

Universidade Federal do Espírito Santo

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Nível Mestrado

Judismar Tadeu Guaitolini Junior

**Radiação Cósmica de Fundo:
Anisotropias, Polarização e
Parâmetros Cosmológicos**

Vitória

2012

Judismar Tadeu Guaitolini Junior

**Radiação Cósmica de Fundo:
Anisotropias, Polarização e
Parâmetros Cosmológicos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física, pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Vitorino
de Borba Gonçalves

Vitória

2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

G898r Guaitolini Junior, Judismar Tadeu, 1986-
Radiação cósmica de fundo : anisotropias, polarização e
parâmetros cosmológicos / Judismar Tadeu Guaitolini Junior. –
2012.
147 f. : il.

Orientador: Sérgio Vitorino de Borba Gonçalves.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do
Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cosmologia. 2. Teoria do big bang. 3. Radiação cósmica
de fundo. 4. Ondas eletromagnéticas - Polarização. I. Gonçalves,
Sergio Vitorino de Borba. II. Universidade Federal do Espírito
Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53



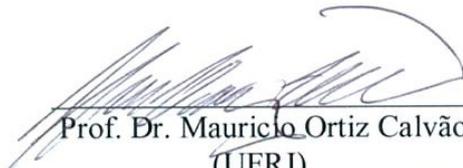
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

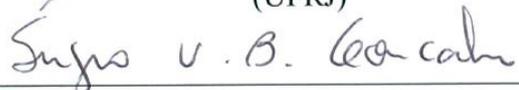
“Radiação Cósmica de Fundo: Anisotropias, Polarização e Parâmetros Cosmológicos”

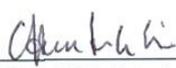
Judismar Tadeu Guaitolini Junior

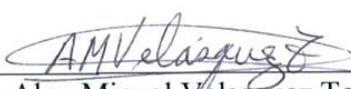
Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:


Prof. Dr. Mauricio Ortiz Calvão
(UFRJ)


Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves
(Orientador / UFES)


Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis
(UFES)


Prof. Dr. Alan Miguel Velásquez Toribio
(UFES)

Vitória-ES, 10 de abril de 2012.

Ao meu pai.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, que desde os meus primeiros momentos de estudante permitiu que eu tivesse facilidade com as disciplinas, absorvendo o que havia de fundamental e obtendo a partir daí o que fosse necessário. Resolver problemas e pensar em algum deles por horas, ou até mesmo dias, nunca foi uma tarefa de que eu não gostasse. E na grande maioria das vezes a solução acabava aparecendo em meio aos rabiscos. Não acho que nesse ponto apenas a prática tenha dado conta do recado. Então dou a Ele esse crédito.

Agradeço também aos meus pais que sempre fizeram o possível, e em alguns momentos um pouco mais do que o possível, para que eu pudesse estudar tranquilo. Muito do que sou resulta do empenho que me exigiam desde os primeiros cadernos, do acompanhamento atento de minha mãe e dos ensinamentos sobre caráter de meu pai. Posso dizer que tive tudo o que precisei, não porque foi tudo muito fácil, mas porque mesmo com todas as dificuldades eles lutaram e souberam escolher as coisas certas para me dar.

Às minhas irmãs, Renata e Rafaela, que sempre desempenharam um papel de apoio fundamental. Mesmo depois de crescido, quando minha estatura nem evidenciava mais minha condição de caçula, minhas irmãs me tratavam como tal e ajudavam a não faltar nada. Dinheiro na época em que não tinha, as cópias dos livros quando não podia comprar os originais, tantas outras coisas que não caberiam aqui e algumas outras que nem devo mais me lembrar. Também ao meu sobrinho Gustavo, que por vezes me fez esquecer a rotina de pesquisa, e entre uma brincadeira e outra fazia com que minha mente descansasse, ficando pronta pra voltar ao trabalho.

À minha namorada Geórgia, cuja presença constante ao meu lado (fisicamente ou não) me deu em muitos momentos aquele ânimo que faltava. Trouxe, sem dúvida, muito mais leveza aos meus dias e foi uma ótima companheira e amiga. E foram tantos momentos bons e felizes juntos, que nem me lembro mais do que é não tê-la do lado. Parece que é

muito mais tempo do que o calendário possa contar.

Aos meus amigos de graduação e pós-graduação, por terem ajudado a descontrair esses anos de estudo, principalmente nas conversas da hora do café na cantina. E como a hora do café podia ser a qualquer hora do dia, e até mais de uma vez ao dia, esse tempo foi maior do que muitas disciplinas juntas. Gostaria de destacar Igor, Fabrício, André, Rodolfo, Adriano, Raphael e Ulysses, com quem estive a maior parte desse tempo estudando, conversando, dividindo sala e viajando.

Ao meu orientador, professor Sérgio Vitorino, por todos esses anos de pesquisa que começaram antes da metade da minha graduação. Agradeço pelos conselhos, pelos ensinamentos, pelas cobranças, pela paciência, pelos momentos de conversa descontraída em que desaparecia a diferença entre orientador e orientando, e pelo pouco mais de física que aprendi nesse tempo de convívio.

Aos membros da banca, por terem aceitado o convite e pelas sugestões feitas após a leitura dessa dissertação, que sem dúvida ficou melhor após essa contribuição.

Agradeço novamente Geórgia e Igor, mas dessa vez pelo tempo que disponibilizaram para me ajudar nessa dissertação. A contribuição de vocês foi fundamental.

Agradeço finalmente à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A radiação cósmica de fundo é o sinal mais antigo que detectamos hoje no universo, e consiste em uma radiação eletromagnética com intensidade máxima na faixa do micro-ondas, com temperatura de $2,725\text{ K}$, e que remonta de um período em que os primeiros átomos de hidrogênio puderam se formar em um universo denso e quente. Juntamente com as medidas do afastamento das galáxias e da abundância dos elementos leves, a radiação cósmica de fundo e as informações obtidas a partir dela, formam os pilares da cosmologia moderna, corroborando o modelo do Big Bang. Nesse trabalho fazemos uma revisão sobre as anisotropias em temperatura e polarização da radiação cósmica de fundo, com ênfase nos parâmetros cosmológicos associados a esses fenômenos, obtemos o espectro de potência angular associado à temperatura dessa radiação de maneira detalhada, e procuramos construir as idéias de maneira gradativa, com o objetivo de tornar esse trabalho tão acessível quanto possível para aqueles que fazem uma primeira leitura do assunto.

Abstract

The cosmic microwave background radiation is the oldest sign that we detect in the universe today, and it consists of an electromagnetic radiation with maximum intensity in the microwave range, with temperature of 2.725 K , and which dates from a period when the first hydrogen atoms could form in a dense and hot universe. Together with the measures of the recession of galaxies and the abundance of light elements, the cosmic microwave background radiation and the information derived from it, form the pillars of modern cosmology, in agreement with the Big Bang model. In this work we review the anisotropies in temperature and polarization of the cosmic microwave background radiation, with emphasis on the cosmological parameters associated with these phenomena, we obtain the angular power spectrum associated with the temperature of this radiation in a detailed manner, and we seek to gradually build the ideas, with the purpose of making this work as accessible as possible for those who do a first reading of the subject.

Lista de Figuras

2.1	Superfície com curvatura positiva	20
2.2	Superfície com curvatura negativa	21
2.3	Diagrama de Hubble	23
3.1	Evolução das densidades de matéria e radiação	33
3.2	Abundância relativa dos elementos leves	39
4.1	Mapa de anisotropias - COBE	46
4.2	Espectro da Radiação Cósmica de Fundo - COBE	47
4.3	Mapa de anisotropias - WMAP	48
4.4	Espectro de potência angular - WMAP	51
6.1	Esfera de Poincaré	74
6.2	Estados de polarização de uma onda eletromagnética	76
A.1	Gerações de Férmions	121
A.2	Bárions e suas composições	123
A.3	Mésons e suas composições	123

Sumário

1	Introdução	4
2	Relatividade Geral	8
2.1	Equações de Campo	10
2.2	Cosmologia Relativística	16
2.3	Dinâmica no Universo de Friedmann	24
3	Modelo Cosmológico Padrão	29
3.1	Os Pilares do Modelo Cosmológico Padrão	30
3.2	História Térmica do Universo	31
3.2.1	Era de Planck	33
3.2.2	Era da Grande Unificação	35
3.2.3	Era Hadrônica	36
3.2.4	Era Leptônica	36
3.2.5	Nucleossíntese	37
3.2.6	Recombinação	40
3.2.7	Inflação e Setor Escuro do Universo	41
4	Radiação Cósmica de Fundo	44
4.1	Espectro de Potência da Radiação Cósmica de Fundo	48
5	Anisotropias na Radiação Cósmica de Fundo	52
5.1	Flutuações de Temperatura em um Universo Perturbado	53

6	Parâmetros de Stokes	66
6.1	Os Parâmetros de Stokes e a Elipse de Polarização	68
6.2	Os Parâmetros de Stokes na Esfera de Poincaré	73
7	Polarização da Radiação Cósmica de Fundo	78
7.1	Polarização do Campo de Radiação da RCF	82
7.2	Os Modos E e B	85
8	Cálculo dos C_l's	90
9	Considerações Finais	117
A	Modelo Padrão das Partículas Elementares	120
B	Harmônicos Esféricos de Spin s	124
B.1	Teoria do Momento Angular e Harmônicos Esféricos de spin 0	124
B.2	Harmônicos Esféricos de spin s	129
	Referências Bibliográficas	133

Capítulo 1

Introdução

A teoria da Relatividade Geral, proposta por Einstein em 1915, fez com que a nossa maneira de observar o universo sofresse uma grande mudança. Passamos a tratar sua estrutura de maneira geométrica, intimamente relacionada ao seu conteúdo material. Em pouco tempo, com as previsões teóricas de Friedmann e as observações de Hubble do afastamento das galáxias, verificou-se que o universo possuía uma dinâmica e estava expandindo. Assim o velho paradigma de um universo estacionário foi, aos poucos, sendo abandonado pela maioria da comunidade científica.

Uma vez observada a expansão do universo, não demorou muito até que fosse proposta uma volta no tempo, de maneira que ele apresentasse dimensões cada vez menores. Voltando suficientemente no tempo, chegaríamos em um instante de densidade e temperatura infinitas conhecido como Big Bang, e a partir do qual o universo iniciou sua expansão. Conforme a escala do universo foi aumentando, sua temperatura diminuiu e diferentes processos físicos ocorreram no âmbito da física de partículas, física nuclear e física atômica, até que fossem formadas as grandes estruturas que observamos. O modelo cosmológico padrão é hoje o melhor modelo para descrever o universo e possui importantes comprovações observacionais, como o afastamento das galáxias, a medida das abundâncias dos elementos leves e a existência de uma radiação de fundo na faixa do microondas.

A radiação cósmica de fundo (RCF) foi emitida quando o universo tinha cerca de 380000 anos e a temperatura havia baixado o suficiente para que os elétrons pudessem ser aprisionados em poços de potencial de núcleos de átomos de hidrogênio. Na faixa de tempo onde ocorreu a formação dos primeiros átomos, os fótons desacoplaram da matéria e puderam viajar até atingirem o nosso aparelho de observação. Esses fótons da RCF possuem um espectro de corpo negro e carregam informações sobre a temperatura e sobre a densidade de matéria na última superfície de espalhamento.

Muito embora pareça ser extremamente uniforme, quando os instrumentos de medida permitiram um contraste maior nos mapas da RCF visualizamos uma anisotropia que vem do movimento do sistema solar em relação à direção de propagação dos fótons. Aumentando ainda mais o contraste, observamos mais anisotropias na RCF que são causadas por processos físicos que ocorrem no caminho dos fótons, variações de potencial gravitacional na última superfície de espalhamento e até mesmo pelas inhomogeneidades causadas pela inflação. Ocorrendo a interação com o plasma quente dos momentos anteriores à recombinação e com as perturbações do espaço-tempo, a RCF também apresenta dois modos de polarização.

Diversos experimentos procuraram medir as flutuações de temperatura da RCF, e entre eles podemos citar o experimento de Tenerife [1], VLA (*Very Large Array*) [2], DASI (*Degree Angular Scale Interferometer*) [3], SZA (*The Sunyaev-Zeldovich Array*) [4], FIRS (*Far Infra-Red Survey*) [5], MAXIMA (*Millimeter Anisotropy eXperiment IMaging Array*) [6], Boomerang (*Balloon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics*) [7], COBE (*COsmic Background Explorer*) [8], WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) [9] e mais recentemente o satélite Planck [10]¹. O estudo das anisotropias da RCF, utilizando o espectro de potência angular para formar a ponte entre observação e teoria, é muito importante em cosmologia pois permite estimar parâmetros cosmológicos tais como o parâmetro de densidade Ω , o parâmetro de Hubble ou a constante cosmológica (associada à recente descoberta de que o universo passa por uma fase de expansão

¹Para uma lista mais completa de experimentos analisando a RCF, veja [11].

acelerada).

Elaboramos essa dissertação com o intuito de fornecer um material tão completo quanto possível sobre a RCF, suas anisotropias em temperatura e polarização. Devido ao grande número de trabalhos publicados nessa área, nossa intenção não foi esgotar o assunto, mas facilitar o acesso aos que pretendem iniciar os estudos no tema, explicando de forma detalhada os passos matemáticos necessários à obtenção dos principais resultados, interpretando as soluções e indicando uma série de referências que complementarão a leitura de nosso texto. Desde os primeiros capítulos, a sequência de conteúdos foi escolhida visando a construção gradativa das idéias que culminarão nos cálculos ligados à anisotropia em temperatura e polarização da RCF.

No capítulo 2, abordamos a teoria da Relatividade Geral, obtendo inicialmente as equações de campo a partir do princípio variacional. Nesse ponto revisamos brevemente o formalismo da álgebra e cálculo tensorial. Na sequência, utilizando a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, obtemos soluções cosmológicas de base para o universo, analisamos a sua dinâmica e definimos parâmetros observacionais importantes no âmbito da cosmologia.

No capítulo 3, apresentamos o modelo cosmológico padrão e discutimos os testes observacionais que fazem dele o modelo que atualmente melhor descreve o nosso universo. Explicamos ainda como a RCF aparece naturalmente no universo jovem, no decorrer da história térmica do universo. O apêndice A complementa esse capítulo abordando o modelo padrão das partículas elementares. Já no capítulo 4, discutimos as principais características da RCF e como o nosso conhecimento sobre ela evoluiu, a partir dos dados observacionais coletados por diferentes sondas e satélites. Definimos nesse momento o espectro de potência angular para a RCF, destacando a sua importância na seleção de modelos cosmológicos.

No capítulo 5, tratamos das anisotropias na distribuição de temperatura da RCF, calculando as contribuições provenientes de velocidades peculiares e de variações no potencial gravitacional no caminho dos fótons. Abordamos inclusive o efeito Sachs-Wolfe, que aparece devido a variações no potencial gravitacional da última superfície de espalhamento. No capítulo 6, passamos ao estudo da polarização de ondas eletromagnéticas, utilizando os parâmetros de Stokes. Interpretamos esses parâmetros, relacionando-os à elipse de polarização, e discutimos os possíveis estados de polarização de uma onda eletromagnética com o auxílio da esfera de Poincaré.

No capítulo 7, estudamos a polarização da RCF obtendo os modos \mathbf{E} e \mathbf{B} de polarização, e construímos os espectros de potência angular relacionados com esses modos e também com a temperatura. O apêndice B complementa esse capítulo discutindo a teoria dos harmônicos esféricos de spin s . No capítulo 8, calculamos passo a passo o espectro de potência angular, explicando cada etapa do procedimento matemático.

O capítulo 9 encerra essa dissertação apontando as principais considerações que podem ser feitas a partir do estudo desenvolvido e as perspectivas para uma possível continuidade desse trabalho.

Capítulo 2

Relatividade Geral

No ano de 1905, o físico alemão Albert Einstein apresentou para a sociedade uma nova teoria que trazia em seu bojo mudanças que fizeram cair por terra dois pensamentos que eram tomados como completamente bem estabelecidos em sua época, e também antes dela: as idéias de espaço absoluto e de tempo absoluto.

A física que antecedeu as idéias de Einstein estava construída sobre dois grandes pilares: a mecânica de Newton e a teoria eletromagnética de Maxwell. Contudo, essas duas teorias eram contraditórias no que dizia respeito à propagação das informações. De acordo com a teoria da gravitação universal de Newton, se de repente o Sol deixasse de existir, o planeta Terra "sentiria" a sua ausência instantaneamente e abandonaria o movimento orbital no mesmo instante em que o Sol desaparecesse. Já Maxwell, utilizando o conceito matemático de campos de interação, obteve resultados mostrando que a informação se deslocava com uma velocidade determinada e finita, cujo valor era o mesmo da velocidade da luz. Assim se percebia que a luz também era um fenômeno eletromagnético. No contexto da teoria de Maxwell, o desaparecimento do Sol não seria percebido instantaneamente na Terra, mas apenas depois que a informação percorresse a distância que existe entre os dois corpos celestes, viajando com a velocidade da luz.

Além disso, o experimento realizado em 1887 por Albert A. Michelson e Edward W. Morley para detectar variações na velocidade da luz devido ao movimento da Terra em

relação ao éter, mostrou que não deveria existir um tal éter, e que a lei de adição de velocidades da mecânica newtoniana não era coerente com os resultados do experimento. Assim sendo, Einstein optou por abandonar a mecânica de Newton para construir a sua Teoria da Relatividade Restrita, compatível com o eletromagnetismo de Maxwell. Postulando que as leis da física deveriam ser as mesmas quando analisadas por observadores em diferentes referenciais inerciais, e que todos esses observadores deveriam sempre medir a mesma velocidade para a luz, formulou uma teoria em que as equações de Maxwell permanecem invariantes sob transformações de sistemas de coordenadas. Além disso, para que a luz seja sempre observada com a mesma velocidade, observadores em referenciais inerciais com diferentes velocidades devem medir o tempo e o comprimento de formas distintas. Então, é exatamente o postulado da constância da velocidade da luz que rompe com o tempo e o espaço absolutos de Newton. A partir dessa teoria de Einstein, não existe mais um pano de fundo absoluto onde os fenômenos ocorrem, mas sim uma estrutura chamada de espaço-tempo quadridimensional, onde a coordenada temporal assume o papel de quarta dimensão.

Tempo e espaço podem ser dilatados e contraídos de acordo com a velocidade do nosso movimento, obedecendo às chamadas transformações de Lorentz. Todavia, quando Lorentz chegou à formulação matemática dessas transformações ele procurava explicar a contração do éter, meio onde a luz se propagaria e que seria um referencial absoluto onde poderíamos medir as velocidades de quaisquer entidades. A partir da Relatividade Restrita, a necessidade de um tal referencial absoluto foi abandonada.

Uma vez que a teoria de gravitação de Newton não fazia restrições quanto à velocidade de propagação da informação, a existência de sinais viajando mais rápidos do que a luz tornava essa teoria incompatível com a Relatividade Restrita. Einstein percebia o problema, e para solucioná-lo propôs em 1915 a Teoria da Relatividade Geral (RG) onde os fenômenos gravitacionais eram contemplados.

Através de suas experiências mentais baseadas em elevadores subindo ou descendo acelerados, mostrou a equivalência entre referenciais acelerados e o movimento em campos gravitacionais. Era equivalente subir com uma aceleração de $5,0 m/s^2$, ou estar em repouso em uma região de um planeta onde o campo gravitacional fosse uniforme, causando uma aceleração da gravidade também igual à $5,0 m/s^2$. A única diferença nas duas situações poderia ser a experiência visual, e por tal motivo imaginava sempre as pessoas em elevadores isolados do exterior.

Um ponto importante na construção da RG era o que dizia respeito à análise de dois observadores em repouso em um campo gravitacional. Tomemos, por exemplo, dois marcyanos na superfície de Marte sentados sobre pés de macieira, um acima e outro abaixo do equador. Se uma maçã verde cai de cada árvore, esses seres poderão dizer que é equivalente esperar a maçã cair acelerada, ou então subir acelerado enquanto a maçã permanece em repouso. Contudo, a distância entre esses dois observadores deve permanecer inalterada, visto que na situação real eles permanecem sentados. A única maneira encontrada por Einstein para compatibilizar esses pensamentos, foi imaginar sua teoria dentro do contexto de geometrias não euclidianas, cuja teoria já havia sido bem desenvolvida por Gauss, Riemann e Poincaré. Dentro da RG trabalharemos com espaços-tempo curvos, e a gravitação surge então como efeito da geometria local, que é determinada de acordo com o conteúdo material da região.

2.1 Equações de Campo

Com a finalidade de entender o comportamento de sistemas gravitacionais dentro da RG, como por exemplo, corpos próximos de estrelas ou buracos negros, ou até mesmo para estudar a dinâmica do universo em que vivemos, é necessário que tenhamos em mãos um conjunto de equações de campo, conhecidas como equações de Einstein. Essas equações, sintetizadas em uma única equação tensorial fazem a ligação entre a geometria do espaço-tempo e o seu conteúdo material. Utilizaremos na sequência o princípio variacional para encontrá-las.

A ação de Einstein-Hilbert é escrita como

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.1)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ ¹ e R é o escalar de Ricci. Antes de variar essa ação, faremos algumas considerações acerca do termos ligados à geometria do espaço-tempo.

Quando queremos caracterizar a curvatura do espaço-tempo quadridimensional da RG, recorreremos a um tensor de quarta ordem² dado por [12]

$$R^\rho_{\mu\sigma\nu} = (\Gamma^\rho_{\mu\nu})_{,\sigma} - (\Gamma^\rho_{\mu\sigma})_{,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\rho_{\lambda\nu}, \quad (2.2)$$

que é o chamado tensor de Riemann. As vírgulas nessa última equação representam as derivadas ordinárias, e no que segue estaremos utilizando essa definição. Os termos do tipo $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ são os símbolos de Christoffel de segunda espécie, dados em função da métrica como

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} (g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}). \quad (2.3)$$

A derivada covariante, que será representada pelo ponto e vírgula (;)³, é dada por

$$V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda, \quad (2.4)$$

quando aplicada em um tensor contravariante, e por

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda, \quad (2.5)$$

¹Na presente dissertação estaremos considerando métricas com assinatura (+ - - -).

²Lembramos aqui que um tensor com índice superior é chamado de tensor contravariante, e um tensor com índice inferior é chamado de tensor covariante. Quando o tensor possui os dois tipos de índices ele é chamado de misto, e a quantidade de índices nos dá a ordem do tensor.

³A derivada covariante com relação a uma coordenada x^μ poderá ser representada também por ∇_μ em situações onde o uso do ponto e vírgula não for conveniente. Da mesma maneira, a derivada ordinária com relação a uma coordenada x^μ poderá ser representada pelo símbolo ∂_μ .

quando aplicada em um tensor covariante. A derivada covariante é necessária quando os vetores da base de um sistema de coordenadas variam⁴, para que não apenas a variação dos tensores seja levada em consideração, mas também a variação que o próprio sistema de coordenadas sofre de um ponto para outro. Os símbolos de Christoffel, também chamados de conexões, aparecem na derivada covariante porque conectam diferentes pontos da variedade em que estamos trabalhando (o espaço-tempo de quatro dimensões). Se a derivada covariante for aplicada em tensores de ordem maior, aparecerão na derivada mais termos ligados às conexões, com sinais positivos, se estiverem relacionados à índices contravariantes, ou negativos, se estiverem relacionados à índices covariantes.

Quando trabalhamos em variedades de 3 dimensões, a curvatura pode ser totalmente determinada pelo tensor de Ricci, definido para qualquer dimensão como

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad (2.6)$$

e podemos, a partir desse tensor, obter o escalar de Ricci, dado pelo traço

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Tomando agora as variações de (2.1)

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int [\delta(\sqrt{-g}) R + \sqrt{-g} \delta R] d^4x, \quad (2.8)$$

e de (2.7)

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

e agrupando os resultados, obtemos

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int [\delta(\sqrt{-g}) R + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] d^4x. \quad (2.10)$$

⁴ Isso pode acontecer tanto em espaços curvos, quanto em espaços de geometria euclidiana onde sejam utilizadas coordenadas curvilíneas, como as esféricas ou cilíndricas.

Para dar um passo adiante em busca das equações de Einstein, é necessário que utilizemos a identidade

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M) , \quad (2.11)$$

válida para uma matriz M quadrada com determinante não nulo. Variando essa equação

$$\delta[\ln(\det M)] = \frac{1}{\det M} \delta(\det M) , \quad (2.12)$$

definindo $A = \ln M$ e sabendo que $\text{Tr} A = A_{11} + A_{22} + A_{33} + \dots + A_{nn}$, teremos

$$\delta(\text{Tr} A) = \delta A_{11} + \dots + \delta A_{nn} = \frac{\delta M_{11}}{M_{11}} + \frac{\delta M_{22}}{M_{22}} + \dots + \frac{\delta M_{nn}}{M_{nn}} = \text{Tr} \left(\frac{\delta M}{M} \right) , \quad (2.13)$$

ou seja,

$$\delta[\text{Tr}(\ln M)] = \text{Tr}(M^{-1} \delta M) = \delta[\ln(\det M)] = \frac{1}{\det M} \delta(\det M) . \quad (2.14)$$

Tomando o determinante de $g_{\mu\nu}$ e lançando mão da equação (2.14) teremos que

$$\delta g = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) , \quad (2.15)$$

o que pode ser utilizado em uma regra da cadeia que nos forneça

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} . \quad (2.16)$$

O uso desse resultado em (2.10) resultará na seguinte simplificação

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int [R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x . \quad (2.17)$$

Analisemos agora com cuidado o segundo termo da direita. Tomando a variação de (2.2)

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} , \quad (2.18)$$

e usando a derivada covariante da conexão

$$(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho})_{;\lambda} = (\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho})_{,\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\rho}, \quad (2.19)$$

podemos chegar na seguinte expressão

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = (\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho})_{;\mu} - (\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho})_{;\nu}. \quad (2.20)$$

Daí

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = (\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho})_{;\rho} - (\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})_{;\nu}, \quad (2.21)$$

que utilizada no segundo termo de (2.17) resulta em

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \int (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\rho\mu}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda})_{;\rho}\sqrt{-g}d^4x. \quad (2.22)$$

Esse termo nada mais é do que uma contribuição de contorno no infinito, que pelo teorema de Stokes pode ser tomada como zero.

Utilizando a variação da ação com relação a $g^{\mu\nu}$

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (2.23)$$

teremos

$$\int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \sqrt{-g}d^4x = 0, \quad (2.24)$$

de onde obtemos finalmente a equação tensorial covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.25)$$

que deve valer sempre, uma vez que o resultado não deve depender da região de integração.

Para relacionar a geometria do espaço-tempo com o conteúdo material, inserimos uma lagrangiana para a matéria (\mathcal{L}_M) na ação de Einstein-Hilbert (2.1), e a partir da definição

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + \delta g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \quad (2.26)$$

obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

que são as chamadas equações de Einstein.

O termo $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia, que descreve o conteúdo material da região do espaço-tempo em análise. Esse tensor de ordem 2 será construído de diferentes maneiras, de acordo com o tipo de matéria envolvida no sistema. Quando lidamos com poeira, o tensor momento-energia será dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu, \quad (2.28)$$

onde ρ_0 é a densidade própria de matéria da poeira, como visto por um observador comóvel ao fluxo de matéria que possui uma quadrivelocidade u^μ . Se, de outra maneira, trabalhamos com um fluido perfeito teremos

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0 + p) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

onde p é a pressão do fluido. Modificações adicionais podem ser implementadas se quisermos trabalhar com fluidos mais realísticos, como considerar viscosidade, condução de calor e efeitos de dissipação de energia.

Quando lidamos com espaços descritos por coordenadas curvilíneas, a lei de conservação para o tensor momento-energia é escrita com o uso da derivada covariante, ao invés da derivada ordinária, como

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (2.30)$$

A partir de agora, tendo em mãos as equações de campo da RG e entendendo o significado dos termos ligados à geometria e à matéria, iremos utilizá-las no estudo da dinâmica do espaço-tempo, procurando compreender melhor como evolui o universo em que vivemos.

2.2 Cosmologia Relativística

A Cosmologia é uma área de pesquisa que estuda o universo como um todo, procurando explicar sua dinâmica, incluindo a sua origem, estrutura atual e possíveis destinos finais. De fato, desde os tempos mais remotos que o ser humano olhando para o céu busca explicações para aquilo que é observado, e passando por Aristóteles, Ptolomeu, Copérnico, Kepler e Newton desenvolveu muitos mecanismos engenhosos para dar conta do movimento dos astros, mesmo que hoje esses mecanismos possam não estar de acordo com as leis da Física. Vale ressaltar nesse ponto que não só as explicações sobre a dinâmica celeste, mas todas as áreas da Física estão em constante transformação com o advento de novas teorias, e o que é visto como verdade hoje pode ser descartado ou complementado em alguns anos. Sendo assim, não podemos falar em verdades absolutas, mas tão somente em teorias que estão de acordo com as experiências e com os dados observacionais disponíveis em cada época.

A mecânica newtoniana explicou bem os sistemas interagindo por meio de forças gravitacionais enquanto a escala de interesse e a tecnologia dos aparelhos de medida mantiveram os efeitos da curvatura do espaço-tempo escondidos. Entretanto, a RG se apresentou como uma teoria que possibilitava a obtenção de resultados teóricos consistentes, e com melhor ajuste aos dados observacionais quando a curvatura era levada em conta, como logo foi visto, por exemplo, nos cálculos da precessão do periélio de Mercúrio. Existem hoje desenvolvimentos de cosmologias newtonianas e neo-newtonianas, onde aproxima-se o conteúdo do universo como um fluido perfeito, e alguns resultados interessantes podem ser obtidos. Uma vantagem dessas abordagens é a possibilidade de utilizar a intuição obtida de nossa experiência newtoniana diária. Contudo, a limitação existente nessas teorias

e o sucesso nas previsões da RG fazem com que a cosmologia relativística seja aquela de maior interesse.

Para que possamos tratar o problema cosmológico de maneira mais simplificada, assumimos em geral algumas hipóteses importantes. Uma delas é o chamado princípio cosmológico. Com origens no princípio copernicano de que não existiriam pontos privilegiados no universo, o princípio cosmológico assume que em escalas suficientemente grandes o universo é homogêneo (sem pontos privilegiados) e isotrópico (sem direções privilegiadas).

Muito embora a idéia de homogeneidade e isotropia possa parecer estranha quando vemos um quadro tão inhomogêneo ao nosso redor, com estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, o universo realmente aparenta ser homogêneo quando tomamos distribuições de matéria em escalas maiores do que 100 Mpc. Apenas como comparação, a distância da Via Láctea até a Grande Nuvem de Magalhães (a galáxia vizinha mais próxima) é de apenas 55 kpc [13]. Outro fato importante é que o universo só terá essa aparência para um grupo especial de observadores, que são os observadores comóveis. Um referencial comóvel segue o fluxo de matéria, e no universo esses referenciais acompanham a expansão em geodésicas do espaço-tempo. Os observadores localizados nesses referenciais sempre medem intervalos de tempo iguais entre dois eventos analisados e a mesma distância espacial. O desenvolvimento a seguir será sob o ponto de vista de um tal observador onde a homogeneidade e isotropia é evidente.

