mathbf{A} \left(\frac{T}{2} \right) + \mathbf{I} \right) \mathbf{B}. \quad (3.13)$$

Então, pode-se reescrever o estado do sistema como:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_i) \\ \text{sen}(\omega\tau_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \delta \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

de forma que se tem:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{cases} t_{11} \cos(\omega\tau_i) + t_{12} \text{sen}(\omega\tau_i) = x_1 \\ t_{21} \cos(\omega\tau_i) + t_{22} \text{sen}(\omega\tau_i) = \delta \\ t_{31} \cos(\omega\tau_i) + t_{32} \text{sen}(\omega\tau_i) = v_1 \\ t_{41} \cos(\omega\tau_i) + t_{42} \text{sen}(\omega\tau_i) = v_2 \end{cases}.$$

Tomando o segundo termo da Equação anterior, $t_{21} \cos(\omega\tau_i) + t_{22} \text{sen}(\omega\tau_i) = \delta$, em conjunto com a relação trigonométrica $\text{sen}^2(\omega\tau_i) + \cos^2(\omega\tau_i) = 1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \cos(\omega\tau_i) &= \alpha\eta \pm \beta\sqrt{1-\eta^2}, \\ \text{sen}(\omega\tau_i) &= \beta\eta \mp \alpha\sqrt{1-\eta^2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde:

$$\eta = \frac{\delta}{\sqrt{t_{21}^2 + t_{22}^2}}; \quad \alpha = \frac{t_{21}}{\sqrt{t_{21}^2 + t_{22}^2}}; \quad \beta = \frac{t_{22}}{\sqrt{t_{21}^2 + t_{22}^2}}. \quad (3.15)$$

Olhando-se para Equação (3.14), observa-se que para termos $\cos(\omega\tau_i)$ e $\text{sen}(\omega\tau_i)$ reais, o termo $(1 - \eta^2)$ deve ser maior ou igual a zero. Então, para ocorrência do movimento de topologia 1-2 simétrico no tempo, a seguinte restrição é imposta pela condição de fase:

$$\eta^2 \leq 1.$$

Tendo como referência os dados obtidos nos parágrafos anteriores, determinam-se também as condições de estado, isto é, a posição e a velocidade necessárias das

massas do sistema no instante da colisão da massa auxiliar. Para que o movimento estudado exista, estas condições são dadas por:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (\alpha t_{11} + \beta t_{12})\eta + (\pm\beta t_{11} \mp \alpha t_{12})\sqrt{1 - \eta^2} \\
 x_2 &= (\alpha t_{21} + \beta t_{22})\eta + (\pm\beta t_{21} \mp \alpha t_{22})\sqrt{1 - \eta^2} = \delta \\
 v_1 &= (\alpha t_{31} + \beta t_{32})\eta + (\pm\beta t_{31} \mp \alpha t_{32})\sqrt{1 - \eta^2} \\
 v_2 &= (\alpha t_{41} + \beta t_{42})\eta + (\pm\beta t_{41} \mp \alpha t_{42})\sqrt{1 - \eta^2}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para que as condições de estado sejam reais, mais uma vez o termo $(1 - \eta^2)$ deve ser maior ou igual a zero. Uma análise dos valores de η^2 propícios à existência das condições de fase e estado e, conseqüentemente, para possibilidade de existência do movimento periódico de topologia 1-2 simétrico é feita na próxima seção.

Os coeficientes da matriz \mathbf{T} , embora não apresentados neste trabalho, podem ser determinados pela Equação (3.13) e serão dependentes:

- a) da razão de massas (μ);
- b) da razão de frequências naturais dos subsistemas (ϵ);
- c) dos fatores de amortecimento modais (ζ_j);
- d) da razão da freq. de excitação pela freq. natural principal (ω);
- e) do coeficiente de restituição (e).

3.4 Região de Existência do Movimento Periódico 1-2 Simétrico

Do exposto na seção anterior, observa-se que, para um dado sistema e para o movimento periódico 1-2 imposto, existe um valor crítico de η para cada valor de folga δ correspondente do sistema que determina os limites das regiões de ocorrência do impacto. Este valor é obtido pela combinação da Equação (3.15) com a equação da amplitude máxima dada na seção 3.2. Assim escreve-se:

$$\eta_{cr} = \left(\frac{\tilde{\phi}_{11}\tilde{\phi}_{12}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_1\omega_1\omega)^2}} + \frac{\tilde{\phi}_{21}\tilde{\phi}_{22}}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_2\omega_2\omega)^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{t_{21}^2 + t_{22}^2}}$$

Se o valor crítico não ultrapassar a unidade, o padrão de movimento em estudo é possível em determinada frequência ω para cada valor da folga δ menor que a amplitude máxima da massa auxiliar.

As figuras abaixo mostram a relação entre η_{cr}^2 e ω para um sistema com razão de massas $\mu = 0,1$, razão de frequências $\varepsilon = 1,0$, fatores de amortecimento $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$ e coeficiente de restituição $e = 1,0$. Verifica-se nestas figuras que η_{cr}^2 não ultrapassa a unidade, isto indica que, para o sistema definido pelos parâmetros acima, não há nenhuma restrição que impeça definir as condições de estado e fase para ocorrência do movimento com período de ordem um, com dois impactos localizados simetricamente no tempo.

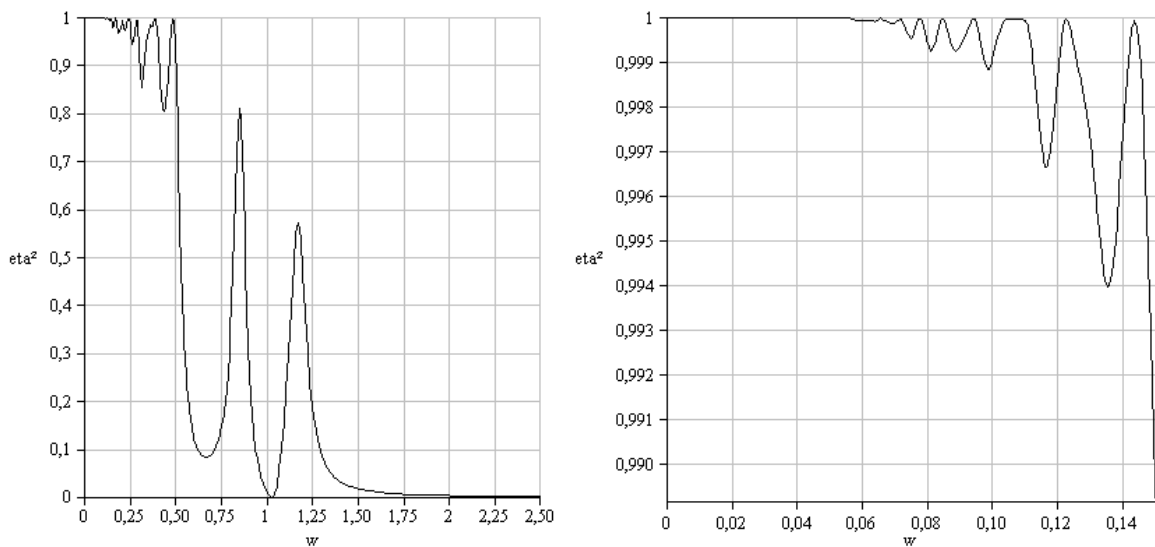


Figura 3-2 - η_{cr}^2 do sistema linear para um caso particular

3.5 Aplicação do Mapa e das Condições de Existência

Mesmo um sistema definido por parâmetros que implicam intrinsecamente em movimento periódico, pode demorar muito até que os efeitos transientes causados pelas condições iniciais sejam suprimidos. Além disto, a periodicidade requer que ocorra um estado particular no instante de impacto, com posição e velocidades específicas. Isto pode acontecer logo se o sistema for estável, ou simplesmente nunca ocorrer se ele for instável para frequência de excitação.

Nas seções anteriores definiu-se um mapa que relaciona os estados do sistema em sucessivos impactos, a partir do qual se determinou as condições de existência para possibilidade de ocorrência do movimento periódico de topologia 1-2 simétrico. Por fim, definiu-se ainda a região de existência do movimento citado. A seguir mostra-se a aplicação das condições de existência na definição das condições iniciais do sistema tal que a condição de regime com periodicidade 1-2 se manifeste imediatamente após o primeiro impacto.

