

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

LUIS IVAN MORALES BAUTISTA

**EXTENSÃO SUPERSIMÉTRICA DO MODELO  
BF BIDIMENSIONAL E A QUANTIZAÇÃO DE  
LAÇOS**

VÍTORIA  
2012

LUIS IVAN MORALES BAUTISTA

**EXTENSÃO SUPERSIMÉTRICA DO MODELO BF  
BIDIMENSIONAL E A QUANTIZAÇÃO  
DE LAÇOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Olivier Piguet

VITÓRIA  
2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

B352e Bautista, Luis Ivan Morales, 1977-  
Extensão supersimétrica do modelo BF bidimensional e a  
quantização de laços / Luis Ivan Morales Bautista. – 2012.  
119 f. : il.

Orientador: Olivier Piguet.

Coorientador: Clisthenis Ponce Constantinidis.

Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal do  
Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Supersimetria. 2. Gravitação. 3. Gravidade quântica. 4.  
Campos de calibre (Física). I. Piguet, Olivier. II. Constantinidis,  
Clisthenis Ponce. III. Universidade Federal do Espírito Santo.  
Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53

---

# EXTENSÃO SUPERSIMÉTRICA DO MODELO BF BIDIMENSIONAL E A QUANTIZAÇÃO DE LAÇOS

LUIS IVAN MORALES BAUTISTA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.

Aprovada o 30 de Março de 2012

## COMISSÃO EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Francisco Gomes  
Instituto de Física Teórica (IFT/UNESP)

---

Prof. Dr. Daniel Heder Theodoro Franco  
Universidade Federal de Viçosa (UFV)

---

Prof. Dr. Olivier Piguet  
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)  
Orientador

---

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis  
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)  
Co-orientador

---

Prof. Dr. Júlio César Fabris  
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

*A meus pais Luis e Lourdes*

# Agradecimentos

Estou profundamente agradecido e em dívida com meu orientador, Olivier Piguet, pela paciência, disposição, encorajamento e amizade, pela ajuda incondicional, tanto no nível científico como pessoal, e ser sempre uma pessoa fina e maravilhosa. Um especial agradecimento aos Professores Clithenis Constantinidis e Galen Sotkov por tudo seu apoio e ajuda. A os colegas e amigos do grupo de Física Teórica pelas discussões, a todos amigos que fizeram possível minha estadia feliz e agradável.

Um agradecimento especial à FAPES (Fundação de Amparo à Pesquisa do Espírito Santo), pelo suporte financeiro. E a Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

“Science is organized common sense where many of beautiful theory was killed by an ugly fact.”

*Thomas Henry Huxley.*

# Resumo

Um dos grandes desafios da física nos últimos cinquenta anos tem sido a conciliação da Mecânica Quântica com a Relatividade Geral, numa teoria Quântica da Gravitação. Teoria que até hoje não foi encontrada, de forma concreta, devido a sua complexidade, sobretudo quando tratamos sistemas gravitação-matéria, e a falta de tecnologias que possam nos dar evidências experimentais. Mas, existem muitos modelos teóricos que procuram explicar esta teoria, entre os quais temos a Gravitação Quântica de Laços. Para entender e simplificar as dificuldades teóricas da Gravitação Quântica de Laços em 3+1 dimensões, estudamos modelos de dimensões mais baixas. Partindo do modelo topológico BF, discutimos nesta tese sistemas gravitação-matéria do espaço-tempo bidimensional, a través de extensões supersimétricas  $N = 1$ . Discutimos dois modelos: 1.) Num primeiro modelo, o grupo de calibre da teoria é dado pelo supergrupo super (anti-)de Sitter,  $S(A)dS$ , que é a extensão supersimétrica  $N = 1$  do grupo de calibre  $(A)dS$ , a qual possui três geradores bosônicos e dois geradores fermiônicos. 2.) No segundo modelo acoplamos matéria, sendo guiados pela existência de uma supersimetria rígida (estudamos especificamente a gravitação num espaço Riemanniano com constante cosmológica positiva), onde os campos do modelo BF usual são expressos em termos de supercampos, como grupo de calibre sendo uma “supersimetria” de  $SU(2)$ . Neste caso particular quantizamos o modelo extendendo as técnicas usadas na Gravitação Quântica de Laços. Em ambos casos, discutimos a estrutura canônica do modelo, mostramos que a Hamiltoniana do modelo é completamente vinculada, bem como construímos quantidades invariantes de calibre (observáveis de Dirac).



# Abstract

One of the main challenges in theoretical physics over the last fifty years has been to reconcile Quantum Mechanics with General Relativity into a theory of Quantum Gravity. Theory that has not yet been found, in a concrete way, due to its complexity, specially when we deal with gravity-matter systems, and lack of technologies that may give us experimental evidences. But, there are many theoretical models which try to explain this theory, among of them we have Loop Quantum Gravity. In order to understand and simplify the difficulties of of Loop Quantum Gravity theory in  $3 + 1$  dimensions, we study models in lower dimensions. Starting from a topological BF model, discussed in this thesis gravity-matter systems of two-dimensional space-time, by means of supersymmetric extensions  $N = 1$ . We discuss two models: 1.) In the first model, the gauge group of the theory is given by the super-(anti-) de Sitter,  $S(A)dS$ , supergroup, that is a supersymmetric extension  $N = 1$  of the (A)dS gauge group, which have three bosonic generator and two fermionic generators. 2.) In the second model, we couple topological matter, being guided by the existence of a rigid supersymmetry (specifically we study the Euclidean gravity with positive cosmological constant), where the fields content is of the theory is expressed in terms of superfields, with the gauge group being a "supersymmetrization" of  $SU(2)$ . In this particular case we quantize the model by extending techniques well used in Loop Quantum Gravity. In both cases, we discuss the canonical structure of the model, we show that the Hamiltonian of the theory is completely constrained, we also construct gauge invariant quantities (Dirac observables).

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Gravitação Clássica 2D</b>	<b>15</b>
2.1	Introdução . . . . .	15
2.2	Modelo de Jackiw-Teitelboim . . . . .	16
2.3	Modelo BF bidimensional . . . . .	17
2.3.1	Ação BF 2D . . . . .	19
2.3.2	Simetrias de Calibre e de Difeomorfismo . . . . .	21
2.3.3	Análise Canônica do Modelo BF . . . . .	22
2.3.4	Álgebra de Vínculos . . . . .	23
2.3.5	Invariantes de Calibre (Observáveis de Dirac) . . . . .	24
2.4	Quantização de Laços do Modelo BF 2D . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Supergravitação 2D, S(A)dS</b>	<b>28</b>
3.1	Introdução . . . . .	28
3.2	Modelo BF Supersimétrico . . . . .	29
3.2.1	Superálgebra (anti) de Sitter, s(a)ds . . . . .	29
3.2.2	Ação Super-BF 2D . . . . .	31
3.2.3	Simetrias de Calibre e de Difeomorfismo . . . . .	32
3.3	Análise Canônica . . . . .	34
3.3.1	Momentos Conjugados . . . . .	34
3.3.2	Supercolchetes De Poisson . . . . .	35
3.3.3	A Hamiltoniana . . . . .	36
3.3.4	Álgebra de Vínculos . . . . .	38
3.3.5	Vínculos de Primeira Classe como Geradores da Simetria de Calibre . . . . .	39
3.4	Superholonomia . . . . .	41
3.5	Observáveis de Dirac . . . . .	43
<b>4</b>	<b>O Modelo BF acoplado com Matéria Topológica</b>	<b>45</b>
4.1	Introdução . . . . .	45
4.2	O Modelo BF com Supersimetria Rígida . . . . .	46

4.2.1	A Ação Super-BF . . . . .	46
4.2.2	Equações de Movimento . . . . .	48
4.2.3	Supergrupo de Calibre . . . . .	49
4.3	Simetrias . . . . .	50
4.3.1	Transformações de Calibre . . . . .	51
4.3.2	Transformações de Calibre Infinitesimais . . . . .	52
4.3.3	Transformações de Difeomorfismo Infinitesimais . . . . .	53
4.4	Análise Canônica . . . . .	53
4.4.1	A Hamiltoniana . . . . .	55
4.4.2	Álgebra de Vínculos . . . . .	56
4.4.3	Superholonomias . . . . .	58
4.5	Observáveis de Dirac . . . . .	60
4.6	Quantização de Laços . . . . .	61
4.6.1	Espaço de Hilbert . . . . .	61
4.6.2	Medida de Integração . . . . .	63
4.6.3	Produto Interno . . . . .	67
4.6.4	Observáveis de Dirac . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Álgebra de Grassmann e Superespaço.</b>	<b>72</b>
A.1	Álgebra de Grassmann . . . . .	72
A.1.1	Álgebra . . . . .	72
A.1.2	Álgebra de Grassmann . . . . .	73
A.2	Superespaço . . . . .	75
A.2.1	Superespaço e Superfunções em $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ . . . . .	75
A.2.2	Diferenciabilidade de uma Superfunção sobre $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ . . . . .	76
A.2.3	Propriedades de Derivação de uma Superfunção . . . . .	77
A.2.4	Integral de Berezin . . . . .	78
<b>B</b>	<b>Superálgebras e Supergrupos.</b>	<b>79</b>
B.1	Propriedades Gerais da Superálgebra de Lie . . . . .	79
B.1.1	Superálgebras de Lie . . . . .	79
B.1.2	Representações das superálgebras de Lie . . . . .	81
B.1.3	Representação Adjunta e a Forma de Killing . . . . .	82
B.2	Supermatrizes . . . . .	83
B.2.1	Multiplicação por um Escalar de Grassmann . . . . .	85
B.2.2	Supertransposta e Supertraço. . . . .	85
B.2.3	Superdeterminante de uma Supermatriz par . . . . .	86

B.2.4	Adjunta e Superadjunta . . . . .	86
B.2.5	Diferenciação de Supermatrizes . . . . .	87
B.3	Definições . . . . .	88
B.3.1	Superálgebra de Lie $sl(p/q; \mathbb{R}), sl(p/q; \mathbb{C})$ . . . . .	88
B.3.2	Superálgebra de Lie Orto-simplética $osp(p/q)$ . . . . .	89
B.3.3	Álgebra (Anti)de Sitter, $(a)ds$ . . . . .	91
B.3.4	Superálgebra (Anti) de Sitter, $s(a)ds$ . Generalização de $osp(1,2)$ . . . . .	93
B.4	A Representação Adjunta e a Superforma Quadrática de Killing . . . . .	95
B.5	Supergrupos . . . . .	97
<b>C</b>	<b>Teoria de Representação do Grupo Super (Anti) de Sitter, <math>S(A)dS</math></b>	<b>100</b>
C.1	Representações Irredutíveis da Superálgebra $s(a)ds$ . . . . .	100
<b>D</b>	<b>Holonomias</b>	<b>107</b>
D.1	Holonomia . . . . .	107
D.2	Transformação de Calibre da Holonomia . . . . .	109
D.3	Transformação de Calibre Infinitesimal da Holonomia . . . . .	111

# Capítulo 1

## Introdução

Nos tempos atuais, as duas teorias físicas mais bem estabelecidas são, a Mecânica Quântica (MQ), a qual é probabilística, não local e discreta, e a Relatividade Geral (RG), que é determinística, local e contínua. Ambas estão lado a lado na descrição das interações fundamentais que governam nosso mundo físico, que vão das escalas do nível atômico, regidas pela MQ, às escalas do nível cosmológico, regidas pela RG. A interação gravitacional é descrita pela RG, uma teoria de campos clássicos na qual a métrica determina a geometria do espaço-tempo. E as interações eletrofraca e forte são descritas pela teoria quântica de campos, que tem com base a MQ. Estas duas teorias, MQ e RG, têm modificado os fundamentos conceituais da física clássica –mecânica clássica e teoria não-relativística–, de maneira bem consistente e têm obtido uma vasta comprovação experimental.

Apesar do sucesso da MQ e da RG, não temos uma base conceitual que possa explicar ambas teorias. Razão pela qual, não contamos ainda com uma teoria capaz de prever o que acontece no regime físico na qual ambas teorias são relevantes, a escala de Planck,  $10^{-33}$  cm, na qual supostamente as propriedades quânticas do espaço-tempo manifestam-se. A procura de coerência entre a matéria e a descrição geométrica do espaço-tempo indicam a necessidade de uma teoria completa da Gravitação Quântica. Hoje em dia esta teoria é activamente procurada pela comunidade de físicos teóricos.

A Gravitação Quântica vem atraindo a atenção da comunidade científica há mais de 30 anos, mas ainda está longe de ser compreendida e explicada completamente. Embora existam alguns progressos do lado teórico devido à presença de pelo menos duas teoria candidatas viáveis, teo-

ria de Cordas e a Gravitação Quântica de Laços, (entre outras aproximações, como Geometria Não-comutativa [30], Triangulação Dinâmica Causal [2], Twistor Theory [58], etc. ), a ausência de quaisquer suporte experimental, seja direto ou indireto, até agora, é ainda intrigante. A principal dificuldade na obtenção de evidência experimental esta relacionada ao valor extremamente grande da escala da energia de Plank, que é da ordem de  $10^{16}$ TeV, na qual sinais da gravitação quântica são supostos a aparecer. Esta é de 15 ordens da grandeza maior que a escala de energia testada pelos experimentos atuais de física de altas energias como o LHC, *Large Hadron Collider*.

A Gravitação Quântica é abordada de dois pontos de vista, do ponto de vista de um físico de partículas e do ponto de vista de um relativista.

Do ponto de vista de um físico de partículas, a gravitação é simplesmente a última e a mais fraca das interações fundamentais da natureza, assim, o problema da gravitação quântica é encarado como o último passo no caminho à teoria da grande unificação. Com esta perspectiva tenta-se entender as propriedades da gravitação quântica usando estratégias que se usam exitosamente no tratamento das outras interações fundamentais. Esta forma de atacar o problema nos leva à Teoria das Cordas, mas com a particularidade da existência de um espaço-tempo 26 dimensional – ou 10 se tomamos em conta a existência de fermions – para ter coerência teórica. Com o descobrimento da supergravitação, nos anos 70's, onde trabalhou-se muito com a esperança de construir uma teoria da gravitação quântica, conclui-se que a dimensão máxima do espaço-tempo, para que a supergravitação possa existir, deveria ser  $D = 11$ . Logo com o objetivo de descrever uma teoria em dimensão,  $D=4$ , a supergravitação poderia ter um supersimetria de ordem  $N=8$  no máximo. Mas o problema da não renormalizabilidade da teoria, fez que a comunidade dos físicos se virasse à teoria de supercordas, que por muitos anos foi considerada como uma teoria que era capaz de descrever nosso mundo físico no nível fundamental, incluindo a gravitação quântica. Hoje em dia o problema ainda não foi resolvido. Na Teoria de Cordas e supercordas, interpreta-se à gravitação como uma excitações da corda vivendo em algum espaço métrico, um fundo. A existência de tal espaço de fundo, no qual a teoria é definida, é a ferramenta técnica chave para a formulação e interpretação da teoria, o que dificulta a compreensão de um regime não perturbativo. As teorias de cordas e supercordas, apesar de seus fundamentos não serem bem entendidos e de estar longe de descrever com precisão nosso mundo real. Elas têm grandes méritos, como, a unificação das diferentes interações fundamentais, expansão perturbativa bem entendida (exceto o problema da provável finitude ultravioleta) e tem uma teoria matemática muito rica.

Por outro lado, para um relativista, a idéia de uma descrição fundamental da relatividade em termos de excitações físicas sobre um espaço de fundo é fisicamente errôneo. Tem-se que ter em conta que a RG é uma teoria invariante sob as transformações gerais das coordenadas do espaço-tempo (transformações de difeomorfismo), isto é, covariante e independente do espaço métrico de fundo sobre o qual a física acontece.

Ao contrário da teoria de Cordas, a Gravitação Quântica de Laços não tem como objetivo unificar todas as interações fundamentais em uma teoria simples. Ela desde o princípio, parte de um tratamento canônico não perturbativo e independente do fundo, e suas pretensões são menos ambiciosas que da teoria de Cordas, pois ela tenta apenas construir uma teoria que possa descrever os fenômenos da gravitação no nível da escala de Planck, tentando conciliar unicamente a MQ com a RG, sem a consideração de dimensões extras e supersimetria, ingredientes essenciais da teoria de Cordas e supercordas. Assim a Gravitação Quântica de Laços, é uma tentativa de quantizar a RG, e oferece uma possível estrutura conceitual na qual RG e MQ sejam consistentes e que tenham sentido juntos, usando as técnicas de quantização canônica.

A idéia básica em tentar quantizar a Relatividade Geral, usando a técnica da formulação Hamiltoniana, foi descrita inicialmente por Bryce DeWitt, baseada nos trabalhos de Peter Bergmann [20], usando as técnicas de quantização canônica para sistemas vinculados construídas por Dirac [39], já que a RG é um sistema completamente vinculado. A abordagem de Dirac de sistemas vinculados permite a quantização de sistemas que possuem simetrias de calibre, utilizando a técnica de quantização canônica. Assim, numa abordagem não perturbativa - Gravitação Quântica de Laços - a Relatividade Geral é tratada apenas como uma teoria dinâmica de conexões. Com esta abordagem ela pode ser tratada de forma análoga às teorias de calibre usuais, no sentido que o espaço de fase cinemático se assemelha ao da teoria de Yang-Mills.

A Gravitação Quântica de Laços, começou a emergir depois de que Ashtekar introduziu uma nova variável, a conexão inicialmente complexa, para descrever a RG isto já pelos 80's [5]. Depois estas variáveis, foram colocadas em forma real por Barbero [15]; a partir daí foram desenvolvidas muitas técnicas para a construção de espaços de Hilbert e a definição da representação dos operadores de vínculos sobre estes espaços de Hilbert [12, 65, 68, 74]. Esta abordagem fornece uma formulação teórica bem definida e bem estabelecida matematicamente, da imagem física do nosso mundo, e das previsões quânticas na escala de Planck. O sucesso desta teoria inclui a determinação do espectro de quantidades geométricas, tais como área e volume [10, 11, 69], a derivação da fórmula de Bekenstein para a entropia dos buracos negros [7-9],

e resultados de cosmologia quântica [24–26].

Apesar do progresso inegável da Gravitação Quântica de Laços durante as últimas décadas, ainda falta muito a ser entendido, em especial o que refere-se à formulação dinâmica, a qual é estudada ao longo de diferentes direções e em diversas variantes (como por exemplo *Spin Foam*); o limite semi-clássico da RG não está ainda sido bem estabelecido, como também a inclusão de matéria resulta ser um tópico bastante complicado.

A questão é se os resultados e a simplicidade geométrica obtidos pela Gravitação Quântica de Laços, na gravitação pura, sobrevivem na presença de matéria. Esta questão é importante, já que os campos de matéria são os constituintes da teoria relativista e os observáveis físicos são definidos na presença da matéria. Na Gravitação Quântica de Laços, a gravitação é tratada como um sistema quântico vinculado. Como quaisquer teoria com Lagrangiana invariante de parametrização, a Hamiltoniana do campo gravitacional acoplado à matéria acaba por ser vinculada.

Thiemann teve êxito na quantização da Hamiltoniana da gravitação acoplada a campos de matéria do modelo padrão, sobre um espaço de Hilbert cinemático [23, 73, 74]. Este é um passo importante para implementar a dinâmica na teoria, não obstante os operadores de vínculos resultam ser extremadamente complicados. Apesar do esforço dado nesta linha [1, 23, 73, 74], estamos longe de um entendimento sólido de sistemas gravitação–matéria. Isto é devido à gravitação quântica e campos de matéria quântica serem tópicos altamente complicados.

Teorias fisicamente realistas, são em geral altamente complexas e em geral é quase impossível resolvê-las analiticamente. A gravitação 4-dimensional, é ainda uma teoria não bem entendida, devido à complexidade que ela apresenta. Por tal motivo, é natural procurar instruções em teorias de dimensões inferiores, e espera-se que as informações recolhidas nestes cenários possam ser de certa utilidade. Em dimensões mais baixas, existe uma equivalência entre teorias topológicas e gravitação. No caso bidimensional podemos ver isto no modelo de Jackiw-Teitelboim [50, 52, 52, 71, 72], que pode ser colocado como um caso particular do modelo topológico do tipo BF [22] bidimensional [32, 33, 44, 45, 49, 56].

Nesta tese, acoplamos matéria ao modelo BF bidimensional, com base na supersimetria  $N = 1$ , e o fazemos de dois modos: 1) num primeiro modelo consideramos uma supergravitação, com grupo de calibre o supergrupo S-(Anti) de Sitter,  $S(A)dS$ , que é uma extensão supersimétrica do grupo (Anti) de Sitter (A)dS [32, 33] que descreve o modelo BF bidimensional com constante



cosmológica, que pode ser considerado como a generalização do supergrupo  $OSp(1,2)$  [16, 18], e 2) acoplamos matéria topológica no modo proposto por Leitteb, Schweda e Zerrouki [54], mas aqui consideramos sua estrutura supersimétrica, aparentemente não notada por esses autores. Esta supersimetria é rígida e o grupo de calibre é um supergrupo deformado de  $SU(2)$ .

Acreditamos que abordagens deste tipo possam ser úteis tanto para o entendimento de questões ligadas à quantização de teorias invariantes por difeomorfismos, quanto para o teste deste método de quantização não perturbativo em teorias de campo. Deve-se observar que, apesar da LQG não considerar a supersimetria como princípio fundamental, sua estrutura permite que ela possa ser incorporada naturalmente à teoria. À primeira vista, as teorias descritas pelo modelo BF podem parecer triviais e desinteressantes, mas, muito pelo contrário podemos aprender muito destas, que podem nos ajudar no entendimento de teorias mais complicadas.

Esta tese está dividida de acordo à seguinte estrutura: No Capítulo 2, damos uma revisão rápida da gravitação pura do modelo BF dois-dimensional relacionada ao modelo de Jackiw-Teitelboim. No Capítulo 3, estudamos a supergravitação 2D, escrita como uma extensão supersimétrica do modelo BF em 2D, com o supergrupo de calibre  $S(A)dS$ , discutimos a representação de sua superálgebra  $s(a)ds$ . No formalismo canônico, determinamos os vínculos, a álgebra de Poisson deles, para logo construir os observáveis clássicos do modelo. No Capítulo 4, estudamos também a extensão supersimétrica do grupo  $(A)dS$ , mas consideramos unicamente um espaço com geometria Riemanniana e considera-se a constante cosmológica positiva. Neste caso o acoplamento de matéria é feito por meio de uma supersimetria rígida, diferente do caso anterior  $S(A)dS$ , simetria aparentemente não notada pelos autores da Ref. [54]. Estudamos a estrutura canônica do modelo, construímos seus observáveis clássicos e quantizamos a teoria baseando-nos na Gravitação Quântica de Laços. No Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Finalizamos com o Apêndice, com a finalidade de fazer esta tese autoconsistente, aqui damos as ferramentas e definições matemáticas básicas que serão usadas no desenvolvimento do trabalho. Este apêndice está dividido em quatro tópicos: 1) Damos as definições básicas de álgebra de Grassmann e superespaço. 2) Introduzimos as definições de superálgebras e de suas representações; as definições de supermatrizes, com supertraço, superdeterminante, superadjunta, etc. Construímos explicitamente os geradores da superálgebra  $s(a)ds$ . 3) Estudamos a representação de  $s(a)ds$ , e 4) Damos as definições e propriedades do conceito de holonomia.

# Capítulo 2

## Gravitação Clássica 2D

### 2.1 Introdução

Dadas as dificuldades que temos para entender teorias em quatro dimensões, geralmente nos voltamos para dimensões menores. A Relatividade Geral não é uma exceção. Recorremos em geral a dimensões inferiores na esperança de que a teoria se simplifique.

Neste capítulo apresentamos a teoria BF da gravitação pura do espaço-tempo bidimensional [44, 45, 49], este modelo está relacionado ao modelo de Jakiw-Teitelboim, que foi proposto, independentemente, por Jackiw [50–52] e Teitelboim [71, 72], como um modelo alternativo para descrever a gravitação no espaço-tempo bidimensional, já que a ação de Einstein-Hilbert nesta dimensão é uma constante, e como tal não fornece nenhuma informação sobre a teoria.

Iniciamos o capítulo com uma rápida revisão do modelo de Jackiw-Teitelboim, que descreve a dinâmica da gravitação pura com constante cosmológica, no formalismo métrico no espaço-tempo bidimensional. Logo passamos a descrever a ação do modelo BF bidimensional, este descreve a gravitação bidimensional tendo como variáveis fundamentais, a conexão 1-forma  $A$  e um campo escalar  $\phi$ , que são validados na álgebra de Lie do grupo (Anti)-de Sitter, denotado por (A)dS [32, 33, 49]. Fazemos a análise canônica do modelo, determinando os vínculos da teoria e sua álgebra de colchetes de Poisson, e finalizamos dando um comentário rápido da teoria quântica usando o método da Quantização de Laços [33, 56].

## 2.2 Modelo de Jackiw-Teitelboim

Dada a variedade  $\mathcal{M}$ , o espaço-tempo bidimensional, a ação de Einstein-Hilbert,  $S_{EH}$ , com constante cosmológica  $\Lambda$ , é dada por:

$$S_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^2x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.1)$$

onde  $c$  sendo a velocidade da luz,  $G$  a constante gravitacional de Newton,  $g$  o determinante da métrica bidimensional, e  $R$  o escalar de curvatura, é topológica, isto é, a gravitação bidimensional é não dinâmica, conseqüentemente, a dinâmica gravitacional não pode ser descrita pela equação de Einstein<sup>1</sup>,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

dado que o tensor de Ricci,  $R_{\mu\nu}$ , no espaço-tempo bidimensional é identicamente igual a  $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , vemos que a equação (2.2) se reduz a  $\Lambda g_{\mu\nu} = 0$ , de onde temos como solução não admissível  $g_{\mu\nu} = 0$ , quando  $\Lambda \neq 0$ , e  $g_{\mu\nu}$  é totalmente indeterminado quando  $\Lambda = 0$ . Assim, podemos observar que a equação de movimento (2.2), obtida a partir da ação  $S_{EH}$ , não dá informação alguma acerca da teoria.

Devido a este inconveniente, Jackiw e Teitelboim, independentemente, inspirados na teoria clássica de Liouville, propuseram que a gravitação bidimensional poderia ser governada pela dinâmica de Liouville, representada pela equação

$$R - 2\Lambda = 0, \quad (2.3)$$

em substituição da equação de Einstein (2.2). Eles sugeriram a seguinte ação,

$$S_{JT} = \int d^2x \phi \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.4)$$

como substituto para a ação de Einstein-Hilbert, da qual a equação (2.3) poderia ser derivada. Aqui  $\phi$  é um campo escalar, conhecido como campo de dilaton, e faz o papel de multiplicador de Lagrange.

---

<sup>1</sup>Os índices gregos, minúsculas do meio do alfabeto,  $\mu, \nu, \dots (= t, x)$ , referem-se as coordenadas do espaço-tempo.

A ação (2.4) é invariante sobre difeomorfismos é conhecida como a ação de Jackiw-Teitelboim.

## 2.3 Modelo BF bidimensional

Modelos BF [22, 59] são teorias topológicas do tipo Schwarz que podem ser definidos numa variedade  $\mathcal{M}$  de quaisquer dimensão  $n$ , e esta está definida pela ação,

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} BF$$

onde a 2-forma  $F$  é a curvatura de Yang-Mills da conexão de calibre  $A = A_{\mu} dx^{\mu}$ , e  $B$  é uma  $(n - 2)$ -forma. Esta ação é sendo independente da métrica tem significado topológico. Para o caso bidimensional o campo  $B$  é um 0-forma (um escalar).

No formalismo métrico, ou formalismo de segunda ordem, a gravitação pura bidimensional representa-se pela ação de Jackiw-Teitelboim, equação (2.4), e pode ser obtida a partir de uma ação topológica do tipo  $BF$  bidimensional, a qual é dada no formalismo de primeira ordem.

No formalismo de primeira ordem [57], a teoria da gravitação é formulada como uma teoria de calibre, e como tal, é escrita em termos do D-bein (para nosso caso 2-dimensional  $D=2$ , o *zweibein*)  $e_{\mu}^I$  e a conexão de spin  $\omega_{\mu}^{IJ} = -\omega_{\mu}^{JI}$ , os quais são vistos como quantidades independentes<sup>2</sup>.

Uma ação invariante de calibre para a gravitação bidimensional foram tratadas inicialmente por Fukuyama e Kaminura [44, 45] considerando o grupo de calibre  $O(2,1)$ , e independentemente, por Isler e Trugenberger [49] que consideram o grupo de calibre  $SO(2,1)$ , também por Chamseddine e Wyler [28, 29] tendo os grupos de  $SO(2,1)$  e  $ISO(1,1)$  como grupo de calibre, entre outros.

O modelo, ao ser tratado como uma teoria de calibre, está baseado numa conexão  $A$ . Em duas-dimensões a conexão  $A$ , uma 1-forma, é tomada como uma combinação do *zweibein* e a conexão de spin, e toma valores na álgebra de Lie do grupo de Poincaré,  $ISO(1,1)$ , os geradores sendo, translações do espaço-tempo e o *boost* de Lorentz,  $(P_I, (I = 0, 1))$  e  $\mathbf{\Lambda}$ , respectivamente

$$A(x) = e^I(x)P_I + \omega(x)\mathbf{\Lambda}. \quad (2.5)$$

---

<sup>2</sup>Letras maiúsculas do meio do alfabeto latin,  $I, J, \dots = 0, 1$  referem-se às coordenadas do espaço-tempo tangente na base definida pelo zweibein. Estes índices são elevados e abaixados usando a métrica  $\eta_{IJ}$ , definida em (2.8), e sua inversa  $\eta^{IJ}$ .

Os geradores satisfazem as relações de comutação

$$[\mathbf{\Lambda}, P_I] = \epsilon_I^J P_J \quad , \quad [P_I, P_J] = 0. \quad (2.6)$$

No caso que consideramos, existe uma constante cosmológica  $\Lambda$  não-nula. Assim a álgebra do grupo de calibre ISO(1,1) é deformada na álgebra de (anti-)de Sitter, (a)ds, do grupo de calibre (A)dS, isomorfica a SO(2,1) (ou SO(1,2)), dependendo se a constante cosmológica é considerada positiva (ou negativa), com as relações de comutação,

$$[\mathbf{\Lambda}, P_I] = \epsilon_I^J P_J \quad , \quad [P_I, P_J] = \Lambda \epsilon_{IJ} \mathbf{\Lambda}. \quad (2.7)$$

onde  $\epsilon_I^J = \eta^{IK} \epsilon_{IK}$ , com

$$(\eta^{IJ}) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

sendo a métrica de Minkowski se  $\sigma = -1$ , e a métrica de Riemann se  $\sigma = 1$ , e  $\epsilon_{IJ}$  o tensor de Levi-Civita,

$$(\epsilon_{IJ}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Esta álgebra, (a)ds, é mais adequada para uma descrição de calibre da teoria, dado que conta com uma forma quadrática invariante não degenerada, a métrica de Killing  $k_{ij}$  [35], que é degenerada para o caso do grupo ISO(1,1).

$$(k_{ij}) = \begin{pmatrix} \Lambda \eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Denotando os elementos da álgebra dos geradores do grupo (A)dS como:

$$\{J_i\} = \{J_0, J_1, J_2\} = \{P_0, P_1, \mathbf{\Lambda}\}, \quad (2.11)$$

onde os índices minúsculos do meio do alfabeto latino  $i, j, \dots$ , ( $i = \{I, 2\}$ ), representarão índices do grupo (A)dS, podemos escrever a álgebra (a)ds, equação (2.7) numa forma compacta, como:

$$[J_i, J_j] = f_{ij}^k J_k. \quad (2.12)$$

onde  $f_{ij}{}^k$  são constantes de estrutura reais, e as não-nulas sendo:

$$f_{01}{}^2 = \Lambda, \quad f_{12}{}^0 = \sigma, \quad f_{20}{}^1 = 1. \quad (2.13)$$

As constantes de estrutura  $f_{ijk} = k_{kl}f_{ij}{}^k$  são completamente anti-simétricas nos seus 3 índices, aqui  $k_{kl}$  é a forma quadrática ou métrica de Killing (que a definiremos a continuação). Esta forma de Killing e sua inversa permitem subir e abaixar os índices do grupo  $i, j, \dots$ , (ver equação B.45 do Apêndice B). A forma de Killing  $k_{ij}$ , como a podemos ver na subseção B.3.3 do Apêndice B, esta definida como o traço do produto bilinear de elementos da álgebra de Lie na representação adjunta, isto é:

$$(k_{ij}) := \text{Tr}(\text{ad}(J_i)\text{ad}(J_j)),$$

esta e as constantes de estrutura,  $f_{ij}{}^k$ , estão relacionadas pela seguinte expressão:

$$k_{ij} = f_{ik}{}^l f_{jl}{}^k, \quad (2.14)$$

Na representação fundamental os geradores  $J_i$ , (ver B.41), são dados explicitamente, por:

$$\begin{aligned} J_0 = P_0 &= -\frac{i}{2}\sqrt{\Lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = P_1 = -\frac{i}{2}\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ J_2 = \mathbf{\Lambda} &= -\frac{i}{2}\sqrt{\sigma} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.3.1 Ação BF 2D

Consideremos a ação clássica invariante sob as transformações de calibre do grupo (A)dS que define a teoria  $BF$  bidimensional, dada por:

$$S_{BF}[A, \phi] = \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}(\phi F[A]) = \int_{\mathcal{M}} k_{ij} \phi^i F^j[A]. \quad (2.16)$$

Esta ação é topológica, e portanto independente da métrica.  $\mathcal{M}$  é a variedade espaço-tempo, o multiplicador de Lagrange  $\phi$  é um escalar,  $A$  é a conexão, que no caso bidimensional é uma

combinação do *zweibein* e da conexão de spin.

$$F = dA + A \wedge A = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (2.17)$$

é a curvatura da conexão  $A$ . Todas estas quantidades estão validadas na álgebra de Lie, do grupo (A)dS, isto é,

$$A = A^i J_i, \quad \phi = \phi^i J_i, \quad \text{e} \quad F = F^i J_i, \quad (2.18)$$

assim,

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + f_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k. \quad (2.19)$$

As equações de movimentos derivadas da ação (2.16) são:

$$\frac{\delta S_{BF}}{\delta A} = D\phi = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\delta S_{BF}}{\delta \phi} = F = 0, \quad (2.21)$$

com  $D = d + [A, \ ]$  sendo a derivada covariante da correspondente conexão  $A$ . De (2.21) podemos ver a condição de curvatura nula, condição típica de modelos topológicos, indicando que as soluções clássicas da teoria são de conexões planas, e de (2.20) que  $\phi$  é calibre-equivalente a uma constante.