O elemento de linha mais geral pode ser escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.31)$$

mas para satisfazer a condição de isotropia devemos ter g_{0i} se anulando. Podemos sempre escolher um grupo de observadores para os quais o seu tempo próprio medido implica que

$g_{00} = 1$, e dessa maneira escrever

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j = dt^2 - dl^2, \quad (2.32)$$

em que γ_{ij} é a parte puramente espacial da métrica, com dl^2 sendo dado de uma maneira esfericamente simétrica em cada ponto (para garantir isotropia) como

$$dl^2 = e^\lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.33)$$

Um espaço de curvatura K constante tem o tensor de Riemann dado em função apenas de combinações da métrica,

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = K (g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}), \quad (2.34)$$

que para o caso espacial tridimensional nos fornece as relações

$$\gamma^{ik} R_{ijkl} = R_{jl} = 2K\gamma_{jl} \quad (2.35)$$

e

$$R = 6K. \quad (2.36)$$

Calculando os símbolos de Cristhoffel a partir da métrica (2.33) e depois obtendo os termos do tensor de Ricci, na condição de curvatura constante (2.35), chegamos nas equações

$$R_{11} = \frac{\lambda_{,1}}{r} = 2Ke^\lambda \quad (2.37)$$

e

$$R_{33} = 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda_{,1} = 2Kr^2, \quad (2.38)$$

cuja solução será

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - Kr^2}. \quad (2.39)$$

Daí, a métrica para um espaço tridimensional de curvatura constante será

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.40)$$

Uma vez que essa métrica é plano conforme, podemos inserir uma função do tempo que dará o fator de magnificação das distâncias (fator de escala $a(t)$) e mudar a escala espacial, o que resultará para a métrica espaço-temporal finalmente em

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.41)$$

que é métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (doravante chamada simplesmente de métrica de FLRW). O fator k que indica a curvatura da parte espacial do universo, pode assumir os valores $+1$, 0 ou -1 . A geometria da variedade em que estamos trabalhando irá depender do valor assumido pela constante k .

Quando $k = +1$ podemos efetuar uma troca de coordenadas, de r para χ , tal que $r = \text{sen}\chi$, e escolhendo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a \cos \chi \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ x_2 = a \cos \chi \text{sen} \theta \cos \phi \\ x_3 = a \cos \chi \cos \theta \\ x_4 = a \text{sen} \chi \end{array} \right. , \quad (2.42)$$

teremos

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2, \quad (2.43)$$

cuja geometria é a de uma 3-esfera em um espaço euclidiano quadridimensional. Nesses casos, onde $k = +1$, o espaço-tempo é dito fechado ou compacto.

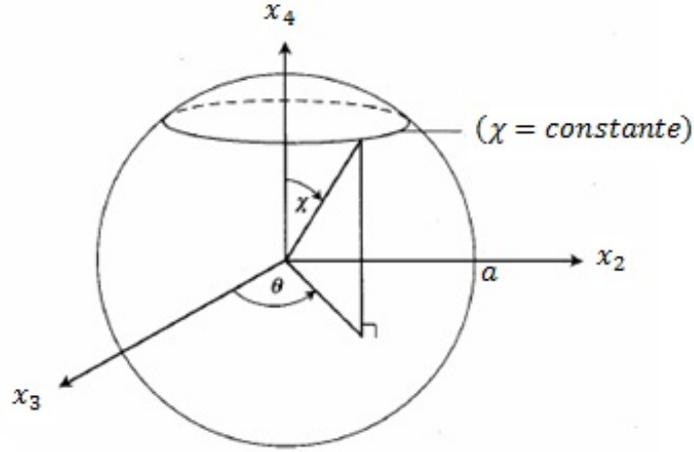


Figura 2.1: Superfície com curvatura constante e positiva, em um espaço euclidiano de quatro dimensões. Adaptado de [12].

Quando $k = 0$ podemos escolher $r = \chi$ e

$$\begin{cases} x_1 = a\chi \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ x_2 = a\chi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ x_3 = a\chi \cos\theta \end{cases}, \quad (2.44)$$

de onde resulta

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \quad (2.45)$$

que possui geometria de espaço euclidiano plano. Um universo com tal geometria é chamado de universo aberto plano.

Finalmente, quando $k = -1$ tomamos $r = \operatorname{senh}\chi$, e escolhendo

$$\begin{cases} x_1 = a \operatorname{senh}\chi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ x_2 = a \operatorname{senh}\chi \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ x_3 = a \operatorname{senh}\chi \cos\theta \\ x_4 = a \cosh\chi \end{cases}, \quad (2.46)$$

teremos

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2, \quad (2.47)$$

cuja geometria é a de um hiperbolóide imerso em um espaço minkowskiano quadridimensional. Assim como no caso com $k = 0$, um universo com $k = -1$ é aberto.

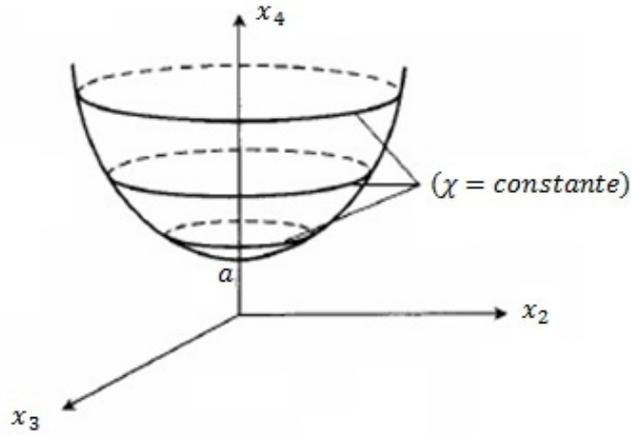


Figura 2.2: Superfície com curvatura constante e negativa, em um espaço minkowskiano de quatro dimensões. Adaptado de [12].

Sintetizando, podemos escrever a parte espacial da métrica de forma geral como

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + f^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (2.48)$$

com

$$f(\chi) = \begin{cases} \text{sen}\chi & (\text{se } k = 1) \\ \chi & (\text{se } k = 0) \\ \text{senh}\chi & (\text{se } k = -1) \end{cases} . \quad (2.49)$$

Devido ao fator de escala $a(t)$, a métrica (2.41) evolui no tempo de maneira que as distâncias próprias aumentam com $a(t)$. Podemos descrever essa evolução matematicamente como

$$l(t) = l_0 a(t). \quad (2.50)$$

Se temos três pontos no espaço formando um triângulo em determinado instante, um novo triângulo formado em um instante posterior deve ser geometricamente semelhante ao primeiro. Isso se dá, pois associando a existência de $a(t)$ com o princípio cosmológico teremos que a magnificação ou redução deve ser independente da posição do triângulo. De fato, de acordo com essa construção o movimento relativo entre os pontos do espaço-tempo deve ser puramente radial.

Além disso, tomando a separação entre dois pontos como sendo δr , um observador localizado em um desses pontos atribuirá ao outro ponto a velocidade

$$\delta v = \frac{d}{dt} \delta l = \frac{d}{dt} [a(t) \delta r] = \dot{a}(t) \delta r = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \delta l, \quad (2.51)$$

ou seja, a velocidade relativa entre dois pontos do espaço-tempo é proporcional à distância de separação entre eles. Uma vez que não pode existir nenhum ponto privilegiado no universo, se existir alguma espécie de expansão na estrutura espaço-temporal do universo, qualquer observador verá as galáxias e aglomerados de galáxias se afastando radialmente. Foi exatamente esse afastamento que Edwin Hubble constatou em 1929, quando mediu o desvio para o vermelho sofrido pela luz das galáxias distantes, chegando empiricamente na relação (2.51). Por esse motivo o termo $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ é chamado de parâmetro de Hubble, que segundo dados observacionais da sonda WMAP [14], possui hoje o valor de $H_0 = H(t_0) = 100h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, com $h = 0,710 \pm 0,25$.

Se temos agora dois observadores separados pela distância δr , e os dois estão observando um mesmo feixe de radiação eletromagnética, como por exemplo a luz proveniente de uma estrela distante, eles irão discordar a respeito do valor medido da frequência da radiação. Sendo ν a frequência medida por um dos observadores, o outro observador que se afasta com velocidade δv irá medir $(\delta \nu + \nu)$. O termo $\delta \nu$ vem do efeito Doppler sofrido pela radiação e obedece à seguinte relação

$$\frac{\delta \nu}{\nu} = -\delta v = -\frac{\dot{a}}{a} \delta t = -\frac{\delta a}{a}, \quad (2.52)$$

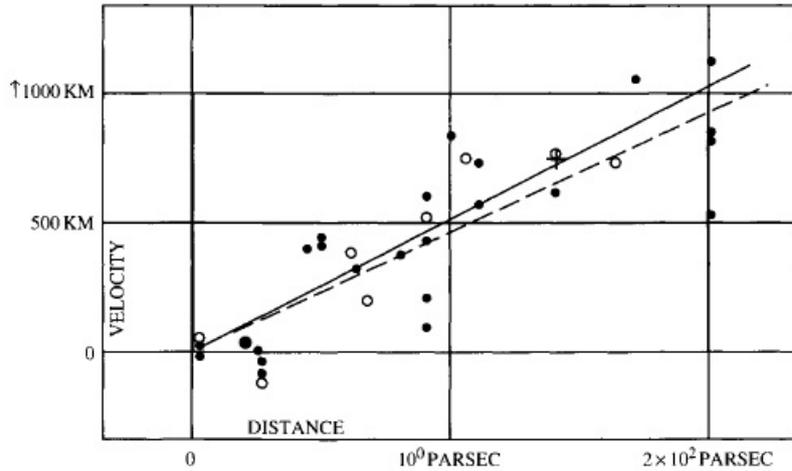


Figura 2.3: Diagrama original construído por Hubble [15].

que integrada dará

$$\nu(t)a(t) = C, \quad (2.53)$$

onde C é uma constante de integração. Como podemos ver, a frequência da radiação eletromagnética recebida é inversamente proporcional ao fator de escala, mostrando que quanto mais o universo expande, mais a radiação perde energia no trajeto até nós.

Uma das grandezas mais importantes em cosmologia é o desvio para o vermelho (ou *redshift* z), que é definido a partir da seguinte relação entre a frequência da radiação na época da emissão e no momento da detecção

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \equiv 1 + z. \quad (2.54)$$

Quanto mais distante está a fonte, maior será a perda de energia da radiação e consequentemente maior será z . Sendo assim, quando falamos do estudo de objetos em grandes z , estamos nos referindo a fenômenos que ocorreram há milhões ou até mesmo há bilhões de anos. É de grande interesse fazer essa volta no tempo para compreender o nosso universo, mas ao buscarmos altos desvios para o vermelho nos deparamos com a dificuldade de medir os sinais, já muito enfraquecidos pela longa viagem.

2.3 Dinâmica no Universo de Friedmann

Para encontrar as equações que darão a dinâmica em um universo descrito pela métrica de FLRW, consideraremos o universo preenchido por um fluido perfeito, obedecendo à equação de conservação (2.29) para resolver as equações de Einstein.

Podemos escolher um sistema de referência comóvel tal que a quadrivelocidade esteja na seguinte forma diagonal

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (2.55)$$

e a partir daí usamos (2.41) para encontrar

$$T_{00} = \rho, \quad (2.56a)$$

$$T_{11} = \frac{a^2 p}{(1 - kr^2)}, \quad (2.56b)$$

$$T_{22} = a^2 r^2 p \quad (2.56c)$$

e

$$T_{33} = a^2 r^2 (\sin^2 \theta) p. \quad (2.56d)$$

Os símbolos de Christoffel não nulos serão

$$\Gamma_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad (2.57a)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \gamma_{ij} \quad (2.57b)$$

e

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \gamma^{km} (\gamma_{im,j} + \gamma_{jm,i} - \gamma_{ij,m}), \quad (2.57c)$$

e para o tensor e escalar de Ricci teremos

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.58a)$$

$$R_{ij} = [\ddot{a}a + 2(\dot{a}^2 + k)] \gamma_{ij} \quad (2.58b)$$

e

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.58c)$$

Tomando todos esses resultados, as componentes 00 e 11 de (2.27) fornecerão os resultados

$$\frac{\dot{a}^2 + k^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (2.59)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k^2}{a^2} = 8\pi G p, \quad (2.60)$$

que ainda podem ser combinados para dar

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.61)$$

Essas equações foram encontradas por Friedmann no ano de 1922 e segundo elas um universo estático em que $\dot{a} = \ddot{a} = 0$, como era imaginado na época, só seria possível em um universo com densidade nula. Dessa maneira, as equações de Friedmann evidenciavam um universo dinâmico, quer seja em contração ou em expansão, como medido por Hubble alguns anos depois.

A crença em um universo estático era tão grande que o próprio Einstein não acreditou no resultado de sua teoria e inseriu um termo extra nas equações, chamado de constante cosmológica Λ , para remover essa evolução. Todavia, com os resultados experimentais de Hubble a RG teve mais uma comprovação de que estava correta e Einstein admitiu que a sua constante cosmológica havia sido um erro. Atualmente, termos análogos a Λ são muitas vezes evocados, mas por motivos diferentes daqueles pensados por Einstein

originalmente [16] [17] [18].

Utilizando a equação (2.59) podemos determinar o valor de k hoje como

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - H_0^2 \equiv H_0^2(\Omega - 1), \quad (2.62)$$

onde

$$\Omega \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c} \quad (2.63)$$

é o parâmetro de densidade para a densidade atual do universo e

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.64)$$

é a chamada densidade crítica do universo. Se a densidade do universo hoje for igual a essa densidade crítica, então $\Omega = 1$ e $k = 0$, o que implicaria em estarmos vivendo em um universo plano. Se por outro lado $\rho_0 > \rho_c$ teremos $\Omega > 1$ e o nosso universo seria fechado. Quando a densidade é menor do que ρ_c o universo é aberto com geometria hiperbólica.

Podemos associar parâmetros de densidade $\Omega_i(t)$ aos diferentes componentes i do universo, seja para matéria

$$\Omega_M(t) = \frac{\rho_M}{\rho_c}, \quad (2.65)$$

curvatura

$$\Omega_k(t) = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}, \quad (2.66)$$

ou até mesmo para a constante cosmológica

$$\Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (2.67)$$

Quando queremos levar todas as componentes em consideração para resolver um modelo mais realístico basta escrever a partir das equações de Friedmann,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i. \quad (2.68)$$

Uma vez preenchido apenas por matéria bariônica o universo deveria estar desacelerando, já que $(\rho + 3p) > 0$ implicaria em $\ddot{a} < 0$. Isso é fácil de compreender sob a luz do teorema de Birkhoff. Esse teorema diz que os efeitos gravitacionais sentidos fora de uma região com distribuição esfericamente simétrica de massa são os mesmos gerados pela massa considerada, se ela fosse colocada no centro da esfera. Dessa maneira, qualquer galáxia distante de nós deveria sentir o efeito de atração gravitacional (devido à toda matéria presente na esfera em que somos o centro) e no caso de uma expansão, deveria desacelerar. De acordo com medidas recentes, o universo se encontra atualmente em um regime de expansão acelerada, indo contra o que acabamos de expor. As causas desse fenômeno estão possivelmente ligadas à existência de algo desconhecido por nós, como será exposto adiante.

Derivando a equação (2.59) e combinando o resultado com a equação (2.60), chegamos na seguinte equação de conservação de energia

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.69)$$

que também poderia ser encontrada a partir da equação (2.30) de conservação do tensor momento-energia.

Se temos a equação de estado do fluido que preenche o universo, podemos utilizar (2.59) e (2.69) para determinar o comportamento do fator de escala no tempo. No caso de um fluido barotrópico linear teremos

$$p = \omega\rho, \quad (2.70)$$

a partir de (2.69) obtemos que

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.71)$$

e utilizando esse resultado em (2.59), com $k = 0$, chegamos em

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (2.72)$$

Para a matéria bariônica $p = 0$, implicando que

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}, \quad (2.73)$$

e no caso de um campo de radiação $p = \frac{1}{3}\rho$, que leva a

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (2.74)$$

Quando temos o interesse de criar um modelo cosmológico, a verificação da validade do modelo é feita encontrando o comportamento temporal do fator de escala e da densidade, como fizemos em um primeiro momento para a matéria bariônica e radiação. É a partir desse comportamento que poderemos comparar as previsões do modelo com os dados observacionais e saber se ele pode ser útil ou deve ser descartado. No próximo capítulo estaremos discutindo o modelo mais aceito atualmente, que não necessariamente é uma verdade absoluta livre de falhas, mas que melhor descreve as nossas observações acerca do universo que vivemos.

Capítulo 3

Modelo Cosmológico Padrão

Pouco tempo após sua formulação, a RG já possuía importantes comprovações de sua validade como boa teoria para analisar o universo. O problema do periélio de Mercúrio, a observação do desvio da luz feita em Sobral e a predição da expansão do universo são alguns bons exemplos.

O modelo cosmológico padrão é atualmente o modelo que melhor descreve o universo em que vivemos e está construído sobre a hipótese de que a RG pode ser aplicada a todos os pontos do universo e em qualquer época. Além disso o princípio cosmológico discutido no último capítulo também é assumido e isso implica em um grande grau de simetria, restando praticamente apenas o fator de escala $a(t)$ como grau de liberdade. Esse fator descreve as mudanças de distância em cosmologia, de maneira que, se o fator de escala aumenta três vezes a distância entre dois pontos quaisquer também triplica.

Um grau de liberdade restante na construção do modelo está relacionado ao conteúdo material do universo, escolhido de maneira simples como um fluido perfeito barotrópico linear. Nesse tipo de fluido as pressões são proporcionais às respectivas densidades. Termos do tipo constante cosmológica também podem ser incluídos, e essa realmente parece ser uma necessidade no universo atual, como discutiremos ao final do capítulo.

Construído dessa forma, o modelo cosmológico padrão pode ser um pouco idealizado, e apresenta problemas que levam à necessidade de considerar um período inflacionário e a existência de componentes escuras no universo, mas é ainda assim o melhor modelo que temos disponível hoje para descrever o universo.

3.1 Os Pilares do Modelo Cosmológico Padrão

O sucesso do modelo padrão se dá pela sua compatibilidade com as principais observações que temos disponíveis. Qualquer modelo que tenha a pretensão de substituí-lo deve pelo menos concordar com as mesmas observações.

A primeira delas é o afastamento das galáxias, que está de acordo com as equações de Friedmann. Foi a partir da idéia de que o universo está passando por uma fase de expansão que se pensou em retroceder o filme, imaginando tamanhos cada vez menores.

Voltando suficientemente no tempo, chegaremos em um instante em que toda a matéria estava concentrada em um volume muito pequeno e a partir do qual iniciou sua expansão. Lemaître inicialmente deu o nome de átomo primordial a esse volume, mas hoje esse instante é chamado de Big Bang, nome dado de maneira irônica por Fred Hoyle em 1949, uma vez que parte da comunidade científica da época discordava dessas idéias, e preferia uma teoria de universo estacionário.

Muito embora seja chamado de uma grande explosão, esse início não pode ter sido uma explosão no sentido que conhecemos, pois nem mesmo havia um espaço onde luz e som pudessem se propagar. A partir do Big Bang o próprio espaço-tempo surgiu e expandiu, levando consigo a matéria densa e quente nos primeiros momentos e as galáxias e aglomerados nos bilhões de anos seguintes.

Outra observação importante que corrobora esse modelo e que será o nosso objeto de estudo principal, é a existência de uma radiação permeando todo o universo, cuja origem

remonta das primeiras centenas de milhares de anos do universo, evidenciando um início realmente quente. O modelo do Big Bang Quente (outro nome dado ao modelo cosmológico padrão) já previa a existência de tal radiação vinte anos antes de sua descoberta, como será visto adiante.

Por fim, o modelo padrão prevê a abundância de elementos leves presentes no universo, fazendo uso da física nuclear para explicar como eles foram formados durante o resfriamento que sucedeu o Big Bang.

Iremos agora avançar pela história conhecida do universo até chegarmos no panorama atual da cosmologia. No meio do caminho, estaremos nos situando no período em que a radiação que permeia o universo foi emitida, para que posteriormente possamos trabalhar sobre ela e compreender sua importância em cosmologia.

3.2 História Térmica do Universo

A partir de agora analisaremos os momentos iniciais do nosso universo, como descrito pelo modelo do Big Bang, indo de encontro a momentos quando o tempo tende a zero.

Hoje, a detecção de uma radiação de fundo com temperatura próxima ao zero absoluto, de aproximadamente 3 K , indica que o universo em grandes *redshifts* deveria ter uma temperatura muito alta a partir da qual iniciou o resfriamento. Sendo assim é possível pensar em uma história térmica onde diferentes partículas figuraram em cada estágio, de acordo com a energia envolvida. Uma vez que em alguns momentos lidaremos com energias impraticáveis até mesmo em grandes aceleradores de partículas, a aproximação do instante inicial nos leva a um universo cada vez mais exótico.

A Relatividade Restrita de Einstein já deixava claro que em altas energias partículas¹ podem ser criadas segundo a expressão que relaciona massa e energia

$$E = mc^2, \quad (3.1)$$

e assim a colisão de fótons em um universo altamente energético deve ter dado origem às primeiras partículas subatômicas. Se a energia é suficientemente alta, nem mesmo é necessário o choque entre fótons para a criação de partículas, que podem surgir da energia dos campos eletromagnéticos.

Existindo o equilíbrio térmico, a energia média de cada partícula será proporcional à sua temperatura, podendo ser encontrada de acordo com a expressão para um gás ideal²

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}k_B T, \quad (3.2)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

Se queremos ter uma idéia da temperatura necessária para a criação de uma partícula com massa de repouso m_0 , igualamos a energia de repouso da partícula com a energia média dos fótons, obtendo

$$T = \frac{2m_0c^2}{3k_B}. \quad (3.3)$$

Quanto maior a massa da partícula maior é a temperatura (energia) necessária para viabilizar o processo. Se o objetivo for a criação de um par próton - antipróton, por exemplo, lidaremos com temperaturas da ordem de $10^{13} K$.

Com o progressivo resfriamento do universo e a criação dos átomos estáveis, a densidade da energia proveniente da radiação só vem diminuindo e dizemos que hoje o universo é

¹No decorrer desse capítulo faremos referência a vários tipos de partículas, e dessa maneira será importante ter noções básicas sobre as partículas elementares. Uma breve introdução ao modelo padrão das partículas elementares é feita no apêndice A.

²Destacamos que essa expressão é válida apenas para gases ideais não relativísticos e não quânticos.

dominado pela matéria. Contudo, esse domínio não é uma característica de toda a história do universo e existiu uma fase em que a radiação dominava a dinâmica do espaço-tempo.

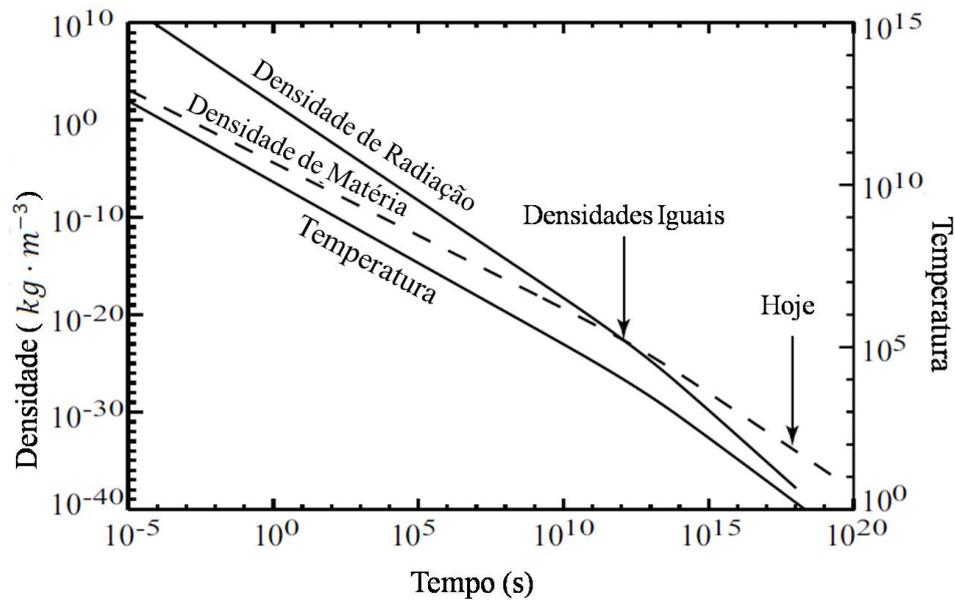


Figura 3.1: Representação da história térmica do universo, mostrando a evolução das densidades de matéria e radiação de acordo com a sua idade e temperatura. As densidades de matéria e radiação são iguais em um tempo de aproximadamente 10^{12} s após o Big Bang [19].

A evolução do universo e a sucessão dos fenômenos físicos ocorreu de maneira contínua, mas didaticamente é conveniente separar essa história térmica em diferentes estágios. Na sequência discutiremos brevemente cada um desses estágios.

3.2.1 Era de Planck

O período de tempo que vai da singularidade inicial até 10^{-43} s é conhecido como era de Planck. É importante ter em mente que atribuir um tempo de vida para o universo implica em adotar um marco de criação onde tudo que existe surgiu, incluindo matéria, tempo e

espaço. Todavia, existem modelos atuais onde uma singularidade inicial é evitada, seja pela existência de um tunelamento do universo quando o seu tamanho estava inserido no domínio da física quântica, seja pela existência de movimentos seguidos de contração e expansão fazendo com que o universo nunca alcance um fator de escala nulo, e tenha um tempo de existência que vai de $-\infty$ até $+\infty$ [20]. Seja como for, o certo é que explicar o que ocorreu em um universo muito pequeno e denso, em tempos tipicamente menores do que 10^{-43} s (na sequência mostraremos como essa escala de tempo é obtida), ainda é um objetivo inalcançado para a física moderna, uma vez que a RG não é uma teoria quântica e não está em seu domínio de validade nessa era.

A tentativa de criar uma teoria quântica da gravidade já conta com o empenho de muitos grupos de pesquisa, mas algumas dessas teorias não se apresentam como potenciais teorias de unificação, como é o caso da *Loop Quantum Gravity* [21]. A Teoria de Cordas, por outro lado, procura formular uma teoria de gravitação quântica com potencial de unificar as demais interações.

Infelizmente os testes em laboratório acerca dessa época do universo ainda são inviáveis, uma vez que hoje não possuímos tecnologia disponível para lidar com os valores de energia envolvidos nesse estágio. Podemos utilizar as constantes fundamentais da relatividade, da gravitação e da mecânica quântica para encontrar valores típicos da era de Planck. São eles, a energia de Planck

$$E_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \simeq 10^{19} \text{ GeV}, \quad (3.4)$$

a massa de Planck

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 10^{-5} \text{ g}, \quad (3.5)$$

o comprimento de Planck

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 10^{-35} \text{ m} \quad (3.6)$$

e o tempo de Planck

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \simeq 10^{-43} \text{ s}. \quad (3.7)$$

Apenas como comparação, l_P é menor que o comprimento de onda de qualquer partícula elementar e então até a idéia de partícula (pelo menos como conhecemos) deve se perder nesse início.

3.2.2 Era da Grande Unificação

Nesse período, que durou até cerca de 10^{-35} s, a interação gravitacional saiu do equilíbrio e então apenas as interações forte, fraca e eletromagnética seguiram unificadas. Como uma teoria que unifique essas três interações recebe o nome de GUT (do inglês *Grand Unified Theory*) esse período recebe o nome supracitado.

Quando as partículas são criadas a partir de energia pura, elas devem aparecer em pares de matéria e antimatéria obedecendo à conservação do número de bárions. No entanto uma característica que marca a maioria das GUTs é o fato de que a conservação do número de bárions é violada, e o surgimento de bárions ocorre de maneira preferencial em relação aos antibárions. Sendo assim, remonta desse período o saldo positivo na criação da matéria, chamado de bariogênese e responsável por toda a matéria existente no universo até hoje.

Para que o modelo cosmológico padrão se adequasse de melhor forma aos dados observacionais, e solucionasse alguns problemas que trataremos no final desse capítulo, foi formulada a idéia de uma inflação cósmica, que também deve ter acontecido nesse período. Na inflação o universo expandiu de maneira acelerada por um curto período de tempo, aumentando o fator de escala em muitas ordens de grandeza. Essa expansão ocorreu em um espaço cheio de uma energia associada ao vácuo, com características de constante cosmológica [22] [23], e essa energia aqueceu as partículas no final da inflação. Mesmo assim, ainda mais frio que na transição com a era de Planck, o final da era da grande unificação é marcado pela quebra de simetria entre as interações forte e eletrofraca, dando início à um período dominado pelos hádrons.

3.2.3 Era Hadrônica

Esse período inicia quando os quarks não conseguem mais viajar livremente e aparecem apenas confinados devido à ação da força forte, formando os bárions (com 3 quarks) e mésons (1 quark e 1 antiquark). Esse confinamento dos quarks é inclusive observado na matéria até hoje.

A era hadrônica durou pouco tempo e a partir daí a matéria existente permaneceu com a quantidade congelada no restante da evolução do universo. Ela se encerra quando a temperatura abaixa e a energia chega a um valor de cerca de 100MeV , onde os píons se aniquilam dando origem a fótons e o conteúdo do universo passa a ser formado por léptons, fótons e os bárions restantes. Nesse momento prótons e nêutrons se apresentam em iguais proporções.

3.2.4 Era Leptônica

Nesse estágio elétrons e pósitrons estão sendo criados continuamente, permanecendo em equilíbrio térmico com neutrinos e fótons. Nessa sopa quente de léptons e fótons estão presentes os núcleons (prótons e nêutrons) que se transformam continuamente uns nos outros de acordo com as seguintes reações



e



enquanto a temperatura permanece superior a 10^{10}K .

Conforme a temperatura cai, o número de prótons começa a ser superior ao número de nêutrons, fato que ocorre porque sendo a massa dos nêutrons maior, o decaimento para prótons ocorre de maneira espontânea enquanto que a reação contrária necessita de uma energia adicional. Quando a proporção dos núcleons passa a ser de 1 nêutron para cada

7 prótons, a temperatura chega a $10^{10} K$ e nesse momento as interações fracas saem do equilíbrio.

Com essa quebra de simetria os neutrinos e antineutrinos que até então permaneciam sempre na mesma temperatura dos demais componentes do universo desacoplam e começam a se mover livremente no universo. Com isso eles devem estar permeando o espaço até hoje, com uma temperatura de cerca de $1,9 K$ devido à expansão do universo, e uma vez detectados seriam o sinal mais antigo que teríamos dos momentos seguintes ao Big Bang. Os neutrinos, no entanto, devido à perda de energia na viagem e interação muito fraca com a matéria são muito difíceis de serem detectados.

Outro ponto importante nessa quebra de simetria é que a proporção existente entre prótons e nêutrons naquele momento permaneceu fixa nas etapas seguintes da evolução, e o valor dessa proporção tem uma boa previsão teórica no modelo cosmológico padrão, uma vez que a partir dela a quantidade formada de elementos leves tem uma concordância muito grande com o que observamos.

3.2.5 Nucleossíntese

Os estudos em nucleossíntese primordial iniciaram na década de 1940 pelo físico George Gamow e seus colaboradores, que fizeram uma das primeiras aplicações da física do mundo microscópico (no caso, a física nuclear) para explicar observações do mundo macroscópico (cosmologia) [24] [25] [26]. O que Gamow imaginou é que poderia explicar a origem dos elementos químicos a partir da sopa quente e densa de partículas do universo jovem, e seu interesse em juntar os assuntos muito tem a ver com o fato de ter sido aluno de Friedmann, além de entender a física nuclear, publicando inclusive trabalhos nessa área.

