

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MAHAMADOU HAMANI DAOUDA

MODELOS COSMOLÓGICOS NA TEORIA DE  
RASTALL

MAHAMADOU HAMANI DAOUDA

MODELOS COSMOLÓGICOS NA TEORIA DE RASTALL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de doutor em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Júlio C. Fabris

Co-orientador: Prof. Dr. Oliver F. Piattella

VITORIA  
2012

# MODELOS COSMOLÓGICOS NA TEORIA DE RASTALL

MAHAMADOU HAMANI DAOUDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau do Doutor em Ciências Físicas.

## COMISSÃO EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Júlio C. Fabris  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Orientador

---

Prof. Dr. Oliver F. Piattella  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Co-orientador

---

Prof. Dr. Eugênio R. B. de Mello  
Universidade Federal da Paraíba

---

Prof. Dr. Gilberto M. Kremer  
Universidade Federal do Paraná

---

Prof. Dr. Antônio A. R. Fernandes  
Universidade Federal do Espírito Santo

# Agradecimentos

Aos meus Orientadores, o Professor Júlio C. Fabris e o Professor Oliver F. Piattella.

Agradeço a CNPq/TWAS, pelo financiamento para desenvolver este trabalho, obrigado.



# Resumo

A teoria de Rastall é uma modificação da teoria da relatividade geral que conduz a uma expressão diferente da usual para a lei de conservação no setor da matéria. Recentemente tem-se discutido que tal teoria pode ter aplicações ao problema da energia escura, já que um fluido sem pressão pode conduzir à aceleração do universo. Nesse trabalho confrontamos a teoria de Rastall com os dados do espectro de potência. Os resultados indicam uma configuração que reduz essencialmente a teoria de Rastall à relatividade geral, a menos que a lei de conservação não-usual se refira a um campo escalar, situação onde outras configurações seriam eventualmente possíveis. Uma unificação de energia escura e matéria escura, é obtida se um campo escalar de interação não-canônica, inspirado pela teoria de Rastall da gravidade, for imposto. Neste caso, é possível uma concordância com os testes de fundo e com o espectro de potência. Investigamos a evolução do potencial gravitacional na teoria de Rastall com campo escalar. Para um modelo de uma única componente, a teoria de perturbação, no calibre newtoniano, é consistente somente para  $\gamma = 1$ , que é o limite da relatividade geral. Por outro lado, é possível ter um modelo consistente com  $\gamma \neq 1$  quando uma outra componente, sob a forma de um fluido perfeito, é introduzida. Introduzimos nesta teoria um modelo de dois fluidos, uma das componentes representando a energia do vácuo e a outra a matéria sem pressão (por exemplo, bárions mais a matéria escura fria). O cenário cosmológico é o mesmo que para o modelo de  $\Lambda$ CDM, no fundo e a nível perturbativo linear, a exceção de um aspecto: agora a energia escura pode aglomerar-se. Especulamos que isto pode conduzir à possibilidade de distinguir o modelo de Rastall do  $\Lambda$ CDM a nível perturbativo não-linear.

# Abstract

The theory of Rastall is a modification of the general relativity theory that leads to a different expression, with respect to the usual one for the conservation law. Recently it has been argued that such theory can have applications to the problem of dark energy, since a fluid without pressure can lead the acceleration of the universe. In this work we confront the theory of Rastall with the data of the power spectrum. The results indicate a configuration that reduces essentially the theory of Rastall to general relativity, unless the not-usual conservation law refers to a self-interacting scalar field, situation where other configurations would be possibly possible. A unification of dark energy and dark matter is obtained through such non-canonical scalar field. In this in case, it is possible an agreement with the observational tests. We analyze the evolution of the gravitational potential in the theory of Rastall with a scalar field. For an one component model, the perturbation theory in the Newtonian gauge is consistent only for  $\gamma = 1$ , that is, the limit of general relativity. On the other hand, it is possible to have a model consistent with  $\gamma \neq 1$  when another component, in the form of a fluid, is added. We introduce in this theory a model of two fluids, one of the components representing the vacuum energy and another matter without pressure (for example, baryons). The cosmological scenario is the same as the  $\Lambda$ CDM, in the background and at the linear perturbation level, excepted for an aspect: now the dark energy can agglomerate. We speculate that this can lead to the possibility to distinguish the Rastall's model from  $\Lambda$ CDM model at the nonlinear perturbative level.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução geral</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Relatividade geral, cosmologia padrão e modelos de energia escura</b>	<b>13</b>
2.1	Relatividade geral . . . . .	13
2.1.1	Espaço-tempo . . . . .	14
2.1.2	Tensores . . . . .	15
2.1.3	Conexão afim e derivada covariante . . . . .	16
2.1.4	Curvatura . . . . .	17
2.1.5	Métrica . . . . .	17
2.1.6	O Princípio Variacional . . . . .	20
2.2	Cosmologia . . . . .	22
2.2.1	Do princípio cosmológico ao modelo de concordância . . . . .	22
2.2.2	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	23
2.2.3	Desvio para o vermelho . . . . .	25
2.2.4	Dinâmica do universo: equações de Friedmann . . . . .	26
2.3	Modelos de energia escura . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Teoria das perturbações cosmológicas</b>	<b>38</b>
3.1	Perturbações cosmológicas newtonianas. . . . .	38
3.2	Perturbações cosmológicas: relatividade geral . . . . .	44
3.2.1	Perturbações na métrica e no tensor energia-momento . . . . .	46
3.2.2	Transformações de calibre . . . . .	48
3.2.3	Transformação do calibre das perturbações escalares da métrica . . . . .	49
3.2.4	Perturbação do tensor de energia-momento . . . . .	51
3.2.5	Calibre newtoniano . . . . .	51
3.2.6	Calibre síncrono . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Cosmologia observacional</b>	<b>59</b>
4.1	O espectro de potência de flutuações da densidade . . . . .	59



4.2	Supernovas do tipo Ia . . . . .	62
4.3	Radiação cósmica de fundo (CMB) . . . . .	64
4.4	Oscilações da acústica do bárion (BAO) . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Dinâmica cosmológica do modelo de Rastall</b>	<b>66</b>
5.1	Modelo de Rastall . . . . .	66
5.2	Dinâmica cosmológica do modelo de Rastall . . . . .	68
5.3	Dinâmica do fundo . . . . .	69
5.4	Análise perturbativa: Fluido perfeito . . . . .	70
5.5	Modelo de dois fluidos . . . . .	71
5.6	Perturbações lineares no modelo de dois fluidos . . . . .	73
5.7	Modelo Campo escalar da Teoria de Rastall . . . . .	75
5.7.1	Análise perturbativa do campo escalar. . . . .	75
5.8	Conclusão . . . . .	80
<b>6</b>	<b>O modelo de unificação com campo escalar de Rastall</b>	<b>82</b>
6.1	A velocidade do som do campo escalar na teoria de Rastall . . . . .	82
6.2	Conclusão . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Evolução do potencial gravitacional na teoria Rastall com campo escalar</b>	<b>91</b>
7.1	Teoria de Rastall com campo escalar . . . . .	91
7.2	Evolução do potencial gravitacional . . . . .	92
7.3	O papel de uma componente tipo fluido . . . . .	94
7.4	Conclusão . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Cosmologia de Rastall e o modelo <math>\Lambda</math>CDM</b>	<b>100</b>
8.1	Cosmologia de Rastall . . . . .	100
8.2	Pequenas perturbações . . . . .	103
8.2.1	Calibre newtoniano . . . . .	104
8.3	Regime não-linear . . . . .	106
8.4	Conclusão . . . . .	108
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>109</b>

# Capítulo 1

## Introdução geral

Esta tese é dedicada à modelização cosmológica da teoria de Rastall [1] que é um modelo de gravidade modificada para o qual o tensor energia-momento não é conservado. A tese está organizada da seguinte forma:

### Capítulo 2

Descreveremos o quadro teórico no qual inscreve-se esta tese. Apresentaremos as noções básicas da relatividade geral. Iremos fazer uma breve revisão do modelo cosmológico padrão, falaremos sobre a matéria escura e da energia escura, incluindo ao final as evidências da suas existências.

### Capítulo 3

Apresentaremos os princípios da teoria das perturbações lineares cosmológicas. Começaremos com a discussão não relativística e concluiremos com a discussão relativística geral, onde estudaremos diversos casos nos calibres newtoniano e síncrono, a partir das fórmulas da métrica (2.57), do tensor de energia-momento (2.59), e das equações de Einstein (2.67).

### Capítulo 4

Neste capítulo revisaremos os mais importantes fenômenos cosmológicos que permitem testar as previsões teóricas. Discutiremos a correlação das estruturas em grande escala e as supernovas do tipo Ia, a radiação cósmica de fundo e as oscilações acústicas dos bárions.

## Capítulo 5

Apresentaremos a teoria de Rastall, derivando algumas relações cosmológicas. Um modelo com dois fluidos será desenvolvido. O espectro de potência da matéria será determinado na representação hidrodinâmica e para o caso onde um dos fluidos está representado por um campo escalar de interação.

## Capítulo 6

Nesse capítulo iremos analisar e reproduzir o modelo de gás Chaplygin utilizando a teoria de Rastall com um campo escalar. Discutiremos a velocidade do som nesta teoria.

## Capítulo 7

Introduziremos o campo escalar não-canônico de Rastall. Investigaremos a evolução do potencial gravitacional. Mostraremos que no caso em que o conteúdo energético for descrito apenas por um campo escalar não-canônico, o modelo só é consistente quando  $\gamma = 1$ .

## Capítulo 8

Introduziremos um modelo com dois fluidos, em que uma dos componentes representa a energia do vácuo e a outra a matéria sem pressão. Mostraremos que o cenário cosmológico é o mesmo para o modelo de  $\Lambda$ CDM, no fundo e a nível perturbativo linear, à exceção de um aspecto: agora a energia escura pode aglomerar-se. Especularemos que isto pode conduzir a uma possibilidade de distinguir os modelos a nível perturbativo não-linear.

## Capítulo 9

Apresentaremos nossas conclusões.

Esta tese resultou nos seguintes trabalhos científicos:

- C.E. Batista , Júlio C.Fabris , M. Hamani Daouda. *Testing the Rastall's theory using matter power spectrum*. Il Nuovo cimento della Società italiana di fisica. B , v. 125, p. 968968, 2010.

- Júlio C. Fabris , Thaisa C. Guio , M. Hamani Daouda , Oliver F. Piattella. *models for the generalized Chaplygin gas and the structure formation constraints*. Gravitation Cosmology, v. 17, p. 259271, 2011.
- Júlio C. Fabris , M. Hamani Daouda , Oliver F. Piattella. *Note on the Evolution of the Gravitational Potential in Rastall Scalar Field Theories*. Physics Letters B.2012
- C. E. Batista, M. Hamani Daouda , Júlio C. Fabris , Oliver F. Piattella Davi C. Rodrigues. *Rastall Cosmology and the CDM Model 2011*. Physical Review. D, Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology. v.85, p.084008, 2012.

## Capítulo 2

# Relatividade geral, cosmologia padrão e modelos de energia escura

Neste capítulo, começamos apresentando as noções básicas da relatividade geral. Em seguida, iremos fazer uma breve revisão do modelo cosmológico padrão e falaremos sobre a matéria escura e energia escura, incluindo ao final as evidências da existência das mesmas.

### 2.1 Relatividade geral

#### Princípio da relatividade geral:

Na teoria newtoniana e na relatividade restrita, as leis da física são escritas em referenciais ditos inerciais <sup>1</sup> e em de referenciais em rotação. Por outro lado na teoria da relatividade geral, formulada num espaço-tempo 4-dimensional, que não é fixado a priori, as equações devem guardar suas formas por transformação gerais de sistemas de coordenadas. Chamamos a isto de *princípio da covariância geral*.

Como é natural, deveremos exigir que a formulação de uma teoria gravitacional seja tal que, localmente, obtenhamos a relatividade restrita, e no caso de campos muito fracos e velocidades pequenas, muito menores que a da luz, os resultados coincidam com os da gravitação newtoniana.

---

<sup>1</sup>Um referencial inercial é aquele em que um corpo submetido a uma força resultante nula desloca-se com velocidade constante.

### 2.1.1 Espaço-tempo

Consideremos agora como as quantidades fundamentais se comportam sob uma transformação geral de coordenadas.

#### Vetores

Considere-se a seguinte transformação de coordenadas:

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\nu(x^\mu), \quad (2.1)$$

onde  $\bar{x}^\nu$  são funções diferenciáveis e não degeneradas de  $x^\mu$ , e o índice  $\mu$  varia de 0, 1, 2, 3.

A matriz de transformação é dada por  $\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu}$  sendo o determinante  $|\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu}| \neq 0$ , (o jacobiano da transformação de coordenadas); assim  $x^\mu$  são funções diferenciáveis de  $\bar{x}^\nu$  e não degeneradas.

A matriz  $\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu}$  é a inversa de  $\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu}$ :

$$\sum_{\mu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta_{\nu}^{\alpha}, \quad (2.2)$$

onde

$$\delta_{\nu}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \alpha = \nu \\ 0 & \alpha \neq \nu \end{cases}, \quad (2.3)$$

é o  $\delta$  de Kronecker. Os diferenciais e as bases de vetores transformam-se de acordo com

$$d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.5)$$

Uma base de vetores de um espaço é uma coleção de vetores tal que cada vetor pode ser escrito de uma forma única como combinação linear dos vetores de base. Um *escalar*, ou tensor de ordem zero, é definido como uma quantidade que não muda por transformação de coordenada:

$$\bar{\phi} = \phi. \quad (2.6)$$

Um *vetor contravariante*, ou tensor contravariante de primeira ordem, é definido como uma quantidade que se transforma como um diferencial:

$$\bar{A}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu. \quad (2.7)$$

Um *vetor covariante* é definido como uma quantidade que se transforma da seguinte forma:

$$\bar{B}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} B_\nu. \quad (2.8)$$

Conseqüentemente, a derivada de um escalar é um vetor covariante.

## 2.1.2 Tensores

Um *tensor* é definido como uma quantidade que se transforma como um produto tensorial de vetores:

$$\bar{T}^{\mu\nu\dots}_{\alpha\sigma\dots} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\gamma} \dots \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\zeta}{\partial \bar{x}^\sigma} T^{\beta\gamma\dots}_{\lambda\zeta\dots}. \quad (2.9)$$

Um tensor é do tipo  $(\alpha, \sigma)$  se tem  $\alpha$  índices contravariantes e  $\sigma$  índices covariantes. O escalar é um tensor do tipo  $(0, 0)$ , um vetor contravariante é um tensor do tipo  $(1, 0)$ , e um vetor covariante é um tensor do tipo  $(0, 1)$ . Uma combinação linear de dois tensores do tipo  $(\alpha, \sigma)$  é um tensor do tipo  $(\alpha, \sigma)$ . O produto tensorial de dois tensores dos tipos  $(\alpha_1, \alpha_2)$  e  $(\sigma_1, \sigma_2)$  é um tensor do tipo  $(\alpha_1 + \sigma_2, \alpha_1 + \sigma_2)$ . Os índices do tensor (contravariante ou covariante) podem ser *simetrizados*:

$$T_{(\mu\nu\dots\alpha)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} T_{\pi(\mu)\pi(\nu)\dots\pi(\alpha)}, \quad (2.10)$$

ou *anti-simetrizados*:

$$T_{[\mu\nu\dots\alpha]} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} T_{\pi(\mu)\pi(\nu)\dots\pi(\alpha)} \text{sign}(\pi), \quad (2.11)$$

onde  $\pi$  é uma permutação de índices,  $\text{sign}(\pi)$  é o sinal da permutação e  $n$  é o número de índices simetrizados ou anti-simetrizados. A contração de um tensor do tipo  $(\alpha, \sigma)$  gera um tensor do tipo  $(\alpha - 1, \sigma - 1)$ :

$$T'^{\mu\nu\dots}_{\mu\sigma\dots} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\gamma} \dots \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^{\sigma}} T^{\beta\gamma\dots}_{\lambda\zeta\dots} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\gamma} \dots \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^{\sigma}} \delta^\lambda_\beta T'^{\beta\gamma\dots}_{\lambda\zeta\dots} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\gamma} \dots \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^{\sigma}} T^{\beta\gamma\dots}_{\beta\zeta\dots}. \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Conexão afim e derivada covariante

#### Diferenciação covariante dos tensores

A *derivada covariante* de um vetor  $A_\mu$  é definida como

$$A_{\mu;\alpha} = A_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma A_\sigma, \quad (2.13)$$

onde  $\Gamma_{\mu\alpha}^\sigma$  é conexão afim. Exigindo que  $A_{\mu;\alpha}$  seja um tensor, podemos mostrar que, numa transformação de sistema de coordenadas, obtém-se

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu\prime} = \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu\prime}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha\prime}} \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma + \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^{\alpha\prime} \partial x^{\mu\prime}}, \quad (2.14)$$

o que mostra que  $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$  não é um tensor. No caso de um campo escalar,

$$\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}, \quad (2.15)$$

onde  $_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Supondo que a derivada covariante do produto de dois tensores obedeça à regra de Leibniz, como a derivada ordinária, isto é

$$(TU)_{;\mu} = T_{;\mu}U + TU_{;\mu}, \quad (2.16)$$

então

$$(A_\alpha B^\alpha)_{;\mu} = A_{\alpha;\mu} B^\alpha + A_\alpha B^\alpha_{;\mu} = A_{\alpha,\mu} B^\alpha - \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha A_\alpha B^\sigma + A_\alpha B^\alpha_{;\mu}. \quad (2.17)$$

Consequentemente, obteremos a derivada covariante de um vetor contravariante:

$$B^\alpha_{;\mu} = B^\alpha_{,\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha B^\sigma. \quad (2.18)$$

A regra de Leibniz (2.16), igualmente implica que a derivada covariante de um tensor é igual à soma da derivada ordinária correspondente desses tensores e os termos com as conexões afins para cada índice:

$$T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\sigma\dots;\beta} = T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\sigma\dots,\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\mu T^{\gamma\nu\dots}_{\alpha\sigma\dots} + \Gamma_{\gamma\beta}^\nu T^{\mu\gamma\dots}_{\alpha\sigma\dots} + \dots - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma T^{\mu\nu\dots}_{\gamma\sigma\dots} - \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\gamma\dots} - \dots \quad (2.19)$$



## 2.1.4 Curvatura

### Tensor de Curvatura

O comutador de derivadas covariantes de um vetor é um tensor dado pela seguinte expressão,

$$[\nabla_\nu, \nabla_\alpha]B^\mu = R^\mu{}_{\beta\nu\alpha}B^\beta \quad (2.20)$$

onde, conseqüentemente, temos  $R^\mu{}_{\beta\nu\alpha}$  da seguinte forma:

$$R^\mu{}_{\beta\nu\alpha} = \partial_\nu\Gamma^\mu_{\beta\alpha} - \partial_\alpha\Gamma^\mu_{\beta\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha} - \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\nu}, \quad (2.21)$$

que é chamado de *Tensor de Curvatura*.  $R^\mu{}_{\beta\nu\alpha}$  é anti-simétrico nos índices  $\nu, \alpha$ . O comutador das derivadas covariantes de um vetor covariante é

$$[\nabla_\nu, \nabla_\alpha]A_\mu = -R^\beta{}_{\mu\nu\alpha}A_\beta, \quad (2.22)$$

e a variação do tensor de curvatura é dada pela expressão,

$$\delta R^\mu{}_{\alpha\sigma\beta} = (\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta})_{;\sigma} - (\delta\Gamma^\mu_{\alpha\sigma})_{;\beta}. \quad (2.23)$$

onde  $\delta\Gamma$  é a variação funcional da conexão.

## 2.1.5 Métrica

### Tensor métrico

A métrica é um tensor simétrico covariante de segunda ordem que nos permite definir a distância ou intervalo infinitesimal entre dois pontos:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.24)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (2.25)$$

Em uma variedade riemanniana, a derivada covariante da métrica é nula:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma}g_{\mu\sigma} = 0, \quad (2.26)$$

que implica na existência de uma conexão única e bem definida, a conexão métrica (que é idêntica aos símbolos de Christoffel) dada por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (2.27)$$

Esta conexão é também conhecida por conexão de Levi-Civita ou por conexão de Riemann. A inversa da métrica  $g^{\mu\nu}$  é definida pela seguinte relação:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\alpha} = \delta_{\nu}^{\alpha}. \quad (2.28)$$

A métrica associa índices covariante e contravariante como:

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu}, \quad (2.29)$$

$$B_{\mu} = g_{\mu\nu}B^{\nu}. \quad (2.30)$$

Das definições de conexão métrica (2.27) e do tensor de Riemann (2.23), vêm as seguintes propriedades algébricas:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\sigma} &= -R_{\mu\nu\sigma\alpha}, \\ R_{\mu\nu\alpha\sigma} &= -R_{\nu\mu\alpha\sigma}, \\ R_{\mu\nu\alpha\sigma} &= R_{\alpha\sigma\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Assim o tensor de Riemann tem 20 componentes independentes, em 4 dimensões. Da contração de dois índices do tensor de Riemann, podemos definir o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = R_{\nu\mu}, \quad (2.32)$$

o qual é simétrico por definição. Contraindo a expressão da definição do tensor de Riemann (2.23), obtemos as componentes do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}. \quad (2.33)$$

A variação do tensor de Ricci é dada por

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma})_{;\sigma} - (\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma})_{;\alpha}. \quad (2.34)$$

O *escalar de Ricci*, ou escalar de curvatura, é dado por

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Uma importante propriedade das componentes do tensor de Riemann são as identidades de Bianchi:

$$R^{\mu}{}_{\beta[\nu\alpha;\sigma]} = 0, \quad (2.36)$$

$$R^{\gamma}{}_{[\nu\alpha\sigma]} = 0. \quad (2.37)$$

A equação (2.37) leva a simetria dos índices do tensor de Ricci. Contraindo essas equações com o tensor métrico, resulta em

$$R_{\beta\alpha;\sigma} + R^{\mu}{}_{\beta\alpha\sigma;\mu} - R_{\beta\sigma;\alpha} = 0, \quad (2.38)$$

$$R_{\nu\sigma} - R_{\sigma\nu} = 0, \quad (2.39)$$

Contraindo mais uma vez (2.38) com a métrica, obtemos a seguinte equação da conservação

$$G^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0, \quad (2.40)$$

onde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.41)$$

é chamado de *tensor de Einstein*, o qual é simétrico (e descreve as propriedades geométricas do espaço-tempo) e possui 10 graus de liberdade. O tensor de Riemann, com curvatura constante

$K$ , em um espaço maximalmente simétrico [2], é dado por:

$$R_{\mu\nu\alpha\sigma} = K(g_{\mu\alpha}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\alpha}) \quad (2.42)$$

## 2.1.6 O Princípio Variacional

### Ação de Einstein-Hilbert e as equações de movimento

Assim como as equações da mecânica clássica, as equações de Einstein podem ser deduzidas a partir de um princípio variacional. Concentremo-nos primeiro no caso de um campo gravitacional. O ponto de partida será a ação de Einstein-Hilbert com um termo de matéria

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{-g}d^4x + S_m. \quad (2.43)$$

Essa ação pode ser considerada como um funcional dos campos gravitacional e de matéria. A variação da ação (2.43) em relação às componentes da métrica  $g_{\mu\nu}$ , usando a identidade  $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ , nos fornece

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2\kappa} \int \left( \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{1}{2}R\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) d^4x + \\ &+ \int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento, definido da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.45)$$

Integrando parcialmente o primeiro termo no lado direito de (2.44), e usando (2.40), temos

$$\begin{aligned} \int \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}d^4x &= \int \left( (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})_{;\sigma} - (\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma})_{;\nu} \right) g^{\mu\nu}d^4x \\ &= - \int (g^{\mu\nu})_{;\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - g^{\mu\nu})_{;\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}d^4x = 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde

$$g^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \quad (2.47)$$

é a *densidade métrica* contravariante com derivada covariante nula  $g^{\mu\nu}{}_{;\sigma} = 0$ . Igualando  $\delta S = 0$  em (2.44), podemos finalmente escrever

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.48)$$

ou

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (2.49)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento que descreve o conteúdo material e  $T$  é seu traço. As equações de Einstein (2.48) e (2.40), implicam, por conseguinte, a conservação do tensor energia-momento ou, em outras palavras, que a divergência de  $T_{\mu\nu}$  seja nula:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (2.50)$$

O tensor mais simples que satisfaz esta lei de conservação é a própria métrica. De fato, as equações de Einstein nos dão liberdade para adicionar um termo constante multiplicado pela métrica. Acrescenta-se então um termo suplementar na equação de Einstein, dependendo linearmente do tensor métrico e da *constante cosmológica*  $\Lambda$ . Podemos escrever as equações de Einstein com *constante cosmológica* da seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

onde a constante cosmológica  $\Lambda$  pode ser vista como uma termo geométrico.

Originalmente a constante cosmológica foi introduzida por Einstein em 1917, para construir uma representação de um universo estático na relatividade geral. A constante cosmológica opera como uma pressão negativa contra a gravidade, de modo que os dois efeitos possam se equilibrar. Contudo, após a descoberta da expansão do universo por Hubble, com a medida da recessão das velocidades de galáxias distantes, Einstein abandonou a ideia de adicionar o termo as suas equações. Depois de 1998, a constante cosmológica reviveu como uma formulação de energia escura responsável pela aceleração da expansão do universo. Do ponto de vista da Física de partículas elementares, tenta-se explicar a constante cosmológica como densidade de energia do vácuo quântico [3].

## 2.2 Cosmologia

Nesta seção forneceremos as ferramentas básicas da cosmologia para compreender a história da expansão do universo. Discutiremos então a primeira evidência atual para aceleração cósmica.

### 2.2.1 Do princípio cosmológico ao modelo de concordância

#### Cosmologia padrão

A cosmologia padrão é baseada no *Princípio Cosmológico*, que diz que o universo é homogêneo e isotrópico, pelo menos em grandes escalas. A dinâmica do universo é regida pelas equações de Einstein no *modelo Big Bang quente*. Esse modelo supõe que o universo antigamente estava num estado de densidade e temperatura muito altas, a partir do qual, o espaço-tempo começou a evoluir. Desde então, o universo atravessou um processo de expansão e de resfriamento, passando de um estado extremamente quente e denso para um estado frio e rarefeito. A temperatura hoje é  $T = 2,75K$  [4] e a densidade  $\rho_0 \simeq 10^{-29}g/cm^3$ . Este modelo é apoiado por dados observacionais fortes, tais como:

- A expansão do universo, observada por Hubble em 1929 [5]. O universo encontra-se em expansão uniforme, com a distância média entre os seus constituintes (supostos distribuídos uniformemente) aumentando com uma velocidade  $V = H_0D$ , a lei de Hubble;  $H_0$  é chamado de constante de Hubble,  $D$  é a distância entre os constituintes. Diferentes estimativas de  $H_0$  estão na faixa de  $65 - 70kms^{-1}Mpc^{-1}$ . É usual definir uma quantidade adimensional  $h$  que é a constante de Hubble em unidades de  $100kms^{-1}Mpc^{-1}$  [6]:

$$H_0 = 100hkms^{-1}Mpc^{-1} = 2.1332h \times 10^{-42}GeV, \quad (2.52)$$

O inverso da constante de Hubble é chamado de tempo de Hubble

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 9.78 \times 10^9 h^{-1} \text{ anos}, \quad (2.53)$$

implicando na idade do universo

$$t_0 = 13.7 \times 10^9 \text{ anos}. \quad (2.54)$$

A velocidade da luz multiplicado pelo tempo de Hubble é a distância (ou raio) de Hubble

$$D_H = \frac{c}{H_0} = 3000h^{-1}\text{Mpc} . \quad (2.55)$$

- A nucleossíntese primordial [7], fusão dos elementos leves durante os três primeiros minutos do universo quando a temperatura era alta.
- A radiação cósmica (**CMB**) prevista em 1950 por Gamow e seus colaboradores Alpers e Hermann e detectada em 1965 por Penzias e Wilson [8].
- A formação das grandes estruturas. Naturalmente, observamos inhomogeneidade e irregularidades nas regiões locais do universo, estrelas e galáxias. Elas cresceram com o tempo com a instabilidade gravitacional de distribuição da matéria, que era mais homogênea no passado. Então, as inhomogeneidades podem ser consideradas como pequenas perturbações que evoluem no universo globalmente homogêneo.

### 2.2.2 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

A fim de poder utilizar a teoria da relatividade geral como quadro do modelo cosmológico e deduzir as leis da dinâmica do universo, é necessário impor vínculos: as simetrias induzidas pelo princípio cosmológico e pela expansão do universo. Consideramos este sistema sendo descrito por um espaço-tempo como  $R \times M$ , onde  $R$  representa a direção temporal e  $M$  é uma variedade tridimensional homogênea e isotrópica. O elemento de linha (2.24) pode ser escrito na forma:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j , \quad (2.56)$$

definindo  $a(t)$  como o fator de escala,  $\gamma_{ij}$  é a métrica tridimensional que é função unicamente das coordenadas do espaço  $x^i (i = 1, 2, 3)$  e o tempo  $t$  associado a cada hipersuperfície tipo-espaço é o *tempo cósmico*. A ortogonalidade entre geodésicas e hipersuperfícies espaciais, traduz-se no fato de serem nulos os coeficientes  $g_{0i}$ . O princípio cosmológico tem como consequência matemática, que cada hipersuperfície espacial apresenta uma curvatura constante. O elemento

de linha completo que descreve bem a dinâmica do universo pode ser escrito ( $c = 1$ ):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.57)$$

que é a *métrica de Friedmann-Robertson-Walker*, com os três casos possíveis para curvaturas  $k = 0, +1, -1$ , modelos planos, esféricos fechados e abertos, respectivamente.

- $k = +1$  corresponde a um *espaço esférico fechado*, de volume finito e curvatura positiva. O espaço-tempo apresenta uma topologia do tipo cilíndrico,  $R \times S^3$ ,  $R$  representando o eixo temporal e  $S^3$  a tri-esfera,
- $k = 0$  corresponde a um *espaço aberto*, volume total infinito e curvatura nula. A topologia do espaço é definida por  $R \times R^3$  onde  $R^3$  é o espaço euclidiano,
- $k = -1$  corresponde a um *espaço hiperbólico* tridimensional, *aberto* com volume total infinito e curvatura constante negativa.

Da mesma maneira, as simetrias induzidas pela homogeneidade e pela isotropia do universo impõem um tensor energia-momento da estrutura de um fluido perfeito. Um fluido perfeito é um fluido para o qual existe um referencial em que  $T_\mu^\nu$  é diagonal:

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -p\delta^i_j \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

onde  $\rho = \rho(t)$  e  $p = p(t)$  de acordo com a homogeneidade. Assim temos que

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.59)$$

onde,  $\rho = T_0^0$  é a densidade de energia da matéria,  $p$  é a pressão e  $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$  é quadri-velocidade no referencial co-móvel. Os componentes de matéria e energia do universo são, essencialmente, como veremos mais a frente, matéria escura (**DM**), radiação (fótons, neutrinos), matéria bariônica e energia escura (**DE**).



