

# Perturbações Cosmológicas num Universo em Aceleração Transitória

Cristofher Zuñiga Vargas

Orientador: Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl

Disertação de Mestrado em física

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória-ES, 2012

# Perturbações Cosmológicas num Universo em Aceleração Transitória

Cristofher Zuñiga Vargas

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Física.

Aprovada por:

---

Prof. Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl (Orientador)  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Humberto Belich Júnior  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi  
Universidade Federal do Espírito Santo - CEUNES

---

Prof. Dr. Carlos Eduardo Magalhães Batista  
Universidade Estadual de feira de Santana

---

Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima  
Universidade do São Paulo

“Se quer viver uma vida feliz,  
amarre-se a uma meta,  
não às pessoas nem às coisas”.

Albert Einstein.

# Agradecimentos

Ao culminar esta dissertação de mestrado, resta-me registrar os meus sinceros agradecimentos às pessoas que de diferentes maneiras contribuíram para que se tornasse numa realidade.

Ao meu orientador o Professor Doutor Winfried Zimdhal, por toda a dedicação, compreensão e amizade brindada, pelo estímulo e exigência crescente que foi impondo durante estes dois anos do mestrado; obrigado por tudo Winfried.

A minha família, pela cooaprensão e paciência, que a pesar da distância sempre recebi todo o apoio incondicional para continuar com os meus sonhos.

A minha nova família adquirida aqui no Brasil, começando com a Sinara, por todos os bons conselhos e fazer-me sentir como se estiver em casa, ao David meu mas que amigo, meu irmão, por todas as conversas e discussões sobre cosmologia dentro e fora das horas do trabalho, as minhas vizinhas Isabel e Evel, pelos gratos momentos nos almoços do final de semana, a meus grandes amigos Cesar, William, Ivan, Zui, Paulo, Jorge, Anibal, Jhon, Heidy, Gabriela, Anna Paula e Yushiara, pela companhia brindada durante todo este tempo, ao Salva pela amizade e confiança incondicional. A todos vocês muito obrigado.

A meus colegas e amigos na UFES, que pela quantidade de pessoas que gostaria de agradecer, não vou citar nomes já que inevitavelmente cometeria o grande erro de esquecer alguém. Obrigado também pelas sinceras opiniões dos professores William Hipólito, Humberto Belich, Carlos E. Batista e José A. Sales. Agradeço também á agência CAPES pelo financiamento.

Cristofher Zuñiga Vargas  
Vitória, maio de 2012.

# Resumo

Certos dados observacionais parecem indicar que a expansão acelerada do Universo já atingiu um pico e agora está desacelerando novamente. Isto pode implicar, que a expansão acelerada é um fenómeno transitório e que existe uma transição de volta para a expansão desacelerada. Para um fundo homogêneo e isotrópico, existe um modelo que descreve uma transição de expansão desacelerada para acelerada no passado (agora bem estabelecido de acordo com o ponto de vista predominante) e uma transição inversa a partir da expansão acelerada para desacelerada no futuro. A presente tese investiga a dinâmica das perturbações da matéria, tanto no nível newtoniano quanto no relativista, quantificando o potencial relevante das perturbações da componente de energia escura. No fundo, o modelo é testado contra as Supernovas do tipo Ia (SNIa), da amostra de dados do Constitution e sobre o nível perturbativo contra os dados da função de crescimento e os dados do projeto 2dFGRS. Os nossos resultados indicam que uma fase transitória de expansão acelerada não é excluída através das observações atuais.

**Palavras-chave:** cosmologia, expansão, perturbações.

# Abstract

Certain observational dates seem to indicate that the accelerated expansion of the Universe has already peaked and is now slowing down again. This could imply, that the accelerated expansion is a transient phenomenon and that there is a transition back to decelerated expansion. For a homogeneous and isotropic background, there exists a model that describes a transition from decelerated to accelerated expansion in the past (now well established according to the prevailing view) and an inverse transition from accelerated to decelerated expansion in the future. The present thesis also investigates the dynamics of the matter perturbations both on the Newtonian and GR levels and quantifies the potential relevance of perturbations of the dark-energy component. In the background, the model is tested against the Supernova type Ia (SNIa) data of the Constitution set and on the perturbative level against growth rate data and the data of the 2dFGRS project. Our results indicate, that a transient phase of accelerated expansion is not excluded by current observations.

**Keywords:** cosmology, expansion, perturbations.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentos em cosmologia</b>	<b>4</b>
2.1 As ferramentas matemáticas . . . . .	4
2.2 A cinemática do Universo . . . . .	5
2.3 A dinâmica de Friedmann . . . . .	8
2.4 O modelo padrão . . . . .	12
2.4.1 A radiação . . . . .	12
2.4.2 A matéria . . . . .	13
2.4.3 A energia escura . . . . .	14
2.4.4 O modelo $\Lambda$ CDM plano . . . . .	14
2.5 O modelo do Universo em aceleração transitória . . . . .	15
2.6 A análise de Supernovas Ia . . . . .	21
<b>3 O processo da formação de estruturas</b>	<b>24</b>
3.1 As perturbações newtonianas . . . . .	24
3.2 As perturbações relativísticas . . . . .	33
3.3 As perturbações relativísticas no modelo de aceleração transitória . . . . .	44
<b>4 O espectro de potência para o modelo de aceleração transitória</b>	<b>54</b>
4.1 O espectro de potência . . . . .	54
4.2 A análise do espectro de potência e a comparação com os dados observacionais . . . . .	57
<b>5 Conclusões</b>	<b>62</b>
<b>A As equações de campo de Einstein</b>	<b>64</b>

<b>B</b>	<b>As equações hidrodinâmicas</b>	<b>70</b>
<b>C</b>	<b>As perturbações newtonianas no modelo <math>\Lambda</math>CDM</b>	<b>72</b>
<b>D</b>	<b>A equação de Raychaudhuri</b>	<b>74</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>76</b>

# Lista de Figuras

2.1	Contornos de probabilidade bidimensional ( $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ ), baseados sobre os dados do Constitution, para todas as combinações dos parâmetros $h$ , $\bar{K}$ e $\sigma$ . . . . .	22
2.2	O parâmetro de desaceleração $q(z)$ para o modelo de aceleração transitória como função do redshift para os parâmetros de melhor ajuste da tabela 2.1 (linha azul). A linha tracejada (vermelha) mostra a dependência correspondente ao modelo $\Lambda$ CDM. O valor $q = \frac{1}{2}$ corresponde ao universo de Einstein-de Sitter. . . . .	23
3.1	Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria $\delta_m$ como função do fator de escala $a$ para diferentes valores de $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	30
3.2	A razão $G_{eff}/G$ como função do fator de escala para diferentes valores de $\alpha$ e $\beta$ . Na esquerda: evolução no passado. Na direita: evolução futura. Relembrando que o modelo é fraco para $a > \sqrt{2/3}\sigma \approx 6.3$ . Contudo, isso produz o limite assintótico esperado $G_{eff}/G = 1$ . . . . .	31
3.3	A análise estatística para os parâmetros $\alpha$ e $\beta$ , baseadas sobre os dados da função de crescimento em [21]. Na janela esquerda: região de contorno para os valores de melhor ajuste mostrados na Tabela 3.1. Nas janelas do centro e direita: as funções de densidade de probabilidade (PDFs) para $\alpha$ e $\beta$ , respectivamente. . . . .	32
3.4	A dependência da função de crescimento $f(z)$ sobre o redshift $z$ . Os dados foram tomados de [21]. A região sombreada denota uma grande dispersão a $1\sigma$ de nível de confiança. . . . .	33
3.5	A comparação de nosso modelo e o modelo $\Lambda$ CDM usando os parâmetros de melhor ajuste das tabelas 2.1 e 3.1. A linha tracejada mostra o correspondente crescimento para o modelo de Einstein-de Sitter. . . . .	34
3.6	A dependência do fator de não-adiabaticidade $N$ sobre o fator de escala. A não-adiabaticidade é insignificante para $a \ll 1$ e para $a \gg 1$ (não mostrado aqui). Lembre-se que o nosso modelo não é confiável para $a > \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma \approx 6.3$ , exceto para o comportamento assintótico $N = 0$ , para $a \gg 1$ . . . . .	53
4.1	A função de distribuição de probabilidade PDF do parâmetro $\epsilon$ para $c_s^2 = 1$ . . . . .	59

- 4.2 O espectro de potência da matéria para  $c_s^2 = 1$  e diferentes valores do parâmetro  $\epsilon$ . A linha sólida (azul), representa o valor de melhor ajuste global ( $\epsilon = -0.000023$ ). Contudo, sobre largas escalas, a curva com  $\epsilon = 0.001$  mostra um melhor desempenho. Valores maiores do  $\epsilon$  resultam em oscilações (não observadas). . . . . 60
- 4.3 O espectro de potência de matéria para  $c_s^2 = 1$  (janela esquerda) e para  $c_s^2 = 0$  (janela direita). Enquanto o valor de melhor ajuste total para  $c_s^2 = 1$  é  $\epsilon = -0.000023$ , obviamente, sobre largas escalas a linha tracejada com  $\epsilon = 0.001$  dá uma melhor descrição. Isso corresponde à expectativa de que as perturbações na energia escura são mais relevantes sobre largas escalas. Para  $c_s^2 = 0$  as linhas resultantes não dependem do  $\epsilon$ . . . . . 61

# Lista de Tabelas

- 2.1 Valores de melhor ajuste, baseados sobre os dados do Constitution, para os parâmetros  $h$ ,  $\bar{K}$  e  $\sigma$ . . . . . 22
- 3.1 Os valores de melhor ajuste para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , baseados sobre os dados da função de crescimento no [21]. . . . . 32

# Capítulo 1

## Introdução

Na atualidade, há forte evidência direta e indireta que sugerem que o nosso Universo é aproximadamente plano e é dinamicamente dominado por um setor escuro, que é composto por uma componente de energia escura (70%) com uma grande pressão negativa e uma de matéria escura (25%) sem pressão; a quantidade restante (5%) é designado à matéria ordinária. A evidência direta compreende resultados a partir das amostras de dados para supernovas de tipo Ia (SNIa), que indicam que a expansão do Universo está acelerando [1]. A evidência indireta vem dos estudos sobre a estrutura em grande escala [2], a radiação cósmica de fundo [3], o efeito Sachs–Wolfe integrado [4], as oscilações acústicas dos bárions [5] e as lentes gravitacionais [6]. Até agora, existe um modelo padrão, o modelo  $\Lambda$ CDM, o qual, no *grosso modo*, é compatível com os dados observacionais. Notar que, contudo, há um debate em curso a ver, por exemplo, [7], sobre falhas aparentes deste modelo. No entanto, pela causa do problema da constante cosmológica em suas diferentes facetas, incluindo o problema da coincidência cósmica, um número ainda crescente de modelos concorrentes têm sido desenvolvido nos últimos anos, a maioria deles “dinamizando” a constante cosmológica, ou mesmo generalizando a teoria de Einstein. As observações forçam a estes modelos a ter uma dinâmica que é muito semelhante ao do modelo  $\Lambda$ CDM em torno da época presente. Além disso, a evolução passada é limitada pela necessidade de uma época dominada pela matéria para garantir a formação das estruturas cósmicas. A evolução cosmológica futura dentro de modelos alternativos, no entanto, pode ser muito diferente de uma fase de Sitter, que é o destino final de um universo  $\Lambda$ CDM e também de várias outras abordagens como os cenários gás de Chaplygin. A energia escura do tipo Fantasma com um parâmetro de equação de estado constante, por exemplo, vai acabar numa singularidade big-rip após um tempo finito [8, 9]. Mais recentemente, um cenário ainda diferente, chamado “little rip”, foi proposto [10]. Já no início da década passada vários autores discutiram a possibilidade de que a expansão acelerada atualmente observada, pode ser um fenômeno transitório, isto é, que pode ocorrer uma transição de volta para a expansão desacelerada [11, 12, 13]. Algumas observações recentes parecem corroborar esta ideia. A evidência foi encontrada para um abrandamento da

taxa de expansão do universo, o equivalente a um aumento do parâmetro de desaceleração  $q(z)$  para redshifts decrescentes, perto da época atual  $z = 0$  [14, 15, 16]. Isso pode indicar um cenário, segundo o qual a expansão acelerada do Universo é um fenômeno transitório, o que implica uma transição de volta para uma expansão desacelerada, para a evolução futura com  $z \lesssim 0$  ou mesmo em torno da época atual  $z \gtrsim 0$ . Os cenários de aceleração transitória foram previamente discutidos em [17, 18, 19]. O modelo em que o presente trabalho se baseia foi desenvolvido em [20]. Ele descreve a aceleração cosmológica transitória como a consequência de uma interação entre a matéria escura e a energia escura. Semelhante dinâmica não pode ser obtida se a interação representa uma pequena correção do modelo padrão  $\Lambda$ CDM. Para modelos de semelhante tipo, a dinâmica cosmológica depois de um longo tempo, irá ser sempre determinado pelo termo cosmológico, resultando numa expansão acelerada. Para alcançar a expansão acelerada transitória, um duplo papel da interação é necessário. No primeiro, ela tem que cancelar a constante cosmológica “pura” e no segundo tem que gerar, por se mesma, uma fase de expansão acelerada. Como resultado a aceleração tem que ser um fenômeno próprio da interação. Como foi mostrado em [20], esses requisitos podem ser preenchidos por termos da interação, que combinam potenciais e exponenciais do fator de escala cósmico. Mesmo assim que essa escolha específica foi feita por conveniência matemática, esperou-se que as duas características mencionadas sejam cruciais para uma ampla classe de modelos. Embora o estudo em [20] foi restrito ao fundo homogêneo e isotrópico, na presente tese investigamos também a dinâmica das perturbações correspondentes. Em particular, pode-se calcular a função de crescimento das perturbações da matéria e o espectro de potência da matéria. Os resultados são comparados com os dados da função de crescimento coletados em [21] e com os dados do programa 2dFGRS [22]. Também é colocado ênfase sobre a relevância potencial das perturbações da componente da energia escura, que são desprezadas em muitos estudos sobre o comportamento das perturbações da matéria (para exceções ver, por exemplo [23, 24, 25]). Em concordância com investigações paralelas para outros modelos [26], descobriu-se que a contribuição das perturbações na energia escura é de fato pequena em escalas que são relevantes para a formação das estruturas. No entanto, há indicação de que o seu papel está aumentando com o aumento da escala. A dinâmica do fundo é reconsiderada com base nas observações das supernovas do tipo SNIa pela amostra de dados do Constitution [27].

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 revisamos as noções básicas da cosmologia, como são as equações de Friedmann e o modelo padrão  $\Lambda$ CDM. Depois, apresentamos as características básicas da dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico para o modelo de aceleração transitória, fazendo um teste com os dados observacionais das supernovas do tipo SNIa.

No capítulo 3, dedicamos uma abordagem newtoniana da dinâmica das perturbações, fazendo um teste com os dados observacionais da função de crescimento. Também é realizada uma

investigação totalmente relativística, no formalismo das transformações invariantes de gauge.

No capítulo 4, apresentamos o espectro de potência da matéria, e fazemos o análise estatístico respectivo para testar com os dados observacionais do projeto 2dFRGS. Finalmente no capítulo 5, apresentamos as conclusões e comentários finais.

# Capítulo 2

## Fundamentos em cosmologia

### Introdução

Neste capítulo, será apresentada uma pequena introdução sobre a estrutura matemática da cosmologia moderna baseada na teoria da gravidade de Einstein, a Teoria da Relatividade Geral. Depois serão introduzidos os conceitos fundamentais da cosmologia moderna, parâmetros e um pequeno inventário do Universo baseado no modelo padrão  $\Lambda$ CDM. Por último vai ser exposto o modelo de fundo em que se basa essa tese, o modelo de um universo em aceleração transitória e a respectiva análise estatística das supernovas Ia.

### 2.1 As ferramentas matemáticas

A evolução do universo e a estrutura a grande escala são determinadas pelas interações gravitacionais e por tanto são descritas pelas **equações de campo de Einstein** (ver Apêndice A), as quais descrevem a evolução da métrica  $g_{\mu\nu}$  do espaço-tempo, onde os índices gregos vão de 0 até 3<sup>1</sup>.

Estas equações têm a forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia momento, que descreve a distribuição de matéria e  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein, que descreve a geometria do espaço-tempo que ocupa essa distribuição de matéria.

O tensor de Einstein se escreve da seguinte forma

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} , \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Nesta tese vai ser adotada essa notação para os índices gregos ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ).

onde  $R \equiv R^\mu_\mu$  e  $R_{\mu\nu} \equiv R^\kappa_{\mu\kappa\nu}$  são respectivamente o escalar de Ricci e o tensor de Ricci; o tensor de Riemann é definido como segue

$$R^\mu_{\nu\kappa\lambda} \equiv \Gamma^\mu_{\nu\lambda,\kappa} - \Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\kappa}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\nu\kappa} , \quad (2.3)$$

onde os símbolos de Christoffel são definidos como

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\kappa} (g_{\kappa\lambda,\nu} + g_{\kappa\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\kappa}) . \quad (2.4)$$

Agora, substituindo (2.2) em (2.1), temos

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (2.5)$$

Já que o tensor de Einstein contém derivadas segundas das componentes do tensor métrico, as equações de Einstein (2.5) levam a equações diferenciais parciais de segundo ordem para  $g_{\mu\nu}$ .

Como a consequência das identidades contraídas de Bianchi  $(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$ , o tensor de energia-momento satisfaz a lei de conservação que pode ser escrita de forma covariante

$$T^\nu_{\mu;\nu} = 0 . \quad (2.6)$$

Alternativamente, pode-se escrever

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (2.7)$$

onde  $\Lambda$  é chamada a Constante Cosmológica e como  $g^\nu_{\mu;\nu} = 0$ , ainda temos  $T^\nu_{\mu;\nu} = 0$ .

## 2.2 A cinemática do Universo

Uma hipótese fundamental na cosmologia, se refere as simetrias impostas sobre  $g_{\mu\nu}$ . Neste respeito a cosmologia padrão baseia-se no chamado **Princípio Cosmológico**, que diz que sobre escalas suficientemente grandes (além daquelas traçadas pelas estruturas em grande escala da distribuição de galáxias), o Universo é homogêneo e isotrópico. A definição da homogeneidade é que o espaço 3-dimensional tem propriedades geométricas as quais são independentes da localização (simetrias de traslação); enquanto da isotropia é que independentemente da direção na que se observe o Universo, este apresenta as mesmas propriedades físicas (simetrias de rotação). Isto é, não existe um ponto de observação privilegiado no Universo.

Com estas hipóteses, a forma mais geral que pode ter  $g_{\mu\nu}$  é a métrica de **Friedmann-**

**Lemaitre-Robertson-Walker** (FLRW) [28]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) [\gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j] , \quad (2.8)$$

escrevendo em termos das coordenadas comoveis  $x^i$  (os índices latins vão de 1 até 3 que representam as coordenadas espaciais<sup>2</sup>) e onde temos usado unidades nas quais a velocidade da luz  $c = 1$ . A parte espacial da métrica  $\gamma_{ij}$  pode ser expressada em coordenadas esféricas

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (2.9)$$

ou, escrevendo de outra forma para a coordenada radial

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} , \quad (2.10)$$

obtemos a expressão

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + f_K^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] , \quad (2.11)$$

onde

$$f_K(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & , & (K > 0) \\ \chi & , & (K = 0) \\ \sinh \chi & , & (K < 0) \end{cases} ,$$

ou em coordenadas cartesianas

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \left[ 1 + \frac{K}{4} ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) \right] . \quad (2.12)$$

Esta métrica está determinada completamente por duas quantidades, o fator de escala cósmico  $a(t)$ , que determina a cinemática do universo, e o parâmetro de curvatura  $K$ , que descreve a curvatura espacial do universo, relacionado com o escalar de curvatura em três dimensões

$${}^{(3)}R = \frac{6K}{a^2(t)} , \quad (2.13)$$

de acordo ao valor de  $K$  os universos de FLRW se classificam em abertos ( $K < 0$ ), planos ( $K = 0$ ) e fechados ( $K > 0$ ).

---

<sup>2</sup>O índice 0, mencionado anteriormente, corresponde à coordenada temporal.

## O desvio para o vermelho

Uma informação importante sobre o fator de escala  $a(t)$  é obtida através da observação dos deslocamentos nas frequências da luz emitida por objetos muito distantes, por exemplo, um sinal de luz emitido dum fonte na coordenada  $r = r_e$  num tempo  $t = t_e$  que chega a um observador na coordenada  $r = r_o$  num tempo  $t = t_o$ , percorre uma geodésica nula ( $ds^2 = 0$ ), por tanto de (2.9), o sinal de luz na direção radial dá

$$dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \right] = 0, \quad (2.14)$$

que integrada nos limites emitido e observado respetivamente,

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_o} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (2.15)$$

se depois, outro sinal de luz for emitido no tempo  $t_e + \delta t_e$ , chegará ao detetor no tempo  $t_o + \delta t_o$

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.16)$$

por um simples rearranjo dos limites

$$\int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.17)$$

e considerando que  $\delta t$  é suficientemente pequeno, correspondendo aos comprimentos de onda da mesma ordem ( $\lambda = c\delta t \ll ct$ ), então  $a(t)$  pode ser considerado constante sobre a integração temporal, por tanto

$$\frac{c\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{c\delta t_o}{a(t_o)}, \quad (2.18)$$

sendo  $\delta t$  o tempo entre duas crestas sucessivas dos comprimentos de onda e já que  $c\delta t = \lambda$ , então a equação anterior pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)}; \quad (2.19)$$

na astronomia é definido o **desvio para o vermelho (redshift)**  $z$ , em termos da razão do comprimento de onda detectado e o comprimento de onda emitido

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (2.20)$$

Alguns crescimento (decréscimo) no  $a(t)$ , leva a um desvio para o vermelho (o azul) da luz de fontes distantes.

## 2.3 A dinâmica de Friedmann

Ao introduzir a métrica (2.9) nas equações de campo de Einstein (2.7), são obtidas equações para o fator de escala  $a(t)$  e para ter uma solução viável é conveniente introduzir o tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  de um fluido perfeito

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} , \quad (2.21)$$

o qual é compatível com a hipóteses de homogeneidade e isotropia, onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade de energia e a pressão do fluido respectivamente, e  $u^\mu$  é a quadrivelocidade.

Agora, no lado esquerdo da equação (2.7), as componentes  $G_0^i$  se anulam e as componentes  $G_j^i$  são proporcionais à delta de Kronecker  $\delta_j^i$

$$G_0^0 = \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + K) - \Lambda , \quad (2.22)$$

$$G_j^i = \frac{1}{a^2} (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K) \delta_j^i \quad (2.23)$$

e considerando as componentes  $T_0^0$  e  $T_j^i$  de (2.21), as equações de campo (2.7) são reduzidas a dois equações independentes

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.24)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.25)$$

estas equações são conhecidas como as **equações de Friedmann**.

Derivando a equação (2.24) e combinando-a com (2.25), é obtida a equação de balanço da energia

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 ; \quad (2.26)$$

esta equação pode ser interpretada facilmente como a primeira lei da termodinâmica

$$dQ = dU - pdV = d(\rho a^3) - pd(a^3) = 0 , \quad (2.27)$$

onde foi considerado que o Universo tem um volume  $a^3$  com densidade  $\rho$ .

Dada a equação de estado  $p = p(\rho)$ , a equação de balanço da energia (2.26) pode ser integrada para obter  $\rho = \rho(a)$  e substituindo esta relação na (2.24), o fator de escala  $a(t)$  pode ser calculado.

Isto é, para uma equação de estado da forma  $p = \omega\rho$ , onde  $\omega$  é o parâmetro de equação de estado, então a equação (2.26) fornece<sup>3</sup>

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} . \quad (2.28)$$

Agora, considerando que o Universo é composto de  $N$  componentes (matéria ordinária, radiação, matéria escura fria, etc.) com parâmetros de equações de estado diferentes  $w_i$ , este resultado é válido apenas para cada componente por separado enquanto elas não interagem. Se a densidade atual de cada componente é denotada como  $\rho_{i_0}$ , então a densidade total da energia do universo é

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_{i_0} a^{-3(1+\omega_i)} , \quad (2.29)$$

onde foi considerado que  $a_0 = 1$  para o tempo presente<sup>4</sup>. Desta maneira a equação de Friedmann (2.24) pode ser escrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \rho_{i_0} a^{-3(1+\omega_i)} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} . \quad (2.30)$$

O **parâmetro de Hubble** é definido como  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ , para estimar a taxa de expansão do universo. Depois vamos prestar mais atenção a este parâmetro.

