UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RUAN GIACOMINI COUTO

QUANTIZAÇÃO DE LAÇOS DO MODELO BF ACOPLADO A MATÉRIA TOPOLÓGICA EM 1+1 DIMENSÕES

Vitória
2012

RUAN GIACOMINI COUTO

QUANTIZAÇÃO DE LAÇOS DO MODELO BF ACOPLADO A MATÉRIA TOPOLÓGICA EM 1+1 DIMENSÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Univesidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis

Vitória

2012

“QUANTIZAÇÃO DE LAÇOS DO MODELO BF ACOPLADO A MATÉRIA TOPOLÓGICA EM 1+1 DIMENSÕES”

RUAN GIACOMINI COUTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Univesidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

COMISSÃO EXAMINADORA

———————————————————-

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis - UFES

———————————————————-

Prof. Dr. Olivier Piguet - UFES

———————————————————-

Prof. Dr. Fernando Pablo Devecchi - UFPR

———————————————————-

Prof. Dr. José André Lourenço - UFES/DCN

Agradecimentos

Agradeço à minha família por todo apoio e educação me deram, estou onde estou hoje graças à eles.

Ao meu orientador Clisthenis Constantinidis pela disposição, paciência, encorajamento e apoio ao longo de todo o trabalho, especialmente nos momentos mais difíceis.

Ao professor Olivier Piguet por toda sua colaboração, suporte, gentileza e grande participação no meu aprendizado.

Ao professor Ricardo Coelho de Berrêdo pelas dicas de LaTeX e ensinamentos de mecânica quântica.

À minha noiva Carolina Martins, por todo o carinho, apoio emocional e paciência durante o mestrado, e por ser parte da minha vida.

Aos colegas de dentro e fora da UFES, por inúmeras discussões que contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho: Rodrigo Martins, Diego Mendonça, Zui Oporto, Luis Ivan Morales, Rafael Guolo e Tiago Girardi.

À CAPES pelo financiamento deste trabalho.

"If you think you understand quantum mechanics, you don't understand quantum mechanics."(Richard Feynman)

Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar a quantização de Laços do modelo BF acoplado com matéria topológica em 1+1 dimensões. Para tal, introduzimos os conceitos principais e aplicamos a metodologia no modelo BF puro, começando pelo formalismo hamiltoniano do modelo, quantização canônica para sistemas vinculados proposta por Dirac e quantização de Laços. Depois aplicamos a mesma metodologia para o modelo acoplado, também explorando uma propriedade de supersimetria rígida contida nele, que nos serve de guia para uma escolha de coordenadas apropriada à quantização.

Abstract

The aim of the present work is the loop quantization of the BF model coupled to topological matter in 1+1 dimensions. In order to do this, we introduce the main concepts of the pure BF model, by beginning with the hamiltonian formalism, canonical quantization for constrained systems proposed by Dirac and loop quantization methods. We then apply this methodology to the coupled model, exploiting a rigid supersymmetry contained in it, which guides us for a suitable choice of variables for the quantization.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No atual estágio a física das interações fundamentais apresenta duas teorias bem sucedidas na descrição dos fenômenos, cada uma num certo domínio, que são a Mecânica Quântica [1] e a Relatividade Geral [2],[3],[4]. A primeira obteve seu maior sucesso através da formulação da teoria quântica de campos, que é capaz de descrever fenômenos microscópicos através de interações entre a matéria e as forças fundamentais da natureza, exceto a gravidade [5]. Já a Relatividade Geral propõe uma dinâmica para o universo, e em grandes escalas é uma teoria muito bem sucedida.

A tentativa de se incluir a gravidade numa teoria quântica de campos tem sido um dos grandes desafios da física atual [6]. Na escala de Planck $L_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,6 \times 10^{-35} m$ efeitos quânticos da gravitação devem ser levados em conta, e portanto seriam importantes na descrição do universo me seus estágios iniciais.

O fato de a Relatividade Geral ser uma teoria não renormalizável conduziu a novas tentativas de construção de teorias onde a relatividade aparece como uma teoria efetiva, válida somente a grandes escalas. Este é o ponto de vista da Teoria de (Super)cordas, que prevê novas simetrias, dimensões extras, objetos estendidos, ao invés de partículas, etc. [7].

Outra abordagem que tem sido investigada é a Gravitação Quântica de Laços (LQG) [8],[9]. A linha de pensamento dessa abordagem é tratar a Relatividade Geral como uma teoria de calibre [10],[11], como o eletromagnetismo, por exemplo, introduzindo, no entanto, novos elementos. Numa teoria de calibre usual o espaço-tempo é fixo e a simetria global (de Lorentz) é ditada pelos princípios da Relatividade Especial. As interações se dão no espaço-tempo de Minkowski, portanto num fundo fixo. Mas na Relatividade Geral o campo gravitacional possui dinâmica e portanto deve interagir com os demais campos. A simetria neste caso passa a ser os difeomorfismos, que contemplam a possibilidade de se efetuar transformações de coordenadas locais que mantêm invariantes as leis da natureza [12]. Portanto a LQG pode ser vista como uma teoria que tenta reformular os princípios básicos de uma teoria quântica de campos, cujo objetivo é propor uma teoria não perturbativa e independente de uma métrica de fundo.

Ao ser colocada como uma teoria de calibre do tipo Yang-Mills os métodos de LQG podem ser aplicados a qualquer teoria invariante por difeomorfismos. Dentro desse formalismo, as excitações fundamentais são denominadas "redes de spin"(*spin networks*), suportadas por grafos fechados. Na LQG tais estruturas fornecem um quadro da geometria no nível quântico. Volumes e áreas assumem valores discretos. A grande dificuldade da teoria tem sido o tratamento dinâmico dessas estruturas, na linguagem da LQG isso se daria pela imposição do vinculo escalar. Abordagens alternativas têm sido também propostas, como o estudo das "espumas de spin"(*spin foams*).

A relação entre gravidade e teorias topológicas tem sido explorada já há algum tempo. Por exemplo, em três dimensões Witten demonstrou que a gravidade é uma teoria topológica exatamente solúvel [13]. Uma identificação entre a gravitação e teorias topológicas se dá em três dimensões, onde a gravitação é um caso especial da teoria topológica BF, que pode ser definida em qualquer dimensão. Em quatro dimensões ou em dimensões maiores essa identificação não é possível, uma vez que essas teorias diferem pela presença ou não de graus de liberdade locais. Mas a relação entre gravitação e modelos BF pode ser ainda explorada formulando-se as teorias BF suplementadas por vínculos. Este tipo de abordagem tem sido bastante explorado na linha de pesquisa de espuma de spins.

No entanto a relação entre gravitação e teoria BF é também observada em duas dimensões. Neste caso a gravitação não é descrita por uma ação de Einstein-Hilbert, mas sim pela gravitação de Jackiw-Teitelboim, que foi demonstrada ser equivalente a um modelo BF bidimensional definido num grupo de (anti)deSitter. [14],[15],[16], [17].

Uma teoria física completa deve incluir os outros campos de matéria existentes além da gravitação. Porém à medida que esses campos são incorporados na teoria, as equações de acoplamento tornam-se cada vez mais complicadas e não-lineares. Neste trabalho seguiremos um acoplamento simples de gravitação com matéria topológica [18] para verificar como as técnicas da LQG se comportam quando inserimos matéria.

No capítulo 2 fazemos uma revisão sobre o modelo BF em 2 dimensões, mostrando sua equivalência com a Relatividade Geral, e realizando seu tratamento canônico. No capítulo 3 acoplamos o modelo BF bidimensional com matéria topológica e fazemos sua análise canônica. No capítulo 4 fazemos uma análise canônica do modelo BF bidimensional supersimétrico, e mostramos sua equivalência com o BF bidimensional acoplado. No capítulo 5 realizamos a quantização de laços dos modelos BF puro e BF acoplado. Ao final incluímos apêndices para resumir as principais definições e teoremas utilizados neste trabalho.

Capítulo 2

Modelo BF em 1+1 Dimensões

Desejamos estudar um modelo de gravitação em 1+1 dimensões, uma vez que seu tratamento nesse número é muito mais simples do que no real, em 3+1 dimensões. Dessa maneira, podemos analisar os resultados obtidos nessas dimensões de modo a facilitar o desenvolvimento e interpretação dos resultados em dimensões superiores. Para maiores detalhes sobre as definições de índices, campos e geradores, veja o apêndice A.

Esse capítulo é guiado pelos resultados apresentados nos artigos do Rovelli *et al* [8] e Isler *et al* [15], e utilizamos o tratamento hamiltoniano para campos proposto por Dirac para a quantização [19].

2.1 Gravitação e Modelo BF

Uma teoria simples de gravitação em 1+1 dimensões é bem representada pelo modelo de Jackiw-Teitelboim, que inclui uma constante cosmológica k:

$$S_{JT} = \int d^2x\psi\sqrt{-g}(R - 2k), \tag{2.1}$$

que gera as equações de movimento [20]:

$$R - 2k = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\psi + kg_{\mu\nu}\psi = 0 \tag{2.3}$$

Podemos escrever esse modelo no formalismo BF baseado em grupo (A)dS, isto é, deSitter SO(1,2) ou Anti-deSitter SO(2,1), dependendo do sinal da constante cosmológica k. Os geradores infinitesimais do grupo são os de translação P_I $(I = 0, 1)$ e de *boost* de Lorentz Λ. Eles satisfazem as relações da álgebra de Lie do grupo (A)dS:

$$[P_I, P_J] = k\epsilon_{IJ}\Lambda, \quad [\Lambda, P_I] = \epsilon_I{}^J P_J \tag{2.4}$$

Reescrevemos os geradores e álgebra como:

$$\{T_i\} = \{T_0, T_1, T_2\} = \{P_0, P_1, \Lambda\} \tag{2.5}$$

$$[T_i, T_j] = f_{ij}{}^k T_k, \tag{2.6}$$

onde as constantes de estrutura não nulas são

$$f_{01}{}^2 = k, \;\; f_{12}{}^0 = \sigma, \quad f_{20}{}^1 = 1 \tag{2.7}$$

onde $\sigma = 1$ para uma teoria Riemanniana ou $\sigma = -1$ para uma teoria Lorentziana. A métrica do espaço-tempo pode ser escrita em termos dos *zweibein* $e^I(x) = e^I_\mu(x)dx^\mu$ e da métrica tangencial $\eta_{IJ} = diag(\sigma, 1)$ segundo a relação:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{IJ}e^I_\mu(x)e^J_\nu(x) \tag{2.8}$$

Sendo $\omega(x)$ a conexão de Lorentz, escrevemos finalmente nossos campos do modelo BF:

(i) Conexão A:

$$A = A^i T_i = e^i P_I + \omega\Lambda \tag{2.9}$$

(ii) Curvatura de Yang-Mills F:

$$F = dA + A \wedge A = F^i_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu T_i \tag{2.10}$$

(iii) Campo B (escalar):

$$B := \phi = \phi^i T_i = \varphi^I P_I + \psi \Lambda \tag{2.11}$$

Para levantar e baixar os índices desses campos (os índices latinos, de grupo), utilizamos a métrica de Killing:

$$k_{ij} = Tr(T_i T_j) = -\frac{\sigma}{2} f_{ik}{}^l f_{jl}{}^k, \ (k_{ij}) = \begin{pmatrix} k\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Desse modo a ação passa a ser escrita como:

$$S = \int \phi_i F^i(A) \tag{2.13}$$

2.2 A Ação BF

O modelo BF é uma teoria de campos puramente topológica, cujos campos são p-formas que se transformam sob a ação do grupo de calibre, de modo que a teoria é invariante de calibre e difeomorfismos.

A vantagem de se utilizar o modelo BF está em possuir um caráter mais geral e mais simples de se trabalhar, e pode ser posteriormente adaptado para uma teoria de gravitação escolhendo-se adequadamente o grupo. Nosso objetivo é escrever uma teoria de gravitação puramente topológica como uma teoria de calibre e determinar as grandezas que são invariantes quando se fazem as transformações de difeomorfismos. Consideraremos um grupo arbitrário para desenvolver as contas do modelo, mas para a quantização utilizaremos o grupo SU(2).

No nosso caso, em 1+1 dimensões definimos a 0-forma $B = B^i T_i$, com $B'(x) = g^{-1}(x)B(x)g(x)$. Sendo B uma 0-forma, passaremos a chamá-lo de ϕ, e suas componentes de ϕ^i, para ficar na mesma notação que os artigos de referência e também reforçar a ideia de que é um campo escalar, fazer correspondência com a notação de Schweda *et al* [18]. Construímos então a seguinte ação:

$$S_{BF}(A, \phi) = Tr \int \phi F(A) \tag{2.14}$$

Onde $F(A)$ é a curvatura de Yang-Mills da conexão A. Assim temos a invariância de calibre na ação:

$$S' = Tr \int \phi' F' = \int Tr(g^{-1}\phi g g^{-1} F g) = \int Tr(\phi F g g^{-1}) = Tr \int \phi F = S \tag{2.15}$$

Nas componentes de grupo: $\phi = \phi^i T_i$, $F = F^j T_j$. A métrica de Killing $K_{ij} = Tr(T_i T_j)$ é usada para levantar ou os abaixar índices de grupo e definir um tipo de produto escalar no espaço dos geradores. Então podemos escrever:

$$S_{BF} = \int \phi_i F^i \tag{2.16}$$

Em coordenadas:

$$S_{BF} = \int \phi_i F^i_{\mu\nu} \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \int d^2x \phi_i \epsilon^{\mu\nu} F^i_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^2x \phi_i \epsilon^{\mu\nu} (\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + [A_\mu, A_\nu]^i) \tag{2.17}$$

2.2.1 As Equações de Movimento

Dada a ação BF, utilizando o princípio variacional podemos obter as equações de movimento para os campos A e ϕ com sob variações arbitrárias δA e $\delta\phi$, que são nulas na região de borda, e produzem um extremo da ação, de modo que $\delta S = 0$.

A variação $\delta\phi$ produz $\delta S = \int \delta\phi F = 0$, implicando $F = 0$. A variação δA produz $\delta S = \int \phi \delta F = 0$, de modo que temos que obter δF em função de δA:

$$\delta F = \delta(dA + A \wedge A) = d\delta A + \delta A \wedge A + A \wedge \delta A = d\delta A + [A, \delta A] = D\delta A \tag{2.18}$$

Integrando por partes:

$$\delta S = \int \phi D \delta A = - \int D\phi \delta A \tag{2.19}$$

Resultando na equação $D\phi = 0$. Assim temos as equações de movimento:

$$F = 0 \tag{2.20}$$

$$D\phi = 0 \tag{2.21}$$

A primeira equação corresponde à condição de curvatura nula, que é preservada pela identidade de Bianchi $DF = 0$ e corresponde às equações de Jackiw-Teitelboim, como demonstrado por Isler *et al* [15]. A segunda equação tem como resultado que o campo ϕ é preservado espacialmente.

2.2.2 O Formalismo Hamiltoniano

Para quantizar o modelo, precisamos seguir o formalismo canônico de Dirac [19], começando por escrever o modelo no formalismo Hamiltoniano, e depois passar para o domínio quântico transformando nossos campos em operadores e parênteses em comutadores, preservando as relações da álgebra.

Consideraremos que nossa variedade tem topologia $S_1 \times R$, onde a reta real esta relacionada ao tempo, e o círculo S_1 corresponde a um espaço fechado periódico para a coordenada espacial x.