Se expandimos a ação (2.16) em componentes,  $i=(1,2)$ , escrevemos as componentes da curvatura  $F$  em termos do *zweibein* e da conexão de spin  $\omega$ . E resolvendo a equação de movimento para a componente  $F^2[e, \omega] = 0$ , considerando a *zweibein* seja inversível, poderemos escrever a conexão de spin unicamente como função das componentes do *zweibein*  $e^I$  e suas derivadas [13, 76], substituindo este resultado na ação, poderemos ver que a ação de Jackiw-Teitelboim, ação (2.4), é recuperada, isto nos permite afirmar que o modelo BF bidimensional está relacionado com o modelo de Jackiw-Teitelboim.

### 2.3.2 Simetrias de Calibre e de Difeomorfismo

As transformações de calibre, do tipo Yang-Mills, dos campos da teoria, sob a qual a ação BF (2.16), é invariante, são dados por:

$$\begin{aligned}\phi'(x) &:= g(x)\phi(x)g^{-1}(x) \\ A'(x) &:= g(x)dg^{-1}(x) + g(x)A(x)g^{-1}(x)\end{aligned}\tag{2.22}$$

onde  $g(x)$  são elementos do grupo de calibre (A)dS. Com ajuda destas duas últimas expressões, e considerando elementos do grupo, como  $g(x) = e^{\epsilon(x)}$ , temos que as transformações de calibre locais infinitesimais, geradas pelo parâmetro escalar  $\epsilon = \epsilon^i J_i$ , com valores na álgebra de Lie do grupo de calibre (A)dS, sobre a qual a ação BF é invariante, são dadas por:

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \phi &= [\epsilon, \phi], \\ \delta_\epsilon A &= -D\epsilon = -d\epsilon - [A, \epsilon].\end{aligned}\tag{2.23}$$

Por outro lado, também temos as simetrias em relação as transformações de difeomorfismos ativos, gerados por um campo vetorial  $v = v^\mu \partial_\mu$ . As transformações de difeomorfismo são definidas pela derivada de Lie  $\mathcal{L}_v := i_v d + di_v$ , onde  $i_v$  representa a derivada interior e  $d$  a derivada exterior [21]. Assim, os difeomorfismos dos campos fundamentais, na direção do vetor  $v$  são dados por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v \phi &= i_v d\phi, \\ \mathcal{L}_v A &= (i_v d + di_v)A,\end{aligned}\tag{2.24}$$

No entanto *on-shell*, isto é, equações de movimento (2.20, 2.21) satisfeitas, as transformações de difeomorfismo (2.24), geradas pelo vetor  $v$ , e as transformações de calibre (2.23), geradas pelo parâmetro escalar  $\epsilon$  são equivalentes, se  $\epsilon = i_v A = v^\mu A_\mu$ , assim

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v \phi &= -\delta_\epsilon \phi|_{\epsilon=v^\mu A_\mu} + i_v F, \\ \mathcal{L}_v A &= -\delta_\epsilon A|_{\epsilon=v^\mu A_\mu} + i_v D\phi.\end{aligned}\tag{2.25}$$

conseqüentemente as transformações de difeomorfismo (atuando sobre o espaço das soluções) podem ser considerados como um subgrupo das transformações de calibre do grupo (A)dS.



### 2.3.3 Análise Canônica do Modelo BF

Agora procedemos com a análise Hamiltoniana da ação  $S_{BF}$ . Consideramos a variedade  $\mathcal{M}$  do espaço-tempo bidimensional foliado em espaço e tempo, isto é,  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ , com coordenadas  $x_\mu = (t, x)$ , onde o tempo  $t \in \mathbb{R}$  e a coordenada espacial 1-dimensional  $x \in \Sigma$ . Com esta foliação a ação (2.16) toma a forma:

$$\begin{aligned} S_{BF}[A, \phi] &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \phi_i F_{\mu\nu}^i dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} dx (\partial_t A_x^i \phi_i + A_t^i D_x \phi_i) = \int_{\mathbb{R}} dt L, \end{aligned} \quad (2.26)$$

com

$$L = \int_{\Sigma} dx (\partial_t A_x^i \phi_i + A_t^i D_x \phi_i), \quad (2.27)$$

sendo a Lagrangiana.

O ponto de partida para o formalismo canônico é a definição dos momentos canônicos. Assim, tomando como coordenadas generalizadas a conexão  $A_\mu^i(t, x)$ , os momentos canônicos são definidos como as derivadas funcionais<sup>3</sup>,

$$\pi_i^{A_\mu}(x) := \frac{\delta L}{\delta \partial_t A_\mu^i(x)}. \quad (2.28)$$

Com ajuda desta, o momento conjugado da conexão,  $A_x^i$ , é

$$\pi_i^{A_x}(x) = \phi_i, \quad (2.29)$$

enquanto o momento conjugado a  $A_t^i$  é nulo

$$\pi_i^{A_t}(x) \approx 0, \quad (2.30)$$

no formalismo canônico de Bergmann-Dirac [39], estas condições são interpretados como vínculos primários. Aqui  $\approx$  significa uma igualdade fraca, isto quer dizer que as igualdades serão implementadas somente após que todas as manipulações dos colchetes de Poisson foram efetuadas.

---

<sup>3</sup>No que segue, explicitaremos só a dependência da coordenada espacial  $x, y$ , etc. Todos os campos são tomados no mesmo valor de  $t$  na coordenada temporal, conseqüentemente este parâmetro não será escrito.

O formalismo canônico é baseado nos colchetes de Poisson da conexão  $A^i$  e seu momento conjugado  $\pi_i$ , e os colchetes não nulos destes são:

$$\begin{aligned}\{A_x^i(x), \pi_j^{A_x}(y)\} &= \delta_j^i \delta(x-y), \\ \{A_t^i(x), \pi_j^{A_t}(y)\} &= \delta_j^i \delta(x-y).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Observando os momentos conjugados podemos concluir que temos uma teoria singular, o que significa que não todas as “velocidades” podem ser escritas em termos dos momentos e os campos. Então as equações (2.29) e (2.30) representam vínculos, vínculos primários para ser mais precisos, que devem ser adicionados à Hamiltoniana. Através da análise dos vínculos, usando o formalismo de Bergmann-Dirac de teorias vinculadas, veremos que os vínculos (2.29) podem ser resolvidos, enquanto que os vínculos, que se seguem de (2.30), são vínculos sobre as variáveis dinâmicas. Com esta análise, teremos que a Hamiltoniana deduzida da ação (2.16), pode ser escrita como [13, 32, 49, 56]:

$$H = - \int dx A_t^i \mathcal{G}_i(x),\tag{2.32}$$

onde

$$\mathcal{G}_i(x) := D_x \phi_i(x) = \partial_x \phi_i(x) + f_{ij}^k A_x^j(x) \phi_k(x) \approx 0,\tag{2.33}$$

é um vínculo secundário da teoria, que provém da consistência dos vínculos primários (2.30) com a evolução temporal. Assim os campos canônicos dinâmicos da teoria são os campos  $A_x^i$  e  $\phi_i$ , com colchetes de Poisson dados por,

$$\{A_x^i(x), \phi_j(y)\} = \delta_j^i \delta(x-y).\tag{2.34}$$

### 2.3.4 Álgebra de Vínculos

Na teoria temos os vínculos (2.33), vejamos que propriedades devem satisfazer estes, principalmente em relação aos colchetes de Poisson. Por consistência estes vínculos, têm que ser vínculos de primeira classe (isto é, o colchete de Poisson de dois vínculos tem que ser nula o uma combinação linear de vínculos), e como tal, têm que ser os geradores das transformações infinitesimais de calibre da teoria.

Por comodidade na hora dos cálculos, podemos escrever os vínculos  $\mathcal{G}_i(x)$  numa forma integral, forma ponderada (*smeared form*), isto é

$$\mathcal{G}(\epsilon) = \int dx \epsilon^i(x) \mathcal{G}_i(x), \quad (2.35)$$

onde  $\epsilon^i(x)$  são parâmetros infinitesimais locais, que podem ser escolhidos como “funções testes” suaves<sup>4</sup>.

Os colchetes de Poisson dos vínculos  $\mathcal{G}_i(x)$ , na forma ponderada, com os campos da teoria são,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}(\epsilon), A_x^p(x)\} &= \partial_x \epsilon^p + f_{ji}{}^p A_x^j \epsilon^i = D_x \epsilon^p \\ \{\mathcal{G}(\epsilon), \phi_p(x)\} &= -f_{pi}{}^k \epsilon^i \phi_k = [\phi, \epsilon]_p \end{aligned} \quad (2.36)$$

que comparando-os com as expressões em (2.23), vemos que elas representam as transformações infinitesimais de calibre, o que mostra que estes vínculos são os geradores das transformações de calibre da teoria, e como tal têm que ter uma álgebra de Lie fechada, com o produto de Lie sendo os colchetes de Poisson,

$$\{\mathcal{G}(\epsilon), \mathcal{G}(\bar{\epsilon})\} = \mathcal{G}([\epsilon, \bar{\epsilon}]) \quad (2.37)$$

o que prova que estes são vínculos de primeira classe. Onde definimos

$$[\epsilon, \bar{\epsilon}] := [\epsilon, \bar{\epsilon}]^k J_k, \quad \text{com} \quad [\epsilon, \bar{\epsilon}]^k := f_{ij}{}^k \epsilon^i \bar{\epsilon}^j.$$

### 2.3.5 Invariantes de Calibre (Observáveis de Dirac)

Suponhamos que nossa variedade  $\mathcal{M}$  bidimensional tenha a topologia  $\mathcal{S}_1 \times \mathbb{R}$  e que  $x^\mu = (t, \theta)$ , onde  $t$  é uma coordenada não compacta ao longo de  $\mathbb{R}$  (“o tempo”) e  $\theta \in [0, 2\pi]$  é uma coordenada periódica sobre o círculo  $\mathcal{S}_1$  (o espaço).

Mostra-se em [56], no caso do grupo  $SU(2)$  compacto, que o espaço de fase sobre o qual os vínculos são definidos é um espaço de dimensão infinita, e que o espaço das órbitas de calibre

---

<sup>4</sup>Estas funções testes, são funções do espaço  $\mathcal{S}$  de Schwartz, as quais são funções  $\mathcal{C}^\infty$  que decaem no infinito mais rapidamente que qualquer potência de  $x$ , assim como todas suas derivadas.

é bidimensional, podendo ser coordenatizado pelas duas quantidades invariantes de calibre:

$$\begin{aligned} W &= \text{Tr}(h[A, \gamma(s)]) = \text{Tr}(Pe^{-\oint_s A}) \\ L &= \text{Tr}(\phi^2) = \phi^i(x)\phi_i(x), \end{aligned} \tag{2.38}$$

as quais comutam com os vínculos e formam um sistema completo de observáveis de Dirac. Por conseguinte os estados físicos da teoria são caracterizados por estas duas quantidades.  $W$  é conhecida como o laço de Wilson e é o traço da holonomia da conexão  $A$  ao longo de um caminho  $\gamma$  fechado parametrizado pelo parâmetro  $s$  (ver Apêndice D).

## 2.4 Quantização de Laços do Modelo BF 2D

A Gravitação Quântica de Laços, é a quantização canônica da Relatividade Geral em variáveis de conexão, onde os estados quânticos podem ser pensados como funcionais de onda  $\Psi[A]$ , da conexão  $A$ , sobre o espaço de conexões, sobre a qual a ação de certo conjunto de operadores correspondendo a funções do espaço de fase são definidos [65, 66, 74].

Seguimos o programa de quantização canônica de Laços, no contexto da quantização de Dirac. O primeiro passo na quantização de laços, seria a de construir um espaço de Hilbert auxiliar,  $\mathcal{H}_{aux}$ , espaço no qual as holonomias  $h[A, \gamma]$  são argumentos dos funcionais de onda. As holonomias  $h[A, \gamma]$ , são funcionais da conexão  $A$  ao longo de caminhos orientados  $\gamma \subset \Sigma$ , (Ver o apêndice D), e são definidas por:

$$h[A, \gamma] := Pe^{-\int_\gamma A},$$

onde  $P$  é o operador de ordenamento de caminho. Assim, escolhendo a conexão como coordenadas, os momentos conjugados promovidos a operadores são derivadas funcionais, da forma:

$$\hat{\phi}_i := -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_x^i},$$

com isto, as relações de comutação, não nulas, dos operadores fundamentais são:

$$\left[ \hat{A}_x^i(x), \hat{\phi}_j(y) \right] = i\hbar \delta_j^i \delta(x - y) \tag{2.39}$$

Num seguinte passo os vínculos  $\mathcal{G}_i$ , equação (2.33), devem ser promovidos a operadores, os quais

atuando sobre os funcionais de onda devem anular-se. O espaço destes funcionais de onda, isto é dos estados quânticos, que resolvem os vínculos, formam o espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{fis} \subset \mathcal{H}_{aux}$  da teoria, que por definição devem ser funcionais de quadrado integrável e ter um produto interno bem definido.

Neste caso bidimensional o espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{fis}$  pode ser construído diretamente, sem passar pela construção de  $\mathcal{H}_{aux}$ , já que aqui temos só os vínculos de Gauss, vínculos que geram as transformações de calibre, como sabemos. Dado que estamos considerando um espaço unidimensional compacto (o círculo  $\mathcal{S}_1$ ), temos essencialmente um laço, o que facilita bastante a construção da teoria quântica.

Como podemos ver em [56], para o grupo de calibre SU(2), o espaço de estados quânticos não vinculados é formado por funcionais de onda  $\Psi[A]$ , isto é funcionais das holonomias.

Os estados quânticos que resolvem os vínculos de Gauss (2.33), são estados da forma,

$$\Psi[A] = f(W[A]) = \psi(h_\gamma[A]). \quad (2.40)$$

Consequentemente, um estado físico é dado por funções de onda  $\psi$ , funções de quadrado integrável sobre SU(2), que tem como argumento o traço da holonomia sobre um caminho fechado. Sobre este espaço de funções, existe um produto escalar invariante e é dado por:

$$\langle \Psi, \Psi' \rangle := \int d\mu(A) (\psi(h[A]))^* \psi'(h[A]), \quad (2.41)$$

onde  $d\mu(A)$  é a medida de Haar do grupo de calibre.

Podemos ver de [56] que os operadores quânticos das quantidades invariantes de calibre,  $W$  e  $L$ , são bem definidos sobre o espaço de estados físicos  $\psi$ , assim:

$$\begin{aligned} \hat{W}\psi(h) &= \text{Tr}(h)\psi(h), \\ \hat{L}\psi(h) &= \hbar^2 C\psi(h), \end{aligned}$$

sendo  $C$  é o operador de Casimir, neste caso o Casimir do grupo de calibre SU(2), e sabemos que os autovalores estão dados por  $j(j+1)$ , com  $j$  sendo um número inteiro ou semi-inteiro,

consequentemente vemos que o autovalor do operador  $L$  esta quântizado e é dado por:

$$\hbar^2 j(j+1).$$

Na representação irredutível  $j$ , podemos definir os estados quânticos como

$$\psi_j(h) := \text{Tr}_j h \equiv \text{Tr}(R^{(j)}(h)), \quad (2.42)$$

onde  $R^{(j)}(h)$  é uma matriz representando a holonomia,  $h[A]$ , na representação  $j$ , estas matriz satisfazem o teorema de Peter-Weyl:

$$\int dh (R_{ba}^{(j)}(h))^* R_{cd}^{(j)}(h) = \frac{1}{2j+1} \delta^{jj'} \delta_{ac} \delta_{bd} \quad (2.43)$$

teorema que permite-nos concluir que os estados quânticos  $\psi_j$ , formam uma base ortonormal, a qual denotamos por  $|j\rangle$ , consequentemente temos,

$$\langle A|j\rangle =: \text{Tr}_j(h). \quad (2.44)$$

Por otro lado, sob a representação matricial  $R^{(j)}(h)$ , temos a seguinte relação:

$$\frac{\delta}{\delta A(x)} \cdot \frac{\delta}{\delta A(x)} R^{(j)}(h) = -j(j+1)R^{(j)}(h). \quad (2.45)$$

Como podemos ver a quântização deste modelo bidimensional é bastante simple, mas tem analogias com a quântização de laços da Relatividade Geral. Vemos que o operador  $W$  é análogo ao operador de laço da Gravitação Quântica, enquanto o operador  $L$  é análogo a quântização do operador área. Uma abordagem mais detalhada da quantização de laços deste modelo pode ser encontrada em [33, 56].

## Capítulo 3

# Supergravitação 2D, $S(A)dS$

### 3.1 Introdução

Há muitos trabalhos que se concentram nos modelos de gravitação pura. No entanto, se quisermos fazer alguma previsão do nosso mundo a partir de uma teoria quântica da gravitação, esta têm que fazer referência à matéria. Além dos problemas ainda não bem entendidos na gravitação quântica de laços, como são a evolução dinâmica da geometria, a aproximação semi-clássica, etc., uma questão importante ainda em aberto é o acoplamento dos campos de matéria.

Neste capítulo, acoplamos matéria ao modelo BF bidimensional, através de uma extensão supersimétrica. A teoria é uma extensão imediata da gravitação pura 2D, do modelo BF, descrito no capítulo anterior, este é independente do fundo e invariante por transformações de calibre e difeomorfismo. Com a extensão supersimétrica, o modelo estará descrito por campos Grassmannianos pares e ímpares, isto é, campos de natureza bosônica e fermiônica respectivamente. Assim, além das simetrias usuais do nosso modelo, encontraremos com as simetrias supersimétricas.

Iniciamos o capítulo com as definições básicas de superálgebras para logo passar à definição do modelo BF supersimétrico, mostramos que “*on shell*” as transformações de calibre e difeomorfismo são equivalentes. Fazemos a análise canônica do modelo, construímos as superholonomias e as quantidades invariantes de calibre, finalizando com a construção do Casimir (supercasimir) e a representação do grupo  $S(A)dS$ , que é o grupo de calibre deste modelo.

## 3.2 Modelo BF Supersimétrico

### 3.2.1 Superálgebra (anti) de Sitter, $s(a)ds$

Seja  $X, Y, Z, \dots$  elementos de uma álgebra de Lie graduada (superálgebra de Lie)  $g_s$ , com produto da álgebra dado pelo supercolchete de Lie, denotado por  $[\cdot, \cdot]$ , que satisfaz as relações de comutação graduadas, e a superidentidade de Jacobi (ver Apêndice B) [34, 42, 43]:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= XY - (-1)^{|X||Y|} YX, \\ [X, Y] &= -(-1)^{|X||Y|} [Y, X], \\ [X, [Y, Z]] (-1)^{|X||Z|} + [Y, [Z, X]] (-1)^{|Y||X|} + [Z, [X, Y]] (-1)^{|Z||Y|} &= 0, \end{aligned}$$

aqui introduzimos uma função de paridade denotada por  $|\cdot|$ , (ver a equação (B.1) do Apêndice B), que denota a paridade Grasmanniana dos objetos, isto é,  $|X| = 0(1)$  se  $X$  é uma quantidade par(ímpar).

Numa extensão supersimétrica da álgebra  $(a)ds$ , do grupo  $(A)dS$ , que a chamaremos de superálgebra (anti) de Sitter,  $s(a)ds$ , (ver o parágrafo (B.3.4) do Apêndice B), do supergrupo (anti) de Sitter,  $S(A)dS$ , escolhemos como bases da superálgebra de Lie  $g_s$ , os geradores  $T_A = \{T_i, Q_\alpha\}$ , onde os  $T_i$ 's são elementos pares ( $|T_i| = 0$ ), que são os geradores de  $(A)dS$  que foram definidos no capítulo precedente, e etiquetados por  $J_i$ 's, equação (2.15), ( $i = 0, 1, 2$ ), enquanto que os  $Q_\alpha$ 's são elementos ímpares ( $|Q_\alpha| = 1$ ), ( $\alpha = \underline{1}, \underline{2}$ ). A superálgebra de Lie é dada por:

$$[T_A, T_B] = f_{AB}{}^C T_C, \quad (3.1)$$

onde  $f_{AB}{}^C$  são as constantes de estrutura da superálgebra, aqui, as letras maiúsculas latinas ( $A, B, \dots$ ) representarão índices da superálgebra,  $A, B, \dots = i, j, \dots; \alpha, \beta, \dots$ , índices minúsculas do meio do alfabeto latino  $i, j, \dots = 0, 1, 2$ , são índices que representam os geradores bosônicos e as letras minúsculas do início do alfabeto grego  $\alpha, \beta, \dots = \underline{1}, \underline{2}$ , etiquetam índices dos geradores fermiônicos<sup>1</sup>. A superálgebra (3.1) escrita na sua forma extensiva é dada por:

$$[T_i, T_j] = f_{ij}{}^k T_k, \quad [T_i, Q_\alpha] = f_{i\alpha}{}^\beta Q_\beta, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = f_{\alpha\beta}{}^i T_i, \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Escrevemos os números  $\underline{1}, \underline{2}$  sublineados para se referir que estes estão representando índices dos geradores fermiônicos e para diferenciar das etiquetas  $1, 2$  que representam a os geradores bosônicos.



onde as constantes de estrutura  $f_{ij}^k$ ,  $f_{i\alpha}^\beta$  e  $f_{\alpha\beta}^i$ , são dados, respectivamente, por (2.13)<sup>2</sup> e

$$f_{i\alpha}^\beta = -(J_i)_{\alpha}^\beta, \quad f_{\alpha\beta}^i = -(J^i)_{\alpha\beta},$$

onde  $(J_i)_{\alpha}^\beta$  são elementos de matriz dos geradores da álgebra (A)dS, na representação fundamental, ver (2.15).

## Representação Irredutível de $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})\mathfrak{dS}$

A existência de um operador de Casimir, é importante para fornecer a redutibilidade completa de quaisquer representação finita dimensional de uma álgebra de Lie.

De forma análoga ao caso ordinário da álgebra de Lie, o Casimir para  $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})\mathfrak{dS}$  é dado por,

$$C_2 := T_A K^{AB} T_B = T_i \mathbf{K}^{ij} T_j + Q_\alpha \mathcal{K}^{\alpha\beta} Q_\beta, \quad (3.3)$$

onde  $K^{AB}$  é a métrica de Killing de S(A)dS (ver Apêndice B). A representação irredutível pode ser etiquetadas completamente por números  $j, l$  e  $m$ , onde  $j$  está relacionado a os valores próprios do Casimir  $C_2$ , enquanto  $l$  e  $m$  ao momento conjugado ordinario. A base vetorial desta representação podem ser representados por vetores  $|j, l, m\rangle$ , cuja dimensão é  $4j + 1$ , (ver Apêndice C).

Para a representação  $j = 1/2$ , os elementos da  $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})\mathfrak{dS}$  são dado por (ver Apêndice C):

$$\begin{aligned} T_0 = -\frac{i\sqrt{\Lambda}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = -\frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = -\frac{i\sqrt{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ Q_{\underline{1}} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{\underline{2}} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

como podemos ver, considerando  $\sigma = 1$  (espaço de Riemanniano) e a constante cosmológica  $\Lambda = 1$ , temos os geradores do grupo OSP(1,2) como caso particular [4, 18, 48, 70].

<sup>2</sup>Os índices  $\alpha, \beta, \dots$  são elevados e abaixados usando a métrica de Killing  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  e sua inversa, por exemplo,  $v^\alpha := \mathcal{K}^{\alpha\beta} v_\beta$ ,  $v_\alpha := v^\beta \mathcal{K}_{\beta\alpha}$  ver (B.60) do Apêndice B.

### 3.2.2 Ação Super-BF 2D

Escrevemos a extensão supersimétrica da ação  $BF$ , equação (2.16), como,

$$\mathcal{S}[\Phi, \mathcal{A}] = \int_{\mathcal{M}} \text{Str}(\Phi \mathcal{F}[\mathcal{A}]), \quad (3.5)$$

onde  $\Phi$  é um superescalar – o “superdilaton” e  $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$  é a curvatura da superconexão  $\mathcal{A}$ , estas são as extensões supersimétricas dos campos fundamentais e da curvatura, presentes no modelo BF 2D usual, ação (2.16).  $\text{Str}$ , representa o supertraço (ver Apêndice B, subseção B.2.2).  $\Phi$  é uma zero-forma,  $\mathcal{A}$  uma 1-forma e  $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$  uma 2-forma. Todas valoradas na adjunta da superálgebra de Lie, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A^A T_A = A^i T_i + \psi^\alpha Q_\alpha, \\ \Phi &= \Phi^A T_A = \phi^i T_i + \chi^\alpha Q_\alpha, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $A$  e  $\phi$  são a conexão 1-forma e o dilaton da teoria BF usual, ação (2.16), respectivamente, campos de natureza bosônica, isto é, campos de paridade par ( $|A^i| = |\phi^i| = 0$ ), enquanto isso, a 1-forma  $\psi$  e o escalar  $\chi$  representam campos de natureza fermiônica, isto é, campos de paridade ímpar ( $|\psi^\alpha| = |\chi^\alpha| = 1$ ). Dada a superconexão  $\mathcal{A}$ , a supercurvatura é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \mathcal{F}^A T_A = F^i J_i + F^\alpha Q_\alpha, \end{aligned}$$

que contêm uma parte bosônica  $F^i$  associada a os geradores bosônicos  $T_i$  e uma parte fermiônica  $F^\alpha$  associada a os geradores supersimétricos  $Q_\alpha$ ,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^B = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^B - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^B + (-1)^{|C||D|} \mathcal{A}_\mu^C \mathcal{A}_\nu^D f_{CD}^B \quad (3.7)$$

$$F^i = dA^i + \frac{1}{2} A^j \wedge A^k f_{jk}^i - \frac{1}{2} \psi^\alpha \wedge \psi^\beta f_{\alpha\beta}^i, \quad (3.8)$$

$$F^\alpha = d\psi^\alpha + \frac{1}{2} A^i \wedge \psi^\beta f_{i\beta}^\alpha. \quad (3.9)$$

## Equações de Movimento

Variando a ação (3.5) com respeito aos supercampos fundamentais  $\Phi$  e  $\mathcal{A}$ , obtemos as equações de movimento, as quais são dadas por

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \Phi} = \mathcal{F} = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathcal{A}} = \mathcal{D}\Phi = 0, \quad (3.11)$$

onde  $\mathcal{D} = d + [\mathcal{A}, \ ]$ , é a derivada covariante correspondente à superconexão  $\mathcal{A}$ . Podemos ver que as equações de movimento (3.10) e (3.11) são as extensões supersimétrica das equações de movimento da teoria BF pura, equações (2.20) e (2.21).

A equação (3.10), tem como componentes as expressões dadas por (3.8) e (3.9). Observando a equação (3.8), vemos que além do termo,  $dA^i + \frac{1}{2}A^j \wedge A^k f_{jk}{}^i$ , que representa a curvatura usual na teoria BF pura, temos um termo bilinear do campo fermiônico  $\psi$ , termo que proporciona uma curvatura não nula à teoria.

Como uma teoria que modela a gravitação, a extensão supersimétrica do modelo BF, ação (3.5), deve ser invariante sob transformações de difeomorfismo. Veremos que esta invariância está contida na invariância de calibre da teoria.

### 3.2.3 Simetrias de Calibre e de Difeomorfismo

Como no caso do modelo BF para a gravitação pura bidimensional, estudado no capítulo anterior, as transformações de calibre infinitesimais dos campos fundamentais para nosso modelo com extensão supersimétrica podem ser descritas de maneira análoga às transformações de calibre infinitesimais ordinárias, equação (2.23), assim temos,

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \Phi = [\epsilon, \Phi] &\longrightarrow \delta_\epsilon \Phi_C = (-1)^{|C||A|} \epsilon^A \Phi_B f_{CA}{}^B, \\ \delta_\epsilon \mathcal{A} = -\mathcal{D}\epsilon &\longrightarrow \delta_\epsilon \mathcal{A}^C = -d\epsilon^C - (-1)^{|A||B|} \mathcal{A}^A \epsilon^B f_{AB}{}^C, \end{aligned} \quad (3.12)$$

com,  $\epsilon = \epsilon^A T_A = \epsilon^i J_i + \epsilon^\alpha Q_\alpha$ , sendo um escalar valorado também na adjunta da superálgebra  $g_s$ , s(a)ds. Explicitamente, estas transformações de calibre são da forma:

$$\delta_\epsilon \phi_k = \epsilon^i \phi_j f_{ki}{}^j + \epsilon^\alpha \chi_\beta f_{k\alpha}{}^\beta, \quad (3.13)$$

$$\delta_\epsilon A^i = -D\epsilon^i + \psi^\alpha \epsilon^\beta f_{\alpha\beta}{}^i, \quad (3.14)$$

$$\delta_\epsilon \chi_\beta = \epsilon^i \chi_\alpha f_{\beta i}{}^\alpha - \epsilon^\alpha \phi_i f_{\beta\alpha}{}^i, \quad (3.15)$$

$$\delta_\epsilon \psi^\alpha = -D\epsilon^\alpha - \psi^\beta \epsilon^i f_{\beta i}{}^\alpha, \quad (3.16)$$

que podem ser classificadas como, tranformações de calibre tipo Yang-Mills (YM) associadas ao parâmetro de paridade par,  $\epsilon^i$ , e as transformações de calibre supersimétricas locais, transformações SUSY, associadas ao parâmetro infinitesimal de paridade ímpar,  $\epsilon^\alpha$ , (ver Tabela 3.1).

Tabela 3.1: Transformações de calibre infinitesimais da teoria. As transformações tipo YM e as transformações SUSY.

