

**Os efeitos das condições de contorno na
eletrodinâmica escalar e o efeito Casimir para N
regiões de largura finita e diferentes potenciais**

Bernardo Brunoro Dilem

Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal do Espírito Santo

2012

Bernardo Brunoro Dilem

Os efeitos das condições de contorno na eletrodinâmica escalar e o efeito Casimir para N regiões de largura finita e diferentes potenciais

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Ciências Físicas do Centro de Ciências exa-
tasda Universidade Federal do Espírito Santo,
como requisito parcial para obtenção do Grau de
Doutor em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr Marcos Tadeu D'Azeredo
Orlando.

Co-orientador: Prof. Dr José Alexandre Nogueira.

VITÓRIA

2012

Agradecimentos

O autor agradece:

- À minha esposa e companheira Letícia, por todo amor e carinho que tem me dedicado nesses anos em que estamos juntos, por ter escolhido estar sempre ao meu lado (mesmo quando este não parecia ser o caminho mais fácil a seguir), por ter compartilhado e vivido comigo todas as nossas conquistas, frustrações e emoções dos últimos anos, por ter aparecido em minha vida, por me fazer seguir em frente, por ser justamente a pessoa que é.
- Agradeço aos meus pais, Adilson e Tânia, por sempre terem feito de tudo por mim e meus irmãos, por nos terem dado a oportunidade de uma boa educação (sem a qual provavelmente não chegaríamos até aqui), pelo apoio e incentivo que sempre nos deram em nossas decisões mais importantes, pelo companheirismo de todas as horas, pelas conversas, conselhos e orientações que muitas vezes me fizeram refletir seriamente e até mesmo reconsiderar questões que antes me pareciam muito esclarecidas, pelo papel central e fundamental que exercem em minha vida e por todo exemplo de honestidade, caráter e simplicidade que tento sempre seguir para me tornar uma pessoa melhor.
- Aos meus irmãos Matheus e Caio, dois verdadeiros amigos de quem, assim como de meus pais, senti muita falta no tempo em que morei em Viçosa. Sei agora o quanto é importante ter vocês dois sempre por perto. Mesmo que nem sempre reservemos muito tempo para dar atenção uns aos outros, vejo em nosso jeito espontâneo e nossas, quase sempre, bem humoradas conversas que estamos cada

vez mais unidos e que, mesmo sem perceber, procuramos estar cada vez mais. Obrigado por vocês existirem.

- A toda minha família Brunoro e Dilem, onde sei que mais do que parentes possuo verdadeiros amigos, pessoas com quem sempre pude e sempre poderei contar.
- Aos meus velhos amigos de Cachoeiro de Itapemirim, que mesmo com a distância e o passar do tempo continuaram a ser meus grandes amigos de sempre, com quem gosto e procuro estar junto sempre que possível. Aos amigos que fiz em Viçosa, nos quatro anos em que lá morei, aos novos amigos que fiz em Vitória, nos quatro anos em que aqui morei, e aos “novíssimos” amigos que fiz e continuo a fazer em Venda Nova do imigrante, onde moro atualmente. Muitas destas amizades são ainda recentes, mas tenho certeza de que algumas durarão para o resto de minha vida.
- Ao professor e co-orientador José Alexandre Nogueira, que foi quem de fato me “apresentou” ao efeito Casimir, por toda atenção e incentivo a mim concedidos durante a elaboração do presente trabalho. Por se mostrar sempre disponível e interessado a discutir quaisquer aspectos, desde os mais simples aos mais sofisticados, que me despertassem alguma dúvida ou incerteza com relação aos resultados obtidos e pelas muitas sugestões, observações e correções que, sem dúvida alguma, em muito contribuíram para qualidade desta tese.
- Ao professor e orientador Marcos Tadeu D’Azeredo Orlando, que viu a possibilidade de aplicarmos o trabalho que eu já vinha desenvolvendo (me incentivando a desenvolvê-lo ainda mais) e por me aceitar como seu orientando.
- Aos professores João Francisco Justo Filho, Sergio Vitorino de Borba Gonçalves, Walter Jaimes Salcedo e Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl, por terem aceito o convite para participarem da banca em minha defesa e atenciosamente lido minha

tese, me incentivando a seguir em frente em meus trabalhos e me dando valiosas sugestões.

- À CAPES, pelo apoio financeiro a este trabalho.

Resumo

O presente trabalho pode ser dividido em duas partes principais: na primeira parte, capítulo 3, analisamos sob quais condições a imposição das condições de contorno de Neumann homogêneas sobre duas superfícies planas, infinitas e paralelas, separadas por uma distância a , poderiam inibir a quebra espontânea de simetria no mecanismo de Coleman Weinberg para eletrodinâmica escalar. No trabalho da referência [1], tal objetivo é atingido através de uma expansão do potencial efetivo em potências de $a\nu$, onde ν^2 representa os termos quadráticos nos campos, a partir da qual os pontos críticos $\langle\phi_c\rangle$ do V_{ef} (máximos e mínimos) são encontrados. Tal abordagem é tediosa e complexa, além de requerer uma cuidadosa análise. Neste trabalho, sem recorrer a qualquer expansão do potencial efetivo, nós mostramos de uma maneira muito simples que, se $a \approx e^2 M_\phi^{-1}$ (onde e é a carga do campo escalar e M_ϕ sua massa gerada pelo mecanismo de Coleman-Weinberg), $\langle\phi_c\rangle = 0$ é ponto de mínimo do V_{ef} e que, portanto, a quebra espontânea de simetria é inibida.

Na segunda parte, capítulo 6, desenvolvemos uma proposta para um tratamento mais geral do efeito Casimir. Como protótipo, usamos o campo escalar real, em $(n+1)$ dimensões, interagindo com N regiões de diferentes potenciais – modelados por funções degraus. Como resultado, obtivemos expressões que nos permitem calcular, através do tensor energia-momento, a energia e a força de Casimir para qualquer número de barreiras ou regiões de diferentes potenciais constantes, sendo portanto aplicável a inúmeras situações específicas. Nos capítulos 7 e 8 exploramos algumas possibilidades, alternando entre a proposta original de diferentes regiões finitas e o caso limite de barreiras modeladas por funções delta de Dirac. Mostramos também que, no limite de acoplamento forte, nossos resultados retornam ao famoso resultado de Lüscher et al., como já era esperado.

Abstract

The present work can be divided into two main parts: the former, Chapter 3, we have investigated in what conditions the imposition of homogeneous Neumann boundary conditions on two infinite parallel plane surfaces separated by a distance a , could inhibit the spontaneous symmetry breaking in Coleman-Weinberg mechanism for the scalar electrodynamics. In the work of reference [1], this objective has been achieved through an expansion of the effective potential in powers of $a\nu$, where ν^2 represents the quadratic terms in the scalar field, from which the critical points $\langle\phi_c\rangle$ of V_{ef} (maximum and minimum) were found. That approach is tedious and complex, and require careful analyse. In this work, without resorting to any expansion of the effective potential, we have showed in a very simple way that, if $a \approx e^2 M_\phi^{-1}$ (where e is the charge of the scalar field and M_ϕ its mass generated by Coleman-Weinberg mechanism), $\langle\phi_c\rangle = 0$ is the minimum point of V_{ef} and that, therefore, the spontaneous symmetry breaking is inhibited.

In the second part, Chapter 6, we have developed a more general proposal to deal with the Casimir effect. As a prototype we have used the real scalar field interacting with N regions of different potentials – represented by step functions – in $(n+1)$ dimensions. As result we have obtained expressions which permit us to calculate, through the momentum-energy tensor, the energy and the force of Casimir for any number of barriers or regions of different constant potentials, consequently it is applicable to very different cases. In the Chapter 7 and 8 we have investigated some possibilities, alternating our original propose of different finite regions and the extreme case of barriers represented by delta Dirac functions. We have also shown that, in the limit of strong coupling, our results recover the famous Lücher et al. result, as it was expected.

Contribuições científicas

O presente trabalho resultou nas seguintes contribuições científicas:

– F. N. Fagundes, T. L. Antonacci Oakes, B. B. Dilem and J. A. Nogueira

On the effects of the Neumann boundary conditions in the Coleman-Weinberg mechanism

Int. J. Mod. Phys. A **25**(7), 1389-1403 (2010).

– F. N. Fagundes, R. O. Francisco, B. B. Dilem and J. A. Nogueira

Neumann boundary conditions inhibiting SSB in Coleman-Weinberg mechanism

Commun. Theor. Phys. **54**(6), 1071-1074 (2010).

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Contribuições científicas	ix
1 Introdução	1
2 Efeito Casimir	9
2.1 Introdução	10
2.2 O formalismo lagrangiano para o campo escalar	11
2.3 Segunda quantização	17
2.4 O oscilador harmônico simples quantizado e o efeito Casimir	23
3 Condições de contorno de Neumann inibindo a quebra espontânea de simetria no mecanismo de Coleman-Weinberg	31
3.1 Introdução	32
3.2 O potencial efetivo para a eletrodinâmica escalar	34
3.3 A quebra espontânea de simetria e o mecanismo de Coleman-Weinberg	38
3.4 Condições de contorno de Neumann	41
4 O efeito Casimir por funções de Green	47
4.1 Introdução	48
4.2 O tensor energia-momento e a função de Green	49
4.3 Efeito Casimir a partir das funções de Green	53

4.4	Tensor energia-momento	59
5	Particularidades existentes para $(n+1)$ dimensões e para campos massivos	61
5.1	Introdução	62
5.2	O campo escalar real em $(n+1)$ dimensões	62
5.3	O campo escalar real massivo	67
6	Efeito Casimir para N potenciais do tipo barreira em $n+1$ dimensões	71
6.1	Introdução	72
6.2	Determinação dos coeficientes das funções de Green reduzidas	74
6.3	Determinação da energia de Casimir	79
6.4	Força de Casimir	83
6.5	Determinação do tensor energia-momento	86
6.6	A função de Green reduzida revisitada	88
7	Limites em que as barreiras são descritas por funções delta de Dirac	93
7.1	Introdução	94
7.2	Limite em que as regiões tendem a N barreiras do tipo delta de Dirac	94
7.3	Força de Casimir entre duas barreiras do tipo delta de Dirac	97
7.4	Mínimos de energia	98
7.5	Limite de acoplamento forte	100
8	Modos transversais magnéticos (TM)	103
8.1	Introdução	104
8.2	O campo escalar real em $(n+1)$ dimensões submetido a condições de contorno de Neumann	106
8.3	Modos TM para N barreiras do tipo delta de Dirac	108
8.4	Modos TM para N potenciais do tipo barreira	112

	0
9 Conclusões	116
9.1 Conclusões	117
Referências bibliográficas	119

Capítulo 1

Introdução

A teoria quântica de campos, criada por Dirac, Fermi, Heisenberg, Fock e outros, é a mais bem sucedida teoria a unir em uma única estrutura conceitual a mecânica quântica e a teoria da relatividade restrita. Nela as partículas são interpretadas como as excitações dos campos. A quantização de uma teoria de campos implica em transformar os campos em operadores que atuam sobre vetores que pertencem a um particular espaço vetorial complexo, chamado espaço de Fock ou de número de ocupação. Esse espaço vetorial é um produto direto dos espaços de Hilbert associados a osciladores harmônicos independentes, onde as excitações elementares desses osciladores são associadas a partículas. Essa teoria quântica mostra que o *vácuo*, ou o estado de mínima energia, não é um espaço absolutamente vazio, mas sim um espaço no qual pequenas e rápidas flutuações dos campos (oscilações) ocorrem a todo momento e em toda parte. Essas são também conhecidas como *flutuações de ponto-zero*. As flutuações de ponto-zero são interpretadas como muitas partículas virtuais que, por sua vez, estão em constante criação e aniquilação, umas com as outras, de uma maneira muito rápida. Assim como em diversas outras áreas da física, as simetrias também exercem um papel fundamental na teoria quântica de campos. Propriedades de simetria são responsáveis pela conservação de grandezas de extrema importância, tais como energia e momento, e também pelo surgimento das interações fundamentais da matéria. As partículas que representam a matéria (excitações do campo de matéria) interagem via campos de interação, sendo estes obtidos ao assumirmos que os campos de matéria são invariantes por transformações de gauge locais. Porém, tais transformações proibem que esses campos de interação sejam massivos, o que, a princípio, contradiz o conhecido resultado experimental de que as partículas mediadoras da interação fraca são massivas. A resolução desta aparente contradição surge quando passamos a considerar um importante fenômeno: a quebra espontânea de simetria.

Os primeiros trabalhos sobre a quebra espontânea de simetria foram realizados por Nambu e Goldstone em matéria condensada [2]. Posteriormente, as ideias da quebra espontânea de simetria foram aplicadas à física de partícula como um mecanismo para geração de massa [3]. As ideias da quebra espontânea de simetria se tornaram cruciais com os trabalhos t’Hooft que mostram que as teoria de “gauge” são renormalizáveis [4]. Essencialmente a quebra espontânea de simetria se caracteriza pela presença de um conjunto de estados de vácuo degenerados que mantém a invariância da teoria, entretanto a “escolha de um determinado estado de vácuo sob o qual é construída a teoria quebra a simetria. Sendo um processo interno no qual nenhum agente externo age, ela é dita espontânea. No Modelo Padrão, da física de partículas, a quebra espontânea de simetria é induzida por um potencial de Higgs através de um termo de massa imaginária inserida à mão [5]. Em uma abordagem alternativa de Coleman and Weinberg [6], a quebra espontânea de simetria é induzida pelas correções radiativas de “one-loop”, oriundas das interações e autointerações das flutuações de ponto zero dos campos. Na primeira parte deste trabalho, mostraremos que as mesmas flutuações quânticas do vácuo, que permitem a quebra espontânea de simetria pelo modelo de Coleman-Weinberg, também podem ser responsáveis por sua inibição caso os campos, neste caso os da eletrodinâmica escalar, sejam submetidos a condições de contorno de Neuman nas fronteiras de uma região suficientemente pequena do espaço. De uma forma geral, efeitos provocados por flutuações quânticas do vácuo quando impomos restrições ao campo são conhecidos como efeito Casimir.

Previsto no ano de 1948 pelo físico holandês Hendrik Brugt Gerhard Casimir [7], o efeito Casimir¹, que hoje leva o nome de seu descobridor, foi uma das primeiras implicações descobertas de um dos efeitos conseqüentes da teoria quântica de campos, as flutuações do vácuo. Casimir estava a princípio estudando o efeito das correções de retardamento (devido à velocidade finita de propagação das interações eletromagnéticas)

¹O leitor interessado encontrará revisões em português em [8] e em inglês em [9].

da força de Van der Waals quando, ao comentar com Niels Bohr a respeito da simplicidade dos resultados que obtivera em parceria com D. Polder [10], foi lhe sugerido levar em consideração a energia de ponto zero do vácuo, que é a energia decorrente das flutuações citadas anteriormente. Acatando a sugestão dada por Bohr, Casimir foi capaz de mostrar que ao colocarmos paralelamente duas placas metálicas planas, perfeitamente condutoras e eletricamente neutras, uma força atrativa surge entre elas, sendo essa força, que hoje é conhecida como força de Casimir, inversamente proporcional à quarta potência da distância entre as placas. Em seu trabalho original Casimir previu que, devido a flutuações quânticas do campo eletromagnético, as duas placas metálicas se atrairiam com uma força dada por

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} A, \quad (1.1)$$

onde A é a área das placas e a a distância entre elas. Para placas de 1cm^2 de área e separadas de $1\mu\text{m}$, a força de atração, por unidade de área, entre as placas é de $0,013\text{ dyn/cm}^2$ ($1,3\text{ mPa}$). Tais resultados concordavam com os anteriormente obtidos em parceria com Polder, porém o mais notável em seu novo trabalho não era o fato de que duas placas condutoras neutras pudessem interagir – a interação entre objetos neutros já era um fenômeno conhecido entre os que estudavam as forças de Van der Waals dispersivas – mas sim o fato de que essa interação, em particular, poderia ser atribuída unicamente às flutuações quânticas do vácuo.

No ano de 1958, o também holandês M. Sparnaay realizou o que hoje é considerado por muitos como a primeira verificação experimental do efeito Casimir [11]. Embora o próprio Sparnaay tenha se mantido cauteloso em relação aos resultados que obteve, dizendo apenas que “não eram inconsistentes com a teoria”, a verdade é que desde então tem sido crescente o interesse da comunidade científica pelo fenômeno. Por um

lado, sua generalização para outros tipos de interação² e também diferentes geometrias³ tem se mostrado promissora em diversos modelos de sistemas físicos, dentre os quais podemos citar o modelo de sacola de hádrons na cromodinâmica quântica. Por outro, o surgimento de novos aparatos tecnológicos, e conseqüente aprimoramento das técnicas experimentais, tem nos possibilitado um constante refinamento na precisão das medidas do efeito, de modo que cálculos considerando situações cada vez mais realistas passaram a ser necessários. De fato, experimentos mais recentes, como os realizados por Lamoreaux em 1997 [12], usando o pêndulo de torsão, e também de Mohideen e Roy em 1998 [13], usando o microscópio de força atômica, confirmaram com alto grau de precisão o efeito Casimir. Diversos outros experimentos [14] foram realizados, afastando qualquer sombra de dúvida que pudesse existir com relação a veracidade do efeito Casimir.

O efeito Casimir normalmente se manifesta em pequenas escalas, para distâncias da ordem de micrômetros, sendo imperceptível em nosso cotidiano. Porém, com a constante evolução dos micro e nanodispositivos, as flutuações do vácuo tem se tornado relevantes, exigindo previsões teóricas cada vez mais precisas. Em uma primeira abordagem, podemos trocar as placas paralelas por fronteiras localizadas, onde o campo é submetido a condições de contorno idealizadas. Tais condições, em geral, restringem os possíveis valores assumidos pelos momentos do campo a um conjunto discreto. Como consequência, temos que as possíveis frequências de vibração são também reduzidas, alterando a energia do sistema. Embora esta primeira abordagem mantenha as características mais relevantes do fenômeno, ela é ainda tanto quanto idealizada, uma vez que ignora completamente aspectos práticos que podem exercer considerável influência

²Embora, em seu artigo original, Casimir tenha considerado apenas as flutuações do campo eletromagnético, qualquer campo quantizado exibe tais flutuações.

³Sabemos atualmente que o efeito Casimir se manifesta sempre que confinamos um determinado campo a uma região limitada do espaço, qualquer que seja sua geometria

– tais como efeitos de temperatura finita, permeabilidade, rugosidade e espessura das placas, etc.

O estudo dos efeitos das flutuações do vácuo, tais como a força e a energia de Casimir, em meios materiais realistas foi inicialmente feito por Lifshitz em 1956 [15]. Ele propôs uma teoria macroscópica para uma placa semi-infinita formada por um material dielétrico dependente da frequência $\epsilon(\omega)$. De acordo com essa teoria as oscilações do vácuo são modeladas pelas flutuações do campo eletromagnético propagando-se dentro do material dielétrico descrito por uma permissividade dielétrica dependente da frequência. A teoria de Lifshitz nos permite calcular a força de Casimir considerando efeitos de temperatura finita (diferente de zero), bem como de condutividade finita.

Para tratar o efeito Casimir de forma mais realista devemos considerar a interação das flutuações do campo ϕ com a matéria das fronteiras que modificam o vácuo do espaço livre ao invés de introduzir condições de contorno idealizadas. Para este fim introduzimos na teoria um potencial de interação dado por

$$\frac{1}{2}\sigma(x)\phi^2(x),$$

onde $\sigma(x)$ representa o campo do material da fronteira. Escolhas adequadas para o campo $\sigma(x)$ permitem modelar as fronteiras. Assim, uma primeira alternativa mais realista é considerarmos as fronteiras como planos em (3+1)-dim ou pontos em (1+1)-dim, sendo descritas então por funções delta de Dirac. Dizemos que nesses casos estamos no limite nítido. Tal alternativa já é bem conhecida, tendo seus resultados sido discutidos amplamente em diversas publicações encontradas na literatura [16, 17]. Na referência [18], demos um passo a frente, descrevendo as fronteiras por funções degraus, de modo a considerarmos o efeito de sua espessura finita. Naquela ocasião, encontramos que a força de Casimir entre duas barreiras decresce quando aumentamos suas larguras. Para chegarmos a este resultado, empregamos o método do tensor energia-momento,

calculado através das funções de Green – sendo estas obtidas pelo procedimento desenvolvido em [17]. Neste trabalho, usaremos o mesmo método para generalizar o resultado encontrado naquela ocasião. De fato, encontraremos as componentes do tensor energia-momento, que por sua vez nos permite encontrar expressões para a energia e a força de Casimir, válidas para qualquer número de barreiras ou regiões finitas.

O trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 faremos uma breve revisão do formalismo lagrangiano, para em seguida quantizarmos o campo escalar (processo conhecido como segunda quantização). Mostraremos também como o efeito Casimir surge naturalmente ao restringirmos o campo quantizado a uma região limitada do espaço e, por fim, discutiremos em linhas gerais o processo de renormalização, que é de fundamental importância no assunto. No capítulo 3 mostraremos que, no contexto da eletrodinâmica escalar, restrições ao campo possuem consequências que vão além do efeito Casimir tradicional, podendo inclusive inibir a quebra espontânea de simetria no mecanismo de Coleman-Weinberg para esta teoria. Faremos isso mostrando que $\langle \phi \rangle = 0$ é o único ponto de mínimo do potencial efetivo, cuja renormalização será feita pelo método da função zeta generalizada. Portanto, o vácuo é não degenerado e a quebra espontânea de simetria não ocorre. No capítulo 4, apresentaremos o método de cálculo da força de Casimir pelo tensor energia-momento via funções de Green, método este que será utilizado em todo restante do trabalho. Como exemplo calcularemos, em (1+1) dimensões, a força e a densidade de Casimir e também as componentes do tensor energia-momento quando submetemos o campo a condições de contorno homogêneas de Dirichlet em suas fronteiras. No capítulo 5, discutiremos brevemente o aparecimento de termos espúrios quando trabalhamos com campos massivos ou em mais de uma dimensão espacial. Finalmente, no capítulo 6, desenvolveremos o método de cálculo cuja solução nos permite considerar o efeito Casimir, sobre um campo escalar real, interagindo com qualquer número de barreiras ou regiões de larguras finitas e em qualquer número de dimensões espaciais. Tal solução é bem geral e esperamos que seja

de grande utilidade em aplicações diversas, onde o efeito Casimir se faça presente. No capítulo 7, analisaremos nossa solução no limite em que as regiões se tornam N barreiras do tipo delta de Dirac, aproveitando a ocasião para discutir a possibilidade da existência de mínimos de energia – que, por sua vez, podem ser introduzidos devido a uma ambiguidade na definição do potencial. No capítulo 8 voltaremos nossa atenção para os modos TM, e percorreremos o caminho inverso daquele seguido no capítulo 7 para encontrarmos, partindo do caso delta de Dirac, uma expressão válida para regiões de largura finita. Por fim, no capítulo 9, apresentaremos as conclusões e expectativas geradas pelo presente trabalho.

Capítulo 2

Efeito Casimir

2.1 Introdução

Em teoria quântica de campos, um campo livre, que é uma quantidade com infinitos graus de liberdade, é tratado como uma coleção de infinitos osciladores harmônicos quânticos desacoplados, cada um com uma frequência própria de oscilação. As excitações do campo são então interpretadas como partículas a ele associadas, enquanto o estado fundamental (de mais baixa energia) é interpretado como sendo o vácuo. Além disso, ao contrário do que acontece nas teorias clássicas, e mesmo na mecânica quântica de Schrödinger, o vácuo exerce na teoria quântica de campos um papel fundamental, protagonizando diversos fenômenos por ela descritos, dentre os quais podemos destacar o efeito Casimir. Fundamentalmente, o efeito Casimir surge ao confinarmos determinado campo em uma região limitada do espaço – de modo que apenas determinados modos de vibração lhe são permitidos – e, em sua formulação original, descreve a força de atração entre duas placas metálicas, planas, perfeitamente condutoras e descarregadas dispostas paralelamente a uma pequena distância a uma da outra.

Neste capítulo temos dois objetivos principais: mostrar como é feita a quantização do campo escalar¹ e mostrar como dela decorre naturalmente o efeito Casimir. No entanto, para cumprirmos nosso primeiro objetivo, será necessário antes uma breve revisão do formalismo lagrangiano na teoria de campos. Isto é feito na seção 2.2, onde obteremos a equação de movimento de Euler-Lagrange, discutiremos a conservação da energia e do momento linear, e definiremos quantidades que nos serão necessárias em discussões posteriores.

Na seção 2.3 quantizaremos o campo escalar ϕ (tal que ϕ é solução real da equação homogênea de Klein-Gordon) e seu momento conjugado, promovendo-os a operadores e exigindo que estes operadores satisfaçam as relações de comutação de Heisenberg para tempos iguais. Ainda na seção 2.3, apresentaremos pequenos argumentos, sem nos preocuparmos muito com os detalhes técnicos, que nos permitam compreender melhor a

¹Ao leitor interessado indicamos a referência [19]

interpretação das excitações do campo como partículas a ele associadas. Mostraremos também que a energia do vácuo não só é diferente de zero, mas também é divergente. Finalmente, na seção 2.4, mostraremos como o confinamento do campo ϕ em uma região limitada do espaço altera o processo de quantização, nos levando no final a resultados semelhantes, porém não iguais, aos encontrados no espaço livre. Falaremos brevemente sobre a semelhança do sistema com o oscilador harmônico e, encerrando a seção, mostraremos finalmente como o efeito Casimir surge naturalmente em consequência do confinamento de ϕ .

Neste capítulo, e também no restante do presente trabalho, estaremos usando unidades naturais de medida, isto é, $\hbar = c = 1$. A restauração dos resultados obtidos para outro sistema de medidas, como o Sistema Internacional por exemplo, pode ser facilmente obtida ao multiplicarmos, ou dividirmos, as grandezas desejadas por potências de \hbar e c , de modo a tornar suas dimensões compatíveis com a do sistema escolhido.

2.2 O formalismo lagrangiano para o campo escalar

No formalismo lagrangiano, consideramos que toda a informação sobre a dinâmica de um sistema está contida em sua lagrangiana L . Define-se então uma grandeza denominada ação, da qual extraímos as equações de movimento ao exigirmos, por meio de um princípio variacional, que esta seja extrema. Tal princípio é conhecido como princípio da mínima ação, e será estabelecido mais a frente. A ação de um dado sistema físico é definida a partir de sua lagrangina por

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt L. \quad (2.1)$$

Considerando que os graus de liberdade do sistema sejam dados por ϕ , $\partial_\mu \phi$ e x^μ , podemos escrever, de um modo geral,

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu), \quad (2.2)$$

onde temos considerado \mathcal{L} , a densidade lagrangiana, explicitamente dependente de x^μ , de modo a cobrirmos os casos em que o campo interage com alguma fonte externa. Desta forma, temos que

$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu), \quad (2.3)$$

onde a integral acima é tomada por todo o hipervolume de uma dada região R do espaço-tempo.

Vamos agora, introduzir as seguintes transformações:

$$\begin{cases} x^\mu & \rightarrow & x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi(x) & \rightarrow & \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \end{cases}, \quad (2.4)$$

tal que δx^μ e $\delta\phi$ se anulam na hipersuperfície ∂R que limita a região R .

Ao introduzirmos tais transformações, temos que a variação total do campo é dada por

$$\Delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \delta\phi(x) + (\partial_\mu \phi(x))\delta x^\mu, \quad (2.5)$$

onde temos considerado apenas os termos de primeira ordem.

Além disso, a variação da ação é dada por

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) - \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu), \quad (2.6)$$

onde o elemento de volume do espaço-tempo d^4x' (obtido através do jacobiano da transformação $x \rightarrow x'$) é dado por

$$d^4x' = J \left(\frac{x'}{x} \right) d^4x = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4x. \quad (2.7)$$

Desta forma, podemos reescrever a equação (2.6) como

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x (\delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu). \quad (2.8)$$

Pela regra da cadeia temos que

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \quad (2.9)$$

e, além disso, podemos considerar

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi). \quad (2.10)$$

Sendo assim, a variação da ação fica da seguinte forma:

$$\delta\mathcal{S} = \int_R d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu) \right], \quad (2.11)$$

onde podemos usar a identidade

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \delta\phi \quad (2.12)$$

para escrevê-la como

$$\delta\mathcal{S} = \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \right\} \delta\phi + \int_R d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \right]. \quad (2.13)$$

Devemos notar que o último termo da equação (2.13) é a integral de uma divergência total sobre R e, sendo assim, pode ser convertida, através do teorema do divergente em quatro dimensões, para uma integral de superfície em ∂R , nos fornecendo

$$\delta\mathcal{S} = \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \right\} \delta\phi + \int_{\partial R} d\sigma_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \right], \quad (2.14)$$

onde $d\sigma_\mu$ é o elemento de hipersuperfície de ∂R .

Uma vez que $\delta\phi = \delta x^\mu = 0$ em ∂R , temos que a equação (2.14) acima, se reduz simplesmente a

$$\delta\mathcal{S} = \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \right\} \delta\phi. \quad (2.15)$$

Para prosseguirmos em nosso desenvolvimento, é agora necessário estabelecermos o princípio da mínima ação, que diz que a ação de um determinado sistema deve ser estacionária, isto é, $\delta\mathcal{S} = 0$, quando nela consideramos as transformações em x^μ e ϕ dadas por (2.4). Sendo assim, pela equação (2.15), vemos que para o princípio da mínima ação ser atendido, uma vez que $\delta\phi$ é arbitrário e mutuamente independente, devemos ter

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] = 0. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) acima é a equação de movimento de Euler-Lagrange para o campo ϕ e exerce na teoria de campos um papel análogo ao da equação de Newton na mecânica clássica de partículas. No restante do presente trabalho, toda equação de

movimento será extraída de uma determinada densidade lagrangiana via equação de Euler-Lagrange. Como exemplo, temos que o campo escalar livre de massa m pode ser descrito pela seguinte lagrangiana²:

$$\mathcal{L}_{liv}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (2.17)$$

de modo que ϕ satisfaz a equação homogênea de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0. \quad (2.18)$$

Além disso, a interação do campo com um determinado potencial pode ser decrita por meio de uma lagrangiana de interação \mathcal{L}_{int} , de modo que a lagrangiana total passa a ser escrita como

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{liv} + \mathcal{L}_{int}. \quad (2.19)$$

Além da equação de Euler-Lagrange, podemos derivar da lagrangiana outras grandezas de extrema importância. Dentre elas definimos o momento conjugado do campo ϕ como

$$\pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \quad (2.20)$$

e, a partir de uma transformada de Legendre, a densidade hamiltoniana como

$$\mathcal{H} = \pi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}, \quad (2.21)$$

sendo, portanto, o hamiltoniano dado por

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x [\pi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}] \\ &= \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial_0\phi(x) - \mathcal{L} \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Além disso, o formalismo lagrangiano é de grande utilidade para discutirmos as simetrias de uma teoria, isto é, determinarmos as constantes de movimento associadas às

²Daqui pra frente passaremos tratar a densidade lagrangiana simplesmente por lagrangiana

transformações sob as quais o sistema permanece invariante. Como exemplo, retomemos a equação (2.13)

$$\delta\mathcal{S} = \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \right\} \delta\phi + \int_R d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] = 0,$$

onde agora tomamos R como sendo uma região arbitrária.