### 2.2.3 Desvio para o vermelho

Admitiremos, no que segue, que a geometria do universo seja descrita pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker. A propagação da luz faz-se ao longo de geodésicas nulas, que se caracterizam através de um intervalo nulo,  $ds^2 = 0$ . Nestas condições, estando os eixos coordenados orientados de modo a termos uma propagação radial, tiramos de (2.57) a relação

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.60)$$

aplicando o sinal  $(-)$  ao caso de um raio luminoso que se dirija da fonte para o observador. Suponhamos que este raio foi emitido no instante  $t = t_1$ , num ponto de coordenada radial  $r = r_1$ ; integrando a relação anterior

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1), \quad (2.61)$$

onde a função

$$f(r_1) = \begin{cases} \arcsin r_1 & \text{para } k = +1, \\ r_1 & \text{para } k = 0, \\ \sinh^{-1} r_1 & \text{para } k = -1, \end{cases}$$

é independente do tempo, pois as coordenadas são co-móveis. Se tivermos dois raios luminosos emitidos em instantes de tempo sucessivos  $t_1$  e  $t_1 + dt_1$  e recebidos em  $t_0$  e  $t_0 + dt_0$ , obtemos

$$\int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.62)$$

ou seja,

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_1}{a(t_1)}, \quad (2.63)$$

o que implica em

$$\frac{dt_0}{dt_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \quad (2.64)$$

sendo  $\nu_1$  e  $\nu_0$  as frequências emitida e observada, respectivamente. A expansão do universo conduz a um aumento no comprimento de onda observado, isto é, o desvio para o vermelho da luz de uma fonte distante. Definiremos o *desvio para o vermelho* cosmológico  $z$  como sendo

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \quad (2.65)$$

O desvio para o vermelho  $z$  é usado geralmente como o indicador pelo tempo cósmico  $t$ , porque pode ser medido por um determinado objeto astrofísico. Se a luz emissora de um objeto distante é emitida e o observador detecta o comprimento de onda esticado por um fator de  $(1 + z)$ , o objeto teria uma distância que corresponde ao desvio para o vermelho  $z$ . O comprimento de onda físico da luz emissora no tempo  $t$  é dado por:

$$\lambda_{\text{fis}} = a(t)\lambda, \quad (2.66)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda co-móvel. Como o universo expande,  $a(t)$  aumenta com o tempo. As quantidades co-móveis não mudam com a expansão do universo.

## 2.2.4 Dinâmica do universo: equações de Friedmann

### Formulação

Para termos uma descrição mais completa do universo, e se quisermos compreender o universo presente a partir de sua história passada, é necessário conhecer a dinâmica de sua evolução, que é nos dada pelas equações de Einstein, suplementadas pelo princípio cosmológico, o qual nos permite deduzir o elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker. As equações de Einstein com o termo de constante cosmológica, têm a seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \right) = 8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{tot}}, \quad (2.67)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  é Tensor de Ricci,  $T_{\mu\nu}^{\text{tot}}$  é o tensor energia-momento e  $R$  é a escalar de curvatura. Assim, para construir o modelo cosmológico padrão do universo, devemos começar considerando um universo espacialmente homogêneo, isotrópico descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Usando essa métrica (2.57) e o tensor energia-momento de

um fluido perfeito (2.59), as equações de Einstein (2.67) reduzem-se a duas equações diferenciais independentes para o fator de escala  $a(t)$ . A componente 0-0 da equação de Einstein conduz à *equação de Friedmann*:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G \frac{1}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.68)$$

A segunda equação de Einstein conduz à

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \frac{1}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.69)$$

Precisaremos, ainda, da equação da conservação do tensor energia-momento. Combinando as Eqs. (2.68) e (2.69), obtemos a conservação da energia:

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3), \quad (2.70)$$

a qual pode ser derivada diretamente da Eq (2.50)

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\nu} T^{\mu\lambda} = 0, \quad (2.71)$$

da qual, para  $\nu = 0$ , obtemos:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.72)$$

Definindo a equação de estado barotrópica

$$p = \omega \rho, \quad (2.73)$$

onde  $\omega$  é uma constante, a Eq. (2.72) pode ser reescrita como

$$\frac{d \ln \rho}{da} = -3 \frac{1 + \omega}{a}. \quad (2.74)$$

Graças à equação de estado (2.73) e à equação da conservação (2.72), obtemos a evolução da densidade de cada componente em função de  $a(t)$ :

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} . \quad (2.75)$$

Usando à equação (2.68), obtemos o fator de escala em função do tempo:

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} , \quad (2.76)$$

onde  $\omega \neq -1$ . Dois casos importantes são os que dizem respeito a um universo dominado por matéria (também dita de *poeira*) e a um universo dominado por radiação.

Para a **fase de matéria** ( $\omega = 0$ ), temos ( $p = 0$ )

$$\rho_m \propto a^{-3} . \quad (2.77)$$

A equação acima é interpretada como a diminuição da densidade de energia devido à diluição do número de partículas decorrente da expansão do universo.

Para a **fase de radiação** ( $\omega = \frac{1}{3}$ ), temos

$$\rho_r \propto a^{-4} . \quad (2.78)$$

Note que a densidade de energia da radiação decresce mais rapidamente que a densidade de energia da matéria. Isto decorre do fato de que, embora a densidade numérica dos fótons decresça da mesma forma que a das partículas não-relativísticas, existe um fator adicional  $a^{-1}$ , pois os fótons perdem energia devido ao desvio para o vermelho.

Uma outra equação de estado relevante em cosmologia é a de um universo dominado por uma **constante cosmológica**. Nesse caso  $\omega = -1$  e a densidade de energia  $\rho$  é uma constante, e temos então

$$a \propto \exp(Ht) , \quad (2.79)$$

onde  $H$  é uma constante.

Uma forma conveniente de escrever as equações de Friedmann (2.68) é utilizando o *parâmetro*

de densidade definido como

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{cr}}} = \frac{8\pi G \rho_i}{3H^2}, \quad (2.80)$$

onde  $\rho_{\text{cr}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$  é a chamada *densidade crítica*. A equação de Friedmann, considerando como componentes do universo a radiação (*fótons + neutrinos*) + a matéria (*escura e bariônica*) + e a constante cosmológica, pode ser escrita como

$$H(z)^2 = H_0^2[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]. \quad (2.81)$$

Tomando  $z = 0$  e  $H(z = 0) = H_0$  obtemos

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1, \quad \text{onde} \quad \Omega_k = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.82)$$

Note que das observações resulta que  $\Omega_r \ll \Omega_m$ , assim o parâmetro de densidade da matéria relativística  $\Omega_r$  é omitido geralmente em estudos em tempos recentes. Esta equação liga a curvatura do universo  $\Omega_k$  ao conteúdo de matéria  $\Omega_m$  e à constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$ . Deste jeito, conhecendo a soma  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = \Omega_{\text{tot}}$  é possível determinar a geometria do universo:

- $\Omega_{\text{tot}} < 1$ :  $k = 1$ , universo fechado,
- $\Omega_{\text{tot}} = 1$ :  $k = 0$ , universo plano,
- $\Omega_{\text{tot}} > 1$ :  $k = -1$ , universo aberto.

O modelo cosmológico, descrito nos parágrafos precedentes, conheceu grandes sucessos como a expansão do universo, a nucleossíntese primordial e a radiação cósmica de fundo. Contudo, um certo número de observações não podem ser explicadas utilizando este modelo. Podemos notificar aqui três problemas: problema do *horizonte*, da *planitude* e da *homogeneidade*, os quais são tratados geralmente no contexto do modelo inflacionário.

## O modelo $\Lambda$ CDM

O cenário da constante cosmológica ( $\Lambda$ CDM, ou seja, o modelo com matéria escura fria e constante cosmológica) é aquele que melhor se ajusta as observações. Este corresponde a uma

densidade lagrangiana que é escrita como  $f(R) = R - 2\Lambda$ . Ele trata de forma separada a matéria escura sem pressão e a energia escura. Nesta seção, vamos mencionar às observações mais recentes que têm permitido vincular o mais precisamente possível os parâmetros cosmológicos, conduzindo assim ao modelo de concordância  $\Lambda$ CDM. Como descrevemos na seção precedente, a dinâmica do universo, via equações de Friedmann, é governada pelos parâmetros cosmológicos que caracterizam seu conteúdo e a sua geometria.

## Radiação

Sendo proporcional à  $a^{-4}$ , a densidade de radiação é atualmente negligenciável:  $\Omega_r h^2 = 2,47 \times 10^{-5}$ .

## Matéria bariônica

A nucleossíntese primordial prediz a abundância de Hélio, Deutério e Lítio também. Esse valor é consistente com os dados obtidos mediante cálculos da abundância de bárions, a partir das observações das flutuações de temperatura na radiação cósmica de fundo, feitas pelo satélite WMAP. A análise feita com os dados da nucleossíntese indica que  $\Omega_b h^2 = 0,02$ ,  $\Omega_b = 0,0456$  se  $h = 0,7$ .

## Matéria escura

Além da existência dos bárions, fótons e neutrinos, existe uma outra componente exótica, não bariônica, chamada de matéria escura, que é incluída para dar conta do problema da formação de estruturas no universo (além de outras motivações). Essa matéria escura, da mesma forma que a energia escura, ainda não foi detectada experimentalmente. A expressão “matéria escura”, foi usada para descrever matéria sem pressão (não-relativística) que interage de forma muito fraca com as partículas da matéria usual. A existência da matéria escura foi indicada pela primeira vez em 1933 por Fritz Zwicky, que comparou as velocidades de dispersão das galáxias no aglomerado de Coma com a massa das estrelas observadas. Uma vez que a matéria escura não emite a radiação eletromagnética, sua presença é detectada principalmente pelos efeitos gravitacionais (por exemplo, o efeito de lente gravitacional, que é uma medida indireta). A matéria escura pode aglomerar-se pela instabilidade gravitacional (ao contrário

da energia escura), gerando as estruturas locais que são observadas no universo. Ela tem um papel crucial para a formação de estruturas em grandes escalas no universo, como galáxias e aglomerados de galáxias. Em 2005, a detecção de pico das oscilações acústicas bariônicas (**BAO**) no desvio para o vermelho médio  $z = 0,35$  [9], das observações de galáxias vermelhas luminosas na SDSS (Sloan Digital Sky Survey) indica um valor aproximativo de  $\Omega_m = 0,273$ .

Nos anos 1970-1980, existiam dois modelos de matéria escura completamente opostos que estavam em competição: o modelo “top-down”, que considerava as estruturas maiores, aglomerados e super-aglomerados, formando-se primeiro e posteriormente fragmentando-se em galáxias; o modelo “bottom-up”, que considerava as menores estruturas formando-se primeiro e seguidamente aglomerando-se para formarem as maiores. Estes dois modelos diferenciavam-se pela natureza das flutuações primordiais, a partir das quais desenvolveram-se as estruturas, e de espécies de matéria escura.

As perturbações geradas no início da história do universo e que darão origem às estruturas observadas podem ser de diferente natureza. Existem flutuações de densidade, acompanhadas também por flutuações de pressão e de temperatura que mantêm a entropia constante. Chama-se esse tipo de flutuação de adiabática. Nestas flutuações, o número de fótons permanece proporcional ao número de partículas de matéria. No modo isotérmico, os fótons não seguem a matéria e não flutuam. A temperatura permanece por conseguinte constante. Este modo era tomado sobretudo em consideração antes da medida efetiva das anisotropias da radiação cósmica de fundo. Desde que se observou flutuações de temperatura na **CMB**, os modelos não-adiabáticos mais considerados são os modelos de flutuações de iso-curvatura, que conservam a curvatura e a massa uniforme. Provavelmente a combinação desses dois tipos de modos independentes de flutuações se aproxima à realidade.

Cada tipo de flutuação é associada a um tipo de matéria escura: seja a matéria escura fria (**CDM**-Cold Dark Matter) seja a matéria escura quente (**HDM**-Hot Dark Matter). O caráter “quente” ou “frio” está relacionado à velocidade média das partículas quando desacoplam-se do plasma primitivo, onde fótons, bárions e matéria escura estão em equilíbrio. Neutrinos são por conseguinte os melhores candidatos para constituir a matéria escura quente. Sua velocidade relativística, impede que as flutuações da matéria em pequena escala cresça. Atualmente, o cenário admitido para a formação das estruturas é o hierárquico, segundo o qual, as primeiras estruturas que se formam são as menores, que seguidamente se fundem para formarem as

maiores.

## Aceleração cósmica e energia escura

A descoberta que a expansão do universo é acelerada foi feita primeiramente por Riess (1998) [10] e por Perlmutter (1999) [11], com as observações de supernovas do tipo Ia (**SNeIa**). A fonte para esta aceleração cósmica do universo é a “energia escura”. Apesar de muitos anos de pesquisa (veja por exemplo, as revisões [12–16]) sua origem ainda não foi identificada.

A energia escura é uma componente distinta da matéria ordinária como a bariônica e a radiação, no sentido que ela tem uma pressão negativa e tem a característica de não se aglomerar em pequenas escalas estando, portanto, distribuída de forma mais homogênea que a matéria escura (não bariônica). Essa pressão negativa conduz à expansão acelerada do universo neutralizando a força gravitacional. As observações de supernovas do tipo Ia (**SNeIa**) mostraram que aproximadamente 70% da energia atual do universo consiste da energia escura. O candidato mais simples para a energia escura é a constante cosmológica. Se a constante cosmológica é responsável pela aceleração cósmica atual, precisamos encontrar um mecanismo para obter o valor minúsculo e consistente com as observações.

A fim de distinguir esta variedade de modelos da energia escura, é importante impormos limitações, usando dados observacionais tais como o **SN Ia**, **CMB**, e estrutura em grandes escalas (**LSS**). Geralmente, a maneira mínima de incluir a energia escura nesta estrutura é adicionar uma nova componente de fluido perfeito, com equação de estado,  $\omega_X = p_X/\rho_X$ , onde  $\omega_X$  é o parâmetro da equação de estado,  $p_X$  é a pressão e  $\rho_X$  é a densidade de energia. Isso é uma boa medida para descrever a propriedade da energia escura a nível do fundo. Então podemos reescrever a equação de Friedmann em termos do parâmetro de Hubble  $H(z)$ .

$$H(z)^2 = H_0^2[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_X X(z)], \quad X(z) = \frac{\rho_X(z)}{\rho_X(0)}. \quad (2.83)$$

Exigindo a consistência da Eq (2.83) e  $z = 0$ ,  $H(z = 0) = H_0$  fornece

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_X = 1. \quad (2.84)$$

Note que para uma constante cosmológica temos  $X(z) = const$ ,  $p_X = -\rho_X$ , que resulta em  $\omega_X = -1$ . Em outros modelos da energia escura a equação de estado varia geralmente no tempo.



Talvez a primeira tarefa da investigação da energia escura seja de detectar desvios de  $\omega_X$  da ordem do valor  $-1$ , para encontrar se a energia escura pode ser identificada com a constante cosmológica ou não. As observações de **SN Ia** forneceram a informação da expansão cósmica em torno do desvio para o vermelho  $z \lesssim 2$ , pela medida de distâncias da luminosidade das fontes. A presença de energia escura conduz a um deslocamento da posição dos picos acústicos em anisotropias da **CMB**, assim como uma alteração do espectro da **CMB** em grandes escalas com chamado a isto *efeito integrado Sachs-Wolfe* [17].

Os dados apenas da **CMB**, não são suficientes para colocar limitações fortes na energia escura. A análise combinada do **SN Ia** e **CMB** pode fornecer limites na equação de estado de  $\omega_X$  e a fração atual da densidade  $\Omega_X$  da energia escura [18]. A distribuição da aglomeração das galáxias em escala muito grande no céu, fornece igualmente as informações adicionais nas propriedades da energia escura [19–21]. Isto igualmente deu-nos um outro teste independente da energia escura. Da análise combinada do **SN Ia**, **CMB**, e **BAO**, o grupo de **WMAP** [18] obteve o intervalo  $-1,097 \leq \omega_X \leq -0,858$  a 95% de nível de confiança, supondo uma equação de estado constante. A constante cosmológica ( $\omega_X = -1$ ) é consistente com os dados observacionais atuais, quando alguns modelos de energia escura tem sido excluídos pelas observações.

## Da inflação a energia escura

A cosmologia moderna revela que uma outra aceleração cósmica chamada “**inflação**” ocorreu no universo passado, antes da fase da radiação. A ideia da inflação foi proposta originalmente no princípio dos anos 80 [22–25] para resolver diversos problemas cosmológicos tais como: problemas da planitude e do horizonte. A inflação, fornece igualmente um mecanismo causal para a origem da estrutura em grandes escalas no universo. As anisotropias da temperatura na radiação cósmico de fundo (**CMB**), observada pelo satélite **COBE** em 1992 [4], mostrou que o espectro da flutuação é quase invariante de escala, consistente com as previsões teóricas do espectro de potência da perturbação da densidade, originada das flutuações quânticas de um campo escalar durante a inflação. Depois de 2003, o grupo **WMAP**, forneceu dados observacionais, com precisão elevada, das anisotropias da **CMB** [18, 26, 27], o que deu um forte apoio para a existência do período inflacionário, da mesma forma que a energia escura.

Depois do fim da **inflação** o universo incorporou a **fase da radiação**, período em que os elementos como deutério foram formados. Como a densidade de energia da radiação diminui

mais rapidamente do que aquela da matéria não-relativística (matéria escura e as bariônicas), a **fase da radiação** é seguida pela época da matéria, em torno do desvio para o vermelho  $z = 3000$ . A temperatura das anisotropias observadas por **COBE** e pelo **WMAP**, ocorreram na última superfície de espalhamento em que elétrons foram ligados pelo hidrogênio para formar átomos. Após este desacoplamento, os fótons puderam mover-se livremente sem experimentar a dispersão de Thomson. O desacoplamento corresponde ao desvio para o vermelho da ordem de  $z = 1090$ . De acordo com o **WMAP** e a partir de dados como em [18], as componentes da energia na época do desacoplamento são a matéria escura (63%), a radiação (25%), (fótons (15%) , neutrinos (10%)), a matéria bariônica (12%) e uma quantidade desprezível de energia escura.

A formação de estruturas (galáxias e aglomerados) começou na **fase da matéria**, isto é, quando a matéria escura começou a dominar a densidade da energia total do universo. A matéria bariônica igualmente contribui na formação das estruturas em grandes escalas, em certa medida. Obviamente, as estruturas observadas são feitas de matéria bariônica. Durante a fase da matéria, a densidade da energia escura é negligenciável se comparada àquela da matéria escura, a fim de permitir suficiente crescimento da estrutura em grande escala. Se a energia escura for acoplada com a matéria escura, através de alguma interação (como no cenário de acoplamento da quintessência [28, 29]), então a energia escura igualmente afeta a história passada da expansão do universo, assim como a formação das estruturas em grandes escalas.

Enquanto a densidade de energia da matéria escura evolui como  $\rho_m \propto a^{-3}$ , a densidade de energia escura é quase constante no tempo ( $\rho_x \propto a^{-n}$  com  $n$  provavelmente perto de 0). O início da aceleração cósmica ocorre em torno do desvio para o vermelho  $z \sim 1$ , embora haja ainda uma incerteza para seu valor preciso, devido à dependência do modelo. Vivemos então em uma fase especial da aceleração cósmica na história da expansão do universo. O problema da aceleração da expansão do universo começar ao redor do tempo atual, é chamado frequentemente de problema da coincidência. A era da radiação é posterior a uma fase de aceleração cósmica (inflação) e a da matéria é anterior a uma outra fase (energia escura).

## 2.3 Modelos de energia escura

Se a origem da energia escura não for a constante cosmológica, pode-se procurar alguns modelos alternativos para explicar a aceleração cósmica hoje. As perguntas a respeito da natureza da matéria escura e da energia escura são dois problemas fundamentais da cosmologia atual. Nenhuma resposta ainda foi encontrada, e numerosos modelos tentam elucidar estas perguntas. As investigações recentes para resolver os enigmas da matéria escura e da energia escura, do modelo cosmológico padrão, seguem principalmente duas direções: uma primeira aproximação se concentra na introdução específica das novas fontes no tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$ , sendo que uma delas deva ter uma pressão negativa no lado direito das equações de Einstein, e constitui assim um desafio para a física de partículas; enquanto a outra invoca uma modificação da geometria do espaço-tempo (o lado esquerdo das equações de Einstein), restringindo-se sobretudo a algumas modificações da teoria da gravitação subjacente.

Por exemplo, um campo escalar fundamental descrevendo um fluido exótico é considerado, e estudado sobre uma base fenomenológica. A palavra exótico provém do fato que tal fluido deve violar propriedades padrões dos fluidos (condições de energia) de maneira a satisfazer os dados observacionais. Os principais modelos representativos que pertencem a esta classe são os campos escalares dinâmicos (*quintessência*) [30–44], os campos escalares com termos cinéticos não canônicos (modelos de *k-essência*) [45–47] e finalmente os modelos de fluidos [48, 49]. A quintessência utiliza campos escalares com potenciais que variam lentamente, ao passo na *k-essência* é a energia cinética do campo escalar que conduz à aceleração.

Poderíamos também descrever fenomenologicamente as duas componentes escuras através de uma única equação de estado específica. Tais modelos são conhecidos na literatura como modelos de quartessência ou **UDM**. O protótipo dos modelos de quartessência são baseados em um fluido perfeito com uma equação de estado específica, como o modelo do gás de Chaplygin [50] e sua generalização [48], que pode ser obtida a partir de uma densidade lagrangiana com um potencial adequado. Os modelos de Chaplygin têm sido testados com dados observacionais de **SNeIa**, lentes gravitacionais, rádio galáxias e fração de bárions [51–53]. Houve muitas tentativas de construir um modelo de campo escalar para a energia escura, baseados na física de partículas (veja [49, 54–57]).

A componente da energia escura pode advir, por exemplo, do lagrangiano de curvatura de

Ricci de ordens superiores [58–60], as teorias Escalares-Tensoriais [29, 61–63], e os modelos braneworld [12, 64]. Uma alteração possível do **CDM** é descrito por uma densidade lagrangiana não-linear em termos de  $R$ , que é chamado Teoria  $f(R)$ .

As teorias Escalares-Tensoriais correspondem a teorias em que o escalar de Ricci  $R$  acopla a um campo escalar  $\phi$ , com uma forma de acoplamento  $F(\phi) \times R$  chamado de acoplamento não-mínimo. Ela inclui a teoria de Brans-Dicke [65] e a Gravidade Dilatônica [66] como casos específicos. Há também a possibilidade de explicar a aceleração cósmica através de teorias de dimensões extras: por exemplo modelos de braneworld propostos por Dvali, Gabadadze e Porrati (**DGP**) [64].

### Exemplo: gás de Chaplygin

Nesta seção, discutimos o arquétipo dos modelos de unificações da energia escura e da matéria escura. O gás de Chaplygin é um fluido que pode conduzir à aceleração cósmica no futuro e que tem a seguinte equação de estado

$$p = -\frac{A}{\rho}, \quad (2.85)$$

onde  $A$  é uma constante positiva. O gás generalizado de Chaplygin tem uma equação de estado

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}. \quad (2.86)$$

Usando as equações (2.86) e (2.72), resulta em

$$\rho_c = \rho_{c0} g(a)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad g(a) = \bar{A} + \frac{(1 - \bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}}, \quad (2.87)$$

onde  $\bar{A} = \frac{A}{\rho_{c0}^\alpha}$  é uma constante. A equação de estado do gás generalizado de Chaplygin é

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{A}{\rho^{\alpha+1}} = -\frac{1}{1 + \frac{\bar{A}}{A}(1+z)^{3(1+\alpha)}}. \quad (2.88)$$

O gás generalizado de Chaplygin comporta-se como a matéria no passado

$$\rho \propto a^{-3}, \quad \omega \simeq 0, \quad \text{por } a \ll 1, \quad (2.89)$$

e como uma constante cosmológica no futuro

$$\rho \simeq \text{const}, \quad \omega \simeq -1, \quad \text{por } a \ll \left(\frac{\bar{A}}{A}\right)^{\frac{1}{3(1+\alpha)}}. \quad (2.90)$$

O modelo original do gás de Chaplygin corresponde a  $\alpha = 1$ . Uma constante cosmológica corresponde a  $\alpha = 0$  e  $\bar{A} = 1$ . O gás de Chaplygin fornece uma possibilidade interessante para a unificação da energia escura e da matéria escura. Localmente o fluido pode se aglomerar enquanto, ao mesmo tempo, pode permanecer como uma componente homogênea a grandes escalas. Outra vantagem é que este modelo, a nível das equações de base, descreve bem a distância de luminosidade observada através das supernovas tipo Ia [67, 68]. Porém, a nível perturbativo o espectro de potência das perturbações de densidade possui grandes oscilações [69], que não aparecem no espectro de potência de massa observado, muito embora isto ainda seja objeto de controvérsias.

# Capítulo 3

## Teoria das perturbações cosmológicas

Apresentamos neste capítulo os princípios da teoria linear das perturbações cosmológicas. Começaremos com a discussão não relativística e concluiremos com a discussão relativística geral, onde estudaremos diversos casos no calibre newtoniano e no síncrono, a partir das fórmulas da métrica (2.57), do tensor energia-momento (2.59), e das equações de Einstein (2.67).

### 3.1 Perturbações cosmológicas newtonianas.

A teoria newtoniana, como uma aproximação limite da relatividade geral, é somente aplicável em cosmologia para escalas dentro do raio de Hubble, onde os efeitos da curvatura do espaço-tempo são negligenciáveis. Neste contexto, analisamos somente as perturbações da densidade na componente não-relativística. Perturbações na matéria, em todas as escalas, exigem a teoria relativística completa. Assim, torna-se claro que a análise newtoniana aplica-se somente à fase material do universo. Aqui, apresentaremos a ideia da instabilidade de Jeans, usando como exemplo simples um fluido não-relativístico sujeito à expansão cósmica.

#### As equações gerais do fluido

Para começarmos, consideraremos algumas ideias fundamentais que se aplicam a ambas as teorias, newtoniana e relativística. Seguindo a referência [70], modelamos o universo como um fluido. Um conceito adicional importante é o de observador co-móvel, que segue a expansão do universo. Adotando uma descrição newtoniana, especificando as coordenadas do espaço com  $\vec{x}$  e

um tempo universal com  $t$ , consideramos um fluido com a densidade  $\rho(\vec{x}, t)$  e a pressão  $p(\vec{x}, t)$ , movendo-se com a velocidade  $\vec{V}$  no potencial gravitacional  $\Phi(\vec{x}, t)$ . Sua evolução é governada pelas equações

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \Phi = 0, \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi - 4\pi G \rho = 0. \quad (3.3)$$

As expressões (3.1), (3.2) e (3.3) descrevem as equações da continuidade, de Euler e de Poisson. Um elemento de fluido tem posição  $r(\vec{t}) = a(t)\vec{x}$ , com  $\vec{x}$  co-móvel e velocidade  $\vec{V} = \frac{da}{dt}\vec{x} = \frac{d\vec{r}}{dt} = H(t)r(\vec{t})$  onde usamos  $\dot{\vec{x}} = 0$  (co-móvel). A derivada em relação o tempo, ao longo da trajetória do elemento é:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}). \quad (3.4)$$

As perturbações são introduzidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= \rho^{(0)}(t) + \delta\rho(t, \vec{x}), \\ p(t, \vec{x}) &= p^{(0)}(t) + \delta p(t, \vec{x}), \\ \vec{V}(t, \vec{x}) &= \vec{v}^{(0)}(t) + \delta\vec{v}(t, \vec{x}), \\ \Phi(t, \vec{x}) &= \Phi^{(0)} + \delta\Phi(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

com,  $\vec{v}^{(0)} = H(t)\vec{r}$  e  $\Phi^{(0)} = \frac{2G\rho^{(0)}x^2}{3}$ , onde  $\delta\vec{v}(t, \vec{x})$  é a velocidade peculiar e  $\delta\Phi(t, \vec{x})$  é o potencial gravitacional peculiar das perturbações da densidade de matéria  $\delta\rho(t, \vec{x})$ . Sendo a pressão homogênea, ela não contribui a nível da base. Podemos escrever as equações pelas perturbações de primeira ordem como:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \delta v = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + H \delta \vec{v} + \frac{c_s^2}{a\rho^{(0)}} \vec{\nabla} \delta + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \delta \Phi = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla^2 \delta \Phi - 4\pi G a^2 \rho^{(0)} \delta = 0, \quad (3.8)$$

onde  $\delta \equiv \delta\rho/\rho^{(0)}$  é o contraste da densidade e  $c_s = \frac{\delta p}{\delta\rho}$  é a velocidade do som. Os resultados (3.6)-(3.8) determinam completamente o comportamento das perturbações da densidade. Quando combinados conduzem a uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a evolução linear do contraste da densidade. Em particular, tomando a derivada temporal de (3.6) e usando as Eqs. (3.7), (3.8), encontramos

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta = -2H \frac{\partial \delta}{\partial t} + 4\pi G \rho^{(0)} \delta. \quad (3.9)$$

Acima supomos a gravidade newtoniana, a qual exige a dominação da matéria, além de uma constante cosmológica nula. Contanto que as escalas sejam menores que a do horizonte, a Eq. (3.9) pode descrever as perturbações da matéria na presença de um fundo radiativo ou de uma constante cosmológica.

A equação (3.9) é uma equação de propagação de onda com dois termos extras do lado direito, um devido à expansão do universo e o outro devido à gravidade. Conseqüentemente, é natural procurar soluções de onda plana da seguinte forma:

$$\delta = \int \tilde{\delta}_{(\vec{k})}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (3.10)$$

onde  $\tilde{\delta}_{(\vec{k})} = \tilde{\delta}_{(\vec{k})}(t)$ ,  $k = \sqrt{k_\alpha k^\alpha}$  é a quantidade associada ao número de onda co-móvel e  $k_\alpha$  é o vetor de onda. Com a decomposição de Fourier de Eq. (3.9) obtemos

$$\frac{d^2 \tilde{\delta}_{(k)}}{dt^2} = -2H \frac{d\tilde{\delta}_{(k)}}{dt} + \left( 4\pi G \rho^{(0)} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2} \right) \tilde{\delta}_{(k)}, \quad (3.11)$$

a qual determina a evolução do modo perturbativo  $k$ . O primeiro termo no lado direito da Eq. (3.11) é devido à expansão e sempre suprime o crescimento de  $\tilde{\delta}_{(k)}$ . O segundo reflete o conflito entre a força da pressão e a gravidade. Quando  $4\pi G \rho^{(0)} \gg c_s^2 k^2/a^2$  é a gravidade dominante. Por outro lado, é a pressão que domina se  $c_s^2 k^2/a^2 \gg 4\pi G \rho^{(0)}$ . O ponto  $4\pi G \rho^{(0)} = c_s^2 k^2/a^2$  define a escala de comprimento

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho^{(0)}}}, \quad (3.12)$$

onde  $k = \frac{2\pi a}{\lambda_J}$ . A escala física  $\lambda_J$ , conhecida como “ comprimento de Jeans ”, constitui uma característica da perturbação, pois separa os modos gravitacionais estáveis dos instáveis. As



flutuações em escalas bem além do  $\lambda_J$ , crescem através da instabilidade gravitacional, enquanto modos com  $\lambda \ll \lambda_J$  são estabilizados pela pressão. O comprimento de Jeans corresponde a uma “ massa de Jeans”, definida como a massa contida dentro de uma esfera de raio  $\lambda_J/2$

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3, \quad (3.13)$$

onde  $\rho$  é a componente da densidade perturbada.

Até aqui consideramos somente um fluido. Ao tratar perturbações em um meio de multi-componentes (por exemplo bárions, fótons, neutrinos ou outras partículas exóticas), as componentes não-relativísticas evoluem de acordo com

$$\frac{d^2\delta_i}{dt^2} = -2H\frac{d\delta_i}{dt} + 4\pi G\rho^{(0)} \sum_j \epsilon_j\delta_j - \frac{(c_s^2)_i k^2}{a^2}\delta_i, \quad (3.14)$$

onde o índice  $i$  refere-se as diferentes componentes e  $\epsilon_i = \rho_i/\rho^{(0)}$ . A soma é feita sobre todas as espécies  $\epsilon_i$  que fornece uma medida da contribuição de cada componente  $i$  da densidade total do fundo  $\sum_i \rho_i$ . Contudo, a densidade da componente de matéria fria, contribui com a expansão do fundo. Em primeira aproximação,  $H$  é determinada pelo componente que domina a gravitação. Chamaremos  $t_{\text{eq}}$  o tempo a partir do qual a matéria domina a evolução cósmica.