A ação é escrita como a integral da função Lagrangiana:

$$S = \int dt L(A, \dot{A}) \tag{2.22}$$

De modo que temos a seguinte Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \int dx \phi_i F^i_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} = \int dx \phi_i (\partial_t A^i_x - \partial_x A^i_t + f^i{}_{jk} A^j_t A^k_x) \tag{2.23}$$

Integrando por partes e permutando índices:

$$L = \int dx (\phi_i \partial_t A^i_x + A^i_t \partial_x \phi_i + f_{ij}{}^k A^i_t A^j_x \phi_k) = \int dx (\phi_i \partial_t A^i_x + A^i_t D_x \phi_i) \tag{2.24}$$

A Hamiltoniana é a transformada de Legendre da lagrangiana:

$$H(A, \Pi) = \int dx (\Pi^\mu_i \dot{A}^i_\mu) - L(A, \dot{A}), \tag{2.25}$$

onde os momentos canônicos (ou conjugados) são definidos por:

$$^{A}\Pi_i^{\mu} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_\mu^i)}, \quad ^{\phi}\Pi^i = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \phi_i)}, \tag{2.26}$$

de modo a satisfazer os parênteses Poisson não nulos:

$$\{A_\mu^i(x,t), ^A\Pi_j^\nu(y,t)\} = \delta_j^i \delta_\mu^\nu \delta(x-y) \tag{2.27}$$

$$\{\phi_i(x,t), ^\phi\Pi^j(y,t)\} = \delta_i^j \delta(x-y) \tag{2.28}$$

As equações em (2.26) devem ser invertidas para obtermos as derivadas temporais como funções dos momentos conjugados. Obtemos assim:

$$^{A}\Pi_i^x = \phi_i, \quad ^{A}\Pi_i^t = 0, \quad ^{\phi}\Pi^i = 0 \tag{2.29}$$

Note que nenhuma das equações é invertível para obtermos a derivada temporal em termos do momento. Temos, nesse caso, os chamados "vínculos primários"na terminologia de Dirac [19]:

$$v_i^x =^A \Pi_i^x - \phi_i \approx 0, \quad v_i^t =^A \Pi_i^t \approx 0, \quad v'^i =^\phi \Pi^i \approx 0, \tag{2.30}$$

onde o sinal $\approx$ representa uma igualdade fraca, no sentido em que os vínculos são nulos, mas não os parênteses de Poisson entre eles ou deles com outras grandezas. Faremos tratamentos sobre esses vínculos de modo a passar a igualdade de fraca para forte no final.

Por consistência, esperamos que esses vínculos tenham parênteses fracamente nulos entre si (isto é, proporcionais a outros vínculos, de modo que podemos considerar o resultado nulo) e que sejam preservados no tempo (isto é, a derivada temporal do vinculo, dada pelo parênteses do vínculo com a Hamiltoniana, também deve ser fracamente nula), e verificamos a seguir as condições que devem ser satisfeitas para isso.

2.2.3 O Tratamento dos Vínculos Primários

Podemos deduzir rapidamente que:

$$\{v_i^x, v_j^t\} = 0, \quad \{v_i^t, v'^j\} = 0, \quad \{v_i^x, v'^j\} = -\delta_i^j \delta(x - y) \tag{2.31}$$

Notamos que a última equação não gera novos vínculos, mas também não satisfaz a condição de ser nula ou fracamente nula. Vínculos com parênteses de Poisson nulos com todos os demais são ditos "vínculos de primeira classe", caso contrario são chamados "vínculos de segunda classe". A presença de vínculos de segunda classe significa que escolhemos mais variáveis canônicas do que de fato existem no sistema. Sua existência leva a inconsistências matemáticas na hora da quantização (quando trocamos os parênteses entre as grandezas por comutadores entre seus respectivos operadores), então nesse caso devemos redefinir os parênteses de Poisson, substituindo pelos colchetes de Dirac, que preserva as propriedades algébricas de um produto de Lie dos parênteses e elimina as variáveis extras. Para mais detalhes sobre esse processo, ver [19].

Como resultado, os parênteses em (2.31) são incorporados na definição dos colchetes, tendo como resultado o campo ϕ passando a ser o momento conjugado de A_x, de modo que temos as novas relações:

$$\{A_x^i(x,t), \phi_j(y,t)\} = \delta_j^i \delta(x - y) \tag{2.32}$$

$$\{A_t^i(x,t), \Pi_j(y,t)\} = \delta_j^i \delta(x - y) \tag{2.33}$$

$$\tag{2.34}$$

com apenas os vínculos primários:

$$\Pi_i \approx 0 \tag{2.35}$$

Precisamos verificar agora a condição para esse vínculo ser preservado no tempo. Nossa hamiltoniana será dada por:

$$H = \int dx(\phi_i \dot{A}_x^i + \Pi_i \dot{A}_t^i - [\phi_i \partial_t A_x^i + A_t^i D_x \phi_i])$$

$$H = -\int dx A_t^i D_x \phi_i \tag{2.36}$$

Queremos que o vínculo se preserve no tempo:

$$\dot{\Pi}_i = \partial_t \Pi_i \approx 0 \tag{2.37}$$

Como a evolução temporal é dada pela Hamiltoniana:

$$\dot{\Pi}_i = \{\Pi_i, H\} = -\int dx \{\Pi_i, A_t^j\} D_x \phi_j = D_x \phi_i \approx 0, \tag{2.38}$$

obtemos um novo vínculo:

$$\mathbb{G}_i = D_x \phi_i \approx 0, \tag{2.39}$$

chamado na terminologia de Dirac de "vínculo secundário", pois foi gerado para satisfazer as condições de consistência dos vínculos primários. Além disso, A_t se torna um multiplicador de Lagrange arbitrário. Como D_x só depende das componentes x de A, segue-se que:

$$\{\Pi_i, \mathbb{G}_j\} = 0 \tag{2.40}$$

e não temos mais novos vínculos. Como o campo A_t^i e seu momento são respectivamente multiplicadores de Lagrange e vínculo e seus parênteses de Poisson são nulos com os demais campos, vínculos e com a Hamiltoniana, podemos tornar forte as igualdades fracas relacionadas a esses campos e eliminá-los, pois não vão gerar informações relevantes para a teoria. Veremos o porquê na próxima seção. Note também que nossa hamiltoniana é composta puramente de vínculos, de modo que:

$$H \approx 0 \tag{2.41}$$

Como interpretar este resultado? Como estamos lidando com uma gravitação pura, temos que a evolução temporal do campo depende apenas de uma escolha de referencial ou sistema de coordenadas. Ou seja, o estado de um campo gravitacional no vácuo é constante, pois ele não tem com quem interagir. Veremos a seguir como são geradas essas transformações.

2.3 A Álgebra dos Vínculos

Ficamos com nossa Hamiltoniana definida a menos de funções arbitrárias no tempo, de modo que, dadas condições inicias, a evolução dos nossos campos é ambígua. Podemos escolher diferentes campos que representam o mesmo estado do sistema, definidos a menos dessas funções arbitrárias no tempo, que são geradas pelos vínculos. A fixação de valores para essas funções representa a escolha de um calibre, e permite um tratamento matemático mais simples do sistema.

Estamos interessados, porém, não em fixar um calibre, mas em entender como são geradas as transformações de calibre e suas propriedades, e determinar quais grandezas são invariantes sob essas transformações, para definir nossos observáveis físicos.

Vamos definir o vinculo ponderado (em inglês, *smeared*). A ponderação (*smearing*) consiste em multiplicar o vínculo por uma função arbitrária e integrar no espaço, de modo a facilitar cálculos da álgebra, pelo fato de evitarmos de operar com derivadas das distribuições $\delta(x-y)$, e gerar um vínculo mais geral de um único componente. Tomemos então uma função arbitrária $\alpha(x) = \alpha^i(x)T_i$, diferenciável de classe $\mathbb{C}^\infty$, limitada e que tenda a zero nos limites de integração. Definimos o "vínculo de Gauss", $\mathbb{G}(\alpha)$, como:

$$\mathbb{G}(\alpha) = \int dx \alpha^i(x)\mathbb{G}_i(x) = \int dx \alpha^i(x) D_x \phi_i(x) \tag{2.42}$$

As transformações de calibre para os nossos campos são geradas pelo parênteses de Poisson dos vínculos com os campos:

$$\begin{aligned} \delta A_x^i &= \{\mathbb{G}(\alpha), A_x^i(x)\} = \{\int dy \alpha^j(y) D_y \phi_j(y), A_x^i(x)\} = \\ &= \int dy \alpha^j(y)\{\partial_y \phi_j + f_{jk}{}^l A_x^k(y)\phi_l(y), A_x^i(x)\} = \\ &= \int dy \alpha^j(y)(\partial_y[-\delta_j^i \delta(y-x)] - f_{jk}{}^l A_x^k(y)\delta_l^i \delta(y-x)) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Integrando por partes, permutando índices e integrando em y obtemos:

$$\{\mathbb{G}(\alpha), A_x^i(x)\} = \partial_x \alpha^i + f^i{}_{jk} A_x^j(x)\alpha^k(x) \tag{2.44}$$

Finalmente:

$$\delta A^i_x = \{\mathbb{G}(\alpha), A^i_x(x)\} = D_x \alpha^i(x) \tag{2.45}$$

Fazendo uma conta semelhante para $\phi(x)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta\phi_i &= \{\mathbb{G}(\alpha), \phi_i(x)\} = \\
&= \int dy \alpha^j(y) \{\partial_y \phi_j + f_{jk}{}^l A^k_x(y)\phi_l(y), \phi_i(x)\} = \\
&= \int dy \alpha^j(y) f_{jk}{}^l \delta^k_i \delta(y-x)\phi_l(x) = \\
&= f^l{}_{ji}\phi_l(x)\alpha^j(x)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Logo:

$$\delta\phi_i = \{\mathbb{G}(\alpha), \phi_i(x)\} = [\phi(x), \alpha(x)]_i \tag{2.47}$$

Repare que essas transformações são as mesmas transformações infinitesimais vistas no apêndice A, e correspondem às convencionais transformações locais $SU(2)$ tipo Yang-Mills. Se fazemos o análogo para o vinculo primário:

$$\mathbb{G}_t(\epsilon) = \int dx \epsilon^i \Pi_i, \tag{2.48}$$

o único parêntese não nulo que envolve esse vínculo ou o campo A_t será:

$$\delta A^i_t = \{A^i_t(x), \mathbb{G}_t(\epsilon)\} = \int dy \epsilon^j(y) \{A^i_t(x), \Pi_j(y)\} = \epsilon^i(x) \tag{2.49}$$

Assim, as transformações do campo A_t são dadas apenas por funções arbitrarias: $A'_t(x) = A_t(x) + f(x)$. Por essa razão que eliminamos esses campos da teoria. Note também que:

$$H = -\mathbb{G}(A_t) \approx 0, \tag{2.50}$$

então a evolução temporal do sistema (os campos) são as mesmas transformações geradas pelo vinculo de Gauss, a menos de um sinal, e A_t faz apenas o papel de uma função arbitrária qualquer. Além disso, a partir dos resultados anteriores, para duas funções arbitrárias $\alpha(x)$ e α' segue-se que:

$$\{\mathbb{G}(\alpha), \mathbb{G}(\alpha')\} = \mathbb{G}([\alpha, \alpha']) \approx 0, \tag{2.51}$$

onde $[\alpha, \alpha']^i = f^i{}_{jk}\alpha^j\alpha'^k = \alpha''^i$, outra função arbitrária.

Verifica-se, portanto, que a composição de 2 transformações de calibre é também uma transformação de calibre, formando o grupo das transformações de calibre.

2.4 O grupo de calibre

Vamos agora definir o grupo de calibre responsável pelas transformações dos campos. Seja $g(x)$ um elemento de um dado grupo de Lie. Podemos relacioná-lo com os elementos $\alpha(x)$ da álgebra de Lie pela exponenciação:

$$g(x) = e^{\alpha(x)} \tag{2.52}$$

onde $\alpha(x) = \alpha^i(x)T_i$. O elemento inverso é $g^{-1}(x) = e^{-\alpha(x)}$. Sob transformações finitas, os campos se transformam como:

$$A'(x) = g^{-1}(x)A(x)g(x) + g^{-1}(x)dg(x) \tag{2.53}$$

$$\phi'(x) = g^{-1}(x)\phi(x)g(x) \tag{2.54}$$

$$F'(x) = g^{-1}(x)F(x)g(x) \tag{2.55}$$

Verifica-se facilmente que as transformações infinitesimais, para $\alpha(x)$ pequeno, recaem nas equações (2.45) e (2.47) respectivamente para A e Φ. A variação infinitesimal da curvatura F é:

$$\delta F = [F(x), \alpha(x)] \tag{2.56}$$

2.5 Difeomorfismos

Difeomorfismos são homeomorfismos dentro de uma mesma variedade, que são infinitamente diferenciáveis, bijetores e possuem inversa infinitamente diferenciável. No contexto da relatividade geral, podem ser entendidos como transformações que levam um mesmo objeto (um evento qualquer) de um sistema de coordenadas a outro (o que é chamado de difeomorfismo passivo), ou que relacionam dois eventos diferentes num mesmo sistema de coordenadas porém com métricas diferentes. A relatividade geral se distingue das demais teorias justamente por apresentar invariância sob difeomorfismos ativos. Isso vem do fato da própria métrica evoluir dentro de uma teoria de calibre, o que não acontece em teorias de *background* fixo [12]. Eles são gerados pela derivada de Lie.

$$\delta_{dif} Y = L_\xi Y, \tag{2.57}$$

onde $\xi = \xi^i_\mu dx^\mu T_i$ é um campo vetorial arbitrário, relacionado ao parâmetro infinitesimal da transformação. Aplicando nos campos, temos:

$$\begin{aligned} L_\xi A_\mu &= \xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu + A_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda = \\ &= \xi^t F_{tx} + \partial_x(\xi^\lambda A_\lambda) + [A_x, \xi^\lambda A_\lambda] = \\ &= \xi^\nu \epsilon_{\nu\mu} \frac{\delta S}{\delta \phi} + D_\mu \alpha \end{aligned} \tag{2.58}$$

onde $\alpha = \xi^\lambda A_\lambda$. De forma semelhante:

$$\begin{aligned} L_\xi \phi &= \xi^\nu \partial_\nu \phi = \xi^\nu D_\nu \phi + [\phi, \xi^\nu A_\nu] = \\ &= \xi^\nu \epsilon_{\nu\mu} \frac{\delta S}{\delta A_\mu} + [\phi, \alpha] \end{aligned} \tag{2.59}$$

Vemos então que os difeomorfismos estão contidos nas equações de movimento e as transformações de calibre geradas pelo vínculo, de modo que podem ser considerados subgrupos das transformações de calibre SU(2) [21]. Assim, nosso modelo BF, por sua equivalência com a relatividade geral, também apresenta invariância sob os difeomorfismos passivos e ativos. Resumindo nossos resultados, vemos que as possíveis transformações que mantém a ação BF (logo a dinâmica do sistema) invariante são automaticamente geradas como resultados no formalismo hamiltoniano, e são transformações mais gerais do que os difeomorfismos. Obtivemos também a álgebra dos vínculos e dos campos da teoria. Os difeomorfismos também serão utilizados para nos ajudar a obter os observáveis físicos, que devem ser grandezas invariantes de calibre. O próximo passo será a quantização do sistema, mas antes prosseguiremos com a análise clássica dos seguintes modelos.

Capítulo 3

O Modelo BF acoplado com Matéria Topológica

Neste capítulo faremos um tratamento canônico clássico do modelo BF bidimensional acoplado com matéria topológica, acoplamento proposto por Chamseddine *et al* [22] e utilizado por Schweda *et al* [18]. A matéria topológica consiste numa ação composta por um campo escalar $\psi(x)$ e um campo vetorial $B(x)$, escritos num formalismo em que a métrica não aparece explicitamente. É representado por uma ação do tipo:

$$S_M = \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} (D_\mu B_\nu)^i \psi_i, \tag{3.1}$$

onde $B(x) = dx^\mu B^i_\mu(x) T_i$ é um campo vetorial, 1-forma (não possui relação com o B do BF), e $\psi(x) = \psi^i(x) T_i$ é um campo escalar. A derivada covariante depende de uma conexão A externa a essa ação. No nosso caso de acoplamento, será a conexão A da ação BF, de modo que ela também será uma variável da teoria, afetada pela presença de matéria, e todos os campos do modelo acoplado são dinâmicos. Assim:

$$DB = dB + [A, B] \tag{3.2}$$

Desse modo a ação resultante será:

$$S(A, \phi, B, \psi) = S_{BF} + S_M = \frac{1}{2} \int d^2x \phi_i \epsilon^{\mu\nu} F^i_{\mu\nu} + \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} (D_\mu B_\nu)^i \psi_i \tag{3.3}$$

3.1 As Equações de Movimento

Com o método variacional aplicado na Lagrangiana obtemos as equações de movimento geradas pelas seguintes variações:

$$\delta A \quad \rightarrow \quad D\phi + [B, \psi] = 0 \tag{3.4}$$

$$\delta \phi \quad \rightarrow \quad F = 0 \tag{3.5}$$

$$\delta B \quad \rightarrow \quad D\psi = 0 \tag{3.6}$$

$$\delta \psi \quad \rightarrow \quad DB = 0 \tag{3.7}$$

Temos aqui a condição de curvatura nula assim como no caso sem matéria, porém surge um termo a mais para a equação do campo ϕ, que causa um acoplamento entre os campos do modelo BF com o campo de matéria topológica.

