UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO
ENGENHARIA MECÂNICA

LORENZO ZAMPROGNO DE SOUZA

UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE COMPACTO NA MODELAGEM DIRETA DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

VITÓRIA

2013

LORENZO ZAMPROGNO DE SOUZA

UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE COMPACTO NA MODELAGEM DIRETA DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

VITÓRIA

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Souza, Lorenzo Zamprogno de, 1988-

S729u Utilização de funções de base radial de suporte compacto na modelagem direta de integrais de domínio com o método dos elementos de contorno / Lorenzo Zamprogno de Souza. – 2013.

244 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Interpolação. 2. Funções de base radial. 3. Métodos de elementos de contorno. 4. Equações diferenciais parciais. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

"Utilização de funções de base radial de suporte compacto na modelagem direta de integrais de domínio com o método dos elementos de contorno"

Lorenzo Zamprogno de Souza

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Prof. Dr. Julio Tomas Aquije Chacaltana – Examinador interno
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Fernando C. Meira Menandro

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro - Examinador interno
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Dr. André Bulcão – Examinador externo
Centro de Pesquisas da Petrobras - CENPES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 25 de março de 2013.

Aos meus Pais, Lucinea e Hélio, que tanto amo.

Aos meus Irmãos, Karina e Nirlan, que tanto admiro.

RESUMO

O propósito da pesquisa aqui elaborada é mostrar a viabilidade da aplicação de Funções de Base Radial de Suporte Compacto (FBRSC) no processo de aproximação direta do núcleo da ação de domínio através de integração de contorno. Essa formulação utilizada no tratamento da integral de domínio é denominada como (Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta de Contorno) MECIC. Com o intuito de se avaliar a efetividade das FBRSC como funções de interpolação, serão realizados diversos testes numéricos, onde se deseja calcular o volume de superfícies. Então, serão realizados testes bidimensionais de aproximação, variando-se o suporte das FBRSCs, a fim de analisar o comportamento dessas funções. Depois de verificar a efetividade e a precisão das FBRSCs no processo de interpolação, desenvolvem-se programas, no ambiente do Método dos Elementos de Contorno (MEC), para a solução de problemas governados pela Equação de Poisson com a Formulação MECIC associada ao conceito de interpolação com FBRSC com suporte devidamente otimizados.

A aferição das soluções numéricas obtidas se dá a partir da comparação com as suas respectivas soluções analíticas, facilmente encontradas na literatura especializada. Assim, possibilita-se estimar o erro relativo e então a eficácia da Formulação MECIC com FBRSC. Uma vez comprovado a sua eficácia, a Formulação MECIC com FBRSC é testada também com o esquema de interpolação com ajuste de pontos. Durante todo o desenvolvimento, atenta-se para a importância do custo computacional da formulação, a partir da geração de tabelas com o tempo de processamento dos programas implementados no MEC. Dessa forma, avalia-se qualitativamente o desempenho das FBRSC na Formulação MECIC, visando futuras aplicações na área de propagação de ondas sísmicas.

Palavras-chave: Interpolação, Funções de Base Radial, Métodos de Elementos de Contorno, Equações Diferenciais Parciais.

ABSTRACT

The purpose of this research is to show the viability of application of Compactly Supported Radial Basis Function (CSRBF) in the process of direct approximation of the core of the domain action through boundary integration. This formulation is termed as (Boundary Elements Method with Directs Boundary Integration) MECIC, and is used in the treatment of the domain integration. By evaluating the effectiveness of CSRBF as interpolation functions, it performed several numerical tests to calculate the volume of surfaces. Also; by varying the support of CSRBFs, it performed two-dimensional approximation tests to examine the behavior of these functions. After verifying the effectiveness and accuracy of CSRBFs in the interpolation process, it developed computational programs to solve physical problems using the MECIC formulation, which is governed by Poisson's Equation. That formulation is associated with the concept of CSRBF in which the support is properly optimized.

The calibration of the numerical solutions is given by the confrontation with their respective analytical solutions, easily found in the specialized literature. In this way, it is possible to estimate the relative error and the effectiveness of the MECIC formulation in association with the CSRBF concept. It is tested also with the curve fitting interpolation scheme. Owing the importance of the computational cost of that formulation, it is generated several time tables showing the processing time of those Boundary Elements Method computational programs. Therefore; aiming future applications in the seismic propagation wave area, it was finally evaluated the qualitative performance of the CSRBF in MECIC's formulation.

Keywords: Interpolation, Radial Basis Functions, Boundary Elements Method, Partials Differentials Equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Domínio bidimensional Ω delimitado pelo Γu+ Γq. 60

Figura 2 – Discretização do contorno. 64

Figura 3 – Representação do elemento linear. 65

Figura 4– Varredura dos nós do contorno. 65

Figura 5 – Visualização do contorno integrável composto somente pelo contorno Γ_{circ} definido pela circunferência centrada no ponto base, cujo raio é igual ao suporte compacto δ. 73

Figura 6 - Visualização do contorno integrável composto por uma parcela do contorno Γ do domínio do problema acrescido do contorno Γ_{circ}, que é definido pelo arco de circunferência inscrito em Ω e centrado no ponto base, cujo raio é igual ao suporte compacto δ. 74

Figura 7 - Visualização do contorno integrável composto pela totalidade do contorno Γ do domínio do problema. 74

Figura 8 – Visualização dos ângulos θ_h definidos para cada arco de circunferência inscrito em Ω. 76

Figura 9– Visualização da malha utilizada nos testes com volume: Para N=10. 84

Figura 10– Visualização da malha utilizada nos testes com volume. Malha com N=10 e somente pontos no contorno. 84

Figura 11 – Visualização da malha regularmente preenchida utilizada nos testes com volume para variação do suporte da FBRSC. 85

Figura 12– Função de Franke. 86

Figura 13 – Barra de seção transversal constante em gastada no topo, sendo submetida ao próprio peso. 88

Figura 14 – Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{5,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 95

Figura 15 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 96

Figura 16 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 96

Figura 17 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 97

Figura 18 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 97

Figura 19 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 98

Figura 20 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{5,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 101

Figura 21 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi 5,0$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 101

Figura 22 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi 3,3$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 102

Figura 23- Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi 3,3$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 102

Figura 24- Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi 3,0$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 103

Figura 25 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi 3,0$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 103

Figura 26 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi 5,0$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 106

Figura 27 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Paraboloide e Função de Wendland $\phi 5,0$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 107

Figura 28 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Paraboloide e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 107

Figura 29 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação paraboloide e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 108

Figura 30 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 108

Figura 31 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno. 109

Figura 32 – Malhas de interpolação regular contendo, respectivamente da esquerda para a direita, 441 pontos e 961 pontos. 110

Figura 33 – Obtenção do valor do suporte otimizado da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para o Campo Função de Franke com uma malha regular de 961 pontos base, a partir do teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos interpolantes. 112

Figura 34 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante. 114

Figura 35 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de

Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante. 114

Figura 36 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante. 115

Figura 37 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke. 115

Figura 38 -– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke. 116

Figura 39 - Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke. 116

Figura 40 - Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide. 117

Figura 41 - Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide. 117

Figura 42 - Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de

Wendland $\phi 3,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide. 118

Figura 43– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi 5,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo exponencial. 119

Figura 44– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wu $\phi 3,3$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial. 119

Figura 45– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi 3,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial. 119

Figura 46 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi 5,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante. 124

Figura 47– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wu $\phi 3,3$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante. 124

Figura 48– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi 3,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante. 124

Figura 49– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de

Wendland $\phi 5,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke. 125

Figura 50– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wu $\phi 3,3$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke. 126

Figura 51- Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi 3,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke. 126

Figura 52– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi 5,0$ para três malhas distintas, em relação ao campo Paraboloide. 127

Figura 53– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wu $\phi 3,3$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide. 127

Figura 54- Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi 3,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide. 128

Figura 55– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi 5,0$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial. 129

Figura 56– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de

Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial. 129

Figura 57– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial. 129

Figura 58 - Contorno considerado para o cálculo dos erros da barra de seção constante. 134

Figura 59 – Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante. 138

Figura 60- Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante. 139

Figura 61 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante. 140

Figura 62 – Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações sem ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade constante e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$. 142

Figura 63 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes

sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente..... 146

Figura 64 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente..... 147

Figura 65 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente..... 148

Figura 66 - Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações sem ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade variando linearmente e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$, e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$. 150

Figura 67 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente. 154

Figura 68 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente. 155

Figura 69 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente. 156

Figura 70 - Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações sem ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade variando senoidalmente e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ 158

Figura 71 – Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante. 161

Figura 72- Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante. 162

Figura 73 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante. 163

Figura 74 – Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações com ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade constante e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ 165

Figura 75 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente..... 167

Figura 76 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente. 168

Figura 77 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente. 169

Figura 78 - Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações com ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade variando linearmente e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$. 171

Figura 79 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente. 173

Figura 80 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente. 174

Figura 81 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente. 175

Figura 82 - Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações com ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade variando senoidalmente e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o

comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ 177

Figura 83 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{1,0}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 205

Figura 84 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{1,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 205

Figura 85 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland$\phi_{1,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 206

Figura 86 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{0,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 206

Figura 87 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wu $\phi_{2,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 207

Figura 88 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wu $\phi_{1,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 207

Figura 89 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de

Wendland $\phi_{3,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 208

Figura 90 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{3,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 208

Figura 91 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{3,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 209

Figura 92 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{1,0}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 209

Figura 93 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{1,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 210

Figura 94 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{1,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 210

Figura 95 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi_{0,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 211

Figura 96 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função

de Wu $\phi_{2,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 211

Figura 97 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi_{1,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 212

Figura 98 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{3,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 212

Figura 99 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{3,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 213

Figura 100 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{3,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 213

Figura 101 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{1,0}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 214

Figura 102 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{1,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 214

Figura 103 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de

Wendland $\phi_{1,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 215

Figura 104 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wu $\phi_{0,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 215

Figura 105 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wu $\phi_{2,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 216

Figura 106 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wu $\phi_{1,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 216

Figura 107 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 217

Figura 108 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 217

Figura 109 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno. 218

Figura 110 – Barra de seção transversal constante, engastada no topo e submetida ao peso próprio. 219

Figura 111 – Identificação do contorno do problema da barra de seção transversal constante. 220

Figura 112 – Diagrama de equilíbrio das forças atuantes na seção A. 220

Figura 113 – Visualização da distribuição de pontos internos da malha. De 5 a 25 pontos. 226

Figura 114 – Visualização da distribuição de pontos internos da malha. De 49 a 81 pontos. 227

Figura 115 – Visualização da distribuição de pontos no contorno da malha. De 32 a 160 pontos. 228

Figura 116 – Visualização dos gráficos analítico (real) e interpolado do Campo Constante. 243

Figura 117 - Visualização dos gráficos analítico (real) e interpolado do Campo Exponencial 243

Figura 118 - Visualização dos gráficos analítico (real) e interpolado do Campo Função de Franke 244

Figura 119 - Visualização dos gráficos analítico (real) e interpolado do Campo Paraboloide 244

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- FUNÇÕES DE WENDLAND DE SUPORTE COMPACTO $\Phi_{L,U}$ PARA $U = 0, 1, 2, 3$ E $D = 3$. 53

Tabela 2- FUNÇÕES DE WU DE SUPORTE COMPACTO $\Phi_{\mathbf{u},\mathbf{l}}$ PARA DIFERENTES VALORES DE u E $l = 3$. 55

Tabela 3- LISTA DE FUNÇÕES RADIAIS DE SUPORTE COMPACTO $\Phi_{L,U}$ UTILIZADAS NOS TESTES DE INTERPOLAÇÃO. 86

Tabela 4– VOLUMES ANALÍTICOS PARA OS CAMPOS Z(X, Y) ESCOLHIDOS. 89

Tabela 5 - LISTA DE FBRSC $\Phi_{L,U}$ UTILIZADAS COMO FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO COM SUAS RESPECTIVAS FUNÇÕES PRIMITIVAS (ψ). 90

Tabela 6- LISTA DE FBRSC $\Phi_{l,u}$ QUE APRESENTARAM GRÁFICOS COM MONOTONICIDADE DECRESCENTE. 92

Tabela 7- LISTA CONTENDO AS TRÊS MELHORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS RELATIVOS E COMPORTAMENTO GRÁFICO. 93

Tabela 8- LISTA CONTENDO AS DUAS PIORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO. 93

Tabela 9– ERRO RELATIVO DAS FBRSC'S ESCOLHIDAS PARA CAMPO Z(X, Y) =1, EM UMA MALHA (FIGURA 5) COM 144 PONTOS BASE. 94

Tabela 10 - LISTA DE FBRSC $\phi_{\mathbf{l},\mathbf{u}}$ QUE APRESENTARAM GRÁFICOS COM MONOTONICIDADE DECRESCENTE. 98

Tabela 11 - LISTA CONTENDO AS TRÊS MELHORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO. 99

Tabela 12 - LISTA CONTENDO AS DUAS PIORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO. 99

Tabela 13 - ERRO RELATIVO DAS FBRSC'S ESCOLHIDAS PARA CAMPO Z(X, Y) =1, EM UMA MALHA (FIGURA 5) COM 144 PONTOS BASE. 100

Tabela 14 - LISTA DE FBRSC $\phi_{\mathbf{l},\mathbf{u}}$ QUE APRESENTARAM GRÁFICOS COM MONOTONICIDADE DECRESCENTE. 104

Tabela 15 - LISTA CONTENDO AS TRÊS MELHORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO. 105

Tabela 16 - LISTA CONTENDO AS DUAS PIORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO. 105

Tabela 17 - RELAÇÃO DE SUPORTES OTIMIZADOS OBTIDOS A PARTIR DO TESTE BIDIMENSIONAL COM VOLUME SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES, PARA CADA MALHA DE INTERPOLAÇÃO CONSIDERADA E PARA CADA FBRSC ESCOLHIDA NA ETAPA ANTERIOR. 113

Tabela 18 - RELAÇÃO DE SUPORTES OTIMIZADOS OBTIDOS A PARTIR DO TESTE BIDIMENSIONAL COM VOLUME COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES, PARA CADA MALHA DE INTERPOLAÇÃO CONSIDERADA E PARA CADA FBRSC ESCOLHIDA NA ETAPA ANTERIOR. 123

Tabela 19 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL SIMPLES. MALHA VARIÁVEL. 137

Tabela 20 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL CÚBICA. MALHA VARIÁVEL. 137

Tabela 21 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi 5,0$, COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 137

Tabela 22 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi 3,3$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 138

Tabela 23 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 139

Tabela 24 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 141

Tabela 25 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL SIMPLES COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 145

Tabela 26 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL CÚBICA COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 145

Tabela 27 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 146

Tabela 28 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 146

Tabela 29 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 147

Tabela 30 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.....149

Tabela 31 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL SIMPLES. MALHA VARIÁVEL. 152

Tabela 32 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL CÚBICA. MALHA VARIÁVEL. 153

Tabela 33 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 153

Tabela 34 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 154

Tabela 35 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO

PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 155

Tabela 36 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 157

Tabela 37 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$, COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 160

Tabela 38 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 161

Tabela 39 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 162

Tabela 40 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 164

Tabela 41 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO

PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 167

Tabela 42 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 168

Tabela 43 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 168

Tabela 44 – TABELA COMPARATIVA DOS RESULTADOS DOS ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM DENSIDADE CONSTANTE E LINEAR, COM RESPECTIVAMENTE 32 E 160 PONTOS NO CONTORNO. A FUNÇÃO TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\Phi_{5,0}$.....169

Tabela 45 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.....170

Tabela 46 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 173

Tabela 47 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO

RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 174

Tabela 48 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 175

Tabela 49 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 176

Tabela 50 - LISTA CONTENDO AS TRÊS MELHORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO. 180

Tabela 51- LISTA CONTENDO AS TRÊS PIORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO. 181

Tabela 52 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 229

Tabela 53 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 229

Tabela 54 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A

FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL.MALHA VARIÁVEL. 230

Tabela 55 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 231

Tabela 56 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 232

Tabela 57 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 232

Tabela 58 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 232

Tabela 59 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 233

Tabela 60 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO

RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 234

Tabela 61 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 234

Tabela 62 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 234

Tabela 63 – TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 235

Tabela 64 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 236

Tabela 65 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 236

Tabela 66 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A

FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL.MALHA VARIÁVEL. 236

Tabela 67 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 237

Tabela 68 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 238

Tabela 69 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 238

Tabela 70 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 238

Tabela 71 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 239

Tabela 72 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO

RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 240

Tabela 73 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 240

Tabela 74 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL. 240

Tabela 75 – TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81. 241

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FBR	Função de Base Radial
FBRSC	Função de Base Radial de Suporte Compacto
FDR	Formulação da Dupla Reciprocidade
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECIC	Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
MQG	Método da Quadratura de Gauss
NPG	Número de Pontos de Gauss
PD	Positivo Definida

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 39

1.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES 39
1.2 MOTIVAÇÃO 40
1.3 OBJETIVO 42
1.4 METAS DECORRENTES 42

2 INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAL 44

2.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES 44
2.2 FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE COMPACTO 45
2.3 FORMAÇÃO DA MATRIZ DE INTERPOLAÇAO RADIAL 46
2.4 DEFINIÇÕES BÁSICAS DA FBRSC 48

2.3 O SUPORTE DA FBRSC 50

2.4 FUNÇÃO DE WENDLAND DE SUPORTE COMPACTO 51
2.5 FUNÇÃO DE WU DE SUPORTE COMPACTO 54
2.6 A FORMULAÇÃO DO AJUSTE DE FUNÇÕES NA INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAL 55

3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO 59

3.1 DISCUSSÕES PRELIMINARES 59
3.2 FORMULAÇÃO DO MEC 60

3.2.1 Equacionamento Básico 60
3.2.2 A Solução Fundamental 61
3.2.3 Equação Integral do MEC 62
3.2.4 Discretização do Contorno 63

3.3 FUNÇÕES RADIAIS NO CONTEXTO DO MEC 67
3.4 MODELAGEM DA INTEGRAL DO DOMÍNIO VIA FDR 69
3.5 MODELAGEM ANALÍTICA DA INTEGRAL DO DOMÍNIO VIA FORMULAÇÃO MECIC 71

3.6 MODELAGEM NUMÉRICA DA INTEGRAL DE CONTORNO VIA FORMULAÇÃO MECIC 73
3.7 GERAÇÃO DO SISTEMA MATRICIAL FINAL DA FORMULAÇÃO MECIC 76
3.8 CÁLCULO DA FUNÇÃO PRIMITIVA DA FBRSC 77

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS 81

4.1 COMÉNTÁRIOS PRELIMINARES 81
4.2 TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME 82

4.2.1 Malhas Utilizadas na Aproximação dos Volumes 83
4.2.2 Campos Escalares Z(x, y) Simulados na Aproximação dos Volumes 85
4.2.3 As FBRSC Utilizadas na Aproximação dos Volumes 86

4.3 PROCEDIMENTO DE TESTES COM A FORMULAÇÃO MECIC 87
4.4 RESULTADOS DOS TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME PARA FUNÇÕES DE BASE RADIAL COM SUPORTE GLOBAL 89

4.4.1 Para o Campo $\mathbf{Z(x,y) = 1}$ 92
4.4.2 Para o Campo: Função de Franke 98
4.4.3 Para o Campo Paraboloide 104

4.5 RESULTADOS DOS TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME PARA FBRSC COM VARIAÇÃO DO SUPORTE E SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES 109

4.5.1 Resultados para o Campo Constante 113
4.5.2 Resultados para o Campo Função de Franke 115
4.5.3 Resultados para o Campo Paraboloide 117
4.5.4 Resultados para o Campo Exponencial 118
4.5.5 Discussão dos Resultados dos Testes Bidimensionais com Volume para FBRSC com Variação do Suporte e sem Ajuste de Pontos Interpolantes 120

4.6 RESULTADOS DOS TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUMES PARA FBRSC COM VARIAÇÃO DO SUPORTE E COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES 122

4.6.1 Resultados para o Campo Constante 123
4.6.2 Resultados para o Campo Função de Franke 125
4.6.3 Resultados para o Campo Paraboloide 127
4.6.4 Resultados para o Campo Exponencial 128
4.6.5 Discussão dos Resultados dos Testes Bidimensionais com Volume para FBRSC com Variação do Suporte e com Ajuste de Pontos Interpolantes 130

5 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DOS PROBLEMAS FÍSICOS NO AMBIENTE DO MEC, UTILIZANDO A FORMULAÇÃO MECIC COM FBRSC'S 133

5.1 DETALHAMENTO DO TESTE 133
5.2 INFORMAÇÕES ADICIONAIS ACERCA DA DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO DO DOMINIO 135
5.3 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE CONSTANTE SEM AJUSTE DE PONTOS 136

5.3.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global 136
5.3.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável 140
5.3.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Constante sem Ajuste de Pontos 142

5.4 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE LINEAR SEM AJUSTE DE PONTOS 144

5.4.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global 144
5.4.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável 148
5.4.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Linear sem Ajuste de Pontos 150

5.5 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE SENOIDAL SEM AJUSTE DE PONTOS 152

5.5.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global 152
5.5.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável 156
5.5.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Senoidal sem Ajuste de Pontos.....158

5.6 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE CONSTANTE COM AJUSTE DE PONTOS.....160

5.6.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global com Ajuste de Pontos.....160
5.6.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável com Ajuste de Pontos.....164
5.6.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Constante com Ajuste de Pontos.....165

5.7 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE LINEAR COM AJUSTE DE PONTOS 166

5.7.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global com Ajuste de Pontos.....167
5.7.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável com Ajuste de Pontos.....170
5.7.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Linear com Ajuste de Pontos.....171

5.8 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE SENOIDAL COM AJUSTE DE PONTOS.....173

5.8.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global com Ajuste de Pontos.....173
5.8.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável com Ajuste de Pontos.....176
5.8.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Senoidal com Ajuste de Pontos.....177

6 CONCLUSÃO.....180

6.1 SUGESTÃO DE NOVOS TRABALHOS.....184

APÊNDICE A - Cálculo das Funções Primitivas das FBRSCs 189

APÊNDICE B - Cálculo do Volume Analítico dos Campos Utilizados nos Testes Bidimensionais com Volumes.....203

APÊNDICE C - Resultados dos Testes Bidimensionais com Volumes para os Três Campos Escalares Z(x, y) das FBRSC não Selecionadas. 205

APÊNDICE D - Solução Analítica dos Problemas Físicos Abordados no Trabalho 219

APÊNDICE E - Malhas Utilizadas na Simulação de Problemas Físicos no Ambiente do MEC 226

APÊNDICE F - Tabelas de Tempo de Processamento para a Solução de Problemas Físicos no Ambiente no MEC com Formulação MECIC e Ajuste de Pontos Interpolantes 229

APÊNDICE G - Visualização das Superfícies Geradas pelo Processo de Interpolação Simples com FBRSC's 242

1 INTRODUÇÃO

1.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

A incessante busca pela autossuficiência energética ampliou os investimentos em todas as etapas da produção de petróleo e seus derivados. Desde a prospecção até o seu processamento, o petróleo atualmente é visto como um recurso não renovável de grande valor no mercado mundial. A descoberta de novos reservatórios de petróleo nas camadas do pré-sal, no território brasileiro, trouxe grandes expectativas em relação ao alcance da autonomia energética de petróleo e gás ao país. Juntamente com essas expectativas, vêm a necessidade de se aprimorar as tecnologias existentes para vencer novos desafios, através do aperfeiçoamento de todas as etapas do processo de produção do petróleo, desde a Prospecção até o seu o Processamento.

Referente à etapa de Prospecção, necessita-se de aprimoramento metodológico que garanta eficiência computacional com custos reduzidos. Essa importante etapa da cadeia produtiva do petróleo utiliza principalmente o Método Sísmico de Reflexão (MATOS, 2004), visto que, em termos de modelagem matemática, é eficiente e de baixo custo comparado a outras tecnologias.

O objetivo primordial da prospecção de petróleo é a visualização mais precisa do perfil geológico do subsolo, a fim de identificar com mais clareza os locais mais propícios à presença de reservatórios de hidrocarbonetos. Neste contexto, a Mecânica Computacional fornece as ferramentas numéricas necessárias à modelagem matemática do Método Sísmico de Reflexão, de maneira a possibilitar a previsão teórica da resposta sísmica de um meio heterogêneo, tal como o subsolo marítimo. Para tanto, torna-se necessário ainda conhecer os vários parâmetros físicos associados às camadas geológicas e, em particular, a velocidade de propagação de ondas e a resistividade do meio.

Ao mesmo tempo em que se busca aprimorar a precisão dessas ferramentas computacionais para a prospecção de petróleo, intenta-se igualmente a redução do

custo computacional despendido nessa fase, seja no armazenamento de dados sísmicos, quanto no próprio processamento para obtenção da resposta sísmica.

Ressalta-se que a redução do custo computacional representa uma redução significativa do custo monetário do processamento dos dados de campo e construção das imagens geológicas, visto que usualmente envolve grande quantidade de variáveis e informações.

É de grande importância citar que o presente trabalho faz parte da mesma linha de pesquisa que os trabalhos de: Marcos Neves Bertolani, intitulado de: “Funções de Base Radial de Suporte Global e Compacto na Aproximação de Superfícies” (BERTOLANI, 2010); e Átila Lupim Cruz, intitulado de: “Modelagem Direta de Integrais de Domínio Usando Funções de Base Radial no Contexto do Método dos Elementos de Contorno” (CRUZ, 2012).

1.2 MOTIVAÇÃO

Conforme foi exposto, no que se refere à prospecção de petróleo, os Métodos Sísmicos de Reflexão estão entre as principais ferramentas capazes de traçar um perfil das camadas do subsolo, e determinar as regiões mais propensas à existência de petróleo. Assim sendo, é importante investir em tecnologias computacionais voltadas à prospecção, o que significa desenvolver e aperfeiçoar os modelos matemáticos referentes aos diversos métodos numéricos capazes de serem aplicados na Sísmica de Prospecção. Dentre estes, pode-se incluir o Método dos Elementos de Contorno (MEC), especialmente se forem geradas formulações que aumentem sua eficiência computacional diante das características apresentadas pelos modelos geofísicos.

Comprova-se que o MEC tem excelente desempenho nas aplicações onde o campo de variáveis é escalar e estacionário, casos estes nos quais os operadores que caracterizam matematicamente a equação de governo são auto-adjuntos (BREBBIA, 1978; BREBBIA *et al*, 1984; BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992) ; pois, com essa condição, torna-se bastante acessível a obtenção de uma forma integral inversa, típica do método.

No entanto, muitos problemas de interesse prático não se expressam em termos de equações diferenciais cujos operadores possuem tal propriedade; ou, então, a forma integral inversa associada é demasiadamente complicada (WROBEL; ALIABADI, 2002).

A partir de 1990, um significativo esforço de pesquisa no contexto do MEC visou sua flexibilização matemática, através da geração de formulações alternativas baseadas na ideia de funções auxiliares e interpolações adicionais àquelas usualmente estabelecidas entre as variáveis nodais. Isto trouxe significativos avanços na consolidação e difusão do MEC em muitas áreas de interesse em engenharia, especialmente na área de dinâmica e meios heterogêneos.

A primeira grande contribuição, neste sentido, veio com o surgimento da formulação com Dupla Reciprocidade (FDR), criada por Nardini e Brebbia (1982). Além de possuir o mesmo grau elevado de precisão e consistência matemática das formulações tradicionais (BREBBIA; WALKER, 1980; WROBEL; DE FIGUEIREDO, 1991); permitiu também a simulação, com grande facilidade, de casos transientes, dinâmicos (autovalor e resposta dinâmica) e aqueles caracterizados por fontes ou ações de domínio, anteriormente resolvidos de modo custoso e relativamente complexo. Isto foi conseguido graças ao emprego de algumas estratégias interessantes, entre as quais está a introdução de uma sequência de funções de interpolação em substituição a uma variável primal do modelo. Os trabalhos de Bulcão (1999) e; Loeffler e Mansur (1987) sintetizam algumas das iniciativas bem sucedidas de simular problemas matematicamente não homogêneos através da FDR.

Não obstante os resultados satisfatórios para diversas aplicações mostradas nas referências citadas, a utilização da FDR e do próprio MEC esbarra na enorme dimensão das matrizes, da ordem de bilhões de graus de liberdade, exigidas nas simulações de problemas relacionados à Sísmica de Prospecção. Sabe-se que as matrizes típicas do MEC não são simétricas, e também não apresentam características de bandeamento. Não obstante o desempenho cada vez melhor das máquinas de processamento computacional, é preciso desenvolver formulações que reduzam o custo computacional dos modelos do MEC; a fim de que possa ser aplicado, de modo mais eficaz, em problemas de grande porte.

1.3 OBJETIVO

O presente trabalho dá continuidade ao desenvolvimento de uma nova formulação – denominada Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta de Contorno (MECIC) - cujo objetivo é exatamente gerar resultados precisos com possibilidade de redução do tempo de processamento computacional. Para alcançar este intento, utilizam-se Funções de Base Radial de Suporte Compacto (FBRSC) para gerar matrizes de propriedades relacionadas aos termos não homogêneos das equações diferenciais parciais, no contexto do MEC, em problemas bidimensionais de campo escalar.

Dando prosseguimento ao trabalho de Cruz (2012), que testou a Formulação MECIC usando funções simples de base radial plena, esta dissertação aborda problemas governados pela Equação de Poisson, e nestes se procuram avaliar o desempenho de diversas FBRSC.

Entretanto, devido as características específicas das FBRSC, uma série de testes preliminares precisam ser feitos, de maneira a avaliar a consistência do procedimento matemático adotado; que elege uma função primitiva, e permite a integração exclusiva ao longo do contorno do suporte. Estes testes envolveram o cálculo do volume de superfícies geradas por diversas funções.

Posteriormente, o esquema é implementado no ambiente do MEC, resolvendo problemas governados pela Equação de Poisson. Então, para a análise da precisão e da convergência do método, os resultados obtidos são comparados com as respostas analíticas de problemas clássicos encontrados na literatura especializada.

1.4 METAS DECORRENTES

Ressalta-se que, em conformidade com o exposto previamente, o interesse na implementação da Formulação MECIC prende-se à simulação de problemas referentes à sísmica de prospecção, ou seja, problemas dinâmicos. Mas é importante, por questões de avaliação de precisão e funcionalidade, que a

Formulação MECIC seja detalhadamente testada em problemas mais simples, governados pela Equação de Poisson.

Pode-se adiantar, entretanto, que o uso de FBRSC na Formulação MECIC permitirá construir uma matriz de massa, de mesmo modo como permite aproximar o termo referente à ação de domínio no caso do problema de Poisson. No caso de ser gerada uma resposta dinâmica, pode haver redução do custo computacional da solução incremental requerida, caso as FBRSC se apresentem viáveis sob o prisma da precisão. Isto porque a matriz de massa terá uma banda relacionada ao tamanho do suporte da FBRSC, que propicia o uso de esquemas de solução de sistemas matriciais mais rápidos. O fato de se integrar apenas no contorno fará com que esta operação se restrinja apenas à fronteira estabelecida pelo suporte da FBRSC.

2 INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAL

2.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

Denomina-se interpolação o método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de informações, previamente conhecidos. Comumente, os dados discretos são obtidos a partir de uma amostragem ou de um experimento. Através da interpolação, pode-se construir uma função que representa aproximadamente os valores em todos os pontos do domínio, recuperando exatamente os valores iniciais (originais) nos pontos onde a informação foi fornecida.

Por definição, os pontos base são pontos pertencentes ao domínio Ω, nos quais se localizam os centros das Funções de Base Radial de Suporte Compacto (FBRSC's), e onde são definidos os coeficientes de interpolação (α^i). Já os pontos de informação são pontos onde são conhecidos os valores das informações; que, no contexto do presente trabalho, são as magnitudes de uma carga ou ação de domínio, devidamente representadas pelo campo escalar Z(x, y) (CRUZ, 2012).

Uma exemplificação física de Z(x, y) é a representação do potencial magnético sobre a superfície terrestre, medidas de temperatura numa determinada área ou ainda a profundidade da lâmina de água oceânica.

Desse modo, a partir dos pontos de informação previamente escolhidos em um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$, onde são fixados os pontos base γ^i, interpola-se uma superfície S(x, y) definida em Ω. O índice "i" se refere à quantidade de pontos base γ^i, que varia de 1 até k.

Em se tratando da função interpoladora ou aproximante, procedimentos mais tradicionais podem ser aplicados, tais como: as aproximações polinomiais ou o método das diferenças finitas; mas a dificuldade operacional é bem significativa nos casos bi e tridimensionais, pois os modelos analíticos e os algoritmos resultantes são muito mais complicados (BERTOLANI *et al*, 2010). Por esta razão, as aproximações numéricas através do uso de Funções de Base Radial (FBR) – funções que usam a distância euclidiana entre dois pontos - têm sido utilizadas, de

modo crescente, tanto na interpolação quanto na solução de equações diferenciais, que representam potenciais pertinentes às mais diversas áreas da ciência e engenharia, tais como: meteorologia, topografia, sismologia, entre outras áreas.

2.2 FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE COMPACTO

Por conta da enorme proporção de dados requeridos nas modernas aplicações dos métodos aproximados, o emprego de FBRSC (FASSHAUER, 2007) tem se ampliado consideravelmente. A FBRSC também é definida a partir da distância euclidiana entre um ponto base e um ponto campo; mas, como principal distinção das funções radiais comuns, seus valores são não nulos apenas para valores de r delimitados por uma distância menor do que um certo parâmetro previamente arbitrado - o suporte – denominado δ.

O emprego dessas funções fornece matrizes de interpolação com muitos elementos nulos, os quais, adequadamente ignorados, resultam em baixo custo computacional, ao mesmo tempo em que reduz o risco de mau condicionamento do problema, pela tendência em produzir uma diagonal dominante nas matrizes de interpolação. Além disso, há a tendência de se aumentar a precisão dos resultados pela melhor simulação de regiões distorcidas ou descontínuas que possam estar presentes no domínio considerado.

Assim, entra-se no mérito da zona de influência, que é definida pela própria superfície interpolada, por meio de coeficientes e pela estrutura adotada da FBRSC.

Do mesmo modo que se faz com as FBR’s comuns, a interpolação de superfícies com FBRSC’s utilizam pontos de informação, que também são pontos base, previamente escolhidos dentro do domínio de interpolação. Em muitas aplicações é importante proceder-se a reorganização desses pontos de acordo com algum critério, concentrando-os em regiões cuja informação apresente valores distorcidos e, de modo coerente, evitando adensá-los em regiões com valores suaves. E em se tratando de aproximar heterogeneidades, descontinuidades e efeitos localizados, a aproximação usando as FBRSC’s apresentam-se bem superiores aos FBR’s comuns de suporte pleno. Isto porque evitam, de modo bem mais efetivo, o espalhamento ou

compartilhamento global de efeitos ou propriedades que são circunscritos a uma região específica. Dito de outro modo, na aproximação com as FBR's comuns de suporte pleno, todos os pontos interagem entre si, trocando informação diretamente. O controle ou atenuação desta interação global pode ser feito apenas através de funções radiais que possuam argumento com elevado decaimento, como, por exemplo, as funções gaussianas (BERTOLANI, 2010). Mas o controle adequado do decaimento envolve uma espécie de parâmetro de calibração, normalmente adequado a uma geometria específica.

2.3 FORMAÇÃO DA MATRIZ DE INTERPOLAÇAO RADIAL

Naturalmente, a aproximação de Z(x, y) através da combinação linear finita de FBRSC's $\phi(\frac{r}{\delta})$ se processa da mesma forma que para as funções de base radial de suporte pleno ou global (Cruz, 2012). Estas funções são definidas em termos da distância euclidiana $r = \|x - x_i, y - y_i\|$ entre um ponto arbitrário, em princípio, denominado de ponto campo $P(x, y)$ e um ponto base γ^i, previamente localizados nos pontos de informação em $\Omega \in \mathbb{R}^2$. O suporte δ é definido como um raio de abrangência da Função de Base Radial em relação aos pontos base situados dentro do domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Alguns exemplos de FBRSC's são as Funções de Wendland e as Funções de Wu, que serão devidamente definidas e caracterizadas mais adiante.

Para uma breve fundamentação teórica da interpolação de superfícies com as FBRSC's, segue um desenvolvimento analítico similar aquele apresentado por Wong, Hon e Golberg (2002).

Sabe-se que o uso de FBRSC's tem como objetivo primordial a reprodução de campos escalares desconhecidos Z(x, y).

Com base neste princípio, seja $f(x, y) \cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e x_i e $y_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \ldots, k$. Seja, também, $\phi(x - x_i, y - y_i) = \phi(\|x - x_i, y - y_i\|)$ uma FBRSC definida como positiva para que o problema tenha solução única. Onde o termo $r^i = \sqrt{(x - x^i)^2 + (y - y^i)^2}$ corresponde à distância Euclidiana entre o ponto base $\gamma^i\ (x_i, y_i)$ e o ponto campo $P(x, y)$ pertencente ao domínio Ω.

A superfície interpolada S(x, y) para uma função Z(x, y) será:

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i \phi^i \left(\frac{r^i}{\delta}\right)$$

(1)

Onde α^isão os coeficientes de interpolação.

A superfície S(x, y) definida pela equação (1) também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$S(x,y) = \alpha^1 F^1(x - x_1, y - y_1) + \alpha^2 F^2(x - x_2, y - y_2) + \alpha^3 F^3(x - x_3, y - y_3) + \cdots + \alpha^k F^k(x - x_k, y - y_k)$$

(2)

Os coeficientes de interpolação α^i serão determinados se impondo:

$$S(\gamma^i) = Z(\gamma^i)$$

(3)

A interpolação se procede da forma descrita a seguir.

Primeiramente, calculam-se as distâncias euclidianas entre todos os pontos base e as substitui na FBRSC (ϕ) pré-definida. Armazenam-se essas informações em uma matriz quadrada (matriz de interpolação) cuja ordem é definida pela quantidade de pontos base (k).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \phi^1\left(\frac{r_{11}}{\delta}\right) & \cdots & \phi^1\left(\frac{r_{1k}}{\delta}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^k\left(\frac{r_{k1}}{\delta}\right) & \cdots & \phi^k\left(\frac{r_{kk}}{\delta}\right) \end{bmatrix}$$

(4)

Após o término dessa etapa, armazenam-se em uma matriz coluna de ordem k os valores medidos da propriedade que se deseja interpolar, isto é, os valores medidos de Z(x, y) em cada ponto base.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}$$

(5)

Tendo em mãos a matriz de interpolação **G** e a matriz coluna **Z,** resolve-se o sistema linear abaixo através do Método da Eliminação de Gauss, para obtenção dos coeficientes de interpolação (α^i):

$$\begin{bmatrix} \phi^1\left(\frac{r_{11}}{\delta}\right) & \cdots & \phi^1\left(\frac{r_{1k}}{\delta}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^k\left(\frac{r_{k1}}{\delta}\right) & \cdots & \phi^k\left(\frac{r_{kk}}{\delta}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}$$

(6)

De forma sintetizada, tem-se que:

$$[\mathbf{G}][\boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{Z}]$$

(7)

Onde $[\mathbf{G}]_{k\,x\,k} = \left[\phi^k(r_{kk})\right]$ é a matriz quadrada simétrica chamada matriz de interpolação, $[\boldsymbol{\alpha}]_{k\,x\,1} = \left[\alpha^i\right]$ e $[\mathbf{Z}]_{\,k\,x\,1} = \left[\mathbf{Z}(\gamma^i)\right]$ são matrizes colunas. Uma solução única existirá se e somente se a matriz $[\mathbf{G}]_{k\,x\,k}$ for não singular. No entanto, para que a matriz de interpolação tenha esta característica, a função ϕ deverá ser **Positiva Definida** (conceito que será detalhado mais adiante).

2.4 DEFINIÇÕES BÁSICAS DA FBRSC

De acordo com Wong, Hon e Golberg (2002), as FBRSC's foram primeiramente introduzidas por Wu e mais tarde por Wendland nos anos 90's. De maneira geral, a FBRSC é expressa pela equação (8):

$$\phi_{l,u}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)^l_{+} p\left(\frac{r}{\delta}\right) \text{ , para } u \geq 1$$

(8)

A Função de Potência Truncada utilizada na expressão acima possui as condições, a seguir:

$$\left(1-\frac{r}{\delta}\right)^{l}_{+} = \begin{cases} \left(1-\frac{r}{\delta}\right)^{l} & , \quad \text{para } 0 \leq r \leq \delta \\ 0 & , \quad \text{para } r > \delta \end{cases} \tag{9}$$

Verifica-se, facilmente, que a FBRSC é trucada a zero para valores de r maiores que o suporte compacto (δ), graças a Função de Potência Truncada $\left(1-\frac{r}{\delta}\right)^{l}_{+}$.

O termo $p(\frac{r}{\delta})$ da FBRSC é um polinômio prescrito. Ressalva-se que "r" é a distância euclidiana entre $P(x,y)$ e $\gamma^{i}(x_i, y_i) \epsilon \mathbb{R}^{2}$. Os índices "l" e "u" representam, respectivamente, a dimensão espacial e a suavidade da função (*smoothness*) ("2u"- para a Função de Wendland).

Conforme foi apresentado anteriormente, para garantir a unicidade da interpolação de S(x, y) na equação (1) é suficiente que ϕ seja Positiva Definida. Segue abaixo a definição de uma Função Positiva Definida:

Definição 2.1. Uma função contínua ϕ: $\mathbb{R}^{d} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita positiva definida (PD) em $\mathbb{R}^{d}$, se para todos os pontos base $\gamma^{i} \epsilon \mathbb{R}^{d}$ e todos os vetores $\alpha^{i} \epsilon \mathbb{R}^{d}$, onde i=1, 2,3..k, a forma quadrática dada por:

$$\sum_{h=1}^{k}\sum_{g=1}^{k} \alpha_h \alpha_g \phi\left(x_h - x_g, y_h - y_g\right) \tag{10}$$

seja maior ou igual a zero. A função ϕ será estritamente positiva definida em $\mathbb{R}^{d}$ ($\phi \epsilon PD_d$) se equação (10) adquirir valor zero somente para $\alpha \equiv 0$

Em adicional, uma função par univariável ϕ: $\mathbb{R}^{d} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita positiva definida em $\mathbb{R}^{d}$, descrita como $\phi \epsilon PD_d$, se a função $\phi\left(x_h;\ x_g, y_h;\ y_g\right) = \phi\left\|x_h - x_g, y_h - y_g\right\|, x_h,\ x_g,\ y_h, y_g \epsilon \mathbb{R}^{d}$ é positiva definida (WONG; HON; GOLBERG, 2002).

Conforme foi citado na seção anterior, o procedimento de interpolação atingirá seu objetivo; isto é, solução única para resolução do sistema linear da equação (6); somente se as funções de interpolação forem Positivas Definidas (PD).

2.3 O SUPORTE DA FBRSC

As Funções de Base Radial de Suporte Compacto (FBRSC's) $\phi_{l,u}\left(\frac{r}{\delta}\right)$ apresentam um suporte compacto δ definido em $[0, \delta_{global}]$, para $\delta_{global} > 0$. Logo, a função de interpolação da equação (1) é modificada para:

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i \phi^i(r^i) \rightarrow S(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i \phi^i\left(\frac{r^i}{\delta^i}\right) \tag{11}$$

O suporte global δ_{global} é usualmente estabelecido como a maior distância entre dois pontos base quaisquer pertencentes a Ω (LEBLANC; MALESYS; LAVIE, 2011).

O suporte compacto δ^i; i=1, 2,3..k; pode ser constante ou variável para diferentes pontos base da malha de interpolação, dependendo da natureza do problema. No presente trabalho o valor do suporte δ será mantido constante para diferentes pontos base durante o processo de interpolação e integração no contorno.

Durante o processo de interpolação, o suporte compacto da FBRSC interfere no preenchimento da matriz de interpolação, de modo que o percentual de elementos nulos da matriz aumenta, quanto menor o valor do suporte compacto δ^i, reduzindo o custo computacional no que diz respeito à interpolação de superfícies. Entretanto, isso também implica numa queda razoável na precisão dos resultados, visto que essa redução do valor do suporte compacto torna a função radial mais restrita, e menos pontos base são acessíveis ao centro da função radial (WONG; HON; GOLBERG, 2002).

Para melhor ajustar as FBRSC's às diversas dimensões do domínio, cujas distribuições são aproximadas, é interessante adimensionalizar o seu suporte, de modo que tenha um suporte compacto em $[0, \delta_{\text{global}}]$. Para isto, é suficiente que se substitua r por $\frac{r}{\delta}$.

Para exemplificar a utilização do suporte compacto adimensional em Funções de Base Radial, veja a Função de Wendland $\phi_{3,2}$ (estritamente definida positiva em $\mathbb{R}^6$) sem adimensionalização, ou seja, com suporte variando entre [0,1]:

$$\phi_{3,2}\,(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2+18r+3) \tag{12}$$

A equação (12) assume a seguinte forma com suporte compacto adimensional:

$$\phi_{3,2}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^6\left[35\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+18\frac{r}{\delta}+3\right] \tag{13}$$

A seguir, deduzem-se as FBRSC do tipo Funções de Wendland de Suporte Compacto e Funções de Wu de Suporte Compacto.

2.4 FUNÇÃO DE WENDLAND DE SUPORTE COMPACTO

Wendland construiu uma família de FBRSC's a partir da Função de Potência Truncada, descrita como $\left(1-\frac{r}{\delta}\right)_+^l$. As Funções de Wendland de Suporte Compacto são produzidas aplicando repetidamente o operador de integração τ nessas Funções de Potência Truncada.

O operador de integração τ é definido como:

$$\tau[\Phi\left(\frac{r}{\delta}\right)] = \frac{1}{\delta}\int_{r}^{\infty}\frac{w}{\delta}\phi\left(\frac{w}{\delta}\right)dw$$

(14)

As Funções de Wendland de Suporte Compacto são definidas a seguir.

Definição 2.2. Com $\phi_l\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left(1-\frac{r}{\delta}\right)_+^l$, define-se:

$$\phi_{l,u}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \tau^u[\phi_l\left(\frac{r}{\delta}\right)]$$

(15)

Onde $l = \lfloor d/2 \rfloor + u + 1$. A equação acima representa a aplicação do operador de integração τ "u" vezes na função $\phi_l\left(\frac{r}{\delta}\right)$ (WONG; HON; GOLBERG, 2002).

Teorema 2.1. Para qualquer dimensão espacial d e qualquer u ϵ N, existem uma função positiva definida $\phi_{l,u}\left(\frac{r}{\delta}\right)$ estabelecida em $\mathbb{R}^d$ na forma de $\phi_{l,u}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left(1-\frac{r}{\delta}\right)_+^l p\left(\frac{r}{\delta}\right)$, de modo que o grau desse polinômio univariável $\phi_{l,u}\left(\frac{r}{\delta}\right)$ é igual a $\partial\phi = \lfloor d/2 \rfloor + 3u + 1$ e $\phi_{l,u} \in PD_d \cap C^{2u}$ (Wong, Hon e Golberg , 2002).

Para melhor compreensão da definição das Funções de Wendland de Suporte Compacto, faz-se a seguir $\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right)$, isto é, u=0 e d=3.

$$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \phi_{\lfloor 3/2 \rfloor+0+1}$$

$$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \phi_2\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left(1-\frac{r}{\delta}\right)_+^2 \quad ; \phi_2 \in PD_3 \cap C^0$$

Para $\phi_{3,1}\left(\frac{r}{\delta}\right)$, isto é, $u = 1$ e $d = 3$:

$$\phi_{3,1}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \tau^1[\phi_{\lfloor 3/2 \rfloor+1+1}]$$

$$\phi_{3,1}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \tau^1[\phi_3\left(\frac{r}{\delta}\right)] = \frac{1}{\delta}\int_{r}^{\infty}\frac{w}{\delta}\phi_3\left(\frac{w}{\delta}\right)dw$$

$$\phi_{3,1}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta}\int_{r}^{\infty} \frac{w}{\delta}\left(1-\frac{w}{\delta}\right)_{+}^{3} \, dw$$

Sabe-se que ϕ_3 é igual a zero para r maior que δ, isto é, o suporte compacto de ϕ_3 reduz a integral imprópria a uma integral definida de r a δ.

$$\phi_{3,1}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta}\int_{r}^{\delta} \frac{w}{\delta}\left(1-\frac{w}{\delta}\right)_{+}^{3} \, dw$$

$$\phi_{3,1}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \int_{r}^{1} \left[\frac{w}{\delta} - 3\left(\frac{w}{\delta}\right)^{2} + 3\left(\frac{w}{\delta}\right)^{3} - \left(\frac{w}{\delta}\right)^{4}\right] dw$$

$$\phi_{3,1}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_{+}^{4}\left[1+4\frac{r}{\delta}\right] \;\; ; \phi_3 \in PD_3 \cap C^2$$

O símbolo ($\doteq$) significa que a equação apresenta igualdade se for multiplicada por uma constante positiva.

Na Tabela 1 seguem as Funções de Wendland de Suporte Compacto ($\phi_{l,u}$) para u=0, 1, 2 e 3, e d=3.

Tabela 1- FUNÇÕES DE WENDLAND DE SUPORTE COMPACTO $\Phi_{l,u}$ PARA $U = 0, 1, 2, 3$ E $D = 3$.

Função de Wendland de Suporte Compacto:	
$\boldsymbol{\phi_{3,0}}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_{+}^{2}$	$C^0 \cap PD_3$
$\boldsymbol{\phi_{3,1}}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \tau^1\phi_3\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_{+}^{4}\left[1+4\frac{r}{\delta}\right]$	$C^2 \cap PD_3$
$\boldsymbol{\phi_{3,2}}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \tau^2\phi_4\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_{+}^{6}\left[35\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + 18\frac{r}{\delta} + 3\right]$	$C^4 \cap PD_3$
$\boldsymbol{\phi_{3,3}}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \tau^3\phi_5\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_{+}^{8}\left[32\left(\frac{r}{\delta}\right)^{3} + 25\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + 8\frac{r}{\delta} + 1\right]$	$C^6 \cap PD_3$

2.5 FUNÇÃO DE WU DE SUPORTE COMPACTO

Da mesma maneira que as Funções de Wendland de Suporte Compacto, as Funções de Wu de Suporte Compacto são classificadas como Positivas Definidas, e compõem uma família inserida dentro da classe de FBRSC's. Para a formulação dessa função, Wu lançou mão da seguinte função:

$$\phi\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)^2\right]_+^l ;\ l \in \mathbb{N}$$

(16)

A função a partir da qual Wu iniciou a formulação das Funções de Wu de Suporte Compacto não é positiva definida, de modo que se faz necessário um procedimento que as tornem positivas definidas: aplica-se então uma convolução, assim se obtém uma função de base radial estritamente positiva em $\mathbb{R}^d$, ou seja: $\phi_l = (\phi * \phi)\left(2\frac{r}{\delta}\right)$.

$$\phi_l = \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1 - \left(\frac{w}{\delta}\right)^2\right]_+^l \left[1 - (\frac{2r - w}{\delta})^2\right]_+^l dw$$

(17)

Da mesma forma como foi feito para as Funções de Wendland de Suporte Compacto, as integrais impróprias foram substituídas por integrais definidas, devido ao fato de $\phi\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)^2\right]_+^l$ apresentam valores não nulos somente para $-\delta \leq r \leq \delta$.

$$\phi_l = \frac{1}{\delta}\int_{2r-\delta}^{+\delta}\left[1 - \left(\frac{w}{\delta}\right)^2\right]_+^l \left[1 - (\frac{2r - w}{\delta})^2\right]_+^l dw$$

(18)

Fazendo uso do operador derivativo, Wu definiu sua função como sendo $\phi_{u,l} = \mathcal{D}^u[\phi_l]$. As Funções de Wu de Suporte Compacto $\phi_{u,l}$ são de base radial estritamente positiva definida em $\mathbb{R}^d$ para $d \leq 2u + 1$, e são diferenciáveis

continuamente $(2l - 2u)$ vezes. Dessa forma, $\phi_{u,l} \in PD_{2u+1} \cap C^{2l-2u}$. Vale apena mencionar que $\phi_{u,l}$ é um polinômio de grau $\partial\phi = 4l - 2u + 1$ (BERTOLANI, 2010).

A Tabela 2 trás alguns exemplos de Funções de Wu de Suporte Compacto para u=1 até 3, e l=3.

Tabela 2- FUNÇÕES DE WU DE SUPORTE COMPACTO $\Phi_{u,l}$ PARA DIFERENTES VALORES DE u E $l = 3$.

Função de Wu de Suporte Compacto:	
$\boldsymbol{\phi}_{0,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]_+^7 \left[5 + 35\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right) + 101\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2 + 147\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3 + 101\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^4 + 35\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^5 + 5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^6\right]$	$C^6 \cap PD_1$
$\boldsymbol{\phi}_{1,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]_+^6 \left[6 + 36\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right) + 82\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2 + 72\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3 + 30\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^4 + 5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^5\right]$	$C^4 \cap PD_3$
$\boldsymbol{\phi}_{2,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]_+^5 \left[8 + 40\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right) + 48\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2 + 25\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3 + 5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^4\right]$	$C^2 \cap PD_5$
$\boldsymbol{\phi}_{3,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]_+^4 \left[16 + 29\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right) + 20\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2 + 5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3\right]$	$C^0 \cap PD_7$

2.6 A FORMULAÇÃO DO AJUSTE DE FUNÇÕES NA INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAL

O ajuste de funções consiste na obtenção de uma função que aproxime de forma eficiente um campo escalar contínuo Z(x, y), sem efetivamente passar pelos pontos discretos que geraram as informações sobre o mesmo. A ideia é oferecer uma aproximação global do campo que gerou as informações, eliminando distorções da amostragem.

O ajuste se faz necessário porque muitas vezes os valores (discretos) dos pontos de informação medidos em campo não são muito precisos quando utilizados para representar um conjunto contínuo de possibilidades. Assim, se faz um tratamento dos dados colhidos em campo, como tentativa de minimização dos erros existentes

na composição geral desses, para então se determinar outra função mais simplificada que melhor represente a tendência geral do campo aproximado.

No caso do seguinte espaço amostral:

$$\{(x_1, y_1, Z_1);\ (x_2, y_2, Z_2);\ (x_3, y_3, Z_3);\ (x_4, y_4, Z_4); \dots ; (x_k, y_k, Z_k)\ \} \tag{19}$$

Onde:

- O subscrito “k” representa a quantidade de pontos de informação

Dessa forma, não necessariamente todos os pontos de informação, onde o valor da função Z(x, y) são conhecidos, serão utilizados para alocar pontos base de ajuste durante o processo de ajuste da função Z.

No caso do trabalho aqui desenvolvido, não serão utilizados os pontos de informação localizados no interior do domínio Ω para alocar os pontos base de ajuste. Além dos objetivos intrínsecos ao esquema de ajuste, o objetivo desta técnica no presente trabalho é reduzir a dimensão do sistema matricial final, particularmente eliminando pontos de informação internos.

Logo, a função Z(x, y) ajustada será gerada a partir da combinação linear de FBRSC com seus respectivos coeficientes de interpolação (α^i), porém em menor quantidade.

A interpolação da superfície S’(x, y) para a função Z(x, y) ajustada, ocorre de maneira idêntica ao procedimento de interpolação sem ajuste de pontos anteriormente desenvolvido.

$$\begin{aligned} Z(x,y)_{\text{Ajustada}} &\cong S'(x,y) \\ &= \alpha^1 F^1(x - x_1, y - y_1) + \alpha^2 F^2(x - x_2, y - y_2) + \alpha^3 F^3(x - x_3, y - y_3) + \cdots \\ &+ \alpha^{k'} F^{k'}\left(x - x_{k'}, y - y_{k'}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Isto é:

$$Z(x,y)_{Ajustada} \cong S'(x,y) = \sum_{i=1}^{k'} \alpha^i \phi^i \left(\frac{r^i}{\delta}\right)$$

(21)

Onde:

- K' será igual à quantidade de pontos de informação no contorno do domínio, visto que agora são pontos base de ajuste.

Para interpolação bidimensional com ajuste de função Z com retirada exclusiva de pontos de informação internos do domínio Ω, o cálculo do coeficiente de interpolação α^i se verifica de maneira distinta a da equação (7) (STARK, 1970).

Seja $[\mathbf{G}']_{\mathbf{k'xk}}$ a matriz de varredura, similar a matriz de interpolação ($[\mathbf{G}]_{\mathbf{kxk}}$), mas não é quadrada, e possui a seguinte ordem: K' x K.

A matriz de varredura ($[\mathbf{G}']_{\mathbf{k'xk}}$) é obtida após a realização de uma varredura de todos os pontos de informação conhecidos da função Z com os pontos base de ajuste, localizados no contorno.

$$[\mathbf{G}']_{\mathbf{k'xk}} = \begin{bmatrix} \phi^1\left(\frac{r_{11}}{\delta}\right) & \cdots & \phi^1\left(\frac{r_{1k}}{\delta}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^k\left(\frac{r_{k'1}}{\delta}\right) & \cdots & \phi^k\left(\frac{r_{k'k}}{\delta}\right) \end{bmatrix}$$

(22)

Seja também $([\mathbf{G}']_{\mathbf{k'xk}})^T$ a matriz transposta de $[\mathbf{G}']_{\mathbf{k'xk}}$.

$$([\mathbf{G}']_{\mathbf{k'xk}})^T = \begin{bmatrix} \phi^1\left(\frac{r_{11}}{\delta}\right) & \cdots & \phi^k\left(\frac{r_{k'1}}{\delta}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^1\left(\frac{r_{1k}}{\delta}\right) & \cdots & \phi^k\left(\frac{r_{k'k}}{\delta}\right) \end{bmatrix}$$

(23)

Dando continuidade, a matriz de ajuste ($[\mathbf{MA}]_{\mathbf{K'xK'}}$) é obtida multiplicando a matriz de varredura ($[\mathbf{G}']_{\mathbf{k'xk}}$) pela sua transposta $([\mathbf{G}']_{\mathbf{k'xk}})^T$.

$$[\mathbf{MA}]_{\mathbf{K' \, x \, K'}} = [\mathbf{G'}]_{\mathbf{k' x k}} \left([\mathbf{G'}]_{\mathbf{k' x k}} \right)^{T}$$

(24)

Por fim, o vetor de termos independentes ($[\mathbf{f}]_{\mathbf{k' x 1}}$), que armazena os valores da função Z conhecidos nos pontos de informação de interesse, é calculado multiplicando a matriz de varredura ($[\mathbf{G'}]_{\mathbf{k' x k}}$) pelo vetor de valores da função Z ($[\mathbf{Z}]_{\mathbf{Kx1}}$).

Portanto, o cálculo dos coeficientes ($[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathbf{k' x 1}}$) da equação de ajuste será igual a:

$$[\mathbf{MA}]_{\mathbf{K' \, x \, K'}} [\boldsymbol{\alpha}]_{\mathbf{k' x 1}} = [\mathbf{G'}]_{\mathbf{k' x k}} [\mathbf{Z}]_{\mathbf{k \, x \, 1}} = [\mathbf{f}]_{\mathbf{k' x 1}}$$

$$[\boldsymbol{\alpha}]_{\mathbf{k' x 1}} = \left([\mathbf{MA}]_{\mathbf{K' \, x \, K'}} \right)^{-1} [\mathbf{f}]_{\mathbf{k' x 1}}$$

(25)

3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 DISCUSSÕES PRELIMINARES

Comparado com os mais populares métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF), os quais são classificados como métodos de domínio; o Método dos Elementos de Contorno (MEC) se distingue por ser um método de contorno, de modo que a discretização numérica ocorre num ambiente de dimensões espaciais reduzidas. Por exemplo, em problemas tridimensionais, a discretização se dá apenas na superfície de contorno. Reduzida a dimensão do problema, trabalha-se com sistemas lineares menores e mais eficientes, em termos computacionais. Esse efeito da redução dimensional do problema é mais visível quando o domínio é aberto. Em métodos de domínio (MEF e MDF), os domínios do tipo abertos precisam ser truncados e aproximados, diferentemente do que ocorre no método de contorno (MEC).

Além do mais, o MEC ainda apresenta outras vantagens em relação aos MEF e MDF: a melhor representação de concentração de ações de domínio e o cálculo simultâneo da variável básica e sua derivada normal.

O MEC consiste de uma ferramenta de simulação numérica eficiente. Numerosas simulações já confirmaram a aplicabilidade do método e sua hegemonia em diversos tipos de problemas, tais como: problemas de concentrações de tensão, de fratura e de contato entre superfícies; com meios infinitos e semi-infinitos; de dispersão acústica; de elasticidade; e de condução de calor.

Como tentativa de se obter um custo computacional cada vez menor, apresenta-se, mais adiante, uma formulação alternativa para o tratamento de integrais de domínio, denominada de MECIC, que usa as FBRSC’s dentro do contexto do MEC.

3.2 FORMULAÇÃO DO MEC

3.2.1 Equacionamento Básico

Seguindo o raciocínio ilustrado por Cruz (2012), para a resolução de problemas com o MEC, necessita-se do conhecimento das condições de contorno desses problemas. Elas podem ser prescritas no problema de três modos distintos: as condições essenciais (que envolvem a variável básica do problema ou potencial); condições naturais (derivada normal da variável básica); e condições mistas (não serão abordadas no trabalho). Normalmente, adotam-se as seguintes simbologias para diferenciar as porções do contorno em que essas condições de contorno são prescritas: para as condições de contorno essenciais, porção do contorno referenciada como Γu; e para as condições de contorno naturais, porção do contorno referenciada como Γq. Veja Figura 1.

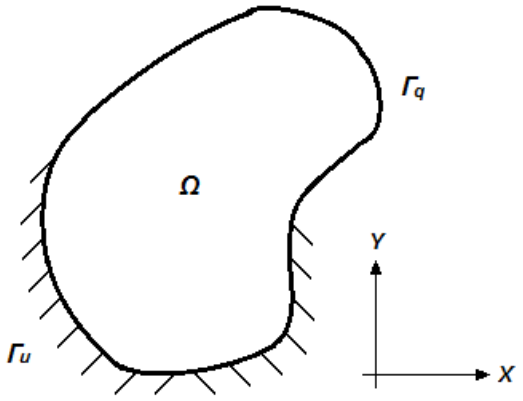


Figura 1 - Domínio bidimensional Ω delimitado pelo Γu+ Γq.
Fonte: Cruz (2012).