A partir da aplicação da Equação (3.3) para o início do movimento, isto é, antes que o impacto tenha ocorrido, aliada à apropriação de um tempo e estado hipotéticos correspondentes ao primeiro impacto, procura-se a condição inicial $X(\tau_i = 0)$ tal que a colisão ocorra conforme a conjuntura suposta. Denominando-se o instante da colisão de tempo de contorno, representado por τ_c , o conjunto das posições e velocidades de estado de contorno, que será representado por $X(\tau_c)$, escreve-se:

$$J^{-1}X(\tau_c) = A(\tau_c, 0)X(0) - A(\tau_c, 0)B \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega \cdot 0) \\ \text{sen}(\omega \cdot 0) \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_c) \\ \text{sen}(\omega\tau_c) \end{bmatrix}$$

onde $X(\tau_c) = [x_{1c} \ \delta \ v_{1c} \ v_{2c}]^T$, então:

$$A(\tau_c)^{-1}J^{-1}X(\tau_c) = X(0) - B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A(\tau_c)^{-1}B \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_c) \\ \text{sen}(\omega\tau_c) \end{bmatrix}$$

logo:

$$X(0) = A(\tau_c)^{-1}J^{-1}X(\tau_c) + B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - A(\tau_c)^{-1}B \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_c) \\ \text{sen}(\omega\tau_c) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde:

$$\omega\tau_c = \arctan\left(\frac{\text{sen}(\omega\tau_c)}{\cos(\omega\tau_c)}\right)$$

As condições de fase $\text{sen}(\omega\tau_c)$ e $\cos(\omega\tau_c)$ são determinadas usando as Equações (3.13), enquanto estado de contorno $X(\tau_c)$, é dado pela Equação (3.16).

Equação (3.7), que define o estado inicial $X(0)$ do sistema, juntamente com o tempo inicial $\tau_i = 0$ compõem o conjunto de condições iniciais para que o movimento periódico ocorra já a partir do primeiro impacto.

Toma-se como exemplo, o sistema com razão de massas $\mu = 0,1$, razão de frequências $\varepsilon = 1,0$, fatores de amortecimento $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$, folga $\delta = 0,5$ e coeficiente de restituição $e = 1,0$, que, para condições iniciais nulas, quando excitado na frequência $\omega = 0,965$ atinge a periodicidade por volta do impacto de número 600, e apresenta topologia de movimento 2-8, mantida mesmo após 10.000 impactos, ver Figura 3.3. Em contrapartida a Figura 3.4 mostra que aplicando-se as condições iniciais determinadas pela metodologia acima apresentada, obtém-se como reposta uma topologia 1-2 simétrica logo após o primeiro impacto, exatamente conforme esperado. As condições de contorno usadas foram $\tau = 0$, $x_1 = -2.734824465$, $x_2 = 0.1030895232$, $v_1 = 4.227640752$, e $v_2 = -0.148180182$.

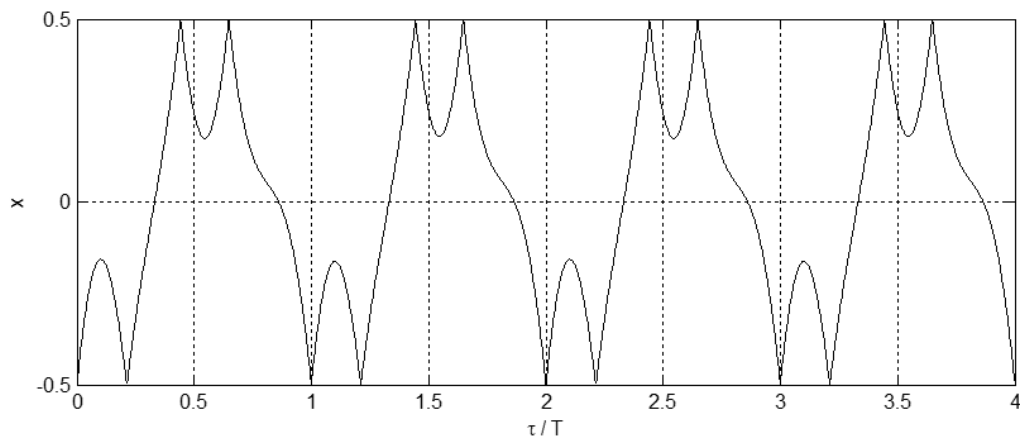


Figura 3-3 – Topologia 2-8, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,965$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$; CIs nulas

Com o intuito de esclarecer o leitor, observa-se que, muito embora o movimento acima exposto pareça ser do tipo 1-4, uma análise precisa nos tempos de impacto, resultantes da simulação computacional, indicou que ele tende a uma topologia 2-8, dado que se mantém a diferença alternada de 6,51224 e 6,50991, quando considerado o intervalo entre quatro impactos tomados em +0,5 a partir do tempo zero.

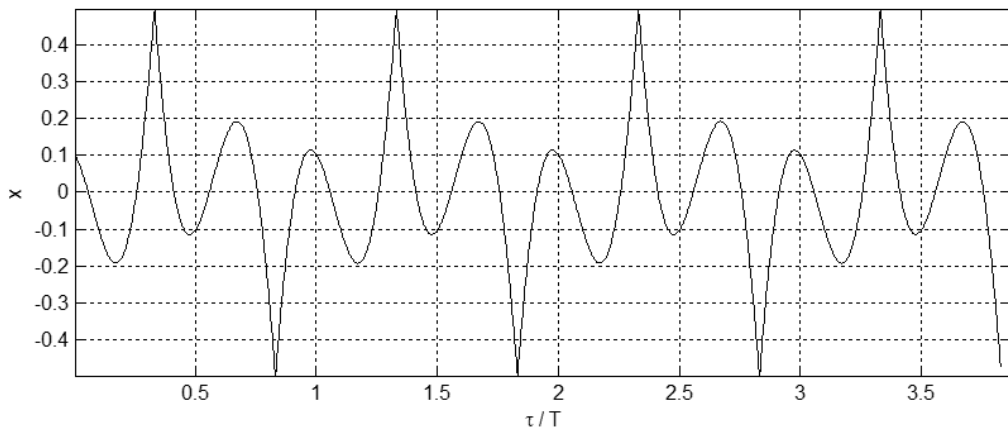


Figura 3-4 – Top. 1-2 Sim., $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,965$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$; CIs ajustadas

Outro exemplo ainda mais interessante é o caso mostrado a seguir, em que a aplicação das condições de contorno mostram-se eficazes, mesmo para o sistema caótico. O sistema em questão é o mesmo do caso anterior, apenas a frequência de excitação foi aumentada para $\omega = 0,97$. A Figura 3.5 a mostra o movimento caótico do sistema mesmo após 10.000 impactos quando simulado com CIs nulas. Em contrapartida, quando as condições de contorno são aplicadas, o movimento de ordem um com duplo impacto e simétrico é obtido logo após a primeira colisão e tem-se curva de resposta idêntica a da Figura 3.4. As condições de contorno usadas foram $\tau = 0$, $x_1 = -2.962601720$, $x_2 = 0.1169712280$, $v_1 = 4.332525264$, e $v_2 = -0.138223868$.

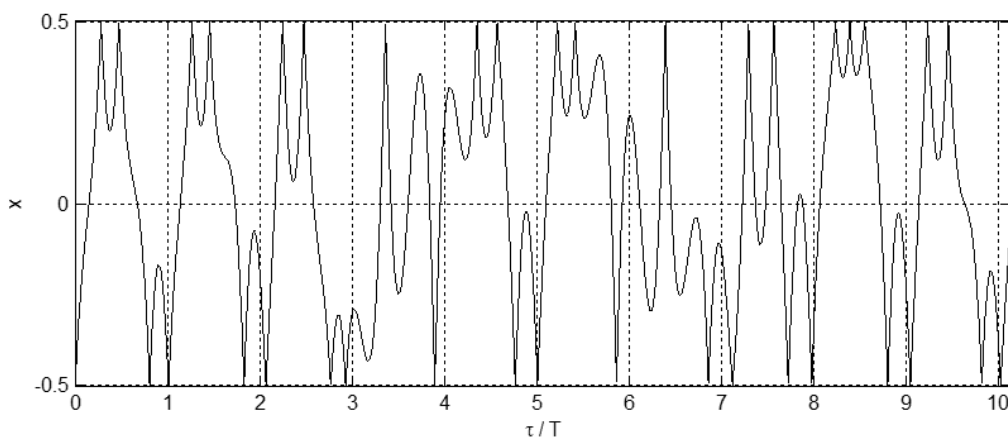


Figura 3-5 – Movimento Caótico, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\omega = 0,97$; $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$; CIs nulas

Contudo, a existência das condições de contorno por si só, não é garantia de existência do movimento periódico 1-2 simétrico. Apesar de ser sempre possível definir as condições iniciais a partir das condições de contorno, por vezes ocorre de ser requerida uma condição inicial com deslocamento da massa auxiliar maior que a folga. Como após cada impacto este conjunto de condições iniciais é novamente requerido para manutenção do padrão, esta topologia torna-se impossível.