3.2 O Formalismo Hamiltoniano

3.2.1 A Hamiltoniana e Os Vínculos Primários

Sendo a ação $S = \int dtdxL$, temos a Lagrangiana:

$$L(A, \dot{A}; \phi, \dot{\phi}; B, \dot{B}, \psi, \dot{\psi}) = \int dx[\phi_i \partial_t A^i_x + A^i_t D_x \phi_i + (\partial_t B^i_x + f^i{}_{jk} A^j_t B^k_x)\psi_i + (D_x B_t)^i \psi_i] \tag{3.8}$$

Diferenciando essa Lagrangiana e já adiantando a primeira etapa do algoritmo de Dirac, como feito no capítulo anterior, obtemos as seguintes relações para as variáveis de configuração e seus respectivos momentos conjugados:

$${}^A\Pi^x_i \quad = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A^i_x)} = \quad \phi_i \tag{3.9}$$

$${}^A\Pi^t_i \quad = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A^i_t)} = \quad 0 \rightarrow \text{vínculo} \tag{3.10}$$

$${}^B\Pi^x_i \quad = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B^i_x)} = \quad \psi_i \tag{3.11}$$

$${}^B\Pi^t_i \quad = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B^i_t)} = \quad 0 \rightarrow \text{vínculo} \tag{3.12}$$

Os campos e seus momentos conjugados satisfazem os seguintes parênteses de Poisson não nulos:

$$\{A_x^i(x), \phi_j(y)\} = \delta_j^i \delta(x-y) = \{B_x^i(x), \psi_j(y)\} \tag{3.13}$$

$$\{A_t^i(x), {}^A\Pi_j^t(y)\} = \delta_j^i \delta(x-y) = \{B_t^i(x), {}^B\Pi_j^t(y)\} \tag{3.14}$$

A Hamiltoniana é então obtida a partir de:

$$\begin{aligned} H &= \int dx({}^A\Pi_i^\mu \dot{A}_\mu^i + {}^B\Pi_i^\mu \dot{B}_\mu^i) - L = \\ &= -\int dx(A_t^i D_x\phi_i - \partial_x B_t^i \psi_i + f^i{}_{jk} A_t^j B_x^k - f^i{}_{jk} A_x^j B_t^k) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Integrando por partes e permutando índices:

$$H = -\int dx[A_t^i(D_x\phi_i + f_{ij}{}^k B_x^j \psi_k) + B_t^i D_x \psi_i] \tag{3.16}$$

3.2.2 Os Vínculos Secundários

Precisamos agora verificar a consistência dos vínculos obtidos, isto é, se eles têm parênteses fracamente nulos com os demais vínculos e se são preservados no tempo. A primeira condição é automática, uma vez que os vínculos são momentos conjugados de diferentes campos. Verificamos a preservação temporal:

$$0 \approx {}^A\dot{\Pi}_i^t = \{{}^A\Pi_i^t, H\} = D_x\phi_i + f_{ij}{}^k B_x^j \psi_k = D_x\phi_i + [B_x, \phi]_i \tag{3.17}$$

$$0 \approx {}^B\dot{\Pi}_i^t = \{{}^B\Pi_i^t, H\} = D_x\psi_i \tag{3.18}$$

Logo temos dois novos vínculos secundários sendo gerados para que os primários se preservem no tempo:

$$\mathbb{G}_i = D_x\phi_i + [B_x, \phi]_i \approx 0 \tag{3.19}$$

$$\mathbb{S}_i = D_x\psi_i \approx 0 \tag{3.20}$$

Se lembrarmos do caso sem matéria, tínhamos o vínculo $D_x\phi_i \approx 0$. A presença de matéria topológica inclui um termo de acoplamento entre B e ϕ nesse vínculo, além de adicionar um novo vínculo, que torna o campo ψ constante, no que diz respeito à derivada covariante, o que antes acontecia para o campo ϕ.

Como ${}^{A}\Pi^{t}_{j}$ e ${}^{B}\Pi^{t}_{j}$ são agora vínculos preservados no tempo, A^{i}_{t} e B^{i}_{t} são multiplicadores de Lagrange, e os parênteses de Poisson deles são nulos com os demais campos e vínculos, podemos passar a igualdade fraca desses vínculos primários para forte e eliminá-los, pois não acrescentarão informação relevante à teoria. Além disso, assim como no caso sem matéria, nossa Hamiltoniana também é composta puramente de vínculos.

3.2.3 A Álgebra dos Vínculos

Para calcularmos os parênteses de Poisson entre os vínculos, vamos utilizar o *smearing* para melhor expressar as relações algébricas, como no caso anterior. Considere funções testes $\alpha^{i}(x), \beta^{i}(x)$ suficientemente bem comportadas para os cálculos que serão realizados: diferenciáveis, com derivadas diferenciáveis até a ordem necessária, e nulas na região de contorno. Definimos:

$$\mathbb{G}(\alpha) = \int dx \alpha^{i} \mathbb{G}_{i} \tag{3.21}$$

$$\mathbb{S}(\beta) = \int dx \beta^{i} \mathbb{S}_{i} \tag{3.22}$$

Dessa maneira a Hamiltoniana é escrita como

$$H = -\mathbb{G}(A^{i}_{t}) - \mathbb{S}(B^{i}_{t}) \tag{3.23}$$

Agora veremos como esses vínculos geram as transformações infinitesimais dos campos:

$$\delta_{(\alpha)}A_x^i = \{\mathbb{G}(\alpha), A_x^i\} = D_x\alpha^i \quad (3.24)$$

$$\delta_{(\alpha)}\phi_i = \{\mathbb{G}(\alpha), \phi_i\} = [\phi, \alpha]_i \quad (3.25)$$

$$\delta_{(\alpha)}B_x^i = \{\mathbb{G}(\alpha), B_x^i\} = [B_x, \alpha]^i \quad (3.26)$$

$$\delta_{(\alpha)}\psi_i = \{\mathbb{G}(\alpha), \psi_i\} = [\psi, \alpha]_i \quad (3.27)$$

$$\delta_{(\beta)}A_x^i = \{\mathbb{S}(\beta), A_x^i\} = 0 \quad (3.28)$$

$$\delta_{(\beta)}\phi_i = \{\mathbb{S}(\beta), \phi_i\} = [\psi, \beta]_i \quad (3.29)$$

$$\delta_{(\beta)}B_x^i = \{\mathbb{S}(\beta), B_x^i\} = D_x\beta^i \quad (3.30)$$

$$\delta_{(\beta)}\psi_i = \{\mathbb{S}(\beta), \psi_i\} = 0 \quad (3.31)$$

que coincidem com as expressões de Schweda *et al* [18]. Agora falta verificar se esses vínculos não geram novos vínculos quando fazemos os parênteses entre eles. Utilizando os resultados anteriores obtemos:

$$\{\mathbb{G}(\alpha), \mathbb{G}(\beta)\} = \mathbb{G}([\alpha, \beta]) \approx 0 \quad (3.32)$$

$$\{\mathbb{G}(\alpha), \mathbb{S}(\beta)\} = \mathbb{S}([\alpha, \beta]) \approx 0 \quad (3.33)$$

$$\{\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{S}(\beta)\} = 0 \quad (3.34)$$

Os vínculos formam uma álgebra fechada, de modo que não temos mais vínculos novos sendo gerados. Combinando esse resultado com a Hamiltoniana, obtemos diretamente que esses vínculos já são são preservados no tempo sem também gerar novos vínculos. Além disso, também não é possível determinar os multiplicadores de Lagrange. Isso implica que as equações de movimento dependerão de funções arbitrárias, e temos assim uma teoria de calibre.

3.3 As Transformações Geradas Pelos Vínculos

Dos parênteses de Poisson entre $\mathbb{G}$ e $\mathbb{S}$ com os campos na seção anterior, podemos dividir os resultados em 2 conjuntos de transformações infinitesimais geradas pelos vínculos, que deixam a ação invariante:

3.3.1 Transformações do tipo α

Reunimos as transformações geradas pelo vínculo $\mathbb{G}(\alpha)$:

$$\delta_{(\alpha)}A^i_x = D_x\alpha^i \tag{3.35}$$

$$\delta_{(\alpha)}\phi_i = [\phi, \alpha]_i \tag{3.36}$$

$$\delta_{(\alpha)}B^i_x = [B_x, \alpha]^i \tag{3.37}$$

$$\delta_{(\alpha)}\psi_i = [\psi, \alpha]_i \tag{3.38}$$

Note que as 2 primeiras transformações são as mesmas do caso desacoplado. E os outros dois campos se transformam na representação adjunta, da mesma maneira que ϕ. A partir delas podemos definir um grupo de calibre com elementos $g(x) = e^{\alpha(x)}$ e obter as transformações:

$$A'(x) = g^{-1}(x)A(x)g(x) + g^{-1}(x)dg(x) \tag{3.39}$$

$$\phi'(x) = g^{-1}(x)\phi(x)g(x) \tag{3.40}$$

$$B'(x) = g^{-1}(x)B(x)g(x) \tag{3.41}$$

$$\psi'(x) = g^{-1}(x)\psi(x)g(x) \tag{3.42}$$

3.3.2 Transformações do tipo β

Reunimos as transformações geradas pelo vínculo $\mathbb{S}(\beta)$:

$$\delta_{(\beta)}A^i_x = 0 \tag{3.43}$$

$$\delta_{(\beta)}\phi_i = [\psi, \beta]_i \tag{3.44}$$

$$\delta_{(\beta)}B^i_x = D_x\beta^i \tag{3.45}$$

$$\delta_{(\beta)}\psi_i = 0 \tag{3.46}$$

Aqui temos B se transformando como uma conexão e ϕ se misturando com ψ. Os campos A e ψ são invariantes sob essas transformações. Definindo outro grupo de calibre,

$s(x) = e^{\beta(x)}$ teríamos as transformações:

$$
\begin{aligned}
A'(x) &= A(x) && (3.47)\\
\phi'(x) &= \phi(x) - \psi(x) + s^{-1}(x)\psi(x)s(x) && (3.48)\\
B'(x) &= s^{-1}(x)B(x)s(x) + s^{-1}(x)ds(x) && (3.49)\\
\psi'(x) &= \psi(x) && (3.50)
\end{aligned}
$$

3.3.3 Transformações gerais

Compondo os dois conjuntos de transformações anteriores, temos:

$$
\begin{aligned}
\delta A_x^i &= D_x\alpha^i && (3.51)\\
\delta\phi_i &= [\phi,\alpha]_i + [\psi,\beta]_i && (3.52)\\
\delta B_x^i &= [B_x,\alpha]^i + D_x\beta^i && (3.53)\\
\delta\psi_i &= [\psi,\alpha]_i && (3.54)
\end{aligned}
$$

Entretanto, não conseguimos definir aqui um elemento $\mathcal{G}(\S) = \mathcal{G}(\alpha(x), \beta(x))$ de um grupo de calibre geral que contempla ambas as transformações α e β, nem escrever as transformações dos campos sob a ação desse grupo. Pode-se verificar que $\mathcal{G}(x) = e^{\alpha(x)+\beta(x)}$ é diferente de $\mathcal{G}(x) = g(x)s(x)$, e nenhuma dessas duas definições contempla o resultado. Poder-se-ia por tentativa e erro encontrar uma forma de definir o grupo, mas veremos no capítulo seguinte uma maneira simples de encontrar o elemento de grupo correto, ao se explorar uma nova simetria do modelo.

3.4 Difeomorfismos

Podemos gerar as transformações de difeomorfismos a partir da derivada de Lie: $\delta_{dif}Y = L_\xi Y$. Para o campo A:

$$
L_\xi A_\mu = \xi^\lambda\partial_\lambda A_\mu + A_\lambda\partial_\mu\xi^\lambda = \xi^t F_{tx} + \partial_x(\xi^\lambda A_\lambda) + [A_x, \xi^\lambda A_\lambda] \qquad (3.55)
$$

Fazendo $\alpha = \xi^\lambda A_\lambda$ temos:

$$L_\xi A_\mu = \xi^\lambda \frac{\delta S}{\delta \phi} \epsilon_{\lambda\mu} + D_\mu \alpha, \tag{3.56}$$

onde $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ é uma equação de movimento. Assim, vemos que o difeomorfismo de A está contido dentro das transformações de calibre e das equações de movimento. Calculemos agora para os demais campos, de forma análoga:

$$\begin{aligned} L_\xi X &= \xi^\lambda \partial_\lambda X = \xi^\lambda D_\lambda X - [\xi^\lambda A_\lambda, X] \\ &= \xi^\lambda \epsilon_{\lambda\mu} \frac{\delta S}{\delta B_\mu} + [X, \alpha] \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} L_\xi \phi &= \xi^\lambda \partial_\lambda \phi = \xi^\lambda (D_\lambda \phi + [B_\lambda, X]) - [\xi^\lambda A_\lambda, \phi] - [\xi^\lambda B_\lambda, \phi] = \\ &= \xi^\lambda \epsilon_{\lambda\mu} \frac{\delta S}{\delta A_\lambda} + [\phi, \alpha] + [X, \beta] \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} L_\xi B_\mu &= \xi^\lambda \partial_\lambda B_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda B_\lambda = \xi^\lambda (D_\lambda B_\mu - D_\mu B_\lambda) + [B_\mu, \xi^\lambda A_\lambda] + D_\mu(\xi^\lambda B_\lambda) = \\ &= \xi^\lambda \epsilon_{\lambda\mu} \frac{\delta S}{\delta X} + [B_\mu, \alpha] + D_\mu \beta \end{aligned} \tag{3.59}$$

Vemos assim que todos os difeomorfismos estão contidos nas transformações de calibre e nas equações de movimento.

Capítulo 4

Equivalência entre os modelos BF Supersimétrico e o BF acoplado com matéria topológica

Neste capítulo exploramos uma equivalência entre o BF acoplado com matéria topológica e um modelo de BF supersimétrico, de modo a usar as propriedades da supersimetria como um guia para a quantização de laços [23], pois ela permitirá encontrar o grupo de calibre mais geral possível e obter propriedades adicionais e de maneira fácil.

As definições principais de supersimetria encontram-se no apêndice B, e as usaremos para justificar nossa abordagem do modelo. Todas as definições são referentes à supersimetria N=1.