## Os parâmetros observacionais

Na cosmologia moderna é necessário definir certos parâmetros, que são de muita importância para a verificação observacional de um modelo cosmológico.

Um parâmetro muito usado na cosmologia moderna é o parâmetro de Hubble, que já foi definido na equação (2.30) e que no tempo presente ( $a = 1$ ) se escreve

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \rho_{i_0} + \frac{\Lambda}{3} - K . \quad (2.31)$$

<sup>3</sup>Esta aproximação somente é válida para um parâmetro  $\omega = cte$ .

<sup>4</sup>No que segue desta tese, vai ser considerado este valor para  $a_0 = 1$ .

É comum expressar o parâmetro de Hubble em unidades de  $100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ , assim

$$H_0^2 \equiv 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} , \quad (2.32)$$

onde  $h$  é um parâmetro adimensional, que foi introduzido para diminuir a faixa de incerteza nas medições.

Por outro lado, a equação (2.31) pode ser reescrita da seguinte forma

$$K = H_0^2 \left( \frac{8\pi G}{3H_0^2} \sum_{i=1}^N \rho_{i_0} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} - 1 \right) ; \quad (2.33)$$

é fácil notar que a curvatura do espaço será dada pelo conteúdo de energia do universo e o valor da constante cosmológica. Na ausência dessa constante o universo ficaria plano ( $K = 0$ ) quando a densidade de energia total  $\sum_{i=1}^N \rho_{i_0}$  fosse igual a uma densidade crítica  $\rho_c$  definida como

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} , \quad (2.34)$$

que substituindo (2.32) e o valor da constante gravitacional de Newton  $G$ , encontramos

$$\rho_c = 1.8791h^2 \times 10^{-29} \text{ g m}^{-3} = 8.0992h^2 \times 10^{-47} \text{ GeV}^4 . \quad (2.35)$$

Agora, pode ser definido o **parâmetro de densidade** em função da densidade crítica (2.34) da seguinte maneira

$$\Omega_{i_0} \equiv \frac{\rho_{i_0}}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{i_0} , \quad (2.36)$$

também podem ser definidos

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (2.37)$$

e

$$\Omega_K = -\frac{K}{H_0^2} . \quad (2.38)$$

Com o uso destes parâmetros cosmológicos a equação (2.33) pode ser reescrita de uma forma mais compacta

$$\sum_{i=1}^N \Omega_{i_0} + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 . \quad (2.39)$$

Assim, a equação para a evolução do índice de expansão pode ser reescrito como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{i=1}^N \Omega_{i_0} a^{-3(1+\omega_i)} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_\Lambda , \quad (2.40)$$

que escrevendo em função do redshift  $z$  será

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{i=1}^N \Omega_{i_0} (1+z)^{3(1+\omega_i)} + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda . \quad (2.41)$$

Na compreensão da dinâmica da expansão do universo, é importante definir o **parâmetro de desaceleração**

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} , \quad (2.42)$$

que nos dá informação sobre a mudança temporal da expansão mesma. Agora, para escrever (2.42) em função do redshift, é preciso fazer

$$\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{d}{dt} (aH) = a \frac{dH}{dt} + H\dot{a} = a \frac{dH}{dz} \frac{dz}{dt} + aH^2 , \quad (2.43)$$

com a ajuda da equação (2.20)

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} = -(1+z)H , \quad (2.44)$$

agora, substituindo (2.44) e (2.43) em (2.42), é encontrado o parâmetro de desaceleração como função do redshift

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH}{dz} , \quad (2.45)$$

que pode servir para qualquer modelo cosmológico proposto.

## 2.4 O modelo padrão

O modelo padrão da cosmologia na atualidade, é o conhecido como o modelo  $\Lambda$ CDM, que é dominado por uma constante cosmológica. Este modelo é construído no cenário da Relatividade Geral, dirigido pelos dados observacionais, os quais mencionaremos mais adiante. Observações diretas e indiretas constataam a existência de matéria bariônica e radiação (ver as seções 2.4.2 e 2.4.1). Por outro lado, tendo em consideração que a análise do espectro de anisotropias do fundo de micro-ondas cósmicas CMB (de suas iniciais em inglês Cosmic Microwave Background), indicam que o universo é espacialmente plano, ou muito aproximadamente plano, ou seja  $\Omega_K \approx 0^5$ . No que segue, fazemos uma pequena descrição das componentes do Universo por separado.

### 2.4.1 A radiação

O espectro da radiação do CMB é a de um corpo negro quase perfeito, com uma temperatura de  $T = 2.725 \pm 0.002 \text{K}$ . Esta medição foi feita com uma extraordinária precisão pelo instrumento FIRAS a bordo do satélite COBE [29]. A densidade de energia associada a esta radiação é  $\rho_r = \pi^2 T^4 / 15$ . Por outro lado, da equação de balanço (2.26) com o fato de que a radiação tem equação de estado  $p_r = \rho_r / 3$ , então a densidade da radiação pode ser escrita como

$$\rho_r = \rho_{r_0} a^{-4} . \quad (2.46)$$

Notar que a temperatura do CMB escala como  $a^{-1}$ .

Então, substituindo (2.46) em (2.36), o parâmetro de densidade da radiação pode ser escrito

$$\Omega_r = \Omega_{r_0} a^{-4} , \quad (2.47)$$

onde  $\Omega_{r_0} = 2.47h^{-2} \times 10^{-5}$  é medida hoje [30]. Assim, embora sua contribuição ao valor da  $\Omega_{\text{total}}$  hoje é desprezível, sua presença é dominante nas etapas primitivas do universo frente à contribuição da matéria que escala como  $a^{-3}$  (ver a seção 2.4.2). Essa etapa é chamada **era dominada pela radiação**. O fator de escala para esta era, pode ser encontrado de (2.30), assumindo  $K = \Lambda = 0$

$$a(t) = [2H_0\Omega_{r_0}t + C_1]^{1/2} , \quad (2.48)$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração.

---

<sup>5</sup>No que segue deste trabalho, adotaremos o resultado dum Universo plano.

### 2.4.2 A matéria

Ao contrário da radiação do CMB, a densidade dos bárions deve ser medida diretamente e não descrita através de uma temperatura. Agora existem formas estabelecidas de medir a densidade dos bárions [31]. Todas estas medições são feitas em diferentes redshifts e sabendo que, a densidade da matéria escala como um fluido poeira com  $\omega_b = 0$ , assim de (2.26) e (2.36), o parâmetro de densidade dos bárions pode ser escrito

$$\Omega_b = \Omega_{b_0} a^{-3}, \quad (2.49)$$

onde  $\Omega_{b_0}$  é definida a ser o parâmetro de densidade dos bárions medido hoje. A quantidade total da matéria bariônica (prótons e núcleos<sup>6</sup>) é estimada a ser somente o 4% do conteúdo total do Universo [32]; a maioria deles estão possivelmente no meio intergaláctico, na forma de um gás ionizado [33]. Contudo, as observações da dinâmica das galáxias e lentes gravitacionais [34] estimam uma densidade bem maior de matéria nestas estruturas do que a densidade bariônica esperada. Como esse grande excedente não interage com os fótons, ele é então denominado **matéria escura fria** CDM (de suas iniciais em inglês Cold Dark Matter). As estimativas da sua densidade levam a um total de matéria agregante em torno de 25% do conteúdo total do universo [32], acredita-se que a matéria escura constitui a maior parte da massa de Halos galácticos e aglomerados de galáxias. A densidade total da matéria não relativista é a soma das densidades da CDM e dos bárions<sup>7</sup>, então

$$\Omega_m = \Omega_{m_0} a^{-3}, \quad (2.50)$$

onde  $\Omega_{m_0} = \Omega_{CDM} + \Omega_{b_0}$ . Em muitas aplicações  $\Omega_m$  é um parâmetro muito importante, por exemplo no processo da formação das estruturas. Em concordância com a equação (2.30), a evolução temporal do fator de escala, num universo plano, sem constante cosmológica e **dominado por matéria**, pode ser escrita

$$a(t) = \left[ \frac{3}{2} H_0 \Omega_{m_0}^{1/2} t + C_2 \right]^{2/3}, \quad (2.51)$$

onde  $C_2$  é uma constante de integração.

---

<sup>6</sup>Existem também os elétrons, mas os núcleos são muito mais massivos que os elétrons que praticamente toda a massa está nos bárions.

<sup>7</sup>Os neutrinos não foram considerados, já que eles são muito pequenos em comparação com a matéria escura fria.

### 2.4.3 A energia escura

Na atualidade, as observações de supernovas distantes [1], do fundo de microondas [32] e da estrutura em grande escala [35] dão evidência suficiente de que o Universo está passando por uma fase de expansão acelerada. Isto requer a presença de uma componente de energia desconhecida no Universo, ainda mais exótica que a matéria escura, chamada **energia escura**, com parâmetro de equação de estado  $\omega_{de} < -1/3$ . Assim, segundo as observações citadas antes; essa energia escura é compreendida a ter ao redor do 70% do conteúdo total do Universo.

Neste sentido, tem reavivado o interesse na constante cosmológica [36], pois para valores de  $\Lambda > 0$ , pode ser reproduzido o estágio de expansão acelerada. No modelo padrão, é costume fazer a relação entre constante cosmológica e a densidade do vácuo. A situação é considerar um parâmetro de equação de estado  $\omega_\Lambda = -1$ , com densidade  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ . Então a equação de estado é

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda , \quad (2.52)$$

onde a pressão negativa seria a responsável da expansão acelerada do Universo [2] e da equação (2.30) para o caso dum **Universo dominado pela constante cosmológica** com  $K = 0$ , encontra-se

$$a(t) = C_3 \exp(H_\Lambda t) , \quad (2.53)$$

onde  $H_\Lambda^2 = \Lambda/3$  e  $C_3$  uma constante de integração. Os Universos dominados apenas pela constante cosmológica, são chamados **universos de de-Sitter**, em [37] pode ser encontrado maior informação sobre isso. Contudo, a constante cosmológica apresenta problemas [38] no regime teórico-observacional que estão fora do estudo desta tese.

### 2.4.4 O modelo $\Lambda$ CDM plano

O modelo  $\Lambda$ CDM, é aquele que considera o Universo contendo a constante cosmológica e a matéria escura, com parâmetros de densidade de energia dados por  $\Omega_\Lambda \approx 0.7$  e  $\Omega_{m_0} \approx 0.3$ .

Agora, a partir de (2.30), o fator de escala num universo dominado pela constante cosmológica e a matéria escura com  $K = 0$ , pode ser obtido da seguinte maneira

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 (\Omega_{m_0} a^{-3} + \Omega_\Lambda) , \quad (2.54)$$

cuja solução é dada por

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left[ \frac{3\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} H_0 t \right] . \quad (2.55)$$

Por outro lado, o índice de expansão em função do redshift, pode ser encontrado usando (2.41) tendo em consideração somente as componentes escuras e  $K = 0$

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m_0} (1+z)^3 + \Omega_\Lambda]^{1/2}, \quad (2.56)$$

lembrando que  $\Omega_{m_0} + \Omega_\Lambda = 1$ .

O parâmetro de desaceleração (2.45) pode ser calculado agora

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{2} \left[ \frac{3\Omega_{m_0}(1+z)^2}{\Omega_{m_0}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{m_0}} \right], \quad (2.57)$$

que para  $z = 0$  medido hoje, o parâmetro de desaceleração se reduz à forma

$$q_0 = \frac{3}{2}\Omega_{m_0} - 1. \quad (2.58)$$

Notar que, considerando a quantidade observada ( $\Omega_{m_0} \approx 0.3$ ), e substituindo em (2.58), dá um valor de  $q_0 \approx -0.550$ , o que significa que o Universo hoje, está acelerando.

Por outro lado, pode ser calculado o redshift para o qual  $q = 0$ , ou seja a transição da fase desacelerada para a fase acelerada, isso pode ser feito, igualando a zero o lado esquerdo da (2.57)

$$z_{\text{trans}} = \left[ \frac{2(1 - \Omega_{m_0})}{\Omega_{m_0}} \right]^{1/3} - 1, \quad (2.59)$$

usando  $\Omega_{m_0} \approx 0.3$ , a transição é dada em  $z_{\text{trans}} \approx 0.67$ .

## 2.5 O modelo do Universo em aceleração transitória

Como foi visto na seção anterior, o Universo hoje é dinamicamente dominado por duas componentes exóticas, a matéria escura e a energia escura, que manifestam observacionalmente apenas através da sua ação gravitacional. Na maioria dos estudos, estes dois são consideradas independentes. Contudo, existe uma linha de pesquisa que explora a consequência duma interação dentro do setor escuro [39, 40]. Um acoplamento entre matéria escura e energia escura pode ser relevante no respeito do problema da coincidência cósmica. Por outro lado, a transição da expansão desacelerada para acelerada pode ser entendido como um fenômeno puro da interação no contexto dos modelos de energia escura holográfica [41, 42].

Recentemente, do estudo das supernovas de tipo SNIa, oscilações acústicas e CMB, com uma parametrização da equação de estado CPL [43, 44], foi sugerido que o pico de aceleração do Universo já passou e que neste momento possivelmente estamos presenciando uma expansão desacelerada [14]. Em semelhante caso, a expansão acelerada deveria ser um fenômeno tran-

sitório, com uma dinâmica do último tempo incompatível com o modelo  $\Lambda$ CDM. Modelos de aceleração transitória já foram estudados na literatura [17, 18, 19].

O modelo do universo em aceleração transitória [20], estuda a possibilidade de descrever uma aceleração transitória como consequência de uma interação entre a matéria escura e a energia escura. Agora, considerando as equações de Friedmann para um Universo espacialmente plano, como segue

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_x + \rho_m) \quad (2.60)$$

e

$$\dot{H} = -4\pi G (\rho_m + \rho_x + p_x) , \quad (2.61)$$

onde as densidades da matéria escura e da energia escura, são respetivamente  $\rho_m$  e  $\rho_x$ . Supondo que a energia escura tem equação de estado  $p_x = \omega\rho_x$ . Admitindo a interação entre a matéria escura e a energia escura, conforme

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q , \quad (2.62)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + \omega)\rho_x = -Q , \quad (2.63)$$

onde  $Q$  representa a interação. A soma de (2.62) e (2.63) dá a equação de conservação da energia total  $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$ , onde a pressão total é a mesma pressão da energia escura  $p = p_x$ .

A densidade de energia do fluido poeira pode, sem perda de generalidade, ser escrita como

$$\rho_m = \tilde{\rho}_{m_0} a^{-3} f(a) , \quad (2.64)$$

onde foi escolhido que  $a_0 = 1$  para o valor presente do fator de escala. A quantidade  $\tilde{\rho}_{m_0}$  é uma constante e  $f(a)$  é uma função arbitraria que depende do tempo. Com  $f(a) = 1 + g(a)$  em (2.64) e (2.62), implica que

$$Q = \rho_m \frac{\dot{f}}{f} = \tilde{\rho}_{m_0} a^{-3} \dot{f} = \tilde{\rho}_{m_0} \frac{dg}{da} \dot{a} a^{-3} \quad (2.65)$$

e

$$\rho_m = \tilde{\rho}_{m_0} (1 + g) a^{-3} . \quad (2.66)$$

Agora, chamando  $\rho_{m_0}$  ao valor presente de  $\rho_m$  em  $a = 1$  na presença da interação, a relação

anterior dá

$$\rho_{m_0} = \tilde{\rho}_{m_0} (1 + g_0) , \quad (2.67)$$

sendo que  $g_0 \equiv g(1)$ . Notar que, se a interação desaparece, o valor da densidade da matéria hoje será  $\tilde{\rho}_{m_0}$ , ou seja a interação re-normaliza o valor da densidade. Conforme (2.65), um valor positivo de  $Q$ , ou seja, uma transferência energética de energia escura para matéria escura exige que  $\frac{dg}{da} > 0$  num Universo em expansão. Para  $\frac{dg}{da} < 0$  a transferência vai na direção oposta, ou seja,  $Q < 0$ .

### Interação gaussiana

No [20] foi mostrado que um cenário de aceleração transitória analiticamente solucionável, pode ser baseado sobre uma interação gaussiana, caracterizada por

$$g(a) = ca^5 \exp(-a^2/\sigma^2) . \quad (2.68)$$

onde  $c$  e  $\sigma$  são constantes.

Agora, substituindo (2.68) em (2.62) dá

$$\rho_m = \tilde{\rho}_{m_0} a^{-3} + c\tilde{\rho}_{m_0} a^{-3} a^5 \exp(-a^2/\sigma^2) , \quad (2.69)$$

e de (2.67), pode ser escrito

$$\tilde{\rho}_{m_0} = \rho_{m_0} - c\tilde{\rho}_{m_0} \exp(-1/\sigma^2) , \quad (2.70)$$

das duas equações anteriores, pode ser obtida a densidade da matéria escura

$$\rho_m = \rho_{m_0} a^{-3} + K a^{-3} [a^5 \exp(-a^2/\sigma^2) - \exp(-1/\sigma^2)] , \quad (2.71)$$

sendo  $K \equiv c\tilde{\rho}_{m_0}$ . A integração<sup>8</sup> de (2.63) com (2.65) e (2.68), segue

$$\rho_x = \rho_{x_0}^{\text{eff}} - K \exp(-a^2/\sigma^2) \left( a^2 - \frac{3}{2}\sigma^2 \right) , \quad (2.72)$$

onde

$$\rho_{x_0}^{\text{eff}} = \rho_{x_0} - \frac{3}{2}K \exp(-1/\sigma^2) \left[ \sigma^2 - \frac{2}{3} \right] . \quad (2.73)$$

Notar que no limite livre de interação,  $K \rightarrow 0$ , pode ser recuperado  $\rho_x \rightarrow \rho_{x_0} = \text{constante}$ ,

---

<sup>8</sup>Por simplicidade de integração, foi tomado em conta o caso especial  $\omega = -1$ .

que é o caso do modelo  $\Lambda$ CDM. Na presença duma interação, a quantidade  $\rho_{x_0}^{\text{eff}}$  pode ser vista como uma constante cosmológica efetiva; a qual é re-normalizada, comparada com o valor da constante cosmológica “pura”  $\rho_{x_0}$ .

Por outro lado, de (2.61) com (2.71) e (2.72), pode ser encontrada a razão

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_{m_0} - \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)}{a^3} - 2\Omega_{x_0}^{\text{eff}} + 3\bar{K} \exp(-a^2/\sigma^2) [a^2 - \sigma^2] \right\} \quad (2.74)$$

com  $\bar{K} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}K$  e  $\Omega_{x_0}^{\text{eff}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{x_0}^{\text{eff}}$ .

Para que o modelo cosmológico seja viável, a equação (2.74) deve admitir uma transição de  $\frac{\ddot{a}}{a} < 0$  para  $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$ , num tempo passado, ou seja em  $a < 1$ . Se, contudo, a expansão acelerada é um fenômeno transitório, deverá existir uma mudança de  $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$  para  $\frac{\ddot{a}}{a} < 0$  num tempo futuro, ou seja em  $a > 1$ . Na expressão (2.74) o termo  $a^{-3}$  no lado direito domina para valores pequenos de  $a$ , logo para que o universo estivesse em expansão desacelerada no passado  $a \ll 1$ , a seguinte condição tem que ser satisfeita

$$\Omega_{m_0} > \bar{K} \exp(-1/\sigma^2) . \quad (2.75)$$

Essa condição coloca um limite sobre a intensidade da interação. No limite livre de interação é confirmada a positividade da densidade da matéria. Considerando agora o caso  $a \gg 1$ . A contribuição do lado direito de (2.74) é atribuída ao termo constante  $-2\Omega_{x_0}^{\text{eff}}$ . Enquanto  $\Omega_{x_0}^{\text{eff}} > 0$  haverá  $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$  para  $a \gg 1$ , logo não existirá uma transição de retorno para expansão desacelerada. Por tanto, uma maneira óbvia para obter a expansão desacelerada no futuro  $a \gg 1$  é colocar a condição  $\Omega_{x_0}^{\text{eff}} = 0$  em (2.74). Isto corresponde a uma constante cosmológica totalmente desprezível. Dito de outra forma, uma parte da interação cancela a constante cosmológica “pura”, descrita pela  $\rho_{x_0}$ . Sob esta condição, a parte restante da interação pode gerar um período de expansão desacelerada. Em semelhante caso pode ser obtido de (2.72) que

$$\Omega_{x_0} = \bar{K} \exp(-1/\sigma^2) \left[ \frac{3}{2}\sigma^2 - 1 \right] . \quad (2.76)$$

Depois, a densidade da energia das componentes escuras são dadas pelas (2.71) e (2.72) com  $\rho_{x_0}^{\text{eff}} = 0$ , ou seja

$$\rho_x = \frac{3}{2}\sigma^2 K \exp(-a^2/\sigma^2) \left[ 1 - \frac{2a^2}{3\sigma^2} \right] . \quad (2.77)$$

Notar que, para  $K > 0$  um valor positivo de  $\rho_x$  requiere  $a < \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma$ . Mas para algum valor  $a > \sigma$  a quantidade inteira (2.77) é suprimida exponencialmente, o valor  $\rho_x$  vai para o zero.

Com  $\rho_m$  de (2.71) e  $\rho_x$  de (2.77), o parâmetro de Hubble para este modelo será

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{1 - \frac{3}{2}\sigma^2 \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)}{a^3} + \frac{3}{2}\sigma^2 \bar{K} \exp(-a^2/\sigma^2) . \quad (2.78)$$

Nos ambos limites, passado  $a \ll 1$  e futuro  $a \gg 1$ , o parâmetro de Hubble pode ser escrito aproximadamente da mesma forma

$$\frac{H^2}{H_0^2} \approx \frac{1 - \frac{3}{2}\sigma^2 \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)}{a^3} . \quad (2.79)$$

A equação da aceleração é dada por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \left\{ \frac{1 - \frac{3}{2}\sigma^2 \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)}{a^3} + 3\bar{K} \exp(-a^2/\sigma^2) [a^2 - \sigma^2] \right\} . \quad (2.80)$$

Para ter expansão desacelerada no futuro  $a \gg 1$ , precisamos

$$\bar{K}\sigma^2 \exp(-1/\sigma^2) < \frac{2}{3} , \quad (2.81)$$

isto é similar à condição (2.75). A igualdade zero de (2.80), determina o valor  $a_{\text{trans}}$  de  $a$  na qual ocorre a transição de expansão desacelerada para acelerada (ou o inverso), levando

$$\frac{3}{2}\sigma^2 \bar{K} \exp(-1/\sigma^2) + 3\bar{K}a_{\text{trans}}^3 \exp(-a_{\text{trans}}^2/\sigma^2) [\sigma^2 - a_{\text{trans}}^2] = 1 . \quad (2.82)$$

A condição para ter expansão acelerada na época presente  $a = 1$  é

$$\frac{\ddot{a}}{aH^2} \Big|_0 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{K} \exp(-1/\sigma^2) \left[ \sigma^2 - \frac{2}{3} \right] > \frac{2}{9} . \quad (2.83)$$

Se a desigualdade (2.83) é mantida, pode ser gerada a aceleração presente sobre a condição  $\rho_{x_0}^{\text{eff}} = 0$ , ou seja, uma constante cosmológica totalmente desprezível. É claro que, a intensidade da interação normalizada  $\bar{K}$  deve ser maior que um valor limite para realizar semelhante configuração. Agora, juntando as condições (2.81) e (2.83) pode ser encontrada a faixa de valores que pode tomar a intensidade da interação, determinada por

$$\frac{2}{9} \frac{e^{1/\sigma^2}}{\sigma^2 - \frac{2}{3}} < \bar{K} < \frac{2e^{1/\sigma^2}}{3\sigma^2} . \quad (2.84)$$

Os parâmetros  $\bar{K}$  e  $\sigma^2$  entram na relação das densidades das energias pelo qual

$$\frac{\rho_{x_0}}{\rho_{m_0}} = \frac{\bar{K} \exp(-1/\sigma^2) \left[ \frac{3}{2}\sigma^2 - 1 \right]}{1 - \bar{K} \exp(-1/\sigma^2) \left[ \frac{3}{2}\sigma^2 - 1 \right]} . \quad (2.85)$$

A relação (2.80) pode ser comparado com a expressão do modelo  $\Lambda$ CDM

$$\frac{\ddot{a}}{a} |_{\Lambda\text{CDM}} = -\frac{1}{2}H_0^2 \left[ \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} - 2\Omega_\Lambda \right]. \quad (2.86)$$

O termo de interação em (2.80) joga o papel de  $\Omega_\Lambda$  em (2.86). Por último, é bem conhecido que o modelo  $\Lambda$ CDM fornece uma descrição muito boa do Universo presente. Isso sugere um valor positivo da interação constante  $\bar{K}$  juntamente com  $\sigma > 1$ , o qual foi confirmado por o análise feito no [20] e posteriormente na seção 2.6.