A Figura 1 mostra a configuração geométrica de um domínio Ω, que pode representar um corpo, um sistema ou um volume de controle de um dado problema físico.

Seja a Equação de Poisson, apresentada a seguir, a equação diferencial modeladora de um problema físico no qual exista uma ação de domínio distribuída no interior do domínio Ω:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -Z(x, y)$$

(26)

O termo Z(x, y) pode ser interpretado fisicamente como uma fonte, um sorvedouro ou uma ação do corpo ou de domínio, como um campo magnético ou gravitacional.

Para uma melhor compreensão do equacionamento do MEC, será utilizada a notação indicial simplificada. Deste modo, a equação (26) pode ser escrita como:

$$u_{,ii} = -Z$$

(27)

3.2.2 A Solução Fundamental

Para estabelecer o MEC, escreve-se a equação (27) em uma forma integral, que inicialmente é chamada Forma Integral Forte, com o auxilio de funções auxiliares especiais, denominada de soluções fundamentais. Em seguida, esta equação é tratada com a metodologia de integração por partes e aplicação do Teorema da Divergência. O objetivo é transformá-la na chamada Forma Integral Inversa, para então fixar condições em que o modelo dependa apenas das condições de contorno para sua solução.

A função auxiliar $u^*(\xi; \mathbf{X})$ é rotulada de solução fundamental, pois provém da solução de um problema similar ao do problema de Poisson aqui trabalhado, mas com o domínio infinito e uma fonte singular unitária expressa por um Delta de Dirac.

$$u^*_{,ii} = -\Delta(\xi, \mathbf{X})$$

(28)

Onde função Delta de Dirac é definida pelas seguintes propriedades:

$$\text{Propriedades} \begin{cases} \Delta(\xi, \mathbf{X}) = 0; \ \mathbf{X} \neq \xi \\ \Delta(\xi, \mathbf{X}) = \infty; \mathbf{X} = \xi \end{cases}$$

(29)

O ponto representado pelo simbolo (ξ) é chamado de ponto fonte, através do qual é feita a varredura do contorno; o vetor (**X**)=(X,Y) representa um ponto qualquer de coordenadas (x,y) no domínio Ω.

Para os casos de domínio bidimensional, a expressão da função auxiliar u^* (ξ; **X**), bem como sua derivada normal q^* (ξ; **X**), são mostradas abaixo (CRUZ, 2012):

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln \ r(\xi; \mathbf{X})$$

(30)

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

(31)

3.2.3 Equação Integral do MEC

A Forma Integral Forte associada à equação diferencial para o problema de Poisson é dada por:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} -Z u^* d\Omega$$

(32)

Após tratamento matemático adequado (BREBBIA, 1978) demonstra-se que a equação (32) pode ser transformada na forma Integral Inversa:

$$\int_{\Gamma} q u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - C(\xi) u(\xi) = -\int_{\Omega} Z u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega$$

(33)

O termo C(ξ) é uma constante que depende da localização do ponto fonte (ξ) em relação ao domínio *Ω*. Para os casos onde o ponto fonte (ξ) está situado totalmente dentro do domínio *Ω*, demonstra-se que seu valor numérico é de 1 e, quando está situado totalmente fora do domínio, seu valor é nulo.

Já quando o ponto fonte (ξ) está localizado sobre o contorno, procedimentos matemáticos elaborados detalham o cálculo deste coeficiente. Quando o mesmo é suave, *C* possui o valor numérico de $\frac{1}{2}$. Nos casos onde o contorno é anguloso, a constante *C* possui valor de acordo com a seguinte igualdade:

$$C(\gamma) = \frac{\beta}{2\pi} \tag{34}$$

Onde *β* é o ângulo interno entre duas normais adjacentes ao ponto anguloso, no contorno não suave.

3.2.4 Discretização do Contorno

Após a obtenção da Forma Integral Inversa, a equação deverá ser discretizada para que seja possível a sua solução por Métodos Numéricos, tal como o MEC. A discretização, para o MEC, ocorre através da determinação de um conjunto de pontos discretos pertencentes ao contorno Γ, também denominados de nós geométricos, que são capazes de representar os infinitos pontos do domínio Ω, isto é, um meio contínuo.

Considera-se neste trabalho, um contorno Γ constituído por elementos lineares sobre os quais são aproximadas as variáveis u(x, y) e q(x, y) através de funções de forma, que são linearmente independentes (LI) e são expressas em coordenadas adimensionais (η). Estas funções interpolam linearmente o campo de variáveis a partir dos valores dados em pontos específicos denominado de nós funcionais, que coincidem com os nós geométricos desse elemento, conforme as Figura 2 e Figura 3.

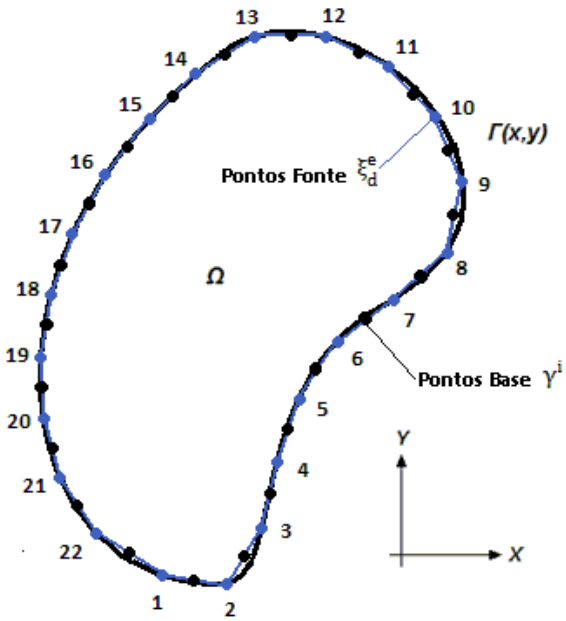


Figura 2 – Discretização do contorno.

Verifica-se, com base na Figura 2, a inserção de pontos localizados no centro dos elementos de contorno. Estes pontos são os pontos base γ^i, pertinentes à estratégia de Formulação da MECIC (apresentada logo a seguir). Os pontos base se localizam nesta posição com o objetivo de se evitar singularidades durante o cálculo da integral de domínio do termo não homogêneo da Equação de Poisson pela Formulação MECIC.

Em relação aos elementos lineares, as funções de forma adimensionais que o descrevem são: $\emptyset_1 = \frac{1}{2}(1-\eta)$ e $\emptyset_2 = \frac{1}{2}(1+\eta)$, onde $-1 \leq \eta \leq 1$.

Portanto, o equacionamento da geometria do elemento linear e das variáveis u (x, y) e q(x, y) podem ser escritos em termos da coordenada adimensional (η), a seguir:

$$\text{Geometria} \quad \begin{cases} x(\eta) = \emptyset_1 x_1 + \emptyset_2 x_2 \\ y(\eta) = \emptyset_1 y_1 + \emptyset_2 y_2 \end{cases}$$

$$\text{Variáveis do Problema} \quad \begin{cases} u(\eta) = \emptyset_1 u_1 + \emptyset_2 u_2 \\ q(\eta) = \emptyset_1 q_1 + \emptyset_2 q_2 \end{cases} \tag{35}$$

Para melhor entendimento do equacionamento do elemento linear, veja Figura 3.

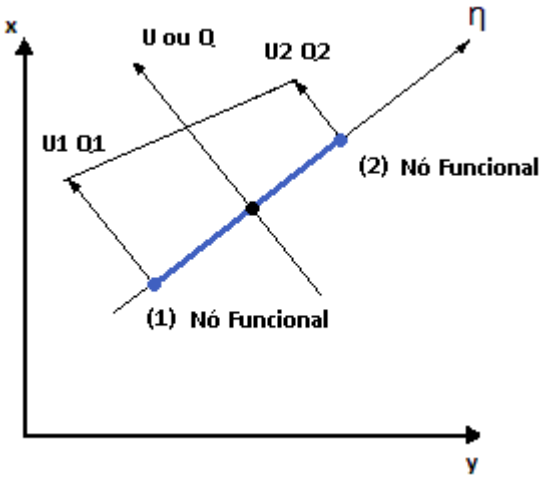


Figura 3 – Representação do elemento linear.

Para a geração de um sistema matricial de dimensões (t x t), o ponto fonte (ξ_d^e) é posicionado em cada um dos nós funcionais, e, em seguida, é feita uma varredura de todos os elementos lineares do contorno discreto para o lado esquerdo da equação (33). Veja a Figura 4.

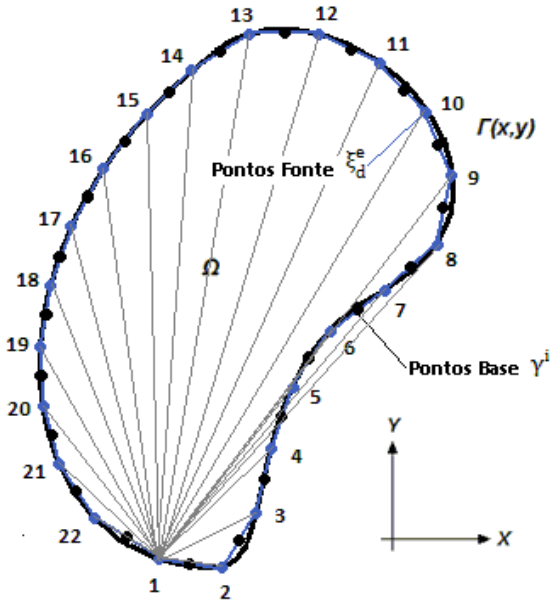


Figura 4– Varredura dos nós do contorno.

Deste modo, o lado esquerdo da equação da Forma Integral Inversa da Equação de Poisson pode ser representado na forma discreta a seguir:

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \int_{\Gamma_e} \emptyset_d u^*(\xi_d^e;\mathbf{X})d\Gamma - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \int_{\Gamma_e} \emptyset_d q^*(\xi_d^e;\mathbf{X})d\Gamma - C(\xi_d^e)u(\xi_d^e) = -\int_{\Omega} Zu^*(\xi;\mathbf{X})d\Omega \tag{36}$$

Onde o símbolo “t” é o número de elementos discretos do contorno, e o símbolo “d” se refere a localização do nó funcional no elemento linear (d=1, para nó localizado no início do elemento linear; e d=2, para nó localizado no final do elemento linear).

Resta agora resolver numericamente as integrais de contorno à esquerda da igualdade, presentes na equação (36), a partir da aplicação do uso das funções de forma, do conceito de Jacobiano e do Método da Quadratura de Gauss (MQG).

Da aplicação destes procedimentos matemáticos no termo à esquerda da equação (36), obtém-se a equação (37):

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \int_{-1}^{+1} \emptyset_d(\eta^p)u^*(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p)dn - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \int_{-1}^{+1} \emptyset_d(\eta^p)q^*(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p)d\eta - C(\xi_d^e)u(\xi_d^e) = -\int_{\Omega} Zu^*(\xi;\mathbf{X})d\Omega$$

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p)u^*(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p).W(\eta^p) - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p)q^*(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p).W(\eta^p) - C(\xi_d^e)u(\xi_d^e) = -\int_{\Omega} Zu^*(\xi;\mathbf{X})d\Omega \tag{37}$$

Onde:

- “η” é uma coordenada adimensional, cuja direção é paralela ao elemento discreto do contorno Γ_e, e seu valor varia de η=-1, no início do elemento discreto, a η =+1, no final do elemento discreto;
- “t” é a quantidade de elementos discretos do contorno Γ;
- “$J^e(\eta)$” é o jacobiano do elemento discreto em coordenada adimensional η;
- “η^p” são os pontos de Gauss em relação a coordenada adimensional η para uma dimensão;
- “$W(\eta^p)$” são os pesos de Gauss para uma dimensão;

- “NPG” é o número de pontos de Gauss considerados.

O tratamento da parcela não homogênea da Equação de Poisson, $-\int_{\Omega} Zu^{*}(\xi;\mathbf{X})d\Omega$, será abordado na seção a seguir, que diz respeito à Modelagem Direta da Integral de Domínio.

3.3 FUNÇÕES RADIAIS NO CONTEXTO DO MEC

Devido às características da solução fundamental, que usa como argumento o módulo do raio vetor entre dois pontos – o ponto fonte e o ponto campo – de certo modo matematicamente o MEC está mais relacionado às funções de base radial do que outros métodos similares. Mas este vínculo não se restringe apenas a estrutura matemática das funções auxiliares que compõem a forma integral do MEC. Conforme exposto na introdução, Nardini e Brebbia (1982), ao criarem a FDR, usaram funções de base radial de suporte pleno como funções auxiliares de interpolação com propósito de eliminar integrais de domínio. As aplicações da FDR foram muito bem sucedidas em vários problemas, ressaltando-se os problemas governados pela Equação de Poisson.

O destaque dado ao MEC no estudo das funções de base radial é pertinente não apenas pelo pioneirismo na aplicação prática dessa classe de funções; centenas de trabalhos científicos foram gerados por conta dessa temática. Para constar, ressaltam-se Yamada *et al* (1994), que mostraram conclusões matematicamente bem fundamentadas a respeito da convergência dos resultados obtidos com as funções de base radial de suporte pleno no contexto da FDR; Karur e Ramachandran (1994), que apresentaram resultados de um estudo em que examinaram numericamente as propriedades de convergência das funções de interpolação usualmente empregadas na FDR, obtendo resultados satisfatórios para as funções radiais de placa fina e radial simples; o trabalho de Golberg e Chen (1994) mostrou uma maneira efetiva de construir uma expressão geral de interpolação empregando funções globais e locais, atualmente adotada nos

modernos livros sobre o tema; e Partridge (2000) sintetizou conclusões de muitas experiências computacionais interessantes.

No entanto, foi graças ao Método dos Elementos Finitos que o estudo das funções radiais ganhou enorme impulso. Houve a necessidade de se estabelecer uma estrutura de discretização mais adequada à readaptação da malha, particularmente em problemas tridimensionais, substituindo a ideia original das células ou elementos. Uma das maneiras mais eficientes tanto para se gerar os pontos de discretização quanto para correlacionar os domínios de influência consiste no emprego das funções de base radial. Assim, discretiza-se o domínio de interesse através de um conjunto de nós (pontos base), e se gerencia o posicionamento e a conectividade dos graus de liberdade definidos pela discretização (pontos de informação), sem que exista explicitamente uma malha estruturada de elementos.

Poderiam ser empregadas as funções de base radial simples para essa finalidade, mas o uso das FBRSC's oferece uma gama de vantagens, conforme já exposto, conservando as peculiaridades do MEF. Assim, não necessariamente se utilizam todos os pontos de informação com seus respectivos pontos base, apenas aquele contido no domínio do suporte para se realizar o processo de aproximação. Da ausência da malha tradicional com seu esquema de conectividade, nasceu o nome "*Meshless*" ou "*Meshfree*" (CHEN *et al*, 2002).

Ressalta-se, portanto, que as técnicas *Meshless* são particularmente voltadas para casos tridimensionais complexos, cuja discretização do contorno é uma tarefa muito difícil (CHEN *et al*, 2002), pois não se trata mais de simples interpolação do campo. As técnicas para resolver as equações diferenciais parciais envolvem uma série de problemas, especialmente a obediência às condições de contorno, obtenção de derivadas das funções radiais e tratamento de contornos irregulares.

No contexto deste trabalho, o uso dessas funções ocorre na aproximação da integral de domínio que caracteriza o problema de Poisson. E que também ocorrerá em futuras aplicações do MEC na dinâmica das análises sísmicas, onde o termo de inércia poderá ser tratado através das formulações com dupla reciprocidade e quase-dupla reciprocidade (LOEFFLER; MANSUR, 1987), que empregam procedimentos interpolativos; e também na presente formulação, denominada MECIC.

3.4 MODELAGEM DA INTEGRAL DO DOMÍNIO VIA FDR

O cálculo da integral de domínio referente a não homogeneidade da Equação de Poisson pode ser efetuado por diversos meios. O primeiro deles é a subdivisão do domínio Ω em subdomínios retangulares, isto é, em pequenas regiões retangulares e, assim, tratá-los com procedimento de integração numérica. Dessa forma, obtém-se o valor numérico da integral de domínio a partir da soma dos valores em cada partição. Um exemplo de técnicas de integração numérica é a Regra de 1/9 de Simpson para Integração Dupla (CRUZ, 2012).

Entretanto, essa técnica conflita com o interesse do MEC, que tem como objetivo a solução numérica de problemas de ação de domínio com exclusivamente discretização do contorno e não do domínio. O mesmo acontece com a técnica da divisão do domínio em células (BREBBIA; WALKER, 1980), um procedimento bem similar ao usado com o Método dos Elementos Finitos.

Outra formulação para o cálculo da integral de domínio referente a não homogeneidade da Equação de Poisson é a Formulação da Dupla Reciprocidade (FDR), desenvolvida por Nardini e Brebbia (1982) em problemas de vibração livre no ambiente do MEC. A Dupla Reciprocidade é bastante eficiente e relativamente versátil; entretanto, exigem das funções auxiliares certas características que limitam sua aplicação a problemas muito complexos, como placas e cascas. Particularmente em razão do enfoque aqui proposto, a FDR apresenta limitações ao uso de FBRSC.

Vale apena destacar que, apesar de as FBRSC's serem empregadas no Método dos Elementos Finitos, através do conceito de *Meshfree*; a FDR foi uma das primeiras formulações a empregá-las no MEC.

De acordo com a FDR, o termo não homogêneo da Equação de Poisson (Z(x, y)) é substituído por uma série finita composta de FBRSC.

$$Z(\mathbf{X}) \approx S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{k} {}^{\xi}\alpha^{i} F^{i}(\gamma^{i};\ \mathbf{X}) \tag{38}$$

Onde:

- "γ^i" são os pontos base de interpolação;
- "$\mathbf{X}$" são pontos de informação devidamente posicionados no domínio Ω, onde se deseja conhecer o valor da ação de domínio (Z);
- " ${}^{\xi}\alpha^i$ " são os coeficientes de interpolação.

Dando continuidade à FDR, determina-se uma Função Primitiva (ψ) da FBRSC, de modo que a interpolação de Z($\mathbf{X}$) seja escrita em termos de um laplaciano.

$$F^i(\gamma^i;\ \mathbf{X}) = \ \psi^i_{,jj}(\gamma^i;\mathbf{X})$$

(39)

Assim, tem-se que:

$$Z(\mathbf{X}) \approx \ S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{k} \ {}^{\xi}\alpha^i\psi^i_{,jj}(\gamma^i;\mathbf{X})$$

(40)

Fazendo a substituição da equação (40) na equação (37), tem-se que:

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p)u^*(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p).W(\eta^p) - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p)q^*(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p).W(\eta^p)$$
$$- C(\xi_d^e)u(\xi_d^e) = -\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{k} \ {}^{\xi}\alpha^i\psi^i_{,jj}\right)u^* d\Omega$$

(41)

Para concluir a FDR, o termo não homogêneo da equação (41) ainda é tratado pela técnica de integração por partes, pelo Teorema da Divergência e pelo processo de discretização do contorno Γ, a fim de ser obter sua forma final com somente integrais no contorno, conforme mostrado a seguir:

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) u^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p) - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) q^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p)$$
$$- C(\xi_d^e) u(\xi_d^e)$$
$$= -\sum_{i=1}^{k} {}^{\xi}\alpha^i \left[\sum_{e=1}^{t} \sum_{p=1}^{NPG} \boldsymbol{\psi}_{,j}^{i}.\mathbf{n}_j \emptyset_d(\eta^p) u^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p) \right.$$
$$\left. - \sum_{e=1}^{t} \sum_{p=1}^{NPG} \psi^i \emptyset_d(\eta^p) q^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p) - C(\xi_d^e)\psi^i(\xi_d^e) \right]$$

(42)

Assim é gerado um sistema linear, que pode ser escrito matricialmente da seguinte forma (PATRIDGE *et al*, 1992):

$$[\mathbf{H}][\mathbf{u}] - [\mathbf{G}][\mathbf{q}] = [\boldsymbol{\alpha}]([\mathbf{H}]\,[\boldsymbol{\psi}] - [\mathbf{G}][\boldsymbol{\mu}])$$

(43)

Onde $[\boldsymbol{\alpha}]$ é uma matriz quadrada que armazena os valores do coeficiente de interpolação (α); $[\mathbf{G}][\boldsymbol{\mu}]$ é a matriz que armazena os valores de $\sum_{e=1}^{t}\sum_{p=1}^{NPG} \boldsymbol{\psi}_{,j}^{i}.\mathbf{n}_j \emptyset_d(\eta^p) u^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p)$; $[\mathbf{H}]$ armazena os valores de $\sum_{e=1}^{t}\sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) q^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p)$; $[\mathbf{G}]$ armazena os valores de $\sum_{e=1}^{t}\sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) u^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p)$, e $[\mathbf{H}][\boldsymbol{\psi}]$ os valores de $\sum_{e=1}^{t}\sum_{p=1}^{NPG} \psi^i \emptyset_d(\eta^p) q^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p)$.

As matrizes [H] e [G] são as matrizes típicas do MEC, geradas pela aplicação do método ao operador Laplaciano. Pela utilização da FDR, estas mesmas matrizes aparecem no lado direito da equação final.

3.5 MODELAGEM ANALÍTICA DA INTEGRAL DO DOMÍNIO VIA FORMULAÇÃO MECIC

A fim de reduzir o custo computacional do MEC, formulou-se um novo modo de aproximar o termo não homogêneo da Equação de Poisson denominada MECIC

(CRUZ, 2012). Diferentemente da FDR, todo o núcleo da integração de domínio do termo não homogêneo será interpolado com FBRSC e, então, expresso em termos de um laplaciano, através de uma Função Primitiva calculada. Repare que a nova formulação segue o padrão da FDR.

$$Z(\mathbf{X}).\,u^{*}(\xi;\mathbf{X}) \approx\ S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{k}\ {}^{\xi}\alpha^{i}\psi^{i}_{,jj}(\gamma^{i};\mathbf{X})$$

(44)

Logo, a equação (37) passa a adquirir o seguinte formato:

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p)u^{*}(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p).W(\eta^p) - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p)q^{*}(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p).W(\eta^p)$$
$$- C(\xi_d^e)u(\xi_d^e) = -\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{k}\ {}^{\xi}\alpha^{i}\psi^{i}_{,jj}(\gamma^{i};\mathbf{X})\,d\Omega$$

(45)

Aplicando-se o Teorema de Divergência no termo não homogêneo da equação (45), tem-se que:

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p)u^{*}(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p).W(\eta^p) - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p)q^{*}(\xi_d^e;\eta^p)J^e(\eta^p).W(\eta^p)$$
$$- C(\xi_d^e)u(\xi_d^e) = -\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{k}\ {}^{\xi}\alpha^{i}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}.\mathbf{n_j}\,d\Gamma$$

(46)

Diferentemente da formulação anterior, a nova Formulação MECIC não aplicou a técnica de integração por partes. Mas, com o uso da função auxiliar, o termo não homogêneo da Equação de Poisson, que estava em termos do domínio, também passou a ser escrito apenas em termos do contorno.

3.6 MODELAGEM NUMÉRICA DA INTEGRAL DE CONTORNO VIA FORMULAÇÃO MECIC

No que diz respeito à Formulação MECIC com FBRSC, o desenvolvimento da integração numérica ao longo do contorno Γ do domínio Ω (equação (46)) sofre algumas alterações, visto que a integração numérica ocorrerá em uma parcela do contorno Γ delimitada pelo suporte compacto δ, isto é, não mais abrangerá a totalidade do contorno Γ.

O contorno integrável poderá incluir a parcela do contorno Γ do domínio Ω acrescido do contorno Γ_{circ}, originado da porção contida no domínio Ω, mas definida pela circunferência de raio igual ao suporte compacto δ centrado no ponto base, a partir do qual se realiza a varredura de todos os pontos base da malha de interpolação.

Para melhor clareza, alguns casos possíveis para um ponto base contido na malha de interpolação são mostrados na Figura 5, na Figura 6 e na Figura 7. Observa-se que os demais pontos base internos foram omitidos para facilitar a compreensão da figura.

Na Figura 5, o contorno de integração é definido pelo domínio do suporte, que está totalmente interno. A integração é feita analiticamente, através de coordenadas polares, com raio igual ao suporte e ângulo igual a 2π.

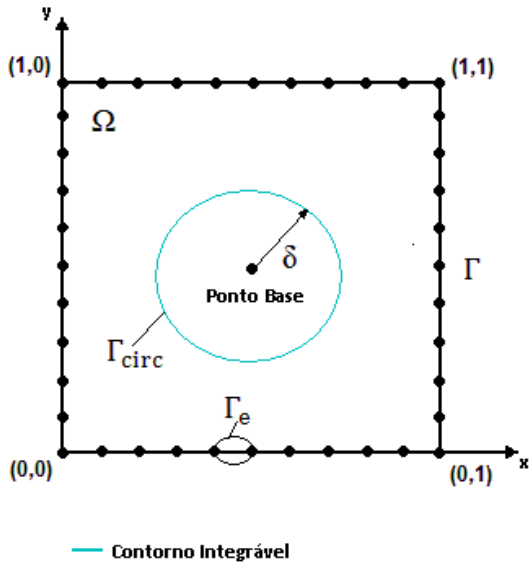


Figura 5 – Visualização do contorno integrável composto somente pelo contorno Γ_{circ} definido pela circunferência centrada no ponto base, cujo raio é igual ao suporte compacto δ.

Na Figura 6, o contorno de integração combina integrações referentes ao contorno circular do suporte com outras integrações que obedecem a delimitação dada pelo domínio físico do problema.

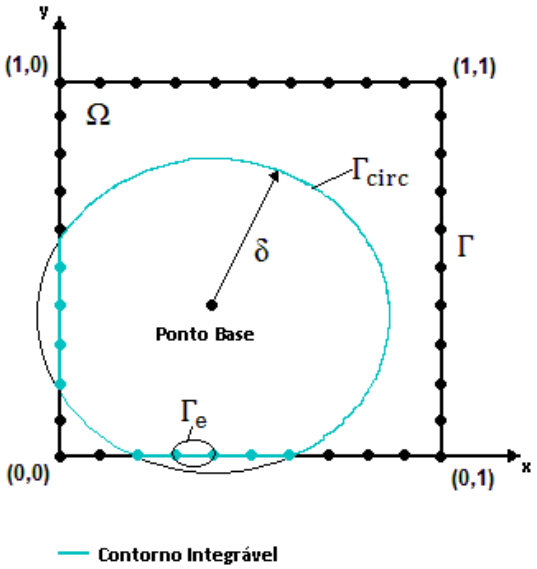


Figura 6 - Visualização do contorno integrável composto por uma parcela do contorno Γ do domínio do problema acrescido do contorno Γ_{circ}, que é definido pelo arco de circunferência inscrito em Ω e centrado no ponto base, cujo raio é igual ao suporte compacto δ.

Numa outra situação, dada pela Figura 7, a posição do ponto base faz com que o contorno de integração inclua apenas o contorno delimitado pelo domínio físico do problema.

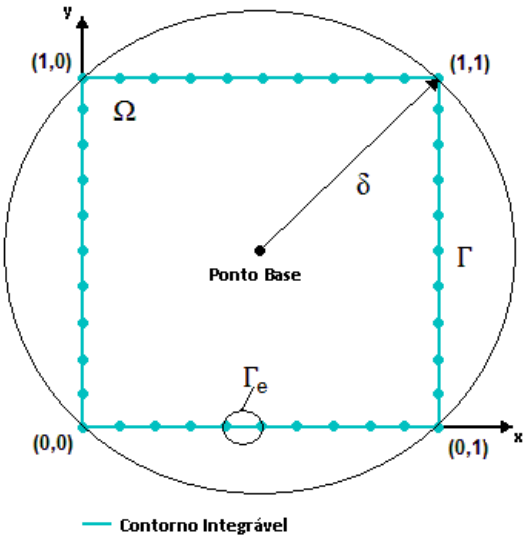


Figura 7 - Visualização do contorno integrável composto pela totalidade do contorno Γ do domínio do problema.

Para a Formulação MECIC com FBRSC, faz-se a seguinte alteração na equação (46), de modo a destacar os contornos físicos dos contornos circulares definidos pelo suporte:

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) u^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p) - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) q^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p) - C(\xi_d^e) u(\xi_d^e) = -\left(\sum_{e=1}^{t'} \int_{\Gamma_e} \sum_{i=1}^{k} {}^{\xi}\alpha^i \boldsymbol{\psi}_{,j}^{i} . \mathbf{n}_j d\Gamma_e + \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_{circ}} {}^{\xi}\alpha^i \boldsymbol{\psi}_{,j}^{i}(\delta). \mathbf{n}_j d\Gamma_{circ} \right)$$

(47)

Onde “ t’ ” representa a quantidade de elementos discretos do contorno Γ do problema delimitado pelo suporte compacto δ.

Assim, tem-se que a primeira integração de contorno do lado direito da equação (47) é resolvida numericamente com a aplicação do conceito de Jacobiano (transformação de coordenadas usando funções adimensionais) e do Método da Quadratura de Gauss (MQG).

$$-\sum_{e=1}^{t'} \int_{\Gamma_e} \sum_{i=1}^{k} {}^{\xi}\alpha^i \boldsymbol{\psi}_{,j}^{i} . \mathbf{n}_j d\Gamma_e = -\sum_{e=1}^{t'} \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{k} {}^{\xi}\alpha^i \boldsymbol{\psi}_{,j}^{i}(\gamma^i;\eta) . \mathbf{n}_j J^e(\eta) d\eta = -\sum_{e=1}^{t'} \sum_{p=1}^{NPG} \sum_{i=1}^{k} {}^{\xi}\alpha^i \boldsymbol{\psi}_{,j}^{i}(\gamma^i;\eta^p) . \mathbf{n}_j J^e(\eta^p) W(\eta^p)$$

(48)

Já a segunda integração de contorno do lado direito da equação (47) é resolvida analiticamente.

$$-\sum_{i=1}^{k}\int_{\Gamma_{circ}} {}^{\xi}\alpha^{i}\boldsymbol{\psi}^{i}_{,j}(\delta).\mathbf{n}_{j}d\Gamma_{circ} = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{h=1}^{b}\int_{0}^{\theta_h} {}^{\xi}\alpha^{i}\boldsymbol{\psi}^{i}_{,j}(\delta).\mathbf{n}_{j}\delta d\theta$$

$$= -\sum_{i=1}^{k}\sum_{h=1}^{b}\theta_h\ {}^{\xi}\alpha^{i}\delta\boldsymbol{\psi}^{i}_{,j}(\delta).\mathbf{n}_{j}$$

(49)

Onde θ_h vale de 0 até 2π, e representa o ângulo do arco de circunferência Γ_{circ}.

O “b” representa a quantidade de arcos de circunferência que estão inscritos no domínio quadrado Ω. Esses arcos são obtidos a partir de uma dada circunferência, cujo centro é um ponto base, de raio igual ao suporte compacto δ. Veja Figura 8.

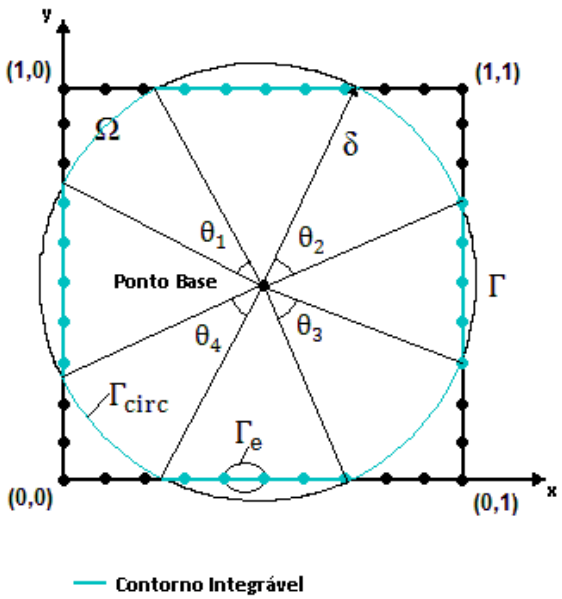


Figura 8 – Visualização dos ângulos θ_h definidos para cada arco de circunferência inscrito em Ω.

3.7 GERAÇÃO DO SISTEMA MATRICIAL FINAL DA FORMULAÇÃO MECIC

Para a construção do sistema linear matricial, coloca-se o ponto fonte (ξ_d^e), sobre cada nó funcional de cada elemento linear, o que possibilita o cálculo de maneira numérica de todas as integrações realizadas na equação (47).

Assim, tem-se que:

$$\sum_{e=1}^{t} Q_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) u^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p) - \sum_{e=1}^{t} U_d^e \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) q^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p).W(\eta^p)$$
$$- C(\xi_d^e) u(\xi_d^e)$$
$$= -\left(\sum_{e=1}^{t'} \sum_{p=1}^{NPG} \sum_{i=1}^{k} {}^{\xi}\alpha^i \boldsymbol{\psi}_{,j}^{\mathbf{i}}(\gamma^i;\eta^p).\mathbf{n_j} J^e(\eta^p)\, W(\eta^p) \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{k} \sum_{h=1}^{b} \theta_h \; {}^{\xi}\alpha^i \delta \boldsymbol{\psi}_{,j}^{\mathbf{i}}(\delta).\mathbf{n_j} \right)$$

(50)

Nota-se que o ponto fonte é o ponto através do qual se é feita a varredura de todos os pontos base ou pontos campo ou ainda pontos de informação da malha empregada para a solução do problema numérico.

O sistema linear matricial pode ser representado da seguinte maneira:

$$[\mathbf{H}][\mathbf{u}] - [\mathbf{G}][\mathbf{q}] = [\boldsymbol{\alpha}][\boldsymbol{\mu}]$$

(51)

Onde $[\boldsymbol{\alpha}]$ é uma matriz quadrada que armazena os valores do coeficiente de interpolação (α); $[\boldsymbol{\mu}]$ é a matriz que armazena os valores de $-\sum_{e=1}^{t'} \sum_{p=1}^{NPG} \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\psi}_{,j}^{\mathbf{i}}(\gamma^i;\eta^p).\mathbf{n_j} J^e(\eta^p)\, W(\eta^p) - \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_{circ}} \boldsymbol{\psi}_{,j}^{\mathbf{i}}(\delta).\mathbf{n_j} d\Gamma_{circ}$; $[\mathbf{H}]$ armazena os valores de $-\sum_{e=1}^{t} \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) q^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p)\, W(\eta^p)$; e $[\mathbf{G}]$ armazena os valores de $\sum_{e=1}^{t} \sum_{p=1}^{NPG} \emptyset_d(\eta^p) u^*(\xi_d^e;\eta^p) J^e(\eta^p)\, W(\eta^p)$.

3.8 CÁLCULO DA FUNÇÃO PRIMITIVA DA FBRSC

Em relação ao cálculo da Função Primitiva (ψ^i) para as FBRSC's, onde δ é o seu suporte compacto, tem-se o seguinte procedimento:

Seja então $F^i(\gamma^i;\ \mathbf{X}) = \phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)$ e $\psi^i(\gamma^i;\mathbf{X}) = \psi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)$, onde ϕ^i representa uma Função de Wendland ou Função de Wu de Suporte Compacto δ.

Resolve-se a equação (52), em coordenadas polares, para obtenção de ψ^i

$$\frac{d^2\psi^i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi^i}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi^i}{\partial\theta^2} = \phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right) \tag{52}$$

Lembre-se que somente r^i, proveniente da distância euclidiana entre o ponto base e o ponto campo, será dividido por δ. O r, proveniente das coordenadas polares da Equação de Laplace para o cálculo da Função Primitiva, não sofre alteração nenhuma. Após a divisão de r^i pelo suporte compacto δ, r e r^i serão equivalentes.

Visto que a Função de Base Radial de Suporte Compacto $\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)$ não possui variável em θ, a equação (52) é simplificada para equação (53):

$$\frac{d^2\psi^i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi^i}{dr} = \phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right) \tag{53}$$

A solução analítica da equação (53) é desenvolvida a seguir:

Seja $\frac{d\psi^i}{dr} = B$, então tem-se que:

$$\frac{dB}{dr} + \frac{1}{r}B = \phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)$$
$$r\frac{dB}{dr} + B = r\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right) \tag{54}$$

Do conceito da Regra da Cadeia, tem-se que na equação (54):

$$\frac{d(rB)}{dr} = r\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)$$

(55)

Resolvendo-a, tem-se que:

$$rB = \int r\phi^{i}\left(\frac{r^{i}}{\delta}\right)dr$$

$$B = \frac{1}{r}\int r\,\phi^{i}\left(\frac{r^{i}}{\delta}\right)dr$$

$$\frac{d\psi^{i}}{dr} = \frac{1}{r}\int r\,\phi^{i}\left(\frac{r^{i}}{\delta}\right)dr$$

(56)

A partir da equação diferencial simplificada acima, obtém-se a Função Primitiva ψ^{i} para a FBRSC.

Após o calculo de ψ^{i} deriva-o em relação à $\mathbf{r}$ para o cálculo da integração de S(**X**) em relação ao contorno discreto Γ_e: $\sum_{e=1}^{t'}\int_{\Gamma_e}\sum_{i=1}^{k}\ {}^{\xi}\alpha^{i}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}\,.\,\mathbf{n_j}d\Gamma_e + \sum_{i=1}^{k}\int_{\Gamma_{circ}}\ {}^{\xi}\alpha^{i}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\delta).\,\mathbf{n_j}d\Gamma_{circ}.$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}.\,\mathbf{n_j} = \frac{d\psi^{i}}{dr}\left(\frac{r^{i}}{\delta}\right)\mathbf{r}_{,\mathbf{j}}.\,\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{j}}$$

(57)

Onde:

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}.\,\mathbf{n_j} = \frac{1}{r}\frac{d\psi^{i}}{dr}\left(\frac{r^{i}}{\delta}\right)\mathbf{r_j}.\,\mathbf{n_j}$$

(58)

De modo que $\mathbf{r_j}$ é o vetor unitário na direção $\mathbf{r}$ e $\mathbf{n_j}$ é o vetor unitário normal ao elemento discreto Γ_e do contorno de Ω.

Substituindo a equação (56) na equação (58), tem-se que:

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}.\,\mathbf{n_j} = \frac{1}{r^{2}}\int r\,\phi^{i}\left(\frac{r^{i}}{\delta}\right)dr\ \mathbf{r_j}.\,\mathbf{n_j}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{\cdot,\mathbf{j}}.\,\mathbf{n_j} = \frac{1}{r^2}\int r\,\phi^{i}\left(\frac{r}{\delta}\right)dr\,\mathbf{r_j}.\,\mathbf{n_j}$$

(59)

Assim, para o caso de FBRSC:

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{\cdot,\mathbf{j}}.\,\mathbf{n_j} = \begin{cases} \frac{1}{r^2}\int r\,\phi^{i}\left(\frac{r}{\delta}\right)dr\,\mathbf{r_j}.\,\mathbf{n_j}, & 0 \le r \le \delta \\ 0 & , \quad r \ge \delta \end{cases}$$

(60)

Seja $r' = \frac{r}{\delta}\cdot$, então:

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{\cdot,\mathbf{j}}(r').\,\mathbf{n_j} = \begin{cases} \frac{1}{(\delta r')^2}\int \delta^2 r'\,\phi^{i}(r')dr'\mathbf{r'}_{\mathbf{j}}.\,\mathbf{n_j}\,, & 0 \le r' \le 1 \\ 0 & , \quad r' \ge 1 \end{cases}$$

(61)

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS

4.1 COMÉNTÁRIOS PRELIMINARES

A Metodologia Científica utilizada nesta dissertação é a modelagem matemática, com amparo em soluções analíticas e simulações computacionais para aferição de desempenho. Sempre que possível, é feita a comparação entre as soluções obtidas com soluções de referência encontradas na literatura especializada.

A apresentação dos resultados se faz com o auxílio de tabelas e gráficos ilustrativos de desempenho, que consideram medidas de erros relativos, e mostram valores típicos da variável básica e sua derivada direcional, de acordo com as condições prescritas no problema.

Como meta inicial da pesquisa; implementa-se um programa em Fortran 77 de interpolação com FBRSC's de um campo escalar predefinido Z(x, y), obtendo-se então superfícies S(x,y), para cálculo de volume sob o molde da Formulação MECIC. Em seguida, fazem-se simulações introdutórias com FBRSC's usando o suporte global, e, então, posteriormente, são usados os suportes compactos. Finalmente, elegem-se as melhores FBRSC's com seus respectivos suportes otimizados.

Em relação à etapa de seleção das melhores FBRSC's em termos de desempenho, o programa desenvolvido para interpolação de superfícies possui como entrada de dados a função Z(x, y), a quantidades de pontos base da malha de interpolação, a FBRSC e o seu suporte (δ).

A saída de dados é efetuada através da geração de um arquivo em TXT, no qual se visualiza o valor calculado do volume situado abaixo da superfície interpolada e o seu respectivo erro relativo, para cada malha de interpolação utilizada no programa de teste bidimensional com volume.

4.2 TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME

Os testes bidimensionais com volume são realizados com o objetivo de se verificar a efetividade da aplicação das FBRSC no processo de interpolação e de ajuste de funções bidimensionais, visto que esse procedimento é constantemente utilizado na nova formulação proposta para o tratamento do termo não homogêneo da Equação de Poisson denominada de Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta de Contorno (MECIC).

Os testes com volume baseiam-se no fato de a integração da superfície aproximada S(x, y) em relação ao domínio Ω, também representar o cálculo do volume delimitado por esse domínio sob a referida superfície.

Para aferição dos erros inerentes à aplicação das FBRSC's no processo de interpolação e de ajuste de funções bidimensionais Z(**X**) para a formulação proposta MECIC, comparam-se os resultados da integração numérica em relação ao contorno discreto Γ_e da superfície aproximada S(**X**) e ao contorno Γ_{circ}, sob o molde da Formulação MECIC; com o volume calculado analiticamente a partir da integração de seu respectivo campo Z(**X**) em relação à Ω (equação (62)).

$$\text{Volume Analítico} = \int_{\Omega} \mathrm{Z}(\mathbf{X})\mathrm{d}\Omega \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\text{Volume Numérico } &= \int_{\Omega} \mathrm{S}(\mathbf{X})\mathrm{d}\Omega \\ &= \sum_{e=1}^{t'} \sum_{p=1}^{NPG} \sum_{i=1}^{k} {}^{\xi}\alpha^{i}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\gamma^{i};n^{p}).\,\mathbf{n}_{\mathbf{j}}J^{e}(n^{p})\,W(n^{p}) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{h=1}^{b} \theta_{h}\ {}^{\xi}\alpha^{i}\delta\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\delta)\,.\,\mathbf{n}_{\mathbf{j}}\end{aligned} \tag{63}$$

Os erros são avaliados a partir do cálculo do erro relativo, estabelecido pela equação (64).

$$\text{Erro Relativo} = \frac{|V^{\text{numérico}} - V^{\text{analítico}}|}{V^{\text{analítico}}}. \tag{64}$$

4.2.1 Malhas Utilizadas na Aproximação dos Volumes

Para os testes bidimensionais com volume das FBRSC com suporte global, as malhas de interpolação selecionadas para o programa de geração de superfícies foram produzidas a partir da subdivisão, de forma uniforme, do domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ em relação às coordenadas cartesianas x e y, de modo que $\Omega_x = \{[\mathrm{x_i}, \mathrm{x_{i+1}}]\}_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}}$, $\Omega_y = \{[\mathrm{y_i}, \mathrm{y_{i+1}}]\}_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}}$. Dessa forma, os pontos base $\gamma(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i})$ foram alocados de modo a manter um espaçamento uniforme, no contorno; e no domínio foram uniformemente distribuídos seguindo a lógica apresentada na Figura 9. A Figura 10 mostra uma malha sem pontos base no interior do domínio.

A malha de interpolação da Figura 10 foi aplicada somente às três melhores FBRSC's no que diz respeito à magnitude dos erros relativos durante o processo de interpolação e do comportamento gráfico do erro relativo Vs. a quantidade de pontos base da malha de interpolação.

O principal objetivo desse teste adicional é verificar o comportamento das FBRSC's escolhidas em casos extremos, isto é, em malhas com pontos base no contorno somente, visto que a malha necessariamente deverá conter alguns pontos base no interior do domínio para que o processo de interpolação seja bem sucedido.

O domínio estabelecido no trabalho é de caráter bidimensional com formato quadrado, cujas dimensões são: $\Omega = \{\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Para o dado domínio Ω, com pontos base distribuídos conforme a malha apresentada na Figura 9, o valor do suporte global δ_{global} equivale a diagonal desse quadrado; e vale $\sqrt{2}$.

Segue, então, a Figura 9 um exemplo de malha de interpolação utilizada no programa de geração de superfície com FBRSC, para N=10.

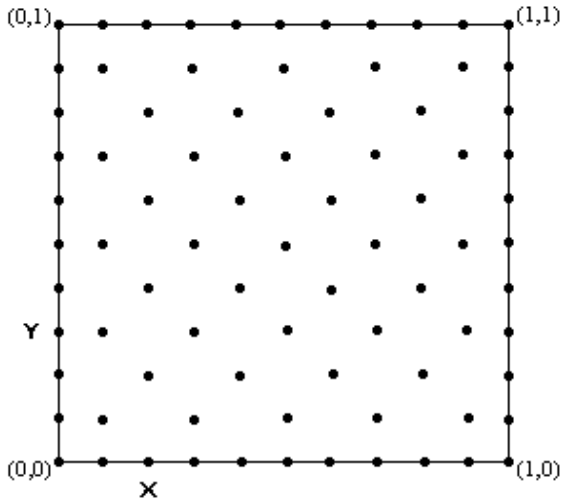


Figura 9– Visualização da malha utilizada nos testes com volume: Para N=10.

Segue a Figura 10 um exemplo de malha de interpolação com somente pontos base no contorno, também para N=10.

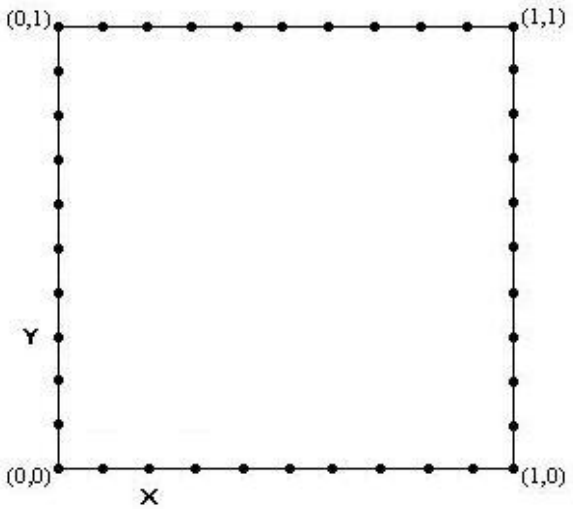


Figura 10– Visualização da malha utilizada nos testes com volume. Malha com N=10 e somente pontos no contorno.

No que diz respeito aos testes bidimensionais com volume com variação do suporte da FBRSC, utilizou-se uma malha de interpolação regularmente preenchida com os pontos base. Veja a Figura 11.

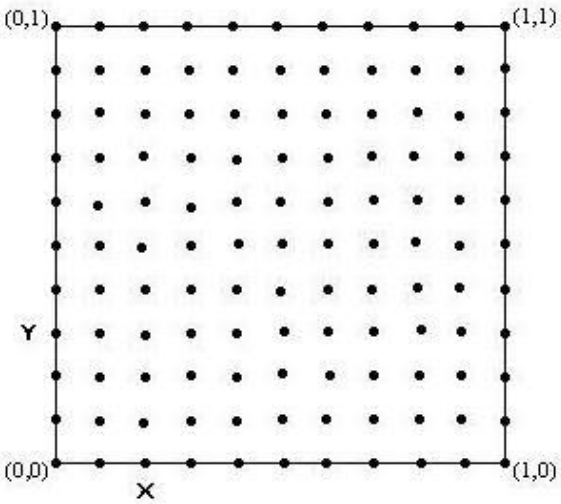


Figura 11 – Visualização da malha regularmente preenchida utilizada nos testes com volume para variação do suporte da FBRSC.

Nos testes bidimensionais com volume com variação do suporte das FBRSC, ainda foram feitos testes bidimensionais com volume levando em conta o processo de ajuste de pontos interpolantes. Assim, possibilita-se formular um comparativo entre os dois resultados (com e sem ajuste de pontos), de modo a obter uma visão geral do desempenho das FBRSC com suporte variável.

4.2.2 Campos Escalares Z(x, y) Simulados na Aproximação dos Volumes

Em relação às funções Z(x, y), foram selecionados os seguintes campos para os testes bidimensionais com volume da FBRSC com suporte global:

- $\mathrm{Z(x,y) = 1;}$
- $\mathrm{Z(x,y) = (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}$;
- $\mathrm{Z(x,y) = 0.15 + 0.75e^{-0.25(9x-2)^2-0.25(9y-2)^2} + 0.75e^{-(9x-2)^2/49-(9y-2)^2/10} + 0.5e^{-0.25(9x-7)^2-0.25(9y-3)^2} - 0.2e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}}$.

Em seguida, durantes os teste bidimensionais com volume das FBRSC's com variação do suporte, foram aproveitadas duas das anteriormente empregadas mais duas novas funções Z(x, y):

- $Z(x,y) = 1$;
- $Z(x,y) = (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + 0{,}25$;
- $Z(x,y) = e^{3x-3}e^{3y-3} + 0{,}25$;
- $Z(x,y) = 0.15 + 0.75e^{-0.25(9x-2)^2-0.25(9y-2)^2} + 0.75e^{-(9x-2)^2/49-(9y-2)^2/10} + 0.5e^{-0.25(9x-7)^2-0.25(9y-3)^2} - 0.2e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}$.

Esta última função é a Função de Franke (FRANKE, 1982), mostrada na Figura 12.

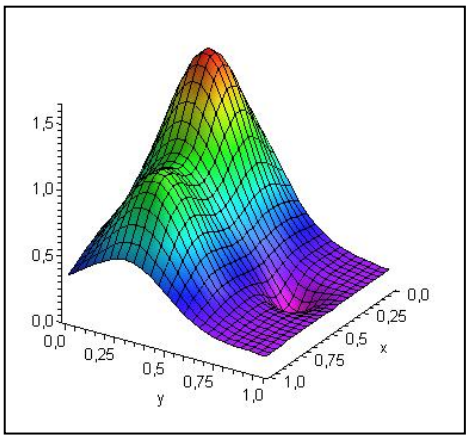


Figura 12– Função de Franke.
Fonte: BERTOLANI (2010).

4.2.3 As FBRSC Utilizadas na Aproximação dos Volumes

Na Tabela 3 a seguir, encontram-se uma lista de FBRSCs, as quais foram empregadas nos testes de interpolação.

Tabela 3- LISTA DE FUNÇÕES RADIAIS DE SUPORTE COMPACTO $\Phi_{L,U}$ UTILIZADAS NOS TESTES DE INTERPOLAÇÃO.

Função de Wendland de Suporte Compacto:	
$\boldsymbol{\Phi_{1,0}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+$	$C^0 \cap PD_1$

$\boldsymbol{\phi}_{3,0}(\mathbf{r}) \doteq \left(1-\frac{r}{\delta}\right)_+^2$	$C^0 \cap PD_3$
$\boldsymbol{\phi}_{5,0}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$C^0 \cap PD_5$
$\boldsymbol{\phi}_{1,1}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3 \left[1+3\frac{r}{\delta}\right]$	$C^2 \cap PD_1$
$\boldsymbol{\phi}_{3,1}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[1+4\frac{r}{\delta}\right]$	$C^2 \cap PD_3$
$\boldsymbol{\phi}_{1,2}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^5 \left[1+5\frac{r}{\delta}+8\left(\frac{r}{\delta}\right)^2\right]$	$C^4 \cap PD_1$
$\boldsymbol{\phi}_{3,2}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^6 \left[35\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+18\frac{r}{\delta}+3\right]$	$C^4 \cap PD_3$
$\boldsymbol{\phi}_{3,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^8 \left[32\left(\frac{r}{\delta}\right)^3+25\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+8\frac{r}{\delta}+1\right]$	$C^6 \cap PD_3$

Função de Wu de Suporte Compacto:

$\boldsymbol{\phi}_{3,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$C^0 \cap PD_7$
$\boldsymbol{\phi}_{2,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^5 \left[8+40\left(\frac{r}{\delta}\right)+48\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+25\left(\frac{r}{\delta}\right)^3+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right]$	$C^2 \cap PD_5$
$\boldsymbol{\phi}_{1,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^6 \left[6+36\frac{r}{\delta}+82\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+72\left(\frac{r}{\delta}\right)^3+30\left(\frac{r}{\delta}\right)^4+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^5\right]$	$C^4 \cap PD_3$
$\boldsymbol{\phi}_{0,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^7 \left[5+35\frac{r}{\delta}+101\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+147\left(\frac{r}{\delta}\right)^3+101\left(\frac{r}{\delta}\right)^4 + 35\left(\frac{r}{\delta}\right)^5+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^6\right]$	$C^6 \cap PD_1$

4.3 PROCEDIMENTO DE TESTES COM A FORMULAÇÃO MECIC

Após a conclusão da etapa dos testes bidimensionais com volume, desenvolve-se, então, um programa para solução de problemas de Poisson no ambiente do Método dos Elementos de Contorno. Escolhem-se as melhores FBRSC's , e procura-se avaliar os limites mínimos do suporte que podem ser utilizados.

Em relação aos problemas de Poisson no ambiente do MEC, seleciona-se o problema da barra de seção transversal constante engastada no topo, sendo submetida a três tipos de ação de domínio: ação constante, linear e senoidal. Veja Figura 13 na qual é apresentada a geometria do problema examinado.

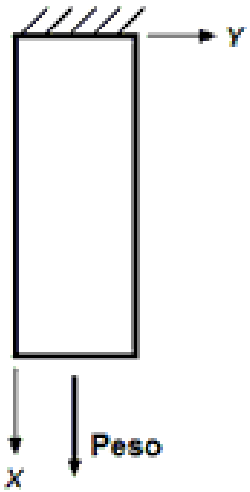


Figura 13 – Barra de seção transversal constante em gastada no topo, sendo submetida ao próprio peso.
Fonte: Cruz (2012), modificado.

Ao término da etapa da simulação com a barra engastada com o programa desenvolvido com MEC, finalmente se implementa um recurso nesse programa, que permita o ajuste dos pontos interpolantes. Nestes testes, seguindo o modelo adotado por Cruz (2012), todos os pontos internos de informação são retirados, de modo a restarem apenas pontos base de contorno no sistema final de equações.

São examinados com o esquema de ajuste com FBRSC's os mesmos problemas anteriormente descritos, ou seja, a barra submetida a três tipos de ação de domínio.

Como produto final; serão gerados códigos em linguagem Fortran 77 a serem compilados, e então executados, no programa Force 3.0. Consequentemente, ter-se-ão maiores conhecimentos acerca das particularidades metodológicas dos algoritmos e das técnicas empregados, bem como maior domínio dos aspectos físicos inerentes aos problemas de análise sísmica.

4.4 RESULTADOS DOS TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME PARA FUNÇÕES DE BASE RADIAL COM SUPORTE GLOBAL

Em relação a esta etapa da pesquisa, foram feitos testes bidimensionais, sob o molde da Formulação MECIC, nos quais se calcularam o volume, e se avaliaram o comportamento das FBRSC's, à medida que se refinou a malha de interpolação com a inserção de novos pontos base. Durante os testes preliminares, os suportes das FBRSC's foram fixados em $\sqrt{2}$ (suporte global ou pleno).

Para a determinação do erro relativo, houve necessidade do conhecimento do volume analítico de cada campo escalar interpolado, dado na Tabela 4 a seguir.

Tabela 4– VOLUMES ANALÍTICOS PARA OS CAMPOS Z(X, Y) ESCOLHIDOS.

Z(x, y)	**Volume Analítico [u.v]:**
$\mathbf{1}$	1,000000
$(\mathbf{x}-\mathbf{0.5})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{0.5})^2$	0,166667
$\mathbf{0.15}+\mathbf{0.75e}^{-0.25(9x-2)^2-0.25(9y-2)^2}+\mathbf{0.75e}^{-(9x-2)^2/49-(9y-2)^2/10}+\mathbf{0.5e}^{-0.25(9x-7)^2-0.25(9y-3)^2}-\mathbf{0.2e}^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}$	0,614228
$\mathbf{Z(x,y)}=\mathbf{e}^{3x-3}\mathbf{e}^{3y-3}+\mathbf{0,25}$	0,350322
$(\mathbf{x}-\mathbf{0.5})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{0.5})^2+\mathbf{0,25}$	0,416667

O cálculo da Função Primitiva $(\psi(r))$ para as FBRSC's é essencial para a integração da superfície S(x, y) em relação ao contorno discreto do domínio Ω (Γ_e) e ao contorno circular do suporte compacto (Γ_{circ}). Veja a seguir a Tabela 5, que contém as Funções Primitivas $(\psi(r))$ para cada FBRSC testada no trabalho:

Tabela 5 - LISTA DE FBRSC $\Phi_{L,U}$ UTILIZADAS COMO FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO COM SUAS RESPECTIVAS FUNÇÕES PRIMITIVAS (ψ).

Função de Wendland:	**Função Primitiva ($\psi(\mathbf{r})$):**
$\boldsymbol{\phi}_{1,0}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+$	$-\frac{1}{9}\left(\frac{r^3}{\delta}\right)+\frac{1}{4}r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{3,0}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^2$	$\frac{1}{16}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{r^3}{\delta}\right)+\frac{1}{4}r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{5,0}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^3$	$-\frac{1}{25}\left(\frac{r^5}{\delta^3}\right)-\frac{3}{16}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{r^3}{\delta}\right)+\frac{1}{4}r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{1,1}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^3\left[1+3\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]$	$-\frac{1}{12}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right)+\frac{8}{25}\left(\frac{r^5}{\delta^3}\right)-\frac{3}{8}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{3,1}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^4\left[1+4\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]$	$\frac{4}{49}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right)-\frac{5}{12}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right)+\frac{4}{5}\left(\frac{r^5}{\delta^3}\right)-\frac{5}{8}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{1,2}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^5\left[1+5\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+8\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2\right]$	$-\frac{8}{81}\left(\frac{r^9}{\delta^7}\right)+\frac{35}{64}\left(\frac{r^8}{\delta^6}\right)-\frac{8}{7}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right)+\frac{35}{36}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right)-\frac{7}{16}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{3,2}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\delta}\right]_+^6\left[35\left(\frac{\mathbf{r}}{\delta}\right)^2+18\frac{\mathbf{r}}{\delta}+3\right]$	$\frac{7}{20}\left(\frac{r^{10}}{\delta^8}\right)-\frac{64}{27}\left(\frac{r^9}{\delta^7}\right)+\frac{105}{16}\left(\frac{r^8}{\delta^6}\right)-\frac{64}{7}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right)+\frac{35}{6}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right)-\frac{7}{4}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)+\frac{3}{4}r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{3,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^8\left[32\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3+25\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2+8\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+1\right]$	$\frac{32}{169}\left(\frac{r^{13}}{\delta^{11}}\right)-\frac{77}{48}\left(\frac{r^{12}}{\delta^{10}}\right)+\frac{64}{11}\left(\frac{r^{11}}{\delta^9}\right)-\frac{231}{20}\left(\frac{r^{10}}{\delta^8}\right)+\frac{352}{27}\left(\frac{r^9}{\delta^7}\right)-\frac{231}{32}\left(\frac{r^8}{\delta^6}\right)+\frac{11}{6}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right)-\frac{11}{16}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}r^2$

Função de Wu:	**Função Primitiva ($\psi(\mathbf{r})$):**
$\boldsymbol{\phi}_{3,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^4\left[16+29\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+20\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2+5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3\right]$	$\frac{5}{81}\left(\frac{r^9}{\delta^7}\right)-\frac{3}{7}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right)+\frac{7}{5}\left(\frac{r^5}{\delta^3}\right)-\frac{35}{9}\left(\frac{r^3}{\delta}\right)+4r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{2,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^5\left[8+40\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+48\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2+25\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3+5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^4\right]$	$-\frac{5}{121}\left(\frac{r^{11}}{\delta^9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{r^9}{\delta^7}\right)-\frac{9}{7}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right)+\frac{21}{5}\left(\frac{r^5}{\delta^3}\right)-\frac{9}{2}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)$

$\boldsymbol{\phi}_{1,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^6 \left[6+36\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+82\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2 + 72\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3+30\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^4 + 5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^5\right]$	$+\frac{5}{169}\left(\frac{r^{13}}{\delta^{11}}\right)-\frac{3}{11}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{9}}\right)+\frac{11}{9}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{7}}\right)-\frac{33}{7}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{5}}\right)+\frac{11}{2}\left(\frac{r^{6}}{\delta^{4}}\right) -\frac{11}{4}\left(\frac{r^{4}}{\delta^{2}}\right)+\frac{3}{2}r^2$
$\boldsymbol{\phi}_{0,3}(\mathbf{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^7 \left[5+35\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+101\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2 + 147\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3+101\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^4 + 35\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^5+5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^6\right]$	$-\frac{1}{45}\left(\frac{r^{15}}{\delta^{13}}\right)+\frac{3}{13}\left(\frac{r^{13}}{\delta^{11}}\right)-\frac{13}{11}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{9}}\right)+\frac{143}{27}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{7}}\right)-\frac{429}{64}\left(\frac{r^{8}}{\delta^{6}}\right) +\frac{143}{36}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{5}}\right)-\frac{39}{16}\left(\frac{r^{4}}{\delta^{2}}\right)+\frac{5}{4}r^2$

Os resultados obtidos foram organizados em tabelas, cujo conteúdo abrange a magnitude dos erros relativos, referentes ao cálculo do volume analítico e numérico, a quantidade total de pontos base, a quantidade de pontos base no interior do domínio, a quantidade de pontos base no contorno e o volume numérico resultante.