Em função da equação de movimento de Euler-Lagrange (2.16), vemos que o primeiro termo da equação acima se anula. Além disso, podemos reescrever o integrando do segundo termo como

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi\delta x^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi\delta x^\nu + \mathcal{L}\delta x^\mu \right], \quad (2.23)$$

de modo que a equação (2.13), uma vez que R é arbitrário, implica em

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Delta\phi - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta x_\nu \right] = 0, \quad (2.24)$$

onde usamos a definição (2.5) de $\Delta\phi$ e $g^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Vemos que a equação (2.24) nada mais é do que a equação de continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.26)$$

para uma corrente j^μ definida como

$$j^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Delta\phi - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta x_\nu. \quad (2.27)$$

Consideremos agora a seguinte transformação infinitesimal:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu, \quad (2.28)$$

onde ε^μ é uma constante.

Uma vez que o espaço-tempo é homogêneo, o campo $\phi(x)$ deve ser invariante sob uma translação da origem, ou seja:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\phi = 0 \quad (2.29)$$

Desta forma, as equações (2.26) e (2.27) implicam em

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \varepsilon_\nu = 0. \quad (2.30)$$

Definindo o tensor energia-momento como

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.31)$$

uma vez que ε é uma constante podemos reescrever a equação (2.30) simplesmente como

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.32)$$

Integrando (2.32) por todo o espaço temos

$$\int_V d^3x \partial_0 T^{0\nu} + \int_V d^3x \partial_i T^{i\nu} = 0, \quad (2.33)$$

onde o segundo termo pode ser reescrito como uma integral de superfície, devido ao teorema do divergente, resultando em

$$\int_V d^3x \partial_0 T^{0\nu} + \int_{\partial V} d\sigma_i T^{i\nu} = 0. \quad (2.34)$$

Supondo que os campos e suas derivadas se anulam rapidamente quando $x \rightarrow \infty$, vemos que a integral de superfície acima é nula e, sendo assim, obtemos

$$\int_V d^3x \partial_0 T^{0\nu} = 0. \quad (2.35)$$

Ou, simplesmente,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V d^3x T^{0\nu} \right) = 0. \quad (2.36)$$

A equação acima nos mostra que existem quatro grandezas conservadas, uma para cada valor de ν . Comparando as equações (2.22) e (2.31), vemos que para $\nu = 0$ a grandeza conservada é simplesmente a energia e, uma vez que nos domínios de relatividade restrita a energia é a componente zero do quadri-vetor momento linear, temos que para $\nu = i \neq 0$, a grandeza conservada é a i -ésima componente do vetor momento, de modo que podemos definir:

$$\vec{P} \equiv \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \vec{\nabla} \phi \right]. \quad (2.37)$$

Ou, em notação quadridimensional,

$$P^\mu = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^\nu \phi - g^{0\nu} \mathcal{L} \right]. \quad (2.38)$$

Desta forma, podemos concluir que devido à homogeneidade do espaço-tempo o momento linear e a energia são grandezas que se conservam no tempo. Tal conclusão – e também todo desenvolvimento que nela resultou – nada mais é do que um simples exemplo do teorema de Noether, que diz que associada a cada simetria há sempre uma quantidade conservada. Além disso, vale ressaltar que há uma ambiguidade na definição do tensor energia-momento. Note que, devido à equação (2.32), pode-se acrescentar qualquer termo de divergência nula à definição (2.31) que todo o desenvolvimento posterior segue inalterado.

2.3 Segunda quantização

Consideremos novamente a lagrangiana para o campo escalar livre

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.39)$$

Deste modo, pela equação de Euler-Lagrange, vemos que o campo ϕ obedece a equação homogênea de Klein-Gordon, dada por

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0. \quad (2.40)$$

Pela equação acima, vemos claramente que

$$\phi \propto e^{\pm i k x} \quad (2.41)$$

tal que

$$k^2 = m^2, \quad (2.42)$$

onde temos abreviado a notação de modo que $(kx = k_\mu x^\mu)$ e $(k^2 = k_\mu k^\mu)$.

Desta forma, podemos escrever $\phi(x)$ como uma superposição de ondas planas dada por

$$\phi(x) = \int d\tilde{k} [a(k) e^{-ikx} + b(k) e^{ikx}], \quad (2.43)$$

onde o elemento de volume $d\tilde{k}$ do espaço de fase é dado por

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0), \quad (2.44)$$

de modo a atender à condição de energia positiva ($k^0 > 0$) e à invariância de Lorentz. Exigindo que o campo ϕ seja real, isto é, $\phi(x) = \phi^*(x)$, temos que

$$b^*(k) = a(k) \quad (2.45)$$

e portanto:

$$\phi(x) = \int d\tilde{k} [a(k)e^{-ikx} + a^*(k)e^{ikx}]. \quad (2.46)$$

Uma vez definido $\phi(x)$, vamos agora encontrar seu momento conjugado. Pela definição (2.20), e usando a lagrangiana (2.39), temos que

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi. \quad (2.47)$$

Assim, aplicando (2.46) na definição acima, temos

$$\pi(x) = -i \int d\tilde{k} k^0 [a(k)e^{-ikx} - a^*(k)e^{ikx}], \quad (2.48)$$

que como podemos ver, e já era de se esperar, também é real.

Nosso próximo passo será a quantização do campo ϕ e de seu momento conjugado π (processo conhecido como segunda quantização). Porém, antes disso, vamos relembrar como é feita a transição da mecânica clássica não relativística para a sua análoga quântica, de modo a termos uma noção de que caminho deveremos seguir.

Sabemos que a quantização da mecânica segue ao transformarmos os vetores posição (\vec{x}) e momento (\vec{p}) em operadores. Tais operadores agem sobre vetores pertencentes a um determinado espaço, denominado espaço de Hilbert, e obedecem às seguintes relações de comutação de Heisenberg:

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}, \quad (2.49)$$

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad (2.50)$$

onde fica subentendido que \vec{x} e \vec{p} se referem à posição e ao momento do sistema em um mesmo instante de tempo t .

Passando agora para a teoria do campo escalar, temos que $\phi(x)$ faz um papel análogo à $\vec{x}(t)$, enquanto que $\pi(x)$ faz um papel análogo à $\vec{p}(t)$. Desta forma, devemos transformá-los em operadores que agem sobre vetores de um determinado espaço, sendo este conhecido como espaço de Fock, e obedecem determinadas relações de comutação. Isto é feito transformando os coeficientes $a(k)$ e $a^*(k)$ nos operadores $\hat{a}(k)$ e $\hat{a}^\dagger(k)$, onde $\hat{a}^\dagger(k)$ é o adjunto hermitiano de $\hat{a}(k)$. Desta forma temos:

$$\hat{\phi}(x) = \int d\tilde{k} [\hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(k)e^{ikx}] \quad (2.51)$$

e

$$\hat{\pi}(x) = -i \int d\tilde{k} k^0 [\hat{a}(k)e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger(k)e^{ikx}], \quad (2.52)$$

que como podemos ver são hermitianos (o que já era de se esperar, uma vez que antes de serem quantizados eles eram reais).

Vamos agora, em analogia à (2.49) e (2.50), impor as seguintes relações de comutação para tempos iguais aos operadores $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$:

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.53)$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] = [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = 0, \quad (2.54)$$

onde, por comodidade, passamos a escrever os operadores sem o uso do acento circunflexo.

Pode-se mostrar que as relações (2.53) e (2.54) são satisfeitas caso os operadores $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ satisfaçam

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.55)$$

$$[a(k), a(k')] = [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0. \quad (2.56)$$

Como próximo passo, definimos o operador número:

$$N = \int d\tilde{k} a^\dagger(k)a(k), \quad (2.57)$$

que, como podemos verificar, obedece às seguintes relações de comutação:

$$[N, a^\dagger(k)] = a^\dagger(k), \quad (2.58)$$

$$[N, a(k)] = -a(k). \quad (2.59)$$

Agora, escrevendo as bases do espaço de Fock como autoestados do operador número tais que

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad (2.60)$$

temos que

$$N(a^\dagger |n\rangle) = a^\dagger(N + 1) |n\rangle = (n + 1)(a^\dagger |n\rangle), \quad (2.61)$$

ou seja, o operador a^\dagger aumenta em uma unidade o auto-valor de N . Sendo assim concluímos que

$$a^\dagger |n\rangle \propto |n + 1\rangle. \quad (2.62)$$

Do mesmo modo

$$N(a |n\rangle) = a(N - 1) |n\rangle = (n - 1)(a |n\rangle), \quad (2.63)$$

ou seja, o operador a diminui em uma unidade o auto-valor de N . Desta forma, em analogia à (2.62), concluímos que

$$a |n\rangle \propto |n - 1\rangle. \quad (2.64)$$

Exigindo que os auto-valores n sejam inteiros e não negativos, exigência esta cujo motivo ficará mais claro adiante, temos como consequência a existência de um estado fundamental $|0\rangle$, tal que

$$a |0\rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \langle 0| a^\dagger = 0 \quad (2.65)$$

e, consequentemente,

$$N |0\rangle = 0. \quad (2.66)$$

Vamos agora analisar o efeito de aplicarmos a e a^\dagger às bases $|n\rangle$ sob o ponto de vista da energia e do momento linear. Primeiro, estabelecemos os operadores associados a

essas grandezas substituindo a lagrangiana (2.39) nas definições (2.22) e (2.37), obtendo como resultado

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] \quad (2.67)$$

para o operador Hamiltoniano e

$$\vec{P} = - \int d^3x \left[\pi \vec{\nabla}\phi \right] \quad (2.68)$$

para o operador momento. Desta forma, utilizando (2.51) e (2.52), podemos escrevê-los em função de a e a^\dagger como

$$H = \frac{1}{2} \int d\tilde{k} k^0 \left[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k) \right]. \quad (2.69)$$

e

$$P^i = \frac{1}{2} \int d\tilde{k} k^i \left[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k) \right], \quad (2.70)$$

de modo que H e P^i , $i = 1, 2, 3$, correspondem às quatro componentes que formam o quadri-vetor momento, dado por

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int d\tilde{k} k^\mu \left[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k) \right]. \quad (2.71)$$

Devemos agora notar que

$$[P^\mu, N] = 0, \quad (2.72)$$

ou seja, os autovetores de N são também autovetores de P^μ , de modo que passaremos a escrever as bases do espaço de Fock como $|n(p)\rangle$, tal que

$$P^\mu |n(p)\rangle = p^\mu |n(p)\rangle. \quad (2.73)$$

Além disso, temos que

$$[P^\mu, a^\dagger(k)] = k^\mu a^\dagger(k) \quad (2.74)$$

e

$$[P^\mu, a(k)] = -k^\mu a^\dagger(k), \quad (2.75)$$

de modo que

$$P^\mu [a^\dagger(k) |n(p)\rangle] = a^\dagger(k)(P^\mu + k^\mu) |n(p)\rangle = (p^\mu + k^\mu) [a^\dagger(k) |n(p)\rangle] \quad (2.76)$$

e

$$P^\mu [a(k) |n(p)\rangle] = a(k)(P^\mu - k^\mu) |n(p)\rangle = (p^\mu - k^\mu) [a(k) |n(p)\rangle], \quad (2.77)$$

ou seja, o operador $a^\dagger(k)$ ($a(k)$) adiciona (subtrai) um quadri-vetor k^μ ao estado $|n(p)\rangle$. Estamos agora em condições de dar a devida interpretação ao operador número, sendo esta a que segue: O operador número, quando aplicado a uma determinada base $|n(p)\rangle$ do espaço de Fock, nos dá o número total de partículas (quanta) do campo ϕ presente naquele estado (daí a exigência de n ser um número inteiro não negativo). Portanto, tendo em vista a equação (2.66), interpretamos o estado fundamental $|0\rangle$ como sendo o estado de vácuo. Além disso, os operadores $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ passam a ser vistos como operadores capazes de criar e destruir, respectivamente, um quantum de momento \vec{k} e energia k^0 .

Por fim, observemos o que acontece ao tentarmos calcular a energia do vácuo:

$$E_{\text{vácuo}} = \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d\tilde{k} k^0 [\langle 0 | a^\dagger(k) a(k) | 0 \rangle + \langle 0 | a(k) a^\dagger(k) | 0 \rangle], \quad (2.78)$$

onde podemos rearranjar os termos entre colchetes da seguinte forma:

$$\langle 0 | [a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k)] | 0 \rangle = \langle 0 | [2a^\dagger(k) a(k) + [a(k), a^\dagger(k)]] | 0 \rangle. \quad (2.79)$$

Pela equação (2.65) temos que

$$\langle 0 | a^\dagger(k) a(k) | 0 \rangle = 0, \quad (2.80)$$

porém, pela relação de comutação (2.55), temos que

$$\langle 0 | [a(k), a^\dagger(k)] | 0 \rangle = (2\pi)^3 2k^0 \langle 0 | \delta^3(0) | 0 \rangle \quad (2.81)$$

Ou seja, o vácuo não somente apresenta uma energia diferente de zero, como esta energia possui um valor infinito! De fato, a existência de uma energia de ponto zero já

era algo esperado – basta lembrarmos de outros sistemas quânticos como, por exemplo, o oscilador harmônico simples, onde mesmo no estado fundamental temos uma energia diferente de zero – sendo ela uma consequência direta do princípio de incerteza de Heisenberg. Além disso, podemos argumentar que apenas diferenças de energia, e não a energia em si, possuem significado físico e extrair do operador Hamiltoniano o termo responsável pela divergência. Tal processo é conhecido como ordenamento normal de Wick e, formalmente, é obtido pela imposição de que os operadores de aniquilação (a) devem sempre ser escritos à direita dos de criação (a^\dagger). Desta forma, o Hamiltoniano renormalizado passa a ser escrito como

$$: H := \int d\tilde{k} k^0 a^\dagger(k) a(k), \quad (2.82)$$

que, como podemos ver, possui valor esperado zero para o estado de vácuo.

Acontece que em determinados casos, como quando impomos condições de contorno ao campo ϕ , o processo de renormalização descrito acima não é válido e, além disso, a energia de ponto zero passa a exercer um importante papel na dinâmica do sistema. Na próxima seção mostraremos como isso é possível e, finalmente, apresentaremos o fenômeno conhecido como efeito Casimir.

2.4 O oscilador harmônico simples quantizado e o efeito Casimir

Quando, na seção anterior, determinamos a solução geral (2.46) da equação homogênea de Klein-Gordon (2.40), não impomos qualquer restrição espacial ao campo ϕ . No entanto, quando ϕ é submetido a determinadas condições de contorno, temos que as componentes do vetor \vec{k} , em geral, se restringem a um conjunto discreto de valores. Desta forma, a solução geral (2.46) passa a ser escrita como

$$\phi(x) = \sum \left[a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right], \quad (2.83)$$

com a relação ($k^2 = m^2$) ainda válida.

Pela equação (2.47), obtém-se para o momento conjugado:

$$\pi(x) = -i \sum k^0 \left[a_k e^{-ikx} - a_k^\dagger e^{ikx} \right]. \quad (2.84)$$

Vamos agora considerar que o espaço em que estamos trabalhando está restrito ao interior de um paralelepípedo de volume $V = L^2 a$, sendo L o comprimento dos lados nas direções x e y , e a o comprimento do lado na direção z . Como sabemos, a função exponencial complexa possui periodicidade 2π , sendo ela ortogonal em um intervalo deste mesmo valor. Conseqüentemente, uma vez que a expansão de ϕ deve ser feita em termos de funções ortogonais, os valores permitidos para as componentes do vetor \vec{k} são:

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{a} n_z, \quad (2.85)$$

com $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Desta forma, é possível demonstrarmos que os operadores a_k e a_k^\dagger devem satisfazer

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \frac{\delta_{kk'}}{2V k^0} \quad (2.86)$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \quad (2.87)$$

para que as relações de comutação (2.53) e (2.54) sejam satisfeitas.

Vamos agora definir o operador número como

$$N_k = 2V k^0 a_k^\dagger a_k. \quad (2.88)$$

Desta forma, temos:

$$[N_k, a_{k'}^\dagger] = a_{k'}^\dagger \delta_{kk'} \quad (2.89)$$

e

$$[N_k, a_{k'}] = -a_{k'} \delta_{kk'}. \quad (2.90)$$

Poderíamos também, em analogia à seção anterior, definir o operador número como

$$N = 2V \sum_k k^0 (a_k^\dagger a_k), \quad (2.91)$$

de modo que as relações de comutação (2.58) e (2.59) continuariam válidas. A diferença na interpretação das duas definições é a que segue: enquanto N , quando aplicado a um determinado estado do espaço de Fock, nos dá o número total de partículas presentes naquele estado, o operador N_k nos dá o número total de partículas com energia k^0 e momento \vec{k} . Uma rápida olhada nas definições (2.88) e (2.91) nos permite constatar que

$$N = \sum_k N_k. \quad (2.92)$$

Além disso, temos que

$$[N_k, N_{k'}] = 0, \quad (2.93)$$

de modo que passaremos a escrever as bases do espaço de Fock como $|n(k)\rangle$, tal que

$$N_{k'} |n(k)\rangle = n_{k'} |n(k)\rangle \quad (2.94)$$

e

$$N |n(k)\rangle = \sum_{k'} n_{k'} |n(k)\rangle. \quad (2.95)$$

Vamos agora obter o operador Hamiltoniano em função de a_k e a_k^\dagger . Para isso substituímos (2.83) e (2.84) na equação (2.67), obtendo como resultado:

$$H = V \sum_k k^0 \left[a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right]. \quad (2.96)$$

Usando a relação de comutação (2.86) e a definição (2.88), podemos escrever:

$$H = \sum_k \left(N_k + \frac{1}{2} \right) k^0, \quad (2.97)$$

de modo que a energia de um dado estado $|n(k)\rangle$ é dada por

$$E = \langle n(k) | H |n(k)\rangle = \sum_{k'} \left(n_{k'} + \frac{1}{2} \right) k'^0. \quad (2.98)$$

Note que podemos interpretar a energia acima como sendo a soma das energias de infinitos osciladores harmônicos, cada um com uma frequência de oscilação k'^0 e no

n -ésimo estado excitado. De fato, é neste sentido que costumamos dizer que, ao quantizarmos um determinado campo, passamos a interpretá-lo como sendo uma coleção de infinitos osciladores harmônicos desacoplados, cada um com uma frequência própria de oscilação. Além disso, podemos notar a existência de uma energia de ponto zero, de modo que mesmo o estado de vácuo possui uma energia diferente de zero, sendo ela dada por

$$E = \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k'} k'^0. \quad (2.99)$$

Claramente, vemos que a expressão acima é divergente, de modo que obtemos novamente uma energia infinita para o vácuo. Mais uma vez argumentamos que apenas diferenças de energia, e não a energia em sí, possuem significado físico, sendo este nosso próximo foco.

Veremos agora como obter uma diferença de energia finita a partir de grandezas divergentes [8] como a da expressão (2.99). Primeiro, começamos considerando que $L \gg a$, de modo a podermos considerar k_x e k_y como variáveis contínuas. Desta forma, podemos reescrever a equação (2.99) como

$$E = \frac{1}{2} \int dn_x \int dn_y \sum_{n_z} k^0, \quad (2.100)$$

onde tanto as integrais quanto o somatório acima são tomados de $-\infty$ a $+\infty$. Consideremos também que o campo ϕ seja não massivo, de modo que

$$k^0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + n_z^2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2}. \quad (2.101)$$

Assim, temos

$$E = \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left[\frac{1}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2} \right]. \quad (2.102)$$

Se, no limite em que $L \rightarrow \infty$, interpretarmos a expressão acima como sendo a energia do vácuo quando confinamos ϕ entre duas placas paralelas, de área L^2 e separadas por uma distância a , então para o espaço livre teremos:

$$E_0 = \frac{L^2 a}{2\pi^3} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (2.103)$$

Como já argumentamos antes, diferenças de energia possuem significado físico e, deste modo, ao subtrairmos (2.103) de (2.102) estaremos obtendo a energia de interação entre duas placas paralelas separadas por uma distância a . Em particular, para a diferença de energia por unidade de área temos:

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \kappa d\kappa \left[\frac{\kappa}{2} + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2} - \int_0^\infty dn \sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2} \right], \quad (2.104)$$

onde introduzimos coordenadas polares no plano $k_x k_y$.

Pela equação (2.104), podemos ver que $\delta\mathcal{E}$ ainda não é uma quantidade bem definida. Isto ocorre devido a uma divergência ultravioleta, ou seja, devido aos comprimentos de onda mais curtos (grandes valores de k). Supondo que a presença das placas exerce pouca ou nenhuma influência quando o número de onda k é maior que um determinado valor k_m , podemos contornar o problema da divergência ultravioleta introduzindo no integrando da equação (2.104) uma função $f(k)$ tal que

$$f(k) = \begin{cases} 1, & k < k_m \\ 0, & k \gg k_m \end{cases} \quad (2.105)$$

e

$$f'(0) = 0, \quad (2.106)$$

onde $f'(0)$ é a derivada primeira de $f(k)$ aplicada na origem.

Introduzindo ainda uma mudança de variável $u = a^2 \kappa^2 / \pi^2$, temos:

$$\delta\mathcal{E} = \frac{\pi^2}{4a^3} \int_0^\infty du \left[\frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u}\right) + \sum_1^\infty \sqrt{u + (2n)^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u + (2n)^2}\right) - \int_0^\infty dn \sqrt{u + (2n)^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u + (2n)^2}\right) \right]. \quad (2.107)$$

Pela fórmula de Euler-Maclaurin, temos que

$$\frac{1}{2}F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^\infty dn F(n) = -\frac{1}{12}F'(0) + \frac{1}{720}F'''(0) + \dots \quad (2.108)$$

Identificando em (2.107)

$$F(n) = \int_0^\infty du \sqrt{u + (2n)^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u + (2n)^2}\right), \quad (2.109)$$

temos:

$$F'(n) = -16n^2 f\left(\frac{2n\pi}{a}\right) \quad (2.110)$$

e

$$F'''(n) = -32 f\left(\frac{2n\pi}{a}\right) - 64n f'\left(\frac{2n\pi}{a}\right) - 16n^2 f''\left(\frac{2n\pi}{a}\right). \quad (2.111)$$

Desta forma, encontramos para a energia por unidade de área:

$$\delta\mathcal{E} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{90 a^3}, \quad (2.112)$$

onde deixamos explícitas as constantes \hbar e c , que antes não apareciam por estarmos usando unidades naturais de medida ($\hbar = c = 1$). À energia encontrada acima, que é a energia de interação entre as placas, está associada uma força por unidade de área, dada por

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{30 a^4}, \quad (2.113)$$

onde o sinal negativo indica que a força é de atração.

O fenômeno que descrevemos acima, isto é, a interação entre dois objetos unicamente devido à variação na energia do vácuo quando restringimos o espaço a uma região finita, é o que chamamos de efeito Casimir. Em seu artigo original, Casimir mostrou, de forma análoga à que fizemos, que ao dispormos paralelamente duas placas metálicas, perfeitamente condutoras e descarregadas separadas por uma distância a , uma energia de interação dada por

$$\delta\mathcal{E} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}, \quad (2.114)$$

existirá entre elas, e que, associada à esta energia, existirá também uma força de atração, dada por

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \quad (2.115)$$

(aproximadamente 0,013dyn para placas de 1cm^2 separadas por $1\mu\text{m}$).

A diferença, por um fator 8, entre os resultados obtido por Casimir e o que obtivemos se deve ao fato de que, ao considerarmos ϕ como o potencial elétrico, ele deve satisfazer as

condições de contorno homogêneas de Neumann nas superfícies das placas e, portanto, os valores permitidos de k_z passam a ser dados por

$$k_z = \frac{n\pi}{a}. \quad (2.116)$$

Note que a simples substituição $2n \rightarrow n$ na definição de $F(n)$ nos forneceria os mesmos resultados obtidos por Casimir. Note também que em nenhum momento do nosso desenvolvimento fizemos qualquer suposição que nos levaria a concluir que as placas não pudessem estar descarregadas. Além disso, a introdução da função $f(k)$ se justifica pelo fato de que para ondas muito curtas (da ordem do comprimento atômico) as placas metálicas dificilmente seriam de alguma forma um obstáculo e, portanto, a energia de ponto zero dessas ondas não seria afetada pela posição das placas.

Concluimos este capítulo ressaltando que a introdução da função $f(k)$ para contornarmos a divergência ultravioleta nada mais é do que parte de um processo de renormalização, processo este muito comum na teoria quântica de campos. O processo de renormalização se faz necessário quando queremos extrair quantidades físicas bem definidas de outras mal definidas, geralmente divergentes, e, de um modo geral, pode ser dividido em três etapas. A primeira etapa é a chamada regularização, nela introduzimos na quantidade mal definida Q um parâmetro de regularização λ , de modo que exista um determinado valor λ_0 tal que: (i) quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $Q(\lambda) \rightarrow Q$ e (ii) $Q(\lambda)$ seja uma quantidade bem definida quando $\lambda \neq \lambda_0$. A segunda etapa do processo consiste em extrairmos da expressão regularizada $Q(\lambda)$ uma quantidade $Q_{esp}(\lambda)$, que é bem definida devido à regularização e que a teoria nos indica como sendo espúria, obtendo $\delta Q(\lambda) = Q(\lambda) - Q_{esp}(\lambda)$. Na terceira e última etapa tomamos o limite $\lambda \rightarrow \lambda_0$, obtendo como resultado uma quantidade δQ bem definida ao qual atribuímos significado físico e supomos, ao menos em tese, ser mensurável. No cálculo da energia de Casimir, tal como fizemos acima, podemos identificar a energia do vácuo submetido às condições de contorno como sendo nossa grandeza mal definida, enquanto que a energia do vácuo no espaço livre (sem condições de contorno) pode ser identificada como sendo nossa

grandeza espúria. Sendo assim, podemos escrever de forma esquemática:

$$E_{casimir} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E_{ccc}^{(\lambda)} - E_{scc}^{(\lambda)}. \quad (2.117)$$

Capítulo 3

Condições de contorno de Neumann
inibindo a quebra espontânea de
simetria no mecanismo de
Coleman-Weinberg

3.1 Introdução

No capítulo anterior, vimos que o efeito Casimir surge ao impormos restrições ao campo com o qual estamos trabalhando – como, por exemplo, que satisfaça certas condições de contorno nas superfícies que delimitam uma determinada região do espaço. Neste capítulo, veremos em que situações a imposição das condições de contorno de Neumann homogêneas sobre duas superfícies paralelas, infinitas e separadas por uma distância a , podem inibir a quebra espontânea de simetria no mecanismo de Coleman-Weinberg para a eletrodinâmica escalar. Para tal objetivo, usaremos o método do potencial efetivo, que será explicado brevemente na próxima seção.

Os resultados que encontraremos são os mesmos obtidos na referência [1], porém a abordagem que usaremos aqui é simples e direta, ao contrário daquela usada em [1], onde somente após a expansão do potencial efetivo (V_{ef}) em potências de $a\nu$ (ν^2 representa os termos quadráticos nos campos), a localização de seu pontos críticos (máximos e mínimos) e uma cuidadosa análise, foi possível chegar a tais resultados.

Por fim, vale resaltar que mais uma vez será necessário o uso de algum método de regularização para tornarmos finitas expressões divergentes durante o caminho. No final do capítulo anterior fizemos isso através da introdução da função $f(k)$, método este que pode ser classificado como sendo do tipo cut-off, ou de corte. Já neste capítulo, usaremos o método da função zeta generalizada, definida da seguinte forma: Sendo $m(x, y)$ um operador real, elíptico e autoadjunto cujos autovalores são dados pelo conjunto $\{\lambda_i\}$, então a função zeta generalizada associada ao operador $M(x, y)$ ($m \rightarrow M = \frac{m}{\mu^2}$) é definida como

$$\zeta_M(s) = \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu^2} \right)^{-s}, \quad (3.1)$$

onde introduzimos um parâmetro de escala desconhecido¹ μ , com a mesma dimensão de $\lambda^{-1/2}$, para manter a função zeta adimensional para todo s .

Apenas como exemplo, voltemos a equação (2.102) do capítulo anterior:

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left[\frac{1}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2} \right] \\ &= \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d^2k \left[k^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sendo

$$\zeta_M \left(s - \frac{1}{2} \right) = \sum_{n=-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{k^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2}{\mu^2} \right]^{1/2-s}, \quad (3.3)$$

temos que

$$E = \frac{\mu L^2}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\zeta_M \left(s - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.4)$$

A integral de (3.3) pode ser facilmente calculada a partir da relação

$$\int_{-\infty}^\infty d^m k (k^2 + A^2)^{-z} = \pi^{m/2} \frac{\Gamma(z - m/2)}{\Gamma(z)} (A^2)^{m/2-z}, \quad (3.5)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \zeta_M \left(s - \frac{1}{2} \right) &= \frac{\mu^2}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - 3/2)}{\Gamma(s - 1/2)} \sum_{n=-\infty}^\infty |n|^{3-2s} \\ &= \frac{2\mu^2}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - 3/2)}{\Gamma(s - 1/2)} \sum_{n=1}^\infty n^{3-2s} \\ &= \frac{2\mu^2}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - 3/2)}{\Gamma(s - 1/2)} \zeta_R(2s - 3), \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $\zeta_R(2s - 3)$ e a função zeta de Riemann, dada por

$$\zeta_R(z) = \sum_{N=1}^\infty N^{-z} \quad (3.7)$$

e cuja propriedade de reflexão

$$\pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta_R(z) = \pi^{(z-1)/2} \Gamma((z-1)/2) \zeta_R(1-z) \quad (3.8)$$

¹A introdução do parâmetro de escala μ pode ser melhor compreendida quando observamos que, no procedimento de regularização da função zeta, existe escondida um separação da integral divergente, isto é, uma separação das partes finita e divergente do potencial efetivo $V_{ef}(\phi_c)$ [20, 21].

pode ser utilizada para encontrarmos a continuação analítica

$$\zeta_M \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{2^{2-2s} \mu^{2s-1} a^{2s-3}}{\pi^{3/2}} \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(s-1/2)} \zeta_R(4-2s), \quad (3.9)$$

necessária para calcularmos $\zeta_M(-1/2)$:

$$\begin{aligned} \zeta_M \left(-\frac{1}{2} \right) &= \frac{4}{\pi^{3/2} a^3 \mu} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(-1/2)} \zeta_R(4) \\ &= -\frac{\pi^2}{45 a^3 \mu}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Desta forma, encontramos para a energia por unidade de área

$$\mathcal{E} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{90 a^3}, \quad (3.11)$$

que, como era de se esperar, é a mesma expressão encontrada no capítulo anterior, quando fizemos a regularização pelo método de corte.