Agora, de (2.70) e a definição de  $K = c\tilde{\rho}_{m_0}$ , pode ser encontrada a relação

$$\tilde{\rho}_{m_0} = \rho_{m_0} - K \exp(-1/\sigma^2), \quad (2.87)$$

que com a ajuda de (2.36) para a matéria e a definição de  $\bar{K}$ , pode ser encontrado o valor da constante

$$c = \frac{\bar{K}}{\Omega_{m_0} - \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)}. \quad (2.88)$$

A quantidade (2.68), agora pode ser escrita como

$$g(a) = \frac{\bar{K}a^5 \exp(-a^2/\sigma^2)}{\Omega_{m_0} - \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)} = \frac{\bar{K}a^5 \exp(-a^2/\sigma^2)}{1 - \frac{3}{2}\sigma^2 \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)}, \quad (2.89)$$

e de (2.65) pode ser encontrado o termo de interação  $\frac{Q}{\rho_m} = \frac{\dot{g}}{1+g}$ , então

$$\frac{Q}{\rho_m} = \bar{K}H \frac{\left(5 - 2\frac{a^2}{\sigma^2}\right) a^5 \exp(-a^2/\sigma^2)}{\Omega_{m_0} - \bar{K} [\exp(-1/\sigma^2) - a^5 \exp(-a^2/\sigma^2)]} = \frac{g}{1+g} \left(5 - 2\frac{a^2}{\sigma^2}\right) H. \quad (2.90)$$

Valores positivos de  $Q$ , são de preferência segundo bases termodinâmicas [48]. Então uma transferência de energia escura para matéria escura será dada para  $Q > 0$ , ou seja,  $a^2 < \frac{5}{2}\sigma^2$ . Por outro lado, não são admitidos os valores negativos de  $\rho_x$ , a faixa de validade do modelo já tinha sido restrita pela condição  $a^2 < \frac{3}{2}\sigma^2$  (ver (2.72)).

O termo de interação no fundo  $Q$ , pode ser escrito da seguinte forma

$$Q = 3\mu H \rho_x = \mu \Theta \rho_x, \quad (2.91)$$

com

$$\mu(a) = \frac{2}{9} \left( \frac{5 - 2\frac{a^2}{\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{2}{3}} \right). \quad (2.92)$$

A consistência do modelo pode ser verificada do fato que  $\dot{\rho}_x = -Q$  (colocando  $\omega = -1$  na (2.63)) com  $\rho_x$  de (2.77) e  $Q$  de (2.90) com  $\rho_m$  de (2.66) e  $g$  de (2.68). A consistência do modelo vai ser verificada com a análise apresentada na seguinte seção.

## 2.6 A análise de Supernovas Ia

Nesta seção vai ser apresentada brevemente o levantamento de Supernovas para a determinação dos parâmetros livres do modelo no fundo.

Para isso são usados os 397 SNIa dados da amostra Constitution [27]. O observável a ser usado é a distância luminosidade definida como

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.93)$$

sendo  $H(z)$  dado pela equação (2.78). Os dados observacionais são dados em forma do modulo de distância

$$\mu_0 = \log\left(\frac{d_L}{\text{Mpc}}\right) + 25. \quad (2.94)$$

O método para encontrar o melhor ajuste, é feito construindo a função  $\chi^2$  dada por

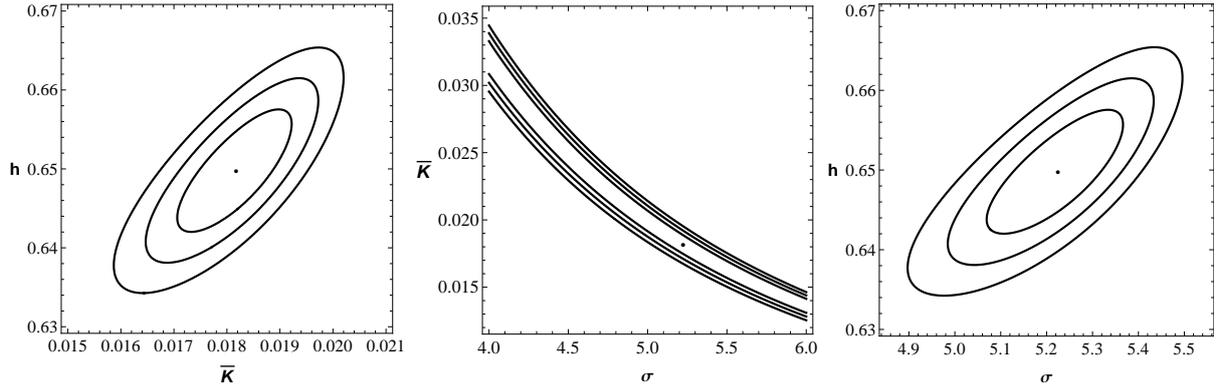
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\mu_i^{obs} - \mu(z_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.95)$$

onde a soma é de todos os  $n$  dados. Para a  $i$ -ésima supernova tem-se o valor observado do modulo de distância ( $\mu_i^{obs}$ ), o valor do modulo de distância predito por o modelo ( $\mu(z_i|\theta)$ ), com  $z_i$  o redshift da  $i$ -ésima supernova e  $\theta$  a quantidade de parâmetros livres (neste caso  $\bar{K}$ ,  $\sigma$  e  $h$ ), a estas medidas estão associados os erros observacionais  $\sigma_i$ . Com isso pode ser definida a função densidade de probabilidade, conhecida como PDF (da suas iniciais em inglês Probability Density Function)

$$P(\theta) = A \exp(-\chi^2(\theta)/2), \quad (2.96)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização. A descrição geral da análise pode ser encontrado em [45].

Neste trabalho foram encontrados os valores de melhor ajuste para os parâmetros livres  $h$ ,  $\bar{K}$  e  $\sigma$ , com os respectivos erros a  $1\sigma$  de confiança e  $\chi^2$ , que são mostrados na tabela 2.1. Esses dados concordam com os encontrados no [20]. Na figura 2.1, são mostradas as respectivas regiões de contorno de probabilidade bidimensional a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$ , para todas as combinações dos parâmetros  $h$ ,  $\bar{K}$  e  $\sigma$ .



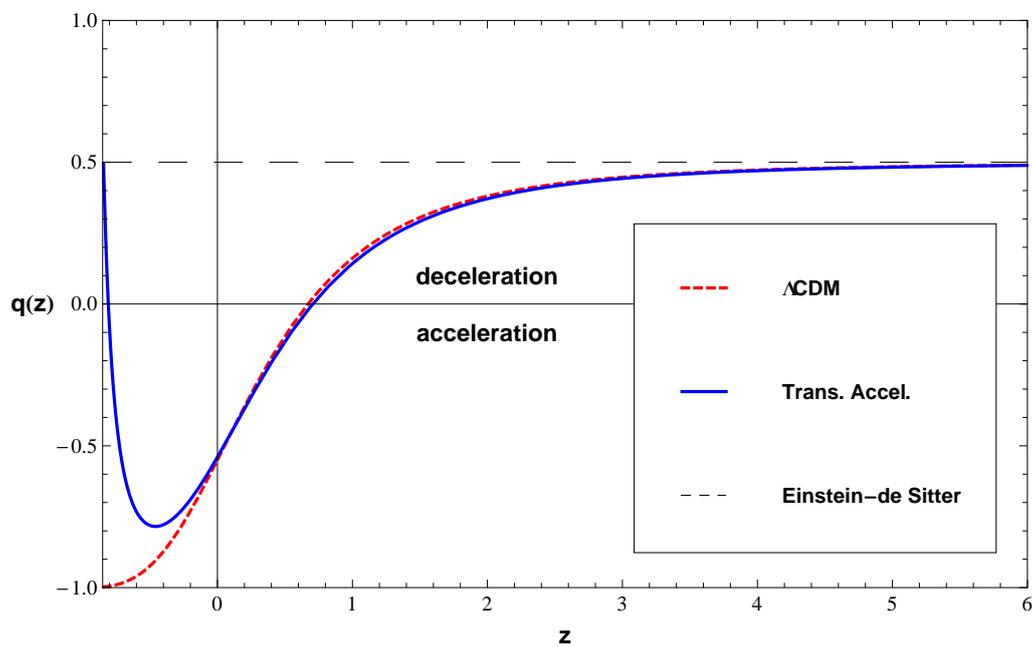
**Figura 2.1:** Contornos de probabilidade bidimensional ( $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$ ), baseados sobre os dados do Constitution, para todas as combinações dos parâmetros  $h$ ,  $\bar{K}$  e  $\sigma$ .

$\chi_{\min}^2$	$\sigma$	$\bar{K}$	$h$
465.5	$5.23^{+0.05}_{-0.05}$	$0.018^{+0.0004}_{-0.0004}$	$0.65^{+0.003}_{-0.003}$

**Tabela 2.1:** Valores de melhor ajuste, baseados sobre os dados do Constitution, para os parâmetros  $h$ ,  $\bar{K}$  e  $\sigma$ .

Por outro lado, o parâmetro de desaceleração deste modelo pode ser encontrado facilmente substituindo (2.78) em (2.45) e o comportamento deste parâmetro com os melhores valores de ajuste é mostrado na figura 2.2, onde pode ser apreciada a transição de expansão desacelerada para acelerada no passado ( $z_{trans} \approx 0.67$  como já foi calculado no caso do modelo  $\Lambda$ CDM); na época presente ( $z = 0$ ), o universo se encontra em expansão acelerada como no modelo  $\Lambda$ CDM, mas no modelo de aceleração transitória,  $q(z)$  ira passar um mínimo no futuro e entrará numa fase de expansão desacelerada como pode ser apreciado na figura 2.2. No limite muito no futuro  $a \gg 1$  (não mostrado na figura 2.2), o parâmetro de desaceleração é  $q(z) = \frac{1}{2}$ .

Para os valores de melhor ajuste apresentados na tabela 2.1, as desigualdades (2.84) são satisfeitas e para a razão (2.85) obtemos  $\frac{\rho_{x0}}{\rho_{m0}} = 2.275^{+0.355}_{-0.285}$ . A faixa em (2.84) é dado por  $0.0086 < \bar{K} < 0.0253$ . O valor numérico para o lado esquerdo da condição (2.81) dá  $0.475 < \frac{2}{3}$  e para o lado direito da equação (2.83) encontramos  $0.463 > \frac{2}{9}$ , concluindo que os valores de melhor ajuste satisfazem as condições impostas no modelo.



**Figura 2.2:** O parâmetro de desaceleração  $q(z)$  para o modelo de aceleração transitória como função do redshift para os parâmetros de melhor ajuste da tabela 2.1 (linha azul). A linha tracejada (vermelha) mostra a dependência correspondente ao modelo  $\Lambda$ CDM. O valor  $q = \frac{1}{2}$  corresponde ao universo de Einstein-de Sitter.

# Capítulo 3

## O processo da formação de estruturas

### Introdução

Das medições do CMB pode ser inferido que o universo foi muito homogêneo e isotrópico na época da recombinação. Na atualidade, contudo, as estruturas observadas no universo (galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias) são o resultado da instabilidade gravitacional. Esta instabilidade amplifica as perturbações originalmente muito pequenas até o regime não linear. Neste capítulo, apresentaremos as abordagens newtoniana e relativística da teoria das perturbações cosmológicas.

### 3.1 As perturbações newtonianas

A matéria sobre grandes escalas pode ser descrita por uma aproximação dum fluido perfeito. Isso quer dizer que em algum momento do tempo esta pode ser completamente caracterizada pela distribuição da densidade de energia total  $\rho(x^i, t)$ , o potencial gravitacional  $\phi(x^i, t)$  e o vetor de campo velocidade (não relativista)  $v^j(x^i, t)$ . Essas quantidades satisfazem as equações hidrodinâmicas newtonianas que são a equação de balanço de energia da matéria, a equação de Euler da matéria (ou equação de conservação de momento não relativista) e a equação de Poisson do campo gravitacional (ver apêndice B)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + (\rho_m v^i)_{,i} = Q, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v^j \nabla_j) v_i + \phi_{,i} = 0, \quad (3.2)$$

$$\Delta \phi = 4\pi G(\rho_m + \rho_x), \quad (3.3)$$

respetivamente, onde  $\Delta$  é o Laplaciano e foi considerado um fluido não relativista sem pressão. Notar que essas equações são não lineares e geralmente não são tão simples de resolver, o termo de interação  $Q$  introduzido na equação de balanço não afeta a equação de Euler, pois vai ser suposto que as partículas produzidas devido ao seu decaimento possuem a mesma velocidade do fluido, caso contrario um termo adicional deve ser incluído. Além disso, são desconsiderados os efeitos dissipativos devido à viscosidade ou condutividade térmica do fluido. O caso mais geral vai ser considerado na seção 3.3, onde vai ser considerado um acoplamento via intercambio de momento.

Agora, para estudar o comportamento das pequenas perturbações ao redor dum fundo homogêneo e isotrópico, é apropriado linearizar as perturbações em escalas muito menores que o raio de Hubble. Considerando que uma pequena inomogeneidade em  $\rho_m$ ,  $\rho_x$ ,  $v^i$  e  $\phi$

$$\rho_m = \bar{\rho}_m + \hat{\rho}_m , \quad (3.4)$$

$$\rho_x = \bar{\rho}_x + \hat{\rho}_x , \quad (3.5)$$

$$v^i = \bar{v}^i + \hat{v}^i , \quad (3.6)$$

$$\phi = \bar{\phi} + \hat{\phi} , \quad (3.7)$$

$$Q = \bar{Q} + \hat{Q} , \quad (3.8)$$

pode crescer devido à instabilidade gravitacional, onde as quantidades com barras são consideradas as quantidades no fundo e com chapéu as pequenas perturbações em primeira ordem.

Com  $x^i = x_0^i a(t)$ , encontramos para a velocidade no fundo (ordem zero)

$$\bar{v}^i = x^i \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \bar{v}_{,i}^i = 3 \frac{\dot{a}}{a} . \quad (3.9)$$

A equação de balanço de matéria (3.1) em ordem zero, ou seja no fundo, toma a forma

$$\dot{\bar{\rho}}_m + 3 \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho}_m = \bar{Q} . \quad (3.10)$$

E considerando perturbações em primeira ordem, temos

$$\frac{\partial \hat{\rho}_m}{\partial t} + \hat{\rho}_{m,i} \bar{v}^i + \hat{\rho}_m \bar{v}_{,i}^i + \bar{\rho}_m \hat{v}_{,i}^i = \hat{Q} , \quad (3.11)$$

com  $\dot{\hat{\rho}}_m \equiv \frac{\partial \hat{\rho}_m}{\partial t} + \bar{v}^i \hat{\rho}_{m,i}$  e (3.9), obtemos a equação de balanço da matéria perturbada em primeira ordem

$$\dot{\hat{\rho}}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\hat{\rho}_m + \bar{\rho}_m \hat{v}_{,i}^i = \hat{Q}. \quad (3.12)$$

Para descrever o crescimento das perturbações é conveniente introduzir a grandeza chamada o contraste de densidade, definido como

$$\delta_m = \frac{\hat{\rho}_m}{\bar{\rho}_m} = \frac{\rho_m - \bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_m}, \quad (3.13)$$

o qual caracteriza a variação relativa da densidade da matéria em torno de um dado ponto, no qual localizamos a origem de nosso sistema de coordenadas. Derivando (3.13) com respeito ao tempo, obtemos

$$\dot{\delta}_m = \frac{\dot{\hat{\rho}}_m}{\bar{\rho}_m} - \delta_m \frac{\dot{\bar{\rho}}_m}{\bar{\rho}_m}, \quad (3.14)$$

e substituindo na equação (3.12), resulta

$$\dot{\delta}_m + \hat{v}_{,i}^i = \frac{1}{\bar{\rho}_m} \left( \hat{Q} - \bar{Q} \delta_m \right). \quad (3.15)$$

O lado direito dessa equação descreve a influência da interação sobre a dinâmica perturbativa. No limite livre de interação isto vai ser reduzido ao zero. Devido a que o modelo newtoniano não especifica o  $\hat{Q}$ , podemos escrever por simplicidade  $\hat{Q} = \beta \bar{Q} \delta_m$  onde  $\beta$  é uma constante. O limite  $\beta = 0$  corresponde, somente a uma interação no fundo. Para  $\beta = 1$  a interação não afeta a dinâmica perturbativa. Agora, a equação (3.15), pode ser escrita como

$$\dot{\delta}_m + \hat{v}_{,i}^i = - (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} \delta_m. \quad (3.16)$$

Por outro lado, perturbando a equação de Euler não relativista (3.2), em primeira ordem

$$\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial t} + (\hat{v}^j \nabla_j) \bar{v}_i + (\bar{v}^j \nabla_j) \hat{v}_i = -\hat{\phi}_{,i}, \quad (3.17)$$

com  $\hat{v}_i \equiv \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial t} + (\bar{v}^j \nabla_j) \hat{v}_i$ , encontramos

$$\hat{v}_i = -\frac{\dot{a}}{a} \hat{v}_i - \hat{\phi}_{,i}. \quad (3.18)$$

Introduzindo coordenadas comoveis  $x^i = aq^i$  e derivando (3.18) com respeito a  $q^i$

$$\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial q^i} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial q^i} - \frac{1}{a} \Delta_q \hat{\phi}, \quad (3.19)$$

onde  $\Delta_q$  é o Laplaciano com respeito à coordenada comóvel.

O resultado (3.16), pode ser escrito em coordenadas comoveis  $q^i$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial q^i} = -\dot{\delta}_m - (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} \delta_m, \quad (3.20)$$

derivando depois com respeito ao tempo

$$-\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial q^i} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\hat{v}}_i}{\partial q^i} = -\ddot{\delta}_m - (1 - \beta) \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} \right)' \delta_m - (1 - \beta) \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} \right) \dot{\delta}_m, \quad (3.21)$$

substituindo (3.19) e (3.20) nessa equação, obtemos

$$\ddot{\delta}_m + \left( 2H + (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} \right) \dot{\delta}_m + (1 - \beta) \left[ 2H \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} + \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} \right)' \right] \delta_m - \frac{1}{a^2} \Delta_q \hat{\phi} = 0. \quad (3.22)$$

A equação (3.22) mostra a influência da interação sobre a dinâmica perturbativa. Os coeficientes de ambos  $\delta$  e  $\dot{\delta}$  dependem do parâmetro de interação  $Q$  explicitamente. Para o caso em que  $\beta = 1$ , onde a interação não afeta a dinâmica perturbativa, o índice do Hubble  $H$  é determinado essencialmente pela interação de acordo à equação (2.78).

A equação de Poisson perturbada em primeira ordem, é escrita como

$$\frac{1}{a^2} \Delta_q \hat{\phi} = 4\pi G (\hat{\rho}_m + \hat{\rho}_x) = 4\pi G (\bar{\rho}_m \delta_m + \bar{\rho}_x \delta_x), \quad (3.23)$$

onde  $\delta_x \equiv \frac{\hat{\rho}_x}{\bar{\rho}_x}$ . Em muitos estudos sobre o crescimento das perturbações da matéria, as perturbações da energia escura são desprezadas. Isso corresponde fazer  $\delta_x = 0$  em (3.23). Contudo, isto seria justificado estritamente só com uma constante cosmológica. Nos modelos dinâmicos de energia escura,  $\delta_x$  é diferente de zero e as perturbações de matéria são acoplados às perturbações da energia escura. Desprezar essa influência poderia resultar num entendimento errado dos dados observacionais [24].

Por outro lado, para modelos específicos, o acoplamento pode ser mostrado desprezível sobre pequenas escalas [26]. A fim de obter uma equação de segunda ordem em torno do  $\delta_x$ , assumiremos uma simples relação de proporcionalidade  $\delta_x = \alpha \delta_m$  entre  $\delta_x$  e  $\delta_m$ , onde  $\alpha$  é uma constante (cf. [46]). O limite  $\alpha = 0$  corresponde às flutuações da energia escura desprezíveis. Para qualquer  $\alpha$  de ordem um, as perturbações da energia escura são relevantes no processo de

formação de estruturas. Sobre essa condição temos

$$\frac{1}{a^2} \Delta_q \hat{\phi} = 4\pi G (\bar{\rho}_m + \alpha \bar{\rho}_x) \delta_m = \frac{3}{2} H^2 \left[ (1 - \alpha) \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}} + \alpha \right] \delta_m \quad (3.24)$$

para o último termo da equação (3.22). O termo que multiplica  $\delta_m$  em (3.22), pode ser encontrado com a ajuda da equação (2.90)

$$\left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} \right)' + 2H \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m} = H \left[ \frac{1}{2} + A + B - 4 \frac{\frac{a^2}{\sigma^2}}{5 - 2 \frac{a^2}{\sigma^2}} \right] \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_m}, \quad (3.25)$$

onde

$$A(a) \equiv \frac{3}{2a} + \frac{\dot{H}}{aH^2} = \frac{9}{4} \sigma^2 \bar{K} \exp(-a^2/\sigma^2) \left( 1 - \frac{2a^2}{3\sigma^2} \right) \frac{H_0^2}{H^2}, \quad (3.26)$$

com

$$\frac{H_0^2}{H^2} = \frac{a^3}{1 - \frac{3}{2} \sigma^2 \bar{K} [\exp(-1/\sigma^2) - a^3 \exp(-a^2/\sigma^2)]} \quad (3.27)$$

e

$$B(a) \equiv \frac{5 - 2 \frac{a^2}{\sigma^2}}{1 + g}. \quad (3.28)$$

Com a ajuda destas relações e observações, a equação básica das perturbações (3.22) é escrita como

$$\ddot{\delta}_m + [2 + (1 - \beta)gB] H \dot{\delta}_m - 4\pi G_{eff} \bar{\rho}_m \delta_m = 0, \quad (3.29)$$

com uma constante gravitacional efetiva

$$G_{eff} \equiv G \left\{ 1 + \alpha \frac{1 - \bar{\Omega}_m}{\bar{\Omega}_m} - \frac{2}{3\bar{\Omega}_m} (1 - \beta) \frac{g}{1 + g} \left[ \left( 5 - 2 \frac{a^2}{\sigma^2} \right) \left( \frac{1}{2} + A + B \right) - 4 \frac{a^2}{\sigma^2} \right] \right\}. \quad (3.30)$$

Notar, que a interação também entra explicitamente no fator de “atrito” em adição a sua influência sobre o índice de Hubble. Este termo adicional no fator que multiplica  $\dot{\delta}_m$  na (3.29) desaparece só apenas para  $\beta = 1$ .