Transf. tipo YM	Transf. SUSY
$\delta\phi_k = \epsilon^i \phi_j f_{ki}{}^j$	$\delta\phi_k = \epsilon^\alpha \chi_\beta f_{k\alpha}{}^\beta$
$\delta A^i = -D\epsilon^i$	$\delta A^i = -\epsilon^\beta \psi^\alpha f_{\beta\alpha}{}^i$
$\delta\chi_\beta = \epsilon^i \chi_\alpha f_{\beta i}{}^\alpha$	$\delta\chi_\beta = -\epsilon^\alpha \phi_i f_{\beta\alpha}{}^i$
$\delta\psi^\alpha = \epsilon^i \psi^\beta f_{i\beta}{}^\alpha$	$\delta\psi^\alpha = -D\epsilon^\alpha$

Além de estas transformações de calibre, também, temos as transformações de difeomorfismo infinitesimais, sob as quais nosso modelo deve ser invariante. Os difeomorfismos, como sabemos, são dados pela derivada de Lie,  $\mathcal{L}_\xi := i_\xi d + di_\xi$ , onde  $\xi$  é o vetor direção,  $d$  a derivada exterior e  $i_{(\cdot)}$  a derivada interior [21]. Assim, as transformações de difeomorfismos infinitesimais dos supercampos  $\mathcal{A}$  e  $\Phi$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \mathcal{A} &= i_\xi \mathcal{F} + \mathcal{D}(i_\xi \mathcal{A}) = i_\xi \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \Phi} - \delta_\epsilon \mathcal{A}, \\ \mathcal{L}_\xi \Phi &= i_\xi \mathcal{D}\Phi - [i_\xi \mathcal{A}, \Phi] = i_\xi \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathcal{A}} - \delta_\epsilon \Phi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Observemos que estas transformações são equivalentes às transformações de calibre infinitesimais dadas por (3.12), modulo equações de movimento e parâmetro infinitesimal de calibre dado por  $\epsilon \equiv i_\xi \mathcal{A} = \xi^\mu \mathcal{A}_\mu$ . Isto significa que a invariância da teoria sob as transformações de difeomorfismo é direta, já que por construção o modelo proposto é invariante de calibre.

### 3.3 Análise Canônica

A quantidade chave na análise canônica ou formalismo de Dirac-Bergmann [3, 19, 38–40, 46, 47], para descrever a dinâmica, isto é a evolução do estado físico de um estado inicial a um estado final arbitrário, é a Hamiltoniana  $H$ . Seja  $F$  uma função do espaço-tempo, a evolução de  $F$  no tempo  $t$ , é dada pelo colchete de Poisson da função  $F$  com a Hamiltoniana, isto é,

$$\dot{F} = \{F, H\}. \quad (3.18)$$

O ponto sobre a função  $F$  denota a derivada total da função  $F$  com respeito ao parâmetro de tempo  $t$ . Aqui  $\{, \}$  denota os colchetes de Poisson, na teoria clássica. Na teoria quântica os colchetes de Poisson são substituídos por comutadores divididos por  $i\hbar$ . Para nossa teoria supersimétrica, os colchetes de Poisson passarão a ser supercolchetes de Poisson na teoria clássica e supercomutadores divididos por  $i\hbar$  na teoria quântica.

#### 3.3.1 Momentos Conjugados

Como é usual [75], assumimos que a variedade  $\mathcal{M}$  do espaço-tempo bidimensional, admita uma foliação  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ . As coordenadas,  $x^\mu = (t, x)$ , com o tempo  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \Sigma$ , a coordenada do espaço 1-dimensional, fornecem uma parametrização arbitrária do espaço-tempo. Sob esta foliação temos  $\mathcal{A}_\mu = (\mathcal{A}_t, \mathcal{A}_x)$ ,  $\mathcal{A}_t = (A_t, \psi_t)$ ,  $\mathcal{A}_x = (A_x, \psi_x)$ . Assim, podemos escrever a ação (3.5) na forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (-1)^{|A||B|} \int_{\mathcal{M}} \Phi^A \mathcal{F}^B \mathcal{K}_{AB} = \frac{(-1)^{|A||B|}}{2} \int_{\mathcal{M}} dx^2 \epsilon^{\mu\nu} \Phi^A \mathcal{F}_{\mu\nu}^B \mathcal{K}_{AB} \\ &= (-1)^{|A||B|} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} dx \Phi^A (\partial_t \mathcal{A}_x^B - \partial_x \mathcal{A}_t^B + (-1)^{|C||D|} \mathcal{A}_t^C \mathcal{A}_x^D f_{CD}{}^B) \mathcal{K}_{AB} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} dx \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$\mathcal{L} = \partial_t \mathcal{A}_x^B - \partial_x \mathcal{A}_t^B + (-1)^{|C||D|} \mathcal{A}_t^C \mathcal{A}_x^D f_{CD}{}^B \quad (3.20)$$

é a densidade Lagrangiana do sistema, e  $\mathcal{K}_{AB}$  é a métrica de Killing do supergrupo  $S(A)dS$ , esta é uma forma quadrática invariante e não degenerada, que permite subir e abaixar os índices do supergrupo, (ver a subseção B.4 do Apêndice B) [34].

Da definição do momento canônico, temos que os momentos conjugados da teoria são dados por:

$$\Pi_B^{A_x}(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \mathcal{A}_x^B} = \Phi_B, \quad \Pi_B^{A_t}(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \mathcal{A}_t^B} \approx 0, \quad (3.21)$$

de (3.21) podemos ver que temos uma Lagangiana singular; “ $\approx$ ” indica uma “igualdade fraca” (tornando-se igualdade depois que toda a álgebra dos supercolchetes de Poisson seja levado acabo). As quantidades fracamente nulas  $\Pi_B^{A_t}$  denominam-se de vínculos primários, de acordo com a terminologia de Bergmann-Dirac [3, 19, 39, 40, 46, 47]. Reduzimos diretamente o espaço de fase identificando  $\Pi_B^{A_x}(x) = \Phi_B$ , como os momentos conjugados de  $\mathcal{A}_x$ .

### 3.3.2 Supercolchetes De Poisson

Generalizamos a definição dos colchetes de Poisson para o caso onde contamos com campos de natureza bosônica e campos de natureza fermiônica [47], denominamos esta de supercolchetes de Poisson, e usamos a mesma notação dos colchetes de Poisson,  $\{, \}$ , para representá-lo.

Dados dois funcionais  $M$  e  $N$  quaisquer, do espaço de fase, definimos os supercolchetes como:

$$\{M, N\} := \sum_A \int dx (-1)^{|M||\mathcal{Q}^A|} \left( \frac{\delta M}{\delta \mathcal{Q}^A(x)} \frac{\delta N}{\delta \mathcal{P}_A(x)} - (-1)^{|\mathcal{Q}^A||\mathcal{P}_A|} \frac{\delta M}{\delta \mathcal{P}_A(x)} \frac{\delta N}{\delta \mathcal{Q}^A(x)} \right), \quad (3.22)$$

onde  $\mathcal{Q}^A$  e  $\mathcal{P}_A$  são as variáveis de configuração e seus momentos conjugados. Em particular, os supercolchetes não nulos, das variáveis fundamentais são,

$$\{\mathcal{Q}_A(x), \mathcal{P}^B(y)\} = (-1)^{|\mathcal{Q}_A||\mathcal{P}^B|} \delta_A^B \delta(x - y). \quad (3.23)$$

Para nosso caso, esta definição, explicitamente, tem a forma,

$$\begin{aligned} \{M, N\} &:= \int dz (-1)^{|M||\mathcal{A}_\mu^B|} \left( \frac{\delta M}{\delta \mathcal{A}_\mu^B(z)} \frac{\delta N}{\delta \Pi_B^{A_\mu}(z)} - (-1)^{|\mathcal{A}_\mu^B||\Pi_B^{A_\mu}|} \frac{\delta M}{\delta \Pi_B^{A_\mu}(z)} \frac{\delta N}{\delta \mathcal{A}_\mu^B(z)} \right), \\ &= \int dz \left( \left( \frac{\delta M}{\delta A_\mu^i(z)} \frac{\delta N}{\delta \Pi_i^{A_\mu}(z)} - \frac{\delta M}{\delta \Pi_i^{A_\mu}(z)} \frac{\delta N}{\delta A_\mu^i(z)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{|M|} \left( \frac{\delta M}{\delta \psi_\mu^\alpha(z)} \frac{\delta N}{\delta \Pi_\alpha^{\psi_\mu}(z)} + \frac{\delta M}{\delta \Pi_\alpha^{\psi_\mu}(z)} \frac{\delta N}{\delta \psi_\mu^\alpha(z)} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde com o símbolo  $|\cdot|$  definimos a função de paridade Grasmanniana, (ver equação B.1 do

Apêndice B). Assim  $|F|$  (ou  $|\mathcal{A}_\mu^B|$ ) na expressão acima é igual a zero se  $F$  (ou  $\mathcal{A}_\mu^B$ ) é uma quantidade Grassmanniana par, e será igual a um se  $F$  (ou  $\mathcal{A}_\mu^B$ ) é uma quantidade Grassmanniana ímpar; por convenção, tomamos derivadas pela esquerda.

Consequentemente, os supercolchetes de Poisson não nulos para os campos fundamentais da teoria são:

$$\{\mathcal{A}_\mu^A(x), \Pi_B^{A\nu}(y)\} = (-1)^{|\mathcal{A}_\mu^A||\Pi_B^{A\nu}|} \delta_B^A \delta_\mu^\nu \delta(x-y) = -(-1)^{|\mathcal{A}_\mu^A||\Pi_B^{A\nu}|} \{\Pi_B^{A\nu}(y), \mathcal{A}_\mu^A(x)\}, \quad (3.25)$$

e explicitamente, temos:

$$\begin{aligned} \{A_x^i(x, t), \phi_j(y, t)\} &= \delta_j^i \delta(x-y) = -\{\phi_j(y, t), A_x^i(x, t)\}, \\ \{A_t^i(x, t), \Pi_j^{At}(y, t)\} &= \delta_j^i \delta(x-y) = -\{\Pi_j^{At}(y, t), A_t^i(x, t)\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

para os campos bosônicos, e

$$\begin{aligned} \{\psi_x^\alpha(x, t), \chi_\beta(y, t)\} &= -\delta_\beta^\alpha \delta(x-y) = \{\chi_\beta(y, t), \psi_x^\alpha(x, t)\}, \\ \{\psi_t^\alpha(x, t), \Pi_\beta^{\psi t}(y, t)\} &= -\delta_\beta^\alpha \delta(x-y) = \{\Pi_\beta^{\psi t}(y, t), \psi_t^\alpha(x, t)\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

para os campos fermiônicos.

Algumas das propriedades dos supercolchetes de Poisson que usaremos com mais frequência são (para mais detalhe, ver Apêndice B):

$$\begin{aligned} \{F, G_1 G_2\} &= \{F, G_1\} G_2 + (-1)^{|F||G_1|} G_1 \{F, G_2\}, \\ \{G_1 G_2, F\} &= G_1 \{G_2, F\} + (-1)^{|G_2||F|} \{G_1, F\} G_2. \end{aligned}$$

Definidos os supercolchetes e suas propriedades, pasemos a determinar a Hamiltoniana do sistema.

### 3.3.3 A Hamiltoniana

Recorrendo à transformação de Legendre, por definição a Hamiltoniana é dada por:

$$H = \int dx (\dot{\mathcal{A}}_x^A \Pi_A^{Ax} - \mathcal{L}), \quad (3.28)$$

já que contamos com campos anticomutantes na teoria, temos que ser cuidadosos com o ordenamento destes fatores anticomutantes [47]. Devido à convenção de usar derivadas pela esquerda, em (3.28), escrevemos as quantidades  $\dot{\mathcal{A}}_x^A$  à esquerda dos momentos conjugados. Assim, usando a transformação de Legendre e o formalismo de Bergmann-Dirac [39], a Hamiltoniana total toma a forma:

$$H = H_c + \int dx \lambda_t^B \Pi_B^{A_t}, \quad (3.29)$$

com

$$H_c = - \int dx \mathcal{A}_t^A \mathcal{D}_x \Phi_A, \quad (3.30)$$

sendo a Hamiltoniana canônica, e  $\lambda_t^B$ 's são multiplicadores de Lagrange para os vínculos primários  $\Pi_B^{A_t}$ , e

$$\mathcal{D}_x \Phi_A = \partial_x \Phi_A + (-1)^{|B||C|} \mathcal{A}_x^B \Phi_C f_{AB}^C. \quad (3.31)$$

Por consistência, os vínculos primários, equação (3.21), não devem evoluir no tempo, consequentemente, devem satisfazer a relação,

$$\dot{\Pi}_B^{A_t} := [\Pi_B^{A_t}, H] \approx 0,$$

recorrendo a esta relação de consistência, temos os seguintes vínculos secundários [39]:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_A^{A_t}(x) &= [\Phi_A(x), H] = - \int dz [\Phi_A(x), \mathcal{A}_t^B(z) \mathcal{D}_z \Phi_B(z)] \\ &= \mathcal{D}_x \Phi_A =: \mathcal{C}_A(x) \approx 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os vínculos  $\Pi_B^{A_t}$  podem ser considerados zero fortemente e os campos  $\mathcal{A}_t^A$  identificados como multiplicadores de Lagrange para os vínculos secundários; consequentemente, a Hamiltoniana total será equivalente a Hamiltoniana canônica, isto é  $H \equiv H_c$ . Como isto, observemos que a Hamiltoniana canônica, equação (3.30), é completamente vinculada, como era de se esperar já que estamos tratando com uma teoria covariante, e esta é dada por:

$$H = H_c = - \int dz \mathcal{A}_t^A \mathcal{C}_A(z), \quad (3.33)$$

os vínculos  $\mathcal{C}_A$  têm paridade par ou ímpar dependendo do valor do índice  $A$ : valores  $i, j, \dots$  ou valores  $\alpha, \beta, \dots$ , respectivamente. Por tanto, fazendo referência à parte bosônica e fermiônica



dos vínculos a Hamiltoniana pode ser escrita como:

$$H_c = - \int dz (A_t^i \mathcal{C}_i(z) + \psi_t^\alpha \mathcal{C}_\alpha(z)), \quad (3.34)$$

com

$$\mathcal{C}_i = D_z \phi_i + \psi_z^\alpha \chi_{\beta} f_{i\alpha}{}^\beta, \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_\alpha = D_z \chi_\alpha - \psi_z^\beta \phi_k f_{\alpha\beta}{}^k.$$

correspondendo respectivamente as partes bosônicas e fermiônicas do vínculos, e os campos  $A_t^i$  e  $\psi_z^\alpha$ , fazendo o papel de multiplicadores de Lagrange, também de natureza bosônica e fermiônica respectivamente.

Para ter uma teoria livre de inconsistências temos que ver se além destes vínculos existem vínculos adicionais. Isto podemos sabe-lo determinando os supercolchetes de Poisson dos vínculos, e vendo se este forma uma superálgebra de Lie fechada. Se assim for podemos concluir que a teoria não conta com vínculos adicionais, caso contrário existem vínculos adicionais que teriam que ser acrescentado a Hamiltoniana, mas como veremso a álgebra de Poisson dos vínculos é fechada, consequentemente a teoria não conta com outros vínculos, além dos que já foram determinados.

### 3.3.4 Álgebra de Vínculos

Se os vínculos de um sistema Hamiltoniano surgem da simetria da ação, sua álgebra de colchetes de Poisson será necessariamente fechada, em geral com funções de estrutura. Quando a Hamiltoniana é uma combinação de vínculos, este fechamento assegura que os vínculos sejam preservados no tempo pela evolução que ela gera, consequentemente isto assegura ter uma teoria consistente. Isto é importante, se não fosse assim, poderiam existir vínculos adicionais. Se a álgebra dos vínculos é fechada estes denominam-se de vínculos de primeira classe, caso contrário denominam-se de vínculos de segunda classe.

Por conveniência escrevemos os vínculos  $\mathcal{C}_A$  numa forma ponderada, (*smearred form*), desta forma teremos,

$$\mathcal{C}(\epsilon) := \int dx \epsilon^A(x) \mathcal{C}_A(x), \quad (3.35)$$

podemos voltar aos vínculos locais realizando uma derivada funcional, isto é

$$\mathcal{C}_A(x) = \frac{\delta \mathcal{C}(\epsilon)}{\delta \epsilon^A(x)}, \quad (3.36)$$

aqui os  $\epsilon^A$ 's são funções testes arbitrárias, contínuas e bem comportadas, infinitamente diferenciáveis que decaem no infinito mais rapidamente que qualquer potência de  $x$  assim como todas suas derivadas.

Determinemos a superálgebra de Poisson dos vínculos. Para isto, primeiro calculamos os supercolchetes de Poisson dos vínculos com os campos da teoria,

$$\{\mathcal{A}_x^A(x), \mathcal{C}(\epsilon)\} = -\partial_x \epsilon^A - (-1)^{|D||C|} \mathcal{A}_x^C \epsilon^D f_{CD}^A = -\mathcal{D}_x \epsilon^A(x), \quad (3.37)$$

$$\{\Phi_A(x), \mathcal{C}(\epsilon)\} = (-1)^{|C||D|} \epsilon^C \Phi_D f_{AC}^D = \{\epsilon(x), \Phi(x)\}_A, \quad (3.38)$$

com ajuda de estas expressões temos,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}(\epsilon), \mathcal{C}(\eta)\} &= \int dx \epsilon^A [\partial_x \Phi_A(x) + (-1)^{|B||C|} \mathcal{A}_x^B(x) \Phi_C(x) f_{AB}^C, \mathcal{C}(\eta)], \\ &= \int dx [\epsilon, \eta]^A \mathcal{C}_A(x) = \mathcal{C}([\epsilon, \eta]), \end{aligned} \quad (3.39)$$

com  $[\epsilon, \eta]^C := (-1)^{|\epsilon^A||\eta^B|} \epsilon^A \eta^B f_{AB}^C$ . De (3.39) podemos ver que a superálgebra de Poisson dos vínculos  $\mathcal{C}_A$  é fechada, conseqüentemente estes são vínculos de primeira classe. Assim dado que a Hamiltoniana é uma combinação destes, está assegurado que os vínculos são conservados no tempo.

### 3.3.5 Vínculos de Primeira Classe como Geradores da Simetria de Calibre

Dado que os vínculos  $\mathcal{C}_A$  são de primeira classe, estes devem ser os geradores das transformações de calibre da teoria [39], o que pode-se ver facilmente comparando as equações (3.37) e (3.38) com as equações das tranformações de calibre infinitesimais (3.12), isto é:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_x^A(x), \mathcal{C}(\epsilon)\} &= -\mathcal{D}_x \epsilon^A(x) = \delta_\epsilon \mathcal{A}^A(x), \\ \{\Phi_A(x), \mathcal{C}(\epsilon)\} &= \{\epsilon(x), \Phi(x)\}_A = \delta_\epsilon \Phi_A(x). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como no caso da Hamiltoniana da equação (3.34), os vínculos  $\mathcal{C}(\epsilon)$  a podemos escrever como a soma de partes, parte bosônica e fermiônica, então:

$$\mathcal{C}(\epsilon) = \int dx \epsilon^A \mathcal{C}_A(x) = \mathcal{C}^{(b)}(\epsilon) + \mathcal{C}^{(f)}(\epsilon) \quad (3.41)$$

onde

$$\mathcal{C}^{(b)}(\epsilon) = \int dx \epsilon^i \mathcal{C}_i(x), \quad \text{e} \quad \mathcal{C}^{(f)}(\epsilon) = \int dx \epsilon^\alpha \mathcal{C}_\alpha(x). \quad (3.42)$$

Colocamos as etiquetas  $(b)$  e  $(f)$  para nomear os vínculos correspondentes a parte bosônica e fermiônica, respectivamente. Conseqüentemente, as transformações de calibre que geram os vínculos, dentro de sua respectiva paridade são dados por:

- transformações de calibre geradas pelos vínculos bosônicos:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}^{(b)}(\epsilon), A_x^i(x)\} &= \partial_x \epsilon^i + A_x^j \epsilon^k f_{jk}^i = D_x \epsilon^i, \\ \{\mathcal{C}^{(b)}(\epsilon), \psi_x^\alpha(x)\} &= -\epsilon^i \psi_x^\beta f_{i\beta}^\alpha, \\ \{\mathcal{C}^{(b)}(\epsilon), \phi_i(x)\} &= -\epsilon^j \phi_k f_{ij}^k, \\ \{\mathcal{C}^{(b)}(\epsilon), \chi_\alpha(x)\} &= -\epsilon^i \chi_\beta f_{\alpha i}^\beta, \end{aligned} \quad (3.43)$$

- e transformações geradas pelos vínculos fermiônicos:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}^{(f)}(\eta), A_x^i(x)\} &= \eta^\alpha \psi_x^\beta f_{\alpha\beta}^i, \\ \{\mathcal{C}^{(f)}(\eta), \psi_x^\alpha(x)\} &= \partial_x \eta^\alpha + A_x^i \eta^\beta f_{i\beta}^\alpha = D_x \eta^\alpha, \\ \{\mathcal{C}^{(f)}(\eta), \phi_i(x)\} &= -\eta^\alpha \chi_\beta f_{i\alpha}^\beta, \\ \{\mathcal{C}^{(f)}(\eta), \chi_\alpha(x)\} &= \eta^\beta \phi_k f_{\alpha\beta}^k. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Com a ajuda de (3.43) e (3.44), a álgebra de Lie de  $\mathcal{C}^{(b)}(\epsilon)$  e  $\mathcal{C}^{(f)}(\epsilon)$ , que é a álgebra (3.39), mas escrito numa forma mais explicita, é:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}^{(b)}(\epsilon), \mathcal{C}^{(b)}(\bar{\epsilon})\} &= \int dx [\epsilon, \bar{\epsilon}]^i \mathcal{C}_i(x) = \mathcal{C}^{(b)}([\epsilon, \bar{\epsilon}]), \\ \{\mathcal{C}^{(b)}(\epsilon), \mathcal{C}^{(f)}(\eta)\} &= \int dx [\epsilon, \eta]^\beta \mathcal{C}_\beta(x) = \mathcal{C}^{(f)}([\epsilon, \eta]), \\ \{\mathcal{C}^{(f)}(\eta), \mathcal{C}^{(f)}(\bar{\eta})\} &= - \int dx [\eta, \bar{\eta}]^i \mathcal{C}_i(x) = -\mathcal{C}^{(b)}([\eta, \bar{\eta}]), \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde,

$$[\epsilon, \bar{\epsilon}]^i = \epsilon^j \epsilon^k f_{jk}{}^i, \quad [\epsilon, \eta]^\beta = \epsilon^i \eta^\alpha f_{i\alpha}{}^\beta, \quad [\eta, \bar{\eta}]^i = \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta f_{\alpha\beta}{}^i.$$

Podemos ver que a primeira e terceira expressão na equação (3.43) correspondem a transformações de calibre do modelo BF usual para a gravitação pura bidimensional, equação (2.23); da mesma forma que a primeira expressão de (3.45) corresponde a álgebra de vínculos do modelo BF usual da gravitação pura bidimensional, equação (2.37).

Com isto mostramos que os vínculos  $\mathcal{C}_i(x)$  geram as transformações de calibre usuais do modelo BF, enquanto que  $\mathcal{C}_\alpha(x)$  são vínculos que geram transformações de supersimetria local.

Feita a análise canônica do modelo, determinando os vínculos da teoria, mostrando que eles são de primeira classe por tanto os geradores das transformações infinitesimais de calibre vendo assim que o modelo planteado para a gravitação bidimensional com extensão supersimétrica é completamente consistente, temos dado o primeiro passo para sua quantização via a quantização de Laços.

A ideia para quantizar a teoria, é a de prosseguir de forma análoga ao caso da Quantização de Laços da gravitação pura. Com este intuito passamos a construir a holonomias estendidas, superholonomias.

### 3.4 Superholonomia

A quantização não-perturbativa da Relatividade Geral pode ser realizada pela representação de laços [62, 65–68]. Nesta representação as variáveis de quantização, as componentes da conexão, são expressas em termos das holonomias<sup>3</sup>. A holonomia surge em gravitação quântica, nos trabalhos de Jacobson e Smolin [53] como soluções da equação de Wheeler DeWitt [36] escritas nas variáveis de Ashtekar [6]. Assim na representação de laços, da teoria quântica da gravitação, dada uma variedade  $\mathcal{M}$  sobre a qual a conexão  $A$  e o laço  $\gamma$  são definidos, define-se o objeto  $h[A, \gamma]$ , chamada de holonomia da conexão ao redor do laço  $\gamma$ , ( ver o apêndice D, equação (D.5)), como uma variável para a descrição do espaço-tempo. Nas versões mais recentes [65], curvas não fechadas em  $\gamma$ .

---

<sup>3</sup>Podemos encontrar no Apêndice D, de esta tese, um resumo detalhado da definição do operador de transporte paralelo, a holonomia.

Para este caso do medolo BF bidimensional com extensão supersimétrica, a quantização pode ser pensada de forma análoga ao caso ordinario de gravitação pura, com a diferença de que em lugar de uma conexão  $A$ , temos a superconexão  $\mathcal{A}$ , como variável de configuração.

Com este intuito podemos definir a superholonomia  $\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma]$ , de forma análoga ao caso ordinario,

$$\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s_f, s_0) = \mathcal{P} \exp \left( - \int_{s_0}^{s_f} ds' \dot{\gamma}(s')^\mu \mathcal{A}_\mu(\gamma(s')) \right), \quad (3.46)$$

com  $s_0$  e  $s_f$  sendo os extremos do caminho  $\gamma$ , (ver Figura D.1 do Apêndice D), e  $\mathcal{P}$  é o operador de ordenamento de caminho. A superconexão  $\mathcal{A}$ , como sabemos, sendo valorada na álgebra de Lie do supergrupo de calibre, para este caso a superálgebra de Lie  $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})\mathfrak{d}s$  do grupo de calibre  $S(A)\mathfrak{d}S$ , (ver o subseção B.4 do Apêndice B).

Os resultado e propriedades obtidos para estas superholonomias, são análogos aos obtidos para as holonomias (ver Apêndice D). Assim pode-se mostrar que (3.46) é solução da equação:

$$\frac{d}{ds} \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s, s_0) + \dot{\gamma}^\mu(s) \mathcal{A}_\mu \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s, s_0) = 0, \quad (3.47)$$

a qual a podemos escrever como,

$$d\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma(s)](s, s_0) = -ds \dot{\gamma}^\mu(s) \mathcal{A}_\mu(\gamma(s)) \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma(s)](s, s_0), \quad (3.48)$$

observemos que esta equação, é a equação diferencial da superholonomia mun caminho  $\gamma$  que vai desde um ponto inicial  $s_0$  fixo a um ponto posterior quaisquer parametrizado por  $s$ , e  $s_0 \leq s$ .

Considerando a composição de caminhos, temos que,

$$\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma_2 \circ \gamma_1] = \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma_2] \cdot \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma_1], \quad (3.49)$$

não é difícil obtermos,

$$d\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma(s)](s_f, s) = \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma(s)](s_f, s) ds \dot{\gamma}^\mu(s) \mathcal{A}_\mu(\gamma(s)). \quad (3.50)$$

que vêm a ser a equação diferencial da superholonomia mun caminho  $\gamma$ , mas neste caso, que vai desde um ponto inicial quaisquer parametrizado por  $s$  a um ponto posterior fixo  $s_f$ , e  $s \leq s_f$ .

Por outro lado, sob as transformações de calibre, a superconexão  $\mathcal{A}$  transforma-se como:

$$\mathcal{A}(x) \mapsto \mathcal{A}'(x) = g(x)dg(x)^{-1} + g(x)\mathcal{A}(x)g^{-1}(x), \quad (3.51)$$

com  $g$ , sendo elemento do grupo  $S(A)dS$ . Sob esta transformação de calibre a superholonomia transforma-se como,

$$\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s) \mapsto \mathcal{H}[\mathcal{A}', \gamma](s, s_0) = g(s)\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s, s_0)g^{-1}(s_0), \quad (3.52)$$

que infinitesimalmente transforma-se como:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s)(s_f, s_0) &= \int_{s_0}^{s_f} ds \dot{\gamma}^\mu(s) \partial_\mu (\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s)(s_f, s) \epsilon(\gamma(s)) \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s)(s, s_0)) \\ &= \epsilon(\gamma(s_f)) \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s_f)(s_f, s_0) - \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma](s_0)(s_f, s_0) \epsilon(\gamma(s_0)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Construída a superholonomia e conhecendo como esta se transforma sob as transformações de calibre pasemos a determinar as quantidades invariantes de calibre, observáveis de Dirac, da teoria.

### 3.5 Observáveis de Dirac

Um observável de Dirac, é uma função das variáveis dinâmicas que é invariante sob as transformações de calibre. A relação entre os observáveis de Dirac e o formalismo Hamiltoniano, é que os observáveis de Dirac são caracterizados por terem colchetes de Poisson com os vínculos iguais a zero ou fracamente zero.

Os observáveis de Dirac são cruciais para a quantização canônica de sistemas com vínculos de primeira classe, já que unicamente operadores de Dirac podem ser promovidos a operadores no espaço de Hilbert físico [41, 63–65]. Além disso, estes podem ser vistos como um processo de quantização para procurar uma representação da álgebra de observáveis num espaço de Hilbert.

Se consideramos a variedade  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ , com  $\Sigma$  sendo o círculo  $\mathcal{S}_1$ , as coordenadas sendo  $x^\mu = (t, \theta)$ , com  $t \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$  sobre o círculo  $\mathcal{S}_1$ . De forma análoga ao caso BF puro, as quantidades invariantes de calibre são as extensões supersimétricas dos dois invariantes dados

em [56], isto é:

$$L := \text{Str}(\Phi\Phi) = (-1)^{|A||B|}\Phi_A K^{AB}\Phi_B, \quad (3.54)$$

$$\mathcal{W}_\gamma[\mathcal{A}] := \text{Str}(\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma(s)]) = \text{Str}\mathcal{P}e^{-\oint_\gamma \mathcal{A}}, \quad (3.55)$$

As invariâncias deste dois objetos sob transformações de calibre podem ser mostradas facilmente, vejamos:

como sabemos a transformação de calibre do supercampo escalar  $\Phi$  é dada por

$$\Phi \longmapsto \Phi' = g(x)\Phi g^{-1}(x), \quad (3.56)$$

com ajuda desta expressão, podemos mostrar de forma direta que,

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon L &= \delta_\epsilon \text{Str}(\Phi^2) = \text{Str}(\delta_\epsilon \Phi\Phi + \Phi\delta_\epsilon \Phi) = \text{Str}([\epsilon, \Phi]\Phi + \Phi[\epsilon, \Phi]) \\ &= \text{Str}([\epsilon, \Phi]\Phi + [\Phi, \epsilon]\Phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Do mesmo jeito, com ajuda da equação (3.53) (ou usando a expressão da transformação de calibre, equação (3.52)), e considerando um caminho  $\gamma$  fechado, teremos que

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \mathcal{W}_\gamma[\mathcal{A}] &= \text{Str}(\delta_\epsilon \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma(s)]) \\ &= \text{Str}(\epsilon(\gamma(s))\mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma(s)](s) - \mathcal{H}[\mathcal{A}, \gamma(s)](s)\epsilon(\gamma(s))) = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Consequentemente, com (3.57) e (3.58) mostramos que tanto a supertraço da função quadrática de  $\Phi$ , equação (3.54), como o supertraço da superholonomia num caminho fechado  $\gamma$ , equação (3.55), são quantidades invariantes sob as transformações de calibre, e portanto observáveis de Dirac da teoria.

## Capítulo 4

# O Modelo BF acoplado com Matéria Topológica

### 4.1 Introdução

Como sabemos a ação do modelo BF no espaço-tempo bidimensional para o grupo de calibre  $SO(1,2)$ , está relacionada com o modelo Jackiw-Teitelboim, que descreve a gravitação pura com constante cosmológica. Modelos como este, de dimensões inferiores, são geralmente usados como um laboratório, para nos ajudar num melhor entendimento no estudo de teorias com dimensões superiores, como poderia ser a Gravitação Quântica de Laços em quatro dimensões.

Leitgeb, Schweda e Zerrouki [54], propuseram acoplar ao modelo BF bidimensional usual um campo vetorial e um campo escalar, sendo a ação dada por:

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \phi^i F_{\mu\nu}^i + \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} (D_\mu B_\nu)^i \psi^i, \quad (4.1)$$

onde  $\phi^i$  e  $\psi^i$  são campos escalares,  $F_{\mu\nu}^i$  é a curvatura associada ao campo de calibre  $A^i$ ,  $B_\mu^i$  um campo vetorial e  $D_\mu$  a derivada covariante. Os índices  $i = 1, 2, 3$  indexam as bases da álgebra de Lie do grupo de calibre  $SU(2)$ . A primeira integral em (4.1) é a ação BF usual, enquanto que, a segunda integral representa a matéria topológica.

Neste capítulo consideramos o grupo de calibre  $SU(2)$ , correspondente à gravitação Riemanniana com constante cosmológica positiva, que é um caso particular do grupo (A)dS. Assim todos



os campos serão validados (tomados) na álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ .

A proposta é estudar o acoplamento da matéria topológica, proposta por Leites, Schweda e Zerrouki, mas guiando-nos pela supersimetria rígida presente no modelo. Simetria esta, que aparentemente não foi notada por estes autores. Assim a ação descrita pela equação (4.1), pode ser vista como uma ação para o modelo super-BF.

