

Dinâmica Cosmológica para Modelos de Interação Não-Lineares do Setor Escuro

Anna Paula Ramos Bacalhau

20 de fevereiro de 2012

Anna Paula Ramos Bacalhau

*Dinâmica Cosmológica para Modelos com
Interações Não-Lineares no Setor Escuro*

Vitória-ES

2012

Anna Paula Ramos Bacalhau

*Dinâmica Cosmológica para Modelos com
Interações Não-Lineares no Setor Escuro*

Dissertação apresentada como pré-requisito
para a obtenção do título de Mestre em Física

Orientador:
Winfried Zimdahl

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Vitória-ES

2012

Dissertação de Mestrado sob o título “*Dinâmica Cosmológica para Modelos com Interações Não-Lineares no Setor Escuro*”, defendida por Anna Paula Ramos Bacalhau, em Vitória, Estado do Espírito Santo, pela banca examinadora constituída por:

Prof. Dr. Winfried Zimdahl
Orientador

Prof. Dr. ??
Universidade de ??

Prof. Dr. ??
Universidade de ??

Aos meus avós: Delza, Levi, Lenice e João.

Resumo

Nesse trabalho consideramos um conjunto de interações entre matéria escura e energia escura proporcionais ao produto e/ou potências das densidades de energia e da energia total. Demonstramos que, sob determinadas condições, o estado final do Universo difere substancialmente do modelo padrão Λ CDM. Em particular, a razão entre as densidades de energia da matéria escura e da energia escura aproximam-se de um valor finito e estável ou oscila entorno dele. Soluções estacionárias desse tipo requerem uma equação de estado do tipo fantômica para a energia escura, embora não leve ao Big Rip. Mostramos que a solução analítica de um caso particular é consistente com os dados de supernovas do tipo Ia (SNIa) da amostra UNION2 e para uma classe de interações fizemos a classificação dos pontos críticos através da análise de sistemas dinâmicos segundo sua relevância para o problema da coincidência.

Abstract

We consider a set of non-linear interactions between dark matter and dark energy which comprises couplings proportional to products of (powers of) the energy densities of both dark components and of the total energy. We demonstrate that under such conditions the final state of the Universe may differ substantially from that of the standard Λ CDM model. In particular, the ratio of the energy densities of dark matter and dark energy may approach a stable finite value or oscillate about such a value. Stationary solutions of this type require a phantom-type “bare” equation of state of the dark energy which, however, does not lead to a big-rip singularity. A corresponding analytic solution for a particular case is shown to be consistent with the supernova type Ia (SNIa) data from the Union2 set. For a broader class of interactions, a dynamical system analysis classifies stationary points with emphasis on their potential relevance for the coincidence problem.

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 8
2	Cosmologia: Aspectos Teóricos	p. 10
2.1	Introdução à Relatividade Geral	p. 11
2.1.1	Geometria Diferencial e Física em Espaços Curvos	p. 13
2.1.2	Equações de Campo de Einstein	p. 16
2.2	O Modelo Padrão da Cosmologia	p. 18
2.2.1	O Princípio Cosmológico	p. 18
2.2.2	O Modelo Λ CDM:	p. 21
3	Interação no Setor Escuro	p. 25
3.1	O Problema da Coincidência Cósmica:	p. 25
3.2	Modelos de Interação: Relações Gerais	p. 28
4	Sistemas Dinâmicos: Estudo Qualitativo	p. 32
4.1	Sistema de EDO's Lineares Autônomas:	p. 33
4.1.1	Sistemas Planares:	p. 33
4.1.1.1	Atrator:	p. 34
4.1.1.2	Instável:	p. 35
4.1.1.3	Ponto de Sela:	p. 35

4.1.1.4	Foco Estável:	p. 36
4.1.1.5	Foco Instável:	p. 36
4.1.1.6	Centro:	p. 37
4.2	Sistema de EDO's Não-Lineares Autônomas:	p. 37
5	Modelos de Interação Não-Lineares	p. 41
5.1	Estudo Qualitativo de uma Classe de Modelos	p. 42
5.1.1	Pontos Críticos:	p. 42
5.1.2	Comportamento do Sistema em torno do Ponto Crítico:	p. 43
5.1.2.1	Atrator	p. 45
5.1.2.2	Foco Estável	p. 48
5.1.2.3	Centro	p. 49
5.2	Soluções Analíticas	p. 51
5.2.1	$Q = \gamma 3H \frac{\rho_m \rho_x}{\rho}$:	p. 51
5.2.2	$Q = \gamma 3H \frac{\rho_m^2}{\rho}$:	p. 53
5.2.3	$Q = \gamma 3H \frac{\rho_x^2}{\rho}$:	p. 53
5.3	Algumas considerações sobre o Universo temprano:	p. 56
6	Conclusão	p. 59
Apêndice A – Estatística Bayesiana e Supernovas do Tipo Ia:		p. 63
A.1	Teorema de Bayes:	p. 63
A.2	Aplicação à SNIa	p. 64
Referências		p. 67

Lista de Tabelas

- 1 Exemplos de interações que geram atratores. p. 46
- 2 Exemplo de interações que geram focos estáveis. p. 49
- 3 Exemplo de interações que geram centro. p. 51

Lista de Figuras

1	Diagrama publicado por Hubble em seu artigo de 1929 [15].	p. 21
2	Regiões de confiabilidade para testes com supernovas e gráfico da evolução das densidades de energia dos constituintes do Universo.	p. 27
3	Retrato de fase para o atrator.	p. 35
4	Retrato de Fase para o ponto crítico instável.	p. 36
5	Retrato de fase para o ponto de sela.	p. 37
6	Retrato de fase para o foco estável.	p. 38
7	Retrato de fase para o foco instável.	p. 39
8	Retrato de fase para o centro.	p. 40
9	Retrato de fase para a interação $Q = 3H\rho^{\frac{3}{2}}r(1+r)^{-2}$ em termos de ρ_m e ρ_x	p. 45
10	Dinâmica das variáveis r e Ω_T para a interação $Q = \gamma 3H\frac{\rho_x^2}{\rho}$ com a escolha arbitrária: $w = -1.1$ e $\gamma = 0.1$	p. 54
11	Dinâmica das variáveis r e Ω_T para o modelo Λ CDM.	p. 54
12	Regiões de confiabilidade no espaço de parâmetro (w, γ, Ω_{m0}) para um caso particular da interação $Q = \gamma 3H\frac{\rho_x^2}{\rho}$. Os contornos de 1σ , 2σ e 3σ são dados em vermelho azul e preto respectivamente.	p. 56

1 *Introdução*

Ciência vem do latim *scientia* e diz respeito a qualquer conjunto de práticas e conhecimentos sobre determinado objeto. Em particular, investigamos a Natureza desde os primórdios evolutivos da nossa espécie, porém foi em 1637 que René Descartes lançou os fundamentos da ciência moderna, o Método Científico. Hoje o método científico e o nosso instinto primitivo de observar o céu se encontram na Cosmologia para desvendar uma pergunta pretenciosa: como o Universo funciona?

Três fatos observacionais dos últimos 70 anos guiam a busca por um modelo que descreva o cosmos: a abundância de elementos leves na Nucleossíntese Primordial, a Radiação Cósmica de Fundo e a Expansão Acelerada do Universo. Essas evidências apontam o modelo Λ CDM e o modelo do Big Bang como uma resposta *parcial*: o primeiro por não explicar as componentes matéria e energia Escura (e os problemas conceituais decorrentes disso) e o segundo por não explicar a singularidade inicial. As brechas da teoria e a liberdade fornecida pelos dados observacionais na estimativa de parâmetros permite que inúmeros modelos fisicamente motivados ou não sejam propostos como alternativas aos modelos anteriores.

Nesse trabalho estamos interessados no comportamento tardio do Universo, onde encontramos o conhecido Problema da Coincidência Cósmica. A saber: porque atualmente matéria escura e constante cosmológica possuem aproximadamente a mesma densidade de energia se uma diminui com o tempo e a outra é uma constante? Como uma alternativa ao modelo Λ CDM propomos que no setor escuro há troca de energia. Tal comportamento caracteriza os modelos tratados nesse trabalho como Modelos de Interação.

Inicialmente proposto por Wetterich em 1988 [1], Modelos de Interação têm sido amplamente estudados na literatura ainda sem nenhuma evidência observacional que os descarte. Em geral os modelos acoplam as equações de fluido da energia e matéria escura

através de um termo de interação. Muitos dos modelos estudados na literatura remetem a termos de interação lineares nas densidade de energia. Nós, por outro lado, iremos explorar a dinâmica do universo frente a uma determinada classe de acoplamentos não-lineares seguindo a linha de referências como [2–5] e outros. Estudamos qualitativamente essas interações com a intenção de estabelecer vínculos tais que a dinâmica final do universo aliviasse conceitualmente o Problema da Coincidência Cósmica.

A dissertação é composta de seis capítulos. No **Capítulo 2** expomos a base conceitual da Cosmologia Moderna e especializamos no **Capítulo 3** para modelos cosmológicos com interação. O **Capítulo 4** é um resumo da ferramenta matemática utilizada para tratar o sistema de equações de interesse. Finalmente no **Capítulo 5** aplicamos essa ferramenta e extraímos informações qualitativas, através dos espaços de fase. Soluções analíticas são obtidas para três modelos particulares sendo um deles testado observacionalmente com supernovas do tipo Ia. Além disso discutimos brevemente como seria o cenário para a existência de uma Era da Matéria no universo temprano e quais restrições esse vínculo impõe aos parâmetros. Concluimos no **Capítulo 6** discutindo os resultados.

2 Cosmologia: Aspectos Teóricos

A cosmologia é uma das ciências mais antigas, pois se propõe, em sentido metafísico, a responder as questões: de onde viemos e para onde vamos.

No que concerne à Cosmologia como ciência física o foco da investigação é o Universo, sua origem e sua evolução. Com os avanços tecnológicos do séc XX foi possível à Cosmologia deixar de ser especulativa para ser observacional. Nesse contexto, muitas teorias sobre o universo puderam ser confrontadas experimentalmente e descartadas, ou não. Dentre essas teorias a que vingou com melhor sucesso sobre os dados é o modelo do Big Bang complementado pelo modelo de concordância Λ CDM, porém as respostas fornecidas por esses modelos são incompletas ainda e geram tanto soluções quanto problemas.

Dois fatos sobre a Cosmologia: primeiro que somos observadores dentro do experimento; segundo, esse experimento é, ao menos para a tecnologia e de um futuro não distante, único e impossível de ser repetido. Portanto para conhecer a natureza dos fenômenos cosmológicos devemos ser capazes de fazer física independente de referenciais e devemos saber tratar os dados obtidos desse experimento levando em conta nossa incapacidade em repeti-lo e nossa posição não-privilegiada de observação. Para que isso seja possível nos valem da Relatividade Geral, a ferramenta teórica, e da Estatística Bayesiana, a ferramenta experimental. Nesse capítulo os aspectos teóricos mais relevantes da Cosmologia serão apresentados. Inicialmente uma digressão breve sobre a Relatividade Geral, pois esta rege a interação relevante nas escalas de distância do sistema estudado e depois sua aplicação na busca por modelos que descrevam o Universo.

2.1 Introdução à Relatividade Geral

A teoria moderna da gravitação surgiu no ano de 1916 proposta por Albert Einstein e é conhecida como Relatividade Geral (RG), pois amplia a teoria de 1905, a Relatividade Restrita (RR). A RR é uma teoria desenvolvida para acomodar a Teoria Eletromagnética à física newtoniana. A RR é fundamentada sobre os seguintes postulados [6]:

- Princípio da Relatividade: A física é a mesma para referenciais inerciais.
- Princípio da Constância da Velocidade da Luz: A velocidade da luz, c , é a mesma independente da velocidade relativa entre o observador e a fonte.

Nas palavras de Einstein¹ :

[...] as tentativas sem sucesso de verificar que a Terra se move em relação ao “meio luminoso”[éter] levaram à conjectura de que, não apenas na mecânica, mas também na eletrodinâmica, não há propriedades observáveis associadas à idéia de repouso absoluto, mas as mesmas leis eletrodinâmicas e ópticas se aplicam a todos os sistemas de coordenadas nos quais são válidas as equações da mecânica[...]. Elevaremos essa conjectura (cujo conteúdo será daqui por diante chamado de “princípio da relatividade”) à posição de um postulado; e, além disso, introduziremos um outro postulado que é aparentemente inconsistente com o primeiro, a saber, que a luz no espaço vazio sempre se propaga com uma velocidade definida V que é independente do estado de movimento do corpo que a emite.

Os postulados de Einstein tiveram implicância direta no conceito de espaço e tempo. Para que fossem válidos era necessário escrever as leis físicas num formalismo covariante, ou seja, num formalismo em que pudessem ser entendidas independente do referencial. Nesse ponto surge a entidade espaço-tempo e os colorários mais importantes da RR: a dilatação do tempo, a contração do comprimento do espaço e a equivalência massa-energia.

A gravitacional newtoniana, foi desenvolvida no séc.XVII. Baseia-se na premissa de que o espaço é absoluto e portanto é possível definir referenciais privilegiados nos quais as leis físicas são invariantes sobre as Transformações de Galileu. Nesse contexto os corpos

¹EINSTEIN, Albert. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* **17**: 891-921, 1905.

que possuem massa interagem através de um campo gravitacional que é pontualmente caracterizado por uma força proporcional as massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos:

$$\vec{F} = G \frac{mM}{d^3} \vec{d} \quad (2.1)$$

Apesar de ser uma teoria muito bem estabelecida, a gravitação newtoniana não previa, por exemplo, a precessão do periélio de Mercúrio além de possuir problemas conceituais [7]. Se fizermos a massa de um dos corpos que interagem variar com o tempo então a força entre as massas é dada por:

$$\vec{F}(t) = G \frac{mM(t)}{d^3} \vec{d} . \quad (2.2)$$

Dessa forma uma massa m a uma distância d de $M(t)$ sentirá instantaneamente a mudança na intensidade da força gravitacional e isso é incompatível com o fato de c é a maior velocidade que faz sentido físico (consequência da matematização dos postulados) [7]. É preciso então reformular a gravitação para que seja compatível com a RR, partindo do pressuposto, bastante intuitivo, de que uma teoria que pretenda explicar a natureza deve ser válida em suas várias escalas, se não ela é, ao menos, incompleta.

A Relatividade Geral foi formulada para ser a teoria moderna da gravitação. Ela é dita geral, pois amplia os casos tratados pela RR para referenciais não-inerciais. Sua formulação iniciou com Albert Einstein guiado por alguns princípios filosóficos (alguns consenso na literatura outros não): Princípio de Mach, Princípio da Equivalência, Princípio da Covariância, Princípio do Mínimo Acoplamento Gravitacional e o Princípio da Correspondência [8]. Em geral na literatura apresenta-se o Princípio de Mach e o Princípio da Equivalência como guias da construção da RG.

O Princípio de Mach afirma que todo movimento é relativo. Ou seja, num universo de apenas uma partícula não há movimento, pois não há nada com relação ao que se mover. Por outro lado num universo de mais de uma partícula o movimento é sempre relativo e influenciado pela inércia gerada pela presença das outras partículas [8]. Do ponto de vista de Mach um referencial dito inercial é um referencial em movimento privilegiado com relação ao movimento médio dos constituintes do universo. Por exemplo, com relação à Terra o fundo de estrelas fixas é esse referencial privilegiado. A formulação desse princípio

é estritamente filosófica não havendo portanto uma matematização. Por outro lado, uma aplicação simplista do Princípio de Mach eleva todos os referenciais ao mesmo patamar então as leis físicas devem ser escritas de maneira que qualquer um deles seja capaz de detectá-las na natureza. Aqui nos aproximamos do Princípio Geral de Covariância o que nos leva naturalmente a trabalhar no formalismo tensorial para escrever as leis físicas.