4.1 O Modelo BF supersimétrico

Consideremos um superespaço dado por uma variedade como nos capítulos anteriores, mas acrescido de uma coordenada anticomutante θ, $\theta^2 = 0$, de modo que possui coordenadas (θ, t, x). Munimos esse superespaço com uma superconexão $\mathcal{A}(x,\theta) = dx^\mu \mathcal{A}^i_\mu(x,\theta)T_i = A(x) + \theta B(x)$ de paridade de Grassmann par e um supercampo $\Phi(x,\theta) = \Phi^i(x,\theta)T_i = \psi(x) + \theta\phi(x)$ de paridade de Grassmann ímpar. Pela definição de supercampo, tanto $\mathcal{A}$ e

Φ possuem uma transformação dada pela operador nilpotente Q, $Q^2 = 0$, dada por:

$$Q\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{A}, \ Q\Phi = \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi \tag{4.1}$$

As componentes desses supercampos constituem 2 dubletos de supersimetria:

$$QA = B, \quad QB = 0 \tag{4.2}$$

$$Q\psi = \phi, \quad Q\phi = 0 \tag{4.3}$$

Definimos a derivada covariante desse superespaço utilizando a superconexão:

$$\mathcal{D} = d + [\mathcal{A}, \ ] \tag{4.4}$$

Podemos definir a supercurvatura de Yang-Mills:

$$\mathcal{F}(x,\theta) = d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^i_{\mu\nu}(x,\theta)T_i dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{4.5}$$

Em termos das componentes bosônicas (pares) e fermiônicas (ímpares):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x,\theta) &= d(A+\theta B) + (A+\theta B)\wedge(A+\theta B) = \\ &= dA + A\wedge A + \theta(dB + A\wedge B + B\wedge A) = \\ &= F + \theta(dB + [A,B]) = \\ &= F(x) + \theta DB(x) = \\ &= F(x) + \theta\mathbb{F}(x) \end{aligned} \tag{4.6}$$

com $F(x)$ uma curvatura de Yang-Mills para uma conexão A e $\mathbb{F} = DB$ seu parceiro supersimétrico. Em componentes do espaço-tempo, temos:

$$\mathcal{F}^i_{\mu\nu}(x,\theta) = F^i_{\mu\nu}(x) + \theta(D_\mu B_\nu(x) - D_\nu B_\mu(x))^i \tag{4.7}$$

Com essas ferramentas podemos construir uma ação BF no superespaço:

$$S_T(\Phi, \mathcal{A}) = Tr\int d\theta\Phi\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\int d\theta d^2x\Phi_i\mathcal{F}^i_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} \tag{4.8}$$

Queremos que essa ação possua as simetrias e as invariâncias de calibre do modelo BF usual. Além disso, nossa variedade possui uma nova operação em relação ao espaço usual, que é $Q = \frac{\partial}{\partial\theta}$. Dessa maneira, o modelo supersimétrico deve possuir uma simetria adicional, dada por $QS_T = 0$, isto é, a ação e a dinâmica do sistema deve ser independente da coordenada θ, o que fácil de provar. Sendo $\int d\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}$:

$$QS_T = Tr\int d\theta Q(\Phi\mathcal{F}) = Tr\int (\frac{\partial}{\partial\theta})^2(\Phi\mathcal{F}) = 0 \tag{4.9}$$

Abrindo nas componentes bosônicas e fermiônicas:

$$S_T = \frac{1}{2}\int d^2xd\theta(\psi(x) + \theta\phi(x))_i\epsilon^{\mu\nu}[F_{\mu\nu}(x) + \theta(D_\mu B_\nu(x) - D_\nu B_\mu(x))]^i \tag{4.10}$$

Multiplicando os termos e integrando em θ (Note que só irá sobreviver o termo de primeira ordem em θ):

$$S_T = \frac{1}{2}\int d^2x\phi_iF^i_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} + \int d^2x\psi_i(D_\mu B_\nu)^i\epsilon^{\mu\nu} = S_{BF} + S_M, \tag{4.11}$$

que é a nossa ação do modelo BF acoplado com matéria topológica em 2 dimensões. Repare ainda que:

$$S_T = Tr\int(\phi F + \psi f) \tag{4.12}$$

Uma demonstração alternativa de invariância sob supersimetria é, aplicando o operador Q nas componentes:

$$QS_T = Tr\int(Q(\phi F)+Q(\psi f)) = Tr\int(Q\phi F-\phi QF+Q\psi f-\psi Qf) = Tr\int(-\phi f+\phi f) = 0 \tag{4.13}$$

Isso implica que a ação supersimétrica é invariante sob transformações supersimétricas, como desejamos.

4.2 As equações de movimento

Analogamente ao que foi feito anteriormente, variamos a ação:

$$\delta S_T = Tr\int d\theta(\delta\Phi\mathcal{F} + \Phi\delta\mathcal{F}) = Tr\int d\theta(\delta\Phi\mathcal{F} + \delta\mathcal{A}\mathcal{D}\Phi) \tag{4.14}$$

e obtemos as já esperadas equações de movimento:

$$\frac{\delta S_T}{\delta\Phi} = \mathcal{F} = 0 \tag{4.15}$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta\mathcal{A}} = \mathcal{D}\mathcal{A} = 0 \tag{4.16}$$

Uma vez que já mostramos que essa ação corresponde à ação do BF acoplado, ao abrir a ação supersimétrica nas componentes, segue-se diretamente que variações nos campos A, B, ϕ, ψ reproduzem as equações de movimento do BF acoplado.

4.3 O Formalismo Hamiltoniano

De forma completamente análoga ao capítulo 2, a partir da Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}; \mathcal{A}, \dot{\mathcal{A}}) = \frac{1}{2}\int d\theta dx \Phi_i \mathcal{F}^i_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} \tag{4.17}$$

construímos a Hamiltoniana:

$$H = -\int dx d\theta \mathcal{A}^i_t (\mathcal{D}_x\Phi)_i \tag{4.18}$$

com o vínculo:

$$\Pi_i = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathcal{A}^i_t} \approx 0 \tag{4.19}$$

Utilizamos os parênteses de Poisson generalizados para campos bosônicos e fermiônicos:

$$\{\mathcal{Q}^i(x), \mathcal{P}_j(y)\} = (-1)^{|\mathcal{Q}^i||\mathcal{P}_j|}\delta^i_j\delta(x-y) \tag{4.20}$$

onde $\mathcal{Q}^i$ são as variáveis de configuração, $\mathcal{P}_i$ seus momentos conjugados, e $|\ |$ representa a função paridade (0 para par, 1 para ímpar). Os supercampos satisfazem os parênteses de Poisson:

$$\{\mathcal{A}_x^i(x,\theta),\Phi_j(y,\tau)\} = \delta_j^i\delta(x-y)\delta(\theta-\tau) \tag{4.21}$$

Se abrirmos os supercampos em suas componentes na Hamiltoniana, e tomamos como variáveis de configuração os campos A e B obtemos os parênteses de Poisson não nulos:

$$\begin{aligned}
\{A_x^i(x),\phi_j(y)\} &= \delta_j^i\delta(x-y) = & -\{B_x^i(x),\psi_j(y)\} \qquad (4.22)\\
\{A_t^i(x),{}^A\pi_j(y)\} &= \delta_j^i\delta(x-y) = & -\{B_t^i(x),{}^B\pi_j(y)\} \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

junto com os vínculos:

$${}^A\pi_i \approx 0,\ {}^B\pi_i \approx 0 \tag{4.24}$$

A condição de preservação temporal do vínculo (4.19) produz o vínculo secundário:

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{D}_x\Phi_i \approx 0 \tag{4.25}$$

Se abrimos em componentes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x,\theta)_i &= \partial_x\Phi_i + [\mathcal{A}_x,\Phi]_i = \\
&= \partial_x(\psi_i+\theta\phi_i) + [A_x+\theta B_x,\psi+\theta\phi]_i = \\
&= \partial_x\psi_i + [A_x,\psi]_i + \theta(\partial_x\phi + [B_x,\psi] + [A_x,\phi])_i = \\
&= D_x\psi_i + \theta(D_x\phi_i + [B_x,\psi_i]) = \\
&= \mathbb{S}_i(x) + \theta\mathbb{G}_i(x) \approx 0 \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Desta forma reproduzimos os vínculos secundários do capítulo 3, tanto pelas componentes do supervínculo como por uma análise hamiltoniana das componentes como variáveis de configuração. Nossa Hamiltoniana é então:

$$H = -\int dxd\theta\mathcal{A}_t^i(x,\theta)\mathcal{S}_i(x,\theta) = -\int dx(A_t^i(x)\mathbb{G}_i(x) + B_t^i(x)\mathbb{S}_i(x)) \tag{4.27}$$

Como feito anteriormente, eliminamos da teoria os vínculos primários, e o supercampo

$\mathcal{A}_t^i$ é um multiplicador de Lagrange arbitrário, assim como suas componentes bosônica e fermiônica.

4.4 Álgebra dos Vínculos

Começamos aplicando o *smearing* nos vínculos conhecidos anteriormente, e no super-vínculo, que também inclui a integração em θ:

$$\mathbb{G}(\alpha) = \int dx \alpha^i \mathbb{G}_i, \quad \mathbb{S}(\beta) = \int dx \beta^i \mathbb{S}_i, \quad \mathcal{S}(\Omega) = \int dx d\theta \Omega^i \mathcal{S}_i \tag{4.28}$$

Fazendo $\Omega(x, \theta) = \alpha(x) + \theta\beta(x)$, obtemos:

$$\mathcal{S}(\Omega) = \mathbb{G}(\alpha) + \mathbb{S}(\beta) \approx 0 \tag{4.29}$$

Além disso, de (4.26) temos que $\mathbb{G}_i(x)$ e $\mathbb{S}_i(x)$ formam também um dubleto supersimétrico:

$$Q\mathbb{S}_i = \mathbb{G}_i, \quad Q\mathbb{G}_i = 0 \tag{4.30}$$

De forma análoga aos capítulos anteriores, obtemos a álgebra fechada:

$$\{\mathcal{S}(\Omega_1), \mathcal{S}(\Omega_2)\} = \mathcal{S}([\Omega_1, \Omega_2]) \tag{4.31}$$

bem como as transformações infinitesimais de calibre geradas por $\mathcal{S}$:

$$\{\mathcal{S}(\Omega), \mathcal{A}_x(x, \theta)\} = \mathcal{D}_x \Omega(x, \theta) \tag{4.32}$$

$$\{\mathcal{S}(\Omega), \Phi(x, \theta)\} = [\Phi(x, \theta), \Omega(x, \theta)] \tag{4.33}$$

Abrindo nas componentes bosônicas e fermiônicas, obtemos as transformações tipo α e β e a álgebra fechada do capítulo anterior:

$$\{\mathbb{G}(\alpha), \mathbb{G}(\beta)\} = \mathbb{G}([\alpha, \beta]), \quad \{\mathbb{G}(\alpha), \mathbb{S}(\beta)\} = \mathbb{S}([\alpha, \beta]), \quad \{\mathbb{S}(\alpha), \mathbb{S}(\beta)\} = 0 \tag{4.34}$$

4.5 O Grupo de Calibre

Precisamos definir um supergrupo de calibre sob o qual nossos supercampos irão se transformar e que deixa a ação invariante. Podemos representar seus elementos na forma:

$$\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}(\alpha(x), \beta(x)) = e^{\Omega(x)} = e^{\alpha(x)+\theta\beta(x)}, \tag{4.35}$$

tal que α é par, e $\beta = Q\alpha$ é ímpar. Se expandirmos a exponencial em série obtemos:

$$e^{\alpha+\theta\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\theta\beta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{n!} + \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \alpha^{n-k}\beta\alpha^{k-1} \tag{4.36}$$

Note que um elemento do supergrupo pode ser escrito como uma soma de 2 elementos:

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta) = g(\alpha) + \theta\beta \triangleright g(\alpha), \tag{4.37}$$

onde:

$$g(\alpha) = e^{\alpha} \tag{4.38}$$

$$\beta \triangleright g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \alpha^{n-k}\beta\alpha^{k-1} \tag{4.39}$$

O termo acima denominamos "β inserido em $g(\alpha)$", e justificaremos o porquê dessa definição. Repare que:

$$\begin{aligned}
\beta^i \frac{\partial}{\partial\alpha^i} g(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta^i \frac{\partial}{\partial\alpha^i} [(\alpha^j T_j)^n] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (\alpha^j T_j)^{n-k} \beta^i \delta_i^m T_m (\alpha^p T_p)^{k-1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (\alpha^l T_l)^{n-k} \beta\alpha^{k-1} = \\
&= \beta \triangleright g(\alpha)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Desse modo vemos que β de fato se insere no somatório que é $g(\alpha)$, por meio de uma derivação. Pela supersimetria temos inclusive que:

$$Qg(\alpha) = \beta \triangleright g(\alpha), \; Q(\beta \triangleright g(\alpha)) = 0, \tag{4.41}$$

de onde vemos que $g(\alpha)$ e $\beta \triangleright g(\alpha)$ constituem um dubleto supersimétrico. Existe ainda uma inversa do elemento de grupo, denotada por $\mathcal{G}^{-1}$, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{-1}(\alpha,\beta) &= e^{-\Omega} = e^{-\alpha-\theta\beta} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n!} + \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} \alpha^{n-k}\beta\alpha^{k-1} = \\ &= g^{-1}(\alpha) + \theta\beta \triangleright g^{-1}(\alpha) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Usando a propriedade da inserção como derivada (4.40) obtemos:

$$0 = \beta \triangleright (gg^{-1}) = (\beta \triangleright g)g^{-1} + g(\beta \triangleright g^{-1}), \tag{4.43}$$

o que nos dá a importante relação:

$$(\beta \triangleright g)g^{-1} = -g(\beta \triangleright g^{-1}) \tag{4.44}$$

4.5.1 Transformações dos elementos de grupo

Dada a lei de transformação do elemento $\mathcal{G}$ do supergrupo por multiplicação à direita ou à esquerda por um outro elemento do grupo, temos:

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G}_1^{-1}\mathcal{G}\mathcal{G}_2 \tag{4.45}$$

onde $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\alpha,\beta), \; \mathcal{G}_k = \mathcal{G}(\alpha_k,\beta_k), \; \beta_k = Q\alpha_k, \; k = 1, 2$. Agora precisamos achar a lei de transformação do elemento $g(\alpha)$ de sua inserção-β. Abrimos o supergrupo em suas componentes:

$$(g + \theta\beta \triangleright g)' = g' + \theta(\beta \triangleright g)' = (g_1^{-1} + \theta\beta_1 \triangleright g_1^{-1})(g + \theta\beta \triangleright g)(g_2 + \theta\beta_2 \triangleright g_2) \tag{4.46}$$

Multiplicando os termos e separando as componentes em θ obtemos:

$$g' = g_1^{-1} g g_2 \tag{4.47}$$

$$(\beta \triangleright g)' = g_1^{-1}(\beta \triangleright g)g_2 + (\beta_1 \triangleright g_1^{-1})gg_2 + g_1^{-1}g(\beta_2 \triangleright g_2) \tag{4.48}$$

Fazendo $1 = g_1^{-1}g_1$, e usando a propriedade (4.44) obtemos finalmente a lei de transformação de grupo para a inserção-β:

$$(\beta \triangleright g)' = g_1^{-1}(\beta \triangleright g)g_2 - g_1^{-1}(\beta_1 \triangleright g_1)g_1^{-1}gg_2 + g_1^{-1}g(\beta_2 \triangleright g_2) \tag{4.49}$$

Fazendo $1 = g_2^{-1}g_2$ e fatorando o resultado acima:

$$(\beta \triangleright g)' = g_1^{-1}\{(\beta \triangleright g) - (\beta_1 \triangleright g_1)g_1^{-1}g + g(\beta_2 \triangleright g_2)g_2^{-1}\}g_2 \tag{4.50}$$

4.5.2 Transformações dos supercampos e campos

Falta agora encontrar as transformações de calibre para os campos e supercampos, que reproduzem as transformações infinitesimais geradas pelos vínculos. Assim como no modelo BF usual, temos as seguintes transformações para os supercampos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(x,\theta) &= \mathcal{G}^{-1}(x,\theta)\mathcal{A}(x,\theta)\mathcal{G}(x,\theta) + \mathcal{G}^{-1}(x,\theta)d\mathcal{G}(x,\theta) && (4.51) \\ \Phi'(x,\theta) &= \mathcal{G}^{-1}(x,\theta)\Phi(x,\theta)\mathcal{G}(x,\theta) && (4.52) \end{aligned}$$

Abrindo ambas as equações nas componentes, utilizando a propriedade (4.44) e separando os termos em θ podemos obter as leis de transformação para os campos do modelo BF acoplado, o que não havíamos conseguido no capítulo anterior. De (4.51) obtemos:

$$\begin{aligned} A'(x) &= g^{-1}(x)A(x)g(x) + g^{-1}(x)dg(x) && (4.53) \\ B'(x) &= g^{-1}(x)\{B(x) + D[(\beta \triangleright g(x))g^{-1}(x)]\}g(x) && (4.54) \end{aligned}$$

e de (4.52) obtemos:

$$\psi'(x) = g^{-1}(x)\psi(x)g(x) \tag{4.55}$$

$$\phi'(x) = g^{-1}(x)\{\phi(x) + [\psi, (\beta \triangleright g(x))g^{-1}(x)]\}g(x) \tag{4.56}$$

Pode-se verificar que para transformações infinitesimais (α e β pequenos) caímos nos resultados das transformações usuais do modelo BF para os supercampos, e nas transformações tipo α e β para suas componentes, como no modelo do BF acoplado. Além disso, conseguimos agora interpretar as transformações tipo β como transformações supersimétricas locais.