Levaremos a cabo a quantização deste modelo estendendo e aplicando as técnicas da Gravitação Quântica de Laços.

## 4.2 O Modelo BF com Supersimetria Rígida

### 4.2.1 A Ação Super-BF

Por definição supercampos  $N = 1$  são dados por,

$$\varphi(x, \theta) = \varphi_0(x) + \theta\varphi_1(x), \quad (4.2)$$

onde  $x = (x^\mu, \mu = 0, 1)$  são as coordenadas da variedade do espaço-tempo, que denotaremos por  $(t, x)$ , e  $\theta$ , com  $\theta^2 = 0$ , a (única) coordenada de Grassman do superespaço. No presente contexto, as transformações de supersimetria rígida são geradas por um único operador supersimétrico nilpotente  $Q$ ,  $Q^2 = 0$ , assim, por definição, sob a supersimetria rígida, um supercampo  $N = 1$  transforma-se infinitesimalmente como:

$$Q\varphi := \frac{\partial}{\partial\theta}\varphi, \quad (4.3)$$

que em componentes dá:

$$\begin{aligned} Q\varphi_0 &= \varphi_1, \\ Q\varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A extensão de supercampos dos campos fundamentais presentes no nosso modelo BF bidimensional, ação (4.1), são dados por:

$$\Phi : = \psi + \theta\phi, \quad (4.5)$$

$$a : = A + \theta B, \quad (4.6)$$

onde  $\Phi$  e  $a$ , são o supercampo escalar e a superconexão de paridade ímpar e par respectivamente. Campos de paridades pares e ímpares como sabemos caracterizam os campos de natureza natureza bosônica e fermiônica, respectivamente. Deve-se ressaltar que  $\phi$  e  $A$  são o campo escalar e a conexão 1-forma, respectivamente, que temos no modelo BF bidimensional, e estes são de natureza bosônica, enquanto que, o campo escalar  $\psi$  e o campo uma 1-forma  $B$  são campos fermiônicos, campos que caracterizam a matéria topológica acoplada a nosso modelo.

Sob a ação da supersimetria rígida os campos fundamentais que descrevem a teoria transformam-se como dubletos, isto é,

$$\begin{aligned} QA &= B, & QB &= 0, \\ Q\psi &= \phi, & Q\phi &= 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Não é difícil mostrar que a ação (4.1) é invariante sob estas transformações de supersimetria rígida. Invariância que fica ainda mais óbvia definindo a ação no superespaço, da seguinte forma [31]:

$$\mathcal{S}_T[\chi, a] := \text{Tr} \int d\theta \chi \mathfrak{F}[a], \tag{4.8}$$

ação que é equivalente à ação (4.1), com a diferença que aqui os campos  $\psi$  e  $B$  são campos de natureza fermiônica, contrario ao caso tratado por Leitgeb, Schweda e Zerrouki [54], onde todos os campos da teoria são bosônicos. Aqui  $\mathfrak{F}$  é a curvatura 2-forma da superconexão  $a$ , e por definição é dada por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= da + \frac{1}{2}[a, a] \\ &= F + \theta \mathbb{F}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

com  $F$  sendo a curvatura usual de Yang-Mills e  $\mathbb{F}$  seu parceiro supersimétrico, quantidades dadas respectivamente por,

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A], \tag{4.10}$$

$$\mathbb{F} = DB, \tag{4.11}$$

onde  $D$  é a derivada covariante<sup>1</sup>,  $D = d + [A, \cdot]$ , e  $d = dx^\mu \partial_\mu$  a derivada exterior usual do espaço-tempo.

---

<sup>1</sup>Os colchetes  $[\cdot, \cdot]$  são comutadores graduados, isto é, um anti-comutador se ambos argumentos são ímpares, caso contrario serão comutadores.

A integração na variável  $\theta$  é definida pela integral de Berezin [17, 34] e por definição satisfaz as seguintes propriedades (ver o subparágrafo A.2.4 do Apêndice A),

$$\int d\theta f := \frac{\partial}{\partial \theta} f, \quad \int d\theta 1 = 0, \quad \int d\theta \theta = 1$$

Os campos estão todos tomados na álgebra de Lie do grupo SU(2), assim:

$$\chi = \chi^i T_i, \quad a = a^i T_i, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^i T_i,$$

onde ( $i=1, 2, 3$ ), os  $T_i$  são os geradores do grupo SU(2)<sup>2</sup>. Podemos considerar, aqui, a álgebra de Lie su(2), como uma álgebra de Lie su(2) estendida, a qual teria como geradores bosônicos, os geradores  $T_i$  do grupo SU(2), mais os geradores  $\theta T_i$  que representariam os geradores fermiônicos, estes satisfariam a seguinte superálgebra de Lie:

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k, \quad [T_i, \theta T_j] = \epsilon_{ijk} \theta T_k, \quad \{\theta T_i, \theta T_j\} = 0.$$

Podemos também considerar essa estrutura como uma “supersimetrização” da álgebra su(2). Em analogia com a complexificação de su(2), que consiste em substituir os parâmetros reais  $\alpha^i$  por parâmetros complexos, aqui substituímos os  $\alpha^i$  por superparâmetros  $\alpha^i + \theta \beta^i$ , como pode ser visto explicitamente na parametrização introduzida na seção (4.2.3).

## 4.2.2 Equações de Movimento

Variando a ação (4.8), temos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_T &= \text{Tr} \int_{\mathcal{M}} d\theta (\delta \Phi \mathfrak{F} + \Phi \delta \mathfrak{F}) = \text{Tr} \int_{\mathcal{M}} d\theta (\delta \Phi \mathfrak{F} + \delta a \mathcal{D} \Phi), \\ &= \text{Tr} \int_{\mathcal{M}} d\theta (\delta \psi F + \delta A (d\psi + [A, \psi]) + \theta \delta \phi F - \theta \delta \psi \mathbb{F} \\ &\quad - \theta \delta A (-d\phi - [A, \phi] + [B, \psi]) + \theta \delta B (D\psi + [A, \psi])), \\ &= \text{Tr} \int_{\mathcal{M}} (\delta \phi F - \delta \psi \mathbb{F} - \delta A (-d\phi - [A, \phi] + [B, \psi]) + \delta B (D\psi + [A, \psi])), \end{aligned} \quad (4.12)$$

<sup>2</sup>Os geradores do grupo SU(2), na representação fundamental, são dados por:

$$T_1 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Que são os geradores do grupo (A)dS, equação (2.15), mas neste caso com geometria Riemanniana e constante cosmológica positiva.

onde  $\mathcal{D} := d + [a, \ ]$ , é a derivada covariante da superconexão. Assim, as equações de movimento da teoria são:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_T}{\delta \phi} &= F = 0, \\ \frac{\delta S_T}{\delta A} &= d\phi + [A, \phi] - [B, \psi] = D\phi - [B, \psi] = 0, \\ \frac{\delta S_T}{\delta \psi} &= \mathbb{F} = 0, \\ \frac{\delta S_T}{\delta B} &= d\psi + [A, \psi] = D\psi = 0.\end{aligned}$$

Com solução equivalente (localmente), módulo uma supertransformação de calibre,  $a; A = 0, B = 0, \phi = const., \psi = 0$ .

### 4.2.3 Supergrupo de Calibre

Para tratar a estrutura graduada dos supercampos, consideramos o grupo de calibre  $\mathbf{G}$  cujos elementos são dados por:

$$\mathcal{G}(x, \theta) = \mathcal{G}(\alpha, \beta) := e^{\Omega(x)} = e^{\alpha(x) + \theta\beta(x)}, \quad (4.13)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$ , são parâmetros tomados em  $\mathfrak{su}(2)$ . Observemos que  $\alpha$  é uma quantidade par, enquanto que  $\beta$  é a transformação supersimétrica (4.4) de  $\alpha$ ,  $\beta = Q\alpha$ , é ímpar.

Expandindo  $\mathcal{G}(x, \theta)$  em termos da variável  $\theta$ , podemos escrever,

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta) := g(\alpha) + \theta\beta \triangleright g(\alpha) \quad (4.14)$$

com

$$g(\alpha) := e^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}, \quad (4.15)$$

sendo um elemento do grupo de  $SU(2)$ , e a quantidade,

$$\beta \triangleright g(\alpha) := \beta^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i} g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \beta \alpha^{k-1}, \quad (4.16)$$

a definimos como a inserção do parâmetro supersimétrico  $\beta$  no elemento  $g$  do grupo  $SU(2)$ .

Como podemos ver, esta é uma transformação supersimétrica do elemento  $g(\alpha)$  do grupo de calibre.

$$\beta \triangleright g(\alpha) = Qg(\alpha), \quad (4.17)$$

Existe o elemento inverso de  $\mathcal{G}$ , dado por,

$$\mathcal{G}^{-1}(\alpha, \beta) := e^{-\Omega} = e^{-\alpha - \theta\beta} = g^{-1}(\alpha) + \theta\beta \triangleright g^{-1}(\alpha), \quad (4.18)$$

com

$$\beta \triangleright g^{-1}(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \beta \alpha^{k-1}. \quad (4.19)$$

Podemos verificar sem dificuldade que a seguinte propriedade é satisfeita,

$$(\beta \triangleright g)g^{-1} = -g(\beta \triangleright g^{-1}). \quad (4.20)$$

Sob a multiplicação a esquerda e a direita de um elemento de grupo  $g$ ,

$$g' = g_1 g g_2^{-1}, \quad \text{com } g = g(\alpha), \quad g_k = g(\alpha_k), \quad \beta_k = Q\alpha_k, \quad k = 1, 2, \quad (4.21)$$

a inserção do parâmetro  $\beta$  no elemento do grupo, transforma-se como

$$(\beta \triangleright g)' = g_1(\beta \triangleright g)g_2^{-1} + (\beta_1 \triangleright g_1)g g_2^{-1} - g_1 g g_2^{-1}(\beta_2 \triangleright g_2)g_2^{-1}. \quad (4.22)$$

### 4.3 Simetrias

A ação (4.8) é invariante sob transformações de calibre, e dado que esta deva descrever a gravitação, ela tem que ser invariante sob transformações de difeomorfismo. Verificaremos isto na subseção (4.3.3).

### 4.3.1 Transformações de Calibre

Como na teoria BF usual, podemos verificar que a ação (4.8) é invariante sob supertransformações da calibre.

Por definição, analogamente ao caso usual, a transformação de calibre da superconexão  $a$  é dada por,

$$a'(x, \theta) := \mathcal{G}(x, \theta)d\mathcal{G}^{-1}(x, \theta) + \mathcal{G}(x, \theta)a(x, \theta)\mathcal{G}^{-1}(x, \theta), \quad (4.23)$$

com  $\mathcal{G}$  sendo o elemento do supergrupo (4.13). Inserindo nesta última expressão o supercampo  $a$ , equação (4.6), e os elementos do grupo, equações (4.14) e (4.18), temos

$$\begin{aligned} A' + \theta B' &= \mathcal{G}(x, \theta)d\mathcal{G}^{-1}(x, \theta) + \mathcal{G}(x, \theta)A(x)\mathcal{G}^{-1}(x, \theta) + \mathcal{G}(x, \theta)\theta B(x)\mathcal{G}^{-1}(x, \theta) \\ &= g(x)dg^{-1}(x) + g(x)A(x)g^{-1}(x) + \theta g(x)(B(x) + D(g^{-1}(x)\beta(x) \triangleright g(x))g^{-1}(x)), \end{aligned}$$

de onde podemos identificar,

$$A'(x) = g(x)dg^{-1}(x) + g(x)A(x)g^{-1}(x), \quad (4.24)$$

$$B'(x) = g(x)(B(x) + D(g^{-1}(x)\beta(x) \triangleright g(x)))g^{-1}(x), \quad (4.25)$$

as quais são as transformações de calibre das componentes da superconexão. Lembremos que  $D$  representa a derivada covariante na representação adjunta, assim,

$$D(g^{-1}(\beta \triangleright g)) = d(g^{-1}(\beta \triangleright g)) + Ag^{-1}(\beta \triangleright g) + g^{-1}(\beta \triangleright g)A. \quad (4.26)$$

Analogamente, a supertransformação de calibre do supercampo  $\Phi$ , é definida por:

$$\Phi'(x, \theta) = \mathcal{G}(x, \theta)\Phi(x, \theta)\mathcal{G}^{-1}(x, \theta) \quad (4.27)$$

substituindo o supercampo escalar  $\Phi$  e so elemento do supergrupo de forma explicita, poderemos identificar as transformações de calibre das componentes do supercampo escalar, assim, estas são dadas por,

$$\phi'(x) = g(x)\phi(x)g^{-1}(x), \quad (4.28)$$

$$\psi'(x) = g(x)(\psi(x) + \theta[\psi(x), g^{-1}(x)(\beta \triangleright g)(x)])g^{-1}(x). \quad (4.29)$$

### 4.3.2 Transformações de Calibre Infinitesimais

Usando as supertransformações de calibre, equações (4.23) e (4.27), e considerando a quantidade  $\Omega(x, \theta)$  do elemento  $\mathcal{G}(x, \theta)$  do supergrupo  $G$ , equação (4.14), como parâmetro pequeno. Temos as supertransformações de calibre infinitesimais dos supercampos fundamentais da teoria, as quais estão dadas por:

$$\delta_{\Omega} a = -\mathcal{D}\Omega, \quad (4.30)$$

$$\delta_{\Omega} \Phi = -[\Phi, \Omega], \quad (4.31)$$

lembramos que o parâmetro de transformação infinitesimal  $\Omega$  é dado por,

$$\Omega(x, \theta) = \alpha(x) + \theta\beta(x) = \alpha^i(x)T_i + \theta\beta^i(x)T_i. \quad (4.32)$$

As transformações de calibre infinitesimais escritas em termos da suas componentes são dadas por:

$$\delta_{\Omega} a = \delta_{\alpha} A + \delta_{\beta} A + \theta\delta_{\alpha} B + \theta\delta_{\beta} B, \quad (4.33)$$

$$\delta_{\Omega} \chi = \delta_{\alpha} \psi + \delta_{\beta} \psi + \theta\delta_{\alpha} \phi + \theta\delta_{\beta} \phi, \quad (4.34)$$

assim, comparando as equações (4.33) e (4.34) com as equações (4.30) e (4.31), encontramos as seguintes transformações de calibre dos campos, e as classificamos como:

1. ) Transformações de calibre, que envolvem os parâmetros infinitesimais pares  $\alpha^i(x)$ , que chamaremos de transformações tipo  $\alpha$ , dadas por:

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha} A &= -D\alpha, \\ \delta_{\alpha} \phi &= [\alpha, \phi], \\ \delta_{\alpha} B &= [\alpha, B], \\ \delta_{\alpha} \psi &= [\alpha, \psi]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

2. ) Transformações que envolvem os parâmetros ímpares  $\beta^i(x)$ , que chamaremos de trans-

formações tipo  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
\delta_\beta A &= 0, \\
\delta_\beta \phi &= [\beta, \psi], \\
\delta_\beta B &= D\beta, \\
\delta_\beta \psi &= 0.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Estas transformações de calibre são as mesmas que aparecem no modelo de Leitgeb-Scheweda-Zerrouki, dadas pela ação (4.1). Com a diferença de que, neste caso, as transformações do tipo  $\beta$  são agora interpretadas como transformações supersimétricas locais, sendo  $\beta$  agora ímpar.

### 4.3.3 Transformações de Difeomorfismo Infinitesimais

Difeomorfismos são também simetrias do modelo BF. Com efeito, considerando um campo vetorial  $v$ , as transformações de difeomorfismos infinitesimais,  $\delta x^\mu = v^\mu(x)$ , são dadas pela derivada de Lie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v \Phi &= i_v d\Phi, \\
\mathcal{L}_v a &= (i_v d + di_v)a,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

podemos facilmente verificar que estes difeomorfismos infinitesimais podem ser expressos como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v \Phi &= i_v \frac{\delta S_T}{\delta B} + \theta i_v \frac{\delta S_T}{\delta A} - \delta_{(i_v a)} \Phi, \\
\mathcal{L}_v a &= i_v \frac{\delta S_T}{\delta \phi} + \theta i_v \frac{\delta S_T}{\delta \psi} - \delta_{(i_v a)} a,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

onde  $\delta_{(i_v a)}$  é uma supertransformação de calibre  $\delta_\Omega$  (4.33, 4.34) com  $\Omega = i_v a$ . Como podemos ver, as transformações de difeomorfismo estão relacionadas às transformações de calibre, se considerarmos  $i_v a = v^\mu a_\mu$  como parâmetros das transformações de calibre infinitesimais, modulo equações de movimento.

## 4.4 Análise Canônica

Consideramos a variedade  $\mathcal{M}$  do espaço-tempo bidimensional, e consideremos a foliação  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ , com coordenadas  $x_\mu = (t, x)$ , onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \Sigma$ . Com esta foliação a ação (4.8) a



escrevemos como:

$$\mathcal{S}_T = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_{\mathcal{M}} d^2x d\theta \epsilon^{\mu\nu} \chi \mathfrak{F}_{\mu\nu}, \quad (4.39)$$

onde

$$\mathfrak{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta \mathbb{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + [a_\mu, a_\nu], \quad (4.40)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (4.41)$$

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu, \quad (4.42)$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_T &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} dx d\theta \Phi_i (\partial_t a_x^i - \partial_x a_t^i + f_{jk}^i a_t^j a_x^k) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} dx \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi_i (\partial_t a_x^i - \partial_x a_t^i + f_{jk}^i a_t^j a_x^k)) = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} dx (\phi_i F_{tx}^i - \psi_i \mathbb{F}_{tx}^i) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt L_T, \end{aligned} \quad (4.43)$$

com

$$L_T = \int dx (\phi_i (\partial_t A_x^i - \partial_x A_t^i + f_{jk}^i A_t^j A_x^k) - \psi_i (\partial_t B_x^i - \partial_x B_t^i + f_{jk}^i (A_t^j B_x^k - A_x^j B_t^k))), \quad (4.44)$$

sendo a Lagrangiana.

Usando a definição dos momentos canonicamente conjugados,

$$\pi_i^\varphi := \frac{\delta L_T}{\delta \partial_t \varphi(x)}$$

onde os  $\varphi$ 's são variáveis do espaço de configuração da teoria, os momentos conjugados de nossos supercampos  $\Phi (= (\psi^i, \phi^i))$  e  $a (= (a_t^i, a_x^i))$ , são:

$$\pi_i^{(A_t)} = 0, \quad \pi_i^{(B_t)} = 0, \quad (4.45)$$

$$\pi_i^{(A_x)} = \phi_i, \quad \pi_i^{(B_x)} = \psi_i. \quad (4.46)$$

podemos já ver a presença de vínculos primários na teoria.

Como podemos ver de (3.22), os colchetes de Poisson na presença de campos com paridades

pares e ímpares, supercolchetes de Poisson, por definição são dados por:

$$\{M, N\} := \sum_A \int dx (-1)^{|M||\mathcal{Q}^A|} \left( \frac{\delta M}{\delta \mathcal{Q}^A(x)} \frac{\delta N}{\delta \mathcal{P}_A(x)} - (-1)^{|\mathcal{Q}^A||\mathcal{P}_A|} \frac{\delta M}{\delta \mathcal{P}_A(x)} \frac{\delta N}{\delta \mathcal{Q}^A(x)} \right),$$

com  $M$  e  $N$  sendo duas funções quaisquer no espaço de fase, com  $\mathcal{Q}^A$  e  $\mathcal{P}_A$  sendo as variáveis de configuração e seus momentos conjugados respectivamente, coordenadas do espaço de fase, e o símbolo  $|\cdot|$  denota a função de paridade Grassmanniana, que por definição  $|M| = 0(1)$  se  $M$  é uma função par(ímpar), ver equação B.1 do Apêndice B. Os supercolchetes não nulos, das variáveis de configuração e dos momentos conjugados, para campos generalizados, são dados por.

$$\{\mathcal{Q}_A(x), \mathcal{P}^B(y)\} = (-1)^{|\mathcal{Q}_A||\mathcal{P}^B|} \delta_A^B \delta(x-y). \quad (4.47)$$

Como podemos ver de (4.46), os momentos conjugados das variáveis de configuração  $A_x^i$  e  $B_x^i$  são identificadas com  $\phi_i$  e  $\psi_i$ , respectivamente. Consequentemente, os supercolchetes de Poisson não nulos são:

$$\begin{aligned} \{A_x^i(x), \phi_j(y)\} &= \delta_j^i \delta(x-y) = -\{\phi_j(y), A_x^i(x)\}, \\ \{B_x^i(x), \psi_j(y)\} &= -\delta_j^i \delta(x-y) = \{\psi_j(y), B_x^i(x)\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Por outro lado, os momentos conjugados  $\pi_i^{(A_t)}$  e  $\pi_i^{(B_t)}$  de  $A_t^i$  e  $B_t^i$  são nulos, como podemos ver em (4.45), e como tal são interpretadas no formalismo de Bergmann-Dirac [39] como vínculos primários, isto é,

$$\pi_i^{(A_t)} \approx 0, \quad \pi_i^{(B_t)} \approx 0, \quad (4.49)$$

lembrando que  $\approx$  denota uma igualdade fraca [39].

#### 4.4.1 A Hamiltoniana

Tendo obtido os momento conjugados, recorremos a fórmula de Lagrange para determinar a Hamiltoniana da teoria, assim,

$$\begin{aligned} H &:= \int dx \dot{a}_x^i \pi_i^{a_x} - L_T, \\ &= - \int dx (A_t^i (D_x \phi_i(x) + [B_x, \psi]_i) + B_t^i D_x \psi_i). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Por consistência sob a evolução temporal gerada pela Hamiltoniana, os vínculos primários, equação (4.49), produzem os vínculos secundários da teoria, os quais são:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_i^{A_i}(x) &= D_x \phi_i(x) + [B_x(x), \psi(x)]_i =: \mathbb{G}_i(x) \approx 0, \\ \dot{\pi}_i^{B_i}(x) &= D_x \psi_i(x) =: \mathbb{S}_i(x) \approx 0.\end{aligned}\tag{4.51}$$

as quantidades  $\mathbb{G}_i(x)$  e  $\mathbb{S}_i(x)$  devem ser considerados como quantidades fracamente nulas, caso contrário teríamos uma Hamiltoniana igual a zero, e como tal não poderíamos descrever a dinâmica da teoria. Assim, da consistência dos vínculos sob evolução temporal, conclui-se que a Hamiltoniana (4.50) é completamente vinculada, como era de se esperar de numa teoria independente do fundo, conseqüentemente

$$H = - \int dx (A_t^i(x) \mathbb{G}_i(x) + B_t^i(x) \mathbb{S}_i(x)).\tag{4.52}$$

onde  $\mathbb{G}_i(x)$  e  $\mathbb{S}_i(x)$ , definidos em (4.51), são vínculos secundários de natureza par e ímpar (bosônica e fermiônica), respectivamente. Observemos que  $A_t^i$  e  $B_t^i$  fazem o papel de multiplicadores de Lagrange. Veremos na continuação se estes vínculos secundários são de primeira classe.

#### 4.4.2 Álgebra de Vínculos

Por conveniência escrevemos os vínculos  $\mathbb{G}_i(x)$  e  $\mathbb{S}_i(x)$  na sua forma ponderada (*smearred form*),

$$\mathbb{G}(\alpha) := \int dx \alpha^i(x) \mathbb{G}_i(x),\tag{4.53}$$

$$\mathbb{S}(\beta) := \int dx \beta^i(x) \mathbb{S}_i(x),\tag{4.54}$$

onde  $\alpha^i(x)$  e  $\beta^i(x)$  são funções testes suaves que decaem no infinito mais rapidamente que qualquer potência de  $x$ , e são de natureza bosônica e fermiônica respectivamente. Não é difícil ver que os vínculos  $\mathbb{S}$  e  $\mathbb{G}$ , equação (4.51), formam um dubleto supersimétrico, isto é,  $Q\mathbb{S} = \mathbb{G}$ . Tomando  $\mathbb{S}$  e  $\mathbb{G}$  como componentes de um dado supercampo  $\mathcal{S}$ , podemos escrever:

$$\mathcal{S}_i(x, \theta) := \mathbb{S}_i(x) + \theta \mathbb{G}_i(x).\tag{4.55}$$

Assim, escrevendo  $\Omega$  (4.13), como superfunção teste, a superfunção  $\mathcal{S}(x, \theta)$  ou supervínculo a podemos escrever numa forma ponderada, conseqüentemente,

$$\mathcal{S}(\Omega) = \int dx \int d\theta \Omega^i(x, \theta) \mathcal{S}_i(x, \theta) = \mathbb{G}(\alpha) + \mathbb{S}(\beta) \approx 0. \quad (4.56)$$

Sem dificuldade podemos checar que esta última forma uma álgebra de Poisson fechada,

$$\{\mathcal{S}(\Omega_1), \mathcal{S}(\Omega_2)\} = \mathcal{S}([\Omega_1, \Omega_2]), \quad (4.57)$$

sendo  $\mathcal{S}$  o gerador de transformações de calibre infinitesimal, isto é, as supertransformações (4.30) e (4.31),

$$\begin{aligned} \{\mathcal{S}(\Omega), a_x(x, \theta)\} &= \partial_x \Omega(x, \theta) + [a_x(x, \theta), \Omega(x, \theta)], \\ \{\mathcal{S}(\Omega), \Phi(x, \theta)\} &= [\Phi(x, \theta), \Omega(x, \theta)]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Em componentes, a superálgebra de Poisson é dada por:

$$\begin{aligned} \{\mathbb{G}(\alpha), \mathbb{G}(\alpha')\} &= \mathbb{G}([\alpha', \alpha]), \\ \{\mathbb{G}(\alpha), \mathbb{S}(\beta)\} &= \mathbb{S}([\alpha, \beta]), \\ \{\mathbb{S}(\beta), \mathbb{S}(\beta')\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

por outro lado em componentes as transformações calibre infinitesimais do tipo  $\alpha$  e o tipo  $\beta$  dadas na subsecção 4.3.2, como podemos ver são geradas pelos vínculos, assim, as transformações de tipo  $\alpha$  e do tipo  $\beta$  são geradas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \{\mathbb{G}(\alpha), A_x^i(x)\} &= D_x \alpha^i(x), \\ \{\mathbb{G}(\alpha), \phi_i(x)\} &= -[\alpha(x), \phi(x)]_i, \\ \{\mathbb{G}(\alpha), B_x^i(x)\} &= -[\alpha(x), B(x)]^i, \\ \{\mathbb{G}(\alpha), \psi_i(x)\} &= -[\alpha(x), \psi(x)]_i, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbb{S}(\beta), A_x^i(x)\} &= 0, \\ \{\mathbb{S}(\beta), \phi_i(x)\} &= -[\beta(x), \psi(x)]_i, \\ \{\mathbb{S}(\beta), B_x^i(x)\} &= D_x \beta^i, \\ \{\mathbb{S}(\beta), \psi_i(x)\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Vimos que os vínculos  $\mathbb{G}$  e  $\mathbb{S}$  têm uma superálgebra de Lie fechada, com o supercolchete de Poisson sendo o produto. Assim concluímos que  $\mathbb{G}$  e  $\mathbb{S}$  são vínculos de primeira classe, e como tais, os geradores das transformações de calibre infinitesimais da teoria.

### 4.4.3 Superholonomias

No esquema da Gravit ao Qu antica de Laos, holonomias são escolhidas como variáveis adequadas da teoria qu antica, quando impomos os vínculos de Gauss, já que elas, as holonomias, são dotadas com propriedades de transformaao que permitem a construao de quantidades invariantes de calibre de um modo relativamente simples.

Assim seguindo os passos da Gravit ao Qu antica de Laos, escreveremos funcionais de onda em termos das holonomias e da  $B$ -inserao –a serem definidos a seguir–, no lugar dos mesmos campos locais  $A$  e  $B$ , funcionais sobre as quais os vínculos são impostos para selecionar os vetores que pertencem ao espao de Hilbert físico da teoria.

Guiados pela supersimetria (rígida) do modelo, definimos a superholonomia da superconexão,  $a$ , atráves de um caminho  $\gamma$  sobre a variedade  $\Sigma$ , como segue:

$$\mathbf{H}_\gamma[a] := \mathbf{H}_\gamma[A, B] := \mathcal{P}e^{-\int_\gamma a} = \mathcal{P}e^{-\int_\gamma (A + \theta B)}, \quad (4.62)$$

onde  $\mathcal{P}$    o ordenamento no caminho. Expandindo em série de potências, reagrupando e colocando em evidência o parâmetro Grassmanniano  $\theta$ , a superholonomia a podemos escrever como:

$$\mathbf{H}_\gamma[A, B] := h_\gamma[A] - \theta B \triangleright h_\gamma[A] \quad (4.63)$$

onde  $h_\gamma[A]$ , como sabemos, representa a holonomia usual da conexão  $A$  ao longo do caminho  $\gamma$  na variedade  $\Sigma^3$ , que por definiao   dada por,

$$h_\gamma[A] := Pe^{-\int_\gamma A}. \quad (4.64)$$

Seguindo a definiao da inserao do parâmetro Grassmanniano  $\beta$  em  $SU(2)$  dada em (4.16), definimos a quantidade  $B \triangleright h_\gamma[A]$  como a inserao do campo Grassmanniano  $B$  na holonomia atráves da curva  $\gamma$  parametrizada por  $s$  com  $s_0 < s < s_f$ , sendo assim temos,

$$B \triangleright h_\gamma[A](s_f, s_0) := \int_{s_0}^{s_f} ds h[A](s_f, s) B(s) h[A](s, s_0). \quad (4.65)$$

---

<sup>3</sup>Definiao e as propriedades basicas da holonomia a podemos encontrar no Apêndice (D).

Fazendo uso da noção de supercampos, podemos escrever as superholonomias  $\mathbf{H}_\gamma[A, B]$  como:

$$\mathbf{H}_\gamma[A, B] := h_\gamma[A] + \theta Qh_\gamma[A], \quad (4.66)$$

onde  $Q$  é o gerador supersimétrico (4.3), conseqüentemente temos:

$$Qh_\gamma[A] = -B \triangleright h_\gamma[A]. \quad (4.67)$$

Com isto em mente, introduzimos algumas relações úteis presentes neste formalismo. Consideremos um caminho composto sobre  $\Sigma$  dado por  $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ , (ver Figura D.2, do Apêndice D), sob este caminho a holonomia  $h_\gamma[A](s_f, s_0)$  satisfaz a seguinte propriedade,

$$h_\gamma[A](s_f, s_0) = h_\gamma[A](s_f, s) \circ h_\gamma[A](s, s_0),$$

onde  $s_0$  e  $s_f$  são os pontos inicial e final do caminho  $\gamma$  e  $s$  é o ponto final de  $\gamma_1$  e o ponto inicial de  $\gamma_2$ . Sob esta composição de caminhos, a inserção do campo  $B$  na holonomia, isto é, a quantidade  $Qh_\gamma[A](s_f, s_0)$ , satisfaz a propriedade,

$$Q(h_\gamma[A](s_f, s_0)) = Qh_{\gamma_2}[A](s_f, s) \circ h_{\gamma_1}[A](s, s_0) + h_{\gamma_2}[A](s_f, s) \circ Qh_{\gamma_1}[A](s, s_0). \quad (4.68)$$

Por outro lado, sob uma transformação de calibre, a holonomia transforma-se como se segue:

$$h'_\gamma[A](s_f, s_0) = g(s_f)h_\gamma[A](s_f, s_0)g^{-1}(s_0). \quad (4.69)$$

De forma semelhante, a transformação de calibre da superholonomia, por definição, é dada por,

$$\mathbf{H}'_\gamma[a](s_f, s_0) := \mathcal{G}(s_f)\mathbf{H}_\gamma(s_f, s_0)\mathcal{G}^{-1}(s_0), \quad (4.70)$$

onde  $\mathcal{G}$  representa o elemento do supergrupo da calibre parametrizado como em (4.14). Diferenciando esta expressão em  $\theta$  e usando, (4.18), (4.66), (4.67) e (4.69), obtemos as transformações de calibre da  $B$ -inserção,

$$\begin{aligned} (B \triangleright h_\gamma[A](s_f, s_0))' &= g(s_f)(B \triangleright h_\gamma[A](s_f, s_0) + (g^{-1}(\beta \triangleright g))(s_f)h_\gamma[A](s_f, s_0) - \\ & \quad h_\gamma[A](s_f, s_0)(g^{-1}(\beta \triangleright g))g^{-1}(s_0)) \end{aligned} \quad (4.71)$$

**Nota:**

Observemos que esta regra de transformação é a mesma como a da inserção  $\beta$ , equação (4.22), com  $g_1, g_2$  substituído por  $g(s_f), g(s_0), g$  com  $h_\gamma[A](s_f, s_0)$  e  $\beta \triangleright g$  com  $B \triangleright h_\gamma[A](s_f, s_0)$ .