O outro pilar da RG é chamado Princípio da Equivalência. A representação usual desse princípio é o “Gedankenexperiment”², onde um indivíduo dentro de um elevador não consegue ver o que se passa no seu exterior e realiza experimentos físicos. Se o elevador está parado sobre a superfície da Terra sujeito ao chamado “campo gravitacional” ou se está longe da ação do campo, porém *acelerado*, não há como distinguir com experimentos de mecânica os dois casos (Princípio da Equivalência Fraco). Podemos impor o Princípio de Equivalência também aos experimentos ópticos. Se um feixe de luz é emitido perpendicularmente à direção da aceleração do elevador então ele se curva já que não atinge a parede oposta num ponto colinear com o emissor. Se isso ocorre num elevador acelerado, então isso deve ocorrer num campo gravitacional (Princípio Forte de equivalência, pois é estendido à toda as leis físicas) [7]. Portanto pelo Princípio de Fermat³, num elevador acelerado a menor distância entre dois pontos não é uma reta, mas sim uma curva. Do princípio de equivalência o mesmo se passa num campo gravitacional. Através dessa argumentação heurística massa e geometria se associam para criar a Relatividade Geral [8].

2.1.1 Geometria Diferencial e Física em Espaços Curvos

A Geometria Diferencial é a matemática da RG. Seu formalismo permite escrever as leis físicas independente de referenciais além de acomodar melhor a descrição sobre espaços curvos. Alguns elementos da Geometria Diferencial serão abordados superficialmente a seguir, deixando o rigor matemático para nossas referências [7, 8].

O espaço-tempo concebido como entidade única é curvo devido a presença de massas, argumento central da RG. Devemos ser capazes de definir entidades matemáticas como vetores e produto escalar sobre o que chamamos de *variedade diferenciável* que, no nosso caso, é o espaço-tempo. Uma variedade diferenciável m -dimensional é um con-

²“experimento mental”

³A luz percorre a menor distância entre dois pontos

junto que pode ser mapeado em \mathbf{R}^m utilizando uma *carta* ou várias cartas (*atlas*). De maneira simplista: definimos sobre a variedade conceitos matemáticos para escrever as leis físicas e quando for preciso calcular com essas leis fazemos uma *coordenatização* no espaço dos números reais onde sabemos integrar, derivar, etc. Para tanto definimos duas entidades matemáticas: o vetor tangente a variedade (ou covariante) e as 1-formas (ou contravariante). Essas entidades são coordenada independentes e caracterizam um tensor. Assim um tensor (s p) é s vezes covariante e m vezes contravariante. As propriedades dos tensores é que carregam a informação física do sistema independente de coordenada. Representamos o tensor como sendo:

$$T = T^{\alpha\dots\beta}{}_{\lambda\dots\mu} e_\alpha \otimes \dots \otimes e_\beta \otimes \theta^\lambda \otimes \dots \otimes \theta^\mu, \quad (2.3)$$

onde e_μ e θ^μ são as bases dos vetores e das 1-formas respectivamente.

Para recuperar as estruturas matemáticas presentes, por exemplo na gravitação newtoniana e na teoria eletromagnética, operações como: produto escalar, derivação, integração, etc... devem ser representadas no formalismo tensorial. O produto escalar, por exemplo, é realizado através do *Tensor Métrico*, $g^{\mu\nu}$. A métrica é tal que a norma de um vetor qualquer v é dada por:

$$v^2 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = g_{11}(v^1)^2 + (g_{12} + g_{21})v^1 v^2 + etc... \quad (2.4)$$

Em espaços curvos um vetor, quando é transportado paralelo a si mesmo ao longo de uma curva fechada, não se assemelha ao original. Porém dentre os espaços tangentes associados à uma variedade é possível identificar uma classe de vetores tangentes *auto-paralelos*. No caso cartesiano dada uma linha reta, a tangente à essa linha num ponto é paralela a tangente em qualquer dos outros pontos. Em analogia, se um vetor é auto-paralelo quando transportado sobre uma determinada curva parametrizada $C(\gamma)$ então essa curva é uma **geodésica**. Isso significa que, assim como a linha reta no espaço euclidiano, C é o caminho mais próximo entre dois pontos. A curva C deve satisfazer a equação da geodésica, onde a derivação é feita em relação a parametrização γ :

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{k\lambda}^\rho \dot{x}^k \dot{x}^\lambda = 0. \quad (2.5)$$

A equação de movimento para a partícula livre é $\dot{\mathbf{p}} = 0$, onde \mathbf{p} é o momento linear da partícula. Se utilizamos a o princípio de covariância encontramos a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \Gamma_{\lambda\gamma}^\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (2.6)$$

que é precisamente a equação da geodésica. Ou seja, num espaço curvo uma partícula livre se comporta como uma partícula num campo gravitacional atuando num espaço plano, como dito no Princípio da Equivalência.

Se fazemos o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva fechada então podemos caracterizar a curvatura da variedade se comparamos o vetor antes e depois de transportado. Seja δV^β a variação da componente β do vetor \mathbf{V} quando transportado ao longo de uma curva fechada qualquer, então deduzimos que ela vale:

$$\delta V^\beta = \delta x^\mu \delta x^\nu \{ \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta + \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}^\beta - \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^\beta \} V^\alpha \quad (2.7)$$

Denominamos o **Tensor de Curvatura** ou **Tensor de Riemann**, $R_{\alpha\nu\mu}^\beta$:

$$R_{\alpha\nu\mu}^\beta = \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta + \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}^\beta - \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^\beta, \quad (2.8)$$

onde $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ são denominados **Símbolos de Christoffel**. Outras quantidades podem ser definidas a partir do tensor de Riemann, por exemplo o Tensor de Ricci e o Escalar de Ricci, respectivamente:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \quad (2.9)$$

$$R = R_\mu^\mu (= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}). \quad (2.10)$$

Um corolário da definição do Tensor de Riemann são as identidades de Bianchi:

$$R_{\nu\rho\sigma;\lambda}^\mu + R_{\nu\rho\lambda;\sigma}^\mu - R_{\nu\lambda\rho;\sigma}^\mu = 0, \quad (2.11)$$

onde o ; é a **derivação absoluta**, i.e., a variação do vetor e a variação da base ao longo da variedade.

2.1.2 Equações de Campo de Einstein

A RG deve possuir a Gravitação Universal como caso particular para que seja válida. O limite newtoniano é obtido quando consideramos campos fracos, estacionários e velocidades baixas, nessa situação a métrica deve ser apenas um pequeno desvio da métrica de Minkowski. Impondo essas considerações na equação da geodésica obtemos a seguinte expressão:

$$\ddot{x}^i = -c^2 \Gamma_{00}^i.$$

Uma observação interessante é que \ddot{x}^i é a aceleração da partícula, mas nesse contexto quem fornece a aceleração não é mais uma força e sim a curvatura do espaço está implícita nos símbolos de Christoffel. Vemos que o princípio de equivalência surge naturalmente quando consideramos as geodésicas de um espaço curvo. O símbolo de Christoffel pode ser escrito em termos da métrica da seguinte forma:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\nu\rho,\sigma} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\sigma,\rho}) \quad (2.12)$$

Utilizando essa expressão para uma das componentes da métrica:

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right), \quad (2.13)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional newtoniano. Então, como esperado, a distribuição de matéria determina a geometria do espaço-tempo. Devemos encontrar uma equação para a métrica tal que envolva a distribuição de matéria. Em analogia com as equações de campo (Laplace e Poisson) devemos obter equações que envolvam a segunda derivada da métrica (considerando a expressão anterior e recordando que a equação de Poisson contém $\nabla^2 \phi$), nesse caso o tensor de Riemann e suas contrações podem ser usadas. A parte que envolve a matéria é o tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$ que pode ser construído para cada sistema de interesse e que no caso do vácuo é identicamente nulo em todas as suas componentes. A primeira hipótese de Einstein era a seguinte expressão:

$$R_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}.$$

Segundo Lei de Conservação de Energia de antes da RG temos que $T_{\mu,\nu}^\nu = 0$ para

ser válido covariantemente devemos impor a derivação absoluta tal que $T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0$, mas, manipulando das identidades de Bianchi [7], sabemos que $R_{;\nu}^{\mu\nu} \neq 0$. Então a expressão acima não contempla os requisitos necessários. Ainda manipulando as identidades de Bianchi chegamos a seguinte expressão:

$$\left(R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}R \right)_{;\rho} = 0.$$

Definimos a expressão acima como $G^{\mu\nu}$, o Tensor de Einstein, tal que

$$G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$$

e a proporcionalidade com $T^{\mu\nu}$ é ajustada conforme o limite newtoniano. Obtemos então a **Equação de Einstein**:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

ou mais explicitamente:

$$R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}R = \frac{8\pi G}{c^2}T^{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

A Equação de Einstein é não-linear uma vez que ela se retroalimenta: curvatura gera energia e energia gera curvatura. Não há solução geral, mas para o caso do vácuo na vizinhança de uma distribuição de massa esférica temos a conhecida solução de Schwarzschild [7], essas hipóteses se aproximam muito para o caso do nosso Sistema Solar para uma região exterior ao Sol.

Uma vez construída a RG é possível identificar vários fenômenos associados à curvatura do espaço-tempo, por exemplo, o redshift gravitacional, ondas gravitacionais, buracos negros, precessão de periélios e deflexão de feixes luminosos sendo esse último o experimento considerado como prova da RG. Duas expedições uma à Guinéa e outra ao Brasil mediram a deflexão da luz durante o eclipse solar do ano de 1919 e com uma precisão da ordem de quatro casas decimais mostraram que a RG explicava o fenômeno [7, 8].

2.2 O Modelo Padrão da Cosmologia

Atualmente o Modelo do Big Bang e o modelo Λ CDM são os mais aceitos pela comunidade científica, apesar de possuírem o maior discrepância modelo-experimento, conhecido como Problema da Constante Cosmológica. A idéia de cosmos como sinônimo de ordem e perfeição associada a uma matemática mais tratável fez com que as primeiras hipóteses sobre seu funcionamento recaíssem sobre a estaticidade, homogeneidade e isotropia, os dois primeiros devido a Newton e o terceiro devido a uma generalização do princípio copernicano. As duas últimas hipóteses evoluíram para o patamar de Princípio Cosmológico e se por um lado facilitam a construção de modelos e são uma boa aproximação para os dados observacionais⁴, por outro são incansavelmente questionados [10].

2.2.1 O Princípio Cosmológico

A Cosmologia Moderna é construída sobre Princípio Cosmológico que possui o respaldo de duas evidências: a Radiação Cósmica de Fundo (Cosmic Microwave Background, CMB), distribuições de galáxias e abundância de elementos leves..

A CMB nos indica que um fundo de radiação, cujo espectro se assemelha ao de corpo negro e possui pico na faixa do microondas, chega até nós mantendo as mesmas propriedades físicas em qualquer direção no céu⁵. Essa radiação viajou até nós por 14 bilhões de anos e portanto conclui-se que, ao menos até essa escala, o Universo é **isotrópico**, i.e., possui as mesmas propriedades físicas em qualquer direção.

A homogeneidade do universo é concluída pela distribuição de galáxias. Uma vez que não somos observadores privilegiados, então conclui-se que qualquer um outro em qualquer outra parte do universo veria a mesma coisa, e portanto, o universo é **homogêneo** [11].

Na escala cosmológica a interação relevante é a gravidade descrita pra RG. As Equações de Campo de Einstein, (2.15), são não-lineares, portanto busca-se inicialmente as soluções mais simples. No caso de uma fonte de massa esféricamente simétrica temos a solução de Schwarzschild [7, 8]. Outra solução das equações de Einstein foi descoberta inicial-

⁴O confronto observação-modelo no âmbito da cosmologia é um tema de ampla discussão. Até que ponto utilizar modelos para interpretar dados e utilizar dados para escolher modelos não é um círculo vicioso que leva sempre aos mesmos resultados [9] ?

⁵As oscilações na temperatura da radiação são da ordem de $10^{-5} K$

mente por Friedmann⁶ e corresponde a única métrica possível que acomoda o princípio cosmológico, i.e., homogeneidade e isotropia. Quanto escrita para um referencial típico em queda livre, ou seja, um referencial comóvel, e em coordenadas esféricas toma a forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right] \quad (2.16)$$

O termo K remete á curvatura espacial, pois um o universo que satisfaça as hipóteses acima só pode ser plano ($K = 0$), esférico ($K = 1$) ou hiperbólico ($K = -1$). O termo $a(t)$ é conhecido como **fator de escala**, a razão com a qual os termos espaciais da métrica mudam com o tempo. Calculando a distância própria da origem até um desses referenciais comóveis encontramos:

$$d(r, t) = a(t)\mathbf{R}(r), \quad (2.17)$$

onde $\mathbf{R}(r)$ é $\text{sen}^{-1}(r)$ quando $K = 1$; $\text{senh}^{-1}(r)$ quando $K = -1$ e r quando $K = 0$. Se derivamos a expressão anterior em relação ao tempo temos:

$$\dot{d} = d \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.18)$$

Se $\frac{\dot{a}}{a} = 0$ temos um universo estático, $\frac{\dot{a}}{a} > 0$ um universo em expansão e $\frac{\dot{a}}{a} < 0$ um universo se contraindo. Devemos observar que as equações de campo de Einstein continuam sendo satisfeitas se acrescentamos um termo constante. Historicamente esse liberdade foi usado por Einstein para introduzir a **Constante Cosmológica**, Λ :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + g^{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}T^{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

A constante Λ seria necessária para contrabalancear a atração gravitacional, pois Einstein estava ainda sobre a idéia newtoniana do universo estático. Ainda em vida reconheceu o acréscido da constante cosmológica como um grande equívoco, porém sua constante foi ressuscitada á luz da expansão acelerada do Universo. A solução da equação anterior é a conhecida solução de de Sitter [7, 8, 11].

A Lei de Hubble

Em 1910 as primeiras observações feitas por Slipher [12] e posteriormente por Wirtz

⁶Foi independentemente obtiva por Lemaître, Robertson e Walker [11]

[13] e Lundmark [14] detectaram que o espectro de algumas nebulosas espirais possuía um desvio para o vermelho. Para medir esse desvio definimos uma grandeza denominada **redshift**. Utilizando um referencial de Robertson-Walker, i.e., com a origem no laboratório, e, considerando um feixe luminoso $d\tau^2 = 0$ que chega até nós radialmente, podemos integrar (2.16) e obter o intervalo de tempo que a luz gasta para sair da fonte até nós. Seja $(t_0, r_0, 0, 0)$ o evento “emissão da primeira frente de onda” e $(t_1, r_1, 0, 0)$ o evento “emissão da segunda frente de onda”, então o intervalo de tempo δt para essas frentes de onda chegarem até laboratório é dado por :

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.20)$$

Se consideramos esses sinais como sendo frente de ondas sucessivas, então em termos da frequência de emissão encontramos:

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (2.21)$$

Definimos :

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (2.22)$$

Se $a(t)$ aumenta então a frequência diminui e observamos um redshift nos espectro luminosos. Nesses caso z é positivo. Se $a(t)$ diminui então a frequência aumenta e observamos um blueshift, nesse caso z é negativo. a velocidade radial das fontes luminosas é dada por $v = zc$. Essa relação não significa que o movimento das galáxias inflinja a RR, pois para redshifts $z > 1$ não há significado físico a velocidade radial.

As observações de Slipher, Wirtz e Lundmark identificavam desvios, mas as galáxias observadas possuíam velocidade peculiar influenciado mais pelas interações gravitacionais de galáxias próximas do que por uma possível expansão ou contração do espaço. Para que fosse possível observar qualquer outro tipo de movimento é necessário redshifts da ordem de 10^{-3} . Em 1929 Edwin Hubble anuncia ter encontrado uma relação aproximadamente linear entre distância e redshift [15] utilizando observações somente até o aglomerado de Virgem. Somente em 1930 haviam medidas até o aglomerado de Coma com $z \approx 0.02$. Nessa escala foi possível verificar a relação linear entre o redshift e a distância própria. Essa relação ficou conhecida como Lei de Hubble ou Lei de Hubble-Humanson⁷:

⁷Milton L. Humason participou da construção e posteriormente operou o telescópio de Monte Palomar.

$$v = H_0 d. \quad (2.23)$$

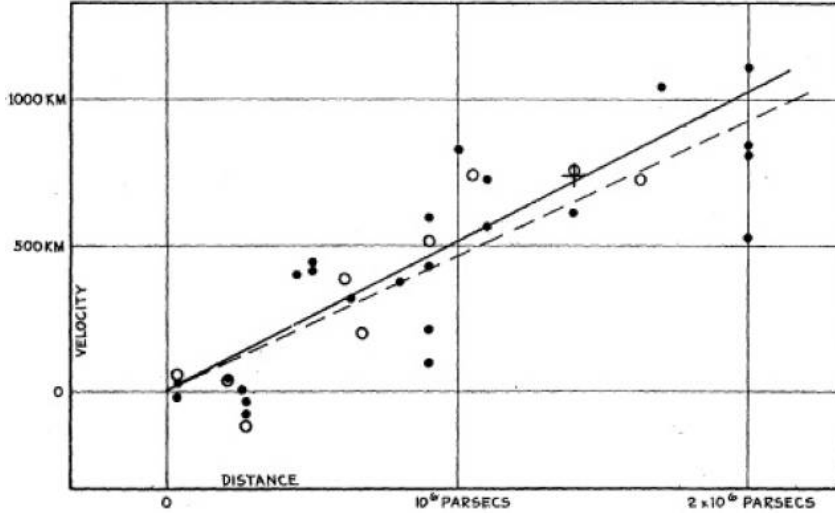


Figura 1: Diagrama publicado por Hubble em seu artigo de 1929 [15].