Os gráficos obtidos a partir das informações contida nas tabelas relacionam os erros relativos com a quantidade de pontos base total da malha (Figura 9). A quantidade de pontos base da malha de interpolação variou de 9 a 921 pontos.

Foram selecionadas as três melhores FBRSC's, para cada campo Z(x, y). A seleção ocorreu por meio da análise dos gráficos obtidos a partir dos relatórios do programa de geração de superfícies de Z(x, y). Os critérios para a seleção dessas funções foram: o comportamento gráfico das FBRSC's em termos de monotonicidade e a magnitude reduzida dos erros relativos.

Como resultados preliminares, seguem os gráficos e relatórios gerados pelos testes das três FBRSC's escolhidas, para cada campo predefinido Z(x, y).

4.4.1 Para o Campo $\mathbf{Z(x,y) = 1}$

Para tal campo, as FBRSC's que apresentaram comportamento monótono decrescente estão listadas na Tabela 6:

Tabela 6- LISTA DE FBRSC $\Phi_{l,u}$ QUE APRESENTARAM GRÁFICOS COM MONOTONICIDADE DECRESCENTE.

Função de Wendland:
$\boldsymbol{\phi_{1,0}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+$
$\boldsymbol{\phi_{3,0}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{2}}$
$\boldsymbol{\phi_{5,0}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{3}}$
$\boldsymbol{\phi_{1,1}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{3}} \left[\mathbf{1} + \mathbf{3}\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]$
$\boldsymbol{\phi_{3,1}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{4}} \left[\mathbf{1} + \mathbf{4}\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]$
$\boldsymbol{\phi_{1,2}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{5}} \left[\mathbf{1} + \mathbf{5}\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{8}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{2}}\right]$

Função de Wu:
$\boldsymbol{\phi_{3,3}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{4}} \left[\mathbf{16} + \mathbf{29}\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{20}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{3}}\right]$
$\boldsymbol{\phi_{2,3}}\,(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{5}} \left[\mathbf{8} + \mathbf{40}\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{48}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{2}} + \mathbf{25}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{3}} + \mathbf{5}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{4}}\right]$

Dentre as funções dos dois grupos, as três FBRSC's que apresentaram menores magnitudes de erros relativos, para uma faixa de quantidade de pontos base, foram listadas na Tabela 7.

Tabela 7- LISTA CONTENDO AS TRÊS MELHORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS RELATIVOS E COMPORTAMENTO GRÁFICO.

Colocação	**Família de FBRSC:**	**FBRSC:**
1°	Função de Wendland:	$\phi_{5,0}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$
2°	Função de Wu:	$\phi_{3,3}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20r\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$
3°	Função de Wendland:	$\phi_{3,0}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$

As duas funções listadas a seguir, na Tabela 8, apresentaram os piores comportamentos gráficos, visto que não são monótonos, devido à presença de variações bruscas na magnitude dos erros relativos, à medida que se refinava a malha.

Tabela 8- LISTA CONTENDO AS DUAS PIORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO.

Colocação	**Família de FBRSC:**	**FBRSC:**
1°	Função de Wu:	$\phi_{0,3}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^7 \left[5+35\frac{r}{\delta}+101\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+147\left(\frac{r}{\delta}\right)^3 + 101\left(\frac{r}{\delta}\right)^4+35\left(\frac{r}{\delta}\right)^5+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^6\right]$
2°	Função de Wendland:	$\phi_{3,2}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^6 \left[35\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+18\frac{r}{\delta}+3\right]$

Nota-se que as FBRSC's de grau mais elevado apresentaram um comportamento instável, durante os testes bidimensionais com volume. Portanto, verificou-se um importante vínculo do comportamento gráfico monótono com o grau da FBRSC, isto é; à medida que o grau se elevava, aumentou-se também a instabilidade dos resultados dos erros relativos da FBRSC, afastando-a gradativamente do comportamento gráfico monótono decrescente desejado.

Para as funções listadas na Tabela 7, também foram desenvolvidos testes envolvendo uma malha de interpolação, a qual possui pontos somente no contorno (Figura 10), com o objetivo de investigar o comportamento delas para tal tipo de malha.

Os resultados dos testes, para o campo Z(x, y) =1, das funções listadas na Tabela 7 para a malha exemplificada na Figura 10 foram aceitáveis. Apesar de não apresentarem comportamento gráfico monótono decrescente, os erros relativos mantiveram-se em patamares razoáveis, na medida em que se refinava a malha de interpolação em questão. Os erros relativos dos testes das FBRSC's escolhidas para a malha em questão (Figura 10) com 144 pontos base estão listados na Tabela 9:

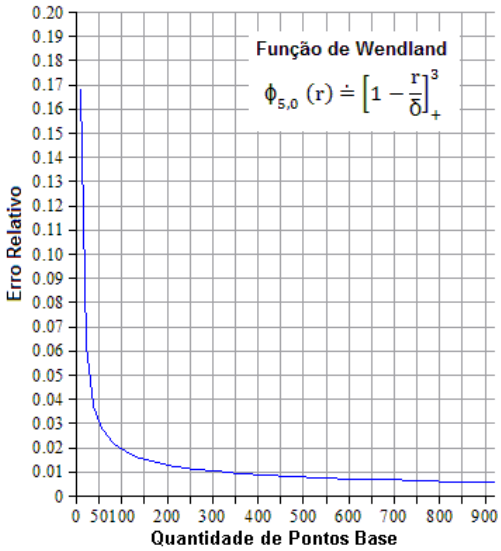
Tabela 9– ERRO RELATIVO DAS FBRSC'S ESCOLHIDAS PARA CAMPO Z(X, Y) =1, EM UMA MALHA (FIGURA 5) COM 144 PONTOS BASE.

Função de Wendland:	**Erro Relativo:**
$\boldsymbol{\phi_{3,0}}\ (\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{2}}$	0,0564 ou 5,64%
$\boldsymbol{\phi_{5,0}}\ (\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{3}}$	0,044 ou 4,4%
Função de Wu:	
$\boldsymbol{\phi_{3,3}}\ (\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{4}} \left[\mathbf{16} + \mathbf{29}\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{20}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{3}}\right]$	0,0178 ou 1,78%

Para maiores esclarecimentos, serão expostos os gráficos e tabelas a seguir, obtidos durante a execução do programa de teste das melhores FBRSC's contidas na Tabela 7 para interpolação, envolvendo o campo constante, referentes às malhas que obedecem à estrutura da malha da Figura 9, e as malhas que obedecem à estrutura dada na Figura 10, respectivamente. Na Figura 14 é mostrada a curva de desempenho para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com pontos internos e de contorno; na Figura 15, a curva com malha sem pontos internos. Na Figura 16 e na Figura 17 estão os gráficos similares para a Função de Wu $\phi_{3,3}$, para malhas com pontos internos e de contorno e sem pontos internos, respectivamente; na Figura 18 e na

Figura 19 estão os gráficos similares para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para malhas com pontos internos e de contorno e sem pontos internos, respectivamente.

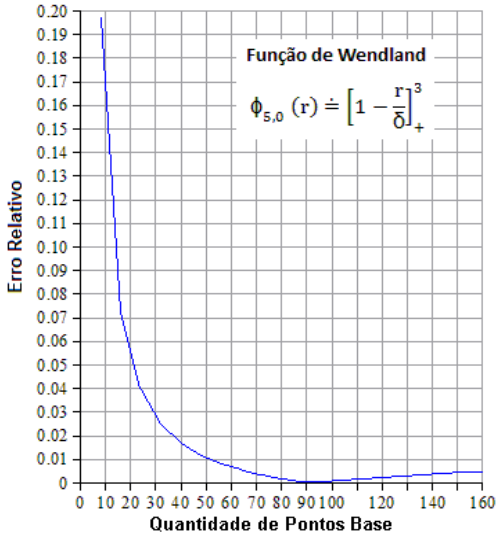
Percebem-se os bons resultados alcançados pelas funções apresentadas, com erros menores do que 0,5%. Cabe ressaltar que nestas experiências não se trata apenas de simples interpolação, mas do uso de um esquema de integração que, para o suporte global, resultou da integração exclusiva dos valores de domínio, com enorme economia computacional. Destaca-se ainda que, considerando exclusivamente pontos base no contorno, não é possível representar a superfície adequada internamente, mesmo usando as melhores funções radiais. As curvas de erro percentual não convergem para valores mínimos de erro, conforme se pode perceber nas figuras.



RELATORIO:
****
Radial Compacta: Funcao de Wendland:(1-r/δ)^3
****
Suporte = 1.42
****
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
****

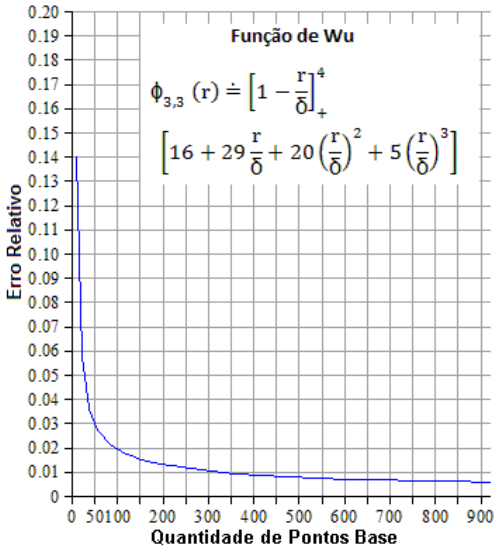
PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.831600368	0.16839963200
21	16	5	4	0.937542498	0.06245750190
37	24	13	6	0.962517381	0.03748261930
57	32	25	8	0.972549319	0.02745068070
81	40	41	10	0.978063345	0.02193665500
109	48	61	12	0.981623471	0.01837652920
141	56	85	14	0.984144986	0.01585501430
177	64	113	16	0.986037195	0.01396280530
217	72	145	18	0.987517059	0.01248294120
261	80	181	20	0.988707781	0.01129221920
309	88	221	22	0.989687681	0.01031231880
361	96	265	24	0.990511119	0.00948888063
417	104	313	26	0.991210580	0.00878942013
477	112	365	28	0.991814017	0.00818598270
541	120	421	30	0.992340684	0.00765931606
609	128	481	32	0.992802739	0.00719726086
681	136	545	34	0.993211806	0.00678819418
757	144	613	36	0.993576527	0.00642347336
837	152	685	38	0.993903458	0.00609654188
921	160	761	40	0.994199991	0.00580000877

Figura 14 – Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{5,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



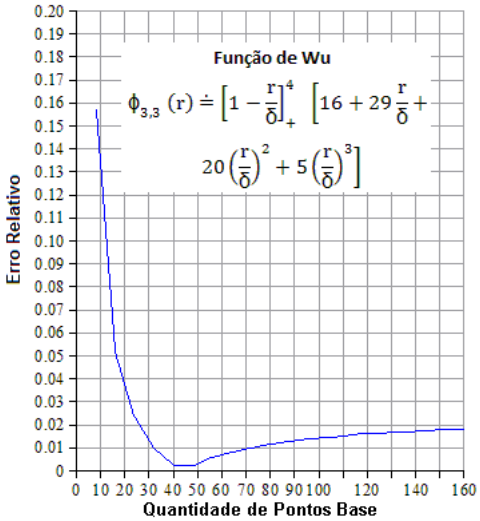

```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^3
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:     Vol:            ERRO:
8     8         0        2     0.802608490     0.197391510000
16    16        0        4     0.927724838     0.072275161700
24    24        0        6     0.960384190     0.039615809900
32    32        0        8     0.974959195     0.025040805300
40    40        0        10    0.983113170     0.016886830300
48    48        0        12    0.988293529     0.011706471400
56    56        0        14    0.991866231     0.008133769040
64    64        0        16    0.994474053     0.005525946620
72    72        0        18    0.996460080     0.003539919850
80    80        0        20    0.998021483     0.001978516580
88    88        0        22    0.999280989     0.000719010830
96    96        0        24    1.000317690     0.000317692757
104   104       0        26    1.001186370     0.001186370850
112   112       0        28    1.001923800     0.001923799510
120   120       0        30    1.002558470     0.002558469770
128   128       0        32    1.003110290     0.003110289570
136   136       0        34    1.003594040     0.003594040870
144   144       0        36    1.004021290     0.004021286960
152   152       0        38    1.004402040     0.004402041440
160   160       0        40    1.004742740     0.004742741580
```

Figura 15 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.



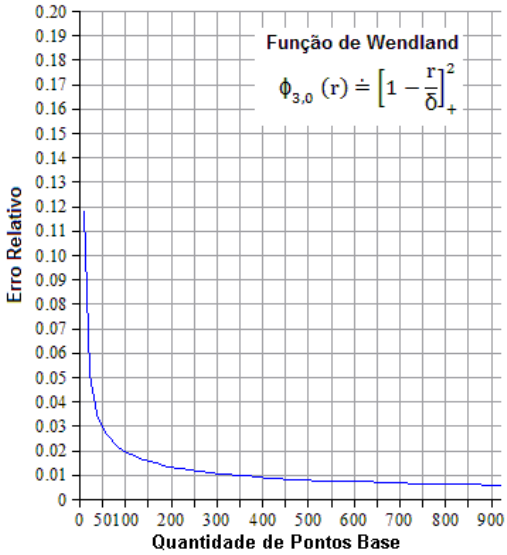

```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wu:[1-r/δ]^4[16+29(r/δ)+20(r/δ)^2
                                +5(r/δ)^3]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:     Vol:            ERRO:
9     8         1        2     0.859758556     0.14024144400
21    16        5        4     0.942352414     0.05764758590
37    24        13       6     0.963702023     0.03629797700
57    32        25       8     0.972837269     0.02716273070
81    40        41       10    0.978079736     0.02192026380
109   48        61       12    0.981550992     0.01844900850
141   56        85       14    0.984045506     0.01595449450
177   64        113      16    0.985934377     0.01406562330
217   72        145      18    0.987417996     0.01258200410
261   80        181      20    0.988614500     0.01138550040
309   88        221      22    0.989603817     0.01039618250
361   96        265      24    0.990432978     0.00956702232
417   104       313      26    0.991140842     0.00885915756
477   112       365      28    0.991748571     0.00825142860
541   120       421      30    0.992281854     0.00771814585
609   128       481      32    0.992748082     0.00725191832
681   136       545      34    0.993160725     0.00683927536
757   144       613      36    0.993529558     0.00647044182
837   152       685      38    0.993861139     0.00613886118
921   160       761      40    0.994159579     0.00584042072
```

Figura 16 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



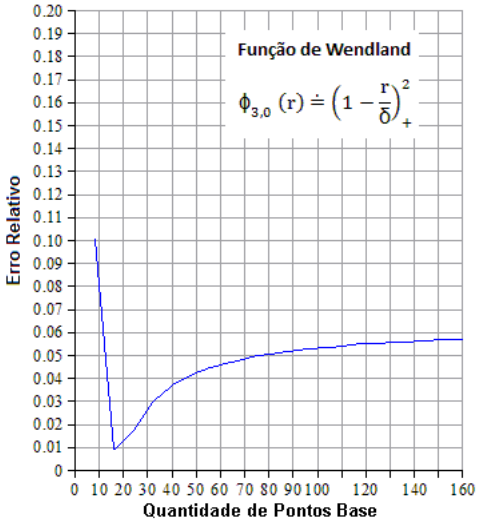

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^4[16+29(r/δ)+...+5(r/δ)^3]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
8     8         0        2    0.842911184   0.15708881600
16    16        0        4    0.947811127   0.05218887330
24    24        0        6    0.976706564   0.02329343560
32    32        0        8    0.989966512   0.01003348830
40    40        0        10   0.997514606   0.00248539448
48    48        0        12   1.002368930   0.00236892700
56    56        0        14   1.005747560   0.00574755669
64    64        0        16   1.008231280   0.00823128223
72    72        0        18   1.010133620   0.01013362410
80    80        0        20   1.011636500   0.01163649560
88    88        0        22   1.012852910   0.01285290720
96    96        0        24   1.013858440   0.01385843750
104   104       0        26   1.014702920   0.01470291610
112   112       0        28   1.015421390   0.01542139050
120   120       0        30   1.016042110   0.01604211330
128   128       0        32   1.016581540   0.01658153530
136   136       0        34   1.017056110   0.01705610750
144   144       0        36   1.017475960   0.01747596260
152   152       0        38   1.017850160   0.01785016060
160   160       0        40   1.018185260   0.01818525790
```

Figura 17 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:(1-r/δ)**2
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.881875992   0.11812400800
21    16        5        4    0.948628664   0.05137133600
37    24        13       6    0.965057194   0.03494280580
57    32        25       8    0.973092079   0.02690792080
81    40        41       10   0.978022933   0.02197706700
109   48        61       12   0.981398284   0.01860171560
141   56        85       14   0.983866632   0.01613336800
177   64        113      16   0.985753357   0.01424664260
217   72        145      18   0.987245917   0.01275408270
261   80        181      20   0.988456011   0.01154398920
309   88        221      22   0.989454508   0.01054549220
361   96        265      24   0.990295112   0.00970488787
417   104       313      26   0.991012335   0.00898766518
477   112       365      28   0.991628528   0.00837147236
541   120       421      30   0.992170930   0.00782907009
609   128       481      32   0.992642760   0.00735723972
681   136       545      34   0.993062735   0.00693726540
757   144       613      36   0.993436396   0.00656360388
837   152       685      38   0.993772209   0.00622779131
921   160       761      40   0.994079411   0.00592058897
```

Figura 18 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^2
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
8     8         0        2    0.899117649   0.10088235100
16    16        0        4    0.990964353   0.00903564692
24    24        0        6    1.017305250   0.01730525490
32    32        0        8    1.029689550   0.02968955040
40    40        0        10   1.036861660   0.03686165810
48    48        0        12   1.041532160   0.04153215890
56    56        0        14   1.044813630   0.04481363300
64    64        0        16   1.047243600   0.04724359510
72    72        0        18   1.049116020   0.04911601540
80    80        0        20   1.050601840   0.05060184000
88    88        0        22   1.051809790   0.05180978780
96    96        0        24   1.052811030   0.05281102660
104   104       0        26   1.053655030   0.05365502830
112   112       0        28   1.054374810   0.05437481400
120   120       0        30   1.054997800   0.05499780180
128   128       0        32   1.055539250   0.05553925040
136   136       0        34   1.056017160   0.05601716040
144   144       0        36   1.056440710   0.05644071100
152   152       0        38   1.056819080   0.05681908130
160   160       0        40   1.057158230   0.05715823170
```

Figura 19 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.

4.4.2 Para o Campo: Função de Franke

Para este campo escalar, as FBRSC's que apresentaram comportamento monótono decrescente estão listadas na Tabela 10:

Tabela 10 - LISTA DE FBRSC $\phi_{l,u}$ QUE APRESENTARAM GRÁFICOS COM MONOTONICIDADE DECRESCENTE.

Função de Wu:	**Função de Wendland:**
$\boldsymbol{\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]}$	$\phi_{1,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+$
	$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$

Dentre as FBRSC's escolhidas, as três funções que apresentaram menores magnitudes de erros relativos, para uma faixa de valores de quantidades de pontos base, foram listadas na Tabela 11.

Tabela 11 - LISTA CONTENDO AS TRÊS MELHORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO.

Colocação	**Família de FBRSC:**	**FBRSC:**
1°	Função de Wu:	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$
2°	Função de Wendland:	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$
3°	Função de Wendland:	$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$

Pode-se verificar que são as mesmas funções eleitas anteriormente nos testes para simulação do volume da função constante.

As duas funções listadas a seguir na Tabela 12 apresentaram os piores comportamentos gráficos, visto que não foram monótonos, devido à presença de variações bruscas na magnitude dos erros relativos, à medida que se refinava a malha.

Tabela 12 - LISTA CONTENDO AS DUAS PIORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO.

Colocação	**Família de FBRSC:**	**FBRSC:**
1°	Função de Wu:	$\phi_{0,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^7 \left[5+35\frac{r}{\delta}+101\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+147\left(\frac{r}{\delta}\right)^3 + 101\left(\frac{r}{\delta}\right)^4+35\left(\frac{r}{\delta}\right)^5+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^6\right]$
2°	Função de Wendland:	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^8 \left[32\left(\frac{r}{\delta}\right)^3+25\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+8\frac{r}{\delta}+1\right]$

Nota-se que as FBRSC's de grau mais elevado novamente apresentaram um comportamento instável, durante os testes da etapa inicial da pesquisa. Portanto, também se verificou, para esse caso, um importante vinculo do comportamento

gráfico monótono da FBRSC com o grau dessas funções, isto é; à medida que se aumentou o grau da FBRSC, aumentou-se também a instabilidade dos resultados dos erros relativos, afastando-a gradativamente do comportamento gráfico monótono decrescente.

Os resultados dos testes para o campo regido pela Função de Franke com as funções listadas na Tabela 11 para a malha exemplificada na Figura 10 foram ruins, pois os erros relativos mantiveram-se em patamares muito elevados, apesar de apresentarem comportamento gráfico monótono decrescente com o refinamento da malha.

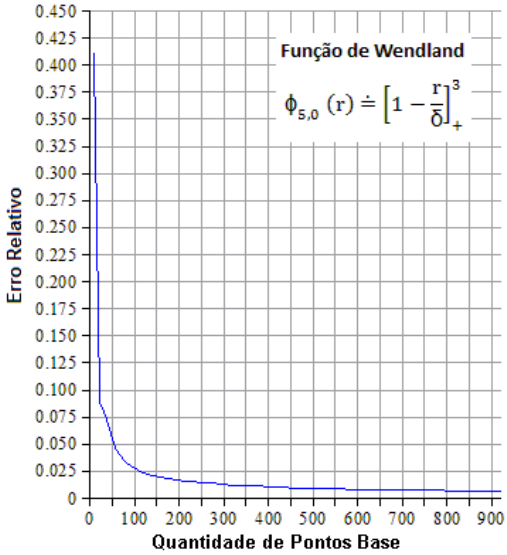
Os erros relativos dos testes das FBRSCs escolhidas como as de melhor desempenho, para a malha em questão (Figura 10) com 144 pontos base, estão listados na Tabela 13:

Tabela 13 - ERRO RELATIVO DAS FBRSC'S ESCOLHIDAS PARA CAMPO Z(X, Y) =1, EM UMA MALHA (FIGURA 5) COM 144 PONTOS BASE.

Função de Wendland:	**Erro Relativo:**
$\boldsymbol{\phi_{3,0}}\ (\mathbf{r}) \doteq \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)_+^{\mathbf{2}}$	0,1826 ou 18,26%
$\boldsymbol{\phi_{5,0}}\ (\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{3}}$	0,2278 ou 22,78%
Função de Wu:	
$\boldsymbol{\phi_{3,3}}\ (\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^{\mathbf{4}} \left[\mathbf{16} + \mathbf{29}\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{20}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^{\mathbf{3}}\right]$	0,2060 ou 20,60%

Para maiores esclarecimentos, serão expostos os gráficos e tabelas a seguir, obtidos durante a compilação do programa de teste das FBRSCs contidas na Tabela 11 para interpolação envolvendo o campo Função de Franke, referentes às malhas que obedecem à estrutura da Figura 9 e a malha que obedecem à estrutura da Figura 10, respectivamente. Do mesmo modo que para a função constante, na Figura 20 é mostrada a curva de desempenho para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com pontos internos e de contorno; na Figura 21, a curva com malha sem pontos internos. Nas Figura 22 e na Figura 23 estão os gráficos similares para a Função de Wu $\phi_{3,3}$, para

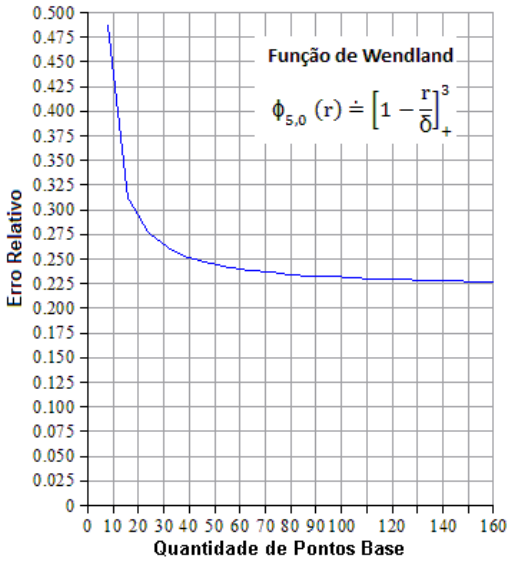
malhas com pontos internos e de contorno e sem pontos internos, respectivamente; na Figura 24 e na Figura 25 estão os gráficos similares para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para malhas com pontos internos e de contorno e sem pontos internos, respectivamente.



RELATORIO:
****
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^3
****
Suporte = 1.42
****
Campo Interpolado: Funcao de Frank
****

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.361371368	0.41166588700
21	16	5	4	0.558873892	0.09011999520
37	24	13	6	0.569519997	0.07278750090
57	32	25	8	0.586052299	0.04587193210
81	40	41	10	0.594009697	0.03291681040
109	48	61	12	0.598456323	0.02567744070
141	56	85	14	0.601268589	0.02109890240
177	64	113	16	0.603206754	0.01794345680
217	72	145	18	0.604626000	0.01563283990
261	80	181	20	0.605711818	0.01386506300
309	88	221	22	0.606570542	0.01246700900
361	96	265	24	0.607267797	0.01133183580
417	104	313	26	0.607845604	0.01039113100
477	112	365	28	0.608332872	0.00959782954
541	120	421	30	0.608750582	0.00891777407
609	128	481	32	0.609111428	0.00833029393
681	136	545	34	0.609427273	0.00781608000
757	144	613	36	0.609706044	0.00736222416
837	152	685	38	0.609952807	0.00696047908
921	160	761	40	0.610174417	0.00659968471

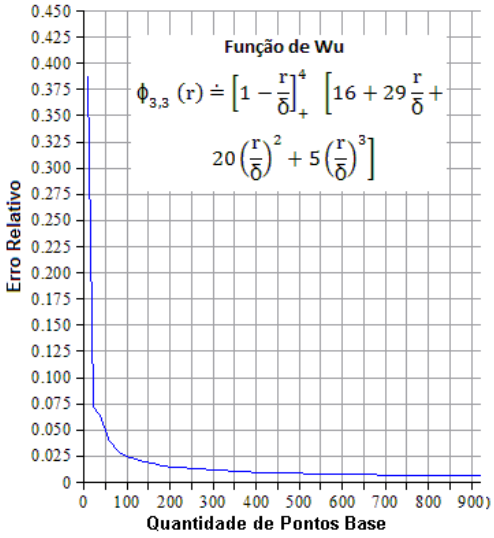
Figura 20 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{5,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



RELATORIO:
****
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^3
****
Suporte = 1.42
****
Campo Interpolado: Funcao de Frank
****

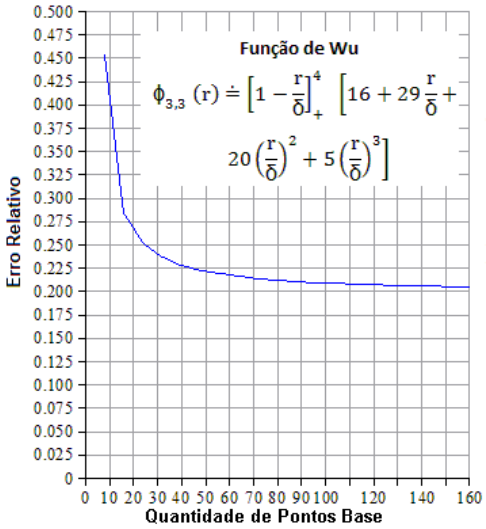
PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
8	8	0	2	0.314873278	0.487367541
16	16	0	4	0.423210382	0.310988277
24	24	0	6	0.444540501	0.276261568
32	32	0	8	0.454369694	0.260259062
40	40	0	10	0.459920675	0.251221746
48	48	0	12	0.463461339	0.245457321
56	56	0	14	0.465907335	0.241475090
64	64	0	16	0.467694968	0.238564715
72	72	0	18	0.469057024	0.236347213
80	80	0	20	0.470128596	0.234602630
88	88	0	22	0.470993072	0.233195215
96	96	0	24	0.471704990	0.232036158
104	104	0	26	0.472301513	0.231064990
112	112	0	28	0.472808182	0.230240107
120	120	0	30	0.473244369	0.229529962
128	128	0	32	0.473623335	0.228912979
136	136	0	34	0.473955780	0.228371739
144	144	0	36	0.474249780	0.227893099
152	152	0	38	0.474511415	0.227467135
160	160	0	40	0.474745959	0.227085292

Figura 21 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{5,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.



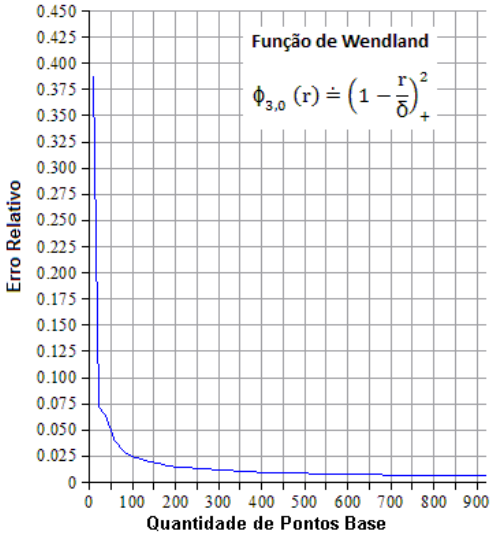

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^4[16+29(r/δ)+...+5(r/δ)^3]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.376030147   0.38780051500
21    16        5        4    0.569873691   0.07221166790
37    24        13       6    0.574354768   0.06491620840
57    32        25       8    0.588979304   0.04110659290
81    40        41       10   0.596014440   0.02965297180
109   48        61       12   0.599951386   0.02324338820
141   56        85       14   0.602452874   0.01917081700
177   64        113      16   0.604184985   0.01635083740
217   72        145      18   0.605459571   0.01427573620
261   80        181      20   0.606438518   0.01268195270
309   88        221      22   0.607214987   0.01141781360
361   96        265      24   0.607847631   0.01038783140
417   104       313      26   0.608373284   0.00953203626
477   112       365      28   0.608817339   0.00880908966
541   120       421      30   0.609197736   0.00818978064
609   128       481      32   0.609527409   0.00765305292
681   136       545      34   0.609814644   0.00718541769
757   144       613      36   0.610070407   0.00676901918
837   152       685      38   0.610296190   0.00640143221
921   160       761      40   0.610500515   0.00606877916
```

Figura 22 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi_{3,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



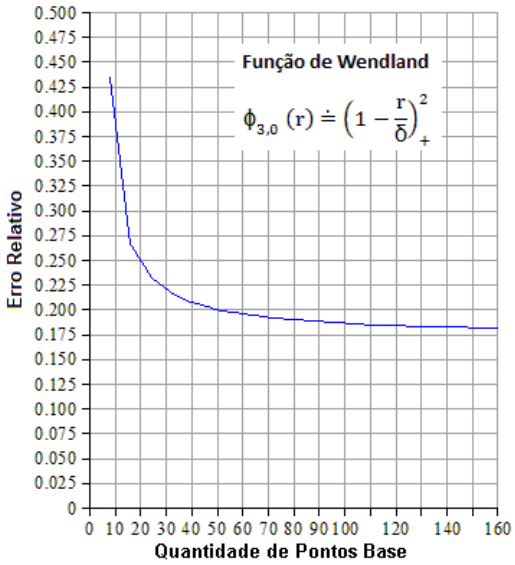

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:([1-(r/δ)]^4[16+29(r/δ)+...+5(r/δ)^3]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
8     8         0        2    0.334878623   0.454797655
16    16        0        4    0.440409273   0.282987446
24    24        0        6    0.459749550   0.251500338
32    32        0        8    0.468845278   0.236691952
40    40        0        10   0.474038035   0.228237823
48    48        0        12   0.477376014   0.222803399
56    56        0        14   0.479695916   0.219026461
64    64        0        16   0.481399179   0.216253445
72    72        0        18   0.482702255   0.214131966
80    80        0        20   0.483730555   0.212457836
88    88        0        22   0.484562516   0.211103350
96    96        0        24   0.485249341   0.209985152
104   104       0        26   0.485825807   0.209046632
112   112       0        28   0.486316651   0.208247513
120   120       0        30   0.486739218   0.207559541
128   128       0        32   0.487107456   0.206960037
136   136       0        34   0.487430304   0.206434414
144   144       0        36   0.487716675   0.205968186
152   152       0        38   0.487971604   0.205553144
160   160       0        40   0.488200575   0.205180362
```

Figura 23- Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^2
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.374741584   0.38989836000
21    16        5        4    0.564080536   0.08164326850
37    24        13       6    0.570275247   0.07155790930
57    32        25       8    0.585880995   0.04615082590
81    40        41       10   0.593580604   0.03361540290
109   48        61       12   0.597961187   0.02648355070
141   56        85       14   0.600771725   0.02190782870
177   64        113      16   0.602732956   0.01871482660
217   72        145      18   0.604181588   0.01635636950
261   80        181      20   0.605298519   0.01453793790
309   88        221      22   0.606187344   0.01309087870
361   96        265      24   0.606909692   0.01191485210
417   104       313      26   0.607514262   0.01093057640
477   112       365      28   0.608020425   0.01010651330
541   120       421      30   0.608457088   0.00939559843
609   128       481      32   0.608835936   0.00877881330
681   136       545      34   0.609167099   0.00823965948
757   144       613      36   0.609460056   0.00776270777
837   152       685      38   0.609720051   0.00733941980
921   160       761      40   0.609951317   0.00696290517
```

Figura 24- Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^2
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
8     8         0        2    0.346525788   0.435835361
16    16        0        4    0.450990170   0.265761137
24    24        0        6    0.471383244   0.232559994
32    32        0        8    0.481152654   0.216654807
40    40        0        10   0.486809164   0.207445666
48    48        0        12   0.490482599   0.201465100
56    56        0        14   0.493055314   0.197276562
64    64        0        16   0.494955361   0.194183171
72    72        0        18   0.496415943   0.191805258
80    80        0        20   0.497572958   0.189921573
88    88        0        22   0.498512000   0.188392758
96    96        0        24   0.499289215   0.187127396
104   104       0        26   0.499943316   0.186062485
112   112       0        28   0.500501037   0.185154483
120   120       0        30   0.500982225   0.184371084
128   128       0        32   0.501401961   0.183687732
136   136       0        34   0.501771152   0.183086663
144   144       0        36   0.502098262   0.182554111
152   152       0        38   0.502389908   0.182079285
160   160       0        40   0.502651811   0.181652904
```

Figura 25 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.

O nível de erro relativo ainda mais baixo produzido pelas melhores FBRSCs no cálculo do volume demonstra o bom desempenho do esquema de integração no contorno proposto.

Vale ressaltar que, embora não tenham sido mostrados seis gráficos de desempenho, as piores funções apresentaram uma instabilidade no seu comportamento numérico ainda mais forte do que no teste anterior (Ver APÊNDICE

C -). Experiências com a ausência de pólos internos também apresentam um comportamento diferente em comparação com a função anterior. Agora, os erros diminuíram monotonicamente (Figura 21, Figura 23 e Figura 25) até chegar a um valor estacionário; no entanto, estes erros são muito mais elevados do que os valores obtidos incluindo pontos internos.

4.4.3 Para o Campo Paraboloide

Para o campo paraboloide: $Z(x,y) = (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2$, a FBRSC que apresentou comportamento monótono decrescente está listada na Tabela 14:

Tabela 14 - LISTA DE FBRSC $\phi_{l,u}$ QUE APRESENTARAM GRÁFICOS COM MONOTONICIDADE DECRESCENTE.

Função de Wendland:
$\boldsymbol{\phi_{1,1}}(\mathbf{r}) \doteq \left[\mathbf{1}-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^3 \left[\mathbf{1}+\mathbf{3}\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]$

Apesar de as demais FBRSC's escolhidas pelos seus menores erros relativos não apresentarem comportamento monótono (todas tiveram uma espécie de mínimo relativo para a malha com 50 pontos base), a magnitude dos erros relativos, verificados nos gráficos, mantiveram-se estabilizados num patamar muito pequeno. Então, é aceitável a escolha dessas FBRSC's em detrimento às demais funções, a fim de que seja possível a seleção de um único grupo de FBRSC's, para os três campos apresentados no trabalho, que contenham as três melhores FBRSC's em termos de comportamento gráfico e magnitude dos erros relativos. Veja Tabela 15.

Tabela 15 - LISTA CONTENDO AS TRÊS MELHORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO.

Colocação	**Família de FBRSC:**	**FBRSC:**
1°	Função de Wendland:	$\phi_{5,0}\,(r) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^3$
2°	Função de Wu:	$\phi_{3,3}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$
3°	Função de Wendland:	$\phi_{3,0}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$

Mais uma vez, foram eleitas como melhores neste teste as mesmas funções escolhidas nos testes anteriores. As duas FBRSC's listadas a seguir na Tabela 16 apresentaram os piores comportamentos gráficos, visto que não foram monótonos, devido à presença de variações bruscas na magnitude dos erros relativos, à medida que se refinava a malha.

Tabela 16 - LISTA CONTENDO AS DUAS PIORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO.

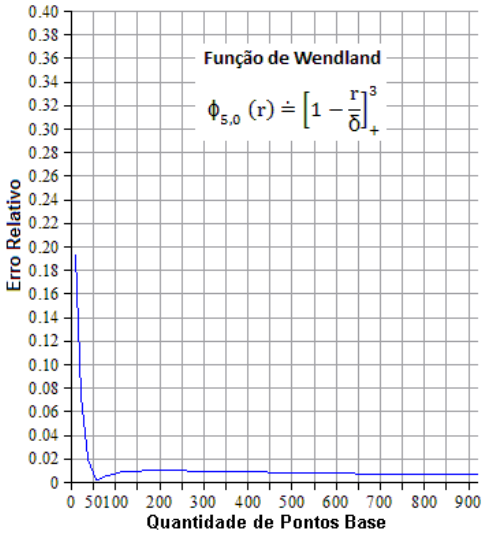
Colocação	**Família de FBRSC:**	**FBRSC:**
1°	Função de Wu:	$\phi_{0,3}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^7 \left[5+35\frac{r}{\delta}+101\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+147\left(\frac{r}{\delta}\right)^3 + 101\left(\frac{r}{\delta}\right)^4+35\left(\frac{r}{\delta}\right)^5+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^6\right]$
2°	Função de Wendland:	$\phi_{3,2}\,(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^6 \left(35\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+18\frac{r}{\delta}+3\right)$

Nota-se que as FBRSC's de grau mais elevado também apresentaram um comportamento instável para esse campo, durante os testes da etapa inicial da pesquisa. Portanto, verificou-se um importante vínculo do comportamento gráfico monótono da FBRSC com o grau dessa função, isto é; à medida que se aumentou o grau da FBRSC, aumentou-se também a instabilidade dos resultados dos erros

relativos, afastando-a gradativamente do comportamento gráfico monótono decrescente desejado.

Para as FBRSC's listadas na Tabela 15, também foram desenvolvidos testes envolvendo malhas de interpolação que possuem pontos somente no contorno, com o objetivo de investigar o comportamento dessas funções para tais tipos de malha. Os resultados desses testes para o campo paraboloide, mesmo com as melhores FBRSC's (listadas na Tabela 15) foram ruins, pois os erros relativos mantiveram-se em patamares elevadíssimos, além de apresentar comportamento gráfico monótono crescente, à medida que se refinava a malha de interpolação em questão.

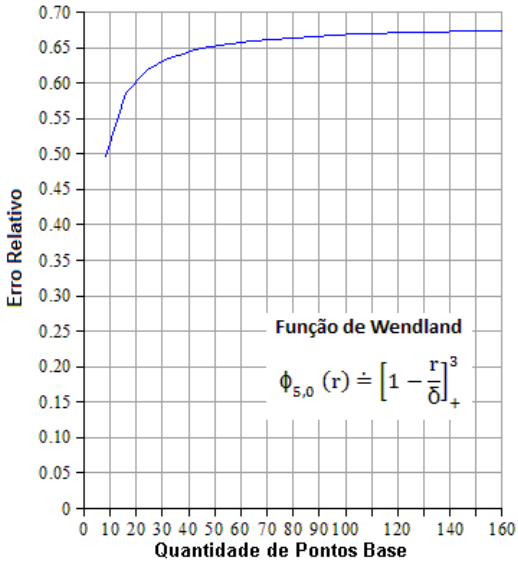
Para maiores esclarecimentos, serão expostos os gráficos e tabelas a seguir, obtidos durante a compilação do programa de teste das FBRSC's contidas na Tabela 15 para interpolação envolvendo o campo paraboloide, referentes às estruturas de malha dadas na Figura 9 e às dadas na malha da Figura 10, respectivamente.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^3
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.198985994	0.19391593300
21	16	5	4	0.178964347	0.07378605010
37	24	13	6	0.170022815	0.02013686300
57	32	25	8	0.166941673	0.00165000558
81	40	41	10	0.165730909	0.00561457872
109	48	61	12	0.165228501	0.00862902403
141	56	85	14	0.165029734	0.00982162356
177	64	113	16	0.164970085	0.01017951970
217	72	145	18	0.164977536	0.01013481620
261	80	181	20	0.165017769	0.00989341736
309	88	221	22	0.165073663	0.00955805182
361	96	265	24	0.165134817	0.00919112563
417	104	313	26	0.165198877	0.00880676508
477	112	365	28	0.165260449	0.00843733549
541	120	421	30	0.165320605	0.00807639956
609	128	481	32	0.165376857	0.00773888826
681	136	545	34	0.165432215	0.00740674138
757	144	613	36	0.165479571	0.00712260604
837	152	685	38	0.165525675	0.00684598088
921	160	761	40	0.165571496	0.00657105446

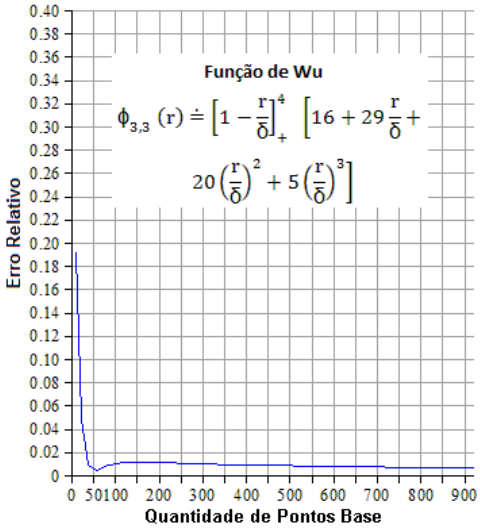
Figura 26 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{5,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



RELATORIO:
****
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^3
****
Suporte = 1.42
****
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
****

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
8	8	0	2	0.249139071	0.494834393
16	16	0	4	0.264301896	0.585811317
24	24	0	6	0.269673139	0.618038774
32	32	0	8	0.272395492	0.634372890
40	40	0	10	0.274038374	0.644230187
48	48	0	12	0.275136828	0.650820911
56	56	0	14	0.275923193	0.655539095
64	64	0	16	0.276513726	0.659082294
72	72	0	18	0.276973456	0.661840677
80	80	0	20	0.277341574	0.664049387
88	88	0	22	0.277642995	0.665857911
96	96	0	24	0.277894139	0.667364776
104	104	0	26	0.278107077	0.668642402
112	112	0	28	0.278289169	0.669734955
120	120	0	30	0.278447598	0.670685530
128	128	0	32	0.278585732	0.671514332
136	136	0	34	0.278708041	0.672248185
144	144	0	36	0.278816581	0.672899425
152	152	0	38	0.278913826	0.673482895
160	160	0	40	0.279000700	0.674004138

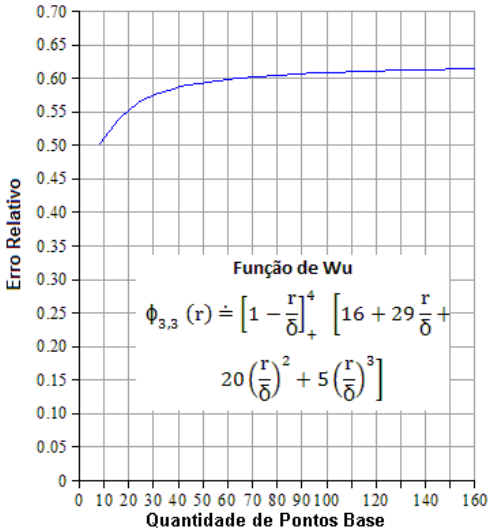
Figura 27 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Paraboloide e Função de Wendland $\phi_{5,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.



RELATORIO:
****
Radial Compacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^4[16+29(r/δ)+...+5(r/δ)^3]
****
Suporte = 1.42
****
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
****

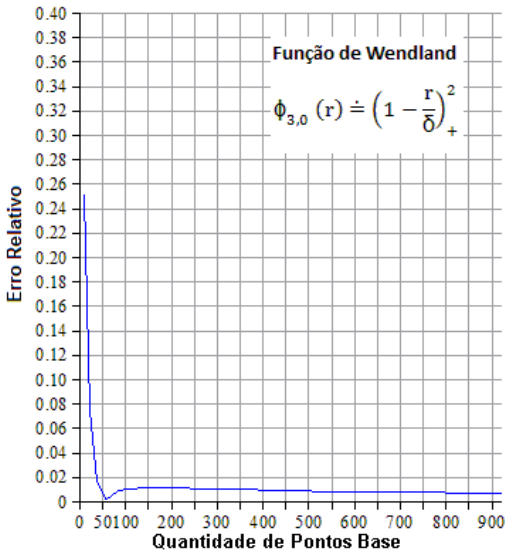
PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.198783547	0.19270125000
21	16	5	4	0.174826592	0.04895952340
37	24	13	6	0.168197930	0.00918754935
57	32	25	8	0.165958002	0.00425201654
81	40	41	10	0.165124491	0.00925308466
109	48	61	12	0.164820701	0.01107582450
141	56	85	14	0.164737448	0.01157534120
177	64	113	16	0.164751098	0.01149344440
217	72	145	18	0.164807722	0.01115369800
261	80	181	20	0.164883509	0.01069897410
309	88	221	22	0.164963156	0.01022109390
361	96	265	24	0.165043980	0.00973615050
417	104	313	26	0.165121168	0.00927302241
477	112	365	28	0.165194318	0.00883412361
541	120	421	30	0.165263027	0.00842186809
609	128	481	32	0.165328190	0.00803089142
681	136	545	34	0.165386319	0.00768211484
757	144	613	36	0.165441588	0.00735050440
837	152	685	38	0.165492326	0.00704607368
921	160	761	40	0.165539488	0.00676310062

Figura 28 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Paraboloide e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



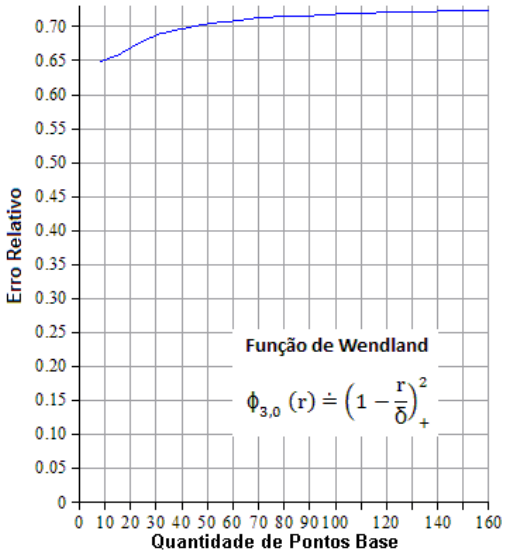

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^4[16+29(r/δ)+...+5(r/δ)^3]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:            ERRO:
8     8         0        2    0.250109285     0.500655651
16    16        0        4    0.256631017     0.539786041
24    24        0        6    0.260756582     0.564539433
32    32        0        8    0.263054967     0.578329742
40    40        0        10   0.264494777     0.586968601
48    48        0        12   0.265477508     0.592864990
56    56        0        14   0.266190588     0.597143471
64    64        0        16   0.266730726     0.600384295
72    72        0        18   0.267154694     0.602928102
80    80        0        20   0.267495632     0.604973733
88    88        0        22   0.267776251     0.606657445
96    96        0        24   0.268010914     0.608065426
104   104       0        26   0.268210173     0.609260976
112   112       0        28   0.268381417     0.610288441
120   120       0        30   0.268530309     0.611181796
128   128       0        32   0.268660843     0.611965001
136   136       0        34   0.268776178     0.612657011
144   144       0        36   0.268879205     0.613275170
152   152       0        38   0.268971026     0.613826096
160   160       0        40   0.269053578     0.614321411
```