Conhecendo as regras de transformação de calibre, da holonomia e da  $B$ -inserção na holonomia, podemos passar a determinar as quantidades invariantes de calibre da teoria.

## 4.5 Observáveis de Dirac

Um observável clássico de Dirac é uma função das variáveis do espaço de configuração, função que por definição é invariante sob as transformações de calibre da teoria.

Uma vez conhecida as regras das transformações de calibre da holonomia e da  $B$ -inserção na holonomia, procuramos as quantidades invariantes de calibre da teoria, isto é, os observáveis de Dirac. Considerando a topologia de  $\Sigma$  sendo o círculo  $S_1$ , é sabido que para o modelo BF bidimensional um invariante de calibre é o Laço de Wilson, a qual a denotamos por  $W_0$ , [32, 33, 56], traço da holonomia através de um caminho fechado –a qual aqui coincide com o espaço  $S_1$ , além deste observável, neste modelo construímos o observável,  $W_1$ , que é o traço da  $B$ -inserção na holonomia ao longo do mesmo caminho fechado, assim estas duas quantidades invariantes por definição são escritas como:

$$\begin{aligned} W_0 &:= \text{Tr}(h[A]), \\ W_1 &:= \text{Tr}(B \triangleright h[A]). \end{aligned} \tag{4.72}$$

Observemos que a quantidade  $W_0$  é uma quantidade de natureza bosônica, enquanto que  $W_1$  é uma quantidade de natureza fermiônica. A invariância de calibre destes invariantes, sem dificuldade, segue de (4.69) e (4.71). Notemos que não existe  $B$ -inserções invariantes de calibre multilineares de ordem  $\geq 2$  em  $B$ .

Outras quantidades invariantes de calibre presentes no modelo são:

$$\begin{aligned} L_0 &:= \text{Tr}(\phi^2) = \phi^i \phi_i, \\ L_1 &:= \text{Tr}(\psi \phi) = \psi^i \phi_i, \end{aligned} \tag{4.73}$$

a quantidade  $L_0$  está presente no modelo BF didimensional [32, 33, 56].

Observemos que estes quatro invariantes formam dois dubletos sob a supersimetria rígida [31]:

$$\begin{aligned} QW_0 &= W_1, & QW_1 &= 0, \\ QL_1 &= L_0, & QL_0 &= 0, \end{aligned} \tag{4.74}$$

As duas primeiras quantidades, isto é  $W_0$  e  $W_1$ , podem ser tomadas como uma base algébrica para os funcionais de onda que descrevem o espaço quântico do modelo.

## 4.6 Quantização de Laços

Como primeiro passo na construção da teoria da Gravitação Quântica de Laços, constroi-se um espaço de Hilbert cinemático, cujos elementos são funcionais de onda  $\Psi$  da conexão (elemento do espaço de configuração), onde os operadores de momento conjugado atuam como derivadas funcionais. Uma vez que o espaço de configuração, uma medida de integração invariante e um produto interno sejam bem definidos, passa-se a resolver os vínculos logo de que estes foram promovidos a vínculos quânticos, a solução dos vínculos permitem-nos selecionar os vetores pertencentes ao espaço de Hilbert físico da teoria, espaço formado por os funcionais de onda  $\Psi$  que resolvem os vínculos.

### 4.6.1 Espaço de Hilbert

Para nosso modelo bidimensional, o espaço de Hilbert cinemático está caracterizado por funcionais de onda do tipo  $\Psi[a] := \Psi[a, Qa]$  ou equivalentemente  $\Psi[A, B]$ . Assim, escolhendo como coordenadas a conexão  $A$  e o campo vetor  $B$ , fixamos a polarização (coordenadas – momento), sendo assim, o operador associado as coordenadas  $A$  e  $B$  atuam como multiplicação sob os funcionais de onda  $\Psi[A, B]$ , enquanto que seus respectivos operadores de momentos conjugados  $\phi$  e  $\psi$  atuam como derivadas funcionais, isto é:

$$\begin{aligned} \hat{A}_x(x)\Psi[A, B] &:= A_x(x)\Psi[A, B], & \hat{\phi}(x)\Psi[A, B] &:= -i\hbar\frac{\delta}{\delta A_x}\Psi[A, B], \\ \hat{B}_x(x)\Psi[A, B] &:= B_x(x)\Psi[A, B], & \hat{\psi}(x)\Psi[A, B] &:= -i\hbar\frac{\delta}{\delta B_x}\Psi[A, B], \end{aligned}$$



por outro lado, os supercolchetes de Poisson, equação (4.48), são promovidos a comutadores e anti-comutadores,

$$\begin{aligned} \left[ \hat{A}_x^i(x), \hat{\phi}_j(y) \right]_- &= i\hbar \delta_j^i \delta(x-y) \\ \left[ \hat{B}_x^i(x), \hat{\psi}_j(y) \right]_+ &= -i\hbar \delta_j^i \delta(x-y) \end{aligned} \quad (4.75)$$

O espaço de Hilbert cinemático será construído sobre as bases das funcionais de onda da forma

$$\Psi[A, B] := f(h_\gamma[A], B \triangleright h_\gamma[A]), \quad (4.76)$$

as quais são as chamadas de *funções cilíndricas* da nossa teoria. Seus argumentos são as holonomias  $h_\gamma[A]$ , e  $B$ -inserções na holonomia,  $B \triangleright h_\gamma[A]$ , dados em (4.64) e (4.65) respectivamente, com  $\gamma$  sobre o espaço  $S_1$ . O conjunto de tais funções formam um espaço vetor de funções cilíndricas.

Os vetores estado do espaço físicos são obtidos pela imposição dos vínculos  $\mathbb{G}(x)$  e  $\mathbb{S}(x)$ , equação (4.51), sobre o espaço de Hilbert cinemático. Assim os funcionais de onda físicos serão funcionais invariantes de calibre, sendo assim, estes são dados por funcionais que são funções das quantidades invariantes de calibre  $W_0$  e  $W_1$  definidas por (4.72), isto é:

$$\Psi[A, B] := f(W_0[A], W_1[A, B]) = \psi(h_\gamma[A], B \triangleright h_\gamma[A]), \quad (4.77)$$

a segunda igualdade define o funcional de onda como uma função das holonomias e a  $B$ -inserção da holonomia, isto é uma função do supergrupo de calibre  $\mathbf{G}$ .

Dado que  $W_1$  é um número ímpar anticomutante,  $W_1^2 = 0$ , a função  $f$  em (4.77) se expande em  $W_1$  como

$$f(W_0[A], W_1[A, B]) = b(W_0) + W_1 c(W_0). \quad (4.78)$$

escolhendo uma primitiva  $\hat{c}$  da função  $c$ ,  $c = \hat{c}'$  (a simbolo  $\hat{c}'$  denota a derivada de  $\hat{c}$  com respeito ao argumento, que neste caso seria  $W_0$ ), reescrevemos a última função como

$$f(W_0[A], W_1[A, B]) = b(W_0[A]) + W_1[A, B] \hat{c}'(W_0[A]) = b(W_0[A]) + Q \hat{c}(W_0[A]), \quad (4.79)$$

com isto podemos concluir que o espaço de funcionais invariantes de supercalibre divide-se em representações de singlete e dubletos da supersimetria rígida. Os singletos sendo funcionais

constantes.

Podemos também concluir, de (4.78), que temos dois tipos de funcionais de onda, funcionais de natureza par e funcionais de natureza ímpar,

$$\begin{aligned} \text{par: } \quad \Psi_+[A, B] &= f_+(W_0[A]) = \psi_+(h_\gamma[A]), \\ \text{ímpar: } \quad \Psi_-[A, B] &= Qf_-(W_0[A]) = \text{Tr}(B \triangleright h[A])\psi_-(h[A]) = W_1\psi_-(h[A]). \end{aligned} \quad (4.80)$$

O produto interno de dois vetores estado (4.77) será definido por uma integral sobre o supergrupo de calibre  $\mathbf{G}$  de elementos  $\mathcal{G}$ ,

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\mathbf{G}} d\mu(\mathcal{G})(\Psi_1(\mathcal{G}))^* \Psi_2(\mathcal{G}), \quad (4.81)$$

onde  $d\mu$  é a medida invariante sobre  $\mathbf{G}$ , uma generalização da medida de Haar que daremos a continuação.

## 4.6.2 Medida de Integração

Para definir o produto interno, precisamos definir uma medida de integração sobre o espaço de configuração, cujos pontos são holonomias da conexão  $A$  e da  $B$ -inserção na holonomia. Para isto construímos agora uma medida de integração sobre o supergrupo de calibre  $\mathbf{G}$  definida na Subseção (4.2.3) [31], já que, como sabemos, as holonomias e as  $B$ -inserções são elementos que pertencem ao grupo de calibre, então definimos a medida de integração como:

$$\int_{\mathbf{G}} d\mu(\mathcal{G})f(\mathcal{G}) = \int_{\mathbf{G}} d^3\alpha d^3\beta \rho(\alpha, \beta)F(\alpha, \beta), \quad (4.82)$$

onde

$$d^3\beta := d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3, = \frac{\partial}{\partial\beta^3} \frac{\partial}{\partial\beta^2} \frac{\partial}{\partial\beta^1},$$

é a medida de integração de Berezin sobre os parâmetros ímpares do grupo,  $F(\alpha, \beta) = f(\mathcal{G}(\alpha, \beta))$  e  $\rho(\alpha, \beta)$  é a densidade da medida que deve ser escolhida tal que a integral seja invariante sob multiplicações pela esquerda e direita:

$$\int_{\mathbf{G}} d\mu(\mathcal{G})f(\mathcal{G}) = \int_{\mathbf{G}} d\mu(\mathcal{G})f(\mathcal{G}_1\mathcal{G}) = \int_{\mathbf{G}} d\mu(\mathcal{G})f(\mathcal{G}\mathcal{G}_1), \quad \forall \mathcal{G}_1 \in \mathbf{G}, \quad (4.83)$$

isto irá assegurar a invariância de calibre do produto escalar.

Em termos dos parâmetros de parametrização  $(\alpha, \beta)$  definida por (4.13), os parâmetros do produto  $\mathcal{G}'(\alpha', \beta') = \mathcal{G}_1(\alpha_1, \beta_1)\mathcal{G}(\alpha, \beta)$  escreve-se,

$$\alpha'^i = p^i(\alpha_1, \alpha), \quad \beta'^i = Qp^i(\alpha_1, \alpha) = (\beta_1^j \frac{\partial}{\partial \alpha_1^j} + \beta^j \frac{\partial}{\partial \alpha^j})p^i(\alpha_1, \alpha), \quad (4.84)$$

onde  $p^i(\alpha_1, \alpha)$  é a lei do produto em termos da parametrização  $\alpha$  da parte bosônica do grupo de calibre, aqui SU(2). Assim, a condição da invariância (nos restringimos aqui à invariância pela esquerda)

$$\int_{\mathbf{G}} d^3\alpha d^3\beta \rho(\alpha, \beta) F(\alpha, \beta) = \int_{\mathbf{G}} d^3\alpha d^3\beta \rho(\alpha, \beta) F(\alpha', \beta'), \quad (4.85)$$

implica, graças ao superjacobiano de mudança de variáveis de integração  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha', \beta')$  no lado direito ser igual a unidade, na condição de invariância,

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha', \beta'), \quad (4.86)$$

para densidade da medida de integração.

Oservemos que a dependência  $\beta$  da função  $F(\alpha, \beta)$  pode ter quaisquer uma das quatro formas seguintes:

$$F_0(\alpha), \quad \text{ou} \quad F_i(\alpha)\beta^i, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}F_{ij}(\alpha)\beta^i\beta^j, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3!}F_{ijk}(\alpha)\beta^i\beta^j\beta^k. \quad (4.87)$$

Cada uma das expressões (4.87) deve ser integrada com uma das seguintes densidades da medida de integração  $\rho(\alpha, \beta)$ , respectivamente:

$$\frac{1}{3!}\rho_{ijk}(\alpha)\beta^i\beta^j\beta^k, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\rho_{ij}(\alpha)\beta^i\beta^j, \quad \text{ou} \quad \rho_i(\alpha)\beta^i, \quad \text{ou} \quad \rho_0(\alpha). \quad (4.88)$$

Usando as quatro formas das funções  $F(\alpha, \beta)$  com as respectivas quatro formas das densidades de medida de integração, a integral (4.82) é lida, após a integração de Berezin

$$\int d^3\beta \beta^i \beta^j \beta^k = \epsilon^{ijk}$$

ser realizada, como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3!}\epsilon^{ijk} \int d^3\alpha \rho_{ijk}(\alpha) F_0(\alpha) &= \int d^3\alpha \tilde{\rho}(\alpha) F_0(\alpha), \\
\frac{1}{2!}\epsilon^{ijk} \int d^3\alpha \rho_{ij}(\alpha) F_k(\alpha) &= \int d^3\alpha \tilde{\rho}^i(\alpha) F_i(\alpha), \\
\frac{1}{2!}\epsilon^{ijk} \int d^3\alpha \rho_i(\alpha) F_{jk}(\alpha) &= \frac{1}{2} \int d^3\alpha \tilde{\rho}^{ij}(\alpha) F_{ij}(\alpha), \\
\frac{1}{3!}\epsilon^{ijk} \int d^3\alpha \rho_0(\alpha) F_{ijk}(\alpha) &= \frac{1}{3!} \int d^3\alpha \tilde{\rho}^{ijk}(\alpha) F_{ijk}(\alpha),
\end{aligned} \tag{4.89}$$

aqui com  $\tilde{\rho}$  estamos representado o dual da densidade de medida  $\rho$ , isto é:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\alpha) &= \frac{1}{3!}\epsilon^{ijk} \rho_{ijk}(\alpha), \\
\tilde{\rho}^i(\alpha) &= \frac{1}{2!}\epsilon^{ijk} \rho_{jk}(\alpha), \\
\tilde{\rho}^{ij}(\alpha) &= \epsilon^{ijk} \rho_k(\alpha), \\
\tilde{\rho}^{ijk}(\alpha) &= \epsilon^{ijk} \rho_0(\alpha).
\end{aligned}$$

Escrevendo a condição de invariância (4.86), para cada uma das quatro formas, da densidade da medida de integração (4.88), veremos que obtemos termos em  $\beta$  e  $\beta_1$ . Aqueles em  $\beta_1$  são irrelevantes dado que eles são de ordem inferior em  $\beta$ , assim não contribuem à integral de Berezin. Isto produz as condições

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\alpha') &= \tilde{\rho}(\alpha) \det \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha'} \right| + O(\beta_1), \\
\tilde{\rho}^i(\alpha') &= \tilde{\rho}^m(\alpha) \frac{\partial \alpha'^i}{\partial \alpha_m} \det \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha'} \right| + O(\beta_1), \\
\tilde{\rho}^{ij}(\alpha') &= \tilde{\rho}^{mn}(\alpha) \frac{\partial \alpha'^i}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha'^j}{\partial \alpha_n} \det \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha'} \right| + O(\beta_1), \\
\tilde{\rho}^{ijk}(\alpha') &= \tilde{\rho}^{mnp}(\alpha) \frac{\partial \alpha'^i}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha'^j}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha'^k}{\partial \alpha_p} \det \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha'} \right| + O(\beta_1).
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Dado que os funcionais de onda que estamos considerando são lineares na  $B$ -inserção, é suficiente, para definir um produto interno, restringir ao restante da discussão no máximo termos de ordem 2 em  $\beta$ . Assim estamos interessados em encontrar soluções para as densidades da medida de integração  $\tilde{\rho}$  correspondentes as três primeiras expressões de (4.89) e (4.90). A primeira das condições de (4.90) significa que  $\tilde{\rho}$  transforma-se como a medida de Haar da parte bosônica do

supergrupo de calibre, e pode assim ser identificado com este:

$$\tilde{\rho} = \rho_H(\alpha). \quad (4.91)$$

A segunda condição implica que  $\partial\tilde{\rho}^i/\partial\alpha^i$  transforma-se como a medida de Haar  $\tilde{\rho}$ , portanto  $\tilde{\rho}^i$  pode ser identificado com a solução de

$$\frac{\partial\tilde{\rho}^i}{\partial\alpha^i} = \rho_H. \quad (4.92)$$

A terceira condição implica que a divergência  $\partial\tilde{\rho}^{ij}/\partial\alpha^j$  transforma-se como  $\tilde{\rho}^i$ , conseqüentemente, estamos tentados identificar este com a última. Porém, isto não funciona já que implicaria no desaparecimento de  $\rho_H$ , como pode ser visto tomando a divergência em ambos lados da equação (4.92) e observando que  $\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\tilde{\rho}^{ij}$  anula-se identicamente devido à anti-simetria de  $\tilde{\rho}^{ij}$ . Precisamos outra solução para este último, obedecendo à terceira condição de invariância (4.90). Mas não precisamos conhecer esta explicitamente. Suponhamos que tenhamos uma solução para  $\tilde{\rho}^{ij}$ . Como veremos na subseção (4.6.3), equação (4.98), funções de onda invariantes de supercalibre são ambas funções de  $\alpha$ , ou lineares em  $\beta$ , da forma  $\beta^i\partial f(\alpha)/\partial\alpha^i$ . Assim, precisamos unicamente definir integrais restritas à forma

$$\int d^3\alpha\tilde{\rho}^{ij}(\alpha)\frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial\alpha^i}\frac{\partial f_2(\alpha)}{\partial\alpha^j}, \quad (4.93)$$

a qual, depois de integrar por parte, é igual a

$$-\int d^3\alpha\frac{\partial\tilde{\rho}^{ij}(\alpha)}{\partial\alpha^j}\frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial\alpha^i}f_2(\alpha) = \int d^3\alpha\frac{\partial\tilde{\rho}^{ij}(\alpha)}{\partial\alpha^j}f_1(\alpha)\frac{\partial f_2(\alpha)}{\partial\alpha^i},$$

isto sugere definir a integral (4.93) substituindo  $\partial\tilde{\rho}^{ij}/\partial\alpha^j$  com a densidade de medida de integração  $\tilde{\rho}^i$ , solução de (4.92), a qual tenham a propriedade de transformação correta para fazer a integral invariante, assim:

$$\int d^3\alpha\tilde{\rho}^{ij}(\alpha)\frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial\alpha^i}\frac{\partial f_2(\alpha)}{\partial\alpha^j} := \frac{1}{2}\int d^3\alpha\tilde{\rho}^i(\alpha)\left(f_1(\alpha)\frac{\partial f_2(\alpha)}{\partial\alpha^i} - \frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial\alpha^i}f_2(\alpha)\right). \quad (4.94)$$

Recapitulando, as densidades da medida de integração que precisaremos são a densidade da medida de Haar  $\rho_H$  e a densidade de medida de integração  $\tilde{\rho}^i$  solução de (4.92).

Para o presente grupo de calibre SU(2), com a parametrização (4.15), estas duas funções expli-

citamente são:

$$\rho_H = \frac{4 \sin^2(r/2)}{r^2}, \quad \tilde{\rho}^i = 2 \frac{\alpha^i}{r^3} (r - \sin(r)) \quad (4.95)$$

com  $r^2 = (\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2$ . As quais se impôs a condição de normalização

$$\int d^3\alpha d^3\beta \rho(\alpha, \beta) = 1, \quad (4.96)$$

a que é não-trivial apenas para o primeiro.

### 4.6.3 Produto Interno

O produto interno Hermitiano de dois vetores estado invariantes de supercalibre  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  pertencentes ao espaço de funções cilíndricas, dados como em (4.77) com funções  $\psi_1$  e  $\psi_2$  da holonomia  $h[A]$  e das  $B$ -inseções  $B \triangleright h[A]$  ao longo do espaço  $S_1$ , será agora definido com a ajuda da medida de integração invariante (4.82) que temos construído, assim temos que,

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle := \int_{\mathbf{G}} d\mu(\mathcal{G}) (f_1(\mathcal{G}))^* f_2(\mathcal{G}) = \int_{\mathbf{G}} d^3\alpha d^3\beta \rho(\alpha, \beta) (F_1(\alpha, \beta))^* F_2(\alpha, \beta), \quad (4.97)$$

com \* estamos representando a conjugação complexa. Para um vetor  $\Psi_+$  de paridade par, a função correspondente  $F$  é igual a  $f_+(\text{Tr}g(\alpha))$ , e para um vetor ímpar  $\Psi_-$ , a função correspondente  $F$  é da forma,

$$F(\alpha, \beta) = Q f_-(\text{Tr}g(\alpha)) = \beta^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i} f_-(\text{Tr}g(\alpha)). \quad (4.98)$$

Consequentemente temos, as seguintes três fórmulas para o produto interno, as quais são obtidas usando (4.89) e (4.91), (4.94), e a notação  $\chi = \text{Tr}(g(\alpha))$ :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{1+} | \Psi_{2+} \rangle &= \int d^3\alpha \rho_H(\alpha) (f_{1+}(\chi(\alpha)))^* f_{2+}(\chi(\alpha)), \\ \langle \Psi_{1+} | \Psi_{2-} \rangle &= \int d^3\alpha \tilde{\rho}^i(\alpha) (f_{1+}(\chi(\alpha)))^* \frac{\partial f_{2-}(\chi(\alpha))}{\partial \alpha^i}, \\ \langle \Psi_{1-} | \Psi_{2-} \rangle &= i \int d^3\alpha \tilde{\rho}^{ij}(\alpha) \left( \frac{\partial f_{1-}(\chi(\alpha))}{\partial \alpha^i} \right)^* \frac{\partial f_{2-}(\chi(\alpha))}{\partial \alpha^j} \\ &= \frac{i}{2} \int d^3\alpha \tilde{\rho}^i(\alpha) \left( (f_{1-}(\chi(\alpha)))^* \frac{\partial f_{2-}(\chi(\alpha))}{\partial \alpha^i} - \left( \frac{\partial f_{1-}(\chi(\alpha))}{\partial \alpha^i} \right)^* f_{2-}(\chi(\alpha)) \right) \end{aligned}$$

a última igualdade segue de (4.94).

Usando a estrutura supersimétrica de singleto e dubletos do espaço de vetores estado, podemos tomar como base os vetores estados  $|j+\rangle$  (estados pares) e  $|j-\rangle$  (estados ímpares), que definimos por:

$$\begin{aligned}\langle A|j+\rangle &= \text{Tr}R^{(j)}(h[A]), \\ \langle A, B|j-\rangle &= Q\text{Tr}R^{(j)}(h[A]),\end{aligned}\tag{4.99}$$

onde  $R^{(j)}$ , como vimos na seção 2.4 do Capítulo 2, é a matriz da representação de spin  $j$  do elemento do grupo  $g \in \text{SU}(2)$ ,  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ . A parte par da base é justamente a base de redes de spin da quantização de laços do modelo BF bidimensional bosônico [56]. Observemos que o único singleto supersimétrico é dado pelo estado de spin nulo  $|0\rangle$ .

#### 4.6.4 Observáveis de Dirac

A quantização das quantidades invariantes de calibre clássicos, observáveis de Dirac,  $W_0, W_1$ , equação (4.72), e  $L_0, L_1$ , equação (4.73), é direta. Os dois primeiros,  $W_0, W_1$ , dado que são respectivamente funções da conexão  $A$  e da conexão  $A$  e do campo  $B$ , agem por multiplicação sobre os funcionais de onda, isto é, existem mapeamentos de funções cilíndricas em funções cilíndricas, assim:

$$\hat{W}_{0,1}\Psi[A, B] = W_{0,1}\Psi[A, B].\tag{4.100}$$

Calculemos a ação de  $L_0$  e  $L_1$  sobre os vetores base (4.99). Quando atuamos estes sobre os funcionais de onda, eles são representados pelos operadores:

$$\hat{L}_0(x) := -\hbar^2 \frac{\delta}{\delta A(x)} \cdot \frac{\delta}{\delta B(x)},\tag{4.101}$$

$$\hat{L}_1(x) := -\hbar^2 \frac{\delta}{\delta A(x)} \cdot \frac{\delta}{\delta A(x)}.\tag{4.102}$$

Por outro lado, o gerador supersimétrico  $Q$  é representado por,

$$\hat{Q} := \int dx B(x) \cdot \frac{\delta}{\delta A(x)}.$$

Podemos ver, sem dificuldade, que estes operadores obedecem às seguintes relações de (anti-) comutação

$$\left[ \hat{L}_0, \hat{Q} \right]_+ = \hat{L}_1,$$

$$\left[ \hat{L}_1, \hat{Q} \right]_- = 0.$$

e

$$\left[ \hat{W}_0, \hat{Q} \right]_- = -\hat{W}_1,$$

$$\left[ \hat{W}_1, \hat{Q} \right]_+ = 0.$$

Destas relações de (anti-)comutação e dos resultados encontrados em [56, 65], (ver a equação (2.45) do Capítulo 2, com  $R^{(j)}(h)$  sendo a matriz de representação  $j$  da holonomia  $h[A]$ ), isto é, a relação,

$$\frac{\delta}{\delta A(x)} \cdot \frac{\delta}{\delta A(x)} R^{(j)}(h[A]) = -j(j+1)R^{(j)}(h[A]),$$

podemos mostrar que:

$$\begin{aligned} \hat{L}_0|j+\rangle &= 0, & \hat{L}_0|j-\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j+\rangle, \\ \hat{L}_1|j+\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j+\rangle, & \hat{L}_1|j-\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j-\rangle. \end{aligned} \tag{4.103}$$

De isto podemos ver que cada dubleto supersimétrico  $|j+\rangle, |j-\rangle$  é auto vetor do observável bosônico  $\hat{L}_1$  com o mesmo auto valor  $\hbar^2 j(j+1)$ , enquanto que o observável fermiônico  $\hat{L}_0$  faz o papel de operador *step*.



# Capítulo 5

## Conclusões

- 1.) Iniciamos esta tese estudando a gravitação pura com constante cosmológica num espaço-tempo bidimensional, dada pelo modelo de Jackiw-Teitelboim, na formulação de primeira ordem, baseando-nos no modelo BF. Construimos a estrutura canônica do modelo, mostramos que o modelo é descrito por uma Hamiltoniana completamente vinculada e que as transformações de difeomorfismos estão contidas nas transformações de calibre da teoria – módulo equações de movimento. Construimos os observáveis de Dirac e quantizamos o modelo via a Gravitação Quântica de Laços.
- 2.) Como ponto principal do trabalho, propomos dois modelos para acoplar matéria ao modelo BF da gravitação pura bidimensional. Isto foi feito nos baseando nas extensões supersimétricas com supersimetria  $N = 1$ , do modelo BF puro:
  - i.) No primeiro modelo, a extensão supersimétrica nos leva a uma teoria de supergravitação, a qual tem o supergrupo  $S(A)dS$  (extensão supersimétrica  $N = 1$  do grupo (anti-)de Sitter), como grupo de calibre. Achamos o operador de Casimir deste supergrupo, objeto que nos permite construir as representações irredutíveis de sua superálgebra  $s(a)ds$ . Através da análise canônica, mostramos, como era de se esperar, que a Hamiltoniana do modelo é completamente vinculada, com os vínculos sendo de primeira classe e como tais geradores das supertransformações de calibre, a continuação construímos os observáveis de Dirac da teoria. Até este ponto, todo o tratamento clássico do modelo foi dado de maneira consistente. Sendo assim, no nosso seguinte passo é dar início ao processo da quantização do modelo. Mas neste caso, devido à dificuldade que encontramos, especificamente na construção

de uma medida invariante de integração, não pudimos concretizar esta tarefa, tarefa que esperamos cumprir num trabalho futuro.

- ii.) No segundo modelo, logo de reconhecer que o acoplamento de matéria, ao modelo BF bidimensional, proposto por Leitgeb, Schweda e Zerrouki [54], têm uma supersimetria rígida, aparentemente não percebida por eles. O efeito foi promover a simetria de calibre total deste modelo a um grupo de simetria de supercalibre  $\mathbf{G}$ . O modelo que resulta disso adquire uma estrutura de supersimetria rígida gerada por um único operador nilpotente  $Q$ . Vimos que as transformações de difeomorfismo da teoria estão contidas nas transformações de calibre. Nos baseando na análise canônica determinamos a Hamiltoniana, e vimos que esta resulta ser completamente vinculada, com seus vínculos sendo de primeira classe e como tal os geradores das transformações de calibre. Construímos os observáveis de Dirac desta teoria. O passo principal neste modelo foi a construção da medida invariante de integração sobre o supergrupo de calibre  $\mathbf{G}$ . Isto foi possível para uma classe restrita de integrantes, adequados à proposta de definir um produto interno. Temos assim obtido a quantização completa, no espírito da Gravitação Quântica de Laços, da extensão supersimétrica  $N = 1$  do grupo  $SU(2)$  do modelo BF bidimensional, com a base do espaço físico dada pelo singleto supersimétrico  $|0\rangle$  e dubletos indexados por números de spin semi-inteiros  $j \geq 1/2$ . Temos também, obtido expressões explícitas dos observáveis atuando sobre os vetores de estado.

# Apêndice A

## Álgebra de Grassmann e Superespaço.

Teorias de campo supersimétricas, são naturalmente formuladas com a ajuda da noção da álgebra de Grassmann, que opera com variáveis anti-comutantes ou números anti-comutantes.

Aqui damos noções básicas das definições de álgebras de Grassmann, como as definições de superespaço, e das regras de diferenciação e integração de superfunções. Nos baseamos em, [17, 27, 34, 37, 60, 61].

### A.1 Álgebra de Grassmann

#### A.1.1 Álgebra

Um espaço linear  $\mathfrak{E}$  (real ou complexo), é chamada de álgebra (real ou complexa) se  $\mathfrak{E}$  está munido de uma operação binária, o produto:

$$(a, b) \rightarrow ab \in \mathfrak{E}, \forall a, b \in \mathfrak{E},$$

que satisfaz os axiomas

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha ab + \beta ac,$$

$$(\alpha b + \beta c)a = \alpha ba + \beta ca,$$

onde  $\alpha, \beta$  são números reais ou complexos e  $a, b, c$  elementos da álgebra. Se a lei da multiplicação está caracterizada pela propriedade  $ab = ba, \forall a, b \in \mathfrak{E}$ , a álgebra é chamada de comutativa. Se a lei da multiplicação está caracterizada pela propriedade  $a(bc) = (ab)c, \forall a, b, c \in \mathfrak{E}$ , a álgebra é chamada de associativa. Se  $\mathfrak{E}$  contém a unidade  $e$  com a propriedade  $ae = ea, \forall a \in \mathfrak{E}$ , a álgebra é chamada de unital (ou álgebra com a unidade)

### A.1.2 Álgebra de Grassmann

Uma álgebra de Grassmann  $B_L$ , real ou complexa, é uma álgebra associativa unital, gerada por um conjunto de  $L$  elementos linearmente independentes  $\zeta^i, i = 1, 2, \dots, L$ , que anti-comutam entre eles, isto é,

$$\zeta^i \zeta^j + \zeta^j \zeta^i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, L. \quad (\text{A.1})$$

de onde, em particular, temos

$$(\zeta^i)^2 = 0, \quad (\text{A.2})$$

para quaisquer inteiro positivo  $L$ . Não é difícil mostrar que o número de geradores independentes não-nulos e seus produtos (incluindo a unidade, 1), é  $2^L$ , nenhum destes fatores contém mais que  $L$  fatores. Com exceção da unidade, estes elementos da álgebra  $B_L$  escrevem-se na forma

$$\zeta^{i_1} \zeta^{i_2} \dots \zeta^{i_k}, \quad (\text{A.3})$$

com  $1 < k < L$ , e  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq L$ .