Fazendo um câmbio para  $a$  como variável independente,

$$\dot{\delta}_m = \delta'_m a H, \quad \ddot{\delta}_m = a^2 H^2 \left[ \delta''_m + \frac{1}{a} \delta'_m + \frac{H'}{H} \delta'_m \right], \quad (3.31)$$

onde  $\delta'_m \equiv \frac{d\delta_m}{da}$ , obtemos a equação final

$$\delta''_m + U(a)\delta'_m + V(a)\delta_m = 0, \quad (3.32)$$

com

$$U(a) = \frac{1}{a} \left[ \frac{3}{2} + A(a) + (1 - \beta)g(a)B(a) \right], \quad A(a) = \frac{3}{2a} + \frac{H'}{H} \quad (3.33)$$

e

$$V(a) = -\frac{3}{2a^2} \bar{\Omega}_m \frac{G_{eff}}{G} \quad (3.34)$$

onde

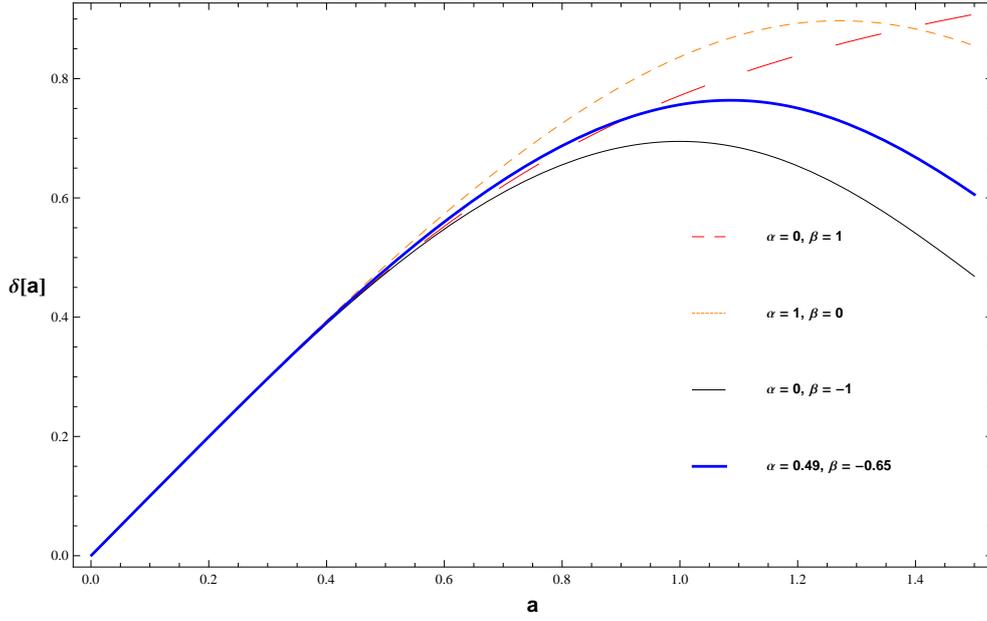
$$\bar{\Omega}_m = \{ \bar{\Omega}_{m0} + \bar{K} [a^5 \exp(-a^2/\sigma^2) - \exp(-1/\sigma^2)] \} \frac{1}{a^3} \frac{H_0^2}{H^2}. \quad (3.35)$$

Com  $\bar{\Omega}_{m0} = 1 - \bar{K} \exp(-1/\sigma^2) (\frac{3}{2}\sigma^2 - 1)$  pode ser verificado que  $\bar{\Omega}_m \approx 1$  para redshifts grandes  $a \ll 1$  e para valores muito no futuro  $a \gg 1$ .

A equação (3.32) é a equação central para as perturbações Newtonianas. Para o limite livre de interação e no caso de só uma componente, ou seja  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_m$ , a equação (3.32) pode ser escrita como

$$\delta''_m + \frac{3}{2a}\delta'_m - \frac{3}{2a^2}\delta_m = 0, \quad (3.36)$$

que corresponde ao universo de Einstein-de Sitter. Contudo, a equação (3.36) é também o limite para os casos em que  $a \ll 1$  e  $a \gg 1$ , já que nesses limites o termo de interação é desprezível. Em geral, a influencia da interação na dinâmica perturbativa é feita mediante o termo  $\bar{K}$  nos coeficientes  $U(a)$  e  $V(a)$  em (3.32), a qual também inclui as modificações do índice de Hubble devido à interação no fundo. Na figura 3.1 pode ser apreciado o comportamento das perturbações para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , notar que no início o comportamento do  $\delta_m$  é muito parecido e tem um pico máximo ao redor do presente  $a = 1$ .



**Figura 3.1:** Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria  $\delta_m$  como função do fator de escala  $a$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

## A função de crescimento

Diferentes índices de crescimento para as perturbações da matéria foram mostrados na literatura, primeiramente para discriminar entre teorias da relatividade geral e teorias alternativas da gravidade [21, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59]. Contudo, também o impacto das interações sobre o crescimento das perturbações foram investigados [26, 46, 60]. Para isso é conveniente introduzir a função de crescimento, definida como

$$f := \frac{d \ln \delta_m}{d \ln a}, \quad (3.37)$$

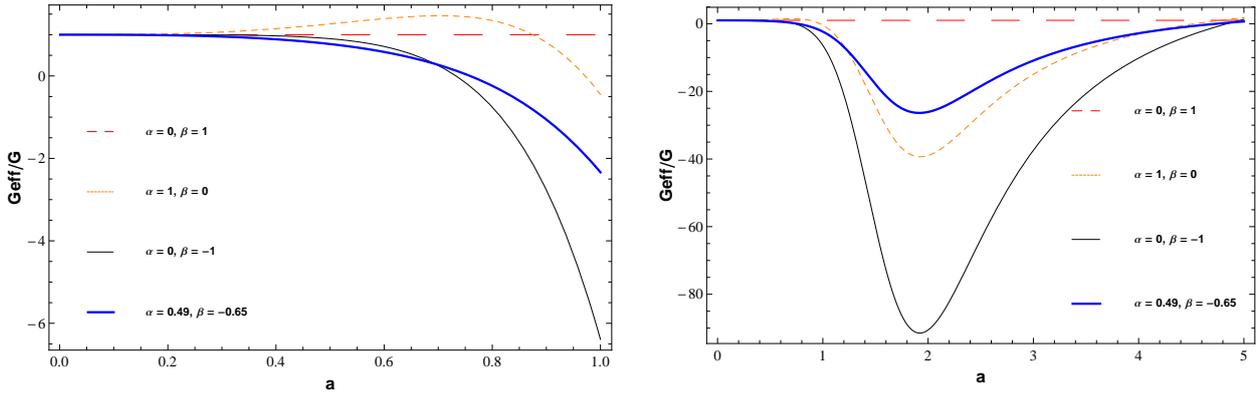
em termos desta função de crescimento, a equação básica (3.32) pode ser escrita como

$$\frac{df}{d \ln a} + f^2 + [aU(a) - 1]f + a^2 V(a) = 0. \quad (3.38)$$

A última equação também pode ser escrita usando (3.30) como

$$\frac{df}{d \ln a} + f^2 + [aU(a) - 1]f = \frac{3}{2} \frac{G_{eff}}{G} \Omega_m. \quad (3.39)$$

Em geral, a constante gravitacional efetiva  $G_{eff}$  difere de  $G$  devido ao termo de interação. O primeiro termo de correção (o parâmetro  $\alpha$ ) descreve o acoplamento direto às flutuações de energia escura, o segundo termo de correção (o parâmetro  $\beta$ ) informa as modificações devido a quantidade de interação perturbada  $\hat{Q}$ . Para  $\beta = 1$ , o segundo termo desaparece: uma interação



**Figura 3.2:** A razão  $G_{eff}/G$  como função do fator de escala para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Na esquerda: evolução no passado. Na direita: evolução futura. Relembrando que o modelo é fraco para  $a > \sqrt{2/3}\sigma \approx 6.3$ . Contudo, isso produz o limite assintótico esperado  $G_{eff}/G = 1$ .

na qual opera somente no fundo, não modifica a “constante” gravitacional efetiva. Nesse caso existe uma influência da interação sobre  $f$  a través da quantidade  $A(a)$  no coeficiente  $U(a)$  (olhar as equações (3.33) e (3.26)). A “constante” gravitacional efetiva  $G_{eff}$  aproxima a  $G$  na fase inicial dominada por matéria  $a \ll 1$  e também em  $a \gg 1$  onde novamente domina a matéria. A figura 3.2 mostra o comportamento da razão  $G_{eff}/G$  como função do fator de escala para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , pode ser apreciado o limite assintótico  $G_{eff}/G = 1$  no passado e no futuro.

No que segue, vamos apresentar a análise da estatística bayesiana, para confrontar com os dados observacionais da função de crescimento  $f$  resumidos em [21] e com o modelo  $\Lambda$ CDM. Para isso vamos a escrever a função  $\chi^2$  como segue

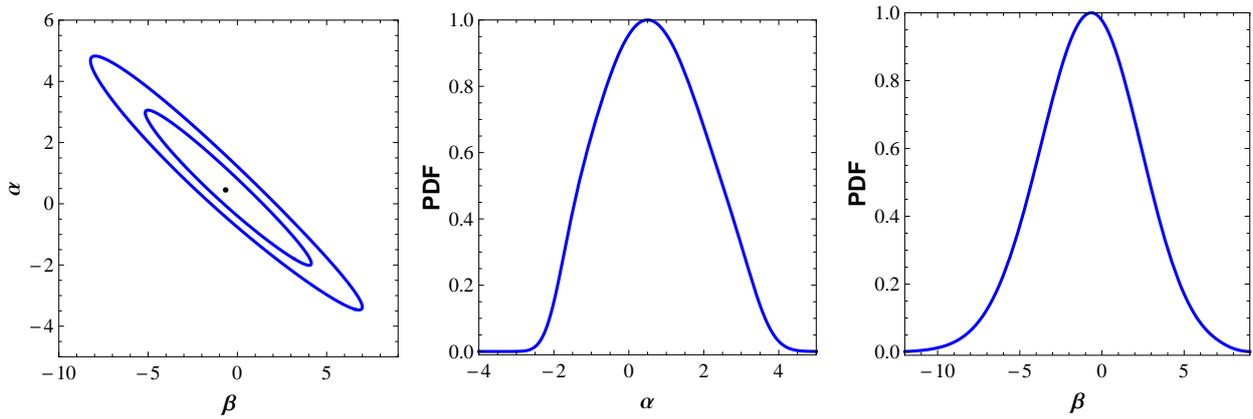
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[f_i^{obs} - f(z_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.40)$$

onde a soma é de todos os  $n$  dados,  $f_i^{obs}$  e  $f(z_i|\theta)$  são a função de crescimento observada e teórica do  $i$ -ésimo dado com  $\theta$  a quantidade de parâmetros livres (nesse caso  $\alpha$  e  $\beta$ ) e  $\sigma$  o respectivo erro de medição. A função de probabilidade PDF pode ser encontrado usando a equação (2.96).

Usando todos os critérios da análise bayesiana [45] encontramos os valores do melhor ajuste para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  com o respectivo  $\chi^2$  mostrados na tabela 3.1. A figura 3.3 mostra a região de contorno para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  (onde os parâmetros  $\sigma$ ,  $\bar{K}$  e  $h$  foram fixados aos valores da tabela 2.1<sup>1</sup>) na esquerda, no centro e na direita são mostrados os respectivos PDFs normalizados à unidade. Na figura 3.4 a função de crescimento é restringida aos dados observacionais resumidos no [21] e com o modelo  $\Lambda$ CDM. A região sombreada mostra um grande dispersão hoje ( $z = 0$ ) em  $1\sigma$  do nível de confiança.

Agora pode ser encontrado o comportamento do crescimento das perturbações da matéria

<sup>1</sup>Esto foi feito por falta de potência computacional.

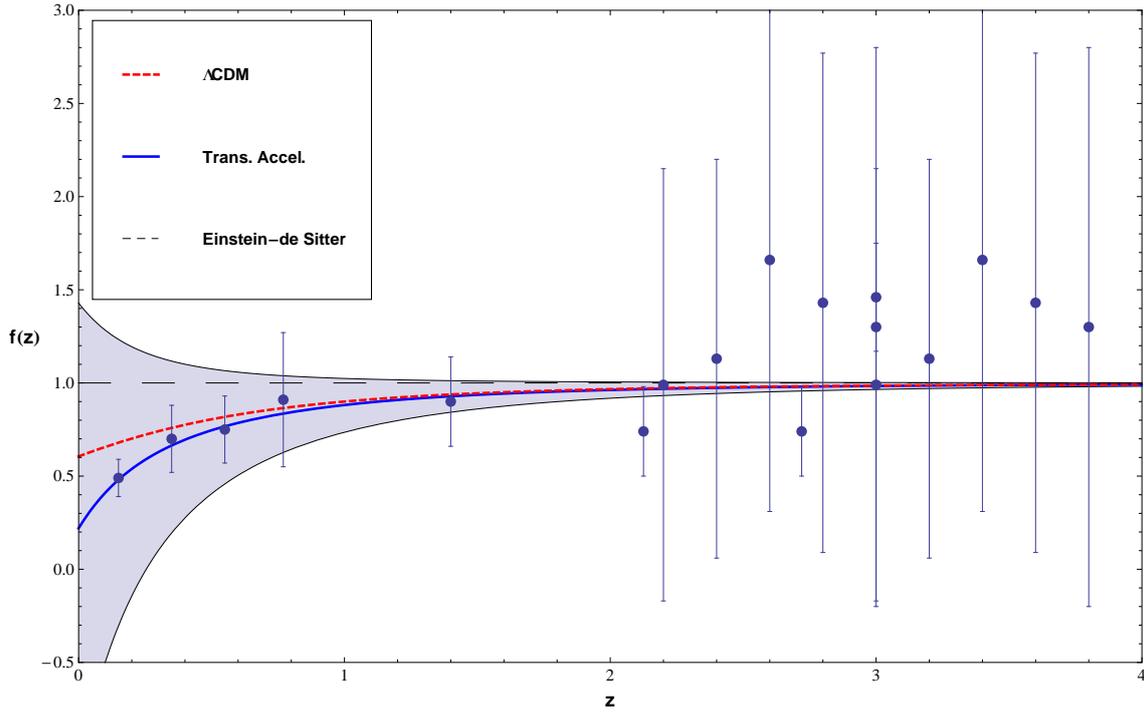


**Figura 3.3:** A análise estatística para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , baseadas sobre os dados da função de crescimento em [21]. Na janela esquerda: região de contorno para os valores de melhor ajuste mostrados na Tabela 3.1. Nas janelas do centro e direita: as funções de densidade de probabilidade (PDFs) para  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente.

$\chi_{\min}^2$	$\alpha$	$\beta$
5.55	$0.49^{+1.644}_{-1.701}$	$-0.65^{+3.258}_{-2.912}$

**Tabela 3.1:** Os valores de melhor ajuste para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , baseados sobre os dados da função de crescimento no [21].

com os valores de melhor ajuste da tabela 2.1 e 3.1 como é mostrado na figura 3.5. Notar que em nosso modelo encontramos um máximo do crescimento das perturbações  $\delta_m$  no presente e tem um decaimento no futuro, a diferença do crescimento das perturbações do modelo  $\Lambda$ CDM descritas no apêndice C.



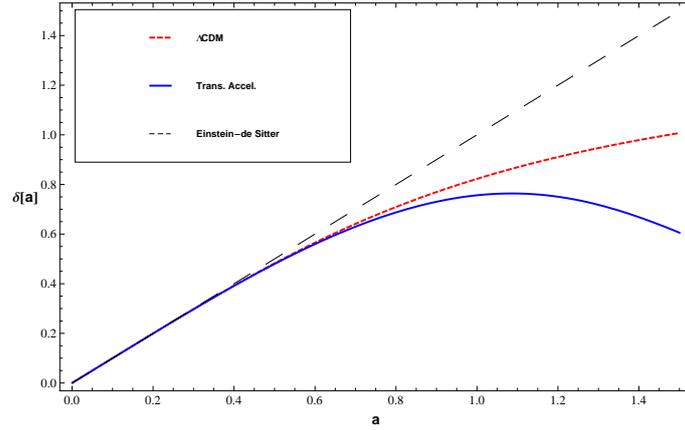
**Figura 3.4:** A dependência da função de crescimento  $f(z)$  sobre o redshift  $z$ . Os dados foram tomados de [21]. A região sombreada denota uma grande dispersão a  $1\sigma$  de nível de confiança.

## 3.2 As perturbações relativísticas

Na seção 3.1 foram bem estudados o crescimento das perturbações Newtonianas, mas essa análise somente se aplica a escalas que não excedam o raio de Hubble. Devido a essa limitação temos que realizar um tratamento mais completo e geral que permita tratar componentes relativísticas e não relativísticas sobre todas as escalas. Este tratamento leva em conta as equações de Einstein da Relatividade Geral mostradas na seção 2.1, que serão expandidas em torno de um Universo de fundo homogêneo e isotrópico. O problema que surge ao expandir as equações de Einstein até a primeira ordem de aproximação, é que não existe um sistema de coordenadas privilegiado para descrever as perturbações, em diferencia do que acontece num Universo homogêneo e isotrópico. Esta liberdade na escolha de coordenadas, ou liberdade do gauge, leva ao aparecimento de modos fictícios nas quantidades perturbadas, que são devidos apenas ao sistema de coordenadas usado (ver [37, 58]). Para resolver o problema do gauge, precisamos escrever quantidades tais como os elementos da métrica, a densidade da matéria, o campo de velocidade, etc. como quantidades invariantes de gauge.

### As transformações de coordenadas e invariantes de gauge

Consideramos um universo homogêneo e isotrópico não perturbado, onde  $\rho(x^i, t) = \rho(t)$ . Na Relatividade Geral qualquer sistema de coordenadas é permitido, e podemos, em princípio,



**Figura 3.5:** A comparação de nosso modelo e o modelo  $\Lambda$ CDM usando os parâmetros de melhor ajuste das tabelas 2.1 e 3.1. A linha tracejada mostra o correspondente crescimento para o modelo de Einstein-de Sitter.

decidir usar uma coordenada temporal “nova”  $t'$ , relacionada à coordenada temporal “velha”  $t$ , segundo  $t' = t + \hat{t}$ . Assumindo que  $\hat{t} \ll t$ , pode ser encontrada a densidade de energia

$$\rho(t) = \rho(t' - \hat{t}) \approx \rho(t') - \frac{\partial \rho}{\partial t} \hat{t} \equiv \rho(t') + \hat{\rho}(x^i, t'). \quad (3.41)$$

O primeiro termo do lado direito, pode ser interpretado como a densidade de energia no fundo na nova coordenada temporal, em quanto, a segunda descreve uma perturbação linear. Esta perturbação é não-física e inteiramente devido à escolha do novo tempo “perturbado”. Assim, podemos “produzir” perturbações fictícias, simplesmente perturbando as coordenadas. Além disso, podemos “eliminar” uma perturbação real na densidade de energia, escolhendo hipersuperfícies de tempo constante a ser o mesmo que escolher hipersuperfícies de densidade constante: nesse caso  $\hat{\rho} = 0$  apesar da presença de reais inomogeneidades.

Para resolver os modos de perturbação real e fictícia na Relatividade Geral, é necessário ter um conjunto completo de variáveis. Para ser mais preciso, precisamos tanto as perturbações do campo e as perturbações métricas.

Agora, consideramos uma pequena perturbação em torno da métrica do fundo, com a qual o elemento de linha [37] fica representado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \\ &= -(1 + 2\phi) dt^2 + 2a^2 F_{,i} dt dx^i + a^2 [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde  $\hat{g}_{\mu\nu} \ll \bar{g}_{\mu\nu}$ . Os termos no fundo são

$$\bar{g}_{00} = -1, \quad (3.43)$$

$$\bar{g}_{0i} = \bar{g}_{i0} = 0 , \quad (3.44)$$

$$\bar{g}_{ij} = a^2 \delta_{ij} \quad (3.45)$$

e os termos perturbados em primeira ordem são

$$\hat{g}_{00} = -2\phi , \quad (3.46)$$

$$\hat{g}_{0i} = \hat{g}_{i0} = a^2 F_{,i} , \quad (3.47)$$

$$\hat{g}_{ij} = -2a^2 \psi \delta_{ij} + 2a^2 E_{,ij} . \quad (3.48)$$

Notar que, na métrica perturbada  $\hat{g}_{\mu\nu}$ , foram introduzidas somente quantidades escalares, devido a que elas são induzidas pelas inomogeneidades nas densidades de energia. Essas perturbações são mais importantes em cosmologia devido a que elas produzem instabilidade gravitacional e podem ser as responsáveis do processo de formação de estruturas, existem também quantidades vetoriais e tensoriais que não vamos a considerar neste trabalho devido a que estamos interessados somente na formação de estruturas.

Por outro lado, considerando uma transformação de coordenadas

$$x^{\mu'} = x^\mu - \xi^\mu, \quad (3.49)$$

onde  $\xi^\mu$  são funções infinitesimalmente pequenas do espaço e tempo. Num ponto dado da variedade espaço-tempo, uma quantidade tensorial  $A_{\alpha\beta}$ , pode ser calculada na coordenada  $x^{\mu'}$ , tomando as derivadas parciais de (3.49) e usando a lei de transformação de tensores [28, 37]

$$A_{\alpha'\beta'}(x^{\mu'}) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\beta'}} A_{\gamma\sigma}(x^\mu) \approx A_{\alpha\beta}(x^\mu) + \bar{A}_{\alpha\sigma} \xi_{,\beta}^\sigma(x^\mu) + \bar{A}_{\gamma\beta} \xi_{,\alpha}^\gamma(x^\mu), \quad (3.50)$$

onde somente foram considerados termos lineares em  $\xi^\mu$  e em  $\hat{A}$ . Fazendo uma expansão em torno do ponto  $x^\mu$  no lado esquerdo da (3.50) e considerando termos lineares novamente, obtemos a **transformação de gauge** de uma quantidade tensorial

$$A_{\alpha'\beta'}(x^\mu) = A_{\alpha\beta}(x^\mu) + \xi^\nu \bar{A}_{\alpha\beta,\nu}(x^\mu) + \bar{A}_{\alpha\sigma} \xi_{,\beta}^\sigma(x^\mu) + \bar{A}_{\gamma\beta} \xi_{,\alpha}^\gamma(x^\mu), \quad (3.51)$$

que pode ser usada para o tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  ou o tensor energia-momento  $T_{\alpha\beta}$ , que serão usados mais adiante. Em forma análoga, podemos considerar um quadrivetor  $U_\mu$ , depois usando a lei de transformação

$$\begin{aligned} U_{\alpha'}(x^{\mu'}) &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} U_\beta(x^\mu) = (\delta_\alpha^\beta + \xi_{,\alpha}^\beta) U_\beta(x^\mu) \\ &= U_\alpha(x^\mu) + \xi_{,\alpha}^\beta U_\beta(x^\mu), \end{aligned} \quad (3.52)$$

fazendo uma expansão em torno do ponto  $x^\mu$  no lado esquerdo, obtemos

$$U_{\alpha'}(x^\mu) - U_\alpha(x^\mu) = U_{\alpha,\gamma} \xi^\gamma(x^\mu) + \xi_{,\alpha}^\beta U_\beta(x^\mu), \quad (3.53)$$

facilmente pode ser escrito de uma forma covariante

$$U_{\alpha'}(x^\mu) - U_\alpha(x^\mu) = U_{\alpha;\gamma} \xi^\gamma(x^\mu) + \xi_{,\alpha}^\beta U_\beta(x^\mu). \quad (3.54)$$

De forma similar, para o caso de um escalar  $S(x^\mu)$ , temos

$$S'(x^\mu) - S(x^\mu) = \xi^\alpha S_{,\alpha}. \quad (3.55)$$

### As transformações na densidade de energia

Agora, podemos apresentar o caso da transformação de gauge da densidade de energia  $\rho(x^\mu)$ , usando a relação (3.55) e fazendo a troca  $S(x^\mu) = \rho(x^\mu)$ , temos

$$\rho'(x^\mu) = \rho(x^\mu) + \xi^\alpha \rho_{,\alpha}, \quad (3.56)$$

considerando um fundo isotrópico

$$\rho'(x^\mu) = \rho(x^\mu) + \xi^0 \rho_{,0}. \quad (3.57)$$

Agora, separando-as em parte do fundo e perturbado,

$$\rho = \bar{\rho} + \hat{\rho}, \quad (3.58)$$

$$\rho' = \bar{\rho}' + \hat{\rho}', \quad (3.59)$$

e fazendo a identificação  $\bar{\rho}' = \bar{\rho}$ , obtemos

$$\hat{\rho}' = \hat{\rho} + \xi^0 \rho_{,0}, \quad (3.60)$$

essa é a lei de transformação para a densidade.

Para uma dada  $\hat{\rho}$ , é possível sempre fazer uma transformação

$$\xi^0 = -\frac{\hat{\rho}}{\rho_{,0}}, \quad (3.61)$$

que substituindo na (3.60), encontramos  $\hat{\rho}' = 0$ ; é por essa razão que se acredita que as perturbações são um feito das transformações de coordenadas (perturbações fictícias).