Procuraremos agora soluções das Eqs. (3.11) e (3.14) nas três seguintes situações diferentes:

- ★ Perturbações da componente não-relativística dominante (bariônica ou não) para  $t > t_{\text{eq}}$ .
- ★ Flutuações da matéria não-bariônica para  $t < t_{\text{eq}}$ .
- ★ Perturbações de bárions em presença de uma espécie dominante, sem colisão.

## Universo Einstein -de Sitter perturbado

Consideramos um fluido com pressão desprezível (i.e.  $p = 0 = c_s^2$ ). Esse modelo, igualmente conhecido como universo de Einstein-de Sitter, fornece uma boa descrição do nosso universo após a recombinação. À ordem zero  $a \propto t^{2/3}$ ,  $H = 2/(3t)$  e  $\rho^{(0)} = 1/6\pi Gt^2$ . Perturbamos este fundo e investigamos escalas dentro do raio de Hubble, onde o tratamento newtoniano é

aplicável. Ao usar a definição (3.12) e relação  $\lambda = 2\pi a/k$ , Eq. (3.11) se torna

$$t^2 \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{4}{3} t \frac{d\delta}{dt} - \frac{2}{3} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 \right] \delta = 0, \quad (3.15)$$

onde, em particular, temos  $\lambda_J = 0$  para  $c_s = 0$ . Para modos dentro do horizonte e maiores que o comprimento de Jeans ( $\lambda_J \ll \lambda \ll \lambda_H$ ) encontramos

$$\delta = \mathcal{C}_1 t^{2/3} + \mathcal{C}_2 t^{-1}, \quad (3.16)$$

para a evolução do contraste da densidade. Há duas soluções: uma que cresce e outra que decresce. A solução geral é expressa como uma combinação linear dos dois modos. No passado, somente o modo crescente das perturbações era importante. Note que as perturbações bariônicas não podem crescer até que a matéria bariônica desacople da radiação na recombinação (supomos sempre  $t_{\text{eq}} < t_{\text{rec}}$ ). As partículas da matéria escura, por outro lado, já estão desacopladas e as flutuações na densidade delas podem crescer imediatamente depois da equivalência. Em seguida à recombinação, a perturbação na densidade dos bárions também cresce proporcionalmente ao fator de escala. Em escalas muito menores que o comprimento de Jeans ( $\lambda \ll \lambda_J$ ), a Eq. (3.15) admite a solução

$$\delta = \mathcal{C} t^{-1/6} e^{\pm i \sqrt{2/3} (\lambda_J/\lambda) \ln t}, \quad (3.17)$$

a qual descreve uma oscilação dissipativa. Assim, perturbações em escalas muito pequenas na matéria não-relativística são suprimidas pela pressão.

### Mistura de radiação e matéria escura

Consideramos a era da radiação:  $a \propto t^{1/2}$  e  $H = 1/2t$ . Aplicando a Eq. (3.14) a uma mistura da radiação e de partículas sem colisão, com  $c_s = 0$ , temos

$$\frac{d^2 \delta_{\text{me}}}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_{\text{me}}}{dt} = 4\pi G (\rho_r \delta_r + \rho_{\text{me}} \delta_{\text{me}}) \simeq 4\pi G \rho_r \delta_r, \quad (3.18)$$

com  $\rho_{\text{me}} \ll \rho_{\text{r}} \simeq \rho^{(0)}$ . Consideramos que as flutuações no fluido radiativo são desprezível. Dado que antes da equipartição  $H = 1/2t$ , a equação acima reduz-se a

$$t \frac{d^2 \delta_{\text{me}}}{dt^2} + \frac{d\delta_{\text{me}}}{dt} = 0, \quad (3.19)$$

e admite a solução

$$\delta_{\text{me}} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \ln t. \quad (3.20)$$

Assim a solução geral é a superposição de uma constante mais um termo logarítmico. Isto significa que as perturbações podem crescer no máximo em logaritmo, i.e., muito mais devagar do que fariam em um universo dominado pela matéria. Este resultado, conhecido como o *efeito Méészáros* [71], implica que a formação de estrutura tem que esperar até que o universo passe pela fase de matéria. A razão física para este resultado pode ser identificada como consequência da expansão rápida durante a era da radiação. Assim, nas perturbações de pequena escala da época da radiação no componente sem colisão, temos um crescimento logarítmico, mesmo quando  $\lambda > \lambda_{\text{J}}$ .

### Mistura de matéria escura e bariônica

Durante o período entre o equilíbrio e a recombinação as perturbações na componente escura crescem por um fator  $a_{\text{rec}}/a_{\text{eq}} = T_{\text{eq}}/T_{\text{rec}}$ . Após o desacoplamento, as perturbações na matéria ordinária, igualmente, começam a crescer, conduzidas pelo potencial gravitacional, determinado pela matéria escura. Considere o universo da pós-recombinação, com  $a \propto t^{2/3}$  e  $H = 2/(3t)$ , dominado pela matéria escura não-bariônica. Para flutuações bariônicas, nas escalas maiores que  $\lambda_{\text{J}}$ , Eq. (3.14) conduz a

$$\frac{d^2 \delta_{\text{b}}}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_{\text{b}}}{dt} = 4\pi G \rho^{(0)} (\epsilon_{\text{me}} \delta_{\text{me}} + \epsilon_{\text{b}} \delta_{\text{b}}) \simeq 4\pi G \rho_{\text{me}} \delta_{\text{me}}. \quad (3.21)$$

Com  $c_{\text{s}} \simeq 0$  pelas espécies e  $\rho_{\text{b}} \ll \rho_{\text{me}} \simeq \rho^{(0)}$ . Introduzindo o fator de escala como a variável independente, podemos escrever a equação acima como

$$a^{3/2} \frac{d}{da} \left( a^{-1/2} \frac{d\delta_{\text{b}}}{da} \right) + 2 \frac{d\delta_{\text{b}}}{da} = \frac{3}{2} \mathcal{C}, \quad (3.22)$$

onde igualmente usamos a relação  $a \propto t^{2/3}$ . A condição inicial na recombinação é  $\delta_b = 0$ , devido ao forte acoplamento entre os bárions e os fótons, e  $\delta_{me} \neq 0$ . A solução

$$\delta_b = \delta_{me} \left( 1 - \frac{a_{rec}}{a} \right), \quad (3.23)$$

mostra que  $\delta_b \rightarrow \delta_{me}$  quando  $a \gg a_{rec}$ .

A análise feita aqui, está baseada na teoria newtoniana, então é válida somente para escalas menores que o horizonte, contanto que tratemos as flutuações na componente não-relativística. Além disso, durante a fase da radiação e na era da dominação da curvatura, as perturbações não crescem. Essa supressão ocorre porque, em ambas as épocas, a expansão é muito rápida para as perturbações terem algum crescimento. Após a equivalência, flutuações com os comprimentos de onda maiores do que o comprimento de Jeans, crescem como  $\delta \propto a \propto t^{2/3}$ . Note que as perturbações bariônicas não crescem até a recombinação, devido ao forte acoplamento entre bárions e fótons. As flutuações da matéria escura, por outro lado, começam a crescer imediatamente depois da igualdade da matéria-radiação. Assim que os bárions desacoplarem dos fótons, eles serão conduzidos pelo potencial gravitacional da espécie sem colisão. Assim, imediatamente depois da recombinação, as flutuações bariônicas crescem rapidamente e se igualam àquelas na matéria escura. Subsequentemente, as perturbações em ambas as componentes crescem proporcionalmente ao fator de escala. Tal comportamento explica como as perturbações pequenas do universo da era da matéria podem aumentar para alcançar o regime não-linear e conseqüentemente são as sementes a partir das quais as estruturas no universo presentemente observadas foram formadas.

## 3.2 Perturbações cosmológicas: relatividade geral

Embora a análise newtoniana forneça uma visão valiosa no comportamento das inomogeneidades, ela também tem sérios defeitos. O comprimento de onda apropriado de todos os modos perturbativos será maior do que o horizonte em épocas recentes. Em tais escalas, os efeitos relativísticos gerais tornam-se importantes. Além disso, não podemos usar a teoria newtoniana para estudar as perturbações na componente relativística. Torna-se claro que um tratamento relativístico geral das perturbações da densidade cosmológica é imperativo. Nesta seção, abordaremos o tratamento relativístico completo, geral da evolução de perturbações pequenas sobre

um fundo FLRW. Como se verá, isto envolve escrever a métrica como a métrica FLRW mais uma (pequena) perturbação. Então, computamos o tensor perturbado  $\delta G_{\mu\nu}$  de Einstein, o tensor perturbado  $\delta T_{\mu\nu}$  de energia-momento, e obtemos finalmente as equações perturbadas de Einstein que governam a evolução da métrica, assim como da matéria-energia. No que se segue, negligenciaremos a curvatura espacial supondo se tratar das perturbações nas escalas muito menores do que o raio de curvatura do universo. Isso não é uma limitação, visto que  $\Omega_k \sim 10^{-2}$ , de modo que o raio atual de curvatura é pelo menos cem vezes maior do que o comprimento de Hubble, e a aproximação plana é apropriada mesmo para os modos que estão bem acima do horizonte (isto é, uma perturbação com o comprimento de onda muito maior do que o raio de Hubble). No capítulo 2, esboçamos a história cósmica da expansão no fundo homogêneo e isotrópico de FLRW. Uma métrica que se afaste do espaço tempo de FLRW pode ser escrita como a soma de uma parte FLRW mais outra parte que então, chamaremos da parte perturbada [72–74]. Supondo-se que as perturbações sejam pequenas, então esta divisão da métrica completa em uma parte não perturbada e uma outra parte perturbada conduz a resultados extremamente úteis.

Para perturbar as equações relativísticas deve-se antes de mais nada perturbar a métrica. Em primeira ordem:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu} . \quad (3.24)$$

Todas as entradas no  $\delta g_{\mu\nu}$ , perturbação da métrica, têm que ser pequenas em relação às da ordem zero. Nesta seção escrevemos a métrica diretamente em termos do *tempo conforme*  $\eta$ , definido como  $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$ . Qualquer função  $f(t)$  satisfaz a regra

$$\dot{f}(t) = \frac{f'(\eta)}{a(\eta)} , \quad (3.25)$$

$$\ddot{f}(t) = \frac{f''(\eta)}{a^2(\eta)} - \mathcal{H} \frac{f'(\eta)}{a^2(\eta)} , \quad (3.26)$$

onde uma linha (') indica agora diferenciação em relação ao tempo conforme  $\eta$ , logo

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a} . \quad (3.27)$$

Em particular, podemos ajustar as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} = \frac{\mathcal{H}}{a}, \\
\ddot{a} &= \frac{a''}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{a}, \\
\dot{H} &= \frac{\mathcal{H}'}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2}, \\
H^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \implies \mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G\rho a^2}{3} - k, \\
\dot{H} &= -4\pi G(\rho + p) \implies \mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a^2, \\
\dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0 \implies \rho' + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Consideramos as perturbações cosmológicas sobre a métrica de fundo do universo plano de FLRW (2.57). A métrica pode ser reescrita de forma mais simples no tempo conforme:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^{\mu\nu} = a(\eta)^2 [d\eta^2 - \gamma_{ij}(x)] dx^i dx^j, \tag{3.29}$$

onde  $\gamma_{ij}$  é a métrica das seções espaciais para um espaço de curvatura espacial constante  $k$ . Usaremos a quantidade conforme de Hubble  $\mathcal{H} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = Ha$ . Pode-se classificar as perturbações da métrica em 3 categorias, *perturbação escalar*, *perturbação vetorial* e *perturbação tensorial* e ainda em dois modos, o *adiabático* e de *curvatura*, mas estes dois modos dependem do conteúdo material.

A introdução de perturbações da métrica depende da escolha do calibre. Dependendo do calibre, é preciso escolher um sistema coordenado que descreva as perturbações na relatividade geral.

### 3.2.1 Perturbações na métrica e no tensor energia-momento

A métrica perturbada total é então

$$ds^2 = [g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}(x^\gamma)] dx^\mu dx^\nu, \quad \delta g_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}^{(0)}, \tag{3.30}$$

onde  $\delta g_{\mu\nu}$  é a métrica não perturbada e  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  é a métrica de FLRW. A forma peculiar do elemento da linha perturbado na Eq.(3.30), assim como o número de graus de liberdade escalares, é

justificado como segue:

- A métrica completamente perturbada é descrita genericamente pelas perturbações *escalares, vetoriais e tensoriais*.
- O número total de graus de liberdade de um tensor simétrico em um espaço-tempo de dimensão  $n$  é  $\frac{n(n+1)}{2}$ .
- A entrada  $g_{00}$  pode ser escrita como  $(1 + 2\phi(\eta, \vec{x}))$ , onde  $\phi(\eta, \vec{x})$  corresponde a uma perturbação puramente escalar.
- As entradas de  $g_{0i}$  podem ser parametrizada como  $B_i(\eta, \vec{x}) = B_i + B_{,i}$  onde  $B_i{}^{,i} = 0$ . O termo  $B_{,i}$  corresponde a uma perturbação escalar. O  $B_i$  corresponde a uma perturbação vetorial.
- As entradas do  $g_{ij}$  podem ser escritas como  $(-1 - 2\psi(\eta, \vec{x}))\delta_{ij} + E_{ij}(\eta, \vec{x})$ , onde o  $\psi(\eta, \vec{x})$  é uma perturbação escalar que toma a parte do traço de  $g_{ij}$ , e o  $E_{ij}(\eta, \vec{x})$  é um tensor simétrico sem traço.
- $E_{ij}(\eta, \vec{x}) = E_{ij}^S(\eta, \vec{x}) + E_{ij}^V(\eta, \vec{x}) + E_{ij}^T(\eta, \vec{x})$  é expresso em termos da perturbação escalar  $E_{ij}^S$ , de uma perturbação vetorial ( $E_{ij}^V$ ), e da perturbação tensorial  $E_{ij}^T$ .
- Os  $E_{ij}^S(\eta, \vec{x})$  podem ser escritos como  $E_{,i,j}(\eta, \vec{x})$  porque é um tensor sem traço simétrico que corresponde à perturbação escalar e .
- Os  $E_{ij}^V(\eta, \vec{x})$  podem ser escritos como  $\partial_i E_j + \partial_j E_i$ , onde  $E^i$  é uma perturbação vetorial que satisfaz  $E_i{}^{,i} = 0$ .
- Os  $E_{ij}^T(\eta, \vec{x})$  correspondem a uma perturbação tensorial tal como  $E_{j,i}^i = 0$ .

Podemos escrever a métrica perturbada geral dessa forma

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 1 + 2\phi(\eta, \vec{x}) & B_i(\eta, \vec{x}) \\ B_i(\eta, \vec{x}) & (1 - 2\psi(\eta, \vec{x}))\delta_{ij} + E_{ij}(\eta, \vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

e o elemento de linha

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\phi(\eta, \vec{x}))d\eta^2 + 2B_i(\eta, \vec{x}) d\eta dx^i - ((1 - 2\psi(\eta, \vec{x}))\delta_{ij} - E_{ij}(\eta, \vec{x})) dx^i dx^j].$$

(3.32)

Usando a relação

$$\left(g_{(0)}^{\mu\alpha} + g^{\mu\alpha}\right) \left(g_{\alpha\nu}^{(0)} + g_{\alpha\nu}\right) = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (3.33)$$

obtemos a métrica inversa da seguinte forma

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 1 - 2\phi(\eta, \vec{x}) & B_i(\eta, \vec{x}) \\ B_i(\eta, \vec{x}) & (-1 - 2\psi(\eta, \vec{x}))\delta^{ij} - E^{ij}(\eta, \vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

As perturbações escalares englobam as perturbações da densidade, da pressão e da instabilidade gravitacional. Elas são responsáveis pela formação da estrutura do universo. As perturbações vetoriais tendem a decrescer em um universo em expansão e conseqüentemente é provável que não sejam importantes na cosmologia. As perturbações tensoriais nada mais são que as ondas gravitacionais, desta vez em um universo em expansão, elas têm importância cosmológica desde que tenham um efeito perceptível na anisotropia da radiação cósmica de fundo. As transformações de calibre afetam as perturbações escalares e vetoriais, mas as perturbações tensoriais são invariantes por transformações de calibre. A evolução total da perturbação completa é apenas uma superposição linear da evolução independente das perturbações escalares, vetoriais e tensoriais, no entanto consideraremos somente as perturbações escalares (isto é verdade só no caso de perturbações pequenas, no regime linear).

### 3.2.2 Transformações de calibre

A associação entre pontos no espaço-tempo de fundo e no espaço-tempo perturbado é feita através do sistema coordenado  $x^\alpha$ . Na teoria de perturbação da RG, uma transformação de calibre significa uma transformação infinitesimal de coordenada entre tais sistemas coordenados no espaço-tempo perturbado. Nesta seção, consideramos  $\tilde{x}^\alpha$  como as coordenadas de fundo. As coordenadas de dois sistemas diferentes no espaço-tempo perturbado (que corresponde a dois calibres) pelo  $\hat{x}^\alpha$  e o  $\tilde{x}^\alpha$ , quando relacionados, se transformam na seguinte coordenada

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\alpha = \hat{x}^\alpha + \xi^\alpha(x^\nu). \quad (3.35)$$



No espaço-tempo perturbado temos quantidades perturbadas correspondentes,

$$\begin{aligned} s &= s^{(0)} + \delta s , \\ u^\alpha &= u^{(0)\alpha} + \delta u^\alpha , \\ B_{\alpha\beta} &= B^{(0)}_{\alpha\beta} + \delta B_{\alpha\beta} , \end{aligned} \tag{3.36}$$

Considere primeiramente os 4 escalares  $s$ . A quantidade completa  $s = s^{(0)} + \delta s$  está no espaço tempo perturbado. A transformação de calibre de  $\delta s$  é escrita da seguinte forma:

$$\tilde{\delta s}(x^\alpha) = \hat{\delta s}(x^\alpha) - s^{(0)'} \xi^0 . \tag{3.37}$$

Em analogia da Eq (3.37), as perturbações vetoriais e em campos tensoriais nos dois calibres são definidas como

$$\tilde{\delta B}_{\alpha\beta} = \delta \hat{B}_{\alpha\beta} - \xi_{,\alpha}^\mu B_{\mu\beta}^{(0)} - \xi_{,\beta}^\nu B_{\alpha\nu} - B_{\alpha\beta,\mu}^{(0)} \xi^\mu . \tag{3.38}$$

De forma semelhante, obtemos as regras da transformação de calibre por perturbações vetoriais,

$$\tilde{\delta u}^\alpha = \hat{\delta u}^\alpha + \xi_{,\beta}^\alpha u^{(0)\beta} - u_{,\beta}^{(0)\alpha} \xi^\beta . \tag{3.39}$$

### 3.2.3 Transformação do calibre das perturbações escalares da métrica

Na seção precedente, derivamos a lei da transformação que relaciona dois calibres arbitrários. Aplicando a equação de transformação de calibre (3.38) às perturbações da métrica, temos:

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \delta g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\beta}^{(0)}(x) \partial_\nu \xi^\beta - g_{\alpha\nu}^{(0)}(x) \partial_\mu \xi^\alpha - \xi^0 \partial_0 g_{\mu\nu}^{(0)}(x) + O(\xi^2) , \tag{3.40}$$

onde substituímos a soma  $\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}^{(0)}(x)$  pela  $\xi^0 \partial_0 g_{\mu\nu}^{(0)}(x)$  pois a métrica de fundo depende somente da coordenada temporal  $x^0 = \eta$ . Notamos que ambos os lados desta equação são computados para os mesmos valores da coordenada  $x$  nos dois calibres, que geralmente não correspondem ao mesmo ponto físico. Suponhamos que  $\xi$  venha a ser da mesma ordem que as perturbação da métrica  $\psi, B_i, \phi$  e  $E_{ij}$  e usamos a métrica de fundo. Consideramos uma transformação de

coordenada geral (3.35) e separamos o tempo e as componentes espaciais como

$$\begin{aligned}\tilde{x}^0 &= x^0 + \xi(\eta, \vec{x}), \\ \vec{\tilde{x}} &= \vec{x} + \vec{\nabla}\zeta(\eta, \vec{x}) + \vec{\epsilon}'(\eta, \vec{x}), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon}' = 0,\end{aligned}\tag{3.41}$$

onde o vetor  $\vec{x}_i$  foi decomposto em um componente longitudinal  $\zeta$  tal que o rotacional  $\vec{\nabla}\zeta$  ( $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\zeta = 0$ ) e em um componente transversal  $\vec{\epsilon}'$  ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{\epsilon}' = 0$ ). As perturbações da métrica dos dois sistemas coordenados são relacionadas nas quantidades perturbadas de primeira ordem, como as transformações de calibre das coordenadas seguintes:

$$\tilde{\psi}(\eta, \vec{x}) = \psi(\eta, \vec{x}) - \xi'(\eta, \vec{x}) - \frac{a'}{a}\xi(\eta, \vec{x}),\tag{3.42}$$

$$\tilde{B}_i(\eta, \vec{x}) = B_i(\eta, \vec{x}) + \partial_i\xi(\vec{x}, \eta) - \partial_i\zeta'(\eta, \vec{x}) - \epsilon'_i(\eta, \vec{x}),\tag{3.43}$$

$$\tilde{\phi}(\eta, \vec{x}) = \phi(\eta, \vec{x}) + \frac{1}{3}\nabla^2\zeta(\vec{x}, \eta) + \frac{a'}{a}\xi(\vec{x}, \eta),\tag{3.44}$$

$$\tilde{E}_{ij}(\eta, \vec{x}) = E_{ij}(\eta, \vec{x}) - 2 \left\{ \left( \partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) \zeta(\eta, \vec{x}) + \frac{1}{2}(\partial_i\epsilon_j + \partial_j\epsilon_i) \right\}.\tag{3.45}$$

Temos as transformações de calibre das coordenadas das perturbações escalares que são as seguintes:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\eta, \vec{x}) &= \phi(\eta, \vec{x}) - \frac{(a\xi^0)'}{a}, \\ \tilde{B}(\eta, \vec{x}) &= B(\eta, \vec{x}) + \zeta' - \xi^0, \\ \tilde{\psi}(\eta, \vec{x}) &= \psi - \frac{a'}{a}\xi^0, \\ \tilde{E}(\eta, \vec{x}) &= E + \zeta.\end{aligned}$$

As combinações lineares das quatro funções  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $B$ , e o  $E$  invariantes de calibre são as duas quantidades seguintes, chamadas *Potenciais do Bardeen* [74]:

$$\begin{aligned}\Phi(\eta, \vec{x}) &= \phi(\eta, \vec{x}) - \frac{1}{a}[a(B(\eta, \vec{x}) - E'(\eta, \vec{x}))]', \\ \Psi(\eta, \vec{x}) &= \psi(\eta, \vec{x}) + \frac{a'}{a}(B(\eta, \vec{x}) - E'(\eta, \vec{x})).\end{aligned}\tag{3.46}$$

Essas quantidades são invariantes sob transformações de calibre.

### 3.2.4 Perturbação do tensor de energia-momento

As perturbações da métrica estão relacionadas às perturbações do tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , com as equações de Einstein. A ordem linear nas perturbações do tensor energia-momento (2.59) é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T^0_0 &= (\rho^{(0)} + \delta\rho), \\ T^0_i &= (\rho^{(0)} + p^{(0)})v_i = -T^i_0, \\ T^i_j &= (p^{(0)} + \delta p)\delta^i_j + \Sigma^i_j, \quad \Sigma^i_i = 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde  $\Sigma^i_j$  é a perturbação anisotrópica. É conveniente definir

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{ik\delta T^0_j}{(\rho^{(0)} + p^{(0)})} = ik^j v_j, \\ \sigma &= -\frac{(\hat{k}_i \cdot \hat{k}_j - \frac{\delta_{ij}}{3})\Sigma^i_j}{(\rho^{(0)} + p^{(0)})}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde  $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k}$ . Definimos:

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho}.$$

### 3.2.5 Calibre newtoniano

No calibre newtoniano (calibre longitudinal),  $E = B = 0$  na equação (3.46). Assim os potenciais de Bardeen são iguais às duas perturbações  $\psi$  e  $\phi$  da métrica. Portanto a métrica é da seguinte forma

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ (1 + 2\phi(\eta, \vec{x}))d\eta^2 - (1 - 2\psi(\eta, \vec{x}))\delta_{ij}dx^i dx^j \right\}. \quad (3.49)$$

É um calibre particularmente simples sendo aplicável para o modo de perturbações escalares da métrica. As vantagens do calibre newtoniano são que a métrica perturbada é diagonal e as perturbações da métrica  $\phi(\eta, \vec{x})$  é o potencial gravitacional no limite newtoniano. Da expressão para as conexões afins em termos da métrica (2.27) obtemos

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \delta g^{\alpha\rho} (g_{\rho\gamma,\beta} + g_{\beta\rho,\gamma} - g_{\beta\gamma,\rho}) \\ &+ \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\delta g_{\rho\gamma,\beta} + \delta g_{\beta\rho,\gamma} - \delta g_{\beta\gamma,\rho}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

As componentes da conexão não perturbada não nulas são

$$\Gamma^0_{00} = \mathcal{H}, \quad \Gamma^i_{0j} = \mathcal{H} \delta_j^i, \quad \Gamma^0_{ij} = \mathcal{H} \delta_{ij}, \quad \Gamma^i_{00} = \Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{jk} = 0. \quad (3.51)$$

As únicas componentes não nulas da conexão afim perturbadas são dadas por;

$$\delta\Gamma^0_{00} = \phi', \quad \delta\Gamma^0_{0i} = \phi_{,i}, \quad \delta\Gamma^i_{00} = \phi^{,i}, \quad (3.52)$$

$$\delta\Gamma^0_{ij} = \mathcal{H}[(-2\phi - 2\psi - \psi')\delta_{ij}], \quad (3.53)$$

$$\delta\Gamma^i_{0j} = -\psi'\delta_{ij}, \quad (3.54)$$

$$\delta\Gamma^i_{jk} = \psi_j \delta_k^i - \psi_k \delta_j^i + \psi^i \delta_{jk}. \quad (3.55)$$

Para escrever as equações de Einstein, precisamos da perturbação do tensor de Ricci (2.34)

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha} + \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \\ &- \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Os valores de fundo são dados por

$$R_{00} = -3\mathcal{H}', \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}) \delta_{ij}, \quad (3.57)$$

enquanto os valores perturbados são dados por

$$\delta R_{00} = \Delta\phi + 3\psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + 3\mathcal{H}\phi', \quad (3.58)$$

$$\delta R_{0i} = 2(\psi' + 2\mathcal{H}\phi)_{,i}, \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{ij} &= \left( -\mathcal{H}\phi' - 5\mathcal{H}\psi' - 2(\mathcal{H}' + \mathcal{H})\phi - 2(\mathcal{H})^2\phi \right. \\
&\quad \left. - 2(\mathcal{H}' + \mathcal{H})\psi - 2(\mathcal{H})^2\psi - \psi'' + \partial_k\partial^k\psi - \right) \delta_{ij} \\
&\quad + \partial_i\partial_j\psi - \partial_i\partial_j\phi .
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Os componentes do tensor de Einstein são

$$\begin{aligned}
\delta G^0_0 &= a^{-2}[-2\Delta\psi + 6\mathcal{H}\psi' + 6\mathcal{H}^2\phi] , \\
\delta G^0_i &= a^{-2}(2\psi - 2\mathcal{H}\phi)_{,i} , \\
\delta G^i_0 &= a^{-2}(2\psi' - 2\mathcal{H}\phi)^{,i} , \\
\delta G^i_j &= a^{-2}[2\psi'' - \Delta(\psi - \phi) + 2\mathcal{H}(\phi' + 2\psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi]\delta^i_j + a^{-2}[\psi - \phi]^{,i}_{,j} .
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Após ter definido as diferentes quantidades perturbadas, temos as equações de Einstein perturbadas

$$\delta G^\mu{}_\nu = 8\pi G\delta T^\mu{}_\nu . \tag{3.62}$$

Substituindo a métrica da Eq. (3.49) nas equações de Einstein, Eq. (3.62), e mantendo as perturbações na ordem linear, podemos encontrar as equações das perturbações invariantes calibre [74]:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi + -3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) &= 4\pi G a^2 \delta T^0_0, \\
(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} &= 4\pi G \delta T^0_i, \\
\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H} + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi)\delta^i_j - \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)^{,i}_{,j} &= 4\pi G \delta T^i_j,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

onde as perturbações  $\Phi$  e  $\Psi$ , no calibre invariante da métrica, são definidas nas Eqs.(3.46). As equações da perturbação no calibre newtoniano têm as mesmas formas das Eqs. (3.63), com

$\Phi = \phi$  e  $\Psi = \psi$ . Para um modo co-móvel, de número de onda  $k$ , temos::

$$k^2\phi + 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\psi) = 4\pi Ga^2\delta T^0_0, \quad (3.64)$$

$$k^2(\phi' + \mathcal{H}\psi) = 4\pi Ga^2(\rho^{(0)} + p^{(0)})\theta, \quad (3.65)$$

$$\phi'' + \mathcal{H}(\psi' + 2\phi') + (2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\psi + \frac{k^2}{3}(\phi - \psi) = \frac{4\pi}{3}Ga^2\delta T^i_i, \quad (3.66)$$

$$k^2(\phi - \psi) = 12\pi Ga^2(\rho^{(0)} + p^{(0)})\sigma. \quad (3.67)$$

A perturbação da equação (2.71), da conservação do tensor energia-momento, conduz a

$$\delta(T^{\mu\nu}_{;\nu}) = \delta T^{\mu\nu}_{;\nu} + \delta\Gamma^\mu_{\lambda\nu}T^{\lambda\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\delta T^{\lambda\nu} + \delta\Gamma^\nu_{\lambda\nu}T^{\mu\lambda} + \Gamma^\nu_{\lambda\nu}\delta T^{\mu\lambda} = 0. \quad (3.68)$$

Obtemos as duas equações (para  $\mu = 0$  e  $\mu = i$ ) no calibre newtoniano :

$$\begin{aligned} \delta' &= -(1 + \omega)(\theta - 3\phi') - 3\mathcal{H}\left(\frac{\delta p}{\delta\rho} - \omega\right)\delta, \\ \theta' &= -\mathcal{H}(1 - 3\omega)\theta - \frac{\omega'}{1 + \omega}\theta + \frac{\delta p/\delta\rho}{1 + \omega}k^2\delta - k^2\sigma + k^2\psi. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Comparando as Eqs. (3.69) e a Eq. (3.64) com as Eqs. (3.1)–(3.3) temos um tratamento consistente das perturbações do tensor da métrica e de energia-momento, que conduzem aos termos adicionais comparados com as equações perturbadas de Euler, no caso não relativístico. É difícil manipular as equações das perturbações, no calibre newtoniano, para obter uma única equação para perturbação da densidade. Isto é feito mais facilmente no calibre síncrono.