Assim cada elemento  $a \in B_L$  pode ser representado na forma

$$a = \alpha + \sum_{k=1}^L f_{i_1 i_2 \dots i_k} \zeta^{i_1} \zeta^{i_2} \dots \zeta^{i_k}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\alpha$  e  $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$  são números, e  $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$  é totalmente anti-simétrica em seus índices. Lembremos

que índices repetidos indicam uma soma. Em (A.4) temos os elementos:

$$\begin{aligned}
& 1, \\
& \zeta^i, \\
& \zeta^{i_1} \zeta^{i_2}, \quad i_1 < i_2 \\
& \vdots \\
& \zeta^1 \zeta^2 \dots \zeta^L,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

que formam uma base vetorial para  $B_L$ . Assim, a dimensão da álgebra  $B_L$  é,  $\dim B_L = 2^L$ , com  $2^{L-1}$  elementos pares, que contêm um número par de geradores  $\zeta^i$ 's, (onde está incluído o elemento unidade), e  $2^{L-1}$  elementos ímpares, que contêm um número ímpar de  $\zeta^i$ 's. Elementos de  $B_L$  são também chamados de supernúmeros e cada supernúmero  $a$  pode ser representado na forma:

$$a := a_b + a_s \tag{A.6}$$

$$a_s = \sum_{k=1}^L f_{i_1 i_2 \dots i_k} \zeta^{i_1} \zeta^{i_2} \dots \zeta^{i_k} \tag{A.7}$$

com  $a_b$  e  $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$ , sendo números. Seguindo a definição de B. de Witt,  $a_b$  é chamado de corpo, (*body*), e  $a_s$  alma, (*soul*), de  $a$ .

Por outro lado, cada supernúmero pode ser decomposto em uma soma de suas partes pares (*even*),  $a_e$ , e ímpares (*odd*),  $a_o$ , definidas por

$$\begin{aligned}
a &= a_e + a_o \\
a_e &= a_b + \sum_{k=1}^L f_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \zeta^{i_1} \zeta^{i_2} \dots \zeta^{i_{2k}} \\
a_o &= \sum_{k=1}^L f_{i_1 i_2 \dots i_{2k+1}} \zeta^{i_1} \zeta^{i_2} \dots \zeta^{i_{2k+1}}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Se  $a \in B_L$  é da forma (A.4), e seja  $\{\zeta^i\}$  um sistema de geradores da álgebra de Grassmann  $B_L$ , os elementos pares e ímpares com respecto á base  $\zeta^i$ , formam subespaços lineares que denotaremos por  $B_{L0}$  e  $B_{L1}$  respectivamente. Se o espaço linear é real, o denotaremos com  $\mathbb{R}B_L$ , e se fosse complexo, o denotaremos por  $\mathbb{C}B_L$ . Assim o subconjunto de elementos pares de  $B_L$ ,  $B_{L0}$ , e o subconjunto de elementos ímpares de  $B_L$ ,  $B_{L1}$ , cada um forma um espaço vetorial de dimensão  $2^{L-1}$ .

## A.2 Superespaço

Introduzimos aqui a ideia de superespaço. Definimos o superespaço como uma generalização do espaço Euclidiano, na qual cada ponto é especificado por um conjunto de elementos de uma álgebra de Grassmann real, em vez de apenas ser especificado por um conjunto de números reais.

### A.2.1 Superespaço e Superfunções em $\mathbb{R}B_L^{m,n}$

#### Superespaço

Uma das características mais importantes dos grupos de Lie lineares de dimensão  $m$  é que existe uma correspondência um-a-um entre o conjunto de elementos do grupo conectados a sua identidade e um conjunto de pontos  $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  de  $\mathbb{R}^m$ . A origem de  $\mathbb{R}^m$  corresponde à identidade do grupo. Como uma generalização de  $\mathbb{R}^m$ , considera-se o espaço  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ , que consiste de  $m$  cópias do subespaço par  $\mathbb{R}B_{L_0}$  da álgebra de Grassmann  $\mathbb{R}B_L$  e  $n$  cópias do subespaço ímpar  $\mathbb{R}B_{L_1}$  de  $\mathbb{R}B_L$ . As  $m$  cópias de  $\mathbb{R}B_{L_0}$  serão denotadas por  $x^1, x^2, \dots, x^m$ , e as  $n$  cópias de  $\mathbb{R}B_{L_1}$  por  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$ .

Então um superespaço é uma variedade definida pelas coordenadas  $x^i (i = 1, 2, \dots, m)$ , que são coordenadas de um espaço Riemanniano, e as coordenadas  $\theta^\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, n)$ , que são variáveis anti-commutantes. Usualmente os  $x^i$ 's são chamadas de coordenadas bosônicas, enquanto os  $\theta^\alpha$ 's de coordenadas fermiônicas. Numa notação mais compacta podemos escrever as coordenadas de um elemento de  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$

$$\begin{aligned} X &:= (X^1, X^2, \dots, X^{m+n}) \\ &:= (x; \theta) = (x^1, \dots, x^m; \theta^1, \dots, \theta^n) \end{aligned}$$

Cada coordenada  $X^A (A = 1, 2, \dots, m+n)$ , tem uma expansão em termos dos elementos base (A.5) de  $\mathbb{C}B_L$  [34].

## Funções sobre $\mathbb{R}B_L^{m,n}$

Do mesmo jeito que se define uma função sobre um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^m$ , existe uma generalização imediata para funções das variáveis de Grassmann, definidas sobre um aberto de  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ , em lugar de  $\mathbb{R}^m$  e com valores em  $\mathbb{C}B_L$ . Tais funções podem ser definidas atribuindo a cada ponto  $X = (x; \theta)$  de um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$  um elemento  $F(x; \theta)$ , de  $\mathbb{C}B_L$ . Quaisquer função definida sobre o superespaço, é chamado de superfunção.

### A.2.2 Diferenciabilidade de uma Superfunção sobre $\mathbb{R}B_L^{m,n}$

Seja  $F(x; \theta)$  uma superfunção contínua [34, 60], que toma valores em  $\mathbb{C}B_L$ , definida sobre um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ . Suponhamos que existe  $m$  funções  $\partial F(x, \theta)/\partial x^i$  (para  $i = 1, 2, \dots, m$ ) e  $n$  funções  $\partial F(x, \theta)/\partial \theta^\alpha$  (para  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) validadas em  $\mathbb{C}B_L$ , e definidas para todo  $(x; \theta)$  de  $U$  por,

$$F(x + \bar{x}; \theta + \bar{\theta}) = F(x; \theta) + \sum_{i=1}^m \bar{x}^i \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \bar{\theta}^j \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \theta^j} + \|(\bar{x}, \bar{\theta})\| \eta(\bar{x}, \bar{\theta}), \quad (\text{A.9})$$

onde  $(x; \theta)$  e  $(x + \bar{x}; \theta + \bar{\theta})$  são pontos de  $U$ ,  $\|(\bar{x}, \bar{\theta})\|$  é a norma [61], e  $\eta(\bar{x}, \bar{\theta})$  uma função definida em  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ , com valores em  $\mathbb{C}B_L$ , tal que  $\|\eta(\bar{x}, \bar{\theta})\| \rightarrow 0$  quando  $\|(\bar{x}, \bar{\theta})\| \rightarrow 0$ . Se diz então que a função  $F(x, \theta)$  é diferenciável em  $U$ , e as quantidades  $\partial F(x; \theta)/\partial x^i$  e  $\partial F(x; \theta)/\partial \theta^j$  são descritas como sendo suas derivadas parciais. Se  $F(x; \theta)$  é uma superfunção par, então todas suas derivadas  $\partial F(x; \theta)/\partial x^i$  são pares, e suas derivadas  $\partial F(x; \theta)/\partial \theta^j$  são ímpares, e se  $F(x; \theta)$  é uma superfunção ímpar, então as derivadas  $\partial F(x; \theta)/\partial x^i$  são todas ímpares, e  $\partial F(x; \theta)/\partial \theta^j$  são pares.

Entre as funções  $F(x; \theta)$  definidas sobre  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$  estão aquelas que envolvem produtos das variáveis de Grassmann ímpares  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$ . Dado que  $\theta^k \theta^k = 0$ , para cada  $k (= 1, 2, \dots, n)$ , nenhum produto pode envolver quaisquer  $\theta^k$  particular mais que uma vez. Assim se  $L$  é finito e  $F(x; \theta)$  uma superfunção diferenciável, esta pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} F(x; \theta) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} F_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x) \theta^{i_1} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_k}, \\ &= F_0(x) + F_1(x) \theta^1 + F_2(x) \theta^2 + \dots + F_{12}(x) \theta^1 \theta^2 + \dots + F_{12 \dots n}(x) \theta^1 \theta^2 \dots \theta^n \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde as funções  $F_{i_1 i_2 \dots i_n}(x)$ , são funções a valores complexos definidas nas coordenadas bosônicas.

### A.2.3 Propriedades de Derivação de uma Superfunção

Seja  $F(X)$  e  $G(X)$  duas superfunções superdiferenciáveis sobre o aberto  $U$ , com  $X = (x; \theta)$ , então  $F(X) + G(X)$  e  $F(X)G(X)$  também são duas superfunções superdiferenciáveis sobre  $U$ , logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F(X) + G(X))}{\partial X^A} &= \frac{\partial F(X)}{\partial X^A} + \frac{\partial G(X)}{\partial X^A}, \\ \frac{\partial(F(X)G(X))}{\partial X^A} &= \frac{\partial F(X)}{\partial X^A} G(X) + (-1)^{|X^A||F|} F(X) \frac{\partial G(X)}{\partial X^A}, \end{aligned}$$

são as fórmulas de Leibnitz graduadas, onde os índices,  $A = (i; \alpha), (i = 1, 2, \dots, m; \alpha = 1, 2, \dots, n)$ , e  $||$  é a função de paridade definida em (B.1).

Outra propriedade importante é:

$$\frac{\partial}{\partial X^A} \frac{\partial}{\partial X^B} F(X) = (-1)^{|X^A||X^B|} \frac{\partial}{\partial X^B} \frac{\partial}{\partial X^A} F(X), \quad (\text{A.11})$$

de onde podemos ver que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} &= -\frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \end{aligned}$$

e concluir que,

$$\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \right)^2 = 0 \quad (\text{A.12})$$

Em princípio existem dois tipos de derivadas, a derivada pela esquerda, e a derivada pela direita. Aqui adotaremos, por convenção, a derivada pela esquerda.



## A.2.4 Integral de Berezin

Agora consideremos a integração sobre variáveis anti-comutantes. Das regras de derivação, mencionadas anteriormente, temos que  $(\partial/\partial\theta^\alpha)^2 = 0$ , do qual conclui-se que uma integração não pode ser definida como uma operação inversa a diferenciação. Uma definição da integração sobre variáveis anti-comutantes foi dado por F. Berezin, e é a seguinte. Seja  $F(x; \theta)$  uma superfunção, superdiferenciável definida sobre algum aberto  $U$  de  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ , cuja expansão é da forma (A.10). A integral de Berezin sobre as variáveis de Grassmann  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$ , é definida por:

$$\int d^n\theta F(x; \theta) := \int d\theta^1 \cdots d\theta^n F(x; \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta^1} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta^n} F(x; \theta),$$

consequentemente

$$\int d^n\theta F(x; \theta) = F_{12\dots n}(x),$$

vemos assim que a componente  $F_{12\dots n}(x)$  de  $F(x; \theta)$  associada à potência mais alta  $\theta^1\theta^2 \cdots \theta^n$  é a única que sobrevive.

# Apêndice B

## Superálgebras e Supergrupos.

### B.1 Propriedades Gerais da Superálgebra de Lie

As álgebras de Lie e os grupos de Lie com estrutura Grasmanniana são usadas extensivamente na física. Estes objetos aparecem primeiro nos problemas relevantes na segunda quantização dos sistemas fermiônicos, como também na teoria de campos supersimétricos e na supergravitação. Álgebras com estrutura Grasmanniana, usualmente são denominadas de superálgebras, e os grupos com esta estrutura chamam-se também de supergrupos. Neste Apêndice nos baseamos em [4, 17, 18, 34, 42, 43, 48, 70, 77]

#### B.1.1 Superálgebras de Lie

Um espaço linear complexo  $\mathcal{L}_s$  é chamado  $Z_2$ -graduado se este é a soma direta de dois subespaços  $\mathcal{L}_0$  e  $\mathcal{L}_1$ , isto é  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ , elementos  $a \in \mathcal{L}_0$  são chamados de pares, e elementos  $a \in \mathcal{L}_1$  de ímpares. Elementos que são só pares ou só ímpares são chamados homogêneos, e define-se uma função de paridade sobre estes elementos homogêneos, que representaremos por  $|a|$ , dado pela fórmula:

$$|a| = \begin{cases} 0, & \text{se } a \in \mathcal{L}_0, \\ 1, & \text{se } a \in \mathcal{L}_1, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Seja  $\mathcal{L}_S$  um espaço graduado complexo, com  $\mathcal{L}_0$  e  $\mathcal{L}_1$  sendo seus subespaços pares e ímpares respectivamente, os quais são assumidos a ter dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente (onde  $m \geq 0$ ,

$n \geq 0$  e  $m + n \geq 1$ ). Fazemos a hipótese que, para todo  $a, b \in \mathcal{L}_s$ , existe um produto de Lie generalizado (o supercomutador)  $[a, b]$  que satisfaz os seguintes axiomas:

1.  $[a, b] \in \mathcal{L}_S$  para todo  $a, b \in \mathcal{L}_S$ ;
2. para todo  $a, b \in \mathcal{L}_S$  e quaisquer número complexo  $\alpha$  e  $\beta$   $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha [a, c] + \beta [b, c]$ ;
3. se  $a$  and  $b$  são elementos homogêneos de  $\mathcal{L}_S$ , então  $[a, b]$  é também elemento homogêneo de  $\mathcal{L}_S$  cujo grau é  $(|a|+|b|)$ ; para quaisquer dois elementos homogêneos  $a$  e  $b$  de  $\mathcal{L}_S$ ,

$$[a, b] = -(-1)^{|a||b|} [b, a]; \quad (\text{B.2})$$

4. para três elementos quaisquer  $a, b$  e  $c$  de  $\mathcal{L}_S$ ,

$$[a, [b, c]] (-1)^{|a||c|} + [b, [c, a]] (-1)^{|b||a|} + [c, [a, b]] (-1)^{|c||b|} = 0, \quad (\text{B.3})$$

esta última expressão sendo chamada identidade de Jacobi generalizada ou superjacobí.

$\mathcal{L}_S$  satisfazendo estas propriedades,  $\mathcal{L}_S$  é dita ser uma superálgebra de Lie, com dimensão par  $m$  e dimensão ímpar  $n$ , que também são as vezes conhecidas alternativamente como álgebras de Lie  $Z_2$ -graduadas ou pseudoálgebras de Lie.

Escolhida uma base de  $\mathcal{L}_S$  com elementos  $a_1, a_2, \dots, a_{m+n}$  onde  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathcal{L}_0$  e  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n} \in \mathcal{L}_1$ , o produto de Lie generalizado toma a forma:

$$[a_p, a_q] = \sum_{r=1}^{m+n} f_{pq}^r a_r, \quad (\text{B.4})$$

onde os números reais ou complexos  $f_{pq}^r$  são as constantes de estrutura. Podemos ver que (B.2) e (B.4) implica em

$$f_{pq}^r = -(-1)^{|a_p||a_q|} f_{qp}^r, \quad (\text{B.5})$$

assim  $f_{pq}^r = -f_{qp}^r$  se  $a_p$  e/ou  $a_q$  são pares, mas  $f_{pq}^r = f_{qp}^r$  se  $a_p$  e  $a_q$  são ímpares.

Se  $\mathcal{L}_s$  possui um produto associativo  $ab^-$  que gera o envelope de  $\mathcal{L}_s$ , podemos definir o produto de Lie generalizado, pelo supercomutador,

$$[a, b\} = ab - (-1)^{|a||b|}ba, \quad (\text{B.6})$$

1. temos que se  $a \in \mathcal{L}_0$  e  $b \in \mathcal{L}_0$ , ou  $a \in \mathcal{L}_0$  e  $b \in \mathcal{L}_1$  ou  $a \in \mathcal{L}_1$  e  $b \in \mathcal{L}_0$  então,  $[a, b\} = [a, b] = ab - ba$ , é o comutador,  $[a, b] = -[b, a]$ ;
2. enquanto que se  $a \in \mathcal{L}_1$  e  $b \in \mathcal{L}_1$  então,  $[a, b\} = \{a, b\} = ab + ba$ , é um anticomutador,  $\{a, b\} = \{b, a\}$ .

Em particular, esta construção se aplica a superálgebras de matrizes  $M(m/n; \mathbb{R})$  and  $M(m/n; \mathbb{C})$ . Ver [34].

### B.1.2 Representações das superálgebras de Lie

Muitas das ideias de representação de superálgebras são generalizações diretas das representações de álgebras de Lie. Suponhamos que para cada  $a \in \mathcal{L}_s$  existe uma matriz  $\pi(a)$  do conjunto  $M(m/n; \mathbb{C})$ , tal que:

- i.) para todo,  $a, b \in \mathcal{L}_s$  e todo escalar  $\alpha, \beta$

$$\pi(\alpha a + \beta b) = \alpha\pi(a) + \beta\pi(b);$$

- ii.) para todo  $a, b \in \mathcal{L}_s$ ,  $\pi([a, b\}) = [\pi(a), \pi(b)]$ ;

- iii.) se  $a \in \mathcal{L}_0$ , subespaço par de  $\mathcal{L}_s$ , então  $\pi(a)$  tem a forma de “matriz par” <sup>1</sup>,

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \pi_{00}(a) & 0 \\ 0 & \pi_{11}(a) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

onde  $\pi_{00}(a)$  e  $\pi_{11}$  são submatrizes  $m \times m$  e  $n \times n$  respectivamente, e se  $a \in \mathcal{L}_1$ , o subespaço

---

<sup>1</sup>Ver as definições dadas na seção (B.2).

ímpar de  $\mathcal{L}_s$ ,  $\pi(a)$  tem a forma de “matriz ímpar”,

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} 0 & \pi_{01}(a) \\ \pi_{10}(a) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

onde  $\pi_{01}(a)$  e  $\pi_{10}(a)$  são submatrizes  $m \times n$  e  $n \times m$  respectivamente.

As matrizes  $\pi(a)$  formam uma representação graduada  $(m/n)$ -dimensional de  $\mathcal{L}_s$ . Os elementos pares de  $\mathcal{L}_s$  são representados por matrizes pares de  $M(m/n; \mathbb{C})$ , e os elementos ímpares por matrizes ímpares, então a paridade de  $|\pi(a)| = |a|$ .

### B.1.3 Representação Adjunta e a Forma de Killing

Assim como no caso das álgebras de Lie, a representação adjunta e a forma de Killing tem um papel importante para as superálgebras de Lie.

Seja  $\mathcal{L}_s$  uma superálgebra de Lie real ou complexa com dimensão par  $m$  e dimensão ímpar  $n$ , e sejam  $a_1, a_2, \dots, a_{m+n}$ , uma base homogênea da superálgebra. Para quaisquer  $a \in \mathcal{L}_s$ , seja  $\text{ad}(a)$  uma matriz  $(m+n) \times (m+n)$  definida por

$$[a, a_j] = \sum_{k=1}^{m+n} \{\text{ad}(a)\}_j^k a_k, \quad (\text{B.9})$$

para  $j = 1, 2, \dots, m+n$ . O conjunto de matrizes  $\text{ad}(a)$  forma uma representação graduada  $(m/n)$ -dimensional de  $\mathcal{L}_s$  chamada a representação adjunta de  $\mathcal{L}_s$ . Para cada  $a \in \mathcal{L}_s$  o operador  $\text{ad}(a)$  pode ser definido por  $\text{ad}(a)b = [a, b]$ , para todo  $b \in \mathcal{L}_s$ ; comparando (B.9) e (B.4) temos que:

$$\{\text{ad}(a_p)\}_q^r = f_{pq}^r. \quad (\text{B.10})$$

Define-se para  $\mathcal{L}_s$  uma forma bilinear  $B_\pi$  associada a uma representação  $\pi$  de  $\mathcal{L}_s$  como uma função bilinear de  $\mathcal{L}_s \times \mathcal{L}_s$  a valores reais, tal que,

$$B_\pi(a_i, a_j) = \text{Str}(\pi(a_i)\pi(a_j)), \quad \forall a_i, a_j \in \mathcal{L}_s, \quad (\text{B.11})$$

onde  $\pi(a_i)$  são matrizes de representação dos geradores (da base) da superálgebra, na representação  $\pi$ , e  $\text{Str}$  denota o supertraço, que está definido na subseção (B.2.2), para tudo

$$a_i \in \mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$$

Uma forma bilinear  $B$  sobre  $\mathcal{L}_s$  tem as seguintes propriedades

- é *consistente* se  $B(a, b) = 0, \forall a \in \mathcal{L}_0$  e  $b \in \mathcal{L}_1$ ,
- é *supersimétrica* se  $B(a, b) = (-1)^{|a||b|} B(b, a), \forall a, b \in \mathcal{L}_s$ ,
- é *invariante* se  $B([a, b], c) = B(a, [b, c]), \forall a, b, c \in \mathcal{L}_s$ .

A forma invariante  $K(a, b)$  associada à representação adjunta de  $\mathcal{L}_s$ , definida por

$$K(a, b) := \text{Str}(\text{ad}(a)\text{ad}(b)), \quad \forall a, b \in \mathcal{L}_s, \quad (\text{B.12})$$

é chamada a forma de Killing sobre  $\mathcal{L}_s$ . Em consequência podemos escrever

$$K(a_p, a_q) = (-1)^{|a_p||a_q|} f_{rp}^s f_{sq}^r = K_{pq}, \quad (\text{B.13})$$

e a expressão de invariância dada por,

$$f_{mp}^r K_{rq} + (-1)^{|a_m||a_p|} f_{mq}^r K_{pr} = 0.$$

Podemos encontrar em [34, 43] um estudo mais detalhado das definições dadas aqui.

## B.2 Supermatrizes

Uma superálgebra de Lie clássica pode ser descrita como uma superálgebra de matrizes. Uma supermatriz é um tipo especial de matriz cujos elementos são elementos da álgebra de Grassmann. Assumiremos que este seja uma álgebra complexa  $\mathbb{C}B_L$ , mas poderia ser substituído pela correspondente álgebra real  $\mathbb{R}B_L$ . As supermatrizes existem em duas classes chamadas de pares e ímpares.

Seja  $M$  uma matriz  $(m+n) \times (r+s)$  particionada na forma,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são submatrizes com dimensões  $m \times r, m \times s, n \times r$  e  $n \times s$  respectivamente. Então

- (i) Se diz que  $M$  é uma supermatriz  $(m/n) \times (r/s)$  par se os elementos das submatrizes  $A$  e  $D$  são membros da superálgebra de Grassman par  $\mathbb{C}B_{L_0}$  e os elementos de  $B$  e  $C$  são membros do subespaço de Grassmann ímpar  $\mathbb{C}B_{L_1}$ .
- (ii) Se diz que  $M$  é uma supermatriz  $(m/n) \times (r/s)$  ímpar se  $A$  e  $D$  são membros da superálgebra de Grassman ímpar  $\mathbb{C}B_{L_1}$  e os elementos  $B$  e  $C$  são membros do subespaço de Grassmann par  $\mathbb{C}B_{L_0}$ .

O grau de paridade de uma supermatriz  $M$  é  $|M| = 0(1)$  se  $M$  é par(ímpar). O conjunto de todas as supermatrizes quadradas  $(m/n) \times (m/n)$  com entradas em  $\mathbb{C}B_{L_0}$  ou  $\mathbb{C}B_{L_1}$  é denotado por  $M(m/n; \mathbb{C}B_L)$ .

Uma matriz  $(1/0) \times (r/s)$  é uma supermatriz linha par, quer dizer uma matriz linha de ordem  $1 \times (r + s)$  da forma

$$\mathbf{m} = \left( \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \right) \quad (\text{B.15})$$

onde  $\mathbf{a}$  é uma matriz linha  $1 \times r$  cujos elementos são membros do subespaço de Grassmann par  $\mathbb{C}B_{L_0}$  e  $\mathbf{b}$  é uma matriz linha  $1 \times s$  cujos elementos são membros do subespaço de Grassmann ímpar  $\mathbb{C}B_{L_1}$ . Por outro lado, uma matriz  $(m/n) \times (1/0)$  é uma supermatriz coluna par, que dizer uma matriz coluna de ordem  $(p + q) \times 1$  da forma

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

onde  $\mathbf{a}$  é uma matriz coluna  $m \times 1$  cujos elementos são membros do subespaço de Grassmann par  $\mathbb{C}B_{L_0}$  e  $\mathbf{c}$  é uma matriz coluna  $1 \times s$  cujos elementos são membros do subespaço de Grassmann ímpar  $\mathbb{C}B_{L_1}$ .

Temos definições análogas para matrizes linha ou coluna ímpares.

### B.2.1 Multiplicação por um Escalar de Grassmann

Suponhamos que  $B \in \mathbb{C}B_{L_0}$  ou  $\mathbb{C}B_{L_1}$  e que  $M$  é uma supermatriz  $(m/n) \times (r/s)$ , então

$$BM := \begin{pmatrix} B\mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & (-1)^{|B|}B\mathbf{1}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad MB := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B\mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & (-1)^{|B|}B\mathbf{1}_s \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

onde  $\mathbf{1}_m, \mathbf{1}_n, \mathbf{1}_r$  e  $\mathbf{1}_s$  são  $m \times m, n \times n, r \times r$  e  $s \times s$  matrizes unitárias e em general  $BM \neq MB$ .

### B.2.2 Supertransposta e Supertraço.

Se  $M$  é uma supermatriz  $(m/n) \times (r/s)$  particionada como em (B.14), então a supertransposta de  $M$ ,  $M^{st}$ , é uma supermatriz  $(r/s) \times (m/n)$  definida por

$$M^{st} := \begin{pmatrix} \tilde{A} & (-1)^{|M|}\tilde{C} \\ -(-1)^{|M|}\tilde{B} & \tilde{D} \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

onde  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  e  $\tilde{D}$  são as transpostas ordinárias de  $A, B, C$  e  $D$  respectivamente. Têm-se as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} ((M^{st})^{st}) &= \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}, & (((M^{st})^{st})^{st})^{st} &= M, \\ (MN)^{st} &= (-1)^{|M||N|}N^{st}M^{st}, & (MB)^{st} &= M^{st}B. \end{aligned}$$

E o supertraço de  $M$ ,  $\text{Str}(M)$ , é um elemento de Grassmann definido por

$$\text{Str}(M) := \text{tr}(A) - (-1)^{|M|}\text{tr}(D) \quad (\text{B.19})$$

de onde pode-se ver que:

$$\text{Str}(M) = \begin{cases} \text{tr}(A) - \text{tr}(D), & \text{se } M \text{ uma supermatriz par,} \\ \text{tr}(A) + \text{tr}(D), & \text{se } M \text{ uma supermatriz mpar,} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

#### Propriedades:

- (a)  $\text{Str}(M + N) = \text{Str}M + \text{Str}N$ .



- (b) Se  $M$  é uma supermatriz  $(m/n) \times (r/s)$  e  $N$  uma supermatriz  $(r/s) \times (m/n)$ ;  $\text{Str}(MN) = (-1)^{|M||N|} \text{Str}(NM)$
- (c) Se  $M \in M(m/n; \mathbb{C}B_L)$  e  $B \in \mathbb{C}B_{L_0}$  ou  $\mathbb{C}B_{L_1}$  então  $\text{Str}(BM) = B(\text{Str}M)$ ,  $\text{Str}(MB) = (\text{Str}M)B$ .
- (d) Se  $M \in M(m/n; \mathbb{C}B_L)$ , então  $\text{Str}(M^{st}) = \text{Str}M$ .

### B.2.3 Superdeterminante de uma Supermatriz par

Se  $M$  é uma supermatriz par  $(m/n) \times (r/s)$ , definida como em (B.14), então seu superdeterminante,  $\text{Sdet}M$ , é um elemento de Grassmann par, definido por:

$$\text{Sdet}M := \frac{\det A - BD^{-1}C}{\det D}, \quad (\text{B.21})$$

ou de forma equivalentemente

$$\text{Sdet}M := \frac{\det A}{\det(D - CA^{-1}B)}. \quad (\text{B.22})$$

O superdeterminante é as vezes conhecido como Bereziano.

#### Propriedades

- (a) Se  $M$  e  $N$  são dois membros de  $GL(p/q; \mathbb{C}B_L)$ ,  $\text{Sdet}(MN) = (\text{Sdet}M)(\text{Sdet}N)$ ,
- (b) se  $M$  é uma supermatriz  $(m/n) \times (r/s)$  par, então  $\exp(M)$  é uma supermatriz invertível  $(m/n) \times (r/s)$  par, e temos  $\text{Sdet}(e^M) = e^{\text{Str}M}$ .

### B.2.4 Adjunta e Superadjunta

A conjugação adjunta e superadjunta de superálgebras de Lie clássicas são generalizações da conjugação hermitiana de uma álgebra de Lie usual. A importância da conjugação hermitiana para álgebras de Lie simples vem do fato que as representações de dimensão finita de uma álgebra de Lie compacta são equivalentes a representações hermitianas.

Seja  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$  uma superálgebra de Lie clássica. A operação adjunta em  $\mathcal{L}_s$ , denotada por  $\dagger$ , é um mapeamento de  $\mathcal{L}_s$  em  $\mathcal{L}_s$  tal que:

- i.)  $a \in \mathcal{L}_s$  então  $a^\dagger \in \mathcal{L}_s$ , para tudo  $s = 0, 1$
- ii.)  $(\alpha a + \beta b)^\dagger = \alpha^* a^\dagger + \beta^* b^\dagger$ , para tudo  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,
- iii.)  $[a, b]^\dagger = [b^\dagger, a^\dagger]$ ,
- iv.)  $(a^\dagger)^\dagger = a$ .

E a operação superadjunta em  $\mathcal{L}_s$ , denotada por  $\ddagger$ , é um mapeamento de  $\mathcal{L}_s$  em  $\mathcal{L}_s$  tal que:

- i.)  $a \in \mathcal{L}_s$  então  $a^\ddagger \in \mathcal{L}_s$  para tudo  $s = 0, 1$ ,
- ii.)  $(\alpha a + \beta b)^\ddagger = \alpha^* a^\ddagger + \beta^* b^\ddagger$ , para tudo  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- iii.)  $[a, b]^\ddagger = (-1)^{|a||b|} [b^\ddagger, a^\ddagger] = -[a^\ddagger, b^\ddagger]$ ,
- iv.)  $(a^\ddagger)^\ddagger = (-1)^{|a|} a$ ,

onde  $a, b \in \mathcal{L}_s$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e “\*” representa a conjugação complexa. ([43] pag.56)

## B.2.5 Diferenciação de Supermatrizes

Seja  $M(x; \theta)$  uma supermatriz cujos elementos  $M_{jk}(x; \theta)$  são funções superdiferenciáveis de  $(x; \theta)$  que tomem valores em  $\mathbb{C}B_L$  e são definidos sobre um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ ,  $X := (x; \theta)$  são as coordenadas do superespaço, onde o espaço real de coordenadas  $x$  é ampliado adicionando coordenadas grassmannianas  $\theta$  anti-comutantes. Suponha-se que existam  $m$  supermatrizes  $\partial M(x; \theta)/\partial x^j$  (para  $j = 1, 2, \dots, m$ ) e  $n$  supermatrizes  $\partial M(x; \theta)/\partial \theta^k$  (para  $k = 1, 2, \dots, n$ ), cujos elementos têm valores em  $\mathbb{C}B_L$  e são definidos para todo  $(x; \theta)$  em  $U$ . Se  $M(x; \theta)$  é uma supermatriz  $(m/m) \times (r/s)$ , par ou ímpar, com elementos de matriz diferenciáveis sobre um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ , cujo particionamento é

$$M(x; \theta) := \begin{pmatrix} A(x; \theta) & B(x; \theta) \\ C(x; \theta) & D(x; \theta) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

temos: para  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\frac{\partial M(x; \theta)}{\partial x^i} := \begin{pmatrix} \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial x^i} & \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial x^i} \\ \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial x^i} & \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial x^i} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.24})$$

e, para  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial M(x; \theta)}{\partial \theta^k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial \theta^k} & \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial \theta^k} \\ -\frac{\partial M(x; \theta)}{\partial \theta^k} & -\frac{\partial M(x; \theta)}{\partial \theta^k} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Que podemos escrever como:

$$\frac{\partial M(x; \theta)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial X} & \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial X} \\ (-1)^{|M||X|} \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial X} & (-1)^{|M||X|} \frac{\partial M(x; \theta)}{\partial X} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

com  $|X| = 0$  se  $X = x$  e  $|X| = 1$ , se  $X = \theta$ .