### As transformações na quadrivelocidade

No caso da quadrivelocidade  $u_\alpha$ , podemos usar a relação (3.54),

$$u_{\alpha'}(x^\mu) - u_\alpha(x^\mu) = u_{\alpha;\gamma} \xi^\gamma(x^\mu) + \xi_{;\alpha}^\beta u_\beta(x^\mu), \quad (3.62)$$

sabendo que no fundo  $u_i = 0$  e  $u_0 = -1$  com  $c^2 = 1$  e considerando as quantidades espaciais, o anterior pode ser escrito como

$$u_{i'} = u_i - \xi_{,i}^0. \quad (3.63)$$

Definiendo um vetor  $u_i$  como o gradiente de um vetor  $v$ , ou seja  $u_i(x) \equiv v_{,i}$ , que substituindo

na equação (3.63), temos

$$v' = v - \xi^0 . \quad (3.64)$$

Por outro lado, perturbando a relação  $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1$ , temos

$$\hat{g}_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + g_{\alpha\beta}\hat{u}^\alpha u^\beta + g_{\alpha\beta}u^\alpha \hat{u}^\beta = 0 , \quad (3.65)$$

considerando que no fundo  $u^0 = 1$  e  $u_0 = -1$ , e devido que a métrica é diagonal

$$\hat{g}_{00} + 2g_{00}\hat{u}^0 = 0 \Rightarrow \hat{u}^0 = \frac{1}{2}\hat{g}_{00} , \quad (3.66)$$

também, perturbando  $u^\alpha u_\alpha = -1$ ,

$$\hat{u}^\alpha u_\alpha + u^\alpha \hat{u}_\alpha = 0 \quad (3.67)$$

que para  $\alpha = 0$ , obtemos  $\hat{u}_0 = \hat{u}^0$ . Temos também que,  $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta$ , para as quantidades espaciais  $u_j = g_{j\beta}u^\beta$  e perturbando

$$\hat{u}_j = \hat{g}_{j\beta}u^\beta + g_{j\beta}\hat{u}^\beta , \quad (3.68)$$

e do fato que as quantidades  $u^i = u_i = 0$ , a equação acima se reduz a

$$\hat{u}_j = \hat{g}_{j0} + g_{ji}\hat{u}^i , \quad (3.69)$$

por último usando as quantidades perturbadas da métrica (3.47) e (3.48), obtemos

$$\hat{u}_j = a^2 F_{,j} + a^2 \hat{u}^j . \quad (3.70)$$

### As transformações na métrica

Agora, vamos a usar a equação (3.51) substituindo  $g_{\alpha\beta}$  por  $A_{\alpha\beta}$ ,

$$g_{\alpha'\beta'}(x) = g_{\alpha\beta}(x) + \xi^\nu g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\alpha\sigma}\xi_{,\beta}^\sigma + g_{\gamma\beta}\xi_{,\alpha}^\gamma , \quad (3.71)$$

fazendo  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , encontramos

$$\begin{aligned} g_{0'0'}(x) &= g_{00}(x) + \xi^\nu g_{00,\nu} + g_{0\sigma}\xi_{,0}^\sigma + g_{\gamma 0}\xi_{,0}^\gamma , \\ &= g_{00}(x) + 2g_{00}\xi_{,0}^0 , \\ &= g_{00}(x) - 2\xi_{,0}^0 , \end{aligned} \quad (3.72)$$

que substituindo (3.43) e (3.46), obtemos

$$\phi' = \phi + \xi_{,0}^0, \quad (3.73)$$

analogamente, encontramos

$$\psi' = \psi - H\xi^0, \quad (3.74)$$

$$E' = E + a^{-2}\zeta, \quad (3.75)$$

$$F' = F - a^{-2}\xi^0 + (a^{-2}\zeta)_{,0}, \quad (3.76)$$

onde  $H$  é o índice de Hubble e as componentes espaciais do vetor infinitesimal  $\xi^\alpha$ , foram escritas como  $\xi^i = a^{-2}\zeta_{,i}$ , onde  $\zeta$  é uma função escalar.

Notar que as perturbações escalares da métrica dependem apenas das duas funções  $\xi^0$  e  $\zeta$ , e desta forma podem ser eliminadas via combinação linear, duas das quatro funções  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $B$  e  $E$  para construir grandezas que são invariantes de gauge. Impor as condições do gauge é equivalente a fixar o sistema coordenado. No seguinte consideraremos diferentes escolhas do gauge e mostraremos como, conhecida a solução para variáveis invariantes de gauge, pode ser calculada a métrica e a densidade perturbada em qualquer sistema coordenado particular.

### O gauge Longitudinal ou Newtoniano

O gauge longitudinal é definido pelas condições  $E' = 0$  e  $F' = 0$ . Usando estas condições em (3.75) e (3.76), encontramos um sistema de coordenados único. Desta forma as perturbações se transformam como

$$\phi^l = \phi + 2a^2H(F + E_{,0}) + a^2(F + E_{,0})_{,0}, \quad (3.77)$$

$$\psi^l = \psi - a^2H(F + E_{,0}), \quad (3.78)$$

$$\hat{\rho}^l = \hat{\rho} + a^2\rho(F + E_{,0}). \quad (3.79)$$

As funções escalares da métrica no gauge longitudinal coincidem com os potenciais de Bardeen [47], que são umas quantidades invariantes de gauge.

### O gauge Comóvel

O gauge comóvel (ortogonal) fica definido ao se fazer a escolha  $v' = 0$  e  $F' = 0$  nas equações (3.64) e (3.76) respetivamente. Desta forma as perturbações se transformam como

$$\phi^c = \phi + v_{,0}, \quad (3.80)$$

$$\psi^c = \psi - Hv, \quad (3.81)$$

$$E_{,0}^c = E_{,0} - a^{-2}v + F, \quad (3.82)$$

$$\hat{\rho}^c = \hat{\rho} + \dot{\rho}v. \quad (3.83)$$

Notar que, nesse caso os potenciais de Bardeen coincidem com as funções  $\phi^c$  e  $\psi^c$  quando  $v = a^2(F + E_{,0})$ , o que implica  $E_{,0}^c = 0$ .

### O gauge Síncrono

O gauge síncrono corresponde a fazer a escolha  $g'_{0\mu} = 0$ , ou seja,  $\phi' = 0$  e  $B' = 0$ . Neste gauge não conseguimos fixar unicamente o sistema de coordenadas definidos por  $\xi^0$  e  $\zeta$ , e modos espúrios estarão presentes nas soluções das equações de Einstein. Além disso, não é possível construir quantidades invariantes de gauge.

### As perturbações no gauge comóvel

Nesta tese, vamos usar o gauge comóvel para estudar o crescimento das perturbações, com as transformações  $x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu$ , para isso, escrevemos a combinação

$$\hat{\rho}^c \equiv \hat{\rho} + \dot{\rho}v, \quad (3.84)$$

onde o índice “c” representa as quantidades invariantes no gauge comóvel. De maneira análoga na pressão

$$\hat{p}^c \equiv \hat{p} + \dot{p}v, \quad (3.85)$$

e no escalar de expansão

$$\hat{\Theta}^c \equiv \hat{\Theta} + \dot{\Theta}v, \quad (3.86)$$

onde  $\Theta = u^\alpha_{;\alpha}$ .

As equações (3.84), (3.85) e (3.86), são as quantidades **invariantes de gauge** no regime comóvel.

Agora, para um fluido com somente uma componente, caracterizado por o tensor energia-momento

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p h^{\alpha\beta}, \quad (3.87)$$

onde  $h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta$  e  $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$ , tendo em consideração a conservação covariante

$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ , encontramos a equação de balanço da energia

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) = 0, \quad (3.88)$$

onde  $\dot{\rho} = \rho_{,\alpha}u^\alpha$  e  $\Theta = u_{;\alpha}^\alpha$ , e também encontramos a equação da conservação do momento

$$(\rho + p)\dot{u}_i + h_i^\alpha p_{,\alpha} = 0, \quad (3.89)$$

onde  $\dot{u}_i \equiv u_{i;\gamma}u^\gamma$ .

Perturbando em primeira ordem a derivada da densidade no primeiro termo do lado esquerdo da equação (3.88)

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{,\alpha}u^\alpha + \rho_{,\alpha}\hat{u}^\alpha, \quad (3.90)$$

fazendo  $\alpha = 0$  e tendo em consideração que  $u^0 = 1$  e  $\hat{u}^0 = \frac{1}{2}\hat{g}_{00} = -\phi$ , obtemos

$$\hat{\rho} = \dot{\rho} - \dot{\rho}\phi, \quad (3.91)$$

por outro lado, perturbando o segundo termo do lado esquerdo da equação (3.88), temos

$$[\Theta(\rho + p)]^\hat{} = \hat{\Theta}(\rho + p) + \Theta(\hat{\rho} + \hat{p}), \quad (3.92)$$

e substituindo (3.91) e (3.92), encontramos em primeira ordem

$$\dot{\rho} - \dot{\rho}\phi + \hat{\Theta}(\rho + p) + \Theta(\hat{\rho} + \hat{p}) = 0. \quad (3.93)$$

Da mesma maneira, como foi feito no estudo do crescimento das perturbações Newtonianas, vamos a escrever a equação (3.93) em termos do contraste de densidade (3.13) e da sua derivada (3.14)

$$\dot{\delta} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\delta - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\phi\hat{\Theta}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) + \Theta\left(\delta + \frac{\hat{p}}{\rho}\right) = 0, \quad (3.94)$$

introduzindo aqui as quantidades invariantes no gauge comóvel  $\delta = \delta^c - \frac{\dot{\rho}}{\rho}v$  e  $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}^c - \dot{\Theta}v$ , obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\delta}^c - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^\cdot v - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\dot{v} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\left(\delta^c - \frac{\dot{\rho}}{\rho}v\right) - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\phi + \hat{\Theta}^c\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \\ - \dot{\Theta}v\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) + \Theta\left(\delta^c - \frac{\dot{\rho}}{\rho}v\right) + \Theta\frac{\hat{p}^c - \dot{p}v}{\rho} = 0, \end{aligned} \quad (3.95)$$

Por outro lado, para perturbar em primeira ordem a parte espacial da equação da conservação de momento (3.89), precisamos perturbar a relação  $\dot{u}_i \equiv u_{i;\gamma} u^\gamma$ , ou seja

$$\begin{aligned} (\dot{u}_i)^\wedge &= (u_{i;0})^\wedge \hat{u}^0 + u_{i;\gamma} \hat{u}^\gamma, \\ &= (\dot{\hat{u}}_i - \hat{\Gamma}_{i0}^\gamma u_\gamma - \Gamma_{i0}^\gamma \hat{u}_\gamma) u^0 + u_{i;\gamma} \hat{u}^\gamma, \\ &= (\dot{\hat{u}}_i + \hat{\Gamma}_{i0}^0 - \frac{\dot{a}}{a} \hat{u}_i) u^0 + u_{i;\gamma} \hat{u}^\gamma, \end{aligned} \quad (3.96)$$

com  $u_{i;\gamma} = u_{i,\gamma} - \Gamma_{i\gamma}^\sigma u_\sigma = \Gamma_{i\gamma}^0$ , onde  $\Gamma_{i0}^0 = 0$  e  $\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{a}}{a} g_{ij}$ , então, a equação (3.96), pode ser escrita como

$$(\dot{u}_i)^\wedge = \dot{\hat{u}}_i + \hat{\Gamma}_{i0}^0 - \frac{\dot{a}}{a} \hat{u}_i + \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \hat{u}^j. \quad (3.97)$$

Para o último termo da equação (3.97), precisamos perturbar a relação  $u^j = g^{j\gamma} u_\gamma$

$$\begin{aligned} \hat{u}^j &= \hat{g}^{j\gamma} u_\gamma + g^{j\gamma} \hat{u}_\gamma, \\ &= -\hat{g}^{j0} + g^{jk} \hat{u}_k, \end{aligned} \quad (3.98)$$

e substituindo em (3.97), obtemos

$$(\dot{u}_i)^\wedge = \dot{\hat{u}}_i + \hat{\Gamma}_{i0}^0 - \frac{\dot{a}}{a} \hat{u}_i + \frac{\dot{a}}{a} (-g_{ij} \hat{g}^{i0} + \hat{u}_i). \quad (3.99)$$

Depois, perturbando o símbolo de Christoffel  $\Gamma_{i0}^0$ , encontramos

$$\hat{\Gamma}_{i0}^0 = \frac{1}{2} \hat{g}^{0j} g_{ji,0} - \frac{1}{2} \hat{g}_{00,i}, \quad (3.100)$$

que juntando com (3.99), resulta

$$(\dot{u}_i)^\wedge = \dot{\hat{u}}_i + \frac{1}{2} \hat{g}^{0j} g_{ji,0} - \frac{1}{2} \hat{g}_{00,i} - \frac{\dot{a}}{a} \hat{u}_i + \frac{\dot{a}}{a} (-g_{ij} \hat{g}^{i0} + \hat{u}_i), \quad (3.101)$$

e usando o fato que  $g_{ij,0} = 2\frac{\dot{a}}{a} g_{ij}$ , a equação anterior se reduz como

$$(\dot{u}_i)^\wedge = \dot{\hat{u}}_i - \frac{1}{2} \hat{g}_{00,i} = \dot{\hat{u}}_i + \phi_{,i}. \quad (3.102)$$

Por outro lado, perturbando em primeira ordem o segundo termo do lado esquerdo da equação (3.89)

$$\begin{aligned} \left( h_i^\beta p_{,\beta} \right)^\wedge &= \left[ (\delta_i^\beta + u^\beta u_i) p_{,\beta} \right]^\wedge, \\ &= (\hat{u}^\beta u_i + u^\beta \hat{u}_i) p_{,\beta} + (\delta_i^\beta + u^\beta u_i) \hat{p}_\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u^0 \hat{u}_i \dot{p} + \hat{p}_{,i} , \\
&= \hat{p}_{,i} + \dot{p} \hat{u}_i .
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Agora, podemos perturbar em primeira ordem a equação da conservação de momento (3.89), e usar as equações (3.102) e (3.103), para obter

$$(\rho + p) (\hat{u}_i + \phi_{,i}) = -\hat{p}_{,i} + \dot{p} u_i , \tag{3.104}$$

depois, usando quantidades invariantes do gauge comóvel para a pressão  $\hat{p} = \hat{p}^c + \dot{p}v$  e a relação  $\hat{u}_i = v_{,i}$  que já foi definida anteriormente, encontramos

$$\dot{v} + \phi = -\frac{\hat{p}^c}{\rho + p} . \tag{3.105}$$

Juntando as equações (3.95) e (3.105), escrevendo primeiro as quantidades invariantes de gauge

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta}^c + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \delta^c + \hat{\Theta}^c \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) + \Theta \delta^c + \Theta \frac{\hat{p}^c}{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \left(-\frac{\hat{p}^c}{\rho + p}\right) \\
&- \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)' v - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 v - \dot{\Theta} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) v - \Theta \frac{\dot{p}}{\rho} v - \Theta \frac{\dot{p}}{\rho} v = 0 ,
\end{aligned} \tag{3.106}$$

derivando a equação do balanço (3.88)

$$\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)' = -\dot{\Theta} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) - \Theta \left(\frac{\dot{p}}{\rho} - \frac{p \dot{\rho}}{\rho^2}\right) , \tag{3.107}$$

introduzindo esta equação em (3.106), obtemos a equação mais compacta

$$\dot{\delta}^c - \Theta \frac{p}{\rho} \delta^c + \hat{\Theta}^c \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) = 0 . \tag{3.108}$$

Por outro lado, vamos prestar atenção ao escalar de expansão  $\Theta$ , cuja evolução é governada pela equação de Raychaudhuri (ver apêndice D)

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3} \Theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \dot{u}_{;\alpha}^\alpha = \frac{\kappa}{2} (\rho + 3p) , \tag{3.109}$$

onde  $\omega^2 \equiv \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$  e  $\sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}$ , identificam a vorticidade e o cisalhamento do fluido respectivamente.

Perturbando em primeira ordem (3.109), temos

$$\dot{\hat{\Theta}} - \dot{\Theta} \phi + \frac{2}{3} \Theta \hat{\Theta} - \dot{u}_{;\alpha}^\alpha + 4\pi G (\rho \delta + 3\hat{p}) = 0 , \tag{3.110}$$

introduzindo quantidades invariantes de gauge

$$\dot{\hat{\Theta}}^c + \frac{2}{3}\Theta\hat{\Theta}^c + 4\pi G\rho\delta^c - \dot{u}_{;\alpha}^\alpha = 0. \quad (3.111)$$

Agora, derivando (3.108) e juntando com (3.111)

$$\ddot{\delta}^c + H \left[ 2 - 6\frac{p}{\rho} + 3\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \right] \dot{\delta}^c - H^2 \left[ \frac{3}{2} + 12\frac{p}{\rho} - \frac{9p^2}{2\rho^2} - 9\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} + c_s^2 \frac{\Delta}{a^2 H^2} \right] \delta^c = 0, \quad (3.112)$$

com  $c_s^2 \equiv \frac{\dot{p}^c}{\dot{\rho}^c}$  onde  $c_s$  é a velocidade do som no sistema em repouso  $v = 0$  e  $\Delta \rightarrow -k^2$  no espaço de Fourier. O vetor de onda comóvel  $k$ , representa a escala espacial das perturbações relativas às coordenadas comóveis.

No que segue, vamos a fazer o estudo das perturbações relativísticas para o modelo de aceleração transitória, que a diferencia do estudo feito nesta seção, se considera um fluido de duas componentes em interação.

### 3.3 As perturbações relativísticas no modelo de aceleração transitória

Na seção 2.5, foi apresentado o modelo do universo em aceleração transitória, considerando o meio cósmico composto de duas componentes interagindo no setor escuro, a matéria escura  $\rho_m$  e a energia escura  $\rho_x$ , por tanto o tensor energia-momento (3.87), deve ser separado em duas componentes, uma que representa a matéria (subíndice  $m$ ) e a outra a energia escura (subíndice  $x$ ),

$$T^{\alpha\beta} = T_m^{\alpha\beta} + T_x^{\alpha\beta}. \quad (3.113)$$

Assumimos que ambas contribuições têm a estrutura de um fluido perfeito, com ( $A = m, x$ )

$$T_A^{\alpha\beta} = \rho_A u_A^\alpha u_A^\beta + p_A h_A^{\alpha\beta}, \quad h_A^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + u_A^\alpha u_A^\beta. \quad (3.114)$$

Uma interação entre as componentes pode ser caracterizado covariantemente por

$$T_m^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = Q^\alpha, \quad T_x^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -Q^\alpha. \quad (3.115)$$

As equações de balanço energia-momento para cada componente são respectivamente

$$-u_{m\alpha} T_m^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \rho_{m,\sigma} u_m^\sigma + \Theta_m (\rho_m + p_m) = -u_{m\sigma} Q^\sigma, \quad (3.116)$$

$$-u_{x\alpha} T_x^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \rho_{x,\sigma} u_x^\sigma + \Theta_x (\rho_x + p_x) = u_{x\sigma} Q^\sigma. \quad (3.117)$$

Em geral, cada componente tem sua própria quadrivelocidade,  $g_{\alpha\beta}u_A^\alpha u_A^\beta = -1$ . As quantidades  $\Theta_A$  são definidas como  $\Theta_A = u_{A;\sigma}^\sigma$ . Para o fundo homogêneo e isotrópico, assumimos  $u_m^\sigma = u_x^\sigma = u^\sigma$ . De maneira similar, temos o balanço do momento para cada componente respectivamente

$$h_{m\alpha}^\sigma T_m^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = (\rho_m + p_m) \dot{u}_m^\sigma + p_{m,\alpha} h_m^{\sigma\alpha} = h_{m\alpha}^\sigma Q^\alpha, \quad (3.118)$$

$$h_{x\alpha}^\sigma T_x^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = (\rho_x + p_x) \dot{u}_x^\sigma + p_{x,\alpha} h_x^{\sigma\alpha} = -h_{x\alpha}^\sigma Q^\alpha, \quad (3.119)$$

onde  $\dot{u}_A^\sigma \equiv u_{A;\gamma}^\sigma u_A^\gamma$ .

O termo fonte  $Q^\alpha$  é separado numa parte proporcional à quadrivelocidade total e a outra perpendicular à mesma [26], de acordo com

$$Q^\alpha = u^\alpha Q + \bar{Q}^\alpha, \quad (3.120)$$

onde  $Q = -u_\alpha Q^\alpha$  e  $\bar{Q}^\alpha = h_\sigma^\alpha Q^\sigma$ , com  $u_\alpha \bar{Q}^\alpha = 0$ . (Alternativamente, pode ser introduzido uma separação com respeito à quadrivelocidade da matéria. Como veremos mais tarde, para o modelo de interesse aqui, ambas opções conduzem a resultados idênticos).

A contribuição  $T_x^{\alpha\beta}$  é suposto a descrever alguma forma de energia escura. No caso duma equação de estado  $p_x = -\rho_x$ , onde  $\rho_x$  necessariamente não é constante, temos

$$T_x^{\alpha\beta} = -\rho_x g^{\alpha\beta}. \quad (3.121)$$

No fundo, os balanços (3.116) e (3.117) assumem as formas

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q^0 \quad (3.122)$$

e

$$\dot{\rho}_x = -Q^0, \quad (3.123)$$

respectivamente.

Recordando que para o fundo  $u_m^\sigma = u_x^\sigma = u^\sigma$  é válido, a componente temporal da quadrivelocidade perturbada em primeira ordem é

$$\hat{u}_0 = \hat{u}^0 = \hat{u}_m^0 = \hat{u}_x^0 = \frac{1}{2} \hat{g}_{00}. \quad (3.124)$$

De acordo à estrutura do fluido perfeito do tensor energia-momento (3.87) e os tensores energia-momento de ambas componentes em (3.114), e com  $u_m^a = u_x^a = u^a$  no fundo, temos as perturbações da densidade da energia em primeira ordem  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_m + \hat{\rho}_x$ , perturbações da pressão

$\hat{p} = \hat{p}_m + \hat{p}_x = \hat{p}_x$  e

$$\hat{T}_i^0 = \hat{T}_{mi}^0 + \hat{T}_{xi}^0 \quad \Rightarrow \quad (\rho + p) \hat{u}_i = \rho_m \hat{u}_{mi} + (\rho_x + p_x) \hat{u}_{xi} . \quad (3.125)$$

Para  $p_x = -\rho_x$  segue

$$p_x = -\rho_x \quad \Rightarrow \quad \rho + p = \rho_m \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_{mi} = \hat{u}_i . \quad (3.126)$$

Como a componente  $m$  é suposto a descrever a matéria, isto é claro de (3.125), que a velocidade da matéria perturbada  $\hat{u}_{mi}$  coincide com a velocidade total perturbada  $\hat{u}_i$ .

Com  $u_m^\sigma = u^\sigma$  até primeira ordem, o balanço da energia em (3.116) (corregida até primeira ordem) pode ser escrita como

$$\rho_{m,\sigma} u^\sigma = -\Theta \rho_m - u_\sigma Q^\sigma . \quad (3.127)$$

Por outro lado, o balanço da energia total é

$$\rho_{,\sigma} u^\sigma = -\Theta (\rho + p) . \quad (3.128)$$

Para a diferença de (3.127) e (3.128), temos

$$\dot{\rho} - \dot{\rho}_m \equiv (\rho - \rho_m)_{,\sigma} u^\sigma = u_\sigma Q^\sigma . \quad (3.129)$$

Uma vez que, pelo menos até ordem linear,  $\rho - \rho_m = \rho_x$ , a equação (3.129) é equivalente (até primeira ordem) a

$$\dot{\rho}_x \equiv \rho_{x,\sigma} u^\sigma = u_\sigma Q^\sigma . \quad (3.130)$$

Em ordem zero recuperamos (3.123). A equação em primeira ordem é

$$\dot{\rho}_x + \dot{\rho}_x \hat{u}^0 = (u_\sigma Q^\sigma)^\wedge . \quad (3.131)$$

Notar que (3.131) resulta duma combinação da conservação da energia total e o balanço energético da matéria. Isto é consistente com o balanço da energia escura (3.117). Em primeira ordem, este último torna-se

$$\dot{\rho}_x + \dot{\rho}_x \hat{u}^0 = (u_{x\sigma} Q^\sigma)^\wedge . \quad (3.132)$$

Isto significa que

$$(u_{x\sigma}Q^\sigma)^\wedge = (u_\sigma Q^\sigma)^\wedge, \quad (3.133)$$

ou seja, as projeções de  $Q^\sigma$  ao longo de  $u_{x\sigma}$  e de  $u_\sigma$  coincidem. Explicitamente

$$(u_\sigma Q^\sigma)^\wedge = (u_\sigma u^\sigma Q)^\wedge = -\hat{Q}. \quad (3.134)$$

Agora, como seguinte passo, consideramos o balanço do momento. A conservação do momento total é descrita por

$$h_\alpha^\sigma T_{;\beta}^{\alpha\beta} = (\rho_m + \rho_x + p_x) \dot{u}^\sigma + h^{\sigma\alpha} p_{x,\alpha} = 0. \quad (3.135)$$

Com  $p_x = -\rho_x$  temos

$$h_\alpha^\sigma T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \rho_m \dot{u}^\sigma + h^{\sigma\alpha} p_{x,\sigma} = 0. \quad (3.136)$$

Usando  $u_m^\sigma = u^\sigma$  novamente, o balanço do momento (3.118) para a componente da matéria torna-se

$$h_\alpha^\sigma T_m^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \rho_m \dot{u}^\sigma = h^{\sigma\alpha} Q_\alpha = \bar{Q}^\sigma = -h^{\sigma\alpha} p_{x,\alpha}. \quad (3.137)$$

Notar que somente temos usado a conservação de momento total e o balanço do momento da matéria. O balanço do momento (3.119) da energia escura degenera para o caso  $p_x = -\rho_x$ . Isto não descreve dinâmica alguma.