4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

4.1 Análise de Estabilidade para o Movimento Periódico 1-2 Simétrico

Nesta seção optou-se por conveniência adotar, sem perda de generalidade, a representação do estado da i -ésima colisão por X_0 , da $i + 1$ -ésima por X_1 e assim por diante.

Desta forma, tomando-se o estado da i -ésima colisão, isto é, $X_0 = [x_{10} \ \delta \ v_{10} \ v_{20}]^T$, o estado na próxima colisão, X_1 , para o caso geral será dado por

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(\tau_1, \tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}) \\ x_{21}(\tau_1, \tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}) \\ v_{11}(\tau_1, \tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}) \\ v_{21}(\tau_1, \tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_{10} \\ \delta \\ v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

O tempo da ocorrência desta colisão será

$$\tau_1 = \tau_1(\tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}). \quad (4.2)$$

Percebendo que τ_1 é função das mesmas variáveis que X_1 exceto dele próprio, reescreve-se a Equação (4.1) acima conforme segue:

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(\tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}) \\ x_{21}(\tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}) \\ v_{11}(\tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}) \\ v_{21}(\tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_{10} \\ \delta \\ v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Para análise de estabilidade, interessa saber se o ponto em questão, X_1 , é um ponto de equilíbrio do sistema. Portanto, deve-se verificar que este ponto não varie ao longo do tempo. Logo, sua derivada deve ser nula.

A natureza de um ponto de equilíbrio, neste caso $PE = (x_{11}, x_{21}, v_{11}, v_{21})$, é determinada pela linearização do sistema em torno deste. Englobando-se as equações (4.2) e , descartando os termos referente a x_2 , dado que $x_{21} = -\delta$, logo sua derivada sempre é nula, escreve-se:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ x_{11} \\ v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1(\tau_0, x_{10}, v_{10}, v_{20}) \\ x_{11}(\tau_0, x_{10}, v_{10}, v_{20}) \\ v_{11}(\tau_0, x_{10}, v_{10}, v_{20}) \\ v_{21}(\tau_0, x_{10}, v_{10}, v_{20}) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Expandindo-se o lado direito da Equação acima em série de Taylor, em torno das coordenadas do ponto de equilíbrio e desprezando os termos não lineares, isto é, os termos superiores aos de primeira ordem, o sistema toma a forma matricial compacta:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{D}(\mathbf{H}(\tau_0, x_{10}, v_{10}, v_{20})),$$

onde \mathbf{D} é a matriz jacobiana associada ao ponto equilíbrio, dada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_0} & \frac{\partial \tau_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \tau_1}{\partial v_{10}} & \frac{\partial \tau_1}{\partial v_{20}} \\ \frac{\partial x_{11}}{\partial \tau_0} & \frac{\partial x_{11}}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_{11}}{\partial v_{10}} & \frac{\partial x_{11}}{\partial v_{20}} \\ \frac{\partial v_{11}}{\partial \tau_0} & \frac{\partial v_{11}}{\partial x_{10}} & \frac{\partial v_{11}}{\partial v_{10}} & \frac{\partial v_{11}}{\partial v_{20}} \\ \frac{\partial v_{21}}{\partial \tau_0} & \frac{\partial v_{21}}{\partial x_{10}} & \frac{\partial v_{21}}{\partial v_{10}} & \frac{\partial v_{21}}{\partial v_{20}} \end{bmatrix}.$$

Para determinar os elementos da matriz \mathbf{D} , toma-se primeiro as derivadas parciais de ambos os lados da Equação (2.2) para x_{21} , tendo em mente que τ_0 , x_{10} , x_{20} , v_{10} e v_{20} são variáveis do sistema, enquanto que τ_1 é uma função destas variáveis, tem-se:

$$\frac{\partial x_{21}}{\partial \tau_0} = f_1 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_0}, \tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \right) = \frac{\partial \delta}{\partial \tau_0} = 0$$

$$\frac{\partial x_{21}}{\partial x_{10}} = f_2 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x_{10}}, \tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \right) = \frac{\partial \delta}{\partial x_{10}} = 0$$

$$\frac{\partial x_{21}}{\partial v_{10}} = f_3 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial v_{10}}, \tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \right) = \frac{\partial \delta}{\partial v_{10}} = 0$$

$$\frac{\partial x_{21}}{\partial v_{20}} = f_4 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial v_{20}}, \tau_0, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \right) = \frac{\partial \delta}{\partial v_{20}} = 0$$

Sendo as funções acima iguais à zero, pode-se isolar os termos $\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_0}$, $\frac{\partial \tau_1}{\partial x_{10}}$, $\frac{\partial \tau_1}{\partial v_{10}}$ e

$\frac{\partial \tau_1}{\partial v_{20}}$, que são exatamente os elementos da primeira linha da matriz \mathbf{D} .

Em se derivando ambos os lados da Equação (4.4) para x_{11} , tem-se:

$$\frac{\partial x_{11}}{\partial \tau_0} = g_1 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_0}, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \right)$$

$$\frac{\partial x_{11}}{\partial x_{10}} = g_2 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x_{10}}, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \right)$$

$$\frac{\partial x_{11}}{\partial v_{10}} = g_3 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial v_{10}}, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \right)$$

$$\frac{\partial x_{11}}{\partial v_{20}} = g_4 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial v_{20}}, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \right)$$

Substituindo os termos calculados do passo anterior, determinam-se $\frac{\partial x_1}{\partial \tau_0}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_{10}}$,

$\frac{\partial x_1}{\partial v_{10}}$ e $\frac{\partial x_1}{\partial v_{20}}$, os elementos da segunda linha da matriz **D**.

Os demais elementos são obtidos de forma semelhante, derivando-se ambos os lados da Equação (4.5) para v_{11} e v_{21} .

O sistema pode ser considerado estável no ponto H_1 e conseqüentemente no ponto X_1 , se os módulos dos autovalores da matriz **D** estiverem contidos em um círculo de raio unitário.

Onde os possíveis autovalores levam aos seguintes comportamentos do sistema:

$$|\lambda_j| < 1 \Rightarrow \text{estável,}$$

$$|\lambda_j| > 1 \Rightarrow \text{instável,}$$

$$|\lambda_j| = 1 \Rightarrow \text{centro,}$$

4.2 Apresentação Gráfica da Análise de Estabilidade

Nesta seção apresentam-se diagramas da análise de estabilidade do sistema, entre outros, avaliou-se aqueles referentes aos exemplos apresentados ao longo do desenvolvimento desta dissertação.

Para geração dos diagramas, avaliou-se os autovalores em pontos discretos com incremento de 0,01 da frequência de excitação. Para cada valor de frequência calculou-se os quatro autovalores, plotou-se então o autovalor de maior módulo

sempre que ele for maior que um. Desta forma, de acordo com o exposto na seção anterior, o sistema será estável para valores de frequência, cujo quais, não aparecem pontos no respectivo diagrama. Para facilidade de leitura as faixas estáveis estão destacadas na tonalidade cinza.

Algumas observações podem ser feitas sobre os diagramas mostrados a seguir, mas antes estabelece-se o seguinte critério de análise:

- a) São consideradas três faixas de frequência de excitação, baixa frequência $\omega < 0,4$, média frequência $0,4 \leq \omega \leq 1,6$ e alta frequência $\omega > 1,6$.
- b) O sistema de referência para comparações é o com razão de massas $\mu = 0,1$, razão de frequências $\varepsilon = 1,0$, fatores de amortecimento $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$, folga $\delta = 0,5$ e coeficiente de restituição $e = 1,0$.

O Sistema de referência possui três faixas de estabilidade bem defendidas a média frequência, a saber, faixa (a) em torno de $\omega = 0,7$, (b) em torno de $\omega = 1,0$ e (c) em torno de $\omega = 1,45$. A diminuição da relação de frequências tende a deslocar estas faixas levemente para esquerda e a reduzir a largura das faixas (b) e (c), enquanto que a largura da primeira (a) permanece aproximadamente constante. Quando a relação de frequência é muito reduzida, por exemplo, $\varepsilon = 0,5$, as faixas (b) e (c) diminuem significativamente, a ponto de serem suprimidas para folgas maiores que $\delta = 0,5$, já a faixa (a) mantém-se com aproximadamente com a mesma largura, porém se manifesta para frequências de excitação menores, em torno de $\omega = 0,47$.

O aumento da relação das frequências naturais dos subsistemas provoca exatamente o efeito inverso, isto é, as três faixas tendem a migrar para direita, e as faixas (b) e (c) tendem a aumentar de largura.