### 3.2.6 Calibre síncrono

O calibre síncrono corresponde a  $\phi = 0$  e  $B = 0$  na Eq. (3.31). O calibre síncrono pode ser usado para as perturbações escalares, vetoriais e tensoriais. Nesta seção, consideramos somente perturbações escalares. A métrica de FLRW perturbada, no calibre síncrono, é escrita geralmente como:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j\}. \quad (3.70)$$

A perturbação  $h_{ij}$  pode se decompor da seguinte forma

$$h_{ij} = h\delta_{ij}/3 + h_{ij}^{\parallel} + h_{ij}^{\perp} + h_{ij}^T, \quad (3.71)$$

onde as componentes  $h$  e  $h_{ij}^{\parallel}$  representam as partes escalares e  $h_{ij}^{\perp}$  é a parte vetorial e finalmente  $h_{ij}^T$  a parte tensorial. Por definição, temos

$$\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_l h_{lk}^{\parallel} = 0, \quad \partial_i\partial_j h_{ij}^{\perp} = 0, \quad \partial_i h_{ij}^T = 0, \quad (3.72)$$

e

$$\begin{aligned} h_{ij}^{\parallel} &= \left( \partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) \zeta, \\ h_{ij}^{\perp} &= \partial_i V_j + \partial_j V_i, \quad \partial_i V_i = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Os dois campos escalares  $h$  e  $\zeta$ , caracterizam o modo escalar das perturbações da métrica, os campos  $V_i, h_{ij}^{\perp}$  e  $h_{ij}^T$  representam os modos vetorial e tensorial, respectivamente. Introduzimos três campos  $h, h(\vec{k}, \eta)$  e  $\zeta(\vec{k}, \eta)$  no  $k$ -espaço e escrevemos o modo escalar de  $h_{ij}$  como uma integral de Fourier

$$h_{ij}(\vec{x}, \eta) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left\{ \hat{k}_i \hat{k}_j h(\vec{k}, \eta) + (\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}k^2) 6\beta(\vec{k}, \eta) \right\}, \quad \vec{k} = k\hat{k}. \quad (3.74)$$

Na teoria das perturbações de primeira ordem, cada componente de Fourier evolui de forma independente. Podemos assim estudar apenas a evolução de um único componente de Fourier, com algum vetor de onda arbitrário  $k$ . Vamos agora derivar a lei da transformação de calibre, que relaciona o calibre síncrono e o calibre newtoniano. Podemos decompor as transformações de  $B_i$  e  $E_{ij}$  acima em componentes longitudinais e transversais:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i^{\parallel}(\eta, \vec{x}) &= B_i^{\parallel}(\eta, \vec{x}) + \partial_i \xi(\vec{x}, \eta) - \partial_i \zeta'(\eta, \vec{x}), \\ \tilde{B}_i^{\perp}(\eta, \vec{x}) &= B_i^{\perp}(\eta, \vec{x}) - \epsilon'_i(\eta, \vec{x}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{ij}^{\parallel}(\eta, \vec{x}) &= E_{ij}^{\parallel}(\eta, \vec{x}) - 2 \left( \partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) \zeta(\eta, \vec{x}), \\ \tilde{E}_{ij}^{\perp}(\eta, \vec{x}) &= E_{ij}^{\perp}(\eta, \vec{x}) - (\partial_i\epsilon_j + \partial_j\epsilon_i), \\ \tilde{E}_{ij}^T(\eta, \vec{x}) &= E_{ij}^T(\eta, \vec{x}), \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde  $B_i = B_i^\parallel + B_i^\perp$ ,  $E_{ij} = E_{ij}^\parallel + E_{ij}^\perp + E_{ij}^T$ ,  $E_{ij}^\parallel$ ,  $E_{ij}^\perp$  e  $E_{ij}^T$  obedecem à Eq. (3.72). As Eqs. (3.2.3)–(3.76), descrevem a transformação das perturbações da métrica sob uma transformação coordenada infinitesimal geral. Podemos agora usar as equações (3.2.3), para relacionar as perturbações escalares da métrica  $(\phi, \psi)$ , no calibre newtoniano conforme, com o calibre síncrono  $h_{ij} = h\delta_{ij}/3 + h_{ij}^\parallel$ . Chamamos  $\tilde{x}^\mu$ , as coordenadas síncronas e  $\hat{x}^\mu$ , as coordenadas newtonianas, sendo  $\tilde{x}^\mu = \hat{x}^\mu + \xi^\mu$ . Usando as Eqs. (3.75)–(3.76), obtemos

$$\xi(\eta, \vec{x}) = \zeta'(\eta, \vec{x}) + \chi(\eta), \quad (3.77)$$

$$\epsilon_i(\vec{x}, \eta) = \epsilon_i(\vec{x}), \quad (3.78)$$

$$h_{ij}^\parallel(\eta, \vec{x}) = -2 \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \zeta(\eta, \vec{x}), \quad (3.79)$$

$$\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i = 0, \quad (3.80)$$

onde  $\chi(\eta)$  é uma função arbitrária do tempo, refletindo a liberdade de calibre associada com transformação coordenada:  $\tilde{x}^0 = x^0 + \chi(\eta)$ ,  $\tilde{x}^i = x^i$ . Esta transformação corresponde a uma redefinição global das unidades de tempo sem o significado físico, conseqüentemente ajustaremos  $\chi = 0$  e das Eqs. (3.42)–(3.44) obteremos

$$\begin{aligned} \psi(\eta, \vec{x}) &= +\zeta''(\eta, \vec{x}) + \frac{a'}{a} \zeta'(\eta, \vec{x}), \\ \phi(\eta, \vec{x}) &= -\frac{1}{6} h(\eta, \vec{x}) - \frac{1}{3} \nabla^2 \zeta(\eta, \vec{x}) - \frac{a'}{a} \zeta'(\eta, \vec{x}), \end{aligned} \quad (3.81)$$

e  $\zeta$  é determinado por  $h^\parallel$  na equação (3.79). Em termos de  $h$  e de  $\beta$  introduzidos na equação (3.74),  $h_{ij}^\parallel$  no calibre síncrono é dado por

$$h_{ij}^\parallel(\eta, \vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left( \hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \left\{ h(\vec{k}, \eta) + 6\beta(\vec{k}, \eta) \right\}, \quad \vec{k} = k\hat{k}. \quad (3.82)$$

Comparando o  $h_{ij}^\parallel$  nas equações (3.79, 3.82), podemos obter  $\zeta$ :

$$\zeta(\eta, \vec{x}, \eta) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{2k^2} \left\{ h(\eta, \vec{k}) + 6\beta(\eta, \vec{k}) \right\}. \quad (3.83)$$



Então das equações(3.81), os potenciais  $\phi$  e  $\psi$  do calibre newtoniano são relacionados aos potenciais síncronos  $h$  e  $\eta$  no espaço de Fourier

$$\begin{aligned}\psi(\eta, \vec{k}) &= \frac{1}{2k^2} \left\{ h''(\eta, \vec{k}) + 6\beta''(\vec{k}, \eta) + \frac{a'}{a} \left[ h'(\eta, \vec{k}) + 6\beta'(\eta, \vec{k}) \right] \right\}, \\ \phi(\eta, \vec{k}) &= \beta(\eta, \vec{k}) - \frac{1}{2k^2} \frac{a'}{a} \left[ h'(\eta, \vec{k}) + 6\beta'(\eta, \vec{k}) \right].\end{aligned}\quad (3.84)$$

Os outros componentes das perturbações da métrica,  $B_i$ ,  $E_{ij}^\perp$  e  $E_{ij}^T$ , são nulas dentro de ambos os calibres. Assim, no calibre síncrono, as equações perturbadas de Einstein de primeira ordem, são da seguinte forma:

$$k^2\beta - \frac{1}{2}\mathcal{H}h' = 4\pi Ga^2\delta T^0_0, \quad (3.85)$$

$$k^2\beta' = 4\pi Ga^2(\rho^{(0)} + p^{(0)})\theta, \quad (3.86)$$

$$h'' + 2\mathcal{H}h' - 2k^2\beta = -8\pi Ga^2\delta T^i_i, \quad (3.87)$$

$$h'' + 6\beta'' + 2\mathcal{H}(h' + 6\beta') - 2k^2\beta = -24\pi Ga^2(\rho^{(0)} + p^{(0)})\Theta. \quad (3.88)$$

As equações de conservação do tensor energia-momento são:

$$\begin{aligned}\delta' &= -(1 + \omega) \left( \theta + \frac{h'}{2} \right) - 3\mathcal{H} \left( \frac{\delta p}{\delta \rho} - \omega \right) \delta, \\ \theta' &= -\mathcal{H}(1 - 3\omega)\theta - \frac{\omega'}{1 + \omega}\theta + \frac{\delta p/\delta \rho}{1 + \omega} k^2\delta - k^2\Theta.\end{aligned}\quad (3.89)$$

Usando as transformações do tempo conforme-cósmico (3.26), (3.28) temos as equações ((3.89), (3.2.6)) das seguintes formas:

$$\frac{k^2}{a^2}\beta - \frac{1}{2}H\dot{h} = 4\pi G\delta T^0_0, \quad (3.90)$$

$$k^2\dot{\beta} = 4\pi Ga(\rho^{(0)} + p^{(0)})\theta, \quad (3.91)$$

$$\ddot{h} + 2H\dot{h} - \frac{2k^2}{a^2}\beta = -8\pi G\delta T^i_i, \quad (3.92)$$

$$\ddot{h} + 6\dot{\beta} + 3H(\dot{h} + 6\dot{\beta}) - 2\frac{k^2}{a^2}\beta = -24\pi G(\rho^{(0)} + p^{(0)})\Theta, \quad (3.93)$$

onde o ponto significa a derivada no tempo cósmico  $t$ . As equações de conservação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= -(1 + \omega) \left( \frac{\theta}{a} + \frac{\dot{h}}{2} \right) - 3H \left( \frac{\delta p}{\delta \rho} - \omega \right) \delta, \\ \dot{\theta} &= -H(1 - 3\omega)\theta - \frac{\dot{\omega}}{1 + \omega}\theta + \frac{\delta p / \delta \rho}{1 + \omega} \frac{k^2}{a^2} \delta - \frac{k^2}{a^2} \Theta,\end{aligned}\tag{3.94}$$

Considerando perturbações adiabáticas, com  $\delta p = c_s^2 \delta \rho$ , temos as seguintes equações :

$$\begin{aligned}\ddot{h} + \frac{2\dot{a}}{a}\dot{h} &= 4\pi G(1 + 3c_s^2)\delta, \\ \dot{\delta} + (1 + \omega)\left(\theta - \frac{\dot{h}}{2}\right) &= \frac{3\dot{a}}{a}(\omega - c_s^2)\delta, \\ \dot{\theta} + (2 - 3\omega)\frac{\dot{a}}{a}\theta + \frac{c_s^2 k^2}{a^2(1 + \omega)}\delta &= 0.\end{aligned}\tag{3.95}$$

# Capítulo 4

## Cosmologia observacional

Neste capítulo revisaremos alguns dos mais importantes fenômenos cosmológicos que permitem testar as observações teóricas. Discutiremos o espectro de potência de flutuações da densidade, a correlação das estruturas de grande escala, as supernovas do tipo Ia, a radiação cósmica de fundo e as oscilações acústicas dos bárions.

### 4.1 O espectro de potência de flutuações da densidade

A quantidade que descreve a distribuição de matéria no universo é o contraste da densidade  $\delta(x)$ , definido como:

$$\delta(x) = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (4.1)$$

onde  $\rho(x)$  é a densidade em  $\vec{x}$  e  $\bar{\rho}$  é a densidade média do universo. Definimos também  $\delta_k$ , como a transformada de Fourier de  $\delta(\vec{x})$ , da seguinte forma:

$$\delta_k = \int \delta(\vec{x}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (4.2)$$

No capítulo precedente, mostramos uma descrição qualitativa de como a quantidade  $\delta_k$  evolui com o tempo. Derivamos as equações exatas que descrevem a evolução completa no regime linear. A pergunta principal a responder é: como comparar a teoria com as observações? Naturalmente, uma aproximação qualitativa seria comparar a distribuição das galáxias no céu observado com um mapa produzido para uma simulação numérica. A quantidade básica é então

a função de correlação das galáxias, que é uma medida do grau de aglomeração na distribuição espacial ou angular das galáxias:

$$dP = \bar{n}^2[1 + \xi(r_{12})]dV_1dV_2, \quad (4.3)$$

onde  $\bar{n}$  é a densidade média das galáxias,  $dV_1$  e  $dV_2$  são os elementos de volume centrados sobre duas galáxias e  $r_{12}$  a separação de pares. A função espacial  $\xi(\vec{r})$ , de dois pontos ou de auto-correlação, é definida como a probabilidade adicional, comparada com aquela esperada para uma distribuição aleatória, de encontrar um par de galáxias em uma separação  $r_{12}$ :

$$\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r})d^3\vec{x}. \quad (4.4)$$

O suporte denota uma média sobre algum volume  $V$ . A função da correlação avalia como as flutuações de densidade, analisadas em dois pontos separados por uma distância  $\vec{r}$ , estão correlacionadas. Aqui  $\xi$  não depende da posição absoluta  $\vec{x}$ , e sim da distância de separação entre os dois pontos. Além disso, a isotropia do universo implica que a função depende somente do módulo  $r$  de  $\vec{r}$ , isto é, da distância entre os dois pontos. Tomando a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos, obtemos o espectro de potência  $P(k)$  como:

$$P(k) = \int \xi(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d^3\vec{r}. \quad (4.5)$$

Podemos mostrar que a relação entre o espectro de potência e a transformada de Fourier do contraste de densidade  $\delta_k$ . O  $P(k)$  está relacionado à variação do campo de densidade no  $k$ -espaço, da seguinte forma:

$$P(k) = \frac{|\delta_k^2|}{(2\pi)^3}. \quad (4.6)$$

O espectro de potência em um número de onda  $k$  dado, é uma medida do aglomeração em uma escala  $\lambda \approx 2/k$ . O espectro de potência é a quantidade chave para compararmos a teoria às observações da distribuição de galáxias em grandes escalas. Uma exigência fundamental de todo modelo cosmológico bem sucedido é então prever um espectro de potência da matéria que esteja de acordo com as observações. As flutuações, em uma determinada escala, são frequentemente expressa em termos da quantidade adimensional  $\Delta_k^2 = k^3 \frac{P(k)}{2\pi^2}$  cuja importância

se dá pela relação direta com o valor esperado do quadrado do contraste

$$\langle \delta(\vec{x})^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) d^3k = \int \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} d \ln k . \quad (4.7)$$

Observamos que a função de correlação de dois pontos (ou equivalente, o espectro de potência) codifica toda a informação nas propriedades estatísticas, do campo de densidade, somente se as flutuações desse campo forem gaussianas. O campo não-gaussiano, é definido igualmente em seus momentos de mais alta ordem, partindo da função de correlação de três pontos (e assim por diante); enquanto que para um campo gaussiano os momentos de ordem superior são nulos (se forem ímpares) ou podem ser expressa em termos da função de correlação de dois pontos (se forem pares). Uma vez que a evolução linear não muda as fases, satisfaz as exigências para que as perturbações iniciais sejam gaussianas, como no caso de flutuações produzidas durante a inflação. Contudo, geralmente, a gaussianidade das flutuações é uma suposição que deve ser testada. Essa tarefa foi realizada, resultando em que as flutuações iniciais são altamente gaussianas.

O espectro de potência primordial é interpretado como flutuações que emergem do período inflacionário. A amplitude das flutuações em escalas diferentes do comprimento, ou nas escalas diferentes, é descrita equivalentemente pelo espectro de potência. O espectro de potência primordial supostamente tem uma dependência de lei de potência com escala, isto é  $P(k) \propto k^n$ . Existe uma proposta, sugerida independentemente por Harrison [75] e por Zel'dovich [76] de que o espectro de potência, invariante de escala, é descrito pelo índice espectral  $n = 1$ . No caso, as flutuações em escalas diferentes do comprimento correspondem à mesma amplitude das flutuações no potencial gravitacional. O espectro de potência primordial é expressado em termos de uma função de transferência, como segue:

$$P(k, z) = A(z) k^{n-1} T(k, z) , \quad (4.8)$$

onde  $A(z)$  é o fator da normalização, que deve ser determinado observacionalmente. As medidas diretas do espectro potência podem ser obtidas da dinâmica das galáxias nas avaliações ou da distorção da imagem das galáxias fracas devido às lentes gravitacionais. Conduz para escrever

a função de transferência como segue:

$$T(k, z) = \frac{\delta(k, z)}{\delta(k, z_i)}, \quad (4.9)$$

onde  $z_i$  é algum desvio para o vermelho inicial relativo ao espectro de potência primordial.

## 4.2 Supernovas do tipo Ia

O teste cosmológico de supernovas do tipo Ia foi fundamental para a descoberta da expansão acelerada do universo em 1998. As supernovas são objetos astronômicos que podem ser usados como velas padrões para medir distâncias cosmológicas. Há dois tipos de supernovas: tipo I, as quais não têm linhas de hidrogênio no espectro ótico; e as do tipo II, que possuem as linhas de hidrogênio. As supernovas de tipo I se subdividem em Ia que possuem linhas de silício (Si) no espectro, tipo Ib, que têm linhas de hélio (He) no espectro, e por último, as do tipo Ic, que têm linhas tanto de He como de Si nos seus espectros. As supernovas I aparecem geralmente em galáxias elípticas, enquanto as supernovas tipo II são encontradas em galáxias espirais. O mecanismo de formação das supernovas Ia é a explosão termonuclear nas estrelas anãs brancas, enquanto as supernovas II surgem do colapso de estrelas massivas que evoluem rapidamente. As distâncias de supernovas Ia estão baseadas em relações empíricas que conectam a forma da curva de luz com o máximo de luminosidade. As observações fornecem as medidas da magnitude aparente  $m(z)$  das supernovas no brilho máximo, que inclui efeitos de correção para a extinção galáctica, correções-K e correção da largura luminosidade das curvas de luz. A magnitude aparente resultante  $m(z)$  é relacionada a distância de luminosidade  $D_L(z)$  da seguinte forma:

$$m(z) = \bar{M}(M, H_0) + 5 \log_{10}(D_L(z)), \quad (4.10)$$

onde, para um modelo cosmológico plano, temos

$$D_L(z) = (1+z) \int_0^z dz' \frac{H_0}{H(z'; a_1, \dots, a_n)}, \quad (4.11)$$

que é a distância media da luminosidade de Hubble ( $H_0 d_L$ ),  $a_1, \dots, a_n$  são os parâmetros do modelo teórico e  $\bar{M}$  é a magnitude do ponto zero deslocado, a qual depende da magnitude

absoluta  $M$  e do parâmetro atual de Hubble  $H_0$  como:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= M + 5 \log_{10} \left( \frac{H_0^{-1}}{Mpc} \right) + 25 \\ , &= M - 5 \log_{10} h + 42.38 .\end{aligned}\tag{4.12}$$

O parâmetro  $M$  é a magnitude absoluta que supostamente é constante, que após as correções mencionadas acima, foram incluídas em  $m(z)$ . Os pontos de dados do conjunto da amostra Gold são dados após as correções serem implantadas, em termos do módulo da distância

$$\mu_{obs}^G(z_i) \equiv m_{obs}^G(z_i) - M\tag{4.13}$$

O conjunto de dados de Supernova Legacy Survey (SNLS) apresenta para cada ponto o fator  $s$  do estiramento, usado para calibrar a magnitude absoluta e o parâmetro  $c$  de quadro resto, o que principalmente mede a extinção da galáxia pela poeira. Assim, o módulo da distância depende, nesse caso, da magnitude absoluta  $M$  e dois parâmetros adicionais  $\alpha$  e  $\beta$ , da seguinte forma:

$$\mu_{obs}^{SNLS} = m_{obs}^{SNLS}(z_i) - M + \alpha(s_i - 1) - \beta c_i ,\tag{4.14}$$

os quais são colocados junto com os parâmetros teóricos usando um procedimento recursivo. Os parâmetros do modelo teórico são determinados minimizando  $\chi$  quadrado

$$\chi_{SNLa}^2(w_0, w_1) = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th}(z_i)]^2}{\sigma_{\mu i}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_v^2} .\tag{4.15}$$

Supernovas do tipo Ia são velas padrões, isto é, conhecemos sua distância intrínseca da luminosidade e temos a seguinte expressão:

As supernovas do tipo Ia são importantes, porque fornecem evidência para a expansão acelerada do universo [10, 11], apontando assim a presença de uma forma de energia não-convencional chamada de energia escura, que é a parte dominante de energia do universo. A distribuição de probabilidade para os parâmetros  $a_1, \dots, a_n$  é:

$$P(a_1, \dots, a_n) = \mathcal{N} e^{-\chi^2(a_1, \dots, a_n)/2} ,\tag{4.16}$$

onde  $\mathcal{N}$  é a constante da normalização. Se a informação é previamente conhecida em algum dos parâmetros  $a_1, \dots, a_n$  então podemos conhecer um ou outro dos parâmetros usando a informação prévia ou “marginalizando”. Para isso calcula-se a média da distribuição de probabilidade em torno do valor conhecido dos parâmetros com um “prior apropriado” na distribuição de probabilidade. Na década passada, muitos conjunto de dados de SNIa estiveram lançados, quando o número e a qualidade de SNIa aumentarem continuamente. Os conjunto de dados os mais familiares de SNIa incluem, por exemplo Gold04, Gold06, SNLS, ESSENCE, SDSS, e, recentemente, Union, Constitution.

### 4.3 Radiação cósmica de fundo (CMB)

Consideramos os dados observacionais de CMB. Usamos de “os priores da distância WMAP” dados para as observações de 7 anos WMAP. Os priores da distância incluem o parâmetro deslocamento  $R$  dado da seguinte forma:

$$R(z_{ls}; a_1 \dots a_n) = \sqrt{\Omega_m} \int_0^{z_{ls}} \frac{dz}{E(z; a_1 \dots a_n)} \quad (4.17)$$

o  $\chi$  quadrado de CMB e dado como:

$$\chi_{CMB}^2 = \frac{(R - 1.725)^2}{0.018^2}. \quad (4.18)$$

### 4.4 Oscilações da acústica do bárion (BAO)

Em seguida consideramos os dados observacionais de BAO. Uma medida efetiva da distância é o  $D_V(z_{BAO})$ , que pode ser obtido da média esférica

$$D_v(z_{BAO}) = \left[ \frac{z_{BAO}}{H(z_{BAO})} \left( \int_0^{z_{BAO}} \frac{dz}{H(z)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (4.19)$$

O tamanho do pico acústico da oscilação do bárion pode ser usado a como uma régua cosmológica padrão para vincular o parâmetros cosmológico. Este pico pode ser denotado pelo parâmetro  $A$ , que é independente de modelos cosmológicos e para um universo plano pode ser



expressado como

$$A(z_{BAO}; a_1 \dots a_n) = \sqrt{\Omega_{m0}} E(z_{BAO})^{-1/3} \left[ \frac{1}{z_{BAO}} \int_0^{z_{BAO}} \frac{dz}{E(z; a_1 \dots a_n)} \right]^{2/3} \quad (4.20)$$

com  $z_{BAO} = 0.35$  e  $E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0}$ . o  $\chi$  quadrado de BAO é dado como:

$$\chi_{BAO}^2(a_1 \dots a_n) = \frac{(A(z_{BAO}; a_1 \dots a_n) - 0.469)^2}{0.017^2} . \quad (4.21)$$

# Capítulo 5

## Dinâmica cosmológica do modelo de Rastall

Nesse capítulo consideramos uma modificação das equações de Einstein, onde a condição de conservação do tensor energia-momento não é verificada, e investigamos as mudanças que são introduzidas no que diz respeito aos modelos cosmológicos.

### 5.1 Modelo de Rastall

A teoria de Rastall [1] é uma teoria de gravidade na qual o tensor energia-momento não é conservado. As fundamentações teóricas da não conservação do tensor energia-momento, no espaço-tempo curvo, foram postas por Rastall. Ele modificou a conservação usual supondo que a divergência do tensor energia-momento é dependente da curvatura escalar. Mostrou também que isso pode ser compatível com experimentos clássicos do sistema solar e cosmológicos. Esta curvatura escalar, naturalmente, desaparece no espaço-tempo plano e assim, na relatividade restrita, a conservação do tensor energia-momento é restaurada. A modificação de Rastall das equações de Einstein é baseada na observação de que a divergência do tensor energia-momento sendo zero não é uma exigência teórica necessária. Rastall supõe que a divergência de  $T_{\nu}^{\mu}$  é proporcional à variação da curvatura escalar  $R$ . A suposição é escrita da seguinte forma:

$$T_{\nu}^{\mu}{}_{;\mu} = \lambda R_{;\nu} , \quad (5.1)$$

onde  $\lambda$  é uma constante real. A exigência geral da consistência para as equações de campo segue imediatamente da identidade de Bianchi

$$(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R)_{;\mu} = 0, \quad (5.2)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci. Usando essa relação podemos reescrever as equações de campo generalizadas, da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} + (\kappa\lambda - \frac{1}{2})g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

Contraindo  $\mu$  com  $\nu$ , obtemos

$$(4\kappa\lambda - 1)R = \kappa T, \quad (5.4)$$

com  $\kappa\lambda \neq \frac{1}{4}$ , onde podemos reescrever (5.3) como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu}^{\text{source}} \quad T_{\mu\nu}^{\text{source}} = \frac{\kappa\lambda}{4\kappa\lambda - 1}g_{\mu\nu}T. \quad (5.5)$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \frac{2\kappa\lambda - 1}{4\kappa\lambda - 1} T \right), \quad (5.6)$$

onde  $T^\mu_\mu = T$ . O limite de Einstein é obtido quando  $\lambda \rightarrow 0$  e  $\kappa \rightarrow 8\pi G$ , onde  $G$  é a constante gravitacional. No vácuo,  $T_{\mu\nu} = 0$ , e as equações modificadas de campo coincidem exatamente com aquelas da relatividade geral padrão,  $R_{\mu\nu} = 0$ . Isso implica que os testes da relatividade geral, a existência das singularidades, os buracos negros e todas as características conectadas com as soluções exatas do vácuo, permanecem intactas. Podemos reescrever as equações da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( T'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} T' \right), \quad (5.7)$$

onde  $T'_{\mu\nu}$  é dado por um fluido perfeito como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho' + p')u_\mu u_\nu - p'g_{\mu\nu}, \quad (5.8)$$

onde

$$\begin{aligned}\rho' &= (1 - 4\kappa\lambda)^{-1}[(1 - 3\kappa\lambda)\rho] - 3\kappa\lambda p, \\ p' &= (1 - 4\kappa\lambda)^{-1}[-\kappa\lambda\rho + (1 - \kappa\lambda)p],\end{aligned}\tag{5.9}$$

## 5.2 Dinâmica cosmológica do modelo de Rastall

### Equações do campos

As equações fundamentais da teoria de Rastall podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{\lambda'}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu},\tag{5.10}$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1 - \lambda'}{2\kappa}R^{;\nu},\tag{5.11}$$

onde  $\kappa = 8\pi G$ . A teoria da relatividade geral, com a conservação usual do tensor energia-momento, é reobtida quando  $\lambda = 1$ . Podemos reescrever essas equações, equivalentemente, da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa \left\{ T_{\mu\nu} - \frac{\gamma - 1}{2}g_{\mu\nu}T \right\},\tag{5.12}$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\gamma - 1}{2}T^{;\nu},\tag{5.13}$$

com

$$\gamma = \frac{3\lambda' - 2}{2\lambda' - 1},\tag{5.14}$$

onde  $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$  e  $\gamma \neq \frac{3}{2}$ . Além disso,  $\gamma = 1$  (que corresponde a  $\lambda' = 1$ ), implica na relatividade geral. Nestas equações a constante  $\gamma$  é um parâmetro real arbitrário. Supomos que  $\gamma$  é um parâmetro gravitacional universal, que é o mesmo para todos os sistemas físicos, e que  $\gamma \neq 1$ . A Eq (5.13) mostra então que tais sistemas estão caracterizados pelo  $T$  e que, quando constante, o valor da divergência deve então ser zero. Nessa teoria, a matéria covariamente conservada implica necessariamente que  $T = 0$ . De forma particular, as equações de campo modificadas são equivalentes as equações do modelo padrão para a era da radiação..

### 5.3 Dinâmica do fundo

Para deduzir as equações de movimento desse modelo, usamos as equações de Rastall na forma precedente (5.13), a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (2.57) e o tensor energia-momento de um fluido perfeito (2.59), que resulta em

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{6} \left\{ 3 - \gamma - 3(1 - \gamma)\omega_x \right\} \rho_x, \quad (5.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6} \left\{ \gamma + 3(2 - \gamma)\omega_x \right\} \rho_x, \quad (5.16)$$

$$\dot{\rho}_x + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega_x)\rho_x = \frac{\gamma - 1}{2}(1 - 3\omega_x)\dot{\rho}_x. \quad (5.17)$$

O índice x se refere a um fluido perfeito que segue a estrutura de Rastall. A última equação pode ser integrada para,

$$\rho_x = \rho_{x0} a^{\frac{-6(1+\omega_x)}{3-\gamma+3(\gamma-1)\omega_x}}. \quad (5.18)$$

Observe que toda esta formulação é equivalente à relatividade geral, onde o fluido perfeito teria uma equação de estado efetiva dada por:

$$\omega_{eff} = \frac{\gamma - 1 + (5 - 3\gamma)\omega_x}{3 - \gamma + 3(\gamma - 1)\omega_x}. \quad (5.19)$$

Um caso particular interessante, é  $\omega_x = -1$ , o que implica  $\omega_{eff} = -1$ , que modela a constante cosmológica.

A divergência nula do tensor energia-momento não é uma exigência fundamental [77], não obstante, geralmente aceitou-se que isso implicaria em uma teoria conservativa [78]. Consequentemente, foi feito um esforço considerável para mostrar que esta consequência implicaria na conservação do tensor energia-momento e do momento angular global [76]. Não obstante, esta exigência não entra em uma definição mais geral de uma teoria métrica [79]. Se olharmos o problema a partir do ponto de vista matemático, de acordo com teoremas muito gerais, o tensor energia-momento é conservado somente se a ação da matéria for um escalar [2]. Uma aproximação post-newtoniano completa da teoria de Rastall é dada por Smalley [80] o qual mostrou que a teoria de Rastall é uma teoria conservada, mas a formulação lagrangiana não é conhecida. Subsequentemente ele introduziu uma teoria gravitacional modificada, tipo a de

Brand-Dicke [81,82], que incorpora a suposição de Rastall. As equações de campo da relatividade geral modificada (RGM) de Rastall, não podem ser derivadas de um princípio variacional, contudo, um protótipo desta RGM pode ser derivado de um princípio variacional, mas contendo uma constante gravitacional variável [83].

## 5.4 Análise perturbativa: Fluido perfeito

Consideramos na teoria de Rastall o comportamento de um fluido caracterizado, por exemplo, por uma equação do estado  $p = \omega\rho$ , com  $\omega$  constante. As predições da teoria de Rastall, em uma descrição de fluido perfeito, é equivalente, do ponto de vista do fundo, às previsões da relatividade geral, quando um fluido com equação de estado de tipo  $p = \omega_{eff}\rho$ , onde  $\omega_{eff}$  é definido na relação (5.19). Neste sentido, com esta identificação, uma teoria pode ser traçada na outra.

No nível perturbativo, contudo, esta equivalência não é evidente. Entretanto, na referência [84], um estudo perturbativo foi realizado, considerando apenas um fluido, obedecendo a estrutura da teoria de Rastall. A descrição do fluido foi mantida durante todo o tempo do cálculo. As equações finais revelam os mesmos resultados da relatividade geral, desde que a identificação (5.19) seja feita. A equivalência permanece no nível perturbativo.

Um dos problemas mais importantes hoje na cosmologia é a descrição da energia escura. A energia escura exige a pressão negativa e, a nível perturbativo, um fluido com pressão negativa é instável em pequenas escalas [85]. A teoria de Rastall abre uma nova possibilidade, mas quanto mais permanecemos no nível de uma descrição de fluido, e com um modelo de um fluido, parece que os mesmos problemas permanecem: uma pressão efetiva negativa é exigida a nível do fundo, e esta conduz às instabilidades a nível perturbativo, usando os resultados da referência [84].