3.2 O potencial efetivo para a eletrodinâmica escalar

O potencial efetivo de uma teoria é definido como o valor esperado do operador hamiltoniano, calculado no estado – entre o conjunto de estados $\{\phi\}$ – em que este é minimizado. Ele é uma generalização quântica do potencial clássico e, através de uma expansão em loop, pode ser expresso como uma soma deste com as correções que representam o efeito da interação do campo com o vácuo quântico. Veremos agora como calcular, em ordem \hbar , o potencial efetivo para o campo escalar complexo $\phi(x)$ minimamente acoplado ao campo eletromagnético. A densidade lagrangiana para essa teoria é dada por [1]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D^\mu \phi - \frac{\lambda}{6} (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \bar{\eta} \partial^\mu \partial_\mu \eta, \quad (3.12)$$

onde D_μ é derivada covariante, dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (3.13)$$

A derivada covariante é necessária para manter a lagrangiana invariante sob transformações do grupo $U(1)$ e também é responsável pelo acoplamento mínimo. O quarto termo é o termo de fixação de calibre e o último é o termo de Faddeev-Popov no qual η e $\bar{\eta}$ denotam os campos fantasmas (“ghost fields”).

A contribuição para o potencial efetivo pode ser simplificada escrevendo o campo complexo em termo de dois campos reais ϕ_1 e ϕ_2 ,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad (3.14)$$

e realizando a usual rotação de Wick (i.e. $x_0 \rightarrow -ix_4$ and $A_0 \rightarrow iA_4$). A lagrangiana (3.12), no espaço-tempo euclidiano, torna-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} (\partial\phi_a)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \\ & -\frac{1}{2} e^2 A^\mu A_\mu \phi_a \phi_a - e\epsilon_{ab} \phi_a A^\mu \partial_\mu \phi_b - \frac{\lambda}{4!} (\phi_a \phi_b)^2 + \bar{\eta} \square \eta, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $a, b = 1, 2$ e ϵ_{ab} é um tensor completamente antisimétrico, com $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$. Expandindo a ação euclidiana,

$$S_E[\phi_a, A^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (3.16)$$

em torno dos campos constantes $\phi_a = \bar{\phi}_a$, $A^\mu = 0$, $\bar{\eta} = \eta = 0$, temos

$$\begin{aligned} S_E[\phi_a, A^\mu, \bar{\eta}, \eta] = & S_E[\bar{\phi}_a, 0, 0, 0] - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_a(x) \Delta_{ab}(x, y) \phi_b(y) + \\ & -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^\mu(x) D_{\mu\nu}(x, y) A^\nu(y) - \int d^4x d^4y A^\mu(x) C_{\mu a}(x, y) \phi_a(y) + \\ & + \int d^4x \bar{\eta}(x) \square \eta(x) + (\text{termos cúbico e quárticos nos campos}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$\Delta_{ab}(x, y) = \left[\frac{\lambda}{6} (2\bar{\phi}_a \bar{\phi}_b + \bar{\phi}^2 \delta_{ab}) - \square \delta_{ab} \right] \delta(x - y), \quad (3.18)$$

$$D_{\mu\nu}(x, y) = \left[e^2 \bar{\phi}^2 \delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu - \square \delta_{\mu\nu} \right] \delta(x - y), \quad (3.19)$$

$$C_{\mu a}(x, y) = [-e\epsilon_{ab}\bar{\phi}_b\partial_\mu]\delta(x - y) \quad (3.20)$$

e

$$\bar{\phi}^2 = \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2. \quad (3.21)$$

O funcional gerador para as funções de Green conexas e desconexas

$$Z_E[J] = e^{W_E[J]} \quad (3.22)$$

é dado por

$$\begin{aligned} Z_E[J_a] = e^{-S_0[\bar{\phi}_a, J_a]} \int D\bar{\eta} D\eta DA^\mu D\phi_a \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_a(x) \Delta_{ab}(x, y) \phi_b(y) + \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^\mu(x) D_{\mu\nu}(x, y) A^\nu(y) - \int d^4x d^4y A^\mu(x) C_{\mu a}(x, y) \phi_a(y) + \right. \\ \left. \int d^4x \bar{\eta}(x) \square \eta(x) \right\}, \quad (3.23) \end{aligned}$$

onde desprezamos termos cúbicos e quárticos, pois estamos interessados em determinar o potencial efetivo em ordem \hbar . Uma vez que o expoente é quadrático nos campos, as integrais podem ser facilmente calculadas². Realizando a integral em $D\phi_a$ temos

$$\begin{aligned} \int D\phi_a \exp \left\{ \int d^4x d^4y \left[-\frac{1}{2} \phi_a(x) \Delta_{ab}(x, y) \phi_b(y) - A^\mu(x) C_{\mu a}(x, y) \phi_a(y) \right] \right\} \propto \\ \propto [\det(\Delta_{ab})]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^\mu(x) C_{\mu a}(x, y) \Delta_{ab}^{-1} C_{\nu b}(x, y) A^\nu(y) \right\}, \quad (3.24) \end{aligned}$$

e em DA^μ temos

$$\begin{aligned} \int DA^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^\mu(x) [D_{\mu\nu}(x, y) - C_{\mu a}(x, y) \Delta_{ab}^{-1}(x, y) C_{\nu b}(x, y)] A^\nu(y) \right\} \\ \propto [\det(D_{\mu\nu} - C_{\mu a} \Delta_{ab}^{-1} C_{\nu b})]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Por fim, realizando as integrais em $D\bar{\eta}$ e $D\eta$ ($\bar{\eta}$ e η são campos de Grassmann), temos

$$\int D\bar{\eta} D\eta \exp \left\{ \int d^4x \bar{\eta}(x) \square \eta(x) \right\} = \det(-\square). \quad (3.26)$$

²Note que as integrais são uma generalização da integral de Fresnel.

Assim, obtemos

$$Z_E[J_a] = e^{-S_0[\bar{\phi}_a, J_a]} [\det(\Delta_{ab})]^{-\frac{1}{2}} [\det(D_{\mu\nu} - C_{\mu a} \Delta_{ab}^{-1} C_{\nu b})]^{-\frac{1}{2}} \det(-\square). \quad (3.27)$$

Da equação (3.27) facilmente obtemos o termo em ordem \hbar do potencial efetivo como³

$$V_{ef}^{(1)}(\phi_c) = -\frac{\hbar}{\Omega} \ln \left\{ [\det(\Delta_{ab})]^{-\frac{1}{2}} [\det(D_{\mu\nu} - C_{\mu a} \Delta_{ab}^{-1} C_{\nu b})]^{-\frac{1}{2}} \det(-\square) \right\}, \quad (3.28)$$

onde Ω é o volume do espaço-tempo em (3+1) dimensões.

Agora, realizando uma transformação para o espaço dos momentos k , temos [22]

$$\Delta_{ab}(k) = k^2 \delta_{ab} + \frac{\lambda}{3} \bar{\phi}_a \bar{\phi}_b + \frac{\lambda}{6} \bar{\phi}^2 \delta_{ab}, \quad (3.29)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \left(k^2 + e^2 \bar{\phi}^2 \right) g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu \quad (3.30)$$

e

$$C_{\mu a}(k) \Delta_{ab}^{-1}(k) C_{\nu b}(k) = \frac{e^2 k_\mu k_\nu}{\left(k^2 + \frac{\lambda}{6} \bar{\phi}^2 \right)}. \quad (3.31)$$

Após alguns cálculos, encontramos [23]

$$\begin{aligned} V_{ef}^{(1)}(\phi_c) = & \frac{\hbar}{2\Omega} \ln [\det(k^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_c^2)] + \frac{3\hbar}{2\Omega} \ln [\det(k^2 + e^2 \phi_c^2)] + \\ & + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln [\det(k^2 + M_+^2 \phi_c^2)] + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln [\det(k^2 + M_-^2 \phi_c^2)] - 2 \frac{\hbar}{2\Omega} \ln [\det(k^2 + m^2)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $\phi_c^2 = \phi_{1c}^2 + \phi_{2c}^2$ é o campo clássico e

$$M_\pm^2 = \frac{\lambda}{12} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{144} - \frac{\xi \lambda e^2}{6}}. \quad (3.33)$$

Devido ao “ghost”, introduzimos m^2 no último termo e, ao final, faremos $m^2 \rightarrow 0$ a fim de remover a divergência infravermelha.

³Nós usamos unidades naturais onde $\hbar = c = 1$, entretanto mantemos \hbar para marcar as correções quânticas.

3.3 A quebra espontânea de simetria e o mecanismo de Coleman-Weinberg

Como já dissemos no primeiro capítulo, a quebra espontânea de simetria de gauge exerce um papel fundamental na unificação das teorias eletromagnética e nuclear fraca, uma vez que permite aos bósons mediadores da interação fraca adquirirem massa a partir de uma teoria de massa nula (os bósons mediadores da interação eletromagnética, os fótons, não possuem massa). Porém, neste último caso, diversos parâmetros físicos envolvidos no processo dependem da forma exata do potencial de Higgs, potencial este que, embora necessário para que a quebra de simetria ocorra, é introduzido na teoria de forma arbitrária, ao invés de derivado a partir de princípios fundamentais.

O mecanismo de Coleman-Weinberg trata justamente desta questão. Devido às correções radiativas, faz com que, sob certas condições, o potencial efetivo se torne degenerado e a quebra espontânea de simetria possa ser induzida. Veremos agora como tal procedimento funciona ao ser aplicado à eletrodinâmica escalar.

Partindo da equação (3.32), da seção anterior, e fazendo uso da conhecida relação [24, 25, 26]

$$\ln \det M = -\frac{d\zeta_M(0)}{ds}, \quad (3.34)$$

podemos escrever a correção em ordem \hbar do potencial efetivo como

$$V_{ef}^{(1)}(\phi_c) = -\frac{\hbar}{2\Omega} \left[\frac{d\zeta_\beta(0)}{ds} + \frac{d\zeta_e(0)}{ds} + \frac{d\zeta_+(0)}{ds} + \frac{d\zeta_-(0)}{ds} + \frac{d\zeta_m(0)}{ds} \right], \quad (3.35)$$

onde $\zeta_v(s)$ é a função zeta generalizada, dada por

$$\zeta_v(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega}{(2\pi)^4} d^4k [k^2 + v^2]^{-s}. \quad (3.36)$$

Usando novamente (3.5) em (3.36) e calculando, a partir do resultado, cada $\zeta_v(0)$ e $\zeta'_v(0)$, obtemos para o potencial efetivo

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{\lambda}{4!} \phi_c^4 + \frac{\hbar}{256\pi^2} \lambda^2 \phi_c^4 \left[\ln \left(\frac{\frac{\lambda}{2} \phi_c^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] + \frac{3\hbar}{64\pi^2} e^4 \phi_c^4 \left[\ln \left(\frac{e^2 \phi_c^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right]$$

$$+\frac{\hbar}{64\pi^2}M_+^4\phi_c^4\left[\ln\left(\frac{M_+^2\phi_c^2}{\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right]+\frac{\hbar}{64\pi^2}M_-^4\phi_c^4\left[\ln\left(\frac{M_-^2\phi_c^2}{\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right]. \quad (3.37)$$

Desprezando o segundo e também os dois últimos termos, uma vez que são de ordem λ^2 , a expressão acima passa a ser escrita como

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + \frac{3\hbar}{64\pi^2}e^4\phi_c^4\left[\ln\left(\frac{e^2\phi_c^2}{\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right]. \quad (3.38)$$

Embora finito, o potencial efetivo obtido acima ainda não é nosso resultado final, pois devemos ajustar o parâmetro λ ao seu valor observado. Para isso, impomos a seguinte condição de renormalização

$$\left.\frac{dV_{ef}}{d\phi_c^4}\right|_M = \lambda_R. \quad (3.39)$$

Uma vez que com massa nula a teoria não possui uma escala intrínseca, o valor de M – que possui unidade de massa – usado para definir a constante de acoplamento acima é arbitrário. Obviamente, escolhas diferentes resultarão em definições diferentes, mas qualquer uma delas – contanto que M seja diferente de zero para evitar a singularidade logarítmica infravermelha – é tão boa quanto qualquer outra. Dito isto, temos que a condição (3.39), aplicada à equação (3.38), nos leva a

$$\lambda + \frac{9\hbar e^4}{8\pi^2}\left[\ln\left(\frac{e^2 M^2}{\mu^2}\right)-\frac{8}{3}\right] = \lambda_R. \quad (3.40)$$

Uma vez que, para ordem \hbar^0 , temos $\lambda = \lambda_R$, podemos utilizar (3.40) para eliminarmos o parâmetro μ do potencial efetivo, obtendo

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + \frac{3\hbar}{64\pi^2}e^4\phi_c^4\left[\ln\left(\frac{\phi_c^2}{M^2}\right)-\frac{25}{6}\right]. \quad (3.41)$$

Definindo $\langle\phi\rangle$ como o ponto onde o potencial efetivo assume seu mínimo, temos que a condição

$$\left.\frac{dV_{ef}}{d\phi}\right|_{\langle\phi\rangle} = 0 \quad (3.42)$$

implica em

$$\frac{\langle\phi\rangle^3}{6}\left\{\lambda + \frac{3\hbar e^4}{16\pi^2}\left[6\ln\left(\frac{\langle\phi\rangle^2}{M}\right)-22\right]\right\} = 0, \quad (3.43)$$

que somente admitirá solução não trivial se o termo entre chaves for nulo. Uma vez que M é arbitrário, a escolha $M = \langle \phi \rangle$ implica em

$$\lambda = \frac{33\hbar e^4}{8\pi^2}, \quad (3.44)$$

mostrando que somente haverá solução não trivial se λ for da ordem de e^4 . Considerando, portanto, λ de ordem e^4 de modo a satisfazer a equação (3.44), sem nos esquecermos da escolha $M = \langle \phi \rangle$, temos para o potencial efetivo

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{3\hbar e^4 \phi_c^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\phi_c^2}{\langle \phi \rangle^2} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.45)$$

Devemos notar que o potencial efetivo acima possui, de fato, um mínimo em $\langle \phi \rangle$, como já era de se esperar. Porém, chamamos a atenção para o fato de que em momento algum foi necessário assumir qualquer valor para $\langle \phi \rangle$ e que, portanto, este é arbitrário. Sendo assim, temos que o vácuo da teoria é degenerado. Além disso, a eliminação do parâmetro λ (adimensional) às custas da introdução de $\langle \phi \rangle$ (com dimensão de massa) faz com que a teoria, que a princípio não tinha uma escala intrínseca de massa, passe a tê-la. De fato, pela condição de renormalização de massa

$$\left. \frac{d^2 V_{ef}}{d\phi_c^2} \right|_{\langle \phi \rangle} = M_R^2, \quad (3.46)$$

temos que

$$M_R^2 = \frac{3\hbar e^4}{8\pi^2} \langle \phi \rangle^2. \quad (3.47)$$

Pelo resultado acima, vemos que a massa do campo escalar será nula apenas se $\langle \phi \rangle = 0$. Porém, tal resultado não é um ponto de mínimo e, portanto, não representa um vácuo estável, podendo ser descartado. Ou seja, o campo escalar passa a ser massivo. Além disso, o campo A^μ também adquire massa, uma vez que o termo

$$\frac{1}{2} e^2 \phi^2 A_\mu A^\mu \quad (3.48)$$

da lagrangiana implica em

$$M_A = e^2 \langle \phi \rangle^2. \quad (3.49)$$

Por fim, uma simples mudança para a variável $\phi' = \phi - \langle \phi \rangle$ na lagrangiana, de modo a reobtermos um vácuo nulo, nos permite constatar de forma clara a quebra de simetria.

3.4 Condições de contorno de Neumann

Veremos agora sob quais condições a quebra espontânea de simetria, apresentada na seção anterior, pode ser inibida ao exigirmos que os campos satisfaçam condições de contorno de Neumann homogêneas sobre duas superfícies planas, paralelas e infinitas, localizadas nos pontos $z = 0$ e $z = a$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=a} = 0, \quad (3.50)$$

onde φ representa os campos ϕ_a , A^μ , η e $\bar{\eta}$. As condições de contorno (3.50) tornam a componente do momento perpendicular às superfícies ($z = 0$ e $z = a$) discretas: $k_z = \frac{n\pi}{a}$, onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, enquanto as outras componente permanecem contínuas.

Sendo assim, o termo em ordem \hbar do potencial efetivo, equação (3.32), torna-se

$$\begin{aligned} V_{ef}^{(1)}(\phi_c) = & \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\Omega} \ln \det \left[\bar{k}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \beta^2 \phi_c^2 \right] + \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\Omega} \ln \det \left[\bar{k}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + e^2 \phi_c^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\Omega} \ln \det \left[\bar{k}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + M_+^2 \phi_c^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\Omega} \ln \det \left[\bar{k}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + M_-^2 \phi_c^2 \right] + \\ & - 2 \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\Omega} \ln \det \left[\bar{k}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + m^2 \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde fizemos $\lambda = 2\beta^2$ e $k^2 = \bar{k}^2 + k_z^2$. Usando mais uma vez a relação (3.34), chegaremos novamente em (3.35), porém agora com

$$\zeta_v(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega}{(2\pi)^3 a} d^3 k \left[k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + v^2 \right]^{-s}. \quad (3.52)$$

Com o uso da integral (3.5) e da relação [27]

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n^2 + B^2]^{-p} = -\frac{1}{2} B^{-2p} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2B^{2p-1} \Gamma(p)} \left[\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi n B)}{(n\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right], \quad (3.53)$$

onde os $K_\nu(x)$ são as funções de Bessel modificadas, obtemos

$$\begin{aligned} \zeta_v(s) = & \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}} a} \frac{\Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \frac{\Omega}{16\pi^2} \frac{1}{(s-1)(s-2)} v^{4-2s} + \\ & + \frac{\Omega}{4\pi^2} \frac{v^{4-2s}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2nav)}{(nav)^{2-s}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Calculando $\zeta_v(0)$ e $\zeta'_v(0)$ por (3.54) e usando os resultados em (3.35), obtemos para o potencial efetivo

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\phi_c) = & \frac{\beta^2}{12}\phi_c^4 - \frac{\hbar\pi^2}{720a^4} + \\
& + \frac{\hbar}{64\pi^2}\beta^4\phi_c^4 \left[\ln\left(\frac{\beta^2\phi_c^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{\hbar\beta^3\phi_c^3}{24a\pi} - \frac{\hbar}{8\pi^2}\beta^4\phi_c^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2n\beta a\phi_c)}{(n\beta a\phi_c)^2} + \\
& + \frac{3\hbar}{64\pi^2}e^4\phi_c^4 \left[\ln\left(\frac{e^2\phi_c^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{\hbar e^3\phi_c^3}{8a\pi} - \frac{3\hbar}{8\pi^2}e^4\phi_c^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nea\phi_c)}{(nea\phi_c)^2} + \\
& + \frac{\hbar}{64\pi^2}M_+^4\phi_c^4 \left[\ln\left(\frac{M_+^2\phi_c^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{\hbar M_+^3\phi_c^3}{24a\pi} - \frac{\hbar}{8\pi^2}M_+^4\phi_c^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nM_+a\phi_c)}{(nM_+a\phi_c)^2} + \\
& + \frac{\hbar}{64\pi^2}M_-^4\phi_c^4 \left[\ln\left(\frac{M_-^2\phi_c^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{\hbar M_-^3\phi_c^3}{24a\pi} - \frac{\hbar}{8\pi^2}M_-^4\phi_c^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nM_-a\phi_c)}{(nM_-a\phi_c)^2},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

lembrando que $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$. Além disso, vale ressaltar que uma expansão das funções de Bessel modificadas (último termo de cada linha) resultará em contribuições do tipo $\phi^n a^{n-4}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Derivando (3.55) temos

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{ef}}{d\phi_c} = & \frac{\beta^2}{3}\phi_c^3 + \\
& + \frac{\hbar}{16\pi^2}\beta^4\phi_c^3 \left[\ln\left(\frac{\beta^2\phi_c^2}{\mu^2}\right) - 1 \right] - \frac{\hbar\beta^3\phi_c^2}{8\pi a} + \frac{\hbar}{4\pi^2 a}\beta^3\phi_c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2n\beta a\phi_c)}{n} \\
& + \frac{3\hbar}{16\pi^2}e^4\phi_c^3 \left[\ln\left(\frac{e^2\phi_c^2}{\mu^2}\right) - 1 \right] - \frac{3\hbar e^3\phi_c^2}{8\pi a} + \frac{3\hbar}{4\pi^2 a}e^3\phi_c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2nea\phi_c)}{n} \\
& + \frac{\hbar}{16\pi^2}M_+^4\phi_c^3 \left[\ln\left(\frac{M_+^2\phi_c^2}{\mu^2}\right) - 1 \right] - \frac{\hbar M_+^3\phi_c^2}{8\pi a} - \frac{\hbar}{4\pi^2 a}M_+^3\phi_c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2nM_+a\phi_c)}{n} \\
& + \frac{\hbar}{16\pi^2}M_-^4\phi_c^3 \left[\ln\left(\frac{M_-^2\phi_c^2}{\mu^2}\right) - 1 \right] - \frac{\hbar M_-^3\phi_c^2}{8\pi a} - \frac{\hbar}{4\pi^2 a}M_-^3\phi_c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(2nM_-a\phi_c)}{n}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

É fácil ver que $\langle \phi_c \rangle = 0$ é uma solução para $\frac{dV_{ef}}{d\phi_c} = 0$. Para sabermos se ocorre quebra espontânea de simetria, isto é, se $\langle \phi_c \rangle = 0$ é ponto de máximo local, nós

avaliamos a segunda derivada do potencial efetivo em $\langle \phi_c \rangle = 0$,

$$\left. \frac{d^2 V_{ef}}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c = \langle \phi_c \rangle = 0} = \frac{\hbar}{48a^2} \left(\frac{4\beta^2}{3} + 3e^2 \right). \quad (3.57)$$

Agora, vamos considerar que β seja da ordem de e^2 , uma vez que estamos interessados em saber se as condições de contorno de Neumann homogêneas são capazes de inibirem o mecanismos de Coleman-Weinberg para a quebra espontânea de simetria. Desta forma, o termo de ordem β^2 na Eq. (3.57) é negligenciável quando comparado com o termo de ordem e^2 , e pode ser desprezado, resultando em

$$\left. \frac{d^2 V_{ef}}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c = \langle \phi_c \rangle = 0} = \frac{\hbar e^2}{16a^2} = m_\phi^2. \quad (3.58)$$

Quando $a \rightarrow \infty$ podemos considerar a escala de comprimento como sendo $(M_\phi)^{-1}$, onde M_ϕ é a massa do campo escalar adquirida como resultado do mecanismo de Coleman-Weinberg, no qual $M_\phi \approx e^2 \langle \phi \rangle$ (veja Fig. 3.1).

Se $a \approx (M_\phi)^{-1}$ então $m_\phi^2 \phi^2 \approx e^6 \langle \phi \rangle^4$ que é de ordem mais alta que os termos em ϕ^4 do potencial efetivo. Portanto, a não pode modificar o mínimo e a quebra espontânea de simetria ocorre (veja Fig. 3.2).

Se $a \approx e(M_\phi)^{-1}$ então $m_\phi^2 \phi^2 \approx e^4 \langle \phi \rangle^4$ que é de mesma ordem dos termos em ϕ^4 do potencial efetivo. Portanto, nós não podemos desprezar o termo em ϕ^2 que advém da imposição das condições de contorno. Contudo, as condições de contorno não inibem a quebra espontânea, embora elas modifiquem o mínimo (veja Fig. 3.3).

Se $a \approx e^2(M_\phi)^{-1}$, então $m_\phi^2 \phi^2 \approx e^{-2} \langle \phi \rangle^4$, que é de ordem mais baixa que os termos em ϕ^4 do potencial efetivo e assim os termos em ϕ^4 do potencial efetivo são desprezíveis quando comparados com ele. Consequentemente as condições de contorno de Neumann inibem a quebra espontânea de simetria (veja Fig. 3.4).

Para ilustrar nossas afirmações anteriores, mostramos os gráficos do potencial efetivo dado pela equação (3.37) em função de ϕ_c para alguns valores da distância entre as superfícies a quando $\beta = \frac{3e^2}{4\pi}$. Por uma questão de simplicidade, escolhemos o calibre (“gauge”) de Landau ($\xi = 0$) e, uma vez que μ é um parâmetro arbitrário, tomamos o valor $\mu = 100$ GeV.

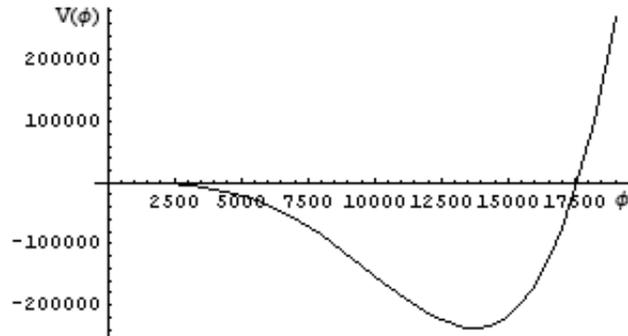


Figura 3.1: $V_{ef}(\phi_c)$ X ϕ_c para $a \rightarrow \infty$. Quebra espontânea de simetria induzida pelo mecanismo de Coleman-Weinberg.

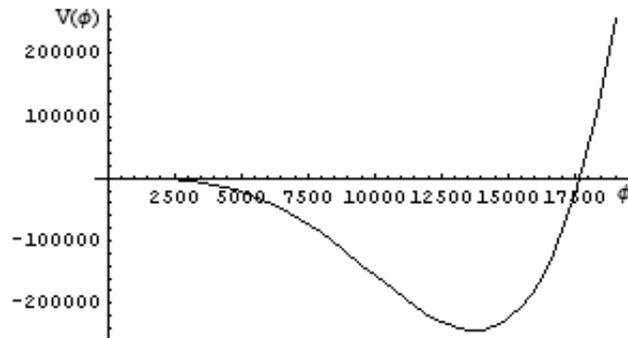


Figura 3.2: $V_{ef}(\phi_c)$ X ϕ_c para $a \approx (M_\phi)^{-1}$. A distância a entre as superfícies é grande e as correções devido a condições de contorno são desprezíveis.

Na Fig. 3.1 é representado o potencial efetivo quando $a \rightarrow \infty$. A Fig. 3.1 representa então o resultado de Coleman-Weinberg. Como se pode ver claramente da Fig. 3.1 o mínimo ocorre para $\langle \phi_c \rangle = \frac{\mu}{e}$.

Na Fig. 3.2 é representado o potencial efetivo quando $a = \frac{1}{M_\phi}$, isto é, quando a é grande. Como esperávamos, o mínimo ocorre em $\langle \phi_c \rangle = \frac{\mu}{e}$ novamente. Isso acontece porque as correções devido aos efeitos das interações das flutuações do vácuo com as superfícies (fronteiras) são muito menores que as correções devido as autointerações das flutuações do vácuo e, portanto, podem ser desprezadas.

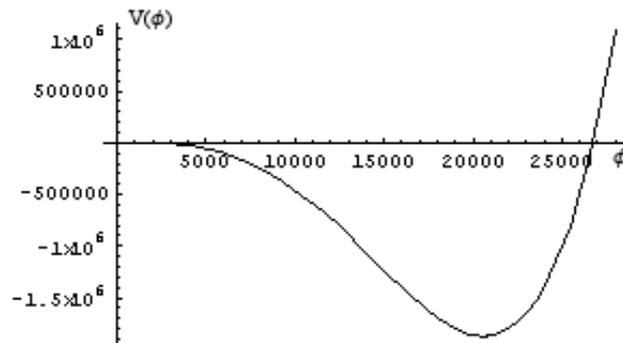


Figura 3.3: $V_{ef}(\phi_c) \times \phi_c$ for $a \approx e(M_\phi)^{-1}$. Embora a distância a entre as superfícies seja pequena, ela não é pequena o bastante para inibir a quebra espontânea da simetria. Entretanto, note que o mínimo se afasta do ponto $\phi_c = \frac{\mu}{e}$.

Na figura 3.3 é mostrado o potencial efetivo quando $a = \frac{e}{M_\phi}$. Embora a não seja grande, ele também não é pequeno o suficiente para inibir a quebra espontânea de simetria. No entanto, note que o mínimo é deslocado de $\phi_c = \frac{\mu}{e}$. Isso ocorre pois os efeitos das correções das interações das flutuações do vácuo com as superfícies são da mesma ordem das correções de auto interação das flutuações do vácuo e, portanto, não são desprezíveis.

Por fim, a Fig. 3.4 representa o potencial efetivo quando $a = \frac{e^2}{M_\phi}$. Como já dissemos, agora o mínimo ocorre em $\langle \phi_c \rangle = 0$, e a quebra espontânea de simetria não ocorre, pois o vácuo deixa de ser degenerado. Nesse caso os efeitos das correções das auto-interações das flutuações do vácuo são muito menores que as correções das interações das flutuações do vácuo com as superfícies, portanto, elas são desprezíveis. Assim, podemos dizer que as correções das interações das flutuações do vácuo com as superfícies inibe a quebra espontânea de simetria.

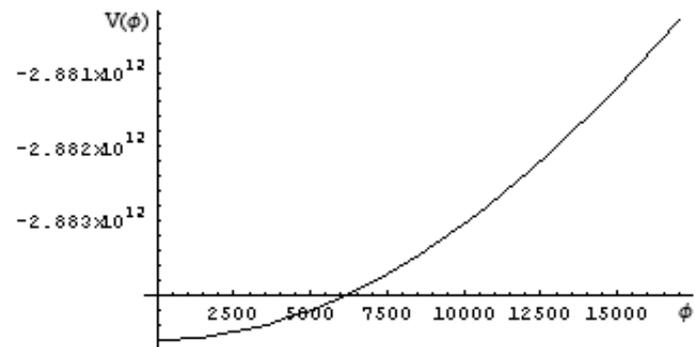


Figura 3.4: $V_{ef}(\phi_c)$ X ϕ_c para $a \approx e^2(M_\phi)^{-1}$. A distância a entre as superfícies é pequena o suficiente para inibir a quebra espontânea de simetria.