Para altas frequências de excitação o sistema mostra-se totalmente instável independente do valor da folga e da relação de frequências naturais. Por outro lado, para baixas frequências ele alterna entre estreitas faixas de estabilidade e instabilidade.

No que tange ao parâmetro folga, pode-se afirmar que as faixas (a) e (b) mantem largura aproximadamente constante, enquanto que a faixa (c) diminui com o aumento da folga. Na faixa de alta frequência o sistema mostra-se instável

independente da folga, já para baixa frequência de excitação não se observa um padrão de comportamento definido pela variação da folga.

Por fim observa-se que o aumento da relação de massas do sistema, assim como o aumento do coeficiente de amortecimento, tendem a ampliar levemente as faixa de estabilidade (a), (b) e (c).

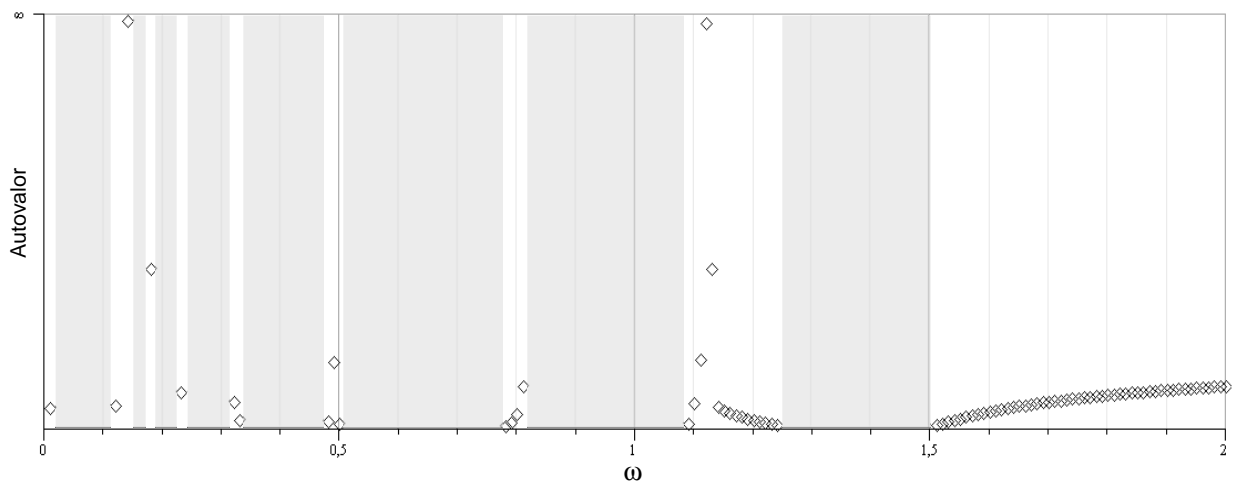


Figura 4-1 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,9$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

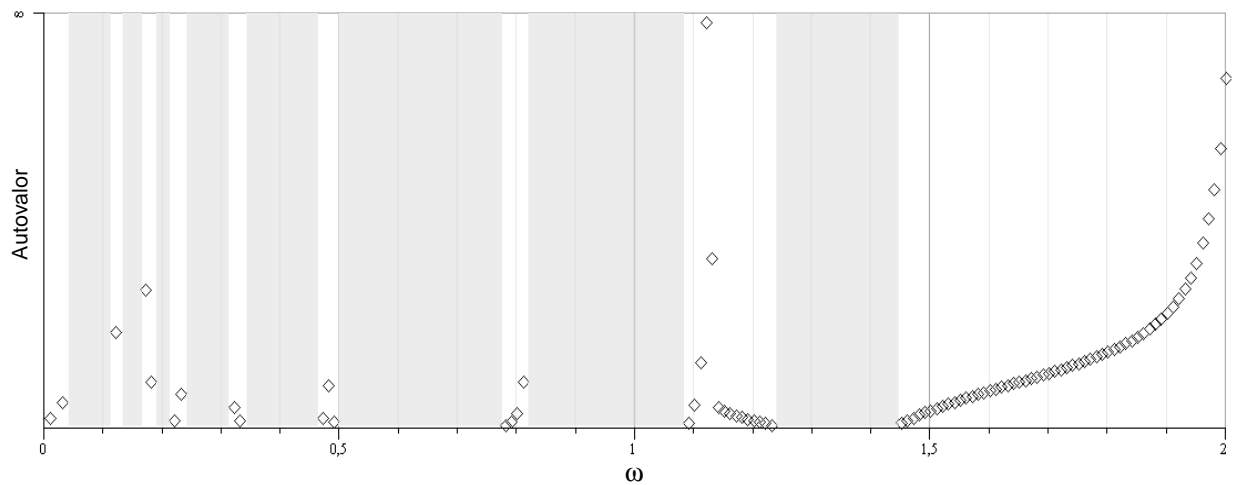


Figura 4-2 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,9$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

