

Interações no Setor Escuro do Universo

Roly David Rodriguez Castro

Dissertação de Mestrado em Física

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória-ES, 2012

Interações no Setor Escuro do Universo

Roly David Rodriguez Castro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Aprovada por:

Prof. Dr. Jailson Souza de Alcaniz
Observatório Nacional (ON)

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Prof. Dr. Oliver Fabio Piatella
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória-ES, 2012

Interações no Setor Escuro do Universo

Roly David Rodriguez Castro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador:

Prof. Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória-ES, 2012

Agradecimentos

A Deus, que esteve comigo em todas as etapas da minha vida, mesmo sem eu ter me dado conta disso.

A meus pais Clara Castro e Julio Rodriguez que toda a vida trabalharam muito forte para eu poder estudar, apesar das limitações econômicas.

A minha irmã Maricela Rodriguez Castro por dar me muita força para seguir trabalhando e nunca deixar de fazer o que eu mais gosto.

Ao Dr. Jorge Abel Espichan Carrillo, por encaminhar minha vida pelo caminho da pesquisa

Ao meu orientador e amigo o Dr. Winfried Zimdahl, pelo apoio no presente trabalho.

Ao Sra. Sinara Dias, uma gran amiga.

Ao minha noiva Miriam Yarihuaman, a mulher que sempre apoiou meus sonhos.

Ao Hermano Velten meu professor e amigo por mostrar todo o aprendizado na cosmologia computacional e os bons conselhos.

Ao meu irmão Cristofher Zuñiga Vargas pelas discussões no presente trabalho.

Ao meu amigo Julio Vivar, por os bons conselhos.

Ao Departamento de Física da UFES, pela oportunidade de poder adquirir conhecimento.

Aos professores da posgraduação em Física da UFES, que direta o indiretamente contribuírom no presente trabalho.

Aos meus colegas, Anna Paula, Paulo Louzada, Cesar Castañeda, Evel Lozano, William Algoner, Isabel Castro, Ivan Morales, Zui Oporto, Jorge Aching, pelos bons conselhos e força.

Ao CAPES, sem o qual a maior parte do trabalho desenvolvido nesta Tese não seria possível.

Las personas nacemos con dones y habilidades, las cuales están dormidas dentro de nosotros, a pesar de eso pocos la desarrollamos y dejamos que la mediocridad se apegue en nosotros, la diferencia entre un triunfador y un mediocre radica en el desarrollo de la mente y los pocos que realmente han decidido darlo todo para cumplir sus objetivos.

El triunfador es siempre una parte de la propuesta; el perdedor siempre es una parte del problema.

MIGUEL ÁNGEL CORNEJO

Resumo

Interações entre matéria escura e energia escura mudam a dinâmica cosmológica padrão. Em particular, elas podem ser relevantes para aliviar o problema de coincidência cósmica. Nesta dissertação estudamos uma classe de interações que resultam numa lei de potência com respeito ao fator de escala para a razão entre as densidades das duas componentes escuras. Generalizamos esta abordagem para admitir equações de estado variáveis para a energia escura. Achemos soluções analíticas para dois casos especiais. Confrontamos os resultados teóricos com observações de supernovas do tipo Ia e outros dados observacionais. Fazemos uma análise estatística e classificamos modelos com e sem interação com respeito aos critérios de informação. Discutimos a relevância dos modelos para o problema de coincidência cósmica.

Abstract

Interactions between dark matter and dark energy modify the dynamics of the cosmological standard model. In particular, they may be relevant in attempts to alleviate the cosmic coincidence problem. In this dissertation we study a class of interactions that result in a power law with respect to the scale factor for the ratio of the energy densities of both dark components. We generalize this approach to include time-varying equations of state for the dark energy. We obtain analytic solutions for two special cases. We confront the theoretical results with observations from supernovas type Ia and other observational data. We perform a statistical analysis and classify models with and without interactions according to information criteria. The relevance of the interacting models for the coincidence problem is discussed.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
2 Fundamentos da Cosmologia Moderna	3
2.1 Introdução	3
2.2 O Modelo Cosmológico Padrão	4
2.3 Aspectos Observacionais	7
2.3.1 Redshift Cosmológico	7
2.3.2 Distâncias Cosmológicas	9
2.4 Como Acelerar o Universo	15
2.4.1 Modelo Padrão	15
2.4.2 Λ CDM plano	20
2.4.3 x -CDM	22
2.4.4 Modelo com Parametrização CPL	24
3 Interações no Setor Escuro	30
3.1 Introdução	30
3.2 O Problema da Coincidência Cósmica	30
3.3 Modelos com Interação	31
3.3.1 Caso $\omega_x = cte$	32
3.3.2 Caso $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 1$	37
3.3.3 Caso $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 3$	41
3.4 Resultados obtidos com os dados das amostras Constitution e Union2	47
3.5 Análise χ^2_{min} para os dados das amostras Constitution e Union2	48
3.6 Análise combinada SNIa(Supernova), BAO, CMB	50
3.6.1 Λ CDM	50
3.6.2 Caso sem interação, parametrização CPL	50

3.6.3	Caso interação $\xi = 1$, parametrização CPL	51
3.6.4	Caso interação $\xi = 3$, parametrização CPL	52
3.7	Resultados finais obtidos	52
4	Conclusões	54
	Referências Bibliográficas	55
A	Análise Estatística	57
B	Supernovas do tipo Ia	62
C	Análise Combinada	65

Lista de Figuras

2.1	Trajatória no espaço-tempo de dois fótons emitidos por uma fonte emissora.	8
2.2	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo Λ CMD aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 465.353$; $h = 0.651_{-0.003-0.005-0.008}^{+0.003+0.005+0.008}$; $\Omega_{m0} = 0.325_{-0.025-0.049-0.073}^{+0.025+0.051+0.078}$; $\Omega_{\Lambda0} = 0.769_{-0.033-0.067-0.101}^{+0.032+0.064+0.096}$	19
2.3	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo Λ CMD aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 540.879$; $h = 0.700_{-0.002-0.005-0.007}^{+0.002+0.005+0.007}$; $\Omega_{m0} = 0.296_{-0.024-0.047-0.070}^{+0.024+0.049+0.074}$; $\Omega_{\Lambda0} = 0.775_{-0.031-0.061-0.093}^{+0.030+0.060+0.089}$	20
2.4	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo Λ CMD plano aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 465.513$; $h = 0.650_{-0.003-0.005-0.008}^{+0.003+0.005+0.008}$; $\Omega_{m0} = 0.289_{-0.014-0.028-0.042}^{+0.015+0.029+0.045}$	21
2.5	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo Λ CMD plano aos dados da amostra Union2 obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 541.012$; $h = 0.699_{-0.002-0.005-0.007}^{+0.002+0.005+0.007}$; $\Omega_{m0} = 0.269_{-0.014-0.027-0.040}^{+0.014+0.028+0.042}$	22
2.6	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste de o modelo x -CMD aos dados da amostra Constitution. obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 465.508$; $h = 0.650_{-0.003-0.005-0.008}^{+0.003+0.005+0.008}$; $\Omega_{m0} = 0.295_{-0.014-0.028-0.042}^{+0.015+0.029+0.044}$; $\omega_x = -1.016_{-0.035-0.070-0.106}^{+0.034+0.068+0.101}$	23
2.7	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo x -CMD aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 540.954$; $h = 0.700_{-0.002-0.005-0.007}^{+0.002+0.005+0.007}$; $\Omega_{m0} = 0.287_{-0.013-0.026-0.039}^{+0.013+0.027+0.041}$; $\omega_x = -1.049_{-0.032-0.065-0.098}^{+0.032+0.063+0.094}$	24
2.8	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com parametrização CPL aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 461.231$; $h = 0.640_{-0.003-0.005-0.008}^{+0.003+0.005+0.008}$; $\Omega_{m0} = 0.452_{-0.012-0.024-0.035}^{+0.012+0.025+0.037}$; $\omega_0 = -0.221_{-0.073-0.149-0.227}^{+0.071+0.140+0.207}$; $\omega_1 = -11.228_{-0.786-1.623-2.513}^{+0.741+1.440+2.101}$	26

2.9 Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com parametrização CPL aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 539.878$; $h = 0.695_{-0.002-0.005-0.007}^{+0.002+0.005+0.007}$; $\Omega_{m0} = 0.415_{-0.011-0.022-0.033}^{+0.011+0.023+0.035}$; $\omega_0 = -0.887_{-0.055-0.111-0.169}^{+0.054+0.107+0.159}$; $\omega_1 = -5.108_{-0.610-1.253-1.930}^{+0.579+1.129+1.652}$ 27

2.10 Diagrama de Hubble com dados da amostra Constitution ($0.015 \leq z \leq 1.551$). 28

2.11 Diagrama de Hubble com dados da amostra Union2 ($0.015 \leq z \leq 1.4$). 28

2.12 Parâmetro de desaceleração com dados da amostra Constitution. 29

2.13 Parâmetro de desaceleração com dados da amostra Union2. 29

3.1 Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = cte$ aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 465.490$; $\Omega_{m0} = 0.290_{-0.022-0.043-0.064}^{+0.022+0.046+0.070}$; $\xi = 3.160_{-0.490-0.974-1.456}^{+0.513+1.044+1.602}$; $\omega_x = -1.015_{-0.045-0.091-0.136}^{+0.046+0.091+0.137}$ 35

3.2 Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Constitution. 35

3.3 Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = cte$ aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 540.931$; $\Omega_{m0} = 0.269_{-0.020-0.039-0.057}^{+0.020+0.041+0.063}$; $\xi = 3.301_{-0.445-0.882-1.315}^{+0.458+0.934+1.432}$; $\omega_x = -1.025_{-0.042-0.083-0.125}^{+0.042+0.084+0.126}$ 36

3.4 Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Union2. 36

3.5 Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 1$ aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 466.022$; $\Omega_{m0} = 0.289(fixo)$; $\omega_0 = -1.054_{-0.132-0.266-0.400}^{+0.132+0.262+0.389}$; $\omega_1 = 1.167_{-0.749-1.483-2.197}^{+0.763+1.533+2.318}$ 40

3.6 Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Constitution. 40

3.7 Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 1$ aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste: $\chi_{min}^2 = 541.275$; $\Omega_{m0} = 0.269(fixo)$; $\omega_0 = -1.063_{-0.113-0.224-0.337}^{+0.113+0.223+0.333}$; $\omega_1 = 1.171_{-0.611-1.209-1.791}^{+0.627+1.244+1.330}$ 41

3.8 Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Union2. 41

3.9 Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 3$ aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 465.482$; $\Omega_{m0} = 0.289(fixo)$; $\omega_0 = -0.971_{-0.164-0.329-0.494}^{+0.162+0.326+0.486}$; $\omega_1 = -0.187_{-1.031-2.043-3.033}^{+1.047+2.097+3.167}$ 45

3.10 Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Constitution. 45

3.11 Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 3$ aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 540.996$; $\Omega_{m0} = 0.269(fixo)$; $\omega_0 = -1.017_{-0.132-0.263-0.396}^{+0.132+0.262+0.395}$; $\omega_1 = 0.106_{-0.801-1.596-2.366}^{+0.809+1.614+2.424}$ 46

3.12	Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Union2.	46
3.13	Análise χ_{min}^2 para os dados da amostra Constitution.	48
3.14	Análise χ_{min}^2 para os dados da amostra Union2.	49
3.15	Comportamento da interação atual, onde (1)Constitution+BAO+CMB e (2)Union2+BAO+CMB	53
B.1	Dados da amostra Constitution	63
B.2	Dados da amostra Union2	64

Lista de Tabelas

3.1	Caso Λ CDM, No Int., Int. $\xi = 1$, Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos fixando $\Omega_{m0} = 0.289$ com os dados da amostra Constitution.	47
3.2	Caso Λ CDM, No Int., Int. $\xi = 1$, Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos fixando $\Omega_{m0} = 0.269$ com os dados da amostra Union2.	47
3.3	Caso Λ CDM. Resultados obtidos do análise combinada (Constitution / Constitution + BAO / Constitution + CMB / Constitution + BAO + CMB).	50
3.4	Caso Λ CDM. Resultados obtidos do análise combinada (Union2 / Union2 + BAO / Union2 + CMB / Union2 + BAO + CMB).	50
3.5	Caso No Int.. Resultados obtidos do análise combinada (Constitution / Constitution + BAO / Constitution + CMB / Constitution + BAO + CMB).	50
3.6	Caso No Int.. Resultados obtidos do análise combinada (Union2 / Union2 + BAO / Union2 + CMB / Union2 + BAO + CMB).	51
3.7	Caso Int. $\xi = 1$. Resultados obtidos do análise combinada (Constitution / Constitution + BAO / Constitution + CMB / Constitution + BAO + CMB).	51
3.8	Caso Int. $\xi = 1$. Resultados obtidos do análise combinada (Union2 / Union2 + BAO / Union2 + CMB / Union2 + BAO + CMB).	51
3.9	Caso Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos da análise combinada (Constitution / Constitution + BAO / Constitution + CMB / Constitution + BAO + CMB).	52
3.10	Caso Int. $\xi = 1$. Resultados obtidos do análise combinada (Union2 / Union2 + BAO / Union2 + CMB / Union2 + BAO + CMB).	52
3.11	Caso Λ CDM, No Int., Int. $\xi = 1$, Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos da análise combinada (Constitution + BAO + CMB).	52
3.12	Caso Λ CDM, No Int., Int. $\xi = 1$, Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos da análise combinada (Union2 + BAO + CMB).	53
A.1	- $\Delta\chi^2$ como função do nível de confiança e graus de liberdade	59

Capítulo 1

Introdução

Cosmologia é a parte da Física que procura nos fornecer um entendimento dos processos físicos envolvidos e leis da Física válidas no nosso Universo, e explicar sua origem e evolução. Seu principal objetivo consiste em determinar um modelo que explique os resultados das observações astronômicas e utilizar tal modelo em previsões sobre a evolução do Universo. A evolução tecnológica dos instrumentos utilizados em observações astronômicas que vem ocorrendo desde o início do século XX, ajudou a extinguir o caráter puramente especulativo e filosófico da Cosmologia. Atualmente, ela é considerada uma ciência de precisão. Suas bases teóricas encontram-se em forte concordância com os resultados das observações astronômicas mais recentes. As observações astronômicas também apontam para um Universo espacialmente plano, além de homogêneo e isotrópico quando grandes escalas de distância são consideradas. Isto está de acordo com a hipótese matematicamente simplificadora do princípio cosmológico, que estabelece que não há nem local nem direção preferencial na estrutura de grande escala do Universo, ou seja, seu conteúdo material é distribuído de maneira homogênea e isotrópica.

Na década de 90 descobriu-se uma correlação empírica entre o pico da curva de luminosidade para uma supernova do tipo Ia e a evolução temporal da sua queda subsequente. Tal descoberta possibilitou o uso das SNIa como velas padronizáveis e grandes programas como o Cosmology Project e o High-z Supernova Search Team "vasculharam" o céu em busca de tais supernovas, o que possibilitou um mapeamento da evolução recente do Universo. Em 1998, os dois grupos concluíram que supernovas em altos z pareciam sistematicamente menos brilhantes do que seria esperado em modelos desacelerados [1][2]. Tal resultado, excluindo a possibilidade absurda de matéria com densidade negativa, levou ao estudo de modelos acelerados com constante cosmológica, ou algum tipo de *energia escura*, com pressão negativa, que possibilita a aceleração da expansão.

É neste contexto de verificação observacional de modelos cosmológicos que o presente tra-

balho foi desenvolvido. Objetivamos discutir como utilizar dados observados para construir testes de modelos, na determinação de parâmetros e na comparação de modelos. Os testes aqui tratados envolvem supernovas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e oscilações acústicas bariônicas. Em especial, para o caso com interação testamos modelos [3] para ver como uma equação de estado variável influencia sobre o problema de Coincidência Cósmica.

No terceiro capítulo estudamos modelos com interação entre matéria e energia escuras. Admitimos neste estudo uma equação do estado variável e investigamos as consequências para a dinâmica cosmológica, em particular para o problema da Coincidência Cósmica.

Capítulo 2

Fundamentos da Cosmologia Moderna

2.1 Introdução

O universo visível parece o mesmo em todas direções ao nosso redor, pelo menos se olharmos para distâncias maiores que cerca de 100 milhões de megaparsecs. O grau de isotropia é muito maior (em cerca de uma parte em 10^5) na radiação cósmica de fundo. Esta radiação viajou até nós por cerca de 14 bilhões de anos, onde os dados encontrados apóiam ao Princípio Cosmológico que diz que o Universo a distâncias suficientemente grandes é aproximadamente o mesmo em todas as direções.

É difícil imaginar que estamos em alguma posição especial no Universo, portanto somos levados a concluir que o Universo deve parecer isotrópico para observadores espalhados por ele. Mas não para todos observadores. O universo não parece isotrópico para observadores em uma espaçonave deslizando através da nossa Galáxia a metade da velocidade da luz. Tais observadores verão a luz das estrelas e a radiação cósmica de fundo em microondas vindo na direção na qual eles estão se movimentando com muito mais intensidade do que na direção contrária.

A suposição de que o universo é homogêneo e isotrópico nos levará, na seção 2.2, a escolher um sistema de coordenadas espaço-tempo de tal forma que a métrica assume uma forma simples, o que foi primeiramente delineado por Friedmann como uma solução das equações de campo de Einstein, e então derivada com base somente na homogeneidade e isotropia por Robertson e Walker. Quase toda cosmologia moderna é baseada na métrica e Friedmann-Robertson-Walker, ao menos como uma primeira aproximação. As implicações observacionais dessas suposições são discutidas na seção 2.3.

Um aspecto importante de como analisar a aceleração do universo é estudado na seção 2.4.

2.2 O Modelo Cosmológico Padrão

Em 1929, a partir das observações dos desvios para o vermelho (redshift) e das distâncias de 24 galáxias, Edwin Hubble concluiu que o universo está em expansão [4][5].

Este fato em conjunto com a teoria da Relatividade Geral de Einstein em 1915, gerou uma significativa mudança em nossa visão do universo e a reformulação da cosmologia, dando início a um grande desenvolvimento que resultou no chamado modelo cosmológico padrão.

A teoria da Relatividade Geral se consolidou como a teoria padrão da gravitação. Como a interação predominante em escalas cosmológicas é a gravitacional, um dos pilares do modelo cosmológico padrão é a Relatividade Geral [6][7].

A Relatividade Geral estabelece uma relação entre a geometria do espaço-tempo com matéria e energia. Esta relação está contida nas equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura, e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento do universo, os índices gregos variam entre 0 (coordenada tipo tempo), 1, 2 e 3 (coordenada tipo espaço). A grandeza G é a constante da gravitação, que tem o valor, $G = 6.673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Utilizando a hipótese de que o universo é espacialmente homogêneo e isotrópico (Princípio Cosmológico), encontramos uma métrica de máxima simetria espacial que é a métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi \right]. \quad (2.2)$$

Note que, assim como ao longo de todo este trabalho, estamos utilizando a assinatura da métrica na forma (+,-,-,-), onde $a(t)$ é o fator de escala adimensional que depende só do tempo t , e k é 0, 1 ou -1, e relaciona-se com os tipos de universo (plano, fechado ou aberto).

A partir da métrica, calculamos os respectivos Símbolos de Christoffel e o tensor de Ricci através de suas definições:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \quad (2.3)$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}, \quad (2.4)$$

e fazendo a contração do tensor de Riemann obtemos o escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Do lado direito das equações de Einstein (2.1), temos o termo de fonte, ou seja, o tensor energia-momento. Para resolvê-las para o universo como um todo, temos que utilizar o tensor energia-momento considerando toda a quantidade de energia e matéria contida neste. Para tal, considera-se que o universo é preenchido por um fluido perfeito. Isto significa que para um observador em repouso com relação ao fluido como um todo ele é isotrópico e homogêneo, o que vai ao encontro do princípio cosmológico. É importante ressaltar que, quando falamos em repouso é em relação ao fluido como um todo. As componentes do tensor energia-momento de um fluido perfeito num sistema qualquer de coordenadas são dadas por, [8][9]:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde u^{μ} é a quadrivelocidade do fluido e p e ρ a pressão e a densidade de energia, respectivamente, medidas por um observador em repouso com relação ao fluido, como é o caso de um observador comóvel. No referencial comóvel o fluido está em repouso, tendo a quadrivelocidade dada por

$$u^{\mu} = (1, 0, 0, 0). \quad (2.7)$$

Obtém-se então as componentes do tensor energia-momento. As únicas componentes não nulas são

$$T_0^0 = \rho, \quad (2.8)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p. \quad (2.9)$$

Definindo

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.10)$$

o parâmetro de Hubble tem tradicionalmente, a dimensão de $km/s/Mpc$.

No caso de $t = t_0$ a relação acima se reduz a constante de Hubble, que é a relação velocidade com a distância, que é proporcional a $H(t = t_0) = H_0 = 100h$

$$h = \frac{H_0}{100km/s/Mpc}. \quad (2.11)$$

Outro parâmetro importante que é obtido de uma expansão em séries de Taylor para $a(t)$ entorno do tempo presente t_0 , é o chamado parâmetro de desaceleração, que tem a seguinte

forma

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}. \quad (2.12)$$

A quantidade q será positiva se o universo estiver em expansão desacelerada. Esta definição do sinal é consequência de se acreditar anteriormente que o universo está em expansão mas sendo freado.

Atualmente os dados de supernovas do tipo Ia indicam fortemente que a expansão é hoje acelerada.