Em terms do redshift temos que:

$$z = H_0 \frac{d}{c}. \quad (2.24)$$

Expandindo 2.22 em torno de t_0 para objetos próximos encontramos que:

$$z = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0). \quad (2.25)$$

Lembrando que para a luz temos $d\tau^2 = 0$, então $(t - t_0) = \frac{d}{c}$ então comparando (2.24) e (2.25) (considerando t_0 o tempo em que foi realizada medida) temos $H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$ como era de se esperar dada a métrica FLRW, onde H_0 é chamado **parâmetro de Hubble**. Para um tempo qualquer t , temos $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$.

2.2.2 O Modelo Λ CDM:

Até o ano de 1998 acreditava-se que o universo era constituído de fótons, bárions e DM e se expandia desaceleradamente devido á atração gravitacional dos seus constituíntes.

Foi colaborador de Hubble na pesquisa sobre galáxias e seu movimento.

Riess, Pearlmutter e Schmidt publicam nesse ano evidências extraídas da observação de Supernovas do tipo Ia (SNIa) de que o universo está na verdade se expandindo aceleradamente [16, 17]. Para que o Universo se expanda aceleradamente é necessário que a maior parte da sua energia provenha de um fluido exótico com equação de estado negativa. Denominamos esse fluido de **energia escura** (Dark Energy, referida daqui em diante como DE) interpretada como a energia do vácuo e sendo referida como Λ em homenagem à constante cosmológica de Einstein (2.19). A introdução desse novo fluido e sua interpretação como energia do vácuo, apesar de garantir a expansão acelerada do universo cria dois problemas: primeiro que a densidade de DE obtida observacionalmente está de 50 a 120 ordens de magnitude abaixo do estimado pela Teoria Quântica de Campo, chamamos essa discrepância de Problema da Constante Cosmológica (PCC) [18]; o segundo problema, conhecido como Problema da Coincidência (PC) surge da constatação de que as densidades de DM e DE são da mesma ordem de magnitude. O último constitui motivação central desse trabalho e será abordado a parte.

À luz da descoberta da expansão acelerada o modelo que melhor se ajusta aos dados observacionais disponíveis, SNIa, CMB e BAO⁸ é o modelo Λ CDM ou Modelo de Concordância. Nesse modelo o universo é praticamente plano ($K=0$ em (2.16)) e possui os constituintes não interagentes: bárions, radiação, matéria escura Fria⁹ (CDM) e energia escura (Λ). Dado o conteúdo a composição do Universo utilizando as equações de Einstein para descrever a dinâmica do espaço-tempo.

Equação de Friedmann

Considerando a métrica de Friedmann (referida usualmente como métrica FLRW) (2.16) podemos calcular as componentes do tensor de Ricci e o escalar de Ricci (2.9). Além disso é possível demonstrar que, para satisfazer as hipóteses de homogeneidade e isotropia o tensor momento-energia deve ser:

$$T_{00} = \rho \quad T_{i0} = 0 \quad T_{ij} = a^2 \rho \delta_{ij}, \quad (2.26)$$

onde ρ é a densidade própria e p a pressão própria. Além disso adotamos unidades em que $c = 1$. Utilizando as quantidades anteriores da equação de Einstein (2.15) e fazendo manipulações simples encontramos:

⁸Oscilação Acústica de Bárions

⁹A terminologia “fria” refere-se ao comportamento não-relativístico

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \Omega_K. \quad (2.27)$$

O termo Ω_K diz respeito á curvatura, maior, menor ou igual a zero. Da equação de conservação da energia $T_{\mu;\nu}^\nu = 0$ encontramos:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.28)$$

É necessário que se forneça uma equação de estado (abreviada daqui pra frente como EoS de “equation of state”) do fluido para que se resolva (2.28) e (2.27). Temos um fluido com equação de estado $p = w\rho$ encontramos a solução $\rho(t) \propto a^{-3(1+w)}$. Utilizando a equação de Friedmann definimos a densidade crítica:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1.878 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{g}{cm^3}, \quad (2.29)$$

onde h é o parâmetro de Hubble que hoje possui valor em torno de 0.7 . Se $\rho(t)$ é maior, igual ou menor que ρ_{cr} temos um universo esférico, plano ou hiperbólico. As medidas do parâmetro de Hubble atualmente e as estimativas da quantidade de matéria no universo indicam que estamos muito próximos á densidade crítica o que é conhecido como Problema da Planitude, pois demonstra-se que desde os estágios iniciais o Universo já possuía densidade próxima á densidade crítica. A alternativa mais simples é portanto de que o universo é plano, $\rho(o) \approx \rho_{cr}$ [19]. Daqui em diante adotaremos $\Omega_K = 0$.

Como dito, a equação (2.28) é válida separadamente para os constituintes do universo se assume-se a hipótese de que não há troca de energia entre eles. Para resumir, as equações propostas pelo modelo Λ CDM são:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.30)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \quad (2.31)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (2.32)$$

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 0, \quad (2.33)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0, \quad (2.34)$$

onde o subescrito “b” refere-se á matéria bariônica, com EoS $p = 0$; “r” á radiação, $p = \frac{\rho}{3}$;

“dm” á matéria escura com EoS¹⁰ $p = 0$ e por fim “ Λ ” refere-se á constante cosmológica, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

¹⁰Dada a interação puramente gravitacional e o comportamento não-relativístico supõe-se que a matéria escura se comporte como uma poeira, assim como poeira

3 *Interação no Setor Escuro*

O Modelo Padrão da Cosmologia, Big Bang- Λ CDM apesar de ter evidências observacionais muito fortes também possui problemas muito graves, como citado na seção 2.2.2, e portanto atualmente a cosmologia é terreno fértil para um sem-número de teorias que modelam o Universo, não só pelos hiatos deixados pelo modelo Λ CDM, mas também pelo total desconhecimento da natureza da matéria escura e da energia escura. As teorias existentes se dividem em duas categorias. De um lado temos as modificações da RG, como por exemplo, MOND, modelos DGP, teorias $f(R)$ [20] e de outro estão as especulações sobre o setor escuro, por exemplo, DE como quintessência, k-essência, holográfica, phantom, constante cosmológica; Modelos de Unificação, por exemplo, Gás de Chaplygin, Gás de Chaplygin Generalizado; Modelos de Interação no setor escuro, etc. Podendo esses modelos serem ou não levados um no outro dependendo da interpretação. Para uma visão geral dos problemas e dos modelos acerca da DE [20] é uma boa referência.

No presente trabalho estamos interessados em uma classe particular de Modelos de Interação. Em geral, modelos desse tipo fornecem uma dinâmica mais rica para DE e DM. O argumento central é que, uma vez que se desconhece a natureza do setor escuro, é tão válido supor que seus constituintes conservam-se separadamente, como em (2.33) e (2.34), quanto se supor que interagem [21].

3.1 O Problema da Coincidência Cósmica:

O modelo Λ CDM é também conhecido como Modelo de Concordância, pois é motivado por evidências observacionais diversas que indicam que o Universo é constituído de radiação, bárions e um setor escuro como citado na última sessão. Podemos apresentar a equação de Friedmann (2.27) em termos das contribuições de cada constituinte para a densidade total, ρ . Se normalizamos em relação a ρ_c , (2.29), e resolvemos as equações de conservação (2.31), (2.32), (2.33), (2.34) para saber a dependência de cada termo com o fator de escala encontramos:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{b0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{dm0}a^{-3} + \Omega_\Lambda, \quad (3.1)$$

onde $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ para cada componente e os subscritos já estão definidos na seção 2.2.2. Convencionou-se que $a_0 = 1$.

A densidade de radiação é estimada através da CMB. Seu espectro é de radiação de corpo negro, então utilizasse a estatística de Bose-Einstein numa aproximação de ordem zero para relacionar a temperatura da CMB, que é medida com uma incrível precisão como sendo $T = 2.725 \pm 0.002K$ (Mather *et al* 1999) pelo satélite COBE citado em [19]. Encontra-se:

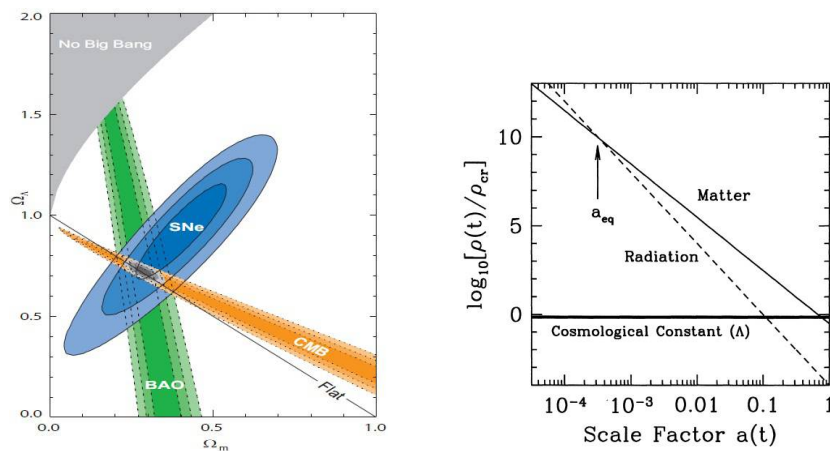
$$\Omega_{r0} = 2.47 \times 10^{-5} \quad (3.2)$$

A densidade de matéria pode ser calculada com diferentes experimentos. Destaca-se dois tipos de experimentos. O primeiro grupo utiliza a interação radiação-matéria, chamaremos de Ω_{b0} a grandeza medida por eles, pois seguramente abarcam a matéria bariônica. O segundo grupo utiliza fenômenos puramente gravitacionais e portanto dependentes da densidade *total* de matéria, chamaremos essa densidade de Ω_{m0} . Com relação ao primeiro grupo de experimentos uma série de medidas envolvendo clusters, abundância de elementos do Universo primordial e outros (para uma relação completa consultar [22]) indicam $\Omega_{b0} = 0.02$. Com anisotropias de CMB (Prybe 2001 e Netterfield 2001, [19]):

$$\Omega_{b0} = 0.024 \quad (3.3)$$

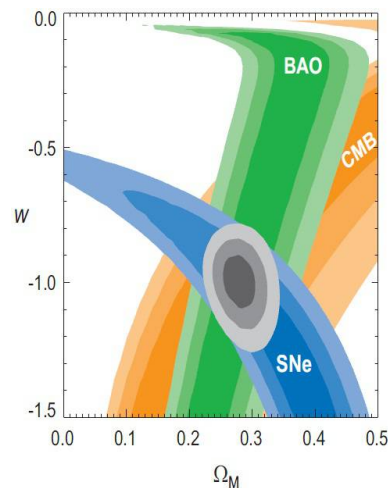
A densidade observada corresponde a apenas 2 – 5% da densidade crítica. Por outro lado, experimentos do segundo grupo, que utilizam fenômenos puramente gravitacionais, como espectro de potência e o estudo do Campo de Velocidade Cósmica nas distribuições de galáxias (Strauss e Willick, 1995) encontram o valor de $\Omega_{m0} = 0.3$ [19]. Anisotropias de CMB e Raio-X de Clusters são sensíveis à razão $\frac{\Omega_b}{\Omega_m}$ e concordam com essa estimativa [19]. Portanto, da quantidade total de matéria do *tipo poeira e que interage gravitacionalmente*, Ω_{m0} , apenas 20% é bariônica. Aos 80% restantes, como não interagem com radiação, chamamos de **matéria escura**.

Ainda sim apenas 30% da densidade crítica pôde ser medida diretamente. Ao outros 70% chama-se de **energia escura** e sua existência é corroborada por testes com supernovas do Tipo Ia [20] (mais detalhes no apêndice A) realizados por Pearlmutter, Schmidt e Riess¹ [16, 17]. O primeiro e mais simples candidato á DE é a Constante Cosmológica (2.19), cuja densidade é referida como Ω_Λ . A análise conjunta dos dados DE CMB, BAO e supernovas exclue com muita precisão um Universo sem uma energia escura, Figuras 2(a) e ao mesmo tempo permite valores de w em torno de $w = -1$, dando margem á muitos candidatos á DE, Figura 2(b).



(a) Regiões de confiabilidade para densidade de matéria e energia escura [17].

(b) Evolução das densidades de energia dos constituintes do Universo [19].



(c) Regiões de confiabilidade para w [17].

Figura 2: Regiões de confiabilidade para testes com supernovas e gráfico da evolução das densidades de energia dos constituintes do Universo.

Com essas determinações de densidades observa-se que os dois elementos desconheci-

¹Ganhadores do Prêmio Nobel em Física 2011 pela constatação da aceleração do Universo

dos possuem a mesma ordem de grandeza nos dias de hoje, Figura 2(c). Dois fluidos que evoluem de maneira completamente distinta possuem densidades de energia da mesma ordem de grandeza recentemente na história do Universo e só recentemente. Esse fato é conhecido como **Problema da Coincidência Cósmica** (PCC) [18, 20, 21, 23].

“É possível que, uma vez que se saiba a natureza fundamental da energia escura o problema da coincidência seja automatico e naturalmente explicado. Por outro lado o contrário também pode ser verdade: compreender a origem da coincidência poderia clarificar sobre a natureza da energia escura e sua relação com o resto do mundo”² [23].

A citação anterior pontua o espírito dos trabalhos motivados pelo PCC. Na literatura é possível identificar dois grandes grupos de modelos que aliviam o PCC. Primeiro modelos com “scaling solution” que necessitam de uma DE dinâmica que será chamada daqui por diante de ρ_x . Soluções desse tipo são estáveis e satisfazem $r \equiv \frac{\rho_m}{\rho_x} = \text{constante}$ para algum tempo ou para todo o tempo [20, 23]. Segundo, modelos que geram um comportamento periódico de todo setor escuro [24] ou de uma de suas componentes [25, 26] (devido à vínculos observacionais, geralmente essa componente periódica é a DE). Uma outra possibilidade é apresentada por campos fantasmas. É possível relacionar o tempo necessário para atingir o ponto de coincidência e o tempo de vida do Universo (que é finito no contexto do Big Rip). Se a razão entre esses tempo não é pequena, então o que é observado sobre as densidades de energia não é uma coincidência, e sim uma situação comum na história do Universo [27].