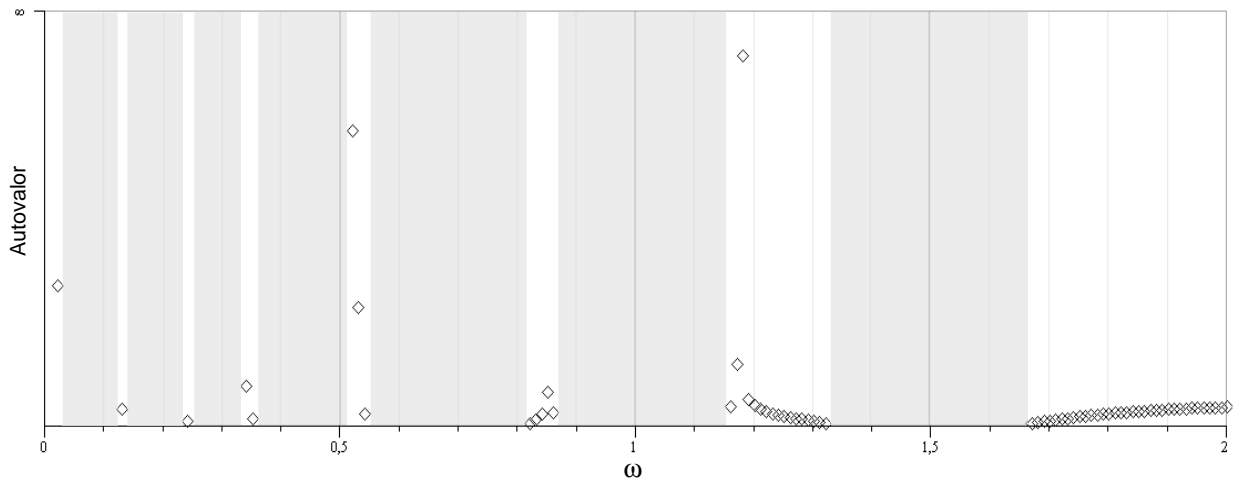


Figura 4-3 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,05$; $e = 1,0$

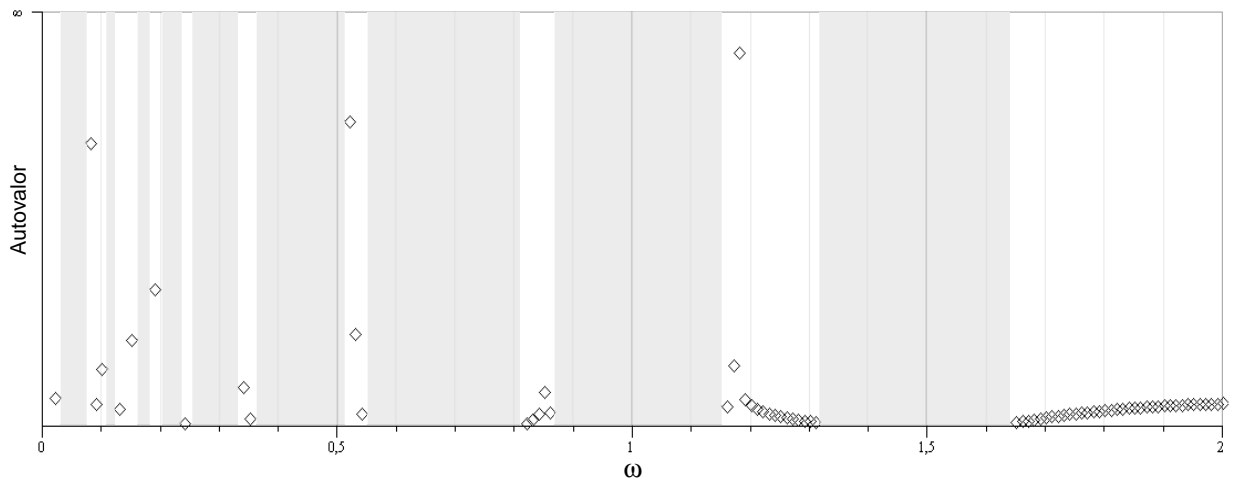


Figura 4-4 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,1$; $e = 1,0$

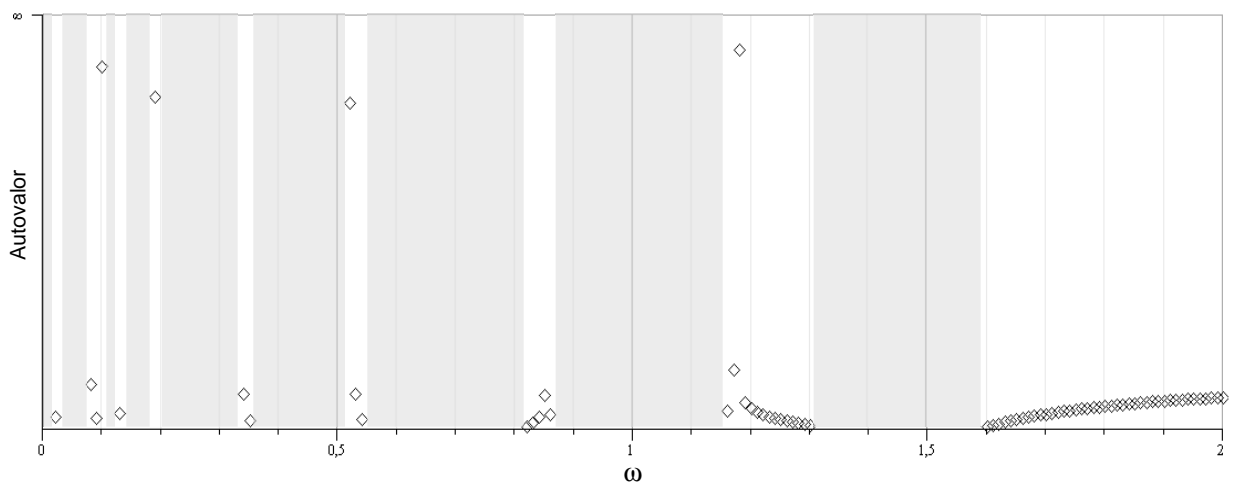


Figura 4-5 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,2$; $e = 1,0$

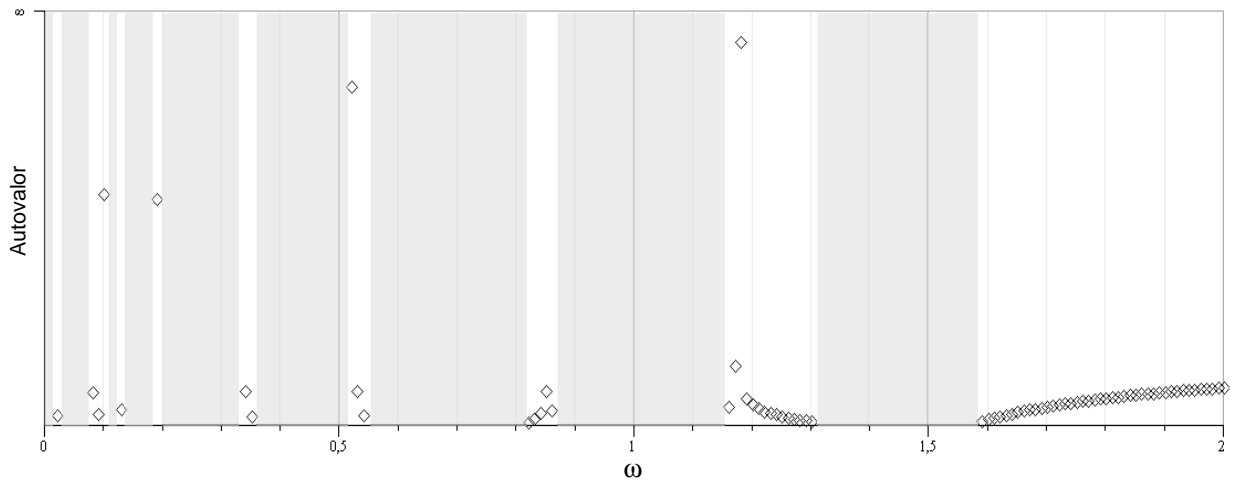


Figura 4-6 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

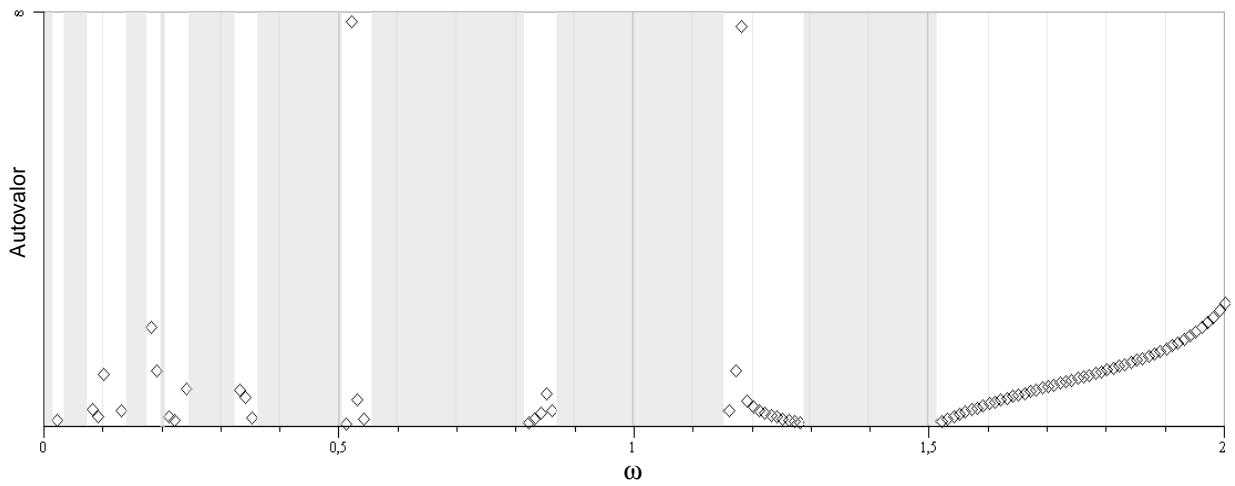


Figura 4-7 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

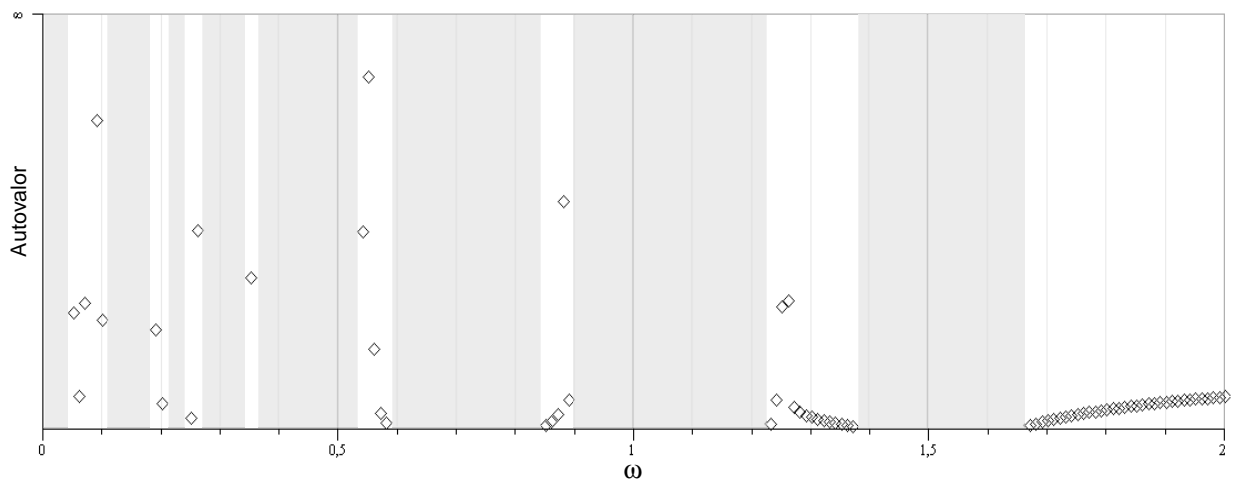


Figura 4-8 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