Capítulo 4

O efeito Casimir por funções de Green

4.1 Introdução

No final do capítulo 2, discutimos em linhas gerais o processo de renormalização. Além disso, quando calculamos a energia de Casimir, e posteriormente a força, regularizamos as expressões divergentes introduzindo a função $f(k)$, de modo que, como já dissemos, tal método pode ser classificado como sendo do tipo cut-off, ou de corte. Já no capítulo 3, a renormalização foi feita através de uma segunda técnica de regularização, a da função zeta generalizada. Ambos os métodos produziram resultados iguais quando aplicados ao mesmo caso, como já era de se esperar, e são apenas dois exemplos dos inúmeros métodos de regularização existentes que podemos encontrar na literatura – dentre os quais podemos também citar o da discretização do espaço e o dimensional.

Neste capítulo, apresentaremos um outro método de regularização, conhecido como separação de pontos [17]. Através dele obteremos uma relação simples entre o valor esperado do tensor energia-momento e a função de Green. Tal relação é de extrema importância para nós pois, nos próximos capítulos, nos possibilitará calcular de forma mais natural a densidade de energia e a força de Casimir quando, ao invés de barreiras intransponíveis para o campo ϕ , passarmos a considerar sua interação com diversas regiões de diferentes potenciais. Ainda neste capítulo, com o intuito de melhor esclarecermos o método de cálculo por funções de Green, o empregaremos para determinar a densidade de energia e a força de Casimir quando submetemos o campo ϕ às condições de contorno homogêneas de Dirichlet.

Antes de encerrarmos esta seção, daremos uma definição à função de Green, sendo esta a que segue: A função de Green de dois pontos, associada a uma determinada equação, é definida como sendo a solução da própria equação com fonte puntiforme. Desta forma, temos para a equação de Klein-Gordon, por exemplo, a função de Green $G(x, x')$ definida por:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (4.1)$$

4.2 O tensor energia-momento e a função de Green

Como vimos no capítulo 2, o tensor energia-momento para um determinado campo ϕ é dado pela seguinte expressão:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.2)$$

Considerando novamente a lagrangiana do campo escalar livre, dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (4.3)$$

a equação (4.2) pode ser reescrita em função apenas do campo ϕ e de suas derivadas como

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2]. \quad (4.4)$$

Como podemos notar, pela expressão (4.4) acima, o tensor energia-momento é simétrico. No intuito de mantermos essa simetria ao quantizarmos ϕ , passaremos a escrever a versão quantizada de (4.4) como sendo a expressão simetrizada

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2)]. \quad (4.5)$$

A densidade de energia de um determinado estado pode ser obtida através da componente T^{00} do tensor energia-momento acima, sendo ela simplesmente seu valor esperado. Porém, esta quantidade é divergente, sendo sua divergência ocasionada fundamentalmente pela presença em $T^{\mu\nu}$ de produtos de operadores em um mesmo ponto, tais como $\phi^2(x)$. Para regularizarmos expressões como esta, aplicamos um método conhecido como separação de pontos. Nela produtos do tipo $\phi^2(x)$ são substituídos por outros do tipo $\phi(x)\phi(x')$, ou seja, separamos o ponto x em dois pontos (x e x'). Depois, identificamos no produto de operadores os termos responsáveis pela divergência quando os pontos são reunidos, tais termos são desprovidos de significado físico e, portanto, podem ser removidos. Após removê-los, tomamos o limite em que os pontos são reunidos, obtendo, no final, quantidades físicas bem definidas. Por fim, devemos

ressaltar que o método de separação de pontos pode levar a resultados incorretos caso a simetria entre passado e futuro não seja respeitada. Desta forma, veremos agora como manter esta simetria.

Consideremos dois operadores $A(x)$ e $B(x)$ em um mesmo ponto x do espaço-tempo. Pelo método de separação de pontos, devemos escrever o produto desses dois operadores como

$$A(x)B(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x} A(x')B(x) + \lim_{x'' \rightarrow x} A(x)B(x'') \right], \quad (4.6)$$

de modo que não só o tempo do operador a direita seja sempre menor que o do operador a esquerda, como também que o intervalo entre eles seja igual nos dois termos do lado direito da equação (4.6) acima. Sintetizando, devemos ter

$$(x'^0 - x^0) = (x^0 - x''^0) > 0, \quad (4.7)$$

de modo que será suficiente tomarmos o limite simétrico

$$A(x)B(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} A(x')B(x) + \lim_{x' \rightarrow x^-} A(x)B(x') \right]. \quad (4.8)$$

Desta forma, temos para ϕ^2 :

$$\phi^2(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} \phi(x')\phi(x) + \lim_{x' \rightarrow x^-} \phi(x)\phi(x') \right]. \quad (4.9)$$

Definimos agora o operador cronológico:

$$T[A(t)B(t')] = \Theta(t - t')A(t)B(t') + \Theta(t' - t)B(t')A(t), \quad (4.10)$$

onde $\Theta(t - t')$ é a função degrau de Heaviside, dada por

$$\Theta(t - t') = \begin{cases} 1, & t > t' \\ 0, & t < t' \end{cases} \quad (4.11)$$

e tal que

$$\frac{\partial \Theta(t - t')}{\partial t} = -\frac{\partial \Theta(t - t')}{\partial t'} = \delta(t - t'). \quad (4.12)$$

Note que pelas propriedades (4.11) da função degrau, podemos reescrever (4.9) como

$$\phi^2(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} \Theta(t' - t)\phi(x')\phi(x) + \lim_{x' \rightarrow x^-} \Theta(t - t')\phi(x)\phi(x') \right]. \quad (4.13)$$

Somando na equação acima os termos nulos

$$\lim_{x' \rightarrow x^+} \Theta(t - t') \phi(x) \phi(x') \quad (4.14)$$

e

$$\lim_{x' \rightarrow x^-} \Theta(t' - t) \phi(x') \phi(x), \quad (4.15)$$

temos que

$$\phi^2(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} + \lim_{x' \rightarrow x^-} \right] T[\phi(x) \phi(x')]. \quad (4.16)$$

De forma análoga, obtém-se

$$\partial_\alpha \phi(x) \partial^\alpha \phi(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} + \lim_{x' \rightarrow x^-} \right] \partial'_\alpha \partial^\alpha T[\phi(x) \phi(x')] \quad (4.17)$$

e

$$\partial^\mu \phi(x) \partial^\nu \phi(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} \partial'^\mu \partial^\nu + \lim_{x' \rightarrow x^-} \partial'^\mu \partial^\nu \right] T[\phi(x) \phi(x')]. \quad (4.18)$$

Permutando os índices μ e ν na equação (4.18) acima, obtém-se

$$\partial^\nu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} \partial'^\nu \partial^\mu + \lim_{x' \rightarrow x^-} \partial'^\nu \partial^\mu \right] T[\phi(x) \phi(x')]. \quad (4.19)$$

Substituindo as equações (4.16), (4.17), (4.19) e (4.20) na expressão (4.5) do tensor energia-momento, temos:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \text{sim} \left[\partial'^\mu \partial^\nu + \partial'^\nu \partial^\mu - g^{\mu\nu} (\partial'_\alpha \partial^\alpha - m^2) \right] T[\phi(x) \phi(x')], \quad (4.20)$$

onde definimos o limite simétrico como

$$\lim_{x' \rightarrow x} \text{sim} \equiv \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} + \lim_{x' \rightarrow x^-} \right]. \quad (4.21)$$

Uma vez definida a expressão para o tensor energia-momento, regularizada pelo método de separação de pontos, vamos agora analisar algumas propriedades do operador cronológico. Primeiro, temos que

$$\begin{aligned} \partial_\mu T[\phi(x) \phi(x')] &= \partial_\mu [\Theta(t - t') \phi(x) \phi(x') + \Theta(t' - t) \phi(x') \phi(x)] \\ &= \delta_\mu^0 \delta(t - t') [\phi(x), \phi(x')] + T[\partial_\mu \phi(x) \phi(x')]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Uma vez que $\phi(x)$ e $\phi(x')$ comutam quando $t = t'$ (condição assegurada na expressão acima pela delta de Dirac) temos

$$\partial_\mu T[\phi(x)\phi(x')] = T[\partial_\mu\phi(x)\phi(x')]. \quad (4.23)$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu\partial^\mu T[\phi(x)\phi(x')] &= \partial_\mu T[\partial^\mu\phi(x)\phi(x')] \\ &= \delta(t-t')[\partial^0\phi(x), \phi(x')] + T[\partial_\mu\partial^\mu\phi(x)\phi(x')], \end{aligned} \quad (4.24)$$

que, utilizando a relação de comutação (2.53), se reduz a:

$$\partial_\mu\partial^\mu T[\phi(x)\phi(x')] = -i\delta^4(x-x') + T[\partial_\mu\partial^\mu\phi(x)\phi(x')]. \quad (4.25)$$

Mas, uma vez que $\phi(x)$ é solução da equação de Klein-Gordon (2.40), temos que

$$T[\partial_\mu\partial^\mu\phi(x)\phi(x')] = T[-m^2\phi(x)\phi(x')] = -m^2T[\phi(x)\phi(x')] \quad (4.26)$$

e, portanto, o operador cronológico satisfaz

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)T[\phi(x)\phi(x')] = -i\delta^4(x-x'). \quad (4.27)$$

Apesar da nítida semelhança – exceto por um fator $-i$ – da equação acima (4.27) com a equação (4.1) que define a função de Green, devemos lembrar que $T[\phi(x)\phi(x')]$ é um operador, enquanto que $G(x, x')$ é uma função. Desta forma, devemos antes tomar o valor esperado da equação acima, no vácuo, para então escrevermos:

$$G(x, x') = i \langle 0 | T[\phi(x)\phi(x')] | 0 \rangle. \quad (4.28)$$

Por fim, tomando o valor esperado da equação (4.20) e substituindo nela a igualdade acima, temos finalmente que

$$\langle 0 | T^{\mu\nu} | 0 \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \text{sim} [\partial'^\mu\partial^\nu + \partial'^\nu\partial^\mu - g^{\mu\nu}(\partial'_\alpha\partial^\alpha - m^2)] G(x, x'). \quad (4.29)$$

Em particular, temos para o valor esperado da densidade de energia no vácuo

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} [\partial'_0\partial_0 + \partial'_j\partial_j + m^2] G(x, x'). \quad (4.30)$$

4.3 Efeito Casimir a partir das funções de Green

No intuito de melhor exemplificarmos o método desenvolvido na seção anterior, vamos agora considerar o efeito Casimir, utilizando funções de Green, para um dos casos mais simples: o campo escalar real, de massa nula e sujeito a condições de contorno homogêneas de Dirichlet nos pontos $x = 0$ e $x = a$. Desta forma, temos:

$$\phi(x = 0) = \phi(x = a) = 0. \quad (4.31)$$

Além disso, por simplicidade, mas sem perda de generalidade, vamos trabalhar em (1+1) dimensões, de modo que a equação de movimento para o campo ϕ fica dada por:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \phi(t, x) = 0. \quad (4.32)$$

À equação (4.32) acima, temos associada a seguinte equação para a função de Green:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] G(t, x; t', x') = \delta(x - x')\delta(t - t'), \quad (4.33)$$

com $G(t, x; t', x')$ satisfazendo as mesmas condições de contorno do campo, ou seja:

$$G(x = 0) = G(x = a) = 0. \quad (4.34)$$

Além disso, a função de Green é invariante sob translações temporais, de modo que podemos escrevê-la em termos de uma função de Green reduzida, $g(x, x')$, independente do tempo. Para isso, introduzimos a seguinte transformada de Fourier:

$$G(t, x; t', x') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g(x, x'). \quad (4.35)$$

Desta forma, ao substituirmos (4.35) em (4.33), temos que a função de Green reduzida deve satisfazer a seguinte equação:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega^2 \right] g(x, x') = \delta(x - x'), \quad (4.36)$$

e também a seguinte condição de contorno:

$$g(0, x') = g(a, x') = 0. \quad (4.37)$$

Para resolvermos a equação (4.36) na região entre as placas, isto é, $0 < x, x' < a$, devemos analisar separadamente dois casos, sendo eles quando $x < x'$ e quando $x > x'$.

i) Quando $x < x'$, temos que a equação (4.36) torna-se:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega^2 \right] g_1(x, x') = 0, \quad (4.38)$$

cujas soluções são dadas por

$$g_1(x, x') = A_1 \sin \omega x, \quad (4.39)$$

de modo a satisfazer a condição de contorno (4.37) em $x = 0$.

ii) Quando $x > x'$, a equação (4.36) torna-se novamente:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega^2 \right] g_2(x, x') = 0, \quad (4.40)$$

cujas soluções são dadas por

$$g_2(x, x') = A_2 \sin \omega(a - x), \quad (4.41)$$

de modo a satisfazer a condição de contorno (4.37) em $x = a$.

Desta forma temos:

$$g(x, x') = \begin{cases} A_1 \sin \omega x, & 0 < x < x' < a \\ A_2 \sin \omega(a - x), & 0 < x' < x < a \end{cases}, \quad (4.42)$$

restando-nos apenas determinar os coeficientes A_1 e A_2 .

Uma primeira relação entre estes coeficientes pode ser obtida devido à continuidade da função de Green que, no ponto $x = x'$, pode ser escrita como

$$g_1(x', x') = g_2(x', x'), \quad (4.43)$$

nos fornecendo a seguinte relação:

$$\frac{A_1}{\sin \omega(a - x')} = \frac{A_2}{\sin \omega x'} = A. \quad (4.44)$$

Desta forma, podemos escrever:

$$g(x, x') = \begin{cases} A \sin \omega(a - x') \sin \omega x, & 0 < x < x' < a \\ A \sin \omega x' \sin \omega(a - x), & 0 < x' < x < a \end{cases}, \quad (4.45)$$

ou, simplesmente:

$$g(x, x') = A \sin \omega x_{<} \sin \omega(a - x_{>}), \quad (4.46)$$

onde $x_{<}$ ($x_{>}$) é o menor (maior) entre x e x' .

Para determinarmos a constante A , integremos a equação (4.36) em um pequeno intervalo ϵ passando por $x = x'$,

$$-\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} d\left(\frac{dg(x, x')}{dx}\right) - \omega^2 \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx g(x, x') = \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx \delta(x - x'). \quad (4.47)$$

No limite em que $\epsilon \rightarrow 0$, temos

$$-\frac{dg_2(x, x')}{dx} + \frac{dg_1(x, x')}{dx} = 1, \quad (4.48)$$

nos possibilitando obter a seguinte relação:

$$A\omega \sin \omega x' \cos \omega(a - x') + A\omega \cos \omega x' \sin \omega(a - x') = 1, \quad (4.49)$$

de onde obtemos

$$A = \frac{1}{\omega \sin \omega a}. \quad (4.50)$$

Desta forma, para a região $0 < x, x' < a$, temos a seguinte função de Green reduzida:

$$g(x, x') = \frac{\sin \omega x_{<} \sin \omega(a - x_{>})}{\omega \sin \omega a}. \quad (4.51)$$

Devemos agora determinar a função de Green reduzida na região $x, x' > a$, para então podermos determinar a força de Casimir que atua na placa da direita, isto é, em $x = a$. Sendo assim, devemos resolver a equação:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right] g(x, x') = \delta(x - x'), \quad (4.52)$$

onde por conveniência introduzimos $\kappa^2 = -\omega^2$.

i) Quando $x < x'$, a equação (4.52) se reduz a

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right] g_3(x, x') = 0, \quad (4.53)$$

cuja solução é dada por

$$g_3(x, x') = B_3 \sinh \kappa(x - a), \quad (4.54)$$

de modo a satisfazer a condição de contorno (4.37) em $x = a$.

ii) Quando $x > x'$, a equação (4.52) se reduz novamente a

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right] g_4(x, x') = 0, \quad (4.55)$$

sendo sua solução dada por

$$g_4(x, x') = A_4 e^{\kappa x} + B_4 e^{-\kappa x}. \quad (4.56)$$

Devemos agora determinar as constantes B_3 , A_4 e B_4 para obtermos finalmente $g(x, x')$ na região $x, x' > a$.

Uma vez que a função de Green reduzida deve convergir no limite em que tomarmos $x \rightarrow \infty$, temos que o coeficiente A_4 deve ser nulo e, desta forma, obtemos:

$$g_4(x, x') = B_4 e^{-\kappa x}. \quad (4.57)$$

Antes de prosseguirmos é importante ressaltar que para obter a equação (4.57) acima, passamos implicitamente a considerar κ uma constante real e positiva, o que conseqüentemente implica em $\omega = \pm i\kappa$, ou seja, a constante ω passa agora a ser vista como uma constante imaginária. Tal implicação não nos leva a qualquer problema, uma vez que em momento algum havíamos feito qualquer restrição a ω . Além disso, a função de Green reduzida (4.51) para a região $0 < x, x' < a$ pode ser reescrita em termos de κ como

$$g(x, x') = \frac{\sinh \kappa x_{<} \sinh \kappa(a - x_{>})}{\kappa \sinh \kappa a}, \quad (4.58)$$

de onde vemos que tanto as condições de contorno (4.37) quanto a equação (4.36) continuam sendo satisfeitas.

Voltando agora para região $x, x' > a$, temos que a continuidade de $g(x, x')$ quando $x = x'$ pode ser escrita como:

$$g_3(x', x') = g_4(x', x'), \quad (4.59)$$

nos fornecendo a seguinte relação:

$$B_3 e^{\kappa x'} = \frac{B_4}{\sinh \kappa(a - x')} = B. \quad (4.60)$$

Deste modo podemos escrever:

$$g(x, x') = B \sinh \kappa(a - x_<) e^{-\kappa x_>}. \quad (4.61)$$

Integrando a equação (4.52) em um pequeno intervalo ϵ passando por $x = x'$ obtemos, no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$,

$$-\frac{dg_4(x, x')}{dx} + \frac{dg_3(x, x')}{dx} = 1, \quad (4.62)$$

ou, simplesmente:

$$B\kappa \sinh \kappa(x' - a)e^{-\kappa x'} + B\kappa \cosh \kappa(x' - a)e^{-\kappa x'} = 1. \quad (4.63)$$

Sendo assim, temos

$$B = -\frac{e^{\kappa a}}{\kappa}. \quad (4.64)$$

Substituindo na equação (4.61) o valor de B , dado acima em (4.64), obtemos para a região $x, x' > a$:

$$g(x, x') = \frac{\sinh \kappa(x_< - a)e^{-\kappa(x_> - a)}}{\kappa}. \quad (4.65)$$

Considerando a simetria envolvida no caso, é fácil notar que para a região $x, x' < 0$ obteremos um resultado semelhante ao obtido acima, na equação (4.65), dado por

$$g(x, x') = -\frac{\sinh(\kappa x_>)e^{\kappa x_<}}{\kappa}. \quad (4.66)$$

Uma vez determinadas as funções de Green reduzidas para as regiões $x, x' < 0$, $0 < x, x' < a$ e $x, x' > a$, podemos agora determinar as componentes do tensor energia-momento em cada uma delas. Pela equação (4.30), temos a seguinte expressão para o valor da densidade de energia no vácuo:

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} [\partial'_0 \partial_0 + \partial'_x \partial_x] G(x, x'). \quad (4.67)$$

Substituindo na equação (4.67) acima a transformada de Fourier (4.35) obtemos, em termos de $g(x, x')$,

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{2i} (\omega^2 + \partial'_x \partial_x) g(x, x')|_{x=x'}. \quad (4.68)$$

Uma vez que $\omega = \pm i\kappa$, podemos fazer a substituição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2i} \longrightarrow \int_0^{\infty} d\kappa, \quad (4.69)$$

de modo que a equação (4.68) fica da seguinte forma

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} (-\kappa^2 + \partial'_x \partial_x) g(x, x')|_{x=x'}. \quad (4.70)$$

Substituindo (4.58) na equação acima, encontramos

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa \coth \kappa a \quad (4.71)$$

na região entre as barreiras. Da mesma forma, substituindo (4.65) ou (4.66) em (4.70), encontramos o resultado abaixo, válido tanto para $x < 0$ quanto para $x > a$

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa. \quad (4.72)$$

Observando as duas expressões acima, para as densidades de energia entre as barreiras e fora delas, não é difícil notar que ambas são divergentes. Entretanto, enquanto a primeira é dependente da distância entre as barreiras (e portanto sujeita a uma interpretação física em termos de forças entre elas), a segunda não passa de uma constante divergente e espúria, que pode ser subtraída (de ambas) para torná-las finitas. Note que, manipulando algebricamente o integrando de (4.71), podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{00}|0\rangle &= - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{2\kappa}{e^{2\kappa a} - 1} - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa \\ &= - \frac{\pi}{24a^2} - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa, \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde o primeiro termo, já integrado, é o conhecido resultado obtido por Lüscher et al. [28, 29] para a densidade de energia de Casimir, enquanto o segundo é a própria

constante divergente obtida em (4.72).

De fato, a densidade de energia das regiões exteriores às barreiras nada mais é que a própria densidade de energia do vácuo quando não impomos condições de contorno. Tal fato pode ser verificado ao tomarmos o limite $a \rightarrow \infty$ em (4.71) e (4.73) – limite este em que supostamente, por separarmos as barreiras por uma distância infinita, representaria a situação sem condições de contorno – e pode ser interpretado como um reflexo da extensão da própria região que, por ser infinita, comporta todo e qualquer comprimento de onda.

4.4 Tensor energia-momento

De forma análoga à que fizemos no final da seção anterior, podemos calcular o valor esperado das outras componentes do tensor energia-momento no vácuo. Em particular, a equação (4.29) nos informa que a componente $\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle$ é dada pela expressão

$$\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} [\partial'_0 \partial_0 + \partial'_x \partial_x] G(x, x'), \quad (4.74)$$

que, por ser a mesma que (4.69), implica em

$$\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle = \langle 0 | T_{00} | 0 \rangle. \quad (4.75)$$

A igualdade acima é válida tanto no espaço entre as barreiras quanto fora dele, e já era esperada por estarmos trabalhando com massa nula e em (1+1) dim – como veremos mais a frente o mesmo não ocorre quando consideramos o campo massivo ou em um número maior de dimensões espaciais. Assim, a força de Casimir no ponto $x = a$ é dada por

$$\begin{aligned} F &= \langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle |_{x=a^-} - \langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle |_{x=a^+} \\ &= \langle 0 | T_{00} | 0 \rangle |_{x=a^-} - \langle 0 | T_{00} | 0 \rangle |_{x=a^+}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Substituindo as expressões (4.72) e (4.73) na equação acima obtemos novamente o resultado de Lüscher, ou seja

$$F = -\frac{\pi}{24a^2}, \quad (4.77)$$

onde o sinal negativo indica que a força é de atração. As substituições feitas para obtermos a equação acima – e em particular o claro cancelamento do termo divergente (4.72), presente em ambas – ajudam a esclarecer nosso comentário, feito anteriormente, sobre tal termo ser uma constante espúria e ausente de significado físico no que diz respeito a forças atuando sobre as barreiras.

Voltando-nos agora para as componentes fora da diagonal, de acordo com (4.29) temos

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{0x}|0\rangle = \langle 0|T_{x0}|0\rangle &= -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \text{sim} [\partial'_x \partial_0 + \partial'_0 \partial_x] G(x, x') \\ &= -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \text{sim} \int \frac{d\omega}{2\pi} [-i\omega \partial'_x + i\omega \partial_x] g(x, x'). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Mas

$$\begin{aligned} \lim_{x' \rightarrow x} \text{sim} [-i\omega \partial'_x + i\omega \partial_x] g(x, x') &= \frac{1}{2} \left[\lim_{x' \rightarrow x^+} + \lim_{x' \rightarrow x^-} \right] [-i\omega \partial'_x + i\omega \partial_x] g(x, x') \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x} [-i\omega (\partial_{x>} + \partial_{x<}) + i\omega (\partial_{x<} + \partial_{x>})] g(x_{<}, x_{>}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

e, portanto, o tensor energia-momento possui apenas as componentes diagonais não nulas, podendo ser escrito como

$$\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle = \left[u_{vac} - \frac{\pi}{24a^2} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

se $0 < x < a$ e

$$\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle = u_{vac} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

se $x < 0$ ou $x > a$, onde

$$u_{vac} = - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa \quad (4.82)$$

é a energia do vácuo sem condições de contorno.

Capítulo 5

Particularidades existentes para
($n+1$) dimensões e para campos
massivos

5.1 Introdução

No capítulo anterior, introduzimos o método que utilizaremos no restante deste trabalho para calcular o valor esperado do tensor energia-momento no estado de vácuo. Além disso, exemplificamos o método introduzido aplicando-o ao caso unidimensional em que o campo escalar real, e de massa nula, é submetido à condição de contorno de Dirichlet em dois pontos. Tais pontos, como de costume, representam duas placas que interagem através das flutuações de campo, produzindo o efeito Casimir. Além disso, como já era de se esperar, vimos que a energia de Casimir só foi obtida ao subtrairmos do termo original uma parte constante e divergente – parte esta que identificamos como a energia do vácuo sem condições de contorno. De fato, o presente capítulo tem como objetivo não apenas mostrar outros tipos de divergência que aparecerão mais a frente – quando, por exemplo, incluímos mais dimensões espaciais ou considerarmos um campo massivo – mas também desenvolver métodos simples e rápidos para identificá-los e excluí-los, de modo a evitar que futuramente (principalmente no capítulo seguinte) tenhamos que desviar nossa atenção do objetivo principal.

5.2 O campo escalar real em $(n+1)$ dimensões

Ao trabalharmos em mais de uma dimensão espacial nos deparamos com novos termos divergentes – além, é claro, daquele já encontrado no capítulo anterior, que identificamos como a energia do vácuo quando não se impõem condições de contorno. Veremos nesta seção que estes novos termos também são espúrios e, de quebra, aprenderemos como evitar sua aparição. Continuaremos impondo ao campo escalar condições de contorno de Dirichlet e manteremos a simetria do problema em torno do eixo x . Deste modo, a função de Green será invariante sob translações nos eixos transversais à x – tanto o temporal quanto os espaciais – e sua transformada de Fourier será escrita da

seguinte forma:

$$G(x, x') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(x^0 - x'^0)} \prod_{i=2}^n \int \frac{d\kappa^i}{2\pi} e^{-i\kappa^i(x^i - x'^i)} g(x, x'). \quad (5.1)$$

Pela expressão acima, vemos que a função de Green reduzida deve satisfazer a mesma equação (4.52) do capítulo anterior, dada por

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right] g(x, x') = \delta(x - x'), \quad (5.2)$$

porém agora com $\kappa^2 = -\omega^2 + \sum_{i=2}^n (\kappa^i)^2$. Como a equação e as condições de contorno impostas à função de Green reduzida são as mesmas do capítulo anterior, sua solução também será a mesma em cada região, dada pelo seguinte conjunto de equações: (4.58), (4.65) e (4.66). Uma vez determinada a função de Green reduzida, podemos obter a densidade de energia integrando

$$t_{00} = \frac{1}{2i} (2\omega^2 + \kappa^2 + \partial_x \partial_{x'}) g|_{x=x'} \quad (5.3)$$

sobre ω e sobre cada κ^i , com $i \neq 1$. Lembrando que, por ser $\omega = \pm i\kappa^0$, podemos fazer a substituição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{i} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa^0, \quad (5.4)$$

de modo que o resultado encontrado para a região $0 < x, x' < a$ é dado por

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=0; i \neq 1}^n d\kappa^i \right) \frac{(\kappa^0)^2 \cosh \kappa a + (\kappa^2 - (\kappa^0)^2) \cosh \kappa(2x - a)}{2\kappa \sinh \kappa a}. \quad (5.5)$$

Podemos simplificar a expressão acima e escrevê-la de forma mais simétrica ao notarmos que, sendo os diversos κ^i , $i \neq 1$, variáveis mudas de integração integradas entre os mesmos limites, de uma forma geral temos

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=0; i \neq 1}^n d\kappa^i \right) (\kappa^0)^2 f(\kappa) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=0; i \neq 1}^n d\kappa^i \right) (\kappa^2)^2 f(\kappa) = \\ &\dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=0; i \neq 1}^n d\kappa^i \right) (\kappa^n)^2 f(\kappa), \end{aligned} \quad (5.6)$$

somando as n formas escritas acima e dividindo por n temos

$$I = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=0; i \neq 1}^n d\kappa^i \right) \kappa^2 f(\kappa), \quad (5.7)$$

que pode ser reescrita, em coordenadas polares esféricas, como

$$I = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^{n+1} f(\kappa). \quad (5.8)$$

Sendo assim, temos

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \left[\coth \kappa a + (n-1) \frac{\cosh \kappa(2x-a)}{\sinh \kappa a} \right]. \quad (5.9)$$

Na expressão acima, é fácil notar que o primeiro termo corresponde àquele da equação (4.71) do capítulo anterior, que inclui a densidade de energia de Casimir mais a do vácuo sem condições de contorno (divergente), e que pode ser escrito como

$$-\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \left[\frac{2\kappa^n}{e^{2\kappa a} - 1} + \kappa^n \right] = -\frac{(n-1)! \zeta(n+1)}{4^n a^{n+1} \pi^{n/2} \Gamma(n/2)} + u_{vac}. \quad (5.10)$$

Já o segundo termo é aquele mencionado no início da seção, ficando agora evidente porque ele só aparece quando trabalhamos em um número de dimensões espaciais n maior que um. Para mostrarmos que o novo termo encontrado é de fato espúrio, basta integrá-lo na variável x entre 0 e a ,

$$\int_0^a dx \frac{\cosh \kappa(2x-a)}{\sinh \kappa a} = \frac{1}{\kappa}, \quad (5.11)$$

obtendo uma energia constante (independente da distância a entre as barreiras) e divergente, que pode ser descartada devido à sua irrelevância.

Ainda na região entre as duas barreiras, $0 < x, x' < a$, voltamos nossa atenção para a componente $\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle$, dada por

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle &= \frac{1}{2i} (\partial'_x \partial_x - \kappa^2) G(x, x') \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=0; i \neq 1}^n d\kappa^i \right) \frac{\kappa^2 \sinh \kappa x \sinh \kappa(a-x) + \kappa^2 \cosh \kappa x \cosh \kappa(a-x)}{2\kappa \sinh \kappa a} \\ &= -\frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=0; i \neq 1}^n d\kappa^i \right) \kappa \coth \kappa a, \end{aligned} \quad (5.12)$$

cuja integral pode ser escrita em coordenadas esféricas, seguindo o mesmo procedimento dado por (5.6), (5.7) e (5.8), resultando em

$$\begin{aligned}\langle 0|T_{xx}|0\rangle &= -\frac{n\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)}\int_0^\infty d\kappa\kappa^n\coth\kappa a \\ &= -\frac{n!\zeta(n+1)}{4^n a^{n+1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)}+n.u_{vac}.\end{aligned}\quad (5.13)$$

Note que o resultado acima é igual a n vezes (5.10), onde n é o número de dimensões espaciais, e é equivalente ao $\langle 0|T_{xx}|0\rangle$ encontrado no capítulo anterior, onde estamos usando a palavra equivalente no sentido de não ter aparecido novos termos divergentes devido ao maior número de dimensões espaciais.