Figura 29 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação paraboloide e Função de Wu $\phi_{3,3}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^2
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:            ERRO:
9     8         1        2    0.208652169     0.25191298100
21    16        5        4    0.179118991     0.07471391560
37    24        13       6    0.169354647     0.01612785460
57    32        25       8    0.166328728     0.00202766061
81    40        41       10   0.165238544     0.00856876373
109   48        61       12   0.164835885     0.01098471880
141   56        85       14   0.164711133     0.01173323390
177   64        113      16   0.164706215     0.01176273820
217   72        145      18   0.164756745     0.01145955920
261   80        181      20   0.164828241     0.01103058460
309   88        221      22   0.164909795     0.01054126020
361   96        265      24   0.164990991     0.01005408170
417   104       313      26   0.165069938     0.00958040357
477   112       365      28   0.165145695     0.00912585855
541   120       421      30   0.165217191     0.00869688392
609   128       481      32   0.165283471     0.00829920173
681   136       545      34   0.165343970     0.00793620944
757   144       613      36   0.165400118     0.00759932399
837   152       685      38   0.165451974     0.00728818774
921   160       761      40   0.165501237     0.00699260831
```

Figura 30 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



RELATORIO:
****
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^2
****
Suporte = 1.42
****
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
****

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
8	8	0	2	0.274717987	0.648307860
16	16	0	4	0.276579410	0.659476399
24	24	0	6	0.279677093	0.678062499
32	32	0	8	0.281620741	0.689724386
40	40	0	10	0.282912314	0.697473824
48	48	0	12	0.283825636	0.702953756
56	56	0	14	0.284504533	0.707027137
64	64	0	16	0.285027593	0.710165501
72	72	0	18	0.285443276	0.712659597
80	80	0	20	0.285781115	0.714686632
88	88	0	22	0.286061287	0.716367662
96	96	0	24	0.286297143	0.717782795
104	104	0	26	0.286498696	0.718992114
112	112	0	28	0.286672175	0.720032990
120	120	0	30	0.286824375	0.720946193
128	128	0	32	0.286957413	0.721744418
136	136	0	34	0.287076056	0.722456276
144	144	0	36	0.287181705	0.723090172
152	152	0	38	0.287276506	0.723658979
160	160	0	40	0.287362009	0.724171996

Figura 31 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,0}$, com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui somente pontos no contorno.

Vale ressaltar que os erros mínimos encontrados na simulação do paraboloide foram da ordem de um pouco menos de 1% nas malhas mais ricas, excluindo o valor mínimo relativo encontrado para 50 pontos base nas malhas com pontos internos e de contorno.

Para as três FBRSC's aproximadas pela interpolação com a técnica de contorno proposta, as mesmas FBRSC's tiveram o melhor desempenho, entre as diversas testadas. A faixa de erro mínimo alcançada com o refinamento foi bastante satisfatória, ratificando a consistência do procedimento proposto.

4.5 RESULTADOS DOS TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME PARA FBRSC COM VARIAÇÃO DO SUPORTE E SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES

Os testes a seguir visam avaliar o comportamento numérico do procedimento de integração do contorno considerando a variação do suporte. Há uma expectativa de se encontrar um limite mínimo do suporte, tal como se observa nos casos de interpolação tradicional, em que não se usa o esquema de integração no contorno.

Naturalmente, este valor mínimo deve ser maior, devido às aproximações introduzidas pelo uso de funções primitivas auxiliares. Foram escolhidas as mesmas FBRSC's que tiveram melhor desempenho com suporte pleno. Para avaliação do comportamento de cada FBRSC, agora foram empregadas três novas malhas de interpolação com seus pontos regularmente distribuídos no domínio D_k: Malhas com 121, 441 e 961 pontos base. As malhas aplicadas aos testes seguem o padrão das duas malhas presentes na Figura 32.

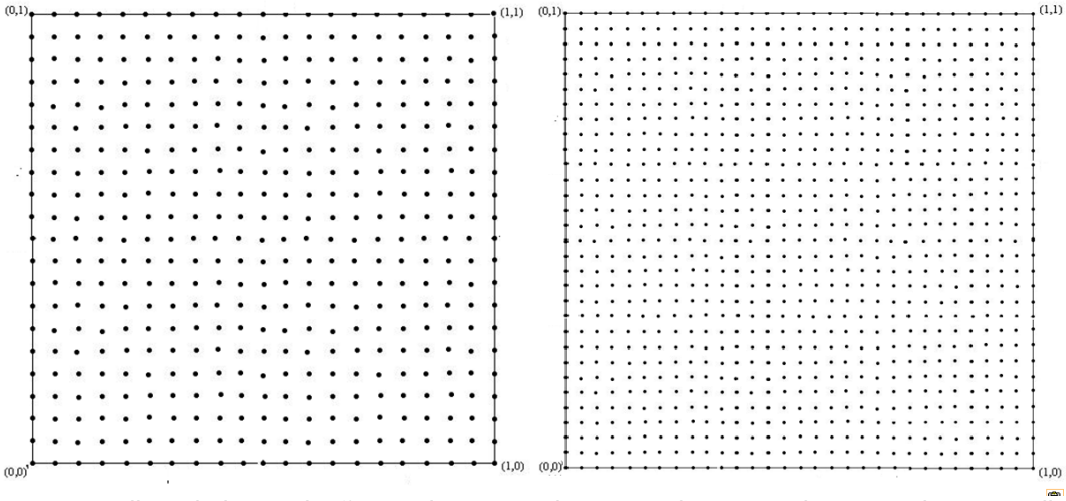


Figura 32 – Malhas de interpolação regular contendo, respectivamente da esquerda para a direita, 441 pontos e 961 pontos.

Foram feitos teste bidimensionais com volume, sob o molde da Formulação MECIC, com e sem ajuste de pontos interpolantes para aquelas FBRSC's pré-selecionadas com quatro campos escalares distintos: o campo constante $\mathrm{Z(X,Y)} = 1$; o campo paraboloide $\mathrm{Z(X,Y)} = (\mathrm{x} - 0.5)^2 + (\mathrm{y} - 0.5)^2 + 0{,}25$; o campo exponencial $\mathrm{Z(X,Y)} = \mathrm{e}^{3\mathrm{x}-3}\mathrm{e}^{3\mathrm{y}-3} + 0,25$ e o campo Função de Franke.

Em relação à viabilidade da aplicação desses tipos de testes para avaliação do desempenho das FBRSC's no processo de interpolação simples, veja no APÊNDICE G -as superfícies analíticas (real) e interpoladas dos referidos campos.

Observa-se uma modificação no campo paraboloide desta seção, em relação ao Campo Paraboloide dos testes bidimensionais com volumes para seleção das FBRSC's na seção anterior. A função que rege o Campo Paraboloide foi transladada para cima somando-se uma constante de 0.25, propositalmente introduzida para que ela não apresentasse o valor nulo (Z(x,y) =0), algo que se verificou causar algum

transtorno ao calcular o volume. Desse modo também não ocorrerão valores negativos produzidos por oscilações da curva interpolada.

Para os testes bidimensionais com volume, modifica-se a abrangência de cada FBRSC com a variação do seu suporte. Define-se "$\mathrm{d_i}$" como o comprimento do elemento linear utilizado na discretização do contorno do domínio D_k. Isto é, "$\mathrm{d_i}$" representa a menor distância entre dos pontos base na malha de interpolação. Já o símbolo "δ", contido na Figura 33, é definido com sendo o Suporte Global, ou comumente chamado de pleno das FBRSC para cada malha de interpolação, e possui o valor de 1.4142.

Para a Malha 1 com 121 pontos base, d_1 é igual a 0.100; para a Malha 2 com 441 pontos base, d_2 é igual a 0.050; e para a Malha 3 com 961 pontos base, d_3 é igual a 0.033.

Variou-se o suporte da função de: d_1 até δ, para a Malha 1 com 121 pontos base; d_2 até δ, para a Malha 2 com 441 pontos base; e d_3 até δ, para a Malha 3 com 961 pontos base. Além do mais, o intervalo entre cada suporte compacto é de d_1, d_2 e d_3, respectivamente.

Devido aos valores elevados dos erros relativos, os gráficos de erro relativo vs. suporte compacto não contemplam valores de suporte compactos muito pequenos. Dessa forma, é possível manter a escala do gráfico num patamar que não prejudique a sua interpretação, isto é, limitou-se o eixo dos erros relativos em 90%.

Após uma análise gráfica dos resultados obtidos com as FBRSC's, para todos os campos escalares analisados durantes os testes bidimensionais com volume com suporte variável, verificou-se que os valores dos erros relativos percentuais, a partir dos quais esses erros aumentavam abruptamente, está em torno de 3,5%. Se fosse traçado uma reta paralela ao eixo das abscissas para esse valor de erro relativo, haveria ocasiões em que interceptaria o gráfico dos resultados na região de crescimento suave desses erros. Dessa forma, obter-se-ia, em alguns casos, um suporte otimizado próximo do valor do suporte pleno, mas não significaria que o desenho da FBRSC em questão é ruim. Assim, inevitavelmente, algumas funções FBRSC's seriam beneficiadas em detrimento das demais avaliadas.

A fim de comparar o desempenho das FBRSC's entre si durantes os testes bidimensionais com volume, selecionou-se um patamar de erro relativo percentual (7,0%) que englobasse toda a porção da curva de erro relativo Vs. quantidade de pontos base com um crescimento suave dos erros relativos e, inclusive, a porção dessa curva onde se verificou o início do crescimento abrupto desses erros.

Veja o caso do teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos interpolantes da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para o Campo Função de Franke com uma malha regular de 961 pontos base (Figura 33), a fim de compreender melhor como foram obtidos os valores dos suportes otimizados, contidos na Tabela 17.

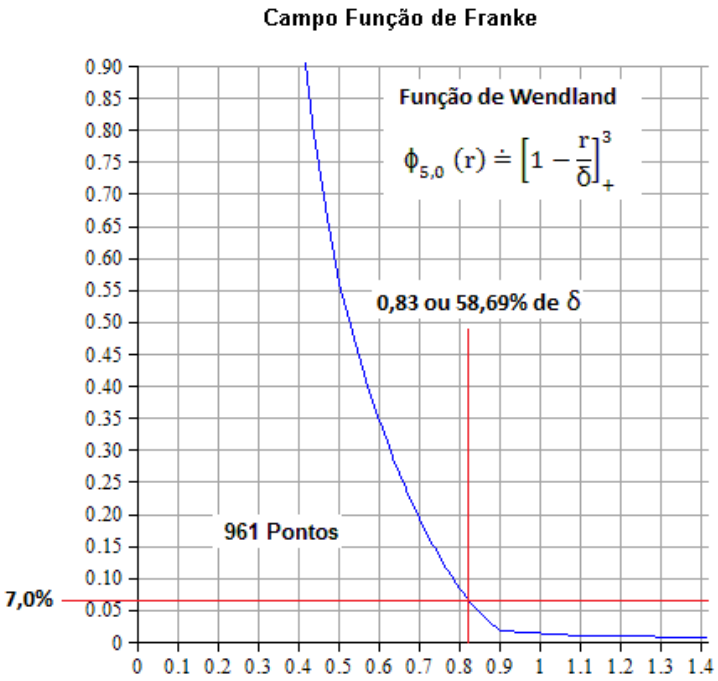


Figura 33 – Obtenção do valor do suporte otimizado da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para o Campo Função de Franke com uma malha regular de 961 pontos base, a partir do teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos interpolantes.

Para sintetizar as informações fornecidas nos gráficos a seguir, apresenta-se a Tabela 17, na qual se buscou destacar um valor de erro mínimo comum a todas as experiências com os campos escalares, de modo a permitir uma melhor qualificação do comportamento do método em todas as situações.

Tabela 17 - RELAÇÃO DE SUPORTES OTIMIZADOS OBTIDOS A PARTIR DO TESTE BIDIMENSIONAL COM VOLUME SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES, PARA CADA MALHA DE INTERPOLAÇÃO CONSIDERADA E PARA CADA FBRSC ESCOLHIDA NA ETAPA ANTERIOR.

Tabela de Suportes Otimizados - Testes com Volume sem Ajuste de Pontos						
FBRSC	Suporte Compacto	Porcentagem do Suporte Global	Suporte Compacto	Porcentagem do Suporte Global	Suporte Compacto	Porcentagem do Suporte Global
	Malha 1		Malha 2		Malha 3	
	Campo de Interpolação Constante					
$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	0,9800	69,30% de δ	0,9300	65,76% de δ	0,8600	60,81% de δ
$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	0,8600	60,81% de δ	0,9300	65,76% de δ	0,8500	60,11% de δ
$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$	0,8700	61,52% de δ	0,9600	67,88% de δ	0,8700	61,52% de δ
	Campo de Interpolação Exponencial					
$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	0,8800	62,23% de δ	0,9300	65,76% de δ	0,8800	62,23% de δ
$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	0,8700	61,52% de δ	1,0500	74,25% de δ	0,8800	62,23% de δ
$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$	0,9000	63,64% de δ	0,9700	68,59% de δ	0,9000	63,64% de δ
	Campo de Interpolação Função de Franke					
$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	0,9000	63,64% de δ	0,8000	56,57% de δ	0,8300	58,69% de δ
$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	0,9000	63,64% de δ	0,8700	61,52% de δ	0,8100	57,28% de δ
$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$	0,9400	66,45% de δ	1,0600	74,95% de δ	0,8100	58,69% de δ
	Campo de Interpolação Paraboloide					
$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	0,9000	63,64% de δ	1,1200	79,20% de δ	0,9100	64,35% de δ
$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	0,9000	63,64% de δ	1,1200	79,20% de δ	0,9000	63,64% de δ
$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$	1,1900	84,15% de δ	1,1500	81,32% de δ	1,1000	77,78% de δ

Seguem então os gráficos obtidos a partir das simulações com as FBRSC para campos escalares selecionados.

4.5.1 Resultados para o Campo Constante

Nos gráficos da Figura 34 são apresentadas as curvas de erro relativo para o cálculo do volume para o campo constante, usando as três funções selecionadas, para as três malhas com diferentes graus de refinamento. O valor do suporte foi reduzido gradativamente a partir do valor global. Percebe-se a melhor definição da curva de erro com o refinamento. Destaca-se que na malha mais rica fica bem nítida a identificação de um valor a partir do qual os erros crescem significativamente.

A Figura 34, a Figura 35 e a Figura 36 ilustram o comportamento da curva de erro relativo.

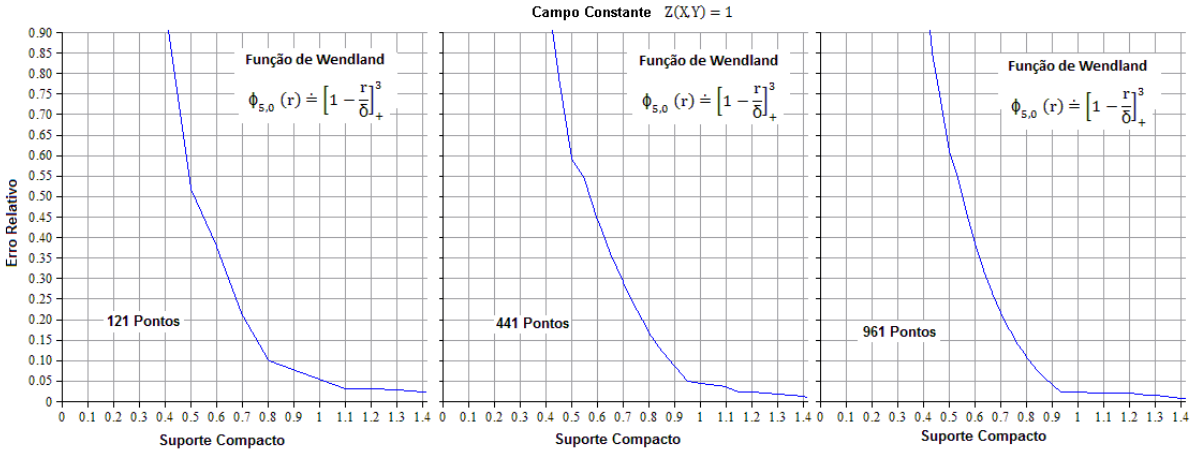


Figura 34 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante.

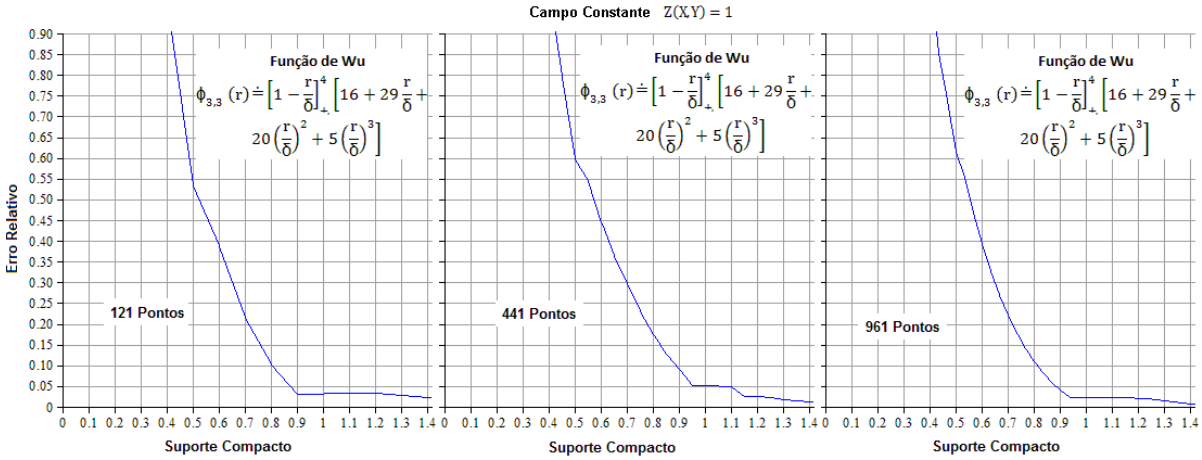


Figura 35 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante.

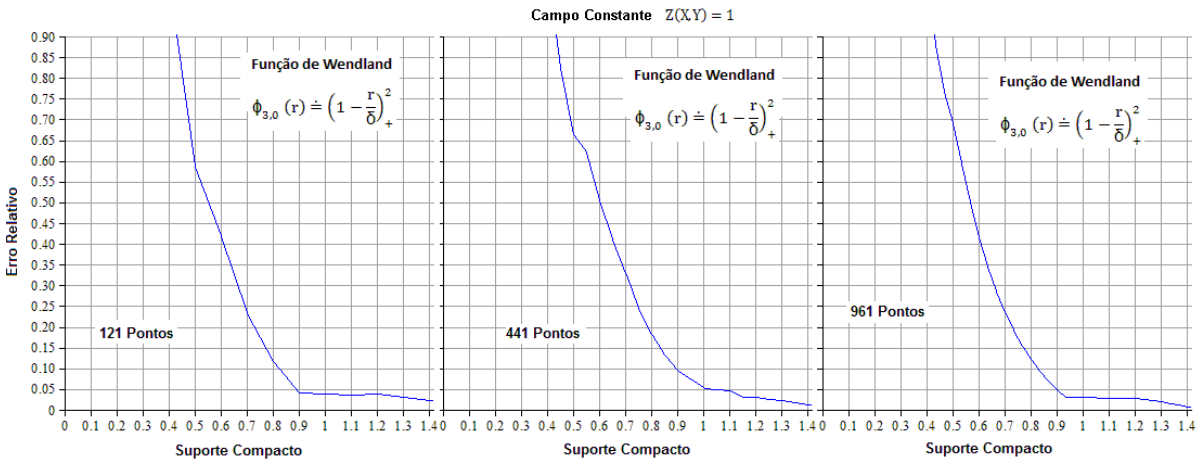


Figura 36 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante.

O resultado foi muito semelhante para todas as FBRSCs, particularmente na definição do patamar de suporte mínimo mais eficiente.

4.5.2 Resultados para o Campo Função de Franke

A seguir são apresentados testes análogos aos anteriores no cálculo do volume da superfície gerada pela Função de Franke, com variação do suporte. A Figura 37, a Figura 38 e a Figura 39 ilustram o comportamento da curva de erro relativo.

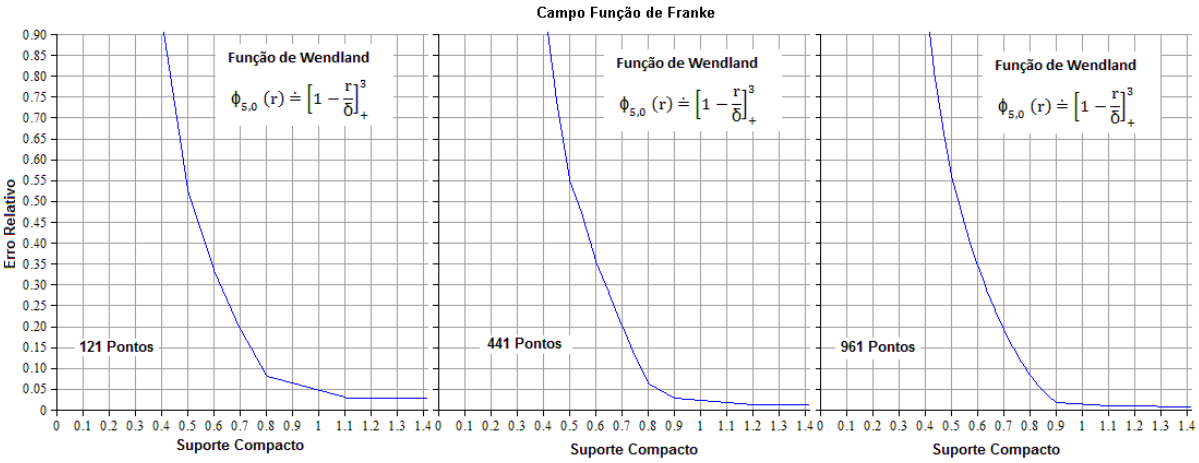


Figura 37 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke.

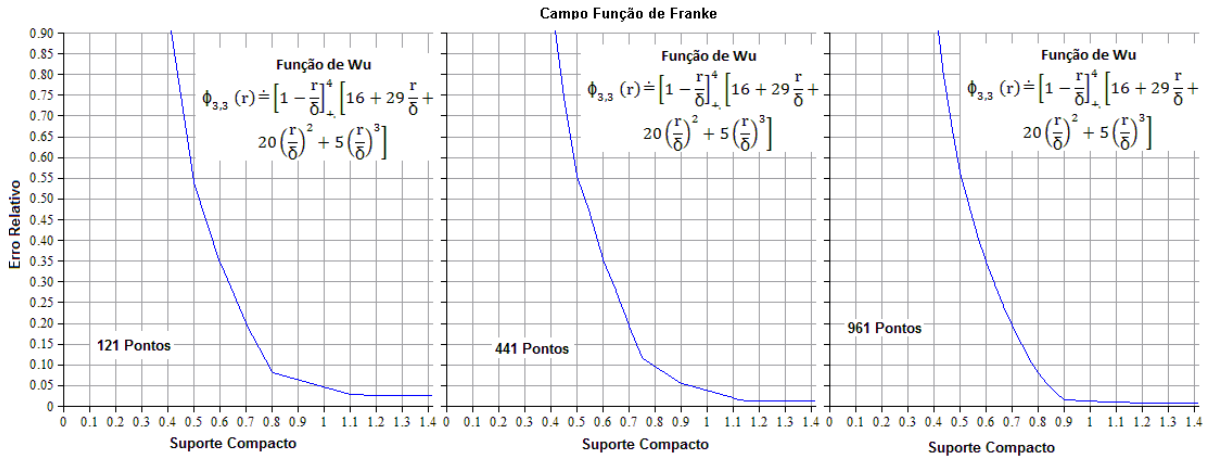


Figura 38 -– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke.

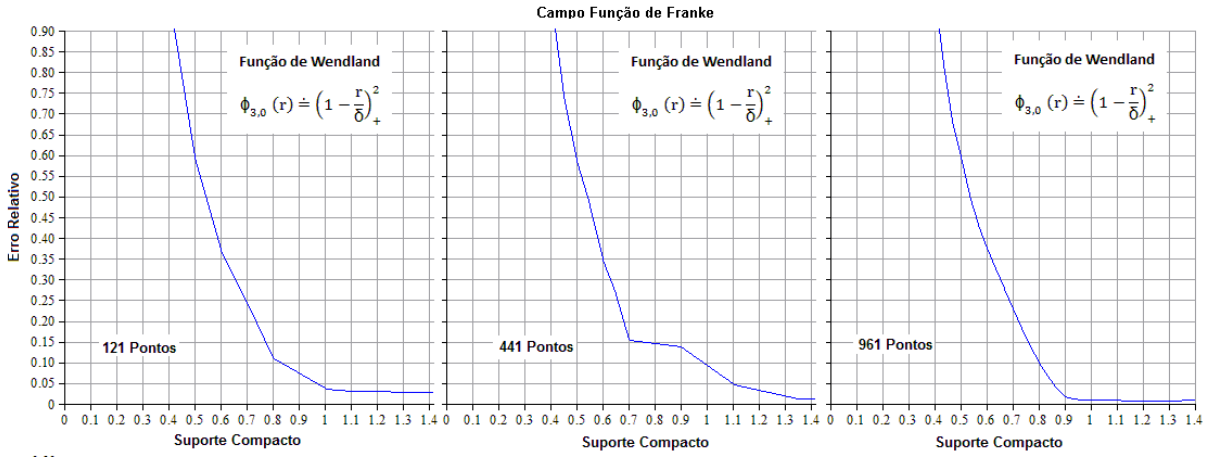


Figura 39 - Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke.

Com exceção do comportamento da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para a malha com 441 pontos interpolantes, todas as demais FBRSCs apresentaram comportamento similar, com curvas de erro que apresentam um patamar bem definido. Então, a partir de certo valor do suporte, os valores de erro decrescem de modo mais suave.

4.5.3 Resultados para o Campo Paraboloide

A seguir são apresentados testes no cálculo do volume da superfície gerada pelo paraboloide. Os gráficos da Figura 40, da Figura 41 e da Figura 42 seguem o mesmo padrão anterior, no qual se varia o suporte para cada malha resolvida.

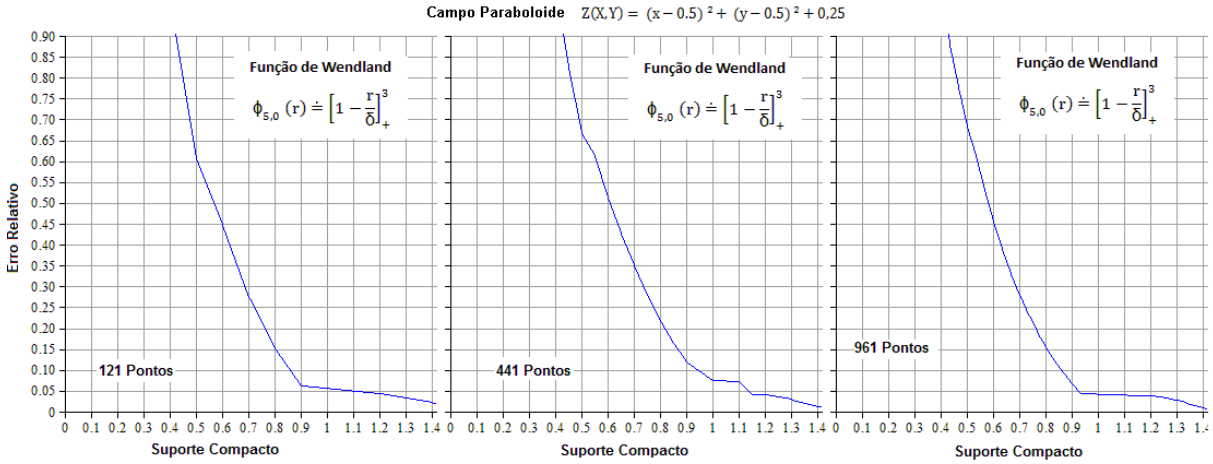


Figura 40 - Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide.

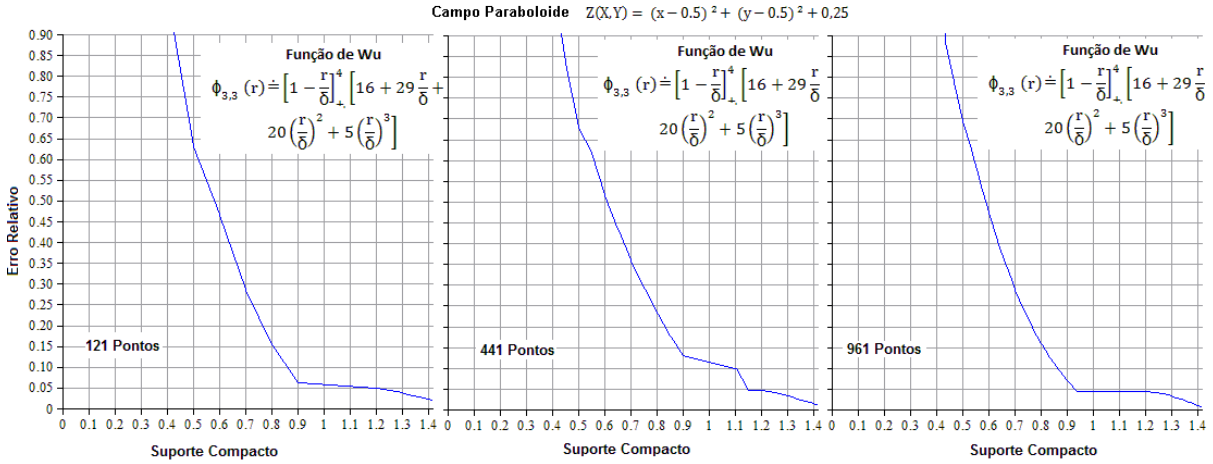


Figura 41 - Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide.

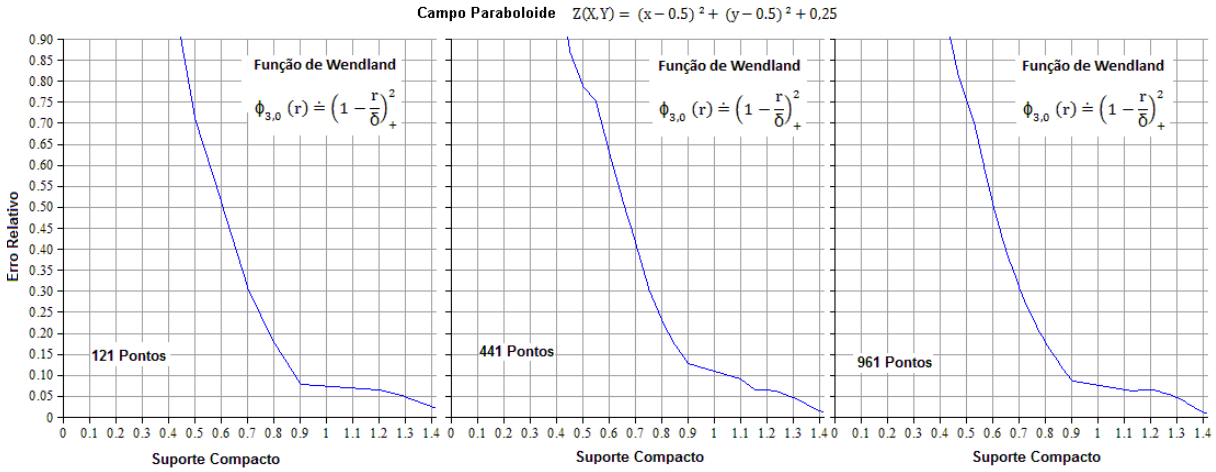


Figura 42 - Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide.

Para o Campo Parabolóide, o padrão das curvas distinguiu-se dos demais. O patamar a partir do qual os erros declinam relativamente menos com o aumento do valor do suporte existe, mas não mais é tão suave como foi para o Campo Função de Franke e para o Campo Constante. Isto para todas as FBRSC's agora testadas.

Curiosamente, os valores obtidos com a malha intermediária (441 pontos) foram relativamente piores do que a menos refinada, sem uma razão definida. Nos testes anteriores já tinha sido percebido que a simulação do Campo Paraboloide era numericamente mais imprecisa do que a simulação do Campo Função de Franke e a do Campo Constante. Nestes testes, este comportamento ficou mais evidente.

Para dirimir dúvidas quanto à capacidade do método em simular superfícies que sejam mais complexas, é calculado o volume para um Campo Exponencial nos testes a seguir, visto que é sabidamente mais complexa de se interpolar por conta da presença de valores mais díspares no domínio.

4.5.4 Resultados para o Campo Exponencial

Seguindo o mesmo modelo dos testes precedentes, a Figura 43, a Figura 44 e a Figura 45 ilustram o comportamento da curva de erro relativo.

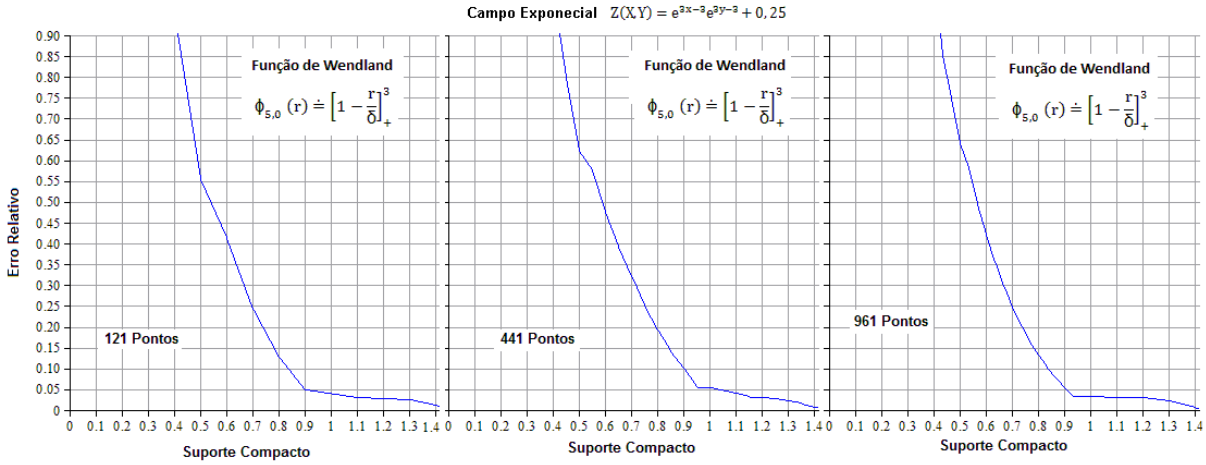


Figura 43– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo exponencial.

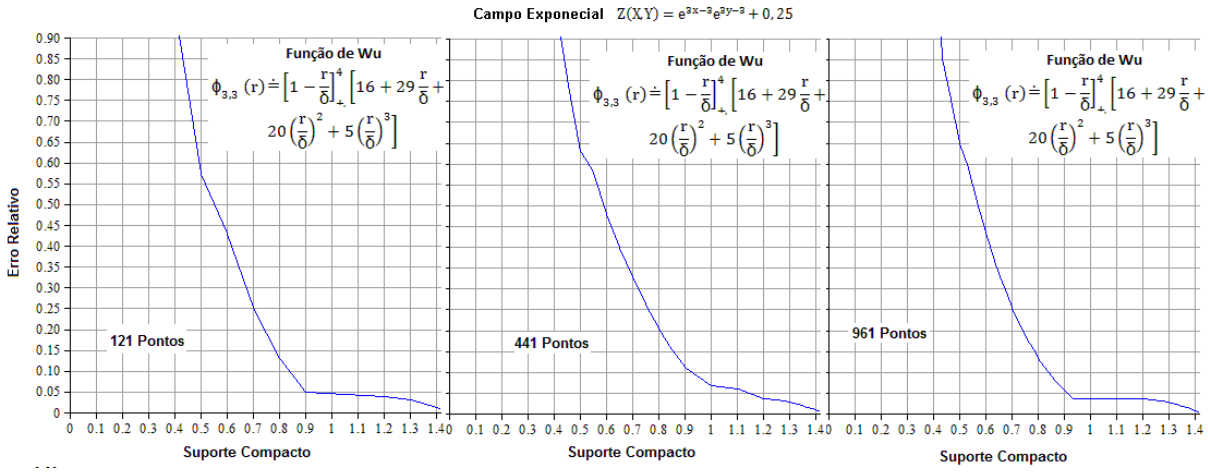


Figura 44– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial.

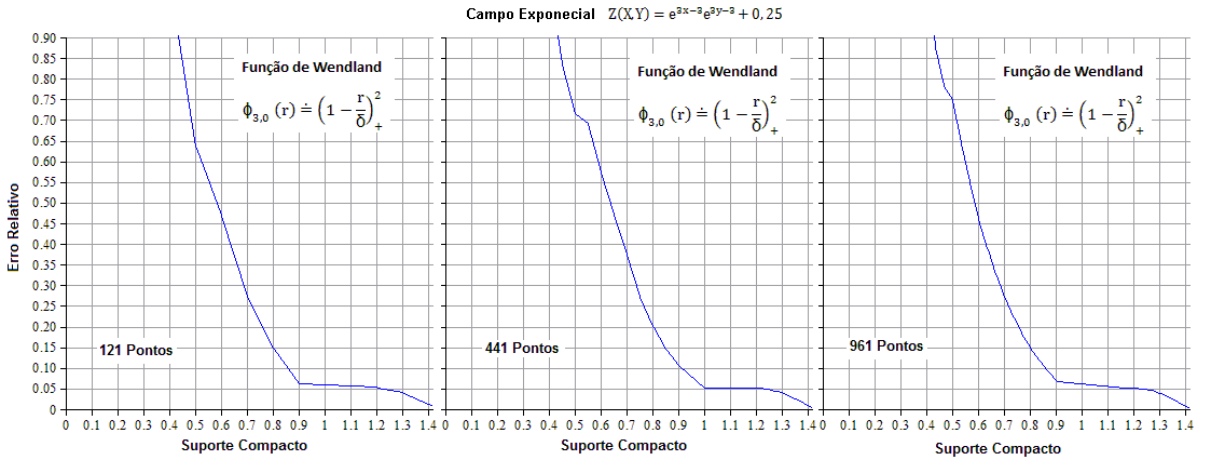


Figura 45– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume sem ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial.

Tal como no paraboloide, o patamar a partir do qual os erros declinam relativamente não mais é tão suave quanto para o Campo Função de Franke e para o Campo Constante. Mas ainda é definido, como se pode observar nas curvas de erro relativo. Embora similares às curvas do paraboloide, percebe-se que as curvas de erro relativo para o Campo Exponencial, nas malhas menos refinados, comportaram-se de modo mais regular.

4.5.5 Discussão dos Resultados dos Testes Bidimensionais com Volume para FBRSC com Variação do Suporte e sem Ajuste de Pontos Interpolantes

De modo geral, os resultados dos testes bidimensionais com volume com variação do suporte sem ajuste de pontos interpolantes foram satisfatórios. O melhor desempenho das FBRSC's ocorreu na simulação do Campo de Função de Franke, no qual as Funções de Wendland ($\phi_{5,0} \cdot, \phi_{3,0}$) e a Função de Wu $\phi_{3,3}$ produziram redução média de **41,78%** do suporte global, sem aumento significativo do erro relativo. Este valor foi obtido a partir do cálculo da média dos valores da redução do suporte global das três FBRSCs citadas, com a malha mais rica.

A partir da análise gráfica dos resultados, verificou-se uma forte influência da variação do suporte na magnitude do erro relativo em todos os testes realizados, e também foi possível visualizar uma expressiva tendência gráfica de comportamento monótono decrescente. Na maioria dos casos testados, a redução do suporte da FBRSC para valores até a faixa de 0,85 e 1,00 gerou um crescimento suave dos erros relativos percentuais de até 7,0%, dependendo do caso analisado. Em reduções do suporte para valores menores que a faixa de 0,85 a 1,00 o erro relativo aumenta abruptamente e de forma significativa em todos os casos analisados.

Durantes os testes bidimensionais com variação do suporte das FBRSC's selecionadas, variou-se a quantidade de pontos base da malha de interpolação, aumentando-os gradativamente. Embora possa ser notado uma maior regularidade e precisão dos resultados com a malha mais refinada, não foi observada uma

influência tão destacada desse aumento de pontos base quanto era esperado. Vê-se que os gráficos são razoavelmente semelhantes, para cada caso analisado.

Em relação aos campos escalares utilizados nos testes, o Campo de Interpolação Constante e o Campo de Interpolação Função de Franke foram os que apresentaram os melhores resultados. Para tais campos escalares, os resultados para os testes realizados com as três FBRSC's foram uma redução média do suporte global em **39,19%** e **41,78%**, respectivamente, sem aumento significativo do erro relativo, levando em consideração os testes realizados com a malha de 961 pontos base.

Já os Campos de Interpolação Paraboloide e Exponencial apresentaram resultados também muito bons, mas não tão bons quanto os campos citados no parágrafo acima. Os resultados para os testes realizados com as três FBRSC's foram uma redução média do suporte global em **31,41%** e **37,30%**, respectivamente, sem aumento significativo do erro relativo, levando em consideração os testes realizados com a malha de 961 pontos base. Ressalva-se que a Função de Wendland $\phi_{3,0}\ (\mathrm{r})$ apresentou resultados abaixo da redução média do suporte global para essa FBRSC nos dois campos citados neste parágrafo: redução do suporte global em apenas **22,22%**, para o Campo Paraboloide; e redução do suporte global em apenas **34,34 %**, para o Campo Exponencial, também levando em consideração os testes com a malha de 961 pontos base. Vejam a Figura 42 e a Figura 45.

Para se ter uma visão geral da efetividade das FBRSC's durante a redução do suporte, calcula-se a redução média do suporte global de cada FBRSC, em relação a todos os campos para a malha mais rica (961 pontos base), com base nos dados da:Tabela 17, tem-se:

- Para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$: Redução média do suporte global igual a **38,48%**;
- Para a Função de Wu $\phi_{3,3}$: Redução média do suporte global igual a **39,19%**;
- Para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$: Redução média do suporte igual a **34,59%**.

Pode-se concluir, a partir dos resultados obtidos, que a Função de Wu $\phi_{3,3}$ demonstrou-se mais eficaz em todos os testes realizados nesta seção, e apresentou

a melhor redução média do suporte global, mas vale ressaltar que as três FBRSCs avaliadas apresentaram valores parecidos para redução analisada.

4.6 RESULTADOS DOS TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUMES PARA FBRSC COM VARIAÇÃO DO SUPORTE E COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES

Em relação ao ajuste, são utilizados todos os mesmos pontos base já declarados na malha de interpolação, com a diferença que os pontos internos não são considerados como pontos base após o ajuste, pois são tomados apenas como pontos de informação.

Dessa forma, são aproveitados para o cálculo dos coeficientes (α) apenas os pontos de contorno, que convenientemente são adotados como sendo os pontos base da interpolação e, futuramente, como sendo os nós funcionais do problema de Elementos de Contorno.

Conforme feito para as simulações sem ajuste de pontos, sintetizaram-se as informações fornecidas nos gráficos a seguir, através da Tabela 18, na qual se buscou destacar um valor de erro mínimo comum a todas as experiências com os campos escalares, de modo a permitir uma melhor qualificação do comportamento do método em todas as situações.

Tabela 18 - RELAÇÃO DE SUPORTES OTIMIZADOS OBTIDOS A PARTIR DO TESTE BIDIMENSIONAL COM VOLUME COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES, PARA CADA MALHA DE INTERPOLAÇÃO CONSIDERADA E PARA CADA FBRSC ESCOLHIDA NA ETAPA ANTERIOR.

Tabela de Suportes Otimizados - Testes com Volume com Ajuste de Pontos						
FBRSC	Suporte Compacto	Porcentagem do Suporte Global	Suporte Compacto	Porcentagem do Suporte Global	Suporte Compacto	Porcentagem do Suporte Global
	Malha 1		Malha 2		Malha 3	
	Campo de Interpolação Constante					
$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	0,9000	63,64% de δ	0,9900	70,00% de δ	0,7500	53,03% de δ
$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	0,6600	46,67% de δ	1,0500	74,25% de δ	0,7400	52,33% de δ
$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$	0,8600	60,81% de δ	1,0100	71,42% de δ	0,8800	62,23% de δ
	Campo de Interpolação Exponencial					
$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	0,8000	56,57% de δ	1,0100	71,42% de δ	0,8200	57,98% de δ
$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	0,9000	63,64% de δ	1,0500	74,25% de δ	0,8400	59,40% de δ
$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$	1,0600	74,95% de δ	1,1500	81,32% de δ	1,0000	70,71% de δ
	Campo de Interpolação Função de Franke					
$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	1,1600	82,03% de δ	1,0500	74,25% de δ	0,6000	42,43% de δ
$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	1,0500	74,25% de δ	0,6100	43,14% de δ	0,5900	41,72% de δ
$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$	0,7600	53,74% de δ	0,7800	55,16% de δ	0,8000	56,57% de δ
	Campo de Interpolação Paraboloide					
$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	0,9100	64,35% de δ	1,0100	71,42% de δ	0,9000	63,64% de δ
$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	1,1000	77,78% de δ	1,0300	72,83% de δ	0,9000	63,64% de δ
$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$	1,2000	84,85% de δ	1,0100	71,42% de δ	0,9500	67,18% de δ

4.6.1 Resultados para o Campo Constante

Os testes seguem o mesmo padrão anterior, fazendo-se a simulação com três malhas, e usando as três FBRSCs escolhidas anteriormente. Vejam a Figura 46, a Figura 47 e a Figura 48.

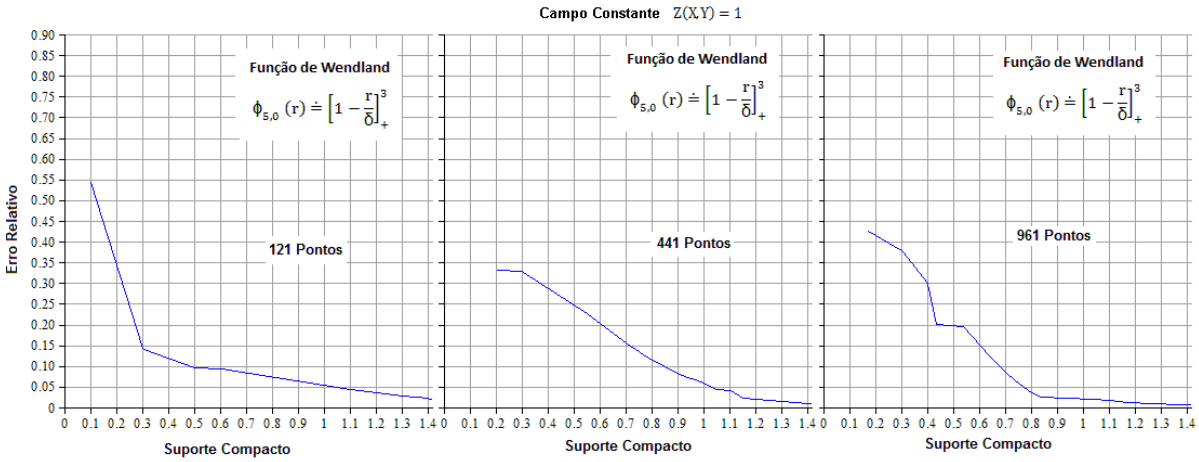


Figura 46 – Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante.

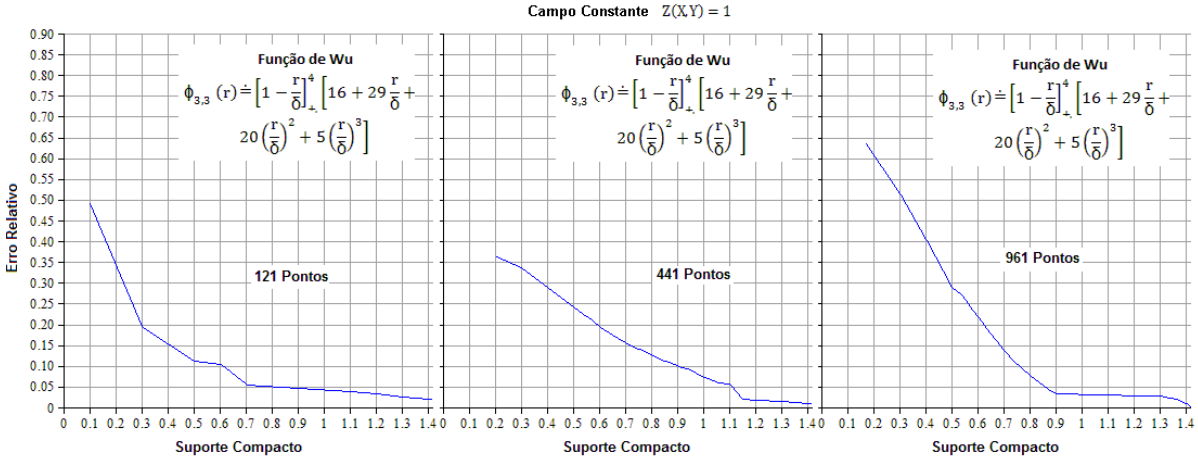


Figura 47– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante.

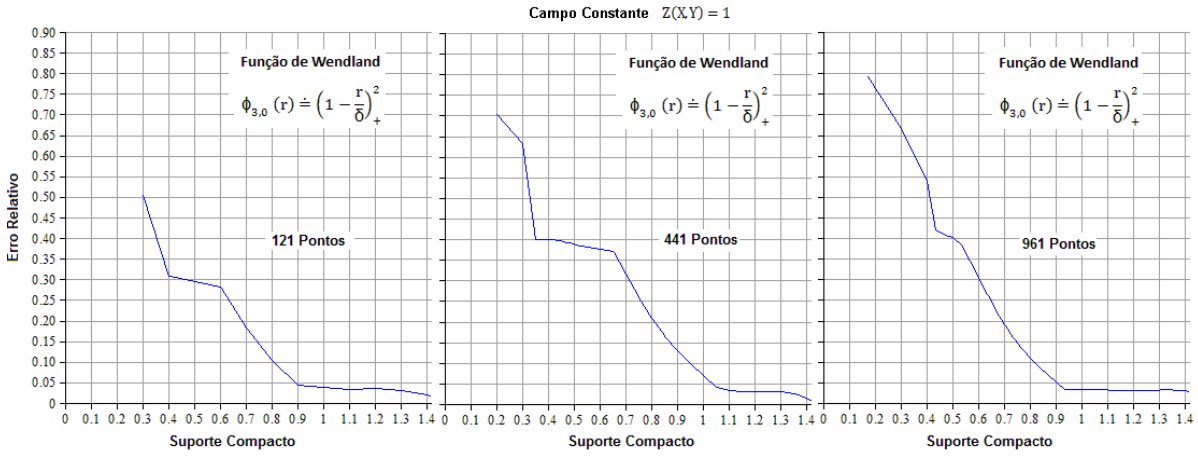


Figura 48– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Constante.

Diferentemente dos resultados sem ajuste, o padrão das curvas de erro relativo em função do nível de refinamento da malha se altera bastante. Não há mais a regularidade apresentada anteriormente. Percebe-se que as curvas de erro relativo declinam significativamente a partir do alcance de um dado valor de suporte, mas o patamar suave não é tão nítido como o anteriormente observado, nas experiências sem ajuste.

4.6.2 Resultados para o Campo Função de Franke

Mais uma vez, fazem-se simulações com três malhas, e usando as três FBRSC's escolhidas anteriormente. Veja a Figura 49, a Figura 50 e a Figura 51.

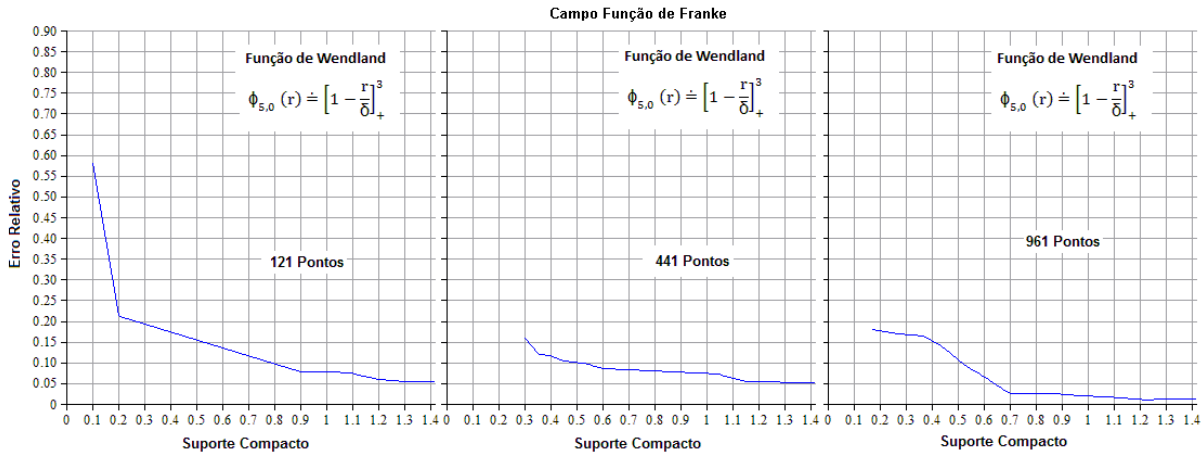


Figura 49– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke.

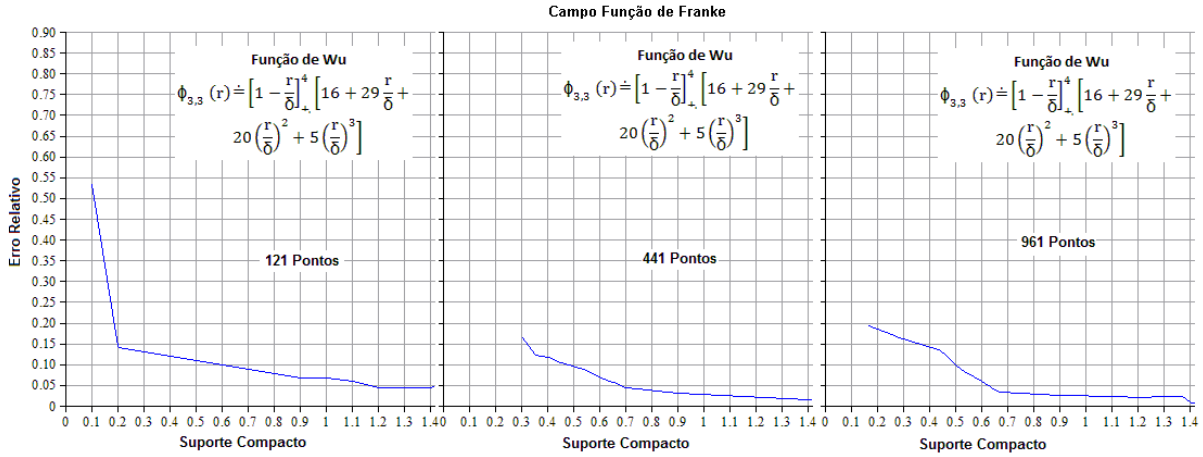


Figura 50– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke.

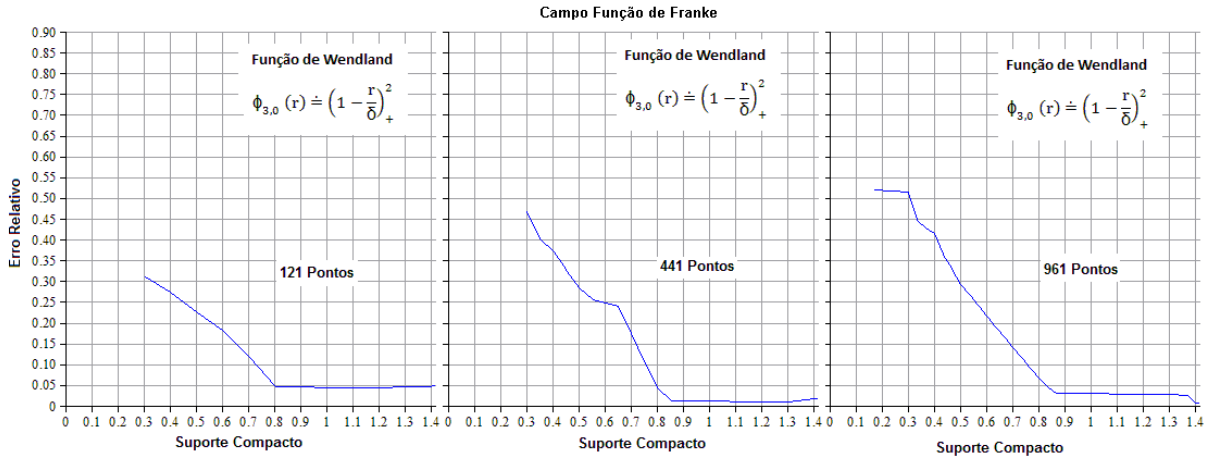


Figura 51- Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Função de Franke.

Nota-se que, novamente, não houve semelhança entre os perfis das curvas para as três FBRSCs aqui testadas. O patamar mais suave na curva de erro relativo parece mais nítido na Função de Wendland $\phi_{3,0}$, muito embora os erros relativos sejam menores para a Função de Wu.

4.6.3 Resultados para o Campo Paraboloide

Dando continuidade as simulações, segue abaixo, na Figura 52, na Figura 53 e na Figura 54, os testes bidimensionais com volume para as FBRSCs selecionadas, e com as mesmas malhas aplicadas aos campos anteriores.

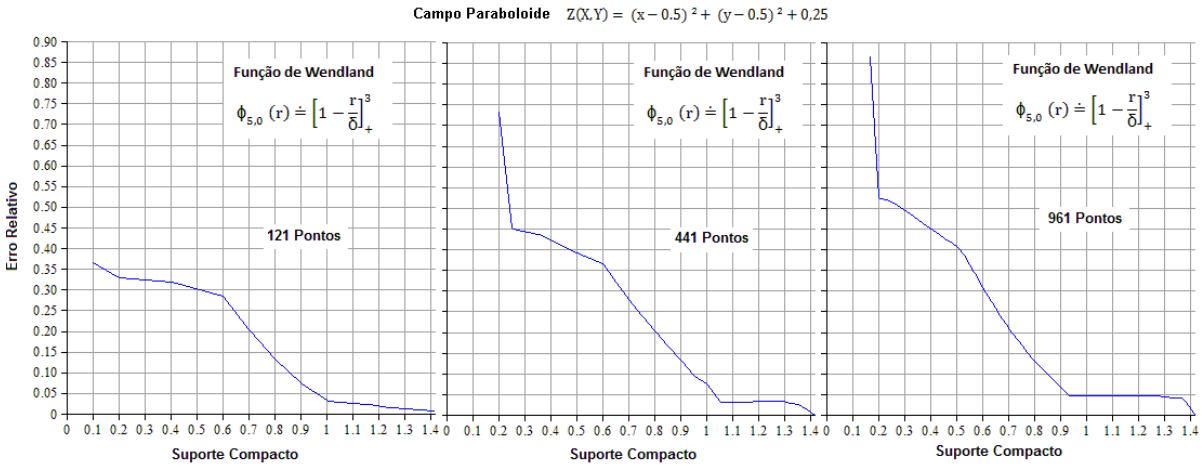


Figura 52– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao campo Paraboloide.

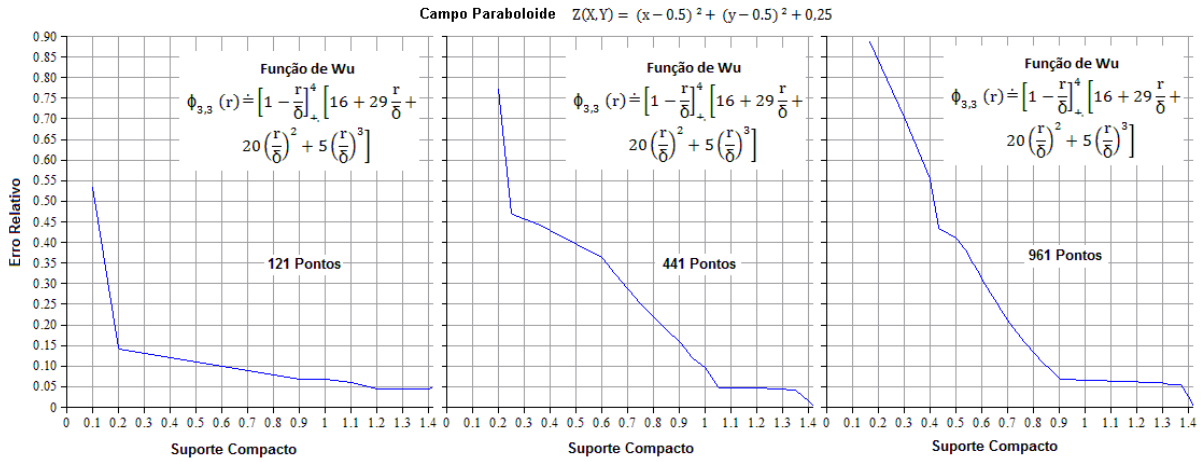


Figura 53– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide.

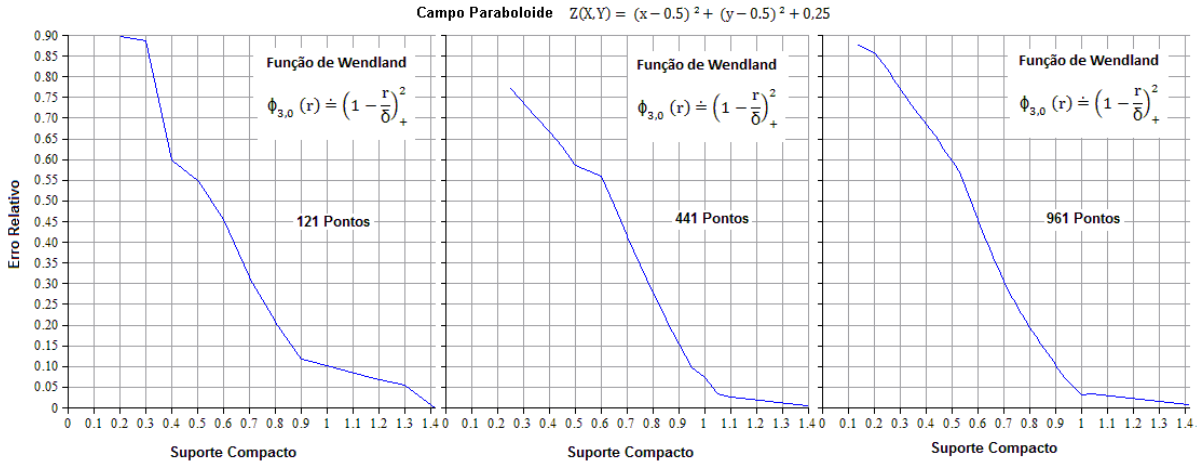


Figura 54- Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Paraboloide.

Embora o perfil das diferentes curvas seja mais semelhante do que no teste com o Campo Função de Franke, os perfis diferem bastante do obtido nos testes sem ajuste. O desempenho final para a malha mais refinada, entretanto, é levemente superior aos obtidos sem ajuste da curva.

4.6.4 Resultados para o Campo Exponencial

Segue abaixo, na Figura 55, na Figura 56 e na Figura 57, os testes bidimensionais com volume para as FBRSCs selecionadas, e com as mesmas malhas aplicadas aos campos anteriores.

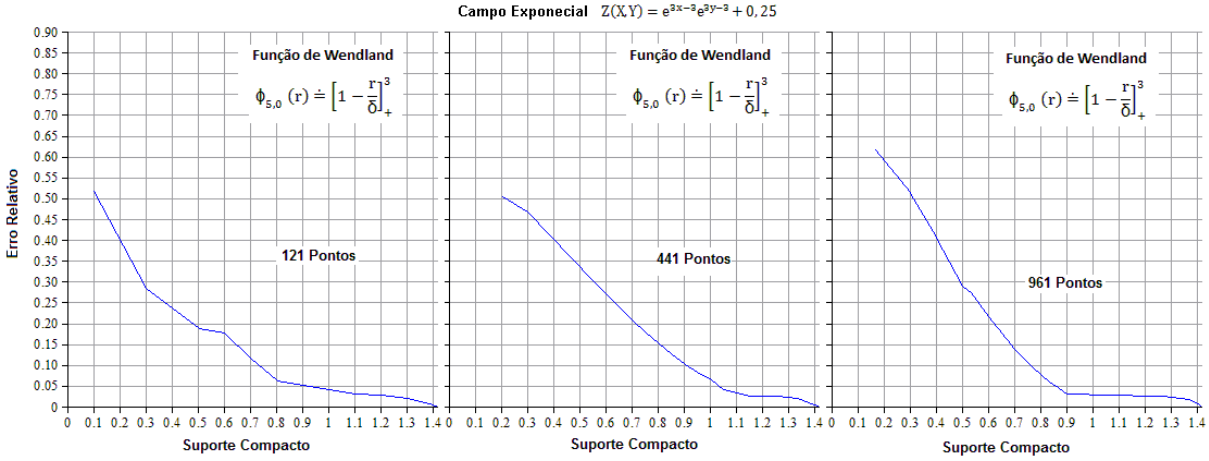


Figura 55– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial.

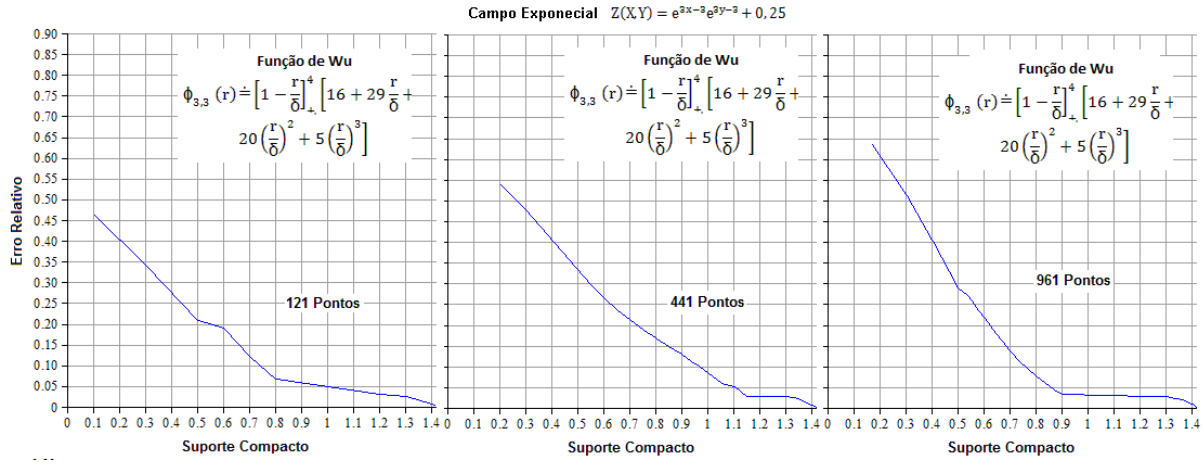


Figura 56– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wu $\phi_{3,3}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial.

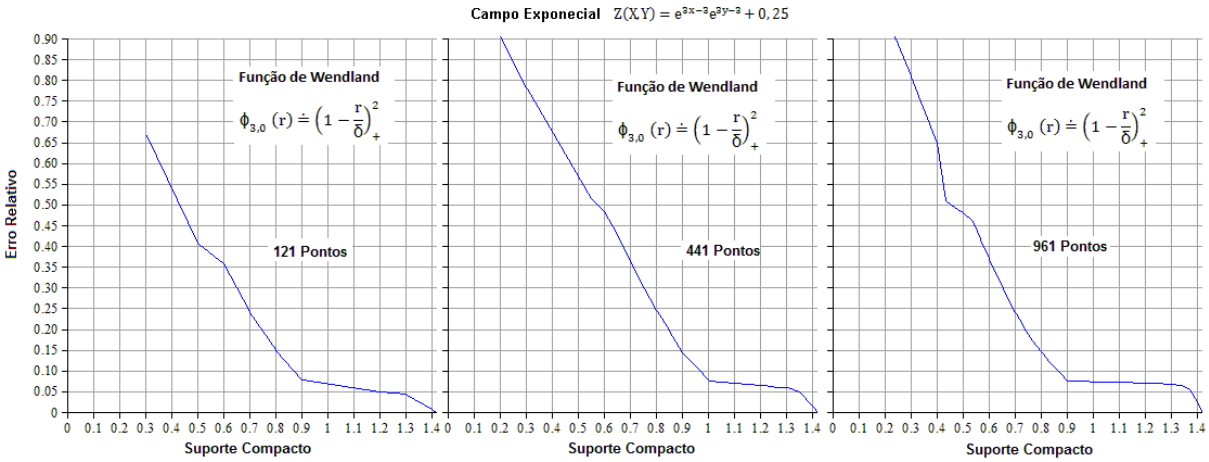


Figura 57– Gráfico da variação do suporte vs. relativo gerado pelo teste bidimensional com volume com ajuste de pontos da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para três malhas distintas, em relação ao Campo Exponencial.

4.6.5 Discussão dos Resultados dos Testes Bidimensionais com Volume para FBRSC com Variação do Suporte e com Ajuste de Pontos Interpolantes

Os resultados dos testes bidimensionais com volume para FBRSC com variação do suporte e com ajuste de pontos interpolantes também foram bons, e, comparativamente, foram melhores que os resultados apresentados para testes sem ajuste de pontos interpolantes. O tratamento de ajuste de pontos dado aos testes bidimensionais foi suficiente para melhorar ainda mais os resultados obtidos, visto que suavizou a superfície gerada por dados discretos colhidos em campo, durante a etapa de interpolação.

A importância do uso de ajuste de pontos em resolução de problemas físicos com subsídio do MEC gira em torno do fato de possibilitar a redução do sistema matricial, através do bandeamento da matriz de massa, de modo que os pontos internos são considerados apenas como pontos de informação, e não participam diretamente da geração dos coeficientes de ajuste (α).

É importante comentar que houve redução expressiva dos erros relativos referentes à faixa de valores de suportes compactos menores que 0,9; obtidos durante todos os testes com o esquema de ajuste de pontos e variação do suporte, uma vez comparados com os resultados dos testes com variação do suporte e sem esquema de ajuste de pontos. Veja o caso da simulação com Campo Função de Franke e a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, comparando então a Figura 37 com a Figura 49.

No caso mais promissor, que também está relacionado às FBRSCs do tipo Função de Wendland ($\phi_{5,0}$, $\phi_{3,0}$) e do tipo Função de Wu $\phi_{3,3}$. Para o Campo Função de Franke, houve redução média de **53,09%** do suporte global, sem aumento significativo do erro relativo. Redução essa, notavelmente maior que aquela obtida para mesmo caso sem ajuste de pontos. Vejam a Figura 37, a Figura 38 e a Figura 39.

A partir da análise gráfica dos resultados com ajuste de pontos interpolantes, verificou-se também uma forte influência da variação do suporte na magnitude do erro relativo em todos os testes realizados, e uma notável tendência gráfica para o comportamento monótono decrescente. Na maioria dos casos testados, a redução

do suporte da FBRSC para valores até a faixa de 0,60 e 0,95; gerou um crescimento suave dos erros relativos percentuais de até 7%, bem similar aquele apresentado para os testes sem ajuste de pontos. Vale mencionar que, para essa faixa de valores de suporte compacto, os erros relativos pouco divergiram com aqueles apresentados para os casos sem ajuste de pontos. Em reduções do suporte para valores menores que a faixa de 0,60 a 0,95; o erro relativo aumenta abruptamente e de forma significativa em todos os casos analisados, comportamento muito similar aos gráficos dos testes sem ajuste de pontos interpolantes.

Observou-se na realização dos testes com ajuste de pontos uma influência significativa do aumento gradativo da quantidade de pontos base na malha de interpolação no comportamento gráfico dos resultados, visto os gráficos dos erros relativos Vs. quantidades de pontos base na malha de interpolação são distintos, para cada caso analisado.

Em relação aos campos escalares utilizados nos testes com ajuste de pontos, o Campo de Interpolação Constante e o Campo de Interpolação Função de Franke também apresentaram os melhores resultados. Para tais campos escalares, os resultados para os testes realizados com as três FBRSC's foram uma redução média do suporte global em **44,14%** e **53,09%,** respectivamente, sem aumento significativo do erro relativo, levando em consideração os testes realizados com a malha de 961 pontos base.

Já os Campos de Interpolação Paraboloide e Exponencial também apresentaram resultados favoráveis. Os resultados para os testes com ajuste de pontos realizados com as três FBRSC's foram uma redução média do suporte global em **35,18%** e **37,30%**, respectivamente, sem aumento significativo do erro relativo, levando em consideração os testes realizados com a malha de 961 pontos base. Ressalva-se que a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ apresentou resultados não tão favoráveis para esses dois campos, se comparada com as demais FBRSC's: redução do suporte global em **32,82%**, para o Campo Paraboloide; e redução do suporte global em **29,29%**, para o Campo Exponencial, também levando em consideração os testes com a malha de 961 pontos base. Vejam a Figura 54 e a Figura 57.

Para se ter uma visão geral da efetividade das FBRSC's durante a redução do suporte para os teste com ajuste de pontos, calcula-se a redução média do suporte

global de cada FBRSC, em relação a todos os campos para a malha mais rica (961 pontos base), com base nos dados da Tabela 18:

- Para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$: Redução média do suporte igual a **45,73%**;
- Para a Função de Wu $\phi_{3,3}$: Redução média do suporte igual a **45,73%**;
- Para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$: Redução média do suporte igual a **35,83%**.

Pode-se concluir, a partir dos resultados obtidos, que a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ e a Função de Wu $\phi_{3,3}$ demonstraram-se eficaz em todos os testes com ajuste de pontos realizados nesta seção e apresentaram as melhores reduções médias do suporte global.

5 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DOS PROBLEMAS FÍSICOS NO AMBIENTE DO MEC, UTILIZANDO A FORMULAÇÃO MECIC COM FBRSC'S

5.1 DETALHAMENTO DO TESTE

A proposta dos testes que sucedem é o levantamento do erro relativo da solução numérica de problemas bidimensionais de campo escalar governados pela Equação de Poisson, aplicando-se a Formulação do Método dos Elementos de Contorno, que faz a aproximação do termo de domínio através da interpolação direta com Integração de Contorno - a Formulação MECIC. Essa formulação foi testada com e sem ajuste de pontos. Neste último caso, fazendo a retirada de todos os pontos internos da malha.

Observa-se que, vizando-se apresentar resultados claros e objetivos, os erros relativos de cada nó funcional serão omitidos. Entretanto, serão mostrados os erros relativos médios de todos os nós funcionais da malha do problema simulado em forma percentual. Portanto, os erros serão chamados de erros médios percentuais.

O problema aqui simulado se refere a uma barra engastada no topo, de seção transversal constante, sendo submetida apenas ao próprio peso, conforme é mostrado na Figura 13. Durante as simulações, são feitas as seguintes considerações: a densidade da barra é tomada constante; a densidade da barra varia linearmente com o eixo x; e por fim a densidade da barra varia senoidalmente com o eixo x.

Os problemas são dados pela equação (65). Salienta-se que a solução analítica para o problema de barra de seção constante para as três considerações anteriormente expostas são apresentadas no APÊNDICE D -. Ressalta-se que embora fisicamente sejam unidimensionais, as malhas usadas são bidimensionais. A capacidade das funções radiais aproximarem satisfatoriamente uma ação unidimensional a partir da degeneração de um caso modelado em duas dimensões faz parte dos atributos desejados.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho(x).g}{E} = p(x) \tag{65}$$

Por conveniência, serão adotados os seguintes valores para as constantes físicas presentes na equação (65):

- Aceleração da Gravidade (g): 1m/s²;
- Modulo de Elasticidade (E): 1 Pa;
- Densidade do Material da Barra (ρ): 1 kg/m³;
- Arestas da Barra (a): 1m.

Todos os testes desta seção foram realizados com 4 distribuições diferentes de pontos no contorno e com 8 distribuições diferentes de pontos internos, totalizado 32 malhas distintas. Assim, possibilita-se verificar a influência do enriquecimento das malhas no erro médio percentual dos resultados da solução numérica dos problemas avaliados nesta seção. As malhas estão localizadas no APÊNDICE E -.

As simulações foram feitas com as três FBRSC's selecionadas através dos testes bidimensionais com volume: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

Para o cálculo dos erros médios percentuais, considera-se somente os deslocamentos obtidos na Aresta 2 e em metade da Aresta 3, visualizados na Figura 58 ; visto que os deslocamentos da Aresta 1 são prescritos e a barra possui simetria longitudinal.

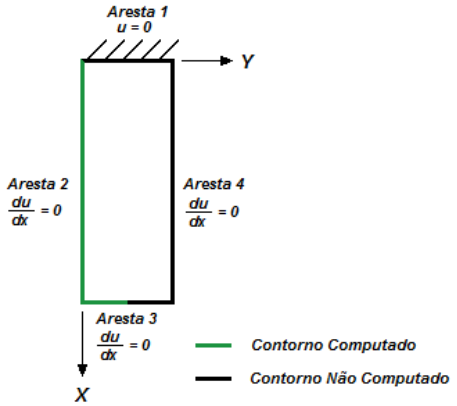


Figura 58 - Contorno considerado para o cálculo dos erros da barra de seção constante.
Fonte: Cruz (2012).

Em relação ao suporte das FBRSC's, algumas simulações foram feitas com o intuito de se averiguar a magnitude do erro médio percentual, a medida em que se reduz o suporte da FBRSC.

A seguir, tem-se os erros médios percentuais obtidos nas simulações para as três considerações aplicadas ao problema em questão.

Objetivando-se realizar uma análise qualitativa e quantitativa do custo de processamento da formulação proposta, denominada MECIC, associada as FBRSC, gerou-se também tabelas de tempo de processamento de todos os testes numéricos desta seção, localizadas no APÊNDICE F -. Devido a complexidade relacionada ao procedimento de medição do custo computacional (exigência de programadores experientes, entre outros) faz-se então apenas a avaliação qualitativa desses resultados.

5.2 INFORMAÇÕES ADICIONAIS ACERCA DA DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO DO DOMINIO

Pelo fato do contorno dos problemas aqui simulados possuírem ângulos, não suaves, isto é, por apresentarem quinas, foi adotada a técnica dos nós duplos (BREBBIA *et al*, 1984) como forma de tratamento dos possíveis problemas de singularidade.

A técnica do nó duplo é empregada para melhor representar um nós funcional de um elemento discreto do contorno, que possui duas normais distintas em relação ao contorno, referente aos elementos discretos consecutivos, para as mesmas coordenadas geométricas. Logo, existem duas condições de contorno para a mesma coordenada geométrica.

O MEC é susceptível a problemas provenientes de singularidade, que podem estar presentes no contexto deste trabalho devido a dois fatores: durante ao processo de interpolação da ação de domínio (Z(x, y)); e durante o cálculo do valor da solução

fundamental na integral de domínio quando o ponto base coincidir com o ponto fonte.

A singularidade no processo de interpolação seria a existência de linhas iguais na matriz de interpolação, constituídas a partir das FBRSC's e das coordenadas dos pontos base. Considerando nós duplos, o sistema linear obtido no processo de interpolação apresentaria equações iguais (linearmente dependentes), e não seria solucionável. A FDR é afetada por esse tipo de singularidade e, para resolver isto, é preciso deslocar os pontos fonte dos nós duplos.

Na Formulação MECIC, além deste problema, haveria também o fato de que o valor da solução fundamental quando r=0 não existe. Isto ocorre quando há coincidência de coordenadas dos pontos base de interpolação com as coordenadas dos pontos fontes. Para eliminar este dois problemas, foi preciso distinguir os pontos base de interpolação (γ^i) dos nós funcionais (ξ), que servem de pontos fonte. Como nos pontos base são dados os valores da ação de domínio, estes podem ser posicionados no meio dos elementos, evitando a singularidade.

5.3 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE CONSTANTE SEM AJUSTE DE PONTOS

5.3.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global

Nestes testes as FBRSCs são usadas com seu suporte pleno, abarcando completamente o domínio. Assim, com estas simulações pode-se ter uma ideia da eficiência destas funções em comparação com as funções radiais tradicionais, utilizadas no trabalho de Cruz (2012).

Os pontos internos das malhas utilizadas nos testes com a barra engastada seguem o mesmo posicionamento adotado por Cruz (2012). Pode-se perceber, então, que todas as FBRSC's testadas com suporte pleno tiveram melhor desempenho do que

as radiais simples e cúbicas testas no trabalho citado. Veja a Tabela 19 e a Tabela 20 para as funções radiais: simples e cúbica:

Tabela 19 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL SIMPLES. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	8,34%	2,79%	2,36%	1,85%	1,87%	1,15%	0,96%	0,97%
80	7,03%	1,66%	1,16%	0,84%	0,83%	0,48%	0,38%	0,39%
120	7,15%	1,61%	1,03%	0,69%	0,68%	0,34%	0,27%	0,27%
160	7,24%	1,62%	1,00%	0,66%	0,64%	0,29%	0,23%	0,22%

Fonte: Cruz (2012).

Tabela 20 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL CÚBICA. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	15,46%	1,20%	1,26%	1,02%	1,02%	0,85%	0,77%	0,77%
80	16,23%	1,67%	1,41%	0,86%	0,86%	0,35%	0,24%	0,24%
120	17,81%	2,00%	1,79%	1,01%	1,02%	0,35%	0,21%	0,21%
160	19,46%	2,28%	2,15%	1,21%	1,24%	0,37%	0,22%	0,23%

Fonte: Cruz (2012).

Os resultados dos erros médios percentuais para a simulação da barra engastada com as Funções de Wendland ($\phi_{5,0}$ e $\phi_{3,0}$) e a Função de Wu $\phi_{3,3}$ se encontram na Tabela 21, na Tabela 22 e na Tabela 23, respectivamente.

Tabela 21 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$, COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	2,56%	1,01%	0,85%	0,90%	0,85%	0,85%	0,78%	0,80%
80	4,09%	1,09%	0,81%	0,46%	0,50%	0,09%	0,10%	0,09%
120	4,65%	1,32%	1,10%	0,69%	0,75%	0,20%	0,13%	0,12%
160	4,93%	1,47%	1,25%	0,82%	0,88%	0,27%	0,17%	0,17%

Para melhor visualização das curvas de erro percentual, a seguir são mostrados gráficos de convergência, conforme ilustram a Figura 59, a Figura 60 e a Figura 61. Com exceção da malha mais pobre, em todas as malhas o efeito da introdução de pontos internos resultou em melhoria no desempenho numérico.

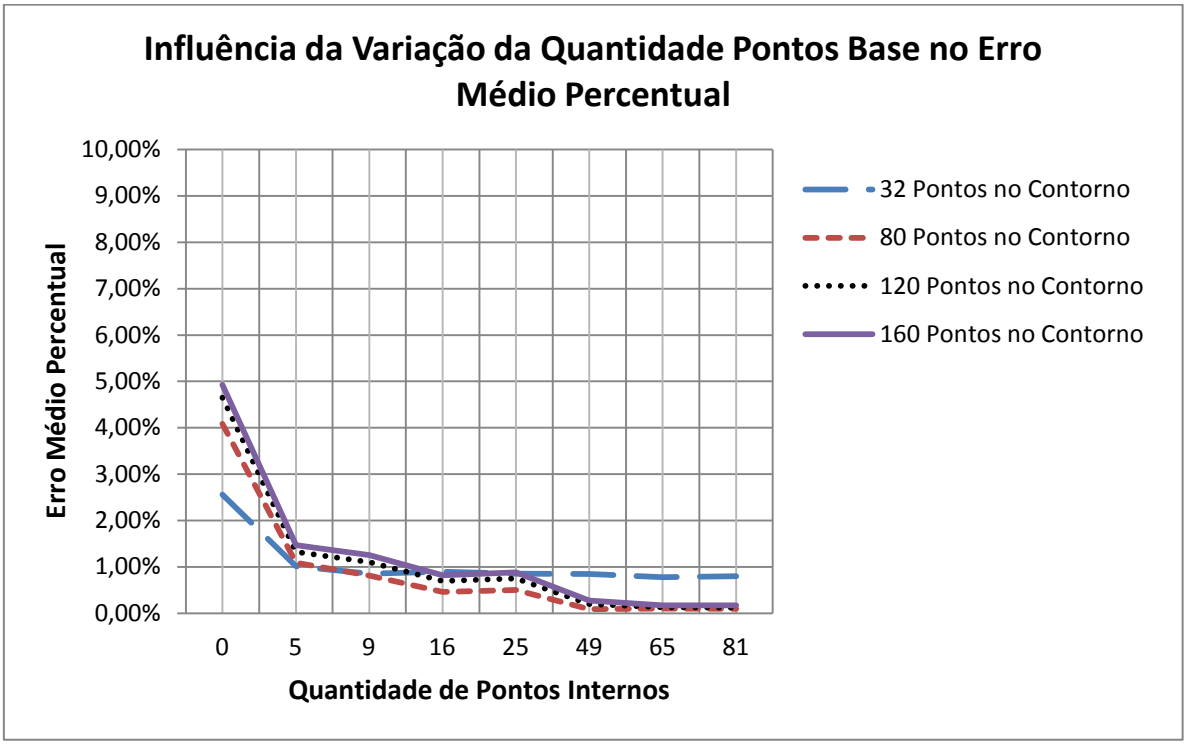


Figura 59 – Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante.

Tabela 22 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	4,30%	0,84%	0,69%	0,82%	0,80%	0,82%	0,75%	0,77%
80	6,86%	1,36%	0,92%	0,50%	0,51%	0,10%	0,11%	0,10%
120	7,56%	1,60%	1,20%	0,73%	0,76%	0,19%	0,13%	0,12%
160	7,88%	1,74%	1,35%	0,85%	0,88%	0,26%	0,17%	0,16%

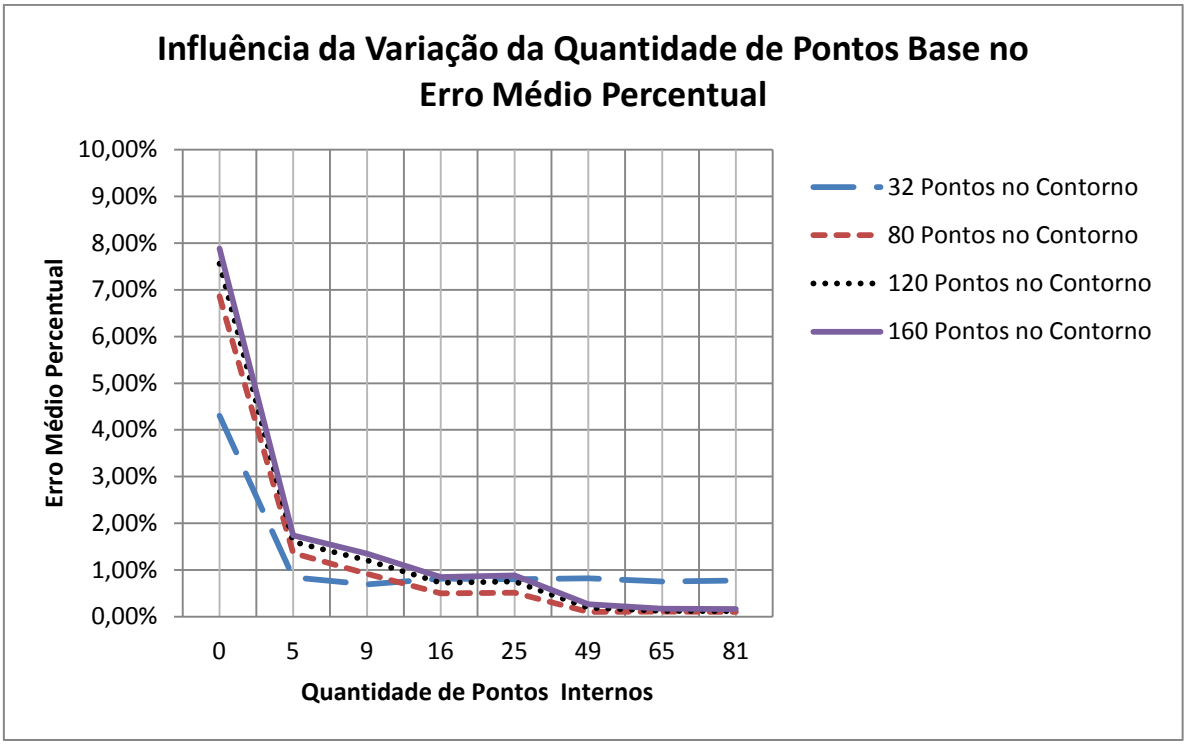


Figura 60- Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante.

Tabela 23 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	4,69%	0,78%	0,58%	0,78%	0,84%	0,82%	0,74%	0,77%
80	8,43%	1,71%	1,03%	0,55%	0,51%	0,11%	0,11%	0,11%
120	9,22%	2,02%	1,33%	0,78%	0,75%	0,20%	0,14%	0,12%
160	9,62%	2,18%	1,48%	0,90%	0,87%	0,27%	0,18%	0,17%

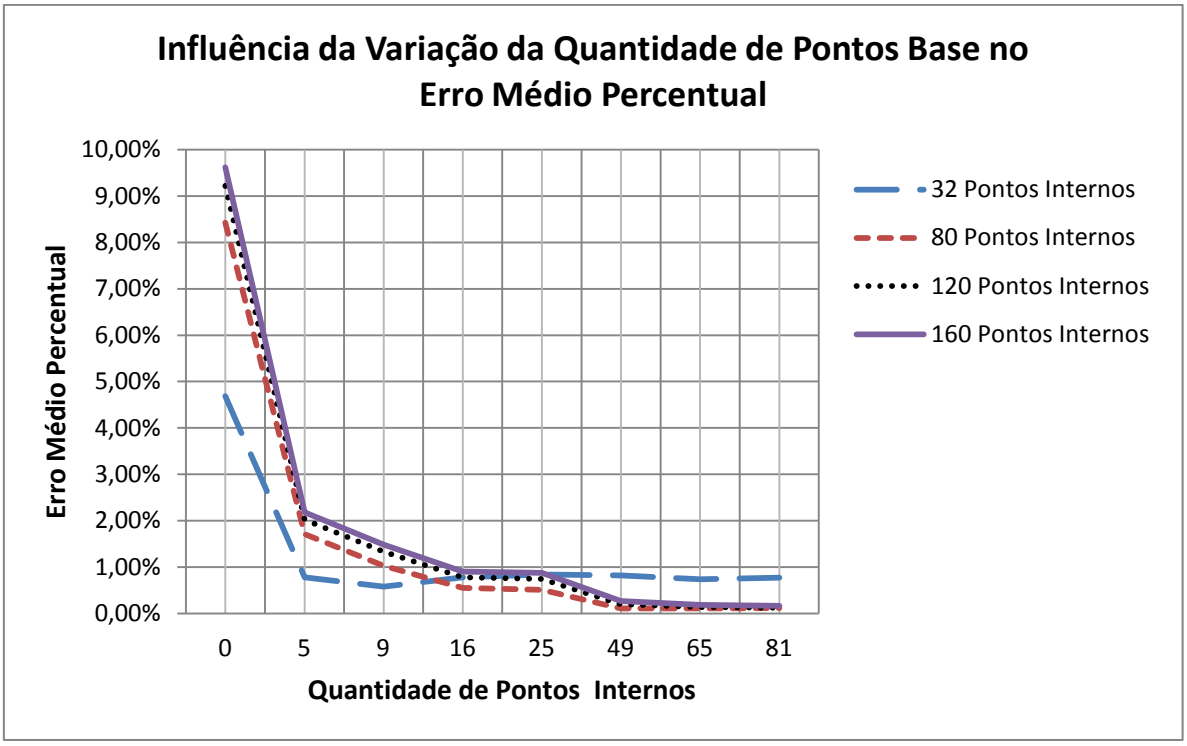


Figura 61 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante.

5.3.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável

As mesmas FBRSCs agora são testadas variando o suporte. Apenas a malha mais rica é utilizada por esta finalidade. Os resultados estão sintetizados na Tabela 24, sendo os mesmos bastante satisfatórios.

Tabela 24 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Constante (Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{2,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Erro Médio Percentual		
0,6	37,5975%	38,5340%	41,3714%
0,65	27,9912%	28,6560%	31,0052%
0,7	21,0948%	21,5068%	23,2415%
0,75	10,8830%	10,9446%	14,6405%
0,8	10,7828%	10,9296%	12,4558%
0,85	7,1556%	7,2652%	8,5309%
0,9	4,4419%	4,6558%	5,6811%
0,95	2,2304%	2,4467%	3,0001%
1,1	1,1635%	1,2548%	1,7435%
1,15	1,4035%	1,6134%	2,3495%
1,2	1,0157%	1,1594%	1,7470%
1,25	0,8933%	1,1013%	1,7485%
1,3	0,7512%	0,9911%	1,5936%
1,35	0,5926%	0,8326%	1,3477%
Suporte Pleno	0,1700%	0,1600%	0,1600%
Suporte Otimizado (até 7,0%)	0,8529	0,8551	0,8769

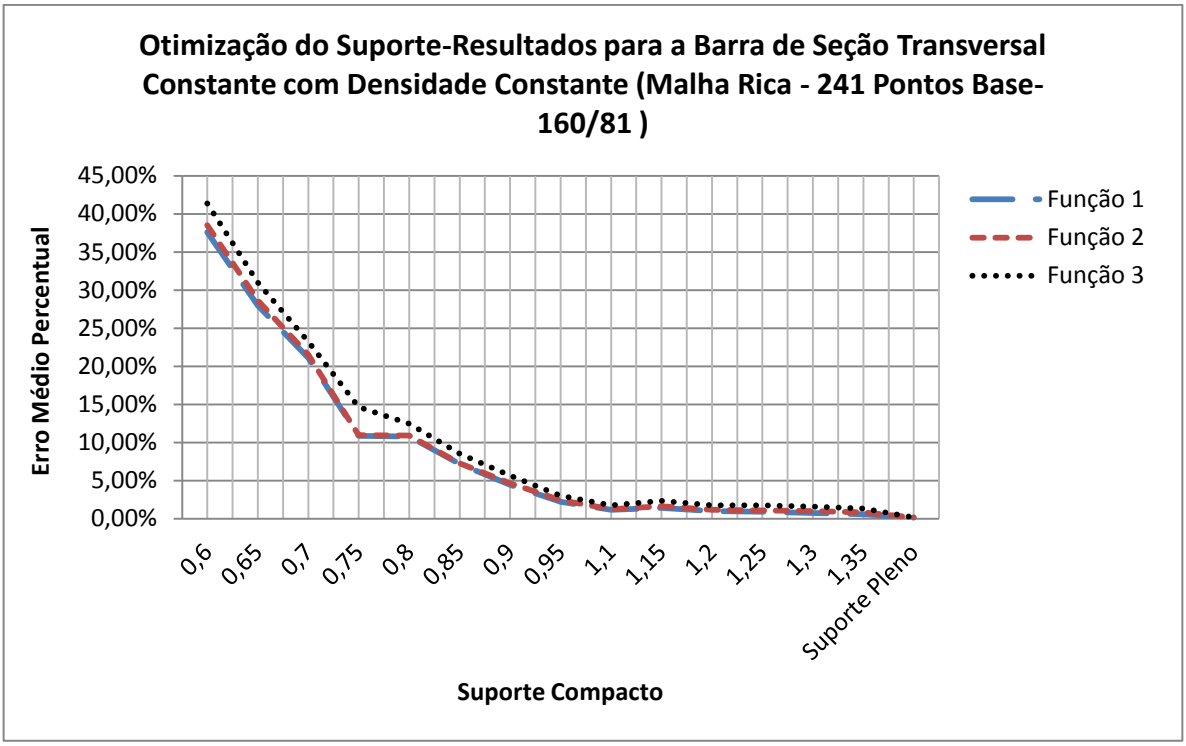


Figura 62 – Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações sem ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade constante e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

As Funções 1, 2 e 3 da legenda da Figura 62 representam respectivamente a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

5.3.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Constante sem Ajuste de Pontos

Após uma breve análise da Tabela 21, da Tabela 22, e da Tabela 23, vê-se claramente que o erro médio percentual dos resultados dos testes decai significativamente com a inserção de pontos internos na Formulação MECIC. Isto ocorre para as três Funções de Base Radial de Suporte Global testadas. Daí se verifica a forte dependência da existência de pontos de informação internos na malha de interpolação para se executar uma boa aproximação da ação de domínio no interior do domínio do problema. Percebe-se, por inspeção gráfica dos resultados

numéricos (CRUZ, 2009), que na ausência de pontos internos, a aproximação da ação de domínio apresenta fortes curvaturas em direção ao seu interior, o que leva ao desenvolvimento de erros consideráveis. Tais resultados para as Funções de Base Radial de Suporte Global, também foram verificados em outro trabalho de Cruz (2012) com a mesma Formulação MECIC para Funções Radiais Simples.

Os resultados dos testes com a Formulação MECIC sem ajuste de pontos interpolantes com as três Funções de Base Radial de Suporte Global convergiram adequadamente a valores de erros médios percentuais mínimos, à medida que se inseria pontos internos a malha de interpolação, mantendo-se a quantidade de pontos no contorno e a sua localização fixas. Vejam a Figura 59, a Figura 60 e a Figura 61.

Em alguns desses casos, os erros médios percentuais apresentaram pequenas oscilações, cuja responsabilidade foi atribuída à modificação da posição dos pontos internos já existentes na malha de interpolação para a inserção de novos pontos internos. Dependendo da quantidade de pontos no contorno, as oscilações se mostraram mais acentuadas, que é o caso dos testes realizados com 32 pontos no contorno.

Essa dependência do erro médio percentual com a localização dos pontos base da malha de interpolação foi devidamente estudada por Bertolani (2010), ao se realizar testes bidimensionais com volume de malhas (regulares e aleatórias) com mesma quantidade de pontos, em que se verificaram erros distintos para os dois tipos de malha testados. As malhas utilizadas nos testes acima estão devidamente representadas no APÊNDICE E -.

Em relação aos testes com a Formulação MECIC para Funções de Base Radial de Suporte Global, os melhores resultados foram obtidos com a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com erro médio percentual de **0,0900%**, para a malha intermediária: 80 x 81; seguido da Função de Wu $\phi_{3,3}$ com erro médio percentual de **0,1000%**, para a malha intermediária: 80 x 81; e, em último lugar, a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ com erro médio percentual de **0,1100%**, para a malha intermediária: 80 x 81. Pode-se afirmar que as três funções são viáveis para aplicações futuras, visto que os erros médios percentuais variaram muito pouco.

De acordo com os testes com a Formulação MECIC para FBRSC sem ajuste de pontos interpolantes, os gráficos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$; apresentaram comportamento monótono decrescente, e convergiram para valores de erros médios percentuais mínimos, à medida que se aumentava o suporte compacto até chegar ao valor do suporte global (Figura 62). Conseguiu-se nos testes reduzir o suporte das três FBRSCs sem perda de precisão dos resultados, mantendo-se o erro médio percentual na faixa de até 7,0%. Os suportes otimizados da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ foram expostos na Tabela 24 e valem respectivamente: 0,8529 (**60,31%** do suporte global); 0,8551 (**60,47%** do suporte global) e 0,8769 (**62,00%** do suporte global).

5.4 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE LINEAR SEM AJUSTE DE PONTOS

5.4.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global

Nestes testes as FBRSC's são usadas com seu suporte pleno, encobrindo totalmente o domínio. Os pontos internos das malhas utilizadas nos testes seguem o posicionamento adotado na simulação da barra com densidade constante.

Pode-se observar que os erros médios percentuais cresceram com relação aos testes anteriores, mas estão em ótimo patamar. Observa-se que apenas a malha mais pobre apresenta um comportamento não convergente, que é comumente encontrado em processos de interpolação com malhas que possuem poucos pontos no contorno e excessivo número deles no interior. Veja a Figura 63, a Figura 64 e a Figura 65.

A seguir são mostradas a Tabela 25 e a Tabela 26 que trazem os valores de erros médios percentuais para a simulação da barra engastada com as funções radiais simples e cúbica, respectivamente. Nota-se que essas funções obtiveram um melhor

desempenho que as funções radiais aqui testadas para simulação com densidade linear. Entretanto, os resultados dos erros médios percentuais da simulação com a malha (80 X 81) pontos base e com as FBRSC's foram superiores as funções radiais tradicionais (simples e cúbica).

Tabela 25 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL SIMPLES COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	6,64%	1,47%	1,47%	1,37%	1,46%	1,07%	0,93%	0,96%
80	8,85%	1,61%	0,78%	0,46%	0,47%	0,35%	0,30%	0,32%
120	9,27%	1,76%	0,91%	0,49%	0,45%	0,20%	0,18%	0,19%
160	9,46%	1,83%	0,99%	0,55%	0,49%	0,16%	0,15%	0,15%

Fonte: Cruz (2012).

Tabela 26 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL CÚBICA COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	19,57%	1,62%	1,68%	1,37%	1,37%	1,00%	0,89%	0,89%
80	17,78%	1,57%	1,11%	0,75%	0,75%	0,38%	0,30%	0,30%
120	16,31%	1,57%	1,13%	0,63%	0,63%	0,29%	0,20%	0,20%
160	15,10%	1,57%	1,21%	0,63%	0,64%	0,23%	0,17%	0,17%

Fonte: Cruz (2012).

Os resultados dos erros médios percentuais para a simulação da barra engastada com as Funções de Wendland ($\phi_{5,0}$ e $\phi_{3,0}$) e a Função de Wu $\phi_{3,3}$ se encontram na Tabela 27, na Tabela 28 e na Tabela 29.

Tabela 27 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	10,54%	1,70%	0,91%	0,17%	0,14%	0,58%	0,64%	0,68%
80	12,50%	3,13%	2,25%	1,33%	1,33%	0,31%	0,16%	0,14%
120	12,91%	3,40%	2,51%	1,56%	1,56%	0,48%	0,30%	0,28%
160	13,13%	3,54%	2,63%	1,67%	1,67%	0,55%	0,37%	0,35%

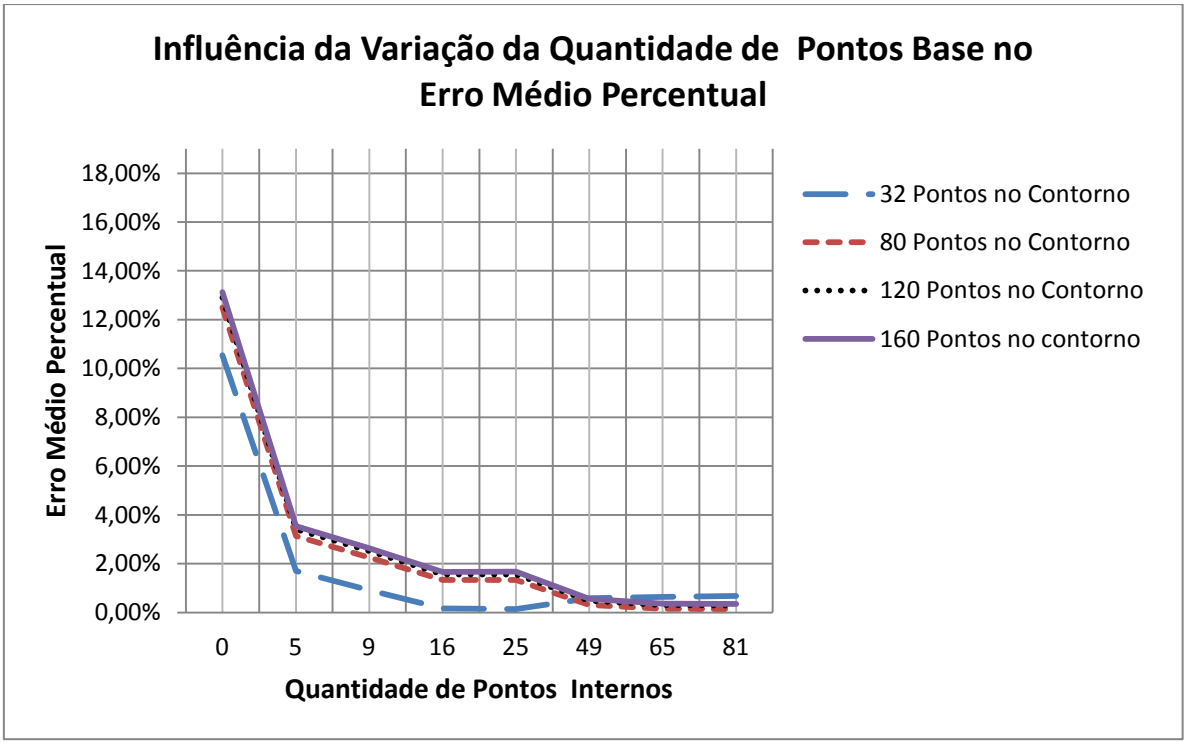


Figura 63 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente.

Tabela 28 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	11,52%	1,42%	0,76%	0,12%	0,11%	0,60%	0,65%	0,69%
80	13,50%	2,74%	1,99%	1,15%	1,17%	0,24%	0,12%	0,10%
120	14,02%	3,03%	2,25%	1,37%	1,40%	0,40%	0,25%	0,23%
160	14,30%	3,17%	1,49%	2,39%	1,51%	0,48%	0,31%	0,29%

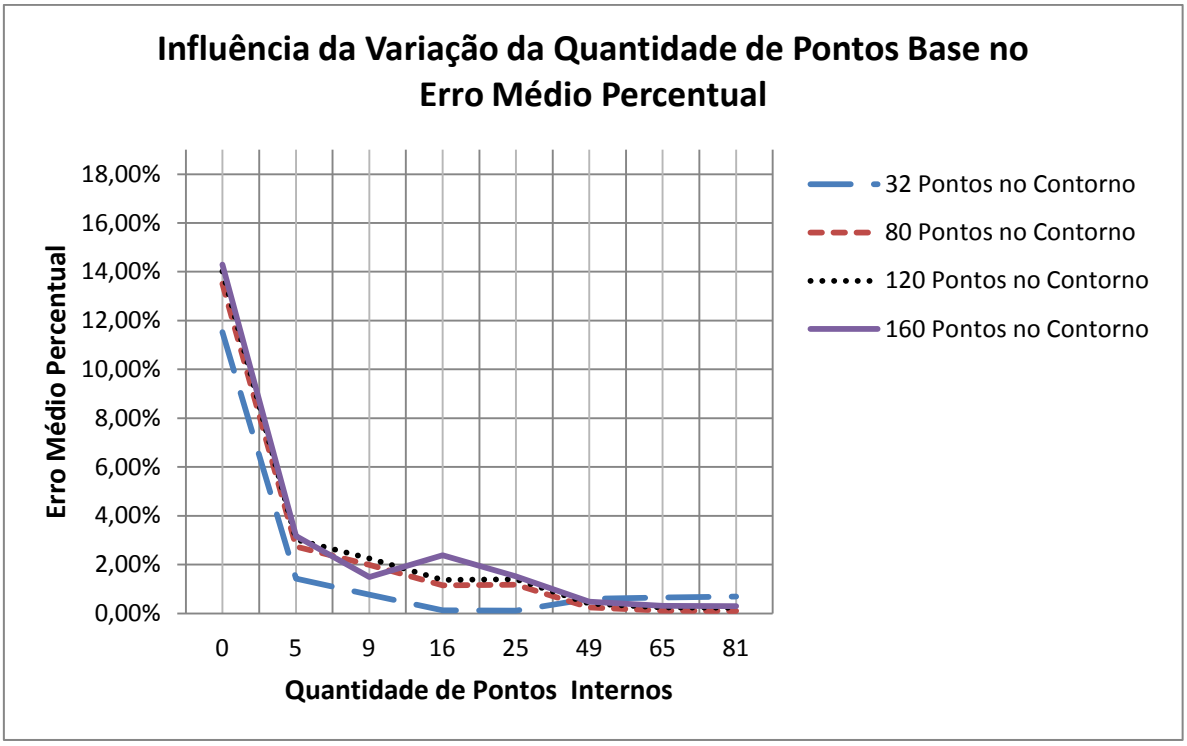


Figura 64 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente.

Tabela 29 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	16,43%	2,35%	1,00%	0,19%	0,12%	0,59%	0,62%	0,68%
80	18,09%	3,65%	2,23%	1,25%	1,14%	0,24%	0,14%	0,10%
120	18,48%	3,91%	2,49%	1,47%	1,37%	0,40%	0,26%	0,23%
160	18,69%	4,06%	2,63%	1,59%	1,49%	0,48%	0,33%	0,29%

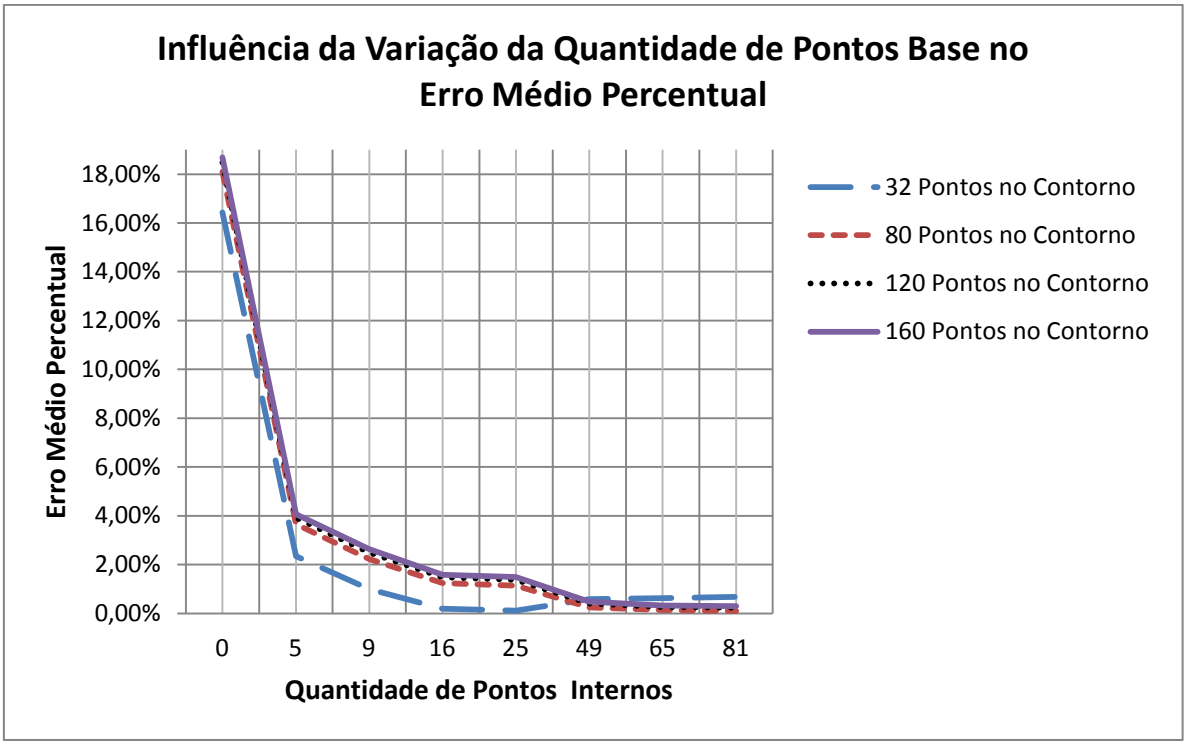


Figura 65 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente.

5.4.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável

As mesmas funções agora são testadas variando o suporte. Apenas a malha mais rica é utilizada por esta finalidade. Os resultados estão sintetizados na Tabela 30.

O gráfico mostrado na Figura 66 ilustra o comportamento apresentado em detalhe na citada Tabela. Pode-se observar o comportamento monótono, com ligeiras oscilações, que se devem a pequenos erros no modelo de cômputo dos contornos gerados pelas FBRSC's.

Tabela 30 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Linear(Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Erro Médio Percentual		
0,6	41,5346%	42,7623%	46,2961%
0,65	31,8058%	32,7158%	35,6224%
0,7	24,4655%	25,0503%	27,0635%
0,75	15,9066%	15,6406%	23,6637%
0,8	13,4125%	13,5686%	15,5553%
0,85	9,2788%	9,3529%	11,1136%
0,9	6,1842%	6,4170%	8,0298%
0,95	3,4511%	3,7240%	4,7344%
1,1	1,6889%	1,9626%	3,0829%
1,15	1,9984%	2,3698%	3,7297%
1,2	1,7164%	2,0886%	3,3461%
1,25	1,3505%	1,7192%	2,7949%
1,3	0,9206%	1,2710%	2,0958%
1,35	0,4071%	0,6529%	1,1416%
Suporte Pleno	0,3500%	0,2900%	0,2900%
Suporte Otimizado (até 7,0%)	0,8868	0,8900	0,9156

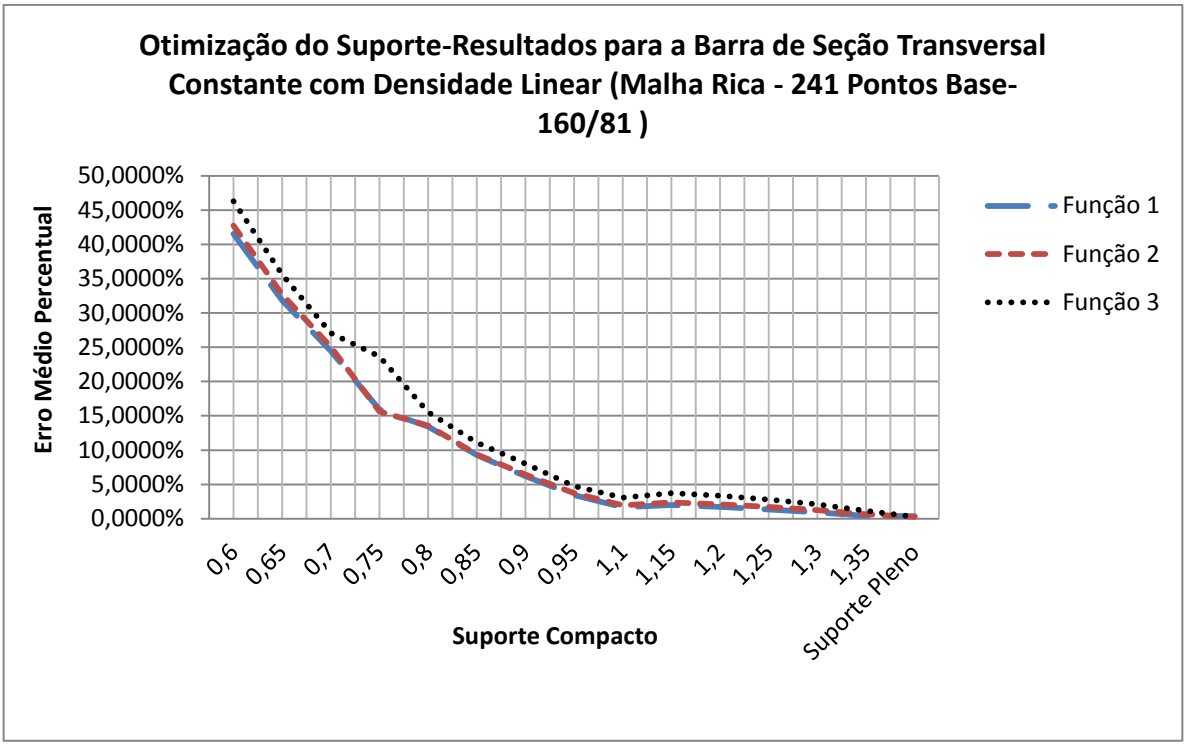


Figura 66 - Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações sem ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade variando linearmente e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$, e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

5.4.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Linear sem Ajuste de Pontos

Durante a análise dos resultados da simulação, com a Formulação MECIC para barra prismática, com densidade linear, submetida ao próprio peso e engastada no topo (Tabela 27, Tabela 28 e Tabela 29), percebe-se que as Funções de Base Radial de Suporte Global não apresentaram convergência dos erros médios percentuais com o acréscimo de pontos internos na malha de 32 pontos no contorno. Para os resultados obtidos a partir de malhas com mais pontos no contorno, houve convergência dos erros médios percentuais, apesar de haver pequenas oscilações à medida que se acrescentava pontos internos à malha de interpolação. Este problema pode ser corrigido à medida que o enriquecimento da malha de pontos internos seja feito sem alterar o posicionamento dos pontos já existentes.

Da mesma forma que no caso anterior, mantendo-se a quantidade de pontos no contorno, houve aumento do erro médio percentual com o acréscimo de pontos internos à malha de interpolação.

Comenta-se aqui brevemente que os resultados também não foram satisfatórios para as malhas de interpolação sem pontos internos. A explicação é idêntica ao caso anteriormente estudado com densidade constante, e já observado por Cruz em sua dissertação de Mestrado. A Formulação MECIC, mais do que a FDR, requer a presença de pontos internos, pois que faz diretamente a interpolação do núcleo da integral da ação de domínio, sem utilização de outras estratégias auxiliares.

Os melhores resultados da simulação com a Formulação MECIC para densidade linearmente variável e com FBRSC's de suporte global foram obtidos com a Função de Wu $\phi_{3,3}$ com erro médio percentual de **0,100%,** para a malha: 80 x 81; seguido da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ com erro médio percentual de **0,100 %**, para a malha mais rica: 80 x 81; e, em último lugar, a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com erro médio percentual de **0,140%**, para a malha mais rica: 80 x 81. Faz-se uma ressalva que esses resultados de erros médios percentuais, para simulação com a malha (80 x 81), foram superiores aos mesmos resultados obtidos com as funções radiais tradicionais (simples e cúbica) ilustrados na Tabela 25 e na Tabela 26.

De acordo com os testes com a Formulação MECIC para Funções de Base Radial de Suporte Compacto sem ajuste de pontos interpolantes, os gráficos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$; também apresentaram comportamento monótono decrescente (Figura 66). Dessa maneira, foi possível nos testes reduzir o suporte das três FBRSC's sem perda de precisão dos resultados, mantendo-se o erro médio percentual na faixa de até 7,0%. Os suportes otimizados da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ foram expostos na Figura 66 e valem respectivamente: 0,887 (valor igual a **62,72%** do suporte global); 0,890 (valor igual a **62,93%** do suporte global) e 0,916 (valor igual **64,77%** do suporte global).

5.5 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE SENOIDAL SEM AJUSTE DE PONTOS

5.5.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global

Tal como nos testes precedentes, as FBRSC's são usadas com seu suporte pleno, encobrindo totalmente o domínio. Igualmente, os pontos internos nas malhas utilizadas seguem o posicionamento adotado na simulação da barra com densidade linear.

Para fins de comparação dos resultados dos erros, são mostradas a Tabela 31 e a Tabela 32 que trazem os valores de erros médios percentuais para a simulação da barra engastada com as funções radiais simples e cúbica, respectivamente. Nota-se que essas funções obtiveram um melhor desempenho que as funções radiais aqui testadas para simulação com densidade senoidal. Entretanto, em alguns casos com a malha (80 X 81) e a malha (160 x 81), os resultados dos erros médios percentuais da simulação com as FBRSC's foram superiores as funções radiais tradicionais (simples e cúbica).

Tabela 31 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL SIMPLES. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	18,75%	1,53%	1,62%	1,31%	1,31%	0,97%	0,87%	0,87%
80	17,01%	1,51%	1,06%	0,72%	0,73%	0,37%	0,29%	0,29%
120	16,24%	1,52%	1,09%	0,61%	0,61%	0,28%	0,19%	0,19%
160	14,96%	1,52%	1,16%	0,60%	0,61%	0,22%	0,16%	0,16%

Fonte: Cruz (2012).

Tabela 32 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO RADIAL CÚBICA. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	5,91%	1,61%	1,66%	1,47%	1,55%	1,09%	0,94%	0,97%
80	7,72%	1,47%	0,74%	0,49%	0,53%	0,38%	0,32%	0,33%
120	8,09%	1,58%	0,82%	0,46%	0,44%	0,23%	0,19%	0,20%
160	8,24%	1,65%	0,88%	0,50%	0,46%	0,17%	0,15%	0,15%

Fonte: Cruz (2012).

Os resultados dos erros médios percentuais para a simulação da barra engastada com as Funções de Wendland ($\phi_{5,0}$ e $\phi_{3,0}$) e a Função de Wu $\phi_{3,3}$ se encontram na Tabela 34, na Tabela 35, e na Tabela 36.

Embora tenha sido simulada uma função senoidal, observa-se que os erros médios percentuais foram menores do que no teste anterior, na simulação da densidade linear. Do mesmo modo que no exemplo anterior, apenas a malha mais pobre apresenta um comportamento não convergente, que é comumente encontrado em aproximações que usam malhas que possuem poucos pontos no contorno e excessivo número de pontos internos.

A ausência de monotonicidade suave é devida ao remanejamento na posição dos novos pontos internos.

Tabela 33 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	7,95%	1,14%	0,52%	0,13%	0,16%	0,63%	0,67%	0,11%
80	10,10%	2,59%	1,92%	1,13%	1,15%	0,25%	0,12%	0,10%
120	10,61%	2,88%	2,18%	1,36%	1,38%	0,41%	0,25%	0,24%
160	10,88%	3,03%	2,31%	1,47%	1,49%	0,49%	0,32%	0,31%

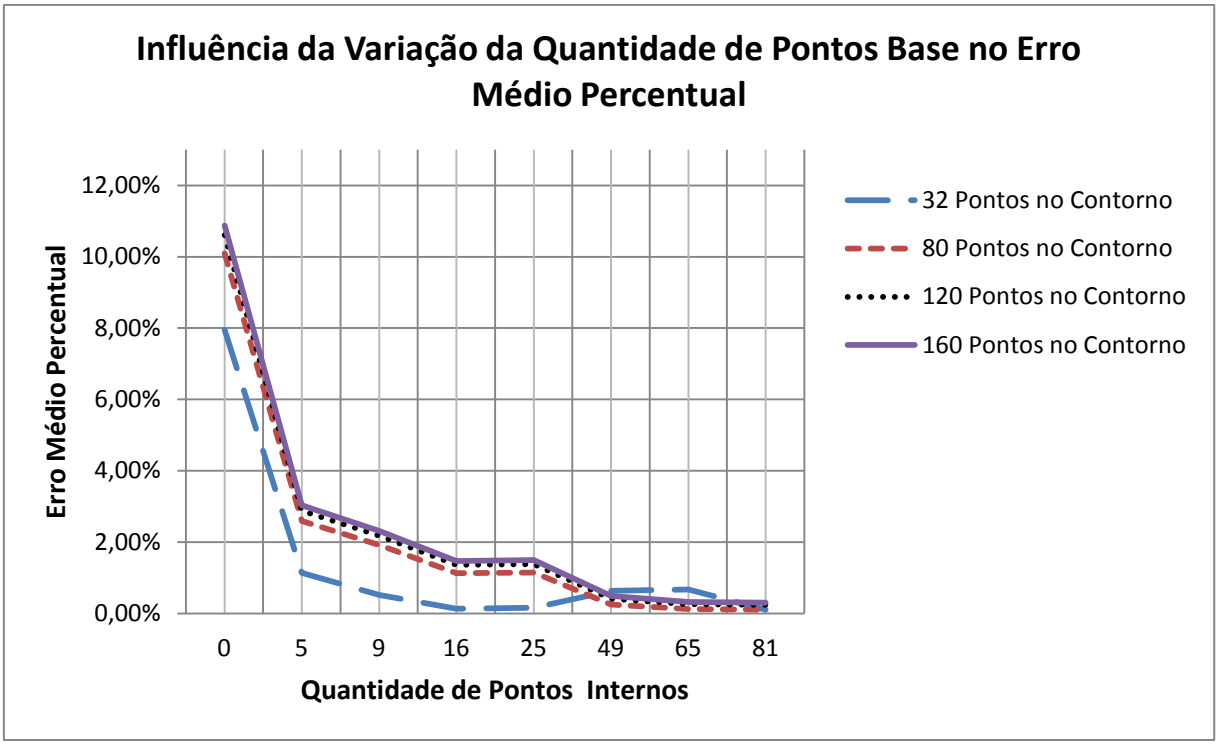


Figura 67 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente.

Tabela 34 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	9,28%	1,00%	0,48%	0,14%	0,16%	0,64%	0,67%	0,71%
80	11,66%	2,39%	1,74%	0,99%	1,02%	0,19%	0,09%	0,08%
120	12,27%	2,68%	2,02%	1,23%	1,26%	0,35%	0,21%	0,20%
160	12,50%	2,82%	2,15%	1,34%	1,37%	0,43%	0,28%	0,26%

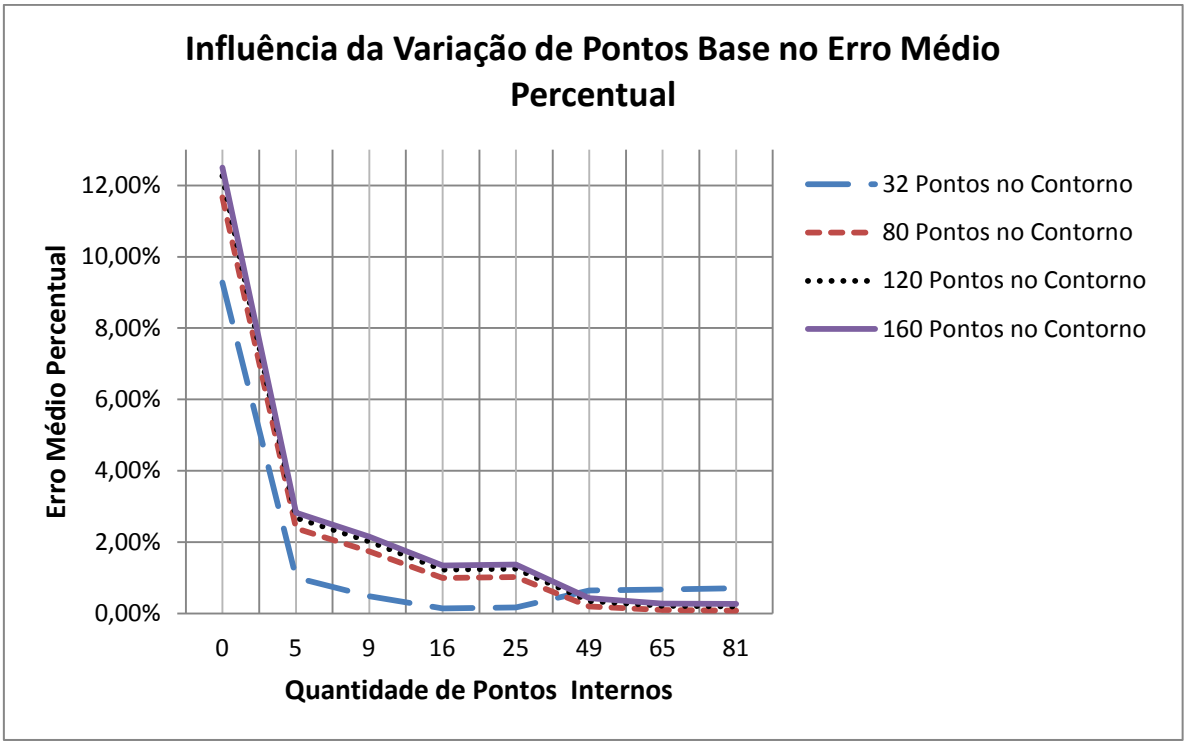


Figura 68 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente.

Tabela 35 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	13,86%	1,84%	0,69%	0,11%	0,17%	0,63%	0,65%	0,70%
80	15,76%	3,18%	1,95%	1,08%	0,99%	1,44%	0,11%	0,79%
120	16,19%	3,47%	2,23%	1,31%	1,24%	0,35%	2,29%	1,99%
160	16,50%	4,68%	2,36%	1,43%	1,35%	0,43%	0,29%	0,26%

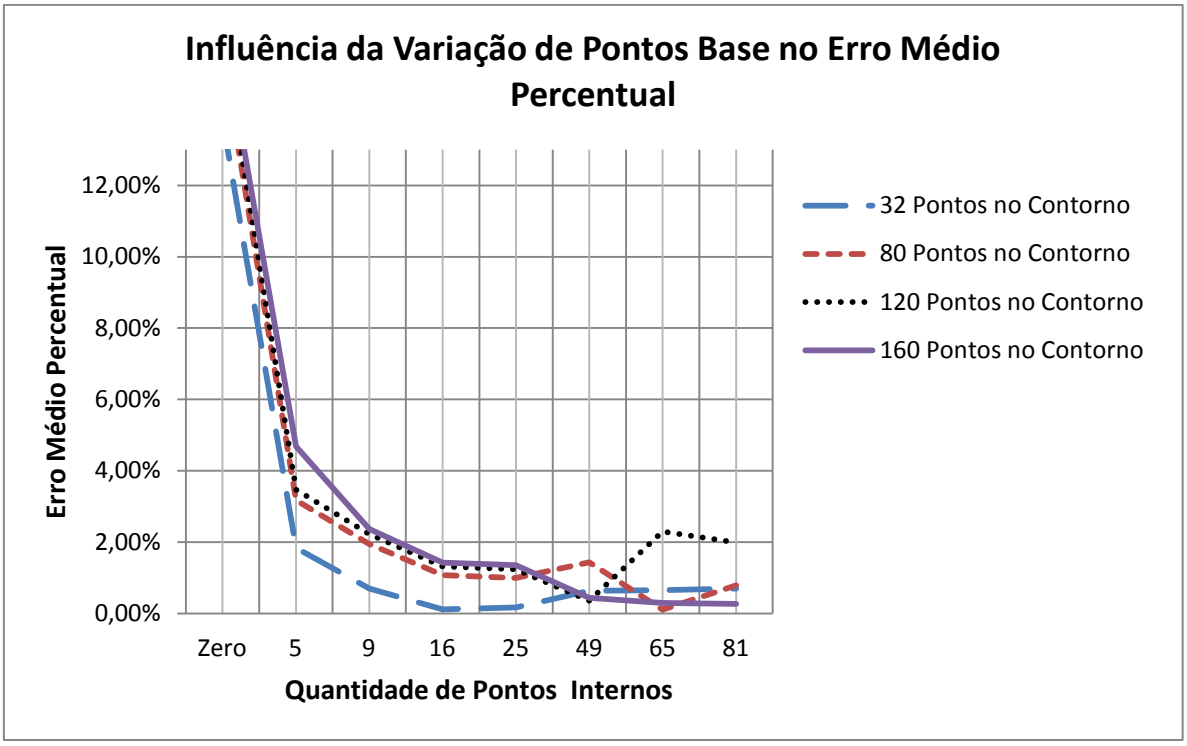


Figura 69 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes sem ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente.

5.5.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável

Agora são apresentados os testes variando o suporte. Apenas a malha mais rica é utilizada por esta finalidade. Os resultados estão sintetizados na Tabela 36.

O gráfico mostrado na Figura 70 ilustra o comportamento apresentado na citada tabela. Pode-se observar o comportamento monótono, com ligeiras oscilações que se devem a pequenos erros no modelo de cômputo dos contornos gerados pelas FBRSC's.

Tabela 36 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Senoidal(Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Erro Médio Percentual		
0,6	40,6755%	41,8442%	45,2292%
0,65	30,9663%	31,8286%	34,6135%
0,7	23,7171%	24,2699%	26,2152%
0,75	15,0314%	14,8838%	22,3207%
0,8	12,8188%	12,9742%	14,8445%
0,85	8,7953%	8,8760%	10,5120%
0,9	5,7874%	6,0128%	7,4840%
0,95	3,1767%	3,4347%	4,3402%
1,1	1,5681%	1,8040%	2,7782%
1,15	1,8235%	2,1435%	3,3111%
1,2	1,5484%	1,8658%	2,9325%
1,25	1,2026%	1,5144%	2,4226%
1,3	0,8258%	1,1258%	1,8276%
1,35	0,3824%	0,6034%	1,0321%
Suporte Pleno	0,3100%	0,2600%	0,2600%
Suporte Otimizado (até 7,0%)	0,8798	0,8828	0,9077

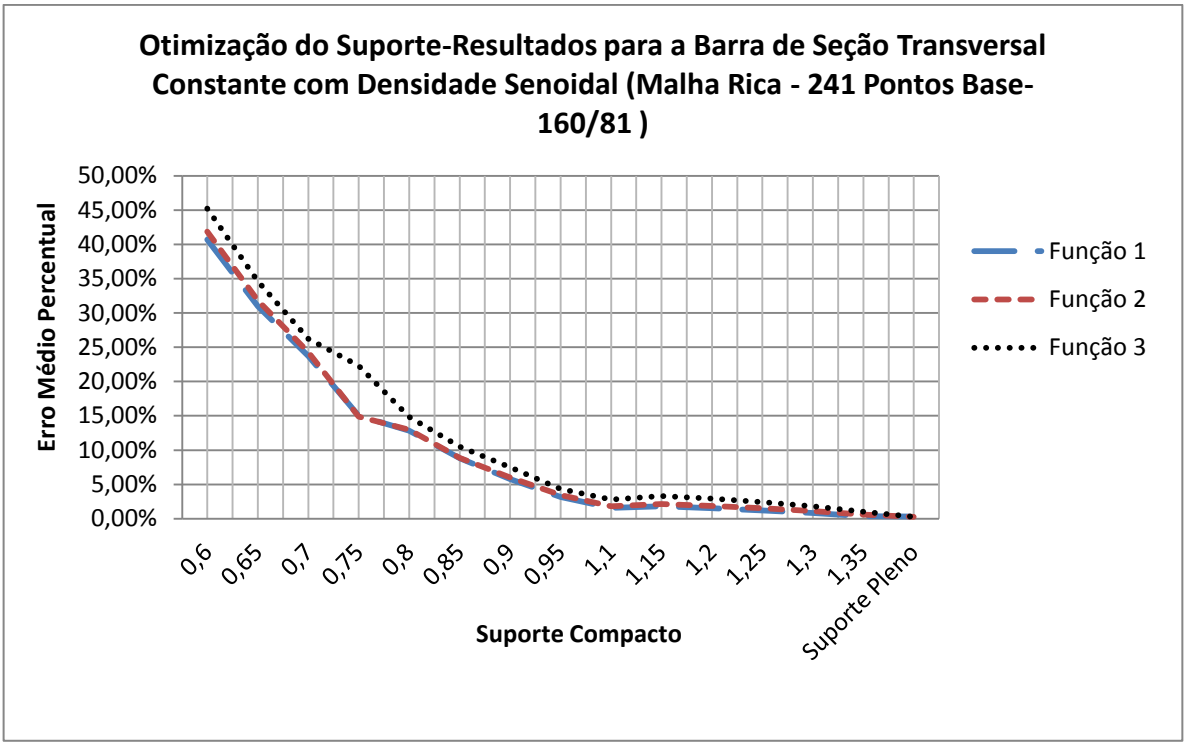


Figura 70 - Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações sem ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade variando senoidalmente e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

5.5.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Senoidal sem Ajuste de Pontos

Durante a análise dos resultados da simulação com a Formulação MECIC sem ajuste de pontos para barra prismática com densidade senoidal, submetida ao próprio peso e engastada no topo (Tabela 33, Tabela 34 e Tabela 35); as Funções de Base Radial de Suporte Global não apresentaram convergência dos erros médios percentuais com o acréscimo de pontos internos na malha de 32 pontos no contorno. Provavelmente, trata-se do efeito já observado anteriormente em problemas de interpolação, em que há excessivo número de pontos internos em malhas pobres no contorno. Para os resultados obtidos a partir de malhas com mais pontos no contorno, houve convergência dos erros médios percentuais, apesar de haver oscilações, à medida que se acrescentavam pontos internos na malha de interpolação.

Comenta-se aqui brevemente que os resultados também não foram satisfatórios para as malhas de interpolação sem pontos internos. A explicação é idêntica a dos casos anteriormente estudados com densidade constante e linear.

Os melhores resultados da simulação com a Formulação MECIC para densidade senoidal e com FBRSC's de suporte global foram obtidos com a Função de Wu $\phi_{3,3}$ com erro médio percentual de **0,080%**, para a malha de 80 x 81; seguida da a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com erro médio percentual de **0,010%**, para a malha: 80 x 81; e, em último lugar, a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ com erro médio percentual de **0,260%**, para a malha: 160 x 81. Faz-se uma ressalva que esses resultados de erros médios percentuais, foram superiores aos resultados, obtidos sob as mesmas condições, das funções radiais tradicionais (simples e cúbica) ilustrados na Tabela 31 e na Tabela 32.

Portanto, assim como nos casos anteriores a este, pode-se afirmar que as três funções são viáveis para aplicações futuras em simulações no ambiente do Método dos Elementos de contorno, visto que os erros médios percentuais se mantiveram em patamares pequenos.

De acordo com os testes com a Formulação MECIC para FBRSC sem ajuste de pontos interpolantes, os gráficos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$ da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$; também apresentaram comportamento monótono decrescente (Figura 70). Foi possível, nos testes, reduzir o suporte das três FBRSC sem perda de precisão dos resultados, mantendo-se o erro médio percentual na faixa de até 7,0%. Os suportes otimizados da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ foram expostos na Tabela 36 e valem respectivamente: 0,880 (valor igual a **62,23%** do suporte global); 0,883 (valor igual a **62,44%** do suporte global) e 0,908 (valor igual **64,21%** do suporte global).

5.6 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE CONSTANTE COM AJUSTE DE PONTOS

Nos testes que se seguem, emprega-se o esquema de ajuste na aproximação, visando reduzir a dimensão final do sistema de equações, mas preservando a qualidade dos resultados. Com vistas a futuras aplicações em dinâmica, nas quais haja exclusivamente pontos nodais de contorno no sistema final de equações do MEC, os pontos internos são considerados exclusivamente como pontos de informação, sendo excluídos do sistema final.

5.6.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global com Ajuste de Pontos

As três FBRSCs testadas anteriormente são testadas com as malhas empregadas nos testes feitos por Cruz (2012) com funções radiais simples e cúbicas. Os resultados estão sintetizados na Tabela 37, na Tabela 38 e na Tabela 39. Os gráficos da Figura 71, da Figura 72 e da Figura 73 ilustram graficamente o exposto nas Tabelas.

Tabela 37 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$, COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	2,57%	1,96%	1,51%	1,28%	0,90%	0,99%	0,98%	0,88%
80	3,72%	3,19%	2,79%	2,37%	1,86%	1,35%	1,21%	0,91%
120	4,18%	3,76%	3,44%	3,05%	2,57%	2,00%	1,81%	1,48%
160	4,40%	4,05%	3,78%	3,44%	3,01%	2,43%	2,23%	1,89%

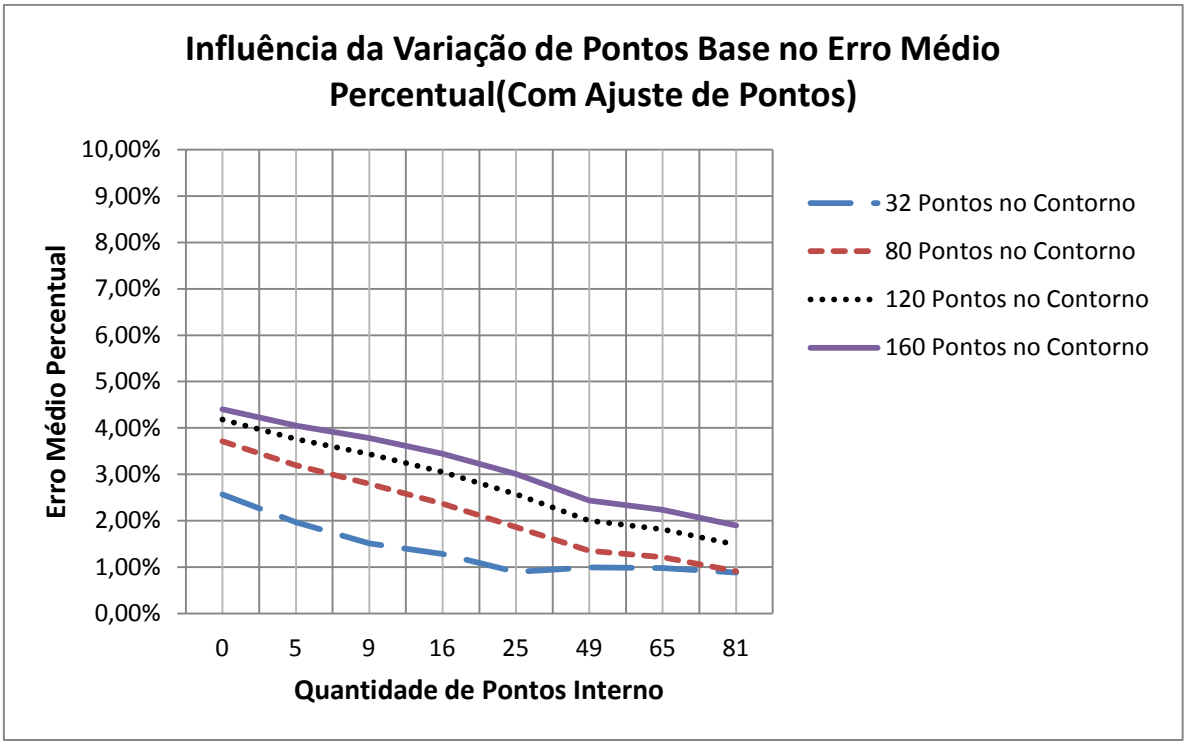


Figura 71 – Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante.

Tabela 38 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	4,16%	2,59%	1,75%	1,24%	0,61%	0,71%	0,70%	0,76%
80	6,21%	5,07%	4,26%	3,50%	2,53%	1,83%	1,64%	1,17%
120	6,79%	5,86%	5,18%	4,46%	3,49%	2,69%	2,43%	1,90%
160	7,05%	6,27%	5,68%	5,03%	4,13%	3,29%	2,99%	2,44%

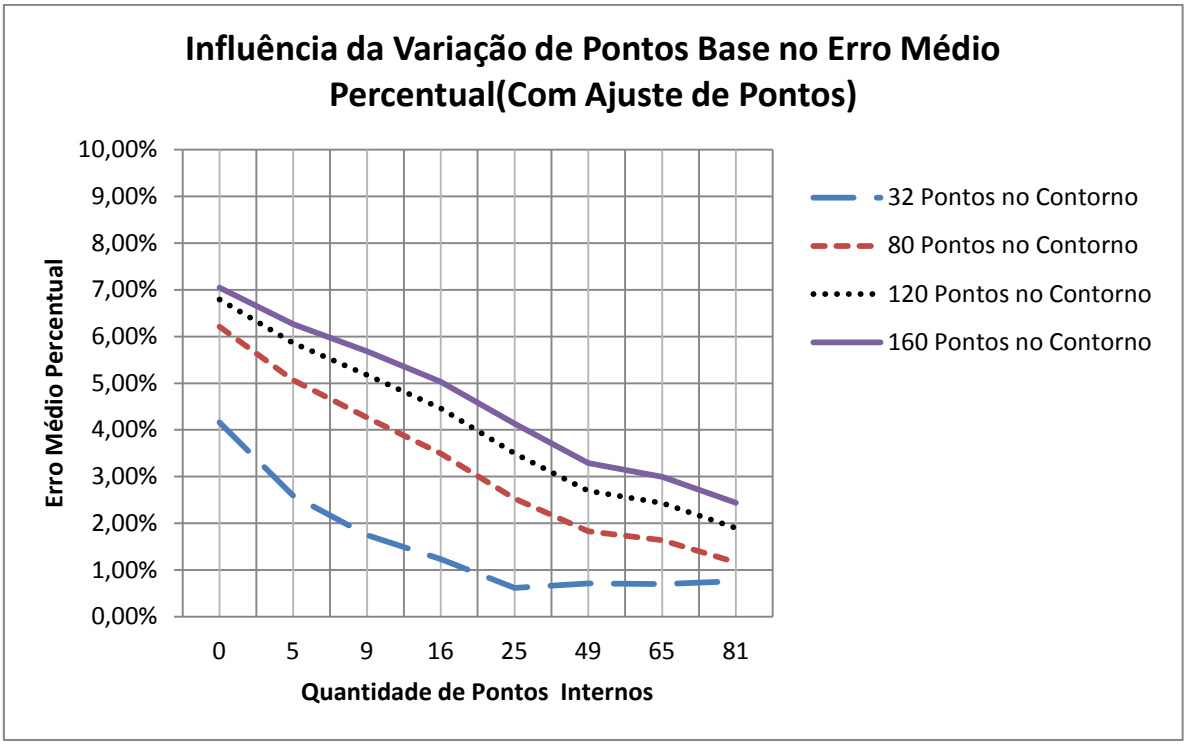


Figura 72- Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante.

Tabela 39 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	4,34%	2,64%	1,74%	1,14%	0,47%	0,45%	0,42%	0,70%
80	7,68%	6,27%	5,30%	4,35%	3,07%	2,26%	2,03%	1,42%
120	8,37%	7,25%	6,43%	5,56%	4,33%	3,37%	3,05%	2,36%
160	8,73%	7,78%	7,07%	6,28%	5,13%	4,13%	3,77%	3,05%

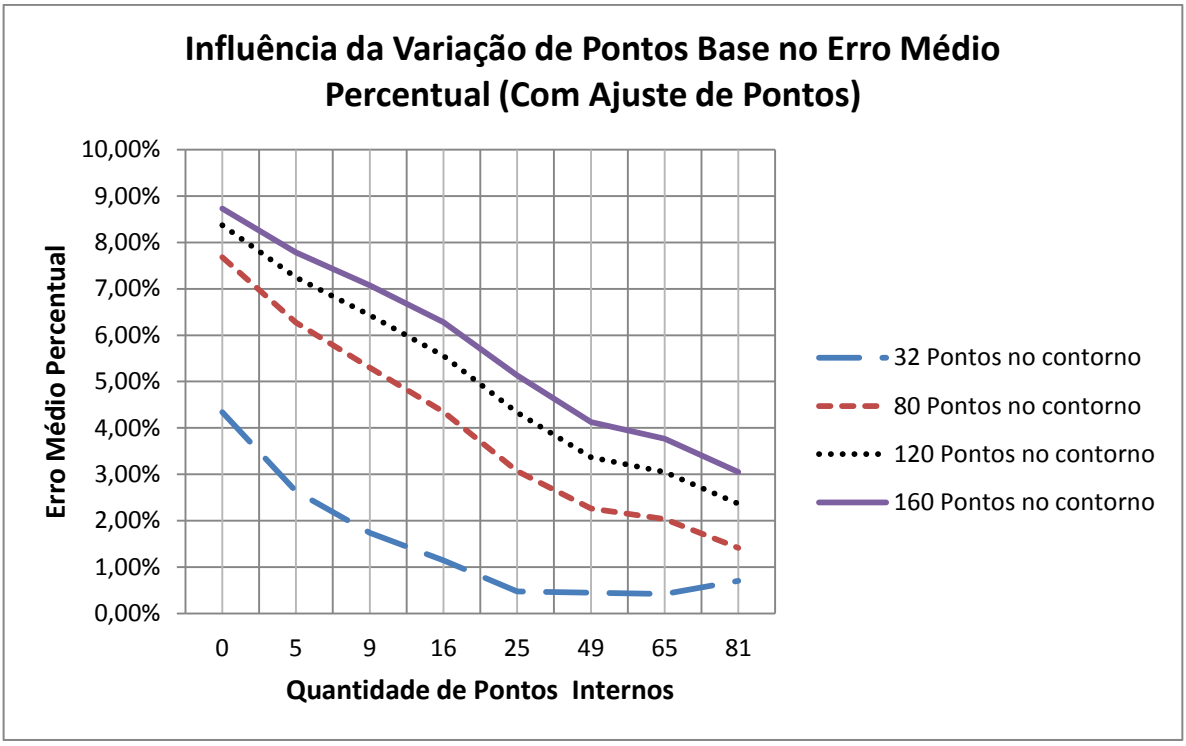


Figura 73 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade constante.

De modo bem distinto ao observado anteriormente, agora os resultados se mostram melhores para as malhas mais pobres. Quanto maior o refinamento, piores são os resultados. Já a introdução de pontos internos melhora efetivamente o desempenho de todas as malhas.

De certo modo, o fato de malhas mais pobres terem produzido melhores resultados já havia sido observado no trabalho de Cruz (2012), mas não de forma tão definida. Dois fatores podem ser considerados na elucidação deste fenômeno. Primeiramente, devem-se levar em conta as características do esquema da Formulação MECIC, que é bastante sensível a ausência de pontos internos. Em segundo lugar, é preciso observar as próprias características das funções radiais diante do procedimento de ajuste. É possível que as FBRSC's selecionadas sejam menos eficazes no esquema de ajuste, da forma como foi proposto, do que na interpolação simples; visto que os resultados foram muito melhores na interpolação simples.

Outro efeito também precisa ser avaliado. A carga constante é um carregamento simples, e pode ser que as malhas de contorno menos refinadas já forneçam

condições suficientes para a boa aproximação, de modo que as malhas mais ricas introduzam excessivas informações que apenas perturbem os resultados.

5.6.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável com Ajuste de Pontos

Nestas experiências, a malha mais rica é tomada para implementação do esquema de ajuste. Veja a Tabela 40.

Tabela 40 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Constante (Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{3,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{2,2}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{2,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Erro Médio Percentual		
0,45	2,5206%	3,9873%	25,9077%
0,5	1,2953%	2,6708%	23,4918%
0,55	0,6563%	1,2485%	20,5827%
0,6	1,7166%	0,6035%	17,5653%
0,65	3,1335%	1,8871%	14,5108%
0,7	4,2699%	3,0867%	11,9224%
0,75	5,1770%	4,0027%	9,6147%
0,8	5,8305%	4,6136%	7,5201%
0,85	6,3129%	5,0183%	5,5789%
0,9	6,6405%	5,2616%	3,7167%
0,95	6,8904%	5,4753%	2,1259%
1,1	5,0499%	3,8394%	2,3734%
1,15	4,0341%	3,1373%	3,0339%
1,2	2,6771%	2,4229%	2,7480%
1,25	2,1636%	2,3866%	2,9857%
1,3	1,9622%	2,4222%	3,1572%
1,35	1,9311%	2,4086%	3,1425%
Suporte Pleno	1,8900%	2,4400%	3,0500%
Suporte Otimizado (até 7,0%)	<0,45	<0,45	0,813

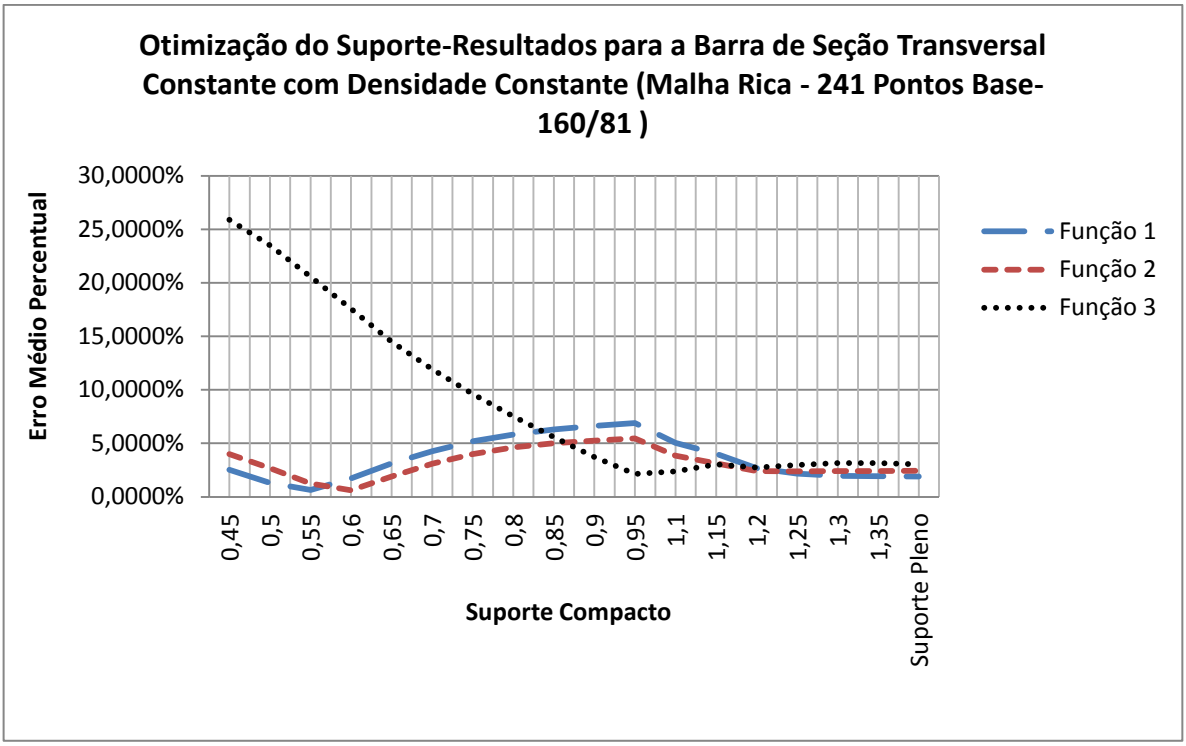


Figura 74 – Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações com ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade constante e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{5,0}$.

As Funções 1, 2 e 3 da legenda da Figura 74 representam respectivamente a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

5.6.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Constante com Ajuste de Pontos

Ressalta-se que, embora não tenham sido mostrados os resultados de malhas menos refinadas, segue-se a mesma tendência mostrada nas simulações sem ajuste de pontos, apresentadas na Tabela 37, na Tabela 38 e na Tabela 39. Agora apenas o suporte foi alterado, de modo de que erro percentual dos resultados de testes com a Formulação MECIC com ajuste de pontos sem pontos internos são piores que os resultados dos testes com pontos internos, para as três Funções de Base Radial de Suporte Global aqui testadas.

Também vale nestas experiências de variação do suporte a conclusão de que há forte dependência da existência de pontos de informação internos na malha de interpolação para se executar uma boa aproximação por ajuste da ação de domínio no interior do domínio do problema.

Assim, também foi observado que os valores dos erros médios percentuais mínimos cresceram quanto maior foi a quantidade de pontos no contorno.

As malhas utilizadas nos testes acima também estão devidamente representadas no APÊNDICE E -.

Em relação aos testes com a Formulação MECIC para Funções de Base Radial de Suporte Global, os melhores resultados foram obtidos com a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ com erro médio percentual de **0,700%**, para a malha: 32 x 81; seguido da Função de Wu $\phi_{3,3}$ com erro médio percentual de **0,760%**, para a malha: 32 x 81; e, em último lugar, a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com erro médio percentual de **0,880%**, para a malha: 32 x 81.

Assim, de acordo com os testes com a Formulação MECIC para FBRSC com ajuste de pontos interpolantes, os gráficos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$. Considerando que o comportamento não foi monótono decrescente (Figura 74), foi possível reduzir o suporte das três FBRSCs sem perda de precisão dos resultados, mantendo-se o erro médio percentual na faixa de até 7,0%. Os suportes otimizados da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ foram expostos na Tabela 40, e valem respectivamente: valor menor que 0,45 (valor menor que **31,82%** do suporte global); valor menor que 0,45 (valor menor que **31,82%** do suporte global) e 0,813 (valor igual **57,49%** do suporte global).

5.7 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE LINEAR COM AJUSTE DE PONTOS

O mesmo esquema de teste anterior é aplicado agora para a densidade linear. Emprega-se o esquema de ajuste na aproximação, visando reduzir a dimensão final

do sistema de equações, mas preservando a qualidade dos resultados. São preservados no sistema matricial final apenas os pontos de contorno.

5.7.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global com Ajuste de Pontos

Tabela 41 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	12,12%	8,36%	6,25%	4,36%	2,18%	1,19%	0,98%	0,17%
80	13,93%	11,92%	10,53%	8,96%	6,97%	5,17%	4,59%	3,48%
120	14,31%	12,84%	11,76%	10,45%	8,72%	6,89%	6,23%	5,08%
160	14,52%	13,34%	12,44%	11,33%	9,78%	8,03%	7,36%	6,22%

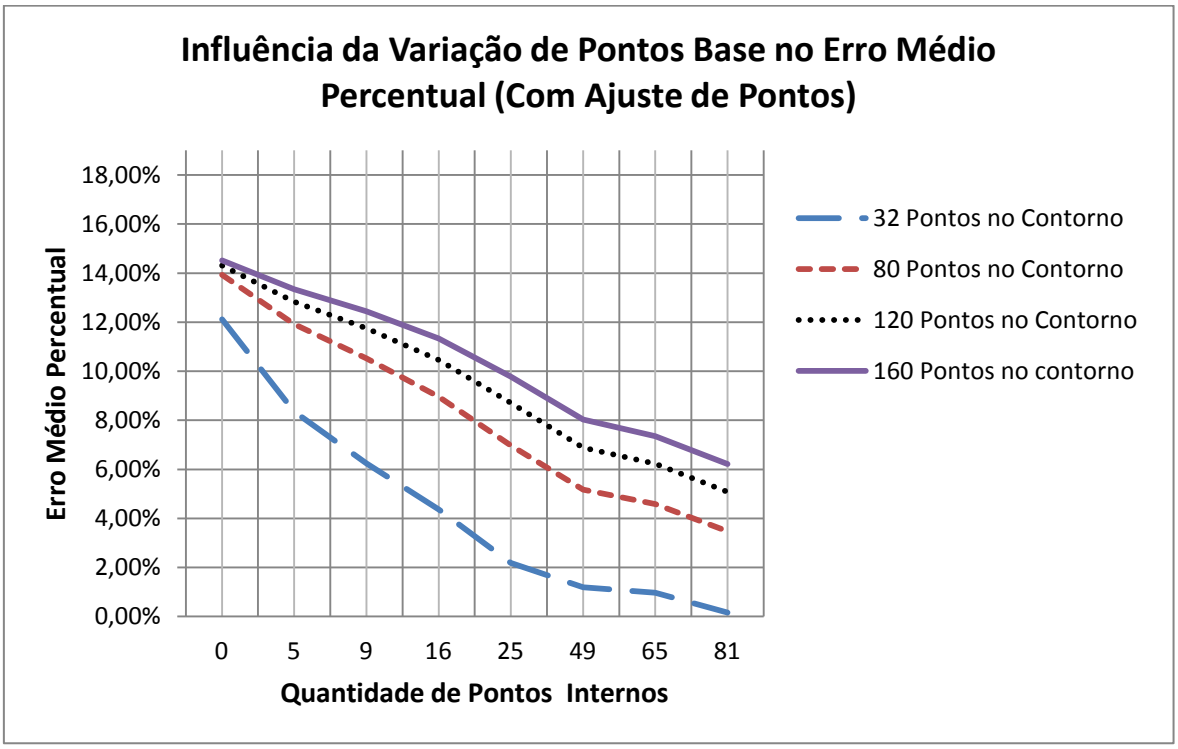


Figura 75 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente.

Tabela 42 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	12,83%	8,12%	5,77%	3,85%	1,74%	0,87%	0,66%	0,16%
80	14,69%	11,98%	10,20%	8,40%	6,16%	4,47%	3,94%	2,86%
120	15,21%	13,13%	11,66%	10,07%	7,97%	6,13%	5,50%	4,32%
160	15,51%	13,79%	12,52%	11,10%	9,13%	7,29%	6,61%	5,40%

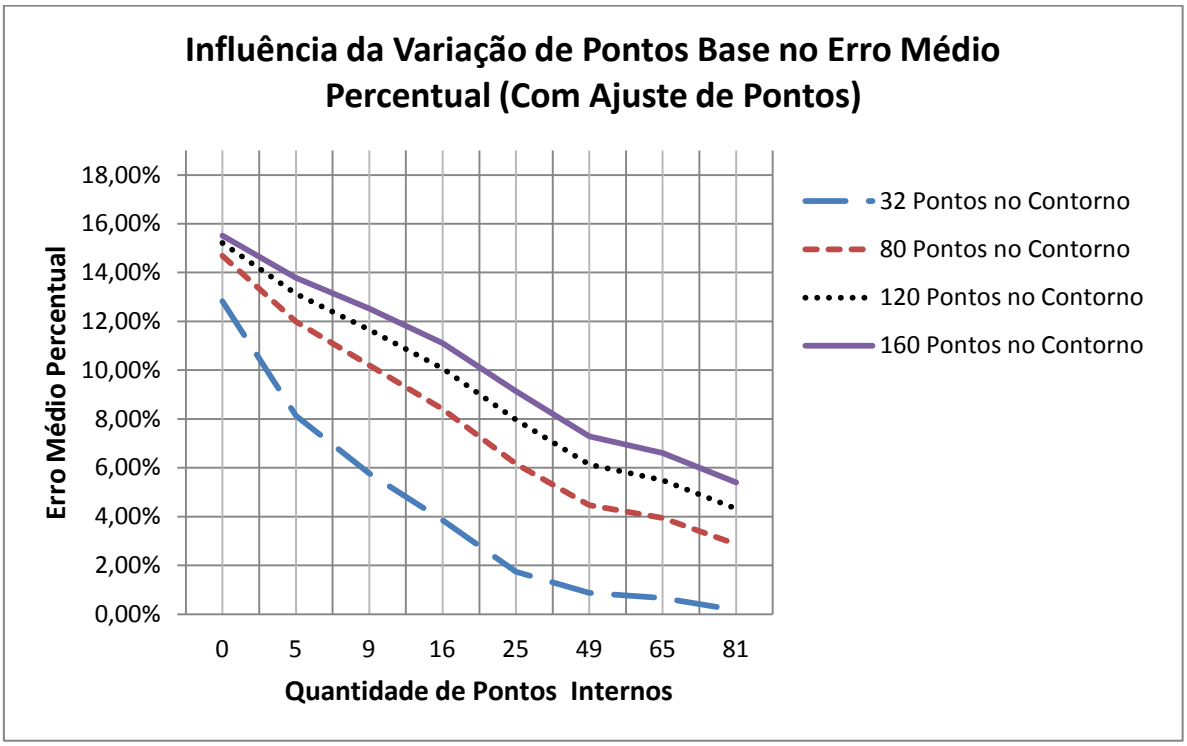


Figura 76 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente.

Tabela 43 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	17,97%	11,47%	7,95%	5,32%	1,93%	1,22%	1,09%	0,14%
80	19,43%	15,88%	13,42%	11,05%	7,77%	5,81%	5,22%	3,66%
120	19,79%	17,12%	15,15%	13,09%	10,11%	7,93%	7,21%	5,55%
160	19,98%	17,79%	16,13%	14,32%	11,60%	9,39%	8,61%	6,93%

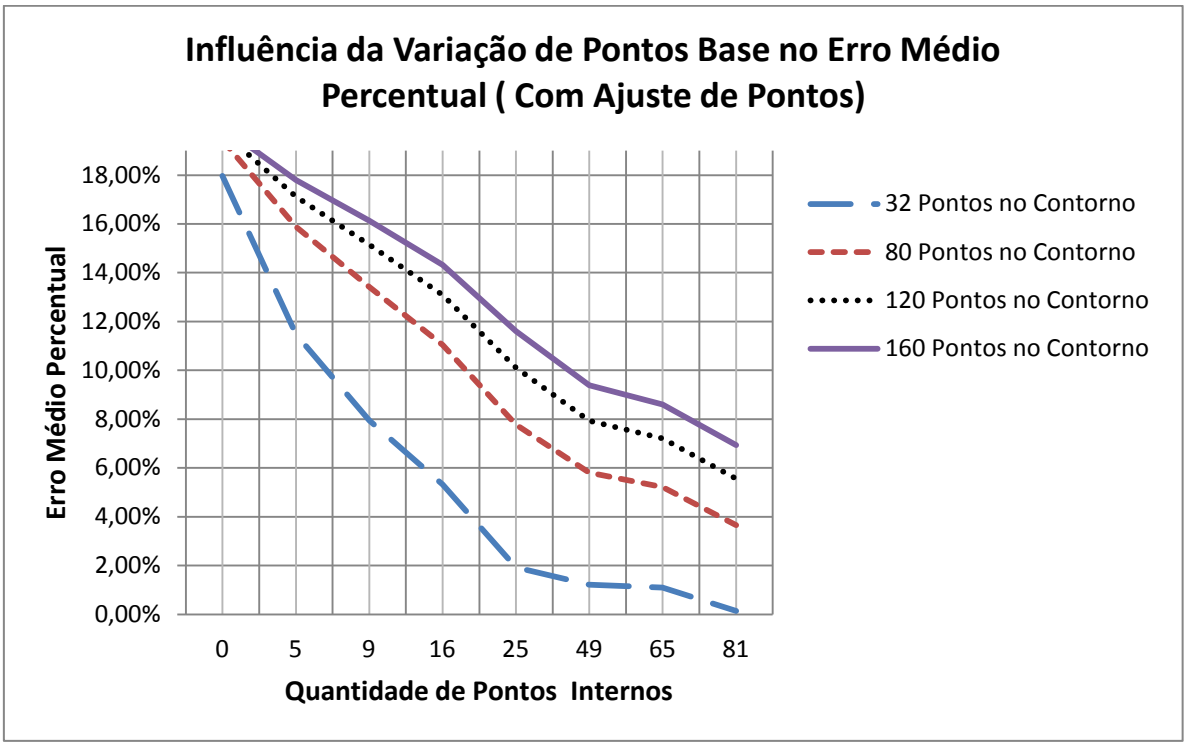


Figura 77 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando linearmente.

Pode-se perceber pela comparação dos resultados expresso na Tabela 41, na Tabela 42, e na Tabela 43, que para todas as FBRSCs o erro médio percentual referente a malha mais pobre melhorou na simulação do problema com densidade linear, enquanto os valores das malhas mais ricas pioraram. Para demonstrar isto, na Tabela 44 foram inseridos os valores referentes a simulação do Campo Constante e do Campo Linear com a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com suporte global, para as malhas mais rica e mais pobre.

Tabela 44 – TABELA COMPARATIVA DOS RESULTADOS DOS ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM DENSIDADE CONSTANTE E LINEAR, COM RESPECTIVAMENTE 32 E 160 PONTOS NO CONTORNO. A FUNÇÃO TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\Phi_{5,0}$.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
CONST - 32	2,57%	1,96%	1,51%	1,28%	0,90%	0,99%	0,98%	0,88%
LINEAR - 32	12,12%	8,36%	6,25%	4,36%	2,18%	1,19%	0,98%	0,17%
CONST - 160	4,40%	4,05%	3,78%	3,44%	3,01%	2,43%	2,23%	1,89%
LINEAR - 160	14,52%	13,34%	12,44%	11,33%	9,78%	8,03%	7,36%	6,22%

Vê-se que, embora o erro médio percentual seja bem mais alto na ausência de pontos internos, com a inserção destes o erro diminuiu bastante na simulação do campo linear. Já o mesmo não pode ser observado na simulação com a malha mais rica. Os erros médios percentuais que eram grandes na ausência de pontos internos ficaram maiores; mas a inserção de pontos internos não pode melhorar o resultado.

5.7.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável com Ajuste de Pontos

Tabela 45 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Linear(Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) = \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) = \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{2,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) = \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Erro Médio Percentual		