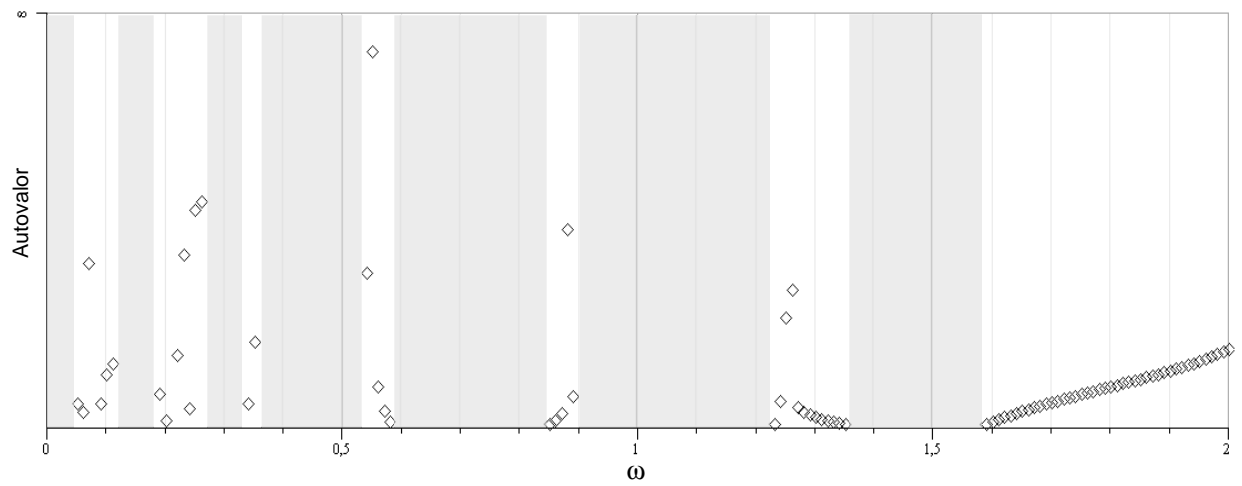


Figura 4-9 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,1$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

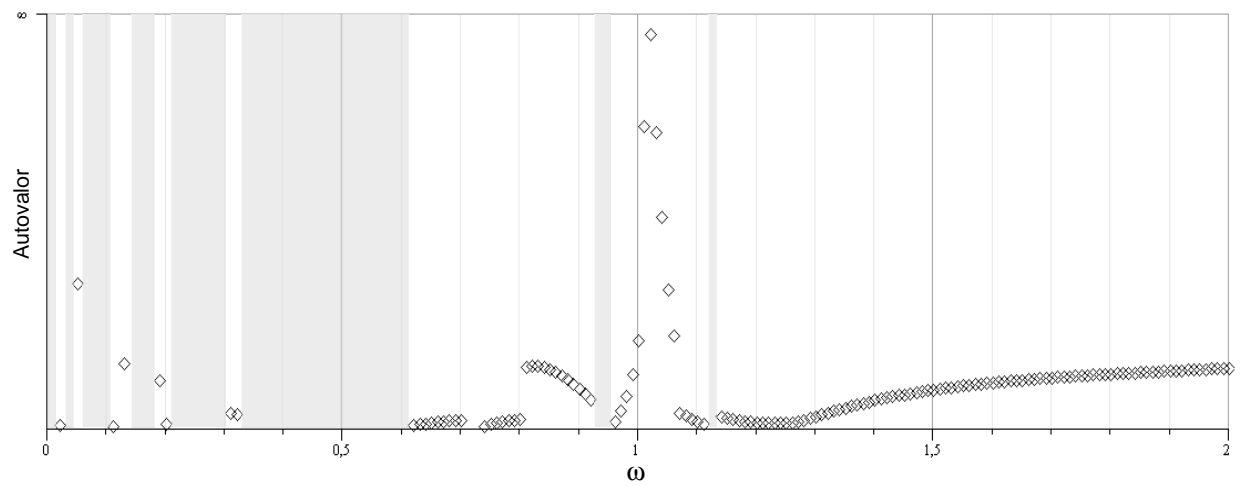


Figura 4-10 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,5$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

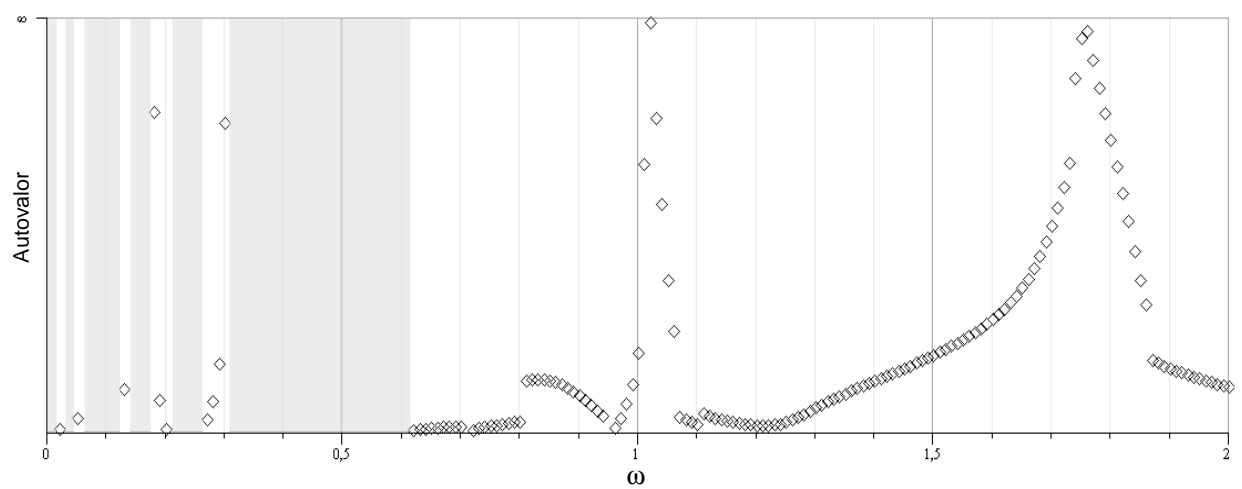


Figura 4-11 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 0,5$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

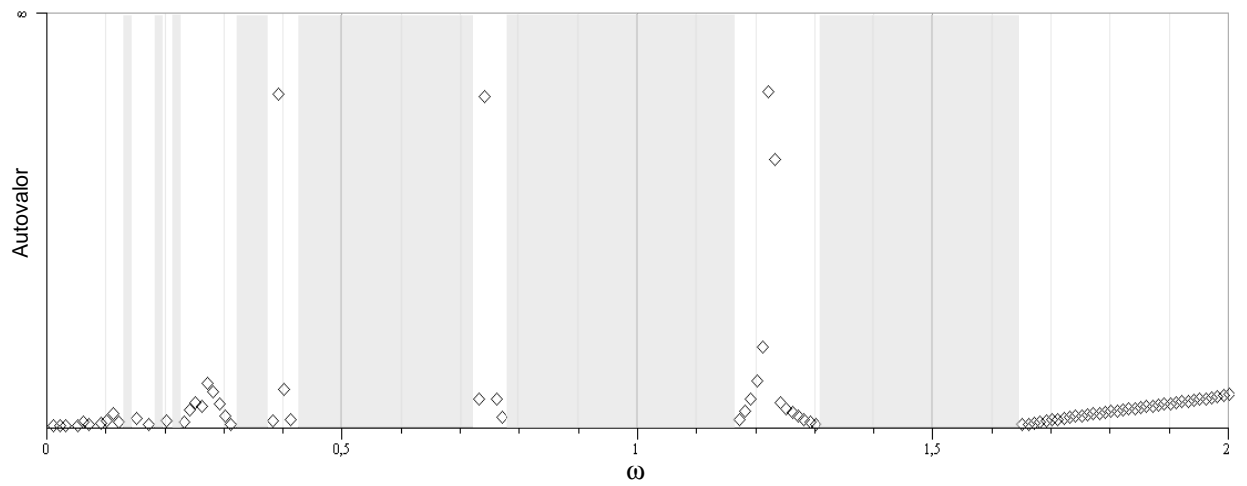


Figura 4-12 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,2$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