Quando a temperatura nesse período do universo cai para $10^9 K$, ou $0,1 MeV$, os núcleons já se encontravam em um ambiente em que era possível se combinar de maneira estável, os prótons e nêutrons puderam fundir-se diretamente dando origem ao deutério

(D ou 2H), um isótopo do elemento hidrogênio, pela reação



Se na sequência ocorrem reações envolvendo deutérios, formam-se os isótopos do elemento hélio (3He e 4He) segundo as reações



e



ou ainda pode ser formado o trítio (3H) se um deutério se funde com mais um próton.

Se fizermos a consideração de que em primeira aproximação todos os nêutrons são usados para formar hélio, e considerando que a nucleossíntese se inicia quando a proporção é de 2 nêutrons para cada 14 prótons, nós teremos 1 núcleo de 4He para 12 núcleos de H . Daí, a fração em massa Y de 4He seria dada por

$$Y_{He} = \frac{4}{4 + 12} = 0,25, \quad (3.13)$$

que é quantidade de hélio que observamos hoje no nosso universo.

Na nucleossíntese os elementos leves foram formados até o 7Li e a partir daí os elementos mais pesados foram sintetizados no interior das estrelas e nas explosões de supernovas. A teoria da origem dos elementos dessa maneira tem um grande sucesso, pois faz previsões acerca das abundâncias dos elementos leves que concordam muito bem com as observações atuais.

Tomando, por exemplo, a abundância de 4He no universo hoje, vemos que ela está muito próxima dos 25% o que indica que a teoria está consistente. Poderíamos questionar essa abundância, dizendo que esse isótopo do hélio também pode ser formado continuamente

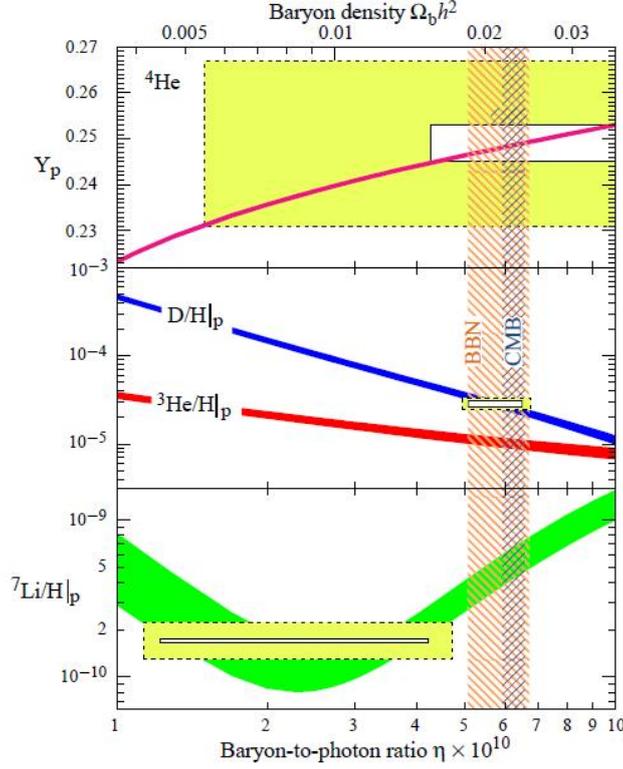


Figura 3.2: Abundâncias dos elementos leves em relação ao hidrogênio. As curvas indicam os valores teóricos e as caixas indicam onde se encontram os valores medidos para cada elemento (caixas menores: erros estatísticos de $\pm 2\sigma$; caixas maiores: erros estatísticos de $\pm 2\sigma$ mais erros sistemáticos). A faixa vertical mais estreita indica a medida da densidade de bárions pelos dados da RCF e a faixa vertical mais larga indica o intervalo de concordância do modelo de nucleossíntese do Big Bang (ambas com nível de confiança de 95 %) [27].

nas estrelas durante os bilhões de anos do universo, mas essa parcela estelar deve ser muito pequena, não provocando erros significativos nos dados observacionais [19].

Por outro lado, a análise da quantidade de deutério no universo é de extrema importância, uma vez que esse elemento não é sintetizado em nenhum outro momento da história, a não ser na nucleossíntese. O que ocorre é o contrário, sendo o deutério consumido no interior das estrelas uma vez que possui um potencial de reação química muito grande. Sendo assim, se a previsão da abundância relativa de deutério estiver sendo observada é sinal de que realmente o modelo foi bem construído.

Além disso, a quantidade de deutério que sobreviveu ao período de nucleossíntese está intimamente ligada à densidade de matéria bariônica existente, sendo menor a quantidade relativa de deutério quanto maior for essa densidade de bárions. Sendo assim, podemos modelar o universo com a matéria bariônica como parâmetro livre, e procurar a densidade de bárions específica com a qual explica-se os dados observacionais relacionados à nucleossíntese.

Os testes atuais indicam que a quantidade de deutério e dos demais elementos leves³ está de acordo com a nucleossíntese apenas se o parâmetro de densidade bariônica for

$$\Omega_b \approx 0,023h^{-2}. \quad (3.14)$$

Utilizando $h = 0,71$, obtemos que Ω_b corresponde a cerca de apenas 4,5%. Medidas feitas a partir de observações da sonda WMAP (do inglês *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) concordam com os dados de nucleossíntese, indicando esse valor para a densidade de bárions [14].

Essa baixa densidade de bárions, muito distante do valor crítico $\Omega = 1$ (de acordo com dados da sonda WMAP), será um indicativo de que atualmente parece faltar muita matéria no universo. Existem atualmente teorias que procuram explicar como podemos viver em um universo com Ω tão próximo da unidade, mesmo com a densidade de bárions tão baixa, e grande parte da comunidade científica atribui esse fato à existência de uma componente escura ainda desconhecida.

3.2.6 Recombinação

Na recombinação a componente bariônica do universo deixa de ser ionizada, compondo um plasma quente em equilíbrio térmico com os fótons e elétrons, para se tornar neutra

³Na verdade existe atualmente um certo problema nas medidas da abundância do ${}^7\text{Li}$. A dificuldade na estimativa existe porque muitos processos astrofísicos podem criar e destruir esse elemento. Ao mesmo tempo que metade do lítio primordial pode ter sido consumido em processos estelares, uma porcentagem considerável pode ser criada em colisões de raios cósmico.

em átomos estáveis.

Com a diminuição da temperatura até cerca de 4000 K , existe um momento em que os fótons não possuem mais uma energia capaz de ionizar os átomos e o universo que até então era opaco passa a ser transparente para a propagação dos fótons.

Essa radiação que compõe a chamada radiação cósmica de fundo pôde viajar pelo universo sofrendo apenas os efeitos de sua expansão e chega hoje até nós com um comprimento de onda na faixa do microondas. Essa radiação foi prevista no modelo de nucleossíntese dos elementos leves desenvolvido por Gamow e detectada anos mais tarde, de maneira acidental, sendo o primeiro sinal que temos disponível dos momentos iniciais do universo.

Considerando que essa radiação vem de todas as direções, um determinado observador no universo que obedece ao princípio cosmológico verá essa radiação desacoplando de uma determinada superfície esférica ao seu redor determinada pelo z da época da recombinação, chamada de última superfície de espalhamento. O desacoplamento ocorreu em uma *redshift* de aproximadamente 1090, mas como não aconteceu de forma abrupta em todo o universo, podemos associar uma certa largura à última superfície de espalhamento, que compreende o período necessário para terminar a recombinação. Como veremos adiante, flutuações existentes na última superfície de espalhamento serão responsáveis por desvios na isotropia dessa radiação e evidenciam, entre outras coisas, os ainda pequenos aglomerados de matéria que viriam a formar as grandes estruturas.

3.2.7 Inflação e Setor Escuro do Universo

Mesmo com todos os sucessos observacionais, o modelo padrão até pouco tempo atrás ainda trazia consigo alguns problemas sem explicação. A princípio não havia um motivo para o universo hoje estar tão próximo de ter $k = 0$, implicando em um universo primordial ainda mais próximo da curvatura nula. Esse era o conhecido problema da planaridade do universo.

Além disso, observações da RCF indicando uma radiação isotrópica vinham contra o que o modelo padrão previa, uma vez que regiões distantes observadas no céu deveriam estar desconectadas no passado. Não havia motivo para que temperatura da radiação medida em dois pontos diferentes fossem iguais, e esse era o problema do horizonte.

Analisando as flutuações de temperatura da RCF, também não era possível explicar as perturbações primordiais, que deviam ser bem menores e demorar muito mais tempo para formar as estruturas que já observamos. Por outro lado, também existia o problema do monopolo, que sugeria um universo hoje dominado por partículas exóticas que não são observadas.

Com o intuito de resolver problemas como esses, Alan Guth propôs em 1981 o modelo inflacionário, onde o universo passaria por uma fase de expansão acelerada em que o fator de escala crescia exponencialmente, poucos instantes após o Big Bang [28]. Muito embora o crescimento exponencial desse modelo solucionasse todas as questões citadas acima, ele acarretava em outros problemas como, por exemplo, o da nucleação de bolhas de uma nova fase dentro da fase antiga, devido a uma quebra de simetria [29].

No ano seguinte à proposta inicial de Guth, Andrei Linde propôs a existência de um campo escalar, conhecido como inflaton [30], que dava conta de reger a expansão acelerada e exponencial do universo, solucionando ainda as mesmas questões já esclarecidas pelo modelo anterior e evitando o problema da nucleação. O modelo de Guth ficou conhecido como *Old Inflation* e o modelo de Linde como *New Inflation*.

Além de um modelo inflacionário, a cosmologia moderna teve ainda que sofrer algumas modificações no que diz respeito ao conteúdo material do universo. Para que possamos explicar as curvas de rotação de galáxias e também a formação de estruturas, aparentemente falta matéria no universo. Essa matéria não deve interagir com a matéria bariônica visível e dessa maneira recebe o nome de matéria escura. A presença de halos de matéria escura corrige a curva de rotação de alguns tipos de galáxias, e a aglomeração dessa ma-

téria essencialmente não relativística (*Cold Dark Matter* ou CDM) no início do universo gerou poços de potencial que aceleraram o processo de formação das estruturas [31].

Por fim, um problema recente surgiu em 1998 quando observou-se que o universo além de passar por uma fase de expansão estava acelerando [32] [33]. Esse panorama não era o esperado levando em consideração o teorema de Birkhoff, e uma solução encontrada foi adicionar ao universo uma Energia Escura que deve estar dominando o universo atual, sendo responsável por mais de 70 % de sua densidade de energia. Essa energia escura tem um comportamento de constante cosmológica Λ e ainda não temos uma explicação sobre sua natureza ⁴.

Sendo assim, o modelo cosmológico padrão tal como descrito no início desse capítulo foi complementado por um período inflacionário e por duas componentes escuras, ficando conhecido como o modelo Λ CDM⁵.

⁴Existem também trabalhos que propõem modificações na RG de acordo com as escalas cosmológicas envolvidas no problema, para que a aceleração do universo seja vista como resultado dessa modificação, sem que seja necessário adicionar uma energia escura [20] [34].

⁵Para maiores informações sobre o modelo Λ CDM, como detalhes sobre a inflação e sobre as componentes escuras do universo, veja [35] e [36].

Capítulo 4

Radiação Cósmica de Fundo

O físico George Lemaître, ainda na década de 1920, foi um dos primeiros a imaginar a possibilidade de se observar sinais primordiais do universo, que deveria ter sido quente e denso nos momentos iniciais de sua expansão [37]. Na década de 1930, o físico norte americano Richard C. Tolman já acreditava que deveria existir uma história térmica para o universo, que deveria esfriar com a expansão. Os trabalhos de Gamow em nucleossíntese primordial ajudaram a contar essa história térmica, que mesmo bem fundamentada teoricamente, necessitava de alguma comprovação observacional.

No início da década de 1960, os laboratórios da empresa *Bell Telephone* possuíam uma antena de cerca de 6 metros para uso em telecomunicações, que em pouco tempo se tornou uma importante ferramenta no estudo da radioastronomia. Foi justamente utilizando essa antena para estudar as emissões eletromagnéticas na faixa das ondas de rádio emitidas pela Via Láctea, que Arno A. Penzias e Robert W. Wilson detectaram uma radiação com comprimento de onda de 7,3 centímetros [38], e que parecia vir uniformemente de todas as direções.

Inicialmente eles imaginaram que o ruído existia devido a problemas no aparato experimental, mas o que se concluiu posteriormente, foi que aquela radiação deveria ser a mesma prevista nos trabalhos de Gamow e seus colaboradores, e emitida durante a recombinação dos átomos. Devido à detecção dessa radiação, conhecida como radiação cósmica de fundo

(RCF), Penzias e Wilson foram laureados com o prêmio Nobel de física em 1978.

Essa radiação, cuja intensidade máxima é medida na faixa de microondas, é denominada de radiação de fundo pois não tem sua emissão associada a fontes individuais. Ela deve remontar de um período em que o universo era jovem e quente, com cerca de 380000 anos [39], e liberou essa radiação de todas as suas regiões. Apenas para que tenhamos uma idéia sobre a idade do universo na época da emissão da RCF, tendo hoje cerca de 13,7 bilhões de anos, o universo tinha apenas evoluído uma parte em cerca de $3,6 \cdot 10^4$. Atualmente, a RCF e as informações obtidas a partir dela, formam um dos pilares da cosmologia moderna e corroboram o modelo do Big Bang.

Ela apresenta um espectro de corpo negro, onde a densidade numérica n_T de fótons em equilíbrio térmico com matéria a uma temperatura T será dado por [40]

$$n_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (4.1)$$

na qual o fóton se encontra em uma faixa de frequências que vai de ν até $\nu + d\nu$, sendo h a constante de Planck e tomando a velocidade da luz como unitária. Esse espectro de corpo negro indica que os fótons em colisões rápidas com os elétrons se mantiveram em equilíbrio térmico com a matéria do universo antes da recombinação. A intensidade de uma certa frequência ν , será dada pela função

$$I_T(\nu) = \frac{2h\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (4.2)$$

e na presente época a RCF é consistente com o espectro de um corpo negro a uma temperatura de $2,725K$. Considerando a interação entre radiação e matéria desprezível, a partir da recombinação, a expansão sofrida pelo universo pode ser considerada adiabática, resfriando a radiação, explicando a baixa temperatura medida hoje, e mantendo a forma de um espectro planckiano [41].

Com o lançamento do satélite COBE (*COsmic Background Explorer*), em 1989, e análise dos dados por ele recolhidos, houve a primeira comprovação experimental de que existiam anisotropias intrínsecas na RCF. Levando consigo os instrumentos FIRAS (*Far Infrared Absolute Spectrophotometer*), DIRBE (*Diffuse InfraRed Background Experiment*) e DMR (*Differential Microwave Radiometer*) [8], o satélite COBE detectou e mapeou as anisotropias da RCF em grandes escalas angulares [42], encontrando anisotropias da ordem de 1 parte em 100000 [43].

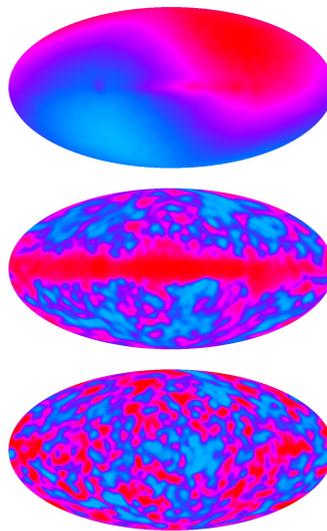


Figura 4.1: Mapa de anisotropias construído a partir dos dados coletados pelo instrumento DMR, presente no satélite COBE. As regiões em vermelho são as mais quentes e as regiões em azul são as mais frias. No mapa superior fica evidenciado o efeito de dipolo, causado pelo movimento do sistema solar em relação à direção de propagação da radiação. No mapa central o efeito de dipolo foi extraído e observa-se uma forte contribuição da nossa galáxia. No mapa inferior, mais refinado, ficamos apenas com a contribuição da RCF [44].

Com o FIRAS foram efetuadas medidas da diferença entre o espectro da RCF e o espectro de um corpo negro, e os resultados observacionais concordaram com as previsões teóricas dentro das barras de incerteza das medidas [45]. Pelos trabalhos realizados sobre os dados do COBE, os físicos George Smoot e John Mather receberam o prêmio Nobel de física de 2006.

Após as medidas do COBE, os experimentos ACME-SP (*Advanced Cosmic Microwave Explorer - South Pole*), FIRS (*Far InfraRed Surveys*) e o experimento de Tenerife, ratificaram as conclusões sobre a existência de anisotropias intrínsecas na RCF [46].

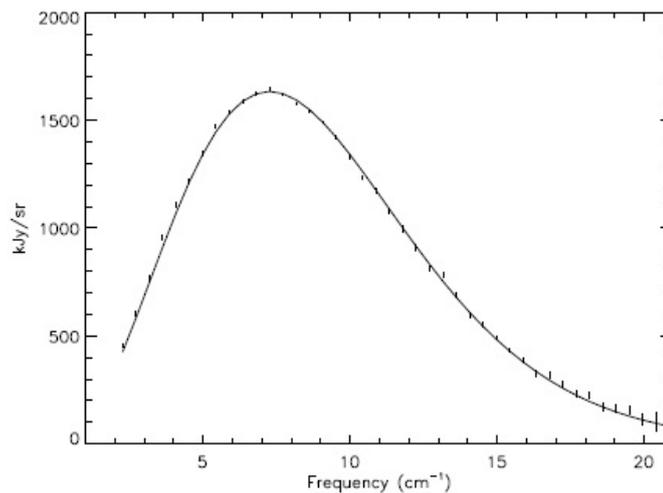


Figura 4.2: Intensidade da RCF observada pelo instrumento FIRAS (curva sólida) em comparação com os dados observacionais (as linhas verticais são as barras de erro das medidas, aumentadas cerca de 400 vezes para que pudessem ser visualizadas). A intensidade é medida em quilojansky por estereorradianos ($1 Jy = 10^{-26} W/m^2 Hz$), em função do inverso do comprimento de onda medido em centímetros [40] [45].

Em 2001 a Agência Espacial Americana lançou ao espaço a sonda WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) para substituir o satélite COBE e gerar mapas de anisotropias com maior resolução, além de extrair informações mais precisas do universo em que vivemos.

De acordo com os seus dados e usando o modelo cosmológico padrão, temos aproximadamente que: a idade do universo é 13,75 bilhões de anos; a constante de Hubble H_0 vale 71 Km/sMpc ; a quantidade de energia escura e de matéria escura correspondem a 73 % e 22 % do conteúdo do universo, respectivamente; o desacoplamento entre matéria e fótons ocorreu em $z = 1090$, há 380000 anos atrás [14] [47] [48].

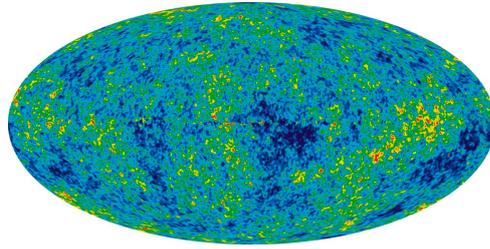


Figura 4.3: Mapa de anisotropias construído a partir dos dados coletados pela sonda WMAP. Esse mapa é o resultado da combinação linear ponderada de cinco mapas de anisotropia, cada um para uma frequência diferente. Dessa maneira o mapa resultante fornece uma retrato da RCF com baixa contaminação [49].

Mais recentemente, em 2009, foi lançada ao espaço a sonda Planck, que deverá colher dados até o presente ano de 2012. Ela deve gerar a imagem mais precisa do fundo de microondas do universo, e a grande expectativa é que o mapa de anisotropias forneça informações novas sobre o universo jovem, inclusive com alguma assinatura do período inflacionário [10].

Nosso objetivo nessa dissertação é relacionar a RCF, suas anisotropias e o fato dessa radiação ser polarizada, com parâmetros cosmológicos conhecidos. A seguir analisamos o espectro de potência angular e a função de correlação de dois pontos, descritos em termos de harmônicos esféricos.

4.1 Espectro de Potência da Radiação Cósmica de Fundo

A função que define a flutuação de temperatura $\frac{\delta T}{T_0}$ da RCF, é uma função que pode depender da posição, do tempo e da direção de observação no céu. Entretanto, uma vez que temos uma posição de observação bem determinada¹ e um tempo de medição específico², a flutuação de temperatura pode ser vista como função da direção de visada

¹Imaginando o universo em larga escala, observatórios na Terra ou em suas proximidades podem ser considerados como um ponto específico no universo, sem que existam erros que afetem a nossa medição.

²Assim como no caso das posições, levando em consideração a idade do universo, considerar que as medidas da RCF foram realizadas em um mesmo tempo, desde a época de Penzias e Wilson, também

(seja em função do vetor direcional \hat{n} ou dos ângulos θ e ϕ no céu) e decomposta em uma base formada por harmônicos esféricos da seguinte maneira,

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.3)$$

onde os coeficientes a_{lm} são obtidos pela expressão

$$a_{lm} = \int Y_{lm}^* \left[\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) \right] \sin\theta d\theta d\phi, \quad (4.4)$$

e satisfazem a relação

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (4.5)$$

O conjunto dos C_l 's é conhecido como o espectro de potência angular da RCF. Esse espectro nos fornece uma medida de quanto a temperatura flutua em relação ao valor referente ao espectro de corpo negro, dependendo da separação angular comparativa entre dois pontos no céu.

Quando falamos em comparar dois pontos na esfera celeste, devemos trabalhar com as funções de correlação de 2 pontos, $C(\alpha)$, para pontos separados por um ângulo α . O espectro de potência C_l se relaciona com a função de correlação de 2 pontos de acordo com

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= \left\langle \frac{\delta T}{T_0}(\theta_1, \phi_1) \frac{\delta T}{T_0}(\theta_2, \phi_2) \right\rangle \\ &= \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle Y_{l_1 m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{l_2 m_2}^*(\theta_2, \phi_2) \\ &= \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} C_{l_1} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} Y_{l_1 m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{l_2 m_2}^*(\theta_2, \phi_2) \\ &= \sum_{l_1} C_{l_1} \sum_{m_1} Y_{l_1 m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{l_1 m_1}^*(\theta_2, \phi_2) \\ &= \sum_{l_1} \frac{2l_1 + 1}{4\pi} C_{l_1} P_{l_1}(\cos \alpha). \end{aligned} \quad (4.6)$$

não acarretará erros consideráveis na teoria.

Como expandimos a flutuação de temperatura em harmônicos esféricos, os coeficientes a_{lm} que tratamos aqui estão relacionados com essa grandeza física, e serão posteriormente chamados de $a_{lm}^{(T)}$ para que não haja ambiguidade com os coeficientes das expansões de outras grandezas. Além disso, quando tratamos dos coeficientes de perturbações escalares (E), vetoriais (V) e tensoriais (T), eles não são correlacionados, ou seja,

$$\langle a_{l_1 m_1}^{(E)} a_{l_2 m_2}^{(V)} \rangle = \langle a_{l_1 m_1}^{(V)} a_{l_2 m_2}^{(T)} \rangle = \langle a_{l_1 m_1}^{(T)} a_{l_2 m_2}^{(E)} \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Quando construímos um modelo cosmológico, ele pode prever a forma do espectro de potência angular, em função do multipolo l , com base em valores assumidos por um conjunto de parâmetros básicos que descrevem as características do universo (taxa de expansão, a geometria, a idade, a densidade de matéria e energia). Dessa maneira a forma do espectro de potência, a distância entre os picos, assim como a posição e altura dos mesmos, irá variar de acordo com o conjunto de valores assumidos pelos parâmetros do sistema. Sendo assim, podemos testar modelos cosmológicos, comparando a forma medida do espectro de potência da RCF e os parâmetros derivados desse espectro, com as informações teóricas que o modelo nos fornece.

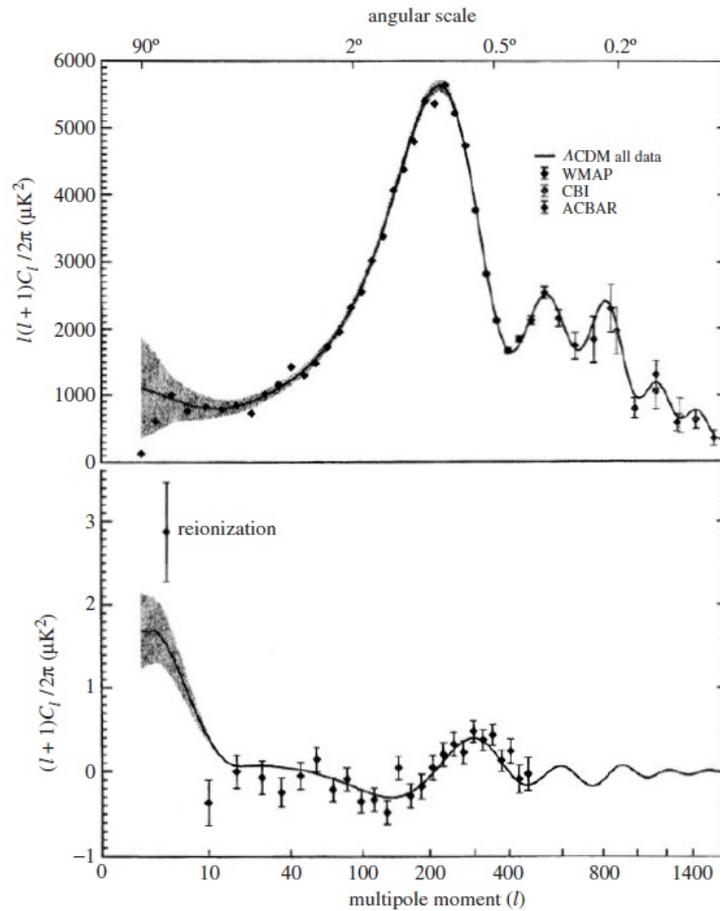


Figura 4.4: Espectro de potência angular construído a partir dos dados da sonda WMAP. Na parte superior temos o espectro de potência obtido com a correlação apenas de coeficientes a_{lm} ligados à temperatura (espectro de potência de temperatura T). A curva teórica do modelo Λ CDM possui bom ajuste aos dados observacionais. Na parte inferior, o espectro de potência foi obtido com a correlação entre coeficientes a_{lm} de temperatura e de polarização (espectro TE) [13]. Para mais detalhes veja [50].

Capítulo 5

Anisotropias na Radiação Cósmica de Fundo

As inhomogeneidades presentes no universo primordial foram essenciais para que ocorressem alguns fenômenos que são hoje observados. Além de serem as sementes fundamentais dos grandes aglomerados de matéria, essas inhomogeneidades causaram anisotropias na distribuição dos fótons emitidos durante a recombinação, além de produzir desvios na lei de Hubble para galáxias em grandes *redshifts*.

Uma vez que no universo primordial, antes do desacoplamento, matéria e radiação permaneciam em equilíbrio térmico, os fótons se deslocavam com um caminho livre médio muito pequeno como se estivessem dentro da cavidade de um corpo negro. O espectro da radiação, dessa maneira, deveria ser o de um corpo negro com uma temperatura igual a do universo. Mesmo após o desacoplamento, se o universo não sofresse desvios em relação à metrica de FLRW, permanecendo homogêneo e isotrópico, a forma planckiana do espectro não deveria mudar, estando somente a uma temperatura mais baixa devido à expansão [40]. Inclusive, se assim fosse, não deveríamos observar polarização da RCF uma vez que não existiriam direções preferenciais [51]. O estudo das anisotropias na distribuição de fótons é feito com o auxílio da equação de Boltzmann, com um termo de colisão descrevendo o espalhamento Thomson entre fótons e elétrons. Nesse capítulo

estaremos focando a nossa atenção na relação existente entre as inhomogeneidades do universo primordial e seus efeitos na variação da temperatura da RCF, e discutiremos sua polarização apenas no capítulo 7.

5.1 Flutuações de Temperatura em um Universo Perturbado

Quando o universo é descrito por uma métrica de FLRW perturbada, fótons emitidos de diferentes pontos da última superfície de espalhamento chegarão até nós com energias distintas, de acordo com as inhomogeneidades que encontraram no caminho. Se o observador possui certa velocidade com relação ao referencial comóvel, os fótons que chegam de diferentes regiões sofrerão desvios, o que levará a uma dependência angular. Se, por outro lado, a radiação sofre um espalhamento no caminho que percorre e a matéria que provoca o espalhamento também possui uma velocidade peculiar, ocorrerá um efeito semelhante ao caso anterior. O que veremos então é um desvio na temperatura do espectro, em relação à temperatura T_0 do universo hoje, de acordo com a direção de visada no céu. Existindo então essa dependência angular na temperatura T da RCF, dizemos que $T = T(\theta, \phi)$.

As anisotropias na RCF podem ser classificadas como primárias, quando as perturbações ocorrem antes ou durante o desacoplamento da radiação, ou como secundárias, quando as perturbações ocorrem após o desacoplamento entre matéria e radiação. Se existirem pequenas variações no potencial gravitacional da última superfície de espalhamento, os fótons podem ter sido emitidos a partir de diferentes poços de potencial e conseqüentemente sofrido diferentes perdas de energia, de acordo com o local da emissão (anisotropia primária). Além disso, processos astrofísicos que ocorrem no caminho percorrido pela radiação até nós, e que a perturbam, também podem provocar desvios do espectro perfeito de um corpo negro (anisotropia secundária).

Trabalhando em um espaço-tempo descrito por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[\delta_{ij} - h_{ij}(t, \vec{x})]dx^i dx^j, \quad (5.1)$$

que é a métrica de FLRW perturbada, podemos encontrar expressões para as anisotropias angulares causadas pelos movimentos em relação ao referencial comóvel e também pelos diferentes potenciais gravitacionais que atuam sobre o fóton, seja no momento de sua emissão ou de sua detecção.

O termo h_{ij} representa a perturbação da métrica do universo homogêneo e isotrópico sem curvatura, e as perturbações consideradas no desenvolvimento a seguir serão apenas lineares, de forma que termos de segunda ordem ou de ordem maior serão desprezados. Assumimos que o fóton chega ao observador em $t = t_0$, sendo emitido em $t = t_e$, viajando sempre em uma geodésica nula.

Para um observador localizado na origem do sistema de coordenadas, a localização do fóton em algum tempo t será

$$x^i = n^i \eta(t) \quad (5.2)$$

onde o vetor n^i é um vetor unitário ao longo da geodésica nula, apontando do observador para a fonte, e

$$\eta(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \quad (5.3)$$

é o tempo conforme.