4.6 Difeomorfismos

Calculemos as derivadas de Lie dos supercampos:

$$\begin{aligned} L_\xi \mathcal{A}_\mu &= \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \xi^\nu = \xi^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu} + \mathcal{D}_\mu(\xi^\nu \mathcal{A}_\nu) = \\ &= \xi^\nu \epsilon_{\nu\mu} \frac{\delta S}{\delta \Phi} + \mathcal{D}_\mu \Omega \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} L_\xi \Phi &= \xi^\nu \partial_\nu \Phi = \xi^\nu \mathcal{D}_\nu \Phi + [\Phi, \xi^\nu \mathcal{A}_\nu] = \\ &= \xi^\nu \epsilon_{\nu\mu} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}_\mu} + [\Phi, \Omega] \end{aligned} \tag{4.58}$$

Vemos que os difeomorfismos estão contidos nas transformações de grupo, e ainda, se abrirmos nas componentes as equações de movimento e as transformações, é fácil ver que as derivadas de Lie dos supercampos implicam nas derivadas de Lie dos campos.

Capítulo 5

A Quantização de Laços

5.1 A Quantização do modelo BF bidimensional

Na quantização canônica usual, transformamos nossos campos A e ϕ em operadores que atuam sobre um funcional de onda a valor complexo $\Psi[A] = \langle A|\Psi\rangle$, em notação de Dirac, e consideramos o comutador [1] entre os operadores como proporcional aos parênteses de Poisson (ou colchetes de Dirac) [19]:

$$[\hat{A}^i_x(x), \hat{\phi}_j(y)] = i\hbar\{A^i_x\widehat{(x), \phi_j}(y)\} = i\hbar\delta^i_j\delta(x-y) \tag{5.1}$$

A representação dos campos como operadores numa polarização particular, onde A^i_x são as coordenadas generalizadas e argumentos do funcional de onda, seria:

$$\hat{A}^i_x\Psi[A] = A^i_x\Psi[A] \tag{5.2}$$

$$\hat{\phi}_i\Psi[A] = -i\hbar\frac{\delta}{\delta A^i}\Psi[A] \tag{5.3}$$

Para completar a definição do espaço de Hilbert dos funcionais de onda, falta definir o produto escalar. Ele seria definido nesse espaço por:

$$\langle\Psi|\Psi'\rangle = \int \mathcal{D}A\overline{\Psi[A]}\Psi'[A] \tag{5.4}$$

[1]Cuidado para o conflito de notação: esses comutadores são diferentes dos utilizados anteriormente, no contexto dos geradores T_i do grupo de calibre, apesar do símbolo ser o mesmo [,].

onde $\mathcal{D}A$ representa uma medida de integração e $\overline{\Psi[A]}$ representa o complexo conjugado de $\Psi[A]$. É aqui que começam nossas dificuldades, pois queremos um produto escalar que seja bem definido matematicamente. Mas por A ser um campo e se transformar como uma conexão, isso nos complica a definição da medida de integração no espaço das conexões, inclusive de forma a ter invariância. Para construir um produto escalar bem definido, utilizaremos outro objeto, definido a seguir, e para a quantização seguiremos os resultados de Rovelli *et al* em [21].

5.1.1 O Transporte Paralelo e as Holonomias

A derivada covariante e a conexão estão relacionadas ao transporte paralelo de um campo tensorial, operação realizada para comparar campos tensoriais definidos em pontos diferentes, infinitesimalmente próximos. A derivada covariante é uma medida de quanto o campo varia quando é transportado paralelamente em caminhos infinitesimais. Para espaços planos, a derivada covariante coincide com a derivada parcial. Note que para um campo escalar não temos essa necessidade, uma vez que o campo não possui componentes espaço-temporais, e sua derivada covariante é a própria derivada direcional.

A holonomia é uma generalização do transporte paralelo de um campo, ao longo de caminhos finitos. Ela é obtida como solução da equação diferencial de transporte paralelo [24]:

$$\frac{d}{ds}h_\gamma[A](s) - \dot{x}(s)A_x(x(s))h_\gamma[A](s) = 0 \tag{5.5}$$

ou:

$$dh_\gamma[A](s) = Ah_\gamma[A](s) \tag{5.6}$$

com a condição inicial:

$$h_\gamma[A](s=0) = \mathbb{I} \tag{5.7}$$

onde $\gamma : x_i \to x_f$ uma curva no espaço $\mathcal{S}^1$ do ponto $x = x_i$ até o ponto $x = x_f$ parametrizada por $s \in [0,1]$, e $\dot{x}(s)ds = \frac{dx}{ds}ds = dx$. A solução é a holonomia: $h_\gamma[A](s) = \mathcal{P}e^{\int_\gamma A} = \mathcal{P}e^{\int_0^s ds\dot{x}(s)A^i_x(x(s))T_i}$. Para $s = 1$, notamos:

$$h_\gamma[A] = \mathcal{P}e^{\int_\gamma A} = \mathcal{P}e^{\int_0^1 ds\dot{x}(s)A^i_x(x(s))T_i} = \mathcal{P}e^{\int_{x_i}^{x_f} dxA^i_x(x)T_i}, \tag{5.8}$$

onde $\mathcal{P}$ um operador de ordenação de caminhos. Como estamos em apenas 1 dimensão espacial, nós podemos parametrizar o caminho pela coordenada x ao invés de s. Mas em dimensões superiores, deve-se utilizar uma parametrização da curva mais geral. Pode-se mostrar que, na composição de 2 caminhos γ_1 e γ_2:

$$h_{\gamma_1 \circ \gamma_2}[A] = h_{\gamma_1}[A] h_{\gamma_2}[A] \tag{5.9}$$

Um resultado importante é a existência da holonomia inversa, definida ao longo de uma mesma curva, com orientação oposta:

$$h_{\gamma}[A] h_{-\gamma}[A] = 1 \tag{5.10}$$

Vamos também utilizar uma outra notação que também representa a holonomia ao longo de uma curva $\gamma : x_i \to x_f$:

$$h_{\gamma}[A] = h_{x_f x_i}[A] \tag{5.11}$$

Transformações de Calibre

Dada a lei de transformação de grupo da conexão A, pode-se mostrar que a holonomia obedece a lei de transformação:

$$h'_{\gamma}[A] = g^{-1}(x_f) h_{\gamma}[A] g(x_i) \tag{5.12}$$

Um objeto interessante é o laço de Wilson, definido pelo traço de uma holonomia num caminho fechado ($x_i = x_f$):

$$W_{\gamma}[A] = Tr(h_{\gamma}[A]) \tag{5.13}$$

Da propriedade de ciclicidade do traço, temos que o laço de Wilson é invariante de calibre:

$$W'_{\gamma}[A] = Tr(h'_{\gamma}[A) = Tr(g^{-1}(x) h_{\gamma}[A] g(x)) = Tr(h_{\gamma}[A] g g^{-1}) = W_{\gamma}[A] \tag{5.14}$$

Como estamos trabalhando no espaço $\mathcal{S}^1$, só poderemos traçar um único caminho fechado, que preenche todo o espaço. Nesse caso, omitiremos o índice γ quando estivermos lidando com apenas 1 dimensão espacial.

Dado um campo $\varphi(x_i)$ no ponto (x_i), que se transforma na representação adjunta, seu transporte paralelo até o ponto x_f ao longo de uma curva γ será dado por:

$$\tilde{\varphi}(x_f) = h_\gamma[A]\varphi(x_i)h_{-\gamma}[A] = h_{x_f x_i}[A]\varphi(x_i)h_{x_i x_f}[A] \tag{5.15}$$

e a transformação de calibre após o transporte paralelo será:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'(x_f) &= h'_\gamma[A]\varphi'(x_i)h'_{-\gamma}[A] = \\ &= g^{-1}(x_f)h_\gamma[A]g(x_i)g^{-1}(x_i)\varphi(x_i)g(x_i)g^{-1}(x_i)h_\gamma[A]g(x_f) = \\ &= g^{-1}(x_f)\tilde{\varphi}(x_f)g(x_f) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Com esse resultado, temos que o transporte paralelo dos campos se transforma da mesma forma que os campos, o que mostra o importante papel da holonomia para uma teoria de calibre.

Diferenciação da Holonomia

Veremos agora como a holonomia se comporta quando aplicamos uma diferenciação. Note que a diferenciação é feita num ponto arbitrário x, enquanto a holonomia é definida integrando-se x entre pontos x_i e x_f. Para fazer a diferenciação, repartimos a holonomia ao longo de N caminhos numerados por n e aproximamos a exponencial pelos primeiros termos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_x^i(x)}h_\gamma[A] &= \lim_{N\to\infty}\frac{\delta}{\delta A_x^i(x)}\prod_{n=1}^{N}(1 + A_x^{i_n}T_{i_n}\delta x_n) = \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\prod_{n=1}^{k-1}(1 + A_x^{i_n}T_{i_n}\delta x_n)\delta_i^{i_k}T_{i_k}\delta(x-x_k)\delta x_k \prod_{n=k+1}^{N}(1 + A_x^{i_n}T_{i_n}\delta x_n) \\ &= h_{\gamma_2}T_i h_{\gamma_1} = h_{x_f x}T_i h_{x x_i} \end{aligned} \tag{5.17}$$

onde vemos que a diferenciação corta a curva $\gamma : x_i \to x_f$ em 2 curvas: $\gamma_1 : x_i \to x$ e $\gamma_2 : x \to x_f$, inserindo um gerador T_i entre 2 holonomias, correspondentes a cada curva.

A partir deste resultado, temos a aplicação do operador $\hat{\phi}_i(x)$ numa holonomia:

$$\hat{\phi}_i(x)h_\gamma[A] = -i\hbar h_{\gamma_2}T_i h_{\gamma_1} = -i\hbar h_{x_f x}T_i h_{x x_i} \tag{5.18}$$

Se aplicamos agora o operador $\hat{\phi}^i(x)$ na expressão acima, ele irá inserir um gerador T^i num ponto x, que está no limite das holonomias. Para esse cálculo, vamos fazer uma renormalização inserindo um parâmetro infinitesimal ϵ:

$$\hat{\phi}^i(x+\epsilon)\hat{\phi}_i(x-\epsilon)h_\gamma[A] = -i\hbar\hat{\phi}^i(x+\epsilon)[h_{x_f\ x-\epsilon}T_i h_{x-\epsilon\ x_i}], \tag{5.19}$$

onde $\hat{\phi}^i(x+\epsilon)$ só irá atuar na holonomia da esquerda, que contém o ponto $(x+\epsilon)$:

$$\hat{\phi}^i(x+\epsilon)\hat{\phi}_i(x-\epsilon)h_\gamma[A] = (-i\hbar)^2 h_{x_f\ x+\epsilon}T^i h_{x+\epsilon\ x-\epsilon}T_i h_{x-\epsilon\ x_i} \tag{5.20}$$

Tomando o limite $\epsilon \to 0$ e usando (5.7), obtemos:

$$\hat{\phi}^i(x)\hat{\phi}_i(x)h_\gamma[A] = -\hbar^2 h_{x_f x}T^i T_i h_{x x_i} \tag{5.21}$$

Uma conta análoga mostra que trocar ϵ por $-\epsilon$ o resultado é o mesmo, notando que $T^iT_i = T_iT^i$ pelo uso da métrica de Killing para operações nesses índices. Com esse resultado, temos que a aplicação do operador de derivada segunda insere um operador de Casimir quadrático $C = T^iT_i$ do grupo de calibre na posição x da holonomia. Podemos também aplicar o operador do vínculo de Gauss $\hat{\mathbb{G}}(\alpha)$ na holonomia:

$$\hat{\mathbb{G}}(\alpha)h_\gamma[A] = \int dx\alpha^i(\partial_x\hat{\phi}_i + f_{ij}{}^k\hat{A}^j_x\hat{\phi}_k)h_\gamma[A] \tag{5.22}$$

Integrando por partes, e permutando índices:

$$\hat{\mathbb{G}}(\alpha)h_\gamma[A] = -\int dx(\partial_x\alpha^i + f^i{}_{jk}A^j_x\alpha^k)\hat{\phi}_i h_\gamma[A] \tag{5.23}$$

Utilizando o resultado (5.18) e notando que $d\alpha = dx\partial_x \alpha^i T_i$ e $A = dx A^i_x T_i$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{G}}(\alpha) h_\gamma[A] &= ih \int dx h_{x_f x}[A](\partial_x \alpha^i + f^i{}_{jk} A^j_x \alpha^k) T_i h_{x x_i}[A] = \\
&= ih \int dx h_{x_f x}[A] D_x \alpha(x) h_{x x_i}[A] = \\
&= ih \int h_{x_f x}[A](d\alpha + [A, \alpha]) h_{x x_i}[A] \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

Combinando esse resultado com a equação diferencial (5.6), obtemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{G}}(\alpha) h_\gamma[A] &= ih \int (h_{x_f x}[A] d\alpha(x) h_{x x_i}[A] + d h_{x_f x}[A] \alpha(x) h_{x x_i}[A] + h_{x_f x}[A] \alpha(x) d h_{x x_i}[A]) = \\
&= i\hbar \int d(h_{x_f x}[A] \alpha(x) h_{x x_i}[A]) = \\
&= i\hbar(\alpha(x_f) h_\gamma[A] - h_\gamma[A] \alpha(x_i)) \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

Se aplicamos o vínculo de Gauss num Laço de Wilson:

$$\hat{\mathbb{G}}(\alpha) Tr(h[A]) = i\hbar Tr(\alpha(x) h[A] - h[A] \alpha(x)) = 0 \qquad (5.26)$$

As implicações desse resultado e do anterior serão discutidas mais adiante.

5.1.2 Os Grafos e as Funções Cilíndricas

Passaremos a escrever nosso funcional de onda $\Psi[A]$ como uma função das holonomias de A: $\Psi[h_\gamma[A]]$.

Em um número geral de dimensões, definimos um grafo (Γ) como sendo um conjunto de um número finito de curvas orientadas (γ) e vértices (v), que são pontos conectando tais curvas, e nos restringiremos a grafos fechados e conexos. Assim podemos expressar nosso funcional de onda como:

$$\Psi_{\Gamma,f}[A] = f(h_{\gamma_1}[A], ..., h_{\gamma_n}[A]), \qquad (5.27)$$

onde $f : G \times G \times ... \times G \rightarrow \mathbb{C}$. Esse funcional assim definido é chamado de função cilíndrica. As combinações lineares finitas dos funcionais $\Psi_{\Gamma,f}$ formam o espaço vetorial cilíndrico Cyl:

$$\Psi[A] = \sum_i \sum_k c_{ik} \Psi_{\Gamma_i, f_k}[A] \tag{5.28}$$

Introduzindo a notação de Dirac, temos:

$$\Psi_{\Gamma,f}[A] = \langle A|\Gamma, f\rangle \tag{5.29}$$

Com apenas 1 dimensão espacial, temos um único caminho para um grafo fechado e conexo, que preenche todo o círculo $\mathcal{S}^1$, mas temos um conjunto de grafos que se distinguem pelas posições e número de vértices.