Obtidos o tensor de Einstein e o tensor energia-momento para o universo, resta agora substituí-los na equação de Einstein. Por ser uma equação tensorial que envolve tensores simétricos, esta resultará em 10 equações diferenciais acopladas. No entanto, as componentes $\mu \neq \nu$ tanto do tensor energia-momento quanto do tensor de Einstein são nulas, fazendo com que restem apenas 4 equações. Mais uma vez devido à homogeneidade e isotropia imposta, as equações espaciais são equivalentes. Assim, as equações de Einstein resultam nas duas chamadas equações de Friedmann, que regem a dinâmica do universo:

$$H^2(t) = -\frac{k}{a^2(t)} + \frac{8\pi G}{3}\rho(t); \quad (2.13)$$

$$\frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{k}{a^2(t)} - 8\pi Gp. \quad (2.14)$$

A partir das equações de Friedmann pode-se relacionar a curvatura do universo com seu conteúdo de energia. Da equação (2.13) vemos que para $k = 0$ (universo plano) o universo possui uma densidade de energia que é chamada **densidade crítica**, dada por

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (2.15)$$

No caso particular em que $t = t_0$, temos

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.16)$$

Pode-se definir os parâmetros de densidade para componentes individuais (índice i) e o parâmetro de densidade total, dados por

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (2.17)$$

$$\Omega_t = \frac{\rho}{\rho_c} = \sum_i \Omega_i. \quad (2.18)$$

Observando a equação (2.13) e utilizando as definições acima, vemos que os parâmetros de densidade e a curvatura estão associados na seguinte forma

$$\rho = \rho_c \longrightarrow \Omega_t = 1 \longrightarrow k = 0, \quad (2.19)$$

$$\rho > \rho_c \longrightarrow \Omega_t > 1 \longrightarrow k > 0, \quad (2.20)$$

$$\rho < \rho_c \longrightarrow \Omega_t < 1 \longrightarrow k < 0. \quad (2.21)$$

Pode-se notar das equações anteriores que a curvatura do universo está intimamente ligado á densidade de matéria e energia do mesmo.

Podemos encontrar, através da conservação do tensor energia-momento (2.6), uma equação fundamental da evolução do universo: a equação de continuidade, tendo em conta a conservação para cada componente separadamente que é dada por

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0, \quad (2.22)$$

onde ρ_i e p_i são a densidade de energia e a pressão do i -ésimo componente.

2.3 Aspectos Observacionais

2.3.1 Redshift Cosmológico

Os primeiros aspectos observacionais que indicam a evolução do universo foram feitos por Hubble, determinando as velocidades por medições cuidadosas dos espectros da luz das galáxias. Quando a luz de uma estrela ou galáxia é descomposta em seus componentes por um prisma ou por uma rede de difração, descobre-se que o espectro inclui linhas nítidas produzidas por determinados elementos, como hidrogênio, hélio, cálcio e ferro. Se a fonte estiver em movimento, a frequência dessas linhas é alterada por um fenômeno conhecido por efeito Doppler [5].

O efeito Doppler ocorre tanto para a luz como para o som e nos é muito familiar, quando a fonte se aproxima ao observador, a frequência das ondas aumenta, esse efeito é chamado de *desvio para o azul* porque o azul fica no extremo de alta frequência do espectro visível. Se a fonte se afasta do observador, a frequência diminui e o efeito é chamado de *desvio para o vermelho*, em inglês *Redshift*.

O *desvio para o vermelho* pode ser obtido teoricamente ao considerar o percurso traçado por um fóton entre a fonte e o observador, num espaço-tempo com a métrica FLRW.

Consideremos uma fonte emissora de raios luminosos que são detectados por um observador comóvel, posicionado na origem do sistema de coordenadas, onde $r = 0$. Tendo em conta a homogeneidade e isotropia do espaço, a linha do universo traçada pela onda eletromagnética manterá as coordenadas θ e ϕ constantes, variando só na coordenada r . Pela teoria de relatividade, conhecemos que a trajetória da luz corresponde a uma curva de mundo caracterizada por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} dr^2 = 0. \quad (2.23)$$

Então

$$\frac{cdt}{a(t)} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr. \quad (2.24)$$

Adotemos o sinal negativo, já que, na trajetória da radiação, r diminui com o passar do tempo. Agora, suponhamos que a fonte emissora, emite duas cristas consecutivas de uma onda eletromagnética, a primeira num tempo t_{em} e a segunda em $t_{em} + \Delta t_{em}$, que será detetada por o observador comóvel ($r = 0$), nos tempos t_{obs} e $t_{obs} + \Delta t_{obs}$, como na **Figura 2.1**.

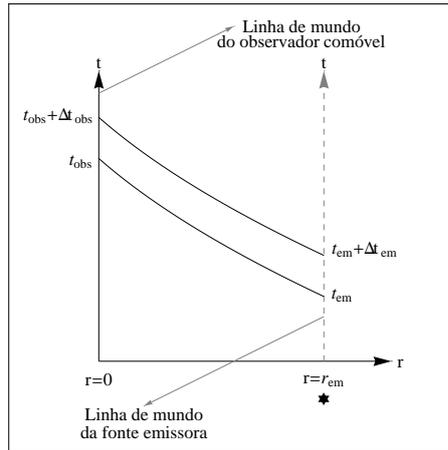


Figura 2.1: Trajetória no espaço-tempo de dois fótons emitidos por uma fonte emissora.

Fazendo a integração em (2.24), temos

$$\int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_{r_{em}}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr, \quad (2.25)$$

$$\int_{t_{em} + \Delta t_{em}}^{t_{obs} + \Delta t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_{r_{em}}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr. \quad (2.26)$$

Subtraindo (2.26) de (2.25), obtemos

$$\int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_{em} + \Delta t_{em}}^{t_{obs} + \Delta t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = 0. \quad (2.27)$$

Tendo em conta da **Figura 2.1** que

$$\int_{t_{em}+\Delta t_{em}}^{t_{obs}+\Delta t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_{obs}}^{t_{obs}+\Delta t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_{em}}^{t_{em}+\Delta t_{em}} \frac{cdt}{a(t)}, \quad (2.28)$$

e com (2.28) em (2.27), obtemos a forma seguinte

$$\int_{t_{obs}}^{t_{obs}+\Delta t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_{em}}^{t_{em}+\Delta t_{em}} \frac{cdt}{a(t)} = 0. \quad (2.29)$$

Considerando que Δt_{obs} e Δt_{em} são, respectivamente, os intervalos temporais entre a emissão e detecção de uma crista de onda e da outra, e portanto pequenos em comparação com a evolução do fator de escala, podemos considerar este constante no cálculo das integrais acima, de onde obtemos

$$\frac{c\Delta t_{em}}{a(t_{em})} = \frac{c\Delta t_{obs}}{a(t_{obs})}. \quad (2.30)$$

Os comprimentos de onda da radiação emitida, λ_{em} , e da radiação recebida, λ_{obs} , relacionam-se com os períodos das ondas por $\lambda_{em} = c\Delta t_{em}$ e $\lambda_{obs} = c\Delta t_{obs}$. Logo,

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})}. \quad (2.31)$$

A definição usual do *redshift* é

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (2.32)$$

Temos então que

$$1 + z = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} = \frac{a_0}{a}. \quad (2.33)$$

Esta expressão relaciona o desvio espectral z com o fator de escala $a(t)$, onde a_0 é o fator de escala hoje e a equação (2.33) mostra que o desvio espectral de uma galáxia é uma medida do fator de escala do universo quando a luz foi emitida. Num universo em expansão, $a(t_{obs}) > a(t_{em})$ e, portanto, $z > 0$.

2.3.2 Distâncias Cosmológicas

As medições de distância entre objetos no universo é um assunto fundamental no estudo de qualquer modelo cosmológico. O problema reside na definição dessas distâncias no cenário de um universo curvo e em expansão.

Quando é adotada a métrica de FRW, e aceitando que o universo, de fato, está expandindo-se, a definição de distância entre os objetos muda. Num universo em expansão, a separação entre objetos é uma quantidade dinâmica e depende da geometria do espaço-tempo.

Distância Própria

Num universo com a métrica de FRW, a medida de distâncias, assim como a relação destas com as coordenadas r , θ e ϕ pode não ser trivial, devido aos efeitos da expansão e eventual curvatura. Além disso, distâncias obtidas com diferentes métodos, que num universo plano e estático são equivalentes, passam a ser diferentes umas das outras e a se relacionar de forma distinta com as coordenadas comóveis. É necessário portanto um cuidado especial ao falarmos em distâncias.

A distância própria $d_p(t)$ entre dois pontos é o comprimento da geodésica espacial entre eles quando se fixa o fator de escala $a(t)$ para um tempo t . Da equação (2.2), sobre uma geodésica espacial $ds = 0$ e integrando sobre a coordenada radial r , temos

$$d_p(t) \equiv a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t)\chi, \quad (2.34)$$

onde χ , é uma função de r , dada por

$$\chi = \sin^{-1} r, (k = +1), \quad (2.35)$$

$$\chi = r, (k = 0), \quad (2.36)$$

$$\chi = \sinh^{-1} r, (k = -1). \quad (2.37)$$

Como as coordenadas comóveis não dependem do tempo, a taxa de variação da distância própria é

$$\dot{d}_p = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a}d_p. \quad (2.38)$$

Quando fazemos o análise para o caso hoje ($t = t_0$), obtemos

$$v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0). \quad (2.39)$$

Esta é a chamada Lei de Hubble. Ela foi formulada pela primeira vez pelo próprio Hubble, em 1929, quando realizou suas observações. Na verdade, devido a forma de medida, as distâncias obtidas por Hubble eram as chamadas distâncias de luminosidade, definidas a seguir. No entanto, como mostraremos, no caso de pequenas distâncias elas são aproximadamente iguais a

distância própria.

Agora, considerando a velocidade própria $v_p = c$, temos

$$d_H \equiv \frac{c}{H_0}, \quad (2.40)$$

onde d_H , é conhecido como o raio de Hubble.

Outra forma de expressar a distância própria é usar a equação (2.25), temos que

$$\chi = \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.41)$$

Então

$$d_p(t) = a(t) \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.42)$$

Aplicando a mudança de t_{em} para z , na equação anterior temos

$$d_p(t_0) = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.43)$$

Onde usamos o fato de que uma radiação emitida no instante da observação não apresenta *redshift*, e a radiação emitida em t_{em} sofre *redshift* z .

Distância de Luminosidade

Num universo estático e euclideo, se conhece que a propagação do sinal de uma fonte pontual se dá em frentes esféricas, de tal forma que um detetor situado a uma distância d da fonte medirá um fluxo, ou intensidade, com valor

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.44)$$

onde L é a luminosidade desta fonte, ou seja, a potencia por ela irradiada. Se define a função chamada distância de luminosidade d_L ,

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}. \quad (2.45)$$

A ultima definição é chamada de distância por sua dimensão e seria o valor da distância própria caso o espaço-tempo fosse estático e euclideo, notando que para baixos *redshifts* seu valor

tenderá ao da distância própria. Consideremos, por simplicidade, um espaço euclidiano.

Tendo em consideração que a fonte emite fótons num instante t_{em} , no momento da observação, t_{obs} , eles estarão espalhados em uma superfície cuja área própria será, no espaço euclidiano,

$$A(t_{obs}) = 4\pi d_p(t_{obs})^2 = 4\pi a_0^2 r^2. \quad (2.46)$$

Quando um fóton é emitido, sua energia é $E_{em} = \frac{hc}{\lambda_{em}}$, onde a é o fator de escala, devido ao *redshift*, em t_{obs} , temos

$$\lambda_{obs} = \frac{a(t_{obs})}{a} \lambda_{em} = (1+z)\lambda_{em}, \quad (2.47)$$

então a energia ficara como

$$E_{obs} = \frac{E_{em}}{(1+z)}. \quad (2.48)$$

Tendo em conta a mesma análise realizada para o caso de *redshift*, consideramos um intervalo de tempo entre a emissão de dois fótons e a recepção dos mesmos vai ser alterada por causa da expansão. Considerando o intervalo na emissão δt_{em} , a distância própria entre eles é $c\delta t_{em}$. Na observação esta distância será $c\delta t_{em}(1+z)$, e o intervalo de tempo na detecção $\delta t_{obs} = \delta t_{em}(1+z)$. Como fluxo é dado pela potência detectada dividida pela área na qual a energia está espalhada, temos

$$f = \frac{\frac{E_{obs}}{\delta t_{obs}}}{4\pi a_0^2 r^2} = \frac{\frac{E_{em}/(1+z)}{\delta t_{em}(1+z)}}{4\pi a_0^2 r^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2}. \quad (2.49)$$

A equação (2.45) é dada por

$$d_L = a_0 r (1+z) = d_p(t_0)(1+z), \quad (2.50)$$

para baixos *redshifts* se aproxima do valor da distância própria. Usando a equação (2.43) em (2.50), temos

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.51)$$

Introduzindo a relação $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$, e generalizando obtemos

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right], (k = +1), \quad (2.52)$$

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, (k=0), \quad (2.53)$$

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right], (k=-1). \quad (2.54)$$

Esta grandeza é muito útil quando temos um objeto astronômico que possui uma luminosidade conhecida, e tendo em conta que seu comportamento físico não varia de uma região do universo a outra.

Este objeto é chamado de vela padrão.

Distância Diâmetro Angular

Se um objeto tem comprimento l , está perpendicular a uma linha de visão, e suas extremidades submetem uma abertura angular $\delta\theta$, sendo essa abertura pequena, podemos definir uma função distância diâmetro angular como

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\theta}, \quad (2.55)$$

que seria a distância própria caso o universo fosse estático euclidiano. Verifiquemos agora o efeito da expansão à definição desta grandeza. Estando o observador na origem do sistema comóvel, e o objeto observado a uma distância comóvel r do observador, com seus extremos ocupando as posições comóveis (r_1, θ_1, ϕ) e (r_2, θ_2, ϕ) , a distância entre os dois extremos no momento da emissão da luz pode ser obtida de (2.2):

$$ds = ar\delta\theta = l. \quad (2.56)$$

Sabendo o redshift da radiação proveniente de nossa régua padrão, temos

$$l = \frac{a_0 r \delta\theta}{1+z}, \quad (2.57)$$

usando a última equação em (2.55), obtemos

$$d_A = \frac{a_0 r}{1+z}. \quad (2.58)$$

Comparando (2.58) com (2.50), temos que

$$d_L = d_A(1+z)^2 = d_p(t_0)(1+z), \quad (2.59)$$

então:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}, \quad (2.60)$$

e ainda

$$d_A(1+z) = d_p(t_0) = \frac{d_L}{(1+z)}. \quad (2.61)$$

Dessa forma a distância própria de um objeto é maior que a distância diâmetro-angular e menor que a distância de luminosidade. É curioso perceber que d_A coincide com o valor da distância própria no momento da emissão da radiação

$$d_A = \frac{d_p(t_0)}{1+z} = \frac{a_0 r}{1+z} = ar = d_p(t_e). \quad (2.62)$$

Para obter a distância diâmetro-angular em termos do parâmetro de Hubble, precisamos substituir a equação (2.43) na equação (2.62), obtendo assim,

$$d_A = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.63)$$

Generalizando novamente, para o caso de um universo com curvatura temos

$$d_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right], (k = +1), \quad (2.64)$$

$$d_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, (k = 0), \quad (2.65)$$

$$d_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right], (k = -1). \quad (2.66)$$

A medida da distância diâmetro-angular encontra dificuldades observacionais. Uma régua-padrão deve ser larga o suficiente para que sua abertura angular seja medida com boa precisão.

2.4 Como Acelerar o Universo

2.4.1 Modelo Padrão

O modelo atualmente tido como padrão, conhecido como Λ CDM, é aquele para o qual os dados observacionais apontam. Este modelo é construído baseado na teoria da Relatividade Geral, norteado pelos dados observacionais atuais. Observações diretas e indiretas constataam a existência de matéria bariônica e radiação (na forma de fótons e neutrinos não massivos).

A análise do espectro de anisotropias da CMB indica que o universo é espacialmente plano, ou muito aproximadamente plano, de forma que o parâmetro de densidade total de matéria e energia deve ser igual a 1. Então temos que mais da metade de sua composição é de algo totalmente desconhecido, mais exótico que a matéria escura. Este componente exótico é conhecido como *energia escura*.

De acordo com a análise dos dados de supernovas em altos redshifts, o universo encontra-se atualmente em expansão acelerada o que sugere que ele não é predominantemente composto por matéria - caso o fosse, o caráter atrativo desta última provocaria a desaceleração da expansão.

Para a detecção de Λ ou da energia escura, tudo começa com o modelo cosmológico de Friedmann - Lemaître [10][11].

Neste modelo a história da expansão do universo é determinada por um conjunto de parâmetros adimensionais cuja soma é normalizada a unidade.

$$\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{k0} = 1. \quad (2.67)$$

A primeira Ω_{m0} , é uma medida da densidade de massa média presente na matéria não relativista, principalmente bárions e a matéria escura não bariônica.

A segunda $\Omega_{r0} \sim 1 \times 10^{-4}$, é uma medida da massa relativista presente na radiação do fundo cósmico de microondas térmicas de 3-K.

O terceiro é uma medida de Λ ou o valor presente da energia escura.

O quarto Ω_{k0} , é um efeito da curvatura do espaço.

A maior prova para a detecção da energia escura vem a partir de observações de supernovas do tipo Ia, cuja luminosidade intrínseca é perto de ser uniforme (depois de sutis correções astronômico).

O brilho observado, em função da mudança no comprimento de onda é chamado a relação magnitude-redshift.

As medições de acordo com o modelo cosmológico relativista escolhem como valor preferido $\Omega_{k0} = 0$, o que significa um universo espacialmente plano, e $\Omega_{\Lambda 0} \sim 0.7$, significado diferente de zero para Λ . Um modelo com $\Omega_{\Lambda 0} = 0$ é de dois ou três desvios padrão fora do melhor ajuste, dependendo do conjunto de dados e da técnica de análise. Este é um indicador importante, mas 2σ a 3σ não é conveniente, mesmo quando podemos ter certeza de que erros sistemáticos estão sobre controle razoável. E temos que considerar que pode haver um erro sistemático significativo das diferenças entre as distantes (alto redshift), e as próximas (baixo redshift) de supernovas.

Baseado no modelo cold-dark-matter (CDM) para a formação de estruturas, o ajuste do modelo com as observações produz dois principais aportes. Em primeiro lugar, o espectro de potência angular das flutuações de temperatura da radiação de fundo cósmica térmica $3-K$ no céu indica que Ω_{k0} é pequeno. Em segundo lugar, o espectro de potência da distribuição espacial das galáxias requer $\Omega_{m0} \sim 0.25$.

A análise com lentes gravitacionais prefere um valor um pouco maior (se Ω_{k0} é pequena), e algumas análises dinâmicas dos sistemas de galáxias preferem Ω_{m0} inferior. Mas as diferenças poderiam resultar de incertezas de medição. Como o valor de Ω_{r0} é pequeno, a conclusão é que $\Omega_{\Lambda 0}$ é grande, em excelente acordo com o resultado de supernovas.

Não podemos ver a matéria escura, por isso, é natural atribuir os mais simples conceitos possíveis.

É claro que o modelo tem problemas de observação com a formação de galáxias, ou talvez os problemas são apenas aparentes, devido ao avanços da astronomia e da complicação da mesma.

Para ilustrar o problema podemos delinear um exemplo de uma contribuição de Λ . A densidade de energia na radiação cósmica de fundo térmica $3-K$, que é aproximadamente $\Omega_{r0} \sim 5 \times 10^{-5}$.

Escrevemos Ω_{m0} em 2 partes: Ω_{b0} mede a densidade de bárions que sabemos de sua existência

e Ω_{dm0} as medidas da matéria escura fria hipotética.

O modelo Λ CDM - *cold dark matter* adota a constante cosmológica como energia escura. A densidade dessa energia é representada por

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.68)$$

Adotemos que o fator de escala atual é igual na unidade ($a_0 = 1$).

No modelo padrão, a energia escura tem a mesma equação do estado do vácuo.

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\Lambda, \quad (2.69)$$

onde a pressão negativa seria a responsável pela aceleração da expansão [12].

O cálculo de energia do vácuo quântico resulta num valor 120 ordens de grandeza maior que o observado. Outro problema, conhecido como "problema da coincidência cósmica", será estudado neste trabalho e é o questionamento do por quê vivemos justamente no período em que as densidades de energia escura e matéria escura têm valores tão próximos.

Tomando a componente de matéria do fluido cósmico como um fluido perfeito a sua equação de estado pode ser escrita de forma geral como

$$p_i = (\gamma - 1)\rho_i, \quad (2.70)$$

sendo p e ρ pressão e densidade, respectivamente, da matéria ($i = m$) ou da radiação ($i = r$). A matéria (poeira) tem pressão nula ($\gamma = 1$), enquanto para a radiação $p_r = \rho_r/3$, ou seja, ($\gamma = 4/3$).

Como no modelo padrão as componentes se conservam independentemente, pode-se aplicar a equação de conservação, separadamente para o caso da matéria incoerente e para o caso da radiação. Para a primeira temos

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (2.71)$$

Tendo em conta a relação para o parâmetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ e sabendo que $p_m = 0$, chegamos a

$$\frac{d\rho_m}{\rho_m} = -3\frac{da}{a}. \quad (2.72)$$

Integrando a última equação, e tendo em conta que ρ_{m0} e $a_0 = 1$ são a densidade de matéria e o fator de escala atuais, obtemos:

$$\rho_m = \rho_{m0}(a)^{-3}. \quad (2.73)$$

Usando a equação (2.17), temos

$$\Omega_m = \Omega_{m0}a^{-3} = \Omega_{m0}(1+z)^3. \quad (2.74)$$

Fazendo a mesma análise para o caso da radiação teremos

$$\Omega_r = \Omega_{r0}a^{-4} = \Omega_{r0}(1+z)^4, \quad (2.75)$$

das equações (2.13), (2.17) e tendo em conta que $\Omega_{k0} = \frac{-k}{H_0^2}$, obtemos [13]

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0}(1+z)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.76)$$

A última equação será utilizada em ajustes de supernovas.