0,45	17,9429%	19,5967%	43,1829%
0,5	15,9574%	17,4935%	39,6374%
0,55	13,6589%	15,1230%	35,4088%
0,6	11,4144%	12,8101%	31,1201%
0,65	9,2285%	10,4590%	26,9059%
0,7	7,3662%	8,4266%	23,2348%
0,75	5,7929%	6,7383%	19,9500%
0,8	4,5310%	5,3322%	16,8056%
0,85	3,5072%	4,1594%	13,6785%
0,9	2,6454%	3,1859%	10,5840%
0,95	1,9553%	2,3587%	7,4297%
1,1	2,1491%	2,4231%	3,1313%
1,15	2,6109%	2,8801%	3,4960%
1,2	3,1731%	3,2010%	3,2806%
1,25	3,8096%	3,5841%	3,5574%
1,3	4,4575%	3,9197%	3,9541%
1,35	5,0685%	4,1892%	4,3912%
Suporte Pleno	6,2200%	5,4000%	6,9300%
Suporte Otimizado (até 7,0%)	0,712	0,742	0,965

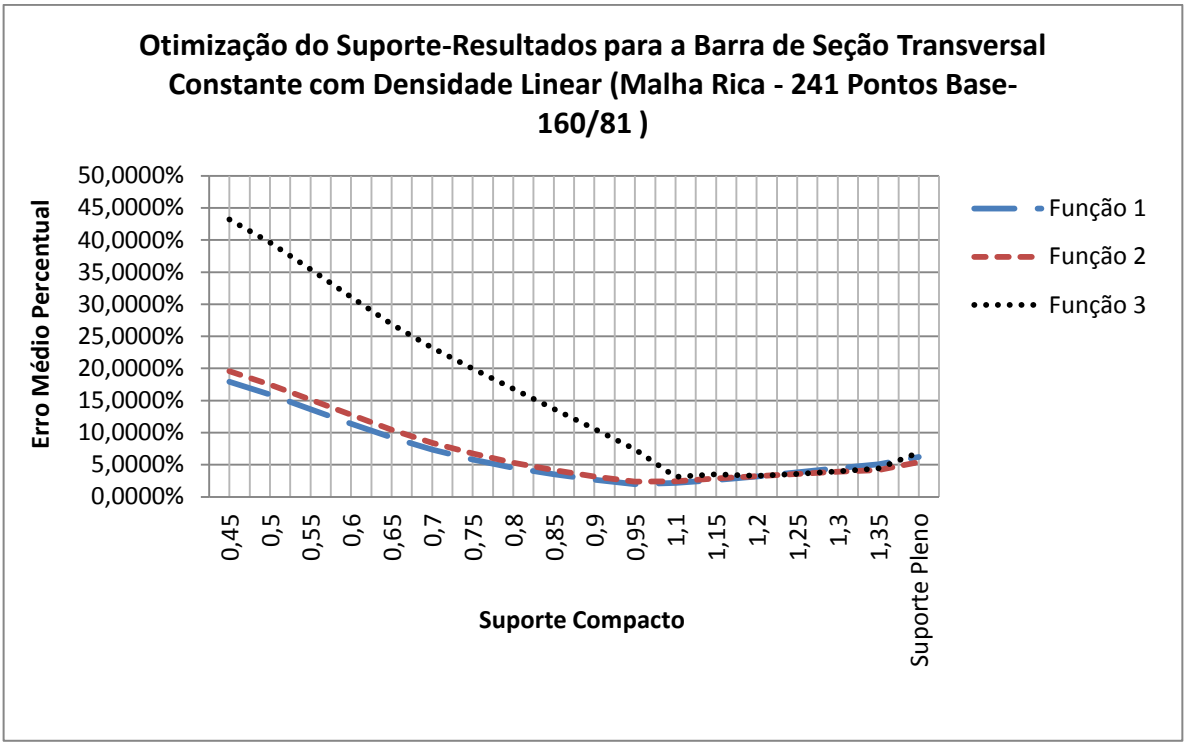


Figura 78 - Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações com ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade variando linearmente e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

As Funções 1, 2 e 3 da legenda da Figura 78 representam respectivamente a Função de Wendland $\phi_{5,0}\,(r)$, a Função de Wu $\phi_{3,3}\,(r)$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}\,(r)$.

5.7.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Linear com Ajuste de Pontos

Durante a análise dos resultados da simulação, com a Formulação MECIC com ajuste de pontos para barra prismática, com densidade linear, submetida ao próprio peso e engastada no topo (Tabela 41, Tabela 42 e Tabela 43); as Funções de Base Radial de Suporte Global apresentaram convergência dos erros médios percentuais com o acréscimo de pontos internos em todas as malhas utilizadas nos testes.

Da mesma forma que no caso anterior, mantendo-se a quantidade de pontos no contorno, houve redução do erro médio percentual com o acréscimo de pontos internos à malha de interpolação.

Comenta-se aqui brevemente que os resultados também não foram satisfatórios para as malhas de interpolação sem pontos internos. A explicação é idêntica ao caso anteriormente estudado com densidade constante.

Os melhores resultados da simulação da Função de Base Radial de Suporte Global com a Formulação MECIC para densidade linearmente variável foram obtidos com a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ com erro médio percentual de **0,140%**, para a malha: 32 x 81; seguido da Função de Wu $\phi_{3,3}$ com erro médio percentual de **0,160%**, para a malha: 32 x 81; e, em último lugar, a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ com erro médio percentual de **0,170%**, para a malha: 32 x 81.

Assim como no caso anterior, os valores dos erros médios percentuais mínimos deveriam ser menores, quanto maior a quantidade de pontos no contorno, para as malhas com 81 pontos internos, o que não foi verificado nos testes. A justificativa para esse comportamento também anômalo é a mesma que do caso anterior, para densidade constante.

De acordo com os testes com a Formulação MECIC para FBRSC com ajuste de pontos interpolantes, os gráficos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$; também não apresentaram comportamento monótono decrescente (Figura 78).

No gráfico mostrado na Figura 78 apresentou-se apenas o resultado para a malha mais refinada, e se pode perceber que a curva de erro médio percentual parece passar por um ponto de mínimo e para depois crescer. Este mínimo pode estar relacionado à suficiência de um dado valor de suporte para representar a função a ser aproximada.

Mesmo assim, foi possível nos testes reduzir o suporte das três FBRSC sem perda de precisão dos resultados, mantendo-se o erro médio percentual na faixa de até 7,0%. Os suportes otimizados da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ foram expostos na Tabela 45 e valem

respectivamente: 0,712 (valor igual a **50,35%** do suporte global); 0,742 (valor igual a **52,47%** do suporte global) e 0,965 (valor igual **68,24%** do suporte global).

5.8 SIMULAÇÃO COM DENSIDADE SENOIDAL COM AJUSTE DE PONTOS

5.8.1 Simulação com FBRSC de Suporte Global com Ajuste de Pontos

Tabela 46 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	9,12%	6,22%	4,62%	3,17%	1,52%	0,73%	0,57%	0,16%
80	11,12%	9,51%	8,42%	7,16%	5,62%	4,13%	3,64%	2,77%
120	11,62%	10,43%	9,57%	8,51%	7,12%	5,61%	5,06%	4,13%
160	11,89%	10,93%	10,21%	9,30%	8,07%	6,60%	6,03%	5,11%

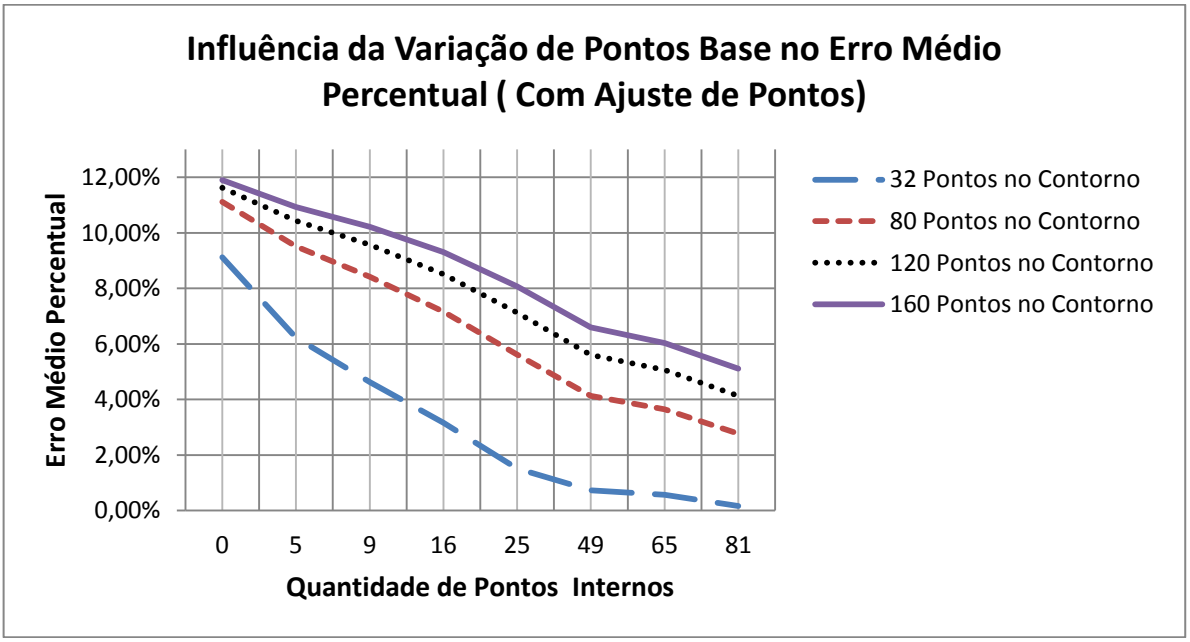


Figura 79 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{5,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente.

Tabela 47 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	0	5	9	16	25	49	65	81
32	10,15%	6,35%	4,47%	2,92%	1,24%	0,54%	0,49%	0,28%
80	12,46%	10,16%	8,66%	7,13%	5,24%	3,79%	3,33%	2,42%
120	13,09%	11,30%	10,04%	8,68%	6,87%	5,28%	4,73%	3,73%
160	13,32%	11,84%	10,77%	9,55%	7,88%	6,27%	5,68%	4,65%

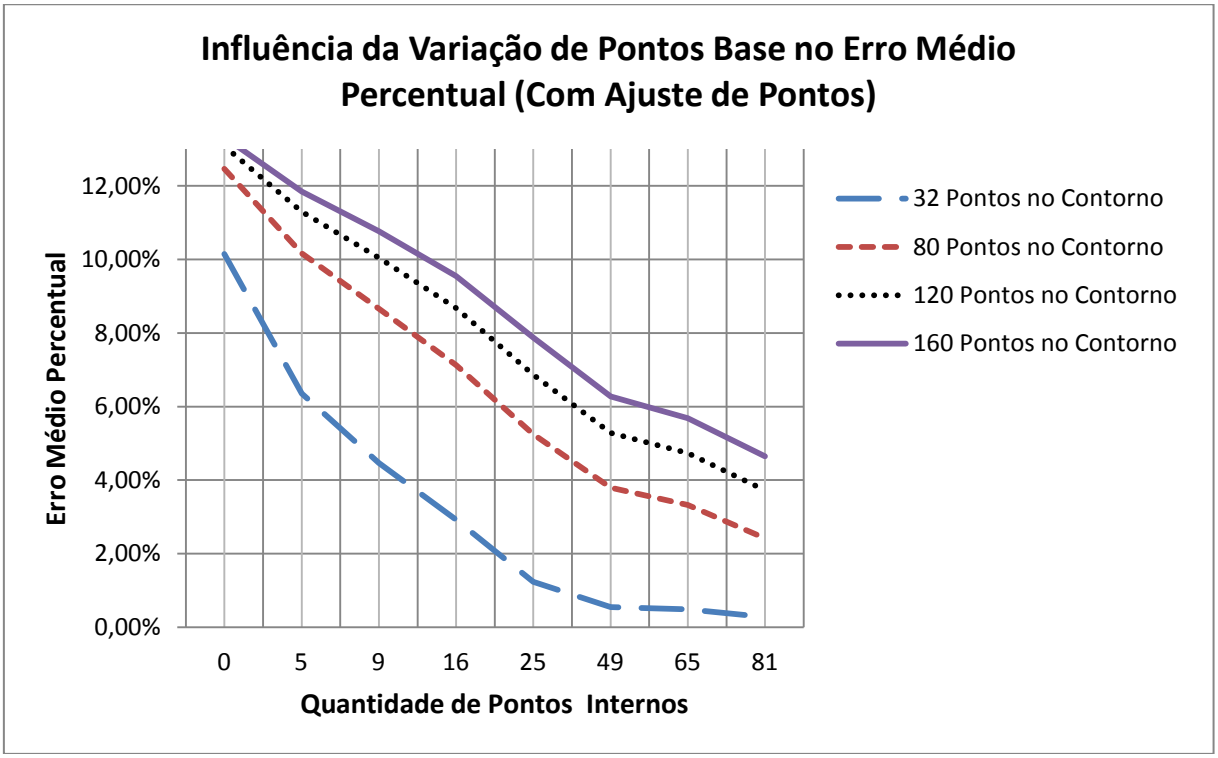


Figura 80 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wu $\phi_{3,3}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente.

Tabela 48 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	9,12%	6,22%	4,62%	3,17%	1,52%	0,73%	0,57%	0,16%
80	11,12%	9,51%	8,42%	7,16%	5,62%	4,13%	3,64%	2,77%
120	11,62%	10,43%	9,57%	8,51%	7,12%	5,61%	5,06%	4,13%
160	11,89%	10,93%	10,21%	9,30%	10,10%	8,17%	7,48%	6,03%

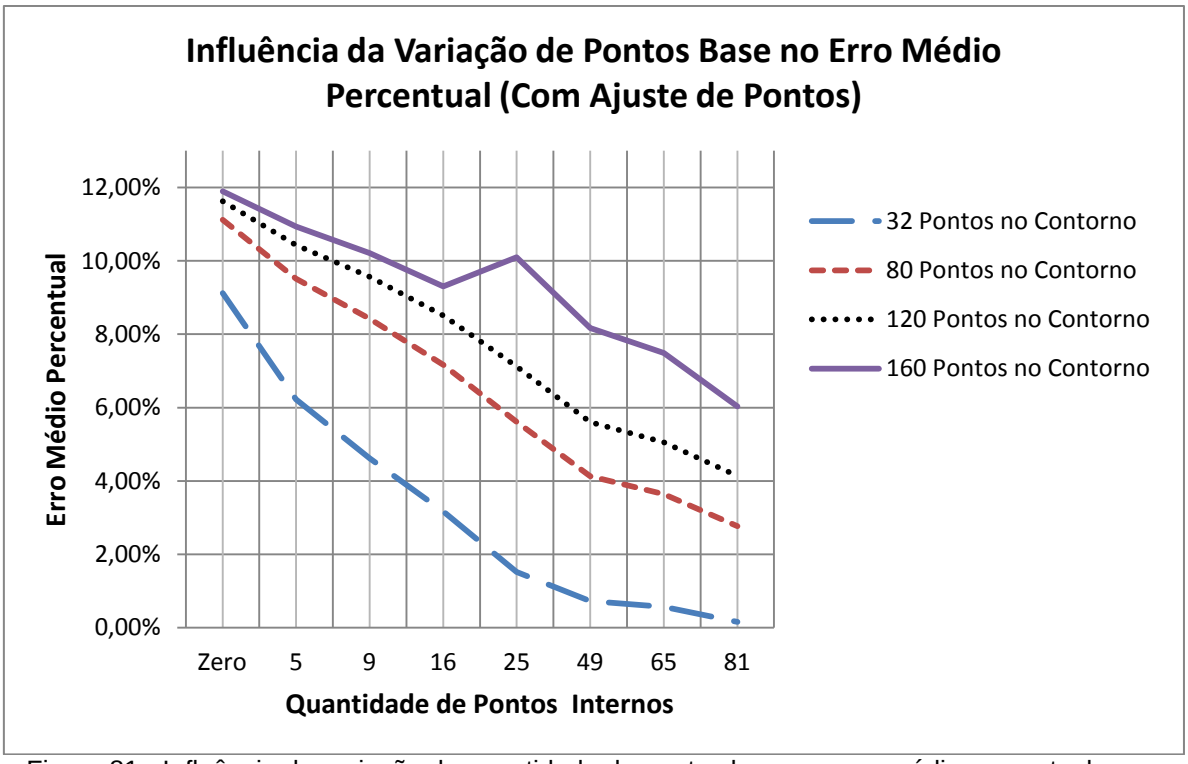


Figura 81 - Influência da variação da quantidade de pontos base no erro médio percentual, para a Função de Wendland $\phi_{3,0}$ em testes com ajuste de pontos interpolantes com barra de seção constante e densidade variando senoidalmente.

Apesar de pequenas diferenças, pode-se perceber que de modo geral o comportamento das FBRSC's na aproximação do campo senoidal foi similar ao apresentado para simulação do campo linear.

5.8.2 Simulação com FBRSC de Suporte Variável com Ajuste de Pontos

Tabela 49 - ERROS MÉDIOS PERCENTUAIS PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Senoidal(Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Erro Médio Percentual		
0,45	14,5611%	16,1792%	39,4291%
0,5	12,7437%	14,2542%	36,1390%
0,55	10,6133%	12,0580%	32,2029%
0,6	8,5402%	9,9300%	28,1921%
0,65	6,5268%	7,7706%	24,2305%
0,7	4,9586%	5,9300%	20,7931%
0,75	3,7343%	4,5215%	17,7227%
0,8	2,8606%	3,4163%	14,7998%
0,85	2,1311%	2,5888%	11,9124%
0,9	1,6207%	2,0039%	9,0787%
0,95	1,5425%	1,6385%	6,2166%
1,1	1,8515%	2,0998%	2,8067%
1,15	2,0951%	2,4536%	3,2006%
1,2	2,5068%	2,7414%	3,0610%
1,25	3,0494%	3,1192%	3,3162%
1,3	3,6315%	3,4416%	3,6415%
1,35	4,1600%	3,6505%	3,9581%
Suporte Pleno	5,1100%	4,6500%	6,0300%
Suporte Otimizado (até 7,0%)	0,638	0,671	0,936

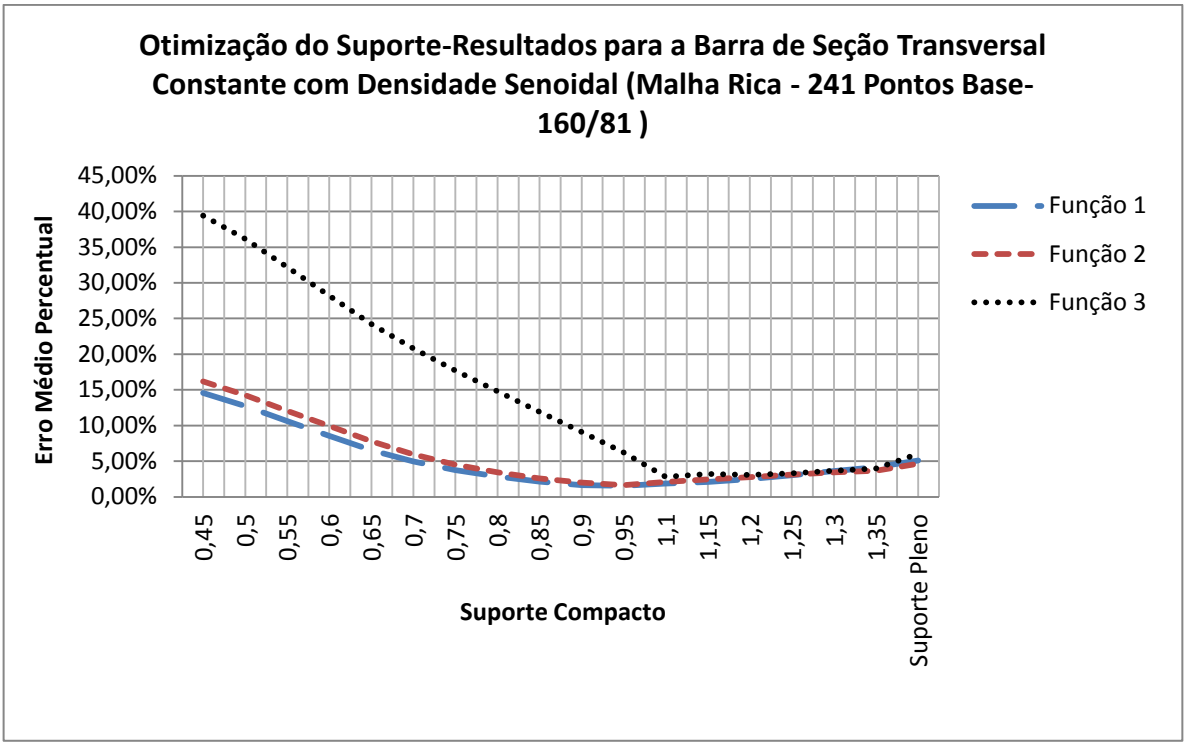


Figura 82 - Influência da redução do suporte da FBRSC no erro médio percentual em simulações com ajuste de pontos interpolantes com barra de densidade variando senoidalmente e seção transversal constante. Visualiza-se, neste gráfico, o comportamento das três FBRSC analisadas no trabalho: a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

As Funções 1, 2 e 3 da legenda da Figura 82 representam respectivamente a Função de Wendland $\phi_{5,0}$, a Função de Wu $\phi_{3,3}$ e a Função de Wendland $\phi_{3,0}$.

5.8.3 Discussão dos Resultados para a Densidade Senoidal com Ajuste de Pontos

Durante a análise dos resultados da simulação, com a Formulação MECIC com ajuste de pontos para barra prismática, com densidade senoidal, submetida ao próprio peso e engastada no topo (Tabela 46, Tabela 47 e Tabela 48), as Funções de Base Radial de Suporte Global apresentaram convergência dos erros médios percentuais com o acréscimo de pontos internos em todas as malhas utilizadas nos testes.

Da mesma forma que no caso anterior, mantendo-se a quantidade de pontos no contorno, houve redução do erro médio percentual com o acréscimo de pontos internos à malha de interpolação.

Faz-se uma ressalva que, para o caso simulado com Função de Wendland $\phi_{3,0}$ para a malha com 160 pontos no contorno, houve pequena oscilação do erro médio percentual.

Comenta-se aqui brevemente que os resultados também não foram satisfatórios para as malhas de interpolação sem pontos internos. A explicação é idêntica aos de mais casos anteriormente estudados com densidade constante e linear.

Os melhores resultados da simulação com Funções de Base Radial de Suporte Global com a Formulação MECIC para densidade senoidal foram obtidos com as Funções de Wendland $\phi_{3,0}$ e $\phi_{5,0}$ com erros médios percentuais de **0,160%**, para a malha: 32 x 81; seguido da Função de Wu $\phi_{3,3}$ com erro médio percentual de **0,280%**, para a malha: 32 x 81. A princípio, assim como no caso anterior a este, pode-se afirmar que as três funções são viáveis para aplicações futuras em simulações no ambiente do Método dos Elementos de contorno, visto que os erros médios percentuais variaram muito pouco e se mantiveram em patamares pequenos. Todavia, os valores dos erros médios percentuais mínimos deveriam ser menores, quanto maior a quantidade de pontos no contorno, para as malhas com 81 pontos internos, o que não foi verificado nos testes. A justificativa para esse comportamento também anômalo é a mesma que do caso anterior, para densidade linear e constante.

De acordo com os testes com a Formulação MECIC para FBRSC com ajuste de pontos interpolantes, os gráficos da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$; também não apresentaram comportamento monótono decrescente (Figura 82).

No gráfico mostrado na Figura 82 também apresentou apenas o resultado para a malha mais refinada, e nela pode-se perceber que a curva de erro médio percentual também parece passar por um ponto de mínimo para depois crescer. Assim como na seção anterior, este mínimo pode estar relacionado à suficiência de um dado valor de suporte para representar a função a ser aproximada.

Mesmo assim, foi possível nos testes reduzir o suporte das três FBRSC sem perda de precisão dos resultados, mantendo-se o erro médio percentual na faixa de até 7,0%. Os suportes otimizados da Função de Wendland $\phi_{5,0}$, da Função de Wu $\phi_{3,3}$ e da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ foram expostos na Tabela 49 e valem respectivamente: 0,638 (valor igual a **45,11%** do suporte global); 0,671 (valor igual a **47,45%** do suporte global) e 0,936 (valor igual **66,19%** do suporte global).

6 CONCLUSÃO

Durante a etapa inicial da pesquisa, foram realizados testes bidimensionais com volume para cinco campos escalares Z(x, y) distintos, sob o molde da Formulação MECIC, com o intuito de identificar quais são as FBRSC's que apresentam os melhores e os piores resultados.

De maneira geral, o desempenho das funções radiais para a malha com pontos base internos (Figura 9) foi muito bom, embora algumas funções apresentassem erros relativos mais significativos e comportamento não monótonos; que poderiam decorrer de problemas de truncamento numérico, oscilações da função radial, alta ordem dos polinômios, mau condicionamento numérico, entre outros fatores.

As FBRSC's listadas na Tabela 50 são aquelas que, apresentaram resultados excelentes em todos os casos, isto é, para o Campo Constante, para os Campos Paraboloides e para campo regido pela Função de Franke.

Essas FBRSC's apresentaram comportamento gráfico monótono decrescente, no que diz respeito aos gráficos de erro relativo do teste vs. quantidade de pontos base da malha de interpolação.

Vale apena salientar que as Funções de Wendland ($\phi_{5,0}$, e $\phi_{3,0}$) e a Função de Wu $\phi_{3,3}$ não apresentaram comportamento gráfico monótono decrescente para o Campo Paraboloide, mas os erros relativos se mantiveram estabilizados num patamar mínimo, à medida que se aumentava a quantidade de pontos base da malha de interpolação.

Tabela 50 - LISTA CONTENDO AS TRÊS MELHORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO.

Colocação	**Família de FBRSC:**	**FBRSC:**
1°	Função de Wendland:	$\phi_{5,0}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1 - \frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_{+}^{3}$

2°	Função de Wu:	$\phi_{3,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^4 \left[16+29\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+20\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2 + 5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3\right]$
3°	Função de Wendland:	$\phi_{3,0}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^2$

Em relação às FBRSC's que apresentaram os piores resultados, chegou-se a um consenso de que as funções listadas na Tabela 51, no que diz respeito a sua aplicação no procedimento de interpolação dos campos escolhidos para realização dos testes, não satisfizeram a condição de comportamento gráfico monótono decrescente, e não mantiveram os erros relativos em patamares aceitáveis, à medida que se refinou a malha de interpolação com o aumento de pontos base.

Tabela 51- LISTA CONTENDO AS TRÊS PIORES FBRSC'S EM TERMOS DE MAGNITUDE DOS ERROS E COMPORTAMENTO GRÁFICO.

Colocação	**Família de FBRSC:**	**FBRSC:**
1°	Função de Wu:	$\phi_{0,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^7 \left[5+35\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+101\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2+147\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3 + 101\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^4+35\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^5+5\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^6\right]$
2°	Função de Wendland:	$\phi_{3,2}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^6 \left[35\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2+18\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+3\right]$
3°	Função de Wendland:	$\phi_{3,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1-\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right]_+^8 \left[32\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^3+25\left(\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}\right)^2+8\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\delta}}+1\right]$

Salienta-se também que o comportamento gráfico monótono decrescente se mostrou vinculado ao grau da FBRSC, de modo que se verificou uma maior instabilidade dos resultados dos erros relativos com o refino da malha de interpolação para aquelas que possuem maior grau.

É importante lembrar que as Funções de Wu mostraram-se mais suscetíveis a essa instabilidade dos resultados dos erros relativos que as Funções de Wendland.

Observou-se também que os resultados dos testes com a malha sem pontos base internos (Figura 10) não foram satisfatórios. A pesar da ocorrência do comportamento gráfico monótono decrescente em alguns casos simulados, os valores dos erros relativos se mantiveram em patamares elevados. Portanto, afirma-se que necessariamente deverão existir pontos de informação, que também são pontos base, no interior do domínio de interpolação para que a aproximação da superfície seja bem sucedida.

Finalmente, o objetivo inicial da primeira etapa da pesquisa foi atingido com sucesso, a partir da identificação das FBRSC's com melhores resultados nos testes bidimensionais com volume, sob o molde da Formulação MECIC.

No que se refere às experiências no ambiente do MEC, em que se emprega a formulação para modelagem direta da integral de domínio referente ao termo de não homogeneidade da Equação de Poisson – denominada MECIC, várias outras conclusões podem ser feitas.

Primeiramente, o esquema funcionou satisfatoriamente, conforme os testes preliminares no cálculo do volume prenunciaram. A singularidade presente na solução fundamental foi devidamente resolvida com o deslocamento dos pontos base para o centro dos elementos lineares de contorno, sem qualquer prejuízo na precisão dos resultados.

As FBRSC's funcionaram muito bem superando as funções radiais tradicionais (simples e cúbica) em vários casos aqui testados. Conforme observado nas simulações com o problema da barra engastada, a Formulação MECIC depende sobremaneira de pontos base internos para uma boa aproximação. Na ausência deles, os resultados são bastante sofríveis. Entretanto, a convergência dos resultados com a introdução destes pontos é mais rápida do que com a FDR, alcançando resultados com melhor precisão, conforme mostraram trabalhos precedentes.

O tempo computacional é reduzido, comparado à FDR. Não existem multiplicações intermediárias com as matrizes [**H**] e [**G**], que consomem tempo, e a geração dos coeficientes de influência (${}^{\xi}\alpha$) é bastante simples.

Com a Formulação MECIC, o uso das FBRSC's é imediato, o que não acontece com a FDR, visto que não se pode aproveitar a redução de coeficientes do suporte na formação do sistema matricial.

A Formulação MECIC possibilita, além da redução de coeficientes com as FBRSC's, reduzir também a quantidade de pontos internos que podem dificultar a formação de uma banda na matriz de inércia em futuras aplicações em dinâmica.

Entretanto, a adoção da redução total dos pontos internos como pontos base no ajuste, tal como foi realizado no trabalho, apresentou dificuldades numéricas na aproximação da integral de domínio dos problemas aqui abordados.

No ajuste com completa eliminação dos pontos internos como pontos base, o refinamento da malha não produziu redução nos valores dos erros médios percentuais. Estes erros deveriam ser menores, quanto maior a quantidade de pontos no contorno, o que não foi verificado nos testes. Todavia, os resultados melhoram com a inserção de pontos internos, para todas as malhas utilizadas.

É possível conceber uma explicação – mesmo que preliminar -para este melhor desempenho considerando a estrutura algébrica destas FBRSC's em contraste com a estrutura das funções radiais simples e cúbica. Enquanto estas últimas constroem uma matriz de interpolação que possui diagonal nula (possibilidade de se adotar uma constante arbitrária), e deste modo seus valores tendem a crescer em direção aos valores mais distantes, o que favorece o mau condicionamento das matrizes envolvidas no processo de ajuste e interpolação de curvas, dificultando a solução do sistema linear para obtenção dos coeficientes de ajuste e de interpolação. De fato, as FBRSC's atuam exatamente do modo oposto. A partir da unidade, reduzem-se, e podem ser facilmente normalizadas com relação às dimensões do domínio. Dessa forma, à medida que os demais pontos estão mais afastados do ponto base, menores são seus coeficientes de interação.

Por outro lado, esta mesma estrutura das FBRSC's pode explicar o mau desempenho da técnica no caso do ajuste das funções sem considerar pontos internos como pontos base. Na ausência de informação interna, os valores dos coeficientes de interação entre o ponto base e os demais se reduzem com a distância. Não havendo pontos internos, o sistema matricial se ressente deles para uma melhor aproximação.

Quanto mais numerosos estes ficam, menor ficam estes coeficientes gerados pelas FBRSC's.

De modo geral, os resultados foram satisfatórios para diversas aplicações mostradas, e a Formulação MECIC dá um passo na superação das limitações do MEC em aplicações que envolvem sistemas de grande dimensão, exigidas em problemas relacionados à Sísmica de Prospecção.

Assim, o presente trabalho deu continuidade de uma nova formulação cujo objetivo é exatamente gerar resultados precisos com a possibilidade de redução do tempo de processamento computacional.

6.1 SUGESTÃO DE NOVOS TRABALHOS

Conforme exposto no tópico de metas decorrentes, a Formulação MECIC permitirá construir uma matriz de massa de modo similar ao utilizado para aproximar o termo referente à ação de domínio no caso do problema de Poisson. Assim, uma próxima etapa de interesse é resolver o problema de autovalor, precedendo a análise de problemas dinâmica. Isto para que se possa fazer uma aferição detalhado do método nestas novas condições, em que uma matriz de massa precisa ser construída.

Um exame detalhado das potencialidades da Formulação MECIC nos problemas de autovalor poderá dar uma ideia mais precisa da possibilidade de haver redução do custo computacional da solução incremental requerida nos casos de resposta. É preciso verificar se o modelo se apresenta viável e efetivo sob o prisma da precisão na construção da matriz de massa, comparando seus resultados com os obtidos com outros métodos e com alguns problemas que dispõem de solução analítica.

Havendo sucesso nesta etapa, a matriz de massa poderá ter uma banda relacionada ao tamanho do suporte, que propicia o uso de esquemas de solução de sistemas matriciais mais rápidos. O fato de se integrar apenas no contorno fará com que esta operação se restrinja apenas à fronteira estabelecida pelo suporte das funções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BERTOLANI, M. N. **Funções de Base Radial de Suporte Global e Compacto na Aproximação de Superfícies.** 2010. 85f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade federal do Espírito Santo, Vitória, 2010.

2. BERTOLANI, M. N.; LOEFFLER, C. F.; MENANDRO, F. M.; BULCÃO, A. **Desempenho de Funções de Base Radial de Suporte Compacto na Construção de Superfícies Bidimensionais**. Buenos Aires, Argentina: CILAMCE, 2010.

3. BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements An Introductory Course**. Southampton, U. K.: Wit Press, 1992.

4. BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques Theory And Applications In Engineering**.New York, 1984.

5. BREBBIA, C. A. **The Boundary Element Method for Engineers.** London: Pentech Press, 1978.

6. BREBBIA, C. A.; WALKER, S. **Boundary Element Techniques in Engineering.** U.K.: Newnes-Buttterworths, 1980.

7. BULCÃO, A. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade Usando Elementos de Ordem Superior Aplicação a Problemas de Campo Escalar Generalizado.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade federal do Espírito Santo, Vitória, 1999.

8. CHEN C. S; GOLDBERG, M. A. **The Theory of radial Basis Function applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential Equations**. U.K.: Boundary Element Communications, 1994. v. 5, p. 57-61.

9. CHEN, C.S.; GOLBERG, M. A.; SCHABACK, R. A. (2003). **Recent Developments in the Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Function**. in: *Transformation of Domain Effects to the Boundary,* Y. F. Rashed e C. A. Breddia (eds.), WIT Press, Southampton, Boston, pp. 138 – 225.

10. CHEN, J.T. *et al*. **The Boundary Collocation Method with Meshless Concept for Acoustic Eigenanalysis of Two-Dimensional Cavities Using Radial Basis Function.** in: Journal of Sound and Vibration, New York, USA, v.257, 4:667-711, 2002.

11. CRUZ, A. L. **Análise do Desempenho de Funções de Base Radial na Aproximação de Superfícies**. 2009. 153f. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2009.

12. CRUZ, A. L. **Modelagem Direta de Integrais de Domínio Usando Funções de Base Radial no Contexto do Método dos Elementos de Contorno**. 2012. 139f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade federal do Espírito Santo, Vitória, 2012.

13. FASSHAUER, G. E. **Meshfree Approximation Methods with MATLAB**. 1ed. Singapura: World Scientific Publishers, 2007.

14. FRANKE, R. **Scattered Data Interpolation: Test of Some Methods**. In: Mathematics of Computation, California, USA, v. 38 n. 157, p. 181-200, Jan. 1982.

15. KARUR, S. R.; RAMACHANDRAN, P. **A. Radial Basis Function Approximation in the Dual Reciprocity Method**. In: Mathematical and Computer Modelling, 1994. v. 20, c. 7, p. 59-70.

16. LEBLANC, A.; MALESYS, A.; LAVIE, A. **Compactly Supported Radial Basis Functions for the Acoustic 3D Eigenanalysis Using the Particular Integral Method.** In: Engineering Analysis with Boundary Elements, New York, USA, v.36, p.520-526, 2011.

17. LOEFFLER C. F.; MANSUR W. J. (1987): **Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems**.In: C.A. Brebbia (Ed.), Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer, Computational Mechanics Publishing, UK, 1987, pp. 105-124.

18. MATOS, M. C. **Reconhecimento de Padrões Sísmicos Utilizando Análises Tempo - Frequência**. Rio de Janeiro, 2004. 118p. Tese de Doutorado Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

19. NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. **A New Approach for Free Vibration Analysis using Boundary Elements**. In: Proceedings 4th International Conference on Boundary Element Methods. Springer Verlag, Berlin: Ed C. A. Brebbia, 1982. p. 312-326.

20. PARTRIDGE, P. **Towards criteria for selecting approximation functions in the Dual Reciprocity Method**. In: Engineering Analysis with Boundary Elements: An International Journal for Advances in Boundary Element and Other Mesh Reduction Methods. U. K.: Elsevier BV, 2000. v. 24, p.519-529.

21. PARTRIDGE**,** P. W.; BREBBIA C. A.; WROBEL L. C**.** (1992): **The Dual Reciprocity Boundary Element Method***.* Computational Mechanics Pub.

22. POWER, H; WROBEL, L.C; YAMADA, T; On the Convergence of the Dual Reciprocity Boundary Element Method. In: **Engineering Analysis with Boundary Element**, 1994. v.13, p. 291-29.

23. RAMACHANDRAN P. A. (1994): **Boundary Element Methods in Transport Phenomena**. In: Computational Mechanics Publication and Elsevier Applied Science, London.

24. STARK, P. A. **Introduction to Numerical Methods**. New York, U. S: Macmillan Publishers, 1970.

25. WONG, S.M.; HON, Y.C.; GOLBERG, M.A. **Compactly Supported Radial Basis Functions for Shallow Water Equations.** In: Applied Mathematics and Computation, New York, USA, v.127, 1: 79-101, 2002.

26. WROBEL L. C.; ALIABADI M. H. (2002): **The Boundary Element Method. Chichester**, Wiley.

27. WROBEL, L. C., DE FIGUEIREDO, D.B. **Numerical Analysis of Convection-Diffusion Problems Using Boundary Element Method.** In: International Journal of Numerical Methods in Heat and Fluid Flow, Vol.1, pp 3-18, 1991.

BIBLIOGRAFIAS

1. CHENG, A.H.D.; YOUNG, D.L.; TSAI, C.C. **Solution of Poisson's Equation by Iterative DRBEM Using Compactly Supported, Positive Definite Radial Basis Function.** In: Engineering Analysis with Boundary Elements, New York, USA, v.24, p.549 - 557, 2000.

2. SCHABACK, R.; WENDLAND, H. **Using Compactly Supported radial Basis Functions to Solve Partial Differential Equations.** In: Boundary Element Technology XIII, WitPress, Boston, USA, p.311 -324,1999.

3. PENA, A. **Option Pricing With Radial Basis Functions: A Tutorial.** In: Wilmott Magazine, New York, USA, p.50 – 62, 2005.

APÊNDICE A - Cálculo das Funções Primitivas das FBRSCs

APA.1 CÁLCULO DAS FUNÇÕES PRIMITIVAS PARA AS FUNÇÕES DE WENDLAND DE SUPORTE COMPACTO

(a) Para $\phi_{1,0}\,(r) \doteq \left(1-\frac{r}{\delta}\right)_+$:

$$\phi_{1,0}\,(r) \doteq \begin{cases} \left(1-\dfrac{r}{\delta}\right)_+ & ,0 \le r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = F^i\left(\frac{r}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{d\psi^i}{dr} = \frac{1}{r}\int r\,\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)dr$$

$$\psi^i = \int\left(\frac{1}{r}\int r\,\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)dr\right)dr$$

Logo,

$$\psi(r) = -\frac{1}{9}\left(\frac{r^3}{\delta}\right) + \frac{1}{4}r^2 + C1\ln(r) + C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(r) = -\frac{1}{9}\left(\frac{r^3}{\delta}\right) + \frac{1}{4}r^2$$

Portanto;

$$\psi(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{r^3}{\delta}\right) + \dfrac{1}{4}r^2 & ,0 \le r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le r \le \delta$:

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{3}\left(\frac{r^2}{\delta}\right) + \frac{1}{2}r^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{d\psi}{dr}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{d\psi}{dr}\frac{\mathbf{r}_\mathbf{j}}{r} = \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{r^2}{\delta}\right) + \frac{1}{2}r^1\right]\frac{\mathbf{r}_\mathbf{j}}{r} = \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{r^1}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\right]\mathbf{r}_\mathbf{j}$$

Redutível para a forma:

$$\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{r^1}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\right] = \left[1.5 - \left(\frac{r^1}{\delta}\right)\right]\frac{1}{3}$$

(b) Para $\phi_{3,0}\,(\mathrm{r}) \doteq \left(1-\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)_+^2$:

$$\phi_{3,0}\,(\mathrm{r}) \doteq \begin{cases} \left(1-\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)_+^2 & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = \mathrm{F}^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{\mathrm{i}}}{\mathrm{dr}} = \frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}$$

$$\psi^{\mathrm{i}} = \int\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}\right)\mathrm{dr}$$

Logo,

$$\psi(\mathrm{r}) = \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2 + \mathrm{C1}\ln(r) + C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(\mathrm{r}) = \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2$$

Portanto;

$$\psi(\mathrm{r}) = \begin{cases} \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2 & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le \mathrm{r} \le \delta$:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^2}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{r}^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}} = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^2}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{r}^1\right]\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}} = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\right]\mathbf{r}_{\mathbf{j}}$$

Não é redutível a forma: $\left[\Delta - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]^{\mathrm{s}}\left[\mathrm{p} + \mathrm{q}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + \mathrm{g}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + \cdots\right]$, para s inteiro.

(c) Para $\phi_{5,0}\,(\mathrm{r}) \doteq \left(1-\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)_+^3$

$$\phi_{5,0}\,(\mathrm{r}) \doteq \begin{cases} \left(1-\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)_+^3 & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = \mathrm{F}^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{\mathrm{i}}}{\mathrm{dr}} = \frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}$$

$$\psi^{\mathrm{i}} = \int\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}\right)\mathrm{dr}$$

Logo,

$$\psi(\mathrm{r}) = -\frac{1}{25}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{3}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2 + \mathrm{C1}\ln(r) + C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(\mathrm{r}) = -\frac{1}{25}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{3}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2$$

Portanto;

$$\psi(\mathrm{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{25}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{3}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2 & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le \mathrm{r} \le \delta$:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}} = -\frac{1}{5}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^3}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right) - \left(\frac{\mathrm{r}^2}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{r}^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}} = \left[-\frac{1}{5}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^3}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right) - \left(\frac{\mathrm{r}^2}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{r}^1\right]\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}}$$

$$= \left[-\frac{1}{5}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\right]\mathbf{r}_{\mathbf{j}}$$

Redutível para a forma:

$$\left[-\frac{1}{5}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[1{,}60583 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]\left[0{,}20000\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 - 0{,}42883\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + 0{,}31137\right]$$

(d) Para $\phi_{1,1}(\mathrm{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^3\left[1 + 3\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]$

$$\phi_{1,1}(\mathrm{r}) \doteq \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^3\left[1 + 3\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right] & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = \mathrm{F}^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{\mathrm{i}}}{\mathrm{dr}} = \frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}$$

$$\psi^{\mathrm{i}} = \int\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}\right)\mathrm{dr}$$

Logo,

$$\psi(\mathrm{r}) = -\frac{1}{12}\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^4}\right) + \frac{8}{25}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2 + \mathrm{C1}\ln(r) + C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(\mathrm{r}) = -\frac{1}{12}\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^4}\right) + \frac{8}{25}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2$$

Portanto;

$$\psi(\mathrm{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{12}\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^4}\right) + \frac{8}{25}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2 & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le \mathrm{r} \le \delta$:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^4}\right) + \frac{8}{5}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{r}^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}} = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^4}\right) + \frac{8}{5}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{r}^1\right]\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^4 + \frac{8}{5}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\mathbf{r}_{\mathbf{j}}$$

Redutível para:

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^4 + \frac{8}{5}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[1{,}485639059 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]\left[0{,}5\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 - 0{,}8571804700\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + 0{,}2265392125\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + 0{,}3365555024\right]$$

(e) Para $\phi_{1,2}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^5\left[1 + 5\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + 8\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2\right]$:

$$\phi_{1,2}\,(\mathrm{r}) \doteq \begin{cases} \left[1-\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_{+}^{5}\left[1+5\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)+8\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{2}\right] & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}=\mathrm{F}^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{\mathrm{i}}}{\mathrm{dr}}=\frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}$$

$$\psi^{\mathrm{i}}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}\right)\mathrm{dr}$$

Logo,

$$\psi(\mathrm{r})=-\frac{8}{81}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^7}\right)+\frac{35}{64}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^6}\right)-\frac{8}{7}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^5}\right)+\frac{35}{36}\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^4}\right)-\frac{7}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}\mathrm{r}^2\ +\mathrm{C1}\ln(r)$$
$$+\ C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(\mathrm{r})=-\frac{8}{81}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^7}\right)+\frac{35}{64}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^6}\right)-\frac{8}{7}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^5}\right)+\frac{35}{36}\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^4}\right)-\frac{7}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}\mathrm{r}^2$$

Portanto;

$$\psi(\mathrm{r})=\begin{cases}-\frac{8}{81}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^7}\right)+\frac{35}{64}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^6}\right)-\frac{8}{7}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^5}\right)+\frac{35}{36}\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^4}\right)-\frac{7}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}\mathrm{r}^2 & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta\end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le \mathrm{r} \le \delta$:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}=-\frac{8}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^7}\right)+\frac{35}{8}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^6}\right)-8\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^5}\right)+\frac{35}{6}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^4}\right)-\frac{7}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{r}^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r})=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}}=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\,\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}}$$
$$=\left[-\frac{8}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^7}\right)+\frac{35}{8}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^6}\right)-8\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^5}\right)+\frac{35}{6}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^4}\right)-\frac{7}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{r}^1\right]\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}}$$
$$=\left[-\frac{8}{9}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^7+\frac{35}{8}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^6-8\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^5+\frac{35}{6}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^4-\frac{7}{4}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\mathbf{r}_{\mathbf{j}}$$

Redutível para:

$$\left[-\frac{8}{9}\left(\frac{r}{\delta}\right)^7+\frac{35}{8}\left(\frac{r}{\delta}\right)^6-8\left(\frac{r}{\delta}\right)^5+\frac{35}{6}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4-\frac{7}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$
$$=\left[1{,}480138667-\left(\frac{r}{\delta}\right)\right]\left[0{,}8888888889\left(\frac{r}{\delta}\right)r^6-3{,}059321185\left(\frac{r}{\delta}\right)^5\right.$$
$$+3{,}471780420\left(\frac{r}{\delta}\right)^4-0{,}6946168916\left(\frac{r}{\delta}\right)^3-1{,}028129319\left(\frac{r}{\delta}\right)^2$$
$$\left.+0{,}2282260409\left(\frac{r}{\delta}\right)+0{,}3378061876\right]$$

(f) Para $\phi_{3,1}\,(r)\doteq\left[1-\left(\frac{r}{\delta}\right)\right]_+^4\left[1+4\left(\frac{r}{\delta}\right)\right]$:

$$\phi_{3,1}\,(r)\doteq\begin{cases}\left[1-\left(\frac{r}{\delta}\right)\right]_+^4\left[1+4\left(\frac{r}{\delta}\right)\right] & ,0\le r\le\delta\\ 0 & ,r>\delta\end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}=F^i\left(\frac{r}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{d\psi^i}{dr}=\frac{1}{r}\int r\,\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)dr$$

$$\psi^i=\int\left(\frac{1}{r}\int r\,\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)dr\right)dr$$

Logo,

$$\psi(r)=\frac{4}{49}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right)-\frac{5}{12}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right)+\frac{4}{5}\left(\frac{r^5}{\delta^3}\right)-\frac{5}{8}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}r^2\ +C1\ln(r)+\ C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(r)=\frac{4}{49}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right)-\frac{5}{12}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right)+\frac{4}{5}\left(\frac{r^5}{\delta^3}\right)-\frac{5}{8}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}r^2$$

Portanto;

$$\psi(r)=\begin{cases}\frac{4}{49}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right)-\frac{5}{12}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right)+\frac{4}{5}\left(\frac{r^5}{\delta^3}\right)-\frac{5}{8}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right)+\frac{1}{4}r^2 & ,0\le r\le\delta\\ 0 & ,r>\delta\end{cases}$$

Tem-se então que para $0\le r\le\delta$:

$$\frac{d\psi}{dr}=\frac{4}{7}\left(\frac{r^6}{\delta^5}\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{r^5}{\delta^4}\right)+4\left(\frac{r^4}{\delta^3}\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{r^3}{\delta^2}\right)+\frac{1}{2}r^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{d\psi}{dr}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{d\psi}{dr}\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{r} = \left[\frac{4}{7}\left(\frac{r^6}{\delta^5}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{r^5}{\delta^4}\right) + 4\left(\frac{r^4}{\delta^3}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{r^3}{\delta^2}\right) + \frac{1}{2}\right]\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{r}$$

$$= \left[\frac{4}{7}\left(\frac{r}{\delta}\right)^5 - \frac{5}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4 + 4\left(\frac{r}{\delta}\right)^3 - \frac{5}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\mathbf{r}_{\mathbf{j}}$$

Não é redutível a forma: $\left[\Delta - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]^s \left[p + q\left(\frac{r}{\delta}\right) + g\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + \cdots\right]$, para s inteiro.

(g) Para $\phi_{3,2}\,(r) \doteq \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]^6_+ \left[35\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 18\left(\frac{r}{\delta}\right) + 3\right]$:

$$\phi_{3,2}\,(r) \doteq \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]^6_+ \left[35\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 18\left(\frac{r}{\delta}\right) + 3\right] & ,0 \le r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = F^i\left(\frac{r}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{d\psi^i}{dr} = \frac{1}{r}\int r\,\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)dr$$

$$\psi^i = \int\left(\frac{1}{r}\int r\,\phi^i\left(\frac{r^i}{\delta}\right)dr\right)dr$$

Logo,

$$\psi(r) = \frac{7}{20}\left(\frac{r^{10}}{\delta^8}\right) - \frac{64}{27}\left(\frac{r^9}{\delta^7}\right) + \frac{105}{16}\left(\frac{r^8}{\delta^6}\right) - \frac{64}{7}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right) + \frac{35}{6}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right) - \frac{7}{4}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right) + \frac{3}{4}r^2 + C1\ln(r) + C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(r) = \frac{7}{20}\left(\frac{r^{10}}{\delta^8}\right) - \frac{64}{27}\left(\frac{r^9}{\delta^7}\right) + \frac{105}{16}\left(\frac{r^8}{\delta^6}\right) - \frac{64}{7}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right) + \frac{35}{6}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right) - \frac{7}{4}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right) + \frac{3}{4}r^2$$

Portanto;

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{7}{20}\left(\frac{r^{10}}{\delta^8}\right) - \frac{64}{27}\left(\frac{r^9}{\delta^7}\right) + \frac{105}{16}\left(\frac{r^8}{\delta^6}\right) - \frac{64}{7}\left(\frac{r^7}{\delta^5}\right) + \frac{35}{6}\left(\frac{r^6}{\delta^4}\right) - \frac{7}{4}\left(\frac{r^4}{\delta^2}\right) + \frac{3}{4}r^2 & ,0 \le r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le r \le \delta$:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{7}{2}\left(\frac{r^9}{\delta^8}\right) - \frac{64}{3}\left(\frac{r^8}{\delta^7}\right) + \frac{105}{2}\left(\frac{r^7}{\delta^6}\right) - 64\left(\frac{r^6}{\delta^5}\right) + 35\left(\frac{r^5}{\delta^4}\right) - 7\left(\frac{r^3}{\delta^2}\right) + \frac{3}{2}r^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}}$$

$$= \left[\frac{7}{2}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^8}\right) - \frac{64}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^7}\right) + \frac{105}{2}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^6}\right) - 64\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^5}\right) + 35\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^4}\right) - 7\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta^2}\right) + \frac{3}{2}\mathrm{r}^1\right]\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}}$$

$$= \left[\frac{7}{2}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^8 - \frac{64}{3}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^7 + \frac{105}{2}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^6 - 64\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^5 + 35\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^4 - 7\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + \frac{3}{2}\right]\mathbf{r}_{\mathbf{j}}$$

Não é redutível a forma: $\left[\Delta - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]^s \left[p + q\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + g\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + \cdots\right], para\ s\ inteiro.$

(h) Para $\phi_{3,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^8 \left[32\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 + 25\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + 8\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + 1\right]$:

$$\phi_{3,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^8 \left[32\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 + 25\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + 8\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + 1\right] & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = \mathrm{F}^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{\mathrm{i}}}{\mathrm{dr}} = \frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}$$

$$\psi^{\mathrm{i}} = \int\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}\right)\mathrm{dr}$$

Logo,

$$\psi(\mathrm{r}) = \frac{32}{169}\left(\frac{\mathrm{r}^{13}}{\delta^{11}}\right) - \frac{77}{48}\left(\frac{\mathrm{r}^{12}}{\delta^{10}}\right) + \frac{64}{11}\left(\frac{\mathrm{r}^{11}}{\delta^9}\right) - \frac{231}{20}\left(\frac{\mathrm{r}^{10}}{\delta^8}\right) + \frac{352}{27}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^7}\right) - \frac{231}{32}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^6}\right) + \frac{11}{6}\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^4}\right) - \frac{11}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2 + \mathrm{C1}\ln(r) + C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(\mathrm{r}) = \frac{32}{169}\left(\frac{\mathrm{r}^{13}}{\delta^{11}}\right) - \frac{77}{48}\left(\frac{\mathrm{r}^{12}}{\delta^{10}}\right) + \frac{64}{11}\left(\frac{\mathrm{r}^{11}}{\delta^9}\right) - \frac{231}{20}\left(\frac{\mathrm{r}^{10}}{\delta^8}\right) + \frac{352}{27}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^7}\right) - \frac{231}{32}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^6}\right) + \frac{11}{6}\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^4}\right) - \frac{11}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^2}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{r}^2$$

Portanto;

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{32}{169}\left(\frac{r^{13}}{\delta^{11}}\right) - \frac{77}{48}\left(\frac{r^{12}}{\delta^{10}}\right) + \frac{64}{11}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{9}}\right) - \frac{231}{20}\left(\frac{r^{10}}{\delta^{8}}\right) + \frac{352}{27}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{7}}\right) \\ -\frac{231}{32}\left(\frac{r^{8}}{\delta^{6}}\right) + \frac{11}{6}\left(\frac{r^{6}}{\delta^{4}}\right) - \frac{11}{16}\left(\frac{r^{4}}{\delta^{2}}\right) + \frac{1}{4}r^{2} & ,0 \leq r \leq \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \leq r \leq \delta$:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{32}{13}\left(\frac{r^{12}}{\delta^{11}}\right) - \frac{77}{4}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{10}}\right) + 64\left(\frac{r^{10}}{\delta^{9}}\right) - \frac{231}{2}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{8}}\right) + \frac{352}{3}\left(\frac{r^{8}}{\delta^{7}}\right) - \frac{231}{4}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{6}}\right) + 11\left(\frac{r^{5}}{\delta^{4}}\right) - \frac{11}{4}\left(\frac{r^{3}}{\delta^{2}}\right) + \frac{1}{2}r^{1}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{d\psi}{dr}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{d\psi}{dr}\frac{\mathbf{r_j}}{r}$$

$$= \left[\frac{32}{13}\left(\frac{r^{12}}{\delta^{11}}\right) - \frac{77}{4}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{10}}\right) + 64\left(\frac{r^{10}}{\delta^{9}}\right) - \frac{231}{2}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{8}}\right) + \frac{352}{3}\left(\frac{r^{8}}{\delta^{7}}\right) - \frac{231}{4}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{6}}\right) + 11\left(\frac{r^{5}}{\delta^{4}}\right) - \frac{11}{4}\left(\frac{r^{3}}{\delta^{2}}\right) + \frac{1}{2}r^{1}\right]\frac{\mathbf{r_j}}{r}$$

$$= \left[\frac{32}{13}\left(\frac{r}{\delta}\right)^{11} - \frac{77}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^{10} + 64\left(\frac{r}{\delta}\right)^{9} - \frac{231}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^{8} + \frac{352}{3}\left(\frac{r}{\delta}\right)^{7} - \frac{231}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^{6} + 11\left(\frac{r}{\delta}\right)^{4} + -\frac{11}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + \frac{1}{2}\right]\mathbf{r_j}$$

Não é redutível a forma: $\left[\Delta - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]^{s}\left[p + q\left(\frac{r}{\delta}\right) + g\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + \cdots\right]$, para s inteiro.

AP1.2 CÁLCULO DAS FUNÇÕES PRIMITIVAS PARA AS FUNÇÕES DE WU DE SUPORTE COMPACTO

(a) Para $\phi_{0,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1-\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^7 \left[5+35\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)+101\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2+147\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3+101\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^4+\right.$ 35rδ5+5rδ6:

$$\phi_{3,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \begin{cases} \left[1-\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^7 \left[5+35\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)+101\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2+147\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3+101\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^4+35\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^5+5\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^6\right] \\ 0 \qquad ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}=\mathrm{F^i}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{\mathrm{i}}}{\mathrm{dr}} = \frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r^i}}{\delta}\right)\mathrm{dr}$$

$$\psi^{\mathrm{i}} = \int\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r^i}}{\delta}\right)\mathrm{dr}\right)\mathrm{dr}$$

Logo,

$$\psi(\mathrm{r}) = -\frac{1}{45}\left(\frac{\mathrm{r}^{15}}{\delta^{13}}\right)+\frac{3}{13}\left(\frac{\mathrm{r}^{13}}{\delta^{11}}\right)-\frac{13}{11}\left(\frac{\mathrm{r}^{11}}{\delta^{9}}\right)+\frac{143}{27}\left(\frac{\mathrm{r}^{9}}{\delta^{7}}\right)-\frac{429}{64}\left(\frac{\mathrm{r}^{8}}{\delta^{6}}\right)+\frac{143}{36}\left(\frac{\mathrm{r}^{7}}{\delta^{5}}\right) -\frac{39}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^{4}}{\delta^{2}}\right)+\frac{5}{4}\mathrm{r}^2+\mathrm{C1}\ln(r)+\ C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(\mathrm{r}) = -\frac{1}{45}\left(\frac{\mathrm{r}^{15}}{\delta^{13}}\right)+\frac{3}{13}\left(\frac{\mathrm{r}^{13}}{\delta^{11}}\right)-\frac{13}{11}\left(\frac{\mathrm{r}^{11}}{\delta^{9}}\right)+\frac{143}{27}\left(\frac{\mathrm{r}^{9}}{\delta^{7}}\right)-\frac{429}{64}\left(\frac{\mathrm{r}^{8}}{\delta^{6}}\right)+\frac{143}{36}\left(\frac{\mathrm{r}^{7}}{\delta^{5}}\right) -\frac{39}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^{4}}{\delta^{2}}\right)+\frac{5}{4}\mathrm{r}^2$$

Portanto;

$$\psi(\mathrm{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{45}\left(\frac{\mathrm{r}^{15}}{\delta^{13}}\right)+\frac{3}{13}\left(\frac{\mathrm{r}^{13}}{\delta^{11}}\right)-\frac{13}{11}\left(\frac{\mathrm{r}^{11}}{\delta^{9}}\right)+\frac{143}{27}\left(\frac{\mathrm{r}^{9}}{\delta^{7}}\right) \\ -\frac{429}{64}\left(\frac{\mathrm{r}^{8}}{\delta^{6}}\right)+\frac{143}{36}\left(\frac{\mathrm{r}^{7}}{\delta^{5}}\right)-\frac{39}{16}\left(\frac{\mathrm{r}^{4}}{\delta^{2}}\right)+\frac{5}{4}\mathrm{r}^2+\frac{1}{4}\mathrm{r}^2 \qquad ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 \qquad ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le \mathrm{r} \le \delta$:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^{14}}{\delta^{13}}\right)+3\left(\frac{\mathrm{r}^{12}}{\delta^{11}}\right)-13\left(\frac{\mathrm{r}^{10}}{\delta^{9}}\right)+\frac{143}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^{8}}{\delta^{7}}\right)-\frac{429}{8}\left(\frac{\mathrm{r}^{7}}{\delta^{6}}\right)+\frac{143}{6}\left(\frac{\mathrm{r}^{6}}{\delta^{5}}\right) -\frac{39}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^{3}}{\delta^{2}}\right)+\frac{5}{2}\mathrm{r}^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\frac{\mathbf{r_j}}{\mathrm{r}}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^{14}}{\delta^{13}}\right) + 3\left(\frac{\mathrm{r}^{12}}{\delta^{11}}\right) - 13\left(\frac{\mathrm{r}^{10}}{\delta^{9}}\right) + \frac{143}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^{8}}{\delta^{7}}\right) - \frac{429}{8}\left(\frac{\mathrm{r}^{7}}{\delta^{6}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{143}{6}\left(\frac{\mathrm{r}^{6}}{\delta^{5}}\right) - \frac{39}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^{3}}{\delta^{2}}\right) + \frac{5}{2}\mathrm{r}^{1}\right]\frac{\mathbf{r_j}}{\mathrm{r}}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{13} + 3\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{11} - 13\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{9} + \frac{143}{3}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{7} - \frac{429}{8}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{6}\right.$$

$$\left. + \frac{143}{6}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{4} - \frac{39}{4}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{2} + \frac{5}{2}\right]\mathbf{r_j}$$

Redutível a: $\left[1{,}437772 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]\left[-4{,}131519726\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{3} - 5{,}940182799\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^{2} + 1{,}209372413\mathrm{r}\delta - 30{,}66847356\mathrm{r}\delta 6 + 9{,}530732116\mathrm{r}\delta 5 + 13{,}70301818\mathrm{r}\delta 4 - 3{,}322600695\mathrm{r}\delta 9 + 8{,}222858296\mathrm{r}\delta 8 + 11{,}82259421\mathrm{r}\delta 7 + 0{,}333333333333333\mathrm{r}\delta 12 + 0{,}4792572820\mathrm{r}\delta 11 - 2{,}310937375\mathrm{r}\delta 10 + 1{,}738801609$

(b) Para $\phi_{1,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^6 \left[6 + 36\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + 82\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + 72\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 + 30\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^4 + 5\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^5\right]$:

$$\phi_{1,3}\,(\mathrm{r}) \doteq \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]_+^6 \left[6 + 36\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + 82\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + 72\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 + 30\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^4 + 5\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^5\right] & ,0 \le \mathrm{r} \le \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = \mathrm{F}^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)$, tem-se que;

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{\mathrm{i}}}{\mathrm{dr}} = \frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}$$

$$\psi^{\mathrm{i}} = \int\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\int \mathrm{r}\,\phi^{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}}{\delta}\right)\mathrm{dr}\right)\mathrm{dr}$$

Logo,

$$\psi(\mathrm{r}) = +\frac{5}{169}\left(\frac{\mathrm{r}^{13}}{\delta^{11}}\right) - \frac{3}{11}\left(\frac{\mathrm{r}^{11}}{\delta^{9}}\right) + \frac{11}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^{9}}{\delta^{7}}\right) - \frac{33}{7}\left(\frac{\mathrm{r}^{7}}{\delta^{5}}\right) + \frac{11}{2}\left(\frac{\mathrm{r}^{6}}{\delta^{4}}\right) - \frac{11}{4}\left(\frac{\mathrm{r}^{4}}{\delta^{2}}\right) + \frac{3}{2}\mathrm{r}^{2}$$

$$+ \mathrm{C1}\ln(r) + C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(r) = +\frac{5}{169}\left(\frac{r^{13}}{\delta^{11}}\right) - \frac{3}{11}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{9}}\right) + \frac{11}{9}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{7}}\right) - \frac{33}{7}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{5}}\right) + \frac{11}{2}\left(\frac{r^{6}}{\delta^{4}}\right) - \frac{11}{4}\left(\frac{r^{4}}{\delta^{2}}\right) + \frac{3}{2}r^{2}$$

Portanto;

$$\psi(r) = \begin{cases} +\frac{5}{169}\left(\frac{r^{13}}{\delta^{11}}\right) - \frac{3}{11}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{9}}\right) + \frac{11}{9}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{7}}\right) - \frac{33}{7}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{5}}\right) + \frac{11}{2}\left(\frac{r^{6}}{\delta^{4}}\right) - \frac{11}{4}\left(\frac{r^{4}}{\delta^{2}}\right) + \frac{3}{2}r^{2} & ,0 \le r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le r \le \delta$:

$$\frac{d\psi}{dr} = +\frac{5}{13}\left(\frac{r^{12}}{\delta^{11}}\right) - 3\left(\frac{r^{10}}{\delta^{9}}\right) + 11\left(\frac{r^{8}}{\delta^{7}}\right) - 33\left(\frac{r^{6}}{\delta^{5}}\right) + 33\left(\frac{r^{5}}{\delta^{4}}\right) - 11\left(\frac{r^{3}}{\delta^{2}}\right) + 3r^{1}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{d\psi}{dr}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{d\psi}{dr}\frac{\mathbf{r_j}}{r}$$

$$= \left[+\frac{5}{13}\left(\frac{r^{12}}{\delta^{11}}\right) - 3\left(\frac{r^{10}}{\delta^{9}}\right) + 11\left(\frac{r^{8}}{\delta^{7}}\right) - 33\left(\frac{r^{6}}{\delta^{5}}\right) + 33\left(\frac{r^{5}}{\delta^{4}}\right) - 11\left(\frac{r^{3}}{\delta^{2}}\right) + 3r^{1}\right]\frac{\mathbf{r_j}}{r}$$

$$= \left[\frac{5}{13}\left(\frac{r}{\delta}\right)^{11} - 3\left(\frac{r}{\delta}\right)^{9} + 11\left(\frac{r}{\delta}\right)^{7} - 33\left(\frac{r}{\delta}\right)^{5} + 33\left(\frac{r}{\delta}\right)^{4} - 11\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + 3\right]\mathbf{r_j}$$

Não é redutível a forma: $\left[\Delta - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]^{s}\left[p + q\left(\frac{r}{\delta}\right) + g\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + \cdots\right], para\ s\ inteiro.$

(c) Para $\phi_{2,3}(r) \doteq \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]_{+}^{5}\left[8 + 40\left(\frac{r}{\delta}\right) + 48\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + 25\left(\frac{r}{\delta}\right)^{3} + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^{4}\right]$:

$$\phi_{2,3}(r) \doteq \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]_{+}^{5}\left[8 + 40\left(\frac{r}{\delta}\right) + 48\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + 25\left(\frac{r}{\delta}\right)^{3} + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^{4}\right] & ,0 \le r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = F^{i}\left(\frac{r}{\delta}\right)$, temos que;

$$\frac{d\psi^{i}}{dr} = \frac{1}{r}\int r\,\phi^{i}\left(\frac{r^{i}}{\delta}\right)dr$$

$$\psi^{i} = \int \left(\frac{1}{r} \int r\, \phi^{i} \left(\frac{r^{i}}{\delta} \right) dr \right) dr$$

Logo,

$$\psi(r) = -\frac{5}{121}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{9}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{7}}\right) - \frac{9}{7}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{5}}\right) + \frac{21}{5}\left(\frac{r^{5}}{\delta^{3}}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{r^{4}}{\delta^{2}}\right) + 2r^{2} + C1\ln(r) + C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(r) = -\frac{5}{121}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{9}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{7}}\right) - \frac{9}{7}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{5}}\right) + \frac{21}{5}\left(\frac{r^{5}}{\delta^{3}}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{r^{4}}{\delta^{2}}\right) + 2r^{2}$$

Portanto;

$$\psi(r) = \begin{cases} -\frac{5}{121}\left(\frac{r^{11}}{\delta^{9}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r^{9}}{\delta^{7}}\right) - \frac{9}{7}\left(\frac{r^{7}}{\delta^{5}}\right) + \frac{21}{5}\left(\frac{r^{5}}{\delta^{3}}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{r^{4}}{\delta^{2}}\right) + 2r^{2} & ,0 \le r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \le r \le \delta$:

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{5}{11}\left(\frac{r^{10}}{\delta^{9}}\right) + 3\left(\frac{r^{8}}{\delta^{7}}\right) - 9\left(\frac{r^{6}}{\delta^{5}}\right) + 21\left(\frac{r^{4}}{\delta^{3}}\right) - 18\left(\frac{r^{3}}{\delta^{2}}\right) + 4r^{1}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{d\psi}{dr}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{d\psi}{dr}\frac{\mathbf{r_j}}{r}$$

$$= \left[-\frac{5}{11}\left(\frac{r^{10}}{\delta^{9}}\right) + 3\left(\frac{r^{8}}{\delta^{7}}\right) - 9\left(\frac{r^{6}}{\delta^{5}}\right) + 21\left(\frac{r^{4}}{\delta^{3}}\right) - 18\left(\frac{r^{3}}{\delta^{2}}\right) + 4r^{1} \right]\frac{\mathbf{r_j}}{r}$$

$$= \left[-\frac{5}{11}\left(\frac{r}{\delta}\right)^{9} + 3\left(\frac{r}{\delta}\right)^{7} - 9\left(\frac{r}{\delta}\right)^{5} + 21\left(\frac{r}{\delta}\right)^{3} - 18\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + 4 \right]\mathbf{r_j}$$

Não é redutível a forma: $\left[\Delta - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]^{s}\left[p + q\left(\frac{r}{\delta}\right) + g\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + \cdots\right], para\ s\ inteiro.$

(d) Para $\phi_{3,3}\,(r) \doteq \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]^{4}_{+}\left[16 + 29\left(\frac{r}{\delta}\right) + 20\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^{3}\right]$:

$$\phi_{3,3}\,(r) \doteq \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{\delta}\right)\right]^{4}_{+}\left[16 + 29\left(\frac{r}{\delta}\right) + 20\left(\frac{r}{\delta}\right)^{2} + 5\left(\frac{r}{\delta}\right)^{3}\right] & ,0 \le r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases}$$

Solucionado a equação diferencial $\frac{d^{2}\psi}{dr^{2}} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = F^{i}\left(\frac{r}{\delta}\right)$, temos que;

$$\frac{d\psi^{i}}{dr} = \frac{1}{r}\int r\, \phi^{i}\left(\frac{r^{i}}{\delta}\right) dr$$

$$\psi^{i} = \int \left(\frac{1}{r} \int r\, \phi^{i} \left(\frac{r^{i}}{\delta} \right) dr \right) dr$$

Logo,

$$\psi(\mathrm{r}) = \frac{5}{81}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^7}\right) - \frac{3}{7}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{35}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + 4\mathrm{r}^2 + \mathrm{C1}\ln(r) + \ C2$$

Para C1 e C2 arbitrariamente nulos;

$$\psi(\mathrm{r}) = \frac{5}{81}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^7}\right) - \frac{3}{7}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{35}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + 4\mathrm{r}^2$$

Portanto;

$$\psi(\mathrm{r}) = \begin{cases} \frac{5}{81}\left(\frac{\mathrm{r}^9}{\delta^7}\right) - \frac{3}{7}\left(\frac{\mathrm{r}^7}{\delta^5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\delta^3}\right) - \frac{35}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^3}{\delta}\right) + 4\mathrm{r}^2 & ,0 \leq \mathrm{r} \leq \delta \\ 0 & ,\mathrm{r} > \delta \end{cases}$$

Tem-se então que para $0 \leq \mathrm{r} \leq \delta$:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}} = \frac{5}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^7}\right) - 3\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^5}\right) + 7\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^3}\right) - \frac{35}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^2}{\delta}\right) + 8\mathrm{r}^1$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{i}}_{,\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\mathbf{r}_{,\mathbf{j}} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dr}}\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}} = \left[\frac{5}{9}\left(\frac{\mathrm{r}^8}{\delta^7}\right) - 3\left(\frac{\mathrm{r}^6}{\delta^5}\right) + 7\left(\frac{\mathrm{r}^4}{\delta^3}\right) - \frac{35}{3}\left(\frac{\mathrm{r}^2}{\delta}\right) + 8\mathrm{r}^1\ \right]\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{j}}}{\mathrm{r}}$$

$$= \left[\frac{5}{9}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^7 - 3\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^5 + 7\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^3 - \frac{35}{3}\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^1 + 8\right]\mathbf{r}_{\mathbf{j}}$$

Não é redutível a forma: $\left[\Delta - \left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)\right]^s \left[p + q\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right) + g\left(\frac{\mathrm{r}}{\delta}\right)^2 + \cdots\right], para\ s\ inteiro.$

APÊNDICE B - Cálculo do Volume Analítico dos Campos Utilizados nos Testes Bidimensionais com Volumes.

(a) Para o campo constante igual a $\mathrm{Z(x,y)} = 1$:

$$V = \int_0^1 \int_0^1 (1) dy\, dx$$

$$V = \int_0^1 [x]_0^1 dy = \int_0^1 (1) dy$$

$$V = [y]_0^1 = 1u.v.$$

(b) Para o campo paraboloide igual a $\mathrm{Z(x,y)} = (\mathrm{x} - 0.5)^2 + (\mathrm{y} - 0.5)^2$:

$$V = \int_0^1 \int_0^1 ((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)\, dxdy = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} ((u)^2 - (v)^2) dudv$$

$$V = \int_{-0.5}^{0.5} \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-0.5}^{0.5} + [uv^2]_{-0.5}^{0.5} dv = \int_{-0.5}^{0.5} \left(\frac{0.5^2}{3} + v^2\right) dv$$

$$V = \left[\frac{0.5^2 v}{3}\right]_{-0.5}^{0.5} + \left[\frac{v^3}{3}\right]_{-0.5}^{0.5} = \frac{1}{6} u.v.$$

(c) Para o campo Função de Franke igual a $\mathrm{Z(x,y)} =$
$0.15 + 0.75\mathrm{e}^{-0.25(9\mathrm{x}-2)^2 - 0.25(9\mathrm{y}-2)^2} + 0.75\mathrm{e}^{-(9\mathrm{x}-2)^2/49 - (9\mathrm{y}-2)^2/10} + 0.5\mathrm{e}^{-0.25(9\mathrm{x}-7)^2 - 0.25(9\mathrm{y}-3)^2} - 0.2\mathrm{e}^{-(9\mathrm{x}-4)^2 - (9\mathrm{y}-7)^2}$:

$$\mathrm{V} = \int_0^1 \int_0^1 \Big(0.15 + 0.75\mathrm{e}^{-0.25(9\mathrm{x}-2)^2 - 0.25(9\mathrm{y}-2)^2} + 0.75\mathrm{e}^{-(9\mathrm{x}-2)^2/49 - (9\mathrm{y}-2)^2/10}$$
$$+ 0.5\mathrm{e}^{-0.25(9\mathrm{x}-7)^2 - 0.25(9\mathrm{y}-3)^2} - 0.2\mathrm{e}^{-(9\mathrm{x}-4)^2 - (9\mathrm{y}-7)^2}\Big)\, \mathrm{dxdy}$$
$$= 0.614228126\, u.v.$$

(d) Para o campo paraboloide igual a $\mathrm{Z(x,y)} = (\mathrm{x}-0.5)^2 + (\mathrm{y}-0.5)^2 + 0{,}25$:

$$V = \int_0^1 \int_0^1 ((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + 0{,}25)\, dxdy = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} ((u)^2 + (v)^2 + 0{,}25) dudv$$

$$V = \int_{-0.5}^{0.5} \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-0.5}^{0.5} + [uv^2]_{-0.5}^{0.5} + [u\ 0{,}25]_{-0.5}^{0.5} dv = \int_{-0.5}^{0.5} \left(\frac{0.5^2}{3} + v^2 + 0{,}25v\right) dv$$

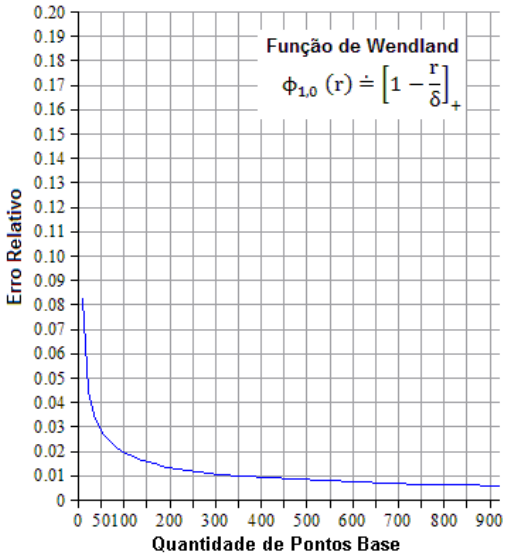
$$V = \left[\frac{0.5^2 v}{3}\right]_{-0.5}^{0.5} + \left[\frac{v^3}{3}\right]_{-0.5}^{0.5} + [0{,}25v]_{-0.5}^{0.5} = \frac{5}{12} u.v.$$

(e) Para o campo exponencial igual $\mathrm{Z(x,y)} = \mathrm{e}^{3\mathrm{x}-3}\mathrm{e}^{3\mathrm{y}-3} + 0{,}25$:

$$V = \int_0^1 \int_0^1 (\mathrm{e}^{3\mathrm{x}-3}\mathrm{e}^{3\mathrm{y}-3} + 0{,}25)\, dxdy = 0{,}350323\ u.v.$$

APÊNDICE C - Resultados dos Testes Bidimensionais com Volumes para os Três Campos Escalares Z(x, y) das FBRSC não Selecionadas.

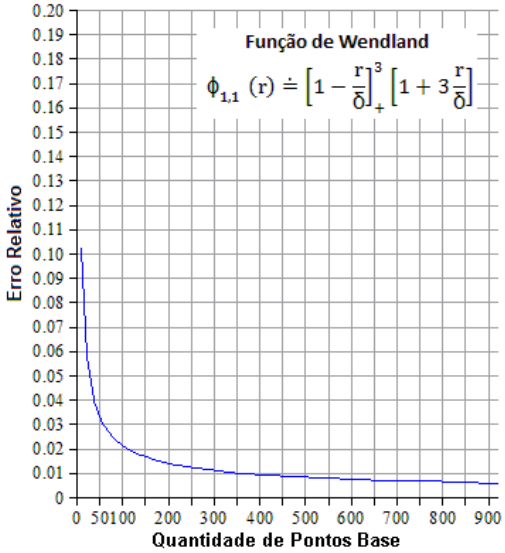
APC.1 PARA O CAMPO CONSTANTE




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:(1-r/δ)
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.917412341	0.08258765940
21	16	5	4	0.955553889	0.04444611070
37	24	13	6	0.966981113	0.03301888700
57	32	25	8	0.973742306	0.02625769380
81	40	41	10	0.978245020	0.02175498010
109	48	61	12	0.981452107	0.01854789260
141	56	85	14	0.983848453	0.01615154740
177	64	113	16	0.985704005	0.01429599520
217	72	145	18	0.987181306	0.01281869410
261	80	181	20	0.988387644	0.01161235570
309	88	221	22	0.989383161	0.01061683890
361	96	265	24	0.990223944	0.00977605581
417	104	313	26	0.990948498	0.00905150175
477	112	365	28	0.991566837	0.00843316317
541	120	421	30	0.992110491	0.00788950920
609	128	481	32	0.992592514	0.00740748644
681	136	545	34	0.993010283	0.00698971748
757	144	613	36	0.993385613	0.00661438704
837	152	685	38	0.993726194	0.00627380610
921	160	761	40	0.994033396	0.00596660376

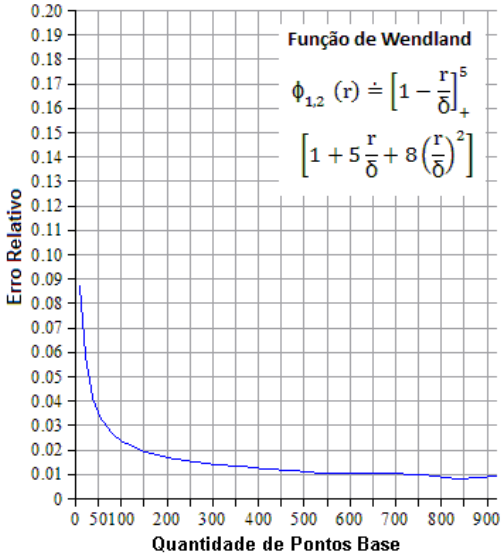
Figura 83 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o Campo de Interpolação Constante e Função de Wendland $\phi_{1,0}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^3[1+3(r/δ)]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.897212446	0.10278755400
21	16	5	4	0.941948295	0.05805170540
37	24	13	6	0.960285783	0.03971421720
57	32	25	8	0.969923496	0.03007650380
81	40	41	10	0.975837111	0.02416288850
109	48	61	12	0.979817986	0.02018201350
141	56	85	14	0.982683957	0.01731604340
177	64	113	16	0.984836102	0.01516389850
217	72	145	18	0.986520708	0.01347929240
261	80	181	20	0.987864256	0.01213574410
309	88	221	22	0.988969743	0.01103025670
361	96	265	24	0.989881814	0.01011818650
417	104	313	26	0.990673006	0.00932699442
477	112	365	28	0.991328895	0.00867110491
541	120	421	30	0.991898596	0.00810140371
609	128	481	32	0.992403448	0.00759655237
681	136	545	34	0.992863655	0.00713634491
757	144	613	36	0.993243098	0.00675690174
837	152	685	38	0.993622541	0.00637745857
921	160	761	40	0.993929803	0.00607019663

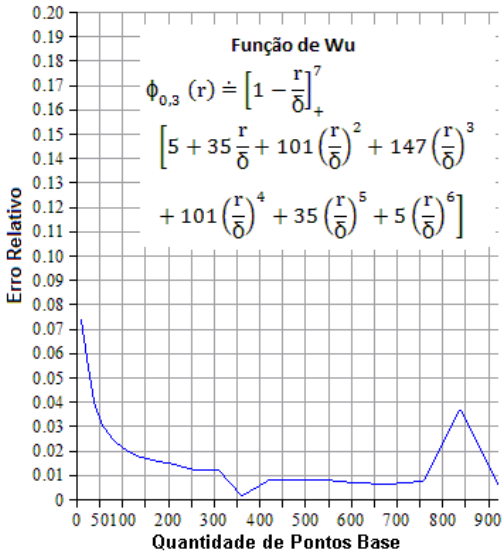
Figura 84 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{1,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^5[1+5(r/δ)
                                                  +8(r/δ)^2]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.912305653	0.08769434690
21	16	5	4	0.941766024	0.05823397640
37	24	13	6	0.958374262	0.04162573810
57	32	25	8	0.967571974	0.03242802620
81	40	41	10	0.973273635	0.02672636510
109	48	61	12	0.977113426	0.02288657430
141	56	85	14	0.979867160	0.02013283970
177	64	113	16	0.981941700	0.01805830000
217	72	145	18	0.983551025	0.01644897460
261	80	181	20	0.984825253	0.01517474650
309	88	221	22	0.985892892	0.01410710810
361	96	265	24	0.986776590	0.01322340970
417	104	313	26	0.987578392	0.01242160800
477	112	365	28	0.988153219	0.01184678080
541	120	421	30	0.989501953	0.01049804690
609	128	481	32	0.989513397	0.01048660280
681	136	545	34	0.989776611	0.01022338870
757	144	613	36	0.990159988	0.00984001160
837	152	685	38	0.991724014	0.00827598572
921	160	761	40	0.990793228	0.00920677185

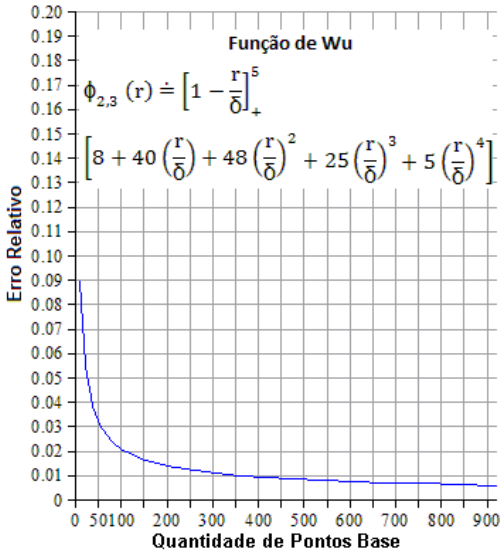
Figura 85 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland$\phi_{1,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^7[5+35(r/δ)+
                                   101(r/δ)^2+..+5(r/δ)^6]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
```