Se existem dois observadores analisando determinado fóton, localizados ao longo de sua trajetória, um em x^i e o outro em $x^i + \delta x^i$, a expressão que nos dá a distância própria entre eles em função de t será

$$\delta l = (-g_{ij} \delta x^i \delta x^j)^{1/2} = a [(\delta_{ij} - h_{ij}) \delta x^i \delta x^j]^{1/2}. \quad (5.4)$$

Sabendo da equação (5.2) que $x^i \propto n^i$, e considerando apenas o primeiro termo da expansão de (5.4), concluímos que

$$\delta l \propto a \left(1 - \frac{1}{2} h_{ij} n^i n^j \right). \quad (5.5)$$

Com isso, a velocidade entre os dois observadores será

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{dt} \delta l = (\delta l) \frac{d}{dt} [\ln(\delta l)] \\ &= \delta l \frac{d}{dt} \left\{ \ln \left[a \left(1 - \frac{1}{2} h_{ij} n^i n^j \right) \right] \right\} \\ &= \delta l \frac{d}{dt} \left[\ln a + \ln \left(1 - \frac{1}{2} h_{ij} n^i n^j \right) \right] \\ &= \delta l \left[\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} h_{ij} n^i n^j \right)^{-1} \dot{h}_{ij} n^i n^j \right] \\ &= \delta l \left[\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} n^i n^j \right] + \delta l [\mathcal{O}(h^2)] \\ &= \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} n^i n^j \right) (\delta t), \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde fizemos a velocidade da luz igual a 1 e δt é o tempo que o fóton leva para percorrer δl . Na equação (2.52), mostramos como relacionar o desvio na frequência medido para um fóton com a componente espacial da quadrivelocidade relativa entre dois observadores. No caso em que estamos analisando agora, considerando perturbações de primeira ordem

$$\frac{\delta \nu}{\nu} = -v = -\frac{\dot{a}}{a} \delta t + \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} n^i n^j \delta t, \quad (5.7)$$

e o primeiro termo representa o desvio conhecido devido ao universo descrito pela métrica de FLRW. Uma vez que analisaremos desvios desse resultado decorrentes das perturbações, podemos reescrever a equação (5.7) mais convenientemente como

$$\frac{\delta \nu}{\nu} + \frac{\dot{a}}{a} \delta t = \frac{\delta \nu}{\nu} + \frac{\delta a}{a} = \frac{\delta(\nu a)}{\nu a} = \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} n^i n^j \delta t. \quad (5.8)$$

Além disso, lembrando da Lei de Wien para corpos negros que diz que o produto do comprimento de onda pela temperatura absoluta é uma constante, podemos utilizar a relação

$$\delta T \propto \delta \nu \quad (5.9)$$

para escrever

$$\frac{\delta(Ta)}{Ta} = \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} n^i n^j \delta t. \quad (5.10)$$

Integrando o resultado (5.10) ao longo de todo o caminho percorrido pelo fóton, desde a sua emissão até sua observação, teremos

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{d(Ta)}{Ta} = \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij} n^i n^j dt, \quad (5.11)$$

de onde chegamos em

$$\ln \left(\frac{T_{ob} a_{ob}}{T_e a_e} \right) = \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij} n^i n^j dt. \quad (5.12)$$

Se não existem perturbações, $\nu \propto a^{-1}$, como visto no capítulo 2, e a partir de (5.9) vemos que a temperatura pode ser colocada simplesmente como $T \propto a^{-1}$, fato já utilizado quando descrevemos a perda de energia da RCF nos capítulos 3 e 4. Os fótons emitidos quando temperatura do universo era T_e apareceriam hoje como uma radiação de corpo negro com temperatura $\frac{T_e a_e}{a_{ob}} \equiv T_0$. Exatamente por isso vemos a temperatura da radiação cósmica de fundo tão baixa, mesmo sendo emitida em uma época na qual o universo possuía uma temperatura altíssima. O fóton que observamos, viajou pelo universo lutando contra a expansão do espaço-tempo, perdendo energia até atingir o nosso aparelho de medida.

Podemos fazer

$$\ln \left(\frac{T_{ob} a_{ob}}{T_e a_e} \right) = \ln \left(\frac{T_{ob}}{T_0} \right) = \ln \left(\frac{T_0 + \delta T}{T_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{\delta T}{T_0} \right) \cong \frac{\delta T}{T_0}, \quad (5.13)$$

obtendo finalmente o resultado [52]

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2} n^i n^j \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij} dt = \frac{1}{2} n^i n^j \int_{t_e}^{t_0} dt \left[\frac{\partial}{\partial t} h_{ij}(t, n^k, \eta(t)) \right]. \quad (5.14)$$

Essa expressão é geral e válida para qualquer modelo com $k = 0$ que quisermos tratar. Uma vez que a forma das perturbações h_{ij} é conhecida, podemos calcular $\frac{\delta T}{T_0}$ e fazer testes desse modelo, confrontando os resultados teóricos com os dados observacionais.

Se trabalharmos na RG, devemos linearizar as equações de Einstein e resolver o sistema, para encontrar a forma da perturbação h_{ij} . Para realizar tal tarefa escolheremos o calibre síncrono

$$h_{00} = h_{0i} = 0. \quad (5.15)$$

Ainda seguindo com perturbações lineares, $h_{ij}(\vec{x}, t)$ pode ser expressa em termos das componentes de Fourier $h_{ij}(\vec{p}, t)$, onde cada componente contribui independentemente para $\frac{\delta T}{T_0}$ na equação (5.14). Fisicamente, isso significa aproximar as perturbações como sinais expandidos em ondas planas.

Quando queremos analisar os modos crescentes da perturbação, podemos ignorar forças devido a gradientes de pressão (que tenderão a amortecer o crescimento), e então as equações linearizadas para a perturbação h_{ij} serão [53]

$$\ddot{h} + \frac{2\dot{a}\dot{h}}{a} = 8\pi G(\rho - \rho_b), \quad (5.16a)$$

$$h_{ik,j}^j + h_{,ik} - h_{i,jk}^j - h_{k,ji}^j = 0, \quad (5.16b)$$

e

$$\dot{h}_{,i} = \dot{h}_{i,k}^k. \quad (5.16c)$$

com $h = \text{Tr}(h_k^i)$ e ρ_b é a densidade de matéria da base, ou seja, do universo sem perturbações¹.

Da conservação de densidade de matéria temos que

$$\delta \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{-g}\rho) \right) = 0, \quad (5.17)$$

o que implica em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{-g}}{2} h \rho_b + \sqrt{-g} \delta \rho \right) = 0 \quad (5.18)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[a^3 \left(\frac{h \rho_b}{2} + \delta \rho \right) \right] = 0. \quad (5.19)$$

Desenvolvendo essa última equação chegamos em

$$\frac{h}{2} (3\dot{a}a^2 \rho_b + \dot{\rho}_b a^3) + 3\dot{a}a^2 \delta \rho + a^3 \frac{\dot{h} \rho_b}{2} + a^3 \delta \dot{\rho} = 0 \quad (5.20)$$

e

$$\frac{\dot{h} \rho_b}{2} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \delta \rho - \delta \dot{\rho} = -\delta \dot{\rho} + \delta \rho \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b}, \quad (5.21)$$

o que implica em

$$\dot{h} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_b - \delta \rho}{\rho_b} \right) = 2\dot{\delta}, \quad (5.22)$$

onde definimos o contraste de densidade δ como

$$\delta = \frac{\rho_b - \delta \rho}{\rho_b}. \quad (5.23)$$

Derivado a equação (5.22) mais uma vez obtemos

$$\ddot{h} = 2\ddot{\delta}, \quad (5.24)$$

¹Como pode ser notado, analisando os índices dos tensores em cada uma das três equações, elas descrevem as perturbações escalares, tensoriais e vetoriais, respectivamente.

e utilizando (5.22) e (5.24) podemos expressar (5.16a) da seguinte forma

$$2\ddot{\delta} + 4\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 8\pi G(\delta\rho - \rho_b) = -8\pi G\rho_b\delta, \quad (5.25)$$

que rearrumada fica

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (4\pi G\rho_b)\delta = 0, \quad (5.26)$$

sendo a equação diferencial de segunda ordem que dará a evolução temporal do contraste de densidade.

Assumindo $\rho_b = \rho_0 a^{-3}$

$$a^3\ddot{\delta} + 2\dot{a}a^2\dot{\delta} + 4\pi G\rho_0\delta = 0, \quad (5.27)$$

que juntamente com a escolha $\delta = \delta_0 a$ nos leva a

$$\ddot{a}a^3 + 3\dot{a}^2a^2 + 4\pi G\rho_0a = 0, \quad (5.28)$$

ou seja

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 4\pi G\rho_0, \quad (5.29)$$

que é o comportamento esperado para um universo dominado pela matéria.

Vamos agora nos concentrar na equação (5.16c). Sua solução pode ser escrita de maneira geral como

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right), \quad (5.30)$$

que utilizada juntamente com a derivada de (5.16b) faz com que a equação (5.16b) seja satisfeita identicamente. Sendo assim, a expressão (5.30) determina completamente a forma de h_{ik} em termos de δ .

A equação de Poisson considerando a densidade de matéria e sua perturbação é dada por

$$\nabla^2 (\Phi + \phi) = 4\pi G(\rho_b + \delta\rho), \quad (5.31)$$

de onde resulta que o potencial newtoniano total será

$$\Phi + \phi = -Ga^2 \int \frac{(\rho + \delta\rho) d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (5.32)$$

e a parte do potencial gerado apenas pela perturbação é dada por

$$\phi = -Ga^2 \rho_b \int \frac{\delta(\vec{x}', t) d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (5.33)$$

Daí, usando a equação de conservação (5.17) para mostrar que o termo $\rho_b a^3$ é constante no tempo, obtemos

$$\frac{\partial(\phi a)}{\partial t} = -G\rho_b a^3 \int \frac{\dot{\delta}(\vec{x}', t) d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (5.34)$$

Na teoria de perturbações lineares, em um universo dominado pela matéria, a dependência temporal do contraste de densidade está associada apenas ao fator de escala, de maneira que

$$\delta(\vec{x}', t) = a(t) f(\vec{x}'), \quad (5.35)$$

e então

$$\phi(\vec{x}, t) = -Ga^3 \rho_b \int \frac{f(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (5.36)$$

Uma vez que o termo $\rho_b a^3$ é constante no tempo, o potencial ϕ não possui uma dependência temporal explícita, de onde podemos escrever $\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})$.

Também teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi a)}{\partial t} = \dot{a}\phi &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-G\rho_b a^3 \int \frac{\delta(\vec{x}', t) d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] = -G\rho_b a^3 \int \frac{\dot{\delta} d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\frac{1}{2} G\rho_b a^3 \int \frac{\dot{h} d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

o que nos leva a

$$\int \frac{\dot{h} d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{2\dot{a}}{G\rho_b a^3} \phi. \quad (5.38)$$

Voltando na equação (5.30),

$$\dot{h}_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\dot{h}_{,ij} d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\dot{a}}{2\pi G \rho_b a^3} \phi_{,ij} \quad (5.39)$$

e portanto

$$n^i n^j \dot{h}_{ij} = \frac{\dot{a}}{Q} \phi_{,ij} n^i n^j, \quad (5.40)$$

com

$$Q = 2\pi G \rho_b a^3. \quad (5.41)$$

Para resolver a integral em (5.14), consideraremos o integrando ao longo do caminho do fóton. Dada uma função $f(x^i)$ ao longo do caminho $x^i = n^i \eta(t)$, temos que

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x^i} n^i, \quad (5.42)$$

e utilizando esse resultado, a segunda derivada do potencial gravitacional da perturbação será

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} = \phi_{,ij} n^i n^j = \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} \quad (5.43)$$

ao longo do caminho. Com isso a equação (5.14) pode ser escrita como

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2} n^i n^j \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij} dt = \frac{1}{2Q} \int_{t_e}^{t_0} \dot{a} \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} dt = \frac{1}{2Q} \int d\eta \left(\frac{da}{d\eta} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} \right), \quad (5.44)$$

que integrada por partes resulta em

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2Q} \left(\frac{da}{d\eta} \right) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) \Big|_{\eta_e}^{\eta_0} - \frac{1}{2Q} \int d\eta \left(\frac{d^2 a}{d\eta^2} \right) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right). \quad (5.45)$$

Como visto na equação (2.73), para a matéria $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, ou relacionando com o tempo conforme, $a \propto \eta^2$, e com isso o termo $\frac{d^2 a}{d\eta^2}$ é uma constante. Podemos escrever a primeira derivada do fator de escala com relação ao tempo conforme da seguinte maneira

$$\frac{da}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta} \frac{da}{dt} = -a\dot{a}, \quad (5.46)$$

e também a segunda derivada como

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} = \frac{dt}{d\eta} \frac{d}{dt} (-a\dot{a}) = a \frac{d}{dt} (a\dot{a}), \quad (5.47)$$

e daí temos que

$$\frac{1}{2Q} \left(\frac{d^2 a}{d\eta^2} \right) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) = \frac{1}{4\pi G \rho_b a^3} \left[a \frac{d}{dt} (a\dot{a}) \right] \dot{\phi} dt. \quad (5.48)$$

Tomando

$$a = a_0 t^{\frac{2}{3}}, \quad (5.49)$$

$$\frac{\dot{\phi} dt}{(4\pi G \rho_b t^2)} \left[t^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \left(t^{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} \right) \right] = \frac{2}{9} \frac{\dot{\phi} dt}{4\pi G \rho_b t^2}, \quad (5.50)$$

e usando o fato de que

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{4\pi G \rho_b}{3}, \quad (5.51)$$

juntamente com

$$\dot{a} = \frac{2}{3} a_0 t^{-\frac{1}{3}}, \quad (5.52)$$

nós obtemos a simplificação

$$\frac{2}{9} \frac{\dot{\phi} dt}{4\pi G \rho_b t^2} = \frac{2}{9} \frac{3}{4} \dot{\phi} dt = \frac{1}{3} \dot{\phi} dt. \quad (5.53)$$

Com esses resultados chegamos em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Q} \left(\frac{da}{d\eta} \right) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) &= -\frac{1}{2Q} a\dot{a} \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) = -\frac{\dot{a}/a}{4\pi G \rho_b} \frac{n^i}{a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \\ &= -\frac{\dot{\delta}/\delta}{4\pi G \rho_b} \frac{n^i}{a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \\ &= -\frac{\dot{\delta}/\delta}{4\pi G \rho_b} n^i \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Contudo, a velocidade peculiar v^i induzida por um potencial ϕ é dada por

$$v^i = \frac{\dot{\delta}/\delta}{4\pi G\rho_b} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right), \quad (5.55)$$

de onde obtemos finalmente que a flutuação da temperatura pode ser escrita como [52]

$$\frac{\delta T}{T_0} = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{ob} - \vec{v}_{em}) - \frac{1}{3} \int \dot{\phi} dt = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{ob} - \vec{v}_{em}) - \frac{1}{3} [\phi(0) - \phi(\vec{x}_{em})]. \quad (5.56)$$

Podemos agora interpretar os termos da equação (5.56). O termo $\hat{n} \cdot \vec{v}_{ob}$ vem do efeito Doppler devido ao movimento do observador em relação ao referencial comóvel e o termo $\hat{n} \cdot \vec{v}_{em}$ também é causado pelo efeito Doppler, mas aquele que ocorre na última superfície de espalhamento. Os termos de potencial (ϕ) estão relacionados justamente com as variações do potencial gravitacional no local da observação ($\phi(0)$) e no local da emissão ($\phi(\vec{x}_{em})$). Uma observação importante, é que o termo $\frac{1}{3}\phi(0)$ apenas adiciona uma constante (como uma mudança no potencial de referência em um exercício de conservação de energia) na expressão da perturbação na temperatura, e dessa maneira não implica em nenhuma dependência direcional. Já os demais termos adicionam dependências direcionais na perturbação da temperatura, fazendo dela uma função $\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi)$.

O termo $\frac{1}{3}\phi(\vec{x}_{em})$ é denominado de efeito Sachs-Wolfe [54], uma anisotropia primária que vem das variações no potencial da última superfície de espalhamento, ou seja, relacionada ao comportamento do contraste de densidade. Tomando uma nova escala para $a(t_0)$, de maneira que $a(t_0) = 1$, a equação (5.33) nos fornece

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{3} G\rho_b(t_0) \int d^3x' \frac{\delta(\vec{x}', t_0)}{|\vec{x}_{em} - \vec{x}'|}, \quad (5.57)$$

em que

$$\vec{x}_{em} = \hat{n} \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \cong \hat{n} \int_0^{t_0} \frac{dt}{a_0} = \hat{n}\eta, \quad (5.58)$$

uma vez que assumimos t_{em} muito menor que o tempo hoje, e portanto passível de ser aproximado a zero. Utilizando a equação de Friedmann (2.59) em um universo sem

curvatura, para escrever $G\rho_b(t_0)$ em função do parâmetro de Hubble hoje, a transformada de Fourier da equação (5.57) será

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{2}H_0^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\delta_k}{k^2} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_{em}}, \quad (5.59)$$

que é capaz de nos dar o valor da temperatura em qualquer direção do céu. No entanto, não medimos a temperatura em uma única direção, e tomamos na verdade uma média sobre todas as direções. O que nós usamos para construir a ponte entre teoria e observação são os C_l 's, que vêm a partir da função de correlação angular obtida da equação (5.59). Expandindo a flutuação de temperatura em harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$, expressando os coeficientes a_{lm} da expansão em termos de $\frac{\delta_k}{k^2} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_{em}}$ e posteriormente tomando a média da expressão, mostra-se que [52]

$$\langle |a_{lm}|^2 \rangle = C_l = \mathcal{K} \frac{H_0^4}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{|\delta_k|^2}{k^2} |j_l(k\eta)|^2, \quad (5.60)$$

onde \mathcal{K} é uma constante e j_l é a função de Bessel esférica, definida em termos da função de Bessel ordinária como

$$j_l(k\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2k\eta}} J_{l+1/2}(k\eta). \quad (5.61)$$

Se soubermos o comportamento do contraste de densidade, podemos resolver a integral de forma analítica ou numérica e então comparar a predição teórica com os dados observacionais. Se o espectro for uma lei de potência, podemos escrever

$$|\delta_k|^2 = \mathcal{K}^{-1} A k^n, \quad (5.62)$$

onde A é a amplitude da perturbação e n o índice espectral, e então a equação (5.60) pode ser resolvida analiticamente, resultando em

$$C_l = \left\{ \frac{AH_0^2}{16} \frac{\Gamma(3-n)}{\Gamma^2[(4-n)/2]} \right\} \frac{\Gamma[(2l+n-1)/2]}{\Gamma[(2l+5-n)/2]}, \quad (5.63)$$

que vale para $n < 3$.

Olhando agora para os termos $\vec{v} \cdot \hat{n}$ da equação (5.56), quando estamos lidando com a velocidade peculiar \vec{v}_{ob} do observador, teremos simplesmente

$$\frac{\delta T}{T} = v \cos \varphi, \quad (5.64)$$

onde o ângulo φ é aquele entre a direção de movimento do observador e a direção de propagação da radiação observada. Essa contribuição produz um efeito de dipolo ($l = 1$) na observação da RCF que pode ser devido ao movimento da Terra ao redor do Sol, ao movimento do Sol em torno do centro da galáxia, ao movimento da nossa galáxia com relação ao Grupo Local e também devido ao movimento do Grupo Local em relação ao sistema comóvel à radiação.

Analisemos agora a termo \vec{v}_{em} , que está relacionado ao efeito Doppler sofrido pela radiação na época do desacoplamento. Esse desvio ocorre quando o fóton desacoplado interage com a matéria perturbada em movimento. A partir de (5.55), chegamos em

$$\hat{n} \cdot \vec{v}(t, \vec{k}) = -\frac{\dot{\delta}/\delta}{4\pi G\rho_b a} \hat{n} \cdot \nabla\phi = \frac{\dot{a}}{4\pi G\rho_b a^2} \hat{n} \cdot \nabla\phi. \quad (5.65)$$

Tomando também nesse caso a transformada de Fourier,

$$\hat{n} \cdot \vec{v}(t, \vec{k}) = \frac{\dot{a}(i\vec{k} \cdot \hat{n})}{4\pi G\rho_b a^2} \frac{4\pi G\rho_b a^2}{k^2} \delta_k = \dot{a}(i\vec{k} \cdot \hat{n}) \left(\frac{\delta_k}{k^2} \right). \quad (5.66)$$

Com essa expressão, chegamos em um resultado análogo ao de (5.59) e pode ser feita uma análise semelhante ao que foi naquele caso.

Nesse capítulo, não falamos sobre os pormenores na obtenção dos C_l 's, cuja importância na seleção de modelos cosmológicos já foi destacada. Essa discussão em detalhes será feita no último capítulo, com a intenção de fornecer ao leitor um material tão completo quanto possível, incentivando o estudo do tema abordado nessa dissertação. Passaremos agora ao estudo da polarização da radiação cósmica de fundo.

Capítulo 6

Parâmetros de Stokes

A teoria eletromagnética proposta por James C. Maxwell no século XIX unificou os fenômenos elétricos e os fenômenos magnéticos, e a partir das equações fundamentais dessa teoria, chamadas de equações de Maxwell, obtemos a descrição da propagação de ondas eletromagnéticas. Um fato importante é que a velocidade de propagação dessas ondas é exatamente igual à velocidade de propagação da luz, de onde percebeu-se que a própria natureza da luz seria eletromagnética.

Uma das propriedades das ondas eletromagnéticas é a possibilidade de serem polarizadas, e o nosso foco agora será justamente analisar a melhor maneira de descrever os possíveis estados de polarização desse tipo de radiação, da qual a RCF também faz parte.

Se uma onda se propaga na direção determinada pelo vetor unitário \hat{k} (eixo z), a extremidade do vetor campo elétrico \vec{E} pode descrever uma linha reta, um círculo ou uma elipse no plano x-y e dizemos nessas situações que a radiação está polarizada de maneira linear, circular ou elíptica, respectivamente. Podemos decompor o vetor campo elétrico em duas direções ortogonais determinadas pelos vetores unitários \hat{e}_1 e \hat{e}_2 , no plano x-y e que não são necessariamente as direções \hat{i} e \hat{j} . De fato, existem infinitas maneiras diferentes de definir o trio de vetores \hat{k} , \hat{e}_1 e \hat{e}_2 . De forma geral

$$\vec{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2, \quad (6.1)$$

com

$$E_1 = a_1 \text{sen}(\omega t - \kappa z) \quad (6.2)$$

e

$$E_2 = a_2 \text{sen}(\omega t - \kappa z - \delta) . \quad (6.3)$$

Nas duas últimas expressões, a_1 e a_2 são as amplitudes do campo elétrico nas direções \hat{e}_1 e \hat{e}_2 , ω é a frequência angular da oscilação, κ é o número de onda e δ é a diferença de fase entre as duas componentes do campo elétrico. Nesse ponto é importante frisar que o estudo da polarização da radiação eletromagnética pode ser feito com base no campo elétrico ou no campo magnético, uma vez que obtemos um a partir do outro de acordo com

$$\vec{B}_l = \sqrt{\epsilon\mu} (\hat{k} \times \vec{E}_l), \quad (6.4)$$

onde ϵ é a permissividade elétrica e μ é a permeabilidade magnética do meio, e $l = 1, 2$ [55]. No entanto, a escolha pelo campo elétrico ocorre porque as intensidades das forças elétricas são maiores do que as intensidades das forças magnéticas.

Quando queremos especificar o estado de polarização de certa radiação, que pode ser, por exemplo, radiação na faixa de microondas, é conveniente trabalhar com um conjunto de parâmetros propostos por G. G. Stokes em 1852 e que são conhecidos hoje como parâmetros de Stokes. São eles [56]

$$I = a_1^2 + a_2^2, \quad (6.5a)$$

$$Q = a_1^2 - a_2^2, \quad (6.5b)$$

$$U = 2a_1a_2 \cos(\delta), \quad (6.5c)$$

e

$$V = 2a_1a_2 \text{sen}(\delta) . \quad (6.5d)$$

Analisaremos agora as relações existentes entre os parâmetros de Stokes e a elipse de polarização, descrita pelo vetor campo elétrico.

6.1 Os Parâmetros de Stokes e a Elipse de Polarização

Efetuada uma mudança de referencial nas equações (6.2) e (6.3), é sempre possível iniciar a observação da onda partindo da origem e escrever

$$E_1 = a_1 \text{sen}(\omega t) , \quad (6.6)$$

e

$$E_2 = a_2 \text{sen}(\omega t - \delta) , \quad (6.7)$$

de onde obtemos as seguintes relações,

$$\frac{E_1}{a_1} = \text{sen}(\omega t) \quad (6.8)$$

e

$$\frac{E_2}{a_2} = \text{sen}(\omega t - \delta) = \text{sen}(\omega t) \cos(\delta) - \cos(\omega t) \text{sen}(\delta) . \quad (6.9)$$

Substituindo (6.8) em (6.9) chegamos em

$$\frac{E_1}{a_1} \cos(\delta) - \frac{E_2}{a_2} = \cos(\omega t) \text{sen}(\delta) , \quad (6.10)$$

que elevada ao quadrado e somada com o quadrado de

$$\frac{E_1}{a_1} \text{sen}(\delta) = \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta) , \quad (6.11)$$

resulta em

$$\frac{E_1^2}{a_1^2} - \frac{2E_1E_2}{a_1a_2} \cos(\delta) + \frac{E_2^2}{a_2^2} = \text{sen}^2(\delta) . \quad (6.12)$$

A equação (6.12) é visivelmente a equação de uma elipse cujos eixos maior e menor não coincidem com os eixos do sistema de coordenadas. Ela é chamada de elipse de polarização e pode ser colocada na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & \frac{-\cos(\delta)}{a_1 a_2} \\ \frac{-\cos(\delta)}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \text{sen}^2(\delta), \quad (6.13)$$

cujo determinante é

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & \frac{-\cos(\delta)}{a_1 a_2} \\ \frac{-\cos(\delta)}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} - \frac{\cos^2(\delta)}{a_1^2 a_2^2} = \frac{\text{sen}^2(\delta)}{a_1^2 a_2^2}. \quad (6.14)$$

Se queremos estudar as propriedades de uma elipse, a melhor forma de fazê-lo é colocando a elipse na forma canônica. A equação canônica dessa elipse seria

$$\frac{E_1'^2}{A_1^2} + \frac{E_2'^2}{A_2^2} = \text{sen}^2(\delta), \quad (6.15)$$

com $\text{sen}(\delta) \neq 0$, ou matricialmente

$$\begin{pmatrix} E_1' & E_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \text{sen}^2(\delta). \quad (6.16)$$

Dessa maneira, buscaremos as relações existentes entre os dois sistemas de coordenadas em que podemos descrever a elipse de polarização, seja ele formado por E_1 e E_2 ou E_1' e E_2' [57]. Chamando de ψ o ângulo que devemos rotacionar o sistema (E_1, E_2) para obter a equação da elipse na forma canônica, teremos a relação

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

ou a inversa

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \operatorname{sen} \psi \\ -\operatorname{sen} \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Utilizando a equação (6.18) na (6.16) e comparando o resultado com a equação (6.13), obtemos o resultado

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & \frac{-\cos(\delta)}{a_1 a_2} \\ \frac{-\cos(\delta)}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \operatorname{sen} \psi \\ -\operatorname{sen} \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

de onde se tem que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & \frac{-\cos(\delta)}{a_1 a_2} \\ \frac{-\cos(\delta)}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2^2} \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Vemos que o determinante associado à matriz que representa a elipse de polarização é invariante sob uma transformação de sistema de coordenadas. Daí, a partir da equação anterior chegamos na relação

$$A_1^2 A_2^2 \operatorname{sen}^2(\delta) = a_1^2 a_2^2. \quad (6.21)$$

Além do determinante, o traço da matriz também é invariante sob a transformação de sistema de coordenadas. Da equação (6.16) temos que o traço da matriz que representa a elipse na forma canônica é dado por $\frac{1}{A_1^2} + \frac{1}{A_2^2}$, e após desenvolvermos o segundo termo em (6.19) chegamos ao mesmo resultado no eixo de coordenadas rotacionado.

A partir da comprovação anterior, podemos comparar os traços

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{1}{A_1^2} + \frac{1}{A_2^2}, \quad (6.22)$$

e chegar em

$$\frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{A_1^2 A_2^2}{A_1^2 + A_2^2}. \quad (6.23)$$

Substituindo a equação (6.17) na (6.13) obtemos

$$\begin{pmatrix} E'_1 & E'_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \text{sen}^2(\delta), \quad (6.24)$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \psi}{a_1^2} - \frac{\text{sen}2\psi}{a_1 a_2} + \frac{\text{sen}^2 \psi}{a_2^2} & \frac{\text{sen}2\psi}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) - \frac{\cos(\delta) \cos 2\psi}{a_1 a_2} \\ \frac{\text{sen}2\psi}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) - \frac{\cos(\delta) \cos 2\psi}{a_1 a_2} & \frac{\text{sen}^2 \psi}{a_1^2} + \frac{\text{sen}2\psi \cos(\delta)}{a_1 a_2} + \frac{\cos^2 \psi}{a_2^2} \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

e assim podemos determinar o ângulo ψ para o qual a matriz M assumira uma forma diagonal, de uma elipse canônica. Isso ocorrerá se

$$\frac{1}{2} \text{sen}2\psi \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) - \frac{\cos(\delta) \cos 2\psi}{a_1 a_2} = 0 \quad (6.26)$$

de onde vem que

$$\tan 2\psi = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \cos(\delta). \quad (6.27)$$

Introduzindo um ângulo auxiliar α definido como

$$\tan \alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad (6.28)$$

teremos

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{a_2}{a_1}}{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}} = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2}, \quad (6.29)$$

que substituído em (6.27) fornece a relação

$$\tan 2\psi = \tan 2\alpha \cos(\delta). \quad (6.30)$$

Definindo um ângulo χ associado à excentricidade da elipse de polarização, tal que

$$\tan \chi = \pm \frac{A_2}{A_1}, \quad (6.31)$$

temos

$$\text{sen}2\chi = \frac{2 \tan \chi}{1 + \tan^2 \chi} = \pm \frac{2 \frac{A_2}{A_1}}{1 + \frac{A_2^2}{A_1^2}} = \pm \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2}, \quad (6.32)$$

que juntamente com (6.21) e (6.23) fornece

$$\text{sen}2\chi = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} \text{sen}(\delta). \quad (6.33)$$

Além disso

$$\text{sen}2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{a_2}{a_1}}{1 + \frac{a_2^2}{a_1^2}} = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad (6.34)$$

que substituído em (6.33) nos dá

$$\text{sen}2\chi = \text{sen}2\alpha \text{sen}(\delta). \quad (6.35)$$

Estabelecemos até agora relações importantes entre os parâmetros que caracterizam a elipse de polarização e faremos agora a conexão com os parâmetros de Stokes.