O parâmetro de desaceleração definido em (2.12), pode ser reescrito como

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2}. \quad (2.77)$$

Onde o fator de escala pode se escrever como

$$\ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{da}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(a \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{d}{dt} (aH) = \dot{a}H + a \frac{dH}{dt}, \quad (2.78)$$

$$\ddot{a} = aH^2 + a \frac{dH}{dt}. \quad (2.79)$$

Substituindo a equação (2.79) em (2.77), obtemos

$$q = -1 - \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt}, \quad (2.80)$$

onde finalmente usando a regra da cadeia em (2.80), encontramos o parâmetro de desaceleração em termos do redshift

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH}{dz}. \quad (2.81)$$

Fazendo uso da equação (2.81), obtemos o parâmetro de desaceleração do modelo Λ CDM com radiação

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z) [3\Omega_{m0}(1+z)^2 + 4\Omega_{r0}(1+z)^3 + 2(1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0} - \Omega_{\Lambda 0})(1+z)]}{2 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0} + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0} - \Omega_{\Lambda 0})(1+z)^2]}, \quad (2.82)$$

onde $\Omega_{k0} = 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0} - \Omega_{\Lambda0}$. Além de isso obtemos o parâmetro de desaceleração hoje, considerando $z = 0$

$$q_0 = \frac{\Omega_{m0}}{2} - \Omega_{r0} - \Omega_{\Lambda0}, \quad (2.83)$$

onde $q_0 > 0$ indica o caso em que o universo esteja em expansão retardada e $q_0 < 0$ indica o caso em que o universo esteja em expansão acelerada.

A análise estatística e o estudo das amostras de supernovas Constitution e Union2 com as quais serão efetuadas as figuras, serão mostrados nos apêndices A e B, respetivamente.

Ajuste do modelo Λ CDM aos dados da supernova Constitution.

Por simplicidade computacional e tendo em conta que a densidade de radiação é pequena, fixamos $\Omega_{r0} = 4.1736 \times 10^{-5} h^{-2}$ [14][15].

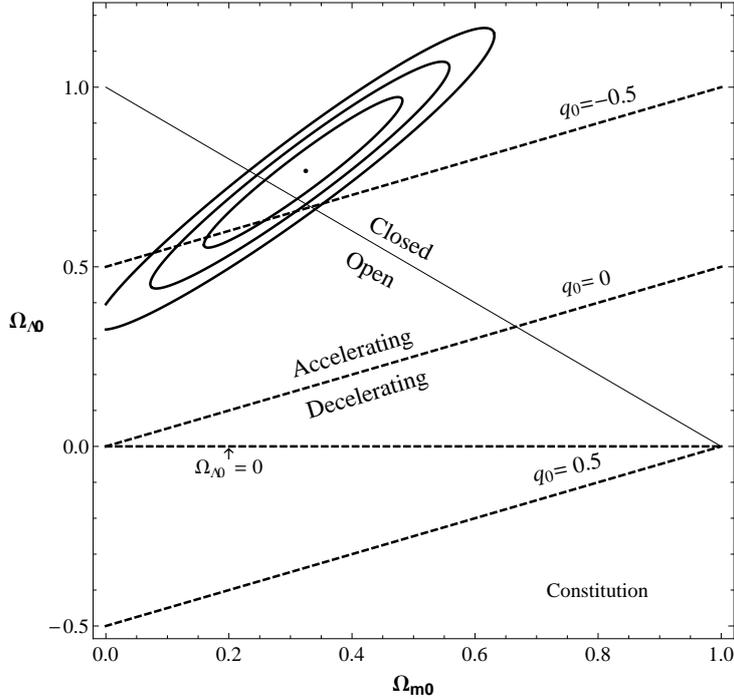


Figura 2.2: Curvas dos níveis 1, 2 e 3 σ resultantes do ajuste do modelo Λ CDM aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 465.353$;

$$h = 0.651_{-0.003-0.005-0.008}^{+0.003+0.005+0.008}, \Omega_{m0} = 0.325_{-0.025-0.049-0.073}^{+0.025+0.051+0.078}, \Omega_{\Lambda0} = 0.769_{-0.033-0.067-0.101}^{+0.032+0.064+0.096}$$

Ajuste do modelo Λ CDM aos dados da amostra Union2.

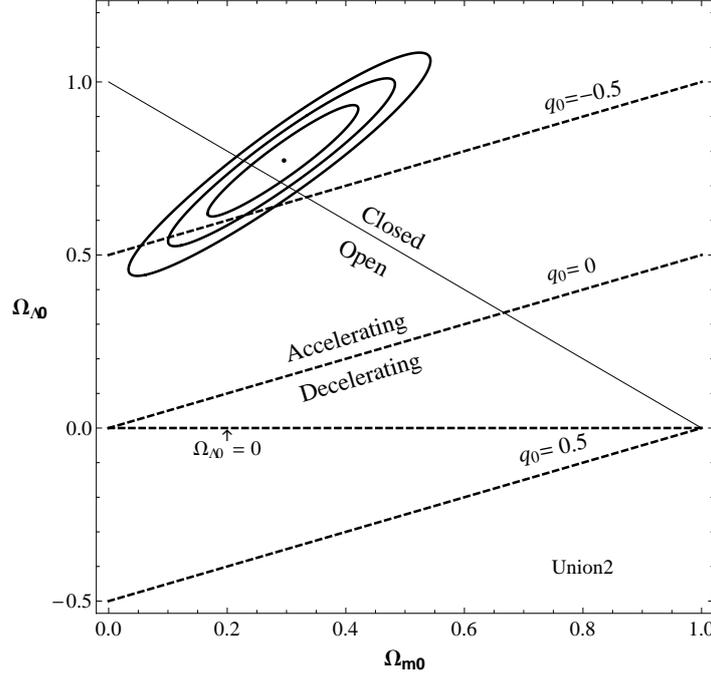


Figura 2.3: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo Λ CMD aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi^2_{min} = 540.879$;

$$h = 0.700^{+0.002+0.005+0.007}_{-0.002-0.005-0.007}, \Omega_{m0} = 0.296^{+0.024+0.049+0.074}_{-0.024-0.047-0.070}, \Omega_{\Lambda 0} = 0.775^{+0.030+0.060+0.089}_{-0.031-0.061-0.093}.$$

2.4.2 Λ CDM plano

Sendo o universo espacialmente plano, a função de Hubble (2.76), se reduz a

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}]^{1/2}. \quad (2.84)$$

Para momentos próximos do atual - quando a densidade de radiação é muito baixa comparada com as de matéria e de energia escura ($\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} \approx 1$) e os redshifts são baixos - torna-se

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}]^{1/2}. \quad (2.85)$$

Fazendo uso da equação (2.81), obtemos o parâmetro de desaceleração

$$q(z) = -1 + \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m0}(1+z)^3}{[\Omega_{m0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m0})]}, \quad (2.86)$$

o que resulta num fator de desaceleração atual $z = 0$, dado pela expressão

$$q_0 = -1 + \frac{3}{2}\Omega_{m0}. \quad (2.87)$$

Ajuste do modelo Λ CDM plano aos dados da amostra Constitution.

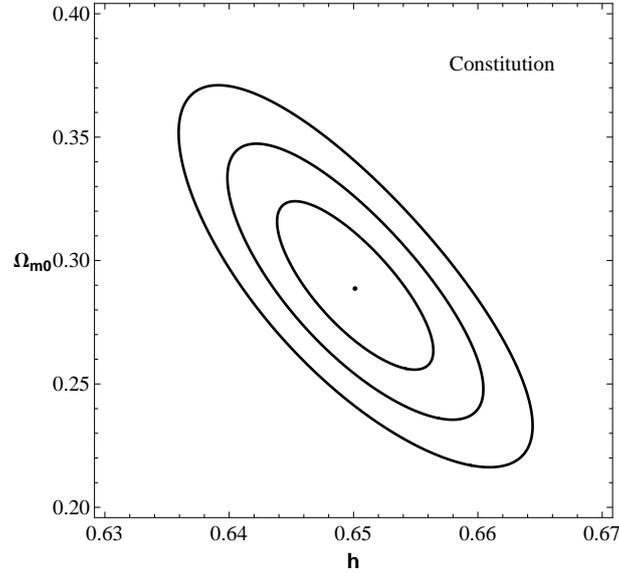


Figura 2.4: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo Λ CMD plano aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste :

$$\chi_{min}^2 = 465.513; h = 0.650^{+0.003+0.005+0.008}_{-0.003-0.005-0.008}; \Omega_{m0} = 0.289^{+0.015+0.029+0.045}_{-0.014-0.028-0.042}.$$

Ajuste do modelo Λ CDM plano aos dados da amostra Union2.

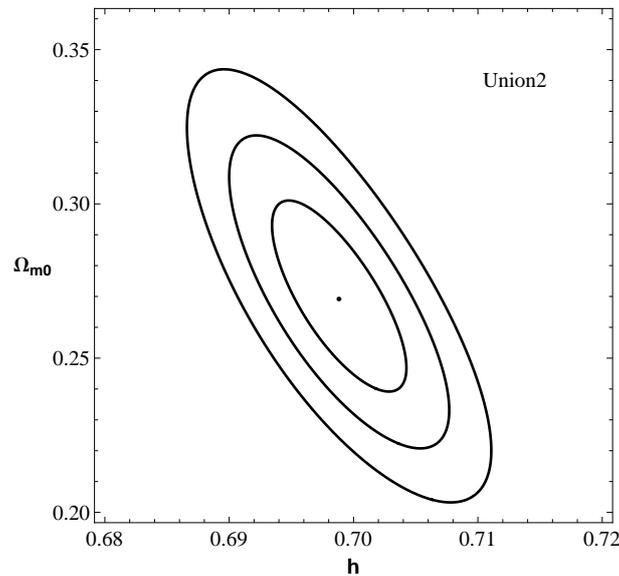


Figura 2.5: Curvas dos níveis 1, 2 e 3 σ resultantes do ajuste do modelo Λ CMD plano aos dados da amostra Union2 obtendo os seguintes valores de melhor ajuste :

$$\chi_{min}^2 = 541.012; h = 0.699_{-0.002-0.005-0.007}^{+0.002+0.005+0.007}; \Omega_{m0} = 0.269_{-0.014-0.027-0.040}^{+0.014+0.028+0.042}.$$

2.4.3 x -CDM

Este modelo surge como uma generalização simples do modelo Λ CDM, que consiste em tomar um valor constante diferente de -1, para o parâmetro de equação do estado da energia escura. Assim temos

$$\omega_x = \frac{p_x}{\rho_x}, \quad (2.88)$$

e usando a equação de continuidade (2.22), encontramos

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + \omega_x)\rho_x = 0. \quad (2.89)$$

Tendo em conta a relação para o parâmetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ chegamos a

$$\frac{d\rho_x}{\rho_x} = -3(1 + \omega_x)\frac{da}{a}. \quad (2.90)$$

Integrando a última equação, obtemos:

$$\rho_x = \rho_{x0} \exp \left[- \int_{a_0}^a \frac{3(1 + \omega_x)}{a} da \right], \quad (2.91)$$

$$\rho_x = \rho_{x0} a^{-3(1+\omega_x)}. \quad (2.92)$$

Notamos, então que este fluido exótico só terá densidade constante caso o parâmetro ω_x seja -1.

O parâmetro de Hubble em função do redshift é

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{x0}(1+z)^{3(1+\omega_x)} \right]^{1/2}, \quad (2.93)$$

com $\Omega_{x0} = 1 - \Omega_{m0}$.

Fazendo uso da equação (2.81), obtemos o parâmetro de desaceleração

$$q(z) = -1 + \frac{[3\Omega_{m0}(1+z)^3 + 3(1+\omega_x)(1-\Omega_{m0})(1+z)^{3(1+\omega_x)}]}{2[\Omega_{m0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m0})(1+z)^{3(1+\omega_x)}]}. \quad (2.94)$$

Por outra parte podemos obter o parâmetro de desaceleração hoje, considerando $z = 0$, obtendo

$$q_0 = \frac{3\omega_x(1 - \Omega_{m0}) + 1}{2}. \quad (2.95)$$

Ajuste do modelo x -CDM aos dados da amostra Constitution.

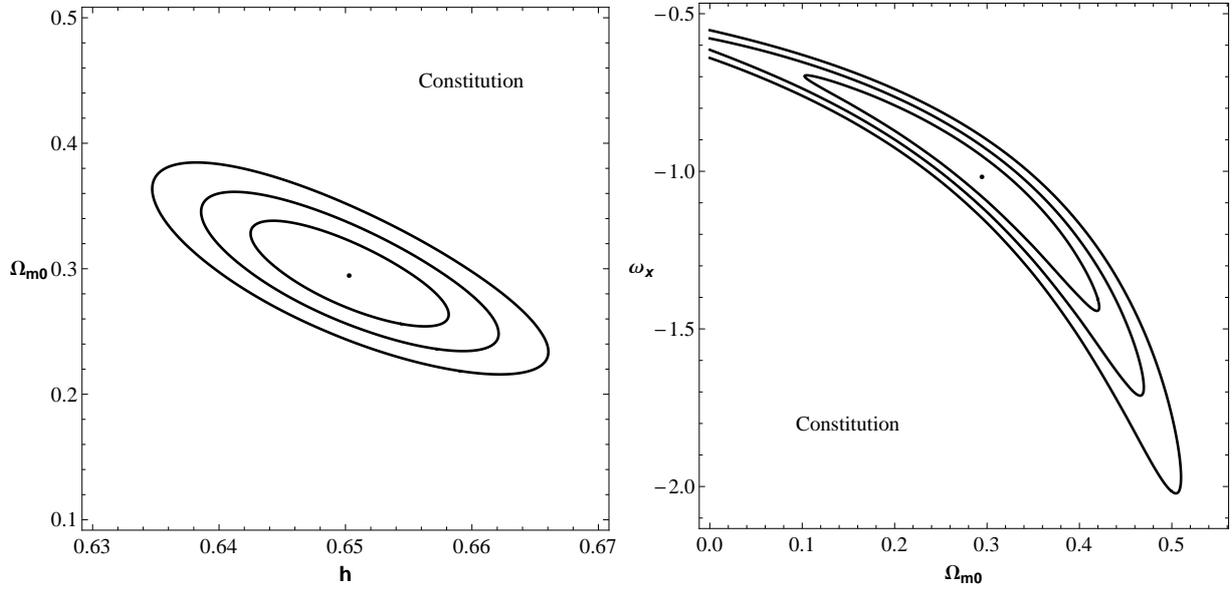


Figura 2.6: Curvas dos níveis 1, 2 e 3 σ resultantes do ajuste de o modelo x -CMD aos dados da amostra Constitution. obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 465.508$;

$$h = 0.650_{-0.003-0.005-0.008}^{+0.003+0.005+0.008}, \Omega_{m0} = 0.295_{-0.014-0.028-0.042}^{+0.015+0.029+0.044}, \omega_x = -1.016_{-0.035-0.070-0.106}^{+0.034+0.068+0.101}.$$

Ajuste do modelo x -CDM aos dados da amostra Union2.

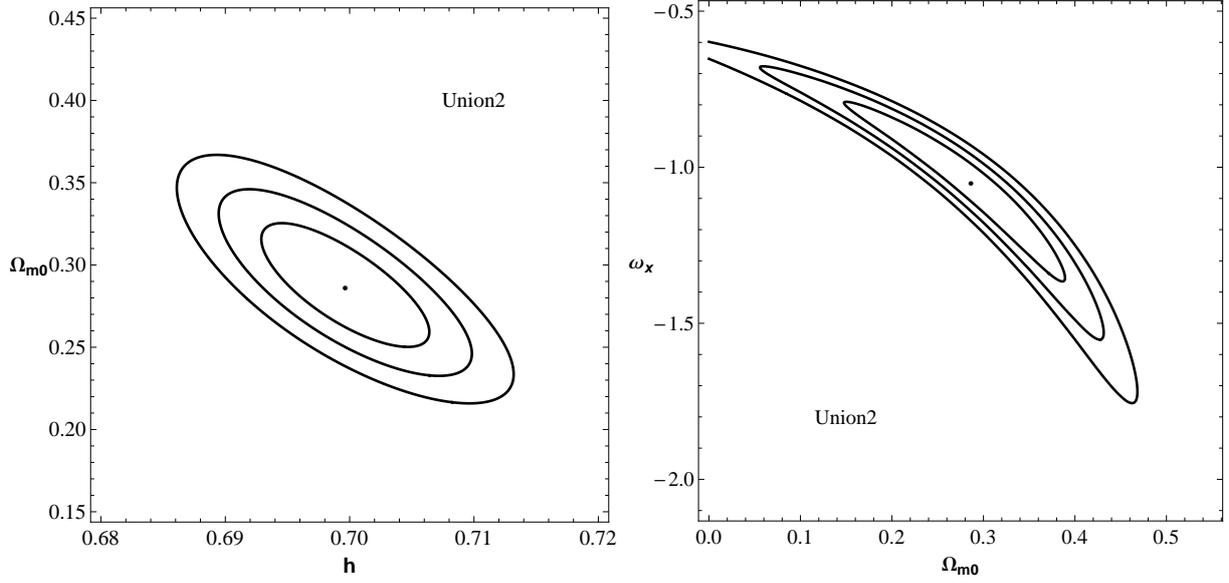


Figura 2.7: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo x -CMD aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi^2_{min} = 540.954$;

$$h = 0.700^{+0.002+0.005+0.007}_{-0.002-0.005-0.007}; \Omega_{m0} = 0.287^{+0.013+0.027+0.041}_{-0.013-0.026-0.039}; \omega_x = -1.049^{+0.032+0.063+0.094}_{-0.032-0.065-0.098}.$$

2.4.4 Modelo com Parametrização CPL

A parametrização mais conhecida é aquela adotada pelo *Dark Energy Task Force* (DETF), que é conhecida como parametrização de Chevallier-Polarski-Linder (CPL)[16][17].

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_1(1 - a), \quad (2.96)$$

onde ω_0 e ω_1 são constantes. Essa é uma parametrização linear do fator de escala e pode ser pensado como uma expansão de Taylor no fator de escala $a(z) = 1/(1+z)$. Em termos do *redshift*, ela é dada por:

$$\omega(z) = \omega_0 + \frac{\omega_1 z}{1+z}. \quad (2.97)$$

Usamos a parametrização CPL, na equação (2.91), $\omega_x = \omega(a) = \omega_0 + (1-a)\omega_1$, obtendo

$$\rho_x = \rho_{x0} \exp \left[- \int_{a_0}^a \frac{3(1 + \omega_0 + (1-a)\omega_1)}{a} da \right], \quad (2.98)$$

$$\rho_x = \rho_{x0} a^{-3(1+\omega_0+\omega_1)} \exp [3\omega_1(a-1)]. \quad (2.99)$$

Notamos, então que este fluido exótico só terá densidade constante caso os parâmetros $\omega_0 = -1$ e $\omega_1 = 0$ que é o limite Λ CDM.

O parâmetro de Hubble em função do redshift é

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{x0}(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} \exp \left[\frac{-3\omega_1 z}{(1+z)} \right] \right]^{1/2}, \quad (2.100)$$

com $\Omega_{x0} = 1 - \Omega_{m0}$.

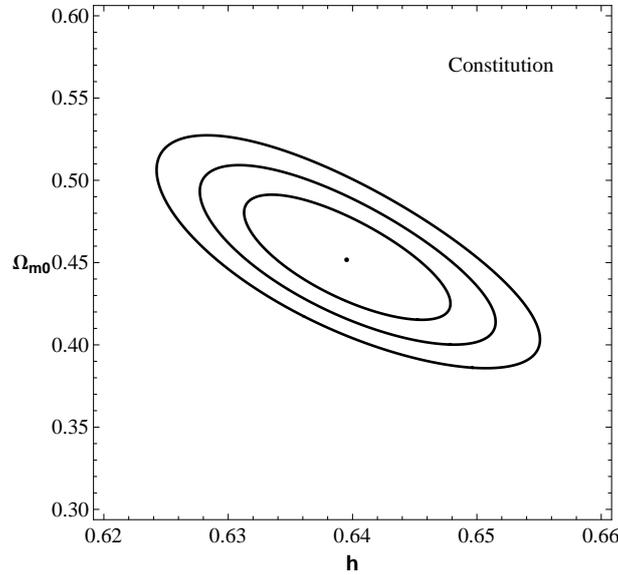
Fazendo uso da equação (2.81), obtemos o parâmetro de desaceleração

$$q(z) = -1 + \frac{3\Omega_{m0}(1+z)^3 + 3(1-\Omega_{m0})(1+z)^{2+3(\omega_0+\omega_1)} [(1+\omega_0) + (1+\omega_0+\omega_1)z] \exp \left[\frac{-3\omega_1 z}{(1+z)} \right]}{2 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m0})(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} \exp \left[\frac{-3\omega_1 z}{(1+z)} \right] \right]}. \quad (2.101)$$

O valor atual deste parâmetro é

$$q_0 = \frac{3\omega_0(1-\Omega_{m0}) + 1}{2}. \quad (2.102)$$

Ajuste do modelo com parametrização CPL aos dados da amostra Constitution.