Para as outras componentes da diagonal principal temos

$$t_{jj} = \frac{1}{2i}(2(\kappa^j)^2 - \kappa^2 - \partial_x\partial_{x'})g|_{x=x'}.\quad (5.14)$$

Comparando (5.14) com (5.3), não é difícil perceber que ambas produzem o mesmo resultado, exceto por um fator -1 , quando integradas sobre ω e sobre cada κ_i ($i > 1$). Para que tal fato fique mais claro, basta lembrar que $\omega^2 = -(\kappa^0)^2$ e que κ^0 e κ^j são variáveis mudas de integração integradas sobre os mesmos limites. Por fim, temos que as componentes fora da diagonal principal se anulam, de modo que podemos escrever o tensor energia-momento como

$$\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle = u\begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 0 & n & O \\ O & O & -I \end{pmatrix} + g(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 0 & 0 & O \\ O & O & -I \end{pmatrix},\quad (5.15)$$

onde O e I são, respectivamente, as matrizes nula e identidade (com dimensões apropriadas a cada caso) e u e $g(x)$ são definidos abaixo:

$$u = u_{vac} - \frac{(n-1)!\zeta(n+1)}{4^n a^{n+1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)},\quad (5.16)$$

$$g(x) = -\frac{(n-1)\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)}\int_0^\infty d\kappa\kappa^n\frac{\cosh\kappa(2x-a)}{\sinh\kappa a}.\quad (5.17)$$

Tendo localizado os novos termos divergentes e espúrios que surgem quando trabalhamos em mais de uma dimensão espacial, vamos agora mostrar um método simples

e natural de evitar que eles surjam. Tal método pode ser encontrado na referência [30], onde o autor, apoiando-se na ambiguidade existente ao se definir o tensor energia-momento, deixa de lado a sua forma canônica e passa a usar a conforme, definida por

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{n-1}{4n} (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha) \phi^2, \quad (5.18)$$

onde n é o número de dimensões espaciais e cujo traço, devido à equação de movimento $\partial^2 \phi = 0$, é nulo:

$$\tilde{T}^\mu{}_\mu = 0. \quad (5.19)$$

Além disso, é fácil notar que o novo termo possui divergência nula, de modo que a energia e o momento permanecem inalterados.

Como intencionamos usar o tensor energia-momento conforme, ao invés do canônico, devemos calcular seu valor esperado no estado de vácuo $\langle 0 | \tilde{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle$. Para isso, basta subtrair de (5.15) o termo

$$\frac{n-1}{4n} (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial^2) \langle \phi^2 \rangle = \frac{n-1}{4n} (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial^2) \frac{G(x, x)}{i}, \quad (5.20)$$

tendo sempre em mente que $G(x, x)$ é uma função apenas da variável x .

Começando com a componente $\langle 0 | \tilde{T}_{00} | 0 \rangle$, temos para o termo extra:

$$\begin{aligned} -\frac{n-1}{4n} (\partial_0^2 - \partial^2) \frac{G(x, x)}{i} &= -\frac{n-1}{4n} \partial_x^2 \frac{G(x, x)}{i} \\ &= -\frac{(n-1)\pi^{n/2}}{4(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^{n-2} \partial_x^2 \frac{\sinh \kappa x \sinh \kappa(a-x)}{\sinh \kappa a} \\ &= -\frac{(n-1)\pi^{n/2}}{4(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^{n-2} \frac{-2\kappa^2 \cosh \kappa(2x-a)}{\sinh \kappa a} \\ &= -g(x). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Já para $\langle 0 | \tilde{T}_{xx} | 0 \rangle$ temos

$$-\frac{n-1}{4n} (\partial_x^2 + \partial^2) \frac{G(x, x)}{i} = 0, \quad (5.22)$$

uma vez que as derivadas em relação à variável x se anulam e $G(x, x)$ é função apenas dela.

Para $\langle 0 | \tilde{T}_{jj} | 0 \rangle$, com $j > 1$, temos

$$\begin{aligned} -\frac{n-1}{4n} (\partial_0^2 + \partial^2) \frac{G(x, x)}{i} &= \frac{n-1}{4n} \partial_x^2 \frac{G(x, x)}{i} \\ &= g(x). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por fim, não é difícil ver que as componentes fora da diagonal principal se anulam e que, portanto, o tensor energia-momento conforme é dado por

$$\langle 0 | \tilde{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle = u \begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 0 & n & O \\ O & O & -I \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Resultados análogos a este podem ser obtidos também para as regiões $x, x' < 0$ e $x, x' > 0$.

5.3 O campo escalar real massivo

A exemplo do que vimos na seção anterior, também encontramos novos termos quando consideramos o campo massivo. Porém, embora estes novos termos também sejam irrelevantes no que diz respeito a forças atuando sobre as barreiras, veremos que nem todos são divergentes. Continuaremos a trabalhar com o campo escalar e real mas, para simplificarmos, voltaremos a trabalhar em (1+1) dimensões, uma vez que mais dimensões espaciais não trariam qualquer contribuição aos efeitos provocados por ser o campo massivo. Desta forma, voltamos a escrever a função de Green pela transformada de Fourier introduzida em (4.35), dada por:

$$G(t, x; t', x') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g(x, x'). \quad (5.25)$$

Sendo assim, a função de Green reduzida terá agora que satisfazer a seguinte equação:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 + m^2 \right] g(x, x') = \delta(x - x'), \quad (5.26)$$

onde já fizemos $\kappa^2 = -\omega^2$. Além disso, podemos também introduzir $\kappa' = \sqrt{\kappa^2 + m^2}$ de modo a obtermos

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa'^2 \right] g(x, x') = \delta(x - x'). \quad (5.27)$$

Note que esta é a mesma equação (4.53) e (5.2), porém com a substituição $\kappa \rightarrow \kappa'$, de modo que sua solução pode ser encontrada ao fazermos a mesma substituição nas soluções (4.58), (4.65) e (4.66).

Com a função de Green reduzida determinada, podemos obter a densidade de energia pela equação

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{00}|0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{2i} (\omega^2 + m^2 + \partial_x \partial_{x'}) g|_{x=x'} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} (-\kappa'^2 + 2m^2 + \partial'_x \partial_x) g(x, x')|_{x=x'}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde fizemos novamente a substituição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{i} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa. \quad (5.29)$$

Assim, encontramos para a região $x < 0$

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\kappa'} - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{m^2}{\kappa'} e^{2\kappa'x}, \quad (5.30)$$

para $0 < x < a$

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\kappa'} \coth \kappa' a - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{m^2}{\kappa'} \frac{\cosh \kappa'(a - 2x)}{\sinh \kappa' a} \quad (5.31)$$

e para $x > a$

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\kappa'} - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{m^2}{\kappa'} e^{-2\kappa'(x-a)}. \quad (5.32)$$

Note que, nas três soluções acima, o primeiro termo corresponde ao resultado obtido no capítulo anterior, ou seja, ele contém a densidade de energia de Casimir mais a do vácuo sem condições de contorno, podendo a última ser facilmente obtida ao fazermos x infinitamente longe das barreiras nas equações (5.30) e (5.32), e é dada agora por

$$u_{vac} = - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\kappa'} = - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + m^2}}. \quad (5.33)$$

Já o segundo termo, proporcional ao quadrado da massa, pode ser integrado na variável x entre os limites de cada região, para em seguida ser integrado sobre κ . Desta forma,

para a região $0 < x < a$ temos

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \int_0^a dx \frac{m^2 \cosh \kappa'(a-2x)}{\kappa' \sinh \kappa'a} &= - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{m^2}{\kappa^2 + m^2} \\ &= -\frac{m}{4}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

enquanto para as regiões $x < 0$ e $x > a$ temos

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dx \frac{m^2}{\kappa'} e^{2\kappa'x} &= - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \int_a^\infty dx \frac{m^2}{\kappa'} e^{-2\kappa'(x-a)} = - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{m^2}{2(\kappa^2 + m^2)} \\ &= -\frac{m}{8}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Note que, como foi dito no início da seção, os novos termos que aparecem devido à massa do campo escalar não são divergentes mas, mesmo assim, são espúrios, uma vez que não dependem de distância entre as barreiras. Mesmo assim, a energia de Casimir é alterada pela presença da massa, como podemos ver abaixo

$$\begin{aligned} u_{cas} &= - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\kappa'} \coth \kappa'a + \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\kappa'} \\ &= - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{2\kappa^2/\kappa'}{e^{2\kappa'a} - 1}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Uma vez que o integrando da equação acima é, em módulo, menor que o da (4.73) para qualquer valor de κ entre os limites de integração, a integral acima resultará em uma energia de Casimir menor que aquela dada pelo resultado de Lüscher. No limite em que a massa tende a zero, obtém-se novamente o resultado de Lüscher.

Voltando agora nossa atenção para a componente $\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle &= \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{2i} (\omega^2 - m^2 + \partial'_x \partial_x) g(x, x')|_{x=x'} \\ &= \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} (-\kappa'^2 + \partial'_x \partial_x) g(x, x')|_{x=x'}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

que na região $0 < x < a$ resulta em

$$\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle = \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa' \coth \kappa'a. \quad (5.38)$$

Já para as regiões externas às barreiras obtemos resultados iguais, dados por

$$\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle = - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa'. \quad (5.39)$$

Desta forma, a força de Casimir sobre a barreira da direita será dada por

$$\begin{aligned}
 F &= \langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle |_{x=a^-} - \langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle |_{x=a^+} \\
 &= - \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{2\kappa'}{e^{2\kappa'a} - 1}.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Note que o integrando da equação (5.40) acima também é menor, em módulo, que o da (4.73), de modo que para o campo massivo a força de Casimir é menor que para o não massivo. De fato, quanto maior a massa do campo, menor a força de Casimir entre as barreiras.

Capítulo 6

Efeito Casimir para N potenciais do
tipo barreira em $n+1$ dimensões

6.1 Introdução

Nos capítulos anteriores determinamos as funções de Green reduzidas para um campo escalar real interagindo com fronteiras submetidas à condição de contorno de Dirichlet. A partir delas, foi possível determinarmos a força e a energia de Casimir, via tensor energia-momento, para cada caso analisado. Neste capítulo, estenderemos nosso tratamento para um caso mais geral, onde o campo escalar real, novamente em $(n+1)$ dimensões, interage com N regiões de diferentes potenciais, modelados por funções de graus. Dizemos que o presente caso é mais geral pois, além de aplicável a qualquer número de dimensões e barreiras, nos permite reobter os resultados dos capítulos anteriores quando tomamos os limites corretos. De fato, veremos mais a frente que não só os resultados dos capítulos anteriores podem ser reobtidos, mas também aqueles do caso em que as barreiras são modeladas por funções delta de Dirac.

Para construirmos nosso modelo, começamos por imaginar todo o espaço coberto por N regiões de diferentes potenciais ao longo do eixo x , de forma que somos levados à seguinte lagrangiana de interação:

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2}\lambda_i\sigma_i(x)\phi^2(x), \quad (6.1)$$

onde σ_i é dado por:

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} 1, & x_{i-1} < x < x_i \\ 0, & \text{outros} \end{cases} . \quad (6.2)$$

Devemos mencionar que é muito comum encontrarmos na literatura trabalhos onde $\sigma(x)$ é definido como o inverso da largura da região onde se encontra, de modo que no limite em que tal região se torna um único ponto, $\sigma(x)$ se torna um delta de Dirac. Optamos pela definição (6.2) para que o valor do potencial em cada região seja determinado exclusivamente por λ – que, por sua vez, passa a ter dimensão de inverso do comprimento ao quadrado. Porém, sempre que necessário, podemos redefinir λ da maneira que julgarmos melhor e, assim, cobriremos cada caso que seja de nosso interesse.

Assim como nos capítulos anteriores, a energia e a força de Casimir serão calculadas a partir do tensor energia-momento, sendo este, na i -ésima região, obtido pela aplicação da seguinte equação à função de Green

$$\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle_i = -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} [\partial'^\mu \partial^\nu + \partial^\nu \partial'^\mu - g^{\mu\nu} (\partial'_\alpha \partial^\alpha - m^2 - \lambda_i)] G(x, x'), \quad (6.3)$$

cuja transformada de Fourier, da dimensão temporal e das dimensões espaciais transversais, é dada por

$$G(x, x') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(x^0 - x'^0)} \prod_{i=2}^n \int \frac{d\kappa^i}{2\pi} e^{-i\kappa^i(x^i - x'^i)} g(x, x'). \quad (6.4)$$

Pela lagrangiana (6.1) e pela transformada (6.4) acima, temos que a função de Green reduzida deve satisfazer a seguinte equação não homogênea de Klein-Gordon:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 + m^2 + \sum_{i=1}^N \lambda_i \sigma_i(x) \right] g(x, x') = \delta(x - x'), \quad (6.5)$$

onde $\kappa^2 = -\omega^2 + \sum_{i=2}^n (\kappa^i)^2$ é uma constante.

A solução geral da equação (6.5) acima quando x e x' , com $x \neq x'$, estão localizados no interior da j -ésima e da i -ésima região¹, respectivamente, é dada por

$$g_j^i(x, x') = A_j^i e^{\kappa_j x} + B_j^i e^{-\kappa_j x}, \quad (6.6)$$

onde

$$\kappa_j = \sqrt{\kappa^2 + m^2 + \lambda_j}. \quad (6.7)$$

Desta forma, podemos considerar uma região qualquer como sendo um espaço entre duas barreiras, bastando para isso fazermos $\lambda = 0$ em seu interior. Por fim, faremos também a substituição $\omega^2 = -(\kappa^0)^2$, tal que κ^0 seja real, de modo que κ_j seja sempre um número real e positivo.

¹Note que, ao fixarmos x' , a região em que $j = i$ possui duas regiões distintas para x , sendo uma com $x < x'$ e outra com $x > x'$, o que por sua vez implica que, enquanto x' pode ser colocado em N regiões distintas, x pode ser colocado em $N+1$.

6.2 Determinação dos coeficientes das funções de Green reduzidas

Para determinarmos os coeficientes A 's e B 's que aparecem nas soluções gerais, vamos agora impor à função de Green reduzida as três seguintes condições:

I - Não divergência (finitude): A função de Green deve ser sempre finita (não divergir), mesmo quando $x \rightarrow \pm\infty$.

II - Continuidade: A função de Green deve ser sempre contínua.

III - Descontinuidade da primeira derivada: Devido à função delta de Dirac no ponto $x = x'$, a primeira derivada da função de Green é descontínua nesse mesmo ponto, sendo ela contínua em todo resto do plano xx' .

Além disso, vamos analisar separadamente os casos em que $x < x'$, $x > x'$ e $x = x'$.

A) Quando $x < x'$:

Pela segunda condição, temos que no ponto $x = x_j$:

$$A_j^i e^{\kappa_j x_j} + B_j^i e^{-\kappa_j x_j} = A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} + B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}, \quad (6.8)$$

e pela terceira, temos que:

$$\kappa_j (A_j^i e^{\kappa_j x_j} - B_j^i e^{-\kappa_j x_j}) = \kappa_{j+1} (A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} - B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}). \quad (6.9)$$

As duas relações acima podem ser combinadas de modo a fornecer

$$A_j^i = \frac{e^{-\kappa_j x_j}}{2\kappa_j} [(\kappa_j + \kappa_{j+1})A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} + (\kappa_j - \kappa_{j+1})B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}] \quad (6.10)$$

e

$$B_j^i = \frac{e^{\kappa_j x_j}}{2\kappa_j} [(\kappa_j - \kappa_{j+1})A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} + (\kappa_j + \kappa_{j+1})B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}]. \quad (6.11)$$

No entanto, a aplicação das três condições de contorno nos diversos pontos que limitam as regiões, incluindo a primeira condição quando $x \rightarrow -\infty$, também nos possibilita encontrar relações do tipo

$$\Theta_{ij} e^{\kappa_j x_{j-1}} A_j^i + \Theta'_{ij} e^{-\kappa_j x_{j-1}} B_j^i = 0 \quad (6.12)$$

e

$$\Theta_{ij+1} e^{\kappa_{j+1} x_j} A_{j+1}^i + \Theta'_{ij+1} e^{-\kappa_{j+1} x_j} B_{j+1}^i = 0 \quad (6.13)$$

para os coeficientes A e B de cada região. Desta forma, pelas equações (6.10) e (6.11), podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \Theta_{ij+1} \\ \Theta'_{ij+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j + \kappa_{j+1})e^{-\kappa_j \delta_j} & (\kappa_j - \kappa_{j+1})e^{\kappa_j \delta_j} \\ (\kappa_j - \kappa_{j+1})e^{-\kappa_j \delta_j} & (\kappa_j + \kappa_{j+1})e^{\kappa_j \delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{ij} \\ \Theta'_{ij} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

onde δ_j é a largura da j -ésima região.

Da mesma forma que fizemos acima, podemos expressar Θ_{ij} e Θ'_{ij} em função de Θ_{ij-1} e Θ'_{ij-1} , também podemos expressar Θ_{ij-1} e Θ'_{ij-1} em função de Θ_{ij-2} e Θ'_{ij-2} e assim por diante, de modo que no final obtemos para a i -ésima região (mas ainda com $x < x'$):

$$\begin{pmatrix} \Theta_{ii} \\ \Theta'_{ii} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2\kappa_{i-j}} \begin{pmatrix} (\kappa_{i-j} + \kappa_{i-j+1})e^{-\kappa_{i-j} \delta_{i-j}} & (\kappa_{i-j} - \kappa_{i-j+1})e^{\kappa_{i-j} \delta_{i-j}} \\ (\kappa_{i-j} - \kappa_{i-j+1})e^{-\kappa_{i-j} \delta_{i-j}} & (\kappa_{i-j} + \kappa_{i-j+1})e^{\kappa_{i-j} \delta_{i-j}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Theta_{i1} \\ \Theta'_{i1} \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Para seguirmos em frente nos resta agora determinarmos os coeficientes Θ_{i1} e Θ'_{i1} . Porém, não é difícil perceber que para a função de Green não divergir quando $x \rightarrow -\infty$ devemos ter $B_1^i = 0$, o que, pelas equações (6.11) e (6.14), nos leva a concluir que

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i1} \\ \Theta'_{i1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\kappa_1 \delta_1} \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Na verdade, a solução acima é apenas uma dentre as possíveis e foi escolhida por justamente cancelar o termo divergente $e^{\kappa_1 \delta_1}$ que apareceria como consequência de (6.14) – de fato, qualquer solução com $\Theta_{i1} = 0$ em que Θ'_{i1} fosse uma constante não nula seria possível. Por fim, devemos notar por (6.14) e (6.16) que as funções Θ_{ij} e Θ'_{ij} , para i e j quaisquer, não dependem de seu primeiro índice e, por isso, podem ser

escritas de forma mais compacta como Θ_j e Θ'_j , de modo que na i -ésima região teremos

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i(-)} \\ \Theta'_{i(-)} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2\kappa_{i-j}} \begin{pmatrix} (\kappa_{i-j} + \kappa_{i-j+1})e^{-\kappa_{i-j}\delta_{i-j}} & (\kappa_{i-j} - \kappa_{i-j+1})e^{\kappa_{i-j}\delta_{i-j}} \\ (\kappa_{i-j} - \kappa_{i-j+1})e^{-\kappa_{i-j}\delta_{i-j}} & (\kappa_{i-j} + \kappa_{i-j+1})e^{\kappa_{i-j}\delta_{i-j}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\kappa_1\delta_1} \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

onde o sinal negativo ao lado do sub-índice i foi acrescentado para indicar que estes são coeficientes Θ 's obtidos pela esquerda, ou seja, vindo da esquerda para direita desde a primeira até a i -ésima região.

B) Quando $x > x'$:

Novamente, temos pela segunda condição que no ponto $x = x_j$

$$A_j^i e^{\kappa_j x_j} + B_j^i e^{-\kappa_j x_j} = A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} + B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}, \quad (6.18)$$

e pela terceira que

$$\kappa_j (A_j^i e^{\kappa_j x_j} - B_j^i e^{-\kappa_j x_j}) = \kappa_{j+1} (A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} - B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}). \quad (6.19)$$

As duas relações acima serão agora, convenientemente, combinadas de modo a fornecer

$$A_{j+1}^i = \frac{e^{-\kappa_{j+1} x_j}}{2\kappa_{j+1}} [(\kappa_{j+1} + \kappa_j) A_j^i e^{\kappa_j x_j} + (\kappa_{j+1} - \kappa_j) B_j^i e^{-\kappa_j x_j}] \quad (6.20)$$

e

$$B_{j+1}^i = \frac{e^{\kappa_{j+1} x_j}}{2\kappa_{j+1}} [(\kappa_{j+1} - \kappa_j) A_j^i e^{\kappa_j x_j} + (\kappa_{j+1} + \kappa_j) B_j^i e^{-\kappa_j x_j}]. \quad (6.21)$$

A aplicação das três condições de contorno nos diversos pontos que limitam as regiões, incluindo a primeira condição quando $x \rightarrow +\infty$, nos possibilita agora encontrar relações do tipo

$$\Theta_j e^{\kappa_j x_j} A_j^i + \Theta'_j e^{-\kappa_j x_j} B_j^i = 0 \quad (6.22)$$

e

$$\Theta_{j+1} e^{\kappa_{j+1} x_{j+1}} A_{j+1}^i + \Theta'_{j+1} e^{-\kappa_{j+1} x_{j+1}} B_{j+1}^i = 0 \quad (6.23)$$

para os coeficientes A e B de cada região – note que já nos antecipamos e escrevemos os coeficientes Θ 's sem o sub-índice referente à região em que se encontra x' . Além disso, é importante notarmos a sutil diferença entre as equações (6.22) e (6.23), acima, e as equações (6.12) e (6.13), encontradas anteriormente. Enquanto as anteriores eram aplicadas na extremidade esquerda da região em questão, as duas acima são aplicadas na extremidade direita. Tal diferença é de extrema importância, pois implica na seguinte relação entre os coeficientes Θ 's :

$$\begin{pmatrix} \Theta_j \\ \Theta'_j \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_{j+1}} \begin{pmatrix} (\kappa_{j+1} + \kappa_j)e^{\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} & (\kappa_{j+1} - \kappa_j)e^{-\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} \\ (\kappa_{j+1} - \kappa_j)e^{\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} & (\kappa_{j+1} + \kappa_j)e^{-\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j+1} \\ \Theta'_{j+1} \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Usando o mesmo raciocínio usado anteriormente, obtemos para a i -ésima região (mas agora com $x > x'$)

$$\begin{pmatrix} \Theta_i \\ \Theta'_i \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=i+1}^N \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j + \kappa_{j-1})e^{\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j - \kappa_{j-1})e^{-\kappa_j\delta_j} \\ (\kappa_j - \kappa_{j-1})e^{\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j + \kappa_{j-1})e^{-\kappa_j\delta_j} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Theta_N \\ \Theta'_N \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Novamente, não é difícil perceber que para a função de green não divergir quando $x \rightarrow +\infty$ devemos ter $A_N^i = 0$, o que, pelas equações (6.20) e (6.24), nos leva a concluir que

$$\begin{pmatrix} \Theta_N \\ \Theta'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\kappa_N\delta_N} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Mais uma vez, ressaltamos que a solução acima é apenas uma dentre as possíveis, e também foi escolhida por cancelar um termo divergente, desta vez $e^{-\kappa_N\delta_N}$, que apareceria como consequência de (6.24) – de fato, qualquer solução com $\Theta'_N = 0$ em que Θ_N fosse uma constante não nula seria possível. Por fim, devemos notar que os coeficientes obtidos a partir de (6.25) são, em geral, diferentes daqueles obtidos por (6.17) e, por isso, acrescentaremos um sinal positivo ao lado do sub-índice i , indicando assim que estes são coeficientes Θ 's obtidos pela direita, ou seja, vindo da direita para esquerda desde a última até a i -ésima região. Sendo assim temos

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i(+)} \\ \Theta'_{i(+)} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=i+1}^N \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j + \kappa_{j-1})e^{\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j - \kappa_{j-1})e^{-\kappa_j\delta_j} \\ (\kappa_j - \kappa_{j-1})e^{\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j + \kappa_{j-1})e^{-\kappa_j\delta_j} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e^{-\kappa_N\delta_N} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

C) Quando $x = x'$:

Neste caso teremos que dividir a função de Green reduzida em duas, escrevendo

$$g_i^i(x, x') = A_{i(-)}^i e^{\kappa_i} + B_{i(-)}^i e^{-\kappa_i} \quad (6.28)$$

para $x < x'$ e

$$g_i^i(x, x') = A_{i(+)}^i e^{\kappa_i} + B_{i(+)}^i e^{-\kappa_i} \quad (6.29)$$

para $x > x'$.

A aplicação das condições de contorno **II** e **III** nos levam às seguintes relações

$$A_{i(-)}^i e^{\kappa_i x'} + B_{i(-)}^i e^{-\kappa_i x'} = A_{i(+)}^i e^{\kappa_i x'} + B_{i(+)}^i e^{-\kappa_i x'} \quad (6.30)$$

e

$$A_{i(-)}^i e^{\kappa_i x'} - B_{i(-)}^i e^{-\kappa_i x'} = A_{i(+)}^i e^{\kappa_i x'} - B_{i(+)}^i e^{-\kappa_i x'} + \frac{1}{\kappa_i}, \quad (6.31)$$

que, quando combinadas, nos fornecem

$$A_{i(-)}^i = A_{i(+)}^i + \frac{e^{-\kappa_i x'}}{2\kappa_i} \quad (6.32)$$

e

$$B_{i(-)}^i = B_{i(+)}^i - \frac{e^{\kappa_i x'}}{2\kappa_i}. \quad (6.33)$$

As relações (6.32) e (6.33) acima, com o auxílio de (6.12) e (6.22), nos possibilitam escrever os coeficientes A 's e B 's em função dos coeficientes Θ 's da seguinte forma:

$$A_{i(-)}^i = \frac{[\Theta_{i(+)} e^{\kappa_i(x_i - x')} - \Theta'_{i(+)} e^{-\kappa_i(x_i - x')}] \Theta'_{i(-)} e^{-\kappa_i x_{i-1}}}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})}, \quad (6.34)$$

$$B_{i(-)}^i = -\frac{[\Theta_{i(+)} e^{\kappa_i(x_i - x')} - \Theta'_{i(+)} e^{-\kappa_i(x_i - x')}] \Theta_{i(-)} e^{\kappa_i x_{i-1}}}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})}, \quad (6.35)$$

$$A_{i(+)}^i = -\frac{[\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x' - x_{i-1})} - \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x' - x_{i-1})}] \Theta'_{i(+)} e^{-\kappa_i x_i}}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})}, \quad (6.36)$$

$$B_{i(+)}^i = \frac{[\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x' - x_{i-1})} - \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x' - x_{i-1})}] \Theta_{i(+)} e^{\kappa_i x_i}}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})}. \quad (6.37)$$

Com os coeficientes determinados acima podemos, após pequenas manipulações algébricas, escrever de uma forma geral as funções de green reduzidas quando x e x' estão ambos na i -ésima região, o resultado encontrado segue abaixo:

$$g_i^i(x, x') = \frac{[\Theta_{i(+)} e^{\kappa_i(x_i - x_>)} - \Theta'_{i(+)} e^{-\kappa_i(x_i - x_>)}] [\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x < -x_{i-1})} - \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x < -x_{i-1})}]}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})}. \quad (6.38)$$

O resultado que encontramos acima é válido apenas quando x e x' encontram-se na mesma região e será utilizado nas próximas três seções para determinarmos as expressões para a densidade de energia, força de Casimir e tensor energia-momento. Feito isso, na última seção deste capítulo determinaremos uma expressão para a função de Green reduzida quando x e x' encontram-se em regiões distintas.

6.3 Determinação da energia de Casimir

Uma vez determinada a função de Green reduzida, a equação (6.3) nos leva à seguinte expressão para a densidade de energia da i -ésima região

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle_i = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=0; j \neq 1}^n d\kappa^j \right) \left[\frac{1}{2} (-2(\kappa^0)^2 + \kappa_i^2 + \partial_x \partial_{x'}) g_i^i(x, x') \right]_{x=x'}, \quad (6.39)$$

que, a exemplo do capítulo anterior, pode ser reescrita em coordenadas polares esféricas através da substituição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=0; j \neq 1}^n d\kappa^j \right) \longrightarrow \frac{n \cdot \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^{n-1}. \quad (6.40)$$

Lembrando que também podemos fazer $(\kappa^0)^2 \longrightarrow \frac{1}{n} \kappa^2$, de modo a obtermos uma expressão mais simétrica, temos

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle_i = -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \left[\left(\frac{-2\kappa^2}{n} + \kappa_i^2 + \partial_x \partial_{x'} \right) g_i^i(x, x') \right]_{x=x'}. \quad (6.41)$$

Ao substituírmos a função de Green reduzida (6.38) na equação acima, vemos que a densidade de energia da i -ésima região pode ser escrita como

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle_i = u_i + g_i(x), \quad (6.42)$$

tal que

$$u_i = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left[\frac{\kappa}{\kappa_i} \frac{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} + \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}}{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}} \right] \quad (6.43)$$

e

$$g_i(x) = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left(n \frac{\kappa_i}{\kappa} - \frac{\kappa}{\kappa_i} \right) \times \frac{\Theta'_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{-\kappa_i(x_i-x)} + \Theta_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{\kappa_i(x_i-x)}}{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}}. \quad (6.44)$$

Assim como na seção 2 do capítulo anterior, u_i contém a energia de Casimir (da i -ésima região) mais a do vácuo sem condições de contorno. De fato, manipulando u_i algebricamente podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \frac{2\kappa^{n+1}/\kappa_i}{\frac{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{2\kappa_i \delta_i} - 1}{\Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)}}} + \\ &\quad -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^{n+1}}{\sqrt{\kappa^2 + m^2 + \lambda_i}} \\ &= u_{cas}^i + u_{vac}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

É fácil notarmos a semelhança da expressão acima, para a energia de Casimir do presente caso, com as dos capítulos anteriores – ver equações (4.73), (5.10) e (5.36). Também não é difícil ver que a parte correspondente à energia do vácuo sem condições de contorno é a expressão geral que inclui (4.82), (5.10) e (5.33) como casos especiais. Já $g_i(x)$, corresponde àquele da equação (5.17) da seção 2 do capítulo anterior, e por isso voltaremos a usar o tensor energia-momento conforme, bastando para isso subtrair o termo

$$\frac{n-1}{4n} (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial^2) \frac{G(x, x)}{i} \quad (6.46)$$

da equação (6.3). Lembrando mais uma vez que $G(x, x)$ é uma função apenas da variável x , temos

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 \frac{G(x, x)}{i} &= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \partial_x^2 g_i^i(x, x) \\
&= -\frac{4n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \frac{\kappa_i}{\kappa} \times \\
&\quad \times \frac{\Theta'_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{-\kappa_i(x_i-x)} + \Theta_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{\kappa_i(x_i-x)}}{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}}.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Desta forma, para $\langle 0 | \tilde{T}_{xx} | 0 \rangle_i$, ao invés de $g_i(x)$ temos

$$\begin{aligned}
g_i'(x) &= -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left(\frac{\kappa_i}{\kappa} - \frac{\kappa}{\kappa_i} \right) \times \\
&\quad \times \frac{\Theta'_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{-\kappa_i(x_i-x)} + \Theta_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{\kappa_i(x_i-x)}}{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}} \\
&= -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left(\frac{m^2 + \lambda_i}{\kappa \cdot \kappa_i} \right) \times \\
&\quad \times \frac{\Theta'_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{-\kappa_i(x_i-x)} + \Theta_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{\kappa_i(x_i-x)}}{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}}, \tag{6.48}
\end{aligned}$$

que corresponde ao segundo termo de (5.31), proporcional ao quadrado da massa.