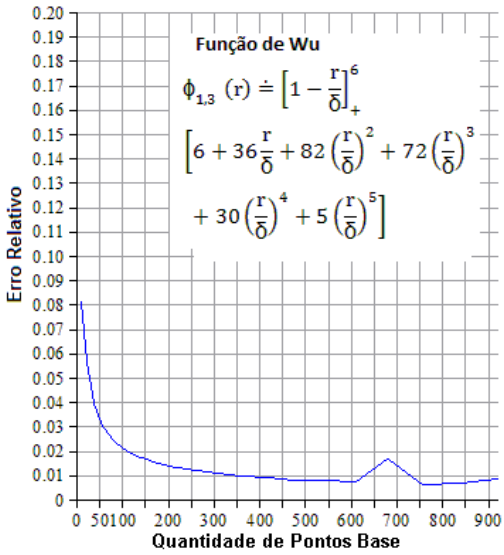
PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.925770521	0.07422947880
21	16	5	4	0.941858530	0.05814147000
37	24	13	6	0.959947467	0.04005253310
57	32	25	8	0.969817698	0.03018230200
81	40	41	10	0.975824594	0.02417540550
109	48	61	12	0.979859710	0.02014029030
141	56	85	14	0.982682228	0.01731777190
177	64	113	16	0.984375954	0.01562404630
217	72	145	18	0.985656738	0.01434326170
261	80	181	20	0.987784386	0.01221561430
309	88	221	22	0.987754822	0.01224517820
361	96	265	24	0.998291016	0.00170898438
417	104	313	26	0.991996765	0.00800323486
477	112	365	28	0.991761208	0.00823879242
541	120	421	30	0.991973877	0.00802612305
609	128	481	32	0.992867470	0.00713253021
681	136	545	34	0.993543148	0.00645685196
757	144	613	36	0.992330551	0.00766944885
837	152	685	38	0.962890625	0.03710937500
921	160	761	40	0.993652344	0.00634765625