5.1.3 O Produto Escalar

Para poder definir nosso produto escalar para as funções cilíndricas, precisamos de uma medida de integração bem definida, para isso iremos recorrer à medida de integração de Haar [25], descrita no Apêndice C. Chamando $h_{\gamma_k}[A] = h_k \in G$ para simplificar a notação, escrevemos:

$$\langle A|\Gamma, f\rangle = \Psi_{\Gamma,f}[A] = f(h_1, h_2, ...) \tag{5.30}$$

Sendo G um grupo compacto (lembremos da definição de grafo), podemos definir uma medida de Haar $d\mu$ e o seguinte produto escalar no subespaço Cyl_Γ:

$$\langle \Gamma, f|\Gamma, f'\rangle = \int d\mu(h_1) \int d\mu(h_2) ... \overline{f(h_1, h_2, ...)} f'(h_1, h_2, ...), \tag{5.31}$$

o que define rigorosamente o produto escalar (5.4). Para definir o produto interno em grafos diferentes, basta tomar a união dos grafos: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, que consiste na união dos caminhos e dos vértices. Em 1 dimensão, apenas na união dos vértices.

$$\langle \Gamma_1, f_1|\Gamma_2, f_2\rangle = \langle \Gamma, f_1|\Gamma, f_2\rangle \tag{5.32}$$

Caso um grafo contenha o mesmo caminho que outro, mas no sentido contrário, lembramos que inverter o argumento do funcional deixa a integral invariante. Das propriedades da integral de Haar, temos também invariância de calibre e de difeomorfismos, pois $h' = g_1^{-1} h g_2$ deixa a integral de Haar invariante. Por consequência, o resultado é também independente da parametrização e da posição dos grafos. Além disso, permitirá a possibilidade de representação unitária das funções. Com o produto escalar bem definido, podemos definir a norma:

$$||\Psi_{\Gamma,f}[A]||^2 = \langle \Gamma, f|\Gamma, f\rangle = \int d\mu(h_1) \int d\mu(h_2)...|f(h_1, h_2, ...)|^2 \qquad (5.33)$$

5.1.4 O Espaço de Hilbert

Uma vez definido o produto interno para as funções cilíndricas, obtemos um espaço de Hilbert, que chamaremos de Espaço de Hilbert Cinemático K. Nele podemos construir estados normalizados pelo produto interno, e ele contém as funções mais gerais possíveis das holonomias.

O próximo passo é implementar o vínculo de Gauss, neste caso o vínculo (2.42). Uma vez que $\mathbb{G} \approx 0$ na teoria clássica, esta propriedade deve se manter na teoria quântica. Temos assim a seguinte condição:

$$\hat{\mathbb{G}}\Psi[A] = 0 \qquad (5.34)$$

Os funcionais de onda que são soluções dessa equação serão automaticamente invariantes de calibre. Relembrando o resultado da aplicação do vínculo de Gauss num Laço de Wilson (5.26), temos que os funcionais de onda invariantes de calibre são quaisquer funções cujo argumento é Laço de Wilson $\Psi[A] = f(W[A])$, ao invés de uma holonomia qualquer. Desse modo reduzimos nosso espaço de Hilbert ao chamado espaço K_0. Uma consequência importante é que neste espaço só teremos um único grafo, sem a presença de vértices.

A próxima etapa é implementar os difeomorfismos para obter o espaço de Hilbert K_{diff}. Uma vez que mostramos que as transformações de difeomorfismos já estão contidas nas transformações de calibre, temos nesse caso que $K_{diff} = K_0$, o que não acontece em dimensões superiores [8], e esse vinculo deve ser implementado de outra forma.

Para a construção do espaço de Hilbert Físico, H_{fis}, só faltaria implementar os demais vínculos existentes, incluindo o vínculo da Hamiltoniana. No nosso caso de 1 dimensão espacial, não temos mais vínculos e a Hamiltoniana coincide com o vínculo de Gauss, então ela está automaticamente implementada, e $H_{fis} = K_0$.

Até agora temos trabalhado com funções e integração, o que pode levar a contas muito complexas e trabalhosas. Veremos a seguir como definir uma representação algébrica para o espaço H_{fis}, e construir uma base ortonormal para representar nossos estados.

5.1.5 Redes de Spin

Com o produto escalar bem definido e o teorema de Peter-Weyl [26], descrito no Apêndice C, temos tudo o que precisamos para construir uma base ortonormal para nossos funcionais de onda no espaço H_{fis}, só falta a representação dos nossos funcionais. Expandindo o funcional na base ortonormal de representações de *spin* j:

$$f(h) = \sum_j \sum_{\alpha,\beta} c_{j,\alpha,\beta} R^{(j)}_{\alpha\beta}(h), \tag{5.35}$$

onde $R^{(j)}_{\alpha\beta}(h)$ são elementos de uma matriz complexa $R^{(j)}(h)$. Para um número arbitrário de dimensões, sua representação algébrica na base $|\Gamma, j, \alpha, \beta\rangle$ será:

$$|\Psi\rangle = \sum_k \sum_j \sum_{\alpha,\beta} c_{\Gamma_k,j,\alpha,\beta} |\Gamma_k, j, \alpha, \beta\rangle \in Cyl \tag{5.36}$$

Em particular, considerando apenas o subespaço definido por um grafo Γ, ou o caso de 1 dimensão espacial:

$$|\Psi\rangle_\Gamma = \sum_j \sum_{\alpha,\beta} c_{\Gamma,j,\alpha,\beta} |\Gamma, j, \alpha, \beta >\in Cyl_\Gamma \tag{5.37}$$

Como os subespaços Cyl_Γ são ortogonais entre si, recuperamos o espaço Cyl como uma soma direta sobre todos os grafos:

$$Cyl = \bigoplus_\Gamma Cyl_\Gamma \tag{5.38}$$

Essa base assim definida é chamada de redes de *spin*, ou *spin networks*. Em dimensões superiores, ela é muito útil para implementação de outros vínculos existentes e de difeomorfismos. Pela simplicidade do nosso modelo bidimensional, podemos fazer a seguinte expansão no espaço H_{fis}, omitindo os índices (α, β):

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_j c_j |j> \\ f(Tr(h[A])) = \psi(h) = \langle h|\Psi\rangle &= \sum_j c_j Tr[R^{(j)}(h)] = \sum_j c_j \psi_j(h) \end{aligned} \tag{5.39}$$

onde $\psi_j(h) = \langle h|j\rangle$, e ϕ_j forma uma base ortonormal pelo teorema de Peter-Weyl, pois:

$$\int d\mu(h) \overline{R^{(j)}_{\alpha\beta}(h)} R^{(k)}_{\rho\sigma}(h) = \frac{1}{2j+1} \delta^{jk} \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\sigma} \tag{5.40}$$

5.1.6 Observáveis

Numa teoria de calibre a evolução clássica de nossos campos dependerá de funções arbitrárias no tempo. As únicas grandezas fisicamente predizíveis são funções (dos campos) cujo resultado não dependerá do calibre escolhido. Na quantização, os operadores associados a esses observáveis devem comutar com os vínculos para a invariância de calibre. Essas funções são chamadas *invariantes de calibre* ou *observáveis de Dirac* [12] [19]. No nosso modelo BF 2d, podemos encontrar 2 grandezas que satisfazem esse critério:

(i) O laço de Wilson: $W = Tr(h_\gamma[A])$, com γ sendo um caminho fechado percorrendo todo o espaço $\mathcal{S}^1$;

(ii) A grandeza definida classicamente por:

$$L = Tr(\phi^2) = \phi^i \phi_i \tag{5.41}$$

Sua invariância é fácil de perceber a partir das propriedades do traço e das transformações no grupo de calibre em (2.54). Essas duas grandezas são os possíveis observáveis clássicos da nossa teoria.

Quantização dos Observáveis

Para cada observável clássico, associamos um operador:

$$W \to \hat{W}, \quad L \to \hat{L} \tag{5.42}$$

Consideramos os funcionais de onda $\psi(h)$ do espaço físico H_{fis} definido em (5.39). A atuação do operador relacionado ao Laço de Wilson é trivial:

$$\hat{W}\psi[h] = Tr(h)\psi(h) = W\psi(h) \tag{5.43}$$

Em particular, a base $|h\rangle$ é constituída por autoestados de $\hat{W}$:

$$\hat{W}|h\rangle = Tr(h)|h\rangle \tag{5.44}$$

Para o observável $\hat{L}$, utilizamos resultado (5.18) e a ciclicidade do traço para obter:

$$\hat{L}\psi(h) = Tr(\hat{\phi}^i\hat{\phi}_i)\psi(h) = \hbar^2 C\psi(h) \tag{5.45}$$

Aplicando na função da base $\psi_j(h)$, temos:

$$\begin{aligned} \hat{L}\psi_j(h) &= \hbar^2 C\psi_j(h) = \hbar^2 j(j+1)\psi_j(h) && (5.46)\\ \hat{L}|j\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j\rangle && (5.47) \end{aligned}$$

onde $j(j+1)$ é autovalor do operador de Casimir quadrático C na representação unitária do grupo de calibre onde a holonomia está definida. e temos com isso que o operador $\hat{L}$ é quantizado, e é análogo ao operador de momento angular total $\vec{L}^2$ da mecânica quântica.

Note também que:

$$[\hat{L},\hat{W}] = \hbar^2 CW \tag{5.48}$$

Se utilizamos operadores $\hat{W}_j$ correspondentes aos observáveis clássicos $W_j = \psi_j(h) = Tr[R^{(j)}(h)]$, temos:

$$[\hat{L},\hat{W}_j] = \hbar^2 j(j+1)W_j \tag{5.49}$$

Logo,

$$\begin{aligned} [\hat{L},\hat{W}_j]|k\rangle &= \hat{L}\hat{W}_j|k\rangle - \hat{W}_j\hat{L}|k\rangle = \hbar^2 j(j+1)W_j|k\rangle \\ &= \hat{L}\hat{W}_j|k\rangle - \hat{W}_j\hbar^2 k(k+1)|k\rangle = \hbar^2 j(j+1)W_j|k\rangle && (5.50) \end{aligned}$$

Multiplicando por $\langle h|$ temos:

$$\langle h|\hat{L}\hat{W}_j|k\rangle = \hbar^2[k(k+1)+j(j+1)]\langle h|\hat{W}_j|k\rangle \tag{5.51}$$

o que mostra que $\hat{W}_j|k\rangle$ é autoestado de $\hat{L}$ com autovalor $\hbar^2[k(k+1)+j(j+1)$. Com isso temos o resultado:

$$\hat{W}_j|0\rangle = |j\rangle \tag{5.52}$$

que nos permite obter qualquer estado $|j\rangle$ a partir do estado fundamental $|0\rangle$.

5.2 BF acoplado com matéria topológica

A dificuldade de se encontrar uma representação para o grupo de calibre mais geral possível do modelo BF acoplado com matéria topológica criará alguns problemas para a quantização de Laços. No capítulo 3, conseguimos apenas representar grupos para as transformações tipo α ou tipo β, mas não um "supergrupo"que engloba ambas, como feito no capítulo 4. Relembrando, nossas variáveis são os campos A e B e seus respectivos momentos ϕ e ψ. Mostramos a seguir uma tentativa de se fazer a quantização sem recorrer à supersimetria.

5.2.1 As Holonomias

A princípio temos um funcional de onda $\Psi[A, B]$. Da seção anterior, já conhecemos uma holonomia para o campo A da forma:

$$h_\gamma[A] = Pe^{\int_\gamma A}, \tag{5.53}$$

com a propriedade de transformação:

$$h'_\gamma[A] = g^{-1}(x_f)h_\gamma[A]g(x_i) \tag{5.54}$$

Precisaríamos agora definir uma holonomia para o campo B, porém temos um problema, já que ele não é uma conexão para a transformação tipo α, mas se comporta como uma conexão para a transformação do tipo β. Para tentar contornar isso, vamos tomar um funcional de onda $\Psi[A, \psi]$. Uma vez que X é um campo escalar, não precisamos nos preocupar com o transporte paralelo. Além disso, o funcional de onda será invariante sob transformações do tipo β. Consideremos então a "holonomia de ponto":

$$V[(x)] = e^{\psi(x)} = e^{\psi^i(x) T_i} \tag{5.55}$$

Sendo a transformação de ψ dada por:

$$\psi'(x) = g^{-1}(x)\psi(x)g(x), \tag{5.56}$$

teremos:

$$\begin{aligned} V'[x] &= e^{\psi'(x)} = \sum \frac{[g^{-1}(x)\psi(x)g(x)]^n}{n!} = \\ &= \sum g^{-1}(x)\frac{[\psi(x)]^n}{n!}g(x) = \\ &= g^{-1}(x)e^{\psi(x)}g(x) = \\ &= g^{-1}(x)V(x)g(x) \end{aligned} \tag{5.57}$$

Enquanto as holonomias são definidas ao longo de curvas, as holonomias de ponto são definidas nos vértices entre essas curvas. Temos agora invariantes da forma:

$$Tr(v_1, h_{12}v_2h_{23}...v_nh_{n1}) \tag{5.58}$$

onde $1, ...n$ representam pontos $x_1, ...x_n$ numa curva fechada, e $v_k = V(x_k)$.

5.2.2 O Produto Escalar

Temos dois elementos de grupo distintos no grafo Γ: as holonomias h e os vértices v. Assim, temos o estado representado em notação de Dirac:

$$\Psi_{\Gamma,f}[A, \psi] = \langle A, X|\Gamma, f\rangle \tag{5.59}$$

Definimos o produto escalar, com a medida de Haar $d\mu$, por:

$$\langle\Gamma, f|\Gamma, f'\rangle = \int d\mu(h_1)... \int d\mu(v_1)...\overline{f(h_1, ..., v_1, ...)}f'(h_1, ..., v_1, ...) \qquad (5.60)$$

Agora, mesmo em 1 dimensão espacial, teremos grafos distintos, que dependem da posição x de cada vértice e do número de vértices. Podemos generalizar o produto escalar para grafos distintos de maneira análoga ao caso da seção anterior, levando em conta a união dos grafos e integrando sobre todos os elementos de cada um.

5.2.3 Redes de *Spin*

Podemos representar as holonomias h pelas componentes de matriz de representação de *spin* j $R^{(j)}_{\alpha\beta}(h)$ e as holonomias de ponto v pelas componentes de matriz de representação de *spin* k $R^{(k)}_{\gamma\delta}(v)$. Conforme o Teorema de Peter-Weyl:

$$\int d\mu(h) \int d\mu(v) R^{(j)}_{\alpha\beta}(h) R^{(j')}_{\alpha'\beta'}(h) R^{(k)}_{\gamma\delta}(v) R^{(k')}_{\gamma'\delta'}(v) = \frac{1}{d_j d_k}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\delta\delta'} \qquad (5.61)$$

onde d_j e d_k correspondem respectivamente à dimensão do subespaço da representação de *spin* j e k.

5.2.4 Observáveis

Um candidato a observável poderia ser o traço definido em (5.58). Começa a ficar difícil a definição dos demais observáveis, uma vez que as transformações de calibre dos campos não nos permite encontrar invariantes de uma maneira simples. Além disso, a implementação dos vínculos na teoria quântica começa a gerar contas bastante complicadas. Ao invés de continuar seguindo essa abordagem, vamos atacar o problema utilizando as propriedades que obtivemos ao se explorar a supersimetria.

5.3 O Modelo BF Supersimétrico

Aplicaremos agora as definições e conceitos fundamentais para o modelo BF supersimétrico, da mesma forma como foi feito para o BF 2d, e seguindo os resultados em

[23].