No intuito de exemplificar o método de cálculo que estamos desenvolvendo, vamos agora utilizá-lo para calcular a energia de uma única barreira. Para isso, façamos $N = 3$ e $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Desta forma, para a região no interior da barreira ($i = 2$) temos os seguintes coeficientes

$$\begin{pmatrix} \Theta_{2(-)} \\ \Theta'_{2(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} \kappa' - \kappa_2 \\ \kappa' + \kappa_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \Theta_{2(+)} \\ \Theta'_{2(+)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} \kappa' + \kappa_2 \\ \kappa' - \kappa_2 \end{pmatrix}, \tag{6.49}$$

onde $\kappa' = \sqrt{\kappa^2 + m^2}$, de modo que a densidade de energia fica dada por

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle_2 &= -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left[\frac{\kappa}{\kappa_2} \frac{(\kappa' + \kappa_2)^2 e^{\kappa_2 \delta_2} + (\kappa' - \kappa_2)^2 e^{-\kappa_2 \delta_2}}{(\kappa' + \kappa_2)^2 e^{\kappa_2 \delta_2} - (\kappa' - \kappa_2)^2 e^{-\kappa_2 \delta_2}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{m^2 + \lambda_2}{\kappa \cdot \kappa_2} \right) \frac{-\lambda_2 e^{\kappa_2(x-x_1)} e^{-\kappa_2(x_2-x)} - \lambda_2 e^{-\kappa_2(x-x_1)} e^{\kappa_2(x_2-x)}}{(\kappa' + \kappa_2)^2 e^{\kappa_2 \delta_2} - (\kappa' - \kappa_2)^2 e^{-\kappa_2 \delta_2}} \right].
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Subtraindo do resultado acima a parte correspondente a energia do vácuo, ver equação (6.45), e integrando o restante na variável x entre os limites da barreira, temos que sua energia será dada por

$$E_2 = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^n}{\kappa_2 \Delta} \left[2\kappa(\kappa' - \kappa_2)^2 e^{-\kappa_2 \delta_2} \delta_2 + \frac{2\lambda_2(m^2 + \lambda_2)}{\kappa} \cdot \frac{\sinh \kappa_2 \delta_2}{\kappa_2} \right], \quad (6.51)$$

onde usamos $\Delta = (\kappa' + \kappa_2)^2 e^{\kappa_2 \delta_2} - (\kappa' - \kappa_2)^2 e^{-\kappa_2 \delta_2}$.

A energia que encontramos acima é a energia de uma única barreira, e seus dois termos podem ser interpretados separadamente da seguinte forma: O primeiro termo está relacionado à força sofrida por cada extremidade da barreira. De fato, cada extremidade sofre uma força que aponta de fora para dentro e, portanto, a barreira como um todo tende a ser comprimida. No entanto, vale ressaltar que a resultante produzida por estas forças é nula e que portanto não há força de Casimir agindo na barreira como um todo. Já o segundo termo pode ser melhor compreendido se fizermos na equação acima a redefinição $\lambda_2 \rightarrow \lambda_2 h_2$, tal que $h_2 \delta_2 = 1$, e tomarmos o limite $\delta_2 \rightarrow 0$ e $h_2 \rightarrow \infty$, obtendo

$$E_s = \frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda + 2\kappa'}. \quad (6.52)$$

Os resultado (6.52), obtido acima, já é conhecido [31], sendo ele correspondente ao termo de superfície que surge quando modelamos as barreiras usando funções delta de Dirac. Tal energia de superfície ocorre devido à descontinuidade na primeira derivada da função de Green reduzida, sendo esta provocada pelo próprio delta de Dirac. No caso de barreiras modeladas por funções degraus, não temos termos de superfície – uma vez que a derivada da função de Green é contínua nos limites das barreira – mas, ainda assim, a energia correspondente a esses termos está presente.

6.4 Força de Casimir

Nesta seção encontraremos uma expressão para a força de Casimir que atua sobre a i -ésima barreira, localizada na região entre x_{i-1} e x_i . Tal força é dada pela diferença entre a componente $\langle 0|T_{xx}|0\rangle$ do tensor energia-momento nos limites externos à região de interesse,

$$F = \langle 0|T_{xx}|0\rangle|_{x=x_{i-1}^-} - \langle 0|T_{xx}|0\rangle|_{x=x_i^+}, \quad (6.53)$$

onde $\langle 0|T_{xx}|0\rangle$ é dado, na j -ésima região, por

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{xx}|0\rangle_j &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=0; i \neq 1}^n d\kappa^i \right) \left[\frac{1}{2}(-\kappa_j^2 + \partial_x \partial_{x'}) g_j^j(x, x') \right]_{x=x'} \\ &= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n [(-\kappa_j^2 + \partial_x \partial_{x'}) g_j^j(x, x')]_{x=x'}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Substituindo (6.38) na equação (6.54) acima encontramos

$$\langle 0|T_{xx}|0\rangle_j = n \cdot u'_j = -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \left[\frac{\kappa_j}{\kappa} \frac{\Theta_{j(+)} \Theta'_{j(-)} e^{\kappa_j \delta_j} + \Theta'_{j(+)} \Theta_{j(-)} e^{-\kappa_j \delta_j}}{\Theta_{j(+)} \Theta'_{j(-)} e^{\kappa_j \delta_j} - \Theta'_{j(+)} \Theta_{j(-)} e^{-\kappa_j \delta_j}} \right], \quad (6.55)$$

onde u' foi definido implicitamente devido a sua semelhança com u . Além disso, não é difícil percebermos que o termo extra dado pela equação (6.46) é nulo para a presente componente, de modo ela é a mesma nos tensores energia-momento canônico e conforme.

Antes de encontrarmos a força de Casimir sobre a i -ésima região, embora os coeficientes Θ sejam definidos para qualquer uma delas, não podemos deixar de notar que a expressão (6.53), com $\langle 0|T_{xx}|0\rangle$ definido por (6.55), nos dará o resultado em função dos coeficientes das regiões anterior e posterior – que para evitarmos confusões entre os índices chamaremos, respectivamente, de região A e região B – à de nosso interesse.

Assim

$$F = n \cdot u'_A - n \cdot u'_B, \quad (6.56)$$

tal que

$$u'_A = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \frac{\kappa_A}{\kappa} \frac{\Theta_{A(+)} \Theta'_{A(-)} e^{\kappa_A \delta_A} + \Theta'_{A(+)} \Theta_{A(-)} e^{-\kappa_A \delta_A}}{\Theta_{A(+)} \Theta'_{A(-)} e^{\kappa_A \delta_A} - \Theta'_{A(+)} \Theta_{A(-)} e^{-\kappa_A \delta_A}}, \quad (6.57)$$

e

$$u'_B = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \frac{\kappa_B}{\kappa} \frac{\Theta_{B(+)} \Theta'_{B(-)} e^{\kappa_B \delta_B} + \Theta'_{B(+)} \Theta_{B(-)} e^{-\kappa_B \delta_B}}{\Theta_{B(+)} \Theta'_{B(-)} e^{\kappa_B \delta_B} - \Theta'_{B(+)} \Theta_{B(-)} e^{-\kappa_B \delta_B}}. \quad (6.58)$$

Sendo assim, ficará mais claro se expressarmos estes coeficientes em função dos próprios Θ da i -ésima região:

Região A:

Para a região anterior à da barreira de interesse, temos que os coeficientes $\Theta_{A(-)}$ podem ser expressos em função dos $\Theta_{i(-)}$ pela equação (6.14), resultando em

$$\begin{pmatrix} \Theta_{A(-)} \\ \Theta'_{A(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_i} \begin{pmatrix} (\kappa_i + \kappa_A) e^{\kappa_A \delta_A} & (\kappa_i - \kappa_A) e^{\kappa_A \delta_A} \\ (\kappa_i - \kappa_A) e^{-\kappa_A \delta_A} & (\kappa_i + \kappa_A) e^{-\kappa_A \delta_A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{i(-)} \\ \Theta'_{i(-)} \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

Já os coeficientes $\Theta_{A(+)}$ podem ser expressos em termos dos $\Theta_{i(+)}$ pela equação (6.24), resultando em

$$\begin{pmatrix} \Theta_{A(+)} \\ \Theta'_{A(+)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_i} \begin{pmatrix} (\kappa_i + \kappa_A) e^{\kappa_i \delta_i} & (\kappa_i - \kappa_A) e^{-\kappa_i \delta_i} \\ (\kappa_i - \kappa_A) e^{\kappa_i \delta_i} & (\kappa_i + \kappa_A) e^{-\kappa_i \delta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{i(+)} \\ \Theta'_{i(+)} \end{pmatrix}. \quad (6.60)$$

Portanto, temos que nessa região

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle_A &= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \times \\ &\times \left\{ \frac{[(\kappa_i^2 - \kappa_A^2) \Theta_{i(-)} + (\kappa_i^2 + \kappa_A^2) \Theta'_{i(-)}] \Theta_{i(+)} e^{\kappa_i \delta_i}}{2\kappa_i \kappa (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})} + \right. \\ &\left. + \frac{[(\kappa_i^2 + \kappa_A^2) \Theta_{i(-)} + (\kappa_i^2 - \kappa_A^2) \Theta'_{i(-)}] \Theta'_{i(+)} e^{-\kappa_i \delta_i}}{2\kappa_i \kappa (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})} \right\}. \quad (6.61) \end{aligned}$$

Região B:

Da mesma forma, temos que para a região posterior à de interesse os coeficientes $\Theta_{B(-)}$

são dados em termos dos $\Theta_{i(-)}$ pela equação (6.14), resultando em

$$\begin{pmatrix} \Theta_{B(-)} \\ \Theta'_{B(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_i} \begin{pmatrix} (\kappa_i + \kappa_B)e^{-\kappa_i\delta_i} & (\kappa_i - \kappa_B)e^{\kappa_i\delta_i} \\ (\kappa_i - \kappa_B)e^{-\kappa_i\delta_i} & (\kappa_i + \kappa_B)e^{\kappa_i\delta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{i(-)} \\ \Theta'_{i(-)} \end{pmatrix}, \quad (6.62)$$

enquanto os coeficientes $\Theta_{B(+)}$ podem ser obtidos a partir dos $\Theta_{i(+)}$ pela equação (6.24), resultando em

$$\begin{pmatrix} \Theta_{B(+)} \\ \Theta'_{B(+)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_i} \begin{pmatrix} (\kappa_i + \kappa_B)e^{-\kappa_B\delta_B} & (\kappa_i - \kappa_B)e^{-\kappa_B\delta_B} \\ (\kappa_i - \kappa_B)e^{\kappa_B\delta_B} & (\kappa_i + \kappa_B)e^{\kappa_B\delta_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{i(+)} \\ \Theta'_{i(+)} \end{pmatrix}. \quad (6.63)$$

Sendo assim, temos que nessa região

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{xx}|0\rangle_B &= -\frac{n\cdot\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \times \\ &\left\{ \frac{[(\kappa_i^2 - \kappa_B^2)\Theta'_{i(+)} + (\kappa_i^2 + \kappa_B^2)\Theta_{i(+)}] \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i}}{2\kappa_i\kappa (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i})} + \right. \\ &\left. + \frac{[(\kappa_i^2 + \kappa_B^2)\Theta'_{i(+)} + (\kappa_i^2 - \kappa_B^2)\Theta_{i(+)}] \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i}}{2\kappa_i\kappa (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i})} \right\}. \quad (6.64) \end{aligned}$$

Pelo uso direto das equações (6.61) e (6.64), encontramos para a força de Casimir sobre a i -ésima região a expressão

$$\begin{aligned} F &= -\frac{n\cdot\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \times \\ &\times \left\{ \frac{(\kappa_A^2 - \kappa_B^2) (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} + \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i})}{2\kappa_i\kappa (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i})} + \right. \\ &+ \frac{(\kappa_i^2 - \kappa_A^2) (\Theta_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} + \Theta'_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i})}{2\kappa_i\kappa (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i})} + \\ &\left. - \frac{(\kappa_i^2 - \kappa_B^2) (\Theta'_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} + \Theta_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i})}{2\kappa_i\kappa (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i})} \right\}. \quad (6.65) \end{aligned}$$

No entanto, devemos nos lembrar que em boa parte das aplicações tanto A quanto B serão regiões de potencial nulo ($\lambda = 0$), de modo que $\kappa_A = \kappa_B = \sqrt{\kappa^2 + m^2}$. Com isso, a equação (6.65) se reduz a

$$F = -\frac{n\cdot\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \frac{\lambda_i}{\kappa_i\kappa} \frac{\Theta_{i(+)}\Theta_{i(-)} - \Theta'_{i(+)}\Theta'_{i(-)}}{\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i\delta_i}} \sinh \kappa_i\delta_i. \quad (6.66)$$

A aplicação dos coeficientes (6.49) na equação (6.66) nos mostra que, de fato, para uma única barreira não há força de Casimir, confirmando assim o comentário que fizemos no final da seção anterior. Podemos também encontrar a força de Casimir entre duas barreiras usando cinco regiões e impondo que $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$. Desta forma, teremos os coeficientes

$$\begin{pmatrix} \Theta_{4(-)} \\ \Theta'_{4(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{8\kappa'^2\kappa_2} \begin{pmatrix} \Delta_2(\kappa' - \kappa_4)e^{\kappa'\delta_3} + \Delta'_2(\kappa' + \kappa_4)e^{-\kappa'\delta_3} \\ \Delta_2(\kappa' + \kappa_4)e^{\kappa'\delta_3} + \Delta'_2(\kappa' - \kappa_4)e^{-\kappa'\delta_3} \end{pmatrix} \quad (6.67)$$

e

$$\begin{pmatrix} \Theta_{4(+)} \\ \Theta'_{4(+)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} \kappa' + \kappa_4 \\ \kappa' - \kappa_4 \end{pmatrix} \quad (6.68)$$

para a região interna à segunda barreira, onde por conveniência fizemos as seguintes definições:

$$\Delta_2 \equiv (\kappa_2 + \kappa')^2 e^{\kappa_2\delta_2} - (\kappa_2 - \kappa')^2 e^{-\kappa_2\delta_2} \quad (6.69)$$

e

$$\Delta'_2 \equiv (\kappa_2 - \kappa')(\kappa_2 + \kappa')(e^{\kappa_2\delta_2} - e^{-\kappa_2\delta_2}). \quad (6.70)$$

Aplicando os coeficientes (6.67) e (6.68) em (6.66), e depois de algumas manipulações algébricas, obtemos

$$F = -\frac{n\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{2}{\tilde{\Delta}e^{2\kappa'\delta_3} - 1}, \quad (6.71)$$

tal que

$$\tilde{\Delta} \equiv \frac{\Delta_2\Delta_4}{\Delta'_2\Delta'_4}, \quad (6.72)$$

onde Δ_4 e Δ'_4 ficam definidos implicitamente em analogia à Δ_2 e Δ'_2 .

6.5 Determinação do tensor energia-momento

De uma forma mais geral podemos definir, além da densidade de energia e da força de Casimir, o valor esperado das componentes do tensor energia momento no vácuo. Para

isso, nos resta apenas encontrar as componentes $\langle 0|T_{jj}|0\rangle$, com $j \geq 2$, uma vez que as componentes fora da diagonal principal novamente são nulas. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
\langle 0|T_{jj}|0\rangle_i &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{l=0;l \neq j}^n d\kappa^l \right) \left[\frac{1}{2}(2(\kappa^j)^2 - \kappa_i^2 - \partial_x \partial_{x'}) g_i^j(x, x') \right]_{x=x'} \\
&= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \left[\left(\frac{2\kappa^2}{n} - \kappa_i^2 - \partial_x \partial_{x'} \right) g_i^j(x, x') \right]_{x=x'} \\
&= -u_i - g_i(x)
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Além do resultado acima, por (6.46) vemos que o termo extra para a atual componente também é o oposto do termo extra da densidade de energia, de modo que podemos escrever o valor esperado do tensor energia-momento no vácuo da i -ésima região como:

$$\langle 0|\tilde{T}^{\mu\nu}|0\rangle_i = \begin{pmatrix} u_i & 0 & O \\ 0 & n \cdot u'_i & O \\ O & O & -u_i \cdot I \end{pmatrix} + g'_i(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 0 & 0 & O \\ O & O & -I \end{pmatrix}, \tag{6.74}$$

onde, mais uma vez, I e O são as matrizes identidade e nula com as dimensões apropriadas a cada caso e u_i , u'_i e $g'_i(x)$ são definidos por (6.45), (6.55) e (6.48), respectivamente.

Por fim, podemos notar que o traço do primeiro termo de (6.74) resulta em

$$\begin{aligned}
n \cdot (u_i - u'_i) &= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \left(\frac{\kappa}{\kappa_i} - \frac{\kappa_i}{\kappa} \right) \times \\
&\quad \left[\frac{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} + \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}}{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}} \right] \\
&= (m^2 + \lambda_i) \frac{n \cdot \pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^{n-1} \times \\
&\quad \times \left[\frac{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} + \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})} \right],
\end{aligned} \tag{6.75}$$

enquanto o traço do segundo resulta em

$$\begin{aligned}
n \cdot g'_i(x) &= (m^2 + \lambda_i) \frac{n \cdot \pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^{n-1} \times \\
&\quad \times \left[-\frac{\Theta'_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{-\kappa_i(x_i-x)} + \Theta_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x-x_{i-1})} e^{\kappa_i(x_i-x)}}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})} \right],
\end{aligned} \tag{6.76}$$

de modo que a soma dos dois nos dará o traço do tensor energia-momento conforme. De fato, vemos que a soma dos integrandos de (6.75) e (6.76) nos dá a própria função de Green reduzida aplicada em $x = x'$ e portanto, de acordo com (6.4), temos

$$\langle 0 | T_\mu^\mu | 0 \rangle_i = (m^2 + \lambda_i) \frac{G(x, x)}{i}. \quad (6.77)$$

Tal resultado já era esperado, pois uma vez que

$$(\tilde{T}^{\mu\nu})_i = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - (m^2 + \lambda_i) \phi^2] - \frac{n-1}{4n} (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha) \phi^2, \quad (6.78)$$

temos

$$(\tilde{T}_\mu^\mu)_i = (m^2 + \lambda_i) \phi^2. \quad (6.79)$$

6.6 A função de Green reduzida revisitada

No final da segunda seção determinamos a função de Green reduzida quando x e x' encontravam-se na mesma região. Desta vez encontraremos expressões válidas quando x e x' estão em regiões diferentes e, de quebra, discutiremos algumas de suas propriedades. Novamente, dividiremos nossa análise em dois casos, quando $x < x'$ e quando $x > x'$.

A) Quando $x < x'$

Neste caso, os coeficientes A 's e B 's se relacionam uns com os outros pelas equações

$$A_j^i = \frac{e^{-\kappa_j x_j}}{2\kappa_j} [(\kappa_j + \kappa_{j+1}) A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} + (\kappa_j - \kappa_{j+1}) B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}] \quad (6.80)$$

e

$$B_j^i = \frac{e^{\kappa_j x_j}}{2\kappa_j} [(\kappa_j - \kappa_{j+1}) A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} + (\kappa_j + \kappa_{j+1}) B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}], \quad (6.81)$$

que podem ser escritas como uma única equação da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} A_j^i e^{\kappa_j x_j} \\ B_j^i e^{-\kappa_j x_j} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j + \kappa_{j+1}) & (\kappa_j - \kappa_{j+1}) \\ (\kappa_j - \kappa_{j+1}) & (\kappa_j + \kappa_{j+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} \\ B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j} \end{pmatrix}. \quad (6.82)$$

Além disso, os coeficientes Θ 's se relacionam por

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j + \kappa_{j+1})e^{-\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j - \kappa_{j+1})e^{\kappa_j\delta_j} \\ (\kappa_j - \kappa_{j+1})e^{-\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j + \kappa_{j+1})e^{\kappa_j\delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j(-)} \\ \Theta'_{j(-)} \end{pmatrix}, \quad (6.83)$$

relação esta que pode ser facilmente invertida para

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j(-)} \\ \Theta'_{j(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_{j+1}} \begin{pmatrix} (\kappa_{j+1} + \kappa_j)e^{\kappa_j\delta_j} & (\kappa_{j+1} - \kappa_j)e^{\kappa_j\delta_j} \\ (\kappa_{j+1} - \kappa_j)e^{-\kappa_j\delta_j} & (\kappa_{j+1} + \kappa_j)e^{-\kappa_j\delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix}. \quad (6.84)$$

Uma vez que

$$A_{i(-)}^i = \frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}] \Theta'_{i(-)}e^{-\kappa_i x_{i-1}}}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})} \quad (6.85)$$

e

$$B_{i(-)}^i = -\frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}] \Theta_{i(-)}e^{\kappa_i x_{i-1}}}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}, \quad (6.86)$$

pelas equações (6.82) e (6.84) temos

$$\begin{pmatrix} A_{i-1}^i e^{\kappa_{i-1} x_{i-1}} \\ B_{i-1}^i e^{-\kappa_{i-1} x_{i-1}} \end{pmatrix} = \frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}]}{2\kappa_i \cdot 2\kappa_{i-1} (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})} \times \quad (6.87)$$

$$\times \begin{pmatrix} (\kappa_{i-1} + \kappa_i)\Theta'_{i(-)} - (\kappa_{i-1} - \kappa_i)\Theta_{i(-)} \\ (\kappa_{i-1} - \kappa_i)\Theta'_{i(-)} - (\kappa_{i-1} + \kappa_i)\Theta_{i(-)} \end{pmatrix} \quad (6.88)$$

$$= \frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}]}{2\kappa_{i-1} (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})} \times \quad (6.89)$$

$$\times \begin{pmatrix} \Theta'_{i-1(-)}e^{\kappa_{i-1}\delta_{i-1}} \\ -\Theta_{i-1(-)}e^{-\kappa_{i-1}\delta_{i-1}} \end{pmatrix}, \quad (6.90)$$

de onde obtemos que

$$A_{i-1}^i = \frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}] \Theta'_{i-1(-)}e^{-\kappa_{i-1} x_{i-2}}}{2\kappa_{i-1} (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})} \quad (6.91)$$

e

$$B_{i-1}^i = -\frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}] \Theta_{i-1(-)}e^{\kappa_{i-1} x_{i-2}}}{2\kappa_{i-1} (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}. \quad (6.92)$$

De fato, é possível mostrar por indução que, de uma forma geral,

$$A_{j(-)}^{i(+)} = \frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}] \Theta'_{j(-)}e^{-\kappa_j x_{j-1}}}{2\kappa_j (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})} \quad (6.93)$$

e

$$B_{j(-)}^{i(+)} = -\frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}] \Theta_{j(-)}e^{\kappa_j x_{j-1}}}{2\kappa_j (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}, \quad (6.94)$$

onde os sinais positivo e negativo foram acrescentados aos índices dos coeficientes A e B para lembrar que a região i está à direita e a região j está à esquerda.

Sendo assim, quando $x < x'$ temos que a função de green reduzida pode ser escrita como:

$$g_j^i(x, x') = \frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i(x_i-x')} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i(x_i-x')}] [\Theta'_{j(-)}e^{\kappa_j(x-x_{j-1})} - \Theta_{j(-)}e^{-\kappa_j(x-x_{j-1})}]}{2\kappa_j (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}. \quad (6.95)$$

B) Quando $x > x'$

Neste caso, tinhamos que os coeficientes A 's e B 's se relacionavam uns com os outros pelas equações

$$A_{j+1}^i = \frac{e^{-\kappa_{j+1}x_j}}{2\kappa_{j+1}} [(\kappa_{j+1} + \kappa_j)A_j^i e^{\kappa_j x_j} + (\kappa_{j+1} - \kappa_j)B_j^i e^{-\kappa_j x_j}] \quad (6.96)$$

e

$$B_{j+1}^i = \frac{e^{\kappa_{j+1}x_j}}{2\kappa_{j+1}} [(\kappa_{j+1} - \kappa_j)A_j^i e^{\kappa_j x_j} + (\kappa_{j+1} + \kappa_j)B_j^i e^{-\kappa_j x_j}]. \quad (6.97)$$

que podem ser escritas como uma única equação da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1}x_j} \\ B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1}x_j} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_{j+1}} \begin{pmatrix} (\kappa_{j+1} + \kappa_j) & (\kappa_{j+1} - \kappa_j) \\ (\kappa_{j+1} - \kappa_j) & (\kappa_{j+1} + \kappa_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^i e^{\kappa_j x_j} \\ B_j^i e^{-\kappa_j x_j} \end{pmatrix}. \quad (6.98)$$

Além disso, os coeficientes Θ 's se relacionavam por

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j(+)} \\ \Theta_{j(+)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_{j+1}} \begin{pmatrix} (\kappa_{j+1} + \kappa_j)e^{\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} & (\kappa_{j+1} - \kappa_j)e^{-\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} \\ (\kappa_{j+1} - \kappa_j)e^{\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} & (\kappa_{j+1} + \kappa_j)e^{-\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j+1(+)} \\ \Theta_{j+1(+)} \end{pmatrix}, \quad (6.99)$$

relação esta que pode ser facilmente invertida para

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(+)} \\ \Theta_{j+1(+)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j + \kappa_{j+1})e^{-\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} & (\kappa_j - \kappa_{j+1})e^{-\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} \\ (\kappa_j - \kappa_{j+1})e^{\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} & (\kappa_j + \kappa_{j+1})e^{\kappa_{j+1}\delta_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j(+)} \\ \Theta_{j(+)} \end{pmatrix}, \quad (6.100)$$

Uma vez que

$$A_{i(+)}^i = -\frac{[\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}]\Theta'_{i(+)}e^{-\kappa_i x_i}}{2\kappa_i(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}, \quad (6.101)$$

e

$$B_{i(+)}^i = \frac{[\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}]\Theta_{i(+)}e^{\kappa_i x_i}}{2\kappa_i(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}. \quad (6.102)$$

pelas equações (6.98) e (6.100) temos

$$\begin{pmatrix} A_{i+1}^i e^{\kappa_{i+1} x_i} \\ B_{i+1}^i e^{-\kappa_{i+1} x_i} \end{pmatrix} = \frac{[\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}]}{2\kappa_{i+1} \cdot 2\kappa_i(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})} \times \quad (6.103)$$

$$\times \begin{pmatrix} (\kappa_{i+1} - \kappa_i)\Theta_{i(+)} - (\kappa_{i+1} + \kappa_i)\Theta'_{i(+)} \\ (\kappa_{i+1} + \kappa_i)\Theta_{i(+)} - (\kappa_{i+1} - \kappa_i)\Theta'_{i(+)} \end{pmatrix} \quad (6.104)$$

$$= \frac{[\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}]}{2\kappa_{i+1} \cdot 2\kappa_i(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})} \times \quad (6.105)$$

$$\times \begin{pmatrix} -\Theta'_{i+1(+)}e^{-\kappa_{i+1}\delta_{i+1}} \\ \Theta_{i+1(+)}e^{\kappa_{i+1}\delta_{i+1}} \end{pmatrix}, \quad (6.106)$$

de onde obtemos que

$$A_{i+1}^i = -\frac{[\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}]\Theta'_{i+1(+)}e^{-\kappa_{i+1} x_{i+1}}}{2\kappa_{i+1}(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}, \quad (6.107)$$

e

$$B_{i+1}^i = \frac{[\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}]\Theta_{i+1(+)}e^{\kappa_{i+1} x_{i+1}}}{2\kappa_{i+1}(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}. \quad (6.108)$$

Novamente, é possível mostrar que de uma forma geral

$$A_{j(+)}^{i(-)} = -\frac{[\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}]\Theta'_{j(+)}e^{-\kappa_j x_j}}{2\kappa_j(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}, \quad (6.109)$$

e

$$B_{j(+)}^{i(-)} = \frac{[\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}]\Theta_{j(+)}e^{\kappa_j x_j}}{2\kappa_j(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa_i\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa_i\delta_i})}, \quad (6.110)$$

com os sinais positivo e negativo, acrescentados aos índices dos coeficientes A e B , lembrando que a região i está à esquerda e a região j à direita.

Sendo assim, quando $x > x'$ temos que a função de Green reduzida pode ser escrita como:

$$g_j^i(x, x') = \frac{[\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x'-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x'-x_{i-1})}] [\Theta_{j(+)} e^{\kappa_j(x_j-x)} - \Theta'_{j(+)} e^{-\kappa_j(x_j-x)}]}{2\kappa_j (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})}. \quad (6.111)$$

Antes de escrevermos uma única expressão que englobe (6.38), (6.95) e (6.111), não podemos deixar de notar que os termos no denominador da função de Green reduzida (dependentes das regiões i e j) não colocam em evidência sua invariância por uma permutação entre x e x' . Para que tal invariância fique evidente, é preciso notar que

$$\frac{\kappa_i}{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}} = \frac{\kappa_j}{\Theta_{j(+)} \Theta'_{j(-)} e^{\kappa_j \delta_j} - \Theta'_{j(+)} \Theta_{j(-)} e^{-\kappa_j \delta_j}} \quad (6.112)$$

para qualquer par de regiões representadas acima por i e j . Desta forma, podemos definir um $f[\sigma]$ dado por

$$f[\sigma] \equiv \frac{\kappa_i}{\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i}} \quad (6.113)$$

onde a região escolhida para o cálculo de $f[\sigma]$ pode ser qualquer uma, e não necessariamente a região onde se encontra x ou x' . Em particular, escolhendo a primeira e/ou a última região temos

$$f[\sigma] = \frac{\kappa_1}{\Theta_{1(+)}} = \frac{\kappa_N}{\Theta'_{N(-)}}. \quad (6.114)$$

Por fim, temos que a função de Green reduzida quando x e x' encontram-se nas regiões i e j quaisquer pode ser escrita como

$$g_j^i(x, x') = [\Theta'_{i_{<}(-)} e^{\kappa_{i_{<}}(x < -x_{i-1} <)} - \Theta_{i_{<}(-)} e^{-\kappa_{i_{<}}(x < -x_{i-1} <)}] \times \\ \times [\Theta_{i_{>}(+)} e^{\kappa_{i_{>}}(x_{i_{>}} - x_{>})} - \Theta'_{i_{>}(+)} e^{-\kappa_{i_{>}}(x_{i_{>}} - x_{>})}] \times \frac{f[\sigma]}{2 \cdot \kappa_i \cdot \kappa_j}, \quad (6.115)$$

onde $i_{<}$ e $i_{>}$ são, respectivamente, o menor e o maior entre i e j .