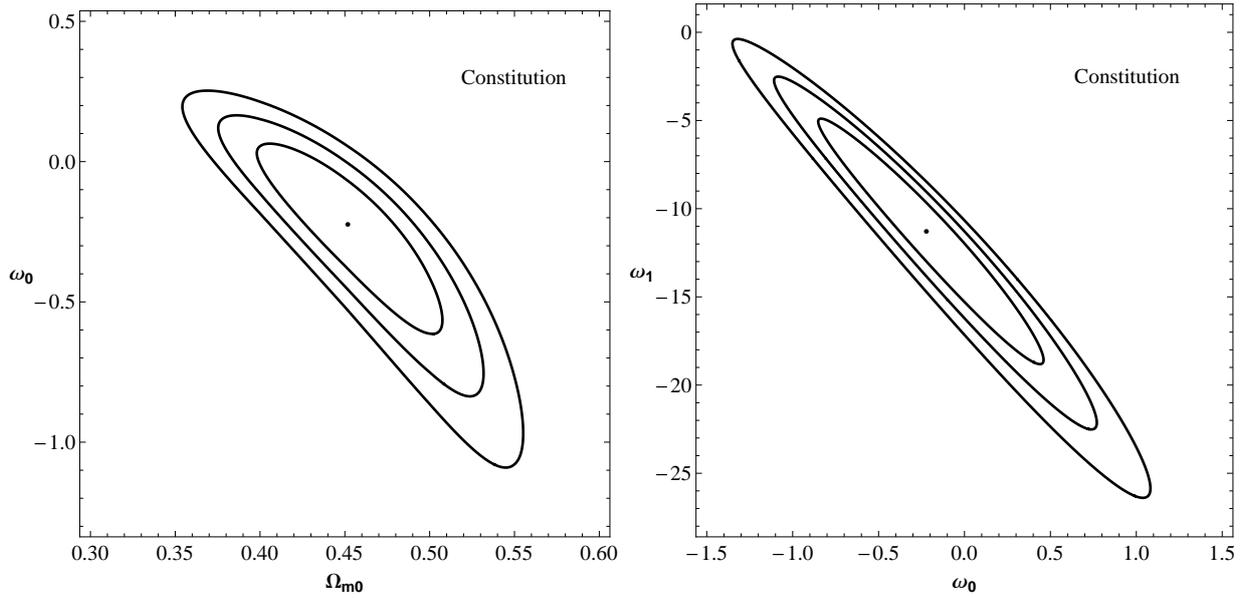
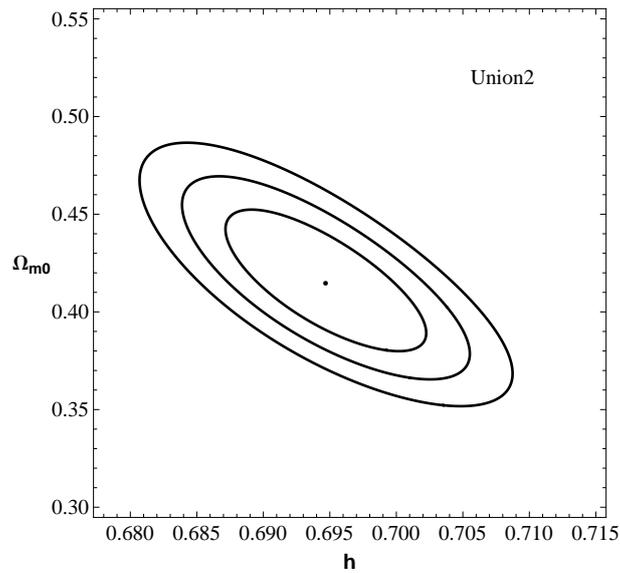


Figura 2.8: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com parametrização CPL aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 461.231$;

$$h = 0.640_{-0.003-0.005-0.008}^{+0.003+0.005+0.008}, \Omega_{m0} = 0.452_{-0.012-0.024-0.035}^{+0.012+0.025+0.037}, \omega_0 = -0.221_{-0.073-0.149-0.227}^{+0.071+0.140+0.207},$$

$$\omega_1 = -11.228_{-0.786-1.623-2.513}^{+0.741+1.440+2.101}.$$

Ajuste do modelo com parametrização CPL aos dados da amostra Union2.



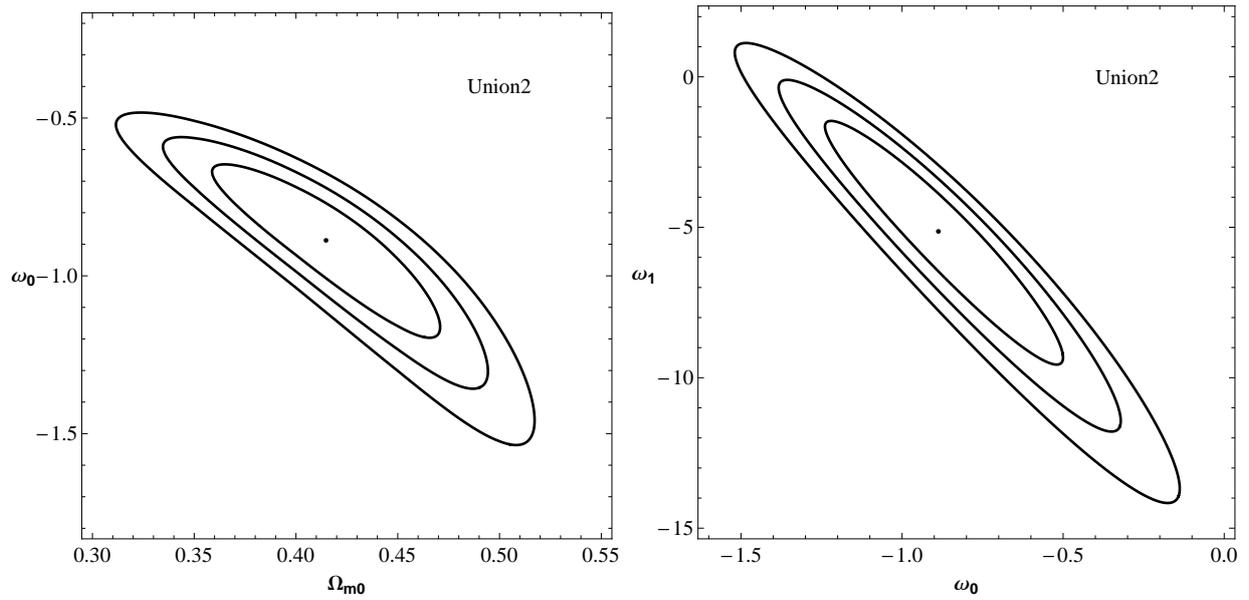


Figura 2.9: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com parametrização CPL aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi^2_{min} = 539.878$;

$$h = 0.695^{+0.002+0.005+0.007}_{-0.002-0.005-0.007}; \Omega_{m0} = 0.415^{+0.011+0.023+0.035}_{-0.011-0.022-0.033}; \omega_0 = -0.887^{+0.054+0.107+0.159}_{-0.055-0.111-0.169};$$

$$\omega_1 = -5.108^{+0.579+1.129+1.652}_{-0.610-1.253-1.930}.$$

Diagrama de Hubble

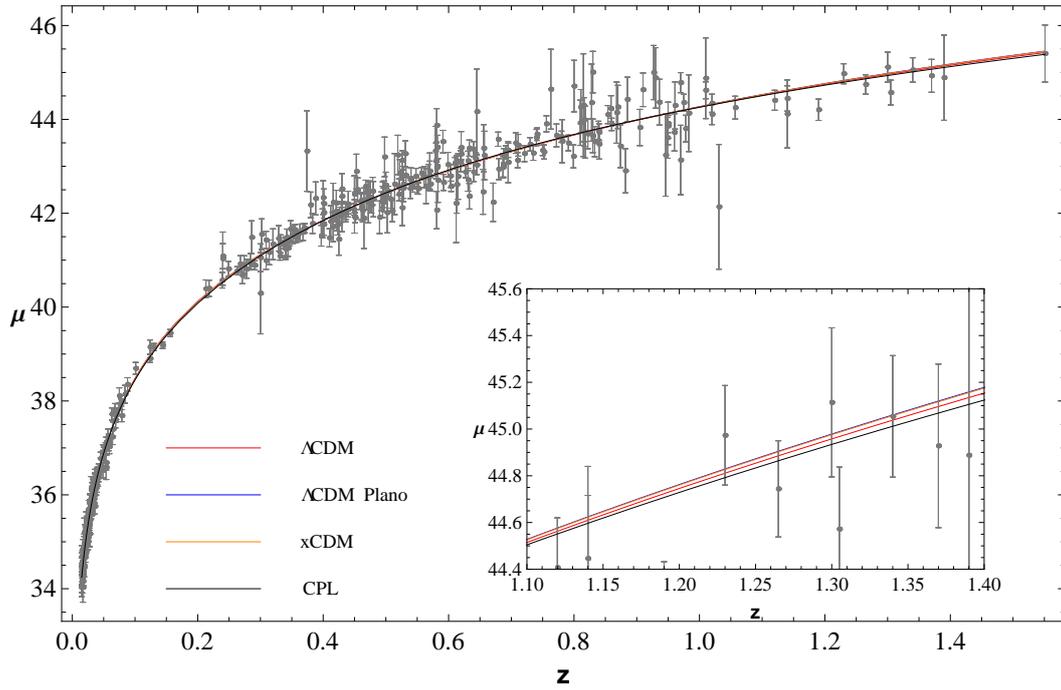


Figura 2.10: Diagrama de Hubble com dados da amostra Constitution ($0.015 \leq z \leq 1.551$).

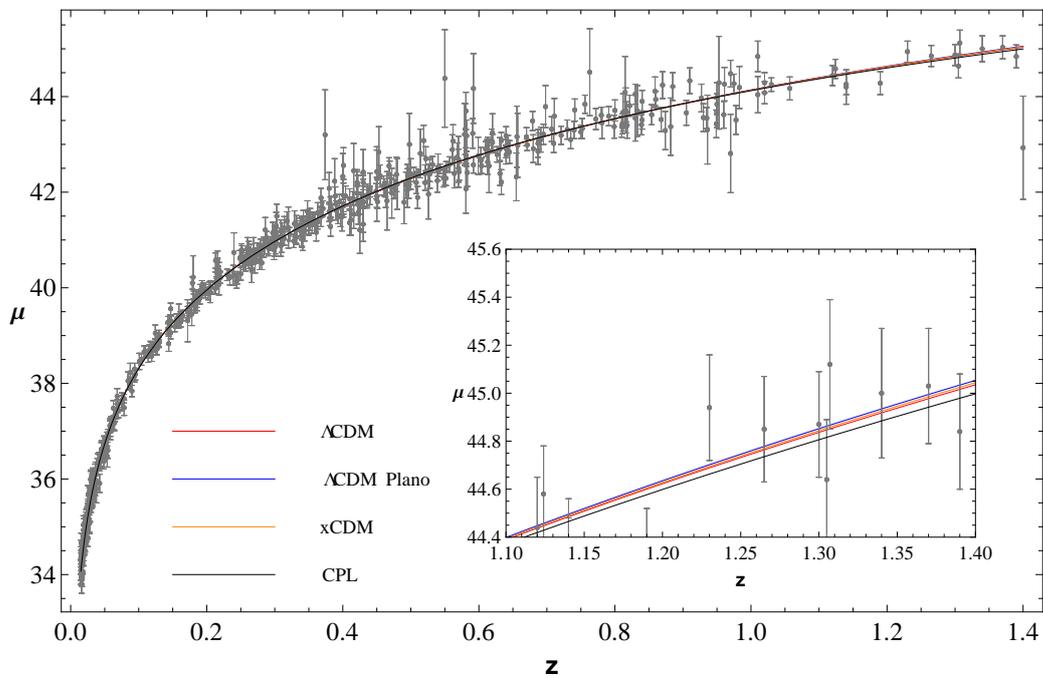


Figura 2.11: Diagrama de Hubble com dados da amostra Union2 ($0.015 \leq z \leq 1.4$).

Parâmetro de Desaceleração

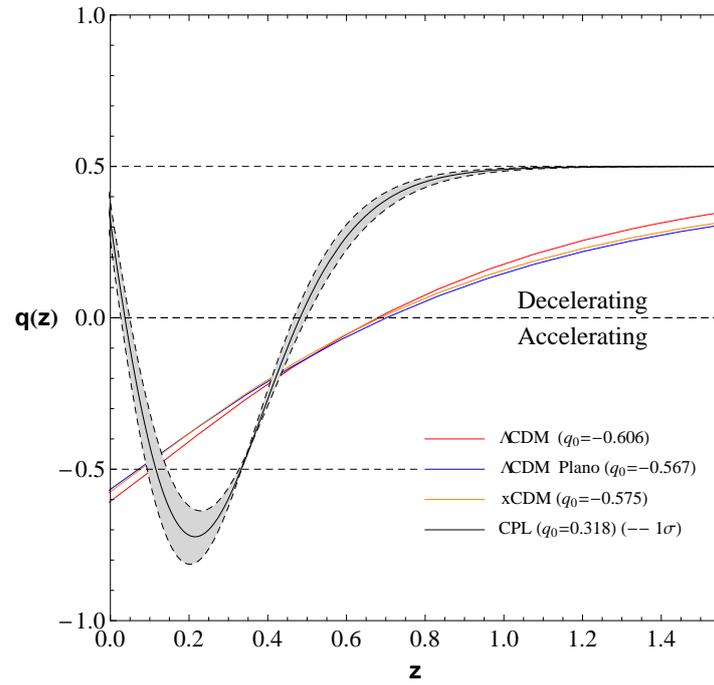


Figura 2.12: Parâmetro de desaceleração com dados da amostra Constitution.

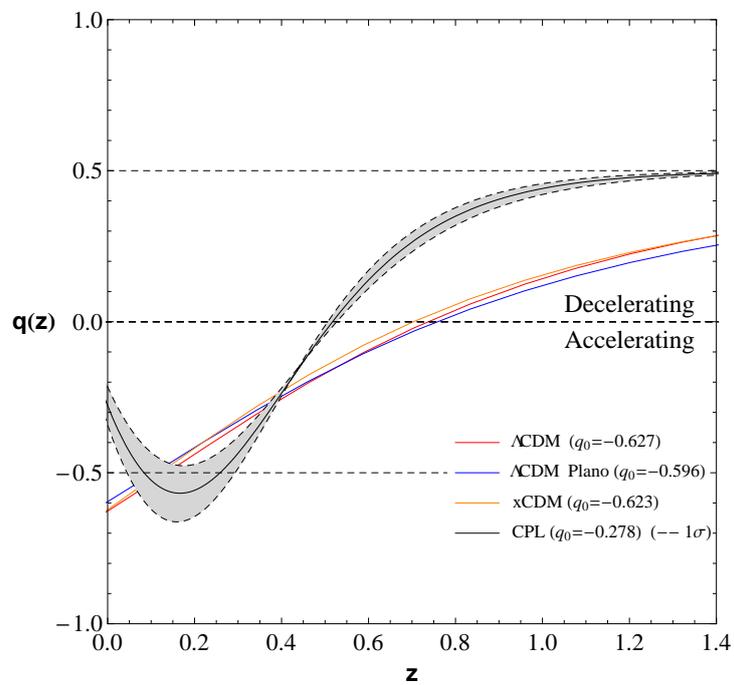


Figura 2.13: Parâmetro de desaceleração com dados da amostra Union2.

Capítulo 3

Interações no Setor Escuro

3.1 Introdução

Apesar dos muitos esforços na década pasada, a natureza física do setor escuro cosmológico permanece misterioso. O modelo atual para a dinâmica dos modelos cosmológicos é Λ CDM, embora haja uma discussão em andamento em insuficiências deste modelo que, no entanto, tornou-se um modelo de referência. Muito trabalho tem sido feito para estudar desvios do modelo de Λ CDM. Geralmente, isso implica a introdução de novos parâmetros que são limitados pelo número crescente de dados observacionais disponíveis.

As interações entre a matéria escura e energia escura que resultam em um comportamento da lei de potência (com respeito ao fator de escala cósmica) das relações entre as densidades de energia das componentes escuras, ter sido considerado como uma tentativa de aliviar o problema da coincidência cósmica fenomenologicamente. Nós generalizamos esta abordagem, permitindo uma equação variável de estado para a energia escura dentro da CPL-parametrização. Com base em soluções analíticas para a taxa de Hubble e usando as amostras Constitution e Union2.

3.2 O Problema da Coincidência Cósmica

Admitindo-se a existência de uma componente de energia escura com pressão e cuja densidade corresponde a 70% da densidade de energia total do Universo para explicar a atual fase de expansão acelerada, caímos no chamado Problema da Coincidência Cósmica. Este problema consiste em tentar entender porque as densidades da energia e da matéria escuras têm a mesma ordem de magnitude e, por isto, por que o Universo só passou a uma fase acelerada de expansão mais recentemente.

As observações atuais indicam que a razão entre as densidades da energia e de matéria escura é próxima da unidade, ou seja, $r = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{x0}} \approx 1$. No entanto, a densidade de matéria é proporci-

onal a a^{-3} , enquanto a densidade da energia escura se mantém a mesma para uma constante cosmológica. Isso causa um problema, pois as condições iniciais teriam que ser ajustadas muito especificamente para que isso ocorra. Como a densidade de energia escura é constante, ela seria praticamente desprezível no início, quando o Universo era pequeno; com a expansão e o consequente decaimento das densidades da radiação e da poeira, a energia escura deixou de ser desprezível. Esse momento coincide com a formação de estruturas no universo, indicando que há algum argumento físico por trás.

Uma outra maneira de visualizarmos este problema, no contexto dos modelo Λ CDM em termos das condições iniciais necessárias ao Universo para que ele evoluísse para o que é hoje estimado pelo modelo de constante cosmológica. Ou seja, como foram geradas as condições iniciais tão específicas e especial que foram necessárias para que o Universo só começasse a se expandir aceleradamente.

O problema da coincidência cósmica pode ser aliviado admitindo-se uma interação entre a energia e a matéria escura, supondo a relação proposta em [3], da forma seguinte

$$\rho_x \propto \rho_m a^\xi, \quad (3.1)$$

onde o parâmetro ξ é um novo observável, que denota a severidade do problema da coincidência cósmica. Nesse contexto, $\xi = 3$ e $\omega = -1$ correspondem ao modelo Λ CDM, por outra parte $\xi = 0$ significa uma razão estacionária. As soluções com um parâmetro de escala $0 < \xi < 3$ aliviam o problema da coincidência cósmica [3][18][19].

No presente trabalho escolhemos uma relação entre a densidade de energia e matéria escura da forma seguinte [18],

$$\frac{\rho_m}{\rho_x} = r a^{-\xi}, \quad (3.2)$$

onde r é o valor atual da razão das densidades.

3.3 Modelos com Interação

Nos modelos com interação entre dois fluidos, as energias de cada um deles não se conservam independentemente; o que temos é a conservação de energia total, ou seja, $(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} = 0)$, neste caso postulamos uma interação no setor escuro do Universo de forma seguinte:

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q, \quad (3.3)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + \omega_x)\rho_x = -Q. \quad (3.4)$$

$|Q|$ dá a magnitude da interação. A forma para essa interação por enquanto ainda fica aberta, já que ainda não há justificativa microfísica.

$Q = 0$, denota a cosmologia padrão para $\omega = -1$, sem a interação entre a energia e matéria escura. Utilizando argumentos da termodinâmica, mostra-se que valores positivos para Q são preferidos [20] gerando-se uma transferência da energia para a matéria escura, cumprido a segunda lei da termodinâmica.