3.2 Modelos de Interação: Relações Gerais

Das hipóteses do modelos Λ CDM em geral mantêm-se a homogeneidade, a isotropia e a planeza do Universo. Considerando genericamente dois fluidos perfeitos como constituintes do setor escuro com parâmetro da EoS³ w_m, w_x , reescrevemos então as equações do modelo Λ CDM (lembrando que estamos usando unidades em que $c=1$):

²Do Inglês: “It is possible that once we know the fundamental nature of dark energy the problem of coincidence will be automatically and naturally explained. On the other hand, the reverse could be true as well: understanding the origin of the coincidence could shed light on the nature of dark energy and its relation to the rest of the world.” [23]

³ $p = w\rho$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.4)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \quad (3.5)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (3.6)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(1 + w_m)\rho_m = Q, \quad (3.7)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + w_x)\rho_x = -Q. \quad (3.8)$$

As contribuições de matéria bariônica e radiação são pequenas como visto anteriormente, portanto reescrevemos a equação de Friedmann assumindo que o comportamento de H será predominantemente influenciado pela evolução das densidades de energia do setor escuro:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_x). \quad (3.9)$$

Vamos escolher de anti-mão a EoS das componentes que estão interagindo. Para uma abordagem de modelos de interação lineares e não-lineares para um setor escuro genérico consultar referência [3]. Nesse trabalho em particular escolhemos DM como poeira, $w_m = 0$, por causa dos fortes vínculos observacionais (Seção 3.1) e DE com EoS $p = w\rho$, dessa forma o sistema de equações que a ser estudado é:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_x), \quad (3.10)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q, \quad (3.11)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + w)\rho_x = -Q, \quad (3.12)$$

Abaixo temos algumas escolhas comuns para Q encontrados na literatura. As referências foram escolhidas a título de exemplo e relevância e não cobrem a totalidade dos acoplamentos sugeridos nem a totalidade dos autores que publicaram sobre cada um deles:

- $Q = c_1\rho_x + c_2\rho_m$ [18, 28]
- $Q = 3H(c_1\rho_x + c_2\rho_m)$ [2, 3, 5, 29–31]
- $Q = c\rho_x^\alpha\rho_m^\beta\rho^\delta$ [24, 32]
- $Q = 3Hc\rho_x^\alpha\rho_m^\beta\rho^\delta$ [3]

- $Q = 3H\rho_m\dot{\phi}$ [4, 33]
- $Q = Q(F(r), \rho_m)$ [34]
- $Q = Q(f(\eta), \dot{f}(\eta))$ [3, 35]
- $Q = Q(\rho, \rho)$ [3].

Acima c_i , α , β δ são constantes (escolhidas em cada referência citada para gerar um modelo em particular), $\eta = \ln a^3$, ϕ é referente ao campo escalar que interage nesses modelos específicos e f e F são funções arbitrárias.

Além da liberdade de escolher o acoplamento Q , as entidades interagentes também variam: quintessência com CDM [4, 23, 31, 36, 37], campo fantasma com CDM [27, 29, 33], w -CDM com interação [24, 28, 35, 38], energia escura holográfica (que satisfaz o Princípio Holográfico) com CDM [2, 30, 32], gás de chapligyn e gás de chapligyn generalizado com CDM [5]. Novamente aqui vale a ressalva de que as referências não se esgotam nesse assunto.

Modelos de Unificação do setor escuro podem ser reproduzidos por alguma interação entre as duas componentes [38]. Além disso em [28] argumenta-se que alguns acoplamentos são, em última instância, modificações da RG. Portanto modelos de interação não só são uma alternativa para abordar o PCC como também indicam quando pode haver “degenerescência” de modelos frente os dados observacionais, principalmente no que diz respeito á dinâmica de fundo [28, 38]. Para eleger entre um ou outro modelo de interação é possível fazer testes com, por exemplo, formação de estruturas (para um certa classe de modelos de interação lineares essa abordagem é feita em [28]).

Do ponto de vista do comportamento de fundo a grandeza relevante é a densidade total de energia ρ e, no contexto do PCC, a razão entre as densidades de energia, $r = \frac{\rho_m}{\rho_x}$. Buscamos dinâmicas diferente de Λ CMD onde r vai para zero no limite futuro. As seguintes relações são válidas:

$$\rho_m = \frac{r}{1+r}\rho \quad (3.13)$$

e

$$\rho_x = \frac{1}{1+r}\rho \quad (3.14)$$

Definimos:

$$Q = -3H\Pi \quad (3.15)$$

e

$$\frac{d}{da} = 3H \frac{d}{d(\ln a^3)}. \quad (3.16)$$

Essas relações levam o sistema (3.11) e (3.12) em :

$$\rho'_m + \rho_m = -\Pi, \quad (3.17)$$

$$\rho'_x + (1 + w)\rho_x = \Pi. \quad (3.18)$$

O acoplamento é dado portanto pela função Π que também pode ser entendido como um termo de *pressão efetiva* nas equações de fluido anteriores. Essas equações em termos de r e ρ são:

$$\rho' = - \left(1 + \frac{w}{1+r} \right) \rho \quad (3.19)$$

e

$$r' = r \left[w - \frac{(1+r)^2}{r\rho} \Pi \right]. \quad (3.20)$$

A interação é escolhida de maneira a gerar soluções nas quais $r \rightarrow r_c$, constante para um Universo futuro. Estudaremos essas equações em termos de uma determinada interação não-linear no Capítulo 5. No próximo faremos uma introdução à ferramenta matemática para Sistemas Dinâmicos utilizada para se estudar qualitativamente o sistema acima. Uma vez que para alguns modelos não é possível encontrar soluções analítica o comportamento qualitativo tem ganhado destaque na literatura [5, 18, 24].

4 *Sistemas Dinâmicos: Estudo Qualitativo*

Para os cientistas pós-Galileu o sucesso de uma teoria era explicar fenômenos e ser consistente com os dados experimentais. No caso da ciência física a modelagem de um fenômeno através de equações matemáticas e suas soluções são os objetivos finais de um estudo, pois nos permitem criar tecnologia. Porém modelar a natureza via de regra nos coloca frente as chamadas equações não-lineares que não podem ser resolvidas analiticamente. Por outro lado, mesmo quando as equações são integráveis esbarramos num segundo empecilho, muitos fenômenos da natureza são aparentemente irreprodutíveis, no sentido de que não possuem comportamento periódico (a priori). Essas duas limitações da ciência pareciam não se relacionar até a década de 60 quando Edward Lorenz descobre a *Sensibilidade a Condições iniciais*. Desde então a Teoria do Caos e dos Sistemas Dinâmicos tem tomado destaque cada vez maior no meio científico em conjunto com supercomputadores modelando e explicando fenômenos intratáveis sob a ótica da ciência não-caoticista.

Nos interessa nesse trabalho o estudo qualitativo das equações não-lineares quando não for possível resolvê-las, pois no contexto de uma interação entre dois fluidos essa análise nos auxilia a identificar dinâmicas que aliviam o PCC.

Um **sistema dinâmico** n dimensional consiste em um fluxo contínuo de n variáveis num espaço de fase n -dimensional caracterizado por um sistema de equações diferenciais relacionando essas variáveis.

Analiticamente somos capazes de resolver um número limitado de sistemas de equações. Se não possuímos soluções analíticas extraímos da estrutura das equações não-lineares as informações qualitativas sobre as soluções possíveis que diferem á menos de condições

iniciais. Para conhecer o comportamento global das soluções do sistema não-linear estudamos comportamento do sistema linear em torno do ponto crítico. Esse método será brevemente discutindo nesse capítulo.

4.1 Sistema de EDO's Lineares Autônomas:

Um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) lineares é escrito na forma matricial como sendo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

Onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. O \cdot representa a derivada em relação a um parâmetro comum, por exemplo o tempo t , e $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))^T$ é tal que F_i não depende explicitamente do parâmetro t caracterizando assim o sistema como *autônomo*. O sistema é linear se F_i é uma combinação linear das variáveis x_i .

Define-se como **ponto crítico** de um sistema de EDO's o conjunto (x^1_c, x^2_c, \dots) tal que:

$$F^i(x^1_c, x^2_c, \dots) = 0$$

onde F^i representa aqui cada EDO que constitui o sistema [39].

4.1.1 Sistemas Planares:

Sistemas Planares são sistemas bi-dimensionais para os quais o conjunto de equações (4.1) se reduz á:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + By \\ \dot{y} &= Cx + Dy. \end{aligned} \quad (4.2)$$

São interessantes, pois são simples de se resolver utilizando métodos tradicionais de resolução de EDO's [40] através da *equação característica*. O estudo dos autovalores da matriz dos coeficientes nos fornece condições simples para caracterizar o sistema

em torno do ponto crítico como veremos a seguir. O ponto crítico do sistema acima é $(x_c, y_c) = (0, 0)$ ¹.

Sistemas desse tipo possuem solução em termos de exponenciais:

$$\mathbf{x}(t) = \zeta_1 e^{\lambda_1 t} + \zeta_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{x}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$, $\lambda_{1,2}$ e $\zeta_{1,2}$ são solução da equação de autovalor que surge quando substituímos (4.3) em (4.2). Chamemos, \mathbf{T} a matriz dos coeficientes. Então a equação característica é:

$$\lambda_{1,2}^2 - Tr(\mathbf{T})\lambda_{1,2} + Det(\mathbf{T}) = 0. \quad (4.4)$$

Os autovetores são soluções da equação matricial:

$$\mathbf{T}\zeta_{1,2} = \lambda_{1,2}\zeta_{1,2}. \quad (4.5)$$

Estudando a solução (4.3) podemos caracterizar o comportamento do ponto crítico, ou seja, se ele atrai as soluções, se repele ou se em torno dele há soluções periódicas. Para autovalores não-degenerados² surgem os seguintes casos:

4.1.1.1 Atrator:

Se os autovalores são **Reais**, $\lambda_{1,2} < 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então (4.3) pode ser escrito (considerando que $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ sem restrição de generalidade):

$$\mathbf{x}(t) = e^{-|\lambda_2|t}(\zeta_1 e^{-(|\lambda_1| - |\lambda_2|)t} + \zeta_2) \quad (4.6)$$

Para $t \rightarrow \infty$ observamos que $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$, ou seja, independente das condições iniciais o sistema tende ao ponto crítico. Podemos observar também por (4.6) que as soluções tendem para origem por um dos autovetores Figura 3, no caso da escolha $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, por ζ_2 como mostrado abaixo.

¹Uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x - x_c$ e $y \rightarrow y - y_c$ coloca o ponto crítico na origem

²Para os casos onde os autovalores são degenerado, não há um único método de análise e podem apresentar qualquer um dos comportamentos descritos

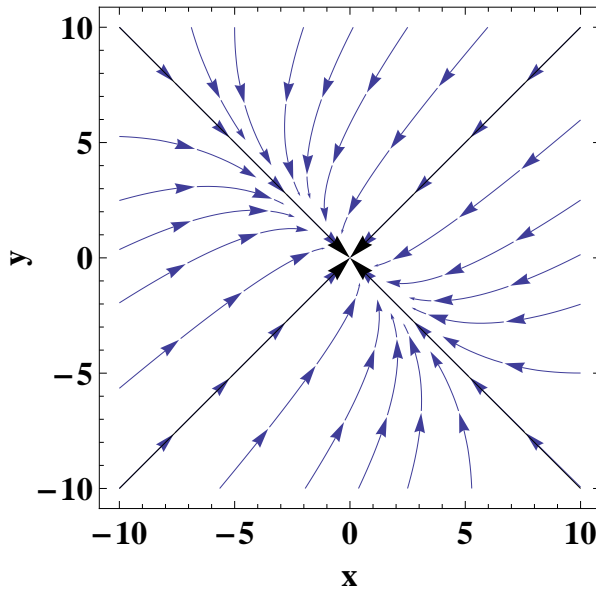


Figura 3: Retrato de fase para o atrator.

4.1.1.2 Instável:

Se os autovalores são **Reais**, $\lambda_{1,2} > 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então (4.3) pode ser escrito (considerando novamente que $\lambda_2 < \lambda_1$):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t}(\zeta_1 + \zeta_2 e^{-|\lambda_1 - \lambda_2|t}) \quad (4.7)$$

Para $t \rightarrow \infty$ observamos que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$, ou seja, independente das condições o sistema se afasta do ponto crítico. Podemos observar também por (4.7) que as soluções tendem ao infinito por um dos autovetores em destaque na Figura 4, no caso da escolha $\lambda_2 < \lambda_1$, por ζ_1 .

4.1.1.3 Ponto de Sela:

Se os autovalores são **Reais**, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ então (4.3) pode ser escrito:

$$\mathbf{x}(t) = \zeta_1 e^{\lambda_1 t} + \zeta_2 e^{-|\lambda_2|t} \quad (4.8)$$

Para $t \rightarrow \infty$ observamos que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$, porém diferente dos outros casos as soluções se aproximam do ponto crítico pelo autovetor ζ_2 e depois vão para infinito pelo autovetor ζ_1 em destaque na Figura 5.

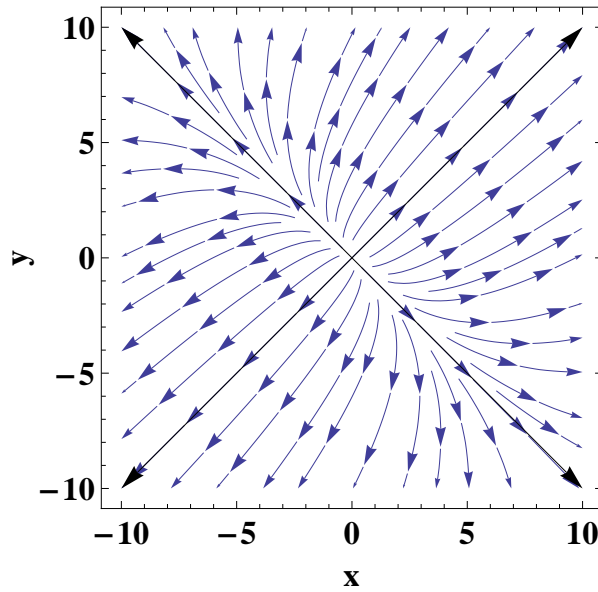


Figura 4: Retrato de Fase para o ponto crítico instável.

4.1.1.4 Foco Estável:

Se os autovalores são **Complexos** então $\lambda_{1,2} \equiv \alpha \pm i\beta$. O foco estável ocorre quando $\alpha < 0$, então (4.3) é escrito:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-|\alpha|t}(\zeta_1 e^{i\beta t} + \zeta_2 e^{-i\beta t}) \quad (4.9)$$

Aqui os autovetores são imaginário. A dinâmica do foco estável corresponde á dinâmica do Oscilador Harmônico Super Amortecido, Figura 6, ou seja, as exponenciais com expoentes imaginário geram oscilações no espaço de fase que são amortecidas pelo termo $e^{-|\alpha|t}$. Esse termo é responsável por fazer com que, para $t \rightarrow \infty$ o sistema atinja o ponto crítico.

4.1.1.5 Foco Instável:

Em contraposição ao caso anterior o foco instável possui $\alpha > 0$ e portanto não amortece as oscilações e para $t \rightarrow \infty$ as soluções se afastam cada vez mais do ponto crítico.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}(\zeta_1 e^{i\beta t} + \zeta_2 e^{-i\beta t}) \quad (4.10)$$

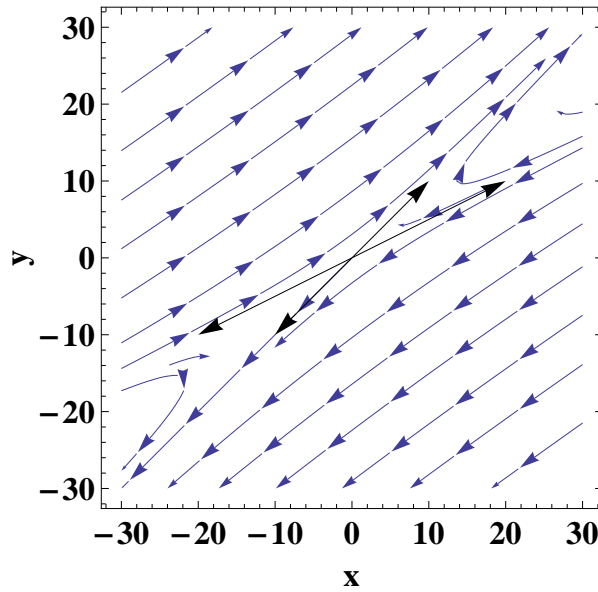


Figura 5: Retrato de fase para o ponto de sela.

4.1.1.6 Centro:

É o caso para $\alpha = 0$:

$$\mathbf{x}(t) = \zeta_1 e^{i\beta t} + \zeta_2 e^{-i\beta t}. \quad (4.11)$$

Os sistema nunca atinge o ponto crítico, pois as soluções, dada uma condição inicial, permanecem numa trajetória cíclica no espaço de fase, Figura 8.

Outra dinâmica interessante além das citadas acima é a dos espaços de fase que apresentam **Ciclos Limites** que são trajetórias fechadas no espaço de fase que repelem ou atraem outras soluções. O estudo de ciclos limites abarca uma quantidade muito grande de sistemas dinâmicos. De acordo com o Teorema de Poincaré-Bendixon num espaço de fase em \mathbb{R}^2 só há três possíveis dinâmicas: atratoras, repulsoras ou ciclos limites, com isso excluimos a possibilidade de caos nos sistemas tratador nesse trabalho [39, 41].