Tomando I como sendo a intensidade total do vetor campo elétrico, teremos

$$I = a_1^2 + a_2^2, \quad (6.36)$$

que elevado ao quadrado fica como

$$I^2 = a_1^4 + 2a_1^2a_2^2 + a_2^4 = a_1^4 - 2a_1^2a_2^2 + 4a_1^2a_2^2 = (a_1 - a_2)^2 + 4a_1^2a_2^2, \quad (6.37)$$

e daí

$$4a_1^2a_2^2 = I^2 - (a_1 - a_2)^2. \quad (6.38)$$

Utilizando a relação (6.36) em (6.33) obtém-se

$$I \operatorname{sen} 2\chi = 2a_1 a_2 \operatorname{sen}(\delta) \quad (6.39)$$

que elevada ao quadrado e juntamente com o quadrado de (6.27) acarreta

$$I^2 \operatorname{sen}^2 2\chi + (a_1^2 - a_2^2)^2 \tan^2 2\psi = 4a_1^2 a_2^2 = I^2 - (a_1 - a_2)^2. \quad (6.40)$$

Daí

$$(a_1^2 - a_2^2)^2 (1 + \tan^2 2\psi) = I^2 (1 - \operatorname{sen}^2 2\chi) \quad (6.41)$$

e

$$(a_1^2 - a_2^2)^2 = I^2 \cos^2 2\psi \cos^2 2\chi, \quad (6.42)$$

o que nos leva em

$$Q = a_1^2 - a_2^2 = I \cos 2\psi \cos 2\chi. \quad (6.43)$$

Utilizando (6.27) e (6.42) teremos também

$$2a_1 a_2 \cos(\delta) = I \operatorname{sen} 2\psi \cos 2\chi, \quad (6.44)$$

e podemos então finalmente definir o vetor de Stokes como

$$S = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 \\ 2a_1 a_2 \cos(\delta) \\ 2a_1 a_2 \operatorname{sen}(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ I \cos 2\psi \cos 2\chi \\ I \operatorname{sen} 2\psi \cos 2\chi \\ I \operatorname{sen} 2\chi \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

6.2 Os Parâmetros de Stokes na Esfera de Poincaré

Os parâmetros de Stokes são todos quadráticos em relação ao campo elétrico, possuindo dessa maneira a mesma unidade de medida. Além disso, vimos que apenas três parâmetros definem a elipse de polarização, podendo ser os valores dos semi-eixos maior e menor e o

ângulo de inclinação ou então os valores das amplitudes do campo elétrico em cada eixo e a diferença de fase entre eles. Sendo assim, como existem quatro parâmetros de Stokes deve existir uma relação que os conecta, sendo ela

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (6.46)$$

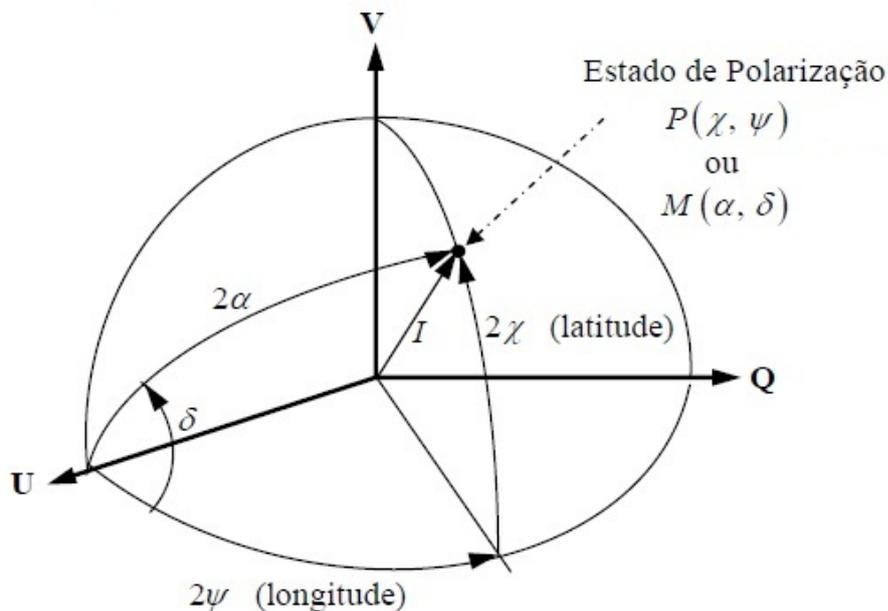


Figura 6.1: Coordenadas de um ponto na esfera de Poincaré. Podemos determinar o ponto pela sua longitude 2ψ e pela sua latitude 2χ (sendo chamado nesse caso de ponto P) ou então pelos parâmetros α e δ (sendo chamado nesse caso de ponto M) [57].

Essa relação vale apenas quando a onda eletromagnética se encontra completamente polarizada, e nessa situação os parâmetros Q , U e V são as coordenadas de um ponto sobre uma superfície esférica de raio I . A esfera que conecta todos os parâmetros e onde é possível estudar o estado de polarização da onda é chamada de esfera de Poincaré [58]. Podemos analisar a polarização da onda utilizando o sistema de coordenadas onde a elipse está rotacionada (com δ e α) ou aquele onde a elipse está em sua forma canônica (com χ e ψ).

O grau de polarização da onda pode ser definido como

$$\mathcal{G} = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}. \quad (6.47)$$

Quando o vetor de Stokes corresponde a uma onda não polarizada teremos

$$Q = U = V = 0, \quad (6.48)$$

que é exatamente o centro da esfera de Poincaré, e nesse caso $\mathcal{G} = 0$.

Se $V = 0$, χ deve ser igual a 0 ou então a $\pm \frac{\pi}{2}$ e nesse caso o campo elétrico fica em um dos eixos principais, sendo linearmente polarizado. Assim a polarização será determinada apenas pelos parâmetros Q e U ¹ e podemos definir o grau de polarização linear como sendo

$$\mathcal{G}_L = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I}. \quad (6.49)$$

Na esfera de Poincaré os pontos localizados no equador representam ondas com essa polarização.

Se por outro lado $Q = U = 0$, ψ deve ser igual a $\pm \frac{\pi}{4}$ e, com os semi eixos iguais, o campo elétrico descreverá um círculo e a luz é dita circularmente polarizada. Como nesse caso apenas o parâmetro V é relevante para a análise, o grau de polarização circular pode ser definido como

$$\mathcal{G}_C = \frac{V}{I}. \quad (6.50)$$

Na esfera de Poincaré as polarizações circulares são representadas pelo polo norte e pelo polo sul.

Além disso, o grau de polarização \mathcal{G} é dado pela distância do ponto P (ou M, dependendo do sistema de coordenadas utilizado) ao centro da esfera de Poincaré. Já o sinal de χ irá

¹Não estamos incluindo o parâmetro I nessa análise uma vez que ele sempre estará presente por estar associado à intensidade da onda.

determinar se a polarização está orientada para a direita ou para a esquerda.

O hemisfério superior ($\chi > 0$) representa polarizações orientadas para a esquerda, enquanto o hemisfério inferior ($\chi < 0$) apresenta as polarizações orientadas para a direita.

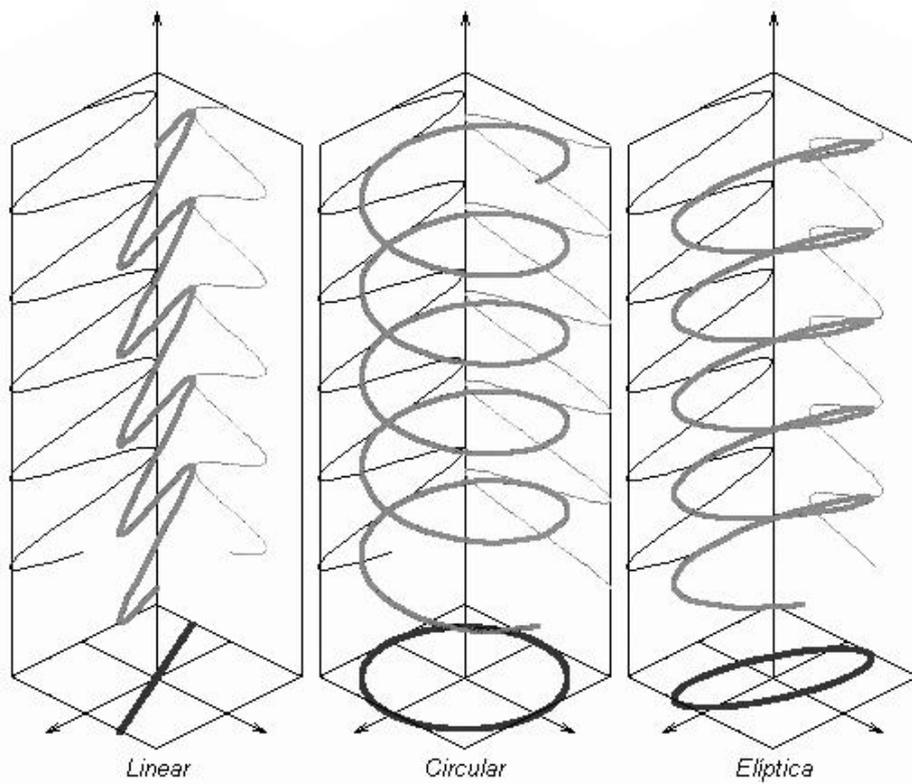


Figura 6.2: Possíveis estados de polarização de uma onda eletromagnética. O padrão visto por um observador frontal à propagação da radiação está representado no plano horizontal. Na figura da esquerda o campo descreve uma linha reta (polarização linear), na figura do centro o campo descreve um círculo (polarização circular) e na figura da direita o campo descreve uma elipse (polarização elíptica). Adaptado de [59].

Quando a radiação é apenas parcialmente polarizada, a igualdade (6.46) se torna uma desigualdade

$$I^2 > Q^2 + U^2 + V^2, \quad (6.51)$$

o que corresponde a um ponto localizado no interior da esfera de Poincaré.

No laboratório, os parâmetros de Stokes são medidos através da análise das intensidades transmitidas por combinações de polarizadores. Contudo, em situações práticas não conseguimos medir o vetor campo elétrico ciclo a ciclo, uma vez que estamos lidando com frequências muito elevadas e a luz geralmente é formada por uma superposição de muitas ondas de frequências diferentes, não possuindo uma relação de fase fixa entre si. Por isso tomamos apenas médias temporais desses parâmetros.

Nesses casos em que podemos considerar o campo elétrico total como uma composição dos campos elétricos elipticamente polarizados de cada onda, os parâmetros de Stokes obedecem à relação (6.51), são independentes e medidos separadamente. Apenas exemplificando o que pode ocorrer nessas situações, no caso apresentado anteriormente em que $Q = U = 0$, não necessariamente $I = V$ e $\mathcal{G}_C = 1$. Isso seria o esperado se todos os parâmetros estivessem conectados, como em (6.46), mas pode não ocorrer se há independência entre eles.

Seja qual for a situação, os parâmetros de Stokes são um ferramental importante no estudo da polarização da radiação eletromagnética e por isso são utilizados também no estudo da polarização da RCF, como veremos a seguir.

Capítulo 7

Polarização da Radiação Cósmica de Fundo

Quando trabalhamos com perturbações, estas podem ser de três tipos: escalares, vectoriais e tensoriais. Assim como uma onda eletromagnética pode ser decomposta em dois estados de polarização linear, uma perturbação tensorial do tipo $h_{ij}(\vec{x}, \eta)$ pode ser decomposta em termos de duas polarizações lineares da seguinte maneira

$$h_{ij}(\vec{x}, \eta) = \sum_{\lambda} h_{(\lambda)}(\vec{x}, \eta) \epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k}), \quad (7.1)$$

onde $\epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k})$, com $\lambda = \oplus, \otimes$, representa os dois estados de polarização linear possíveis, obedecendo à relação

$$\epsilon_{ij}^{(\lambda)} \epsilon_{ij}^{(\lambda')} = 2\delta^{\lambda\lambda'}. \quad (7.2)$$

Tomando um conjunto de três vetores ortonormais, formado pelo vetor que indica a direção de propagação \hat{k} , além de um vetor \hat{a} e um \hat{b} , ainda podemos escrever

$$\epsilon_{ij}^{\oplus}(\hat{k}) = (\hat{a}_i \hat{a}_j - \hat{b}_i \hat{b}_j) \quad (7.3)$$

e

$$\epsilon_{ij}^{\otimes}(\hat{k}) = (\hat{a}_i \hat{b}_j + \hat{a}_j \hat{b}_i), \quad (7.4)$$

onde \hat{a}_i é a i -ésima componente de \hat{a} .

Como um exemplo para ilustrar essa construção, se a direção de propagação coincide com \hat{z} , os vetores unitários \hat{k} , \hat{a} e \hat{b} podem ser escolhidos como

$$\hat{k} = (0, 0, 1) \quad \hat{a} = (1, 0, 0) \quad \hat{b} = (0, 1, 0) \quad (7.5)$$

e então as equações (7.3) e (7.4) implicarão em

$$\epsilon_{xx}^{\oplus}(\hat{k}) = (\hat{a}_x \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{b}_x) = 1, \quad (7.6a)$$

$$\epsilon_{yy}^{\oplus}(\hat{k}) = (\hat{a}_y \hat{a}_y - \hat{b}_y \hat{b}_y) = -1, \quad (7.6b)$$

$$\epsilon_{xy}^{\otimes}(\hat{k}) = (\hat{a}_x \hat{b}_y - \hat{a}_y \hat{b}_x) = 1, \quad (7.6c)$$

$$\epsilon_{yx}^{\otimes}(\hat{k}) = (\hat{a}_y \hat{b}_x - \hat{a}_x \hat{b}_y) = -1 \quad (7.6d)$$

e

$$\epsilon_{xy}^{\oplus} = \epsilon_{yx}^{\oplus} = \epsilon_{xx}^{\otimes} = \epsilon_{yy}^{\otimes} = 0. \quad (7.6e)$$

Se \hat{k} coincide com a direção radial, os vetores unitários \hat{k} , \hat{a} e \hat{b} podem ser escolhidos em coordenadas esféricas, como:

$$\hat{k} = (\text{sen}\theta \cos\phi, \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \cos\theta), \quad (7.7)$$

$$\hat{a} = (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \text{sen}\phi, -\text{sen}\theta), \quad (7.8)$$

$$\hat{b} = (\text{sen}\phi, -\cos\phi, 0). \quad (7.9)$$

Podemos escrever

$$h_{ij}(\vec{x}, \eta)h^{ij}(\vec{x}, \eta) = g^{li}g^{mj}h_{ij}h_{lm} \quad (7.10)$$

e utilizando a relação (7.2) teremos que no caso de uma geometria euclidiana

$$\begin{aligned} h_{ij}(\vec{x}, \eta)h_{ij}(\vec{x}, \eta) &= (h_{\oplus}\epsilon_{ij}^{\oplus} + h_{\otimes}\epsilon_{ij}^{\otimes})(h_{\oplus}\epsilon_{lm}^{\oplus} + h_{\otimes}\epsilon_{lm}^{\otimes}) \\ &= h_{\oplus}h_{\oplus}\epsilon_{ij}^{\oplus}\epsilon_{lm}^{\oplus} + h_{\otimes}h_{\otimes}\epsilon_{ij}^{\otimes}\epsilon_{lm}^{\otimes} + h_{\oplus}h_{\otimes}\epsilon_{ij}^{\oplus}\epsilon_{lm}^{\otimes} + h_{\otimes}h_{\oplus}\epsilon_{ij}^{\otimes}\epsilon_{lm}^{\oplus} \\ &= 2\{[h_{\oplus}(\vec{x}, \eta)]^2 + [h_{\otimes}(\vec{x}, \eta)]^2\}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Como no caso de ondas eletromagnéticas, as vezes é desejável passar da polarização linear para a circular, e isso é feito da seguinte maneira:

$$\epsilon_{ij}^{(esq)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\epsilon_{ij}^{\oplus}(\hat{k}) + i\epsilon_{ij}^{\otimes}(\hat{k}) \right] \quad (7.12)$$

para polarização à esquerda, e

$$\epsilon_{ij}^{(dir)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\epsilon_{ij}^{\oplus}(\hat{k}) - i\epsilon_{ij}^{\otimes}(\hat{k}) \right] \quad (7.13)$$

para polarização à direita.

Quando conjugadas, as relações (7.12) e (7.13) obedecem a

$$\epsilon_{ij}^{(esq)*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\epsilon_{ij}^{\oplus}(\hat{k}) - i\epsilon_{ij}^{\otimes}(\hat{k}) \right] = \epsilon_{ij}^{(dir)} \quad (7.14)$$

e

$$\epsilon_{ij}^{(dir)*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\epsilon_{ij}^{\oplus}(\hat{k}) + i\epsilon_{ij}^{\otimes}(\hat{k}) \right] = \epsilon_{ij}^{(esq)} \quad (7.15)$$

respectivamente.

Uma rotação de um ângulo α no plano ortogonal a $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ produzirá a seguinte transformação nos vetores \hat{a} e \hat{b}

$$\hat{a}' = \cos \alpha \hat{a} + \text{sen} \alpha \hat{b} \quad (7.16)$$

$$\hat{b}' = -\text{sen}\alpha\hat{a} + \cos\alpha\hat{b}, \quad (7.17)$$

implicando em

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij}^{\oplus} &= (\hat{a}'_i\hat{a}'_j - \hat{b}'_i\hat{b}'_j) \\ &= (\cos\alpha\hat{a}_i + \text{sen}\alpha\hat{b}_i)(\cos\alpha\hat{a}_j + \text{sen}\alpha\hat{b}_j) - (-\text{sen}\alpha\hat{a}_i + \cos\alpha\hat{b}_i)(-\text{sen}\alpha\hat{a}_j + \cos\alpha\hat{b}_j) \\ &= \cos 2\alpha(\hat{a}_i\hat{a}_j - \hat{b}_i\hat{b}_j) + \text{sen}2\alpha(\hat{a}_i\hat{b}_j + \hat{a}_j\hat{b}_i) \\ &= \cos 2\alpha\epsilon_{ij}^{\oplus} + \text{sen}2\alpha\epsilon_{ij}^{\otimes} \end{aligned} \quad (7.18)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij}^{\otimes} &= (\hat{a}'_i\hat{b}'_j + \hat{a}'_j\hat{b}'_i) \\ &= (\cos\alpha\hat{a}_i + \text{sen}\alpha\hat{b}_i)(-\text{sen}\alpha\hat{a}_j + \cos\alpha\hat{b}_j) + (\cos\alpha\hat{a}_j + \text{sen}\alpha\hat{b}_j)(-\text{sen}\alpha\hat{a}_i + \cos\alpha\hat{b}_i) \\ &= (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)(\hat{a}_i\hat{b}_j - \hat{a}_j\hat{b}_i) - 2\text{sen}\alpha\cos\alpha(\hat{a}_i\hat{a}_j - \hat{b}_i\hat{b}_j) \\ &= -\text{sen}2\alpha\epsilon_{ij}^{\oplus} + \cos 2\alpha\epsilon_{ij}^{\otimes}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

sendo $\tilde{\epsilon}_{ij}^{\oplus}$ e $\tilde{\epsilon}_{ij}^{\otimes}$ as duas polarizações lineares transformadas.

Efetuada agora uma transformação de rotação nas polarizações circulares teremos

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij}^{(esq)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{\epsilon}_{ij}^{\oplus} + i\tilde{\epsilon}_{ij}^{\otimes}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos 2\alpha\epsilon_{ij}^{\oplus} + \text{sen}2\alpha\epsilon_{ij}^{\otimes} + i\cos 2\alpha\epsilon_{ij}^{\otimes} - i\text{sen}2\alpha\epsilon_{ij}^{\oplus}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos 2\alpha - i\text{sen}2\alpha)\epsilon_{ij}^{\oplus} + i(\cos 2\alpha - i\text{sen}2\alpha)\epsilon_{ij}^{\otimes}] \\ &= e^{-2i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{\epsilon}_{ij}^{\oplus} + i\tilde{\epsilon}_{ij}^{\otimes}] \\ &= e^{-2i\alpha} \epsilon_{ij}^{(esq)} \end{aligned} \quad (7.20)$$

e

$$\begin{aligned}
 \tilde{\epsilon}_{ij}^{(dir)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{\epsilon}_{ij}^{\oplus} - i\tilde{\epsilon}_{ij}^{\otimes}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos 2\alpha \epsilon_{ij}^{\oplus} + \text{sen} 2\alpha \epsilon_{ij}^{\otimes} - i \cos 2\alpha \epsilon_{ij}^{\otimes} + i \text{sen} 2\alpha \epsilon_{ij}^{\oplus}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos 2\alpha + i \text{sen} 2\alpha) \epsilon_{ij}^{\oplus} - i(\cos 2\alpha + i \text{sen} 2\alpha) \epsilon_{ij}^{\otimes}] \\
 &= e^{i2\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{\epsilon}_{ij}^{\oplus} - i\tilde{\epsilon}_{ij}^{\otimes}] \\
 &= e^{2i\alpha} \epsilon_{ij}^{(dir)}.
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

As propriedades da transformação da polarização circular sobre uma rotação são análogas às propriedades da transformação, sobre a mesma rotação, da polarização circular do campo eletromagnético. Adiante nesse texto iremos explorar essa analogia para introduzir dois modos de polarização muito importantes no estudo da radiação cósmica de fundo.

7.1 Polarização do Campo de Radiação da RCF

Os parâmetros de Stokes estudados anteriormente terão um papel fundamental no desenvolvimento a seguir, onde teremos o objetivo de descrever a polarização da radiação cósmica de fundo. Um tal campo de radiação pode ser descrito a partir do tensor de polarização

$$\rho_{ij} = E_i E_j^* \tag{7.22}$$

onde E_i e E_j são as componentes do campo elétrico. Muito embora seja possível trabalhar tanto com as componentes do campo magnético quanto com as componentes do campo elétrico (a partir de uma dos pares, podemos obter o outro par), seguiremos trabalhando com o campo elétrico.

Fazendo a direção i coincidir com a do eixo x , a direção j coincidir com a do eixo y e a propagação se dando em \hat{z} podemos apresentar as componentes do tensor de polarização

na seguinte forma matricial¹

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 & E_x E_y^* \\ E_y E_x^* & |E_y|^2 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Os parâmetros de Stokes podem ser escritos alternativamente da seguinte maneira [56],

$$I = |E_x|^2 + |E_y|^2, \quad (7.24a)$$

$$V = 2 \operatorname{Im} [E_y E_x^*], \quad (7.24b)$$

$$U = 2 \operatorname{Re} [E_x^* E_y] \quad (7.24c)$$

e

$$Q = |E_x|^2 - |E_y|^2, \quad (7.24d)$$

de onde obtemos as relações

$$|E_x|^2 = \frac{I + Q}{2}, \quad (7.25a)$$

$$|E_y|^2 = \frac{I - Q}{2}, \quad (7.25b)$$

$$\operatorname{Re} [E_x^* E_y] = \frac{U}{2}, \quad (7.25c)$$

$$\operatorname{Im} [E_y E_x^*] = \frac{V}{2}, \quad (7.25d)$$

$$E_x^* E_y = \frac{U + iV}{2} \quad (7.25e)$$

e

$$(E_x^* E_y)^* = E_x E_y^* = \frac{U - iV}{2}. \quad (7.25f)$$

¹Com essas escolhas de eixos, temos que as componentes a_1 e a_2 utilizadas no capítulo anterior corresponderão à $|E_x|$ e $|E_y|$.

Podemos reescrever agora (7.23) da seguinte maneira

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Subdividindo essa última expressão como

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -iV \\ iV & I \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

podemos escrever que

$$\rho_{ij} = \bar{P}_{ij} + P_{ij} \quad (7.28)$$

com

$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -iV \\ iV & I \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

e

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

Podemos escrever também

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}V \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

ou então

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2}(I + U\sigma_1 + V\sigma_2 + Q\sigma_3) \quad (7.32)$$

sendo

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

as matrizes de Pauli.

Efetuada uma rotação de um ângulo α no plano ortogonal à direção de propagação da onda eletromagnética, podemos transformar os parâmetros de Stokes assim como fizemos para as polarizações na seção anterior. Dessa forma encontramos que I e V são invariantes sob uma rotação e que Q e U se transformam com o ângulo α de acordo com

$$\tilde{Q} = \cos 2\alpha Q + \text{sen}2\alpha U \quad (7.34)$$

e

$$\tilde{U} = -\text{sen}2\alpha Q + \cos 2\alpha U \quad (7.35)$$

respectivamente.

As relações (7.34) e (7.35) evidenciam que a polarização do fóton ou do gráviton observados muda para uma rotação no plano ortogonal à direção de propagação. O que nós queremos nesse ponto é construir grandezas que sejam invariantes sob tal rotação, e que as ondas eletromagnéticas ou gravitacionais observadas permaneçam com a mesma polarização independente de uma possível rotação do eixo de observação, por exemplo. Com uma tal grandeza, quaisquer dois observadores efetuando medições corretas devem concordar em suas observações, independente da montagem de seu aparato observacional.

Em analogia com eletrostática onde $\nabla \times \vec{E} = 0$ e $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, iremos construir invariantes chamados de modo E e modo B de polarização.

7.2 Os Modos E e B

Os modos de polarização que iremos construir a seguir surgem das propriedades primordiais do nosso universo. O modo E de polarização dos fótons surge naturalmente do espalhamento Thomson em um plasma heterogêneo. Já o modo B de polarização não é causado apenas pelo espalhamento no plasma, mas também é um sinal da inflação sendo uma maneira indireta de determinar a densidade de ondas gravitacionais primordiais [60]. Contudo, assim como no caso das ondas gravitacionais, o modo B ainda não foi medido e

deve ser um sinal muito fraco.

Como visto, os parâmetros de Stokes nos dão informações acerca dos estados de polarização da radiação eletromagnética. Sendo assim, se existem flutuações na geometria do espaço-tempo, esses estados de polarização sofrerão alterações e a nossa medição será modificada em relação ao caso não perturbado.

Experimentos atuais com RCF têm buscado compreender as propriedades das flutuações dos parâmetros de Stokes, devido à perturbação da geometria. Essas flutuações podem ser decompostas em modos escalares (E), vetoriais (V) e tensoriais (T) da seguinte maneira [61]

$$\Delta_I(\hat{n}, \eta) = \Delta_I^{(T)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_I^{(V)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_I^{(E)}(\hat{n}, \eta) \quad (7.36)$$

$$\Delta_Q(\hat{n}, \eta) = \Delta_Q^{(T)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_Q^{(V)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_Q^{(E)}(\hat{n}, \eta) \quad (7.37)$$

$$\Delta_U(\hat{n}, \eta) = \Delta_U^{(T)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_U^{(V)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_U^{(E)}(\hat{n}, \eta). \quad (7.38)$$

Nesse conjunto de equações, não incluímos a perturbação do parâmetro de Stokes V . Isso se deu, pois não esperamos uma polarização circular para a RCF, e esse parâmetro está justamente ligado à existência desse tipo de polarização, como evidenciado pela equação (6.50).

Definindo as combinações lineares

$$\Delta_+(\hat{n}, \eta) = \Delta_Q(\hat{n}, \eta) + i\Delta_U(\hat{n}, \eta) \quad (7.39)$$

e

$$\Delta_-(\hat{n}, \eta) = \Delta_Q(\hat{n}, \eta) - i\Delta_U(\hat{n}, \eta), \quad (7.40)$$

vemos que elas se transformam como (7.12) e (7.13), ou seja,

$$\tilde{\Delta}_\pm(\hat{n}, \eta) = e^{\mp 2i\alpha} \Delta_\pm(\hat{n}, \eta). \quad (7.41)$$

Esse tipo de transformação é característico de funções com peso de spin 2, de maneira que $\tilde{\Delta}_{\pm}(\hat{n}, \eta)$ poderão ser decompostos em uma base formada por esféricos harmônicos de spin 2. Isso ocorre pois essas quantidades apresentam caráter tensorial².

Se trabalhamos com a perturbação da intensidade do campo eletromagnético, podemos utilizar uma expansão em termos dos harmônicos esféricos usuais (funções com peso de spin 0) como³

$$\Delta_I(\hat{n}, \eta) = \sum_{lm} a_{lm}^{(T)} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (7.42)$$

com

$$a_{lm}^{(T)} = \int d\hat{n} Y_{lm}^* \Delta_I(\hat{n}, \eta). \quad (7.43)$$

Já para (7.39) e (7.40) podemos fazer a seguinte expansão

$$\Delta_{\pm}(\hat{n}, \eta) = \sum_{lm} a_{\pm 2, lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (7.44)$$

com

$$a_{2, lm} = \int {}_2Y_{lm}^*(\hat{n}) \Delta_+(\hat{n}, \eta) d\hat{n}, \quad (7.45)$$

e

$$a_{-2, lm} = \int {}_{-2}Y_{lm}^*(\hat{n}) \Delta_-(\hat{n}, \eta) d\hat{n}. \quad (7.46)$$

A expansão nesse caso foi feita utilizando uma base formada por harmônicos esféricos de spin 2 (${}_{\pm 2}Y_{lm}$). A partir desses objetos matemáticos com peso de spin 2 podemos obter quantidades com peso de spin 0, utilizando operadores que atuam nos harmônicos esféricos de maneira análoga à atuação dos operadores de criação e aniquilação em autoestados na mecânica quântica.

²Para mais detalhes acerca dos harmônicos esféricos de spin s e das operações envolvendo essas funções, vide o apêndice B.

³No que segue, os rótulos (T), (E) e (B) serão usados para indicar termos ligados à temperatura, ao modo E e ao modo B, respectivamente.

Então, tendo em mão os operadores

$$\mathcal{L}_+^{(s)}(\hat{n}) = -(\sin\theta)^s \left[\partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta} \partial_\phi \right] \frac{1}{(\sin\theta)^s} \quad (7.47)$$

e

$$\mathcal{L}_-^{(s)}(\hat{n}) = -\frac{1}{(\sin\theta)^s} \left[\partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta} \partial_\phi \right] (\sin\theta)^s, \quad (7.48)$$

podemos construir as seguintes quantidades com peso de spin 0

$$\Delta_E(\hat{n}, \eta) = -\frac{1}{2} \left\{ \mathcal{L}_-^{(1)}(\hat{n}) \left[\mathcal{L}_-^{(2)}(\hat{n}) \Delta_+(\hat{n}, \eta) \right] + \mathcal{L}_+^{(-1)}(\hat{n}) \left[\mathcal{L}_+^{(-2)}(\hat{n}) \Delta_-(\hat{n}, \eta) \right] \right\} \quad (7.49)$$

e

$$\Delta_B(\hat{n}, \eta) = \frac{i}{2} \left\{ \mathcal{L}_-^{(1)}(\hat{n}) \left[\mathcal{L}_-^{(2)}(\hat{n}) \Delta_+(\hat{n}, \eta) \right] - \mathcal{L}_+^{(-1)}(\hat{n}) \left[\mathcal{L}_+^{(-2)}(\hat{n}) \Delta_-(\hat{n}, \eta) \right] \right\}, \quad (7.50)$$

que são as grandezas chamadas de modo **E** e modo **B** de polarização. Esses modos podem ser decompostos em séries de harmônicos esféricos usuais, de forma que

$$\Delta_E(\hat{n}, \eta) = \sum_{lm} N_l^{-1} a_{lm}^{(E)} Y_{lm}(\hat{n}) \quad (7.51)$$

e

$$\Delta_B(\hat{n}, \eta) = \sum_{lm} N_l^{-1} a_{lm}^{(B)} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (7.52)$$

onde

$$N_l = \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}}, \quad (7.53)$$

e seus coeficientes podem ser escritos como

$$a_{lm}^{(E)} = -\frac{1}{2}(a_{2,lm} + a_{-2,lm}) \quad (7.54)$$

e

$$a_{lm}^{(B)} = \frac{i}{2}(a_{2,lm} - a_{-2,lm}). \quad (7.55)$$

Utilizando os operadores \mathcal{L}_+ e \mathcal{L}_- , obtemos explicitamente, como na equação (B.36), que

$$a_{lm}^{(E)} = -\frac{N_l}{2} \int Y_{lm}^*(\hat{n}) \left\{ \mathcal{L}_-^{(1)}(\hat{n}) \left[\mathcal{L}_-^{(2)}(\hat{n}) \Delta_+(\hat{n}, \eta) \right] + \mathcal{L}_+^{(-1)}(\hat{n}) \left[\mathcal{L}_+^{(-2)}(\hat{n}) \Delta_-(\hat{n}, \eta) \right] \right\} d\hat{n} \quad (7.56)$$

e

$$a_{lm}^{(B)} = \frac{iN_l}{2} \int Y_{lm}^*(\hat{n}) \left\{ \mathcal{L}_-^{(1)}(\hat{n}) \left[\mathcal{L}_-^{(2)}(\hat{n}) \Delta_+(\hat{n}, \eta) \right] - \mathcal{L}_+^{(-1)}(\hat{n}) \left[\mathcal{L}_+^{(-2)}(\hat{n}) \Delta_-(\hat{n}, \eta) \right] \right\} d\hat{n}. \quad (7.57)$$

Com os coeficientes da expansão em harmônicos esféricos da temperatura, do modo E e do modo B, podemos obter os espectros de potência angular (C_l 's) associados a cada uma dessas grandezas (fazendo as correlações TT, EE ou BB) ou ao cruzamento entre elas (fazendo as correlações TE, TB ou EB)⁴. De forma geral

$$C_l^{(ij)} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \langle a_{lm}^{(i)*} a_{lm}^{(j)} \rangle, \quad (7.58)$$

onde $i, j = T, E$ ou B .