Figura 86 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{0,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



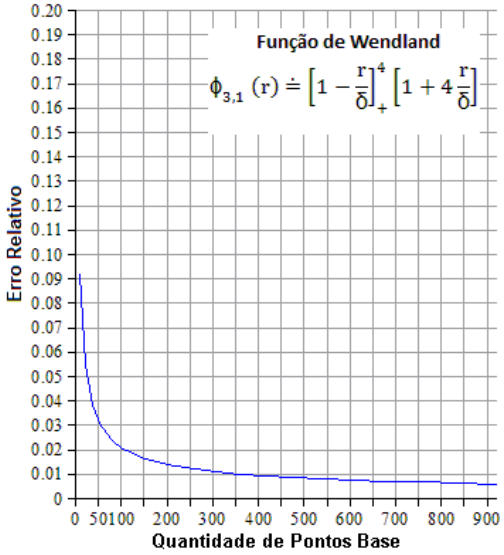

```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^5[8+40(r/δ)+
                                        48(r/δ)^2+..+5(r/δ)^4]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.910390854   0.08960914610
21    16        5        4    0.944895804   0.05510419610
37    24        13       6    0.961559892   0.03844010830
57    32        25       8    0.970574021   0.02942597870
81    40        41       10   0.976225376   0.02377462390
109   48        61       12   0.980080485   0.01991951470
141   56        85       14   0.982875109   0.01712489130
177   64        113      16   0.984983921   0.01501607890
217   72        145      18   0.986637533   0.01336246730
261   80        181      20   0.987962365   0.01203763480
309   88        221      22   0.989047408   0.01095259190
361   96        265      24   0.989960074   0.01003992560
417   104       313      26   0.990728855   0.00927114487
477   112       365      28   0.991376698   0.00862330198
541   120       421      30   0.991963744   0.00803625584
609   128       481      32   0.992451191   0.00754880905
681   136       545      34   0.992900312   0.00709968805
757   144       613      36   0.993286610   0.00671339035
837   152       685      38   0.993638813   0.00636118650
921   160       761      40   0.993956029   0.00604397058
```

Figura 87 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wu $\phi_{2,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^6[6+36(r/δ)+
                                        82(r/δ)^2+..+5(r/δ)^5]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.918373227   0.08162677290
21    16        5        4    0.943158746   0.05684125420
37    24        13       6    0.960239708   0.03976029160
57    32        25       8    0.969817817   0.03018218280
81    40        41       10   0.975761652   0.02423834800
109   48        61       12   0.979767323   0.02023267750
141   56        85       14   0.982649148   0.01735085250
177   64        113      16   0.984808505   0.01519149540
217   72        145      18   0.986492038   0.01350796220
261   80        181      20   0.987854242   0.01214575770
309   88        221      22   0.988881469   0.01111853120
361   96        265      24   0.989884853   0.01011514660
417   104       313      26   0.990756989   0.00924301147
477   112       365      28   0.991706848   0.00829315186
541   120       421      30   0.991653442   0.00834655762
609   128       481      32   0.992409706   0.00759029388
681   136       545      34   0.982803345   0.01719665530
757   144       613      36   0.993526459   0.00647354126
837   152       685      38   0.993005753   0.00699424744
921   160       761      40   0.991413116   0.00858688354
```

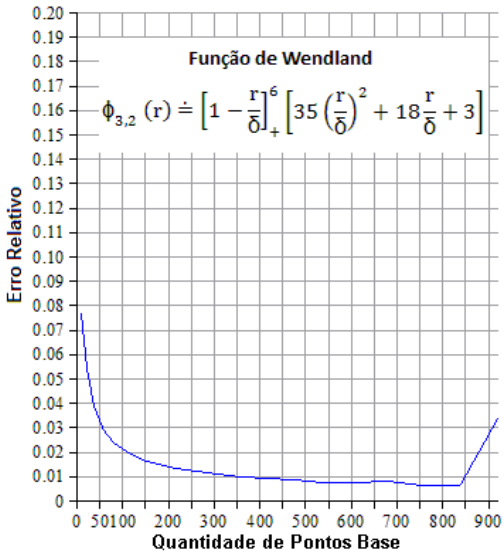
Figura 88 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wu $\phi_{1,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



RELATORIO:
****
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^4[1+4(r/δ)]
****
Suporte = 1.42
****
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
****

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.907860577	0.09213942290
21	16	5	4	0.945087373	0.05491262670
37	24	13	6	0.961684942	0.03831505780
57	32	25	8	0.970649064	0.02935093640
81	40	41	10	0.976275086	0.02372491360
109	48	61	12	0.980115891	0.01988410950
141	56	85	14	0.982900977	0.01709902290
177	64	113	16	0.985008836	0.01499116420
217	72	145	18	0.986656129	0.01334387060
261	80	181	20	0.987973332	0.01202666760
309	88	221	22	0.989060760	0.01093924050
361	96	265	24	0.989969671	0.01003032920
417	104	313	26	0.990730524	0.00926947594
477	112	365	28	0.991394103	0.00860589743
541	120	421	30	0.991975069	0.00802493095
609	128	481	32	0.992467880	0.00753211975
681	136	545	34	0.992914557	0.00708544254
757	144	613	36	0.993300676	0.00669932365
837	152	685	38	0.993654966	0.00634503365
921	160	761	40	0.993977904	0.00602209568

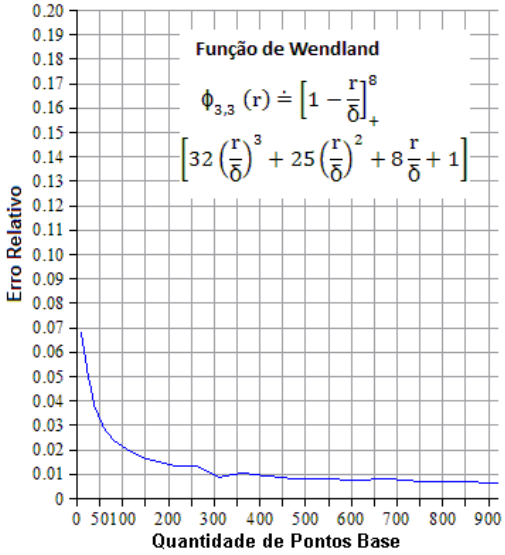
Figura 89 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{3,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



RELATORIO:
****
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^6[3+18(r/δ)
+35(r/δ)^2]
****
Suporte = 1.42
****
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
****

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.922759056	0.07724094390
21	16	5	4	0.945739567	0.05426043270
37	24	13	6	0.961221695	0.03877830510
57	32	25	8	0.970301390	0.02969861030
81	40	41	10	0.976052761	0.02394723890
109	48	61	12	0.979973972	0.02002602820
141	56	85	14	0.982802093	0.01719790700
177	64	113	16	0.984936476	0.01506352420
217	72	145	18	0.986584604	0.01341539620
261	80	181	20	0.987944424	0.01205557580
309	88	221	22	0.989030480	0.01096951960
361	96	265	24	0.989946544	0.01005345580
417	104	313	26	0.990763664	0.00923633575
477	112	365	28	0.991437912	0.00856208801
541	120	421	30	0.992227256	0.00777274370
609	128	481	32	0.992459059	0.00754094124
681	136	545	34	0.992126465	0.00787353516
757	144	613	36	0.993702888	0.00629711151
837	152	685	38	0.993505478	0.00649452209
921	160	761	40	0.966064453	0.03393554690

Figura 90 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{3,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.

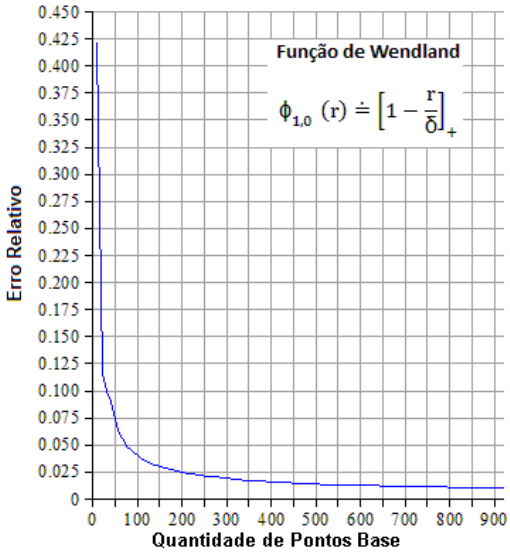



```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta:Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^8[1+8(r/δ)+
                                        25(r/δ)^2+32(r/δ)^3]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo z(x,y)=1
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.931419432	0.06858056780
21	16	5	4	0.946872592	0.05312740800
37	24	13	6	0.961291075	0.03870892520
57	32	25	8	0.970305741	0.02969425920
81	40	41	10	0.976078808	0.02392119170
109	48	61	12	0.980013549	0.01998645070
141	56	85	14	0.982802510	0.01719748970
177	64	113	16	0.984989524	0.01501047610
217	72	145	18	0.986622095	0.01337790490
261	80	181	20	0.986377537	0.01362246270
309	88	221	22	0.991287231	0.00871276855
361	96	265	24	0.989575386	0.01042461400
417	104	313	26	0.990753174	0.00924682617
477	112	365	28	0.991718292	0.00828170776
541	120	421	30	0.991600037	0.00839996338
609	128	481	32	0.992180467	0.00781953335
681	136	545	34	0.991607666	0.00839233398
757	144	613	36	0.993038177	0.00696182251
837	152	685	38	0.993180275	0.00681972504
921	160	761	40	0.993896484	0.00610351563

Figura 91 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação constante e Função de Wendland $\phi_{3,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.