4.2 Sistema de EDO's Não-Lineares Autônomas:

Consideremos agora que no sistema (4.1) as funções F_i sejam não-lineares nas variáveis, porém permaneçam não dependendo explicitamente de t . Para estudar o comportamento desse sistema linearizamos expandindo F_i em série de Taylor em torno dos pontos críticos até a primeira ordem. Vamos considerar um sistema não-linear bi-dimensional para

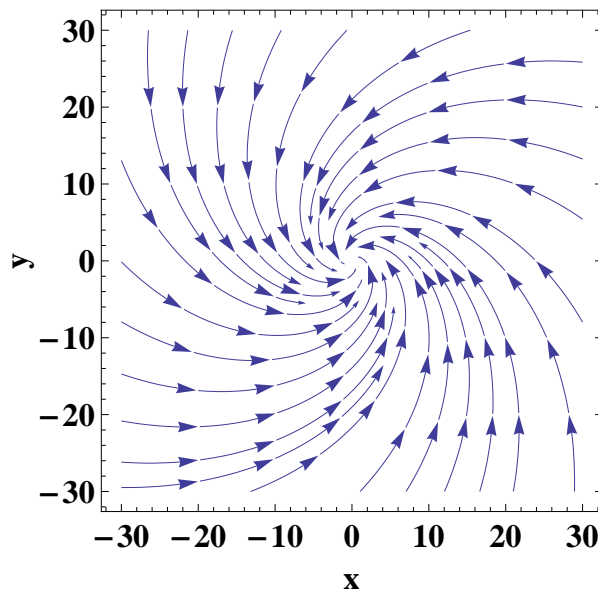


Figura 6: Retrato de fase para o foco estável.

utilizar as informações extraídas no sistema planar da seção 4.1.1. Em geral sistemas não-lineares podem possuir mais de um ponto crítico, ou até infinitos, cada um possuindo um tipo distinto de comportamento. Para cada ponto crítico haverá portanto um sistema linear de equações como (4.2) onde a matriz dos coeficientes, T é agora a Jacobiana calculada sobre ele:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Como dito anteriormente, uma simples transformação de coordenadas coloca o ponto crítico na origem e assim as informações obtidas sobre o comportamento do sistema linear poderão ser utilizadas para se estudar o sistema não-linear sob algumas condições como demonstrado por Hartmann [39]:

Teorema de Hartman

Seja o ponto crítico um *ponto hiperbólico*, então há uma vizinhança em torno desse ponto em que o espaço de fase do sistema não-linear se assemelha qualitativamente ao comportamento desse sistema, porém linearizado.

Um ponto crítico **hiperbólico** é aquele tal que $\lambda_{1,2}$, do sistema linearizado em torno dele, possui *parte real diferente de zero*. Não é difícil observar que essa correspondência não é válida para o caso dos centros, onde os autovalores são do tipo $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, ou seja,

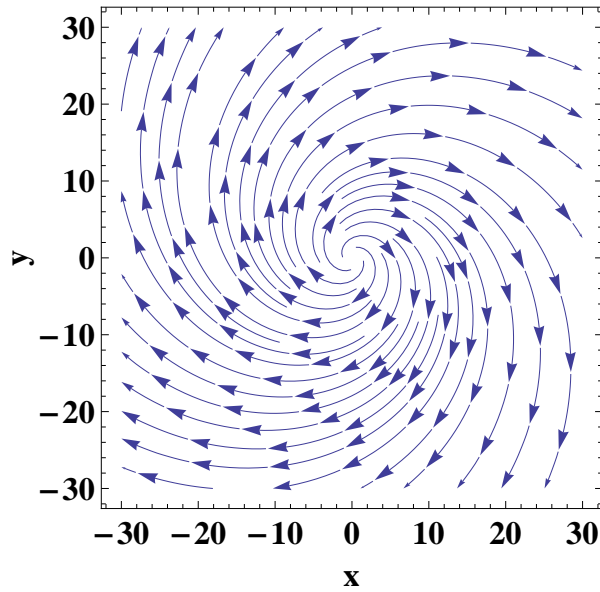


Figura 7: Retrato de fase para o foco instável.

um ponto não-hiperbólico. Para esses casos, se o sistema de equações que estamos trabalhando for *analítica*, então uma extensão do Teorema de Poincaré-Lyapunov realizada em [42] garante a equivalência dos espaços de fase.

Uma aplicação direta da abordagem descrita anteriormente será feita no próximo capítulo para o sistema de equações (3.19) e (3.20) para uma generalização de modelos de interação não-lineares. Essa abordagem tem sido utilizada em Cosmologia para o estudo qualitativo de soluções, por exemplo, em [5, 18, 24] para citar alguns.

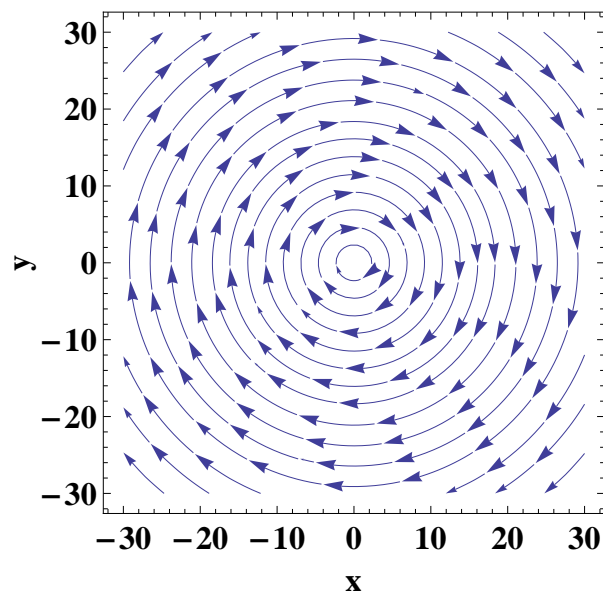


Figura 8: Retrato de fase para o centro.

5 *Modelos de Interação Não-Lineares*

Nesse capítulo vamos aplicar o formalismo descrito no Cap.4 para estudar qualitativamente uma classe de modelos não-lineares. Em geral esse tipo de modelo não possui solução analítica e portanto conhecer o comportamento e a estabilidade das soluções é o melhor que se pode fazer sem partir para soluções numéricas. Se por um lado a ferramenta matemática utilizada não fornece pistas de qual modelo é melhor, por outro exclui, por construção, os modelos que não aliviam o PCC e nesse sentido é possível fazer uma classificação bastante geral dos possíveis modelos de interação.

Modelos em que termo Q de acoplamento é uma combinação linear das densidades de energia das componentes do setor escuro foram intensamente explorado e são capazes de gerar dinâmicas que aliviam o PCC, pois resultam em soluções em termos de potências do fator de escala, as *scaling solutions* [3]. Por outro lado, modelos não-lineares também parecem cumprir esse papel [3, 24, 32], ora fornecendo *scalingsolutions*, ora fornecendo soluções periódicas. Na literatura, como apresentado na seção 3.2, um tipo comum de acoplamento não-linear é :

$$Q = 3H\gamma\rho_m^\alpha\rho_x^\beta. \quad (5.1)$$

Fenomenologicamente é motivado por outros sistemas interagentes como predador-presa a reações químicas [5] onde a ausência de um dos constituintes anula a interação e o excesso de um deles aumenta a taxa e interação. Essa interpretação só é válida se por hipótese assumimos dois fluidos com EoS definida de ante-mão, no presente trabalho, CDM e DE com parâmetro da EoS w . Aplicando (3.13) e (3.14) em (5.1) encontramos, em termos de ρ e r :

$$Q = 3H\gamma\rho^{\alpha+\beta}r^\alpha(1+r)^{\alpha+\beta}, \quad (5.2)$$

onde γ é um parâmetro constante, cuja é $gcm^{3(m-1)}$, e que ajusta a intensidade da interação. A expressão anterior é um caso particular, quando $m = s$ de [43]:

$$Q = 3H\gamma\rho^m r^n (1+r)^s, \quad (5.3)$$

onde m , n e s são expoentes constantes e a serem determinados tendo em vista o que se espera das soluções. Em termos desses parâmetros vamos buscar por interações que amenizem o PCC. Recordando a redefinição $Q = -3H\Pi$, o acoplamento que vamos trabalhar daqui em diante será referido como Π . Estudaremos o efeito desse acoplamento nas soluções do sistema dinâmico (3.19) e (3.20):

$$\Pi = -\gamma\rho^m r^n (1+r)^s. \quad (5.4)$$

5.1 Estudo Qualitativo de uma Classe de Modelos

5.1.1 Pontos Críticos:

Com relação ao sistema dinâmico (3.19) e (3.20) os pontos críticos, como definido na seção 4.1, são:

$$\begin{array}{cc} r_c & \rho_c \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 - w & \frac{w\Pi}{-1-w} \end{array}$$

Como o objetivo é abordar o PCC através da interação o primeiro e o segundo ponto crítico não são convenientes. O primeiro porque implica que uma das densidades de energia é negativo. O segundo porque a razão entre elas é zero e que reproduz, com relação á r , o mesmo cenário de Λ CDM se for um ponto estável. Nossa análise vai se restringir portanto ao terceiro ponto crítico que possibilita uma dinâmica que resulte num r constante no futuro.

O ponto crítico de interesse $(r_c, \rho_c) = (-1 - w, \frac{w\Pi}{-1-w})$ nos fornece a priori três informações muito importantes. Primeiro, para que ρ_c e ρ_m satisfaçam as Condições Fracas

de Energia (WEC), i.e., para que sejam sejam positivo, então necessariamente $w < -1$, pois r deve ser positivo. Se $w < -1$ então, novamente para satisfazer a WEC Π_c , que é a interação calculada sobre o ponto crítico, deve ser negativo: $\Pi < 0$. utilizando essa abordagem a conclusão vale para qualquer interação Π o que significa que, para um acoplamento Q que pretenda levar o Universo á um estágio final com $r_c > 0$ o fluxo de energia deve ser da DE para DM. Outra conclusão importante a nível principalmente de testes observacionais é que, dada (5.4) a constante do acoplamento deve ser necessariamente positiva, $\gamma > 0$. Resumindo:

- $w < -1$.
- $\Pi_c < 0$
- Se Π esta definido por 5.4 então $\gamma > 0$.

Substituindo (5.4) e r_c em ρ_c encontramos que a densidade de energia total no ponto fixo é:

$$\rho_c = [\gamma |w|^{s+1} (|w| - 1)^{n-1}]^{\frac{1}{1-m}}. \quad (5.5)$$

Aplicando as transformações (3.13) e (3.14) nos pontos críticos encontramos:

$$\rho_{m_c} = [\gamma |w|^{s+m} (|w| - 1)^{n-m}]^{\frac{1}{1-m}} \quad (5.6)$$

e

$$\rho_{x_c} = [\gamma |w|^{s+m} (|w| - 1)^{n-1}]^{\frac{1}{1-m}}. \quad (5.7)$$

5.1.2 Comportamento do Sistema em torno do Ponto Crítico:

Como o sistema tratado é não-linear vamos aplicar o procedimento de linearização descrito na seção 4.2. As raízes da equação característica da Jacobiana (4.12) do sistema (3.19) e (3.20) são:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad (5.8)$$

onde,

$$a \equiv w(1+w) \frac{1}{\Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial r} - (2+w) \quad (5.9)$$

$$b \equiv 1+w+w \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}. \quad (5.10)$$

Para a interação 3 os autovalores, em termos dos parâmetros livres são:

$$a = 2+s+(1+n+s)w, \quad (5.11)$$

$$b = (m-1)(1+w). \quad (5.12)$$

No intuito de utilizar o Teorema de Hartmann devemos garantir que as raízes não são degeneradas, i.e:

$$b \neq 0 \quad (5.13)$$

Portanto nossa análise só é válida para $m \neq 1$. Além disso para que o caso dos centros satisfaça as condições apresentadas no Capítulo 4 devemos garantir que não haja singularidades no sistema de equações, o que impõe $n > 1$ *para os casos do centro..* Dada essas restrições para todos os outros casos somos capazes de estudar as expressões para λ_{\pm} e assim determinar, em relação a intervalos do espaço de parâmetros m, n, s e w , como se comporta o ponto crítico, i.e, se é atrator, instável, foco, centro, ou ponto de sela. Utilizando as condições sobre os autovalores descritas ao longo da seção 4.1.1 encontramos as seguintes relações entre os parâmetros tal que o ponto crítico seja [43]:

- ATRATOR: $w < -1$ e $m > 1$ e $+s < -\frac{2+w+nw}{1+w} - 2\sqrt{\frac{1-m}{1+w}}$
- INSTÁVEL: $w < -1$ e $m > 1$ e $-s < +\frac{2+w+nw}{1+w} - 2\sqrt{\frac{1-m}{1+w}}$
- CELA: $w < -1$ e $m < 1$
- CENTRO: $w < -1$ e $m > 1$ e $n = \frac{-2-s-w-sw}{w}$ e $n \geq 1$
- FOCO ESTÁVEL: $w < -1$ e $m > 1$ e $n < \frac{-2-s-w-sw}{w}$
- FOCO INSTÁVEL: $w < -1$ e $m > 1$ e $n > \frac{-2-s-w-sw}{w}$

Se observarmos os espaços de fase para cada caso acima, Figuras 3, 4, 5, 6, 7, 8 identificamos os casos onde o ponto crítico é **atrator** ou **foco estável** como preferíveis no sentido

de amenizar o PCC, pois nesses casos, independente das condições iniciais (descartando assim qualquer ajuste fino) a evolução do sistema leva a razão entre as densidades a um valor constante. Também os casos em que o ponto crítico é um **centro** são interessantes, pois, como argumentado anteriormente, o PCC não surge devido ao comportamento oscilatório da densidade total de energia. No caso do centro, inclusive, é possível identificar uma época dominada pela matéria e outra pela energia escura. É importante frizar que o sistema dinâmico escrito em termos de (r, ρ) possui o mesmo comportamento em torno do ponto crítico que o sistema escrito para as densidades de energia. Para a interação $Q = 3H\rho^{\frac{3}{2}}r(1+r)^{-2}$ que satisfaz as critérios para o centro, a título de exemplo, temos o retrato de fase em termos de ρ_m e ρ_x , Figura 9. Os parâmetros foram arbitrariamente escolhidos como sendo $w = -1.5$ e $\gamma = 1$.

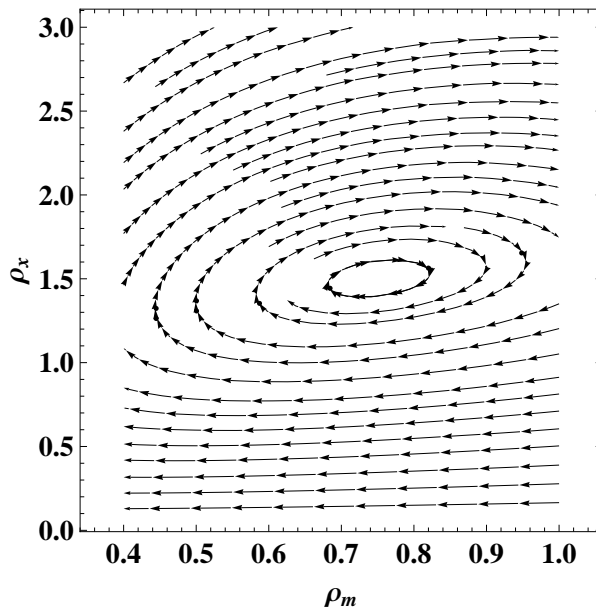


Figura 9: Retrato de fase para a interação $Q = 3H\rho^{\frac{3}{2}}r(1+r)^{-2}$ em termos de ρ_m e ρ_x .