Capítulo 7

Limites em que as barreiras são
descritas por funções delta de Dirac

7.1 Introdução

No capítulo anterior determinamos, entre outras coisas, a densidade de energia e a força de Casimir para o campo escalar real e massivo quando este interage com N regiões de diferentes potenciais, em $(n+1)$ dimensões. Agora, iremos explorar o resultado obtido para alguns casos limites especiais, generalizando de forma simples resultados já conhecidos – resultados válidos para a força e energia de Casimir entre duas barreiras modeladas por funções delta de Dirac são facilmente encontrados na literatura. Aproveitaremos alguns dos resultados para explorar novas possibilidades – tanto neste quanto no próximo capítulo – tal qual a presença de mínimos de energia.

7.2 Limite em que as regiões tendem a N barreiras do tipo delta de Dirac

Nesta seção veremos como transformar as diversas regiões em N barreiras descritas por funções delta de Dirac, generalizando assim os conhecidos resultados para duas barreiras [17, 18]. Para isto, faremos novamente a redefinição $\lambda_i \rightarrow \lambda_i h_i$, tal que $h_i \delta_i = 1$, e em seguida aplicaremos sobre os resultados do capítulo anterior os seguintes limites:

$$\begin{cases} \lambda_i \rightarrow 0, & \text{se } i \text{ for ímpar,} \\ \delta_i \rightarrow 0, & \text{se } i \text{ for par.} \end{cases} \quad (7.1)$$

Tomados estes limites, as regiões de sub-índice par serão transformadas em barreiras do tipo delta de Dirac, enquanto as regiões de sub-índice ímpar serão transformadas em espaços entre as barreiras. Além disso, devemos estar atentos a considerar um número total ímpar de regiões, sendo as regiões de interesse sempre aquelas de sub-índice ímpar. Tendo isto em mente e sendo j um número par, de (6.14) temos

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j + \kappa')e^{-\kappa_j \delta_j} & (\kappa_j - \kappa')e^{\kappa_j \delta_j} \\ (\kappa_j - \kappa')e^{-\kappa_j \delta_j} & (\kappa_j + \kappa')e^{\kappa_j \delta_j} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (\kappa' + \kappa_j) e^{-\kappa' \delta_{j-1}} & (\kappa' - \kappa_j) e^{\kappa' \delta_{j-1}} \\ (\kappa' - \kappa_j) e^{-\kappa' \delta_{j-1}} & (\kappa' + \kappa_j) e^{\kappa' \delta_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j-1(-)} \\ \Theta'_{j-1(-)} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

quando $x < x'$, onde os limites $\lambda_{j+1} e \lambda_{j-1} \rightarrow 0$ (que por sua vez implicam em $\kappa_{j+1} = \kappa_{j-1} = \kappa' = \sqrt{\kappa^2 + m^2}$) já foram considerados. Considerando agora o limite $\delta_j \rightarrow 0$, não é difícil demonstrarmos que a equação (7.2) acima se reduz a

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' - \lambda_j) e^{-\kappa' \delta_{j-1}} & \lambda_j e^{\kappa' \delta_{j-1}} \\ -\lambda_j e^{-\kappa' \delta_{j-1}} & (2\kappa' + \lambda_j) e^{\kappa' \delta_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j-1(-)} \\ \Theta'_{j-1(-)} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Por fim, podemos agora redefinir o critério de distribuição de sub-índices, de forma a torná-los mais natural, da seguinte forma: a primeira região ($i = 1$) será aquela à esquerda da primeira barreira (que passará a ter $\lambda_i \equiv \lambda_1$), a segunda região ($i = 2$) será aquela entre a primeira (λ_1) e a segunda barreira (que passará a ter $\lambda_i \equiv \lambda_2$) e assim por diante, estando sempre atento a divisão em duas regiões distintas no ponto $x = x'$. Desta forma, a equação (7.3) passa a ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' - \lambda_j) e^{-\kappa' \delta_j} & \lambda_j e^{\kappa' \delta_j} \\ -\lambda_j e^{-\kappa' \delta_j} & (2\kappa' + \lambda_j) e^{\kappa' \delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j(-)} \\ \Theta'_{j(-)} \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

que por sua vez, quando aplicada seguidamente desde a primeira região até a região em que se encontra x' , nos fornece

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i(-)} \\ \Theta'_{i(-)} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' - \lambda_{i-j}) e^{-\kappa' \delta_{i-j}} & \lambda_{i-j} e^{\kappa' \delta_{i-j}} \\ -\lambda_{i-j} e^{-\kappa' \delta_{i-j}} & (2\kappa' + \lambda_{i-j}) e^{\kappa' \delta_{i-j}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\kappa_1 \delta_1} \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Devemos nos lembrar que a expressão (7.5) acima é válida somente quando $x < x'$. Para $x > x'$ podemos determinar os coeficientes Θ e Θ' de forma análoga – lembrando sempre que estamos considerando N barreiras – encontrando como resultado

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i(+)} \\ \Theta'_{i(+)} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=i}^N \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' + \lambda_j) e^{\kappa' \delta_{j+1}} & -\lambda_j e^{-\kappa' \delta_{j+1}} \\ \lambda_j e^{\kappa' \delta_{j+1}} & (2\kappa' - \lambda_j) e^{-\kappa' \delta_{j+1}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e^{-\kappa' \delta_{N+1}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Uma vez que os coeficientes foram redefinidos, podemos continuar a usar as mesmas expressões do capítulo anterior para a função de Green reduzida e, consequentemente, para os resultados posteriores a ela – a única exceção é a expressão (6.66) para a força de Casimir, caso que trataremos na próxima seção. Ao fazermos isto, devemos nos

lembrar que qualquer que seja a região de nosso interesse, teremos sempre $\lambda = 0$ em seu interior (o que, por sua vez, implica em $\kappa_i = \kappa'$). Desta forma, podemos escrever a função de Green reduzida como

$$g_i^i(x, x') = \frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa'(x_i-x>)} - \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa'(x_i-x>)}][\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'(x<-x_{i-1})} - \Theta_{i(-)}e^{-\kappa'(x<-x_{i-1})}]}{2\kappa_i(\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa'\delta_i})}, \quad (7.7)$$

e reescrever as definições (6.43), (6.48) e (6.55) respectivamente como

$$u_i = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left[\frac{\kappa}{\kappa'} \frac{\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'\delta_i} + \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa'\delta_i}}{\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa'\delta_i}} \right], \quad (7.8)$$

$$g_i'(x) = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left(\frac{m^2}{\kappa\kappa'} \right) \times \frac{\Theta'_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'(x-x_{i-1})}e^{-\kappa'(x_i-x)} + \Theta_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa'(x-x_{i-1})}e^{\kappa'(x_i-x)}}{\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa'\delta_i}} \quad (7.9)$$

e

$$u_i' = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left[\frac{\kappa'}{\kappa} \frac{\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'\delta_i} + \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa'\delta_i}}{\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa'\delta_i}} \right], \quad (7.10)$$

tal que u_i pode ser escrito de forma mais explícita como

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \frac{2\kappa^{n+1}/\kappa'}{\frac{\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}}{\Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}}e^{2\kappa'\delta_i} - 1} + \\ &\quad -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^{n+1}}{\sqrt{\kappa^2 + m^2}} \\ &= u_{cas}^i + u_{vac}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

identificando-se assim as densidades de energia de Casimir e do vácuo sem condições de contorno. O tensor energia-momento (conforme) da i -ésima região será novamente dado por

$$\langle 0 | \tilde{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle_i = \begin{pmatrix} u_i & 0 & O \\ 0 & n \cdot u_i' & O \\ O & O & -u_i \cdot I \end{pmatrix} + g_i'(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 0 & 0 & O \\ O & O & -I \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

cujos traço, desta vez, resulta em

$$\langle 0 | T_{\mu}^{\mu} | 0 \rangle = m^2 \frac{G(x, x)}{i}. \quad (7.13)$$

Por fim, uma rápida olhada nas equações (7.5) a (7.13) nos permite constatar que todos os termos referentes às barreiras (termos contendo λ) estão contidos nos coeficientes Θ 's, dados por (7.5) e (7.6).

7.3 Força de Casimir entre duas barreiras do tipo delta de Dirac

Como foi dito na seção anterior, com os coeficientes Θ 's redefinidos os resultados do capítulo anterior continuam válidos, sendo a expressão (6.66), para a força de Casimir, a única exceção – uma vez que tais coeficientes não são mais definidos sobre as barreiras. Ainda assim, pode-se encontrar a força de Casimir sobre a i -ésima barreira pela forma habitual, ou seja, pela diferença entre as componentes $\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle$ das regiões anterior e posterior a ela. Em particular, para duas barreiras encontra-se

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle &= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{(2\kappa' + \lambda_1)(2\kappa' + \lambda_2)e^{\kappa'\delta_2} + \lambda_1\lambda_2 e^{-\kappa'\delta_2}}{(2\kappa' + \lambda_1)(2\kappa' + \lambda_2)e^{\kappa'\delta_2} - \lambda_1\lambda_2 e^{-\kappa'\delta_2}} \\ &= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \frac{\kappa'}{\kappa} \left[1 + \frac{2\lambda_1\lambda_2 e^{-\kappa'\delta_2}}{(2\kappa' + \lambda_1)(2\kappa' + \lambda_2)e^{\kappa'\delta_2} - \lambda_1\lambda_2 e^{-\kappa'\delta_2}} \right] \end{aligned} \quad (7.14)$$

para a região entre elas e

$$\langle 0 | T_{xx} | 0 \rangle = -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \frac{\kappa'}{\kappa} \quad (7.15)$$

para a região a direita delas. Desta forma, temos a força de Casimir sobre a segunda barreira dada por

$$\begin{aligned} F_2 &= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{2\lambda_1\lambda_2 e^{-\kappa'\delta_2}}{(2\kappa' + \lambda_1)(2\kappa' + \lambda_2)e^{\kappa'\delta_2} - \lambda_1\lambda_2 e^{-\kappa'\delta_2}} \\ &= -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^n \frac{2\kappa'}{\kappa} \frac{1}{\left(\frac{2\kappa'}{\lambda_1} + 1\right)\left(\frac{2\kappa'}{\lambda_2} + 1\right)e^{2\kappa'\delta_2} - 1}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Note que em (1+1) dimensão e massa nula o resultado acima pode ser escrito como

$$F_2 = -\frac{1}{4\pi\delta^2} \int_0^\infty dy y \frac{1}{\left(\frac{y}{\lambda_1\delta} + 1\right)\left(\frac{y}{\lambda_2\delta} + 1\right)e^y - 1}, \quad (7.17)$$

onde fizemos $y = 2\kappa\delta$ (sendo δ a distância entre as barreiras). Além disso, se redefinirmos $\lambda\delta \rightarrow \lambda$, de modo a tornarmos λ adimensional, obteremos exatamente a mesma expressão das referências [17, 18], dada por

$$F_2 = -\frac{1}{4\pi\delta^2} \int_0^\infty dy y \frac{1}{\left(\frac{y}{\lambda_1} + 1\right)\left(\frac{y}{\lambda_2} + 1\right)e^y - 1}. \quad (7.18)$$

Contanto que se altere o valor da constante λ de modo a compensar tal redefinição, esta não provocará qualquer alteração na força de Casimir para uma distância fixa entre as barreiras. Porém, quando permitimos que o valor da distância varie livremente, as duas definições provocam comportamentos diferentes na força de Casimir.

De fato, nas expressões (7.17) e (7.18), temos a liberdade de fazer qualquer redefinição do tipo

$$\lambda \rightarrow \lambda f(\delta), \quad (7.19)$$

onde $f(\delta)$ é uma função finita de δ nos intervalos em que iremos considerar. Note que, independente da função que escolhermos, sempre obteremos como limite o resultado de Lüscher quando $\lambda \rightarrow \infty$.

7.4 Mínimos de energia

Motivados pela ambiguidade na definição de λ , vamos agora buscar por redefinições que possibilitem a existência de mínimos de energia. Para simplificar, consideraremos a existência de apenas duas barreiras, que por sua vez interagem com um campo escalar real não massivo, de modo que energia de Casimir será escrita como

$$u_{cas} = -\frac{\pi^{n/2}}{(2\delta)^{n+1}(2\pi)^n\Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty dy y^n \frac{1}{\left(\frac{y}{\lambda_1 f(\delta)} + 1\right)\left(\frac{y}{\lambda_2 f(\delta)} + 1\right)e^y - 1}. \quad (7.20)$$

Devemos notar que o resultado obtido por nós, correspondente à equação (7.17), equivale à escolha $f(\delta) = \delta$, enquanto o resultado das referências [17, 18], correspondente à

equação (7.18), equivale à escolha $f(\delta) = 1$. Dito isso, sabemos que possíveis mínimos locais serão encontrados quando

$$\frac{du_{cas}}{d\delta} = 0. \quad (7.21)$$

No entanto, temos que

$$\frac{du_{cas}}{d\delta} = -\frac{\pi^{n/2}}{(2\delta)^{n+1}(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)} \int_0^\infty dy y^n \frac{Q(\delta)}{\left[\left(\frac{y}{\lambda_1 f(\delta)} + 1\right)\left(\frac{y}{\lambda_2 f(\delta)} + 1\right)e^y - 1\right]^2}, \quad (7.22)$$

onde $Q(\delta)$ é dado por

$$Q(\delta) = \left\{ \left[\left(\frac{2}{f(\delta)} \cdot \frac{df(\delta)}{d\delta} - \frac{n+1}{\delta} \right) \frac{y^2}{\lambda_1 \lambda_2 f^2(\delta)} + \left(\frac{1}{f(\delta)} \cdot \frac{df(\delta)}{d\delta} - \frac{n+1}{\delta} \right) \frac{y}{f(\delta)} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) - \frac{n+1}{\delta} \right] e^y + \frac{n+1}{\delta} \right\} \quad (7.23)$$

Devemos notar que, para (7.21) ser satisfeita, o integrando de (7.22), e consequentemente (7.23), deve assumir tanto valores positivos como negativos. Não é difícil perceber que, para que isto aconteça, o termo entre colchetes de (7.23) deverá assumir tanto valores maiores quanto valores menores que $-(n+1)/\delta$ no intervalo $0 \leq y < \infty$. Além disso, para facilitar nossa análise, façamos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, de modo que tal termo passa a ser escrito como

$$\left(\frac{2}{f(\delta)} \cdot \frac{df(\delta)}{d\delta} - \frac{n+1}{\delta} \right) \left(\frac{y}{\lambda f(\delta)} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{f(\delta)} \cdot \frac{df(\delta)}{d\delta} - \frac{n+1}{\delta} \right) \left(\frac{y}{\lambda f(\delta)} \right) - \frac{n+1}{\delta}. \quad (7.24)$$

Note que (7.24), acima, é uma função de segundo grau da variável $y/\lambda f(\delta)$ que sempre passa pelos pontos $(-1; 0)$ e $(0; -(n+1))$, onde o primeiro valor se refere à variável $y/\lambda f(\delta)$, enquanto o segundo se refere à própria (7.24). Sendo assim, se tal função for uma parábola com concavidade voltada para baixo

$$\left(\frac{1}{f(\delta)} \cdot \frac{df(\delta)}{d\delta} < \frac{n+1}{2\delta} \right) \quad (7.25)$$

ou for uma reta

$$\left(\frac{1}{f(\delta)} \cdot \frac{df(\delta)}{d\delta} = \frac{n+1}{2\delta} \right), \quad (7.26)$$

ela sempre assumirá valores menores que $-(n+1)/\delta$ para valores positivos de y . Desta forma, é condição necessária para a existência de mínimos que

$$\frac{1}{f(\delta)} \cdot \frac{df(\delta)}{d\delta} > \frac{n+1}{2\delta}. \quad (7.27)$$

Pensando em uma possível expansão da função $f(\delta)$ numa série de Taylor em torno do ponto $\delta = 0$, vamos verificar até que ordem deveríamos ir para possibilitar a existência de um mínimo. Para isso, façamos $f(\delta) = \delta^k$ em (7.27), o que nos dá a condição

$$k > \frac{n+1}{2}. \quad (7.28)$$

Portanto, quanto maior o número de dimensões espaciais consideradas, maior deve ser o valor da potência de δ para que existam mínimos. Além disso, fica claro que, mesmo trabalhando em (1+1) dimensões, não encontraremos mínimos se utilizarmos as definições encontrada na literatura (equivalente a fazermos $f(\delta) = 1$) ou proposta por nós (equivalente a fazermos $f(\delta) = \delta$).

7.5 Limite de acoplamento forte

Sabemos que, no limite de acoplamento forte ($\lambda \rightarrow \infty$), uma barreira modelada por um delta de Dirac irá produzir, no ponto onde se situa, o mesmo efeito da imposição de condições de contorno de Dirichlet, aplicadas sobre este mesmo ponto. Sendo assim, tomaremos agora o limite $\lambda \rightarrow \infty$ sobre os resultados obtidos na segunda seção deste capítulo, encontrando assim as expressões válidas para o caso de N barreiras modeladas por condições de contorno de Dirichlet. Começando pela equação (7.4), sabemos que o fato de acrescentarmos a ela uma constante multiplicativa não altera os resultados físicos obtidos por seus coeficientes – uma rápida olhada nas equações (7.8), (7.9) e (7.10) é suficiente para nos convencer disso. Sendo assim, iremos convenientemente multiplicá-la por κ'/λ_j , de modo a obtermos

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda_j} \begin{pmatrix} (2\kappa' - \lambda_j) e^{-\kappa'\delta_j} & \lambda_j e^{\kappa'\delta_j} \\ -\lambda_j e^{-\kappa'\delta_j} & (2\kappa' + \lambda_j) e^{\kappa'\delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j(-)} \\ \Theta'_{j(-)} \end{pmatrix}, \quad (7.29)$$

note que os coeficientes Θ 's continuam adimensionais. Tomando agora o limite $\lambda \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-\kappa' \delta_j} & e^{\kappa' \delta_j} \\ -e^{-\kappa' \delta_j} & e^{\kappa' \delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j(-)} \\ \Theta'_{j(-)} \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

Escolhendo os primeiros coeficientes, convenientemente, como

$$\begin{pmatrix} \Theta_{1(-)} \\ \Theta'_{1(-)} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\kappa' \delta_1} \end{pmatrix}, \quad (7.31)$$

a aplicação seguida de (7.31) sobre (7.30) nos leva a encontrar para a i -ésima região

$$\Theta_{i(-)} = \Theta'_{i(-)} = \prod_{j=2}^{i-1} \sinh \kappa' \delta_j, \quad (7.32)$$

tal que, para $i = 2$, tem-se

$$\Theta_{2(-)} = \Theta'_{2(-)} = 1. \quad (7.33)$$

Raciocínio semelhante nos leva à expressão

$$\Theta_{i(+)} = \Theta'_{i(+)} = \prod_{j=i+1}^N \sinh \kappa' \delta_j, \quad (7.34)$$

onde os primeiros coeficientes foram escolhidos como

$$\begin{pmatrix} \Theta_{N+1(+)} \\ \Theta'_{N+1(+)} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} e^{\kappa' \delta_{N+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

e tal que, para $i = N$, tem-se

$$\Theta_{N(+)} = \Theta'_{N(+)} = 1. \quad (7.36)$$

Na verdade, o fato dos coeficientes Θ e Θ' serem iguais (tanto aqueles obtidos pela esquerda quanto os obtidos pela direita) faz com que eles sejam cancelados nas equações (7.8), (7.9) e (7.11), que passam a ser escritas como

$$u_i = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \frac{\kappa}{\kappa'} \coth \kappa' \delta_i, \quad (7.37)$$

$$g'_i(x) = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \frac{m^2}{\kappa \cdot \kappa'} \frac{\cosh \kappa'(2x - x_i - x_{i-1})}{\sinh \kappa' \delta_i} \quad (7.38)$$

e

$$u'_i = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \frac{\kappa'}{\kappa} \coth \kappa' \delta_i. \quad (7.39)$$

Não é difícil perceber que as equações acima são uma combinação daquelas obtidas no capítulo 4, onde considerávamos separadamente o campo em $(n+1)$ dimensões e o campo massivo. Além disso, devemos notar que o número de barreiras consideradas não alteram as componentes do tensor energia-momento dentro de uma dada região. Tal fato já era esperado – uma vez que no capítulo 3 conseguimos determinar a função de Green reduzida, dentro de uma determinada região, sem que precisássemos “sair” dela – e é de fácil interpretação: as condições de contorno de Dirichlet representam barreiras intransponíveis para o campo, de modo que este não consegue trazer qualquer informação exterior para dentro de uma determinada região. Da mesma forma, nenhuma informação contida em uma determinada região pode ser levada pelo campo para regiões vizinhas. Ainda assim, a força de Casimir sobre uma barreira sofre a influência tanto da região anterior quanto da posterior a ela, e é dada por

$$F_i = n.u'_i - n.u'_{i+1} = -\frac{n.\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa'}{\kappa} \left[\frac{2\kappa^n}{e^{2\kappa'\delta_i} - 1} - \frac{2\kappa^n}{e^{2\kappa'\delta_{i+1}} - 1} \right]. \quad (7.40)$$

Pela equação acima é possível perceber que, para o presente caso, cada barreira será sempre empurrada no sentido da maior para a menor dentre as duas regiões por ela separadas. Tal fato fica ainda mais evidente para o caso de massa nula, onde a integral pode ser resolvida e escrita como

$$F_i = -\frac{n!\zeta(n+1)}{4^n \pi^{n/2} \Gamma(n/2)} \frac{\delta_{i+1}^{n+1} - \delta_i^{n+1}}{(\delta_i \delta_{i+1})^{n+1}}. \quad (7.41)$$

Capítulo 8

Modos transversais magnéticos (TM)

8.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, consideramos o efeito Casimir para um campo escalar real em diversas circunstâncias: campo massivo ou sem massa, em uma ou mais dimensões espaciais, interagindo com barreiras ou regiões de diferentes potenciais, etc. Porém, todos os casos que consideramos tinham algo em comum: ou o campo era submetido a condições de contorno de Dirichlet homogêneas ou interagia com potenciais que, no limite de acoplamento forte ($\lambda \rightarrow \infty$), tendiam a essas mesmas condições. Em muitas das aplicações dos modelos e resultados já discutidos, estamos interessados em usá-los para estudar o efeito Casimir que surge devido ao campo eletromagnético, que por sua vez pode ser dividido em dois modos: os modos transversais elétricos (TE) e os modos transversais magnéticos (TM). Os modos transversais elétricos (TE) são obtidos, em condutores perfeitos, substituindo-os por condições de contorno de Dirichlet homogêneas ou, em modelos mais realistas, por potenciais que, no limite de acoplamento forte, retornem a essas mesmas condições. Já os modos transversais magnético (TM) são obtidos, em condutores perfeitos, substituindo-os por condições de contorno de Neumann homogêneas ou, em modelos mais realistas, por potenciais que retornem a essas mesmas condições no limite de acoplamento forte.

Sendo assim, ao associarmos tudo o que desenvolvemos até agora ao campo eletromagnético, estaremos cobrindo apenas as contribuições do modo TE. Como exemplo, tomemos as equações (5.10) e (5.13) do capítulo 5. Por elas, temos que a densidade de energia e a força de Casimir são dadas respectivamente por

$$u_{cas} = -\frac{(n-1)!\zeta(n+1)}{4^n a^{n+1} \pi^{n/2} \Gamma(n/2)} \quad (8.1)$$

e

$$F_{cas} = -\frac{n!\zeta(n+1)}{4^n a^{n+1} \pi^{n/2} \Gamma(n/2)}, \quad (8.2)$$

onde n é o número de dimensões espaciais que estamos considerando – para $n = 1$ obtemos novamente o resultado de Lüscher, como era de se esperar. Integrando (8.1)

entre as duas barreiras (ou simplesmente multiplicando pela distância entre elas, uma vez que a densidade de energia é constante) e considerando $n = 3$, encontraremos para a energia de Casimir (por unidade de área)

$$E_{cas} = -\frac{\pi^2}{1440a^3}. \quad (8.3)$$

Considerando $n = 3$ também em (8.2), encontramos para a força de Casimir (também por unidade de área)

$$F_{cas} = -\frac{\pi^2}{480a^4}. \quad (8.4)$$

Uma vez que os resultados acima foram obtidos para o campo não massivo, podemos considerá-los válidos para o campo eletromagnético (confinado entre duas placas paralelas, perfeitamente condutoras e separadas por uma distância a). No entanto, segundo as equações (2.114) e (2.115) do capítulo 2, os resultados obtidos por Casimir em seu artigo original são dados por

$$E_{cas} = -\frac{\pi^2}{720a^3} \quad (8.5)$$

e

$$F_{cas} = -\frac{\pi^2}{240a^4}, \quad (8.6)$$

onde já passamos a escrever em unidades naturais ($\hbar = c = 1$). Ou seja, os resultados que obtivemos correspondem apenas a uma parte – neste caso a metade – daqueles que seriam esperados, uma vez que cobrem apenas os modos TE. Para obtermos os mesmos resultados obtidos por Casimir, devemos também levar em consideração os modos TM, responsáveis pela parte que falta. De fato, veremos na próxima seção que, para condutores perfeitos, os dois modos dão contribuições iguais para a energia e para a força de Casimir e que, portanto, a soma destas nos dá os resultados (8.5) e (8.6). Já nas seções seguintes, encontraremos expressões que nos permitam considerar o modo TM para casos mais gerais, começando por barreiras do tipo delta de Dirac e, em seguida, passando para N regiões de diferentes potenciais.

8.2 O campo escalar real em (n+1) dimensões submetido a condições de contorno de Neumann

Nesta seção submeteremos o campo escalar real, com massa nula e em (n+1) dimensões à condição de contorno de Neumann nos pontos $x = 0$ e $x = a$. Sendo assim, a função de Green reduzida deverá satisfazer a equação

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \right] g(x, x') = \delta(x - x'), \quad (8.7)$$

juntamente com a condição

$$\frac{\partial g(x, x')}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial g(x, x')}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0. \quad (8.8)$$

Lembramos ainda que a função de Green reduzida é contínua em todos os pontos, inclusive em $x = x'$, mas que sua primeira derivada é descontínua justamente neste ponto e que a integração de (8.7) sobre um intervalo infinitesimal em torno de x' nos permite escrever tal descontinuidade como

$$-\frac{dg(x, x')}{dx} \Big|_{x'+} + \frac{dg(x, x')}{dx} \Big|_{x'-} = 1. \quad (8.9)$$

Desta forma, para $0 < x, x' < a$, a equação (8.7) e a condição (8.8) nos permitem escrever

$$g(x, x') = \begin{cases} A_1 \cosh \kappa x, & 0 < x < x' < a \\ A_2 \cosh \kappa(a - x), & 0 < x' < x < a \end{cases}. \quad (8.10)$$

Já a condição de continuidade em $x = x'$ nos permite reduzir a solução acima para

$$g(x, x') = A \cosh \kappa x_{<} \cosh \kappa(a - x_{>}). \quad (8.11)$$

Por fim, a descontinuidade em $x = x'$, descrita por (8.9), nos possibilita encontrar

$$g(x, x') = \frac{\cosh \kappa x_{<} \cosh \kappa(a - x_{>})}{\kappa \sinh \kappa a}. \quad (8.12)$$

Como estamos trabalhando em (n+1) dimensões, podemos obter a densidade de energia por

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{n \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma(n/2 + 1)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^n \left[\left(\frac{-2\kappa^2}{n} + \kappa^2 + \partial_x \partial_{x'} \right) g(x, x') \right]_{x=x'}, \quad (8.13)$$

resultando em

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = -\frac{\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)}\int_0^\infty d\kappa\kappa^n\left[\coth\kappa a - (n-1)\frac{\cosh\kappa(2x-a)}{\sinh\kappa a}\right]. \quad (8.14)$$

Comparando o resultado acima com (5.9), obtido para o modo TE, vemos que a única diferença entre eles é o sinal do segundo termo do integrando. Uma vez que tal termo é uma constante espúria, podendo ser descartado, a contribuição dada pelos modos TE e TM à energia de Casimir serão iguais, e sua soma, em três dimensões espaciais, resultará em (8.5), assim como obtido por Casimir. De fato, para obtermos a equação (8.5), devemos ainda multiplicar a densidade de energia pela distância entre as barreiras (além, é claro, de subtrair o termos correspondente à energia do vácuo).

Continuando na região $0 < x, x' < a$, podemos encontrar a componente $\langle 0|T_{xx}|0\rangle$ por

$$\langle 0|T_{xx}|0\rangle = -\frac{n\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)}\int_0^\infty d\kappa\kappa^n\left[(-\kappa^2 + \partial_x\partial_{x'})g(x, x')\right]_{x=x'}, \quad (8.15)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{xx}|0\rangle &= -\frac{n\pi^{n/2}}{2(2\pi)^n\Gamma(n/2+1)}\int_0^\infty d\kappa\kappa^n\coth\kappa a \\ &= -\frac{n!\zeta(n+1)}{4^n a^{n+1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)} + n.u_{vac}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

O resultado acima é o mesmo obtido em (5.13) para o modo TE, ou seja, os modos TE e TM também contribuem igualmente para a força de Casimir, com sua soma, em três dimensões espaciais, resultando na equação (8.6).

Podemos ainda continuar e, a exemplo do capítulo 4, descobrir que as outras componentes $\langle 0|T_{jj}|0\rangle$ da diagonal principal são iguais a componente $\langle 0|T_{00}|0\rangle$, exceto por um fator -1 , e que as componentes fora da diagonal principal são nulas. Por fim, podemos também substituir o tensor energia-momento canônico pelo conforme, bastando para isso subtrair de cada componente o termo

$$\frac{n-1}{4n}(\partial^\mu\partial^\nu - g^{\mu\nu}\partial^2)\frac{G(x, x)}{i}. \quad (8.17)$$

Feito isso, obtém-se como resultado o mesmo tensor encontrado no final da seção 4.2 para o modo TE

$$\langle 0 | \tilde{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle = u \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & n & O \\ & O & -I \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

Tal resultado já era esperado pois, como vimos no final da seção anterior, para condutores perfeitos os modos TE e TM dão contribuições iguais à força e à energia de Casimir.