Mas, como já discutido anteriormente na introdução e na seção precedente, podemos considerar o modelo de dois fluidos, um deles representando os bárions. Isto permite considerar os dados observacionais para restringir o modelo, de fato, o espectro de potência refere-se ao componente bariônico. Ou seja está relacionado a um fluido com a pressão efetiva zero, o que assegura o colapso gravitacional e conduz a formação de estruturas locais. O outro fluido segue a estrutura de Rastall, aqui considerado como a componente escuro do universo. Para ser específico, este fluido exótico será tomado tendo a pressão zero, conduzindo a uma equação efetiva

do parâmetro de estado

$$\omega_{eff} = \frac{\gamma - 1}{3 - \gamma} \quad \omega_x = 0. \quad (5.20)$$

Nesta situação, a aceleração do universo pode ser conseguida se  $\gamma < 1$  ou  $\gamma > 3$ . Além disso, a relação (5.34) implica agora em

$$1 = \Omega_{x0} \frac{3 - \gamma}{2} + \Omega_0. \quad (5.21)$$

## 5.5 Modelo de dois fluidos

Como o nosso interesse é verificar o comportamento das flutuações escalares no modelo de Rastall, teremos que perturbar as equações de campo (5.12) e (5.13), juntamente com o tensor energia-momento. Ao analisar o modelo perturbado de Rastall, consideraremos um modelo com dois fluidos. A razão é que os bárions claramente existem, e há boas evidências observacionais de que os bárions podem ser modelados como matéria sem pressão. Isto indica que os bárions não podem ser introduzidos diretamente nas equações (5.10) e (5.11) adicionando um novo tensor energia-momento na equação (5.10). Isso nos diz que: se a estrutura original da teoria de Rastall é preservada, ainda que o fluido possua pressão identicamente nula, a velocidade efetiva do som não é nula. Por esta razão, consideraremos as equações (5.12) e (5.13), a estrutura fundamental do modelo com dois fluidos, que inclui os bárions, implica na adição de um segundo tensor energia-momento, o qual obedece a lei de conservação usual. Esse tensor energia-momento adicional, vai representar a componente bariônica.

Aqui, consideraremos um modelo cosmológico com dois fluidos, um obedecendo a estrutura de Rastall, sem a conservação usual do tensor energia-momento correspondente, e o outro que obedece a lei de conservação tradicional da relatividade geral. Sob estas condições, as equações de campo se escrevem como

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left\{ T_{\mu\nu}^x - \frac{2 - \gamma}{2} g_{\mu\nu} T^x \right\} + \kappa \left\{ T_{\mu\nu}^m - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^m \right\}, \quad (5.22)$$

$$T_{x;\mu}^{\mu\nu} = \frac{\gamma - 1}{2} T_x^{\nu}, \quad (5.23)$$

$$T_{m;\mu}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.24)$$

Os índices  $x$  e  $m$  designam as componentes exótica e bariônica da matéria, respectivamente.

O universo é homogêneo e isotrópico, pelo menos nas escalas maiores do que  $100 Mpc$ . Em escalas suficientemente grandes, pode ser representado aproximativamente pela métrica FLRW (2.57). Os tensores energia-momento que aparecem nas equações (5.22) e (5.24) são descritos da seguinte forma:

$$T_m^{\mu\nu} = (\rho_m + p_m)u^\mu u^\nu - p_m g^{\mu\nu}, \quad (5.25)$$

$$T_x^{\mu\nu} = (\rho_x + p_x)u^\mu u^\nu - p_x g^{\mu\nu}. \quad (5.26)$$

Sendo  $\rho_m$  é a componente (bariônica) da matéria, sua pressão é igual a zero,  $p_m = 0$ . Para o segundo fluido, supomos a equação de estado barotrópica tal que  $p_x = \omega_x \rho_x$ , com  $\omega_x$  sendo constante. Introduzindo a métrica FLRW nas equações de campo, (5.22)-(5.24), nas formas acima para os tensores do energia-momento, e especializando-se para o caso plano ( $k = 0$ ), obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{6} \left\{ 3 - \gamma - 3(1 - \gamma)\omega_x \right\} \rho_x + \frac{\kappa}{3} \rho_m, \quad (5.27)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6} \left\{ \gamma + 3(2 - \gamma)\omega_x \right\} \rho_x - \frac{\kappa}{6} \rho_m, \quad (5.28)$$

$$\dot{\rho}_x + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega_x)\rho_x = \frac{\gamma - 1}{2}(1 - 3\omega_x)\dot{\rho}_x, \quad (5.29)$$

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0. \quad (5.30)$$

A duas últimas equações podem ser integradas, resultando em

$$\rho_x = \rho_{x0} a^{\frac{-6(1+\omega_x)}{3-\gamma+3(\gamma-1)\omega_x}}, \quad (5.31)$$

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}. \quad (5.32)$$

Usando a equação modificada, para o universo de Friedmann, definindo primeiramente, como no caso usual

$$\Omega_{x0} = \frac{\kappa\rho_{x0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_0 = \frac{\kappa\rho_{m0}}{3H_0^2}, \quad (5.33)$$

que resulta na seguinte equação:

$$1 = \frac{\Omega_{x0}}{2} \left\{ 3 - \gamma - 3(1 - \gamma)\omega_x \right\} + \Omega_0. \quad (5.34)$$



## 5.6 Perturbações lineares no modelo de dois fluidos

Consideremos agora a perturbação dos dois modelos de fluido. Trabalharemos dentro do calibre síncrono  $h_{\mu 0} = 0$ . Desde que os modos de interesse para o espectro de potência da matéria estejam dentro do horizonte, os resultados não são sensíveis ao uso de um calibre ou de outros, ou mesmo um formalismo invariante de calibre.

Na condição do calibre síncrono, introduzimos as perturbações na métrica e nas funções da matéria,

$$\rho_x = \rho_{x0} + \delta\rho_x \quad , \quad \rho_m = \rho_{m0} + \delta\rho_m \quad , \quad u_m = u_{m0} + \delta u_m \quad , \quad (5.35)$$

$$p_x = p_{x0} + \delta p_x \quad , \quad p_m = p_{m0} + \delta p_m \quad , \quad u_x = u_{x0} + \delta u_x \quad , \quad (5.36)$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu} \quad , \quad h_{\mu 0} = 0. \quad (5.37)$$

Nas expressões ((5.35)-(5.37)), o índice 0 indica o fundo, as funções e  $\delta\rho_m$ ,  $\delta\rho_x$ ,  $\delta p_m$ ,  $\delta p_x$ ,  $\delta u_m$ ,  $\delta u_x$ ,  $h_{\mu\nu}$  indicam quantidades perturbadas na densidade, na pressão, na quadri-velocidade e na métrica, quando  $h_{\mu 0} = 0$ , define a condição coordenada. Ambos os fluidos têm a pressão zero, logo fixamos  $p_x = p_m = 0$ . Além disso, se desconsiderarmos as perturbações entrópicas (que podem conduzir aos efeitos interessantes novos da estrutura atual) podemos fixar  $\delta p_x = \delta p_m = 0$ .

Introduzindo as perturbações dos dois fluidos na Eq. (3.95) e permanecendo a nível linear, obtemos as seguintes equações acopladas para as quantidades perturbadas:

$$\begin{aligned} \ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} &= 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \left( (1 + 3\omega_{eff})\delta_x + \delta_m \right) , \\ \dot{\delta}_x + (1 + \omega_{eff})\left(\theta_x - \frac{\dot{h}}{2}\right) &= 0 , \\ \dot{\theta}_x + (2 - 3\omega_{eff})\frac{\dot{a}}{a}\theta_x + \frac{\omega_{eff}k^2}{a^2(1 + \omega_{eff})}\delta_x &= 0 , \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde  $c_s^2 = \omega_{eff}$ . Usando as Eqs. (5.20)-(5.32) e (5.27), do fundo, obtemos

$$\ddot{\delta}_m + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_m = \frac{3}{2}\gamma\Omega_{x0}a^{-\frac{6}{3-\gamma}}\delta_x + \frac{3}{2}\Omega_0a^{-3}\delta_m, \quad (5.39)$$

$$\dot{\delta}_x = -\frac{2}{3-\gamma}(\theta_x - \dot{\delta}_m), \quad (5.40)$$

$$\dot{\theta}_x + \frac{9-5\gamma}{3-\gamma}\frac{\dot{a}}{a}\theta_x = -\frac{1-\gamma}{2}k^2\frac{\delta_x}{a^2}, \quad (5.41)$$

$$\delta_m = \frac{h}{2}. \quad (5.42)$$

Nestas expressões, temos as seguintes definições:

$$\delta_x = \frac{\delta\rho_x}{\rho_x}, \quad \delta_m = \frac{\delta\rho_m}{\rho_m}, \quad \theta = \partial_k\delta u_k, \quad h = \frac{\sum_{k=1}^3 h_{kk}}{a^2}. \quad (5.43)$$

Com o objectivo de integrar as equações perturbadas (5.39) e (5.41) numericamente, é mais conveniente que se use o fator de escala  $a$ , como variável dinâmica, uma vez que ele é diretamente conectado ao desvio para o vermelho  $z = -1 + \frac{1}{a}$ , que é uma quantidade adimensional (que fixa hoje  $a_0 = 1$ ). Em termos desta nova variável, obtemos as seguintes equações:

$$\delta''_m + \left(\frac{2}{a} + \frac{f'(a)}{f(a)}\right)\delta'_m = \frac{3}{2}\gamma\frac{\Omega_{x0}}{f^2(a)}a^{-\frac{6}{3-\gamma}}\delta_x + \frac{3}{2}\frac{\Omega_0}{f^2(a)}a^{-3}\delta_m, \quad (5.44)$$

$$\delta'_x = -\frac{2}{3-\gamma}\left(\frac{\theta_x}{f(a)} - \delta'_m\right), \quad (5.45)$$

$$\theta'_x + \frac{9-5\gamma}{3-\gamma}\frac{\theta_x}{a} = -\frac{1-\gamma}{2}\frac{k^2}{k_0^2}\frac{\delta_x}{a^2f(a)}, \quad (5.46)$$

$$(5.47)$$

onde  $k_0$  é o numero da onda associado ao raio de Hubble, e a função  $f$  é definida da seguinte forma:

$$f(a) = \left[\frac{3-\gamma}{2}\Omega_{x0}a^{\frac{2\gamma}{\gamma-3}} + \frac{\Omega_0}{a}\right]^{1/2}. \quad (5.48)$$

Para obter uma previsão específica do modelo, comparamos o espectro de potência da matéria, definido por:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta_k^2}{2\pi^3}, \quad (5.49)$$

com os dados observacionais do programa observacional 2dFGRS [86]. Para fixar a condição inicial usamos a função de transferência de BBKS [87,88], e aplicamos a prescrição descrita na

referência [89]. Usamos o parâmetro estatístico de  $\chi^2$  definido por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathcal{P}_k^{i^o} - \mathcal{P}_k^{i^t})^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.50)$$

onde  $\mathcal{P}_k^{i^o}$  são os  $i$ -ésimos dados observacionais,  $\sigma_i^2$  é a margem de erro,  $\mathcal{P}_k^{i^t}$  é a previsão teórica correspondente. A função de distribuição de probabilidade (PDF) é dada por:

$$P(\gamma, \Omega_0) = Ae^{-\chi^2/2}, \quad (5.51)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização. Como indicado, a PDF depende de dois parâmetros livres, a densidade da matéria bariônica  $\Omega_0$  e o parâmetro de  $\gamma$ , que caracteriza o desvio da teoria de Einstein. Marginalizando (integrando) em um dos parâmetros, obtemos a PDF de uma dimensão para o parâmetro livre restante. Os resultados são mostrados na figura 5.1. A probabilidade é altamente concentrada ao redor de  $\gamma = 1$ , que corresponde a teoria de Einstein - ela admite um leve desvio se o parâmetro da matéria bariônica é alto, quase sem o fluido exótico. Este resultado pode ser compreendido facilmente: quando o parâmetro  $\gamma$  difere de  $\gamma = 1$ , oscilações ou um comportamento exponencial (dependendo se  $\gamma$  é menor ou maior que 1) é induzido respectivamente no fluido exótico, e isto é transferido para o fluido da matéria. Observamos que se  $\Omega_{x0} \sim 0$ , implicando  $\Omega_0 \sim 1$ , os desvios de  $\gamma = 1$  serão os maiores possíveis.

Daqui, podemos concluir que o valor  $\gamma = 1$  é a previsão obtida pelo espectro de potência da matéria, com uma precisão da ordem de  $10^{-5}$  (veja figs 5.1,2,3). De fato, o melhor ajuste é conseguido para  $\gamma = 1$ ,  $\Omega_0 \sim 0,79$ ,  $\chi^2 = 0,38$  por grau de liberdade. O melhor ajuste para o modelo  $\Lambda$ CDM tem o mesmo  $\chi^2$ . Esse resultado mostra que a teoria de Rastall se reduz a relatividade geral.

## 5.7 Modelo Campo escalar da Teoria de Rastall

### 5.7.1 Análise perturbativa do campo escalar.

O resultado descrito na seção anterior é restringido a uma formulação hidrodinâmica de ambas as componentes. Este componente exótica é representada melhor por um campo escalar do que

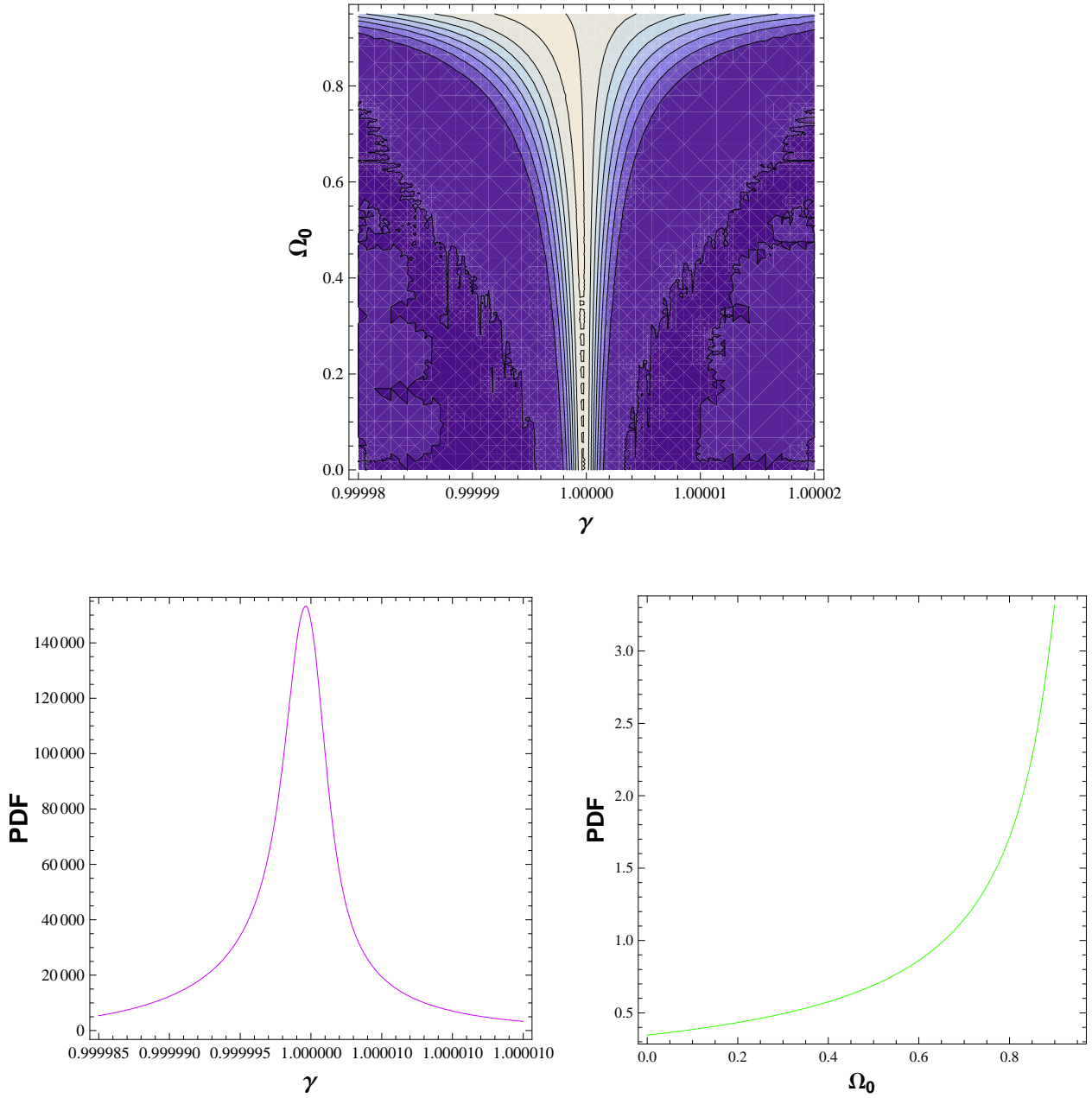


Figura 5.1: Acima, a função da distribuição da probabilidade bidimensional (PDF) para a densidade da matéria  $\Omega_0$  e o parâmetro de  $\gamma$ , na esquerda, a PDF de uma dimensão para o parâmetro de  $\gamma$ , e à direita a PDF de uma dimensão para o parâmetro da densidade da matéria  $\Omega_0$ .

como um fluido perfeito. É muito difícil que um fluido usual possa apresentar os comportamentos exóticos conectados com a matéria escura e a energia escura, ou mesmo cumprir a nova lei de conservação imposta pela teoria de Rastall. Neste sentido, vamos considerar uma simples descrição de campo. O tensor energia-momento deste campo é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{;\rho}\phi_{;\rho} + g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (5.52)$$

onde  $\nabla$  é a derivada covariante. Se impormos a lei de conservação usual para o tensor energia-momento  $T^{\mu\nu};_{\mu} = 0$ , obtemos a equação usual de Klein-Gordon:

$$\nabla_{\rho}\nabla^{\rho}\phi = -V_{\phi}(\phi) , \quad (5.53)$$

onde  $V_{\phi}(\phi)$  é a derivada em relação a  $\phi$ . Contudo, agora a lei de conservação deve ser descrita como na equação (5.13), e o campo escalar deve agora obedecer a seguinte equação:

$$\nabla_{\rho}\nabla^{\rho}\phi + (3 - 2\gamma)V_{\phi} = (1 - \gamma)\frac{\phi^{;\rho}\phi^{;\sigma}\phi_{;\rho;\sigma}}{\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha}} . \quad (5.54)$$

No modelo de dois fluidos, as equações de Einstein correspondente, tomam a seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\left[T_{\mu\nu} + \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{2 - \gamma}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho} + g_{\mu\nu}(3 - 2\gamma)V(\phi)\right] . \quad (5.55)$$

Nessa descrição de campo escalar, para a teoria de Rastall, vemos algumas semelhanças entre os modelos de  $k$ -essência [46]. Os modelos de  $k$ -essência podem apresentar problemas de velocidade do som negativa, como mencionado em [90].

Uma vantagem clara em usar a representação do campo escalar, é que ela evita os problemas da representação de fluido dos componentes com pressão negativa relativa com a velocidade do som. Contudo, enquanto isto é claro no caso usual, com as equações do Einstein acoplada a equação ordinária de Klein-Gordon, é menos claro no âmbito da teoria de Rastall. Afim de investigar as limitações de espectro de potência para esta formulação da teoria de Rastall, tomamos a gravidade do sistema acoplando Matéria + Campo escalar + Rastall, escrito numa maneira conveniente para a análise perturbativa, da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left[\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} + \frac{1 - \gamma}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho} - (3 - 2\gamma)g_{\mu\nu}V + \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\right] , \quad (5.56)$$

$$\nabla_{\rho}\nabla^{\rho}\phi = -(3 - 2\gamma)V_{\phi} + (1 - \gamma)\frac{\phi^{;\rho}\phi^{;\sigma}\phi_{;\rho;\sigma}}{\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha}} , \quad (5.57)$$

$$T^{\mu\nu};_{\mu} = 0 . \quad (5.58)$$

Agora, suponhamos que o campo escalar tenha pressão zero. A energia e a pressão do campo

escalar são dadas por:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (5.59)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \quad (5.60)$$

a condição da pressão zero implica  $\dot{\phi}^2/2 = V$ , conduzindo a  $\rho_\phi = \dot{\phi}^2$ . Do ponto de vista do fundo, não há nenhuma diferença entre a aproximação do fluido ou do campo escalar. Mas a nível perturbativo a diferença é significativa, como veremos adiante.

No calibre síncrona, as equações perturbadas correspondentes ao sistema descrito por (5.56)-(5.58), são as seguintes:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - \frac{3\Omega_0}{2a^3}\delta = (3 - \gamma)\dot{\phi}\dot{\Psi} - (3 - 2\gamma)V_\phi\Psi, \quad (5.61)$$

$$\gamma\ddot{\Psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \left\{ \frac{k^2}{a^2} + (3 - 2\gamma)V_{\phi\phi} \right\} \Psi = \dot{\phi}\dot{\delta}, \quad (5.62)$$

onde  $\Psi = \delta\phi$  e  $\delta$  é o contraste da densidade de componente da matéria como na seção precedente. Usando agora o fator de escala como a variável, o sistema de equações acima toma a seguinte forma :

$$\begin{aligned} \delta'' + \left\{ \frac{2}{a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right\} \delta' - \frac{3}{2} \frac{\Omega_0}{a^3 f^2(a)} \delta &= (3 - \gamma)\phi'\Psi' - (3 - 2\gamma)\frac{V_\phi}{f^2(a)}\Psi, \\ \gamma\Psi'' + \left\{ \frac{3}{a} + \gamma\frac{f'(a)}{f(a)} \right\} \Psi' + \left\{ \frac{k^2}{a^2 f^2(a)} + (3 - 2\gamma)\frac{V_{\phi\phi}}{f^2(a)} \right\} \Psi &= \phi'\delta', \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde

$$\phi' = \sqrt{3\Omega_{x0}} a^{\frac{-3}{3-\gamma}} \frac{1}{f(a)}, \quad (5.64)$$

$$V = \frac{3}{2}\Omega_{x0} a^{\frac{-6}{3-\gamma}}, \quad (5.65)$$

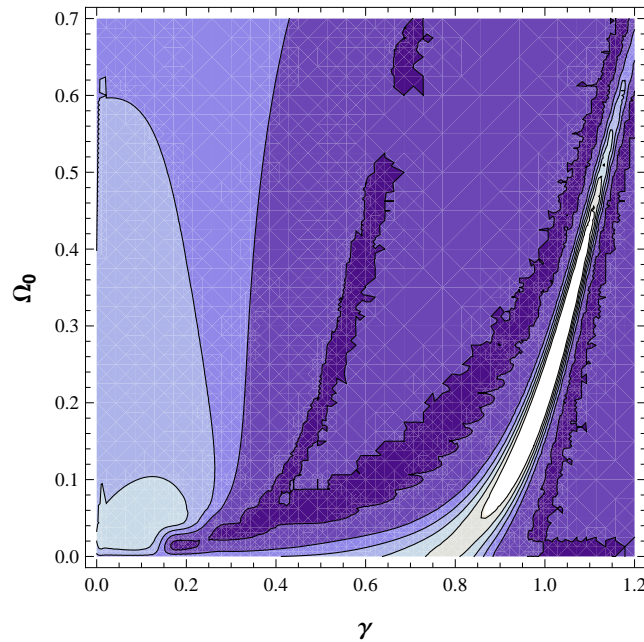
$$V_\phi = \frac{V_a}{\phi'}, \quad (5.66)$$

$$V_{\phi\phi} = \frac{1}{\phi'} \frac{d}{da} V_\phi. \quad (5.67)$$

A função  $f(a)$  é definida como em (5.48).

Executamos a mesma análise estatística de seção anterior e outra vez impomos as condições

iniciais usando a função de transferência de BBKS. Os resultados são mostrados na figura 5.2. A diferença principal é que há agora duas regiões relevantes no espaço dos parâmetros  $\Omega_0$  e  $\gamma$  : uma em torno de  $\gamma = 1$ , com uma alta densidade de probabilidade (PDF), e a outra próxima a  $\gamma = 0$ , com densidade menor. A região em torno de  $\gamma = 1$ , tem probabilidades altas, a região próxima a  $\gamma = 0$ , tem probabilidades menores, mas se estende por uma grande região veja-se fig 5.2. A consequência é que, após a marginalização com respeito  $\Omega_0$ , há dois picos na densidade de probabilidade de  $\gamma$ : um próximo a  $\gamma = 1$  e um outro próximo a  $\gamma = 0$ . O segundo pico é mais alto. Acharmos que este é um efeito da extensão da região entorno do ponto  $\gamma = 0$ , que parece compensar as probabilidades mais altas em torno de  $\gamma = 1$ . Há igualmente duas máximas na PDF de  $\Omega_0$ , uma próxima de  $\Omega_0 = 0$  e uma outra próxima de  $\Omega_0 = 1$ . O melhor ajuste é conseguido para  $\gamma = 1,02$  e  $\Omega_0 = 0,72$  com  $\chi^2$  por grau de liberdade igual a 0,30, sendo ainda melhor que o do modelo  $\Lambda$ CDM. A PDF vai rapidamente a zero para  $\gamma < 0$ . Ainda a respeito do máximo próximo a  $\gamma = 0$ , os valores de  $\gamma$  e  $\Omega_0$ , nesta região, implicam em  $\chi^2$  entorno de 0,33, que é mais elevado que o valor de  $\chi^2$  para  $\gamma \sim 1$ , mas que ainda é menor que o melhor ajuste de  $\Lambda$ CDM.



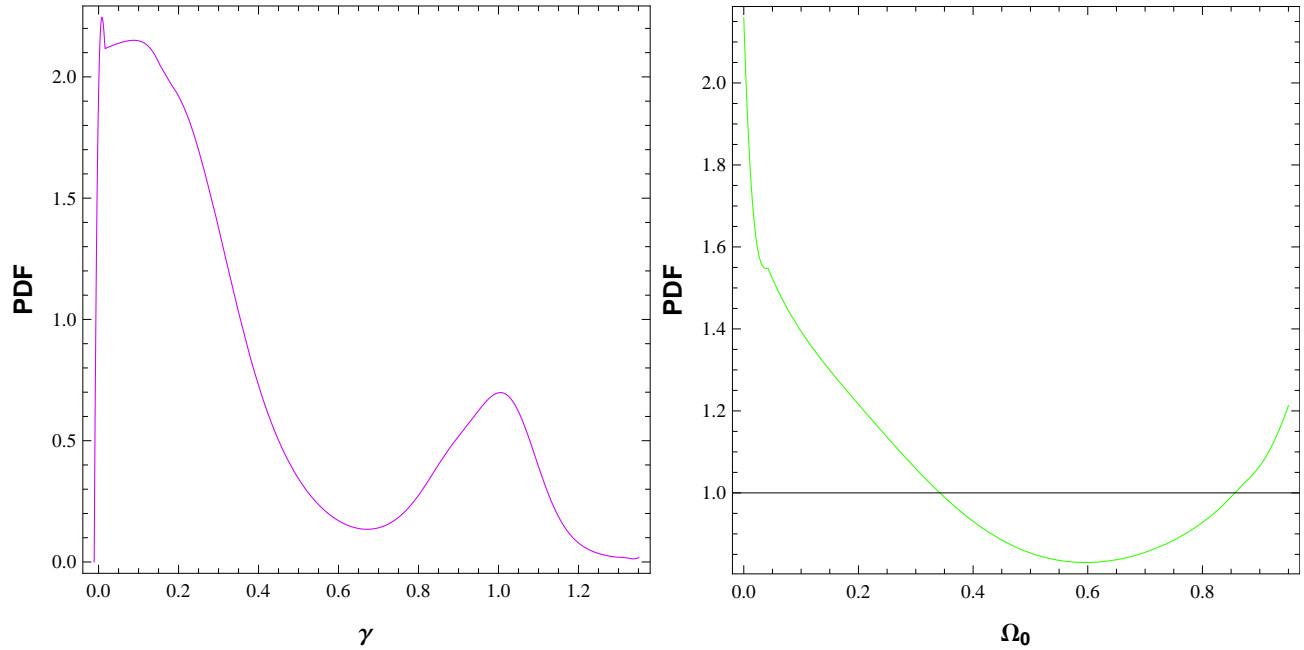


Figura 5.2: Acima, a função da distribuição da probabilidade bidimensional (PDF) para a densidade da matéria  $\Omega_0$  e o parâmetro  $\gamma$ , na esquerda, a PDF de uma dimensão para o parâmetro de  $\gamma$ , e à direita a PDF de uma dimensão para o parâmetro da densidade da matéria  $\Omega_0$ .

## 5.8 Conclusão

Neste capítulo, investigamos a suposição de Rastall, da modificação da relatividade geral, quanto ao problema da formação de estrutura. Essa suposição equivale a mudar a lei de conservação usual da relatividade geral. Nesse sentido, do ponto de vista dinâmico, podemos ver como se modifica a equação de estado para um fluido perfeito dado. Portanto, a teoria de Rastall pode ser interessante a fim, de obter uma expansão acelerada do universo sem introduzir fluidos exóticos. Por exemplo, os fluidos com pressão positiva ou nula, podem induzir uma dinâmica típica dos fluidos de pressão negativa. Esse comportamento já tem sido observado, por exemplo, dentro da teoria de Brans-Dicke.

Nossos resultados indicam que a teoria de Rastall enfrenta muitos problemas a nível perturbativo. Considerando um universo homogêneo e isotrópico por exemplo, a equação de estado efetiva do fundo é reproduzida inteiramente a nível perturbativo, conduzindo a altas instabilidades, quando a equação de estado efetiva implica numa pressão negativa. Uma forma de escapar disso é considerarmos um modelo de dois fluidos, um que é conservado, e outro que cumpre a suposição de Rastall. Os resultados indicam uma configuração que reduz a teoria de



Rastall à relatividade geral.

Quando mantemos a estrutura de dois componentes que obedecem leis de conservação diferentes, mas com um campo escalar de interação, considerado como um fluido de Rastall, surgem características mais interessantes. Em particular, a proposta de Rastall pode ser considerada como uma modificação da equação de Klein-Gordon, similarmente ao que acontece nas teorias de  $k$ -Essência [91]. Outra vez a configuração que corresponde à relatividade geral é favorecida, mas outras configurações com  $\gamma \approx 0$  são igualmente possíveis, mesmo se algumas subtilezas estatísticas aparecerem. Todas estas considerações parecem indicar a especificidade da relatividade geral e da teoria de Rastall.

Uma maneira possível para implementar a suposição feita por Rastall é considerar a modificação da lei usual de conservação como uma manifestação de efeitos quânticos (como a produção de partículas) no espírito da referência [92]. A produção de partículas em um universo de expansão pode conduzir aos termos novos na usual lei de conservação. Em todo caso, parece claro essa formação de estrutura que pede um fluido que se comporte no fundo e a nível perturbativo com a pressão efetiva zero (do contrário nenhuma aglomeração de matéria poderia eficazmente ocorrer), e esta levanta um questionamento em relação a estrutura original da teoria de Rastall. Em algum sentido, isto já tem sido observado, conforme a referência [93], forçando os autores desse trabalho a usar apenas um fluido para caber dados das supernovas do tipo Ia. Mas, tal procedimento parece ser impossível, por causa do problema da formação de estrutura. Outros métodos observacionais, como CMB, podem ser usados para reforçar a teoria de Rastall. Mas, os resultados obtidos nesse capítulo parecem-nos ser suficientes para indicar essas dificuldades da teoria de Rastall, quando confrontada com os dados observacionais.

## Capítulo 6

# O modelo de unificação com campo escalar de Rastall

O gás Chaplygin tem problemas com os testes observacionais, o cenário geral que emerge destes testes não é uniforme. Os testes de CMB [94,95] favorecem uma cenário em torno de  $\alpha = 0$  qual reduz essencialmente o modelo GCG ao modelo  $\Lambda$ CDM. Por outro lado os testes de SN Ia [67,68] favorecem valores negativos de  $\alpha$ . Uma versão escalar-tensorial canônico do gás de Chaplygin é inviável por causa de  $c_s = 1$ . Vamos então tentar construir uma versão escalar-tensorial do gás de Chaplygin usando a teoria de Rastall.