5.1.2.1 Atrator

No caso do atrator, a solução em torno do ponto crítico é dada por (4.6) e em termos das variáveis (r, ρ) encontramos:

$$r(a) = r_c + a^{3|\lambda_2|}(r_1 a^{-3(|\lambda_1| - |\lambda_2|)} + r_2) \quad (5.14)$$

$$\rho(a) = \rho_c + a^{3|\lambda_2|}(\rho_1 a^{-3(|\lambda_1| - |\lambda_2|)} + \rho_2), \quad (5.15)$$

onde $r_{1,2}$ e $\rho_{1,2}$ são para condições iniciais e $\lambda_{1,2}$ são os autovalores da Jacobiana. Usamos também o fato de que o sistema é resolvido em termos de $\ln a^3$, que daqui para frente iremos nos referir como η :

$$\eta \equiv \ln a^3.$$

Aparecem r_c e ρ_c somados na solução acima, pois na análise desenvolvida na subseção 4.1.1 havíamos colocado o ponto crítico na origem por uma transformação de coordenadas. A solução acima mostra que, para os casos em que o modelo gera um atrator temos scaling solutions, como obtido também para modelos lineares como em [3]. Uma infinidade de modelos não-lineares pertencentes a classe de interações tratadas aqui podem ser geradas modificando os parâmetros livre m, n, s e w :

m	n	s	Π	Q	w
$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\gamma\rho^{3/2}(1+r)^{-1}$	$3H\gamma\sqrt{\rho\rho_x}$	$-1.5 \leq w < -1$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\gamma\rho^{3/2}r^{1/2}(1+r)^{-3/2}$	$3H\gamma\sqrt{\rho_m\rho_x}$	$-1.125 \leq w < -1$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\gamma\rho^{3/2}r^{1/2}(1+r)^{-1}$	$3H\gamma\sqrt{\rho\rho_x\rho_m}$	$-1.101 \leq w < -1$
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\gamma\rho^2r^{1/2}(1+r)^{-3}$	$3H\gamma\rho_x\sqrt{\rho\rho_m}$	$-1.0625 \leq w < -1$

Tabela 1: Exemplos de interações que geram atratores.

Uma outra maneira de visualizar o comportamento é perturbando o sistema em torno do ponto crítico, porém a análise só pode ser feita escolhendo uma interação que seja “tratável” desse ponto e vista. Faremos essa análise para o atrator $(m, n, s) = (2, 0, -2)$, ou seja:

$$\Pi = -\gamma\rho^2(1+r)^{-2}. \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

A equação (3.20) fica nesse caso:

$$r' = rw + \gamma\rho. \quad (5.18)$$

Considerando f e g pequenas perturbações em torno do ponto crítico, temos:

$$\rho = \rho_c + f \quad \text{e} \quad r = r_c + g. \quad (5.19)$$

Numa aproximação de primeira ordem o sistema (3.19) e (3.20) se torna:

$$g' = gw + \gamma f, \quad (5.20)$$

$$f' = -\frac{g}{\gamma} (|w| - 1). \quad (5.21)$$

Derivando a primeira equação e substituindo f' da segunda encontramos:

$$g'' + |w|g' + (|w| - 1)g = 0. \quad (5.22)$$

A solução da equação anterior é dada em termos de exponencias. A equação característica é:

$$\lambda^2 + |w|\lambda + (|w| - 1) = 0, \quad (5.23)$$

e possui os seguintes autovalores:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{|w|}{2} \pm \sqrt{\frac{|w|^2}{4} - (|w| - 1)}. \quad (5.24)$$

As raízes são negativas como era de se esperar da análise mais geral utilizando (4.6). Podemos expressar simplesmente a solução como sendo:

$$g = g_0 \exp[\lambda\eta], \quad (5.25)$$

portanto, a solução do sistema (3.19) e (3.20) em torno do ponto crítico, para essa interação em particular, é:

$$r = r_c + g_0 a^{-3|\lambda|} \quad (5.26)$$

$$\rho = \rho_c + \frac{|w| + \lambda}{\gamma} g_0 a^{-3|\lambda|}, \quad (5.27)$$

onde substituímos a definição de η para que as soluções estejam em função do fator de

escala. Como era de se esperar, dada a análise geral feita anteriormente, temos scaling solutions perto do ponto crítico.

Com relação à dinâmica de fundo, a equação de estado efetiva $w_{ef} = \frac{w}{1+r}$ vale -1 no ponto crítico e se fazemos uma aproximação de primeira ordem em g :

$$w_{ef} = -1 + \frac{g}{|w|}. \quad (5.28)$$

Substituindo (5.26):

$$w_{ef} = -1 + \frac{g_0 a^{3\lambda}}{|w|}. \quad (5.29)$$

Portanto, no ponto crítico o fluido efetivo se comporta como uma constante cosmológica. Com relação ao parâmetro de desaceleração, $q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}$, podemos reescrevê-lo utilizando (3.19):

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \left(1 + 3 \frac{w}{1+r} \right). \quad (5.30)$$

Numa aproximação de primeira ordem em g , encontramos:

$$q = -1 + \frac{3}{2} \frac{g}{|w|}. \quad (5.31)$$

Dada a solução (5.25) o parâmetro de desaceleração aproxima-se então de -1 quando o sistema atinge o regime do ponto crítico.

5.1.2.2 Foco Estável

O comportamento final das soluções no foco estável é igual ao caso do atrator, pois dado um tempo muito longo ambos atingem o ponto crítico (r_c, ρ_c) e nesse sentido o que encontramos para w_{ef} e q é o mesmo que anteriormente. Porém r e ρ oscilam amortecidamente em torno do ponto crítico como vislumbrado na Figura 6. Fazendo a identificação:

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}a \quad i\beta \equiv \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

utilizando as definições de $r_{1,2}$ e $\rho_{1,2}$ dadas acima para o atrator e recordando o detalhe de que as soluções na seção 4.1.1 estão transformadas para que o ponto crítico esteja na

origem, escrevemos a solução (4.9) em termos de η :

$$r = r_c + e^{-|\alpha|\eta}(r_1 e^{i\beta\eta} + r_2 e^{-i\beta\eta}) \quad (5.32)$$

$$\rho = \rho_c + e^{-|\alpha|\eta}(\rho_1 e^{i\beta\eta} + \rho_2 e^{-i\beta\eta}). \quad (5.33)$$

Das equações anteriores é fácil observar que o fator de amortecimento é

$$e^{-\frac{1}{2}(2+s+(1+n+s)w)\eta}$$

e a frequência de oscilação em termos de η é dado por:

$$\frac{1}{2}\sqrt{|a^2 - 4b|}. \quad (5.34)$$

Por exemplo, para a interação gerada pela escolha $(m, n, s) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1)$, i.e, $Q = 3H\rho_x^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\rho\rho_m}$ encontra-se um amortecimento dado por $a^{-3(1+w/2)/2}$ e uma frequência de $\frac{1}{2}\sqrt{2(|w| - 1) - (1 + \frac{w}{2})^2}$. Novamente, é possível, dada as condições para foco estável apresentada anteriormente, listar uma série de acoplamentos:

m	n	s	Π	Q	w
$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\gamma\rho^{3/2}(1+r)^{-1}$	$3H\gamma\sqrt{\rho\rho_x}$	$w < -1.5$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	$-\gamma\rho^{3/2}r^{1/2}(1+r)^{-2}$	$3H\gamma\sqrt{\frac{\rho_m\rho_x^3}{\rho}}$	$-6.83 \leq w < -1.17$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\gamma\rho^{3/2}r^{1/2}(1+r)^{-3/2}$	$3H\gamma\sqrt{\rho_m\rho_x}$	$w < -1.125$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\gamma\rho^{3/2}r^{1/2}(1+r)^{-1}$	$3H\gamma\sqrt{\rho\rho_m\rho_x}$	$-2 \leq w < -1.101$

Tabela 2: Exemplo de interações que geram focos estáveis.

5.1.2.3 Centro

Nesse caso, $\alpha = 0$ e portanto o sistema é periódico em termos de η . Realizando as mesmas transformações feitas anteriormente para o atrator e o foco estável encontramos, de (4.11):

$$r(a) = r_c + r_1 e^{i\beta\eta} + r_2 e^{-i\beta\eta}, \quad (5.35)$$

$$\rho = \rho_c + \rho_1 e^{i\beta\eta} + \rho_2 e^{-i\beta\eta}. \quad (5.36)$$

Aqui não se atinge o ponto crítico e há a alternância entre eras de dominância da matéria e de DE, Figura 9. Por definição a frequência é dada por (5.34). No caso particular de uma interação da classe $(m, n, s) = (m, 1, 2)$, i.e:

$$Q = 3H\gamma\rho^{m-2}\rho_m\rho_x$$

Realizando as perturbações (5.19) no sistema (3.19) e (3.20) com a interação acima encontramos, numa aproximação de primeira ordem:

$$g' = -\gamma(m-1)(1+w)\left(\frac{|w|}{\gamma}\right)^{\frac{m-2}{m-1}}f \quad (5.37)$$

$$f' = \frac{g}{w}\left(\frac{|w|}{\gamma}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (5.38)$$

Derivando a segunda equação e substituindo a primeira chegamos em uma equação de segundo grau em f :

$$f'' - (m-1)(1+w)f = 0. \quad (5.39)$$

Para $m > 1$ essa equação descreve oscilações com precisamente a frequência angular (5.34). Com efeito encontramos uma solução idêntica para g . Portanto as perturbações são:

$$f = f_0 \cos\left(\sqrt{(1-m)(1+w)}\eta\right) \quad (5.40)$$

$$g = g_0 \sin\left(\sqrt{(1-m)(1+w)}\eta\right). \quad (5.41)$$

De (5.28) vemos que w_{ef} oscila em torno de -1 e também por (5.31) vemos que o parâmetro de desaceleração também gira em torno -1 . Algumas interações que geram centro são citadas abaixo, em particular, o segundo corresponde a interação estudada em [24].

m	n	s	Π	Q	w
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\gamma\rho^{3/2}r^{1/2}(1+r)^{-\frac{9}{2}}$	$3H\gamma\frac{\rho_m^{\frac{3}{2}}\rho_x^3}{\rho^3}$	$w = -2$
$\frac{3}{2}$	1	-2	$-\gamma\rho^{3/2}r(1+r)^{-2}$	$3H\gamma\frac{\rho_m\rho_x}{\sqrt{\rho}}$	$w < -1$
2	1	-2	$-\gamma\rho^2r(1+r)^{-2}$	$3H\gamma\rho_m\rho_x$	$w < -1$
$\frac{3}{2}$	3/2	-5	$-\gamma\rho^{3/2}r^{3/2}(1+r)^{-5}$	$3H\gamma\sqrt{\frac{\rho_m^3\rho_x^2}{\rho^2}}$	$w = -1.2$

Tabela 3: Exemplo de interações que geram centro.

5.2 Soluções Analíticas

As análise de sistemas dinâmicos não contemplou casos onde $m = 1$, pois os autovalores são degenerados. Felizmente é possível identificar três casos com $m = 1$ que são integráveis. Uma vez tendo a solução analítica é possível estudar a dinâmica do sistema.

5.2.1 $Q = \gamma 3H \frac{\rho_m \rho_x}{\rho}$:

Essa interação corresponde a $(m, n, s) = (1, 1, -2)$, i.e. $\Pi = -\gamma\rho r(1+r)^{-2}$. Substituindo esse acoplamento em (3.20) e (3.19) encontra-se:

$$r' = r(w + \gamma) \quad (5.42)$$

$$\rho' = -\rho\left(1 + \frac{w}{1+r}\right). \quad (5.43)$$

Integrando diretamente (5.42):

$$r = r_0 a^{3(w+\gamma)}. \quad (5.44)$$

Substituindo (5.44) em (5.43):

$$\rho' = -\rho\left(1 + \frac{w}{1+r_0 a^{3(w+\gamma)}}\right). \quad (5.45)$$

Para $\rho(a=1) = \rho_0$ Eq.(5.45) se torna:

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \underbrace{\int \frac{-3}{a} \left[1 + \frac{w}{1+r_0 a^{3(w+\gamma)}}\right] da}_I. \quad (5.46)$$

Integrando I encontramos:

$$I(a) = \ln \left[a^{-3(w+1)} (a^{3(w+\gamma)} r_0 + 1)^{\frac{w}{w+\gamma}} \right]. \quad (5.47)$$

Tomando I(a)-I(1) e substituindo em (5.46):

$$\rho = \rho_0 a^{-3(w+1)} \left[\frac{1 + r_0 a^{3(w+\gamma)}}{1 + r_0} \right]^{\frac{w}{w+\gamma}}, \quad (5.48)$$

então em termos de r e ρ as soluções são:

$$r = r_0 a^{3(w+\gamma)}, \quad (5.49)$$

$$\rho = \rho_0 a^{-3(w+1)} \left[\frac{1 + r_0 a^{3(w+\gamma)}}{1 + r_0} \right]^{\frac{w}{w+\gamma}}. \quad (5.50)$$

Esse modelo também é obtido através do ansatz $r = r_0 a^\xi$ proposto em [44] para amenizar o problema da coincidência. As constantes possuem a relação $\gamma = -(w + \frac{\xi}{3})$ e reproduzem Λ CDM para $\gamma = 0$ e $w = -1$. O limite para altos e baixos red-shifts não é substancialmente diferente do modelos Λ CDM:

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0 & \quad e \quad \rho \propto a^{-3(1+w)} \quad \text{para } a \gg 1 \\ r \rightarrow r_0 & \quad e \quad \rho \propto a^{-3} \quad \text{para } a \ll 1. \end{aligned}$$

Em termos das densidades de energia, lembrando que $\rho_m = \frac{r}{1+r}\rho$ e $\rho_x = \frac{1}{1+r}\rho$ temos:

$$\rho_m = \underbrace{\frac{r_0 \rho_0}{1 + r_0}}_{\rho_{m_0}} a^{-3(1-\gamma)} \left[\frac{1 + r_0 a^{3(w+\gamma)}}{1 + r_0} \right]^{\frac{-\gamma}{w+\gamma}}$$

e

$$\rho_x = \underbrace{\frac{\rho_0}{1 + r_0}}_{\rho_{x_0}} a^{-3(1+w)} \left[\frac{1 + r_0 a^{3(w+\gamma)}}{1 + r_0} \right]^{\frac{-\gamma}{w+\gamma}}.$$

Finalmente:

$$\rho_m = \rho_{m_0} a^{-3(1-\gamma)} \left[\frac{1 + r_0 a^{3(w+\gamma)}}{1 + r_0} \right]^{\frac{-\gamma}{w+\gamma}}, \quad (5.51)$$

$$\rho_x = \rho_{x_0} a^{-3(1+w)} \left[\frac{1 + r_0 a^{3(w+\gamma)}}{1 + r_0} \right]^{\frac{-\gamma}{w+\gamma}}. \quad (5.52)$$

5.2.2 $Q = \gamma 3H \frac{\rho_m^2}{\rho}$:

A interação é $\Pi = -\gamma \rho r^2 (1+r)^{-2}$ e corresponde á $(m, n, s) = (1, 2, -2)$. Substituindo Π em (3.20) encontramos

$$r' = r w + \gamma r^2$$

cuja solução é:

$$r = \frac{w r_0}{(\gamma r_0 + w) a^{-3w} - \gamma r_0}. \quad (5.53)$$

Substituindo em (3.19) encontramos:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1-\frac{w\gamma}{w-\gamma})} \left[\frac{a^{-3w}(w + \gamma r_0) - r_0(w - \gamma)}{w(1 + r_0)} \right]^{\frac{w}{w-\gamma}}. \quad (5.54)$$

Os limites para baixos e altos red-shifts são:

$$\begin{aligned} r &\rightarrow a^{-3} & e & \rho \propto a^{-3(1+w)} & \text{para } a \gg 1 \\ , \quad r &\rightarrow \frac{|w|}{\gamma} & e & \rho \propto a^{-3(1-\frac{w\gamma}{w-\gamma})} & \text{para } a \ll 1. \end{aligned}$$

5.2.3 $Q = \gamma 3H \frac{\rho_x^2}{\rho}$:

Em termos da pressão efetiva o acoplamento é dado por $\Pi = -\gamma \rho (1+r)^{-2}$, ou seja, $(m, n, s) = (1, 0, -2)$. As equações (3.19) e (3.20) ficam:

$$r = (r_0 + \frac{\gamma}{w}) a^{3w} - \frac{\gamma}{w} \quad (5.55)$$

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\frac{w^2}{w-\gamma})} \left(\frac{a^{3w}(r_0 w + \gamma) + w - \gamma}{w(1 + r_0)} \right)^{\frac{w}{w-\gamma}}. \quad (5.56)$$

Em termos de ρ_m e ρ_x temos:

$$\rho_m = \rho_0 \left[\frac{(r_0 + \frac{\gamma}{w})a^{3w} - \frac{\gamma}{w}}{(r_0 + \frac{\gamma}{w})a^{3w} + 1 - \frac{\gamma}{w}} \right] a^{-3(1+\frac{w^2}{w-\gamma})} \left[\frac{a^{3w}(r_0 w + \gamma) + w - \gamma}{w(1+r_0)} \right]^{\frac{w}{w-\gamma}}$$

$$\rho_x = \rho_0 \left(1 + (r_0 + \frac{\gamma}{w})a^{3w} - \frac{\gamma}{w} \right)^{-1} \left[\frac{a^{3w}(w r_0 + \gamma) + w - \gamma}{w(1+r_0)} \right]^{\frac{w}{w-\gamma}} a^{-3(1+\frac{w^2}{w-\gamma})}.$$

Os limites de alto e baixo red-shifts podem ser vistos na Figura 10. Abaixo o comportamento para o modelo Λ CDM, substancialmente diferente do obtivo com a interação.