5.3.1 Superholonomias

Da derivada covariante que depende da superconexão $\mathcal{A}$, podemos definir a superholonomia para o transporte paralelo no superespaço:

$$\mathbf{H}_\gamma[\mathcal{A}] = \mathbf{H}_\gamma[A, B] = \mathcal{P}e^{\int_\gamma \mathcal{A}} = \mathcal{P}e^{\int_\gamma dx \mathcal{A}_x^i(x,\theta)T_i} = \mathcal{P}e^{\int_\gamma (A+\theta B)} \tag{5.62}$$

Fatorando a holonomia ao longo de vários caminhos infinitesimais:

$$\mathbf{H}_\gamma[A + \theta B] \approx (1 + A\delta x_1 + \theta B\delta x_1)...(1 + A\delta x_\epsilon + \theta B\delta x_\epsilon)...(1 + A\delta x_N + \theta B\delta x_N) \tag{5.63}$$

Considerando intervalos de tamanhos aproximadamente iguais (infinitesimalmente pequenos), e separando os termos em θ:

$$\mathbf{H}_\gamma[A + \theta B] = (1 + A\delta x)^N + \theta \sum_{\epsilon=1}^{N} (1 + A\delta x)^{\epsilon-1} B(x_\epsilon)\delta x_\epsilon (1 + a\delta x)^{N-\epsilon-1} \tag{5.64}$$

No limite $N \to \infty$, $\delta x \to 0$:

$$\mathbf{H}_\gamma[A + \theta B] = h_\gamma[A] + \theta \int_{x_i}^{x_f} dx h_{x_f x}[A] B(x) h_{x x_i}[A] \tag{5.65}$$

Podemos definir o segundo termo como:

$$B \triangleright h_\gamma[A] = \int_{x_i}^{x_f} dx h_{x_f x}[A] B(x) h_{x x_i}[A] \tag{5.66}$$

Das propriedades de supersimetria, temos um dubleto:

$$Q h_\gamma[A] = B \triangleright h_\gamma[A], \quad Q(B \triangleright h_\gamma[A]) = 0 \tag{5.67}$$

Dessa maneira, podemos escrever a superholonomia como:

$$\mathbf{H}_\gamma[\mathcal{A}] = \mathbf{H}_\gamma[A, B] = h_\gamma[A] + \theta Q h_\gamma[A] \tag{5.68}$$

A superholonomia possui a propriedade de composição de caminhos:

$$\mathbf{H}_{\gamma_1 \circ \gamma_2}[\mathcal{A}] = \mathbf{H}_{\gamma_1}[\mathcal{A}]\mathbf{H}_{\gamma_2}[\mathcal{A}] \tag{5.69}$$

Abrindo nas componentes e separando os termos em θ deduz-se que:

$$h_{\gamma_1 \circ \gamma_2}[A] = h_{\gamma_1}[A] h_{\gamma_2}[A] \tag{5.70}$$

$$B \triangleright h_{\gamma_1 \circ \gamma_2}[A] = (B \triangleright h_{\gamma_1}[A]) h_{\gamma_2}[A] + h_{\gamma_1}[A](B \triangleright h_{\gamma_2}[A]) \tag{5.71}$$

Da mesma forma, a partir da lei de transformação da superholonomia:

$$\mathbf{H}'_\gamma[\mathcal{A}] = \mathcal{G}^{-1}(x_f)\mathbf{H}_\gamma[\mathcal{A}]\mathcal{G}(x_i) \tag{5.72}$$

obtemos as transformações das suas componentes:

$$h'_\gamma[A] = g^{-1}(x_f) h_\gamma[A] g(x_i) \tag{5.73}$$

$$(B \triangleright h_\gamma[A])' = g^{-1}(x_f)\{B \triangleright h_\gamma[A] - (\beta \triangleright g(x_f)) g^{-1}(x_f) h_\gamma[A] + h_\gamma[A](\beta \triangleright g(x_i)) g^{-1}(x_i)\} g(x_i) \tag{5.74}$$

Note que a ultima equação possui a mesma forma da lei de transformação da inserção-β em (4.50).

5.3.2 Observáveis Clássicos

Como observáveis precisamos encontrar grandezas invariantes de calibre. O superlaço de Wilson é um forte candidato:

$$W = Tr(\mathbf{H}[\mathcal{A}]) \tag{5.75}$$

Uma vez que é invariante pela propriedade do traço quando $x_i = x_f$. Porém, mais interessante é analisar suas componentes, o que queremos para resolver o problema do acoplamento com matéria topológica. Tomemos então os observáveis:

$$W_0 = Tr(h[A]), \quad W_1 = Tr(B \triangleright h[A]) \tag{5.76}$$

A invariância desses observáveis segue das propriedades do traço e das transformações (5.73) e (5.74). Além disso eles formam um dubleto:

$$QW_0 = W_1, \quad QW_1 = 0 \tag{5.77}$$

Outra grandeza invariante que poderíamos encontrar em analogia com o BF 2d seria o traço do supercampo Φ, porém é nulo devido à paridade ímpar. As grandezas não nulas que podemos encontrar são:

$$L_0 = Tr(\psi\phi) = \psi^i\phi_i, \quad L_1 = Tr(\phi^2) = \phi^i\phi_i, \tag{5.78}$$

que também formam um dubleto:

$$QL_0 = L_1, \quad QL_1 = 0 \tag{5.79}$$

Para provar, lembremos do dubleto em (4.3).

$$\begin{aligned} QL_0 &= Tr(Q\psi^i\phi_i + \psi^i Q\phi_i) = \\ &= Tr(\phi^i\phi_i + 0) = L_1 \qquad (5.80) \\ QL_1 &= Tr(Q\phi^i\phi_i + \phi^i Q\phi_i) = 0 \qquad (5.81) \end{aligned}$$

5.3.3 O Espaço de Hilbert

Para construir o espaço de Hilbert, utilizaremos os funcionais de onda como funções cilíndricas, da forma:

$$\Psi[\mathcal{A}] = \Psi[A, B] = f(h[A], B \triangleright [A]) \tag{5.82}$$

onde as holonomias são definidas numa curva γ em S^1, que omitimos para simplificar a notação. Os campos, transformados em operadores, serão representados por:

$$\hat{A}_x(x)\Psi[A,B] = A_x(x)\Psi[A,B], \quad \hat{\phi}_x(x)\Psi[A,B] = i\hbar\tfrac{\delta}{\delta A_x}\Psi[A,B] \tag{5.83}$$

$$\hat{B}_x(x)\Psi[A,B] = B_x(x)\Psi[A,B], \quad \hat{\psi}_x(x)\Psi[A,B] = i\hbar\tfrac{\delta}{\delta B_x}\Psi[A,B] \tag{5.84}$$

e seus parênteses de Poisson (4.22) se tornarão (anti)comutadores, conforme a paridade dos campos:

$$[\hat{A}^i_x(x), \hat{\phi}_j(y)]_- = i\hbar\delta^i_j\delta(x-y), \quad [\hat{B}^i_x(x), \hat{\psi}_j(y)]_+ = -i\hbar\delta^i_j\delta(x-y) \tag{5.85}$$

Os vetores dos estados físicos, pertencentes ao espaço H_fis serão obtidos ao se imporem os vínculos de (4.26). Os funcionais de onda serão invariantes, dados por funções dos Laços de Wilson W_0 e W_1:

$$\Psi[A,B] = f(W_0[A], W_1[A,B]) = \psi(h[A], \beta \triangleright h[A]), \tag{5.86}$$

que continua sendo uma função das holonomias e suas inserções-B, sendo assim uma função no supergrupo de calibre **G**. Aproveitando a paridade ímpar de W_1, podemos expandir a função f em W_1 para obter sua forma mais geral possível:

$$f(W_0[A], W_1[A,B]) = a(W_0[A]) + W_1[A,B]b(W_0[A]) \tag{5.87}$$

onde a e b são funções de W_0. Se $\tilde{b}$ é uma primitiva de b, tal que $b = \frac{\delta\tilde{b}}{\delta W_0}$, e lembrando do dubleto em (5.76) podemos reescrever a última equação como:

$$f(W_0[A], W_1[A,B]) = a(W_0[A]) + QW_0[A]\frac{\delta}{\delta W_0}\tilde{b}(W_0[A]) = a(W_0[A]) + Q\tilde{b}(W_0[A]) \tag{5.88}$$

Isso mostra que o espaço dos funcionais de onda invariantes de calibre no supergrupo se separam em representações de singleto e dubleto da supersimetria rígida. Os singletos são as funções constantes. Esse resultado nos dá também dois tipos de funcionais de onda, devido à sua paridade:

$$\text{Par:} \qquad \Psi_+[A,B] = f_+(W_0[A]) = \psi_+(h[A]) \tag{5.89}$$

$$\text{Ímpar:} \qquad \Psi_-[A,B] = Qf_-(W_0[A]) = W_1\psi_-(h[A]) = Tr(B \triangleright h[A])\psi_-(h[A]) \tag{5.90}$$

O Produto escalar

O produto escalar entre dois vetores de estado (5.86) será definido por uma integral no supergrupo de calibre $\mathbf{G}$ de elementos $\mathcal{G}$:

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int_{\mathbf{G}} d\mu(\mathcal{G})\overline{\psi_1(\mathcal{G})}\psi_2(\mathcal{G}) \tag{5.91}$$

onde a parametrização do elemento $\mathcal{G} \in \mathbf{G}$ depende de parâmetros bosônicos (α) e fermiônicos β. Nesse caso é possível construir a medida de integração $d\mu(\mathcal{G})$ que torna o produto escalar invariante. Ela é composta basicamente por uma medida de Haar sob os parâmetros bosônicos e uma medida de Berezin sobre os parâmetros fermiônicos [23].

5.3.4 Representação em Redes de *Spin*

Levando em conta a paridade das funções obtidas em (5.90), escrevemos:

$$\begin{aligned} \Psi_+[A,B] &= \langle A,B|j+\rangle = Tr[R^{(j)}(h[A])] \\ \Psi_-[A,B] &= \langle A,B|j-\rangle = QTr[R^{(j)}(h[A])] \end{aligned} \tag{5.92}$$

e a partir do Teorema de Peter-Weyl, podemos expandir nosso funcional de onda (5.86) do espaço físico H_{fis} como:

$$\begin{aligned} \Psi[A,B] &= \sum_j \{c_j^+ Tr[R^{(j)}(h[A])] + c_j^- QTr[R^{(j)}(h[A])]\} \\ &\text{ou} \\ |\Psi\rangle &= \sum_j \{c_j^+|j+\rangle + c_j^-|j-\rangle\} \end{aligned} \tag{5.93}$$

onde $R^{(j)}$ é a matriz de representação de *spin* j de $g \in SU(2)$, com $(j = 0, \frac{1}{2}, 1, ...)$. Além disso, a parte par da expansão acima não depende de B e corresponde à base do modelo

BF bidimensional puro, da seção (5.1). O único singleto supersimétrico é o estado de *spin* nulo $|0\rangle$. Para os dubletos temos:

$$\hat{Q}|j+\rangle = |j-\rangle, \quad \hat{Q}|j-\rangle = 0 \tag{5.94}$$

5.3.5 Quantização dos Observáveis

Transformando em operadores os observáveis definidos na seção (5.3.2), temos na polarização utilizada:

$$\begin{aligned} \hat{W}_0\Psi[A,B] = W_0\Psi[A,B] \quad &, \quad \hat{W}_1\Psi[A,B] = W_1\Psi[A,B] \\ \hat{L}_0\Psi[A,B] = Tr(\hat{\psi}\hat{\phi})\Psi[A,B] \quad &= \quad -\hbar^2 Tr(\frac{\delta}{\delta A(x)}\frac{\delta}{\delta B(x)})\Psi[A,B] \\ \hat{L}_1\Psi[A,B] = Tr(\hat{\phi}\hat{\phi})\Psi[A,B] \quad &= \quad -\hbar^2 Tr(\frac{\delta}{\delta A(x)}\frac{\delta}{\delta A(x)})\Psi[A,B] \end{aligned} \tag{5.95}$$

Podemos escrever a representação do gerador de supersimetria Q como operador nessa polarização por:

$$\hat{Q} = \frac{i}{\hbar}\int dx \hat{B}(x)\hat{\phi}(x) = \int dx B(x)\frac{\delta}{\delta A(x)} \tag{5.96}$$

A partir dessa definição, obtêm-se as relações de (anti)comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{Q},\hat{A}]_- = \hat{B} \quad &, \quad [\hat{Q},\hat{B}]_+ = 0 \\ [\hat{Q},\hat{\psi}]_+ = \hat{\phi} \quad &, \quad [\hat{Q},\hat{\phi}]_- = 0 \end{aligned} \tag{5.97}$$

A partir delas, obtemos:

$$[\hat{L}_0,\hat{Q}]_+ = L_1 \quad , \quad [\hat{L}_1,\hat{Q}]_- = 0 \tag{5.98}$$

Note que o operador $\hat{L}_1$ é equivalente ao operador $\hat{L}$ do modelo BF puro. Com um cálculo análogo ao feito com o BF puro temos:

$$\hat{L}_1 R^{(j)}(h[A]) = \hbar^2 j(j+1) R^{(j)}(h[A]) \tag{5.99}$$

Combinando os resultados acima obtemos:

$$\hat{L}_0|j+\rangle = 0 \quad , \quad \hat{L}_0|j-\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j+\rangle,$$
$$\hat{L}_1|j+\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j+\rangle \quad , \quad \hat{L}_1|j-\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j-\rangle \tag{5.100}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
\hat{W}_0^{(j)}|0\rangle &= |j+\rangle \\
\hat{W}_1^{(j)}|0\rangle &= [\hat{Q}, \hat{W}_0^{(j)}]|_-0\rangle = \\
&= \hat{Q}|j+\rangle - \hat{W}_0^{(j)}\hat{Q}|0\rangle = \\
&= |j-\rangle
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Cada dubleto $|j+\rangle, |j-\rangle$ é autoestado do observável bosônico $\hat{L}_1$ com o mesmo autovalor $\hbar^2 j(j+1)$. O operador fermiônico $\hat{L}_0$ atuam como operadores escada mudando entre os subespaços par e ímpar, mantendo o estado no subespaço de *spin* j. Os observáveis $\hat{W}_0^{(j)}$ e $\hat{W}_1^{(j)}$ permitem obter estados de *spin* e paridade genéricos, $|j+\rangle$ e $|j-\rangle$ respectivamente, a partir do estado fundamental, o singleto $|0\rangle$.

Capítulo 6

Conclusões

Fizemos uma revisão do modelo BF bidimensional, desenvolvendo um roteiro para a quantização de Laços, e expondo os principais conceitos envolvidos. Sendo o modelo BF uma teoria puramente topológica, obtivemos vínculos que geram transformações de calibre para os campos. Além disso, a Hamiltoniana é completamente vinculada, de modo que a evolução do sistema é dada unicamente por transformações de calibre, que contêm também os difeomorfismos. Na quantização do modelo, obtivemos 2 observáveis W e L, sendo o segundo um operador com espectro discreto.

Fizemos uma revisão do formalismo hamiltoniano para o modelo BF acoplado com matéria topológica, obtendo também uma teoria de calibre com uma hamiltoniana completamente vinculada, cujos campos são todos dinâmicos, isto é, não temos *background* fixado. Mostramos uma tentativa de se fazer a quantização de Laços do modelo sem a utilização de um grupo de calibre geral, e os obstáculos que surgem em conta disso.

Realizamos a análise canônica do modelo BF bidimensional supersimétrico, mostrando a equivalência com o modelo BF acoplado com matéria topológica. Com a equivalência, percebemos propriedades através da supersimetria que antes não conseguíamos enxergar, e que foram fundamentais para definir um supergrupo geral de calibre e realizar a quantização de Laços do modelo acoplado.

Comparando a realização do estudo com e sem supersimetria, percebemos a importância da boa definição de um supergrupo para a quantização de uma teoria de calibre, e facilidade que possuir uma simetria adicional gera para resolver o problema. Conseguimos com isso realizar uma quantização completa do modelo e a construção dos observáveis.

Como sugestão para trabalhos futuros sugerimos a quantização do modelo BF supersimétrico em 2+1 dimensões, que irá possuir difeomorfismos que não fazem parte das transformações de calibre, verificar se corresponde a algum acoplamento com matéria topológica, e realizar a quantização de Laços do modelo.

Apêndice A

Definições

Descrevemos a seguir as principais definições utilizadas ao longo do trabalho. Repare que as definições são tais a podermos trabalhar com uma ação invariantes de calibre. Estamos considerando 1 dimensão de espaço (x) e 1 de tempo (t).

A.1 Índices

Índices latinos $(i, j, k, ...)$ são índices de grupo e assumem valores dependendo do grupo fixado.