Mais uma vez introduzimos a perturbação fracionária  $\delta_m \equiv \frac{\hat{\rho}_m}{\rho_m}$  em termos do qual, o balanço de energia em primeira ordem, toma a forma

$$\dot{\delta}_m + \frac{Q}{\rho_m} \delta_m - \phi \left( -3H + \frac{Q}{\rho_m} \right) + \hat{\Theta} = \frac{\hat{Q}}{\rho_m}. \quad (3.138)$$

com

$$(\dot{u}_i)^\wedge = \hat{u}_{i,0} - \frac{1}{2} \hat{g}_{00,i} = \hat{u}_{i,0} + \phi_{,i} \quad (3.139)$$

e  $u_i = v_{,i}$  pode ser encontrado do balanço do momento (cf. [62])

$$\dot{v}_{,i} + \phi_{,i} = -\frac{1}{\rho_m} [\hat{p}_{x,i} + \dot{p}_x v_{,i}] \quad \Rightarrow \quad \dot{v} + \phi = -\frac{1}{\rho_m} [\hat{p}_x + \dot{p}_x v]. \quad (3.140)$$

Nesta fase, a relação com o prévio tratamento Newtoniano torna-se evidente. Desprezando as perturbações sobre o lado direito do balanço do momento em (3.140) e substituindo  $v \rightarrow av$

recuperamos o resultado (3.18) do análise Newtoniano. Desprezando os termos multiplicado pelo  $\phi$  em (3.138) e identificando  $\hat{\Theta}$  adequadamente, a relação não-relativística (3.16) é reproduzida.

A dinâmica da expansão escalar é determinada pela equação de Raychaudhuri, como já foi usada na seção anterior, na qual em nosso caso toma a forma

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - \dot{u}_{;\sigma}^{\sigma} + 4\pi G(\rho + 3p) = 0 . \quad (3.141)$$

No fundo, é válido  $\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) = -4\pi G\rho_m$ . O termo  $\dot{u}_{;\sigma}^{\sigma}$  na equação de Raychaudhuri torna-se em primeira ordem

$$\dot{u}_{;\sigma}^{\sigma} = -\frac{1}{a^2\rho_m}(\Delta\hat{p}_x + \dot{p}_x\Delta v) , \quad (3.142)$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano tridimensional.

Para a derivada temporal do escalar de expansão perturbada em primeira ordem, temos

$$\hat{\Theta} = \dot{\Theta} + \Theta\hat{u}^0 = \dot{\Theta} - \dot{\Theta}\phi . \quad (3.143)$$

Conseqüentemente, para os dois primeiros termos da equação de Raychaudhuri

$$\left[\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2\right]^{\hat{}} = \dot{\Theta} - \dot{\Theta}\phi + \frac{2}{3}\Theta\hat{\Theta} . \quad (3.144)$$

Para a derivada do escalar de expansão é válido  $\dot{\Theta} = -12\pi G\rho_m$ . Para as perturbações do termo  $4\pi G[\rho + 3p]$ , encontramos

$$4\pi G[\rho + 3p]^{\hat{}} = 4\pi G(\rho_m\delta_m + \rho_x\delta_x + 3\hat{p}_x) . \quad (3.145)$$

Agora, é conveniente introduzir quantidades que são invariantes de gauge, que foram definidas na seção anterior, em nosso caso usaremos o gauge comóvel

$$\delta_m^c = \delta_m + \frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m}v , \quad \delta_x^c = \delta_x + \frac{\dot{\rho}_x}{\rho_x}v , \quad \hat{p}_x^c = \hat{p}_x + \dot{p}_xv \quad (3.146)$$

também como

$$\hat{\Theta}^c = \hat{\Theta} + \dot{\Theta}v \quad \text{e} \quad \hat{Q}^c = \hat{Q} + \dot{Q}v . \quad (3.147)$$

Todos os símbolos, tem significado físico sobre hipersuperfícies comóveis  $v = 0$ . De (3.140) com  $\hat{p}_x^c = c_s^2\hat{\rho}_x^c$ , onde  $c_s$  é a velocidade do som no sistema em repouso  $v = 0$ ,

$$\dot{v} + \phi = -c_s^2\frac{\rho_x}{\rho_m}\delta_x^c . \quad (3.148)$$

A equação (3.138) toma a forma

$$\dot{\delta}_m^c + \frac{Q}{\rho_m} \delta_m^c + \hat{\Theta}^c + c_s^2 \frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} \frac{\rho_x}{\rho_m} \delta_x^c = \frac{1}{\rho_m} \hat{Q}^c . \quad (3.149)$$

Uma vez que

$$\hat{Q} = -\hat{\rho}_x , \quad (3.150)$$

podemos reescrever  $Q^c$  como

$$\hat{Q}^c = -\rho_x \dot{\delta}_x^c - \dot{\rho}_x \left[ 1 + c_s^2 \frac{\rho_x}{\rho_m} \right] \delta_x^c . \quad (3.151)$$

A perturbação invariante de gauge da quantidade de interação  $Q$  é definido pela perturbação da densidade de energia escura e a sua primeira derivada.

Isto segue que

$$\dot{\delta}_m^c + \hat{\Theta}^c + \frac{Q}{\rho_m} \delta_m^c - \left( 3Hc_s^2 \frac{\rho_x}{\rho_m} + \frac{Q}{\rho_m} \right) \delta_x^c = -\frac{\rho_x}{\rho_m} \dot{\delta}_x^c . \quad (3.152)$$

Em termos das quantidades invariantes de gauge, a equação de Raychaudhuri em primeira ordem torna-se

$$\dot{\hat{\Theta}}^c = -\frac{2}{3} \Theta \hat{\Theta}^c - \frac{1}{a^2 \rho_m} \Delta \hat{p}_x^c - 4\pi G [\rho_m \delta_m^c + \rho_x \delta_x^c] . \quad (3.153)$$

Numa etapa seguinte, diferenciando (3.152) e usando

$$\left( \frac{\rho_x}{\rho_m} \right) \dot{\phantom{x}} = \frac{\rho_x}{\rho_m} \left[ 3H - \frac{Q}{\rho_m} \frac{\rho}{\rho_x} \right] \quad (3.154)$$

e

$$\dot{H} = -4\pi G \rho_m = -\frac{3}{2} H^2 \frac{\rho_m}{\rho} \quad (3.155)$$

junto com (3.153). Chega-se a

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_m^c &+ \left( 2H + \frac{Q}{\rho_m} \right) \dot{\delta}_m^c + \left[ \left( \frac{Q}{\rho_m} \right) \dot{\phantom{x}} + 2H \frac{Q}{\rho_m} \right] \delta_m^c - 4\pi G \rho_m \delta_m^c \\ &= -\frac{\rho_x}{\rho_m} \ddot{\delta}_x^c - \left[ \left( 5 - 3c_s^2 \right) H \frac{\rho_x}{\rho_m} - \left( 2 + \frac{\rho_x}{\rho_m} \right) \frac{Q}{\rho_m} \right] \dot{\delta}_x^c + 4\pi G \rho_x \delta_x^c + \frac{1}{a^2 \rho_m} \Delta \hat{p}_x^c \\ &+ \left[ \left( \frac{Q}{\rho_m} \right) \dot{\phantom{x}} + 3H^2 c_s^2 \left( 5 \frac{\rho_x}{\rho_m} - \frac{3}{2} \frac{\rho_x}{\rho} \right) + H \frac{Q}{\rho_m} \left( 2 - 3c_s^2 \left( 1 + \frac{\rho_x}{\rho_m} \right) \right) \right] \delta_x^c . \end{aligned} \quad (3.156)$$

Agora, fazendo a mudança do fator de escala como variável independente em (3.31). Aplicando

$$\frac{H'}{H} = -\frac{3}{2a} \frac{\rho_m}{\rho}, \quad (3.157)$$

e

$$\ddot{\delta} = a^2 H^2 \left[ \delta'' + \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\rho_m}{\rho} \right) \frac{\delta'}{a} \right], \quad (3.158)$$

a equação anterior (3.156) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta_m^{c''} + \left[ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho_x}{\rho} + \frac{Q}{H\rho_m} \right] \frac{\delta_m^{c'}}{a} + \left[ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho_x}{\rho} + \frac{1}{H^2} \left( \frac{Q}{\rho_m} \right)' + 2 \frac{Q}{H\rho_m} \right] \frac{\delta_m^c}{a^2} \\ = -\frac{\rho_x}{\rho_m} \delta_x^{c''} - \left[ (6 - 3c_s^2) \frac{\rho_x}{\rho_m} - \frac{3}{2} \frac{\rho_x}{\rho} - \left( 2 + \frac{\rho_x}{\rho_m} \right) \frac{Q}{H\rho_m} \right] \frac{\delta_x^{c'}}{a} \\ + \left[ \frac{1}{H^2} \left( \frac{Q}{\rho_m} \right)' + \frac{Q}{H\rho_m} \left( 2 - 3c_s^2 \left( 1 + \frac{\rho_x}{\rho_m} \right) \right) + 3c_s^2 \left( 5 \frac{\rho_x}{\rho_m} - \frac{3}{2} \frac{\rho_x}{\rho} \right) \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{\rho_x}{\rho} - c_s^2 \frac{k^2}{a^2 H^2} \frac{\rho_x}{\rho_m} \right] \frac{\delta_x^c}{a^2}. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Aqui foi usada

$$\frac{\Delta \hat{p}_x^c}{a^2 H^2 \rho_m} \rightarrow -c_s^2 \frac{k^2}{a^2 H^2} \frac{\rho_x}{\rho_m} \delta_x^c. \quad (3.160)$$

Temos expressado as perturbações do termo de interação  $\hat{Q}^c$  em termos da perturbação da energia escura  $\delta_x^c$  e a sua primeira derivada, em concordância com (3.151).

A fim de obter equações de segundo ordem fechadas em  $\delta_m^c$ , assumimos uma proporcionalidade entre as perturbações na energia escura e as perturbações na matéria escura [61], introduzindo

$$\delta_x^c = \epsilon \delta_m^c. \quad (3.161)$$

O parâmetro  $\epsilon$  quantifica a magnitude relativa das perturbações na energia escura. Ele corresponde ao parâmetro  $\alpha$  da teoria não relativística. Para evitar mal entendidos, usamos um parâmetro diferente aqui. Assim como foi mencionado no caso newtoniano, desprezar as perturbações na energia escura poderia conduzir a resultados não confiáveis sobre a interpretação dos dados observacionais [24, 46]. Para o modelo tratado em [26], foi mostrado que, as perturbações na energia escura são desprezíveis sobre escalas que são relevantes para a for-

mação das estruturas, mas podem contribuir em uma considerável fração sobre as escalas de super-horizonte.

Com

$$\frac{1}{H^2} \left( \frac{Q}{\rho_m} \right)' = \left[ -\frac{3}{2} + A + B \right] - 4 \frac{a^2}{\sigma^2} \frac{g}{1+g} \quad (3.162)$$

encontramos

$$\delta_m^{c''} + F(a)\delta_m^{c'} + G(a)\delta_m^c = 0, \quad (3.163)$$

onde

$$F(a) = \frac{1}{a \left( 1 + \epsilon \frac{\rho_x}{\rho_m} \right)} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} (1 - \epsilon) \frac{\rho_x}{\rho} + gB - \epsilon \left[ \left( 2 + \frac{\rho_x}{\rho_m} \right) gB - (6 - 3c_s^2) \frac{\rho_x}{\rho_m} \right] \right\} \quad (3.164)$$

e

$$\begin{aligned} G(a) = & \frac{1}{a^2 \left( 1 + \epsilon \frac{\rho_x}{\rho_m} \right)} \left\{ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} (1 - \epsilon) \frac{\rho_x}{\rho} + \left( \frac{1}{2} + A + B \right) gB - 4 \frac{a^2}{\sigma^2} \frac{g}{1+g} \right. \\ & - \epsilon \left[ \left( \frac{1}{2} + A + B - 3c_s^2 \left( 1 + \frac{\rho_x}{\rho_m} \right) \right) gB - 4 \frac{a^2}{\sigma^2} \frac{g}{1+g} \right. \\ & \left. \left. + 15c_s^2 \frac{\rho_x}{\rho_m} - \frac{9}{2} c_s^2 \frac{\rho_x}{\rho} - c_s^2 \frac{\rho_x}{\rho_m} \frac{k^2}{a^2 H^2} \right] \right\}, \quad (3.165) \end{aligned}$$

com

$$\frac{\rho_x}{\rho_m} = a^3 \frac{\frac{3}{2} \sigma^2 \bar{K} \exp(-a^2/\sigma^2) \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{a^2}{\sigma^2} \right)}{1 + \bar{K} \left( a^5 \exp(-a^2/\sigma^2) - \frac{3}{2} \sigma^2 \exp(-1/\sigma^2) \right)} \quad (3.166)$$

e

$$\frac{\rho_x}{\rho} = \left[ \frac{3}{2} \sigma^2 \bar{K} \exp(-a^2/\sigma^2) \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{a^2}{\sigma^2} \right) \right] \frac{H_0^2}{H^2} = \frac{2}{3} A. \quad (3.167)$$

Notar que somente temos uma dependência na escala para  $\epsilon \neq 0$ . As quantidades  $A(a)$ ,  $\frac{H_0^2}{H^2}$  e  $B$ , são dadas por (3.26), (3.27) e (3.28), respetivamente, com

$$g = \frac{\bar{K} a^5 \exp(-a^2/\sigma^2)}{\Omega_{m0} - \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)} = \frac{\bar{K} a^5 \exp(-a^2/\sigma^2)}{1 - \frac{3}{2} \sigma^2 \bar{K} \exp(-1/\sigma^2)}, \quad (3.168)$$

onde, temos usado que  $\Omega_{m0} = 1 - \bar{K} \exp(-1/\sigma^2) \left( \frac{3}{2} \sigma^2 - 1 \right)$ .

Para  $\epsilon = 0$  recuperamos

$$F(a) = \frac{1}{a} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{3\rho_x}{2\rho} + gB \right\} \quad (\epsilon = 0) \quad (3.169)$$

e

$$G(a) = \frac{1}{a^2} \left\{ -\frac{3}{2} + \frac{3\rho_x}{2\rho} + \left( \frac{1}{2} + A + B \right) gB - 4\frac{a^2}{\sigma^2} \frac{g}{1+g} \right\} \quad (\epsilon = 0) . \quad (3.170)$$

Estes coeficientes coincidem com os correspondentes coeficientes da análise newtoniana para  $\alpha = \beta = 0$ . Uma vez que  $\hat{Q}^c$  foi relacionado com  $\delta_x^c$  e a sua primeira derivada em (3.151), o limite  $\alpha = \beta = 0$  da teoria newtoniana corresponde a  $\epsilon = 0$  na análise relativística presente. Lembrando que  $\frac{\rho_x}{\rho} = \frac{2}{3}A$ .

### Perturbações não-adiabáticas

As perturbações num sistema de dois componentes interagindo, necessariamente são não-adiabáticas. A parte não-adiabática das perturbações de pressão é  $\hat{p} - \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\hat{\rho}$ . Para o nosso caso especial a quantidade crucial é

$$\hat{p} - \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\hat{\rho} = (c_s^2 + 1) \hat{\rho}_x^c + \frac{\dot{\rho}_m \dot{\rho}_x}{\dot{\rho}} \left( \frac{\hat{\rho}_m^c}{\dot{\rho}_m} - \frac{\hat{\rho}_x^c}{\dot{\rho}_x} \right) = (c_s^2 + 1) \hat{\rho}_x^c + \frac{1}{\dot{\rho}} [\hat{\rho}_m^c \dot{\rho}_x - \hat{\rho}_x^c \dot{\rho}_m] . \quad (3.171)$$

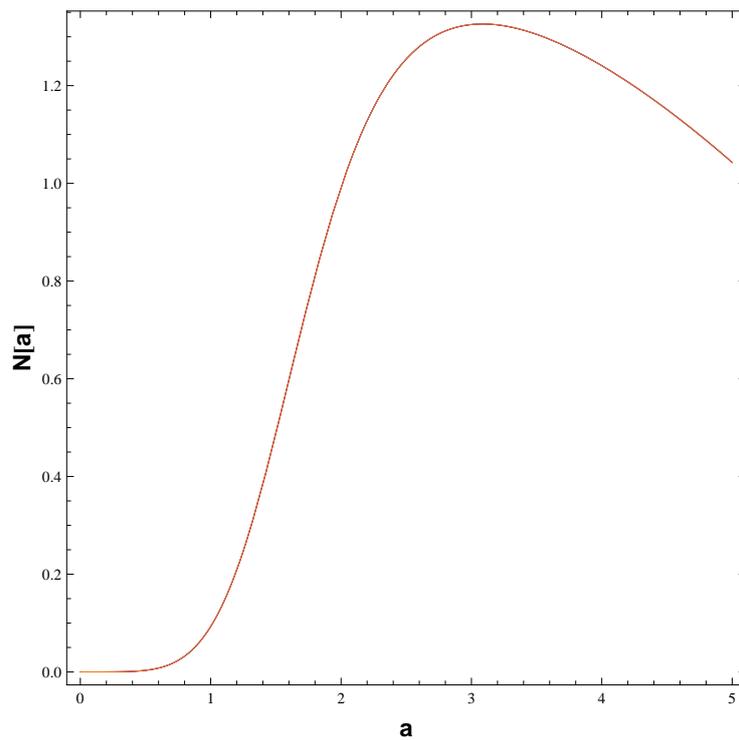
Introduzindo aqui os balanços  $\dot{\rho}_x = -Q$  e  $\dot{\rho}_m = -3H\rho_m + Q$  como também  $\delta_x^c = \epsilon\delta_x^c \Rightarrow \hat{\rho}_x^c = \epsilon \frac{\rho_x}{\rho_m} \hat{\rho}_m^c$ , encontramos

$$\hat{p} - \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}\hat{\rho} = N \hat{\rho}_m^c . \quad (3.172)$$

onde

$$N \equiv \left[ \frac{Q}{3H\rho_m} + \epsilon \frac{\rho_x}{\rho_m} \left( c_s^2 + \frac{Q}{3H\rho_m} \right) \right] . \quad (3.173)$$

Mesmo para  $\epsilon = 0$ , ou seja, sem flutuações da componente de energia escura, o termo de interação induz uma contribuição não-adiabática para a perturbação da pressão total, dada por (2.90), com  $g$  a partir de (3.168) e  $\frac{\rho_x}{\rho_m}$  a partir de (3.166). A quantidade  $N$ , caracteriza a parte não-adiabática das perturbações da pressão. Sua dependência do fator de escala é visualizado na figura 3.6. Mais uma vez, nosso modelo não é confiável para  $a > \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma \approx 6.3$ , exceto para o comportamento assintótico  $N = 0$ , para  $a \gg 1$ . O comportamento de  $N(a)$  é quase independente de  $c_s^2$  e  $\epsilon$ .



**Figura 3.6:** A dependência do fator de não-adiabaticidade  $N$  sobre o fator de escala. A não-adiabaticidade é insignificante para  $a \ll 1$  e para  $a \gg 1$  (não mostrado aqui). Lembre-se que o nosso modelo não é confiável para  $a > \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma \approx 6.3$ , exceto para o comportamento assintótico  $N = 0$  para  $a \gg 1$ .

# Capítulo 4

## O espectro de potência para o modelo de aceleração transitória

### 4.1 O espectro de potência

Ao longo do século XX, nos diferentes aspectos da cosmologia e astrofísica foram utilizados muitos tipos de indicadores [63]. Destas, o uso da função de correlação demonstrou-se como principal maneira de abordar a questão do processo de formação de estruturas em larga escala. Para entender um pouco melhor a função de correlação, supomos que a probabilidade  $P(A)$  de se encontrar um objeto  $A$ , seja uma estrela, uma galáxia ou um aglomerado de galáxias, em um elemento de volume  $\delta V$  seja dada por

$$P(A) = \eta \delta V , \quad (4.1)$$

onde a densidade média de probabilidade  $\eta$  é independente da posição. Desta definição, o número médio de objetos encontrados dentro de um volume  $V$  do Universo é simplesmente a integral sobre a equação acima

$$\langle N \rangle = \eta V . \quad (4.2)$$

A partir destes conceitos probabilísticos podemos definir a função de correlação de dois pontos  $\xi(x_{12})$  como uma medida do quanto a presença de um objeto em um elemento de volume  $\delta V_1$  interfere na probabilidade de se encontrar um outro objeto em um elemento de volume  $\delta V_2$  separados por uma distância  $x_{12}$ . Com isso, a probabilidade de se encontrar um objeto em  $\delta V_1$  e outro em  $\delta V_2$  é fornecida por

$$P(A) = \eta^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 + \xi(x_{12})] . \quad (4.3)$$

O termo  $\eta$  aparece elevado ao quadrado nesta equação além de fazê-la adimensional. Assim, pode-se dizer que a função de correlação caracteriza a interferência existente entre objetos vizinhos no valor da probabilidade  $P(A)$ . Quando consideramos esta ligação entre os vizinhos, a probabilidade de se encontrar um objeto em um determinado volume (4.1) passa a ser escrita como

$$P(A) = \eta \delta V [1 + \xi(x)] . \quad (4.4)$$

Da relação acima, podemos perceber que se eles não estão correlacionados  $\xi(x) = 0$  a probabilidade de se encontrar um objeto em  $\delta V$  não depende da existência de outros objetos. Desta definição, o número médio de vizinhos dentro de uma distância  $x$  a partir de um objeto é a integral da equação anterior

$$\langle N \rangle = \frac{4}{3} \pi x^3 \eta + \eta \int_0^x \xi(x) dV . \quad (4.5)$$

Segundo a equação acima, podemos interpretar a função de correlação  $\xi(x)$ , como uma medida direta da capacidade de aglomeração de estruturas em torno de um ponto. A partir das definições acima podemos discutir melhor a relação existentes entre os estudos teóricos e os dados observacionais, já que o que observamos são as concentrações de objetos em um volume do Universo, ou seja, a função de correlação.

A função de correlação pode ser relacionada diretamente com as flutuações de massa na forma

$$\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \langle \delta_k \rangle^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} . \quad (4.6)$$

Na tentativa de construir uma relação direta entre observação  $\xi(x)$  e a teoria  $\delta_k$  é preciso desenvolver uma ligação direta entre as quantidades observadas e suas predições teóricas. No que remete a teoria, os coeficientes  $\delta_k$  estão ligados às flutuações de massa de uma maneira bem peculiar de forma que é importante discutir um pouco sobre esta relação. As propriedades estatísticas de uma distribuição de galáxias e aglomerados de galáxias podem ser melhor estudadas através da definição do **espectro de potência**.

O primeiro passo na tentativa de se realizar um tratamento estatístico para as perturbações é discretizar o Universo, ou seja, dividi-lo em volumes (células) independentes, onde a densidade de massa do Universo possua características estatísticas idênticas em cada volume. No entanto, a medida que estas células evoluem a interação gravitacional mútua existente, não permite que estes volumes evoluam de maneira independente. Dessa forma, trabalhar no espaço das posições não seria apropriado a fim de se manter a independência de cada célula. Surge então uma justificativa para a utilização de outra abordagem para as perturbações da densidade. Este

tratamento consiste em identificar cada perturbação como uma superposição de ondas planas. É necessário utilizar o espaço de Fourier (ou espaço recíproco), de forma que, cada onda plana está associada a um número de onda  $k$  que evolui independentemente enquanto ainda permanece no regime linear. Podemos desta forma, escrever o contraste da densidade como

$$\delta(\vec{x}) = \sum_k \delta_k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \sum_k \delta_k^* \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) . \quad (4.7)$$

Acima, os coeficientes de Fourier  $\delta_k$  são quantidades complexas que podem ser calculados através da expressão

$$\delta_k = \frac{1}{V_j} \int_{V_j} dx^3 \delta(x) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} . \quad (4.8)$$

Na expressão acima para os coeficientes de Fourier  $\delta_k$ ,  $V_j$  é o volume de cada célula representada no espaço de Fourier. Isto nos possibilita calcular todos os coeficientes  $\delta_k$  de forma a conhecer completamente  $\delta(x)$ .