3.3.1 Caso $\omega_x = cte$

Para o início da análise com a consideração $\omega_x = cte$, devemos ter em conta um universo FRW plano, para simplificar as expressões, da forma seguinte [3][19]:

$$\Omega_{m0} + \Omega_{x0} = 1. \quad (3.5)$$

Tendo em conta as equações (3.3) e (3.4), obtemos

$$\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} = -3H + \frac{Q}{\rho_m}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\dot{\rho}_x}{\rho_x} = -3H(1 + \omega_x) - \frac{Q}{\rho_x}. \quad (3.7)$$

Uma forma simplificada pode ser obtida através da derivada

$$\left(\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_x} \right) = \frac{\rho_m}{\rho_x} \left(\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} - \frac{\dot{\rho}_x}{\rho_x} \right). \quad (3.8)$$

Sustituindo as equações (3.6) e (3.7) na (3.8) obtemos

$$\left(\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_x} \right) = 3H \frac{\rho_m}{\rho_x} \left[\frac{Q}{3H} \left(\frac{\rho_m + \rho_x}{\rho_m \rho_x} \right) + \omega_x \right]. \quad (3.9)$$

Fazendo a derivada da equação (3.2), obtemos

$$\left(\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_x} \right) = -\xi \left(\frac{\rho_m}{\rho_x} \right) H. \quad (3.10)$$

Igualando as expressões obtidas em (3.9) com (3.10), encontramos

$$Q = -3H \left(\frac{\rho_x}{\rho_m + \rho_x} \right) \left(\omega_x + \frac{\xi}{3} \right) \rho_m. \quad (3.11)$$

Fazendo um artifício matemático na equação $\left(\frac{\rho_x}{\rho_m + \rho_x}\right)$, para introduzir a relação das densidades, o fator de escala e o parâmetro de escala, obtemos

$$\left(\frac{\rho_x}{\rho_m + \rho_x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho_m}{\rho_x}\right)} = \frac{1}{1 + ra^{-\xi}} = \frac{a^\xi}{r + a^\xi}. \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) em (3.11), obtemos a expressão para a interação Q

$$Q = -3H \left(\frac{a^\xi}{r + a^\xi}\right) \left(\omega_x + \frac{\xi}{3}\right) \rho_m. \quad (3.13)$$

Uma interação deste tipo garante uma dinâmica com (3.2)

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -3H \left(\frac{a^\xi}{r + a^\xi}\right) \left(\omega_x + \frac{\xi}{3}\right) \rho_m. \quad (3.14)$$

Para simplificar as equações, usamos a derivada logarítmica da forma

$$\dot{\rho}_m = \frac{d\rho_m}{da} \frac{da}{dt} = \frac{d\rho_m}{da} \frac{\dot{a}}{\left(\frac{a}{a}\right)} = \frac{d\rho_m}{\left(\frac{da}{a}\right)} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right). \quad (3.15)$$

Chamamos $\rho'_m = \frac{d\rho_m}{d \ln a}$, então obtemos

$$\dot{\rho}_m = \rho'_m H. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.14) nos fornece

$$\rho'_m + 3\rho_m = -3 \left(\frac{a^\xi}{r + a^\xi}\right) \left(\omega_x + \frac{\xi}{3}\right) \rho_m. \quad (3.17)$$

Desenvolvendo, (3.17), obtemos

$$\ln \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m0}}\right) = -3 \int_{a_0=1}^a \frac{da}{a} - 3 \left(\omega_x + \frac{\xi}{3}\right) \int_{a_0=1}^a \left(\frac{a^{\xi-1}}{r + a^\xi}\right) da. \quad (3.18)$$

A equação anterior precisa de duas integrais fundamentais, as quais tem a seguinte forma

$$\int_{a_0=1}^a \frac{da}{a} = \ln a, \quad (3.19)$$

$$\int_{a_0=1}^a \left(\frac{a^{\xi-1}}{r + a^\xi}\right) da = \frac{1}{\xi} \ln \left[\frac{r + a^\xi}{r + 1}\right]. \quad (3.20)$$

Utilizando as integrais definidas anteriormente (3.20) e (3.19), e substituindo em (3.18), obtemos a densidade da matéria escura

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3} \left[\frac{r + a^\xi}{r + 1} \right]^{-\left(\frac{3\omega_x}{\xi} + 1\right)}. \quad (3.21)$$

Com a equação (3.2) e a consideração da atualidade que $r = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{x0}}$, obtemos a densidade da energia escura

$$\rho_x = \rho_{x0} a^{-3} \left[\frac{r + a^\xi}{r + 1} \right]^{-\left(\frac{3\omega_x}{\xi} + 1\right)} a^\xi. \quad (3.22)$$

Para obter o parâmetro de Hubble, usamos as equações (3.21) e (3.22), obtendo a forma seguinte

$$H^2(a) = H_0^2 a^{-3} [\Omega_{m0} + (1 - \Omega_{m0}) a^\xi]^{-\frac{3\omega_x}{\xi}}, \quad (3.23)$$

ou, em termos do redshift

$$H^2(z) = H_0^2 (1 + z)^3 [\Omega_{m0} + (1 - \Omega_{m0})(1 + z)^{-\xi}]^{-\frac{3\omega_x}{\xi}}. \quad (3.24)$$

A equação (3.24) é a obtida em [3][19][21].

Fazendo uso da equação (2.81), encontraremos o parâmetro de desaceleração

$$q(z) = -1 + \frac{3\Omega_{m0}(1 + z)^\xi + 3(1 - \Omega_{m0})(\omega_x + 1)}{2[\Omega_{m0}(1 + z)^\xi + (1 - \Omega_{m0})]}, \quad (3.25)$$

e para $z = 0$ obtemos o fator de desaceleração hoje em termos dos parâmetros de densidade e equação de estado

$$q_0 = -1 + \frac{3\Omega_{m0} + 3(1 - \Omega_{m0})(\omega_x + 1)}{2}. \quad (3.26)$$

A análise estatística foi feita usando o método h^* , que consiste em diminuir o tempo computacional tirando um dos parâmetros que temos mais informação, neste caso h .

Para encontrar o χ_{min}^2 que vai ser estudado no apêndice A.

Ajuste do Modelo com Interação com $\omega_x = cte$ aos dados da amostra Constitution.

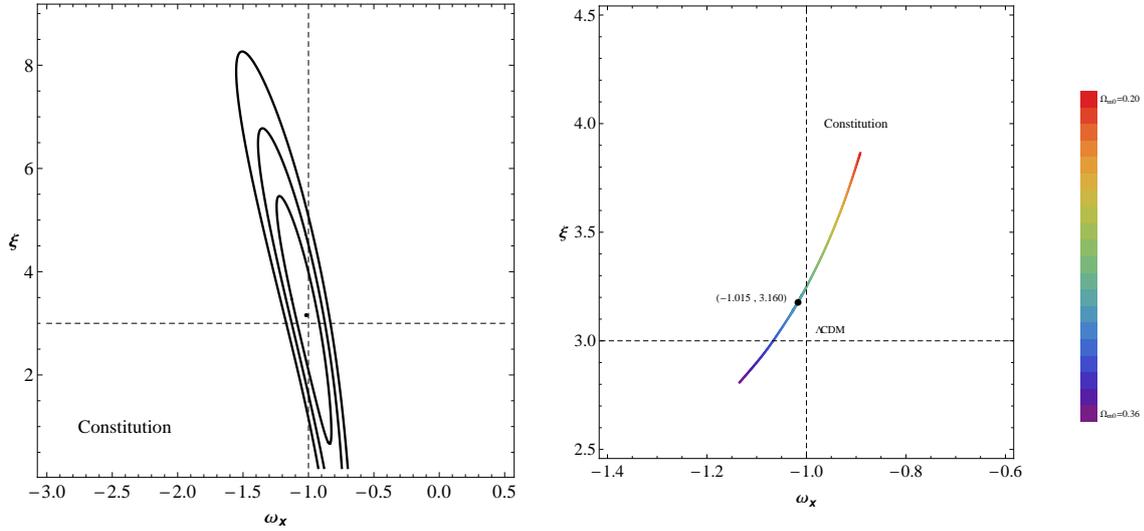


Figura 3.1: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = cte$ aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi_{min}^2 = 465.490$;

$$\Omega_{m0} = 0.290_{-0.022-0.043-0.064}^{+0.022+0.046+0.070}, \quad \xi = 3.160_{-0.490-0.974-1.456}^{+0.513+1.044+1.602}, \quad \omega_x = -1.015_{-0.045-0.091-0.136}^{+0.046+0.091+0.137}$$

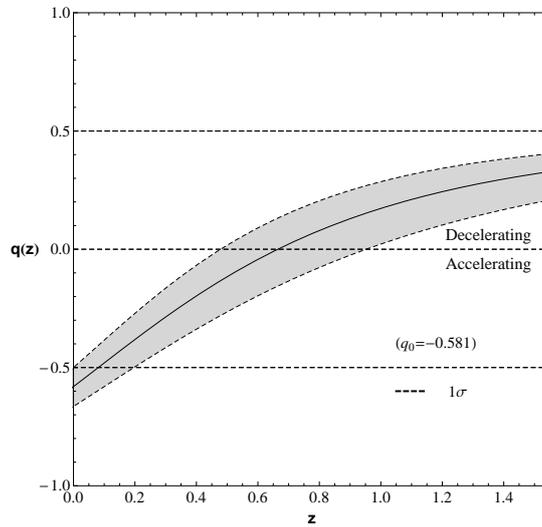


Figura 3.2: Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Constitution.

Ajuste do modelo com interação com $\omega_x = cte$ aos dados da amostra Union2.

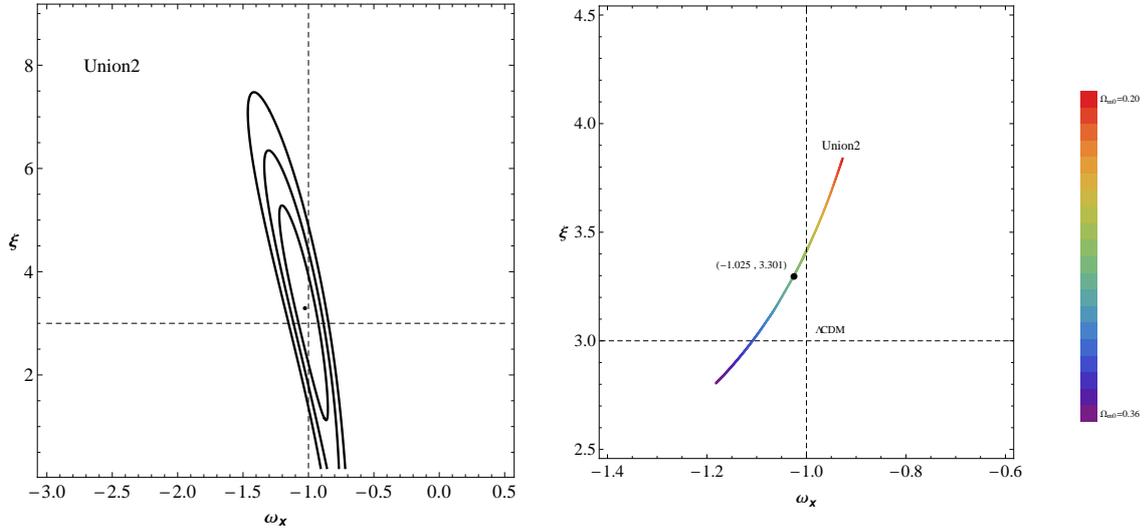


Figura 3.3: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = cte$ aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste : $\chi^2_{min} = 540.931$;

$$\Omega_{m0} = 0.269^{+0.020+0.041+0.063}_{-0.020-0.039-0.057}; \xi = 3.301^{+0.458+0.934+1.432}_{-0.445-0.882-1.315}; \omega_x = -1.025^{+0.042+0.084+0.126}_{-0.042-0.083-0.125}.$$

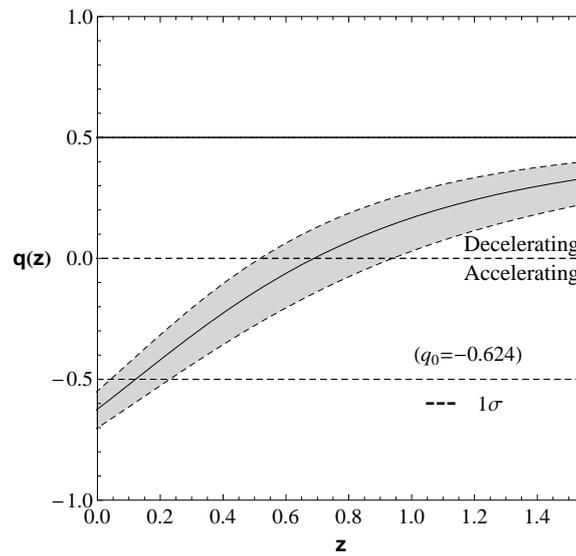


Figura 3.4: Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Union2.

3.3.2 Caso $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 1$

A motivação de fixar $\xi = 1$ é estudar primeiramente o problema de uma equação de estado variável e as influências que esta equação tem sobre o problema de Coincidência Cós mica, tendo em consideração que o parâmetro de escala $0 < \xi < 3$ alivia o problema da coincidência cós mica [3][18][19].

Iniciamos a análise a partir da equação (3.13), substituindo $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$, obtendo

$$Q = -3H \left(\frac{a^\xi}{r + a^\xi} \right) \left(\omega_0 + \omega_1(1 - a) + \frac{\xi}{3} \right) \rho_m, \quad (3.27)$$

$$Q = -3H \left(\frac{a^\xi}{r + a^\xi} \right) \left(\omega_0 + \omega_1 + \frac{\xi}{3} \right) \rho_m + 3H\omega_1 \left(\frac{a^{\xi+1}}{r + a^\xi} \right) \rho_m. \quad (3.28)$$

Um dos principais objetivos no presente trabalho é encontrar o compartimento das densidades de matéria e energia escuras. Substituímos o termo da interação (3.28) na equação de conservação (3.3), encontramos

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -3H \left(\frac{a^\xi}{r + a^\xi} \right) \left(\omega_0 + \omega_1 + \frac{\xi}{3} \right) \rho_m + 3H\omega_1 \left(\frac{a^{\xi+1}}{r + a^\xi} \right) \rho_m. \quad (3.29)$$

Fazendo uso da derivada logarítmica (3.16) na equação (3.29), obtemos

$$\ln \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m0}} \right) = -3 \int_{a_0=1}^a \frac{da}{a} - 3 \left(\omega_0 + \omega_1 + \frac{\xi}{3} \right) \int_{a_0=1}^a \left(\frac{a^{\xi-1}}{r + a^\xi} \right) da + 3\omega_1 \int_{a_0=1}^a \left(\frac{a^\xi}{r + a^\xi} \right) da. \quad (3.30)$$

Agora, substituindo o caso particular $\xi = 1$, na equação (3.30), obtendo

$$\ln \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m0}} \right) = -3 \int_{a_0=1}^a \frac{da}{a} - 3 \left(\omega_0 + \omega_1 + \frac{1}{3} \right) \int_{a_0=1}^a \left(\frac{1}{r + a} \right) da + 3\omega_1 \int_{a_0=1}^a \left(\frac{a}{r + a} \right) da. \quad (3.31)$$

As integrais são

$$\int_{a_0=1}^a \frac{da}{a} = \ln a, \quad (3.32)$$

$$\int_{a_0=1}^a \left(\frac{1}{r + a} \right) da = \ln \left[\frac{r + a}{r + 1} \right], \quad (3.33)$$

$$\int_{a_0=1}^a \left(\frac{a}{r + a} \right) da = \left[(a - 1) - r \ln \left[\frac{r + a}{r + 1} \right] \right]. \quad (3.34)$$

Para obter a densidade da matéria escura, fazemos a substituição de (3.32), (3.33) e (3.34) em (3.31), obtendo a forma seguinte

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3} \left[\frac{r+a}{r+1} \right]^{-3(\frac{1}{3}+\omega_0+\omega_1+\omega_1 r)} \exp [3\omega_1(a-1)]. \quad (3.35)$$

Tendo em conta a equação (3.2) e que $r = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{x0}}$, obtemos a densidade da energia escura

$$\rho_x = \frac{\rho_{m0}}{r} a^{-2} \left[\frac{r+a}{r+1} \right]^{-3(\frac{1}{3}+\omega_0+\omega_1+\omega_1 r)} \exp [3\omega_1(a-1)]. \quad (3.36)$$

Os resultados obtidos em (3.35) e (3.36) são consistente com os obtidos em [18], no caso limite $\xi = 1$, $\omega_0 = -1$, $\omega_1 = 0$, com

$$\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{(1+r)^2} \frac{1}{a} \left[1 + \frac{r}{a} \right]^2, \quad (3.37)$$

$$\rho_x = \frac{\rho_{m0}}{r(1+r)^2} \frac{1}{a} \left[1 + \frac{r}{a} \right]^2. \quad (3.38)$$

Usando as equações (3.35) e (3.36), obtemos a densidade total $\rho_t = \rho_m + \rho_x$

$$\rho_t = \rho_{m0} \left[1 + \frac{a}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a}{r+1} \right]^{-3(\frac{1}{3}+\omega_0+\omega_1+\omega_1 r)} \exp [3\omega_1(a-1)], \quad (3.39)$$

$$\rho_t = \rho_{m0} \left[\frac{r+a}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a}{r+1} \right]^{-1} \left[\frac{r+a}{r+1} \right]^{-3(\omega_0+\omega_1+\omega_1 r)} \exp [3\omega_1(a-1)], \quad (3.40)$$

$$\rho_t = \rho_{m0} \left[\frac{r+1}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a}{r+1} \right]^{-3(\omega_0+\omega_1+\omega_1 r)} \exp [3\omega_1(a-1)]. \quad (3.41)$$

O parâmetro de Hubble $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_t}$, é obtido substituindo o resultado anterior, obtendo a forma seguinte

$$H^2(a) = H_0^2 \left(\frac{8\pi G \rho_{m0}}{3H_0^2} \right) \left[\frac{r+1}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a}{r+1} \right]^{-3(\omega_0+\omega_1+\omega_1 r)} \exp [3\omega_1(a-1)], \quad (3.42)$$

$$H^2(a) = H_0^2 \Omega_{m0} \left[\frac{r+1}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a}{r+1} \right]^{-3(\omega_0+\omega_1+\omega_1 r)} \exp [3\omega_1(a-1)]. \quad (3.43)$$

Lembrando que estamos trabalhando com um universo espacialmente plano ($\Omega_{m0} + \Omega_{x0} = 1$), obtemos

$$r = \frac{\Omega_{m0}}{1 - \Omega_{m0}}, \quad (3.44)$$

$$\left[\frac{r+1}{r} \right] = \frac{1}{\Omega_{m0}}, \quad (3.45)$$

$$\left[\frac{r+a}{r+1} \right] = \Omega_{m0} + (1 - \Omega_{m0})a. \quad (3.46)$$

Com (3.44), (3.45) e (3.46) em (3.43), encontramos

$$H^2(a) = H_0^2 a^{-3} [\Omega_{m0} + (1 - \Omega_{m0})a]^{-3(\omega_0 + \omega_1 + \omega_1 \left(\frac{\Omega_{m0}}{1 - \Omega_{m0}}\right))} \exp[3\omega_1(a - 1)], \quad (3.47)$$

ou, em termos do redshift

$$H^2(a) = H_0^2 (1+z)^3 [\Omega_{m0} + (1 - \Omega_{m0})(1+z)^{-1}]^{-3(\omega_0 + \omega_1 + \omega_1 \left(\frac{\Omega_{m0}}{1 - \Omega_{m0}}\right))} \exp\left[\frac{-3\omega_1 z}{(1+z)}\right]. \quad (3.48)$$

Fazendo uso da equação (2.81), encontramos o parâmetro de desaceleração

$$q(z) = \frac{3(1+z)\omega_0(1 - \Omega_{m0}) + 3\omega_1 z(1 - \Omega_{m0}) + (1+z)(1 + z\Omega_{m0})}{2(1+z)(1 + z\Omega_{m0})\Omega_{m0}}, \quad (3.49)$$

e para $z = 0$ obtemos o fator de desaceleração hoje em termos dos parâmetros de densidade e equação de estado

$$q_0 = -1 + \frac{3\Omega_{m0} + 3(1 - \Omega_{m0})(\omega_0 + 1)}{2}. \quad (3.50)$$

Outra vez, a análise estatística foi feito usando o método h^* , que consiste em diminuir o tempo computacional tirando um dos parâmetros que temos mais informação, neste caso h , para encontrar o χ^2_{min} que vai ser estudado no apêndice A.

Ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 1$ aos dados da amostra Constitution.

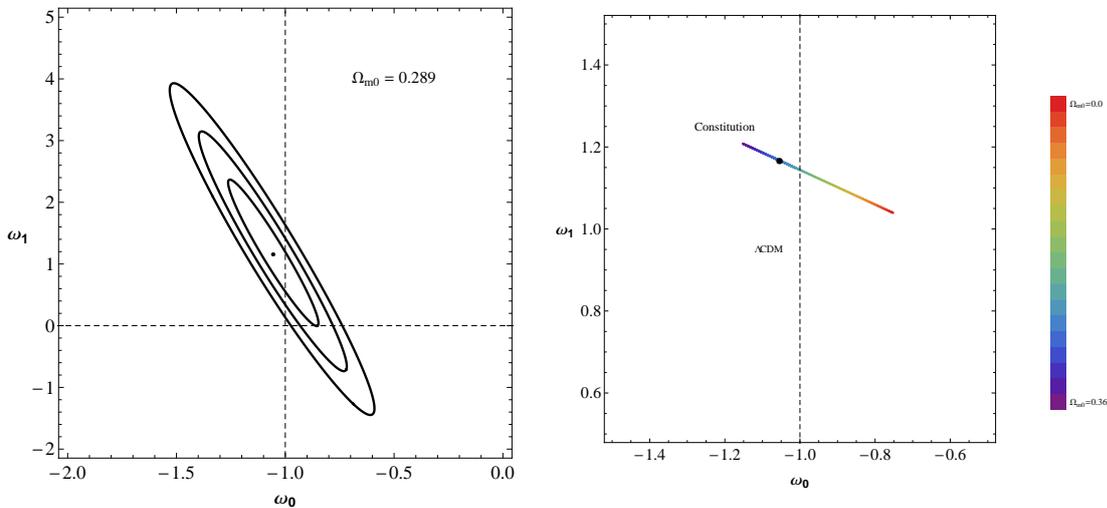


Figura 3.5: Curvas dos níveis 1, 2 e 3 σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 1$ aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste :

$$\chi_{min}^2 = 466.022 ; \Omega_{m0} = 0.289(fixo); \omega_0 = -1.054_{-0.132-0.266-0.400}^{+0.132+0.262+0.389} ; \omega_1 = 1.167_{-0.749-1.483-2.197}^{+0.763+1.533+2.318}$$

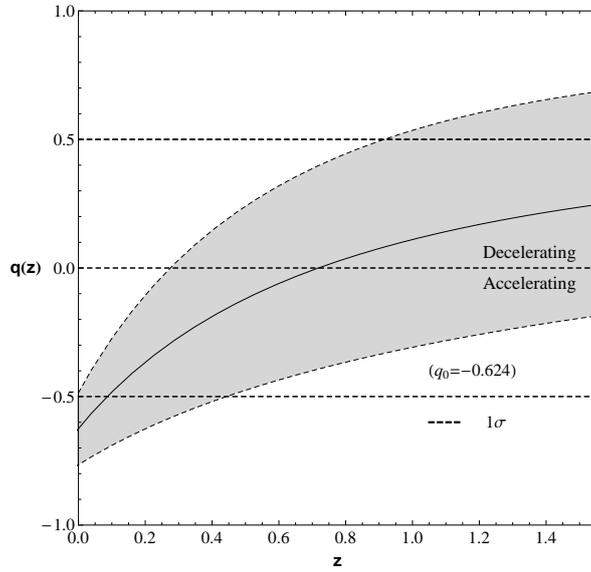


Figura 3.6: Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Constitution.

Ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 1$ aos dados da supernova Union2.

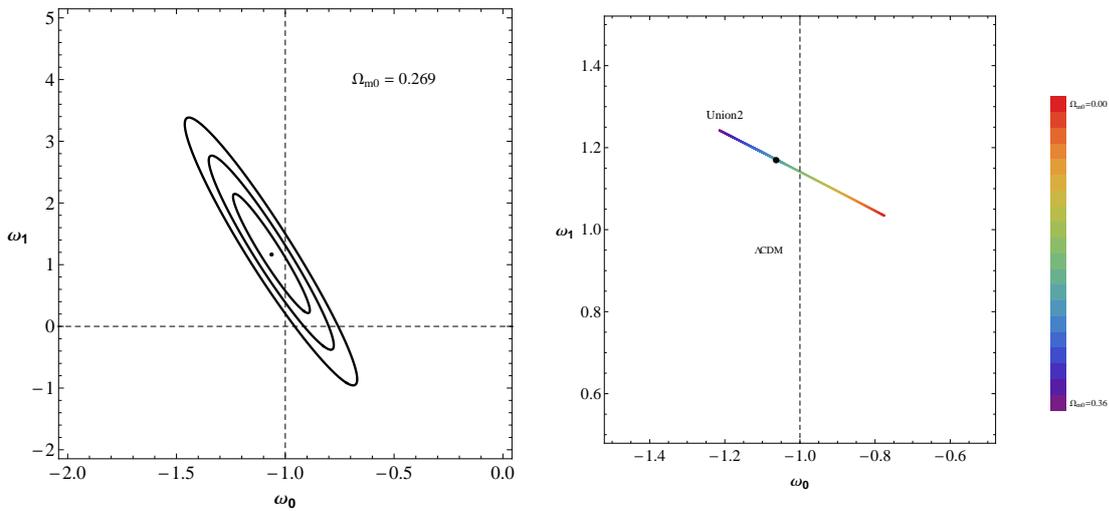


Figura 3.7: Curvas dos níveis 1, 2 e 3 σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 1$ aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste:

$$\chi_{min}^2 = 541.275 ; \Omega_{m0} = 0.269(\text{fixo}); \omega_0 = -1.063_{-0.113-0.224-0.337}^{+0.113+0.223+0.333} ; \omega_1 = 1.171_{-0.611-1.209-1.791}^{+0.627+1.244+1.330}.$$

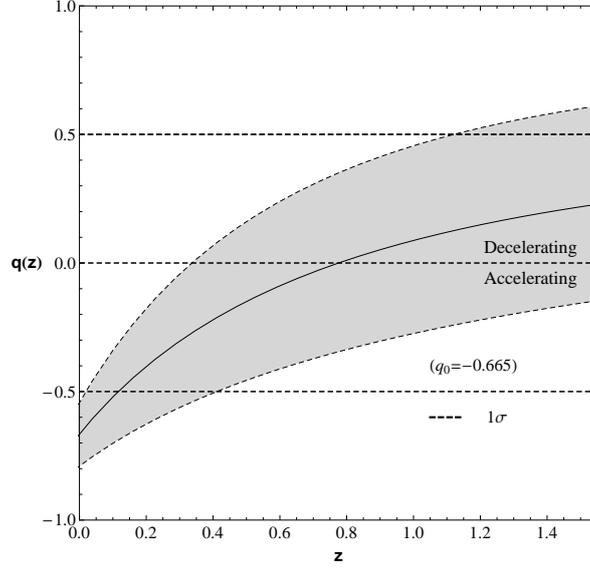


Figura 3.8: Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Union2.

3.3.3 Caso $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 3$

A motivação de fixar $\xi = 3$ é estudar primeiramente o problema de uma equação de estado variável e as influências que esta equação tem sobre o problema de Coincidência Cósmica, tendo em consideração que o parâmetro de escala $\xi = 3$ com $\omega = -1$ é o caso Λ CDM [3][18][19].

Iniciamos a análise a partir da equação (3.30), substituindo o caso particular $\xi = 3$, obtendo

$$\ln \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m0}} \right) = -3 \int_{a_0=1}^a \frac{da}{a} - 3(\omega_0 + \omega_1 + 1) \int_{a_0=1}^a \left(\frac{a^2}{r + a^3} \right) da + 3\omega_1 \int_{a_0=1}^a \left(\frac{a^3}{r + a^3} \right) da. \quad (3.51)$$

As integrais são

$$\int_{a_0=1}^a \frac{da}{a} = \ln a, \quad (3.52)$$

$$\int_{a_0=1}^a \left(\frac{a^2}{r + a^3} \right) da = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{r + a^3}{r + 1} \right], \quad (3.53)$$

$$\int_{a_0=1}^a \left(\frac{a^3}{r+a^3} \right) da = (a-1) + \frac{r^{1/3}}{\sqrt{3}} \left(\arctan \left[\frac{r^{1/3}-2a}{\sqrt{3}r^{1/3}} \right] - \arctan \left[\frac{r^{1/3}-2}{\sqrt{3}r^{1/3}} \right] \right) - \frac{r^{1/3}}{3} \ln \left[\frac{r^{1/3}+a}{r^{1/3}+1} \right] + \frac{r^{1/3}}{6} \ln \left[\frac{r^{2/3}-r^{1/3}a+a^2}{r^{2/3}-r^{1/3}+1} \right]. \quad (3.54)$$

Para obter a densidade da matéria escura, fazemos uso das equações (3.52), (3.53) e (3.54) em (3.51), obtendo a forma seguinte

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3} \left[\frac{r+a^3}{r+1} \right]^{-(\omega_0+\omega_1+1)} \left[\frac{r^{1/3}+a}{r^{1/3}+1} \right]^{-\omega_1 r^{1/3}} \left[\frac{r^{2/3}-r^{1/3}a+a^2}{r^{2/3}-r^{1/3}+1} \right]^{\frac{\omega_1 r^{1/3}}{2}} \exp[\alpha], \quad (3.55)$$

onde,

$$\alpha = 3\omega_1 \left[(a-1) + \frac{r^{1/3}}{\sqrt{3}} \left(\arctan \left[\frac{r^{1/3}-2a}{\sqrt{3}r^{1/3}} \right] - \arctan \left[\frac{r^{1/3}-2}{\sqrt{3}r^{1/3}} \right] \right) \right].$$

Usando a equação (3.2) e a consideração da atualidade que $r = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{x0}}$, obtemos a densidade da energia escura

$$\rho_x = \frac{\rho_{m0}}{r} \left[\frac{r+a^3}{r+1} \right]^{-(\omega_0+\omega_1+1)} \left[\frac{r^{1/3}+a}{r^{1/3}+1} \right]^{-\omega_1 r^{1/3}} \left[\frac{r^{2/3}-r^{1/3}a+a^2}{r^{2/3}-r^{1/3}+1} \right]^{\frac{\omega_1 r^{1/3}}{2}} \exp[\alpha]. \quad (3.56)$$

A partir das equações (3.55) e (3.56), obtemos a densidade total $\rho_t = \rho_m + \rho_x$

$$\rho_t = \rho_{m0} \left[\frac{r+a^3}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a^3}{r+1} \right]^{-(\omega_0+\omega_1+1)} \left[\frac{r^{1/3}+a}{r^{1/3}+1} \right]^{-\omega_1 r^{1/3}} \left[\frac{r^{2/3}-r^{1/3}a+a^2}{r^{2/3}-r^{1/3}+1} \right]^{\frac{\omega_1 r^{1/3}}{2}} \exp[\alpha], \quad (3.57)$$

$$\rho_t = \rho_{m0} \left[\frac{r+1}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a^3}{r+1} \right]^{-(\omega_0+\omega_1)} \left[\frac{r^{1/3}+a}{r^{1/3}+1} \right]^{-\omega_1 r^{1/3}} \left[\frac{r^{2/3}-r^{1/3}a+a^2}{r^{2/3}-r^{1/3}+1} \right]^{\frac{\omega_1 r^{1/3}}{2}} \exp[\alpha]. \quad (3.58)$$

Consequentemente, o parâmetro de Hubble e dado por $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_t}$, obtemos

$$H^2(a) = H_0^2 \left(\frac{8\pi G \rho_{m0}}{3H_0^2} \right) \times \left[\frac{r+1}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a^3}{r+1} \right]^{-(\omega_0+\omega_1)} \left[\frac{r^{1/3}+a}{r^{1/3}+1} \right]^{-\omega_1 r^{1/3}} \left[\frac{r^{2/3}-r^{1/3}a+a^2}{r^{2/3}-r^{1/3}+1} \right]^{\frac{\omega_1 r^{1/3}}{2}} \exp[\alpha], \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
H^2(a) &= H_0^2 \Omega_{m0} \times \\
&\times \left[\frac{r+1}{r} \right] a^{-3} \left[\frac{r+a^3}{r+1} \right]^{-(\omega_0+\omega_1)} \left[\frac{r^{1/3}+a}{r^{1/3}+1} \right]^{-\omega_1 r^{1/3}} \left[\frac{r^{2/3}-r^{1/3}a+a^2}{r^{2/3}-r^{1/3}+1} \right]^{\frac{\omega_1 r^{1/3}}{2}} \exp[\alpha].
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Com uma análise similar como no caso $\xi = 1$ achamos

$$\left[\frac{r^{1/3}+a}{r^{1/3}+1} \right] = \left[\frac{\Omega_{m0}^{1/3} + (1-\Omega_{m0})^{1/3}a}{\Omega_{m0}^{1/3} + (1-\Omega_{m0})^{1/3}} \right], \tag{3.61}$$

$$\left[\frac{r^{2/3}-r^{1/3}a+a^2}{r^{2/3}-r^{1/3}+1} \right] = \left[\frac{(1-\Omega_{m0})^{1/3}\Omega_{m0}^{2/3} - (1-\Omega_{m0})^{2/3}\Omega_{m0}^{1/3}a + (1-\Omega_{m0})a^2}{(1-\Omega_{m0})^{1/3}\Omega_{m0}^{2/3} - (1-\Omega_{m0})^{2/3}\Omega_{m0}^{1/3} + (1-\Omega_{m0})} \right], \tag{3.62}$$

$$\alpha = 3\omega_1 \left[(a-1) + \frac{\Omega_{m0}^{1/3}}{\sqrt{3}(1-\Omega_{m0})^{1/3}} \left(\arctan \left[\frac{\Omega_{m0}^{1/3} - 2a(1-\Omega_{m0})^{1/3}}{\sqrt{3}\Omega_{m0}^{1/3}} \right] - \arctan \left[\frac{\Omega_{m0}^{1/3} - 2(1-\Omega_{m0})^{1/3}}{\sqrt{3}\Omega_{m0}^{1/3}} \right] \right) \right]$$

Combinando as expressões (3.61) e (3.62) em (3.60), obtemos a forma seguinte

$$\begin{aligned}
H^2(a) &= H_0^2 a^{-3} \left[\Omega_{m0} + (1-\Omega_{m0})a^3 \right]^{-(\omega_0+\omega_1)} \left[\frac{\Omega_{m0}^{1/3} + (1-\Omega_{m0})^{1/3}a}{\Omega_{m0}^{1/3} + (1-\Omega_{m0})^{1/3}} \right]^{-\omega_1 \left[\frac{\Omega_{m0}}{1-\Omega_{m0}} \right]^{1/3}} \times \\
&\times \left[\frac{(1-\Omega_{m0})^{1/3}\Omega_{m0}^{2/3} - (1-\Omega_{m0})^{2/3}\Omega_{m0}^{1/3}a + (1-\Omega_{m0})a^2}{(1-\Omega_{m0})^{1/3}\Omega_{m0}^{2/3} - (1-\Omega_{m0})^{2/3}\Omega_{m0}^{1/3} + (1-\Omega_{m0})} \right]^{\frac{\omega_1 \left[\frac{\Omega_{m0}}{1-\Omega_{m0}} \right]^{1/3}}{2}} \exp[\alpha],
\end{aligned} \tag{3.63}$$

ou, em termos do redshift

$$\begin{aligned}
H^2(a) &= H_0^2 (1+z)^3 \left[\Omega_{m0} + (1-\Omega_{m0})(1+z)^{-3} \right]^{-(\omega_0+\omega_1)} \left[\frac{\Omega_{m0}^{1/3} + \frac{(1-\Omega_{m0})^{1/3}}{(1+z)}}{\Omega_{m0}^{1/3} + (1-\Omega_{m0})^{1/3}} \right]^{-\omega_1 \left[\frac{\Omega_{m0}}{1-\Omega_{m0}} \right]^{1/3}} \times \\
&\times \left[\frac{(1-\Omega_{m0})^{1/3}\Omega_{m0}^{2/3} - \frac{(1-\Omega_{m0})^{2/3}}{(1+z)}\Omega_{m0}^{1/3} + \frac{(1-\Omega_{m0})}{(1+z)^2}}{(1-\Omega_{m0})^{1/3}\Omega_{m0}^{2/3} - (1-\Omega_{m0})^{2/3}\Omega_{m0}^{1/3} + (1-\Omega_{m0})} \right]^{\frac{\omega_1 \left[\frac{\Omega_{m0}}{1-\Omega_{m0}} \right]^{1/3}}{2}} \exp[\alpha],
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\alpha = 3\omega_1 \left[\frac{-z}{1+z} + \frac{\Omega_{m0}^{1/3}}{\sqrt{3}(1-\Omega_{m0})^{1/3}} \left(\arctan \left[\frac{\Omega_{m0}^{1/3} - 2\frac{(1-\Omega_{m0})^{1/3}}{(1+z)}}{\sqrt{3}\Omega_{m0}^{1/3}} \right] - \arctan \left[\frac{\Omega_{m0}^{1/3} - 2(1-\Omega_{m0})^{1/3}}{\sqrt{3}\Omega_{m0}^{1/3}} \right] \right) \right]$$

Fazendo uso da equação (2.81), obtemos o parâmetro de desaceleração, o qual é muito extenso, por tal motivo, a análise foi feita numericamente.

Como já mencionado, a análise estatística foi feita usando o método h^* , que consiste em diminuir o tempo computacional tirando um dos parâmetros que temos mais informação, neste caso h , para encontrar o χ_{min}^2 que vai ser estudado no apêndice A.

Ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 3$ aos dados da amostra Constitution.

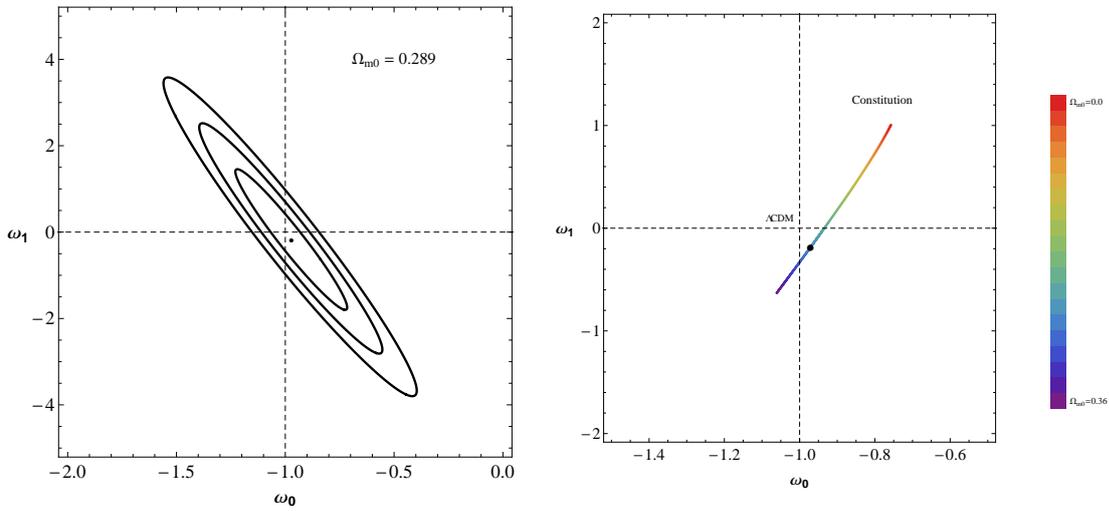


Figura 3.9: Curvas dos níveis 1, 2 e 3 σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 3$ aos dados da amostra Constitution, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste :

$$\chi_{min}^2 = 465.482 ; \Omega_{m0} = 0.289(fixo); \omega_0 = -0.971_{-0.164-0.329-0.494}^{+0.162+0.326+0.486} ; \omega_1 = -0.187_{-1.031-2.043-3.033}^{+1.047+2.097+3.167}$$

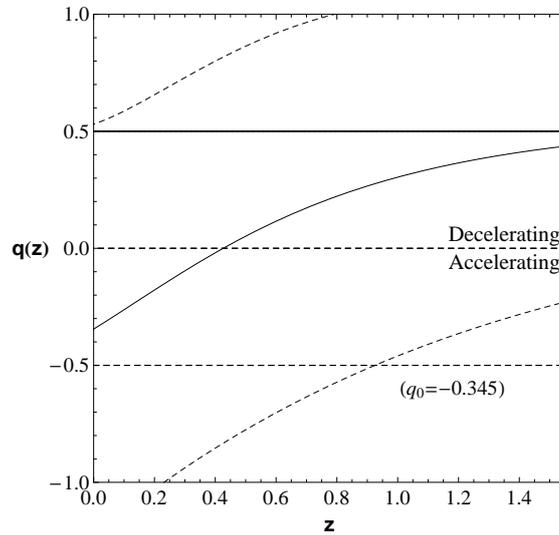


Figura 3.10: Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Constitution.

Ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 3$ aos dados da amostra Union2.

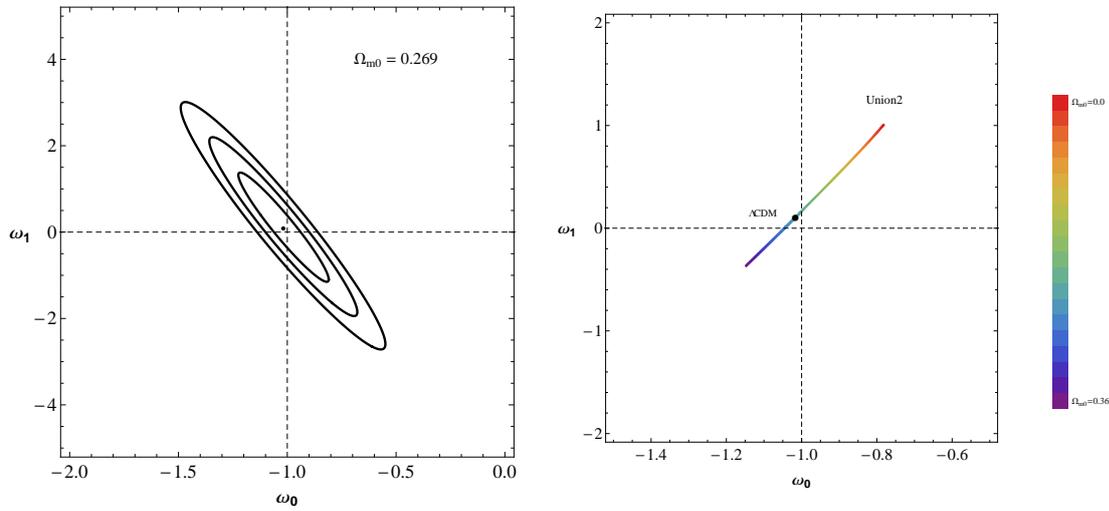


Figura 3.11: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes do ajuste do modelo com interação com $\omega_x = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$ e $\xi = 3$ aos dados da amostra Union2, obtendo os seguintes valores de melhor ajuste :

$$\chi_{min}^2 = 540.996 ; \Omega_{m0} = 0.269(\text{fixo}); \omega_0 = -1.017_{-0.132-0.263-0.396}^{+0.132+0.262+0.395} ; \omega_1 = 0.106_{-0.801-1.596-2.366}^{+0.809+1.614+2.424}$$

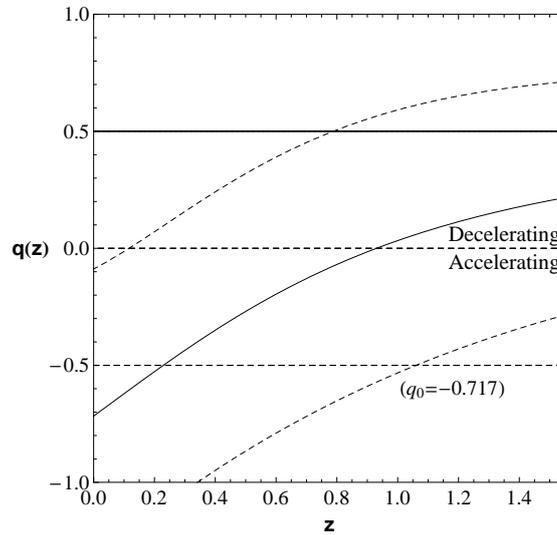


Figura 3.12: Parâmetro de desaceleração com os dados da amostra Union2.