Seja  $M$  e  $N$  duas supermatrizes cujos elementos são funções das supercoordenadas  $X = (x, \theta)$ , e além disso sejam funções superdiferenciáveis, sendo assim satisfazem a “regra de Leibniz”,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(M(x, \theta) + N(x, \theta))}{\partial X} &= \frac{\partial M(x, \theta)}{\partial X} + \frac{\partial N(x, \theta)}{\partial X} \\ \frac{\partial(M(x, \theta)N(x, \theta))}{\partial X} &= \frac{\partial M(x, \theta)}{\partial X} N(x, \theta) + (-1)^{|M||X|} M(x, \theta) \frac{\partial N(x, \theta)}{\partial X} \end{aligned}$$

Aqui demos as definições básicas mais relevantes que precisaremos para a discussão deste trabalho.

## B.3 Definições

### B.3.1 Superálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(p/q; \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(p/q; \mathbb{C})$

O subconjunto de todas as matrizes  $M$  de  $M(p/q; \mathbb{R})$  que satisfazem a condição

$$\text{Str } M = 0, \quad (\text{B.27})$$

e para o qual o produto de Lie generalizado é definido por (B.6), formam uma superálgebra de Lie real que é denotada por  $sl(p/q; \mathbb{R})$ .

Os elementos pares da álgebra de Lie  $\mathcal{L}_0$  são da forma

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

onde  $A$  e  $D$  são matrizes quadradas pares de dimensões  $p$  e  $q$  respectivamente, então  $\text{tr}A - \text{tr}D = 0$ ; enquanto os elemento da parte ímpar  $\mathcal{L}_1$  são da forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $B$  e  $C$  são matrizes pares de ordem  $p \times q$  e  $q \times p$  respectivamente. A dimensão  $m$  de  $\mathcal{L}_0$  é dada por  $m = p^2 + q^2 - 1$ , e a dimensão  $n$  de  $\mathcal{L}_1$  é dada por  $n = 2pq$ . Similarmente  $sl(p, q; \mathbb{C})$  é definido como o conjunto de matrizes  $M$  de  $M(p, q; \mathbb{C})$  que satisfaz (B.27), e pode ser considerado como uma álgebra de Lie complexa cujas dimensões pares e ímpares são dadas respectivamente por  $m = p^2 + q^2 - 1$  e  $n = 2pq$ , ou como uma subálgebra de Lie real com ambas dimensões sendo duplicadas (algumas outras notações para  $sl(p, q; \mathbb{C})$  considerada uma superálgebra de Lie complexa são  $sl(p, q)$ ,  $sl(p, q; \mathbb{C})$  e  $spl(p, q; \mathbb{C})$ ).

### B.3.2 Superálgebra de Lie Orto-simplética $osp(p/q)$

Consideremos o conjunto de matrizes  $M(p/q; \mathbb{R})$  com  $p \geq 1$ , e  $q$  positivo e par. Seja  $\mathbf{K}$  um membro de  $M(p/q; \mathbb{R})$  da forma

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & \mathbf{J} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.28})$$

onde  $\mathbf{G} = \mathbf{1}_p$  (matriz unitaria  $p \times p$ ) e  $\mathbf{J}$  é a matriz  $q \times q$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{q/2} \\ -\mathbf{1}_{q/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

O subconjunto de matrizes  $M$  de  $M(p/q; \mathbb{R})$  que satisfaz a condição

$$M^{\text{st}}\mathbf{K} + (-1)^{|M|}\mathbf{K}M = 0, \quad (\text{B.30})$$

para o qual o produto de Lie generalizado é definido por (B.6), forma uma superálgebra de Lie que é denotado por  $\text{osp}(p/q; \mathbb{R})$ . Esta álgebra é fechada e sua clausura segue-se da propriedade  $(MN)^{\text{st}} = (-1)^{|M||N|}N^{\text{st}}M^{\text{st}}$ , junto com  $\text{Str}M = 0$ , implica que  $([M, N])^{\text{st}} = -[M^{\text{st}}, N^{\text{st}}]$ . Assim, se  $M, N \in \text{osp}(p/q; \mathbb{R})$ , então

$$([M, N])^{\text{st}}\mathbf{K} + (-1)^{(|M|+|N|)}\mathbf{K}[M, N] = 0,$$

mostrando que  $[M, N] \in \text{osp}(p/q; \mathbb{R})$ .

Os elementos pares de  $\text{osp}(p/q; \mathbb{R})$  são da forma

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad (\text{B.31})$$

que satisfazem o vínculo

$$\tilde{A}\mathbf{G} + \mathbf{G}A = 0, \quad (\text{B.32})$$

se  $\mathbf{G} = \mathbf{1}_p$ , (B.32) se reduz a:  $\tilde{A} + A = 0$ , junto com o vínculo

$$\tilde{D}\mathbf{J} + \mathbf{J}D = 0. \quad (\text{B.33})$$

Vemos que o conjunto de matrizes  $A$  de ordem  $p \times p$  forma uma álgebra de Lie ortogonal  $\text{so}(p)$ , e o conjunto de matrizes  $D$   $q \times q$  forma uma álgebra de Lie real simplética  $\text{sp}(\frac{1}{2}q, \mathbb{R})$ <sup>2</sup>. Assim  $\mathcal{L}_0 = \text{so}(p) \oplus \text{sp}(\frac{1}{2}q, \mathbb{R})$ . É esta propriedade que sugeriu o nome de ortosimplético para  $\text{osp}(p/q; \mathbb{R})$ .

Os elementos ímpares de  $\text{osp}(p/q; \mathbb{R})$  são da forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.34})$$

e conseqüentemente satisfaz o vínculo

$$\tilde{B}\mathbf{G} - \mathbf{J}C = 0. \quad (\text{B.35})$$

---

<sup>2</sup>Uma matriz  $a$  de ordem  $q \times q$  é chamada de matriz simplética real, pertence à álgebra  $\text{sp}(\frac{1}{2}q; \mathbb{R})$ , se ela satisfaz a relação,  $\tilde{a}\mathbf{J} = -\mathbf{J}a$ ,  $\mathbf{J}$  dado por (B.29).

A dimensão  $m$  da parte par de  $\mathcal{L}_0$  de  $\text{osp}(p/q; \mathbb{R})$  é dada por

$$m = \frac{1}{2}p(p-1) + \frac{1}{2}q(q+1), \quad (\text{B.36})$$

e a dimensão  $n$  da parte ímpar  $\mathcal{L}_1$  é dada por

$$n = pq. \quad (\text{B.37})$$

Similarmente  $\text{osp}(p/q; \mathbf{C})$  é definido como um conjunto de matrizes  $M$  de  $M(p/q; \mathbf{C})$  que satisfaz (B.30). Este conjunto pode ser considerado ou como uma superálgebra de Lie complexa cujas dimensões pares e ímpares são dadas por (B.36) e (B.37) respectivamente, ou como superálgebra de Lie real com suas dimensões respectivas duplicadas.

Para completar, mencionamos as construções análogas onde tomamos, em vez de  $G = 1_p$ ,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_r \\ \mathbf{1}_r & 0 \end{pmatrix}$$

se  $p(= 2r)$  é par, ou

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_r & 0 \\ \mathbf{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se  $p(= 2r + 1)$  é ímpar. Para mais detalhes ver [34].

### B.3.3 Álgebra (Anti)de Sitter, (a)ds

Queremos construir uma superálgebra  $s(a)ds$  como uma generalização da superálgebra  $\text{osp}(p,q)$ , no caso particular de  $p = 1$  e  $q = 2$ , que seja a extensão supersimétrica da álgebra de Lie (a)ds do grupo de de Sitter ou anti-de Sitter (A)dS, com três geradores pares  $T_i (i = 0, 1, 2)$  obedecendo às regras de comutação de (a)ds e dois geradores ímpares  $Q_\alpha (\alpha = 1, 2)$ .

Uma base da álgebra de Lie (a)ds é dada pelas matrizes  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , com

$$[J_i, J_j] = f_{ij}^k J_k. \quad (\text{B.38})$$

onde as constantes de estrutura não-nulas são dadas por

$$f_{01}{}^2 = \Lambda, \quad f_{12}{}^0 = \sigma, \quad f_{20}{}^1 = 1. \quad (\text{B.39})$$

Aqui,  $\sigma = +1(-1)$ , para o espaço Riemanniano (Lorentziano), e  $\Lambda$  é a constante cosmológica. Esta álgebra é uma extensão da álgebra de Poincaré bidimensional, já que é considerada a constante cosmológica não nula. Na representação fundamental esses geradores têm a forma

$$J_0 = -\frac{i}{2}\sqrt{\Lambda}\tau_0, \quad J_1 = -\frac{i}{2}\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}\tau_1, \quad J_2 = -\frac{i}{2}\sqrt{\sigma}\tau_2 \quad (\text{B.40})$$

onde os  $\tau_i$ , ( $i = 0, 1, 2$ ) são as matrizes de Pauli

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.41})$$

A representação adjunta é definida por

$$\sum_k \text{ad}(J_i)_{kj} J_k = [J_i, J_j], \quad (\text{B.42})$$

onde  $\text{ad}(J_i)$  é a matriz adjunta de  $J_i$ ,

$$\text{ad}(J_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \Lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(J_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A forma quadrática invariante definida a partir da representação adjunta é chamada de forma de Killing, e é definida como:

$$(k_{ij}) := \text{Tr}(\text{ad}(J_i)\text{ad}(J_j)) = f_{ik}{}^l f_{jl}{}^k, \quad (\text{B.43})$$

A forma de Killing para (A)dS é

$$(k_{ij}) = -2\sigma \begin{pmatrix} \sigma\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\sigma \begin{pmatrix} \Lambda\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.44})$$

onde  $\eta_{IJ} = \text{diag}(\sigma, 1)$ , ( $I, J = 0, 1$ ). A métrica de Killing  $k_{ij}$ , define uma forma bilinear invariante

não-degenerada. Ela permite abaixar e levantar os índices:

$$u_i = k_{ij}u^j, \quad u^i = (k^{-1})^{ij}u_j. \quad (\text{B.45})$$

### B.3.4 Superálgebra (Anti) de Sitter, s(a)ds. Generalização de osp(1,2).

A solução geral da definição (B.30) no caso  $p = 1$  e  $q = 2$ , então com

$$K = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = 1, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.46})$$

é dada pelas supermatrizes  $M_0$  (par) e  $M_1$  (ímpar)

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 & -d_1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_2 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.47})$$

onde os elementos de matriz são números reais ou complexos arbitrários.

Um elemento  $\mathcal{M}$  da extensão supersimétrica de s(a)ds é dada como uma expansão numa base  $\{T_1, T_2, T_3, Q_1, Q_2\}$ :

$$\mathcal{M} = \sum_{i=0}^2 a^i T_i + \sum_{\alpha=1}^2 \theta^\alpha Q_\alpha,$$

onde os  $a^i$  são números de Grassmann pares e os  $\theta^\alpha$  números de Grassmann ímpares. Os geradores pares são dados por

$$T_0 = -\frac{i\sqrt{\Lambda}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = -\frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = -\frac{i\sqrt{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.48})$$

escolhidos de maneira a satisfazer as regras de comutação de (a)ds (B.38) com as constantes de estrutura B.39. O parâmetro  $\sigma$  tem os valores 1(-1) se consideramos o espaço-tempo



Riemanniano (Lorentziano), e  $\Lambda$  é a constante cosmológica. E para os geradores ímpares temos:

$$Q_1 = Q_- = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = Q_+ = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.49})$$

onde  $\alpha$  é um número real arbitrário.

Este conjunto de 5 supermatrizes representa os geradores do supergrupo  $S(A)dS$ . Eles obedecem às regras de comutação e anticomutação

$$\begin{aligned} [T_i, T_j] &= f_{ij}{}^k T_k \\ [T_i, Q_\alpha] &= f_{i\alpha}{}^\beta Q_\beta \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= f_{\alpha\beta}{}^i T_i \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

onde os colchetes  $[, ]$  denotam uma relação de comutação e as chaves  $\{, \}$  relações de anticomutação. As constantes de estrutura não nulas são

$$\begin{aligned} f_{ij}{}^k &\rightarrow f_{01}{}^2 = \Lambda, f_{12}{}^0 = \sigma, f_{20}{}^1 = 1 \\ f_{i\alpha}{}^\beta &\rightarrow f_{0\underline{1}}{}^{\underline{1}} = \frac{i\sqrt{\Lambda}}{2} = -f_{0\underline{2}}{}^{\underline{2}}, f_{1\underline{1}}{}^{\underline{2}} = \frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}}{2} = f_{1\underline{2}}{}^{\underline{1}}, f_{2\underline{1}}{}^{\underline{2}} = \frac{\sqrt{\sigma}}{2} = -f_{2\underline{2}}{}^{\underline{1}}, \\ f_{\alpha\beta}{}^k &\rightarrow f_{\underline{1}\underline{2}}{}^0 = -\frac{2i\alpha^2}{\sqrt{\Lambda}} = f_{2\underline{1}}{}^0, f_{\underline{1}\underline{1}}{}^1 = \frac{2i\alpha^2}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}} = -f_{2\underline{2}}{}^1, f_{\underline{1}\underline{1}}{}^2 = \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\sigma}} = f_{2\underline{2}}{}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

onde os índices sublinhados são os índices  $\alpha, \beta = \underline{1}, \underline{2}$ . Recorremos a esta notação para não confundir os valores dos índices, latinos  $(i, j, \cdot)$  e gregos.

Podemos ver aqui que a superálgebra  $osp(1,2)$  [4,18,48,70], é um caso particular da superálgebra  $s(a)ds$ , quando considera-se métrica Riemanniana e constante cosmológica positiva, quer dizer, quando  $\sigma = 1$  e  $\Lambda = 1$ .

## B.4 A Representação Adjunta e a Superforma Quadrática de Killing

Introduzimos no parágrafo B.3.4 uma extensão supersimétrica da álgebra (a)ds, que chamamos s(a)ds, uma base sendo dada pelos geradores  $T_A = T_i, Q_\alpha$ , onde  $T_i \in \mathcal{L}_0$ ,  $(i, j, \dots = 0, 1, 2)$ , são os elementos pares (B.48), e  $Q_\alpha \in \mathcal{L}_1$ ,  $(\alpha, \beta, \dots = \underline{1}, \underline{2})$  os elementos ímpares (B.49) da álgebra de Lie graduada (superálgebra de Lie). Os  $T_i$  são os geradores de (A)dS definidos no parágrafo (B.3.3). Reescrevamos as relações de (anti)-comutação da forma,

$$[T_A, T_B] = f_{AB}{}^C T_C.$$

com as constantes de estrutura satisfazendo  $f_{AB}{}^C = -(-1)^{|A||B|} f_{BA}{}^C$ , onde as letras maiúsculas do início do alfabeto latino ( $A, B, \dots$ ) representam índices do supergrupo, ( $A, B, \dots = i, j, \dots; \alpha, \beta, \dots$ ).

Os geradores na representação adjunta são definidos por  $\text{ad}(T_A)^{BC} = f_A{}^{BC}$ , ver (B.9). Explicitamente:

$$\text{ad}(T_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{\Lambda}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i\sqrt{\Lambda}}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(T_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ad}(T_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\sigma}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sigma}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(Q_{\underline{1}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2i\alpha^2}{\sqrt{\Lambda}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2i\alpha^2}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\sigma}} & 0 \\ -\frac{i\sqrt{\Lambda}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}}{2} & -\frac{\sqrt{\sigma}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ad}(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2i\alpha^2}{\sqrt{\Lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2i\alpha^2}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\sigma}} \\ 0 & -\frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}}{2} & \frac{\sqrt{\sigma}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{i\sqrt{\Lambda}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A forma quadrática invariante de Killing é definida como,

$$B(T_A T_B) := \text{STr}(\text{ad}(T_A)\text{ad}(T_B)) =: K_{AB}, \quad (\text{B.52})$$

onde  $\text{Str}$ , é o supertraço. Obtemos

$$(K_{AB}) = \left( \begin{array}{c|c} (\mathbf{K}_{ij}) & 0 \\ \hline 0 & (\mathcal{K}_{\alpha\beta}) \end{array} \right), \quad (\text{B.53})$$

onde

$$(\mathbf{K}_{ij}) := \text{STr}(\text{ad}(T_i)\text{ad}(T_j)) = -\frac{3\sigma}{2} \begin{pmatrix} \sigma\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.54})$$

$$(\mathcal{K}_{\alpha\beta}) := \text{STr}(\text{ad}(Q_\alpha)\text{ad}(Q_\beta)) = 6\alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 6\alpha^2(\epsilon_{\alpha\beta}). \quad (\text{B.55})$$

E

$$\text{STr}(\text{ad}(T_i)\text{ad}(Q_\alpha)) = 0,$$

De maneira análoga, temos os inversos

$$(\mathbf{K}^{ij}) = -\frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} \sigma/\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{K}^{\alpha\beta}) = \frac{1}{6\alpha^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.56})$$

como submatrizes de  $(K^{AB})$ , que satisfazem a seguinte propriedade,

$$(K^{AB})(K_{BC}) = \delta_C^A. \quad (\text{B.57})$$

Os índices de supergrupo,  $A, B, \dots$ , são elevados e abaixados com ajuda da forma de Killing (ou métrica de Killing), seguindo a regra:

$$X_B := X^A K_{AB}, \quad X^A := K^{AB} X_B. \quad (\text{B.58})$$

Em consequencia

$$X_j := X^i \mathbf{K}_{ij}, \quad X^i := \mathbf{K}^{ij} X_j \quad (\text{B.59})$$

$$X_\beta := X^\alpha \mathcal{K}_{\alpha\beta}, \quad X^\alpha := \mathcal{K}^{\alpha\beta} X_\beta. \quad (\text{B.60})$$

## B.5 Supergrupos

Supergrupos são generalizações dos grupos de Lie, e a relação entre um supergrupo e sua superálgebra é análoga ao caso de álgebras de Lie clássicas. Um supergrupo  $\mathbf{G}$  associado à superálgebra  $\mathcal{L}_s$  é o mapa exponencial do envelope de Grassmann de  $\mathcal{L}_s$ , os geradores pares da superálgebra  $\mathcal{L}_s$  correspondendo a parâmetros pares e os geradores ímpares de  $\mathcal{L}_s$  correspondendo a parâmetros ímpares. Dada a álgebra de Lie podemos obter os elementos do grupo de Lie exponenciando os geradores da álgebra multiplicados por parâmetros de transformação.

Temos que tomar em conta que na multiplicação dos geradores da superálgebra por escalares, os escalares ímpares de Grassmann anticomutam com os geradores ímpares da álgebra, enquanto comutam com números complexos e os geradores pares da álgebra.

Um elemento geral  $X$  da superálgebra, para nosso caso  $s(a)$  da, é escrito como uma combinação linear dos geradores  $T_i$  e  $Q_\alpha$ , isto é (ver subsecção B.3.4)

$$X = a^i T_i + \theta^\alpha Q_\alpha = X^A T_A \quad (\text{B.61})$$

onde os  $a^i$  são parâmetros pares, e  $\theta^\alpha$  parâmetros ímpares da álgebra de Grassmann,  $X^A = (a^i, \theta^\alpha)$  e  $T_A = (T_i, Q_\alpha)$ . Por definição estes parâmetros satisfazem as relações:

$$[a^i, b^j] = 0 = [a^i, \theta^\alpha] = \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = 0, \quad (\text{B.62})$$

para dois elementos quaisquer da álgebra,  $X, Y$  temos:

$$[X, Y] = (-1)^{|X^A||Y^B|} X^A Y^B [T_A, T_B] \quad \text{assim,}$$

$$\begin{aligned} [a^i T_i, b^j T_j] &= a^i b^j [T_i, T_j] = a^{[i} b^{j]} [T_i, T_j] \\ [a^i T_i, \theta^\alpha Q_\alpha] &= a^i \theta^\alpha [T_i, Q_\alpha] \\ [\theta^\alpha Q_\alpha, \theta'^\beta Q_\beta] &= -\theta^\alpha \theta'^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\} = -\theta^{\{\alpha} \theta'^{\beta\}} \{Q_\alpha, Q_\beta\} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \theta^{\{\alpha} \theta'^{\beta\}} &= \frac{1}{2}(\theta^\alpha \theta'^\beta + \theta^\beta \theta'^\alpha), \quad \theta^{[\alpha} \theta'^{\beta]} = \frac{1}{2}(\theta^\alpha \theta'^\beta - \theta^\beta \theta'^\alpha) \\ a^{[i} b^{j]} &= \frac{1}{2}(a^i b^j - a^j b^i) \end{aligned}$$

Os elementos do supergrupo são obtidos exponenciando os elementos da superálgebra:

$$g(a, \theta) = \exp[i\{a^i T_i + \theta^\alpha Q_\alpha\}] \quad (\text{B.63})$$

cujos inversos são dados por,

$$g^{-1}(a, \theta) = \exp[-i\{T_i + \theta^\alpha Q_\alpha\}]. \quad (\text{B.64})$$

A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp X \exp Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots\right) \quad (\text{B.65})$$

poderia ser aplicada na multiplicação de elementos do grupo:  $g(a'', \theta'') = g(a, \theta)g(a', \theta')$ , já que por definição um elemento geral da superálgebra,  $X = a^i T_i + \theta^\alpha Q_\alpha$ , é uma quantidade par.

Não é difícil ver que quaisquer matriz  $g(a, \theta)$  do supergrupo tem uma decomposição

$$g(a, \theta) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{B.66})$$

onde as submatrizes  $A$  e  $D$  tem unicamente contribuições de um produto de um número par de parâmetros  $\theta^\alpha$  além dos parâmetros  $a^1$ . Assim, os elementos destas submatrizes estão no subespaço,  $\mathbb{C}_{L0}$  da álgebra de Grassmann complexa. Por um argumento análogo, as submatrizes

$B$  e  $C$  incluem um número ímpar de parâmetros  $\theta^\alpha$  por consequência, estão no subespaço,  $\mathbb{C}_{L1}$ , da álgebra de Grassmann complexa. Portanto, quaisquer elemento do supergrupo  $g$  é uma supermatriz par.

## Apêndice C

# Teoria de Representação do Grupo Super (Anti) de Sitter, S(A)dS

### C.1 Representações Irredutíveis da Superálgebra $s(a)ds$ .

Estudamos as representações irredutíveis de dimensão finita da álgebra de Lie graduada  $s(a)ds$ . De forma análoga ao caso ordinário de álgebras de Lie essas representações são classificadas pelos auto valores dos geradores de Casimir. O operador de Casimir quadrático de  $s(a)ds$  é dado por,

$$C_2 = T_A K^{AB} T_B = T_i \mathbf{K}^{ij} T_j + Q_\alpha \mathcal{K}^{\alpha\beta} Q_\beta, \quad (\text{C.1})$$

onde  $K^{AB}$  é o inverso da superforma de Killing introduzida na seção B.4 do Apêndice B.

A condição

$$[C_2, T_A] = 0, \quad (A = i = 0, 1, 2, \text{ e } A = \alpha = \underline{1}, \underline{2}), \quad (\text{C.2})$$

pode ser verificada facilmente.

Definindo uma troca de base (base de Cartan-Weyl):

$$T_\pm := \frac{i}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}} T_1 \mp \frac{1}{\sqrt{\sigma}} T_2, \quad T'_0 := \frac{i}{\sqrt{\Lambda}} T_0, \quad Q_- := Q_{\underline{1}}, \quad Q_+ := Q_{\underline{2}}, \quad (\text{C.3})$$

com  $T'_0, T_\pm, Q_\pm$  satisfazendo as seguintes relações de comutação e anticomutação:

$$\begin{aligned} [T'_0, T_\pm] &= \pm T_\pm, & [T_+, T_-] &= 2T'_0, \\ [T'_0, Q_\pm] &= \pm \frac{1}{2}Q_\pm, & [T_\pm, Q_\mp] &= -Q_\pm, & [T_\pm, Q_\pm] &= 0, \\ \{Q_\pm, Q_\pm\} &= \mp 2\alpha^2 T_\pm, & \{Q_\pm, Q_\mp\} &= -2\alpha^2 T'_0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

As condições de hermiticidade (superadjunta, ver definição na subseção B.2.4 do Apêndice B)<sup>1</sup> são:

$$T_0^\dagger = T'_0, \quad T_\pm^\dagger = T_\mp, \quad Q_\pm^\dagger = \pm Q_\mp. \quad (\text{C.5})$$

Nesta base o operador de Casimir  $C_2$  escreve-se como,

$$C_2 = T^2 + \frac{1}{6\alpha^2}(Q_+Q_- - Q_-Q_+), \quad (\text{C.6})$$

onde  $T^2$  é o operador Casimir de (a)ds (igual ao Casimir  $L^2$  de  $\text{su}(2)$ , no caso  $\sigma = \Lambda = 1$ ),

$$\begin{aligned} T^2 &= T_i \mathbf{K}^{ij} T_j = -\frac{2\sigma}{3} \left( \frac{\sigma}{\Lambda} T_0^2 + \frac{1}{\Lambda} T_1^2 + T_2^2 \right). \\ &= \frac{2}{3} (T_+ T_- + T_0'^2 - T_0') \\ &= \frac{2}{3} (T_- T_+ + T_0'^2 + T_0'), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

com,

$$\begin{aligned} T_+ T_- &= -\frac{T_1^2}{\sigma\Lambda} - \frac{T_2^2}{\sigma} + T_0', \\ T_- T_+ &= -\frac{T_1^2}{\sigma\Lambda} - \frac{T_2^2}{\sigma} - T_0', \end{aligned}$$

pode-se verificar facilmente que  $T^2$  é o operador de Casimir de (a)ds, conseqüentemente:

$$[T^2, T_i] = 0. \quad (\text{C.8})$$

A existência da forma quadrática  $C_2$  é importante para fornecer a redutibilidade completa de quaisquer representação finita. As representações irredutíveis de  $\text{s(a)ds}$  são caracterizadas pelos autovalores  $c_j$  de  $C_2$  onde  $j$  etiqueta esses valores. Os vetores de cada uma dessas representações

---

<sup>1</sup>Precisamos usar o conjunto superadjunta pois o conjunto hermitiano de  $Q_+^\dagger$  e  $Q_-^\dagger$  não pertence, à superálgebra.



são autovetores  $|j, l, m\rangle$  dos operadores  $T'_0$  e  $T^2$ , facilmente calculáveis. Assim

$$C_2|j, l, m\rangle = c_j|j, l, m\rangle, \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} T'_0|j, l, m\rangle &= m|j, l, m\rangle, \\ T^2|j, l, m\rangle &= \frac{2}{3}l(l+1)|j, l, m\rangle, \\ T_\pm|j, l, m\rangle &= \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}|j, l, m \pm 1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Temos agora que calcular os auto valores  $c_j$  de  $C_2$  e a ação dos geradores ímpares  $Q_\alpha$  sobre os vetores de base  $|j, l, m\rangle$ .

As relações de comutação entre o operador de Casimir de (a)ds e os operadores fermiônicos  $Q_\alpha$  são dadas por

$$[T^2, Q_\alpha] = \mathbf{K}^{ij} f_{j\alpha}^\beta \{T_i, Q_\beta\} = \mathbf{K}^{ij} f_{j\alpha}^\beta ([T_i, Q_\beta] + 2Q_\beta T_i), \quad (\text{C.11})$$

usando (C.4), podemos mostrar que

$$(Q_+Q_- - Q_-Q_+)^2 = 6\alpha^2 T^2 + 2\alpha^2(Q_+Q_- - Q_-Q_+) = 2\alpha^2(2C_2 - T^2). \quad (\text{C.12})$$

Com a ajuda desta última expressão, derivamos a seguinte relação

$$C_2^2 = \left(T^2 + \frac{1}{6}\right)(2C_2 - T^2). \quad (\text{C.13})$$

Na representação irredutível (IR) de base  $|j, l, m\rangle$  passamos a determinar o autovalor  $c_j$  do Casimir  $C_2$ , que esta definido por (C.9). Atuando sobre o estado  $|j, l, m\rangle$  da RI ambos lados de (C.13) e resolvendo a equação algébrica, obtemos

$$c_j = \frac{2}{3}l(l + \frac{1}{2}), \quad \text{ou} \quad c_j = \frac{2}{3}(l+1)(l + \frac{1}{2}), \quad (\text{C.14})$$

sabemos que  $c_j$  tem o mesmo valor para todos os vetores da RI, portanto valores permitidos de  $l$  são restritos por (C.14). E de fato pode-se ter só dois valores distintos de  $l$ :  $l = j$  ou  $l = j - \frac{1}{2}$ , assim

$$c_j = \frac{2}{3}j(j + \frac{1}{2}). \quad (\text{C.15})$$

Então os vetores de base para uma representação  $j$  dada, serão:  $|j, j, m\rangle$  e  $|j, j - \frac{1}{2}, m\rangle$ .