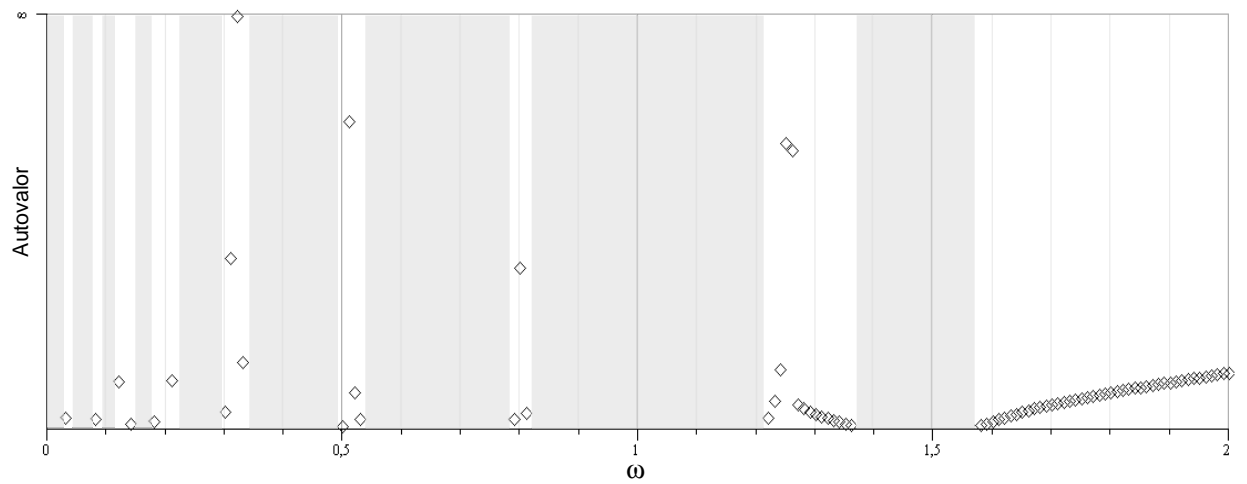


Figura 4-13 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,2$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,05$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

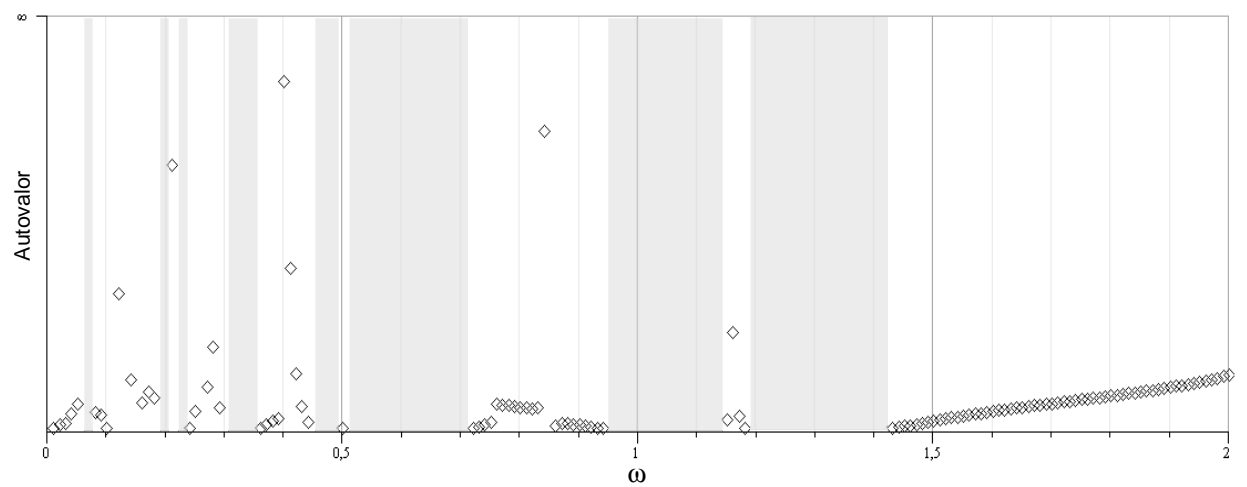


Figura 4-14 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

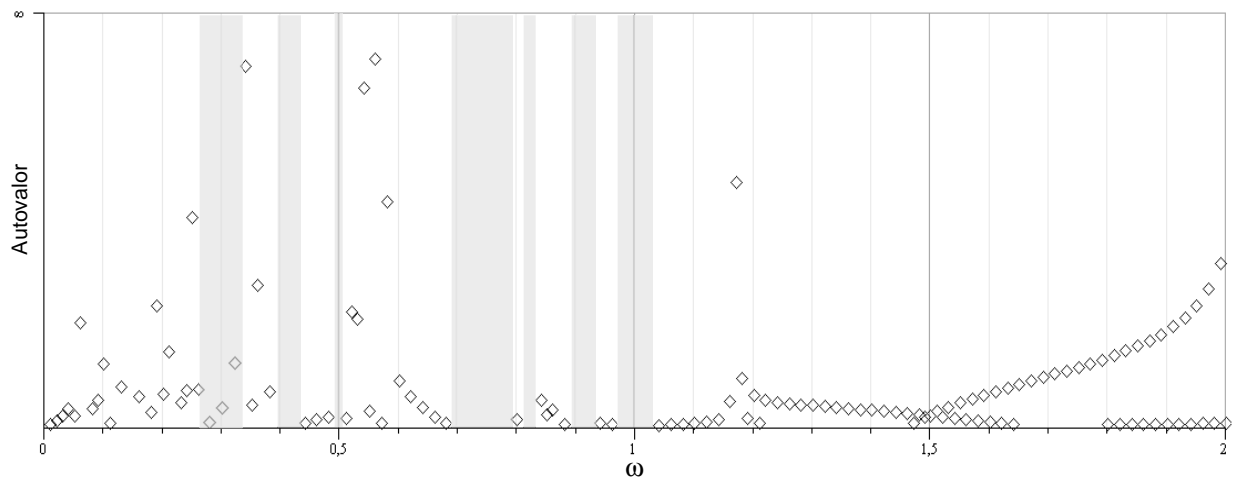


Figura 4-15 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

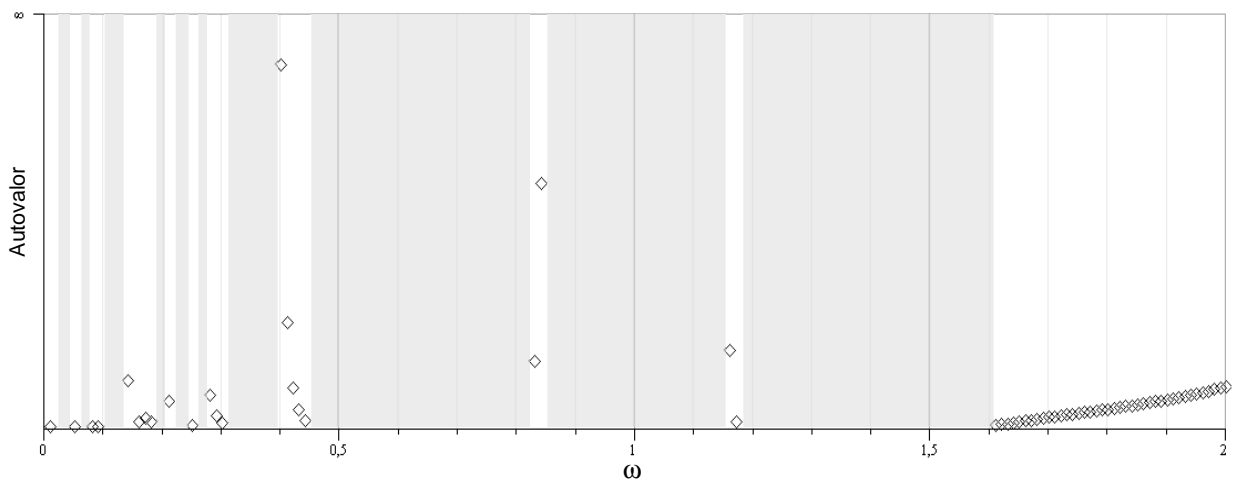


Figura 4-16 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,1$; $\delta = 0,25$; $e = 1,0$