3.4 Resultados obtidos com os dados das amostras Constitution e Union2

Os resultados obtidos nestas tabelas são o resumo da análise da amostra, tendo em conta os *priors*, Constitution $\Omega_{m0} = 0.289$ e Union2 $\Omega_{m0} = 0.269$, e fazendo a comparação dos casos com interação e os casos sem interação com a parametrização CPL.

Model	Λ CDM	No Int.	Int. $\xi = 1$	Int. $\xi = 3$
Best fit	$\Omega_{m0} = 0.289$	Prior $\Omega_{m0} = 0.289$ $\omega_0 = -0.908$ $\omega_1 = -0.619$	Prior $\Omega_{m0} = 0.289$ $\omega_0 = -1.054$ $\omega_1 = 1.167$	Prior $\Omega_{m0} = 0.289$ $\omega_0 = -0.971$ $\omega_1 = -0.187$
χ_{min}^2	465.513	465.297	466.022	465.482

Tabela 3.1: Caso Λ CDM, No Int., Int. $\xi = 1$, Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos fixando $\Omega_{m0} = 0.289$ com os dados da amostra Constitution.

Model	Λ CDM	No Int.	Int. $\xi = 1$	Int. $\xi = 3$
Best fit	$\Omega_{m0} = 0.269$	Prior $\Omega_{m0} = 0.269$ $\omega_0 = -1.007$ $\omega_1 = 0.029$	Prior $\Omega_{m0} = 0.269$ $\omega_0 = -1.063$ $\omega_1 = 1.171$	Prior $\Omega_{m0} = 0.269$ $\omega_0 = -1.017$ $\omega_1 = 0.106$
χ_{min}^2	541.012	541.009	541.275	540.996

Tabela 3.2: Caso Λ CDM, No Int., Int. $\xi = 1$, Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos fixando $\Omega_{m0} = 0.269$ com os dados da amostra Union2.

Os resultados obtidos, dependem fortemente dos *priors* escolhidos. Se fazemos o análise χ_{min}^2 , para todos os parâmetros livres, não obtemos muita informação que permitem-nos ter uma preferência para os parâmetros.

3.5 Análise χ^2_{min} para os dados das amostras Constitution e Union2

Nesta seção, nós temos em conta todos os parâmetros livres dos casos com interação e sem interação Ω_{m0} , ω_0 e ω_1 .

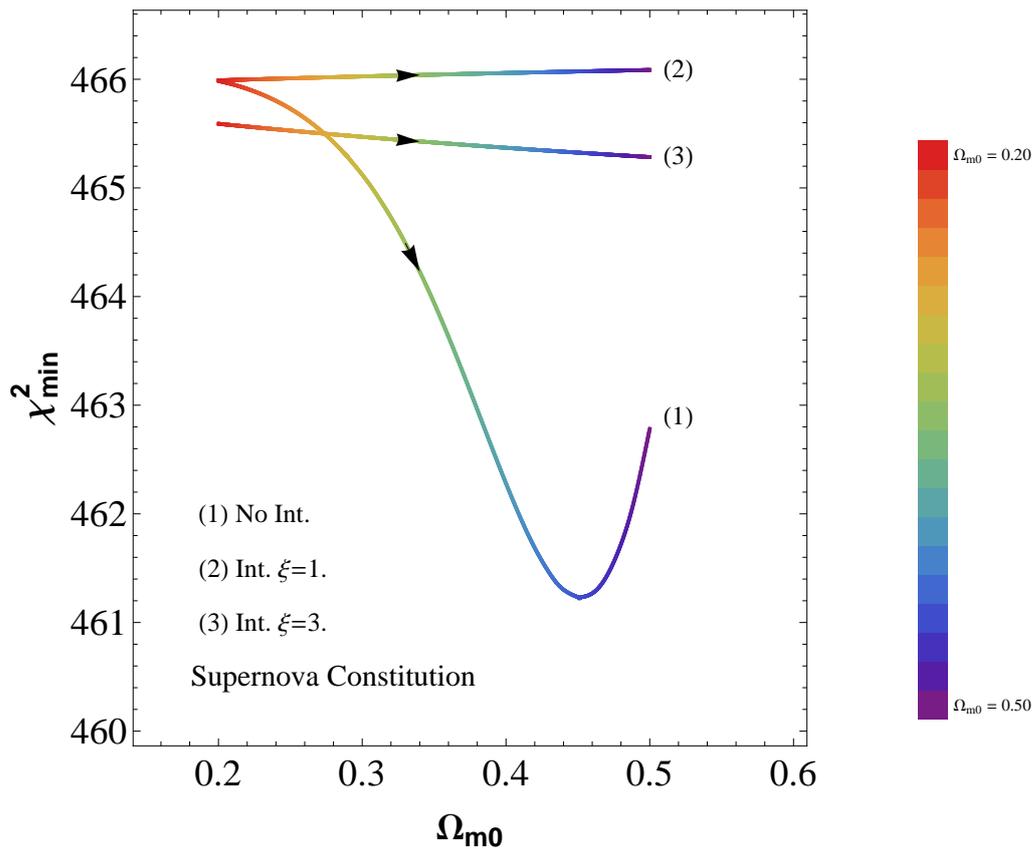


Figura 3.13: Análise χ^2_{min} para os dados da amostra Constitution.

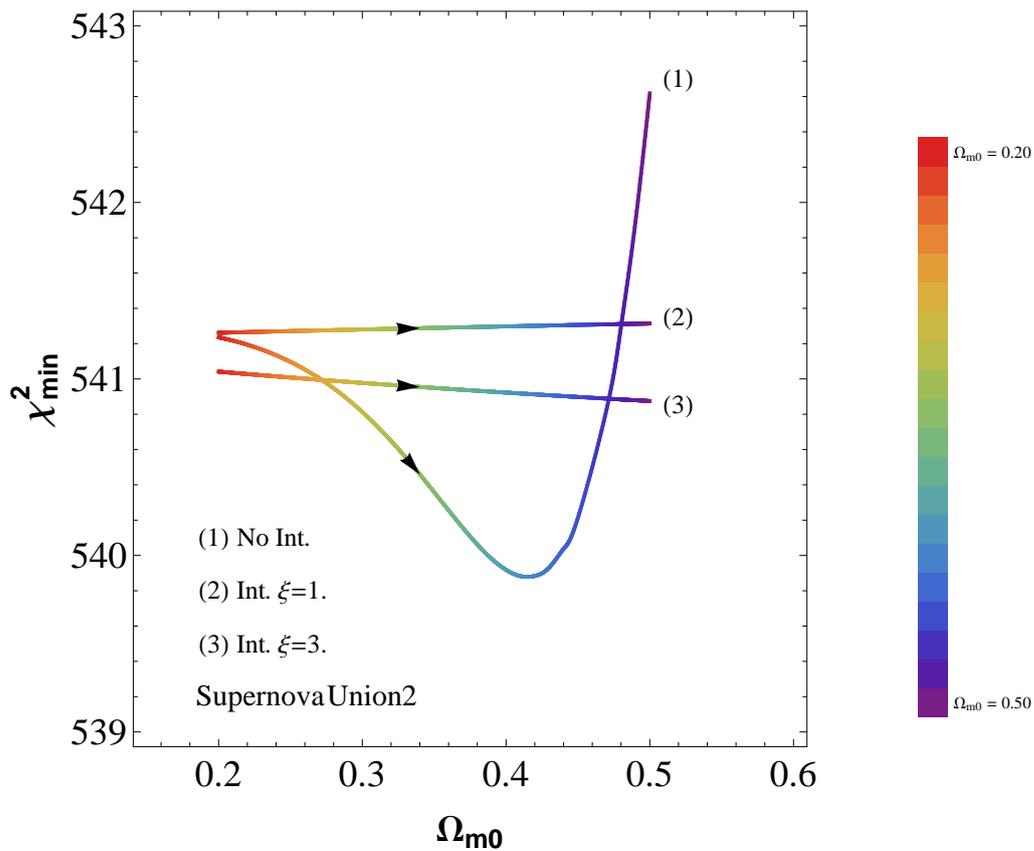


Figura 3.14: Análise χ^2_{min} para os dados da amostra Union2.

Das figuras (Figura 2.8, Figura 2.9) podemos apreciar que em (2) $Int.\xi = 1$ e (3) $Int.\xi = 3$, não temos suficiente informação do χ^2_{min} , caso contrario ocorre no caso sem interação (1), o qual tem valores encontrados [21][30].

3.6 Análise combinada SNIa(Supernova), BAO, CMB

Nesta seção, temos em conta a análise combinada, que é estudado no apêndice C, como uma maneira de estudar o comportamento dos resultados e como mudam quando acrescentamos a outros análises atuais, permitindo ver qual é o melhor modelo desde o ponto de análise do **AIC** e **BIC**.

3.6.1 Λ CDM

Observation	χ_{min}^2	Ω_{m0}	q_0
SNIa	465.513	0.289	-0.566
SNIa+BAO	465.731	0.282	-0.577
SNIa+CMB	466.179	0.278	-0.583
SNIa+BAO+CMB	466.202	0.276	-0.585

Tabela 3.3: Caso Λ CDM. Resultados obtidos do análise combinada (Constitution / Constitution + BAO / Constitution + CMB / Constitution + BAO + CMB).

Observation	χ_{min}^2	Ω_{m0}	q_0
SNIa	541.012	0.269	-0.596
SNIa+BAO	541.029	0.271	-0.593
SNIa+CMB	541.091	0.266	-0.601
SNIa+BAO+CMB	541.156	0.268	-0.598

Tabela 3.4: Caso Λ CDM. Resultados obtidos do análise combinada (Union2 / Union2 + BAO / Union2 + CMB / Union2 + BAO + CMB).

3.6.2 Caso sem interação, parametrização CPL

Observation	χ_{min}^2	Ω_{m0}	ω_0	ω_1	q_0
SNIa	461.231	0.452	-0.221	-11.227	0.318
(Prior $\Omega_{m0} = 0.289$)	465.297	0.289	-0.908	-0.619	-0.468
SNIa+BAO	465.425	0.281	-0.905	-0.497	-0.475
SNIa+CMB	465.557	0.270	-0.935	-0.119	-0.524
SNIa+BAO+CMB	465.606	0.274	-0.965	0.015	-0.550

Tabela 3.5: Caso No Int.. Resultados obtidos do análise combinada (Constitution / Constitution + BAO / Constitution + CMB / Constitution + BAO + CMB).

Observation	χ_{min}^2	Ω_{m0}	ω_0	ω_1	q_0
SN Ia	539.878	0.415	-0.886	-5.108	-0.278
(Prior $\Omega_{m0} = 0.269$)	541.009	0.269	-1.007	0.030	-0.604
SN Ia+BAO	540.988	0.274	-1.007	-0.039	-0.598
SN Ia+CMB	541.028	0.266	-1.010	0.103	-0.612
SN Ia+BAO+CMB	541.070	0.269	-1.030	0.187	-0.630

Tabela 3.6: Caso No Int.. Resultados obtidos do análise combinada (Union2 / Union2 + BAO / Union2 + CMB / Union2 + BAO + CMB).

3.6.3 Caso interação $\xi = 1$, parametrização CPL

Observation	χ_{min}^2	Ω_{m0}	ω_0	ω_1	q_0
SN Ia	—	—	—	—	—
(Prior $\Omega_{m0} = 0.289$)	466.022	0.289	-1.054	1.167	-0.624
SN Ia+BAO	466.018	0.276	-1.035	1.159	-0.624
SN Ia+CMB	466.015	0.266	-1.018	1.135	-0.621
SN Ia+BAO+CMB	466.020	0.275	-1.039	1.191	-0.630

Tabela 3.7: Caso Int. $\xi = 1$. Resultados obtidos do análise combinada (Constitution / Constitution + BAO / Constitution + CMB / Constitution + BAO + CMB).

Observation	χ_{min}^2	Ω_{m0}	ω_0	ω_1	q_0
SN Ia	—	—	—	—	—
(Prior $\Omega_{m0} = 0.269$)	541.275	0.269	-1.063	1.171	-0.665
SN Ia+BAO	541.275	0.271	-1.066	1.173	-0.665
SN Ia+CMB	541.272	0.252	-1.037	1.153	-0.664
SN Ia+BAO+CMB	541.300	0.270	-1.081	1.269	-0.683

Tabela 3.8: Caso Int. $\xi = 1$. Resultados obtidos do análise combinada (Union2 / Union2 + BAO / Union2 + CMB / Union2 + BAO + CMB).

3.6.4 Caso interação $\xi = 3$, parametrização CPL

Observation	χ_{min}^2	Ω_{m0}	ω_0	ω_1	q_0
SN Ia	—	—	—	—	—
(Prior $\Omega_{m0} = 0.289$)	465.482	0.289	-0.971	-0.187	-0.345
SN Ia+BAO	465.495	0.277	-0.958	-0.126	-0.414
SN Ia+CMB	465.497	0.277	-0.961	-0.093	-0.451
SN Ia+BAO+CMB	465.497	0.277	-0.963	-0.088	-0.457

Tabela 3.9: Caso Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos da análise combinada (Constitution / Constitution + BAO / Constitution + CMB / Constitution + BAO + CMB).

Observation	χ_{min}^2	Ω_{m0}	ω_0	ω_1	q_0
SN Ia	—	—	—	—	—
(Prior $\Omega_{m0} = 0.269$)	540.996	0.269	-1.017	0.105	-0.717
SN Ia+BAO	540.994	0.272	-1.020	0.083	-0.694
SN Ia+CMB	540.994	0.272	-1.022	0.101	-0.715
SN Ia+BAO+CMB	540.997	0.272	-1.018	0.092	-0.702

Tabela 3.10: Caso Int. $\xi = 1$. Resultados obtidos do análise combinada (Union2 / Union2 + BAO / Union2 + CMB / Union2 + BAO + CMB).

3.7 Resultados finais obtidos

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos, do análise combinada, aplicamos os critérios de seleção estudados no Apêndice A, ΔAIC e ΔBIC , então mostramos como os resultados finais obtidos da interação atual [37].

Model	Λ CDM	No Int.	Int. $\xi = 1$	Int. $\xi = 3$
Best fit	$\Omega_{m0} = 0.276$	$\Omega_{m0} = 0.274$ $\omega_0 = -0.965$ $\omega_1 = 0.015$	$\Omega_{m0} = 0.275$ $\omega_0 = -1.039$ $\omega_1 = 1.191$	$\Omega_{m0} = 0.277$ $\omega_0 = -0.963$ $\omega_1 = -0.088$
$q(z = 0)$	$q_0 = -0.585$	$q_0 = -0.550$	$q_0 = -0.630$	$q_0 = -0.457$
χ_{min}^2	466.202	465.606	466.020	465.497
k	1	3	3	3
ΔBIC	0	11.372	11.786	11.263
ΔAIC	0	3.404	3.818	3.295

Tabela 3.11: Caso Λ CDM, No Int., Int. $\xi = 1$, Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos da análise combinada (Constitution + BAO + CMB).

Model	Λ CDM	No Int.	Int. $\xi = 1$	Int. $\xi = 3$
Best fit	$\Omega_{m0} = 0.268$	$\Omega_{m0} = 0.269$	$\Omega_{m0} = 0.270$	$\Omega_{m0} = 0.272$
		$\omega_0 = -1.030$	$\omega_0 = -1.081$	$\omega_0 = -1.018$
		$\omega_1 = 0.187$	$\omega_1 = 1.269$	$\omega_1 = 0.092$
$q(z=0)$	$q_0 = -0.598$	$q_0 = -0.630$	$q_0 = -0.683$	$q_0 = -0.702$
χ^2_{min}	541.156	541.070	541.300	540.997
k	1	3	3	3
Δ BIC	0	12.559	12.789	12.486
Δ AIC	0	3.914	4.144	3.841

Tabela 3.12: Caso Λ CDM, No Int., Int. $\xi = 1$, Int. $\xi = 3$. Resultados obtidos da análise combinada (Union2 + BAO + CMB).

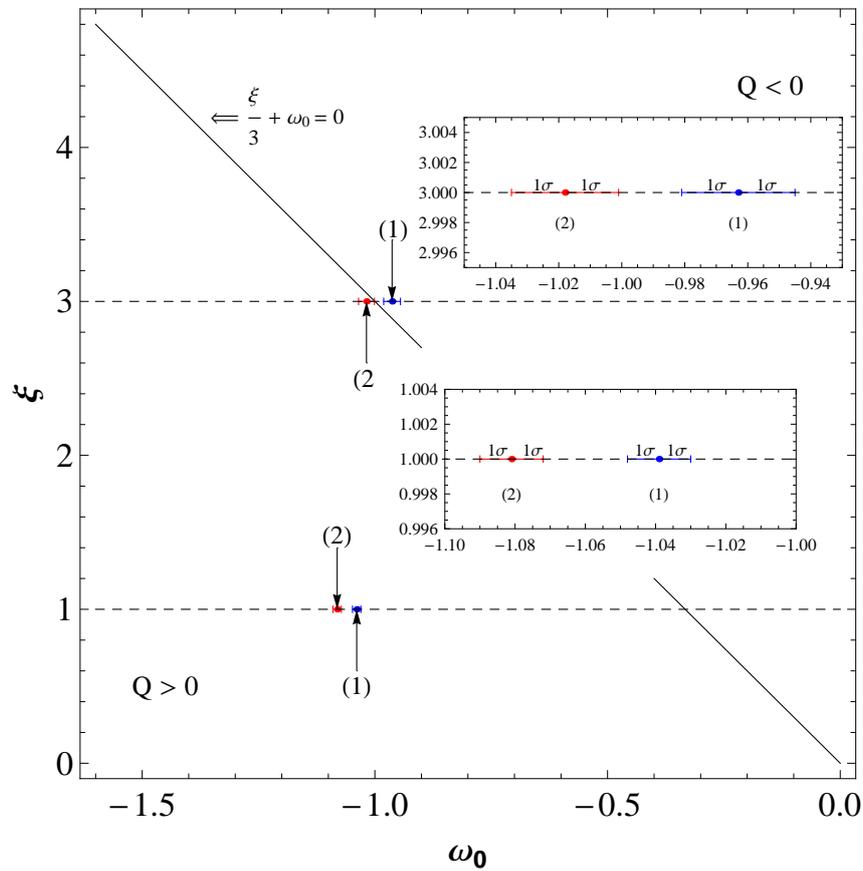


Figura 3.15: Comportamento da interação atual, onde (1)Constitution+BAO+CMB e (2)Union2+BAO+CMB

Capítulo 4

Conclusões

Modelos cosmológicos com interação entre matéria e energia escuras resultam em uma dinâmica mais rica que modelos sem interação. A introdução de modelos de interação é em grande parte motivada pela possibilidade de abordar o problema da coincidência. Neste trabalho nós investigamos uma classe de interações que resultam num comportamento tipo lei de potência $\rho_x \propto \rho_m a^\xi$, para a razão entre as densidades da matéria escura e da energia escura. Para a equação de estado $\omega = -1$ e para $\xi = 3$ recuperamos o modelo Λ CDM como um caso particular sem interação. Admitindo uma equação de estado variável da energia escura na base da parametrização CPL, nós encontramos soluções analíticas da dinâmica cosmológica para os casos $\xi = 1$ e $\xi = 3$. O primeiro caso é de interesse porque é um candidato para aliviar o problema de coincidência. O segundo caso, como tem o mesmo ξ como o modelo Λ CDM, serve primeiramente para estudar a influência da variabilidade temporal da equação do estado na dinâmica cósmica. Na base de uma análise estatística Bayesiana testamos a dinâmica resultante em relação aos dados observacionais das amostras de supernovas tipo Ia Constitution e Union2. Incluímos também informações de BAO e dados de deslocamento do primeiro pico da CMB e comparamos os modelos interagidos entre si e com um modelo sem interação. Encontramos que todos os modelos alternativos tem valores de χ_{min}^2 menor do que o valor correspondente do modelo Λ CDM. Mas aplicando os critérios de seleção de modelos AIC e BIC que penalizam a introdução de novos parâmetros, o modelo Λ CDM sai como vencedor da competição.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* 517, 565, 1999. 1, 62
- [2] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* 116, 1009, 1998. 1, 62
- [3] N. Dalal, et al., *Phys. Rev. Lett.*, 87, 141302, 2001. 2, 31, 32, 34, 37, 41
- [4] E.A Hubble, relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae.,*Proc. Nat. Acad. Sci* 15,168. 1929. 4
- [5] A. Guth, *O Universo Inflacionario*, 1997. 4, 7
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* Wiley, 1972. 4
- [7] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, 2003. 4
- [8] R. C. Tolman, *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, 1987. 5
- [9] J. Foster and J.D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*, Second Edition, 1998. 5
- [10] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* 75, 559, 2003. 15
- [11] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D*15, 1753, 2006. 15
- [12] M. Tegmark et. al., *Phys. Rev. D*69, 103501, 2004. 17
- [13] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Benjamin Cummings, 2003. 18
- [14] E. Komatsu, et al *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 180 330, 2009. 19
- [15] P. Nana, Yungui Gong, Y. Chen, Zong-Hong Zhu, *Class. Quantum Grav.* 27, 155015, 2010. 19
- [16] E. V. Linder, *Phys. Rev. D* 68, 083503, 2003. 24
- [17] M. Chevallier and D. Polarski, *Int. J. Mod. Phys. D* 10, 213, 2001. 24

- [18] W. Zimdahl. and D. Pavón., Gen.Rel.Grav. 35, 413-422, 2003. [31](#), [37](#), [38](#), [41](#)
- [19] Y. Chen., Zong-Hong Zhu., J. S. Alcaniz. and Yungui Gong., Astrophys.J. 711: 439-444 , 2010. [31](#), [32](#), [34](#), [37](#), [41](#)
- [20] D. Pavón, Bin Wang, Gen. Rel. Grav. 41, 1, 2009. [32](#)
- [21] Hao Wei, Phys.Lett.B691:173-182, 2010. [34](#), [49](#)
- [22] L. Verde, Lect. Notes Phys. 800, 174, 2010. [57](#)
- [23] P. Gregory, Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica Support, Cambridge University Press, 2010. [59](#)
- [24] W. H. Press *et al.*, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 2007. [59](#)
- [25] M. Hicken *et al.*, Astrophys. J. 700, 331, 2009. [63](#)
- [26] M. Hicken *et al.*, Astrophys. J. 700, 1097, 2009. [63](#)
- [27] R. Amanullah *et al.*, arXiv: astro-ph/1004.1711, 2010. [63](#)
- [28] M. Kowalski *et al.*, Astrophys. J. 686, 749, 2008. [63](#)
- [29] M. Szydlowski and A. Kurek, arXiv: astro-ph/0801.0638, 2008. [60](#), [61](#)
- [30] Hao Wei, JCAP 1104:022, 2011. [49](#)
- [31] D.J. Eisenstein et al. [DSS Collaboration], Astrophys. J. 633, 560, 2005. [65](#)
- [32] S. Nesseris and L. Perivolarapoulos, JCAP01, 2007. [65](#)
- [33] W.J. Percival et al., Mon. Not. R. Astron. Soc. 401, 2148, 2010. [65](#)
- [34] Y. Wang and P. Mukherjee, Astrophys. J. 650, 1, 2006. [66](#)
- [35] J.R. Bond, G. Efstathiou, and M. Tegmark, Mon. Not. R. Astron. Soc. 291, L33, 1997. [66](#)
- [36] E. Komatsu et al., Astrophys. J. Suppl. 192, 18, 2011. [66](#)
- [37] David R. Castro, Hermano Velten and Winfried Zimdahl, arXiv:1201.085, 2012. [52](#)

Apêndice A

Análise Estatística

Nas últimas décadas a aquisição de grandes conjuntos de dados do Universo provocou uma forte transição na Cosmologia: ela deixa de ser uma ciência faminta por dados, para ser uma ciência dirigida pelos dados, sendo necessário o desenvolvimento de ferramentas estatísticas cada vez mais sofisticadas [22]. Vale ressaltar que a Cosmologia está intrinsecamente relacionada com a Estatística, de tal forma que teorias de origem e evolução do Universo não irão prever que uma determinada galáxia irá ser formada em um determinado ponto no espaço tempo. No âmbito da Cosmologia Observacional, temos os dados e desejamos tratá-los de alguma maneira, sendo os problemas da análise de dados geralmente *problemas inversos*, que podemos classificar como:

- Teste de hipótese;
- Estimativa de parâmetros;
- Seleção de modelos.