Índices gregos $(\mu, \nu, \rho, ...)$ representam as coordenadas, assumindo valores $(0, 1) = (t, x)$

A.2 A Derivada Covariante de um Campo

A base dos campos é dada pelos base dos geradores T_i do grupo, satisfazendo:

$$[T_i, T_j] = f_{ij}{}^k T_k \tag{A.1}$$

Assim escrevemos um campo arbitrário como:

$$X(x) = X^i(x) T_i \tag{A.2}$$

Chamamos de derivação exterior de uma p-forma $X = \frac{1}{p!} X_{\mu_1 \ldots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}$ a seguinte operação:

$$dX = dx^\mu \wedge \partial_\mu X \tag{A.3}$$

Note que essa definição implica pela simetria impar do produto *wedge*:

$$d^2 = dd = 0 \tag{A.4}$$

Mas essa derivada não obedece a mesma lei de transformação de X. Isto é, se X se transforma na representação adjunta:

$$X'(x) = g^{-1}(x)X(x)g(x) \tag{A.5}$$

então:

$$(dX)' = d(g^{-1}Xg) = g^{-1}dXg + dg^{-1}Xg + g^{-1}Xdg \tag{A.6}$$

Derivando a igualdade $gg^{-1} = 1$, obtemos as relações:

$$dgg^{-1} + gdg^{-1} = 0 \tag{A.7}$$

$$dg^{-1} = -g^{-1}dgg^{-1} \tag{A.8}$$

Com isso, podemos escrever a transformação da derivada exterior de um campo que se transforma na representação adjunta como:

$$(dX)' = g^{-1}dXg + g^{-1}Xdg - g^{-1}dgg^{-1}Xg = g^{-1}dXg + [g^{-1}Xg, g^{-1}dg] \tag{A.9}$$

Queremos uma derivada que se transforme de forma covariante assim como o campo nesse espaço, de forma a facilitar o trabalho utilizando objetos covariantes. Isto é, quando fizermos transformações de grupo, queremos utilizar objetos que mantém a mesma forma após essas transformações. Então definimos uma Conexão $A(x) = dx^\mu A^i_\mu(x)T_i$ que se transforma como:

$$A'(x) = g^{-1}(x)A(x)g(x) + g^{-1}(x)dg(x) \tag{A.10}$$

Definimos assim a derivada covariante:

$$DX = dX + [A, X], \tag{A.11}$$

que também se transforma na representação adjunta:

$$(DX)' = g^{-1} DX g \tag{A.12}$$

A.3 Transformações Infinitesimais

Escrevemos nosso elemento de grupo na forma:

$$g = e^{\alpha} = 1 + \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2), \tag{A.13}$$

onde $\alpha = \alpha^i T_i$ corresponde a um parâmetro infinitesimal, elemento da álgebra de Lie do grupo de calibre. Existe a inversa:

$$g^{-1} = e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{A.14}$$

Seguem-se então a partir dessas expansões, tomando o termo de primeira ordem em α, as transformações infinitesimais:

$$\delta A = A' - A = D\alpha \tag{A.15}$$

$$\delta X = X' - X = [X, \alpha] \tag{A.16}$$

Para calcular o comutador de 2 campos precisamos da base de geradores:

$$[X, Y] = [X^j T_j, Y^k T_k] = X^j Y^k [T_j, T_k] = f_{jk}{}^i X^j Y^k T_i, \tag{A.17}$$

que podemos escrever como:

$$[X, Y]^i = f^i{}_{jk} X^j Y^k, \tag{A.18}$$

onde $f^i{}_{jk}$ são as constantes de estrutura do grupo de calibre.

A.4 A Curvatura de Yang-Mills

A curvatura de Yang-Mills é a 2-forma:

$$F = dA + A \wedge A \tag{A.19}$$

Em componentes:

$$F^i T_i = \frac{1}{2} F^i_{\mu\nu} T_i dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu A^i_\nu T_i dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{1}{2} A^j T_j A^k T_k dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{A.20}$$

Como $dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\mu \otimes dx^\nu$, só é relevante a parte antissimétrica, então segue-se que:

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + [A_\mu, A_\nu]^i \tag{A.21}$$

Da lei de transformação da conexão A, segue-se que, se X se transforma na representação adjunta:

$$F' = g^{-1} F g \tag{A.22}$$

Pode-se mostrar também que

$$D^2 X = [F, X], \tag{A.23}$$

onde:

$$D^2 = \frac{1}{2} [D_\mu, D_\nu] dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{A.24}$$

Vamos calcular agora a derivada covariante de F:

$$DF = d(dA + A \wedge A) + [A, dA + A \wedge A] = \tag{A.25}$$

$$dA \wedge A - A \wedge dA + A \wedge dA - dA \wedge A + A \wedge A \wedge A - A \wedge A \wedge A \tag{A.26}$$

Assim obtemos uma importante equação, a identidade de Bianchi:

$$DF = 0 \tag{A.27}$$

Note que em 2 dimensões não existe uma 3-forma. Então a identidade de Bianchi

DF=0 é uma trivialidade nesse caso e não acrescenta nenhuma propriedade ao modelo. Entretanto é uma propriedade baste útil em cálculos em dimensões superiores. Além disso, se a curvatura F é nula, ela será invariante sob transformações de calibre e difeomorfismos. Logo, independente de uma escolha de calibre ou de sistema de coordenadas, o espaço permanecerá plano.

Apêndice B

Definições para Supersimetria

Trabalhamos com a supersimetria $N = 1$, que possui apenas um gerador. Definimos aqui a coordenada θ e mostramos suas propriedades, assim como a integração no superespaço e os supercampos. Para mais detalhes, ver [27].

B.1 O Número de Grassmann

Definimos uma coordenada fermiônica (com paridade de Grassmann ímpar) θ anticomutante:

$$\{\theta, \theta\} = \theta\theta + \theta\theta = 0 \tag{B.1}$$

Essa definição implica:

$$\theta^2 = 0 \tag{B.2}$$

Dessa maneira, uma função de θ será sempre da forma:

$$f(\theta) = f_0 + \theta f_1 \tag{B.3}$$

Definimos a derivada em θ como uma operação algébrica:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\theta = 1 \tag{B.4}$$

B.2 A integral de Berezin

A integral de Berezin é definida pelas seguintes propriedades, de maneira a ser invariante sob translações $\theta \to \theta + \alpha$:

$$\int d\theta = 0 \tag{B.5}$$

$$\int d\theta\theta = 1 \tag{B.6}$$

Vejamos:

$$\int d\theta f(\theta + \alpha) = \int d\theta(f_0 + \theta f_1 + \alpha f_1) = \int d\theta f(\theta) \tag{B.7}$$

Com isso, podemos definir uma ação que seja invariante sob translações em θ. Note ainda que a integração tem as mesmas propriedades da derivada algébrica. Podemos escrever formalmente:

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) \tag{B.8}$$

Uma outra propriedade importante é a do delta de Dirac:

$$\delta(\theta) = \theta \tag{B.9}$$

Vejamos:

$$\int d\theta\theta f(\theta) = \int d\theta\theta(f_0 + \theta f_1) = f_0 = f(0) \tag{B.10}$$

Isso também implica uma propriedade ímpar:

$$\delta(-\theta) = -\theta = -\delta(\theta) \tag{B.11}$$

Generalizemos:

$$\int d\theta\delta(\theta - \tau) f(\theta) = \int d\theta(\theta - \tau)(f_0 + \theta f_1) = \int d\theta(\theta f_0 - \tau f_0 - \tau\theta f_1) \tag{B.12}$$

Como a coordenada é anti-comutante, então $\tau\theta = -\theta\tau$, de modo que:

$$\int d\theta\delta(\theta - \tau) f(\theta) = f_0 + \tau f_1 = f(\tau) \tag{B.13}$$

B.3 Supercampos

Um supercampo $\varphi(x, \theta)$ pode ser escrito como uma soma de campos bosônicos e fermiônicos da seguinte forma:

$$\varphi(x, \theta) = \varphi_0(x) + \theta\varphi_1(x), \tag{B.14}$$

onde $x = (x^\mu)$ são as coordenadas de espaço-tempo, e suas componentes $\varphi_0(x)$ e $\varphi_1(x)$ são ditas bosônicas se forem par, ou fermiônicas se ímpar. A paridade de uma componente deve ser diferente da paridade da outra, de modo que o supercampo $\varphi(x, \theta)$ tenha uma paridade bem definida.

Os supercampos são principalmente definidos por suas transformações supersimétricas, que são geradas pelo operador nilpotente $Q : Q^2 = 0$ que atua como:

$$Q\varphi = \frac{\partial}{\partial\theta}\varphi \tag{B.15}$$

Em componentes:

$$Q(\varphi_0 + \theta\varphi_1) = \frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi_0 + \theta\varphi_1) \tag{B.16}$$

$$Q\varphi_0 - \theta Q\varphi_1 = \varphi_1 \tag{B.17}$$

O que resulta:

$$Q\varphi_0 = \varphi_1 \tag{B.18}$$

$$Q\varphi_1 = 0 \tag{B.19}$$

Dizemos então que φ_0 e φ_1 constituem um dubleto supersimétrico.

Apêndice C

A definição do produto escalar

Colocamos aqui os principais teoremas que permitem a definição do produto escalar utilizado para as funções cilíndricas, e representações unitárias dos funcionais de onda. Para mais detalhes, ver [25], [26] e [28].

C.1 A Medida de Haar

Sejam g e h elementos de um grupo G, e $f : G \to \mathbb{C}$ um funcional. Definimos a média de f em G por:

$$\mu(f) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f(g) \tag{C.1}$$

onde $\#G$ é o número de elementos do grupo G discreto e finito. É fácil ver que essa média é invariante por multiplicação pelos elementos do grupo ou inversão do argumento do funcional:

$$\mu(f(g)) = \mu(f(g^{-1})) = \mu(f(gh)) = \mu(f(hg)) = \mu(f(h^{-1}gh)) \tag{C.2}$$

Uma vez que se para cada elemento de grupo há uma inversa, então o número de elementos inversos e igual ao dos elementos; e também pelo fato de produtos de elementos de grupo ser também elementos de grupo, o número total de resultados de produtos de elementos é igual ao número de elementos do grupo.

C.2 O Teorema de Haar

Seja $g \in G$, G um grupo de Lie compacto. Então existe uma medida de integração $d\mu(g)$ em G, denominada "medida de Haar", tal que se a média

$$\mu(f(g)) = \int_G f(g)d\mu(g) \tag{C.3}$$

é bem definida, tem-se para todo $h \in G$:

$$\mu(f(g)) = \mu(f(g^{-1})) = \mu(f(gh)) = \mu(f(hg)) = \mu(f(h^{-1}gh)) \tag{C.4}$$

Além disso, temos as seguintes propriedades: (i) $\int_G d\mu(g) = 1$ (normalizável)

(ii) Se $f(g) \geq 0$ então $\int_G f(g)d\mu(g) \geq 0$ (positiva)

(iii) Se $f(g) \geq 0$ e $\int_G f(g)d\mu(g) = 0$, então $f(g) = 0$ para quase todo $g \in G$, isto é, exceto para um número finito de elementos g. (análogo ao caso de funções descontínuas)

Repare que isso é uma generalização em termos de grupos do que já conhecemos para as funções reais ou complexas. O teorema também pode ser estendido para grupos localmente compactos.

C.3 O Teorema de Peter-Weyl

Seja $R^\alpha : G \to GL(\mathcal{H})$ uma representação do grupo G no espaço dos operadores matriciais que atuam sobre algum espaço de Hilbert, tais que $R(g) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. $\{R^\alpha\}, \alpha \in \Lambda$ é o conjunto de todas as representações unitárias de dimensão finita e não-equivalentes entre si de G, e Λ o conjunto do índices que rotulam cada representação. $R^\alpha_{ij}(g)$ são seus elementos de matriz, com $i, j = 1, ..., d_\alpha$, onde d_α é a dimensão da matriz. E seja $d\mu(g)$ uma medida de Haar de G.

A primeira parte Teorema de Peter-Weyl [26] diz que que:

$$\int_G \overline{R^\alpha_{ij}(g)} R^\beta_{kl}(g) d\mu(g) = \frac{1}{d_{(\alpha)}} \delta^{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{C.5}$$

onde $d_{(\alpha)}$ é a dimensão do subespaço de representação α. A segunda parte do teorema diz que as funções R^α_{ij} formam uma base ortogonal completa no espaço de Hilbert $\mathcal{L}^2(G, d\mu)$.

Assim, qualquer função $f \in \mathcal{L}^2(G, d\mu)$ pode ser escrita na forma:

$$f(g) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{i,j=1}^{d_{(\alpha)}} a_{ij}^{\alpha} R_{ij}^{\alpha}(g) \tag{C.6}$$

onde:

$$a_{ij}^{\alpha} = d_{(\alpha)} \int_G \overline{R_{ij}^{\alpha}(g)} f(g) d\mu(g) \tag{C.7}$$

Note que a expansão em série de Fourier de funções reais ou complexas é um caso particular do teorema de Peter-Weyl para o grupo $U(1)$. Parametrizando um elemento $g \in U(1)$ por $\theta \in [-\pi, \pi]$ temos:

$$\begin{aligned}
d\mu(g) &= \frac{d\theta}{2\pi} \\
R^n(g) &= e^{in\theta} \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} e^{-im\theta} &= \delta^{mn} \\
f(\theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\theta} \\
f_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} f(\theta)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Referências Bibliográficas

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe. *Quantum Mechanics.* Hermann, Paris, 1977.

[2] A. Einstein. *The Meaning of Relativity.* Princeton University Press, 1988.

[3] Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity.* Oxford University Press, Oxford, UK, 1995.

[4] R. M. Wald. *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.

[5] R. A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory.* Clarendon Press, Oxford, 1996.

[6] L. Smolin. *Three Roads to Quantum Gravity.* Basic Books, 2002.

[7] J. Bedford. *An Introduction to String Theory.* arXiv:1107.3967v3 [hep-th] 7 Jun 2012.

[8] C. Rovelli. *Quantum Gravity.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[9] A. Ashtekar. *Introduction to Loop Quantum Gravity.* arXiv:1201.4598v1 [gr-qc] 22 Jan 2012.

[10] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry.* North-Holland Publisher Company, Amsterdam, 1980.

[11] R. Gambini, J. Pullin, *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity.* Cambridge University Press, UK, 1996.

[12] M. Gaul, C. Rovelli. *Loop Quantum Gravity and the Meaning of Diffeomorphism Invariance.* arXiv:gr-qc/9910079v2 20 Dec 1999.

[13] E. Witten. *(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System.* Nucl. Phys. B311, 46 (1988).

[14] R. Jackiw. *Quantum Theory of Gravity.* Edited by S. Christensen (Hilger, Bristol,1984); C. Teitelboim, Phys. Lett. B126 (1983) 41; C. Teitelboim. *Quantum Theory of Gravity*, edited by S. Christensen (Hilger, Bristol,1984).

[15] K. Isler, C. A. Trugenberger. *Gauge Theory of Two-Dimensional Quantum Gravity.* Phys. Rev. Lett. **63** (8), 1989.

[16] C. P. Constantinidis, J. A. Lourenço, I. Morales, O. Piguet, A. Rios. *Canonical Analysis of the Jackiw-Teitelboim Model in the Temporal Gauge. I. The Classical Theory.* arXiv:0802.0112v2 [gr-qc] 17 Feb 2008.

[17] C. P. Constantinidis, O. Piguet, A. Perez. *Quantization of the Jackiw-Teitelboim model.* arXiv:0812.0577v3 [gr-qc] 24 Jul 2009.

[18] R. Leitgeb, M. Schweda and H. Zerrouki *Finiteness of 2D Topological BF-Theory with Matter Coupling.* Institut f¨ur Theoretische Physik, Technische Universit¨at Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040 Wien, Austria.

[19] Paul A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics.* Belfer Graduate School of Science, New York, 1964.

[20] M. Henneaux. *Quantum Gravity in Two-Dimension: Exact Solution of Jackiw Model.* Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 959.

[21] E. R. Livine, A. Perez, C. Rovelli1. *2D manifold-independent spinfoam theory* arXiv:gr-qc/0102051v2 16 May 2003.

[22] A.H. Chamseddine, D. Wyler. Nucl. Phys. B340 (1990) 595; Phys. Lett. B228 (1989) 595.

[23] C. P. Constantinidis, R. Couto, I. Morales, O. Piguet. *Loop Quantization of the Supersymmetric Two-Dimensional BF Model.* arXiv:1203.1934v1 [gr-qc] 8 Mar 2012.

[24] J. Lewandowski, E. T. Newman, C. Rovelli. *Variations of the parallel propagator and holonomy operator and the Gauss law constraint*. J. Math. Phys. **34** (l0), October 1993.

[25] Haar, A. *Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*. Annals of Mathematics, 2 34 (1): 147-169, 1933.

[26] F. Peter, H. Weyl. *Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe*. Math. Ann. 97:737-755, doi:10.1007/BF01447892. 1927.

[27] M. F. Sohnius. *Introducing Supersymmetry*. PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters) 128, Nos. 2 & 3 (1985) 39?204.

[28] J. C. A. Barata. *Curso de Física-Matemática*. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.