### 6.1 A velocidade do som do campo escalar na teoria de Rastall

Em [96], os autores estudaram o caso que corresponde a  $\gamma = 2$ , que pode reproduzir o cenário de  $\Lambda$ CDM no fundo e a nível perturbativo. Uma explicação possível para o sucesso do caso  $\gamma = 2$  de Rastall é devido ao fato de ter uma velocidade de som nula para modelos escalares, como mostramos agora. A velocidade de som é definida como a relação  $c_s^2 := \frac{\delta p}{\delta \rho}$ . Consequentemente, faz sentido considerar seu valor no referencial onde a substância cujo colapso está sendo investigado está em repouso; denotamos essa quantidade como  $\hat{c}_s$ . Seguindo a Referência [97], usamos a forma:

$$\delta p = \hat{c}_s^2 \delta \rho + 3aH\rho(1 + \omega) (\hat{c}_s^2 - c_a^2) \frac{\theta}{k^2}, \quad (6.1)$$

que relaciona as perturbações da pressão às da densidade de energia ambas em um calibre genérico, através de  $\hat{c}_s^2$ . Nesta fórmula,  $c_a^2$  é a velocidade do som adiabática, definida como  $c_a^2 := \dot{p}/\dot{\rho}$  e que, para o campo escalar de Rastall que estamos investigando, tem a forma:

$$c_a^2 = \frac{3H(2-\gamma)\dot{\phi}_0 + 2(3-2\gamma)V_{,\phi}}{3H\gamma\dot{\phi}_0}, \quad (6.2)$$

onde usamos Eqs. (7.2), (7.4) e a equação do movimento (7.9). Além disso, na fórmula (6.1),  $\omega := p/\rho$ ,  $k$  é o numero de onda co-móvel em uma decomposição do modo normal e  $\theta$  é definida através de

$$a(\rho + p)\theta := \partial^i \delta T^0_i = \dot{\phi}_0 \partial^i \delta \phi_{,i}. \quad (6.3)$$

Substituindo em Eq. (6.1) as expressões para  $\delta\rho$  e  $\delta p$ , o que encontramos na Eqs. (7.5) e (7.7), e Eqs. (6.2) e (6.3) obtemos:

$$\begin{aligned} & \gamma \hat{c}_s^2 \left[ \gamma \dot{\phi}_0 \delta \dot{\phi} - \gamma \Phi \dot{\phi}_0^2 + (3-2\gamma)V_{,\phi} \delta \phi + 3H \dot{\phi}_0 \delta \phi \right] = \\ & = (2-\gamma) \left[ \gamma \dot{\phi}_0 \delta \dot{\phi} - \gamma \Phi \dot{\phi}_0^2 + (3-2\gamma)V_{,\phi} \delta \phi + 3H \dot{\phi}_0 \delta \phi \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

na qual dá claramente que  $\hat{c}_s^2 = (2-\gamma)/\gamma$  e conseqüentemente o caso  $\gamma = 2$  implica que  $\hat{c}_s^2 = 0$ : é um argumento que favorece o colapso. Assim, para ter uma velocidade do som nula, o modelo escalar deve obedecer as seguintes equações:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left[ T_{\mu\nu} + \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} + g_{\mu\nu}V(\phi) \right], \quad (6.5)$$

$$\nabla_\rho \nabla^\rho \phi + V_\phi + \frac{\phi^{;\rho}\phi^{;\sigma}\phi_{;\rho;\sigma}}{\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha}} = 0, \quad (6.6)$$

onde, usamos  $\gamma = 2$  nas Eqs. (5.56)-(5.58) e fizemos a redefinição  $V(\phi) \rightarrow -V(\phi)$ . O tensor de momento-energia na Eq. (6.5) representa a matéria (bárions) e que se conserva separadamente. Nesse caso o tensor de energia-momento para o campo escalar é dado por:

$$T_{\mu\nu}^\phi = \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} + g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (6.7)$$

Assim, a energia e a densidade do campo escalar são dadas pelas seguintes expressões

$$\rho_\phi = \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (6.8)$$

$$p_\phi = -V(\phi). \quad (6.9)$$

Agora, vamos usar o resultado do exemplo do Gás de Chaplygin da seção 2.3 para fixar  $\dot{\phi}$  e  $V(\phi)$ . Supondo que o campo escalar represente o Gás de Chaplygin generalizado, encontramos a expressão (2.87) que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Omega_c = \Omega_{c0}g(a)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad \Omega_c = \frac{8\pi G\rho_c}{3H_0^2}, \quad \Omega_{c0} = \frac{8\pi G\rho_{c0}}{3H_0^2}. \quad (6.10)$$

Fazendo a substituição temos:

$$tH_0^2 \rightarrow t, \quad \frac{V(\phi)}{H_0^2} \rightarrow V(\phi), \quad (6.11)$$

então podemos escrever:

$$\rho_\phi = \dot{\phi}^2 + V(\phi) = 3\Omega_{c0}g^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (6.12)$$

$$p_\phi = -V(\phi) = -3\Omega_{c0}\bar{A}g^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \quad (6.13)$$

Assim, obtemos:

$$\dot{\phi}(a) = \sqrt{3\Omega_{c0}}\sqrt{g(a)^{1/(1+\alpha)} - \bar{A}g(a)^{-\alpha/(1+\alpha)}}, \quad (6.14)$$

$$V(a) = 3\Omega_{c0}\bar{A}g(a)^{-\alpha/(1+\alpha)}. \quad (6.15)$$

As equações perturbadas são agora da seguinte forma:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - \frac{3}{2}\frac{\Omega_0}{a^3}\delta = \dot{\phi}\dot{\Psi} - V_\phi\Psi, \quad (6.16)$$

$$2\ddot{\Psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \left\{ \frac{k^2}{a^2} + V_{\phi\phi} \right\} \Psi = \dot{\phi}\dot{\delta}, \quad (6.17)$$

$\Psi = \delta\phi$  e  $\delta$  são definidas como nas Eqs. (5.61)-(5.62). Usamos agora o fator de escala como a

variável, o sistema de equações acima toma a seguinte forma:

$$\delta'' + \left\{ \frac{2}{a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right\} \delta' - \frac{3}{2} \frac{\Omega_0}{a^3 f^2(a)} \delta = \phi' \Psi' - \frac{V_\phi}{f^2(a)} \Psi, \quad (6.18)$$

$$2\Psi'' + \left\{ \frac{3}{a} + 2\frac{f'(a)}{f(a)} \right\} \Psi' + \left\{ \frac{k^2}{a^2 f^2(a)} + \frac{V_{\phi\phi}}{f^2(a)} \right\} \Psi = \phi' \delta', \quad (6.19)$$

onde temos as seguintes definições:

$$f(a) = \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_c(a)a^2}, \quad (6.20)$$

$$\dot{\phi}(a) = \sqrt{3\Omega_{c0}} \sqrt{g(a)^{1/(1+\alpha)} - \bar{A}g(a)^{-\alpha/(1+\alpha)}}, \quad (6.21)$$

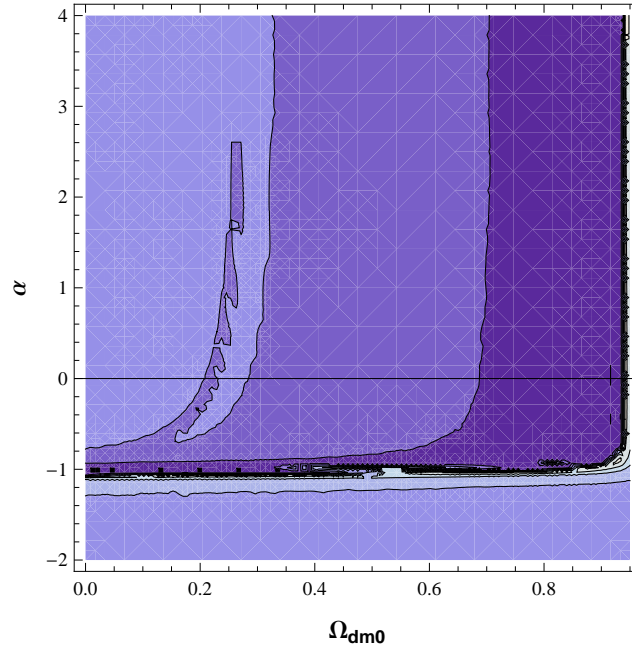
$$V(a) = 3\Omega_{c0} \bar{A}g(a)^{-\alpha/(1+\alpha)}, \quad (6.22)$$

$$V_\phi(a) = \frac{f(a)}{\dot{\phi}} V'(a), \quad (6.23)$$

$$V_{\phi\phi}(a) = \frac{f(a)}{\dot{\phi}} V'_\phi(a), \quad (6.24)$$

$$\Omega_c(a) = \Omega_{c0} g(a)^{1/(1+\alpha)}. \quad (6.25)$$

Nestas expressões,  $\Omega_{c0}$  é o parâmetro da densidade para o modelo generalizado do gás de Chaplygin, que obedece a condição  $\Omega_{c0} + \Omega_{m0} = 1$  e  $g(a)$  é dado por (2.87).



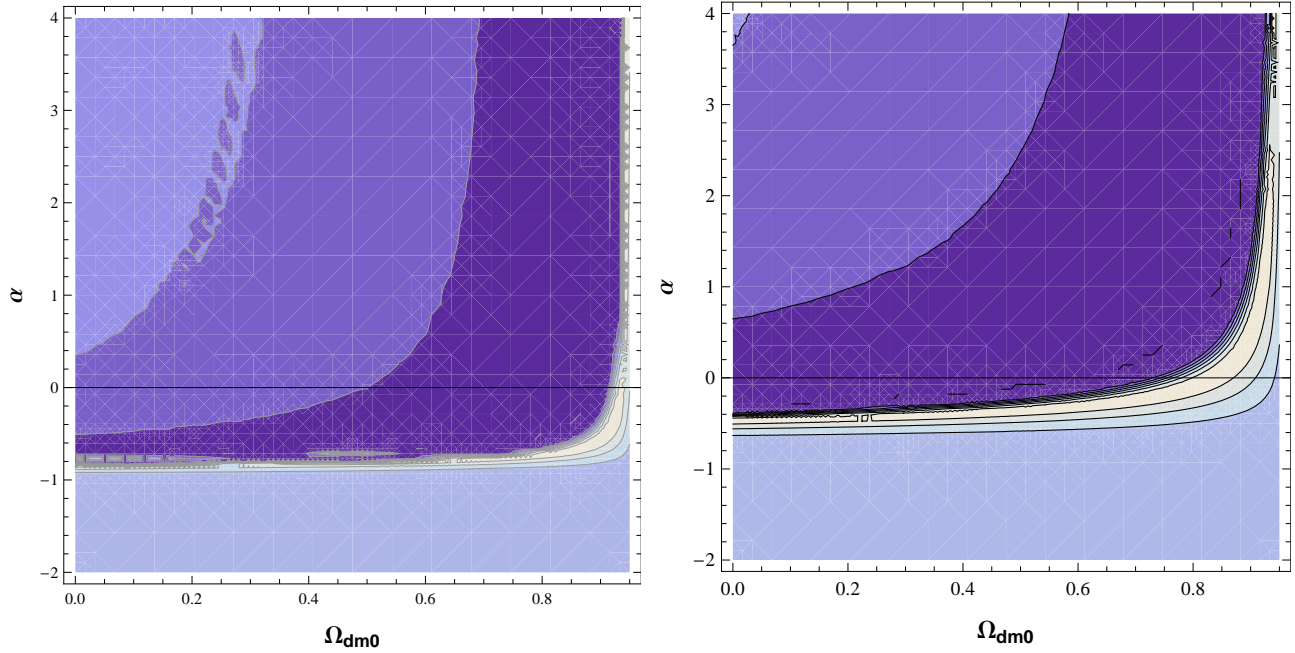


Figura 6.1: bidimensional PDFs para o modelo escalar do Rastall com  $\bar{A} = 0.1$ ,  $\bar{A} = 0.5$  and  $\bar{A} = 0.9$ .

O modelo é testado usando os dados observacionais da amostra 2dFGRS. Impomos as condições iniciais como na seção 5.6. Temos dois parâmetros livres,  $\alpha$  e  $\Omega_{dm0}$  e fixamos  $\bar{A}$ . Quando  $\bar{A} = 0.1, 0.5$  e  $0.9$  o resultado é mostrado na figura 6.1, 2, 3. Temos uma região relevante no espaço dos parâmetros  $\Omega_{dm0}$  e  $\alpha$  com uma alta densidade de probabilidade (PDF). Após a marginalização, há um pico na densidade de probabilidade de próximo a  $\alpha = -1$ . Para  $\alpha$  livre observamos dois plateau na PDF. O plateau correspondente ao valor positivo de  $\alpha$  é mais baixo que o plateau, correspondente ao valor negativo de  $\alpha$ . Por  $\Omega_{dm0}$  têm dois máximos de probabilidades, um quando não tem componente da matéria escura e o outro quando a matéria escura for o único componente além dos bárions. O segundo máximo é mais alto do que o primeiro. Temos um mínimo na densidade de probabilidades próximo de  $\Omega_{dm0} = 0.9$ .

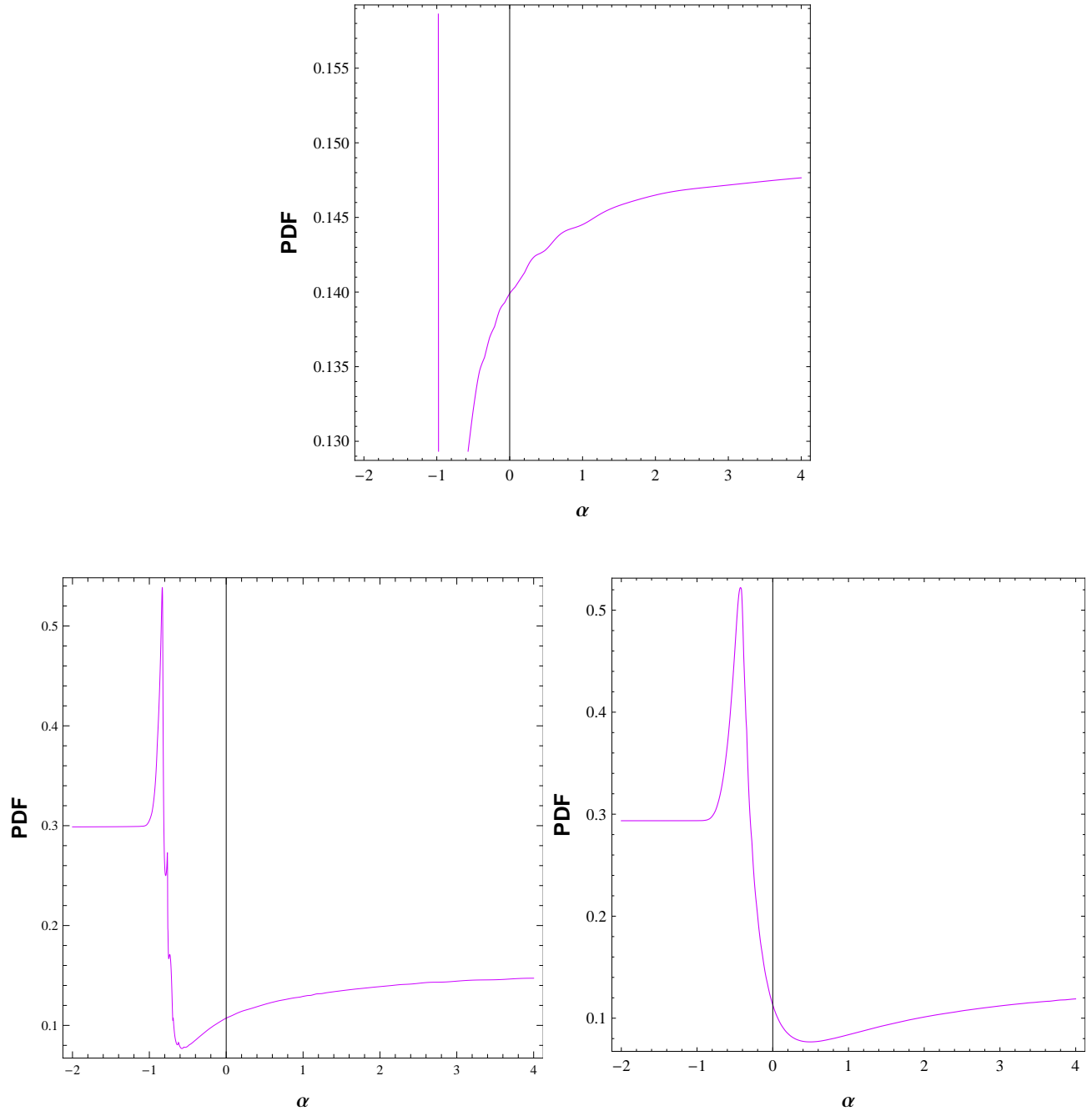


Figura 6.2: PDFs de uma dimensão para o parâmetro  $\alpha$  do modelo escalar do Rastall com  $\bar{A} = 0.1$ ;  $\bar{A} = 0.5$  and  $\bar{A} = 0.9$ .

## 6.2 Conclusão

Um outro modelo foi introduzido baseado na versão do campo escalar da teoria de Rastall. Para este caso, a velocidade do som pode ser nula, independentemente do termo potencial escolhido. Para este campo escalar não-canônico, o modelo da quintessência não é favorecido.

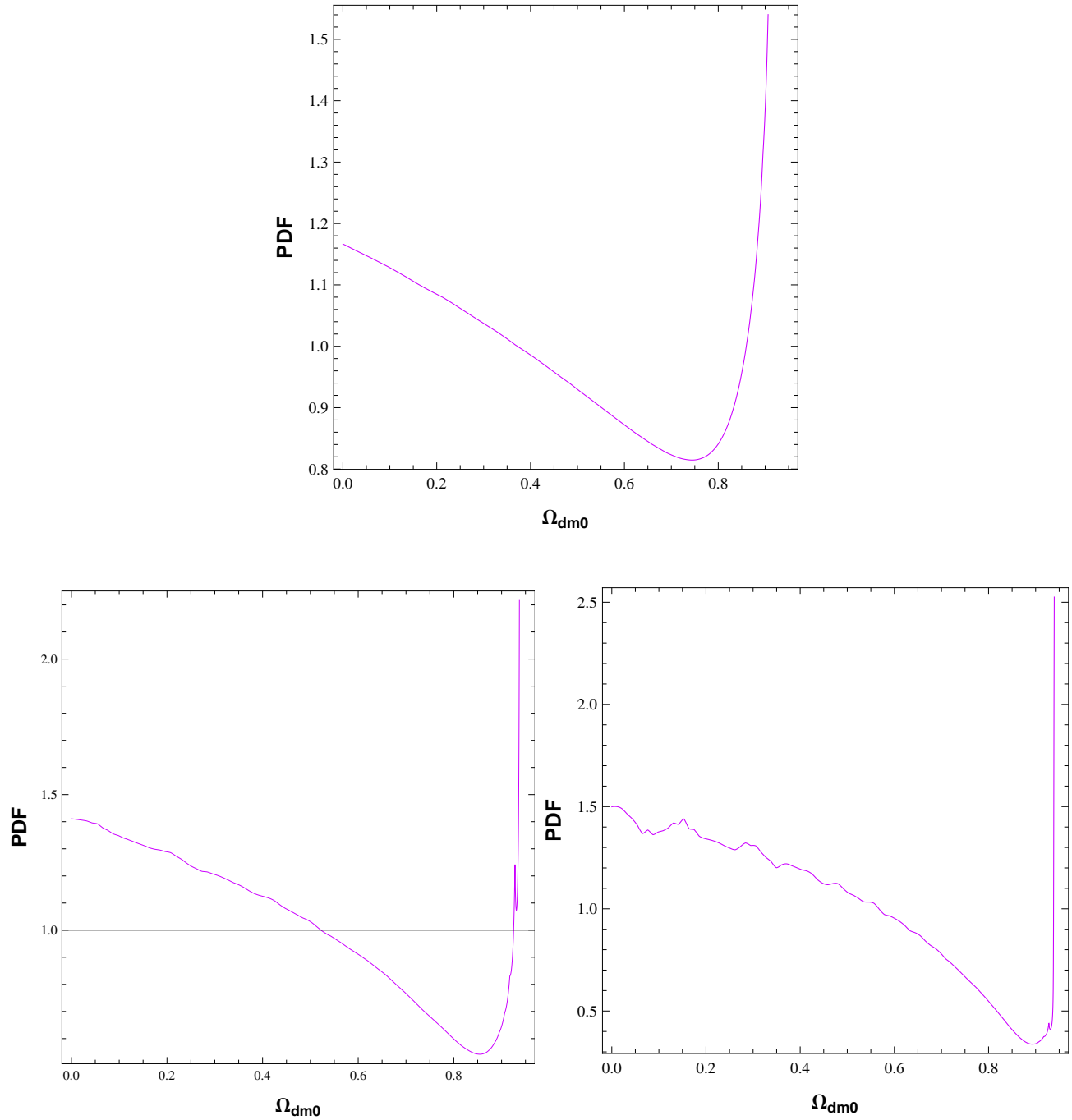


Figura 6.3: PDFs de uma dimensão para o parâmetro  $\Omega_{dm0}$  do modelo escalar do Rastall com  $\bar{A} = 0.1$ ;  $\bar{A} = 0.5$  and  $\bar{A} = 0.9$ .

Quando o parâmetro da densidade da matéria escura está livre, temos dois máximos, um para um universo completamente preenchido pela matéria escura e o outro sem a matéria escura. O modelo campo escalar permanece competitivo. Todos esses resultados são válidos mesmo quando impomos desde o início a unificação da matéria escura/energia escura.



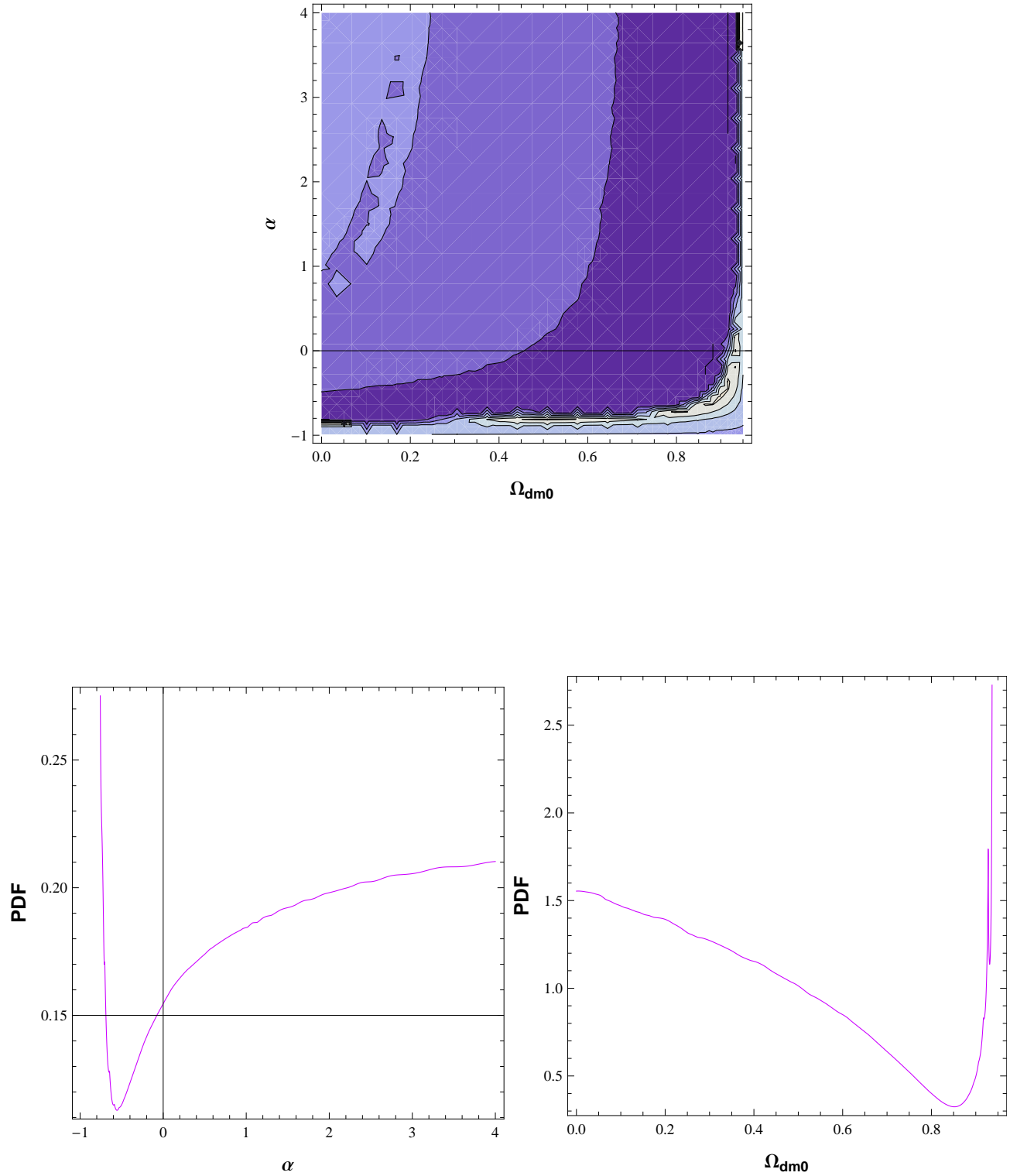


Figura 6.4: PDFs de Dois e de uma dimensão que restringem  $\alpha > -1$  e que fixam  $\bar{A} = 0,5$  para o modelo do campo escalar do Rastall.

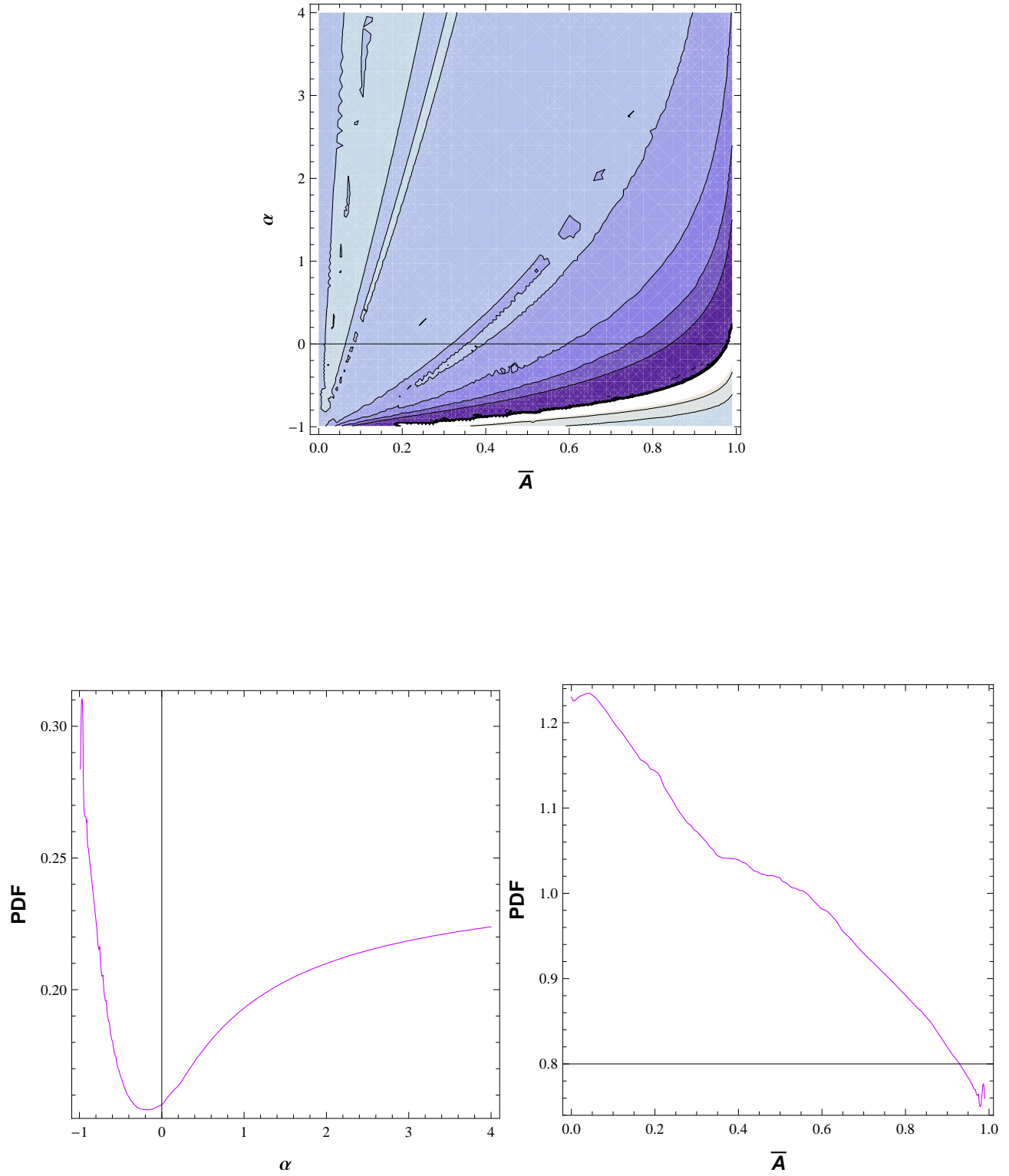


Figura 6.5: PDFs bi e uni-dimensionais que restringem  $\Omega_{dm0} = 0$  para o modelo do campo escalar de Rastall.

## Capítulo 7

# Evolução do potencial gravitacional na teoria Rastall com campo escalar

Neste capítulo, introduzimos o campo escalar não-canônico de Rastall. Investigamos a evolução do potencial gravitacional. Vamos mostrar que no caso em que o conteúdo energético for descrito por um campo escalar não-canônico, o modelo só é consistente quando  $\gamma = 1$ .