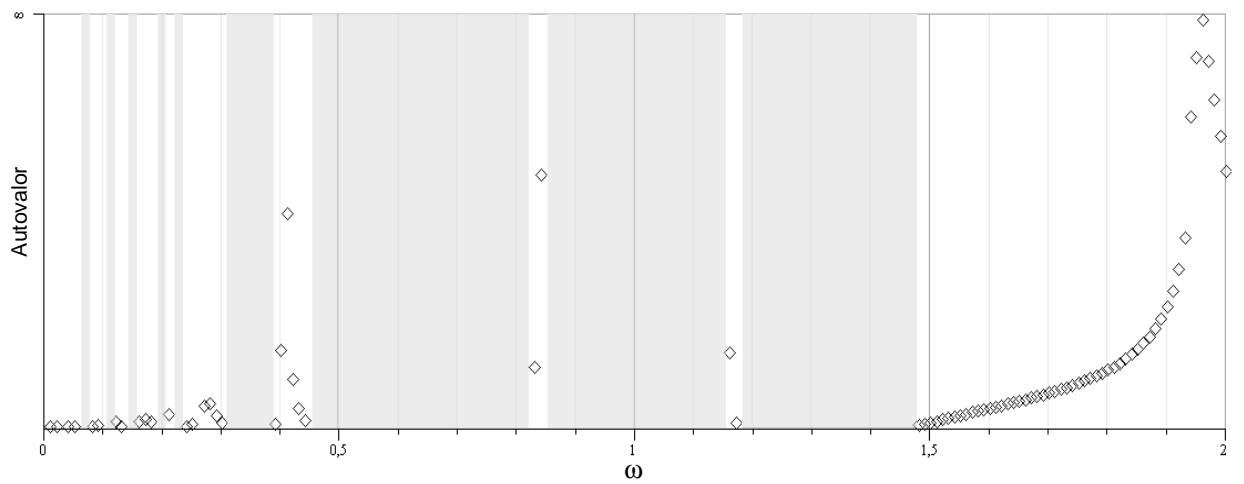


Figura 4-17 – Diagrama de estabilidade, $\mu = 0,1$; $\varepsilon = 1,0$; $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,1$; $\delta = 0,5$; $e = 1,0$

5 CONCLUSÃO

Abordou-se neste trabalho um sistema dinâmico constituído de dois corpos rígidos conectados por elementos visco-elásticos entre si e a uma base fixa com batentes rígidos, com excitação externa aplicada em um dos corpos. Sem surpresa indicou-se, no capítulo dois, que a depender dos parâmetros de entrada, o sistema pode apresentar as mais variadas formas de movimento, desde comportamento totalmente caótico a movimentos com impactos periódicos, contudo chamou-se atenção para o fato de que a mudança de comportamento de um padrão para outro pode ocorrer pela mínima variação de um parâmetro. Um resultado importante deste capítulo é a observação de que quanto menor a frequência de excitação, maior a tendência de se ter topologias com cada vez mais impactos por período.

O primeiro objetivo deste trabalho foi obtido no terceiro capítulo, onde pela dedução da Equação (3.8), que se chamou de mapa, tornou-se possível relacionar os estados do sistema nos instantes de colisão, e assim, obter as condições de estado e fase necessárias para definir a possibilidade de existência do movimento periódico com dois impactos simetricamente distribuídos no tempo, com frequência de resposta igual a de excitação. Ainda neste mesmo capítulo comprovou-se que a existência do movimento periódico de topologia 1-2 simétrico dependia de um fator η_{cr} , e se quadrado deste fator (η_{cr}^2) não ultrapassasse a unidade não haveria nenhuma restrição à definição das condições de estado e fase para ocorrência do movimento periódico acima citado. Com resultado, mostrou-se que pela aplicação das condições de existência é possível determinar condições iniciais do sistema tal que o movimento com periodicidade 1-2 simétrico se manifeste imediatamente após o primeiro impacto.

O outro objetivo do trabalho resultou do desenvolvimento do capítulo quatro, neste, fizeram-se considerações sobre a estabilidade do sistema pela análise da matriz Jacobiana. Destaca-se que a estabilidade do sistema é sensível as variações da razão entre frequências naturais, da razão entre as massas dos subsistemas, da folga, do fator de amortecimento e principalmente à variação da frequência de excitação. Por exemplo, para frequência de excitação $0,4 \leq \omega \leq 1,6$ o sistema tem

faixas de estabilidade bem características, enquanto que para $\omega < 0,4$ ele alterna entre estreitas faixas de estabilidade e instabilidade, ainda, para $\omega > 1,6$ mostra-se totalmente instável independente do valor da folga e da relação de frequências naturais.

Sugestão para Trabalhos Futuros

Como suplemento a este trabalho sugere-se investigar outros padrões de movimento, simétricos e assimétricos.

Sugere-se ainda introduzir um modelo de colisão mais abrangente, incorporando lapso temporal e deformação dos batentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] [Adhikari-2006] ADHIKARI, S.: Damping modelling using generalized proportional damping, **J. Sound Vib.** 293(1–2), 156–170 (2006)
- [02] [Aziz-1998] AZIZ, M. A. F.; VAKAKIS, A. F.; MANEVICH, L. I.: Exact solutions of the problem of the vibro-impact oscillations of a discrete system with two degrees of freedom, Elsevier Science Ltd. 1999.
- [03] [Barbosa-2009] BARBOSA, D. A.: Análise de Movimentos Periódicos em Sistemas com Vibro-Impacto Harmonicamente Excitados. 90 f. **Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo**, Vitória, 2009.
- [04] [Brach-1991] BRACH, R.M.: Mechanical impact dynamics - Rigid Body Collisions ed. **John Wiley & Sons**, New York, Interscience Publication -260 p. 1991.
- [05] [Chen-1996] CHEN, S. L.; SHAW, S. W.: Normal modes for piecewise linear vibratory systems. **Nonlinear Dynamics**, 10, p.135-164, 1996.
- [06] [De Nadai-2010] De Nadai, S. M.: Sobre a existência e a estabilidade de movimentos periódicos em sistemas com vibro-impacto com folga simétrica. 98 f. **Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo**, Vitória, 2010.
- [07] [Hinrichs-1997] HINRICHS, N.; OESTREICH, M.; POPP, K.: Dynamics of oscillators with impact and friction. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(4), p.535-558, 1997.
- [08] [Inman-2008] INMAN, D.J.: Engineering Vibration, 3rd ed., **Pearson Prentice Hall**, 2008.
- [09] [Janin-2002] JANIN, O.; LAMARQUE, C. H.: Stability of singular periodic motions in a vibro-impact oscillator. **Nonlinear Dynamics**, 28, p.231-241,

2002.

- [10] [Jiang-2004] JIANG, D.; PIERRE, C.; SHAW, S. W.: Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. **Journal of Sound and Vibration**, 272, p.869-891, 2004.
- [11] [Knudsen-2003] KNUDSEN, J.; MASSIH, A. R.: Dynamic stability of weakly damped oscillators with elastic impacts and wear. **Journal of Sound and Vibration**, 263, p.175-204, 2003.
- [12] [Luo-2004] LUO, G. W.; XIE, J. H.. Stability of periodic motion, bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibratory system with symmetrical rigid stops. **Journal of Sound and Vibration**, 273, p.543-568, 2004.
- [13] [Luo-2008] LUO, G.; XIE, J.; ZHU, X.; ZHANG, J.. Periodic motions and bifurcations of a vibro-impact system. **Chaos, Solitons and Fractals**, 36, p.1340-1347, 2008.
- [14] [Mattos-1998] MATTOS, M. C.: Alterações na dinâmica de sistemas com vibro-impacto devidas a variações da folga. 145 f. **Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas**, Campinas, 1998.
- [15] [Mikhlin-1998] MIKHLIN, Y. V.; VAKAKIS, A. F.; SALENGER, G.. Direct and inverse problems encountered in vibro-impact oscillations of a discrete system. **Journal of Sound and Vibration**, 216(2), p.227-250, 1998.
- [16] [Mikhlin-2006] MIKHLIN, Y. V.; RESHETNIKOVA, S. N.. Dynamical interaction of an elastic system and a vibro-impact absorber. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi Publishing Corporation, p.1-15, 2006.
- [17] [Ripper Neto-2007] RIPPER NETO, A. P.: Vibrações Mecânicas / Arthur Palmeira Ripper Neto. Rio de Janeiro: **E-papers**, 2007. 498p. : il.
- [18] [Scotti-2007] SCOTTI, M: O problema quadrático de autovalor em vibrações e nanotecnologia / Monica Scotti. – Porto Alegre: **PPGMAp da UFRGS**, 2007.

109 p: il.

- [19] [Tisseur-2001] TISSEUR, F.; MEERBERGEN, K.: The quadratic eigenvalue problem, **SIAM Review**, Vol. 43, Number 2, pp. 235-286, 2001.

- [20] [Tipler-2004] TIPLER, A.; MOSCA, G.: Physics For Scientist and Engineers, 5.ed., **W. H. Freeman & Company**, New York 2004.

- [21] [Xu-2010] XU, JIEQIONG; LI, QUNHONG; WANGA, N.: Existence and stability of the grazing periodic trajectory in a two-degree-of-freedom vibro-impact system, **Elsevier Inc.**, 2010.

- [22] [Yuan-2007] YUAN, Y.; JIAN-HUA, X.. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of an impact oscillator between two rigid sides. **Applied Mathematics and Mechanics**, 28(8), p.1109-1117, 2007.