É importante ressaltar que o modo B de polarização não é gerado por perturbações de densidade de matéria, mas apenas por flutuações tensoriais. A observação desse modo de polarização na RCF indicará portanto a existência das ondas gravitacionais.

⁴As correlações TB e EB foram incluídas entre os cruzamentos possíveis, mas $C_l^{TB} = C_l^{EB} = 0$ devido a diferenças de paridade.

Capítulo 8

Cálculo dos C_l 's

O cálculo dos C_l 's é um passo muito importante no estudo das anisotropias da RCF, pois é a partir desse resultado teórico que poderemos comparar teoria com observação e fazer uma seleção das boas teorias, que se ajustam corretamente aos dados observacionais. Entretanto, esse procedimento pode ser muito laborioso, e a falta de fontes com uma dedução mais palatável pode se tornar um obstáculo aos que abordam esse conteúdo pela primeira vez. Nosso objetivo nesse último capítulo será justamente proporcionar essa dedução mais detalhada.

No que segue, deixaremos de trabalhar no tempo cósmico t e passaremos a trabalhar no tempo conforme η , definido na equação (5.3). Então, considerando que os fótons sejam emitidos em um tempo η_e e recebidos em um tempo η_r , a variação da temperatura com relação ao valor T , não perturbado, é dada por [54] [62]

$$\frac{\delta T}{T}(\vec{e}) = \frac{1}{2} \int_0^{\omega_1} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial \eta} e^i e^j \right) d\omega, \quad (8.1)$$

onde $\omega_1 = \eta_r - \eta_e$, $\eta = \eta_r - \omega$ e \vec{e} é um vetor unitário que caracteriza uma direção particular de observação.

Dessa maneira, podemos escrever de forma geral

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) = & - \frac{1}{2}\mathcal{C} \int_0^{\omega_1} d\omega \sum_s \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k}} \epsilon_{ij}^s(\vec{k}) \left\{ f_k^s(\omega) c_k^s(\eta_0) \exp [ik_i e_1^i \omega + ik_i x^i] + \right. \\ & \left. + f_k^{s*}(\omega) c_k^{s\dagger}(\eta_0) \exp [-ik_i e_1^i \omega - ik_i x^i] \right\} e_1^i e_1^j, \end{aligned} \quad (8.2)$$

onde \mathcal{C} é uma constante de normalização que depende do comprimento de Planck, por estar relacionada com a quantização de ondas gravitacionais, e \vec{k} é o vetor de onda adimensional e independente do tempo¹ [63]. Além disso, o somatório leva em conta os possíveis estados de polarização linear, ou seja, $s = \oplus, \otimes$.

Os operadores $c_k^s(\eta)$ e $c_k^{s\dagger}(\eta)$ são os operadores quânticos de aniquilação e criação para cada classe e estado de polarização, e eles são definidos por [64]

$$\frac{d}{d\eta} c_k^s(\eta) = -i[c_k^s(\eta), H] \quad (8.3)$$

e

$$\frac{d}{d\eta} c_k^{s\dagger}(\eta) = -i[c_k^{s\dagger}(\eta), H], \quad (8.4)$$

que são as equações de Heisenberg do movimento, onde H é a hamiltoniana que determina a dinâmica do sistema em questão. Esses operadores ainda satisfazem a relação

$$\langle 0 | c_k^s(\eta_0) c_{\vec{p}}^{t\dagger}(\eta_0) | 0 \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \delta^{st}, \quad (8.5)$$

e quando o operador c_k^s atua sobre $|0\rangle$ o resultado é igual a zero. Nessas situações $|0\rangle$ é o estado de vácuo do sistema, e η_0 é algum tempo inicial onde os operadores foram tomados [65].

¹Quando integramos em $d^3\vec{k}$ (ou $d^3\vec{p}$), não estamos colocando os limites de integração, mas é importante dizer que a integral é tomada de $-\infty$ até $+\infty$.

No processo de quantização das perturbações podemos escrever a equação diferencial de h_{ij} como uma equação de oscilador harmônico [66]

$$\mu''(\eta) + \left[k^2 - \frac{a''}{a} \right] \mu(\eta) = 0. \quad (8.6)$$

Transformando a função $\mu(\eta)$ em um operador temos que

$$\hat{\mu}_{\vec{k}} = c_{\vec{k}}(\eta_0) f_k(\eta) + c_{\vec{k}}^\dagger(\eta_0) f_k^*(\eta), \quad (8.7)$$

com f_k satisfazendo a equação diferencial

$$f_k'' + \left[k^2 - \frac{a''}{a} \right] f_k = 0, \quad (8.8)$$

e o seu momento conjugado será

$$\hat{\pi}_{\vec{k}} = c_{\vec{k}}(\eta_0) g_k(\eta) + c_{\vec{k}}^\dagger(\eta_0) g_k^*(\eta), \quad (8.9)$$

onde $f_k' = -g_k$, de maneira que temos satisfeita a relação

$$f_k' f_k^* + f_k f_k'^* = i. \quad (8.10)$$

O que nós devemos calcular agora é a função de correlação angular de dois pontos, para duas direções diferentes separadas por um ângulo δ no céu. Ela é dada pela expressão

$$\langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle, \quad (8.11)$$

que, a partir da equação (8.2), resulta em

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{4} \langle 0 | \mathcal{C} \int_0^{\omega_1} d\omega \sum_s \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k}} \epsilon_{ij}^s(\vec{k}) \left\{ f_k^s(\omega) c_k^s(\eta_0) \times \right. \\
 &\times \exp [ik_i e_1^i \omega + ik_i x^i] + f_k^{s*}(\omega) c_k^{s\dagger}(\eta_0) \exp [-ik_i e_1^i \omega - ik_i x^i] \left. \right\} e_1^i e_1^j \times \\
 &\times \mathcal{C} \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \sum_t \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2p}} \epsilon_{kl}^t(\vec{p}) \left\{ f_p^t(\bar{\omega}) c_p^t(\eta_0) \exp [ip_i e_2^i \bar{\omega} + ip_i x^i] + \right. \\
 &\left. + f_p^{t*}(\bar{\omega}) c_p^{t\dagger}(\eta_0) \exp [-ip_i e_2^i \bar{\omega} - ip_i x^i] \right\} e_2^k e_2^l | 0 \rangle \\
 &= \frac{\mathcal{C}^2}{4} \int_0^{\omega_1} d\omega \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k}} \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2p}} \sum_s \sum_t \epsilon_{ij}^s(\vec{k}) \epsilon_{kl}^t(\vec{p}) \times \\
 &\times \langle 0 | \left\{ f_k^s(\omega) f_p^t(\bar{\omega}) c_k^s(\eta_0) c_p^t(\eta_0) \exp [ik_i e_1^i \omega + ik_i x^i] \times \right. \\
 &\times \exp [ip_i e_2^i \bar{\omega} + ip_i x^i] + f_k^{s*}(\omega) f_p^t(\bar{\omega}) c_k^{s\dagger}(\eta_0) c_p^t(\eta_0) \exp [-ik_i e_1^i \omega - ik_i x^i] \times \\
 &\times \exp [ip_i e_2^i \bar{\omega} + ip_i x^i] + f_k^s(\omega) f_p^{t*}(\bar{\omega}) c_k^s(\eta_0) c_p^{t\dagger}(\eta_0) \exp [ik_i e_1^i \omega + ik_i x^i] \times \\
 &\times \exp [-ip_i e_2^i \bar{\omega} - ip_i x^i] + f_k^{s*}(\omega) f_p^{t*}(\bar{\omega}) c_k^{s\dagger}(\eta_0) c_p^{t\dagger}(\eta_0) \exp [-ik_i e_1^i \omega - ik_i x^i] \times \\
 &\left. \times \exp [-ip_i e_2^i \bar{\omega} - ip_i x^i] \right\} | 0 \rangle e_1^i e_1^j e_2^k e_2^l \\
 &= \frac{\mathcal{C}^2}{4} \int_0^{\omega_1} d\omega \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k}} \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2p}} \sum_s \sum_t \epsilon_{ij}^s(\vec{k}) \epsilon_{kl}^t(\vec{p}) \langle 0 | c_k^s(\eta_0) c_p^{t\dagger}(\eta_0) | 0 \rangle \times \\
 &\times f_k^s(\omega) f_p^{t*}(\bar{\omega}) \exp [ik_i e_1^i \omega + ik_i x^i] \exp [-ip_i e_2^i \bar{\omega} - ip_i x^i] e_1^i e_1^j e_2^k e_2^l. \tag{8.12}
 \end{aligned}$$

Utilizando o resultando de (8.5) e efetuando o somatório em t chegamos em

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle &= \frac{\mathcal{C}^2}{4} \int_0^{\omega_1} d\omega \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2k}} \sum_s \epsilon_{ij}^s(\vec{k}) p_{kl}^s(\vec{k}) f_k^s(\omega) f_k^{s*}(\bar{\omega}) \times \\
 &\times \exp [ik_i (e_1^k \omega - e_2^i \bar{\omega})] \exp [ik_i x^i - ik_i x^i] e_1^i e_1^j e_2^k e_2^l, \tag{8.13}
 \end{aligned}$$

e uma vez que $\exp[ik_i x^i - ik_i x^i] = 1$, a última expressão pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle &= \frac{\mathcal{C}^2}{4} \int_0^{\omega_1} d\omega \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \int d\vec{k} \left\{ \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{f_k^{s*}(\bar{\omega})}{\sqrt{2k}} \right\} \times \\ &\times \exp[ik_i(e_1^i \omega - e_2^i \bar{\omega})] \sum_s \left(\epsilon_{ij}^s(\vec{k}) e_1^i e_1^j \right) \left(\epsilon_{kl}^s(\vec{k}) e_2^k e_2^l \right). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Definindo

$$\zeta^i = e_1^i \omega - e_2^i \bar{\omega}, \quad (8.15)$$

teremos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle &= \frac{\mathcal{C}^2}{4} \int_0^{\omega_1} d\omega \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \int k^2 dk \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{f_k^{s*}(\bar{\omega})}{\sqrt{2k}} e^{ik_i \zeta^i} \times \\ &\times \sum_s \left(\epsilon_{ij}^s(\vec{k}) e_1^i e_1^j \right) \left(\epsilon_{kl}^s(\vec{k}) e_2^k e_2^l \right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Agora, iremos calcular a integral

$$I = \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ik_i \zeta^i} \sum_s \left(\epsilon_{ij}^s e_1^i e_1^j \right) \left(\epsilon_{kl}^s e_2^k e_2^l \right), \quad (8.17)$$

mas para isso, primeiro calcularemos o termo \mathcal{J} que definimos por

$$\mathcal{J} = \sum_s \left(\epsilon_{ij}^s e_1^i e_1^j \right) \left(\epsilon_{kl}^s e_2^k e_2^l \right). \quad (8.18)$$

Utilizando as relações (7.3) e (7.4), podemos escrever

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^\oplus e_1^i e_1^j &= (a_i a_j - b_i b_j) (e_1^i e_1^j) = a_i e_1^i a_j e_1^j - b_i e_1^i b_j e_1^j, \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{e}_1)^2 - (\vec{b} \cdot \vec{e}_1)^2 \end{aligned} \quad (8.19)$$

e

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij}^{\otimes} e_1^i e_1^j &= (a_i b_j + a_j b_i) (e_1^i e_1^j) = a_i e_1^i b_j e_1^j + a_j e_1^j b_i e_1^i. \\ &= 2(\vec{a} \cdot \vec{e}_1) (\vec{b} \cdot \vec{e}_1).\end{aligned}\quad (8.20)$$

Daí

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= (\epsilon_{ij}^{\oplus} e_1^i e_1^j) (\epsilon_{kl}^{\oplus} e_2^k e_2^l) + (\epsilon_{ij}^{\otimes} e_1^i e_1^j) (\epsilon_{kl}^{\otimes} e_2^k e_2^l) \\ &= [(\vec{a} \cdot \vec{e}_1)^2 - (\vec{b} \cdot \vec{e}_1)^2][(\vec{a} \cdot \vec{e}_2)^2 - (\vec{b} \cdot \vec{e}_2)^2] + 4(\vec{a} \cdot \vec{e}_1)(\vec{b} \cdot \vec{e}_1)(\vec{a} \cdot \vec{e}_2)(\vec{b} \cdot \vec{e}_2).\end{aligned}\quad (8.21)$$

Também podemos desenvolver o termo na exponencial da seguinte forma

$$\begin{aligned}k_i \zeta^i &= \vec{k} \cdot \vec{\zeta} = k_i e_1^i \omega - k_i e_2^i \bar{\omega} \\ &= (\vec{k} \cdot \vec{e}_1) \omega - (\vec{k} \cdot \vec{e}_2) \bar{\omega}.\end{aligned}\quad (8.22)$$

Tomando

$$\vec{e}_1 = (a, b, c) \quad (8.23)$$

e

$$\vec{e}_2 = (\alpha, \beta, \gamma), \quad (8.24)$$

a partir de (8.22), obteremos

$$\vec{k} \cdot \vec{\zeta} = \vec{k} \cdot (\vec{e}_1 \omega - \vec{e}_2 \bar{\omega}) \quad (8.25)$$

e

$$\vec{\zeta} = \vec{e}_1 \omega - \vec{e}_2 \bar{\omega} = (\omega a - \bar{\omega} \alpha, \omega b - \bar{\omega} \beta, \omega c - \bar{\omega} \gamma). \quad (8.26)$$

Escolhemos um sistema de coordenadas em que

$$\begin{cases} \omega a - \bar{\omega}\alpha = 0 \\ \omega b - \bar{\omega}\beta = 0 \\ \omega c - \bar{\omega}\gamma = x, \end{cases} \quad (8.27)$$

o que implica diretamente em

$$\begin{cases} a = \frac{\bar{\omega}}{\omega}\alpha, \\ b = \frac{\bar{\omega}}{\omega}\beta \\ c = \frac{x}{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{\omega}\gamma, \end{cases} \quad (8.28)$$

e então, nesse sistema de coordenadas

$$\vec{\zeta} = (0, 0, x). \quad (8.29)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \vec{\zeta} \cdot \vec{\zeta} &= x^2 = (\vec{e}_1\omega - \vec{e}_2\bar{\omega}) \cdot (\vec{e}_1\omega - \vec{e}_2\bar{\omega}) \\ &= \omega^2 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2\omega\bar{\omega} - \bar{\omega}\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + \bar{\omega}^2 \\ &= \omega^2 - 2\omega\bar{\omega} \cos \delta + \bar{\omega}^2, \end{aligned} \quad (8.30)$$

de onde chegamos em

$$x = (\omega^2 - 2\omega\bar{\omega} \cos \delta + \bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.31)$$

Uma vez que escolhemos as direções \vec{e}_1 e \vec{e}_2 fazendo um ângulo δ entre si, a relação

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \delta, \quad (8.32)$$

deve ser satisfeita, e portanto

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \cos \delta. \quad (8.33)$$

Do conjunto de equações (8.28) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\omega}}{\omega} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{x}{\omega} \gamma &= \cos \delta, \\ \frac{x}{\omega} \gamma &= \cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega}, \\ \gamma &= \frac{\omega}{x} \cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{x},\end{aligned}\tag{8.34}$$

e como

$$c = \frac{x}{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{\omega} \gamma,$$

teremos

$$\begin{aligned}c &= \frac{x}{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{\omega} \left(\frac{\omega}{x} \cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{x} \right) \\ &= \frac{x}{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{x} \left(\cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right).\end{aligned}\tag{8.35}$$

Além disso, como \vec{e}_1 e \vec{e}_2 são unitários,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1\tag{8.36a}$$

e

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,\tag{8.36b}$$

e podemos utilizar essas duas relações para chegar em

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2 \text{sen}^2 \delta}{x^2}\tag{8.37}$$

e

$$a^2 + b^2 = \frac{\bar{\omega}^2 \text{sen}^2 \delta}{x^2}.\tag{8.38}$$

Vamos assumir que $\beta = 0$, o que implica também em $b = 0$. Isso significa que escolhemos colocar o vetor no plano $\phi = 0$. Como já sabemos que $x = \zeta$ (em módulo), podemos escrever para os vetores unitários direcionais que

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{\bar{\omega} \text{sen} \delta}{\zeta}, 0, \frac{\zeta}{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \left(\cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right) \right) \quad (8.39)$$

e

$$\vec{e}_2 = \left(\frac{\omega \text{sen} \delta}{\zeta}, 0, \frac{\omega}{\zeta} \cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \right). \quad (8.40)$$

A par dessas expressões para os vetores unitários, vamos verificar algumas propriedades que devem ser satisfeitas.

1) $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \delta$.

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= \frac{\omega \bar{\omega} \text{sen}^2 \delta}{\zeta^2} + 0 + \left[\frac{\zeta}{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \left(\cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right) \right] \left[\frac{\omega}{\zeta} \cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \right] \\ &= \frac{\omega \bar{\omega}}{\zeta^2} \text{sen}^2 \delta + \cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} + \frac{\omega \bar{\omega}}{\zeta^2} \cos \delta \left(\cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right) - \frac{\bar{\omega}^2}{\zeta^2} \left(\cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right) \\ &= \frac{\omega \bar{\omega}}{\zeta^2} (\text{sen}^2 \delta + \cos^2 \delta) + \cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} - 2 \frac{\bar{\omega}^2}{\zeta^2} \cos \delta + \frac{\bar{\omega}^3}{\zeta^2 \omega}, \end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= \frac{1}{\omega \zeta^2} \left\{ \bar{\omega} (\omega^2 - 2\omega \bar{\omega} \cos \delta + \bar{\omega}^2) - \bar{\omega} \zeta^2 \right\} + \cos \delta \\ &= \frac{1}{\omega \zeta^2} (\bar{\omega} \zeta^2 - \bar{\omega} \zeta^2) + \cos \delta = \cos \delta. \end{aligned} \quad (8.41)$$

2) $\omega \vec{e}_1 - \bar{\omega} \vec{e}_2 = \vec{\zeta} = (0, 0, x)$.

De fato,

$$\zeta_x = \omega \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \text{sen} \delta - \bar{\omega} \frac{\omega}{\zeta} \text{sen} \delta = 0, \quad (8.42)$$

$$\zeta_y = 0 \quad (8.43)$$

e

$$\zeta_z = \zeta = x. \quad (8.44)$$

3) $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$.

Com o auxílio de (8.40) e de (8.30)

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \frac{\omega^2 \text{sen}^2 \delta}{\zeta^2} + 0 + \left(\frac{\omega}{\zeta} \cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \right)^2 = 1. \quad (8.45)$$

4) $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 &= \frac{\bar{\omega}^2 \text{sen}^2 \delta}{\zeta^2} + 0 + \left[\frac{\zeta}{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \left(\cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right) \right]^2. \\ &= \frac{\bar{\omega}^2 \text{sen}^2 \delta}{\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{\omega^2} + \frac{\bar{\omega}^2}{\zeta^2} \left(\cos^2 \delta + \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} - 2 \frac{\bar{\omega}}{\omega} \cos \delta \right) + \\ &\quad 2 \frac{\zeta}{\omega} \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \left(\cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right). \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left(\omega^2 + 2\bar{\omega}^2 - 2\bar{\omega}^2 - 2\omega\bar{\omega} \cos \delta + 2\omega\bar{\omega} \cos \delta \right). \\ &= 1. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Podemos simplificar a expressão de \vec{e}_1 . Uma vez que

$$\begin{aligned} e_{1z} &= \frac{\zeta}{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \left(\cos \delta - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right), \\ &= \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \cos \delta + \frac{\zeta}{\omega} - \frac{\bar{\omega}^2}{\zeta \omega} \\ &= \frac{\omega}{\zeta} - \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \cos \delta, \end{aligned} \tag{8.47}$$

ficamos com as seguintes expressões reorganizadas para os vetores unitários:

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{\bar{\omega}}{\zeta} \text{sen} \delta, 0, \frac{1}{\zeta} (\omega - \bar{\omega} \cos \delta) \right) \tag{8.48}$$

e

$$\vec{e}_2 = \left(\frac{\omega}{\zeta} \text{sen} \delta, 0, \frac{1}{\zeta} (\omega \cos \delta - \bar{\omega}) \right). \tag{8.49}$$

Se assumimos $\frac{\vec{k}}{k} = (\text{sen} \theta \cos \phi, \text{sen} \theta \text{sen} \phi, \cos \theta)$, os vetores \vec{a} e \vec{b} poderão ser escritos em coordenadas esféricas como

$$\vec{a} = (\text{sen} \phi, -\cos \phi, 0) \tag{8.50}$$

e

$$\vec{b} = \begin{cases} (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen} \phi, -\text{sen} \theta), & \text{se } \theta < \pi/2 \\ -(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen} \phi, -\text{sen} \theta), & \text{se } \theta > \pi/2. \end{cases} \tag{8.51}$$

Daí

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \text{sen} \delta \text{sen} \phi = A \text{sen} \phi, \tag{8.52}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_2 = \frac{\omega}{\zeta} \text{sen} \delta \text{sen} \phi = B \text{sen} \phi, \tag{8.53}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = \pm \{A \cos \theta \cos \phi - C \text{sen} \theta\} \tag{8.54}$$

e

$$\vec{b} \cdot \vec{e}_2 = \pm \{B \cos \theta \cos \phi - D \text{sen} \theta\}, \tag{8.55}$$

que substituídas em (8.21) fornecerão

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\theta, \phi) = & A^2 B^2 \text{sen}^4 \phi + 2A^2 B^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi \text{sen}^2 \phi + A^2 B^2 \cos^4 \theta \cos^4 \phi + \\
 & + C^2 D^2 \text{sen}^4 \theta + (4ABCD - B^2 C^2 - A^2 D^2) \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi + \\
 & + (A^2 D^2 + B^2 C^2 + 4ABCD) \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi - 2(ACD^2 + \\
 & + BC^2 D) \cos \theta \text{sen}^3 \theta \cos \phi - 2(A^2 BD + AB^2 C) \cos^3 \theta \text{sen} \theta \cos^3 \phi - \\
 & - 2(A^2 BD + AB^2 C) \cos \theta \text{sen} \theta \cos \phi \text{sen}^2 \phi,
 \end{aligned} \tag{8.56}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\bar{\omega}}{\zeta} \text{sen} \delta \\ B = \frac{\omega}{\zeta} \text{sen} \delta \\ C = \frac{1}{\zeta} (\omega - \bar{\omega} \cos \delta) \\ D = \frac{1}{\zeta} (\omega \cos \delta - \bar{\omega}). \end{array} \right. \tag{8.57}$$

Voltando à integral,

$$I = \int_0^\pi \text{sen} \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ik_i \zeta^i} \mathcal{J}, \tag{8.58}$$

utilizando a igualdade $k_i \zeta^i = k \zeta \cos \delta$, teremos

$$I = \int_0^\pi \text{sen} \theta e^{ik \zeta \cos \theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathcal{J}(\theta, \phi). \tag{8.59}$$

Calculemos então as integrais em ϕ .

$$1) \int_0^{2\pi} \text{sen}^4 \phi d\phi.$$

A partir de relações trigonométricas temos

$$\text{sen}^4 \phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\phi + \frac{1}{8} \cos 4\phi, \tag{8.60}$$

que resulta em

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4 \phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\phi + \frac{1}{8} \cos^4 \phi \right) d\phi \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4 \phi d\phi &= \frac{3\pi}{4}. \end{aligned} \quad (8.61)$$

2) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi d\phi$.

Novamente, por relações trigonométricas, temos

$$\operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 \phi) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos^4 \phi,$$

resultando em

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi d\phi = \frac{\pi}{4}. \quad (8.62)$$

3) $\int_0^{2\pi} \cos^4 \phi d\phi$.

Como

$$\cos^4 \phi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\phi + \frac{1}{8} \cos 4\phi,$$

temos

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \phi d\phi = \frac{3\pi}{4}. \quad (8.63)$$

4) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \phi d\phi$.

Neste caso, temos automaticamente

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\phi) d\phi = \pi. \quad (8.64)$$

5) $\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi$.

Da mesma forma, como no item anterior,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi) d\phi = \pi. \quad (8.65)$$

6) $\int_0^{2\pi} \cos \phi \operatorname{sen}^2 \phi \, d\phi$.

Temos,

$$\cos \phi \operatorname{sen}^2 \phi = \frac{1}{4} \cos \phi - \frac{1}{4} \cos 3\phi,$$

que resulta em

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \operatorname{sen}^2 \phi \, d\phi = 0. \quad (8.66)$$

Por último,

7) $\int_0^{2\pi} \cos^3 \phi \, d\phi$.

Como

$$\cos^3 \phi = \frac{3}{4} \cos \phi + \frac{1}{4} \cos 3\phi,$$

teremos

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \phi \, d\phi = 0. \quad (8.67)$$

Resolvendo a integral

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta) &= \int_0^{2\pi} \mathcal{J}(\theta, \phi) \, d\phi \\ &= \frac{3\pi}{4} A^2 B^2 + \frac{\pi}{2} A^2 B^2 \cos^2 \theta + \frac{3\pi}{4} A^2 B^2 \cos^4 \theta + 2\pi C^2 D^2 \operatorname{sen}^4 \theta + \\ &\quad + (4ABCD - B^2 C^2 - A^2 D^2) \pi \operatorname{sen}^2 \theta + (A^2 D^2 + B^2 C^2 + 4ABCD) \pi \times \\ &\quad \times \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta, \end{aligned} \quad (8.68)$$

de $\mathcal{J}(\theta, \phi)$ em ϕ , podemos efetuar agora a integração em θ que será

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen} \theta e^{ik\zeta \cos \theta} \mathcal{J}(\theta) \\ &= \int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} \left\{ \frac{3\pi}{4} A^2 B^2 \operatorname{sen} \theta + \frac{\pi}{2} A^2 B^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{3\pi}{4} A^2 B^2 \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta + \right. \\ &\quad \left. 2\pi C^2 D^2 \operatorname{sen}^5 \theta + (4ABCD - B^2 C^2 - A^2 D^2) \pi \operatorname{sen}^3 \theta + (A^2 D^2 + B^2 C^2 + \right. \\ &\quad \left. 4ABCD) \pi \cos^2 \theta \operatorname{sen}^3 \theta \right\}. \end{aligned} \quad (8.69)$$

Usando a identidade [67]

$$\int_0^\pi e^{i\beta \cos \xi} \text{sen}^{2\nu} \xi d\xi = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{\beta}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(\beta), \quad (8.70)$$

para $\text{Re}(\nu) > -1/2$, e a relação [68]

$$\Gamma(n+1)! = n!, \quad (8.71)$$

para n inteiro e não negativo, vamos analisar os termos da expressão (8.69).

1)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} \text{sen} \theta &= \left(\frac{2\pi}{k\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(1) J_{\frac{1}{2}}(k\zeta) \\ &= \left(\frac{2\pi}{k\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(k\zeta). \end{aligned} \quad (8.72)$$

2)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} \text{sen}^3 \theta &= \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{k\zeta}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}}(k\zeta) \\ &= \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{k\zeta}\right)^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(k\zeta). \end{aligned} \quad (8.73)$$

3)

$$\int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} \text{sen}^5 \theta = 2\pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{k\zeta}\right)^{\frac{5}{2}} J_{\frac{5}{2}}(k\zeta). \quad (8.74)$$

4)

$$\int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} \cos^2 \theta \text{sen} \theta = \int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} (\text{sen} \theta - \text{sen}^3 \theta), \quad (8.75)$$

cuja solução vem do resultado dos termos (8.72) e (8.73).

5)

$$\int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} \cos^2 \theta \text{sen}^3 \theta = \int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} (\text{sen}^3 \theta - \text{sen}^5 \theta), \quad (8.76)$$

cuja solução vem dos termos (8.73) e (8.74).

$$6) \quad \int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} \cos^4 \theta \sin \theta = \int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} (\sin \theta - 2\sin^3 \theta + \sin^5 \theta), \quad (8.77)$$

que tem solução a partir dos termos (8.72), (8.73) e (8.74).