### 7.1 Teoria de Rastall com campo escalar

Na teoria de Rastall um campo escalar  $\phi$  é caracterizado pelo seguinte tensor da energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{2-\gamma}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + g_{\mu\nu}(3-2\gamma)V(\phi), \quad (7.1)$$

onde  $\gamma$  é o mesmo parâmetro dos capítulos precedentes. Consideramos uma perturbação do campo escalar da forma  $\phi = \phi_0 + \delta\phi$  e derivamos da Eq. (7.1), juntamente com Eqs. (2.57) e (3.49), a expressão de fundo e à primeira ordem do tensor energia-momento.

$${}^{(0)}T^0_0 = \rho = \frac{\gamma}{2}\dot{\phi}_0^2 + (3-2\gamma)V(\phi_0), \quad (7.2)$$

$${}^{(0)}T^0_i = 0, \quad (7.3)$$

$${}^{(0)}T^i_j = -p\delta^i_j = -\left[\frac{2-\gamma}{2}\dot{\phi}_0^2 - (3-2\gamma)V(\phi_0)\right]\delta^i_j, \quad (7.4)$$

onde o ponto denota a derivada respeito a  $t$ ,  $\rho$  e  $p$  são a densidade e a pressão do campo escalar, respectivamente. As quantidades perturbadas têm a forma

$$\delta T^0_0 = \delta\rho = \gamma\dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} - \gamma\Phi\dot{\phi}_0^2 + (3 - 2\gamma)V_{,\phi}\delta\phi, \quad (7.5)$$

$$\delta T^0_i = \dot{\phi}_0\delta\phi_{,i}, \quad (7.6)$$

$$\delta T^i_j = -\delta p\delta^i_j = \left[ (\gamma - 2)\dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} + (2 - \gamma)\Phi\dot{\phi}_0^2 + (3 - 2\gamma)V_{,\phi}\delta\phi \right] \delta^i_j, \quad (7.7)$$

onde  $,i$  denota a derivada espacial respeito à coordenada  $x^i$  e  $V_{,\phi} := dV(\phi)/d\phi$ . A equação modificada de Klein-Gordon tem a seguinte forma covariante:

$$\phi_{;\alpha}{}^{;\alpha} + (3 - 2\gamma)V_{,\phi} = (1 - \gamma)\frac{\phi^{;\rho}\phi^{;\sigma}\phi_{;\rho;\sigma}}{\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}}, \quad (7.8)$$

na qual parece mais claro que  $\gamma = 1$  restaura o caso da relatividade geral. Inserindo outra vez  $\phi = \phi_0 + \delta\phi$  na Eq. (7.8) e usando a métrica (2.57) e (3.49), resultando em:

$$\gamma\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + (3 - 2\gamma)V_{,\phi} = 0. \quad (7.9)$$

Usando o tempo conforme  $d\eta = dt/a(t)$ , podemos escrever

$$\gamma\phi_0'' + (3 - \gamma)\mathcal{H}\phi_0' + (3 - 2\gamma)a^2V_{,\phi} = 0, \quad (7.10)$$

onde a linha denota a derivação no que diz respeito ao tempo conforme e  $\mathcal{H} := a'/a$ . A equação modificada perturbada de Klein-Gordon tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \gamma\delta\phi'' + (3 - \gamma)\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi \\ & - (3 + \gamma)\phi_0'\Phi' + 2(3 - 2\gamma)a^2V_{,\phi}\Phi + (3 - 2\gamma)a^2V_{,\phi\phi}\delta\phi = 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde  $V_{,\phi\phi} := d^2V(\phi)/d\phi^2$ .

## 7.2 Evolução do potencial gravitacional

Agora calculamos o tensor de Einstein da métrica perturbada (3.49) e o combinamos com o tensor energia-momento perturbado em Eqs. (7.5)–(7.7). Em particular, como antecipamos

implicitamente ao escrever a métrica perturbada (3.49), desde que o  $\delta T^i_j \propto \delta^i_j$  temos somente um potencial gravitacional. Consulte o capítulo 3 para mais detalhes onde escolhemos  $\phi = \psi$ . Obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') + \gamma(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Phi = \\ 4\pi G [\gamma\phi'_0\delta\phi' + (3 - 2\gamma)a^2V_{,\phi}\delta\phi] , \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\mathcal{H}\Phi_{,i} + \Phi'_{,i} = 4\pi G\phi'_0\delta\phi_{,i} , \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + (2 - \gamma)(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Phi = \\ 4\pi G [(2 - \gamma)\phi'_0\delta\phi' - (3 - 2\gamma)a^2V_{,\phi}\delta\phi] , \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde igualmente usamos a relação do fundo  $4\pi G\phi_0^2 = \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'$ . Agora reduzimos o sistema acima de duas maneiras diferentes que, contudo, dão resultados diferentes a menos que escolhamos  $\gamma = 1$ . Usamos uma decomposição em modo normal. A Eq. (7.13) pode assim ser escrita como  $\mathcal{H}\Phi + \Phi' = 4\pi G\phi'_0\delta\phi$  e  $\nabla^2 = -k^2$ . Agora, se somamos ou subtraímos a primeira equação com o terceira, usando  $\mathcal{H}\Phi + \Phi' = 4\pi G\phi'_0\delta\phi$ , a fim de eliminar  $\delta\phi$  e a equação de movimento (7.10), a fim de eliminar  $\phi'_0$  obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = \\ \frac{2 - \gamma}{\gamma} [-k^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi')] - \frac{2V_{,\phi}a^2}{\gamma\phi'_0}(3 - 2\gamma)(\mathcal{H}\Phi + \Phi') , \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = \\ -k^2\Phi - 3\mathcal{H}\frac{2 - \gamma}{\gamma}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') - \frac{2V_{,\phi}a^2}{\gamma\phi'_0}(3 - 2\gamma)(\mathcal{H}\Phi + \Phi') . \end{aligned} \quad (7.16)$$

Estas equações podem ser idênticas somente se  $\gamma = 1$ , que é o limite da relatividade geral da teoria de Rastall. Realmente, estas equações poderiam ser igualmente consistentes quando  $k = 0$ . Voltando às equações de Einstein, antes da decomposição em modos normais,  $k = 0$  significaria  $\nabla^2\Phi = 0$ , que implica que  $\Phi$  deve ser um campo homogêneo, isto é  $\Phi = \Phi(\eta)$ . Note que toda a dependência linear espacial para  $\Phi$  seria inaceitável pois o campo divergiria no infinito. Mas se  $\Phi$  é homogêneo, não estamos investigando perturbações reais. De fato, é

suficiente na métrica (3.49) redefinir o tempo e o fator de escala como segue:

$$d\bar{t}^2 = [1 + 2\Phi(t)]dt^2, \quad \bar{a}^2(t) = a^2(t)[1 - 2\Phi(t)], \quad (7.17)$$

e obtemos outra vez a métrica FLRW no referencial usual, com  $\bar{t}$  o tempo cósmico. Consequentemente concluimos que uma teoria de perturbação no calibre newtoniano é consistente somente para  $\gamma = 1$ .

### 7.3 O papel de uma componente tipo fluido

O resultado encontrado na seção precedente parece ser diferente se introduzimos uma outra componente junto com o campo escalar de Rastall. Consideramos um fluido perfeito com equação de estado  $p = \omega\rho$ . Escrevemos seu (isto é, fundo mais perturbado) tensor total de energia-momento como segue:

$$T^0_0 = \rho(1 + \delta), \quad (7.18)$$

$$T^0_i = -\rho(1 + w)v_i, \quad (7.19)$$

$$T^i_j = -(p + \delta p)\delta^i_j, \quad (7.20)$$

onde  $\delta := \delta\rho/\rho$  é o contraste usual da densidade,  $\delta\rho$  é a perturbação da densidade,  $\delta p$  é a pressão e  $v_i$  é a velocidade. Supomos as perturbações adiabáticas, isto é  $\delta p = c_s^2\delta\rho$ , onde  $c_s^2 = \omega$ . Usando outra vez a decomposição em modo normal, reescrevemos o sistema de equações de Einstein, como segue:

$$-k^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') + \gamma(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Phi = 4\pi Ga^2\delta\rho_\phi + 4\pi Ga^2\delta\rho, \quad (7.21)$$

$$k(\mathcal{H}\Phi + \Phi') = 4\pi Gk\phi'_0\delta\phi + 4\pi G\rho(1 + \omega)v, \quad (7.22)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + 3\mathcal{H}^2\Phi - \gamma(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Phi = 4\pi Ga^2\delta p_\phi + 4\pi Ga^2\delta p, \quad (7.23)$$

onde definimos:

$$\delta\rho_\phi := \frac{1}{a^2}\gamma\phi'_0\delta\phi' + (3 - 2\gamma)V_\phi\delta\phi, \quad (7.24)$$

$$\delta p_\phi := \frac{1}{a^2}(2 - \gamma)\phi'_0\delta\phi' - (3 - 2\gamma)V_{,\phi}\delta\phi, \quad (7.25)$$

$v$  é o potencial da velocidade definido por  $v_i = -v_{,i}/k$ . Com as variáveis fluidas e a relação  $\delta p = c_s^2\delta\rho$  temos um total de quatro funções desconhecidas  $(\Phi, \delta\phi, \delta\rho, v)$ , mas somente 3 equações. Conseqüentemente, é impossível obter outra vez uma limitação tão forte quanto  $\gamma = 1$ . Investigamos alguns detalhes do sistema acoplado do fluido mais o campo escalar de Rastall. Multiplicando Eq. (7.21) por  $2 - \gamma$ , Eq. (7.23) por  $\gamma$  e subtraindo as duas, obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma\Phi'' + 6\mathcal{H}\Phi' + 6\mathcal{H}^2\Phi - 2\gamma(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Phi + (2 - \gamma)k^2\Phi = \\ -8\pi Ga^2(3 - 2\gamma)V_{,\phi}\delta\phi + 4\pi Ga^2(\gamma c_s^2 + \gamma - 2)\delta\rho. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Desta equação, eliminamos  $\delta\phi$  com a ajuda de Eq. (7.22), obtemos então

$$\begin{aligned} \gamma\Phi'' + 6\mathcal{H}\Phi' + 6\mathcal{H}^2\Phi - 2\gamma(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Phi + (2 - \gamma)k^2\Phi = \\ -2a^2(3 - 2\gamma)V' \left[ \frac{\mathcal{H}\Phi + \Phi'}{\phi_0'^2} - \frac{4\pi Ga^2\rho(1 + \omega)v}{k\phi_0'^2} \right] \\ + 4\pi Ga^2\rho(\gamma c_s^2 + \gamma - 2)\delta, \end{aligned} \quad (7.27)$$

onde usamos  $V_{,\phi} = V'/\phi'$ . Supomos agora que o fluido satisfaz sua própria conservação, ou seja, seu tensor energia-momento é conservado separadamente, a fim de obter mais uma equação necessária para resolver o sistema. De  $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ , para o componente do fluido somente, obtemos:

$$\delta' = -(1 + \omega)(kv - 3\Phi'), \quad (7.28)$$

$$v' = -\mathcal{H}(1 - 3\omega)v + \frac{kc_s^2}{1 + \omega}\delta + k\Phi. \quad (7.29)$$

Agora temos que especificar a evolução do fundo, isto é, a função  $\mathcal{H}$ . Sua forma geral é

$$\frac{\mathcal{H}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left[ \rho + \frac{\gamma\phi_0'^2}{a^2} + (3 - 2\gamma)V \right]. \quad (7.30)$$

A fim de simplificar a Eq. (7.27), suponhamos que o potencial é uma constante, i.e.  $V' = 0$ . Conseqüentemente, está fazendo o papel de uma constante cosmológica eficaz. Se o potencial

for uma constante, voltando a equação de Klein-Gordon (7.10) isso conduz a:

$$\phi'_0 = u_0 a^{-(3-\gamma)/\gamma}, \quad (7.31)$$

e a equação de Friedmann toma a seguinte forma:

$$\frac{\mathcal{H}^2}{H_0^2 a^2} = \Omega_0 a^{-3(1+\omega)} + \Omega_V + \Omega_{u_0} a^{-6/\gamma}, \quad (7.32)$$

com as definições

$$\Omega_V := \frac{8\pi G(3-2\gamma)V}{3H_0^2}, \quad \Omega_{u_0} := \frac{8\pi G\gamma u_0^2}{3H_0^2}. \quad (7.33)$$

Finalmente, trocando o tempo conforme para o fator de escala, escrevemos o sistema acoplado de equações de Einstein e as equações do fluido como:

$$\begin{aligned} \gamma\Phi_{aa} + \left[ \gamma \frac{\dot{\mathcal{H}}}{\mathcal{H}} + \frac{6+\gamma}{a} \right] \Phi_a + \left[ \frac{2\gamma\dot{\mathcal{H}}}{\mathcal{H}a} + \frac{6-2\gamma}{a^2} \right] \Phi + (2-\gamma) \frac{k^2}{\mathcal{H}^2 a^2} \Phi = \\ \frac{3H_0^2}{2\mathcal{H}^2} \Omega_0 a^{-3(1+\omega)} (\gamma c_s^2 + \gamma - 2) \delta, \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\delta_a = -(1+\omega) \left( \frac{kv}{\mathcal{H}a} - 3\Phi_a \right), \quad (7.35)$$

$$v_a = -\frac{1}{a}(1-3\omega)v + \frac{kc_s^2}{(1+\omega)\mathcal{H}a} \delta + \frac{k}{\mathcal{H}a} \Phi, \quad (7.36)$$

onde o índice  $a$  denota a derivação respeito ao fator de escala. Começamos a evolução com  $a_i = 10^{-3}$  e escolhemos como condições iniciais  $\Phi'_i = v_i = 0$ ,  $\Phi_i = -\delta_i = -1$ . Com a escolha  $\omega = 0$  e  $\gamma = 2$ , pelas Eqs. (7.32) e (7.34) reproduzimos a mesma dinâmica do modelo  $\Lambda$ CDM. É curioso que isso parece acontecer somente quando um fluido padrão é adicionado ao campo escalar de Rastall. Nas Figura 7.1 e 7.2 traçamos a evolução de  $\Phi$  e  $\delta$  por  $\omega = 0$  e  $\Omega_0 = 0.04$ . Isto é, estamos supor que o fluido perfeito considerado é uma componente do bariônica. Igualmente escolhemos uma escala  $k = 10^{-3} \text{ h Mpc}^{-1}$ .

Para  $\gamma > 2$ , o crescimento do contraste da densidade do componente fluido está aumentando. Isto é provavelmente devido ao fato que  $\hat{c}_s^2$  se torna negativo e conseqüentemente o colapso do campo escalar é livre. Para  $\gamma < 2$  o crescimento de  $\delta$  é apreciavelmente obstruído. É curioso observar na Figura 7.2 como o potencial gravitacional diminui mais para  $\gamma = 1,5$  do que para  $\gamma = 1$ . Teríamos que esperar o contrário, visto que para  $\gamma = 1$  a velocidade do som é  $\hat{c}_s^2 = 1$ ,



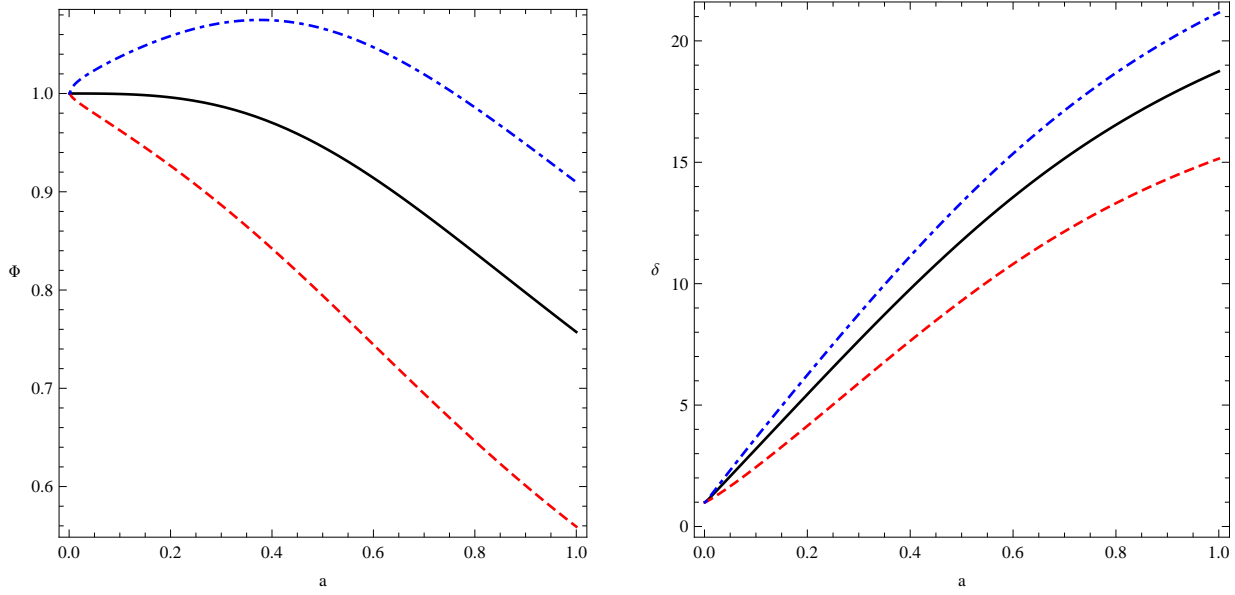


Figura 7.1: Evolução de  $\Phi$  e  $\delta$  por  $\omega = 0$  e  $\Omega_0 = 0.04$ . As linhas pretas representam o caso  $\gamma = 2$ , i.e. o  $\Lambda$ CDM. As linhas vermelhas correspondem a  $\gamma = 1.9$  considerando que azuis a  $\gamma = 2.05$ . Escolhemos uma escala  $k = 10^{-3} \text{ h Mpc}^{-1}$ .

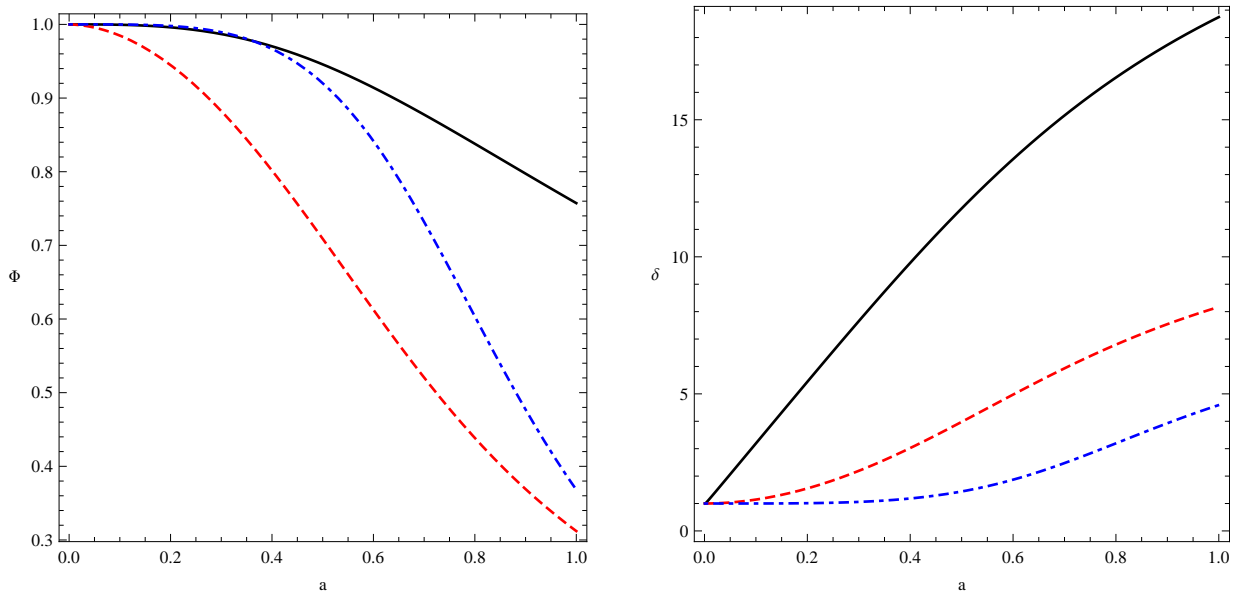


Figura 7.2: Evolução de  $\Phi$  e  $\delta$  por  $\omega = 0$  e  $\Omega_0 = 0.04$ . As linhas pretas representam o caso  $\gamma = 2$ , i.e. o  $\Lambda$ CDM. As linhas vermelhas correspondem a  $\gamma = 1.5$  considerando que azuis a  $\gamma = 1$ . Escolhemos uma escala  $k = 10^{-3} \text{ h Mpc}^{-1}$ .

enquanto que para  $\gamma = 3/2$  de velocidade de som é  $\hat{c}_s^2 = 1/3$ , isto é, menor. Note que tal discrepância não está refletida na figura para  $\delta$ , isto é, o crescimento para  $\gamma = 1,5$  é maior que para  $\gamma = 1$ . Conseqüentemente, tal efeito é provavelmente devido à evolução diferente do fundo. Para a integralidade, indicamos aqui igualmente a evolução de  $\delta_\phi := \delta\rho_\phi/\rho_\phi$ , que pode facilmente ser calculada da Eq. (7.21), uma vez que conhecemos  $\Phi$  e  $\delta$ . Os resultados são traçados em Figura 7.3.

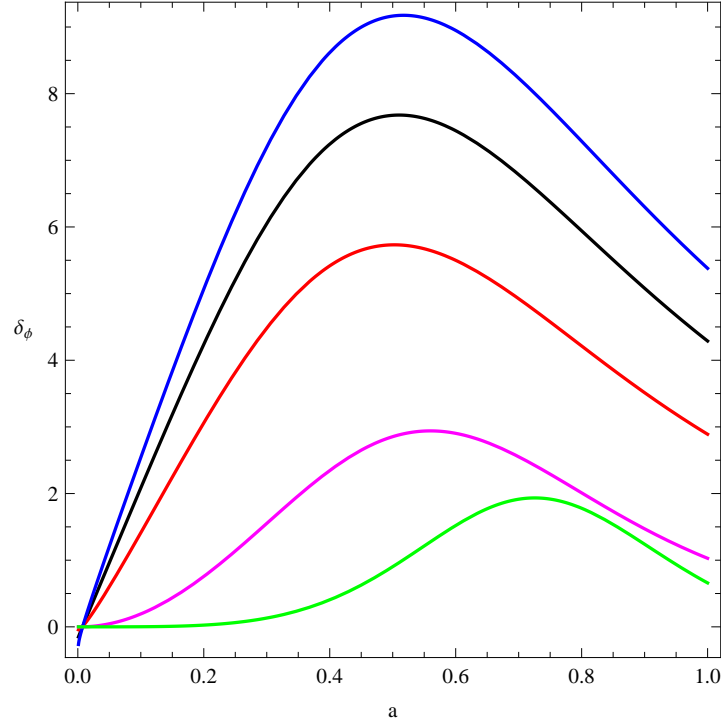


Figura 7.3: Evolução de  $\delta_\phi$  por  $\omega = 0$  e  $\Omega_0 = 0.04$ . De cima para baixo:  $\gamma = 2.05, 2, 1.9, 1.5, 1$ . Escolhemos uma escala  $k = 10^{-3} \text{ h Mpc}^{-1}$ .

## 7.4 Conclusão

A formulação escalar da teoria de Rastall da gravidade pode permitir uma unificação consistente da matéria escura e da energia escura para a evolução do fundo do universo. Mostramos neste capítulo que, por outro lado, sua versão de uma única componente (campo escalar não-canônico de Rastall) é perturbativamente incompatível: a compatibilidade das equações perturbadas exige um potencial gravitacional homogêneo, que seria equivalente a uma redefinição das funções do fundo e não às perturbações reais. A teoria escalar de Rastall pode admitir um cenário perturbativo consistente se um outro componente fluido (canônico) é adicionado.

Para um modelo de dois fluidos, avaliamos numericamente o comportamento do potencial gravitacional e do contraste da densidade para o componente do campo escalar. Para alguns casos, como  $\gamma \sim 1,5$ , um comportamento é muito similar àquele obtido no exemplo da relatividade geral com um campo da quintessência. Embora isto não represente um estudo exaustivo do modelo de dois componentes de Rastall, os resultados relatados aqui indicam que os cenários consistentes podem emergir de um modelo de unificação de Rastall para a energia escura e a matéria escura.

## Capítulo 8

# Cosmologia de Rastall e o modelo $\Lambda$ CDM

Introduzimos um modelo de dois fluidos, uma componente que representa a energia do vácuo e a outra a matéria sem pressão (por exemplo bárions mais a matéria escura fria). O cenário cosmológico é o mesmo para o modelo de  $\Lambda$ CDM, no fundo e a níveis perturbativos lineares, à exceção de um aspecto: agora a energia escura pode aglomerar-se. Especulamos que isso pode conduzir a uma possibilidade de distinguir os modelos a nível perturbativo não-linear.

### 8.1 Cosmologia de Rastall

A fim de construir a cosmologia de Rastall dominada para a fase da matéria, tomando em consideração a presente fase de aceleração do universo, consideramos um modelo de dois fluidos. O primeiro componente é uma matéria sem pressão (matéria escura fria mais bárions) com densidade  $\rho_m$  enquanto que o segundo obedece a equação de estado do vácuo  $p_x = -\rho_x$ . Um índice  $m$  denotará as quantidades relativas ao componente da matéria e um índice  $x$  denotará a energia escura. Para que estruturas se formem através dos processos de instabilidade gravitacional, o tensor energia-momento da matéria deve ser conservado separadamente, ao contrário desenvolveria uma pressão efetiva, e a aglomeração não ocorreria, à exceção para escalas muito grandes. Consequentemente, o sistema de Einstein mais as equações da conservação são dadas

como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left[ T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^x - \frac{\gamma-1}{2}g_{\mu\nu}(T^m + T^x) \right], \quad (8.1)$$

$$(T_m^{\mu\nu} + T_x^{\mu\nu})_{;\mu} = \frac{\gamma-1}{2}(T_m + T_x)^{;\nu}. \quad (8.2)$$

Para separar a Eq. (8.2), introduzimos os parâmetro  $\eta_m$  e  $\eta_x$ :

$$T_{m;\mu}^{\mu\nu} = \frac{\gamma-1}{2}(\eta_m T_m + \eta_x T_x)^{;\nu}, \quad T_{x;\mu}^{\mu\nu} = \frac{\gamma-1}{2}[(1-\eta_m)T_m + (1-\eta_x)T_x]^{;\nu}. \quad (8.3)$$

As equações de movimento tornam-se:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ (3-2\gamma)\rho_x + \frac{3-\gamma}{2}\rho_m \right], \quad (8.4)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \frac{\gamma-1}{2}(\eta_m\dot{\rho}_m + 4\eta_x\dot{\rho}_x), \quad (8.5)$$

$$\dot{\rho}_x = \frac{\gamma-1}{2}[(1-\eta_m)\dot{\rho}_m + 4(1-\eta_x)\dot{\rho}_x]. \quad (8.6)$$

Usando a terceira equação com a segunda, obtemos a seguintes equações:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ (3-2\gamma)\rho_x + \frac{3-\gamma}{2}\rho_m \right], \quad (8.7)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \frac{\gamma-1}{2} \left[ \frac{\eta_m + 2(\gamma-1)(\eta_x - \eta_m)}{1 + 2(\gamma-1)(\eta_x - 1)} \right] \dot{\rho}_m, \quad (8.8)$$

$$\dot{\rho}_x = \frac{\gamma-1}{2} \frac{1-\eta_m}{1 + 2(\gamma-1)(\eta_x - 1)} \dot{\rho}_m. \quad (8.9)$$

Temos as seguintes soluções para as densidades:

$$\begin{aligned} \rho_m &= \rho_{m0} a^{-3(1+\omega_e)}, \\ \omega_e &\equiv \frac{\gamma-1}{2} \frac{\eta_m + 2(\gamma-1)(\eta_x - \eta_m)}{2[1 + 2(\gamma-1)(\eta_x - 1)] - \frac{\gamma-1}{2}[\eta_m + 2(\gamma-1)(\eta_x - \eta_m)]}, \\ \rho_x &= \frac{\bar{\rho}}{3-2\gamma} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{1-\eta_m}{1 + 2(\gamma-1)(\eta_x - 1)} \rho_m, \end{aligned} \quad (8.10)$$

onde  $\bar{\rho}$  é uma constante integração e introduzimos  $\omega_e$  como uma equação de estado efetiva. Introduzindo a equação acima na equação modificada de Friedmann, obtemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left\{ \bar{\rho} + \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1) [(3 - 2\gamma)(1 - \eta_m) - 1 - 2(\gamma - 1)(\eta_x - 1)]}{2[1 + 2(\gamma - 1)(\eta_x - 1)]} \right] \rho_m \right\}, \quad (8.11)$$

a qual descreveria a mesma evolução do fundo que no modelo  $\Lambda$ CDM com  $\bar{\rho}$  como uma constante cosmológica efetiva, se a matéria não tivesse agora uma evolução diferente,  $\gamma$ ,  $\eta_m$  e  $\eta_x$ . A equação (8.10) prevê um desvio da dependência usual do componente da matéria em relação ao fator de escala, este desvio é dado pelo parâmetro  $\omega_e$ . No modelo cosmológico padrão,  $\omega_e = 0$ . Pode-se avaliar o desvio do modelo padrão previsto pela cosmologia de Rastall, usando dados da supernova do tipo Ia, por exemplo a amostra Union2 [98]. Os resultados indicam que o melhor ajuste ocorre para  $\omega_e \sim 0,1$ . Isso é muito próximo ao resultado padrão e sugere  $\gamma \sim 1$  ou  $\omega_e \sim 0$ . A primeira opção conduz à relatividade geral padrão. Supomos que  $\gamma \neq 1$  e que  $\omega_e = 0$ . Uma avaliação melhor pode ser obtida usando a formação de estruturas. Seguindo a referência [84], vemos que a modificação da equação de estado induzida pela teoria de Rastall a nível do fundo, do ponto de vista da relatividade geral, é  $p_m = \omega_e \rho_m$ , e esta relação é mantida no nível perturbativo linear, isto é  $\delta p_m \approx \omega_e \delta \rho_m$  (usamos o sinal aproximado pois em [84] o modelo considerado contém um unico fluido). A interpretação da matéria escura fria implica  $\omega_e = 0$ , enquanto a da matéria escura morna poderia conduzir a  $\omega_e > 0$  ( admitimos que o cenário quente da matéria escura está excluída por observações). Sugerido por estas observações, podemos fixar  $\omega_e = 0$ . É notável que mesmo se  $\gamma$  é distante de 1, o fundo cosmológico da teoria de Rastall pode conduzir aos mesmos resultados físicos do modelo de  $\Lambda$ CDM. Com tal fim, consideremos  $\omega_e = 0$ , sendo que a única solução independente de  $\gamma$  é

$$\eta_x = \eta_m = 0. \quad (8.12)$$

Os valores acima para  $\eta_x$  e  $\eta_m$  conduzem a um exemplo particular mas interessante da teoria de Rastall. O ajuste acima garante que o tensor de energia-momento da matéria está conservado no sentido usual, isto é.

$$T_{m;\mu}^{\mu\nu} = 0. \quad (8.13)$$

## 8.2 Pequenas perturbações

Os fluidos são representados pelos seguintes tensores de energia-momento:

$$T_x^{\mu\nu} = (\rho_x + p_x)u_x^\mu u_x^\nu - p_x g^{\mu\nu} , \quad (8.14)$$

$$T_m^{\mu\nu} = (\rho_m + p_m)u_m^\mu u_m^\nu - p_m g^{\mu\nu} . \quad (8.15)$$

Impomos  $p_m = 0$  e  $p_x = -\rho_x$ . A escolha do referencial síncrono implica  $\delta u^0 = 0$ , mas  $\delta u^i$  é uma variável dinâmica. Há de fato duas 4-velocidades, uma associada a componente  $x$ , a outra à matéria. A perturbação na 4-velocidade do fluido de matéria pode ser feito nulo. Usando este formalismo, obtém-se o seguinte grupo de equações para as perturbações:

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = 8\pi G\rho_x[\gamma + 3(2 - \gamma)\omega_x]\delta_x + 8\pi G\rho_m\gamma\delta_m , \quad (8.16)$$

$$\dot{\delta}_m = \frac{\dot{h}}{2} , \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\rho}_x + (1 + \omega_x)\rho_x\left(\Theta - \frac{\dot{h}}{2}\right) + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega_x)\delta\rho_x = \\ \frac{\gamma - 1}{2} [(1 - 3\omega_x)\delta\dot{\rho}_x + \delta\dot{\rho}_m] , \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} (1 + \omega_x)\dot{\rho}_x\delta u^i + (1 + \omega_x)\rho_x\delta\dot{u}^i + 5\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega_x)\rho_x\delta u^i + \frac{\omega_x}{a^2}\partial^i\delta\rho_x = \\ -\frac{\gamma - 1}{2a^2} [(1 - 3\omega_x)\partial^i\delta\rho_x + \partial^i\delta\rho_m] . \end{aligned} \quad (8.19)$$

Nestas expressões usamos as definições:

$$h \equiv \frac{h_{kk}}{a^2} , \quad \omega_x \equiv \frac{p_x}{\rho_x} , \quad \delta_x \equiv \frac{\delta\rho_x}{\rho_x} , \quad \delta_m \equiv \frac{\delta\rho_m}{\rho_m} , \quad \Theta \equiv \partial_i\delta u^i , \quad (8.20)$$

Agora, impomos  $\omega_x = -1$ . Obtemos, das Eqs. (8.18) e (8.19):

$$\delta\dot{\rho}_x = \frac{\gamma - 1}{2} (4\delta\dot{\rho}_x + \delta\dot{\rho}_m) , \quad (8.21)$$

$$-\frac{\partial^i\delta\rho_x}{a^2} = \frac{1 - \gamma}{2a^2} (4\partial^i\delta\rho_x + \partial^i\delta\rho_m) . \quad (8.22)$$

Essas equações conduzem à relação:

$$\delta\rho_x = \frac{\gamma - 1}{2(3 - 2\gamma)}\delta\rho_m . \quad (8.23)$$

Usando agora Eq. (8.17), podemos reescrever Eq. (8.16) como:

$$\ddot{\delta}_m + 2\frac{\dot{a}}{a}\delta_m - 4\pi G\rho_m\delta_m = 0 . \quad (8.24)$$

Mas essa é a mesma equação para a perturbação da matéria no modelo  $\Lambda$ CDM. Na verdade, há uma diferença: agora há uma perturbação no termo “cosmológico”  $\rho_x$ .