Como estamos interessados nas propriedades estatísticas de  $\delta(x)$ , temos que, por definição, o valor médio de  $\delta(x)$  é zero,  $\langle \delta \rangle = 0$ . No entanto, a sua variância, não é.

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle = \sum \langle \delta_k \rangle^2 = \frac{1}{V_j} \sum_k \delta_k^2 . \quad (4.9)$$

Se tomarmos o limite  $V_j \rightarrow \infty$ , a variância pode ser escrita como

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta_k^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \delta_k^2 4\pi k^2 = \int_0^\infty d(\ln k) \Delta_k^2 , \quad (4.10)$$

onde

$$\Delta_k^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P(k) . \quad (4.11)$$

$P(k)$  é identificado como o espectro de potência da perturbação e  $\Delta_k^2$  é a contribuição para a variância de cada intervalo logarítmico de  $k$ . A função  $P(k)$  é exatamente o que nos permite comparar teoria e observação, já que, como os modos perturbados evoluem dentro do regime linear, a forma da função  $P(k)$  não é modificada neste período, enquanto que somente as amplitudes da perturbação  $\delta_k$  é que variam neste intervalo.

## 4.2 A análise do espectro de potência e a comparação com os dados observacionais

Na seção 3.3, derivamos as equações que regem o comportamento das perturbações relativísticas no modelo de aceleração transitória [61]. Nosso objetivo, é resolver a equação (3.163) através de um processo numérico, já que uma análise analítica é inviável para este tipo de equação. A fim de realizar o cálculo numérico de esta equação e sendo que trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem, o resultado esperado só pode ser obtido se fixarmos as condições iniciais do problema. Além disso, é necessário também, definir os limites de variação utilizados para o redshift e para as escalas  $k$  nos processos de resolução da equação (3.163).

A expressão para o espectro de potência final, em  $z = 0$ , pode ser encontrada com ajuda da função de transferência BBKS para o  $\Lambda$ CDM [64],

$$P(k) = |\delta_m(k)|^2 = AkT^2(k) \frac{g^2(\Omega_{T_0})}{g^2(\Omega_{m_0})}, \quad (4.12)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização,  $T(k)$  é dado por

$$T(k) = \frac{\ln(1 + 2.34q)}{2.34q} [1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4]^{-\frac{1}{4}}, \quad (4.13)$$

com  $q \equiv k / [(h\Gamma)\text{Mpc}^{-1}]$ , onde  $\Gamma$  é o assim chamado parâmetro de forma, o qual pode ser escrito como

$$\Gamma \equiv \Omega_{m_0} h e^{-\Omega_{b_0} - \frac{\Omega_{b_0}}{\Omega_{m_0}}}, \quad (4.14)$$

e  $\Omega_{m_0}$ ,  $\Omega_{b_0}$  e  $\Omega_{T_0}$ , são, respectivamente, os parâmetros de densidade atuais da matéria (bariônica + escura), bárions e energia total.

A função  $g(\Omega)$  tem em conta a modificação induzida no espectro de potência pela presença de uma constante cosmológica. Essa expressão pode ser escrita como

$$g(\Omega) \equiv \frac{5}{2}\Omega \left[ \Omega^{4/7} - \Omega_{\Lambda_0} + \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right) \left(1 + \frac{\Omega_{\Lambda_0}}{70}\right) \right]^{-1}, \quad (4.15)$$

onde  $\Omega_{\Lambda_0}$  é a fração de massa associada à constante cosmológica  $\Lambda$ .

No processo de fixação das condições iniciais consideramos que cada modo perturbado corresponde a um número de onda  $k$ , onde podemos fixar um valor inicial para  $|\delta(k)|$  de acordo com (4.12). Quando fixamos as condições iniciais do problema buscamos como base um cenário compatível com os dados observacionais.

A fim de escolher apropriadas condições iniciais, usamos a circunstancia que em tempos

primitivos, ou seja, para fatores de escala pequenos  $a \ll 1$ , a equação (3.163), assintoticamente tem a forma do modelo do Einstein-de Sitter

$$\delta_m'' + \frac{3}{2a} \delta_m' - \frac{3}{2a^2} \delta_m = 0, \quad (a \ll 1), \quad (4.16)$$

o qual coincide com a equação correspondente ao modelo  $\Lambda$ CDM nessa aproximação. Isso nos permite relacionar o nosso modelo com o modelo  $\Lambda$ CDM em grandes redshift. Integrando o modelo  $\Lambda$ CDM no passado bem para atrás, digamos no  $z = 10^5$ , obtemos a forma da função de transferência naquele momento, o espectro determinado deste modo é então utilizado como condição inicial para o nosso modelo. Este processo é semelhante ao descrito em mais detalhe nas referências [65, 66].

Agora, vamos apresentar a análise da estatística bayesiana, para confrontar com os dados observacionais do projeto 2dFGRS [22], que cobre a faixa de escalas  $0.01\text{Mpc}^{-1} < kh^{-1} < 0.185\text{Mpc}^{-1}$ , para o espectro de potência da matéria  $P(k)$ , como foi feito em [26]. Para isso vamos a escrever a função  $\chi^2$  como segue

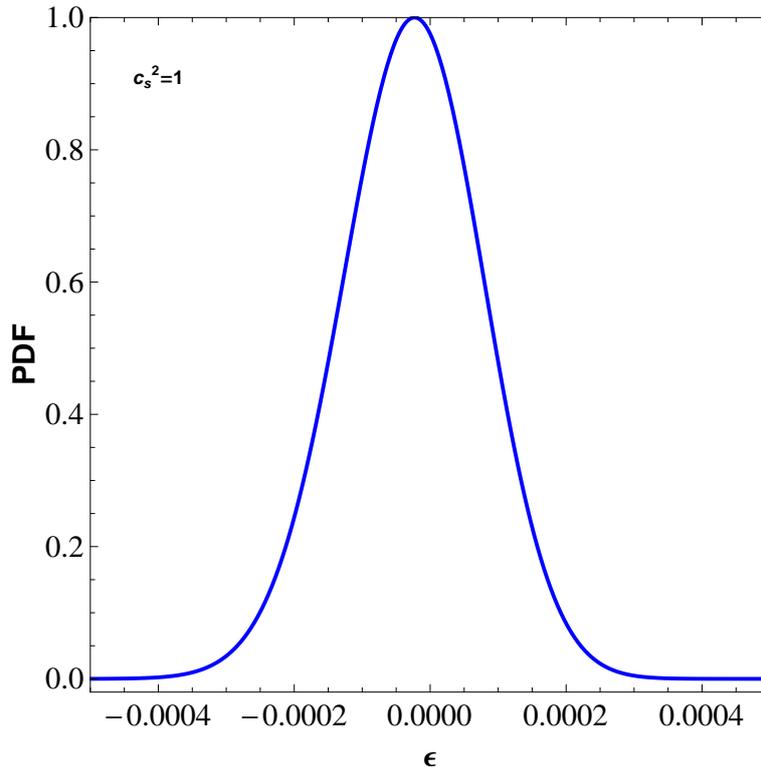
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[P(k)_i^{obs} - P(k_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.17)$$

onde a soma é de todos os  $n$  dados,  $P(k)_i^{obs}$  e  $P(k_i|\theta)$  são o espectro de potência observado e teórico do  $i$ -ésimo dado com  $\theta$  a quantidade de parâmetros livres (nesse caso  $\epsilon$ ) e  $\sigma$  o respectivo erro de medição. A função de probabilidade PDF do parâmetro  $\epsilon$ , mostrada na figura 4.1, pode ser encontrado usando a equação (2.96), onde obtemos o valor de melhor ajuste em  $\epsilon = -0.000023$  (neste caso, como foi feito no caso newtoniano, os parâmetros  $\sigma$ ,  $\bar{K}$  e  $h$  foram fixados aos valores da tabela 2.1).

Na figura 4.2, apresentamos o espectro de potência da matéria, para  $c_s^2 = 1$  e diferentes valores de  $\epsilon$ . A dependência da escala através do coeficiente  $G(a)$  na equação (3.163), é sensível ao produto  $\epsilon c_s^2$ . A linha sólida, representa o valor de melhor ajuste global ( $\epsilon = -0.000023$ ). No entanto, sobre largas escalas, a curva com  $\epsilon = 0.001$  mostra um melhor desempenho. Para  $c_s^2 = 1$ , somente um fator muito pequeno de  $\epsilon$  é compatível com os dados observacionais. Caso contrário, aparecem oscilações não observadas no espectro de potências, semelhante no caso do comportamento do gas de Chaplygin (generalizado) [62, 67].

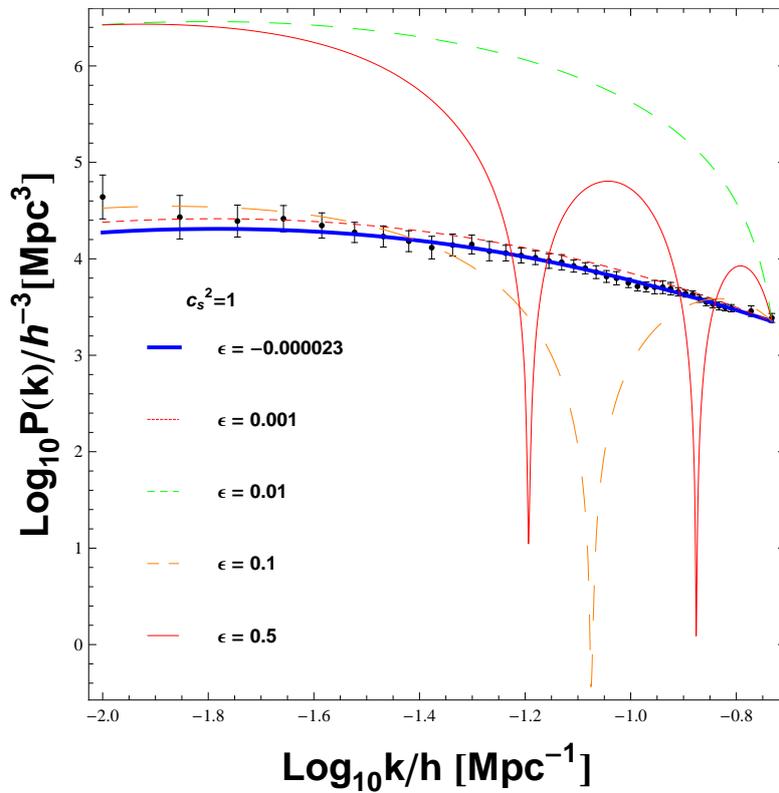
Na janela esquerda da figura 4.3 apresentamos uma ilustração alternativa do espectro de potência da matéria. A janela direita na figura 4.3, é confirmado que não tem dependência das escalas para  $c_s^2 = 0$ . Não tem dependência sobre  $\epsilon$  também. A linha solida azul reproduz justamente a função de transferência BBKS.

Verificamos que, também para pequenos valores não desprezíveis de  $c_s^2$ , por exemplo  $c_s^2 = 0.1$ , os valores de melhor ajuste para  $\epsilon$  são de ordem de  $10^{-4} \dots 10^{-3}$ . Embora, quando  $\epsilon$  é uma

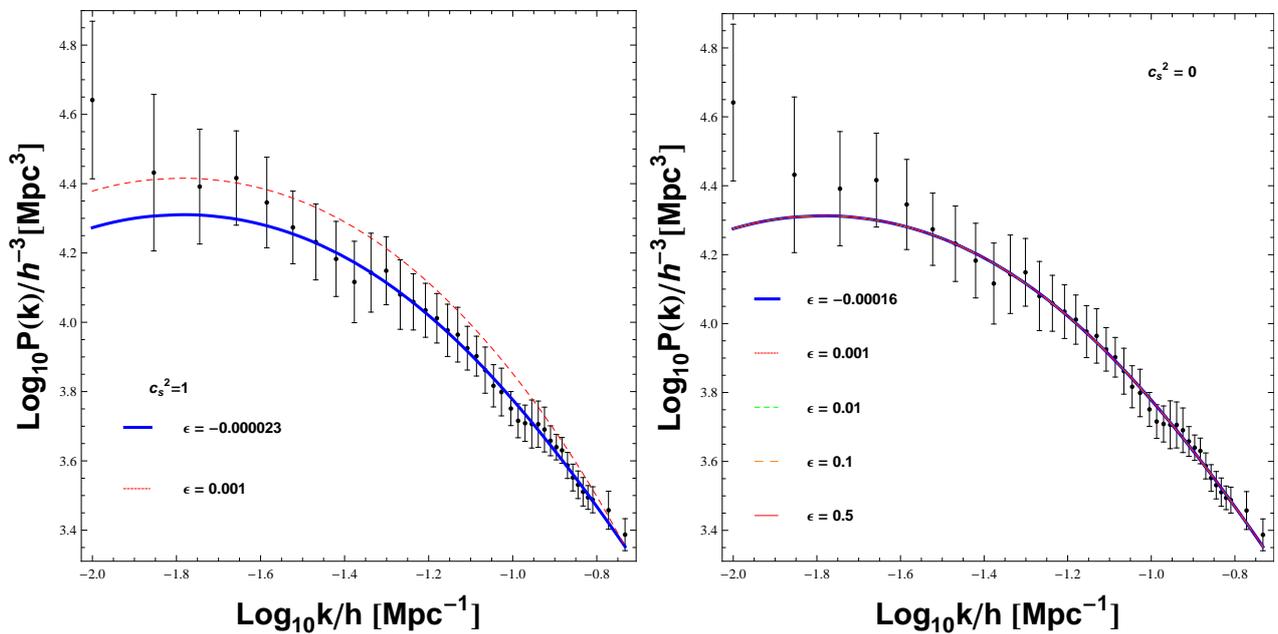


**Figura 4.1:** A função de distribuição de probabilidade PDF do parâmetro  $\epsilon$  para  $c_s^2 = 1$  .

constante, corresponde a uma aproximação muito grosseira, estes resultados indicam que as flutuações da energia escura, são pequenas em efeito nas escalas que são relevantes na formação de estruturas. Por outro lado, se fosse zero exatamente, não haveria qualquer dependência de escala. Na janela esquerda da figura 4.3 mostramos, até mesmo um valor muito pequeno de  $\epsilon$ , embora consideravelmente maior do que o valor de melhor ajuste influencia o espectro substancialmente nas escalas maiores. Isso demonstra um papel crescente das perturbações de energia escura com escala crescente. O ponto aqui é que um número muito maior de dados para as escalas menores tem mais peso na análise estatística do que menos dados nas escalas maiores. Obviamente, o mesmo valor constante de  $\epsilon$  (um quase desprezível), que dá uma descrição correta em menor escala não é a adequada sobre as escalas maiores da amostra (painel da esquerda na figura 4.3). Por outro lado, um bom desempenho em grandes escalas não é compatível com as observações nas escalas tanto nas intermediárias quanto nas pequenas.



**Figura 4.2:** O espectro de potência da matéria para  $c_s^2 = 1$  e diferentes valores do parâmetro  $\epsilon$ . A linha sólida (azul), representa o valor de melhor ajuste global ( $\epsilon = -0.000023$ ). Contudo, sobre largas escalas, a curva com  $\epsilon = 0.001$  mostra um melhor desempenho. Valores maiores do  $\epsilon$  resultam em oscilações (não observadas).



**Figura 4.3:** O espectro de potência de matéria para  $c_s^2 = 1$  (janela esquerda) e para  $c_s^2 = 0$  (janela direita). Enquanto o valor de melhor ajuste total para  $c_s^2 = 1$  é  $\epsilon = -0.000023$ , obviamente, sobre largas escalas a linha tracejada com  $\epsilon = 0.001$  dá uma melhor descrição. Isso corresponde à expectativa de que as perturbações na energia escura são mais relevantes sobre largas escalas. Para  $c_s^2 = 0$  as linhas resultantes não dependem do  $\epsilon$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesse trabalho, foi mostrado que uma interação no setor escuro (matéria escura e energia escura) do universo pode dar origem a uma expansão em aceleração transitória, coisa que algumas pesquisas recentes parecem indicar. A interação foi a cancelar a constante cosmológica “pura” e mesmo assim, a parte da interação dependente do tempo é capaz de gerar uma expansão acelerada. Enquanto, a estrutura detalhada da interação fora escolhida por conveniência matemática, isto admite uma solução analítica da dinâmica do fundo, pensamos que isto pode ser usado a discutir características gerais dos modelos de aceleração transitória. O modelo  $\Lambda$ CDM não é capaz de reproduzir tal comportamento, pois no futuro o universo seria dominado pela constante cosmológica, o que causaria uma expansão acelerada para sempre. Fazemos uma análise estatística baseada sobre os dados das supernovas SNIa da amostra Constitution reconsiderando a dinâmica do fundo deste modelo. O modelo prediz um mínimo futuro do parâmetro de desaceleração  $q$  o qual no futuro muda para valores positivos (como na figura 2.2). Foi investigada a dinâmica perturbativa do modelo nas ambas abordagens a newtoniana quanto a relativística. Usando uma simples parametrização para o termo de interação perturbado no regime newtoniano e incluindo perturbações da componente da energia escura com um simples ansatz, confrontamos uma análise estatística, usando a coleção de dados da função de crescimento [21]. Isto permitiu-nos quantificar, embora com uma grande dispersão, o papel do termo de interação perturbado e a contribuição das perturbações da energia escura. As perturbações da matéria desviam mais forte do comportamento do Einstein-de Sitter que para o modelo  $\Lambda$ CDM (Fig. 3.1). Isto corresponde a uma maior diferença para a função de crescimento  $f(z)$ . O contraste da densidade passa através de um máximo perto do tempo presente e irá diminuir no futuro. A constante gravitacional efetiva  $G_{eff}$  desvia consideravelmente a partir de  $G$  para  $a > 1$ , mas a razão  $G_{eff}/G$  aproxima para a unidade novamente no limite extremo futuro (Fig. 3.2).

A análise das perturbações relativísticas para o sistema de duas componentes interagindo foi realizada em termos das quantidades invariantes de gauge com a interpretação física no gauge

comóvel. As perturbações nestes tipos de sistemas são intrinsecamente não-adiabáticas. Para separar a equação da perturbação relevante assumimos por simplicidade, que as perturbações da fração da energia escura são proporcionais às perturbações da fração da matéria escura. A análise estatística, com base nos dados do projeto 2dFGRS revela, que o fator de proporcionalidade é muito pequena. Em outras palavras, aparentemente as perturbações da energia escura não parecem contribuir em escalas que são relevantes para a formação das estruturas. No entanto, a nossa análise mostra também que a faixa de dados considerada não é adequadamente descrita por um fator constante. Para menores escalas, temos muito mais dados do que para escalas maiores. Por conseguinte, os dados em pequena escala têm maior peso estatístico que os poucos dados das escalas maiores. Em menor escala, as flutuações da energia escura são irrelevantes, de fato. Por outro lado, é óbvio, que em escalas maiores a melhor curva global não fornece uma boa descrição das observações. Um valor consideravelmente maior (mas ainda pequeno) dos resultados de fatores mencionados, dá uma melhor descrição das observações (Fig. 4.3). Isso indica um papel crescente das perturbações de energia escura com escala crescente, um assunto que merece atenção nas futuras pesquisas.

# Apêndice A

## As equações de campo de Einstein

As equações de Einstein são a generalização relativista da lei de gravitação de Newton. A visão de Einstein, baseada na igualdade das massas inercial e gravitacional, foi que não existem força gravitacional. Ou seja o movimento de uma partícula na influência de uma força gravitacional na teoria Newtoniana, é o movimento livre ao longo duma geodésica curva no espaço-tempo curvo na teoria da relatividade geral. A lei da gravitação de Newton diz como a massa gera a força gravitacional. As equações de campo de Einstein demandam que a matéria e a energia curvam o espaço-tempo. Ele sabia que a conservação de energia-momento de um contínuo de matéria e energia deve ser descrito covariantemente pela nulidade da divergência de um tensor energia-momento simétrico de rango 2. Assim as equações de campo devem ser da mesma forma: Um tensor de curvatura simétrico de divergência livre de rango 2 é proporcional ao tensor energia-momento. O tensor de Einstein tem as propriedades corretas para representar a parte geométrica das equações de Einstein.

### As equações de campo vácuo da teoria de relatividade geral

O principio variacional tem a forma

$$\delta S_G = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $S_G$  é a ação integral para a gravitação.  $S_G$  tem uma natureza geométrica e é da forma

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_M \mathcal{L}[g_{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\kappa$  é uma constante. A constante  $\kappa$  sera determinada sobre o requerimento que as equações de campo se reduzem as leis de Newton no limite de campo fraco.

A função  $\mathcal{L}[g_{\mu\nu}]$  tem que ser um escalar para que a integral transforme de uma maneira

invariante. Devido à simplicidade escalar involucrada, a curvatura é o escalar de Ricci, usaremos

$$\mathcal{L} [g_{\mu\nu}] = R - 2\Lambda , \quad (\text{A.3})$$

onde, temos introduzido também uma constante pura na ação,  $\Lambda$ .

Esta constante é chamada **a constante cosmológica**. A ação por tanto será

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x . \quad (\text{A.4})$$

Vamos a variar a ação dentro duma região infinitesimal  $V$ , deixando que a variação da métrica e da sua derivada sejam desprezíveis na fronteira da região. Depois calculamos a variação da ação, e deduzimos as equações de campo de Einstein com o requerimento que  $\delta S_G = 0$  para variações arbitrárias da métrica.

Escrevendo

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} - 2\Lambda \sqrt{-g}) d^4x , \quad (\text{A.5})$$

fazendo a variação achamos

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa} \int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta [g^{\mu\nu} \sqrt{-g}] - 2\Lambda \delta [\sqrt{-g}]) d^4x . \quad (\text{A.6})$$

Introduzindo um sistema local de coordenadas com simbolos de Christoffel desprezíveis no  $V$ , as componentes do tensor de Ricci se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda , \quad (\text{A.7})$$

assim, temos

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda , \quad (\text{A.8})$$

a variação comuta com as derivadas parciais, de modo que

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{,\lambda} - (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{,\nu} ; \quad (\text{A.9})$$

devido que as derivadas parciais da métrica são desprezíveis no  $V$  a equação anterior pode ser escrita

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu)_{,\lambda} , \quad (\text{A.10})$$

por simplicidade de cálculo definimos o vetor

$$A^\lambda = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu . \quad (\text{A.11})$$

A equação (A.10), agora, toma a seguinte forma

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = A_{,\lambda}^\lambda , \quad (\text{A.12})$$

isso é uma divergência total, e aqui, de acordo com o teorema de Stokes (ou teorema integral de Gauss), a integral deste termo somente contribui com os termos da fronteira. Devido que a métrica e suas derivadas são desprezíveis sobre a fronteira de  $V$ , isto segue que

$$\int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}) d^4x = 0 , \quad (\text{A.13})$$

desta maneira o primeiro termo da equação (A.6) não contribui à  $\delta S_G$ .

Agora, calculamos o último termo na equação (A.6). A variação de  $\sqrt{-g}$  é

$$\delta \sqrt{-g} = \left[ \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha\beta}} \right] \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) \delta g_{\alpha\beta} , \quad (\text{A.14})$$

usando a fórmula

$$g = \sum_{\alpha} g_{\alpha\beta} \text{Cof}^{\alpha\beta} = \frac{\text{Cof}^{\alpha\beta}}{g^{\alpha\beta}} , \quad (\text{A.15})$$

onde  $\text{Cof}^{\alpha\beta}$  é a matriz cofator do elemento  $g_{\alpha\beta}$  na matriz feita das componentes do tensor métrico, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = \text{Cof}^{\alpha\beta} = g g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.16})$$

e substituindo em (A.14), encontramos

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} . \quad (\text{A.17})$$

Agora, pode ser feito o seguinte

$$\delta [g^{\mu\nu} \sqrt{-g}] = \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} , \quad (\text{A.18})$$

notamos que isto é suficiente para calcular  $\delta g_{\alpha\beta}$ . Devido a que temos

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta_{\beta}^{\mu} , \quad (\text{A.19})$$

então

$$\delta (g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta}) = 0 , \quad (\text{A.20})$$

no qual resulta

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu} . \quad (\text{A.21})$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \delta [g^{\mu\nu} \sqrt{-g}] &= \sqrt{-g} \left( \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right) , \\ &= \sqrt{-g} \left( \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Inserindo as equações (A.17) e (A.22) no (A.6), obtemos

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} d^4x . \quad (\text{A.23})$$

As equações de campo vácuo da teoria da relatividade geral resultam do requerimento que  $\delta S_G = 0$  para alguma variação da métrica. Isto leva a

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0 . \quad (\text{A.24})$$

### As equações de campo na presença de matéria e energia

As equações de campo num ponto com tensor energia-momento não desprezível é obtido do princípio variacional

$$\delta (S_G + S_M) = 0 , \quad (\text{A.25})$$

onde  $s_M$  é a ação integral para a matéria e energia, a qual pode ser escrita como

$$S_M = \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x , \quad (\text{A.26})$$

onde  $\mathcal{L}_M$  é a densidade lagrangiana da matéria e energia.