Para facilitar os cálculos, rearrumamos a expressão da integral (8.69), que pode ser escrita apenas em termos de $\sin \theta$, $\sin^3 \theta$ e $\sin^5 \theta$. Assim

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi d\theta e^{ik\zeta \cos \theta} & \left\{ \frac{3\pi}{4} A^2 B^2 \sin \theta + \frac{\pi}{2} A^2 B^2 (\sin \theta - \sin^3 \theta) + 2\pi C^2 D^2 \sin^5 \theta + \right. \\ & + \frac{3\pi}{4} A^2 B^2 (\sin \theta - 2\sin^3 \theta + \sin^5 \theta) + (4ABCD - B^2 C^2 - A^2 D^2) \pi \sin^3 \theta + \\ & \left. + (A^2 D^2 + B^2 C^2 + 4ABCD) \pi (\sin^3 \theta - \sin^5 \theta) \right\}, \quad (8.78) \end{aligned}$$

que de acordo com os resultados obtidos dos termos acima, nos deixa com

$$\begin{aligned} I = 2\pi^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{k\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} A^2 B^2 J_{\frac{1}{2}}(k\zeta) & + 2 \left(\frac{2\pi}{k\zeta} \right)^{\frac{3}{2}} (4ABCD - A^2 B^2) J_{\frac{3}{2}}(k\zeta) + \\ & + 2\pi^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{k\zeta} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{4} A^2 B^2 - B^2 C^2 - A^2 D^2 + 2C^2 D^2 - 4ABCD \right) J_{\frac{5}{2}}(k\zeta). \quad (8.79) \end{aligned}$$

Nosso próximo passo será calcular os coeficientes dependentes de A , B , C e D . Assim, temos que

$$A^2 B^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{\zeta^2} \sin^2 \delta \frac{\omega^2}{\zeta^2} \sin^2 \delta = \frac{\bar{\omega}^2 \omega^2}{\zeta^4} \sin^4 \delta, \quad (8.80)$$

portanto,

$$A^2 B^2 = \frac{(k\bar{\omega})^2 (k\omega)^2}{(k\zeta)^4} (\cos^2 - 1)^2. \quad (8.81)$$

Ainda,

$$4ABCD - A^2 B^2 = 4 \frac{\omega \bar{\omega}}{\zeta^4} \sin^2 \delta (\omega - \bar{\omega} \cos \delta) (\omega \cos \delta - \bar{\omega}) - \frac{\bar{\omega}^2 \omega^2}{\zeta^4} \sin^4 \delta. \quad (8.82)$$

Entretanto, já sabemos que

$$\zeta^2 = \omega^2 + \bar{\omega}^2 - 2\omega\bar{\omega} \cos \delta,$$

e daí

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \zeta^2 - \bar{\omega}^2 + 2\omega\bar{\omega} \cos \delta, \\ \bar{\omega}^2 &= \zeta^2 - \omega^2 + 2\omega\bar{\omega} \cos \delta. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Com isso,

$$4ABCD - A^2B^2 = 4\frac{\bar{\omega}\omega}{\zeta^2}(1 - \cos^2 \delta) \cos \delta - 4\frac{\bar{\omega}^2\omega^2}{\zeta^4}\text{sen}^4\delta - \frac{\bar{\omega}^2\omega^2}{\zeta^4}\text{sen}^4\delta,$$

que resulta finalmente em

$$4ABCD - A^2B^2 = 4\frac{\bar{\omega}\omega}{\zeta^2}(1 - \cos^2 \delta) \cos \delta - 5\frac{\bar{\omega}^2\omega^2}{\zeta^4}(1 - \cos^2 \delta)^2. \quad (8.84)$$

Agora,

$$\begin{aligned} &2C^2D^2 + \frac{3}{4}A^2B^2 - A^2D^2 - B^2C^2 - 4ABCD = \\ &= 2\frac{1}{\zeta^4}(\omega - \bar{\omega} \cos \delta)^2(\omega \cos \delta - \bar{\omega})^2 + \frac{3}{4}\frac{\omega^2\bar{\omega}^2}{\zeta^4}\text{sen}^4\delta - \frac{\bar{\omega}^2}{\zeta^2}\text{sen}^2\delta\frac{1}{\zeta^2}(\omega \cos \delta - \bar{\omega})^2 - \\ &\quad - \frac{\omega^2}{\zeta^2}\text{sen}^2\delta\frac{1}{\zeta^2}(\omega - \bar{\omega} \cos \delta)^2 - 4\frac{1}{\zeta^4}\omega\bar{\omega}\text{sen}^2\delta(\omega - \bar{\omega} \cos \delta)(\omega \cos \delta - \bar{\omega}) \\ &= \frac{3}{4}\frac{\omega^2\bar{\omega}^2}{\zeta^4}(1 - \cos^2 \delta)^2 - \frac{4}{\zeta^4}\omega\bar{\omega}(1 - \cos^2 \delta)(\omega^2 \cos \delta - \omega\bar{\omega} - \omega\bar{\omega} \cos^2 \delta + \bar{\omega}^2 \cos \delta) + \\ &\quad + \frac{2}{\zeta^4}(\omega^2 - 2\omega\bar{\omega} \cos \delta + \bar{\omega}^2 \cos^2 \delta)(\omega^2 \cos^2 \delta - 2\omega\bar{\omega} \cos \delta + \bar{\omega}^2) - \\ &\quad - \frac{\bar{\omega}^2}{\zeta^4}(1 - \cos^2 \delta)(\omega^2 \cos^2 \delta - 2\omega\bar{\omega} \cos \delta + \bar{\omega}^2) - \\ &\quad - \frac{\omega^2}{\zeta^4}(1 - \cos^2 \delta)(\omega^2 - 2\omega\bar{\omega} \cos \delta + \bar{\omega}^2 \cos^2 \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\bar{\omega}^2\omega^2}{\zeta^4} (\cos^2 \delta - 1)^2 + \frac{2\bar{\omega}^2}{\zeta^2} (\cos^2 \delta - 1) + \frac{\omega^2\bar{\omega}^2}{\zeta^4} (1 - \cos^2 \delta)^2 - \frac{\omega^2}{\zeta^2} (1 - \cos^2 \delta) + \\
 &+ \frac{2}{\zeta^2} (\zeta^2 - \bar{\omega}^2 + 2\omega\bar{\omega} \cos \delta) (\cos^2 \delta - 1) + \frac{3}{4} \frac{\omega^2\bar{\omega}^2}{\zeta^4} (1 - \cos^2 \delta)^2 + 2 - \\
 &- \frac{1}{\zeta^2} (\zeta^2 - \omega^2 + 2\omega\bar{\omega} \cos^2 \delta) (1 - \cos^2 \delta) + \frac{\omega^2\bar{\omega}^2}{\zeta^4} (1 - \cos^2 \delta)^2 - \\
 &- 4 \frac{\omega\bar{\omega}}{\zeta^4} (1 - \cos^2 \delta) [-\omega\bar{\omega} (1 + \cos^2 \delta) + \cos \delta (\zeta^2 + 2\omega\bar{\omega} \cos \delta)] \\
 &= (3 \cos^2 \delta - 1) - \frac{10\omega\bar{\omega}}{\zeta^2} \cos \delta (1 - \cos^2 \delta) + \\
 &+ \frac{4\omega^2\bar{\omega}^2}{\zeta^2} (\cos^2 \delta - 1)^2 + \frac{\omega^2\bar{\omega}^2}{\zeta^4} \frac{19}{4} (\cos^2 \delta - 1)^2 \\
 &= (3 \cos^2 \delta - 1) - \frac{10\omega\bar{\omega}}{\zeta^2} \cos \delta (1 - \cos^2 \delta) + \frac{35}{4} \frac{\omega^2\bar{\omega}^2}{\zeta^4} (\cos^2 \delta - 1)^2 . \tag{8.85}
 \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$A^2B^2 = \frac{\alpha}{(k\zeta)^4}, \tag{8.86}$$

$$4ABCD - A^2B^2 = \frac{\beta}{(k\zeta)^2} + \frac{\gamma}{(k\zeta)^4} \tag{8.87}$$

e

$$2C^2D^2 + \frac{3}{4}A^2B^2 - A^2D^2 - B^2C^2 - 4ABCD = \kappa + \frac{\varrho}{(k\zeta)^2} + \frac{\varepsilon}{(k\zeta)^4}, \tag{8.88}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \alpha = (k\omega)^2 (k\bar{\omega})^2 (1 - \cos^2 \delta)^2 \\
 \beta = 4k^2\omega\bar{\omega} (1 - \cos^2 \delta) \cos \delta \\
 \gamma = -5k^4\omega^2\bar{\omega}^2 (1 - \cos^2 \delta)^2 \\
 \kappa = 3 \cos^2 \delta - 1 \\
 \varrho = -10k^2\omega\bar{\omega} (1 - \cos^2 \delta) \cos \delta \\
 \varepsilon = \frac{35}{4}k^4\omega^2\bar{\omega}^2 (1 - \cos^2 \delta)^2 .
 \end{array} \right. \tag{8.89}$$

Definindo também $z = k\zeta$, chegaremos em

$$I = 4\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \alpha z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{1}{2}}(z) + 2\beta z^{\frac{-7}{2}} J_{\frac{3}{2}}(z) + 2\gamma z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{3}{2}}(z) + 4\kappa z^{\frac{-5}{2}} J_{\frac{5}{2}}(z) \right. \\ \left. + 4\rho z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{5}{2}}(z) + 4\varepsilon z^{\frac{-13}{2}} J_{\frac{5}{2}}(z) \right\}. \quad (8.90)$$

Usando a relação [68]

$$2\nu J_\nu(z) = zJ_{\nu-1}(z) + zJ_{\nu+1}(z), \quad (8.91)$$

teremos

$$J_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{z} J_{\frac{3}{2}} - J_{\frac{5}{2}}, \quad (8.92)$$

$$J_{\frac{3}{2}} = \frac{5}{z} J_{\frac{5}{2}} - J_{\frac{7}{2}} \quad (8.93)$$

e

$$J_{\frac{5}{2}} = \frac{7}{z} J_{\frac{7}{2}} - J_{\frac{9}{2}}, \quad (8.94)$$

e com isso

$$J_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{z} \left(\frac{5}{z} J_{\frac{5}{2}} - J_{\frac{7}{2}} \right) - J_{\frac{5}{2}} \\ = 15z^{-2} J_{\frac{5}{2}} - 10z^{-1} J_{\frac{7}{2}} + J_{\frac{9}{2}}. \quad (8.95)$$

Sendo assim, podemos escrever

$$z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{1}{2}} = 15z^{\frac{-13}{2}} J_{\frac{5}{2}} - 10z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{7}{2}} + z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{9}{2}}, \quad (8.96)$$

$$z^{\frac{-7}{2}} J_{\frac{3}{2}} = z^{\frac{-7}{2}} \left(5z^{-1} J_{\frac{5}{2}} - J_{\frac{7}{2}} \right) \\ = 35z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{5}{2}} - 5z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{7}{2}} - z^{\frac{-7}{2}} J_{\frac{7}{2}}, \quad (8.97)$$

$$z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{3}{2}} = z^{\frac{-11}{2}} \left(\frac{5}{z} J_{\frac{5}{2}} - J_{\frac{7}{2}} \right) = 5z^{\frac{-13}{2}} J_{\frac{5}{2}} - z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{7}{2}} \quad (8.98)$$

e

$$z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{5}{2}} = z^{\frac{-9}{2}} \left(\frac{7}{z} J_{\frac{7}{2}} - J_{\frac{9}{2}} \right) = 7z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{7}{2}} - z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{9}{2}}. \quad (8.99)$$

Voltando na integral com esses resultados chegamos em

$$\begin{aligned} I = & 4\pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \alpha \left(15z^{\frac{-13}{2}} J_{\frac{5}{2}} - 10z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{7}{2}} + z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{9}{2}} \right) + \right. \\ & + 2\beta \left(35z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{7}{2}} - 5z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{9}{2}} - z^{\frac{-7}{2}} J_{\frac{7}{2}} \right) + \\ & + 2\gamma \left(5z^{\frac{-13}{2}} J_{\frac{5}{2}} - z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{7}{2}} \right) + 4\kappa z^{\frac{-5}{2}} J_{\frac{5}{2}} + \\ & \left. + 4\rho \left(7z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{7}{2}} - z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{9}{2}} \right) + 4\varepsilon z^{\frac{-13}{2}} J_{\frac{5}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (8.100)$$

que rearrumada será

$$\begin{aligned} I = & 4\pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ z^{\frac{-13}{2}} J_{\frac{5}{2}} (15\alpha + 10\gamma + 4\varepsilon) + \right. \\ & + z^{\frac{-11}{2}} J_{\frac{7}{2}} (-10\alpha + 70\beta - 2\gamma + 28\rho) + \\ & \left. + 4\kappa z^{\frac{-5}{2}} J_{\frac{5}{2}} + z^{\frac{-7}{2}} J_{\frac{7}{2}} (-2\beta) + z^{\frac{-9}{2}} J_{\frac{9}{2}} (\alpha - 10\beta - 4\rho) \right\}. \end{aligned} \quad (8.101)$$

Calculemos agora os coeficientes dessa integral.

1)

$$\begin{aligned} 15\alpha + 10\gamma + 4\varepsilon &= 15(k\bar{\omega})^2 (k\omega)^2 (\cos^2 \delta - 1)^2 - \\ & - 50(k\bar{\omega})^2 (k\omega)^2 (1 - \cos^2 \delta)^2 + \\ & + 35(k\bar{\omega})^2 (k\omega)^2 (\cos^2 \delta - 1)^2 \\ &= (15 - 50 + 35) (k\bar{\omega})^2 (k\omega)^2 (\cos^2 \delta - 1)^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (8.102)$$

2)

$$\begin{aligned}
 -10\alpha + 70\beta - 2\gamma + 28\varrho &= -10(k\bar{\omega})^2(k\omega)^2(\cos^2\delta - 1)^2 + \\
 &\quad + 280(k\bar{\omega})(k\omega)(1 - \cos^2\delta)\cos\delta + \\
 &\quad + 10(k\bar{\omega})^2(k\omega)^2(1 - \cos^2\delta)^2 - \\
 &\quad - 280(k\bar{\omega})(k\omega)\cos\delta(1 - \cos^2\delta) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{8.103}$$

3)

$$\begin{aligned}
 \alpha - 10\beta - 4\varrho &= (k\bar{\omega})^2(k\omega)^2(\cos^2\delta - 1)^2 - \\
 &\quad - 40(k\bar{\omega})(k\omega)(1 - \cos^2\delta)\cos\delta + \\
 &\quad + 40(k\bar{\omega})(k\omega)\cos\delta(1 - \cos^2\delta) \\
 &= (k\bar{\omega})^2(k\omega)^2(\cos^2\delta - 1)^2.
 \end{aligned} \tag{8.104}$$

Substituindo novamente em (8.101) obtemos

$$\begin{aligned}
 I &= 4\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{4(3\cos^2\delta - 1)z^{-\frac{5}{2}}J_{\frac{5}{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - 8(k\bar{\omega})(k\omega)(1 - \cos^2\delta)\cos\delta z^{-\frac{7}{2}}J_{\frac{7}{2}} + \right. \\
 &\quad \left. + (k\bar{\omega})^2(k\omega)^2(\cos^2\delta - 1)^2 z^{-\frac{9}{2}}J_{\frac{9}{2}}\right\},
 \end{aligned} \tag{8.105}$$

ou

$$\begin{aligned}
 I &= 32\pi\left\{\frac{1}{2}(3\cos^2\delta - 1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{5}{2}}J_{\frac{5}{2}}(z) + \right. \\
 &\quad \left. + (k\bar{\omega})(k\omega)\cos\delta(\cos^2\delta - 1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{7}{2}}J_{\frac{7}{2}}(z) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{8}(k\bar{\omega})^2(k\omega)^2(\cos^2\delta - 1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{9}{2}}J_{\frac{9}{2}}\right\} \\
 &= 32\pi\mathcal{W}.
 \end{aligned} \tag{8.106}$$

Voltando ao início com os resultados que obtivemos, a função de correlação angular de dois pontos que queremos calcular pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle 0 | \frac{\delta T}{T} (\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T} (\vec{e}_2) | 0 \rangle &= \frac{\mathcal{C}^2}{4} \int_0^{\omega_1} d\omega \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \int_0^\infty k^2 dk \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{f_k^{s*}(\bar{\omega})}{\sqrt{2k}} 32\pi \mathcal{W} \\ &= 8\pi c^2 \int_0^{\omega_1} d\omega \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \int_0^\infty k^2 dk \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{f_k^{s*}(\bar{\omega})}{\sqrt{2k}} \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (8.107)$$

Usando a relação [69]

$$(k\zeta)^{-\nu} J_\nu(k\zeta) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu+k) \frac{J_{\nu+k}(k\omega) J_{\nu+k}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^\nu (k\bar{\omega})^\nu} \frac{d^{(\nu-1/2)}}{dx^{(\nu-1/2)}} P_{k+\nu-1/2}(x), \quad (8.108)$$

teremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \delta - 1) z^{-\frac{5}{2}} J_{\frac{5}{2}}(z) + \\ &\quad + (k\bar{\omega})(k\omega) \cos \delta (\cos^2 \delta - 1) z^{-\frac{7}{2}} J_{\frac{7}{2}}(z) + \\ &\quad + \frac{1}{8} (k\bar{\omega})^2 (k\omega)^2 (\cos^2 \delta - 1)^2 z^{-\frac{9}{2}} J_{\frac{9}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \delta - 1) \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} + k\right) \frac{J_{\frac{5}{2}+k}(k\omega)}{(k\omega)^{5/2}} \times \\ &\quad \times \frac{J_{\frac{5}{2}+k}(k\bar{\omega})}{(k\bar{\omega})^{5/2}} \frac{d^{(5/2-1/2)}}{d(\cos \delta)^{(5/2-1/2)}} P_{k+5/2-1/2}(\cos \delta) + \\ &\quad + (k\bar{\omega})(k\omega) \cos \delta (\cos^2 \delta - 1) \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{7}{2} + k\right) \frac{J_{\frac{7}{2}+k}(k\omega)}{(k\omega)^{7/2}} \times \\ &\quad \times \frac{J_{\frac{7}{2}+k}(k\bar{\omega})}{(k\bar{\omega})^{7/2}} \frac{d^{(7/2-1/2)}}{d(\cos \delta)^{(7/2-1/2)}} P_{k+7/2-1/2}(\cos \delta) + \\ &\quad + \frac{1}{8} (k\bar{\omega})^2 (k\omega)^2 (\cos^2 \delta - 1)^2 \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{2} + k\right) \frac{J_{\frac{9}{2}+k}(k\omega)}{(k\omega)^{9/2}} \times \\ &\quad \times \frac{J_{\frac{9}{2}+k}(k\bar{\omega})}{(k\bar{\omega})^{9/2}} \frac{d^{(9/2-1/2)}}{d(\cos \delta)^{(9/2-1/2)}} P_{k+9/2-1/2}(\cos \delta), \end{aligned} \quad (8.109)$$

e fazendo $x = \cos \delta$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} + k\right) \frac{J_{\frac{5}{2}+k}(k\omega) J_{\frac{5}{2}+k}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{5/2} (k\bar{\omega})^{5/2}} \frac{d^2}{dx^2} P_{k+2}(x) + \\
 &+ x (x^2 - 1) (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{7}{2} + k\right) \frac{J_{\frac{7}{2}+k}(k\omega) J_{\frac{7}{2}+k}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{5/2} (k\bar{\omega})^{5/2}} \frac{d^3}{dx^3} P_{k+3}(x) + \\
 &+ \frac{(x^2 - 1)^2}{8} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{2} + k\right) \frac{J_{\frac{9}{2}+k}(k\omega) J_{\frac{9}{2}+k}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{5/2} (k\bar{\omega})^{5/2}} \frac{d^4}{dx^4} P_{k+4}(x) \quad (8.110)
 \end{aligned}$$

Mudando o índice dos somatórios, de forma a padronizar os índices dos polinômios de Legendre, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \sum_{l=2}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{l+1/2}(k\omega) J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) + \\
 &+ x (x^2 - 1) \sum_{l=3}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{l+1/2}(k\omega) J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^3}{dx^3} P_l(x) + \\
 &+ \frac{1}{8} (x^2 - 1)^2 \sum_{l=4}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{l+1/2}(k\omega) J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^4}{dx^4} P_l(x) \\
 &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \sum_{l=2}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{l+1/2}(k\omega) J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) + \\
 &+ x (x^2 - 1) \sum_{l=2}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{l+1/2}(k\omega) J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^3}{dx^3} P_l(x) - \\
 &- x (x^2 - 1) \left(2 + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{\frac{5}{2}}(k\omega) J_{\frac{5}{2}}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^3}{dx^3} P_2(x) + \\
 &+ \frac{1}{8} (x^2 - 1)^2 \sum_{l=2}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{l+1/2}(k\omega) J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^4}{dx^4} P_l(x) - \\
 &- \frac{1}{8} (x^2 - 1)^2 \left(3 + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{\frac{7}{2}}(k\omega) J_{\frac{7}{2}}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^4}{dx^4} P_3(x) - \\
 &- \frac{1}{8} (x^2 - 1)^2 \left(2 + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{\frac{5}{2}}(k\omega) J_{\frac{5}{2}}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \frac{d^4}{dx^4} P_2(x) . \quad (8.111)
 \end{aligned}$$

Como para um polinômio de Legendre

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l , \quad (8.112)$$

que é a chamada fórmula de Rodrigues, temos que

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 \\ &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \end{aligned} \quad (8.113)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} P_2(x) = 0, \quad (8.114)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} P_2(x) = 0, \quad (8.115)$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 \\ &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \end{aligned} \quad (8.116)$$

e

$$\frac{d^4}{dx^4} P_3(x) = 0. \quad (8.117)$$

Voltando ao termo \mathcal{W}

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \mathcal{W} &= \sum_{l=2}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{J_{l+1/2}(k\omega) J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) + \right. \\ &\quad \left. + x(x^2 - 1) \frac{d^3}{dx^3} P_l(x) + \frac{(x^2 - 1)^2}{8} \frac{d^4}{dx^4} P_l(x) \right\}. \end{aligned} \quad (8.118)$$

Sabemos que os polinômios de Legendre são soluções da equação diferencial

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0, \quad (8.119)$$

e então

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l - 2x \frac{d}{dx} P_l + l(l + 1) P_l = 0, \quad (8.120)$$

que diferenciada uma vez será

$$(1-x^2) \frac{d^3}{dx^3} P_l(x) - 4x \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) + \{l(l+1) - 2\} \frac{d}{dx} P_l(x) = 0. \quad (8.121)$$

Diferenciando uma segunda vez iremos obter

$$(1-x^2) \frac{d^4}{dx^4} P_l(x) - 2x \frac{d^3}{dx^3} P_l(x) - 4 \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) - 4x \frac{d^3}{dx^3} P_l(x) + \{l(l+1) - 2\} \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) = 0, \quad (8.122)$$

e multiplicando por um fator $(1-x^2)$

$$(1-x^2)^2 \frac{d^4}{dx^4} P_l(x) - 6x(1-x^2) \frac{d^3}{dx^3} P_l(x) + \{l(l+1) - 6\} (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) = 0. \quad (8.123)$$

Multiplicando a equação (8.120) por α , a equação (8.121) por βx e a equação (8.123) por γ e somando todos os resultados, teremos um fator \mathcal{T} . Calculemos os coeficientes para os quais

$$\mathcal{T} = 0. \quad (8.124)$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \alpha(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l - 2\alpha x \frac{d}{dx} P_l + \alpha l(l+1) P_l + \beta x(1-x^2) \frac{d^3}{dx^3} P_l - 4\beta x^2 \frac{d^2}{dx^2} P_l + \\ &+ \beta x \{l(l+1) - 2\} \frac{d}{dx} P_l + \gamma(1-x^2)^2 \frac{d^4}{dx^4} P_l - 6\gamma x(1-x^2) \frac{d^3}{dx^3} P_l + \\ &+ \gamma \{l(l+1) - 6\} (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l = 0 \\ &= \gamma(1-x^2)^2 \frac{d^4}{dx^4} P_l + x(1-x^2) (\beta - 6\gamma) \frac{d^3}{dx^3} P_l + \\ &+ \left\{ \alpha - \alpha x^2 - 4\beta x^2 + \gamma l(l+1) - 6\gamma - \gamma l(l+1)x^2 + 6\gamma x^2 \right\} \frac{d^2}{dx^2} P_l + \\ &+ \left\{ -2\alpha + \beta l(l+1) - 2\beta \right\} x \frac{d}{dx} P_l + \alpha l(l+1) P_l = 0. \end{aligned} \quad (8.125)$$

Escolhemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{1}{8} \\ \beta - 6\gamma = -1 \\ \alpha + \gamma l(l+1) - 6\gamma = -\frac{1}{2} \\ -\alpha - 4\beta - \gamma l(l+1) + 6\gamma = \frac{3}{2} \\ -2\alpha + \beta l(l+1) - 2\beta = 0, \end{array} \right.$$

e com isso

$$\beta = -1 + \frac{6}{8} = -\frac{1}{4}, \quad (8.126)$$

$$2\alpha = -\frac{1}{4}l(l+1) + 2\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(l(l+1) - 2), \quad (8.127)$$

e daí

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(1-x^2)^2 \frac{d^4}{dx^4} P_l - x(1-x^2) \frac{d^3}{dx^3} P_l \\ & + \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2 \right\} \frac{d^2}{dx^2} P_l - \frac{1}{8} \{l(l+1) - 2\} l(l+1) P_l = 0 \end{aligned} \quad (8.128)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \{l(l+1) - 2\} l(l+1) P_l &= \frac{1}{8} (1-x^2)^2 \frac{d^4}{dx^4} P_l + \\ & + x(x^2-1) \frac{d^3}{dx^3} P_l + \\ & + \frac{1}{2} (3x^2-1) \frac{d^2}{dx^2} P_l. \end{aligned} \quad (8.129)$$

Disso encontramos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \mathcal{W} &= \sum_{l=2}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{2}{2} \frac{J_{l+1/2}(k\omega) J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\omega)^{\frac{5}{2}} (k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \\ &\times \left\{ \frac{1}{8} \{l(l+1) - 2\} l(l+1) P_l(\cos \delta) \right\}, \end{aligned} \quad (8.130)$$

ou então

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{\pi}{16} \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) \{l(l+1) - 2\} l(l+1) \\ &\times \frac{J_{l+1/2}(k\omega)}{(k\omega)^{\frac{5}{2}}} \frac{J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} P_l(\cos \delta). \end{aligned} \quad (8.131)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} C(\delta) &= 8\pi\mathcal{C}^2 \frac{\pi}{16} \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{\omega_1} d\omega \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{f_k^{s*}(\bar{\omega})}{\sqrt{2k}} \times \\ &\times \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) \{l(l+1) - 2\} l(l+1) \frac{J_{l+1/2}(k\omega)}{(k\omega)^{\frac{5}{2}}} \frac{J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} P_l(\cos \delta) \right\} \\ &= \frac{\pi^2\mathcal{C}^2}{2} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ (2l+1) [l(l+1) - 2] l(l+1) \int_0^{\infty} dk k^2 \times \right. \\ &\times \left. \int_0^{\omega_1} d\omega \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{J_{l+1/2}(k\omega)}{(k\omega)^{\frac{5}{2}}} \int_0^{\omega_1} d\bar{\omega} \frac{f_k^{s*}(\bar{\omega})}{\sqrt{2k}} \frac{J_{l+1/2}(k\bar{\omega})}{(k\bar{\omega})^{\frac{5}{2}}} \right\} P_l(\cos \delta), \end{aligned} \quad (8.132)$$

de onde obtemos, utilizando (4.6), que o termo C_l será

$$C_l = 2\pi^3\mathcal{C}^2 \{l(l+1) - 2\} l(l+1) \int_0^{\infty} dk k^2 \left| \int_0^{\omega_1} d\omega \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{J_{l+1/2}(k\omega)}{(k\omega)^{\frac{5}{2}}} \right|^2. \quad (8.133)$$

Utilizando a relação (5.61), podemos ainda escrever o espectro de potência angular em temperatura para a RCF em termos de funções de Bessel esféricas como

$$C_l = 4\pi^2\mathcal{C}^2 \{l(l+1) - 2\} l(l+1) \int_0^{\infty} dk k^2 \left| \int_0^{\omega_1} d\omega \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{j_l(k\omega)}{(k\omega)^2} \right|^2. \quad (8.134)$$

Uma vez com esse resultado analítico em mãos, podemos utilizá-lo para confrontar a teoria com os dados observacionais disponíveis, e concluir assim se lidamos com um bom modelo cosmológico ou não.

Capítulo 9

Considerações Finais

Iniciamos essa dissertação fazendo uma revisão da Relatividade Geral, obtendo as equações de campo e buscando as soluções cosmológicas de base para um universo homogêneo e isotrópico. Feito isso, passamos ao estudo da dinâmica do universo, e a partir daí apresentamos o modelo cosmológico padrão com o objetivo de compreender em linhas gerais a evolução do universo até chegar no desacoplamento entre matéria e radiação, processo que deu origem à hoje observada RCF.

Na sequência estudamos as principais propriedades da RCF e definimos o espectro de potência angular, ressaltando a sua importância para testar modelos cosmológicos. Calculamos as anisotropias da distribuição de temperatura da RCF e obtemos as contribuições devido à existência de velocidades peculiares e variações no potencial gravitacional. Em particular, obtemos e discutimos o termo relacionado ao conhecido efeito Sachs-Wolfe.

Com o intuito de facilitar o estudo da polarização da RCF, discutimos detalhadamente os parâmetros de Stokes, desenvolvendo os cálculos e sempre os relacionando com os parâmetros que caracterizam a elipse de polarização. Ainda definimos os graus de polarização de uma onda eletromagnética e discutimos como obter o estado de polarização da radiação a partir dos quatro parâmetros de Stokes. Em seguida estudamos a polarização da RCF e definimos os modos **E** e **B** explicando a sua origem física. Para tal desenvolvimento, discutimos os harmônicos esféricos de spin s após uma revisão da teoria do momento angular, o

que foi feito no apêndice B. Acreditamos que a apresentação feita dos harmônicos esféricos de spin s , assim como dos parâmetros de Stokes, seja uma boa referência para aqueles que pretendem realizar uma primeira leitura dos assuntos, uma vez que procuramos discutir detalhadamente cada tema.

No capítulo 8 calculamos o espectro de potência angular partindo da função de correlação de dois pontos, e detalhamos todos os passos do desenvolvimento. Na literatura sempre encontramos esses cálculos realizados de forma sucinta, em pouco passos, e sendo assim esse capítulo se torna uma boa referência para aqueles que procuram entender os detalhes do tratamento matemático. Entendido o procedimento, é possível adaptar os resultados de acordo com a teoria que queremos analisar.

De maneira geral, esse trabalho procurou explicar os cálculos realizados visando justamente aqueles que apenas iniciam no assunto. Um aluno de iniciação científica ou de mestrado, que futuramente faça uso dessa dissertação, terá um material mais direcionado, discutindo os pontos principais, e sem dúvida economizará tempo no processo de aprendizado do assunto que abordamos. Utilizando conjuntamente as referências bibliográficas que listamos, esse aluno terá condições de evoluir muito mais na pesquisa sobre a RCF, suas anisotropias e polarização, e produzir trabalhos com resultados inéditos em menos tempo.

O estudo mais completo envolvendo a análise dos fótons presentes na RCF deve levar em conta a equação de Boltzmann perturbada, derivada da teoria cinética relativística. Tal estudo não é trivial e esteve fora dos objetivos dessa dissertação, mas deverá ser tratado com todo o rigor que o assunto exige na sequência desse trabalho¹.

Nosso enfoque aqui foi descrever as inhomogeneidades do universo primordial, fontes de anisotropias da RCF, em termos de parâmetros cosmológicos passíveis de serem estudados teoricamente para vários modelos e comparados com as observações disponíveis.

¹Para maiores detalhes sobre esse tratamento levando em conta a equação de Boltzmann perturbada veja [70].

Assim, uma sequência natural para esse trabalho é aplicar a teoria desenvolvida em diferentes modelos cosmológicos, de maneira que possamos confrontá-los com os dados observacionais da RCF. A enorme quantidade de dados obtidos nos últimos vinte anos nos permitem essa análise. Em especial, esperamos relacionar os estudos de polarização da RCF com os estudos sobre ondas gravitacionais realizados pelo nosso grupo de pesquisa. Sendo o sinal das ondas gravitacionais um sinal muito fraco, a detecção do modo **B** de polarização seria uma maneira indireta de analisar o fundo de ondas gravitacionais provenientes da época da inflação [71], podendo dessa maneira restringir com melhor ajuste a faixa de valores dos parâmetros cosmológicos ligados à esse período do universo.

Utilizando algoritmos como o CAMB, ou CMBFAST, ou até mesmo análises de χ^2 , poderemos obter as curvas do espectro de potência angular para cada modelo e observar se ela está dentro das barras de incerteza das medidas. Poderemos testar modelos baseados em outros tipos de gravitação, como por exemplo, a teoria de Brans-Dicke [72] ou então outra teoria escalar-tensorial. Utilizando a RCF, podemos encontrar uma faixa de validade para o parâmetro ω de Brans-Dicke, na qual não tenhamos anisotropias maiores do que o observado.

Apêndice A

Modelo Padrão das Partículas

Elementares

A física das partículas elementares busca compreender os constituintes fundamentais da matéria e suas interações. São chamadas de partículas elementares, aquelas partículas que não podem ser subdivididas, ou seja, não possuem estrutura interna.