Em relação ao primeiro tipo, podemos perguntar se as observações de estruturas em larga escala são consistentes com a hipótese de que o Universo é espacialmente plano. Já no segundo tipo, queremos saber, por exemplo, no modelo de Big Bang, qual é o valor do parâmetro de densidade atual, ou qual é o valor da constante de Hubble.

É interessante destacar que, a rigor, na estimativa de parâmetros, podemos entender que cada conjunto de parâmetros determina um modelo. Assim, ao estimar os parâmetros que melhor ajustam uma *classe de modelos*, já estaríamos realizando uma seleção de modelos. O último item estará mais relacionado a diferentes classes de modelos, que não sejam distintos apenas pelos valores de seus parâmetros, mas pelas hipóteses tomadas na construção teórica das mesmas, podendo, inclusive, ter diferentes parâmetros livres, e em quantidades diversas.

Usaremos, no estudo aqui apresentado, a estimativa de parâmetros e a seleção de modelos, sendo que o teste de hipótese só será realizado via um determinado modelo. E já que o trata-

mento estatístico está em pauta, façamos uma revisão do aparato estatístico utilizado.

Um procedimento de ajuste deve fornecer: (i) parâmetros, (ii) estimativa de erros nos parâmetros, e (iii) uma medida estatística da qualidade do ajuste. Quando o terceiro item sugere que é improvável que o modelo se ajuste ao dados, os itens (i) e (ii) provavelmente tornam-se inúteis.

O principal método estatístico utilizado foi o ajuste de χ^2 . Vamos discutir as principais suposições que estão por trás deste método.

Suponha que estamos ajustando N pontos de dados (x_i, y_i) $i = 1, \dots, N$, a um modelo que possui M parâmetros ajustáveis $a_j, j = 1, \dots, M$. O modelo prevê uma relação funcional entre as variáveis dependente e independente medidas,

$$y(x) = y(x; a_1, \dots, a_M), \quad (\text{A.1})$$

onde a dependência nos parâmetros é indicada explicitamente no lado direito. A questão de encontrar o conjunto de parâmetros a_i que melhor ajusta o modelo $y(x)$ ao conjunto de dados (x_i, x_j) leva ao assunto de estimadores de máxima verossimilhança.

Suponha que cada dado y_i possui um erro de medida que é independentemente aleatório e distribuído normalmente (segue uma gaussiana) em torno do modelo "real" $y(x)$ e que cada ponto possui um desvio padrão σ_i . Então, a probabilidade do conjunto de dados é o produto das probabilidades de cada ponto,

$$P \propto \prod_{i=1}^N \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \right] \Delta y \right\}, \quad (\text{A.2})$$

onde Δy foi incluído para indicar uma pequena variação em torno dos valores possíveis e contínuos y_i . Maximizar (A.2) é equivalente a maximizar seu logaritmo, ou minimizar seu logaritmo negativo, que é

$$\left[\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - y(x_i))^2}{2\sigma_i^2} \right] - N \log \Delta y. \quad (\text{A.3})$$

Como N e Δy são constantes, minimizar essa equação é equivalente a minimizar:

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i; a_1, \dots, a_M)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (\text{A.4})$$

Note que $\chi^2 = -2 \ln(A\mathcal{L})$, onde A é uma constante qualquer e \mathcal{L} é a verossimilhança, dada por (A.2). Portanto, basta minimizar a quantidade (A.4) para se encontrar os melhores ajustes dos parâmetros, \bar{a}_i . Uma regra geral, para verificar a qualidade do ajuste, é que o valor mínimo do χ^2 para um ajuste moderadamente bom deve ser $\chi^2 \approx \nu$, onde $\nu = N - M$ é o número de

grus de liberdade. Mais precisa é a afirmação de que a estatística de χ^2 possui média ν e desvio padrão $\sqrt{2\nu}$, e, assintoticamente para altos ν , torna-se normalmente distribuída.

O método utilizado para minimizar o χ^2 geralmente é o método de busca na grade dos parâmetros, onde se considera um intervalo razoável para os parâmetros, no qual se espera que o mínimo deve estar, e dentro dos limites físicos dos parâmetros.

Para estimar os erros dos parâmetros do modelo ajustado, uma boa aproximação é o uso de níveis de χ^2 como limites de confiança. Pode-se mostrar que as curvas de nível de χ^2 no espaço de parâmetros correspondem a níveis de probabilidade, ou níveis de confiança e, para uma função $y(x; a_i)$ linear nos parâmetros a_i , eles correspondem a elipses [23][24]. Assim, cada nível $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{min}^2$ corresponde a uma probabilidade de os parâmetros estarem dentro da região delimitada pelo nível. Pode-se mostrar, também para uma função linear nos parâmetros, que essa probabilidade p depende do número de graus de liberdade ν conforme mostrado na Tabela A.1 [23][24].

Nossa intenção é plotar os níveis de confiança de uma determinada quantidade de parâmetros livres, enquanto fixamos outros parâmetros e os dados, o número de graus de liberdade ν é dado pelo número de parâmetros cujos níveis de confiança queremos plotar.

p	ν					
	1	2	3	4	5	6
68.3%(1 σ)	1.00	2.30	3.53	4.72	5.89	7.04
90%	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.6
95.4%(2 σ)	4.00	6.17	8.02	9.70	11.3	12.8
99%	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	16.8
99.73%(3 σ)	9.00	11.8	14.2	16.3	18.2	20.1
99.99%	15.1	18.4	21.1	23.5	25.7	27.8

Tabela A.1: - $\Delta\chi^2$ como função do nível de confiança e graus de liberdade

Método h^*

Há casos onde temos, por exemplo, 3 parâmetros livres e queremos estudar a distribuição de probabilidades de apenas 2, sem nos preocupamos com o terceiro, reduzindo o tempo computacional. Um caso típico na cosmologia, é a marginalização sobre o parâmetro de Hubble quando estudamos dados de supernovas, com o argumento de que este parâmetro é muito bem determinado por métodos independentes do modelo, e com a vantagem de haver uma expressão

analítica para esta marginalização. Neste caso, define-se uma nova função

$$\chi^2 = A - 2MB + M^2C, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$A = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i; a_1, \dots, a_M)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$B = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i; a_1, \dots, a_M)]}{\sigma_i^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.5), tem um mínimo em $M = B/C$, obtendo a seguinte função

$$\tilde{\chi}^2 = A - \frac{B^2}{C}, \quad (\text{A.9})$$

onde M é uma função que depende do parâmetro h , na equação (A.9), podemos ver que ele não depende de h , é independente do parâmetro de Hubble.

Critérios de Seleção de Modelos

Considerando a análise aqui apresentada, notamos que modelos mais complexos (que tenham mais parâmetros livres) vão naturalmente ajustar melhor os dados. Como, então, fazer uma classificação dos modelos sem penalizar aqueles que tenham menos parâmetros, e descontando a flexibilidade de modelos mais complexos? Caso dois modelos ajustem os dados igualmente bem, podemos invocar a famosa "navalha de Occam", segundo a qual escolheríamos o modelo mais simples. Neste aspecto, a navalha de Occam apontará para a falta de necessidade de determinados parâmetros.

Na teoria da informação não há modelos verdadeiros existe a realidade, que pode ser aproximada por modelos, e o melhor modelo será aquele que melhor se aproxima da realidade [29]. A informação perdida quando a verdade (o fenômeno real) é aproximada pelo modelo é medida pela chamada informação Kullback-Leibler (KL), de forma que o melhor ajuste é aquele que minimiza esta quantidade. É impossível computar a informação KL porque ela depende da verdade, que é desconhecida. Akaike encontrou uma aproximação desta, conhecida como critério de informação Akaike (AIC), e expressado por

$$AIC = -2 \ln \mathcal{L}^* + 2M, \quad (\text{A.10})$$

onde \mathcal{L}^* refere-se á máxima likelihood, M é o número de parâmetros livres, $-2 \ln \mathcal{L}^* = \chi_{min}^2$. Dentre diversas classes de modelos, aquela que apresentar menos AIC será adotada como referência para categoriã das demais. Modelos com $0 \leq \Delta_{AIC} \leq 2$ têm evidência substanciais, aqueles com $4 \leq \Delta_{AIC} \leq 7$ têm consideravelmente suporte, enquanto que aqueles com $\Delta_{AIC} > 10$ não têm qualquer evidência em relação ao melhor modelo [29].

No cenário bayesiano o melhor modelo é aquele com maior probabilidade de acordo com os dados. Devido a dificuldades de cálculo, Schwarz propôs uma quantidade aproximada conhecida como critério de informação bayesiana BIC , dada por

$$BIC = -2 \ln \mathcal{L}^* + 2M \ln N. \quad (A.11)$$

onde \mathcal{L}^* refere-se á máxima likelihood, M é o número de parâmetros livres e N é o número de dados. Tendo em conta que o melhor modelo é aquele que faz o mais pequeno possível o BIC . Como no caso AIC , faz a diferença e obtemos o ΔBIC , os que cumprem a seguinte regra de seleção: $0 \leq \Delta_{BIC} \leq 2$ fraca evidência em favor do melhor modelo, $2 \leq \Delta_{BIC} \leq 6$ é positiva, $6 \leq \Delta_{BIC} \leq 10$ como forte evidência, e $\Delta_{BIC} > 10$ como evidência muito forte em favor do melhor modelo [29].

Apêndice B

Supernovas do tipo Ia

Nos últimos anos os cosmologistas têm considerado uma classe específica de supernovas como velas-padrão: as *supernovas do tipo Ia* [1][2]. Elas acontecem em sistemas binários de estrelas, onde adquire matéria de sua companheira por acreção. A anã branca é uma estrela no estágio em que sua gravidade é contrabalanceada pela pressão de degenerescência dos elétrons. Caso ela adquira uma quantidade de massa com a qual ultrapasse um determinado limite de estabilidade, o *limite de Chandrasekhar*, ela colapsa e a explosão é então acionada. A uniformidade de massa e da composição química da estrela progenitora deste tipo de supernova justifica seu uso como vela-padrão.

O *limite de Chandrasekhar* é resultado de um modelo para anãs brancas. Ele é muito aceito pois não foi observada qualquer anã branca que tenha massa superior a este limite. Este limite é da ordem de 1.4 massas solares, mas varia de acordo com a composição exata da estrela. Vale ressaltar que segundo este modelo, a massa de *Chandrasekhar* é proporcional a $G^{3/2}$, onde G é a constante universal da Gravitação.

As supernovas do tipo Ia não deixam condensado estelar remanescente. Seu espectro é caracterizado por não haver linhas do hidrogênio, e apresentar as do silício. Após algumas correções, verifica-se que as curvas de luz destas supernovas têm comportamento muito parecido. Assim, o pico de luminosidade é utilizado para calibrar a curvas e obter a magnitude absoluta.

Enfim possuímos uma classe de objetos astronômicos que emitem grande quantidade de radiação e, dessa forma, podem dar informações de pontos muito distantes de nós, esses objetos possuem um comportamento padrão e conhecemos sua magnitude absoluta, e, assim, medindo a magnitude aparentem obtemos sua distância de luminosidade. Através também da radiação emitida é medido o redshift, que é variável independente da magnitude. Com esses dados podemos utilizar o teste do χ^2 apresentado no Apêndice A.

Constitution

O primer pacote de dados de supernovas utilizado foi o *Constitution*. Ele tem o seguintes dados:

- 90 supernovas do CFA3, pacote do CfA *Supernova Group* [25].
- 250 do Union.
- 57 objetos próximos.

A relação de dados foi extraída de [26], seguindo a orientação de utilizar a tabela do ajuste das supernovas com filtro SALT.

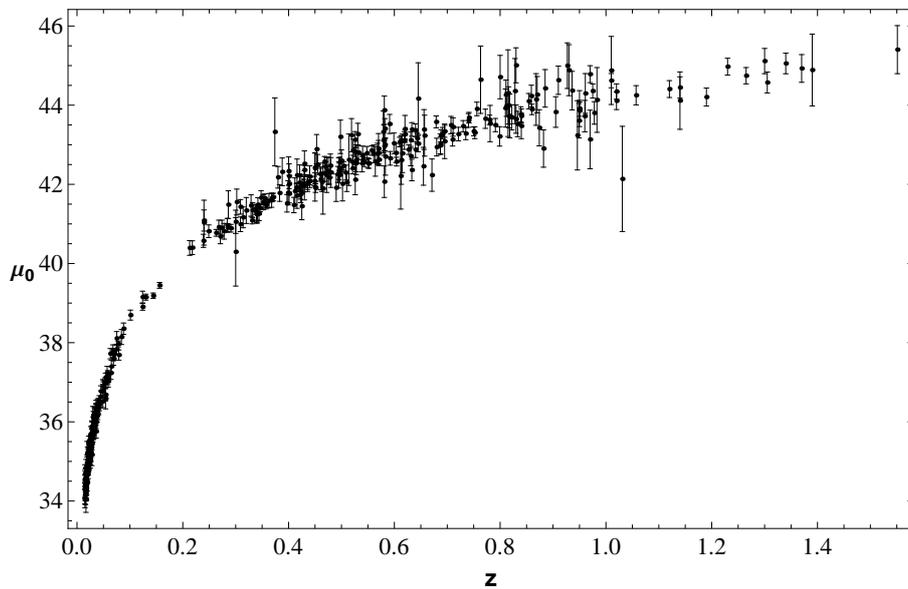


Figura B.1: Dados da amostra Constitution

Union2

No início do ano de 2010 foi publicado um conjunto de dados de *Supernova Cosmology Project* intitulado *Union2 Compilation* [27]. Ele é uma atualização do *Union* [28], com 719 supernovas de 17 conjuntos. Destas, 557 passam pelos "cortes de utilidade". Todas as supernovas foram ajustadas usando um único filtro da curva de luz, chamado SALT-II, foram analisadas de maneira uniforme e com um melhor manuseio de erros sistemáticos. Segundo a equipe, todas as análises foram feitas de "maneira cega", ou seja, sem utilizar modelo cosmológico.

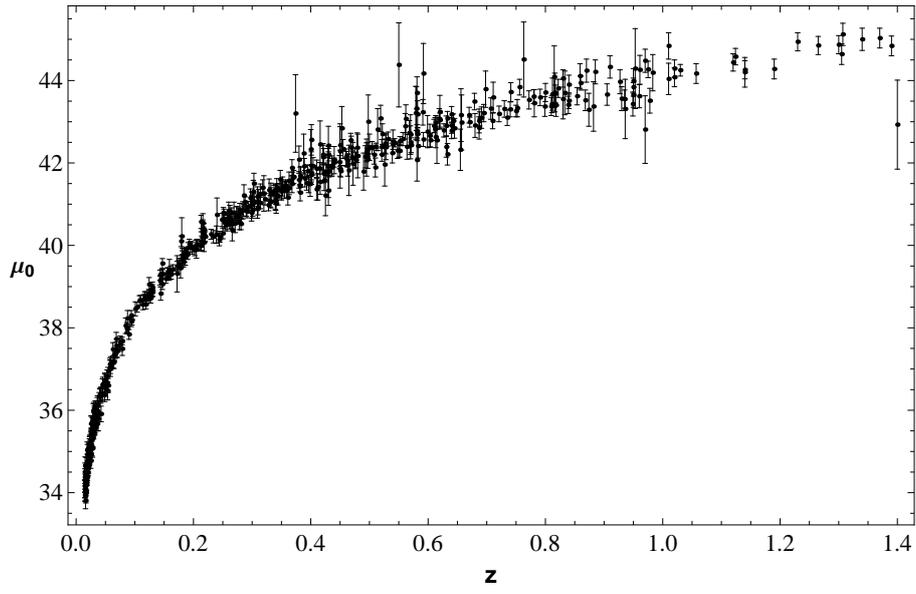


Figura B.2: Dados da amostra Union2

Apêndice C

Análise Combinada

Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO)

As flutuações associadas a altos multipolos, ou seja, pequenas aberturas angulares, têm origem no fato do fluido fóton-bárion estar distribuído num cenário onde a matéria escura já está desacoplada e apresenta flutuações de densidade, que se refletem em flutuações no potencial gravitacional. À medida em que o fluido cai em um poço de potencial, sua pressão aumenta, o que irá provocar sua posterior expansão. Expandindo, a pressão cai e a gravidade volta a reger, comprimindo o fluido. Isto dá origem às oscilações acústicas no fluido.

No caso de poços de potencial em escalas maiores que a distância de Hubble na época do último espalhamento, o fluido não teve tempo suficiente para oscilar. Assim, caso ele estivesse subindo um poço de potencial no instante do último espalhamento, ele estaria perdendo energia, apresentando redshift.

Oscilações acústicas na recombinação da origem a um pico em função de correlação de larga escala em galáxias vermelhas luminosas [31][32][33], Este pico pode ser relacionado com uma escala de distância

$$D_v(z_{BAO}) = \left[\frac{z_{BAO}}{H(z_{BAO})} \left(\int_0^{z_{BAO}} \frac{dz}{H(z)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{C.1})$$

caracterizado por um parâmetro adimensional

$$A(z_{BAO}; a_1 \dots a_M) = \sqrt{\Omega_{m0}} E(z_{BAO})^{-1/3} \left[\frac{1}{z_{BAO}} \int_0^{z_{BAO}} \frac{dz}{E(z; a_1 \dots a_M)} \right]^{2/3}, \quad (\text{C.2})$$

com $z_{BAO} = 0.35$ e $E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0}$. O valor observacional é $A = 0.469 \pm 0.017$ [31]. Para χ_{BAO}^2 temos

$$\chi_{BAO}^2(a_1 \dots a_M) = \frac{(A(z_{BAO}; a_1 \dots a_M) - 0.469)^2}{0.017^2}. \quad (\text{C.3})$$

Radiação Cós mica de Fundo (CMB)

O parâmetro de troca CMB mede o deslocamento do primer pico acústico do espectro de anisotropia CMB com respeito á posição que este pico teria em relação ao universo de referência Einstein-de Sitter. Para um universo que é dado por [34][35]

$$R(z_{ls}; a_1 \dots a_M) = \sqrt{\Omega_m} \int_0^{z_{ls}} \frac{dz}{E(z; a_1 \dots a_M)} \quad (\text{C.4})$$

com o último redshift de espalhamento $z_{ls} = 1090$. O 7-years WMAP resulta do seguinte parâmetro $R = 1.725 \pm 0.018$ [36]. Para o χ_{CMB}^2 valor temos

$$\chi_{CMB}^2 = \frac{(R - 1.725)^2}{0.018^2}. \quad (\text{C.5})$$

Para nosso análise combinamos χ^2 dos 3 testes estudados anteriormente (A.9), (C.3) e (C.5) o qual vai ser minimizado χ_{total}^2

$$\chi_{total}^2 = \tilde{\chi}_{SNIa}^2 + \chi_{BAO}^2 + \chi_{CMB}^2. \quad (\text{C.6})$$