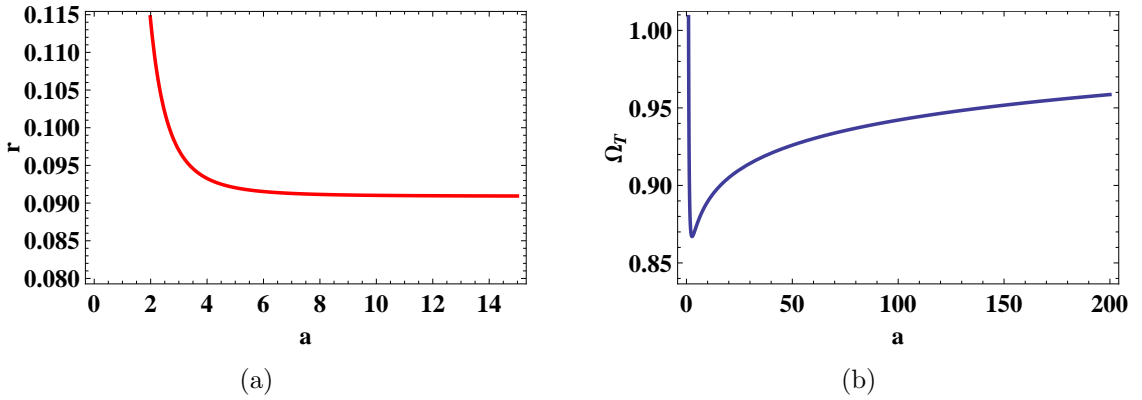


Figura 10: Dinâmica das variáveis r e Ω_T para a interação $Q = \gamma 3H \frac{\rho_x^2}{\rho}$ com a escolha arbitrária: $w = -1.1$ e $\gamma = 0.1$.

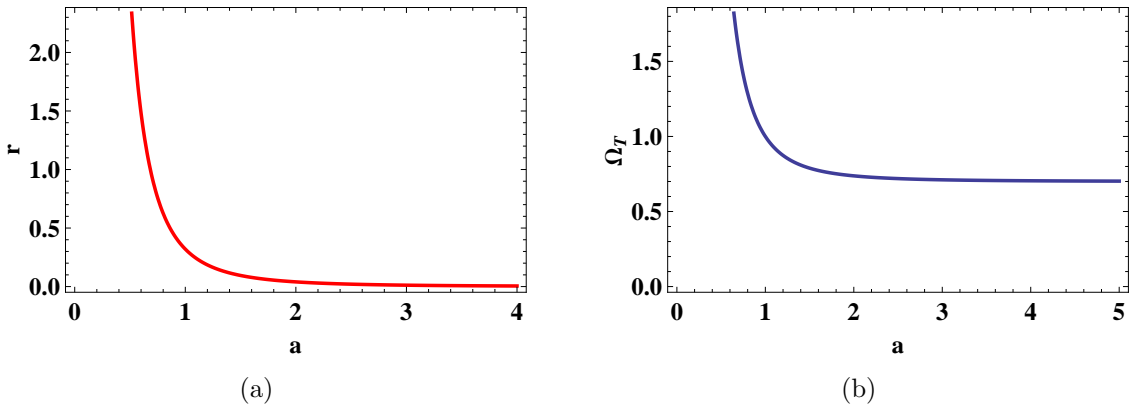


Figura 11: Dinâmica das variáveis r e Ω_T para o modelo Λ CDM.

Para $a \ll 1$ temos $r \propto a^{-3|w|}$ e $\rho \propto a^{-3}$ e para $a \gg 1$ encontra-se $r \rightarrow \frac{\gamma}{|w|}$ e $\rho \propto a^{-3\left(1+\frac{|w|^2}{|w|+\gamma}\right)}$. Esse último limite nos leva a pensar o caso particular:

$$1 + \frac{|w|^2}{|w| + \gamma} = 0$$

A densidade total de energia nesse caso tenderia á uma constante. Se a condição

acima é válida então as constantes relacionam-se da seguinte maneira:

$$\gamma = |w|(|w| - 1) \quad (5.57)$$

Essa relação implica que o limite para altos redshifts seja:

$$r_\infty = -w - 1 \quad (5.58)$$

$$\rho_\infty = \rho_0 \left[\frac{|w|}{1 + r_0} \right]^{\frac{1}{w}}. \quad (5.59)$$

Como era de se esperar, uma vez que $\rho = \rho_\infty$ é uma constante no futuro então $\rho'_\infty = 0$. Utilizando (3.19) a solução, já encontrada no cálculo dos ponto críticos, é $r = -w - 1$ e está de acordo com o fato apontado anteriormente que, um acoplamento que gera um comportamento $\rho = \rho_c \neq 0$, para que r satisfazça as WEC (CONFIRMAR!!), deve possuir uma componentee de DE com equação de estado do tipo fantasma, $w < -1$.

Uma análise perturbativa simples em torno da solução para r nos mostra que a solução atratora é estável. Supondo uma pequena perturbação em torno do ponto crítico δ tal que $r = r_\infty + \delta$. Para uma aproximação de primeira ordem (3.20) fica:

$$\delta' = -\delta \frac{\gamma}{r_c}, \quad (5.60)$$

cuja solução é $\delta = a^{\frac{-3\gamma}{r_c}}$, ou seja, $\delta = a^{-3|w|}$, portanto o ponto crítico é um atrator. Por apresentar uma dinâmica com $r \rightarrow r_c$ esse caso é interessante do ponto de vista do PCC. Além disso, proporciona uma solução analítica para ρ e é possível realizar diretamente testes observacionais com SNIa utilizando o método descrito no Apêndice A. A grandeza relevante é a distância luminosa, d_L que é calculada utilizando-se $H(z)$. O teste foi feito com a solução (5.56) que fornece, utilizando a equação de Friedmann:

$$\frac{H}{H_0} = a^{-\frac{3}{2}\left(1+\frac{w^2}{w-\gamma}\right)} \left(\frac{w - \gamma + a^{3w}(\gamma + r_0 w)}{w(1 + r_0)} \right)^{\frac{1}{2}\frac{w}{w-\gamma}} \quad (5.61)$$

Os parâmetros livres para a estimativa χ^2 são w , γ , h , Ω_{m0} através da relação $r_0 = \frac{\Omega_{m0}}{1-\Omega_{m0}}$. As estimativas de h giram em torno de $h = 0.72 \pm 0.08$ e não são relevantes nesse trabalho. Na estimativa de χ^2_{min} utilizamos o método de marginalização em

h descrito em [45] e também brevemente no Apêndice A.

Utilizando a compilação UNION2 os valores que melhor ajustam os dados são $(\gamma, w, \Omega_{m0}, \chi^2_{min}) = (0.36^{+0.60}_{-1.25}, -1.20^{+0.26}_{-0.4}, 0.39^{+0.08}_{-0.19}, 540.863)$. Os intervalos de confiabilidade no espaço de parâmetros encontra-se na Figura 12 [43].

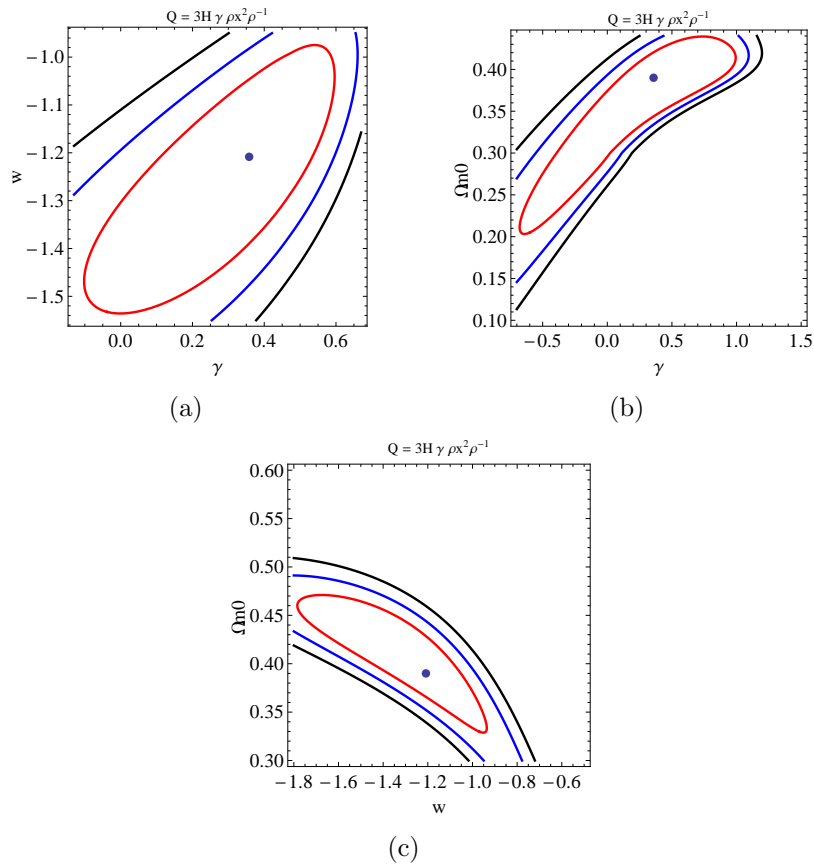


Figura 12: Regiões de confiabilidade no espaço de parâmetro (w, γ, Ω_{m0}) para um caso particular da interação $Q = \gamma 3H \frac{\rho_x^2}{\rho}$. Os contornos de 1σ , 2σ e 3σ são dados em vermelho azul e preto respectivamente.

Podemos observar que o melhor ajuste para γ , quando substituimos na relação (5.57), fornece $|w| = 1.28$ que é, com uma precisão razoável, o melhor ajuste encontrado para w indicando que á princípio os dados “preferem” o caso especial da interação $Q = \gamma 3H \frac{\rho_x^2}{\rho}$.

5.3 Algumas considerações sobre o Universo temprano:

Estivemos o tempo todo interessados em descrever o Universo tardio sem nos preocuparmos se a classe de modelos que estudamos gera um cenário de dominância de matéria no Universo temprano. A análise dinâmica não nos fornece esse tipo de informação, porém

se considerarmos soluções atratoras tais que $r > r_c$ e $\rho > \rho_c$ podemos lançar luz brevemente nos vínculos que uma era de dominância de matéria implicaria.

Uma breve inspeção na Figura 3 mostra que soluções com $r > r_c$ e $\rho > \rho_c$ existem. Nesse caso $r' < 0$ e $\rho' < 0$ e portanto, das equações (3.19) e (3.20) encontramos:

$$\rho' < 0 \quad \Rightarrow \quad r > |w| - 1 = r_c \quad (5.62)$$

e

$$r' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \rho^{m-1} < |w| r^{1-n} (1+r)^{-(s+2)} . \quad (5.63)$$

Se avaliamos as desigualdades acima no momento atual então temos $r_0 > |w| - 1$ e $\gamma \rho_0^{m-1} < |w| r_0^{1-n} (1+r_0)^{-(s+2)}$ esse último termo é da ordem da unidade e $\rho_0 \approx \rho_{cr}$ cujo valor é $\rho_{cr0} = 1.88 h^2 10^{-29} \text{gcm}^{-3}$ e portanto γ deve ser menor ou da ordem de $10^{29} \text{g}^{-1} \text{cm}^{3m-1}$. Nos casos analíticos $m = 1$, portanto γ deveria ser da ordem de um. Não por acaso para a interação $Q = \gamma 3H \frac{\rho_x^2}{\rho}$ o valor de melhor ajuste desse parâmetro satisfaz o limite encontrado.

Essas condições reescritas em termos de ρ_c nos fornece a seguinte desigualdade:

$$\rho_0^{m-1} > \rho_c^{m-1} = \frac{|w|^{-(s+1)} (|w| - 1)^{1-n}}{\gamma} \quad (5.64)$$

Ou seja,

$$|w| - 1 < (|w|^{s+1} \gamma \rho_0^{m-1})^{\frac{1}{1-n}} . \quad (5.65)$$

Portando desvio de $|w|$ em torno de um aparentam estar relacionados com a intensidade da interação dada por γ . Os dados observacionais corroboram com essa interpretação.

Podemos reescrever as equações de fluido para DM e DE substituindo a classe de interações (3):

$$\rho'_m + \rho_m [1 - \gamma \rho^{m-1} r^{n-1} (1+r)^{s+1}] = 0 \quad (5.66)$$

$$\rho'_x + \rho_x [1 + w + \gamma \rho^{m-1} r^n (1+r)^{s+1}] = 0 \quad (5.67)$$

Como γ satisfaz a condição acima então a interação é apenas uma pequena correção na dinâmica dos fluidos como era de se esperar se impomos uma era de dominância de matéria.

6 Conclusão

Modelos de interação no setor escuro são amplamente estudados como uma alternativa para abordar o Problema da Coincidência Cósmica. Nesse trabalho investigamos a interação entre dois fluidos, por hipótese, como sendo a DE com EoS $p = w\rho$ e DM com $p = 0$. Acoplamos as equações (3.19) e (3.20) através de um termo de pressão efetiva Π . O sistema de equações que descreve o comportamento das grandezas relevantes r e ρ foi estudado qualitativamente e três casos se destacam por conceitualmente aliviarem o PCC: atrator, foco estável e centro.

Com relação a uma interação arbitrária Π conclui-se que, se é não nula, as densidades de energia do setor escuro satisfazam as Condições Fracas de Energia então sob o ponto crítico a pressão efetiva deve satisfazer:

$$\Pi_c < 0. \tag{6.1}$$

Indicando que, se a dinâmica do universo é do tipo atrator, então no regime estacionário o fluxo de energia é da DE para a DM. Objetivamente escolhemos um tipo particular de interações não-lineares 3. Para γ definido constante a condição (6.1) resulta que ele deve ser positivo. Outro parâmetro de interesse do modelo é w . As Condições Fracas de Energia implicam que devemos ter necessariamente $w < -1$. Isso significa que para o sistema possuir simultaneamente scaling solution e $\rho \rightarrow \rho_c$ então DE deve ter uma equação do tipo fantômica. As tabelas 1 e 2 exemplificam a quantidade de modelos que possuem esse comportamento, os com soluções do tipo atrator ou com foco estável.

No contexto de modelos do tipo w-CDM, uma EoS fantômica para um tipo específico de universo indica um Big Rip. No modelo em questão isso não ocorre, pois com relação á dinâmica de fundo o comportamento é determinado pela Equação de Estado Efetiva, cuja expressão é:

$$w_{ef} = \frac{w}{1+r}. \quad (6.2)$$

No ponto crítico temos $w_{ef} = -1$. A interação entre dois fluidos estaria reproduzindo uma Constante Cosmológica no futuro. O triunfo dessa construção é que, ao contrário do Modelo de Concordância, conceitualmente não temos o PCC, pois $r \rightarrow r_c$

Além de soluções do tipo atratoras apontamos também, assim como [24, 26], soluções periódicas que correspondem aos centros. Como demonstrado para o caso particular $(m, 0, 0)$, temos w_{ef} oscilando em torno de $w_{ef} = -1$ indicando que o universo cruza o limite fantasma periodicamente. A solução da equação (5.40) nos dá a expressão para o período como sendo :

$$a_P = \exp \left[\frac{2\pi}{3\sqrt{(1-m)(1+w)}} \right]. \quad (6.3)$$

Por exemplo, para modelos onde a interação é dada pelo parâmetros $(m, n, s) = (2, 0, 0)$ o período dessa oscilação é $a_P = 752.243$. A tabela 3 mostra algumas interações não-lineares compatíveis com esse comportamento.