A variação do argumento na equação (A.26) dá

$$\delta [\sqrt{-g} \mathcal{L}_M] = \frac{\partial [\sqrt{-g} \mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial [\sqrt{-g} \mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}_{,\lambda} , \quad (\text{A.27})$$

isso foi porque a Lagrangiana em geral depende da métrica e as derivadas da métrica. Isto é o caso porque a expressão para  $\mathcal{L}_M$  pode ser encontrada da relatividade especial substituindo derivadas parciais pelas derivadas covariantes. Assim introduz símbolos de Christoffel, ou seja derivadas da métrica, na expressão.

Definimos um vetor  $B$  por

$$B^\lambda = \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g_{,\lambda}^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.28})$$

a divergência ordinária (não covariante) de  $B$  é

$$B_{,\lambda}^\lambda = \left( \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g_{,\lambda}^{\mu\nu}} \right)_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g_{,\lambda}^{\mu\nu}} \delta g_{,\lambda}^{\mu\nu}, \quad (\text{A.29})$$

introduzindo isto no (A.27) temos

$$\delta [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M] = \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \left( \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g_{,\lambda}^{\mu\nu}} \right)_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + B_{,\lambda}^\lambda. \quad (\text{A.30})$$

Assim, o termo  $\int B_{,\lambda}^\lambda d^4x$  contribui somente com o termo na fronteira, devido ao teorema integral de Gauss. Desprezamos este termo na fronteira porque nos assumimos que as variações na fronteira são desprezíveis. Então finalmente temos

$$\delta S_M = \int \left[ \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} - \left( \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g_{,\lambda}^{\mu\nu}} \right)_{,\lambda} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.31})$$

O tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  de um sistema com densidade lagrangiana  $\mathcal{L}_m$  é um tensor simétrico definido por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} - \left( \frac{\partial [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g_{,\lambda}^{\mu\nu}} \right)_{,\lambda} \right], \quad (\text{A.32})$$

que comparando com (A.31), encontramos

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (\text{A.33})$$

substituindo (A.23) e (A.33) no (A.25), temos então que o princípio variacional dá as equações de campo da teoria de relatividade geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.34})$$

estas são as famosas equações de campo de Einstein.

Contraindo a equação (A.34), temos

$$R = -\kappa T + 4\Lambda, \quad (\text{A.35})$$

onde  $T$  é o tensor energia-momento contraído,  $T = T^\mu_\mu$ . Introduzindo (A.35) em (A.34), obtemos

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (\text{A.36})$$

essa equação reflete a simetria nas equações, o tensor de Ricci e o tensor de energia-momento são invariantes sobre uma permutação entre os dois tensores. As equações do vácuo com uma constante cosmológica são

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.37})$$

com  $\Lambda = 0$ , encontramos

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.38})$$

devemos enfatizar contudo, que isto não significa que o espaço-tempo seja plano. A razão é que o tensor de Riemann consiste basicamente de duas partes, uma dá a contribuição ao tensor de Ricci sobre contração. A outra parte, o traço do tensor de Riemann, não vai dar alguma contribuição ao tensor de Ricci. Assim, isto não é determinado pelas equações de campo de Einstein.

# Apêndice B

## As equações hidrodinâmicas

### A equação de continuidade

Se consideramos um elemento de volume fixo em coordenadas eulerianas  $x^i$  (não comoveis), depois o índice de cambio dessa massa pode ser escrito

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho(x^i, t)}{\partial t} dV, \quad (\text{B.1})$$

este índice é totalmente determinado pelo fluxo de matéria que passa pela superfície  $s$  que rodeia o volume

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = - \oint \rho v^i ds_i = - \int_{\Delta V} (\rho v^i)_{,i} dV. \quad (\text{B.2})$$

As equações (B.1) e (B.2), são consistentes somente se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{,i} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Essa é a famosa equação de continuidade para os fluídos, que fornece a conservação da massa que reside no interior dum volume  $\Delta V$ .

### As equações de Euler

A aceleração dum elemento diferencial de massa  $\Delta M$ , é determinado pela força gravitacional

$$F_i^{\text{grav}} = \Delta M \phi_{,i}, \quad (\text{B.4})$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional e a força dada pela pressão  $p$

$$F_i^{\text{pres}} = - \oint p ds_i = - \int_{\Delta V} p_{,i} dV \simeq -p_{,i} \Delta V = -p_{,i} \frac{\Delta M}{\rho}. \quad (\text{B.5})$$

Com a aceleração

$$g_i \equiv \frac{dv_i(x^j(t), t)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{dx^j(t)}{dt} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (v^j \nabla_j) v_i, \quad (\text{B.6})$$

da lei de forças de Newton

$$\Delta M g_i = F_i^{\text{grav}} + F_i^{\text{pres}} \quad (\text{B.7})$$

usando (B.4), (B.5) e (B.6), obtemos as equações de Euler

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v^j \nabla_j) v_i + \frac{1}{\rho} p_{,i} + \phi_{,i} = 0. \quad (\text{B.8})$$

### A equação de Poisson

Finalmente, a equação que determina o potencial gravitacional é a bem conhecida equação de Poisson

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho. \quad (\text{B.9})$$

As equações (B.3), (B.8) e (B.9), junto com a equação de estado  $p = p(\rho)$ , formão um conjunto completo de seis equações, as que permitem encontrar as seis funções não conhecidas  $\rho$ ,  $v^i$ ,  $\phi$  e  $p$ . A solução mais geral dessas equações tem que depender de quatro constantes, a qual em nosso caso são quatro funções arbitrárias de  $x^i$ . As equações hidrodinâmicas são não lineares e em geral são difíceis de resolver. Contudo, ao estudar o comportamento das pequenas perturbações em torno dum fundo homogêneo e isótropo, é apropriado linearizar-los.

# Apêndice C

## As perturbações newtonianas no modelo $\Lambda$ CDM

Nesse apêndice vai ser apresentado as perturbações Newtonianas no caso do modelo  $\Lambda$ CDM estudado anteriormente.

Considerando que  $\hat{\rho}_\Lambda = 0$  e da equação de balanço de energia da matéria desacoplada e para  $\delta_m \equiv \frac{\hat{\rho}_m}{\bar{\rho}_m}$ , pode ser encontrado a equação central do crescimento das perturbações (similarmente à seção 3.1)

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_m = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde foi considerado o índice do Hubble para o modelo  $\Lambda$ CDM (2.40).

Pode ser de utilidade também escrever a equação (C.1) em função da variável  $a$ , fazendo

$$\dot{\delta}_m = \frac{d\dot{\delta}_m}{da}\dot{a} \equiv \delta'_m aH \quad (\text{C.2})$$

e

$$\ddot{\delta}_m = \frac{d\dot{\delta}_m}{da}\dot{a} = \frac{d}{da}(\delta'_m aH) aH = [\delta'_m aH + \delta'_m H + \delta'_m aH'] aH. \quad (\text{C.3})$$

Por outro lado, derivando a equação (2.40) com respeito à variável  $a$ , obtemos

$$H' = -\frac{3}{2a} \frac{H_0^2 \bar{\Omega}_{m_0}}{H} a^{-3}. \quad (\text{C.4})$$

Para o termo  $4\pi G\bar{\rho}_m$  em (C.1) podemos escrever

$$4\pi G\bar{\rho}_m = \frac{3}{2} H_0^2 \bar{\Omega}_{m_0} a^{-3}. \quad (\text{C.5})$$

Agora, substituindo (C.2), (C.3), (C.4) e (C.5) em (C.1), temos

$$\delta_m'' + \frac{3}{a} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{H^2} \bar{\Omega}_{m_0} a^{-3} \right] \delta_m' - \frac{3}{2a^2} \frac{H_0^2}{H^2} \bar{\Omega}_{m_0} a^{-3} \delta_m = 0. \quad (\text{C.6})$$

Escrevendo a equação (2.40) na forma

$$\frac{H_0^2}{H^2} \bar{\Omega}_{m_0} a^{-3} + \frac{H_0^2}{H^2} \bar{\Omega}_\Lambda = 1 \quad (\text{C.7})$$

e substituindo-a em (C.6), obtemos

$$\delta_m'' + \frac{3}{2a} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{H^2} \bar{\Omega}_\Lambda \right] \delta_m' - \frac{3}{2a^2} \left[ 1 - \frac{H_0^2}{H^2} \bar{\Omega}_\Lambda \right] \delta_m = 0. \quad (\text{C.8})$$

que é a equação central do crescimento das perturbações Newtonianas para o modelo  $\Lambda$ CDM. Notar que no caso em que  $\Omega_\Lambda = 0$ , recuperamos o caso do universo de Einstein de Sitter.

Agora, introduzindo aqui, a função de crescimento (3.37) definida na seça 3.1, obtemos

$$\frac{df}{d \ln a} + f^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{H^2} \bar{\Omega}_\Lambda - \frac{2}{3} \right) f - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{H_0^2}{H^2} \bar{\Omega}_\Lambda \right) = 0, \quad (\text{C.9})$$

que define a equação da evolução da função de crescimento no modelo  $\Lambda$ CDM.

# Apêndice D

## A equação de Raychaudhuri

Vamos considerar em toda generalidade o que acontece com uma congruência (coleção) de partículas tendo uma quadrivelocidade  $u^\alpha$  que caem sob sua própria gravidade. Nós sabemos do movimento do fluido que isto pode sofrer os seguintes efeitos:

1. Expansão ou contração do volume a qual é dado pela divergência de  $u^\alpha$ , definido como  $\Theta = u^\alpha_{;\alpha}$ .
2. Cisalhamento, distorção em forma, sem alteração do volume, é dada por um tensor simétrico, que é traço livre (sem variação em volume) e ortogonal a  $u^\alpha$ , definido por

$$\sigma_{\alpha\beta} = u_{(\alpha;\beta)} + \dot{u}_{(\alpha}u_{\beta)} - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\Theta, \quad (\text{D.1})$$

onde  $u_{(\alpha;\beta)} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha})$  e  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ .

3. Rotação ou vorticidade, rotação sem mudança na forma, dada por um tensor antisimétrico ortogonal ao  $u^\alpha$ ,

$$\omega_{\alpha\beta} = u_{[\alpha;\beta]} + \dot{u}_{[\alpha}u_{\beta]}, \quad (\text{D.2})$$

onde  $u_{[\alpha;\beta]} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha})$ .

4. Aceleração devido à força não-gravitacional como a gradiente de pressão, é um vetor definido por  $\dot{u}_\alpha \equiv u_{\alpha;\beta}u^\beta$  o qual é ortonormal a  $u^\alpha$ .

Agora, das equações (D.2) e (D.1), obtemos

$$u_{\alpha;\beta} = \dot{u}_\alpha u_\beta + \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta}. \quad (\text{D.3})$$

Por outro lado, pela definição da curvatura de Riemann

$$u^\alpha_{;\beta\gamma} - u^\alpha_{;\gamma\beta} = R^\alpha_{\nu\gamma\beta}u^\nu, \quad (\text{D.4})$$

contraindo  $\alpha = \beta$

$$u^\alpha_{;\alpha\gamma} - u^\alpha_{;\gamma\alpha} = R^\alpha_{\nu\gamma\alpha}u^\nu = -R^\alpha_{\nu\alpha\gamma}u^\nu = -R_{\nu\gamma}u^\nu, \quad (\text{D.5})$$

multiplicando por  $u^\beta$  e fazendo a contração  $\gamma = \beta$

$$(u^\alpha_{;\alpha\beta} - u^\alpha_{;\beta\alpha}) u^\beta = -R_{\nu\beta} u^\nu u^\beta, \quad (\text{D.6})$$

e tendo em consideração que  $u^\alpha_{;\alpha;\beta} u^\beta = \dot{\Theta}$ , obtemos

$$\dot{\Theta} - u^\alpha_{;\beta;\alpha} u^\beta = -R_{\nu\beta} u^\nu u^\beta. \quad (\text{D.7})$$

Depois escrevendo

$$\begin{aligned} u^\alpha_{;\beta;\alpha} u^\beta &= (u^\alpha_{;\beta} u^\beta)_{;\alpha} - u^\alpha_{;\beta} u^\beta_{;\alpha} \\ &= \dot{u}^\alpha_{;\alpha} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} u_{\mu;\beta} u_{\nu;\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

usando (D.3) e tendo em consideração as propriedades de simetria e anti simetria, encontramos

$$u^\alpha_{;\beta\alpha} u^\beta = \dot{u}^\alpha_{;\alpha} - \frac{1}{3}\Theta^2 + 2(\omega^2 - \sigma^2), \quad (\text{D.9})$$

onde foram definidas as quantidades  $\omega^2 \equiv \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$  e  $\sigma^2 \equiv \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ .

Então, se substituimos (D.9) em (D.7)

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \dot{u}^\alpha_{;\alpha} = R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta. \quad (\text{D.10})$$

Por outro lado, das equações de campo de Einstein

$$\begin{aligned} R^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\nu\beta}R &= \kappa T^{\nu\beta}, \\ R - 2R &= \kappa T^\nu_\nu \equiv \kappa T, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

então

$$R_{\nu\beta} = \kappa(T_{\nu\beta} - \frac{1}{2}g_{\nu\beta}T), \quad (\text{D.12})$$

multiplicando por  $u^{\nu\beta}$  e usando o tensor de energia-momento para um fluido perfeito  $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p h_{\mu\nu}$ , obtemos

$$R_{\nu\beta} u^\nu u^\beta = \frac{\kappa}{2}(\rho + 3p). \quad (\text{D.13})$$

Por último, substituindo (D.13) em (D.10), obtemos a famosa equação de Raychaudhuri

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \dot{u}^\alpha_{;\alpha} = \frac{\kappa}{2}(\rho + 3p). \quad (\text{D.14})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* 116, 1009 (1998)[astro-ph/9805201 ]; S. J. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* 517, 565(1999); A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* 607, 665(2004); P. Astier *et al.*, *Astron. Astrophys.* 447, 31 (2006). 1, 14
- [2] M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], *Phys. Rev. D* 69, 103501 (2004); K. Abazajian *et al.* [SDSS Collaboration], *Astron. J.* 128, 502 (2004); K. Abazajian *et al.* [SDSS Collaboration], *Astron. J.* 129, 1755 (2005). 1, 14
- [3] H. V. Peiris *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 148 (2003) 213 [astro-ph/0302225]; C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 148 1 (2003); D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 148 175 (2003). 1
- [4] S. Boughn and R. Chritenden, *Nature (London)* **427**, 45 (2004); P. Vielva, E. Martínez-González, and M. Tucci, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **365**, 891 (2006). 1
- [5] D.J. Eisenstein *et al.*, *Ap.J.* **633**, 560 (2005), arXiv:astro-ph/0501171. 1
- [6] C.R. Contaldi, H. Hoekstra, and A. Lewis, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 221303 (2003). 1
- [7] T.M. Nieuwenhuizen, P.D. Keefe and V. Špička, arXiv:1108.3485. 1
- [8] R.R. Caldwell, *Phys. Lett. B* **545**, 23 (2002). 1
- [9] R.R. Caldwell, M. Kamionkowski and N.N.Weinberg, *Phys.Rev.Lett.* **91**, 071301 (2003). 1
- [10] P.H. Frampton, K.J. Ludwick and R.J. Scherrer, *Phys. Rev. D* **84**, 063003 (2011), arXiv:1106.4996. 1
- [11] A. Albrecht and C. Skordis, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2076 (2000). 1
- [12] J.D. Barrow, R. Bean and J.Magueijo, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **316**, L41 (2000). 1
- [13] M.C. Bento, O. Bertolami and N.C. Santos, *Phys. Rev. D* **65**, 067301 (2002). 1
- [14] A. Shafieloo, V. Sahni and A.A. Starobinsky, *Phys. Rev. D* **80**, 101301 (2009), arXiv:0903.5141. 2, 15
- [15] Zhengxiang Li, Puxun Wu and Hongwei Yu, *Phys. Lett. B***695**, 1 (2011); arXiv:1011.1982. 2
- [16] Rong-Gen Cai and Zhong-Liang Tuo, arXiv:1105.1603. 2

- [17] F.C. Carvalho, J.S. Alcaniz, J.A.S. Lima and R. Silva, Phys.Rev.Lett. **97**, 081301 (2006), arXiv:astro-ph/0608439. [2](#), [16](#)
- [18] A. C. C. Guimarães and J. A. S. Lima, Could the cosmic acceleration be transient? A cosmographic evaluation, Classical and Quantum Gravity, **28**, 12, 125026(2011), arXiv:1005.2986. [2](#), [16](#)
- [19] F.E M. Costa and J.S. Alcaniz, Cosmological consequences of a possible  $\Lambda$ -dark matter interaction, Phys. Rev. D, **81**, 043506(2010), arXiv:0908.4251. [2](#), [16](#)
- [20] J.C. Fabris, B. Fraga, N. Pinto-Neto and W. Zimdahl, JCAP **1004** (2010) 008, arXiv:0910.3246. [2](#), [16](#), [17](#), [20](#), [21](#)
- [21] Yungui Gong, Phys.Rev.D **78**, 123010 (2008). [vi](#), [viii](#), [2](#), [30](#), [31](#), [32](#), [33](#), [62](#)
- [22] S. Cole *et al.*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **362**, 505 (2005). [2](#), [58](#)
- [23] D. Sapone and M. Kunz, Phys.Rev.D **80**, 083519 (2009). [2](#)
- [24] C.-G. Park, J. Hwang, J. Lee, and H. Noh, Phys. Rev. Lett. **103**, 151303 (2009). [2](#), [27](#), [50](#)
- [25] E. Sefusatti and F. Vernizzi, JCAP **1103**,047 (2011); arXiv:1101.1026. [2](#)
- [26] W. Zimdahl, H.A. Borges, S. Carneiro, J.C. Fabris and W.S. Hipólito-Ricaldi, JCAP **1104** (2011) 028. [2](#), [27](#), [30](#), [45](#), [50](#), [58](#)
- [27] M. Hicken *et al.*, Astrophys. J. **700**, 1097 (2009). [2](#), [21](#)
- [28] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, New York, 1972. [6](#), [36](#)
- [29] D. J. Fixsen *et al.*, The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set, ApJ. **473**, 576(1996). [12](#)
- [30] S. Dodelson, Modern Cosmology, Fermi National Accelerator Laboratory, University of Chicago, Academic Press, 2003. [12](#)
- [31] M. Fukugita, C. J. Hogan and P. J. E. Peebles, The Cosmic Baryon Budget, ApJ. **503**, 518(1998). [13](#)
- [32] E. Komatsu *et al.*, Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy probe (WMAP) Observations: Cosmological interpretation, ApJ. **192**, 18(2011). [13](#), [14](#)
- [33] R. Cen and J. P. Ostriker, Where are the Baryons?, ApJ. **514**, 1(1999). [13](#)
- [34] C. R. Contaldi, H. Hoekstra and A. Lewis, Joint CMB and weak lensing analysis: physically motivated constraints on cosmological parameters, Phys. Rev. Lett., **90**, 221303(2003). [13](#)
- [35] W. J. Percival *et al.*, Measuring the Baryon Acoustic Oscillation scale using the SDSS and 2dFGRS, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **381**, 1053-1066(2007). [14](#)
- [36] T. Padmanabhan, Cosmological constant - the weight of vacuum, Physics reports, **308**, 235-320(2003). [14](#)

- [37] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005. [14](#), [33](#), [34](#), [36](#)
- [38] S. Weinberg, The cosmological constant problem, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 61, No. 1, January 1989. [14](#)
- [39] N. Pinto-Neto and B. M. O. Fraga, Cosmic acceleration from interaction of ordinary fluids, *Gen. Rel. Grav.*, 23, 1663-1674(2008). [15](#)
- [40] R. Lazkoz, G. Calder-Cabral, C. G. Böhrer, and Roy Maartens, Dynamics of dark energy with a coupling to dark matter, *Phys. Rev. D*, 78, 023505(2008). [15](#)
- [41] D. Pavon and W. Zimdahl, Holographic dark energy and cosmic coincidence, *Phys. Lett. B*, 628, 206(2005). [15](#)
- [42] W. Zimdahl, Dark energy: A unifying view, *Int. J. Mod. Phys. D*, 17, 651(2008). [15](#)
- [43] M. Chevallier and D. Polarski, Accelerating Universes with Scaling Dark Matter, *Int. J. Mod. Phys. D*, 10, 213-224(2010). [15](#)
- [44] E. V. Linder, Cosmic shear with next generation redshift surveys as a cosmological probe, *Phys. Rev. D*, 68, 083503(2003). [15](#)
- [45] P. C. Gregory, *Bayesian logical data analysis for the physical sciences*, Cambridge University Press, 2005. [21](#), [31](#)
- [46] I. Durán, D. Pavón and W. Zimdahl, *JCAP* **1007**(2010) 018. [27](#), [30](#), [50](#)
- [47] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882(1980). [39](#)
- [48] D. Pavón and B. Wang, Le Châtelier-Braun principle in cosmological physics, *Gen. Rel. Grav.*, 41, 1(2009). [20](#)
- [49] E.V. Linder and A. Jenkins, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **346**, 573 (2003). [30](#)
- [50] J.-P. Uzan, *Gen.Rel.Grav.***39**, 307 (2007); arXiv:astro-ph/0605313. [30](#)
- [51] D. Huterer and E.V. Linder, *Phys.Rev.D* **75**, 023519 (2007); arXiv:astro-ph/0608681. [30](#)
- [52] C. Di Porto and L. Amendola, *Phys.Rev.D* **77**, 083508 (2008); arXiv:0707.2686. [30](#)
- [53] A. Kiakotou, Øystein Elgarøy, and O. Lahav, *Phys.Rev.D* **77**, 063005 (2008), arXiv:0709.0253 [30](#)
- [54] A. Mantz, S.W. Allen, H. Ebeling and D. Rapetti, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **387**, 1179 (2008); arXiv:0709.4294. [30](#)
- [55] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, *Phys.Rev.D* **77**, 023504 (2008); arXiv:0710.1092. [30](#)
- [56] D. Polarski and R. Gannouji, *Phys.Lett.***B660**, 439 (2008); arXiv:0710.1510 [30](#)
- [57] Yungui Gong, Mustapha Ishak and Anzhong Wang, *Phys.Rev.D* **80**, 023002 (2009); arXiv:0903.0001. [30](#)

- [58] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and H. R. Brandenberger, *Phys. Rep.* 215, 203(1992). 33
- [59] J. Dossett, M.Ishak, J. Moldenhauer, Yungui Gong and Anzhong Wang, *JCAP* **1004** 022 (2010) 30
- [60] G. Caldera-Cabral, R. Maartens and B.M. Schaefer, *JCAP* **0907** 027 (2009). 30
- [61] C. Zuñiga, W. Hipólito-Ricaldi and W. Zimdahl, arXiv:1112.5337. 50, 57
- [62] W.S. Hipólito-Ricaldi, H.E.S. Velten and W. Zimdahl, *JCAP* 0906 (2009) 016. 47, 58
- [63] P. J. E. Peebles, *The Large-Scale Structure of Universe*, Princeton, (1980). 54
- [64] J.M. Bardeen, J.R. Bond, N. Kaiser and A.S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986); J. Martin, A. Riazuelo and M. Sakellariadou, *Phys. Rev.* **D61**, 083518 (2000). 57
- [65] J.C. Fabris, I.L. Shapiro and J. Solà, *JCAP* **0702**, (2007) 016. 58
- [66] H.A. Borges, S. Carneiro, J.C. Fabris and C. Pigozzo, *Phys. Rev.* **D77**, 043513 (2008). 58
- [67] H.B. Sandvik, M. Tegmark, M. Zaldariaga and I. Waga, *Phys. Rev. D* 69, 123524 (2004). 58