Aplicando a relação  $[T'_0, Q_\pm] = \pm \frac{1}{2}Q_\pm$ , ao vetor  $|j, l, m\rangle$ , obtemos

$$T'_0 Q_\pm |j, j, m\rangle = (Q_\pm T'_0 \pm \frac{1}{2}Q_\pm) |j, l, m\rangle = (m \pm \frac{1}{2}) Q_\pm |j, l, m\rangle. \quad (\text{C.16})$$

Aqui vemos que  $Q_\pm |j, j, m\rangle$ , é autovetor de  $T'_0$  com valor próprio  $(m \pm \frac{1}{2})$ , também podemos observar que o operador  $Q_+$  ( $Q_-$ ) agindo sobre  $|j, l, m\rangle$  aumenta (diminui) o valor de  $m$  em  $\frac{1}{2}$ . Assim de (C.16) podemos ver como o operador  $Q_\pm$  afeta a quantidade  $m$  quando este atua nos estados. Agora queremos saber como este operador afeta o número quântico  $l$ . De (C.11), podemos escrever:

$$\begin{aligned} [T^2; Q_\pm] &= -\frac{1}{3} \{T_\pm, Q_\mp\} \pm \frac{1}{3} \{T'_0, Q_\pm\} \\ &= \frac{2}{3} \left( -Q_\mp T_\pm + \frac{3}{4} Q_\pm + \frac{3}{2} Q_\pm T^2 \pm Q_\pm T'_0 \right). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Com ajuda desta última expressão teremos que

$$\begin{aligned} T^2 Q_\pm |j, l, m\rangle &= \frac{2}{3} \left[ -\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Q_\mp |j, l, m \pm 1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{3}{4} + l(l + 1) \pm m \right) Q_\pm |j, l, m\rangle \right], \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

de (C.18), para  $l = j$  temos

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} T^2 Q_+ |j, j, m\rangle &= -\sqrt{(j - m)(j + m + 1)} Q_- |j, j, m + 1\rangle \\ &\quad + \left( \frac{3}{4} + j(j + 1) + m \right) Q_+ |j, j, m\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} T^2 Q_- |j, j, m + 1\rangle &= -\sqrt{(j + m + 1)(j - m)} Q_+ |j, j, m\rangle \\ &\quad + \left( -\frac{1}{4} + j(j + 1) - m \right) Q_- |j, j, m + 1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Sabemos que os operadores  $Q_+$  ( $Q_-$ ) aumentam (diminui)  $m$  em  $\frac{1}{2}$  e que  $l$  pode ter valores  $j$  ou  $j - \frac{1}{2}$ , e dado que para cada  $j$ ,  $l$  pode tomar os valores de  $j$  ou  $j - \frac{1}{2}$  em geral temos:

$$Q_+ |j, j, m\rangle = \alpha_+^{jm} |j, j, m + \frac{1}{2}\rangle + a_+^{jm} |j, j - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle, \quad (\text{C.21})$$

$$Q_- |j, j, m\rangle = \beta_-^{jm} |j, j, m - \frac{1}{2}\rangle + b_-^{jm} |j, j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle. \quad (\text{C.22})$$

Substituindo (C.21) e (C.22) em (C.19) e tendo em conta que os estados são linearmente

independentes teremos que

$$(m + \frac{3}{4})\alpha_+^{jm} = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\beta_-^{jm}, \quad (\text{C.23})$$

e

$$\frac{a_+^{jm}}{\sqrt{j-m}} = \frac{b_-^{jm+1}}{\sqrt{j+m+1}}. \quad (\text{C.24})$$

Analogamente para (C.20) obtemos

$$-(m + \frac{1}{4})\beta_-^{jm+1} = \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\alpha_+^{jm}, \quad (\text{C.25})$$

e

$$\frac{a_+^{jm}}{\sqrt{j-m}} = \frac{b_-^{jm+1}}{\sqrt{j+m+1}}.$$

Comparando (C.23) com (C.25) podemos concluir que  $\alpha_+^{jm} = 0 = \beta_-^{jm+1}$ . Por outro lado sabemos que  $Q_+T_+ = T_+Q_+$ , que atuando sobre o estado  $|j, j, m\rangle$  e usando (C.21) obtemos,

$$\frac{a_+^{jm}}{\sqrt{j-m}} = \frac{a_+^{jm+1}}{\sqrt{j-(m+1)}}. \quad (\text{C.26})$$

Comparando (C.24) e (C.26) temos a seguinte relação de recorrência

$$\frac{a_+^{jm+1}}{\sqrt{j-(m+1)}} = \frac{a_+^{jm}}{\sqrt{j-m}} = \dots = a = \dots = \frac{b_-^{jm}}{\sqrt{j+m}} = \frac{b_-^{jm+1}}{\sqrt{j+m+1}}, \quad (\text{C.27})$$

que resulta em,

$$Q_\pm |j, j, m\rangle = a\sqrt{j \mp m} |j, j - \frac{1}{2}, m \pm \frac{1}{2}\rangle. \quad (\text{C.28})$$

Analogamente para o caso  $l = j - \frac{1}{2}$

$$Q_+ |j, j - \frac{1}{2}, m\rangle = \alpha_+^{j-\frac{1}{2}m} |j, j, m + \frac{1}{2}\rangle + a_+^{j-\frac{1}{2}m} |j, j - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle, \quad (\text{C.29})$$

$$Q_- |j, j - \frac{1}{2}, m\rangle = \beta_-^{j-\frac{1}{2}m} |j, j, m - \frac{1}{2}\rangle + b_-^{j-\frac{1}{2}m} |j, j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle. \quad (\text{C.30})$$

De (C.18) deduzimos

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}T^2Q_+|j, j - \frac{1}{2}, m\rangle &= -\sqrt{(j - m - \frac{1}{2})(j + m + \frac{1}{2})}Q_-|j, j - \frac{1}{2}, m + 1\rangle \\ &\quad + ((j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) + m + \frac{3}{4})Q_+|j, j - \frac{1}{2}, m\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}T^2Q_-|j, j, m + 1\rangle &= -\sqrt{(j + m + \frac{1}{2})(j - m - \frac{1}{2})}Q_+|j, j - \frac{1}{2}, m\rangle \\ &\quad + ((j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) - m - \frac{1}{4})Q_\pm|j, j - \frac{1}{2}, m + 1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Substituindo (C.29) e (C.30) em (C.31) obtemos

$$(m + \frac{3}{4})a_+^{j-\frac{1}{2}m} = \sqrt{(j + m + \frac{1}{2})(j - m - \frac{1}{2})}b_-^{j-\frac{1}{2}m+1}, \quad (\text{C.33})$$

e

$$-\frac{\alpha_+^{j-\frac{1}{2}m}}{\sqrt{j + m + \frac{1}{2}}} = \frac{\beta_-^{j-\frac{1}{2}m+1}}{\sqrt{j - m - \frac{1}{2}}}, \quad (\text{C.34})$$

e de (C.29), (C.30) e (C.32) a relação

$$-(m + \frac{1}{4})b_-^{j-\frac{1}{2}m+1} = \sqrt{(j - m - \frac{1}{2})(j + m + \frac{1}{2})}a_+^{j-\frac{1}{2}m}. \quad (\text{C.35})$$

Então de (C.33) e (C.35) conclui-se que,  $a_+^{j-\frac{1}{2}m} = 0 = b_-^{j-\frac{1}{2}m}$ . Finalmente usando a relação,

$$T_+Q_+|j, j - \frac{1}{2}, m\rangle = Q_+T_+|j, j - \frac{1}{2}, m\rangle, \quad (\text{C.36})$$

teremos

$$\frac{\beta_-^{j-\frac{1}{2}m}}{\sqrt{j - m + \frac{1}{2}}} = \frac{\beta_-^{j-\frac{1}{2}m+1}}{\sqrt{j - m - \frac{1}{2}}}, \quad (\text{C.37})$$

do qual de (C.34) e (C.37) deduzimos

$$-\frac{\alpha_+^{j-\frac{1}{2}m+1}}{\sqrt{j - m + \frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha_+^{j-\frac{1}{2}m}}{\sqrt{j + m + \frac{1}{2}}} = \dots = b = \dots = \frac{\beta_-^{j-\frac{1}{2}m}}{\sqrt{j - m + \frac{1}{2}}} = \frac{\beta_-^{j-\frac{1}{2}m+1}}{\sqrt{j - m - \frac{1}{2}}} \quad (\text{C.38})$$

e assim concluímos que

$$Q_\pm|j, j - \frac{1}{2}, m\rangle = \pm b\sqrt{j \pm m + \frac{1}{2}}|j, j, m \pm \frac{1}{2}\rangle. \quad (\text{C.39})$$

Também temos  $\{Q_+, Q_+\} = -\alpha^2 T_+$ , então

$$Q_+ Q_+ |j, j, m\rangle = -\alpha^2 T_+ |j, j, m\rangle, \quad (\text{C.40})$$

de onde obtemos  $ab = -\alpha^2$ . Podemos escolher a solução particular,  $a = \alpha$  e  $b = -\alpha$ . Assim como resultado final temos os vetores estado na representação  $j$ , que damos na Tabela. C.1. Podemos ver que a dimensão do espaço vetor da representação  $j$  é  $4j + 1$ .

Tabela C.1: Representação  $j$  de  $s(\mathfrak{a})_S$ .

	$ j, j, m\rangle$	$ j, j - \frac{1}{2}, m\rangle$
$T'_0$	$m j, j, m\rangle$	$m j - \frac{1}{2}, j, m\rangle$
$T^2$	$\frac{2}{3}j(j+1) j, j, m\rangle$	$\frac{2}{3}j(j+1) j, j - \frac{1}{2}, m\rangle$
$C_2$	$\frac{2}{3}j(j + \frac{1}{2}) j, j, m\rangle$	$\frac{2}{3}(j - \frac{1}{2})j j, j - \frac{1}{2}, m\rangle$
$T_\pm$	$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} j, j, m \pm 1\rangle$	$\sqrt{(j \mp m - \frac{1}{2})(j \pm m + \frac{1}{2})} j, j - \frac{1}{2}, m \pm 1\rangle$
$Q_\pm$	$\alpha\sqrt{(j \mp m)} j, j - \frac{1}{2}, m \pm \frac{1}{2}\rangle$	$\mp\alpha\sqrt{(j \mp m + \frac{1}{2})} j, j, m \pm \frac{1}{2}\rangle$

Para a representação  $j = 1/2$  (representação fundamental), os vetores estados da representação são,  $|0\rangle = |1/2, 0, 0\rangle$ ,  $|1\rangle = |1/2, 1/2, 1/2\rangle$ ,  $|2\rangle = |1/2, 1/2, -1/2\rangle$  e as matrizes nesta representação são:

$$T'_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_- = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_+ = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.41})$$

Usando (C.3), verificamos que as matrizes  $T_i$  e  $Q_\alpha$  são bem aquelas introduzidas na definição da superálgebra na seção (B.3.4) do apêndice B.

$$T_0 = -\frac{i\sqrt{\Lambda}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_1 = -\frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{\Lambda}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = -\frac{i\sqrt{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, Q_{\underline{1}} = Q_-, , Q_{\underline{2}} = Q_+. \quad (\text{C.42})$$

que são os geradores de  $S(\mathfrak{A})_S$ .

# Apêndice D

## Holonomias

### D.1 Holonomia

Seja  $\gamma$ , um caminho orientado suave que vai de um ponto  $s_0$  a um ponto  $s_f$  numa variedade  $\mathcal{M}$ , parametrizado pelo parâmetro  $s \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\mapsto \mathcal{M} \\ s &\mapsto x^\mu(s) = \gamma^\mu(s). \end{aligned}$$

Seja  $v(x)$  um campo vetorial. Queremos fazer um transporte deste vetor  $v$  ao longo do caminho  $\gamma$  a partir de um ponto  $\gamma(s)$ . Então a derivada covariante de  $v(\gamma(s))$  na direção  $\gamma$ , isto é na direção  $\dot{\gamma}^\mu(s) = \frac{d}{ds}x^\mu(s)$ , é igual a zero (ver Figura D.1). A equação que descreve este transporte paralelo é então,

$$\frac{d}{ds}v(\gamma(s)) + \dot{\gamma}^\mu(s)v(\gamma(s)) = 0, \quad (\text{D.1})$$

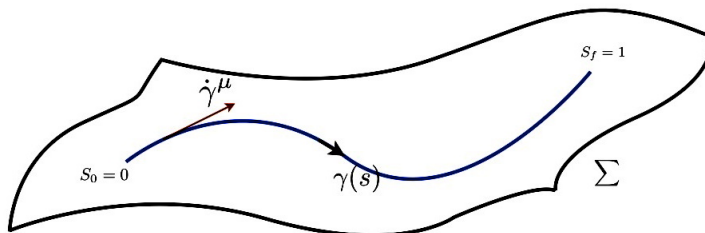


Figura D.1: Translado paralelo de um vetor através do caminho  $\gamma$  parametrizado com  $s \in [0, 1]$ .

onde  $A_\mu$  é a conexão, a qual está tomada na álgebra de Lie de um grupo de calibre  $\mathcal{G}$ , e é a quantidade que permite fazer o transporte paralelo do vetor. A solução desta equação, se existe, satisfaz a equação integral

$$v(\gamma(s)) = v(x_0) - \int_0^s ds_1 \dot{\gamma}^\mu(s_1) A_\mu(\gamma(s_1)) v(\gamma(s_1)). \quad (\text{D.2})$$

Olhando a expressão (D.2) não podemos dizer que tenhamos resolvido a equação de transporte paralelo do vetor  $v(s)$ , já que a quantidade a ser resolvida aparece nos dois lados de (D.2), mas usando um método recursivo podemos resolvê-la, e o resultado final é dado por

$$v(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^n \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \dot{\gamma}^\mu(s_1) A_\mu(\gamma(s_1)) \cdots \dot{\gamma}^\mu(s_n) A_\mu(\gamma(s_n)) \right) v(0), \quad (\text{D.3})$$

que podemos escrever como

$$v(s) = \mathcal{P} \exp \left( - \int_0^s ds' \dot{\gamma}(s')^\mu A_\mu(\gamma(s')) \right) v(0), \quad (\text{D.4})$$

$\mathcal{P}$  denota o ordenamento no caminho dos termos da expansão da exponencial de modo que os valores da conexão sejam ordenados da esquerda à direita conforme o parâmetro  $s$  que parametriza a caminho  $\gamma$  vai diminuindo ( $s \geq s_1 \geq \cdots \geq s_n \geq 0$ ). Dado o vetor  $v(s)$ , podemos denotar  $h[A, \gamma]v(s_0)$  como resultado do transporte paralelo de  $v(s_0)$  no ponto  $s_0$  ao ponto  $s_f$  ao longo do caminho  $\gamma$ . Então, a partir de uma conexão  $A$  de um grupo de calibre  $\mathcal{G}$  sobre uma variedade  $\mathcal{M}$ , define-se a quantidade  $h[A, \gamma]$  como o operador de transporte paralelo, ou holonomia de um ponto  $\gamma(s_0)$  a um ponto  $\gamma(s)$  como:

$$h[A, \gamma](s, s_0) = \mathcal{P} \exp \left( - \int_{s_0}^s ds' \dot{\gamma}(s')^\mu A_\mu(\gamma(s')) \right), \quad (\text{D.5})$$

e podemos verificar facilmente que é solução da equação diferencial dada por

$$\frac{d}{ds} h[A, \gamma](s, s_0) + \dot{\gamma}^\mu(s) A_\mu h[A, \gamma](s, s_0) = 0. \quad (\text{D.6})$$

Em geral, se  $\gamma$  é suave por pedaços, podemos encontrar pontos na qual está não é suave, dividindo-a em peças suaves máximas  $\gamma_i : [s_i, s_{i+1}] \rightarrow \mathcal{M}$ , onde  $1 \leq i \leq n$ , define-se a holonomia por,

$$h[A, \gamma] = h[A, \gamma_n] \cdots h[A, \gamma_1]. \quad (\text{D.7})$$

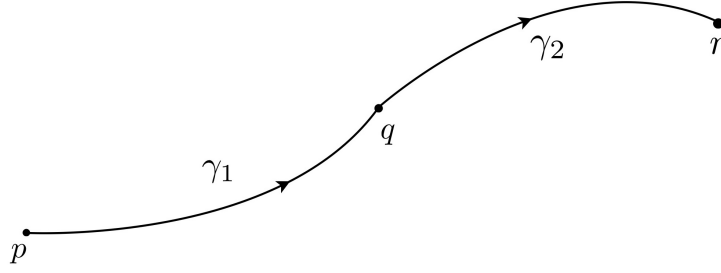


Figura D.2: Composição de caminhos,  $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$

que faz o transporte paralelo do vetor ao longo de peças de caminhos suaves, trasladando-o paralelamente ao longo do caminho de uma peça de cada vez. Isto leva-nos a noção de produto de caminhos. Suponhamos que temos um caminho  $\gamma$  em  $\mathcal{M}$  do ponto  $p$  a  $r$ , que pode ser dividido em caminhos  $\gamma_1$  do ponto  $p$  ao ponto  $q$ , e  $\gamma_2$  do ponto  $q$  ao ponto  $r$ , (ver Figura D.2), dizemos que os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são combináveis. Assim temos  $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ . Notemos que se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são suaves,  $\gamma$  requer unicamente ser suave por peças. Assim da noção de produto de caminhos nos leva a seguinte propriedade para a holonomia,

$$h[A, \gamma_2 \circ \gamma_1](s_r, s_p) = h[A, \gamma_2](s_r, s_q)h[A, \gamma_1](s_q, s_p), \quad (\text{D.8})$$

Também, para quaisquer caminho  $\gamma$  de  $s_0$  a  $s_f$  (ver Figura D.1), existe um caminho inverso  $\gamma^{-1}$  do ponto  $s_f$  ao ponto  $s_0$ , e pode-se mostrar que:

$$h[A, \gamma^{-1}](s_0, s_f) = (h[A, \gamma](s_f, s_0))^{-1}, \quad (\text{D.9})$$

e existe também o elemento identidade

$$h[A, \gamma \circ \gamma^{-1}] = 1. \quad (\text{D.10})$$

## D.2 Transformação de Calibre da Holonomia

Vejamos agora como se comporta a holonomia sob uma transformação de calibre  $g$  da conexão  $A$ . Suponhamos que o vetor  $v(s)$  satisfaz a equação de transporte paralelo, equação (D.1), que podemos escrever de maneira simplificada como:

$$dv(s) + Av(s) = 0, \quad (\text{D.11})$$



onde  $d$  é a derivada exterior,  $A$  é a conexão,  $A = ds\dot{\gamma}^\mu(s)A_\mu(\gamma(s))$ . Aplicamos uma transformação de calibre  $g$  a  $v$ , dando como resultado  $v'$ , isto é

$$v'(s) = g(\gamma(s))v(s). \quad (\text{D.12})$$

Para que o vetor transformado  $v'(s)$  seja transportado paralelamente ele deve satisfazer (D.11), ou seja

$$dv'(s) + A'v'(s) = 0, \quad (\text{D.13})$$

onde  $A'$  representa a conexão  $A$  transformada.

Dado que  $gg^{-1} = 1$ , com  $g^{-1}$  sendo o elemento inverso do elemento do grupo  $g$ , temos

$$dgg^{-1} = -gdg^{-1}, \quad (\text{D.14})$$

por outro lado de (D.12) obtém-se

$$v(s) = g^{-1}(\gamma(s))v'(s). \quad (\text{D.15})$$

Agora aplicando a derivada exterior à expressão (D.12), e com ajuda de (D.14) e (D.15), teremos:

$$dv'(s) = -(gAg^{-1} + gdg^{-1})v'(s), \quad (\text{D.16})$$

que comparando-a com (D.13), vemos que

$$A' = gAg^{-1} + gdg^{-1}, \quad (\text{D.17})$$

que é a expressão de transformação de calibre  $g$  da conexão  $A$ .

Agora, dado que a holonomia  $h[A, \gamma]$ , é um mapeamento linear, enviando um vetor de um ponto inicial  $s_0$  para um ponto final  $s_f$ , isto é de  $u(s_0)$  a  $u(s_f)$ , similarmente o fará a holonomia transformada, isto é  $h[A', \gamma](s)$  enviando  $v'(s_0) = g(\gamma(s_0))v(s_0)$  a  $v'(s_f) = g(\gamma(s_f))v(s_f)$ , segue-se que

$$h[A', \gamma](s_f, s_0) = g(s_f)h[A, \gamma](s_f, s_0)g^{-1}(s_0), \quad (\text{D.18})$$

que é a fórmula que mostra como transforma-se a holonomia sob uma transformação de calibre

$g$  da conexão  $A$ .

### D.3 Transformação de Calibre Infinitesimal da Holonomia

Uma quantidade que também é importante calcular, e que se precisará do resultado, é a transformação de calibre infinitesimal da holonomia. Vejamos: a variação infinitesimal da conexão  $A$  seguida de (D.17) com o elemento do grupo  $g = e^{\epsilon(x)}$ , onde  $\epsilon(x)$  é um elemento infinitesimal da álgebra de Lie do grupo  $\mathcal{G}$  se escreve como:

$$\delta_\epsilon A = -D\epsilon = -(d\epsilon + [A, \epsilon]). \quad (\text{D.19})$$

Da (D.6) temos que,

$$dh[A, \gamma(s)](s, s_0) = -ds\dot{\gamma}^\mu(s)A_\mu(\gamma(s))h[A, \gamma(s)](s, s_0), \quad (\text{D.20})$$

e com a propriedade multiplicativa (D.8),

$$h[A, \gamma](s_f, s_0) = h[A, \gamma(s)](s_f, s)h[A, \gamma](s, s_0)$$

onde  $s_0 \leq s \leq s_f$ . Diferenciando esta última equação com respeito ao parâmetro  $s$  da curva, o lado esquerdo desta é zero, logo usando (D.20), teremos,

$$dh[A, \gamma(s)](s_f, s) = h[A, \gamma(s)](s_f, s)ds\dot{\gamma}^\mu(s)A_\mu(\gamma(s)). \quad (\text{D.21})$$

Variando infinitesimalmente  $h[A, \gamma]$  temos:

$$\delta_\epsilon h[A, \gamma(s)](s_f, s_0) = - \int_{s_0}^{s_f} ds h[A, \gamma(s)](s_f, s) \dot{\gamma}^\mu(s) \delta_\epsilon A_\mu(\gamma(s)) h[A, \gamma(s)](s, s_0). \quad (\text{D.22})$$

Substituindo aqui a transformação de calibre infinitesimal (D.19) e integrando por partes, teremos que:

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon h[A, \gamma(s)](s_f, s_0) &= \int_{s_0}^{s_f} ds h[A, \gamma(s)](s_f, s) \dot{\gamma}^\mu(s) D_\mu \epsilon(\gamma(s)) h[A, \gamma(s)](s, s_0) \\
&= \int_{s_0}^{s_f} ds h[A, \gamma(s)](s_f, s) \dot{\gamma}^\mu(s) (\partial_\mu \epsilon^i + A_\mu^j \epsilon^k f_{jk}^i)(\gamma(s)) T_i h[A, \gamma(s)](s, s_0) \\
&= \int_{s_0}^{s_f} ds \dot{\gamma}^\mu(s) \partial_\mu (h[A, \gamma(s)](s_f, s) \epsilon(s) h[A, \gamma(s)](s, s_0)) \\
&\quad - d(h[A, \gamma(s)](s_f, s)) \epsilon(s) h[A, \gamma(s)](s, s_0) \\
&\quad - h[A, \gamma(s)](s_f, s) \epsilon(s) d(h[A, \gamma(s)](s, s_0)) \\
&\quad + h[A, \gamma(s)](s_f, s) [\epsilon(s), A] h[A, \gamma(s)](s, s_0). \tag{D.23}
\end{aligned}$$

Agora substituindo as expressões (D.20) e (D.21), poderemos ver que o segundo e terceiro termo eliminam-se com o quarto termo, obtendo-se assim:

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon h[A, \gamma(s)](s_f, s_0) &= \int_{s_0}^{s_f} ds \dot{\gamma}^\mu(s) \partial_\mu (h[A, \gamma(s)](s_f, s) \epsilon(\gamma(s)) h[A, \gamma(s)](s, s_0)) \\
&= \epsilon(\gamma(s_f)) h[A, \gamma(s_f)](s_f, s_0) - h[A, \gamma(s_0)](s_f, s_0) \epsilon(\gamma(s_0)). \tag{D.24}
\end{aligned}$$

Isto é a transformação de calibre infinitesimal da holonomia. Esse resultado também pode ser obtido diretamente da expressão (D.18), com  $g(s_f) = e^{\epsilon(\gamma(s_f))} = 1 + \epsilon(\gamma(s_f))$  e  $g(s_0) = e^{-\epsilon(\gamma(s_0))} = 1 - \epsilon(\gamma(s_0))$ .

A análise mais rigorosa da definição e das propriedades da holonomia a podem ser encontradas em [14, 55, 65, 74].

# Referências Bibliográficas

- [1] Jorge Alfaro, Hugo A. Morales-Técotl, and Luis F. Urrutia. Quantum Gravity Corrections to Neutrino Propagation. *Phys.Rev.Lett.*, 84:2318–2321, 2000.
- [2] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Quantum Gravity, or The Art of Building Spacetime. In D. Oriti (ed.), editor, *Approaches to Quantum Gravity: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter*,. Cambridge Univ. Press U. K., 2009.
- [3] James L. Anderson and Peter G. Bergmann. Constraints in Covariant Field Theories. *Phys.Rev.*, 83:1018–1025, 1951.
- [4] D. Armand-Ugon, R. Gambini, O. Obregon, and J. Pullin. Towards a Loop Representation for Quantum Canonical Supergravity. *Nucl.Phys.*, B460:615–631, 1996.
- [5] A. Ashtekar. New Variables for Classical and Quantum Gravity. *Phys.Rev.Lett.*, 57:2244–2247, 1986.
- [6] A. Ashtekar. New Hamiltonian Formulation of General Relativity. *Phys.Rev.*, D36:1587–1602, 1987.
- [7] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and Kirill Krasnov. Quantum Geometry and Black Hole Entropy. *Phys.Rev.Lett.*, 80:904–907, 1998.
- [8] A. Ashtekar, John C. Baez, and Kirill Krasnov. Quantum Geometry of Isolated Horizons and Black Hole Entropy. *Adv.Theor.Math.Phys.*, 4:1–94, 2000.
- [9] Abhay Ashtekar. Black Hole Dynamics in General Relativity. *Pramana*, 69:77–92, 2007.
- [10] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Quantum theory of geometry. 1: Area operators. *Class.Quant.Grav.*, 14:A55–A82, 1997. Dedicated to Andrzej Trautman.

- [11] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Quantum Theory of Geometry. 2. Volume Operators. *Adv.Theor.Math.Phys.*, 1:388–429, 1998.
- [12] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Background independent quantum gravity: A Status report. *Class.Quant.Grav.*, 21:R53, 2004.
- [13] L. Ivan Morales B. *Formalismo Hamiltoniano do Modelo de Jackiw-Teitelboim no Calibre temporal*. Dissertação de mestrado, UFES, <http://www.cce.ufes.br/pgfis/Dissertações/D-Luis>
- [14] J. Baez and J.P. Muniain. *Gauge fields, Knots and Gravity*. World Scientific Publishing, 1995.
- [15] J. Fernando Barbero G. Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times. *Phys.Rev.*, D51:5507–5510, 1995.
- [16] Luis Ivan M. Bautista, Clisthenis P. Constantinidis, and Olivier Piguet. Canonical Formalism of 2D,  $Osp(1|2)$  Supergravity. *PoS*, ICFI2010:021, 2010.
- [17] F.A. Berezin. *Introduction to Superanalysis*. D Reidel Publishing Company, 1987.
- [18] F.A. Berezin and V.N. Tolstoi. The Group with Grassmann Structure  $UOSP(1,2)$ . *Commun.Math.Phys.*, 78:409–428, 1981.
- [19] Peter G. Bergmann and Irwin Goldberg. Dirac Bracket Transformations in Phase Space. *Phys.Rev.*, 98:531–538, 1955.
- [20] P.G. Bergmann. Hamilton-Jacobi and Schrodinger Theory in Theories with First-Class Hamiltonian Constraints. *Phys.Rev.*, 144:1078–1080, 1966.
- [21] R.A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory (International Series of Monographs on Physics)*. Oxford University Press, USA, 2000.
- [22] Danny Birmingham, Matthias Blau, Mark Rakowski, and George Thompson. Topological Field Theory. *Phys.Rept.*, 209:129–340, 1991.
- [23] N. Bodendorfer, T. Thiemann, and A. Thurn. New Variables for Classical and Quantum Gravity in all Dimensions IV. Matter Coupling. *arXiv gr-qc/1105.3706*, 2011.
- [24] M. Bojowald. Absence of Singularity in Loop Quantum Cosmology. *Phys.Rev.Lett.*, 86:5227–5230, 2001.

- [25] M. Bojowald. Isotropic Loop Quantum Cosmology. *Class.Quant.Grav.*, 19:2717–2742, 2002.
- [26] M. Bojowald. *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. University Press, Cambridge, U. K, 2011.
- [27] I.L. Buchbinder and S.M. Kuzenko. *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity: Or a walk Through Superspace*. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1998.
- [28] Ali H. Chamseddine and D. Wyler. Gauge Theory of Topological Gravity in (1+1)-Dimensions. *Phys.Lett.*, B228:75, 1989.
- [29] Ali H. Chamseddine and D. Wyler. Topological Gravity in (1+1)-Dimensions. *Nucl.Phys.*, B340:595–616, 1990.
- [30] Alain Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, INC., 1994.
- [31] Clisthenis P. Constantinidis, Ruan Couto, Ivan Morales, and Olivier Piguet. Loop Quantization of the Supersymmetric Two-Dimensional BF Model. *arXiv: gr-qc/1203.1934*, a ser publicado em *Classical and Quantum Gravity*, 2012.
- [32] Clisthenis P. Constantinidis, Jose Andre Lourenco, Ivan Morales, Olivier Piguet, and Alex Rios. Canonical Analysis of the Jackiw-Teitelboim Model in the Temporal Gauge. I. The Classical Theory. *Class.Quant.Grav.*, 25:125003, 2008.
- [33] Clisthenis P. Constantinidis, A. Perez, and Olivier Piguet. Quantization of the Jackiw-Teitelboim Model. *Phys.Rev.*, D79:084007, 2009.
- [34] J.F. Cornwell. *Group Theory In Physics. VOL. 3: Supersymmetries and Infinite Dimensional Algebras*. Academic Press, 1989.
- [35] J.F. Cornwell. *Group Theory in Physics: An Introduction*, volume 1. Academic Press, 1997.
- [36] Bryce S. DeWitt. Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory. *Phys.Rev.*, 160:1113–1148, 1967.
- [37] Bryce S. DeWitt. *Supermanifolds*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [38] P .A. M. Dirac. The Hamiltonian Form of Field Dynamics. *Can.J.Math.*, 3:1–23, 1951.

- [39] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.
- [40] P. A.M. Dirac. Generalized Hamiltonian Dynamics. *Can.J.Math.*, 2:129–148, 1950.
- [41] B. Dittrich. Partial and Complete Observables for Hamiltonian Constrained Systems. *Gen.Rel.Grav.*, 39:1891–1927, 2007.
- [42] (Ed.) Duplij, Steven, (Ed.) Siegel, Warren, and (Ed.) Bagger, Jonathan. *Concise Encyclopedia of Supersymmetry: And Noncommutative Structures in Mathematics and Physics*. Klumer Academic Publisher, 2004.
- [43] L. Frappat, A. Sciarrino, and P. Sorba. *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras*. Academic Press, 2000.
- [44] T. Fukuyama and K. Kamimura. Gauge Theory of Two-Dimensional Gravity. *Phys.Lett.*, B160:259, 1985.
- [45] T. Fukuyama and K. Kamimura. Quantum Theory of two-dimensional Gravity. *Phys.Rev.*, D35:3768, 1987.
- [46] D.M. Gitman and I.V. Tyutin. *Quantization of Fields With Constraints*, volume 288. Springer-Verlag, 1990.
- [47] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1992.
- [48] J.W.B. Hughes. Representations of  $OSP(2,1)$  and the Metaplectic Representation. *J.Math.Phys.*, 22:245–250, 1981.
- [49] K. Isler and C.A. Trugenberger. A Gauge Theory of Two-Dimensional Quantum Gravity. *Phys.Rev.Lett.*, 63:834, 1989.
- [50] R. Jackiw. Liouville Field Theory: A Two-Dimensional Model for Gravity? In Bristol Adam Hilgar, editor, *Quantum Theory of Gravity: Essays in Honor of the 60th Birthday of Bryce S. DeWitt*, pages 403–420. Christensen, S.M. ( Ed.), 1984.
- [51] R. Jackiw. Lower Dimensional Gravity. *Nucl.Phys.*, B252:343–356, 1985.
- [52] R. Jackiw. Two Lectures on Two-Dimensional Gravity. *arXiv gr-qc/9511048*, 1995.

- [53] Ted Jacobson and Lee Smolin. Nonperturbative Quantum Geometries. *Nucl.Phys.*, B299:295, 1988.
- [54] R. Leitgeb, M. Schweda, and H. Zerrouki. Finiteness of 2-D Topological BF Theory with Matter Coupling. *Nucl.Phys.*, B542:425, 1999.
- [55] J. Lewandowski, E.T. Newman, and C. Rovelli. Variations of the Parallel Propagator and Holonomy Operator and the Gauss Law Constraint. *J.Math.Phys.*, 34:4646–4654, 1993.
- [56] E.R. Livine, A. Perez, and C. Rovelli. 2D Manifold-Independent Spinfoam Theory. *Class.Quant.Grav.*, 20:4425–4445, 2003.
- [57] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, second edition, 2003.
- [58] Roger Penrose. The Central Programme of Twistor Theory. *Chaos Solitons Fractals*, 10:581–611, 1999.
- [59] O. Piguet and S.P. Sorella. *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies*, volume M28. Springer-Verlag, 1995.
- [60] Alice Rogers. A Global Theory of Supermanifolds. *J.Math.Phys.*, 21:1352, 1980.
- [61] Alice Rogers. *Supermanifolds: Theory and Applications*. World Scientific Publishing, 2007.
- [62] C. Rovelli. Holonomies in Quantum Gravity. In John R. Porter Allen I. Janis, editor, *Recent Advances in General Relativity: Essays in honor of Ted Newmann*, volume 4, pages 84–102. The Center for Einstein Estudios, Boston University, 1990.
- [63] C. Rovelli. What is Observable in Classical and Quantum Gravity? *Class.Quant.Grav.*, 8:297–316, 1991.
- [64] C. Rovelli. Partial Observables. *Phys.Rev.*, D65:124013, 2002.
- [65] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2004.
- [66] C. Rovelli. Loop Quantum Gravity. *Living Rev.Rel.*, 11:5, 2008.
- [67] C. Rovelli and L. Smolin. Knot Theory and Quantum Gravity. *Phys.Rev.Lett.*, 61:1155, 1988.
- [68] C. Rovelli and L. Smolin. Loop Space Representation of Quantum General Relativity. *Nucl.Phys.*, B331:80, 1990.



- [69] C. Rovelli and L. Smolin. Discreteness of area and volume in quantum Gravity. *Nucl.Phys.*, B442:593–622, 1995.
- [70] M. Scheunert, W. Nahm, and V. Rittenberg. Irreducible Representations of the  $OSP(2,1)$  and  $SPL(2,1)$  Graded Lie Algebras. *J.Math.Phys.*, 18:155, 1977.
- [71] C. Teitelboim. Gravitation and Hamiltonian Structure in Two Space-Time Dimensions. *Phys.Lett.*, B126:41–45, 1983.
- [72] C. Teitelboim. The Hamiltonian Structure of Two-Dimensional Space-Time and its Relation with Conformal Anomaly. In Bristol Adam Hilger Ltd, editor, *Quantum Theory of Gravity: Essays in Honor of the 60th Birthday of Bryce S. DeWitt*, pages 327–344. Christensen, S.m. ( Ed.), 1984.
- [73] T. Thiemann. QSD 5: Quantum Gravity as the Natural Regulator of Matter Quantum Field Theories. *Class.Quant.Grav.*, 15:1281–1314, 1998.
- [74] T. Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2001.
- [75] R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [76] Morten Weis. *Topological Aspects of Quantum Gravity*. PhD thesis, Niels Bohr Institute University of Copenhagen, 1997. Ph.D. Thesis.
- [77] D. Williams and JF Cornwell. The Haar Integral for Lie Supergroups. *J.Math.Phys.*, 25:2922, 1984.