8.3 Modos TM para N barreiras do tipo delta de Dirac

Nesta seção consideraremos o efeito Casimir que surge quando aplicamos à função de Green, nos pontos sobre as barreiras, as condições de contorno

$$\left. \frac{\partial g(x, x')}{\partial x} \right|_{x_j^-}^{x_j^+} = 0 \quad \text{e} \quad g(x, x') \Big|_{x_j^-}^{x_j^+} = \alpha_j \frac{\partial g(x, x')}{\partial x}, \quad (8.19)$$

tal que

$$\lambda_j \rightarrow \infty \Rightarrow |\alpha_j| \rightarrow \infty. \quad (8.20)$$

A exemplo da referência [31], adotamos tais condições de contorno pois, no limite de acoplamento forte, estas se reduzem às condições de contorno de Neumann (apropriadas aos modos TM do campo eletromagnético), ou seja

$$\lambda_j \rightarrow \infty \Rightarrow \left. \frac{\partial g(x, x')}{\partial x} \right|_{x_j} = 0. \quad (8.21)$$

No entanto, ao contrário de [31], não determinamos a principio a relação de α_j com as outras variáveis que estamos trabalhando – exceto por (8.20), que era condição necessária – ganhando assim mais liberdade para fazê-lo quando for preciso. Lembrando que nos espaços entre as barreiras a função de Green reduzida deve satisfazer a equação de campo

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 + m^2 \right] g(x, x') = \delta(x - x'), \quad (8.22)$$

e sendo $x < x'$, as condições (8.19) nos levam às seguintes relações entre os coeficientes das regiões anterior e posterior à barreira do ponto x_j :

$$A_j^i e^{\kappa' x_j} - B_j^i e^{-\kappa' x_j} = A_{j+1}^i e^{\kappa' x_j} - B_{j+1}^i e^{-\kappa' x_j} \quad (8.23)$$

e

$$A_j^i e^{\kappa' x_j} + B_j^i e^{-\kappa' x_j} = A_{j+1}^i e^{\kappa' x_j} + B_{j+1}^i e^{-\kappa' x_j} - \alpha_j \kappa \left(A_{j+1}^i e^{\kappa' x_j} - B_{j+1}^i e^{-\kappa' x_j} \right), \quad (8.24)$$

que quando combinadas podem ser escritas como

$$A_j^i = \frac{e^{-\kappa' x_j}}{2\kappa'} \left[(2\kappa' - \alpha_j \kappa'^2) A_{j+1}^i e^{\kappa' x_j} + \alpha_j \kappa'^2 B_{j+1}^i e^{-\kappa' x_j} \right] \quad (8.25)$$

e

$$B_j^i = \frac{e^{\kappa' x_j}}{2\kappa'} \left[-\alpha_j \kappa'^2 A_{j+1}^i e^{\kappa' x_j} + (2\kappa' + \alpha_j \kappa'^2) B_{j+1}^i e^{-\kappa' x_j} \right]. \quad (8.26)$$

Novamente, a exigência de que a função de Green reduzida seja sempre finita, mesmo para $x \rightarrow -\infty$, nos possibilita escrever as relações

$$\Theta_{j(-)} e^{\kappa' x_{j-1}} A_j^i - \Theta'_{j(-)} e^{-\kappa' x_{j-1}} B_j^i = 0 \quad (8.27)$$

e

$$\Theta_{j+1(-)} e^{\kappa' x_j} A_{j+1}^i - \Theta'_{j+1(-)} e^{-\kappa' x_j} B_{j+1}^i = 0 \quad (8.28)$$

para os coeficientes A e B de cada região. Desta forma, pelas equações (8.25) e (8.26), temos que

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' - \alpha_j \kappa'^2) e^{-\kappa' \delta_j} & \alpha_j \kappa'^2 e^{\kappa' \delta_j} \\ -\alpha_j \kappa'^2 e^{-\kappa' \delta_j} & (2\kappa' + \alpha_j \kappa'^2) e^{\kappa' \delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j(-)} \\ \Theta'_{j(-)} \end{pmatrix}, \quad (8.29)$$

que por sua vez, quando aplicada seguidamente desde a primeira região até a região em que se encontra x' , nos fornece

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i(-)} \\ \Theta'_{i(-)} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' - \alpha_{i-j} \kappa'^2) e^{-\kappa' \delta_{i-j}} & \alpha_{i-j} \kappa'^2 e^{\kappa' \delta_{i-j}} \\ -\alpha_{i-j} \kappa'^2 e^{-\kappa' \delta_{i-j}} & (2\kappa' + \alpha_{i-j} \kappa'^2) e^{\kappa' \delta_{i-j}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Theta_{1(-)} \\ \Theta'_{1(-)} \end{pmatrix}, \quad (8.30)$$

sendo os primeiros coeficientes dados por

$$\begin{pmatrix} \Theta_{1(-)} \\ \Theta'_{1(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\kappa'\delta_1} \end{pmatrix}. \quad (8.31)$$

Da mesma forma, é possível encontrar, para $x > x'$, as seguintes relações entre os coeficientes das regiões anterior e posterior à barreira do ponto x_j :

$$A_{j+1}^i e^{\kappa'x_j} - B_{j+1}^i e^{-\kappa'x_j} = A_j^i e^{\kappa'x_j} - B_j^i e^{-\kappa'x_j} \quad (8.32)$$

e

$$A_{j+1}^i e^{\kappa'x_j} + B_{j+1}^i e^{-\kappa'x_j} = A_j^i e^{\kappa'x_j} + B_j^i e^{-\kappa'x_j} + \alpha_j \kappa' \left(A_j^i e^{\kappa'x_j} - B_j^i e^{-\kappa'x_j} \right), \quad (8.33)$$

que podem ser combinadas de modo a fornecer

$$A_{j+1}^i = \frac{e^{-\kappa'x_j}}{2\kappa'} \left[(2\kappa' - \alpha_j \kappa'^2) A_j^i e^{\kappa'x_j} - \alpha_j \kappa'^2 B_j^i e^{-\kappa'x_j} \right] \quad (8.34)$$

e

$$B_{j+1}^i = \frac{e^{\kappa'x_j}}{2\kappa'} \left[\alpha_j \kappa'^2 A_j^i e^{\kappa'x_j} + (2\kappa' + \alpha_j \kappa'^2) B_j^i e^{-\kappa'x_j} \right]. \quad (8.35)$$

Novamente, a exigência de que a função de Green reduzida seja sempre finita, mesmo para $x \rightarrow +\infty$, nos possibilita escrever as relações

$$\Theta_{j(+)} e^{\kappa'x_j} A_j^i - \Theta'_{j(+)} e^{-\kappa'x_j} B_j^i = 0 \quad (8.36)$$

e

$$\Theta_{j+1(+)} e^{\kappa'x_{j+1}} A_{j+1}^i - \Theta'_{j+1(+)} e^{-\kappa'x_{j+1}} B_{j+1}^i = 0 \quad (8.37)$$

para os coeficientes A e B de cada região. Desta forma, pelas equações (8.34) e (8.35), temos que

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j(+)} \\ \Theta'_{j(+)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' + \alpha_j \kappa'^2) e^{\kappa'\delta_{j+1}} & -\alpha_j \kappa'^2 e^{-\kappa'\delta_{j+1}} \\ \alpha_j \kappa'^2 e^{\kappa'\delta_{j+1}} & (2\kappa' - \alpha_j \kappa'^2) e^{-\kappa'\delta_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j+1(+)} \\ \Theta'_{j+1(+)} \end{pmatrix}, \quad (8.38)$$

que por sua vez, quando aplicada seguidamente desde a última região até a região em que se encontra x' , nos fornece

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i(+)} \\ \Theta'_{i(+)} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=i}^N \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' + \alpha_j \kappa'^2) e^{\kappa'\delta_{j+1}} & -\alpha_j \kappa'^2 e^{-\kappa'\delta_{j+1}} \\ \alpha_j \kappa'^2 e^{\kappa'\delta_{j+1}} & (2\kappa' - \alpha_j \kappa'^2) e^{-\kappa'\delta_{j+1}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Theta_{N+1(+)} \\ \Theta'_{N+1(+)} \end{pmatrix}, \quad (8.39)$$

sendo os primeiros coeficientes

$$\begin{pmatrix} \Theta_{N+1(+)} \\ \Theta'_{N+1(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\kappa'\delta_{N+1}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

Por fim, admitindo que em torno do ponto $x = x'$ as relações

$$g(x, x') \Big|_{x_j^-}^{x_j^+} = 0 \quad \text{e} \quad - \frac{\partial g(x, x')}{\partial x} \Big|_{x'^-}^{x'^+} = 1 \quad (8.41)$$

continuem válidas, temos

$$g_i^i(x, x') = \frac{[\Theta_{i(+)}e^{\kappa'(x_i-x>)} + \Theta'_{i(+)}e^{-\kappa'(x_i-x>)}] [\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'(x<-x_{i-1})} + \Theta_{i(-)}e^{-\kappa'(x<-x_{i-1})}]}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)}\Theta'_{i(-)}e^{\kappa'\delta_i} - \Theta'_{i(+)}\Theta_{i(-)}e^{-\kappa'\delta_i})}. \quad (8.42)$$

Comparando a expressão obtida acima com (7.7), obtida no capítulo anterior, vemos que ambas ficam “com a mesma cara” após a substituição

$$\Theta' \rightarrow -\Theta', \quad (8.43)$$

onde usamos a expressão “com a mesma cara”, ao invés de iguais, pois os coeficientes Θ 's são definidos de forma diferente para os modos TE e TM. Sendo assim, podemos encontrar a expressão para o tensor energia-momento conforme do modo TM usando esta mesma substituição. O resultado encontrado é dado por

$$\langle 0 | \tilde{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle_i = \begin{pmatrix} u_i & 0 & O \\ 0 & n.u'_i & O \\ O & O & -u_i.I \end{pmatrix} - g'_i(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 0 & 0 & O \\ O & O & -I \end{pmatrix}, \quad (8.44)$$

onde mantivemos as definições (7.8), (7.9) e (7.10) para $u(x)$, $g'(x)$ e $u'(x)$, respectivamente, lembrando mais uma vez que agora os coeficientes Θ 's são dados por (8.30) e (8.39), e não mais por (7.5) e (7.6). Mais uma vez, não é difícil verificar que o traço do tensor energia-momento obedece a equação

$$\langle 0 | T^\mu_\mu | 0 \rangle_i = m^2 \frac{G(x, x)}{i}. \quad (8.45)$$

Por fim, ao compararmos as equações (8.30) e (8.39) com (7.5) e (7.6), percebemos que os coeficientes Θ 's do modo TM também podem ser obtidos, a partir daqueles do

modo TE, por uma simples substituição, sendo esta

$$\lambda_i \rightarrow \alpha_i \tilde{\kappa}^2. \quad (8.46)$$

Obviamente, se pudermos considerar

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\tilde{\kappa}^2}, \quad (8.47)$$

as definições dos coeficientes para os modos TE e TM se tornam iguais. Sendo assim, as equações (7.12) e (8.45) nos mostram que, neste caso, o termo espúrio $g'(x)$ é naturalmente cancelado, e que os dois modos dão contribuições iguais à energia e à força de Casimir.

8.4 Modos TM para N potenciais do tipo barreira

Na seção anterior, determinamos o tensor energia-momento (conforme) para o modo TM de um campo escalar e massivo, que interagia com N barreiras modeladas por funções delta de Dirac. Naquela ocasião introduzimos um novo parâmetro α , mas não estabelecemos sua relação com a constante de acoplamento λ , dizendo apenas que no limite de acoplamento forte ($\lambda \rightarrow \infty$) o módulo de α tendia a infinito. Tal abordagem foi possível pois, uma vez que as barreiras eram pontuais, as soluções gerais da função de Green não continham referência explícita à constante de acoplamento λ – de fato, se analisarmos os resultados da seção anterior, veremos que a única dependência em λ está contida em α , embora esta não tenha sido especificada. Já no presente caso, não teremos como seguir da mesma forma, e a relação entre α e λ terá que ser estabelecida desde o princípio. No intuito de mantermos a solução geral da função de Green reduzida dada por

$$g_j^i(x, x') = A_j^i e^{\kappa_j x} + B_j^i e^{-\kappa_j x}, \quad (8.48)$$

lembrando que os sub-índices i e j se referem as regiões onde se encontram x' e x , respectivamente, e que

$$\kappa_j = \sqrt{\kappa^2 + m^2 + \lambda_j}, \quad (8.49)$$

temos que a relação entre α e λ pode ser estabelecida como

$$\alpha_j = \pm \frac{\lambda_j}{\kappa'^2}. \quad (8.50)$$

Ao escolhermos o sinal positivo na equação acima, toda a discussão feita no final da seção anterior continuará válida e, portanto, a contribuição dada pelo modo TM à energia e a força de Casimir será igual àquela dada pelo modo TE, obtida no capítulo 6. No entanto, a escolha do sinal negativo e sua aplicação na equação (8.29) nos levam à seguinte relação entre os coeficientes Θ 's quando $x < x'$

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' + \lambda_j) e^{-\kappa'\delta_j} & -\lambda_j e^{\kappa'\delta_j} \\ \lambda_j e^{-\kappa'\delta_j} & (2\kappa' - \lambda_j) e^{\kappa'\delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j(-)} \\ \Theta'_{j(-)} \end{pmatrix}. \quad (8.51)$$

É importante notarmos que agora estamos tentando fazer o caminho inverso daquele tomado na segunda seção do capítulo anterior, ou seja, encontrar a expressão válida para N regiões de diferentes potenciais, e larguras finitas, a partir daquela válida para N barreiras do tipo delta de Dirac. Sendo assim, é natural nos guiarmos pelos passos que tomamos antes para alcançarmos nosso objetivo. Em particular, a equação (8.51), acima, é equivalente à equação (7.4) do capítulo anterior, que expressa a relação entre os coeficientes Θ 's já com a notação adequada para tratarmos N barreiras do tipo delta de Dirac. Nosso passo seguinte, será voltarmos a uma notação mais adequada ao caso de N regiões, ou seja, obter uma equação para o presente caso que seja equivalente à equação (7.3) do caso anterior. Por simples comparação, não é difícil percebermos que a equação que procuramos é dada por

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (2\kappa' + \lambda_j) e^{-\kappa'\delta_{j-1}} & -\lambda_j e^{\kappa'\delta_{j-1}} \\ \lambda_j e^{-\kappa'\delta_{j-1}} & (2\kappa' - \lambda_j) e^{\kappa'\delta_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j-1(-)} \\ \Theta'_{j-1(-)} \end{pmatrix}. \quad (8.52)$$

A equação acima representa o limite em que $\delta_j \rightarrow 0$, onde δ_j é a largura da região intermediária àquelas de sub-índice $j + 1$ e $j - 1$ – cujos coeficientes estão relacionados acima. É justamente tal região que queremos “restaurar”, tornando sua largura novamente finita. Comparando as equações (7.3) e (8.52), e fortemente inspirados por (7.2), somos levados a sugerir

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j - \kappa') e^{-\kappa_j \delta_j} & (\kappa_j + \kappa') e^{\kappa_j \delta_j} \\ (\kappa_j + \kappa') e^{-\kappa_j \delta_j} & (\kappa_j - \kappa') e^{\kappa_j \delta_j} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{2\kappa'} \begin{pmatrix} (\kappa' - \kappa_j)e^{-\kappa'\delta_{j-1}} & (\kappa' + \kappa_j)e^{\kappa'\delta_{j-1}} \\ (\kappa' + \kappa_j)e^{-\kappa'\delta_{j-1}} & (\kappa' - \kappa_j)e^{\kappa'\delta_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j-1(-)} \\ \Theta'_{j-1(-)} \end{pmatrix} \quad (8.53)$$

como a relação que, no limite $\delta_j \rightarrow 0$, implica em (8.52) – para que tal limite seja mesmo satisfeito, devemos nos lembrar que κ_j é dado, a princípio, por $\kappa_j = \sqrt{\kappa^2 + m^2 + \lambda_j h_j}$ (tal que $h_j \delta_j = 1$), mas que podemos redefinir $\lambda_j h_j \rightarrow \lambda_j$ daqui para frente, de modo a retornamos à definição habitual (8.49). Note que (8.53) não é a única relação possível, no entanto é a que mais se assemelha a (7.2). Além disso, nela está sendo considerado que as regiões anterior e posterior a j -ésima são regiões de potencial nulo $\lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = 0$, o que, por sua vez, implica em $\kappa_{j-1} = \kappa_{j+1} = \kappa' = \sqrt{\kappa^2 + m^2}$. Comparando (8.53) com (6.83), não é difícil perceber que, ao “restaurarmos” o potencial das regiões citadas, obteremos

$$\begin{pmatrix} \Theta_{j+1(-)} \\ \Theta'_{j+1(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j - \kappa_{j+1})e^{-\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j + \kappa_{j+1})e^{\kappa_j\delta_j} \\ (\kappa_j + \kappa_{j+1})e^{-\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j - \kappa_{j+1})e^{\kappa_j\delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{j(-)} \\ \Theta'_{j(-)} \end{pmatrix}. \quad (8.54)$$

Ao usarmos novamente a definição (6.16) para os primeiros coeficientes, encontramos para a i -ésima região

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i(-)} \\ \Theta'_{i(-)} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2\kappa_{i-j}} \begin{pmatrix} (\kappa_{i-j} - \kappa_{i-j+1})e^{-\kappa_{i-j}\delta_{i-j}} & (\kappa_{i-j} + \kappa_{i-j+1})e^{\kappa_{i-j}\delta_{i-j}} \\ (\kappa_{i-j} + \kappa_{i-j+1})e^{-\kappa_{i-j}\delta_{i-j}} & (\kappa_{i-j} - \kappa_{i-j+1})e^{\kappa_{i-j}\delta_{i-j}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\kappa_1\delta_1} \end{pmatrix}, \quad (8.55)$$

quando $x < x'$. Raciocínio semelhante nos leva a encontrar

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i(+)} \\ \Theta'_{i(+)} \end{pmatrix} = \left[\prod_{j=i+1}^N \frac{1}{2\kappa_j} \begin{pmatrix} (\kappa_j - \kappa_{j-1})e^{\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j + \kappa_{j-1})e^{-\kappa_j\delta_j} \\ (\kappa_j + \kappa_{j-1})e^{\kappa_j\delta_j} & (\kappa_j - \kappa_{j-1})e^{-\kappa_j\delta_j} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e^{-\kappa_N\delta_N} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.56)$$

para a região $x > x'$. Apenas como uma curiosidade, podemos voltar um pouco mais e, lembrando que agora os coeficientes Θ 's são definidos por

$$\Theta_{j(-)}e^{\kappa_j x_{j-1}} A_j^i - \Theta'_{j(-)}e^{-\kappa_j x_{j-1}} B_j^i = 0 \quad (8.57)$$

e

$$\Theta_{j+1(-)}e^{\kappa_{j+1} x_j} A_{j+1}^i - \Theta'_{j+1(-)}e^{-\kappa_{j+1} x_j} B_{j+1}^i = 0, \quad (8.58)$$

quando $x < x'$, e por

$$\Theta_{j(+)} e^{\kappa_j x_j} A_j^i - \Theta'_{j(+)} e^{-\kappa_j x_j} B_j^i = 0 \quad (8.59)$$

e

$$\Theta_{j+1(+)} e^{\kappa_{j+1} x_{j+1}} A_{j+1}^i - \Theta'_{j+1(+)} e^{-\kappa_{j+1} x_{j+1}} B_{j+1}^i = 0, \quad (8.60)$$

quando $x > x'$, podemos encontrar a seguinte relação entre os coeficientes A e B de duas regiões seguidas

$$\kappa_j (A_j^i e^{\kappa_j x_j} + B_j^i e^{-\kappa_j x_j}) = \kappa_{j+1} (A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} + B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}) \quad (8.61)$$

e

$$A_j^i e^{\kappa_j x_j} - B_j^i e^{-\kappa_j x_j} = -A_{j+1}^i e^{\kappa_{j+1} x_j} + B_{j+1}^i e^{-\kappa_{j+1} x_j}, \quad (8.62)$$

ou, simplesmente,

$$\kappa_j \cdot g(x, x') \Big|_{x_j^-} = \kappa_{j+1} \cdot g(x, x') \Big|_{x_j^+} \quad (8.63)$$

e

$$\frac{1}{\kappa_j} \cdot \frac{\partial g(x, x')}{\partial x} \Big|_{x_j^-} + \frac{1}{\kappa_{j+1}} \cdot \frac{\partial g(x, x')}{\partial x} \Big|_{x_j^+} = 0. \quad (8.64)$$

Por fim, assumindo novamente que (8.41) continua válida no ponto $x = x'$, temos que a função de Green reduzida é dada por

$$g_i^i(x, x') = \frac{[\Theta_{i(+)} e^{\kappa_i(x_i - x')} + \Theta'_{i(+)} e^{-\kappa_i(x_i - x')}] [\Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i(x' - x_{i-1})} + \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i(x' - x_{i-1})}]}{2\kappa_i (\Theta_{i(+)} \Theta'_{i(-)} e^{\kappa_i \delta_i} - \Theta'_{i(+)} \Theta_{i(-)} e^{-\kappa_i \delta_i})}, \quad (8.65)$$

enquanto o tensor energia-momento conforme continua dado por (8.44), porém com as definições originais de $u(x)$, $g'(x)$ e $u'(x)$, dadas por (6.43), (6.48) e (6.55). Mais uma vez, pode-se mostrar que

$$\langle 0 | T_\mu^\mu | 0 \rangle_i = (m^2 + \lambda_i) \frac{G(x, x)}{i}. \quad (8.66)$$

Capítulo 9

Conclusões

9.1 Conclusões

No presente trabalho seguimos em duas direções distintas: a da quebra espontânea de simetria e a do efeito Casimir. Em ambos os casos, ficou evidente a grande influência que pode ser exercida sobre uma teoria quântica de campos por restrições impostas ao campo. Nossos principais objetivos eram descobrir em que casos a imposição das condições de contorno de Neumann poderiam inibir a quebra espontânea de simetria no mecanismo de Coleman-Weinberg (assunto este que foi desenvolvido no capítulo 3) e desenvolver um modelo geral – usando como protótipo o campo escalar real – que nos permita explorar o efeito Casimir em diversas situações, sendo portanto de grande aplicabilidade (assunto desenvolvido no capítulo 6).

Para o primeiro dos objetivos, analisamos a segunda derivada do potencial efetivo, em $\langle\phi\rangle = 0$, para saber sob quais condições este ponto representa um mínimo – se $\langle\phi\rangle = 0$ representa um mínimo, a simetria não é quebrada. Encontramos que a quebra espontânea de simetria é inibida se $a \approx e^2(M_\phi)^{-1}$ e que para $a \approx e(M_\phi)^{-1}$, embora a quebra não seja inibida, o mínimo é modificado. Uma vez que consideramos as aproximações do potencial efetivo até um “loop”, é natural nos perguntar se a inibição da quebra espontânea de simetria se mantém quando termos de maior ordem são considerados. Embora uma extensão do cálculo para ordens mais altas seja muito trabalhosa, podemos realizar uma estimativa grosseira de suas consequências. Uma análise dimensional mostra que os termos que são devidos à presença das condições de contorno são do tipo $\phi^n a^{n-4}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), para qualquer ordem de \hbar . Uma vez que as correções de ordens mais altas em \hbar somente aumentam a ordem das constantes de acoplamento nos coeficientes dos termos em potências de ϕ , estes termos serão desprezíveis quando comparados com seus respectivos termos de ordem \hbar (se β é de ordem de e^2). Disso, podemos concluir que nossos resultados são confiáveis para todas as ordens em \hbar .

Já para o efeito Casimir, encontramos as expressões válidas quando o campo escalar real interage com N regiões de diferentes potenciais. Nossas expressões finais são todas

dadas em termos de coeficientes Θ 's, que por sua vez podem ser calculados diretamente através de uma sucessão de produtos de matrizes. Neste processo, cada matriz “representa” a transição entre duas regiões adjacentes, ou da esquerda para direita ou da direita para a esquerda, devendo portanto ser escolhida de forma adequada a cada caso. Desta forma, as informações que caracterizam cada região devem ser inseridas nestas matrizes que, por fim, serão transmitidas aos coeficientes de nossas soluções. Acreditamos que tal forma de solução é de grande utilidade prática para cálculos computacionais e que, em situações onde o efeito Casimir seja relevante, estes poderão ser usados para prever o comportamento de inúmeros sistemas em diversas configurações. Nos capítulos 7 e 8, exploramos algumas possibilidades de aplicação das nossas soluções, obtendo o caso limite das barreiras do tipo delta de Dirac e uma versão adequada para tratar modos TM.

Para o futuro, veremos até onde nosso modelo pode ser aplicado, trazendo novas contribuições à compreensão do efeito Casimir e de assuntos relacionados. Esperamos também que ele seja utilizado por outros pesquisadores de diversas áreas, que vão desde teoria quântica de campos até a física aplicada, e que possa servir de guia para pesquisas experimentais e possíveis aplicações tecnológicas que, por ventura, venham a surgir. Por fim, sua generalização para outros tipos de campo é uma possibilidade a ser explorada caso ele realmente se confirme como uma boa ferramenta.

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

- [1] F. N. Fagundes, T. L. Antonacci Oakes, B. B. Dilem and J. A. Nogueira, *Int. J. Mod. Phys. A* **25**(7), 1389-1403 (2010).
- [2] Y. Nambu *Phys. Rev. Lett.* 4, 380 (1960). Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Ver.* 122, 345 (1961). J. Goldstone, *Nuovo Cim.* 19, 15 (1961).
- [3] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Phys. Ver.* 127, 965 (1962). P. W. Higgs, *Phys. Lett.* 12, 132 (1964) e *Phys. Rev.* 145, 1156 (1966).
- [4] G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **B35**, 167 (1971).
- [5] G. Kane, *Modern Elementary Particles Physics* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1993).
- [6] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev. D* 7, 1888 (1973).
- [7] Casimir, H. B. G. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.*, 51:793, 1948.
- [8] Cougo-Pinto, M. V., Farina, C. e Tort, A. C.; *Rev. Bras. Ens. Fis.* **22**(1), 122 (2000). Passos Sobrinho, J. J. e A. C. Tort; *Rev. Bras. Ens. Fís.* **23**(4), 401 (2001).
- [9] Boyer, T. H.; *Ann. Phys.* **56**, 474 (1970).
Aitchison, I. J. R.; *Contemp. Phys.* **26**(4), 333 (1985).
Plunien, G., Müller B. and Greiner, W.; *Phys. Rept.* 134, 89 (1986).
Bordag, M., Mohideen, U. and Mostepanenko, V, M.; *Phys. Rept.* **353**, 1 (2001).
Farina, C; *Braz. J. Phys.* **36**(4A), 1137 (2006).

- Klimchitskaya, G. L. and Mostepanenko, V. M.; [arXiv:quant-ph/0609145].
 Mostepanenko, V. M.; [arXiv:quant-ph/0702061].
- [10] Casimir, H. B. G. and Polder, D., Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
- [11] Sparnaay, M. J.; Physica **24**, 751 (1958).
- [12] Lamoureux, S. K.; Phys. Rev. Lett. **28**, 5 (1997).
- [13] Mohideen, U. and Roy, A.; Phys. Rev. Lett. **81**, 21 (1998).
- [14] Klimchitskaya, G. L. *et al.*; Phys. Rev. A **60**, 3487 (1999).
 Harris, B. W., Chen, F. and Mohideen, U.; Phys. Rev. A **62**, 05109 (2000).
 Bressi, G., Carugno, G. Onofrio, R. and Ruoso, G. *et al.*; Phys. Rev. Lett. **88**,
 041804 (2002).
 Decca, R. S., Fischbach, E., Klimchitskaya, G. L., Krause, D. E., López, D. Mos-
 tepanenko, V. M. ; Phys. Rev. D **68**, 116003 (2003); Ann. Phys. (N.Y.) **318**, 37
 (2005); Int. J. Mod. Phys. A **28**, 2205 (2005); Phys. Rev. D **75**, 077101 (2007);
 Eur. Phys. J. C **51**, 963 (2007).
 Chen, F. Mohideen, U. Klimchitskaya, G. L. and Mostepanenko V. M.; Phys. Rev.
 Lett. **88**, 101801 (2002); Phys. Rev. A **66**, 032113 (2002); Phys. Rev. A **69**, 022117
 (2004); Phys. Rev. A **72**, 020101 (2005); Phys. Rev. A **74**, 022103 (2006); Phys.
 Rev. Lett. **97**, 170402 (2006); Opt. Express **15**, 4823 (2007); Phys. Rev. B **76**,
 035338 (2007).
- [15] Lifshitz, E. M.; Zh. Eksp. Teor. Fiz., 29:94, 1956 (Tradução inglesa: Soviet. Phys. JETP 2:73, 1956).
- [16] Milton, K. A.; J. Phys. **A37**, 6391 (2004) [arXiv:hep-th/0401090].
- [17] Soriano Carrillo, L. A.; *Efeito Casimir para potenciais funções delta de Dirac em (1+1) dimensões*, Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Físicas do CCE da UFES, Vitória-ES (2007).

- [18] Dilem, B. B.; *Força de Casimir para fronteiras descritas por barreiras de potencial de largura finita em (1+1) dimensões*, Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Físicas do CCE da UFES, Vitória-ES (2008).
- [19] Bibliografia indicada para uma introdução à Teoria Quântica de Campos.
 Belvedere, L. V.; *Teoria Quântica de Campos I*, Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense, Notas de aula (1997);
 Brown, L. S.; *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992);
 Greiner, W. and Reinhardt, J.; *Field Quantization* (Springer-Verlag, Berlin, 1996);
 Huang, K.; *Quarks Leptons & Gauge Fields* (Word Scientific Publishing Company, Singapore, 1982).;
 Kaku, M.; *QUANTUM FIELD THEORY A Modern introduction* (Oxford University Press, New York, 1993).
 Ryder, L. H.; *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [20] K. Huang, *Quarks Leptons & Gauge Fields* (Word Scientific Publishing Company, Singapore, 1982).
- [21] J. V. Narlikar and T. Padmanabhan, *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986).
- [22] R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 1686 (1974).
- [23] D. J. Toms, Phys. Lett. A **77**(5), 303 (1980).
- [24] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).

- [25] E. Elizalde et al., *Zeta regularization techniques with applications* (World Scientific 1994).
- [26] P. Ramond, *FIELD THEORY A Modern Primer* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1981).
- [27] E. Elizalde and A. Romeo, *J. Math. Phys.* **B 30**(5), 1133 (1989).
- [28] Lüscher, M., Symanzik, K. and Weisz, P.; *Nucl. Phys. B*, 173:365 (1980).
- [29] Lüscher, M.; *Nucl. Phys. B*, 180:317 (1981).
- [30] Kimball A. Milton, Invited talk given at Marcel Grossmann X, arXiv:hep-th/0401117.
- [31] Kimball A. Milton; *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, R209-R277 (2004).