É importante destacar que o nosso entendimento do que é uma partícula elementar pode mudar ao longo dos anos, conforme as teorias evoluam e os instrumentos de medida forneçam dados mais precisos. Foi o que ocorreu, por exemplo, com os prótons e nêutrons. Quando foram descobertas, essas partículas eram considerada fundamentais, mas hoje sabemos que são formadas por partículas ainda menores. Os elétrons, por outro lado, são até hoje vistos como constituintes básicos da matéria.

O Modelo Padrão das Partículas Elementares é atualmente o modelo que melhor descreve as nossas observações sobre a matéria e é construído sobre um conjunto de 12 partículas responsáveis por formar a matéria (mais as 12 respectivas antipartículas¹), cha-

¹Em 1927, Dirac encontrou a equação que hoje recebe o seu nome. Utilizando a equação de Dirac para descrever elétrons em movimento relativístico, ele percebeu que a equação admitia soluções com energia negativa, o que corresponderia a um antielétron. De fato, em 1931 foi descoberto o pósitron, uma partícula com a mesma massa do elétron mas carga elétrica oposta. Hoje sabemos que essa é uma característica universal da Teoria Quântica de Campos, e para todas as partículas existe uma antipartícula, com mesma massa, e carga elétrica de igual intensidade mas sinal oposto [73].

madras de férmions, e 4 partículas responsáveis por intermediar as interações, chamadas de bósons.

Os bósons possuem spin inteiro, e os conhecidos até hoje são os fótons, responsáveis pelas interações eletromagnéticas, os glúons, responsáveis pelas interações fortes e os bósons W^+ , W^- e Z^0 , responsáveis pelas interações fracas. O gráviton é uma partícula prevista na teoria, e seria responsável pela interação gravitacional, mas até hoje não foi detectado. Os férmions possuem spin semi-inteiro, e são divididos em dois grupos de partículas: os léptons e os quarks.

Os léptons podem ser eletricamente carregados ou neutros, possuem spin $\frac{1}{2}$, e podem interagir tanto eletricamente quanto fracamente. Existem três pares de léptons bem definidos, formados por elétrons (e), múons (μ), taus (τ) e seus respectivos neutrinos (ν). Esses pares de léptons, na ordem em que os apresentamos, formam três gerações distintas.

LÉPTONS			QUARKS		
Geração	Partícula	Carga Elétrica	Geração	Partícula	Carga Elétrica
Primeira	e	-1	Primeira	u	+2/3
	ν_e	0		d	-1/3
Segunda	μ	-1	Segunda	c	+2/3
	ν_μ	0		s	-1/3
Terceira	τ	-1	Terceira	t	+2/3
	ν_τ	0		b	-1/3

Figura A.1: Partículas elementares que compõem as três gerações de léptons e quarks. As cargas elétricas das partículas são dadas em frações da carga elétrica fundamental.

Por outro lado a associação de quarks é o componente básico do grupo de partículas chamadas de hádrons. Assim como no caso dos léptons, os 6 quarks conhecidos estão

separados aos pares em três gerações. São eles os quarks: up (u) e down (d), strange (s) e charm (c), bottom (b) e top (t).

Em geral, a natureza é formada pelas primeiras gerações de férmions. Para que consigamos observar partículas das segundas e terceiras gerações é necessário fornecer energia às partículas da primeira geração, como ocorre em aceleradores de partículas ou em raios cósmicos [74]. Quando comparamos os elementos de diferentes gerações verificamos que existe semelhança no spin e carga das partículas, havendo mudança apenas na massa, que deve ser maior em gerações mais altas.

Quando os mésons pi (ou píons, π) foram descobertos em 1947, com a contribuição do físico brasileiro César Lattes, imaginava-se que esses também seriam partículas elementares, assim como os prótons que haviam sido detectados décadas antes. Com a construção de grandes acelerados de partículas, e o advento da teoria dos quarks, sabemos hoje que os prótons (assim como os nêutrons) são constituídos de três quarks, e os mésons pi são formados por um quark e um antiquark.

Os hádrons então são divididos em dois grupos: os bárions, formados por três quarks, e os mésons formados por um quark e um antiquark. Devido à sua constituição, o spin dos mésons é sempre inteiro, de maneira que o seu comportamento obedece à estatística dos bósons (mesmo sendo formado por férmions, com spin semi-inteiro).

Uma outra partícula, que não se encaixa em nenhuma dos grupos anteriores, e cuja detecção tem sido o objetivo de grande parte da comunidade científica, é o chamado bóson de Higgs. Essa partícula é necessária no Modelo Padrão da Partículas Elementares, por ser a responsável pelo mecanismo que gera a massa das demais partículas fundamentais [75]. A física atual aguarda dados do Grande Colisor de Hádrons (LHC, do inglês *Large Hadron Collider*), localizado no CERN, com a expectativa de que algum sinal dessa partícula seja encontrado. Além disso, alguns grupos de pesquisa também têm trabalhado atualmente com a possibilidade de uma quarta geração de férmions [76] [77].

BÁRIONS			
Partícula	Composição	Carga Elétrica	Spin
p	uud	+1	1/2
n	udd	0	1/2
Σ^+	uus	+1	1/2
Σ^-	dds	-1	1/2
Δ	uuu, uud, udd, ddd	+2, +1, 0, -1	3/2
Ω^-	sss	-1	3/2

Figura A.2: Exemplos de alguns bárions (incluindo o próton e o nêutron), suas composições, cargas elétricas e de spin. As cargas elétricas das partículas são dadas em frações da carga elétrica fundamental.

MÉSONS			
Partícula	Composição	Carga Elétrica	Spin
π^+	$u\bar{d}$	+1	0
π^-	$d\bar{u}$	-1	0
K^+	$u\bar{s}$	+1	0
K^-	$s\bar{u}$	-1	0
ψ	$c\bar{c}$	0	+1
Υ	$b\bar{b}$	0	+1

Figura A.3: Exemplos de alguns mésons, suas composições, cargas elétricas e de spin. As cargas elétricas das partículas são dadas em frações da carga elétrica fundamental.

Apêndice B

Harmônicos Esféricos de Spin s

Na mecânica quântica, quando queremos escrever os autoestados de energia de um sistema que possua uma simetria esférica, na representação da posição, recorremos aos harmônicos esféricos Y_{lm} para cumprir o nosso objetivo. Situação semelhante ocorre em problemas de contorno da eletrostática ou até mesmo quando queremos descrever a temperatura da RCF como uma função que dependa das coordenadas na esfera celeste. Entretanto, nos casos listados acima o uso dos harmônicos esféricos usuais (chamados de harmônicos esféricos de spin 0) ocorre porque lidamos com séries de funções com peso de spin 0. Quando queremos expandir componentes tensoriais com peso de spin maior que 0, devemos recorrer a harmônicos esféricos de spin maior, que são relacionados aos harmônicos esféricos usuais através de operadores escada.

Os harmônicos esféricos de spin s são ferramentas importantes no estudo da polarização da RCF, e por isso discutiremos suas propriedades básicas nesse apêndice.

B.1 Teoria do Momento Angular e Harmônicos Esféricos de spin 0

O momento angular é uma grandeza física extremamente importante na mecânica clássica, por ser uma constante do movimento em sistemas isolados. É utilizada para estudar

desde o movimento de um pião, até o movimento de planetas. Quando passamos para o domínio da mecânica quântica, a teoria do momento angular encontra aplicações na física atômica, na física molecular, e também na cosmologia, nos estudos sobre polarização da RCF. Faremos uma breve revisão dessa teoria antes de tratar dos harmônicos esféricos de spin s .

Se temos uma operação de rotação R , representada por uma matriz quadrada 3×3 , que atua sobre determinado vetor de estado (ψ) do sistema, podemos associar a essa rotação um operador $\mathcal{D}(R)$ que atua no espaço dos *kets*¹, tal que

$$|\psi\rangle_R = \mathcal{D}(R)|\psi\rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde $|\psi\rangle$ é o *ket* que representa o estado do sistema antes da rotação e $|\psi\rangle_R$ é o *ket* que representa o estado do sistema após a rotação.

Se efetuamos uma rotação infinitesimal $d\phi$ em torno de um eixo \hat{n} , o operador infinitesimal associado a essa rotação pode ser escrito como [78]

$$\mathcal{D}(\hat{n}, d\phi) = \mathbb{I} - i \left(\frac{\mathbf{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} \right) d\phi, \quad (\text{B.2})$$

onde \mathbb{I} é a identidade e \mathbf{J} é o operador momento angular. Para obter agora uma rotação finita, basta que tomemos uma rotação ϕ efetuada após N pequenas rotações (em torno do mesmo eixo), em que N tende ao infinito. Escolhendo, por exemplo, uma rotação em torno do eixo x , temos matematicamente que

$$\mathcal{D}_x(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mathbb{I} - i \frac{J_x \phi}{\hbar N} \right]^N = \exp \left(-\frac{i J_x \phi}{\hbar} \right). \quad (\text{B.3})$$

¹Utilizamos aqui a notação de Dirac, onde um vetor ψ pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{H} é representado pelo *ket* $|\psi\rangle$. O funcional linear f_ψ correspondente, e que pertence ao espaço dual \mathcal{H}^* , é representado pelo *bra* $\langle\psi|$.

O produto interno entre dois vetores ϕ e ψ é representado pelo *braket* $\langle\phi|\psi\rangle$, e os operadores atuam sobre *kets* pela esquerda e sobre *bras* pela direita.

A partir dos operadores de rotação em torno dos eixos x , y e z , obtemos as relações de comutação fundamentais do momento angular

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k, \quad (\text{B.4})$$

em que ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e $i, j, k = x, y$ ou z .

Os autoestados simultâneos de \mathbf{J}^2 e J_z podem ser escritos como $|j, m\rangle$, e as equações de autovalores são

$$\mathbf{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle \quad (\text{B.5})$$

e

$$J_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle, \quad (\text{B.6})$$

onde m pode ter $2j+1$ valores, variando de $-j$ até $+j$.

Podemos definir também operadores criação (J_+) e aniquilação (J_-) como

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y, \quad (\text{B.7})$$

e a atuação desses operadores em um estado de energia com número quântico m levará o sistema a um novo estado com número quântico $m \pm 1$. Por esse motivo, os operadores definidos acima também são chamados de operadores escada. Os elementos das matrizes que representam \mathbf{J}^2 , J_z e J_{\pm} são dados por

$$\langle j', m' | \mathbf{J}^2 | j, m \rangle = j(j+1)\hbar^2 \delta_{j'j} \delta_{m'm}, \quad (\text{B.8})$$

$$\langle j', m' | J_z | j, m \rangle = m\hbar \delta_{j'j} \delta_{m'm} \quad (\text{B.9})$$

e

$$\langle j', m' | J_{\pm} | j, m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \hbar \delta_{j'j} \delta_{m' m \pm 1}, \quad (\text{B.10})$$

respectivamente.

Também podemos representar o operador de rotação por uma matriz. Os seus elementos de matriz serão

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) = \langle j', m' | \exp\left(-\frac{i\mathbf{J} \cdot \hat{n}\phi}{\hbar}\right) | j, m \rangle, \quad (\text{B.11})$$

chamados de funções de Wigner. Já a matriz quadrada $(2j+1) \times (2j+1)$ formada por esses elementos é a representação irredutível de dimensão $(2j+1)$ do operador de rotação. Utilizando a expressão (B.1), onde os *kets* serão os autoestados do momento angular $|j, m\rangle$, e utilizando a relação de completeza

$$\sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m'| = \mathbb{I}, \quad (\text{B.12})$$

teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R)|j, m\rangle &= \mathbb{I} \mathcal{D}(R)|j, m\rangle \\ &= \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m'| \mathcal{D}(R)|j, m\rangle \\ &= \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Com esse resultado, vemos que os coeficientes $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$ dão a amplitude de probabilidade de encontrarmos o sistema no estado $|j, m'\rangle$, após uma rotação do estado inicial $|j, m\rangle$.

Se passarmos a considerar o momento angular orbital, estaremos interessados nas propriedades envolvendo o operador \mathbf{L} . Como a teoria envolvendo o operador \mathbf{J} é geral e válida para qualquer operador momento angular, as componentes L_i obedecerão às mesmas relações de comutação das componentes J_i e podemos construir operadores escada L_+ e L_- da mesma maneira que em (B.7). Na representação da posição, utilizando coordenadas esféricas, obtemos

$$\mathbf{L} = i\hbar \begin{pmatrix} \text{sen}\phi \cot\theta \partial_\phi + \cos\phi \partial_\theta \\ \cos\phi \cot\theta \partial_\phi + \text{sen}\phi \partial_\theta \\ -\partial_\phi \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

de onde resulta também que

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\phi^2 \right]. \quad (\text{B.15})$$

A parte radial da função de onda ψ , dada pelo *ket* $|l, m\rangle$ (o número quântico j foi trocado pelo l uma vez que agora tratamos especificamente do momento angular orbital), quando escrita na representação da posição será dada por

$$\langle \theta, \phi | l, m \rangle = \langle \hat{n} | l, m \rangle = Y_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\hat{n}), \quad (\text{B.16})$$

e a partir das equações de autovalores, com os operadores dados em (B.14) e (B.15), chegamos em

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_{lm}(\cos\theta), \quad (\text{B.17})$$

onde [67]

$$P_{lm}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \quad (\text{B.18})$$

são as funções de Legendre associadas, dadas em função dos polinômios de Legendre $P_l(x)$.

Os termos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos usuais, que são funções na esfera, e também são chamados de harmônicos esféricos de spin 0. Eles nos fornecem a amplitude de probabilidade de encontrar o sistema caracterizado por l e m na direção especificada por θ e ϕ . Eles obedecem às relações de ortonormalidade

$$\int Y_{lm}(\hat{n}) Y_{l'm'}^*(\hat{n}) d\hat{n} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{B.19})$$

e de completeza

$$\sum_{lm} Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{n}') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi'), \quad (\text{B.20})$$

e ao teorema de adição

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\hat{n}') Y_{lm}(\hat{n}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{n}' \cdot \hat{n}). \quad (\text{B.21})$$

Além disso, os harmônicos esféricos de spin 0 podem ser escritos em termos das funções de Wigner, como

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{0m}^{(l)}(\phi, \theta, 0), \quad (\text{B.22})$$

onde $\mathcal{D}_{0m}^{(l)} = \mathcal{D}_{0m}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)$, em que α , β e γ são os ângulos de Euler, com $\alpha = \phi$ e $\beta = \theta$.

B.2 Harmônicos Esféricos de spin s

Quando descrevemos uma grandeza escalar, o seu tratamento sob condições de simetria esférica pode ser feito a partir dos harmônicos esféricos, como visto na seção anterior. Contudo, quando considerarmos campos tensoriais na esfera, será necessário utilizar um outro tipo de função, que é justamente uma generalização dos Y_{lm} .

As componentes dos tensores podem ser escritas em uma base formada por \hat{e}_1 e \hat{e}_2 , unitários e ortogonais, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = \partial_\theta \\ \hat{e}_2 = \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi \end{array} \right. , \quad (\text{B.23})$$

ou então na base de estados de helicidade

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2) \\ \hat{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) \end{array} \right. . \quad (\text{B.24})$$

A transformação da base de helicidade sob uma rotação φ , ocorre de maneira análoga ao que foi visto no capítulo 7 para os estados de polarização ϵ_{xy}^\oplus e ϵ_{xy}^\otimes , obedecendo à regra

$$f^R(\hat{n}) = e^{-is\varphi} f(\hat{n}). \quad (\text{B.25})$$

Se um tensor de ordem k possuir r componentes \hat{e}_+ e $k-s$ componentes \hat{e}_- , ele se transforma por uma fator $e^{i(2k-r)\varphi}$, ou seja, obedecendo à relação (B.25). Quando alguma quantidade se transforma dessa maneira dizemos que ela possui peso de spin s [61]. Para decompor objetos dessa natureza, utilizamos os harmônicos esféricos de spin s definidos por [79]

$$\begin{aligned} {}_s Y_{lm}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{-sm}^{(l)} \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)! (l-m)!}{(l+s)! (l-s)!}} (\sin \theta/2)^{2l} e^{im\phi} \times \\ &\quad \times \sum_r \binom{l-s}{r} \binom{l+s}{r+s-m} (-1)^{l-r-s} (\cot \theta/2)^{2r+s-m}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Podemos observar que na definição dos harmônicos esféricos de spin 0, o termo ligado à matriz do operador de rotação possui um índice igual a zero, que é justamente o índice ligado ao peso de spin. Já na definição anterior dos harmônicos esféricos de spin s , esse índice não é mais nulo. Mesmo com essa definição, levando em consideração o peso de spin, ainda obtemos as relações de ortonormalidade

$$\int {}_s Y_{lm}(\hat{n}) {}_s Y_{l'm'}^*(\hat{n}) d\hat{n} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\text{B.27})$$

e de completeza

$$\sum_{lm} {}_s Y_{lm}(\hat{n}) {}_s Y_{lm}^*(\hat{n}') = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi'), \quad (\text{B.28})$$

para cada spin s fixo.

Os harmônicos esféricos de spin s podem ser obtidos a partir dos harmônicos esféricos usuais com a ajuda dos operadores

$$\mathcal{L}_+^{(s)}(\hat{n}) = -(\sin \theta)^s \left[\partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi \right] \frac{1}{(\sin \theta)^s} \quad (\text{B.29})$$

e

$$\mathcal{L}_-^{(s)}(\hat{n}) = -\frac{1}{(\sin\theta)^s} \left[\partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta} \partial_\phi \right] (\sin\theta)^s. \quad (\text{B.30})$$

Esses operadores atuam aumentando (\mathcal{L}_+) ou diminuindo (\mathcal{L}_-) o peso de spin da função, assim como os operadores escada J_\pm levam o sistema a um novo estado com número quântico m maior ou menor, na teoria do momento angular. Se quisermos, por exemplo, obter um harmônico esférico de spin 1 a partir de uma harmônico esférico de spin 0, devemos utilizar o operador $\mathcal{L}_+^{(0)}$. Se, por outro lado, quisermos obter um harmônico esférico de spin -1 a partir de uma harmônico esférico de spin 2, devemos atuar com os operadores $\mathcal{L}_-^{(2)}$, $\mathcal{L}_-^{(1)}$ e $\mathcal{L}_-^{(0)}$, nessa ordem.

No caso específico da obtenção de ${}_{\pm 2}Y_{lm}$ a partir de Y_{lm} , devemos usar na sequência os operadores $\mathcal{L}_\pm^{(0)}$ e $\mathcal{L}_\pm^{(\pm 1)}$. Com as formas explícitas desses operadores em coordenadas esféricas, dadas em (B.29) e (B.30), temos

$$\mathcal{L}_\pm^{(\pm 1)} \mathcal{L}_\pm^{(0)} = \left[\partial_\theta^2 - \cot\theta \partial_\theta - \frac{\partial_\phi^2}{\sin^2\theta} \pm \frac{2i}{\sin\theta} (\partial_\theta \partial_\phi - \cot\theta \partial_\phi) \right], \quad (\text{B.31})$$

e

$$\mathcal{L}_\pm^{(\pm 1)} \left(\mathcal{L}_\pm^{(0)} Y_{lm} \right) = \frac{1}{N_l} {}_{\pm 2}Y_{lm}, \quad (\text{B.32})$$

com

$$N_l = \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}}. \quad (\text{B.33})$$

Se expandimos uma quantidade \mathcal{F} em uma série de harmônicos esféricos de spin 2, de forma que

$$\mathcal{F}(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{2,lm} {}_2Y_{lm}(\hat{n}), \quad (\text{B.34})$$

os coeficientes da expansão serão dados por

$$a_{2,lm} = \int {}_2Y_{lm}^*(\hat{n}) \mathcal{F}(\hat{n}) d\hat{n}, \quad (\text{B.35})$$

ou então podemos primeiramente aplicar os operadores escada para o peso de spin na própria função expandida, de maneira que ela se transforme em uma função com peso de spin 0, e o coeficiente possa ser dado por

$$a_{2,lm} = N_l \int Y_{lm}^*(\hat{n}) \mathcal{L}_-^{(1)} \left[\mathcal{L}_-^{(2)} \mathcal{F}(\hat{n}) \right] d\hat{n}. \quad (\text{B.36})$$

Procedimento análogo poderia ser feito para quantidades com qualquer peso de spin, bastando somente expandir na série de harmônicos esféricos com spin correspondente, ou então levar a própria função ao peso 0 de spin (com o auxílio dos operadores \mathcal{L}_\pm), expandindo então em harmônicos esféricos ordinários.

Apenas para reforçar o caráter tensorial das quantidades com peso de spin 2, envolvidas nos cálculos de polarização da RCF, se trabalharmos na base de helicidade definida no início da seção e calcularmos os símbolos de Cristhoffel, podemos encontrar a derivada covariante das componentes de um tensor com peso de spin 2, obtendo que

$$\mathcal{L}_+ = -\sqrt{2} \nabla_{\hat{e}_-} \quad (\text{B.37})$$

e

$$\mathcal{L}_- = -\sqrt{2} \nabla_{\hat{e}_+}. \quad (\text{B.38})$$

Com esse resultado, vemos que os harmônicos esféricos de spin 2 são resultados da dupla derivação covariante dos harmônicos esféricos de spin 0, e essa noção pode ser estendida de maneira geral para qualquer peso de spin s .

Referências Bibliográficas

- [1] Instituto de Astrofísica de Canarias - Investigación Astrofísica, *El Experimento Tenerife*, Disponível em: http://www.iac.es/proyecto/cmb/rad/index_esp.php, Acesso em: 09 de março de 2012;
- [2] National Radio Astronomy Observatory , *Welcome to the Very Large Array!*, Disponível em: <http://www.vla.nrao.edu/>, Acesso em: 09 de março de 2012;
- [3] The University of Chicago - Department of Astronomy & Astrophysics, *DASI - Degree Angular Scale Interferometer*, Disponível em: <http://astro.uchicago.edu/dasi/>, Acesso em: 09 de março de 2012;
- [4] The University of Chicago - Department of Astronomy & Astrophysics, *The Sunyaev-Zeldovich Array*, Disponível em: <http://astro.uchicago.edu/sza/index.html>, Acesso em: 09 de março de 2012;
- [5] Princeton University - Department of Physics, *The Far Infra-Red Survey*, Disponível em: <http://cosmology.princeton.edu/cosmology/firs/>, Acesso em: 09 de março de 2012;
- [6] Berkeley Cosmology Group, *Maxima*, Disponível em: <http://cosmology.berkeley.edu/group/cmb/>, Acesso em: 09 de março de 2012;
- [7] Caltech Observational Cosmology Group, *Boomerang*, Disponível em: http://www.astro.caltech.edu/~lgg/boomerang/boomerang_front.htm, Acesso em: 09 de março de 2012;

- [8] National Aeronautics and Space Administration - Goddard Space Flight Center, LAMBDA - Data Products, *Cosmic Background Explorer*, Disponível em: <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>, Acesso em: 10 de dezembro de 2011;
- [9] National Aeronautics and Space Administration - Goddard Space Flight Center, LAMBDA - Data Products, *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*, Disponível em: <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/>, Acesso em: 13 de dezembro de 2011;
- [10] European Space Agency, *Planck*, Disponível em: <http://www.esa.int/SPECIALS/Planck/index.html> Acesso em: 28 de novembro de 2011;
- [11] National Aeronautics and Space Administration - Goddard Space Flight Center, LAMBDA - Links, *CMB Experiments*, Disponível em: http://lambda.gsfc.nasa.gov/links/experimental_sites.cfm, Acesso em: 09 de março de 2012;
- [12] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, (1992);
- [13] M. Roos, *Introduction to Cosmology*, John Wiley & Sons, (2003);
- [14] N. Jarosik *et al*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **192**, 14 (2011);
- [15] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, (2003);
- [16] P. J. E. Peebles e B. Ratra, *Reviews of Modern Physics* **75**, 559-606 (2003), arXiv:astro-ph/0207347v2;
- [17] M. Ahmed, S. Dodelson, P. B. Greene e R. Sorkin, *Physical Review D* **69**, 103523 (2004), arXiv:astro-ph/0209274v1;
- [18] M. Makler, S. Q. de Oliveira e I. Waga, *Physics Letters B* **555**, 1-6 (2003), arXiv:astro-ph/0209486v1;

- [19] J. F. Hawley e K. A. Holcomb, *Foundations of Modern Cosmology*, Oxford University Press, (2005);
- [20] M. Novello e S. E. P. Bergliaffa, *Physics Reports* **463**, 217-123 (2008), arXiv:0802.1634v1 [**astro-ph**];
- [21] A. Peres, *Proceedings of the Second International Conference on Fundamental Interactions*, 221-288, Editora RiMa, (2004);
- [22] É. B. Gliner, *Soviet Physics - JETP* **22**, 378-382 (1966);
- [23] É. B. Gliner, *Physics - Uspekhi* **45**, 213-220 (2002);
- [24] G. Gamow, *Physical Review* **70**, 572-573 (1946);
- [25] R. A. Alpher, H. A. Bethe e G. Gamow, *Physical Review* **73**, 803-804 (1948);
- [26] R. A. Alpher e R. C. Herman, *Physical Review* **74**, 1737-1742 (1948);
- [27] K. Nakamura *et al* (Particle Data Group), *Journal of Physics G* **37**, 075021 (2010) e atualização parcial de 2011 para a edição 2012;
- [28] A. Guth, *Physical Review D* **23**, 347-356 (1981);
- [29] S. W. Hawking e W. Israel, *Three Hundred Years of Gravitation*, Cambridge University Press, (1987);
- [30] A. D. Linde, *Physics Letters B* **108**, 389-393 (1982);
- [31] K. Garrett e G. Duda, *Advances in Astronomy* **2011**, 968283 (2011), arXiv:1006.2483v2 [**hep-ph**];
- [32] A. G. Riess *et al*, *The Astronomical Journal* **116**, 1009-1038 (1998);
- [33] S. Perlmutter *et al*, *The Astrophysical Journal* **517**, 565-586 (1999);
- [34] S. E. P. Bergliaffa, *An Overview of $f(R)$ Theories* (2011), arXiv:1107.5183v2 [**gr-qc**];

- [35] R. H. Brandenberger, *Inflationary Cosmology: Progress and Problems* (1999), arXiv:hep-ph/9910410v1;
- [36] D. H. Weinberg *et al*, *Observational Probes of Cosmic Acceleration* (2012), arXiv:1201.2434v1 [**astro-ph.CO**];
- [37] J. N. P. Borges, *A Cosmologia, e a Radiação Cósmica de Fundo, como Elemento Motivador no Ensino Secundário*, Dissertação (mestrado), Universidade do Porto, (2008);
- [38] A. A. Penzias e R. W. Wilson, *The Astrophysical Journal* **142**, 419-421 (1965);
- [39] V. A. Rubakov e A. D. Vlasov, *What do we learn from the CMB observations?* (2010), arXiv:1008.1704v2 [**astro-ph.CO**];
- [40] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, (2008);
- [41] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll e D. T. Wilkinson, *The Astrophysical Journal* **142**, 414-419 (1965);
- [42] G. F. Smoot *et al*, *The Astrophysical Journal* **360**, 685-695 (1990);
- [43] G. F. Smoot, *The Astrophysical Journal Supplement Series Letters* **396**, L1-L5 (1992);
- [44] National Aeronautics and Space Administration - Goddard Space Flight Center, LAMBDA - Data Products, *DMR Images*, Disponível em: http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr_image.cfm, Acesso em: 13 de dezembro de 2011;
- [45] D. J. Fixsen *et al*, *The Astrophysical Journal* **473**, 576-587 (1996), arXiv:astro-ph/9605054v1;
- [46] R. Leonardi, *Produção de Mapas de Anisotropia da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas Utilizando um Algoritmo Genético*, Dissertação (mestrado), Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, (2002);

- [47] D. Larson *et al*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **192**, 16 (2011);
- [48] E. Komatsu *et al*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **192**, 18 (2011);
- [49] National Aeronautics and Space Administration - Goddard Space Flight Center, LAMBDA - Data Products, *WMAP Data Product Images*, Disponível em: http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/m_images.cfm, Acesso em: 13 de dezembro de 2011;
- [50] C. L. Bennett *et al*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **148**, 1 (2003), arXiv:astro-ph/0302207v3;
- [51] A. D. Dolgov, *Cosmological Magnetic Fields and CMBR Polarization*, (2005) arXiv:astro-ph/0503447v2;
- [52] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press, (1993);
- [53] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, (1972);
- [54] R. K. Sachs e A. M. Wolfe, *The Astrophysical Journal* **147**, 73-90 (1967);
- [55] J. R. Reitz e F. J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison Wesley (1960);
- [56] J. D. Jackson, *Classical Eletrodynamics*, John Wiley & Sons, (1998);
- [57] N. S. de O. Andrade, A. N. de C. S. Rosa e P. C. de C. Faria, *Anais XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto*, 4767-4774 (2007);
- [58] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, (1980);
- [59] Wikipédia, *Polarização*, Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Polarização>, Acesso em: 26 de novembro de 2011;
- [60] W. Hu e M. White, *New Astronomy* **2**, 323-344 (1997), arXiv:astro-ph/9706147v1;

- [61] M. Giovannini, *PMC Physics A* **4**, 1 (2010), arXiv:0901.3026v1 [**astro-ph.CO**];
- [62] L. P. Grishchuk, *Statistics of the Microwave Background Anisotropies Caused by Cosmological Perturbations of Quantum-Mechanical Origin*, (1995), arXiv:gr-qc/9511074v1;
- [63] W. Zhao, D. Baskaran e L. P. Grishchuk, *Physical Review D* **79**, 023002 (2009), arXiv:0810.0756v4 [**astro-ph**];
- [64] L. P. Grishchuk, *Physical Review D* **48**, 5581-5593 (1993);
- [65] L. P. Grishchuk, *Physical Review D* **48**, 3513-3516 (1993);
- [66] R. C. de Freitas, *Perturbações Tensoriais de Origem Quântica na Teoria de Brans-Dicke*, Dissertação (mestrado), Universidade Federal do Espírito Santo, (2010);
- [67] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Elsevier Academic Press, (2007);
- [68] M. R. Spiegel e J. Liu, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, McGraw-Hill, (1999);
- [69] L. P. Grishchuk, *Cosmological Perturbations of Quantum Mechanical Origin and Anisotropy of the Microwave Background Radiation*, (1994), arXiv:gr-qc/9410025v1;
- [70] G. de Barros, *Perturbações das equações de Einstein-Boltzmann com aplicação a flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo*, Dissertação (mestrado), Universidade Federal do Rio de Janeiro, (2006);
- [71] K. M. Smith e M. Zaldarriaga, *Physical Review D* **76**, 043001 (2007), arXiv:astro-ph/0610059v1;
- [72] X. Chen e M. Kamionkowski, *Physical Review D* **60**, 104036 (1999), arXiv:astro-ph/9905368v1;
- [73] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, (2008);

- [74] S. Gasiorowicz e P. Langacker, *Elementary Particles in Physics*, Disponível em: <http://www.physics.upenn.edu/pgl/e27/E27.pdf>, Acesso em: 16 de janeiro de 2012;
- [75] O. M. Boyarkin, *Introduction to Physics of Elementary Particles*, Nova Science Publishers, (2007);
- [76] B. Holdom *et al*, *PMC Physics A* **3**, 4 (2009), arXiv:0904.4698v2 [**hep-ph**];
- [77] M. Hashimoto, *Physical Review D* **81**, 075023 (2010), arXiv:1001.4335v2 [**hep-ph**];
- [78] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley, (1994);
- [79] R. Durrer, *The Cosmic Microwave Background*, Cambridge University Press, (2008).