De fato, usando as Eqs. (8.10) e (8.10) com  $\eta_m = \eta_x = 0$  junto com (8.23), encontramos:

$$\delta_x = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\delta_m}{\frac{C}{\rho_{m0}}a^3 + \frac{\gamma-1}{2}} . \quad (8.25)$$

Recentemente (isto é para  $a \rightarrow \infty$ ),  $\delta_x$  deve tornar-se insignificante, e uma equivalência completa entre Rastall e o modelo de  $\Lambda$ CDM é esperada no fundo e no nível linear das perturbações. Por outro lado, no passado (isto é para  $a \rightarrow 0$ ), temos  $\delta_x \sim \delta_m$  e conseqüentemente a energia escura pode em princípio aglomerar-se. Isso pode ter conseqüências para o processo da formação da estrutura porque devemos esperar que uma quantidade de energia escura aglomerada esteja presente em sistemas maiores, como halos de galáxias e aglomerados de galáxias. Conseqüentemente, uma possibilidade a discriminar entre os dois modelos poderia ser um efeito integrado Sachs-Wolfe [17] que afetasse o espectro da anisotropia da radiação cósmica do fundo de maneira diferente.

### 8.2.1 Calibre newtoniano

Passamos do calibre síncrono ao newtoniano conforme, que parece ser mais apropriado para o estudo do potencial gravitacional. Para cada componente fluido calculamos as perturbações da equação da continuidade de Euler. Seguindo a referência [74], para a matéria temos  $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ , i.e.

$$\delta\rho'_m + 3\frac{a'}{a}\delta\rho_m + a\rho_m\partial_i\delta u_m^i - 3\rho_m\Phi' = 0 , \quad \frac{1}{a^4} (a^5\rho_m\delta u_m^i)' + \rho_m\partial^i\Phi = 0 , \quad (8.26)$$



onde a linha denota a derivação em relação ao tempo conforme. Para o componente  $x$ , temos a correção proporcional a  $T_{,\mu}$  e as equações se tornam:

$$\delta\rho'_x + 3\frac{a'}{a}(\delta p_x + \delta\rho_x) - 3\rho_x(1 + \omega_x)\Phi' + a\rho_x(1 + \omega_x)\partial_i\delta u_x^i = \frac{\gamma - 1}{2}[\delta\rho'_m + \delta\rho'_x - 3\delta p'_x] , \quad (8.27)$$

$$\frac{1}{a^4} [a^5\rho_x(1 + \omega_x)\delta u_x^i]' + \partial^i\delta p_x + \rho_x(1 + \omega_x)\partial^i\Phi = -\frac{\gamma - 1}{2}\partial^i[\delta\rho_m + \delta\rho_x - 3\delta p_x] . \quad (8.28)$$

As equações de Einstein são:

$$-k^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') = 4\pi G a^2 \left[ \delta\rho_m + \delta\rho_x - \frac{\gamma - 1}{2}(\delta\rho_m + \delta\rho_x - 3\delta p_x) \right] , \quad (8.29)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \left[ \delta p_x + \frac{\gamma - 1}{2}(\delta\rho_m + \delta\rho_x - 3\delta p_x) \right] . \quad (8.30)$$

Agora supomos, como antes,  $p_x = -\rho_x$  (que significa  $\omega_x = -1$ ), que implica  $\delta p_x = -\delta\rho_x$  porque estamos considerando as perturbações adiabáticas. As equações (8.27) e (8.28) tornam-se então:

$$\delta\rho'_x = \frac{\gamma - 1}{2}(\delta\rho'_m + 4\delta\rho'_x) , \quad \partial^i\delta\rho_x = \frac{\gamma - 1}{2}\partial^i(\delta\rho_m + 4\delta\rho_x) , \quad (8.31)$$

e conseqüentemente obtemos:

$$\delta\rho_x = \frac{\gamma - 1}{2(3 - 2\gamma)}\delta\rho_m , \quad (8.32)$$

i.e. a perturbação no fluido  $\delta\rho_m$  é proporcional às perturbações na matéria: a mesma relação encontrada usando a condição coordenada síncrono. Recuperamos o limite correto de  $\Lambda$ CDM quando  $\gamma = 1$ .

Combinando as Eqs. (8.29) e (8.30) com a Eq. (8.32) obtemos:

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a}\Phi + \Phi' \right) = 4\pi G a^2 \delta\rho_m , \quad (8.33)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left[ 2 \left( \frac{a'}{a} \right)' + \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \right] \Phi = 0 . \quad (8.34)$$

Essas equações são idênticas às respectivas para o modelo de  $\Lambda$ CDM (note que o fundo é igualmente o mesmo). Em particular, confirmamos que as perturbações da matéria não são

afetadas pelo fluido  $x$  (com  $\omega_x = -1$ ), mesmo se o último aglomerar-se.

### 8.3 Regime não-linear

Seguindo a referência [99] para o tratamento da segunda ordem das perturbações cosmológicas, considere as Eqs. (4.15)–(4.17) para a componente  $x$  do nosso modelo em calibre newtoniano (isso é, com o coeficiente métrico  $B$  nulo), com pressão anisotrópica nula e  $p_x = -\rho_x$ . Temos:

$${}^{(2)}T_{x0}^0 = \delta\rho_x^{(2)}, \quad {}^{(2)}T_{xi}^0 = 0, \quad {}^{(2)}T_{x0}^i = 0, \quad {}^{(2)}T_{xj}^i = -\delta p_x^{(2)}\delta_j^i, \quad (8.35)$$

onde o índice  $(\cdot)$  refere-se a ordem perturbativa. Além disso, o traço na segundo ordem tem a seguinte formula:

$${}^{(2)}T_x = {}^{(2)}T_{x0}^0 + {}^{(2)}T_{xk}^k = \delta\rho_x^{(2)} - 3\delta p_x^{(2)} = 4\delta\rho_x^{(2)}. \quad (8.36)$$

Por outro lado, para o componente da matéria temos  $p_m = 0$ . Daqui as Eqs. (4,15), (4,17) de [99] tornam-se:

$${}^{(2)}T_{m0}^0 = \delta\rho_m^{(2)} + 2\rho_m^{(0)}v_k^{(1)}v^{(1)k}, \quad {}^{(2)}T_{mj}^i = -2\rho_m^{(0)}v_k^{(1)}v^{(1)k}, \quad (8.37)$$

onde o  $v_k^{(1)}$  representa a perturbação da velocidade na primeira ordem. Daqui, para o traço da segundo-ordem obtemos:

$${}^{(2)}T_m = {}^{(2)}T_{m0}^0 + {}^{(2)}T_{mk}^k = \delta\rho_m^{(2)}. \quad (8.38)$$

Considere agora a equação

$$T_{x\nu;\mu}^\mu = \frac{\gamma-1}{2}(T_x + T_m)_{,\nu}, \quad (8.39)$$

na segunda ordem:

$$\begin{aligned} \partial_\mu {}^{(2)}T_{x\nu}^\mu + {}^{(0)}\Gamma_{\mu\rho}^\mu {}^{(2)}T_{x\nu}^\rho + {}^{(1)}\Gamma_{\mu\rho}^\mu {}^{(1)}T_{x\nu}^\rho + {}^{(2)}\Gamma_{\mu\rho}^\mu {}^{(0)}T_{x\nu}^\rho \\ - {}^{(0)}\Gamma_{\mu\nu}^\rho {}^{(2)}T_{x\rho}^\mu - {}^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^\rho {}^{(1)}T_{x\rho}^\mu - {}^{(2)}\Gamma_{\mu\nu}^\rho {}^{(0)}T_{x\rho}^\mu = \frac{\gamma-1}{2} [{}^{(2)}T_m + {}^{(2)}T_x]_{,\nu}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Fazendo  $\nu = 0$ , e tomando em consideração os valores não nulos das perturbações, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_0 {}^{(2)}T_{x0}^0 &+ {}^{(0)}\Gamma_{\mu 0}^\mu {}^{(2)}T_{x0}^0 + {}^{(1)}\Gamma_{\mu 0}^\mu {}^{(1)}T_{x0}^0 + {}^{(2)}\Gamma_{\mu 0}^\mu {}^{(0)}T_{x0}^0 \\ &- {}^{(0)}\Gamma_{\mu 0}^\rho {}^{(2)}T_{x\rho}^\mu - {}^{(1)}\Gamma_{\mu 0}^\rho {}^{(1)}T_{x\rho}^\mu - {}^{(2)}\Gamma_{\mu 0}^\rho {}^{(0)}T_{x\rho}^\mu = \frac{\gamma - 1}{2} [{}^{(2)}T_m + {}^{(2)}T_x]_{,0} . \end{aligned} \quad (8.41)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\Gamma_{\mu 0}^\rho {}^{(2)}T_{x\rho}^\mu &= {}^{(0)}\Gamma_{00}^0 {}^{(2)}T_{x0}^0 + {}^{(0)}\Gamma_{j0}^i {}^{(2)}T_{xi}^j \\ &= \frac{a'}{a} [{}^{(2)}T_{x0}^0 + {}^{(2)}T_{xk}^k] = 4\frac{a'}{a}\delta\rho_x^{(2)} , \end{aligned} \quad (8.42)$$

e

$${}^{(0)}\Gamma_{\mu 0}^\mu {}^{(2)}T_{x0}^0 = 4\frac{a'}{a}\delta\rho_x^{(2)} . \quad (8.43)$$

Daqui, o segundo termo na primeira linha da Eq. (8.41) anula-se com o primeiro termo da segunda linha. Da mesma forma, o terceiro e quarto termos da primeira linha anulam-se com o segundo e o terceiro da segunda linha. Terminamos com:

$$\delta\rho_x^{(2)'} = \frac{\gamma - 1}{2(3 - 2\gamma)}\delta\rho_m^{(2)'} , \quad (8.44)$$

e recuperamos, a menos de uma constante da integração, Eq. (8.32). Conseqüentemente, parece que no modelo cosmológico do tipo Rastall investigado aqui, a evolução da perturbação no fluido  $x$  segue aquela da matéria até o regime perturbativo da segunda ordem.

Contudo, no regime não-linear devemos esperar algumas diferenças entre o modelo de Rastall e o  $\Lambda$ CDM. Isto porque temos agora dois componentes aglomerando-se e interagindo gravitacionalmente, então afetando de uma certa maneira, talvez detectável, o crescimento da estrutura. Tal análise é além do alcance do trabalho atual, não obstante podemos discutir algumas diferenças entre o nosso modelo tipo Rastall e o  $\Lambda$ CDM, considerando o exemplo simples do colapso esférico. Suponhamos seguir o crescimento de uma inhomogeneidade no passado, quando o universo se comportava como um Einstein-de Sitter, isto é, os efeitos de uma constante cosmológica eram insignificantes. Seguindo a referência [100], o crescimento de uma região homogênea esférica é descrito pela equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_i}\right)^2 = H_i^2 \left[ \Omega_p(t_i)\frac{a_i}{a} + 1 - \Omega_p(t_i) \right] , \quad (8.45)$$

onde  $a_i$  é o fator de escala em algum instante  $t_i$  em que o colapso começa e  $\Omega_p = 1 + \delta$  é o parâmetro da densidade da região em que há colapso, determinado pelo contraste de densidade do fluido nele contido. Aqui entra a diferença relevante. Para o modelo  $\Lambda$ CDM, o único componente que colapsa é matéria e, conseqüentemente,  $\Omega_p = 1 + \delta_m$ . Por outro lado, na teoria de Rastall apresentamos, um fluido desconhecido  $x$  com uma equação de estado do vácuo igualmente pode aglomerar-se. Por este motivo, o parâmetro :

$$\Omega_p = 1 + \frac{\delta\rho_m}{\rho_m + \rho_x} + \frac{\delta\rho_x}{\rho_m + \rho_x} . \quad (8.46)$$

Considerando agora a Eq. (8.10) com  $\eta_m = \eta_x = 0$ , e negligenciando a contribuição de  $\bar{\rho}$ , podemos escrever

$$\Omega_p = 1 + \frac{2(3 - 2\gamma)}{5 - 3\gamma}\delta_m + \frac{\gamma - 1}{5 - 3\gamma}\delta_x . \quad (8.47)$$

Para  $\Lambda$ CDM temos  $\Omega_p(t_i) = 1 + \delta_m(t_i)$ , enquanto que no modelo de Rastall temos um grau de liberdade a mais, devido à condição inicial em  $\delta_x(t_i)$ . Assim, em princípio, pode-se construir a mesma história de colapso que no modelo  $\Lambda$ CDM, mas com uma quantidade diferente de matéria, dependendo do valor de  $\gamma$ .

## 8.4 Conclusão

Podemos concluir que a cosmologia de Rastall é essencialmente equivalente a do  $\Lambda$ CDM, à exceção de um aspecto: a energia do vácuo pode aglomerar-se. Se este é o caso, dois efeitos poderiam diferenciar-se entre os dois modelos: efeitos não-lineares no espectro de potência da matéria e na função de transferência para perturbações cosmológicas. A energia do vácuo é insignificante no passado, daqui o impacto das suas flutuações na evolução das perturbações nos períodos primordiais da evolução do universo não pode ser relevante. Contudo, de acordo com o cenário descrito acima, a energia escura está obrigatoriamente presente em sistemas, como galáxias e aglomerados de galáxias, e o efeito da aglomeração da energia escura deve ser relevante neste nível. Conseqüentemente, a cosmologia de Rastall e o modelo de  $\Lambda$ CDM parecem ser distinguíveis somente no regime não-linear da evolução de perturbações cósmicas.

# Capítulo 9

## Conclusão

Nesta tese, discutimos brevemente as noções básicas da relatividade geral, fizemos uma introdução ao modelo cosmológico padrão, falamos sobre a matéria escura e da energia escura, incluindo ao final as evidências da suas existências. Apresentamos os princípios da teoria das perturbações lineares cosmológicas. Testamos a teoria de Rastall usando os dados observacionais do espectro de potência. Isto implica um estudo perturbativo. Utilizamos a técnica da teoria de perturbação do calibre síncrono para analisar questões ligadas com a formação de estrutura e a estabilidade nessa teoria. Observamos principalmente que a teoria se comporta, a nível perturbativo como a relatividade geral mas com uma equação de estado efetiva. Em particular, se o fluido tem uma equação de estado efetiva necessária para induzir a expansão acelerada do universo, ele apresentará uma velocidade do som adiabática efetiva cujo o quadrado é negativo. Então o resultado do cenário apresentará oscilações e instabilidades. Além disso, a fim de comparar as previsões teóricas da teoria de Rastall com os dados do espectro de potência, parece inevitável introduzir um modelo de dois fluidos. Isto representa um problema na teoria de Rastall original. Uma maneira possível é considerar um fluido que obedece à lei de conservação da teoria de Rastall, com outra que se conserve separadamente de maneira usual. Isto pode ser justificado se o fluido anterior for de fato um campo, como um campo escalar, que obedeça a uma equação modificada de Klein-Gordon. De fato, se ambos os fluidos têm uma representação hidrodinâmica, o espectro de potência prevê  $\gamma = 1$  como foi descrito neste trabalho - isto é, a teoria reduz-se à relatividade geral. Se o fluido de Rastall é um campo escalar, a situação é mais complexa, e mesmo se  $\gamma = 1$  for sempre favorecido, há outras possibilidades que aparecem. O ponto interessante sobre este modelo é que o campo escalar de interação de

Rastall pode ter um comportamento de quartessência da pressão nula ao nível perturbativo quando  $\gamma = 2$ , então a análise perturbativa pretende dar mais informações a respeito da formação de estrutura nestas teorias, verificando sua estabilidade ao mesmo tempo. Investigamos o caso especial de modelos de quartessência o modelo do gás de Chaplygin generalizado nesse caso não têm problema para os valores negativos de  $\alpha$ .

Investigamos a evolução do potencial gravitacional nas teorias de campo escalar de Rastall. No modelo de única componente, uma teoria de perturbação consistente formulada no calibre newtoniano é possível somente para  $\gamma = 1$ , que é o limite da relatividade geral. Por outro lado, a adição de outra componente de fluido canônico permite considerar o caso  $\gamma \neq 1$ . Introduzimos um modelo do dois fluidos, uma componente que representa a energia do vácuo visto que a outra matéria sem pressão (por exemplo bárions mais a matéria escura fria), o cenário cosmológico é a mesma que para o modelo de  $\Lambda$ CDM, no fundo e nos níveis perturbativos lineares, à exceção de um aspecto: agora a energia escura pode aglomerar-se. Especulamos que este pode conduzir a uma possibilidade de distinguir os modelos no nível perturbativo não-linear.

# Referências Bibliográficas

- [1] P. Rastall. Generalization of the einstein theory. *Phys.Rev.*, D6:3357–3359, 1972. [10](#), [66](#)
- [2] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972. [20](#), [69](#)
- [3] S. Weinberg. The Cosmological Constant Problem. *Rev.Mod.Phys.*, 61:1–23, 1989. Morris Loeb Lectures in Physics, Harvard University, May 2, 3, 5, and 10, 1988. [21](#)
- [4] G. F.Smoot e outros. Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps. *Astrophys.J.*, 396:L1–L5, 1992. [22](#), [33](#)
- [5] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra–galactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168–173, 1929. [22](#)
- [6] W. L. Freedman e outros. Final results from the Hubble Space Telescope key project to measure the Hubble constant. *Astrophys.J.*, 553:47–72, 2001. [22](#)
- [7] G. Gamow. Expanding universe and the origin of elements. *Phys. Rev.*, 70:572–573, 1946. [23](#)
- [8] A. A. Penzias e R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. , 142:419–421, July 1965. [23](#)
- [9] D. J. Eisenstein e outros. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *Astrophys.J.*, 633:560–574, 2005. [31](#)
- [10] A. G. Riess e outros. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron.J.*, 116:1009–1038, 1998. [32](#), [63](#)

- [11] S.Perlmutter e outros. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys.J.*, 517:565–586, 1999. [32](#), [63](#)
- [12] V.Sahni e outros. The Case for a positive cosmological Lambda term. *Int.J.Mod.Phys.*, D9:373–444, 2000. [32](#), [36](#)
- [13] M. S. Carroll. The Cosmological constant. *Living Rev.Rel.*, 4:1, 2001. [32](#)
- [14] P.J.E Peebles e outros. The Cosmological constant and dark energy. *Rev.Mod.Phys.*, 75:559–606, 2003. [32](#)
- [15] T. Padmanabhan. Cosmological constant: The Weight of the vacuum. *Phys.Rept.*, 380:235–320, 2003. [32](#)
- [16] E. J. Copeland e outros. Dynamics of dark energy. *Int.J.Mod.Phys.*, D15:1753–1936, 2006. [32](#)
- [17] R. K. Sachs e A. M. Wolfe. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background. , 147:73, January 1967. [33](#), [104](#)
- [18] E. Komatsu e outros. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys.J.Suppl.*, 180:330–376, 2009. [33](#), [34](#)
- [19] T. Max e outros. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys.Rev.*, D69:103501, 2004. [33](#)
- [20] U. Seljak e outros. Cosmological parameter analysis including SDSS Ly-alpha forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy. *Phys.Rev.*, D71:103515, 2005. [33](#)
- [21] T. Max e outros. Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies. *Phys.Rev.*, D74:123507, 2006. [33](#)
- [22] A. A. Starobinsky e outros. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys.Lett.*, B91:99–102, 1980. [33](#)
- [23] D. Kazanas. Dynamics of the Universe and Spontaneous Symmetry Breaking. *Astrophys.J.*, 241:L59–L63, 1980. [33](#)



- [24] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys.Rev.*, D23:347–356, 1981. [33](#)
- [25] K. Sato. First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 195:467–479, 1981. [33](#)
- [26] D.N. Spergel e outros. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters. *Astrophys.J.Suppl.*, 148:175–194, 2003. [33](#)
- [27] D.N. Spergel e outros. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology. *Astrophys.J.Suppl.*, 170:377, 2007. [33](#)
- [28] C. Wetterich e outros. The Cosmon model for an asymptotically vanishing time dependent cosmological 'constant'. *Astron.Astrophys.*, 301:321–328, 1995. [34](#)
- [29] L. Amendola. Scaling solutions in general nonminimal coupling theories. *Phys.Rev.*, D60:043501, 1999. [34](#), [36](#)
- [30] Y. Fujii e outros. Origin of The Gravitational Constant And Particle Masses In SScale Invariant Scalar- Tensor Theory. *Phys.Rev.*, D26:2580, 1982. [35](#)
- [31] C. Wetterich. Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry. *Nucl.Phys.*, B302:668, 1988. [35](#)
- [32] L.H. Ford. Cosmological Constant Damping Unstable SCALAR FIELDS. *Phys.Rev.*, D35:2339, 1987. [35](#)
- [33] B. Ratra e outros. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys.Rev.*, D37:3406, 1988. [35](#)
- [34] Y. Fujii e outros. Model of a Decaying Cosmological Constant. *Phys.Rev.*, D42:361–370, 1990. [35](#)
- [35] T. Chiba e outros. Cosmology with x matter. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 289:L5–L9, 1997. [35](#)
- [36] P. G. Ferreira e outros. Structure formation with a selftuning scalar field. *Phys.Rev.Lett.*, 79:4740–4743, 1997. [35](#)

- [37] P. G. Ferreira e outros. Cosmology with a primordial scaling field. *Phys.Rev.*, D58:023503, 1998. [35](#)
- [38] R. R. Caldwell e outros. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Phys.Rev.Lett.*, 80:1582–1585, 1998. [35](#)
- [39] S. M. Carroll. Quintessence and the rest of the world. *Phys.Rev.Lett.*, 81:3067–3070, 1998. [35](#)
- [40] E. J. Copeland e outros. Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Phys.Rev.*, D57:4686–4690, 1998. [35](#)
- [41] I. Zlatev e outros. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys.Rev.Lett.*, 82:896–899, 1999. [35](#)
- [42] P. J. Steinhardt e outros. Cosmological tracking solutions. *Phys.Rev.*, D59:123504, 1999. [35](#)
- [43] A. Hebecker e outros. Quintessential adjustment of the cosmological constant. *Phys.Rev.Lett.*, 85:3339–3342, 2000. [35](#)
- [44] A. Hebecker e outros. Natural quintessence? *Phys.Lett.*, B497:281–288, 2001. [35](#)
- [45] T. Chiba e outros. Kinetically driven quintessence. *Phys.Rev.*, D62:023511, 2000. [35](#)
- [46] C. Armendariz-Picon e outros. Essentials of k essence. *Phys.Rev.*, D63:103510, 2001. [35](#), [77](#)
- [47] C. Armendariz-Picon e outros. A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration. *Phys.Rev.Lett.*, 85:4438–4441, 2000. [35](#)
- [48] M. C. Bento e outros. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification. *Phys.Rev.*, D66:043507, 2002. [35](#)
- [49] J. A. Frieman e outros. Cosmology with ultralight pseudo Nambu-Goldstone bosons. *Phys.Rev.Lett.*, 75:2077–2080, 1995. [35](#)

- [50] A. Y. Kamenshchik e outros. An Alternative to quintessence. *Phys.Lett.*, B511:265–268, 2001. [35](#)
- [51] M. Makler e outros. Observational constraints on flat Chaplygin quartessence models. pages 1779–1781, 2003. [35](#)
- [52] J.C. Fabris e outros. Bayesian analysis of the (generalized) Chaplygin gas and cosmological constant models using the 157 gold SNe Ia data. *Class.Quant.Grav.*, 22:2813–2834, 2005. [35](#)
- [53] J.C. Fabris e outros. Mass power spectrum in a universe dominated by the Chaplygin gas. *Gen.Rel.Grav.*, 34:2111–2126, 2002. [35](#)
- [54] P. Binetruy. Models of dynamical supersymmetry breaking and quintessence. *Phys.Rev.*, D60:063502, 1999. [35](#)
- [55] A. Masiero e outros. SUSY QCD and quintessence. *Phys.Rev.*, D61:023504, 2000. [35](#)
- [56] P. Brax e outros. Quintessence and supergravity. *Phys.Lett.*, B468:40–45, 1999. [35](#)
- [57] P. Brax e outros. The Robustness of quintessence. *Phys.Rev.*, D61:103502, 2000. [35](#)
- [58] S. Capozziello e outros. Curvature quintessence matched with observational data. *Int.J.Mod.Phys.*, D12:1969–1982, 2003. [36](#)
- [59] S. Capozziello e outros. Curvature quintessence. pages 305–306, 2003. [36](#)
- [60] S. M. Carroll e outros. Is cosmic speed - up due to new gravitational physics? *Phys.Rev.*, D70:043528, 2004. [36](#)
- [61] T. Chiba. Quintessence, the gravitational constant, and gravity. *Phys.Rev.*, D60:083508, 1999. [36](#)
- [62] N. Bartolo e outros. Scalar tensor gravity and quintessence. *Phys.Rev.*, D61:023518, 2000. [36](#)
- [63] F. Perrotta e outros. Extended quintessence. *Phys.Rev.*, D61:023507, 2000. [36](#)
- [64] G.R. Dvali e outros. 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space. *Phys.Lett.*, B485:208–214, 2000. [36](#)

- [65] C. Brans e R.H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys.Rev.*, 124:925–935, 1961. [36](#)
- [66] M. Gasperini e G. Veneziano. The Pre - big bang scenario in string cosmology. *Phys.Rept.*, 373:1–212, 2003. [36](#)
- [67] J. C. Fabris e outros. Bayesian statistics and parameter constraints on the generalized chaplygin gas model using sne ia data. *International Journal of Modern Physics D*, 14:775, 2005. [37](#), [82](#)
- [68] J. C. Fabris e outros. Bayesian analysis of the chaplygin gas and cosmological constant models using the sne ia data. *International Journal of Modern Physics D*, 13:669, 2004. [37](#), [82](#)
- [69] H. B. Sandvik e outros. The end of unified dark matter? *Phys. Rev. D*, 69:123524, Jun 2004. [37](#)
- [70] C. G. Tsagas. Cosmological perturbations. *Lect.Notes Phys.*, 592:223–261, 2002. [38](#)
- [71] P. Meszaros. The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. *Astron.Astrophys.*, 37:225–228, 1974. [43](#)
- [72] H. A. Brandenberger e outros. Gauge invariant cosmological perturbations. 1992. [45](#)
- [73] H. A Brandenberger e outros. Gauge invariant cosmological perturbations: Theory and applications. 1992. [45](#)
- [74] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005. [45](#), [50](#), [53](#), [104](#)
- [75] E. R. Harrison. Fluctuations at the threshold of classical cosmology. *Phys. Rev. D*, 1:2726–2730, May 1970. [61](#)
- [76] W.-T. Ni. Theoretical Frameworks for Testing Relativistic Gravity.IV. a Compendium of Metric Theories of Gravity and Their POST Newtonian Limits. , 176:769, September 1972. [61](#), [69](#)

- [77] K. S. Thorne e outros. Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitational Theories (NASA JPL technical memorandum 33-449). 176:10, September 1971. [69](#)
- [78] K. S. Thorne e C. M. Will. Theoretical Frameworks for Testing Relativistic Gravity. I. Foundations. , 163:595, February 1971. [69](#)
- [79] K. S. Thorne e outros. Foundations for a theory of gravitation theories. *Phys. Rev. D*, 7:3563–3578, Jun 1973. [69](#)
- [80] L. L. Smalley. Consequence of Integral Conservation Laws on Metric Parameters in the Analysis of the Nordtvedt Effect. 62:91, 1977. [69](#)
- [81] L. L. Smalley. Modified Brans-Dicke gravitational theory with nonzero divergence of the energy-momentum tensor. *Phys.Rev.*, D9:1635–1640, 1974. [70](#)
- [82] L. L. Smalley. Gravitational theories with nonzero divergence of the energy-momentum tensor. *Phys.Rev.*, D12:376–384, 1975. [70](#)
- [83] L. L. Smalley. Variational principle for a prototype Rastall theory of gravitation. *Il Nuovo Cimento B*, 80:42–48, 1984. [70](#)
- [84] J. C. Fabris e outros. Perturbative analysis of generalized Einstein’s theories. *Int.J.Mod.Phys.*, D9:111–125, 2000. [70](#), [102](#)
- [85] J. C. Fabris e outros. Amplification of density perturbations in fluids with negative pressure. *Phys. Rev. D*, 55:5205–5207, Apr 1997. [70](#)
- [86] C. Shaun e outros. The 2dF Galaxy Redshift Survey: Power-spectrum analysis of the final dataset and cosmological implications. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 362:505–534, 2005. [74](#)
- [87] J. M. Bardeen e outros. The statistics of peaks of Gaussian random fields. , 304:15–61, May 1986. [74](#)
- [88] N. Sugiyama. Cosmic background anisotropies in cdm cosmology. *The Astrophysical Journal*, 100:281, 1995. [74](#)
- [89] J. C. Fabris e outros. Density Perturbations for Running Cosmological Constant. *JCAP*, 0702:016, 2007. [75](#)

- [90] P. Roland e E. V. Linder. Kinetic k-essence and Quintessence. *Astropart.Phys.*, 28:263–272, 2007. [77](#)
- [91] V. Mukhanov e outros. Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438–4441, Nov 2000. [81](#)
- [92] J. A. S. Lima e outros. Quantized fields and gravitational particle creation in f(R) expanding universes. *Phys.Lett.*, B690:103–107, 2010. [81](#)
- [93] C. Monica e outros. Accelerating cosmology in Rastall’s theory. *Nuovo Cim.*, B125:1133–1142, 2011. [81](#)
- [94] T. Barreiro e outros. WMAP5 constraints on the unified model of dark energy and dark matter. *Phys.Rev.*, D78:043530, 2008. [82](#)
- [95] L. Amendola e outros. Wmap and the generalized chaplygin gas. *JCAP*, 0307:005, 2003. [82](#)
- [96] C. Gao e outros. Unified dark energy e dark matter from a scalar field different from quintessence. *Phys.Rev.D*, 81:043520, 2010. [82](#)
- [97] R. Bean e D. Olivier. Probing dark energy perturbations: The dark energy equation of state and speed of sound as measured by wmap. *Phys. Rev. D*, 69:083503, Apr 2004. [82](#)
- [98] R. Amanullah e outros. Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at 0.511 lt; z lt; 1.12 and the Union2 Compilation. *Astrophys.J.*, 716:712–738, 2010. [102](#)
- [99] K. A. Malik e outros. Cosmological perturbations. *Phys.Rept.*, 475:1–51, 2009. [106](#)
- [100] P. Coles e F. Lucchin. *Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure*. John Wiley, 2002. [107](#)