Além de restringir o espaço de parâmetro em w e γ vinculamos também os outros parâmetros do modelos, a saber, m , n e s utilizando a caracterização de pontos críticos citada no Capítulo 4. Encontramos as seguintes condições:

- ATRATOR: $w < -1$ e $m > 1$ e $+s < -\frac{2+w+nw}{1+w} - 2\sqrt{\frac{1-m}{1+w}}$
- INSTÁVEL: $w < -1$ e $m > 1$ e $-s < +\frac{2+w+nw}{1+w} - 2\sqrt{\frac{1-m}{1+w}}$
- CELA: $w < -1$ e $m < 1$
- CENTRO: $w < -1$ e $m > 1$ e $n = \frac{-2-s-w-sw}{w}$ e $n > 1$
- FOCO ESTÁVEL: $w < -1$ e $m > 1$ e $n < \frac{-2-s-w-sw}{w}$
- FOCO INSTÁVEL: $w < -1$ e $m > 1$ e $n > \frac{-2-s-w-sw}{w}$

Esperamos que essa classificação em termos do ponto crítico para cada combinação dos parâmetros (w, m, n, s) seja útil futuramente ao prever o comportamento de modelos

com motivações físicas mais fortes e que possam ser escritos em termos da classe de interações (3). No Anexo II disponibilizamos uma lista de interações e a característica do espaço de fase.

Apesar da análise de sistema dinâmicos contemplar muitos casos ela ainda possui sérias limitações, por exemplo, não fornece uma solução analítica e não fornece informações sobre interações com o parâmetro $m = 1$. Observando o sistema de equações (3.19) e (3.20) três casos particulares emergem com $m = 1$ e que podem ser integrados são eles: $(m, n, s) = (1, 1, -2)$, $(m, n, s) = (1, 0, -2)$ e $(m, n, s) = (1, 2, -2)$. A dinâmica em cada caso é estudada a partir da solução analítica nas seções 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3.

Dentre os casos analíticos o terceiro caso é o mais interessante. Diz respeito a interação $Q = \gamma 3H \frac{\rho_x^2}{\rho}$ e possui a solução (5.56). Essa solução nos leva a pensar o caso particular onde os parâmetros w e γ satisfazem (5.57) que é capaz de reproduzir um fluido efetivo que se comporta como matéria no universo temprano e atinge um estado estacionário como vemos em (5.58) e (5.59).

O teste com Supernova do Tipo Ia utilizando a amostra UNION2 indica que os dados preferem o caso particular dado pela relação (5.57). Utilizamos a solução (5.56) para calcular a distância luminosa e a resposta dos dados a minimização do χ^2 como descrito no apêndice I nos indica a seguinte combinação de parâmetros como melhor ajuste: $(\gamma, w, \Omega_{m0}, \chi^2_{min}) = (0.36^{+0.60}_{-1.25}, -1.20^{+0.26}_{-0.4}, 0.39^{+0.08}_{-0.19}, 540.863)$. As regiões de confiabilidade estão mostradas na Figura 12 O modelos apresentado nos parece muito interessante e merece futuramente uma investigação mais detalhada e mais confrontamentos observacionais. Quanto a dinâmica de fundo modelos de interação respondem como um fluido efetivo, porém é apontado em [28] que testes com formação de estrutura são sensíveis aos detalhes da interação.

No que diz respeito a dificuldade de obtermos uma solução analítica para a maior parte dos modelos não-lineares realizamos tentativas bem sucedidas de encontrar as soluções numéricas que precisam de uma investigação maior num próximo momento. Por outro lado a abordagem atual carece de uma motivação física concreta para a interação II. Esteticamente buscar essa motivação antes de realizar testes observacionais parece ser um caminho e, na literatura, poucos são os esforços nesse sentido.

O estudo dos espaços de fase foi muito prolífico ao classificar os modelos de interação de acordo com as soluções que ele gera, um outro caminho, portanto, seria fazer algum tipo de análise dinâmica com outras classes de modelos não-lineares, por exemplo, interações dependentes do tempo, etc.

APÊNDICE A – Estatística Bayesiana e Supernovas do Tipo Ia:

A.1 Teorema de Bayes:

A ferramenta estatística utilizada nos testes observacionais cosmológicos é a Estatística Bayesiana, uma alternativa à Estatística Frequentista, onde, por definição, a probabilidade é a razão entre o número de sucessos de ocorrer determinado evento sobre o número total repetições. Inúmeras são as críticas à Estatística Frequentista que justificam a abordagem Bayesiana, para maiores detalhes [46] é a referência principal desse apêndice.

Definição de *Probabilidade* Bayesiana:

$p(A|B)$ é a medida do grau de veracidade de A dado as informações conhecidas do sistema, representadas por B.

A definição bayesiana é a grande responsável pelo seu triunfo na Cosmologia, pois não necessita conceitualmente de infinitas repetições para se definir a probabilidade. Matematicamente a definição é dada pelo Teorema de Bayes, seja $p(H_i|D, I)$ a probabilidade de serem verdadeiras as hipóteses H_i , então:

$$p(H_i|D, I) = \frac{p(H_i|I)p(D|I, H_i)}{p(D|I)}, \quad (\text{A.1})$$

onde D são os dados e I possíveis vínculos no espaço de parâmetro. O termo $p(H_i|I)$ carrega a informação a priori, ou seja, como esperamos que seja a veracidade de H_i frente os vínculos do sistema. Por exemplo, se os H_i 's são equiprováveis, ou não. No jargão científico esse termo é chamado de “prior”. O termo $p(D|I, H_i)$ é conhecido como verossimilhança¹ e diz respeito à plausibilidade dos dados frente as hipóteses e às informações a priori. Por exemplo, a verossimilhança deve ser máxima quando H_i e I são

¹Tradução de *likelihood*.

os valores que melhor ajustam o modelo aos dados. A função que fornece a *likelihood* é escolhida frente á natureza dos dados. Por fim o denominador da definição acima funciona como uma normalização e é chamado de "prior predictivet't":

$$p(D|I) = \sum p(H_i|I)p(D|I, H_i) \quad (\text{A.2})$$

A.2 Aplicação à SNIa

Supernovas do Tipo Ia são as velas padrões do Universo. São o resultado da explosão termonuclear de uma anã branca. O processo físico responsável por essa explosão é conhecido e portanto pode-se relacionar o espectro luminoso dessa explosão, e seu consequente desvio para o vermelho, com a distância que essas supernovas estão de nós, observadores. Inferindo a distância através do red-shift é possível estimar parâmetros relacionados a expansão do Universo.

O Teorema do Limite Central de Gauss justifica a seguinte construção:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i - \mu(D|\theta))^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.3})$$

Onde μ é a grandeza a ser estimada teórica e observacionalmente e σ é a dispersão das medidas. A técnica de minimizar o χ^2 é utilizada para determinar os parâmetros, representados por θ , que melhor ajustam os dados. Construímos a função da *likelihood* se tomamos como informação a priori, I, que os eventos observacionais são equiprováveis, então nosso prior é constante e a probabilidade é proporcional á verossimilhança, $p(D|\theta, I)$, construída como sendo:

$$p(D|\theta, I) \propto \exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right) \quad (\text{A.4})$$

Portando minimizar o χ^2 é maximizar a probabilidade, i.e., quanto melhor um conjunto de parâmetros θ ajusta um modelos aos dados, mais plausível, ou mais confiável é a estimativa desses parâmetros. No caso das SNIa a grandeza de interesse μ é a distância luminosa. Pacotes como UNION2 são um compêndio de 512 supernovas, seus redshift, z_i , e sua distância luminosa, μ_i . Teoricamente essa distância é dada pela expressão:

$$\mu = 5\log D_L - \mu_0, \quad (\text{A.5})$$

onde D_L é chamada distância luminosidade (para maiores detalhes sobre a parte conceitual acerta do cálculo de distâncias cosmológica, consultar [11]). Finalmente o modelo entra no cálculo de D_L através do parâmetro de Hubble, $H(z)$. Para um Universo plano temos:

$$D_L = (1+z) \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz'. \quad (\text{A.6})$$

Em (A.5) o parâmetro de Hubble aparece dentro da expressão para μ_0 que pode ser estimado junto com os parâmetros do modelo. Como estamos interessados principalmente no que diz respeito aos parâmetros γ e w realizamos o procedimento descrito em [25] de marginalização em μ_0 , ou seja, uma expansão do χ^2 em termos de $\mu_0 = 0$. Minimizar χ^2 é minimizar χ_{MARG}^2 que é dado por:

$$\chi_{marg}^2 = A - \frac{B^2}{C}, \quad (\text{A.7})$$

onde A, B e C são:

$$A = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i - \mu(z_i | \theta \mu_0 = 0))^2}{\sigma_i^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$B = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i - \mu(z_i | \theta \mu_0 = 0))}{\sigma_i^2}, \quad (\text{A.9})$$

$$C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (\text{A.10})$$

Para realizar o teste observacional do Capítulo 5 utilizamos a amostra UNION2. Da equação de Friedmann para o modelo analítico da seção 5.2.3 o $H(z)$ utilizado foi:

$$H = H_0 a^{-\frac{3}{2}\left(1 - \frac{|w|^2}{|w| + \gamma}\right)} \left[\frac{|w| + \gamma + (|w|r_0 - \gamma) a^{-3|w|}}{|w|(1+r_0)} \right]^{\frac{1}{2} \frac{|w|}{|w| + \gamma}}, \quad (\text{A.11})$$

que corresponde a solução (5.56).

As estimativas de parâmetros utilizando Supernovas é amplamente utilizado na literatura especializada. Inclusive defini-se índices através dos quais é possível comparar modelos. Em [25] alguns modelos de diferentes $H(z)$ são comparados, alguns podem ser gerados através de modelos de interação, apesar de esse não ser o objetivo do artigo citado.

Uma análise e comparação de modelos de interação do ponto de vista observacional é um desafio e um projeto futuro.

Referências

- 1 C. Wetterich. Nucl. Phys. B, **302**, 668, 1988.
- 2 D. Pavón e W. Zimdahl. Holographic dark energy and coincidence problem. *arXiv:astro-ph/0606555v3*. 2007
- 3 L. Chimento. Linear and nonlinear interactions in the dark sector. Phys.Rev.D, **81**, 043525, 2010.
- 4 L. Amendola. Coupled Quintessence. Phys.Rev.D, **62**, 2000.
- 5 P. Wu e H. Yu. Interacting generalized chaplygin gas. Class. Quantum Grav., **24**, 4661-4668, 2007.
- 6 R. de Andrade Martins. Teoria da Relatividade Especial. Grupo de História e Teoria da Ciência, Brasil, 2008.
- 7 L. Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge, 2009.
- 8 R. D’Inverno. Introducing Einstein’s Relativity. Oxford University Press, 1998.
- 9 A. Krasínski. Cosmological Models and misunderstandings about them. *arXiv:1110.1828v1*, 2010.
- 10 M. Celerier. The Accelerated Expansion of the Universe Challenged by an Effect of the Inhomogeneities. A Review. New Advances in Physics, **1**, 29, 2007.
- 11 S. Weinberg. Cosmology, Oxford, UK, 2008.
- 12 V. M. Slipher. The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge, 1924.
- 13 C. Wirtz. Astr. Nachr., **206**, 109, 1918.
- 14 K. Lundmark. Stock. Hand., **8**, 1920.
- 15 E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. Proc. Natl. Acad. Sci., **15**, 168-173, 1929.
- 16 A. G. RIESS et al.. Observational Evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant. The Astronomical Journal, **116**, 1009-1038, 1998.
- 17 S. Perlmutter et al. Measurements of and from 42 High-Redshift Supernovae. The Astronomical Journal, **517**, 565-586, 1999.
- 18 M. Quartin, M. O. Calvão, S. E. Jorás, R. R. R. Reis, I. Waga. Dark Interactions and Cosmological Fine-Tuning. JCAP, 0805:**007**, 2008.

- 19 S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- 20 M. Sami. A primer on problems and prospects of dark energy. *Current Science*, **97**, 887, 2009.
- 21 S. del Campo, R. Herrera, D. Pavón. Toward a Solution of the Coincidence Problem. *Phys. Rev. D*, **78**, 2008.
- 22 M. Fukugita, C.J. Hogan e P.J.E. Peebles. The Cosmic Baryon Budget. *Astrophys J.*, **503**, 518, 1998.
- 23 L. Amendola, M. Quartin, S. Tsujikawa and I. Waga. Challenges for Scaling Cosmologies. *Physical Review D*, **74**, 2006.
- 24 S. Lip. Interacting Cosmological Fluids and The Coincidence Problem. *Phys. Rev. D*, **83**, 023528, 2011.
- 25 S. Nesseris e L. Perivolalopoulos. A comparison of cosmological models using recent supernova data. *Phys.Rev.D* **70**,043531,2004
- 26 S. Dodelson, M. Kaplinghat, E. Stewart. Solving the Coincidence Problem: Tracking Oscillating Energy. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 5276-5279, 2000.
- 27 R. Cai e A. Wang. Cosmology with Interaction between Phantom Dark Energy and Dark Matter and the Coincidence Problem. *JCAP*, **002**, 0503, 2005.
- 28 L. L. Honorez, B. A. Reid, O. Mena, L. Verde, R. Jimenez. Coupled dark matter-dark energy in light of near universe observations. *JCAP*, **29**, 2010.
- 29 H. Zhang, H. Yu, Z. Zhu e Y. Gong. A quantitative criteria for the coincidence problem. *Phys.Lett.B*, **678**, 331-334, 2009.
- 30 N. Mazumder, R. Biswas, S. Chakraborty. Interacting Holographic Dark Energy at the Ricci scale and Dynamical system *arXiv:1106.4627v1*, 2011.
- 31 X. Chen, Y. Gong. Fixed points in interacting dark energy models. *arXiv:0811.1698v1*, 2008.
- 32 Yin-Zhe Ma, Y. Gong, X. Chen. Coupling Between Holographic Dark Energy and Dark Matter. *The European Physical Journal C*, **69**, 509-519, 2010.
- 33 Z. Guo, R. Cai e Y. Zhang. Cosmological Evolution of Interacting Phantom Energy with Dark Matter. *JCAP*, 0505, **002**, 2005.
- 34 L. P. Chimento, M. Forte, G. M. Kremer. Cosmological model with interactions in the dark sector. *Gen.Rel.Grav.*, **41**, 1125-1137, 2009.
- 35 W. Zimdahl. Accelerated expansion through interaction. *Proceedings of the Spanish Relativity Meeting ERE2008 in Salamanca*, 2008.
- 36 W. Zimdahl, D. Pavón, L. Chimento. Interacting Quintessence. *Phys.Lett.B*, **521**, 133-138, 2001.

- 37 L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon, W. Zimdahl. Interacting quintessence solution to the coincidence problem. *Phys.Rev. D*, **67**, 2003.
- 38 W. Zimdahl. Interacting Dark Energy And Cosmological Equation Of State. *Int.J.Mod.Phys. D*, **14**, 2319-2326, 2005.
- 39 S. Lynch. *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*, Birkhäuser, 2007.
- 40 W. E. Boyce e R. C. DiPrima. *Elementary differential equations and boundary value problems*, John Wiley & Sons, 6ª Edição, 1997.
- 41 R. Seydel. *From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcations and Stability Analysis*. Elsevier, 1988.
- 42 M. Villarini. Smooth linearization of centers. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 6ª série, tomo 9, **3**, 565-570, 2000.
- 43 F. Arévalo, A. P. R. Bacalhau e W. Zimdahl. Cosmological dynamics with non-linear interactions. **arXiv:1112.5095v1 [astro-ph.CO]**, 2011.
- 44 N. Dalal, K. Abazajian, E. Jenkins e A.V. Manohar. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 1939, 2001.
- 45 S. Nesseris e L. Perivolaropoulos. Comparison of the Legacy and Gold SNIa Dataset Constraints on Dark Energy Models. *Phys.Rev.D*, **72**, 2005.
- 46 P. C. Gregory. *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Science*. Cambridge, 2005.