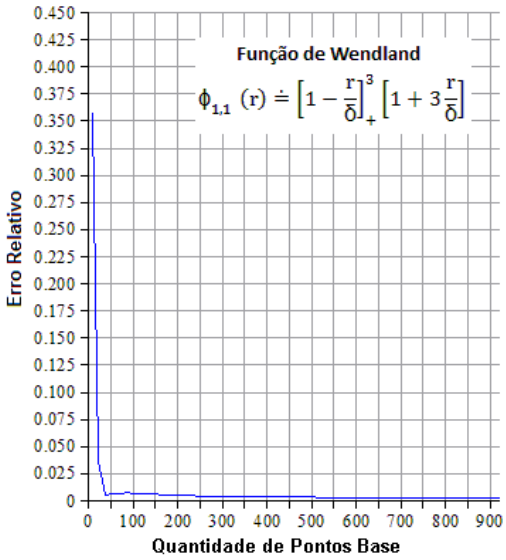
AP2.2 PARA O CAMPO FUNÇÃO DE FRANKE




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
```

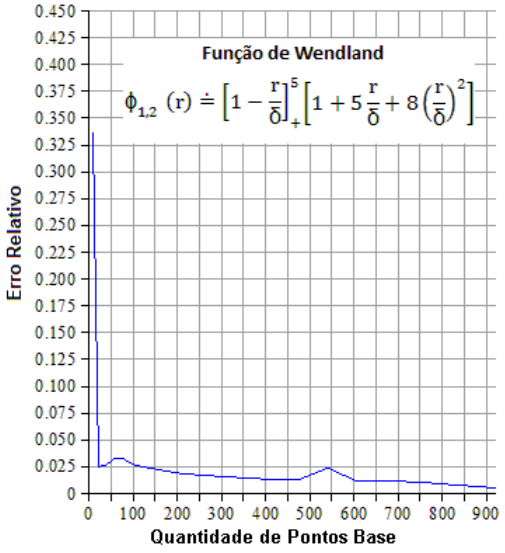
PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.355313122	0.4215290550
21	16	5	4	0.543150187	0.1157191250
37	24	13	6	0.556370139	0.0941962525
57	32	25	8	0.575465024	0.0631086454
81	40	41	10	0.585332811	0.0470433012
109	48	61	12	0.591144800	0.0375810340
141	56	85	14	0.594974935	0.0313453488
177	64	113	16	0.597690344	0.0269245002
217	72	145	18	0.599722803	0.0236155372
261	80	181	20	0.601296186	0.0210539736
309	88	221	22	0.602564573	0.0189889651
361	96	265	24	0.603596091	0.0173095912
417	104	313	26	0.604464769	0.0158953313
477	112	365	28	0.605195105	0.0147063015
541	120	421	30	0.605823159	0.0136837922
609	128	481	32	0.606359601	0.0128104333
681	136	545	34	0.606844127	0.0120215956
757	144	613	36	0.607271135	0.0113264015
837	152	685	38	0.607641637	0.0107232016
921	160	761	40	0.607987940	0.0101593994

Figura 92 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{1,0}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



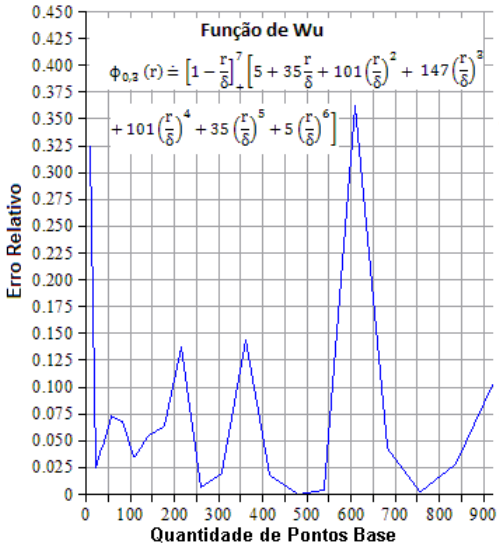

```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:(1-(r/δ))^3(1+3(r/δ))
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.394537985   0.35766863800
21    16        5        4    0.637361050   0.03766177220
37    24        13       6    0.611358523   0.00467188982
57    32        25       8    0.610315800   0.00636950601
81    40        41       10   0.609786391   0.00723141432
109   48        61       12   0.610199571   0.00655873353
141   56        85       14   0.610546708   0.00599357346
177   64        113      16   0.610920191   0.00538552133
217   72        145      18   0.611228704   0.00488324277
261   80        181      20   0.611477017   0.00447897427
309   88        221      22   0.611699343   0.00411701528
361   96        265      24   0.611870170   0.00383889908
417   104       313      26   0.612059355   0.00353089441
477   112       365      28   0.612199426   0.00330285053
541   120       421      30   0.612297773   0.00314273476
609   128       481      32   0.612424850   0.00293584564
681   136       545      34   0.612515211   0.00278873299
757   144       613      36   0.612595558   0.00265792315
837   152       685      38   0.612675190   0.00252827792
921   160       761      40   0.612741113   0.00242095185
```

Figura 93 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{1,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



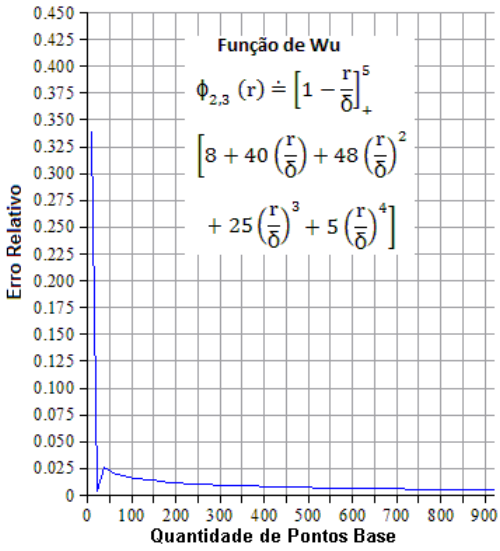

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^5[1+5(r/δ)+
                                                  8(r/δ)^2]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.407373190   0.33677217400
21    16        5        4    0.629378319   0.02466541160
37    24        13       6    0.598243237   0.02602435830
57    32        25       8    0.594269753   0.03249342740
81    40        41       10   0.594406128   0.03227140010
109   48        61       12   0.598155260   0.02616758830
141   56        85       14   0.600033283   0.02311005630
177   64        113      16   0.601728439   0.02035024020
217   72        145      18   0.602882385   0.01847154830
261   80        181      20   0.603781223   0.01700818540
309   88        221      22   0.604767561   0.01540236920
361   96        265      24   0.605204344   0.01469126060
417   104       313      26   0.606439590   0.01268020550
477   112       365      28   0.606226265   0.01302751150
541   120       421      30   0.599609375   0.02380020360
609   128       481      32   0.607378006   0.01115240900
681   136       545      34   0.607061386   0.01166788490
757   144       613      36   0.608039856   0.01007487810
837   152       685      38   0.609130859   0.00829865970
921   160       761      40   0.611270905   0.00481453817
```

Figura 94 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{1,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



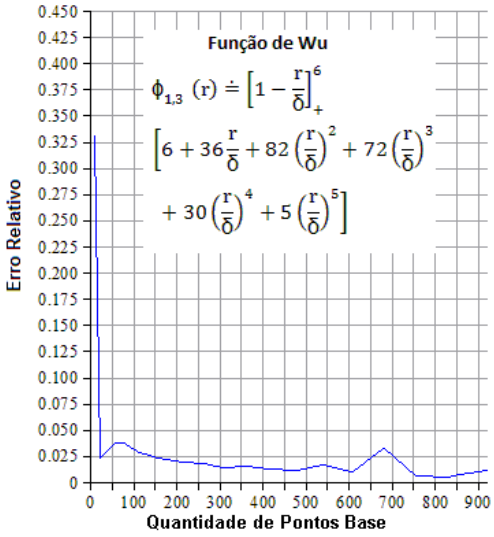

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^7[5+35(r/δ)+..+5(r/δ)^6]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2     0.414347410   0.32541772700
21    16        5        4     0.628981113   0.02401873660
37    24        13       6     0.587131023   0.04411570360
57    32        25       8     0.569290161   0.07316169140
81    40        41       10    0.572269440   0.06831124420
109   48        61       12    0.592998028   0.03456386920
141   56        85       14    0.580696106   0.05459213260
177   64        113      16    0.575317383   0.06334901600
217   72        145      18    0.699218750   0.13836979900
261   80        181      20    0.618164063   0.00640793378
309   88        221      22    0.601684570   0.02042166140
361   96        265      24    0.525390625   0.14463275700
417   104       313      26    0.625366211   0.01813346150
477   112       365      28    0.614501953   0.00044580136
541   120       421      30    0.611450195   0.00452264212
609   128       481      32    0.391113281   0.36324426500
681   136       545      34    0.641479492   0.04436684400
757   144       613      36    0.615402222   0.00191149220
837   152       685      38    0.631591797   0.02826908600
921   160       761      40    0.551269531   0.10250034900
```

Figura 95 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi_{0,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



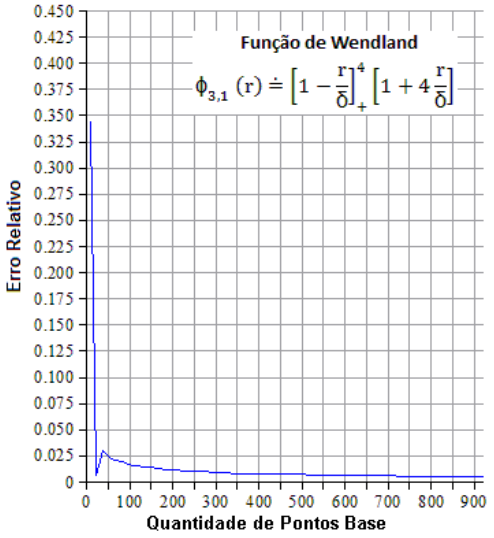

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^5[8+40(r/δ)+...+
                                                  5(r/δ)^4]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2     0.405420721   0.33995091900
21    16        5        4     0.616557240   0.00379193178
37    24        13       6     0.597769439   0.02679572810
57    32        25       8     0.601159811   0.02127600090
81    40        41       10    0.602781475   0.01863583550
109   48        61       12    0.604419649   0.01596879030
141   56        85       14    0.605616391   0.01402042340
177   64        113      16    0.606600404   0.01241839210
217   72        145      18    0.607379079   0.01115066280
261   80        181      20    0.608014703   0.01011582840
309   88        221      22    0.608548999   0.00924596284
361   96        265      24    0.608995676   0.00851874612
417   104       313      26    0.609375834   0.00789982546
477   112       365      28    0.609710097   0.00735562528
541   120       421      30    0.609992743   0.00689546205
609   128       481      32    0.610247970   0.00647993712
681   136       545      34    0.610457540   0.00613874476
757   144       613      36    0.610693932   0.00575388456
837   152       685      38    0.610864878   0.00547557417
921   160       761      40    0.611012697   0.00523491530
```

Figura 96 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi_{2,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



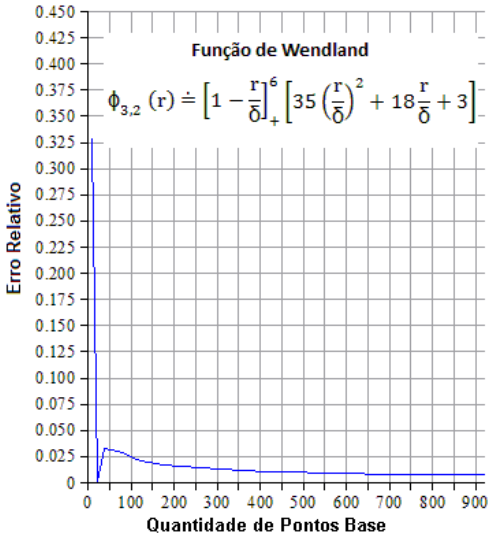

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^6[6+36(r/δ)+...+5(r/δ)^5]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.410657078   0.33142581600
21    16        5        4    0.628087997   0.02256469060
37    24        13       6    0.596193314   0.02936175470
57    32        25       8    0.590865135   0.03803634640
81    40        41       10   0.591232777   0.03743780400
109   48        61       12   0.595985174   0.02970061820
141   56        85       14   0.598553658   0.02551897430
177   64        113      16   0.600810528   0.02184465530
217   72        145      18   0.602267981   0.01947183530
261   80        181      20   0.603204012   0.01794791970
309   88        221      22   0.605624199   0.01400771180
361   96        265      24   0.604419708   0.01596869340
417   104       313      26   0.605979919   0.01342857720
477   112       365      28   0.606712341   0.01223615090
541   120       421      30   0.603729248   0.01709280540
609   128       481      32   0.607949018   0.01022276650
681   136       545      34   0.593444824   0.03383645790
757   144       613      36   0.610198975   0.00655970396
837   152       685      38   0.610656738   0.00581443775
921   160       761      40   0.606658936   0.01232309830
```

Figura 97 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wu $\phi_{1,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^4[1+4(r/δ)]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.402312517   0.34501123400
21    16        5        4    0.610898256   0.00542123197
37    24        13       6    0.595589936   0.03034408950
57    32        25       8    0.600329340   0.02262805770
81    40        41       10   0.602459908   0.01915936730
109   48        61       12   0.604262233   0.01622507350
141   56        85       14   0.605552316   0.01412474180
177   64        113      16   0.606581330   0.01244944430
217   72        145      18   0.607390165   0.01113261280
261   80        181      20   0.608052850   0.01005372310
309   88        221      22   0.608587861   0.00918269251
361   96        265      24   0.609043121   0.00844150223
417   104       313      26   0.609432876   0.00780695817
477   112       365      28   0.609764576   0.00726693077
541   120       421      30   0.610054314   0.00679522008
609   128       481      32   0.610308230   0.00638182973
681   136       545      34   0.610525131   0.00602870155
757   144       613      36   0.610733509   0.00568945007
837   152       685      38   0.610906363   0.00540803419
921   160       761      40   0.611071169   0.00513971923
```

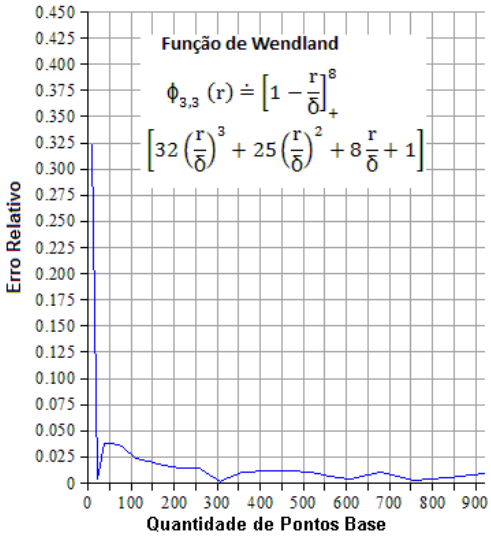
Figura 98 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{3,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^6[3+.+35(r/δ)^2]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.411754698	0.32963880900
21	16	5	4	0.614705563	0.00077728974
37	24	13	6	0.593737900	0.03335931520
57	32	25	8	0.595086575	0.03116359190
81	40	41	10	0.596766710	0.02842823040
109	48	61	12	0.600136101	0.02294266220
141	56	85	14	0.602022171	0.01987202840
177	64	113	16	0.603648961	0.01722351650
217	72	145	18	0.604797304	0.01535394600
261	80	181	20	0.605733216	0.01383022590
309	88	221	22	0.606472075	0.01262731850
361	96	265	24	0.607074738	0.01164614780
417	104	313	26	0.607679009	0.01066235730
477	112	365	28	0.608117938	0.00994775537
541	120	421	30	0.608834267	0.00878152996
609	128	481	32	0.608907700	0.00866197702
681	136	545	34	0.609447479	0.00778318336
757	144	613	36	0.609523773	0.00765897240
837	152	685	38	0.609735489	0.00731428666
921	160	761	40	0.618652344	0.00720288465

Figura 99 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{3,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.

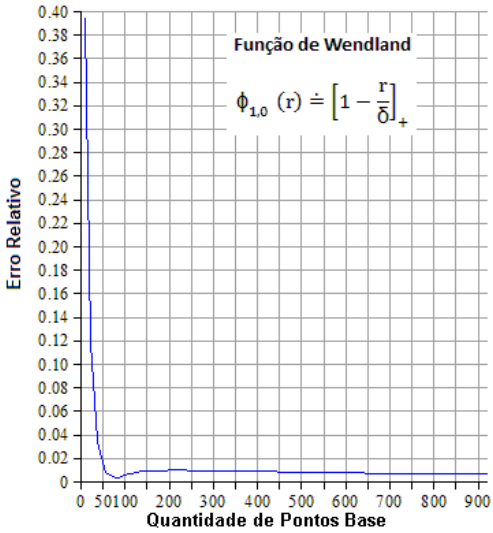



```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^8[1+.+32(r/δ)^3]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Funcao de Frank
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.415698975	0.32321730300
21	16	5	4	0.612568736	0.00270159123
37	24	13	6	0.590530634	0.03858093540
57	32	25	8	0.590942860	0.03790980580
81	40	41	10	0.592709303	0.03503393010
109	48	61	12	0.599264264	0.02436206490
141	56	85	14	0.601548493	0.02064320450
177	64	113	16	0.603861570	0.01687737550
217	72	145	18	0.605207682	0.01468582640
261	80	181	20	0.605452538	0.01428718680
309	88	221	22	0.615234375	0.00163822784
361	96	265	24	0.607620239	0.01075803860
417	104	313	26	0.606628418	0.01237278340
477	112	365	28	0.606796265	0.01209951840
541	120	421	30	0.608947754	0.00859676581
609	128	481	32	0.612213135	0.00328053138
681	136	545	34	0.607543945	0.01088225000
757	144	613	36	0.612823486	0.00228684256
837	152	685	38	0.611038208	0.00519338204
921	160	761	40	0.608386993	0.00950971711

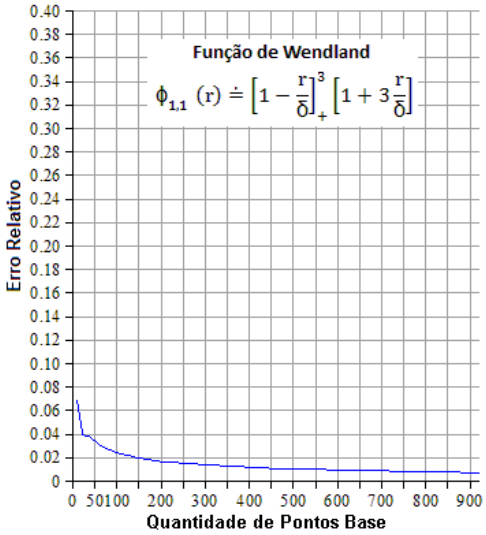
Figura 100 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação Função de Franke e Função de Wendland $\phi_{3,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.

APC.3 PARA O CAMPO PARABOLOIDE



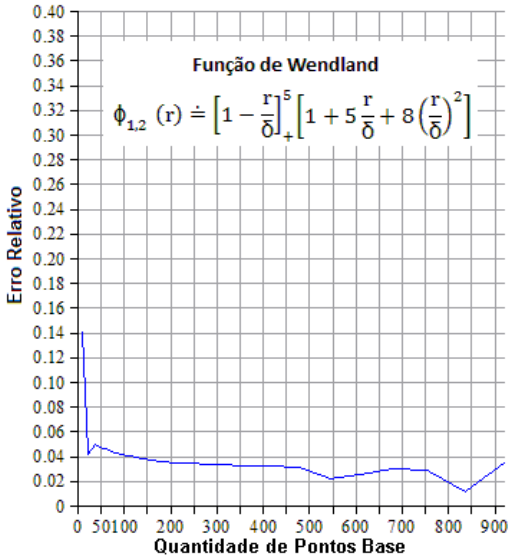

```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:            ERRO:
9     8         1        2     0.232443690     0.39466211200
21    16        5        4     0.186464131     0.11878475500
37    24        13       6     0.172386676     0.03432002660
57    32        25       8     0.167907506     0.00744500756
81    40        41       10    0.166186243     0.00288257003
109   48        61       12    0.165463418     0.00721952319
141   56        85       14    0.165154710     0.00907176733
177   64        113      16    0.165038481     0.00976914167
217   72        145      18    0.165012985     0.00992211699
261   80        181      20    0.165034801     0.00979122519
309   88        221      22    0.165077925     0.00953248143
361   96        265      24    0.165130153     0.00921911001
417   104       313      26    0.165190101     0.00885942578
477   112       365      28    0.165253043     0.00848177075
541   120       421      30    0.165306151     0.00816312432
609   128       481      32    0.165369317     0.00778412819
681   136       545      34    0.165414676     0.00751197338
757   144       613      36    0.165467560     0.00719466805
837   152       685      38    0.165513813     0.00691714883
921   160       761      40    0.165559977     0.00664016604
```

Figura 101 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{1,0}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^3[1+3(r/δ)]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:            ERRO:
9     8         1        2     0.178279608     0.06967762110
21    16        5        4     0.159989432     0.04006344080
37    24        13       6     0.160324574     0.03805258870
57    32        25       8     0.161317885     0.03209272030
81    40        41       10    0.162144303     0.02713420990
109   48        61       12    0.162781358     0.02331188320
141   56        85       14    0.163270652     0.02037611600
177   64        113      16    0.163653433     0.01807942990
217   72        145      18    0.163962424     0.01622548700
261   80        181      20    0.164209902     0.01474061610
309   88        221      22    0.164429426     0.01342347260
361   96        265      24    0.164602995     0.01238206030
417   104       313      26    0.164763808     0.01141718030
477   112       365      28    0.164891899     0.01064863800
541   120       421      30    0.165008426     0.00994947553
609   128       481      32    0.165089488     0.00946310163
681   136       545      34    0.165191770     0.00884941220
757   144       613      36    0.165273786     0.00835731626
837   152       685      38    0.165349603     0.00790241361
921   160       761      40    0.165429831     0.00742104650
```

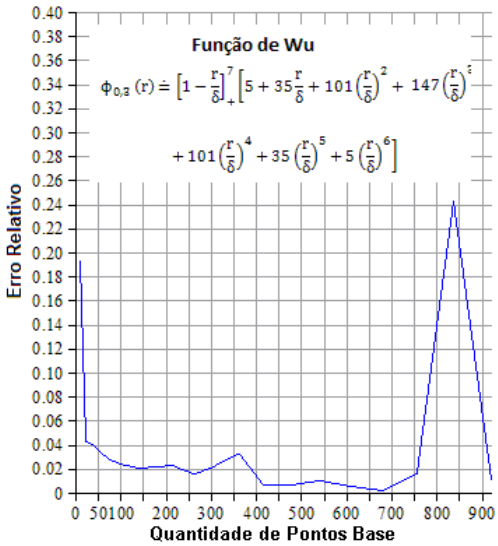
Figura 102 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{1,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^5[1+5(r/δ)
                                                  +8(r/δ)^2]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.190212071	0.1412723960
21	16	5	4	0.159662068	0.0420276225
37	24	13	6	0.158317268	0.0500964224
57	32	25	8	0.158864811	0.0468111634
81	40	41	10	0.159458831	0.0432470441
109	48	61	12	0.159925461	0.0404472649
141	56	85	14	0.160286307	0.0382821858
177	64	113	16	0.160577893	0.0365326703
217	72	145	18	0.160790920	0.0352545083
261	80	181	20	0.160948038	0.0343118012
309	88	221	22	0.161128044	0.0332317650
361	96	265	24	0.161273956	0.0323562920
417	104	313	26	0.161264420	0.0324135125
477	112	365	28	0.161427021	0.0314379036
541	120	421	30	0.170410156	0.0224609077
609	128	481	32	0.162462234	0.0252266228
681	136	545	34	0.161560059	0.0306396782
757	144	613	36	0.161848068	0.0289116204
837	152	685	38	0.164699554	0.0118027031
921	160	761	40	0.160793304	0.0352402031

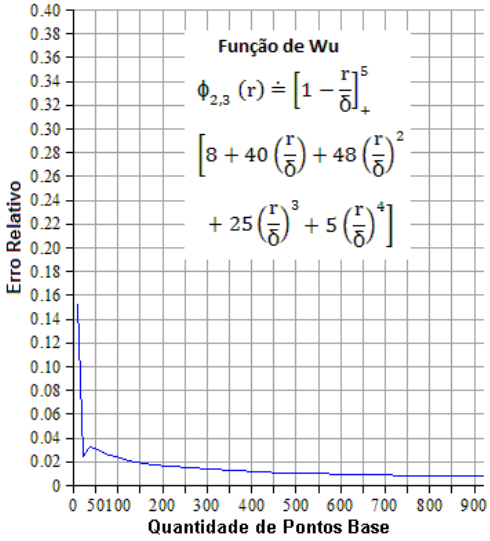
Figura 103 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{1,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^7[5+35(r/δ)..+5(r/δ)^6]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
```

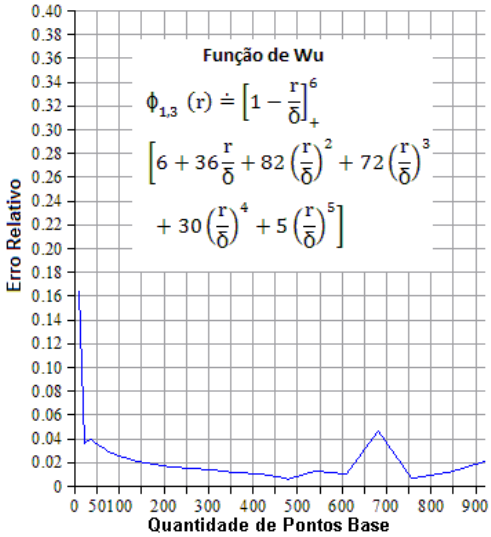
PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.198851570	0.19310939300
21	16	5	4	0.159478530	0.04312884810
37	24	13	6	0.159891486	0.04065111280
57	32	25	8	0.161209702	0.03274181490
81	40	41	10	0.162175417	0.02694752810
109	48	61	12	0.162862301	0.02282622460
141	56	85	14	0.163126945	0.02123835680
177	64	113	16	0.162918091	0.02249148490
217	72	145	18	0.162811279	0.02313235400
261	80	181	20	0.164052963	0.01568225030
309	88	221	22	0.162891388	0.02265170220
361	96	265	24	0.172119141	0.03271481390
417	104	313	26	0.165588379	0.00646975636
477	112	365	28	0.165412903	0.00752261281
541	120	421	30	0.164936066	0.01038363580
609	128	481	32	0.165733337	0.00560000539
681	136	545	34	0.166366577	0.00180056691
757	144	613	36	0.163917542	0.01649478080
837	152	685	38	0.125976563	0.24414065500
921	160	761	40	0.164733887	0.01159670950

Figura 104 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wu $\phi_{0,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



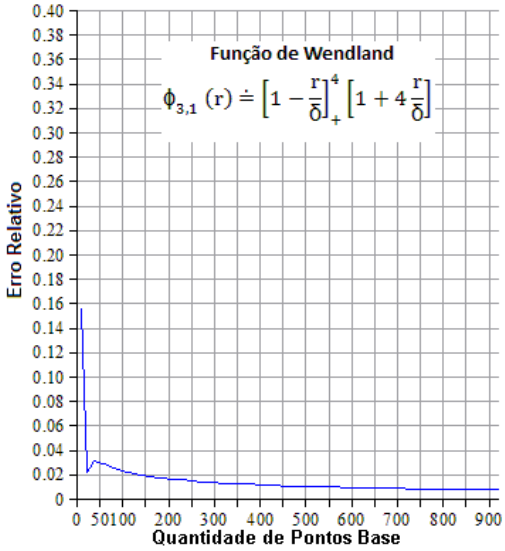

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^5[8+40(r/δ)+...+5(r/δ)^4]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2     0.192160711   0.15296423400
21    16        5        4     0.162595227   0.02442866560
37    24        13       6     0.161250651   0.03249612450
57    32        25       8     0.161719590   0.02968248720
81    40        41       10    0.162344128   0.02593526240
109   48        61       12    0.162885755   0.02268549800
141   56        85       14    0.163328201   0.02003082630
177   64        113      16    0.163686812   0.01787915830
217   72        145      18    0.163982511   0.01610496640
261   80        181      20    0.164224446   0.01465335490
309   88        221      22    0.164425999   0.01344403620
361   96        265      24    0.164606780   0.01235935090
417   104       313      26    0.164755046   0.01146975160
477   112       365      28    0.164873004   0.01076200600
541   120       421      30    0.164995551   0.01002672310
609   128       481      32    0.165093124   0.00944128633
681   136       545      34    0.165187001   0.00887802243
757   144       613      36    0.165268838   0.00838699937
837   152       685      38    0.165335238   0.00798860192
921   160       761      40    0.165384173   0.00769498944
```

Figura 105 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wu $\phi_{2,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



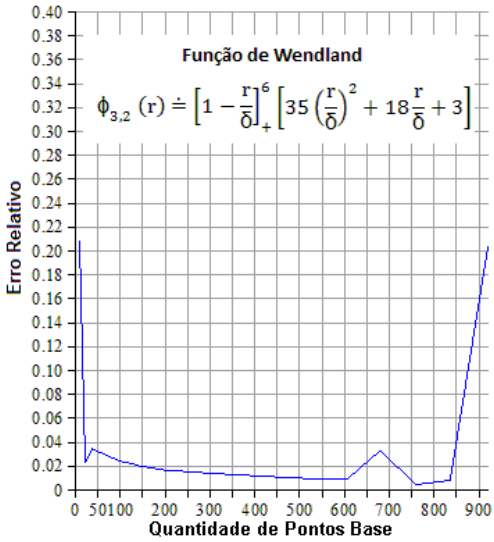

```
RELATORIO:
*************************************************************
RadialCompacta: Funcao de Wu:[1-(r/δ)]^6[6+36(r/δ)+...+5(r/δ)^5]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2     0.194170162   0.16502094300
21    16        5        4     0.160672784   0.03596332670
37    24        13       6     0.160014480   0.03991314770
57    32        25       8     0.161055356   0.03366789220
81    40        41       10    0.161965311   0.02820816640
109   48        61       12    0.162651658   0.02409008150
141   56        85       14    0.163172007   0.02096799020
177   64        113      16    0.163567781   0.01859334110
217   72        145      18    0.163898706   0.01660779120
261   80        181      20    0.164154530   0.01507285240
309   88        221      22    0.164354563   0.01387265320
361   96        265      24    0.164709091   0.01174548270
417   104       313      26    0.164918900   0.01048663260
477   112       365      28    0.165611267   0.00633242726
541   120       421      30    0.164581299   0.01251223680
609   128       481      32    0.164928436   0.01042941210
681   136       545      34    0.158935547   0.04638674860
757   144       613      36    0.165589333   0.00646403432
837   152       685      38    0.164726257   0.01164248590
921   160       761      40    0.163200378   0.02079775930
```

Figura 106 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wu $\phi_{1,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.



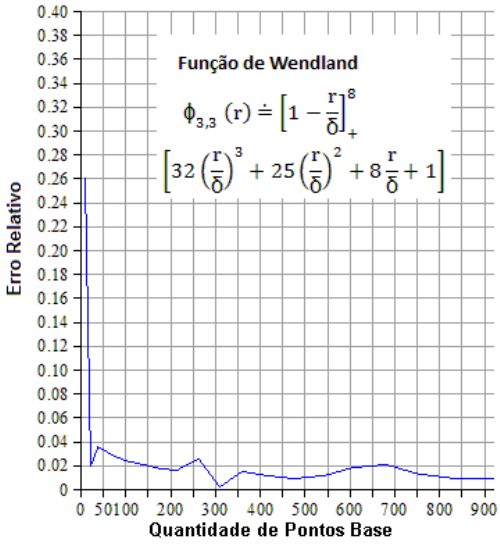

```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^4[1+4(r/δ)]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.192829609   0.15697762400
21    16        5        4    0.162983626   0.02209827300
37    24        13       6    0.161387071   0.03167760370
57    32        25       8    0.161791533   0.02925083040
81    40        41       10   0.162389040   0.02566578980
109   48        61       12   0.162916660   0.02250006790
141   56        85       14   0.163352519   0.01988491420
177   64        113      16   0.163706779   0.01775935290
217   72        145      18   0.163993210   0.01604077220
261   80        181      20   0.164234430   0.01459345220
309   88        221      22   0.164438218   0.01337072250
361   96        265      24   0.164616346   0.01230195160
417   104       313      26   0.164760172   0.01143899560
477   112       365      28   0.164894730   0.01063165070
541   120       421      30   0.165004700   0.00997182727
609   128       481      32   0.165114462   0.00931325555
681   136       545      34   0.165186286   0.00888231397
757   144       613      36   0.165267766   0.00839343667
837   152       685      38   0.165348172   0.00791099668
921   160       761      40   0.165384769   0.00769141316
```

Figura 107 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,1}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^6[3+.+35(r/δ)^2]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
PB:   PB.Cont   PB.Int   N:    Vol:          ERRO:
9     8         1        2    0.201487914   0.20892745300
21    16        5        4    0.162802175   0.02318698170
37    24        13       6    0.160759658   0.03544208410
57    32        25       8    0.161397964   0.03161224720
81    40        41       10   0.162153497   0.02707904580
109   48        61       12   0.162773162   0.02336105700
141   56        85       14   0.163259745   0.02044156190
177   64        113      16   0.163649142   0.01810517910
217   72        145      18   0.163934648   0.01639214160
261   80        181      20   0.164217949   0.01469233630
309   88        221      22   0.164422989   0.01346209650
361   96        265      24   0.164624929   0.01225045320
417   104       313      26   0.164817810   0.01109316950
477   112       365      28   0.164965391   0.01020768280
541   120       421      30   0.165182114   0.00890734792
609   128       481      32   0.165073395   0.00955966115
681   136       545      34   0.161132813   0.03320315480
757   144       613      36   0.165846825   0.00491908193
837   152       685      38   0.165235519   0.00858691335
921   160       761      40   0.132568359   0.20458987400
```

Figura 108 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,2}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.




```
RELATORIO:
*************************************************************
Radial Compacta: Funcao de Wendland:[1-(r/δ)]^8[1+.+32(r/δ)^3]
*************************************************************
Suporte =  1.42
*************************************************************
Campo Interpolado: Campo Paraboloide
*************************************************************
```

PB:	PB.Cont	PB.Int	N:	Vol:	ERRO:
9	8	1	2	0.210168719	0.26101228600
21	16	5	4	0.163414806	0.01951119300
37	24	13	6	0.160738468	0.03556922080
57	32	25	8	0.161372423	0.03176549080
81	40	41	10	0.162166804	0.02699920540
109	48	61	12	0.162805200	0.02316883210
141	56	85	14	0.163250208	0.02049878240
177	64	113	16	0.163690090	0.01785948870
217	72	145	18	0.163952827	0.01628306510
261	80	181	20	0.162292838	0.02624300120
309	88	221	22	0.167068481	0.00241085887
361	96	265	24	0.164176941	0.01493838430
417	104	313	26	0.164764404	0.01141360400
477	112	365	28	0.165058136	0.00965121388
541	120	421	30	0.164682388	0.01190570000
609	128	481	32	0.163570404	0.01857760550
681	136	545	34	0.163215637	0.02070620660
757	144	613	36	0.164489746	0.01306155320
837	152	685	38	0.165058136	0.00965121388
921	160	761	40	0.165109634	0.00934222341

Figura 109 - Gráfico representativo do erro relativo VS. quantidade de pontos base para o campo de interpolação paraboloide e Função de Wendland $\phi_{3,3}$ com seu respectivo relatório. Malha aplicada possui pontos internos e no contorno.

APÊNDICE D - Solução Analítica dos Problemas Físicos Abordados no Trabalho

APD.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA DA BARRA DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO

Com a finalidade de se avaliar o desempenho das FBRSC em solução numérica problemas físicos no ambiente do MEC, bem como a efetividade de sua aplicação com a Formulação MECIC, estuda-se uma barra de seção transversal constante engastada no topo e submetida ao próprio peso. Veja Figura 110.

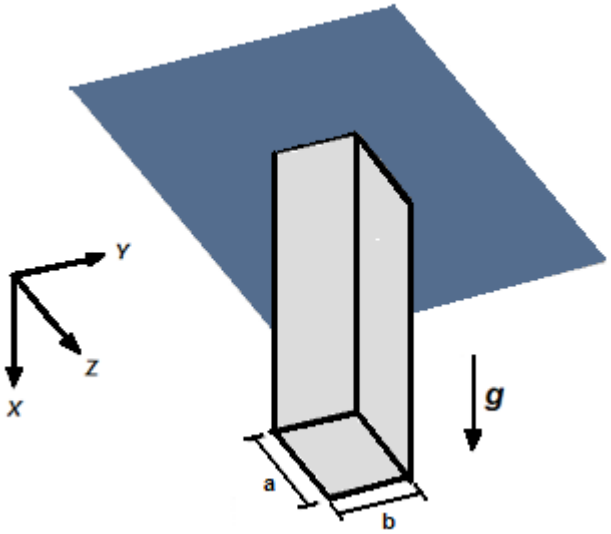


Figura 110 – Barra de seção transversal constante, engastada no topo e submetida ao peso próprio.
Fonte: Cruz (2012), modificado.

A partir da identificação do contorno do domínio do problema, é definido, na Figura 111, o sistema de coordenadas adotado e também as condições de contorno natural e essencial do problema.

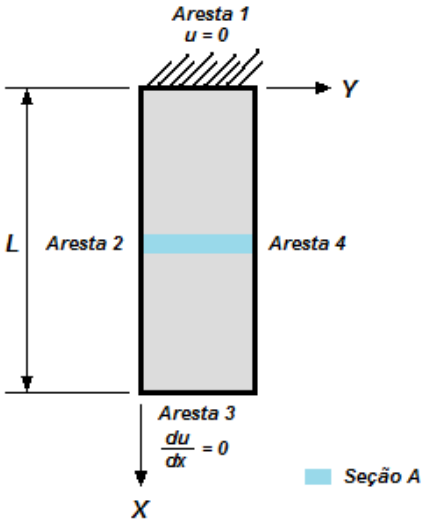


Figura 111 – Identificação do contorno do problema da barra de seção transversal constante.
Fonte: Cruz (2012), modificado.

As condições de contorno natural e essencial do problema são respectivamente:

Para a Aresta 3, x=L:

$$\frac{du}{dx} = 0, \sigma = 0 \tag{66}$$

E

Para a Aresta 1, x=0:

$$u = 0 \tag{67}$$

Para determinar as equações analíticas que regem o deslocamento da barra, avaliam-se as forças atuantes na seção infinitesimal hachurada da Figura 111 através de um diagrama de equilíbrio nessa seção. Veja Figura 112.

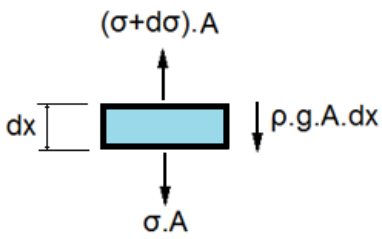


Figura 112 – Diagrama de equilíbrio das forças atuantes na seção A.
Fonte: Cruz (2012), modificado.

Do diagrama de equilibro do elemento infinitesimal estático, da Figura 112, tem-se:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-(\sigma + d\sigma)A + \sigma A + \rho g A dx = 0$$

$$-\sigma - d\sigma + \sigma + \rho g dx = 0$$

$$-d\sigma + \rho g dx = 0$$

$$d\sigma = +\rho g dx$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = +\rho g$$

(68)

A partir do conceito de Mecânica dos Sólidos definido como Lei de Hooke, onde as tensões (σ) são proporcionais as deformações (ε), por meio de uma propriedade do material definida como Módulo de Elasticidade (E). A Lei é válida para solicitações mecânicas do material dentro do regime elástico. Veja a equação (69).

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{du}{dx}$$

(69)

Derivando a equação (69) em relação a x, tem-se:

$$\frac{d\sigma}{dx} = E\frac{d^2u}{dx^2}$$

(70)

Inserindo a equação (69) na equação (70), tem-se que:

$$E\frac{d^2u}{dx^2} = +\rho g$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = +\frac{\rho g}{E}$$

(71)

A equação diferencial modeladora do problema físico proposto neste Apêndice apresenta o formato da Equação de Poisson. Portanto, encaixa-se perfeitamente na solução numérica encontrada na literatura especializada de Equações de Poisson com MEC.

A equação diferencial acima descreve o deslocamento de qualquer ponto da barra submetido a uma ação de corpo, que é o seu próprio peso.

Nos tópicos APD.2, APD.3 e APD.4 serão desenvolvidos soluções analíticas deste problema para as seguintes considerações: a densidade é constante em relação ao eixo x, a densidade varia linearmente em relação a x, e a densidade varia senoidalmente em relação a x.

APD.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A DENSIDADE CONSTANTE

Solucionando a ED da equação (71) para densidade constante, tem-se:

$$\rho = \mathrm{cte} \tag{72}$$

Assim, tem-se:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = +\frac{\rho g}{E}$$
$$\frac{du}{dx} = +\frac{\rho g x}{E} + c_1$$
$$u = +\frac{\rho g x^2}{2E} + c_1 x + c_2 \tag{73}$$

Para se determinar a equação de u(x), faz-se necessário o cálculo das constantes a partir das condições de contorno do problema. Veja a equação (66) e equação (67).

$$\frac{du(L)}{dx} = 0 = +\frac{\rho g L}{E} + c_1$$

$$c_1 = \frac{\rho g L}{E}$$

(74)

E

$$u(0) = + \frac{\rho g 0^2}{2E} + c_1 0 + c_2$$

$$c_2 = 0$$

(75)

Portanto, u(x) será:

$$u = + \frac{\rho g x^2}{2E} + \frac{\rho g L}{E} x$$

(76)

APD.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A DENSIDADE LINEAR

Solucionando a ED da equação (71) para densidade constante, tem-se:

$$\rho = x$$

(77)

Assim, tem-se:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = + \frac{g}{E} x$$

$$\frac{du}{dx} = + \frac{g}{2E} x^2 + c_1$$

$$u = + \frac{g x^3}{6E} + c_1 x + c_2$$

(78)

Para se determinar a equação de u(x), faz-se necessário o calculo das constantes a partir das condições de contorno do problema. Veja a equação (66) e equação (67).

$$\frac{du(L)}{dx} = 0 = + \frac{g}{2E} L^2 + c_1$$

$$c_1 = \frac{g}{2E}L^2$$

(79)

E

$$u(0) = + \frac{g0^3}{6E} + c_1 0 + c_2$$
$$c_2 = 0$$

(80)

Portanto, u(x) será:

$$u = + \frac{gx^3}{6E} + \frac{g}{2E}L^2 x$$

(81)

APD.4 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A DENSIDADE SENOIDAL

Solucionando a ED da equação (71) para densidade constante, tem-se:

$$\rho = \mathrm{sen}(x)$$

(82)

Assim, tem-se:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = + \frac{g.\mathrm{sen}(x)}{E}$$
$$\frac{du}{dx} = + \frac{g.\cos(x)}{E} + c_1$$
$$u = + \frac{g.\mathrm{sen}(x)}{E} + c_1 x + c_2$$

(83)

Para se determinar a equação de u(x), faz-se necessário o calculo das constantes a partir das condições de contorno do problema. Veja a equação (66) e equação (67).

$$\frac{du(L)}{dx} = 0 = + \frac{g.\cos(L)}{E} + c_1$$

$$c_1 = \frac{g.\cos(L)}{E}$$

(84)

E

$$u(0) = + \frac{g.\mathrm{sen}(0)}{E} + c_1 0 + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

(85)

Portanto, u(x) será:

$$u = + \frac{g.\mathrm{sen}(x)}{E} + \frac{g.\cos(L)}{E} x$$

(86)

APÊNDICE E - Malhas Utilizadas na Simulação de Problemas Físicos no Ambiente do MEC

A seguir, mostram-se as malhas aplicadas aos programas implementados no ambiente de MEC para solução numérica de problemas físicos, tal como a barra engastada no topo de seção transversal constantes com densidade constante, com densidade linear e com densidade senoidal. A distribuição de pontos no contorno e no interior da malha foi combinada para obtenção de novas malhas. Veja a Figura 113, a Figura 114 e a Figura 115.

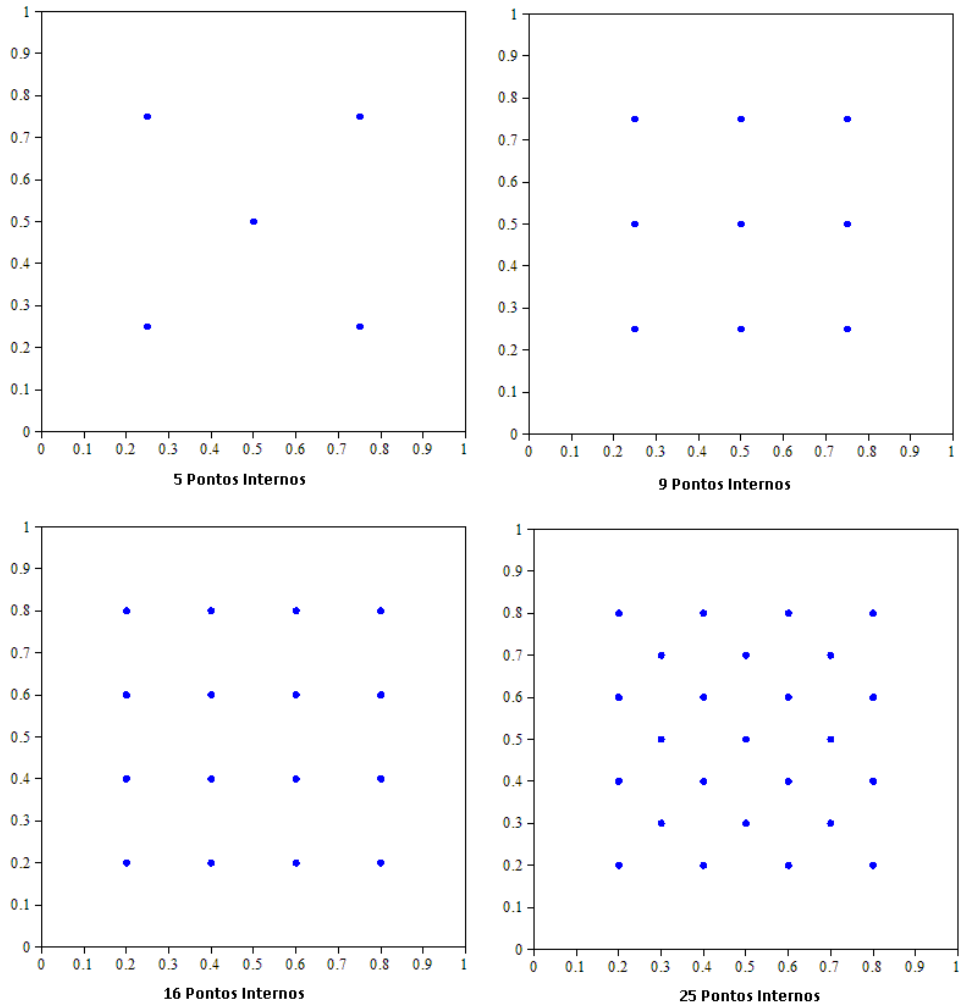


Figura 113 – Visualização da distribuição de pontos internos da malha. De 5 a 25 pontos.

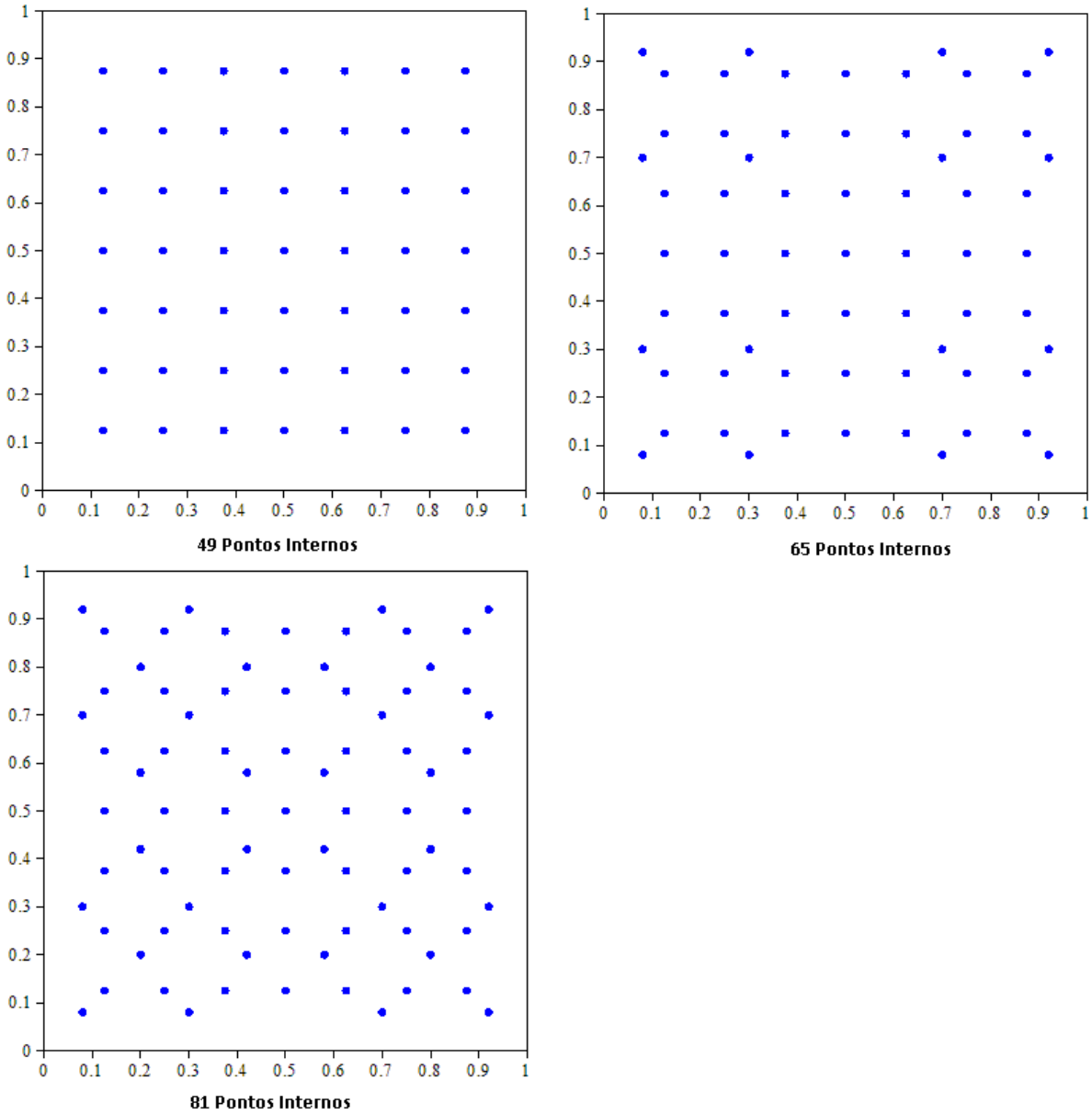


Figura 114 – Visualização da distribuição de pontos internos da malha. De 49 a 81 pontos.

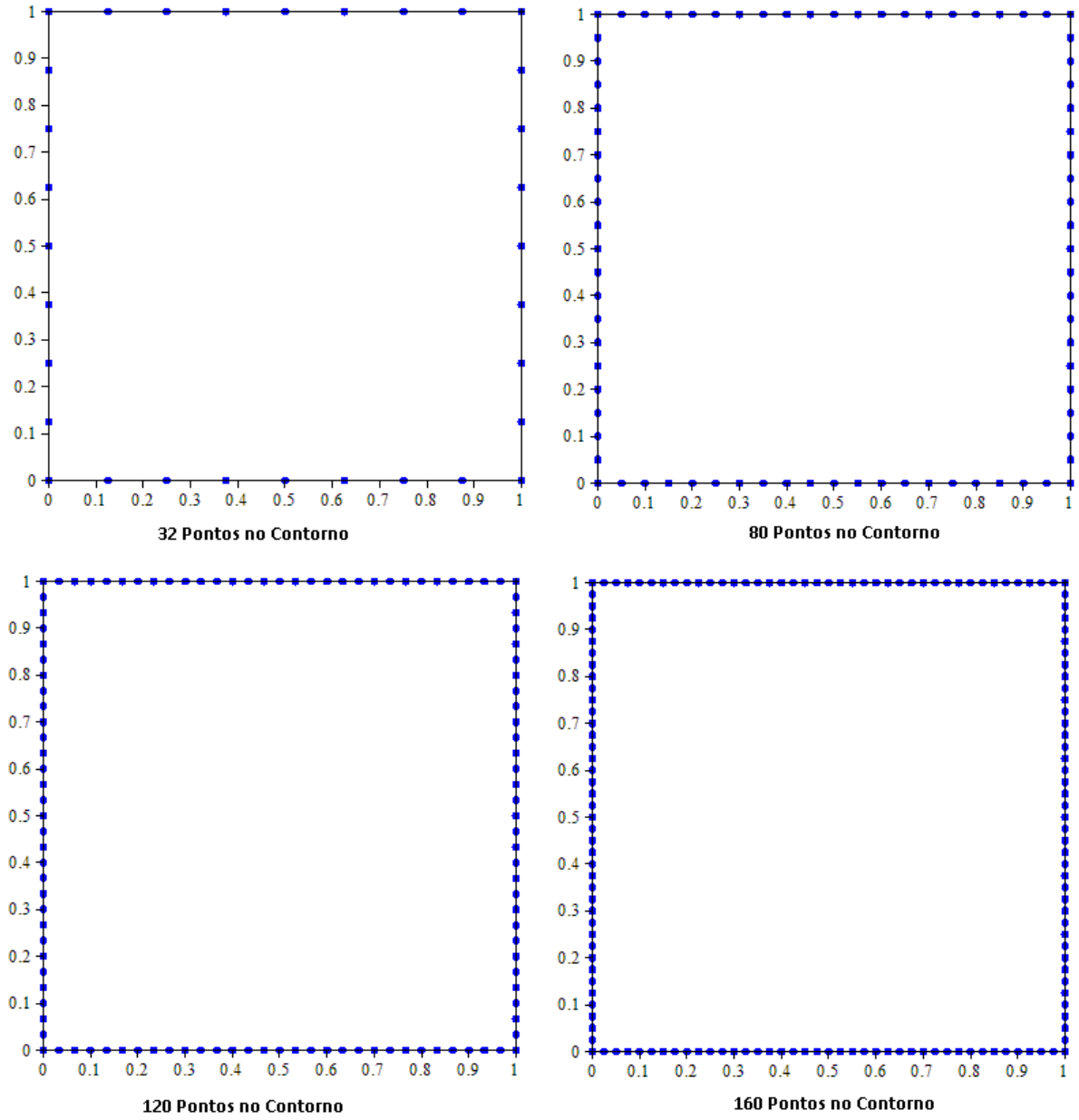


Figura 115 – Visualização da distribuição de pontos no contorno da malha. De 32 a 160 pontos.

APÊNDICE F - Tabelas de Tempo de Processamento para a Solução de Problemas Físicos no Ambiente no MEC com Formulação MECIC e Ajuste de Pontos Interpolantes

APF.1 SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DA BARRA DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE SEM AJUSTES DE PONTOS.

APF.1.1 Simulação com Densidade Constante sem Ajuste de Pontos Interpolantes

Tabela 52 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,066s	0,078s	0,090s	0,113s	0,141s	0,245s	0,338s	0,457s
80	0,571s	0,644s	0,697s	0,817s	0,936s	1,437s	1,841s	2,333s
120	1,851s	2,278s	2,236s	2,388s	2,710s	3,856s	4,758s	5,829s
160	4,699s	4,846s	5,279s	5,815s	6,560s	8,769s	10,525s	12,672s

Tabela 53 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,071s	0,084s	0,096s	0,117s	0,149s	0,257s	0,355s	0,476s
80	0,601s	0,669s	0,721s	0,844s	0,978s	1,483s	1,877s	2,417s
120	1,987s	2,118s	2,161s	2,453s	2,797s	3,984s	4,848s	5,954s
160	4,738s	5,024s	5,332s	5,952s	6,674s	8,918s	10,975s	12,755s

Tabela 54 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL.MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,062s	0,075s	0,084s	0,105s	0,134s	0,236s	0,325s	0,487s
80	0,546s	0,642s	0,663s	0,759s	0,900s	1,395s	1,786s	2,323s
120	1,844s	1,998s	2,072s	2,297s	2,650s	3,774s	4,765s	5,758s
160	4,499s	4,832s	5,129s	5,700s	6,276s	8,683s	10,413s	12,531s

APF.1.1.1 Simulação com Variação do Suporte sem Ajuste de Pontos Interpolantes

Tabela 55 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Constante (Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Tempo de Processamento		
0,6	16,348s	13,313s	15,133s
0,65	14,245s	15,791s	14,639s
0,7	16,646s	18,140s	15,380s
0,75	12,986s	18,255s	16,141s
0,8	13,038s	14,895s	24,552s
0,85	13,153s	17,004s	16,411s
0,9	13.731s	14,133s	35,407s
0,95	13.753s	17,176s	40,698s
1,1	14.089s	15,009s	14,796s
1,15	13.553s	14,982s	30,942s
1,2	13.804s	13,876s	15,233s
1,25	13.768s	13,743s	36,191s
1,3	13.406s	19,504s	34,536s
1,35	13.295s	15,337s	31,301s
Suporte Pleno	13.357s	17,797s	14,965s

APF.1.2 Simulação com Densidade Linear sem Ajuste de Pontos Interpolantes

Tabela 56 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,062s	0,078s	0,093s	0,109s	0,140s	0,234s	0,358s	0,452s
80	0,577s	0,624s	0,687s	0,780s	0,921s	1,404s	1,810s	2,324s
120	1,794s	1,950s	2,122s	2,371s	2,668s	3,807s	4,758s	5,850s
160	4,446s	4,758s	5,039s	5,538s	6,349s	8,518s	10,265s	12,372s

Tabela 57 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,063s	0,078s	0,093	0,109s	0,140s	0,265s	0,343s	0,468s
80	0,059s	0,067s	0,072s	0,827s	0,967s	1,466s	1,903s	2,387s
120	1,872s	3,012s	2,137s	2,418s	2,761s	3,900s	4,821s	5,928s
160	4,540s	4,882s	5,148s	5,741s	6,365s	8,627s	10,390s	12,729s

Tabela 58 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,063s	0,078s	0,078s	0,109s	0,140s	0,234s	0,312s	0,470s
80	0,546s	0,608s	0,670s	0,749s	0,889s	1,373s	1,778s	2,293s
120	1,732s	1,935s	2,012s	2,309s	2,667s	3,728s	4,649s	5,741s
160	4,368s	4,664s	4,945s	5,429s	6,178s	8,408s	10,078s	12,356s

APF.1.2.1 Simulação com Variação do Suporte sem Ajuste de pontos Interpolantes

Tabela 59 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Linear(Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Tempo de Processamento		
0,6	13,548s	16,006s	12,715s
0,65	15,579s	13,634s	13,650s
0,7	20,452s	17,082s	15,802s
0,75	23,663s	15,194s	17,659s
0,8	24,737s	14,713s	23,462s
0,85	18,214s	14,774s	21,918s
0,9	22,874s	15,508s	20,077s
0,95	17,754s	14,555s	38,033s
1,1	15,972s	14,664s	26,941s
1,15	14,739s	15,541s	15,819s
1,2	14,299s	14,806s	40,981s
1,25	14,806s	15,569s	37,596s
1,3	14,117s	16,318s	17,706s
1,35	16,248s	17,145s	19,454s
Suporte Pleno	15,986s	14,899s	22,574s

APF.1.3 Simulação com Densidade Senoidal sem Ajustes de pontos Interpolantes

Tabela 60 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,062s	0,078s	0,094s	0,109s	0,140s	0,234s	0,359s	0,453s
80	0,562s	0,624s	0,686s	0,780s	0,920s	1,435s	1,841s	2,34s
120	1,825s	1,997s	2,090s	2,324s	2,699s	3,853s	4,742s	5,850s
160	4,509s	4,821s	5,070s	5,538s	6,302s	8,549s	10,281s	12,496s

Tabela 61 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,078s	0,094s	0,094s	0,109s	0,156s	0,250s	0,358s	0,483s
80	0,593s	0,670s	0,733s	0,811s	0,999s	1,482	1,872s	2,387s
120	1,872s	2,028s	2,153s	2,418s	2,762s	3,900s	4,868s	6,006s
160	4,617s	4,945s	5,163s	5,756s	6,443s	8,674s	10,390s	12,558s

Tabela 62 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,063s	0,078s	0,078s	0,110s	0,125s	0,234s	0,328s	0,437s
80	0,546s	0,608s	0,655s	0,765s	0,936s	1,435s	1,794s	2,278s
120	1,747s	1,903s	2,028s	2,293s	2,605s	3,760s	4,664s	5,772s
160	4,384s	4,680s	4,976s	5,460s	6,146s	8,393s	10,109s	12,402s

APF.1.3.1 Simulação com Variação do Suporte sem Ajuste de Pontos Interpolantes

Tabela 63 – TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO SEM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Senoidal(Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Tempo de Processamento		
0,6	13,401s	13,884s	17,877s
0,65	21,935s	17,426s	14,820s
0,7	15,506s	18,611s	12,622s
0,75	35,803s	16,708s	23,291s
0,8	18,345s	14,930s	22,386s
0,85	21,685s	26,536s	24,509s
0,9	32,857s	41,762s	18,549s
0,95	21,312s	23,790s	16,069s
1,1	33,230s	28,612s	13,697s
1,15	29,066s	30,780s	23,527s
1,2	20,032s	15,960s	16,335s
1,25	13,325s	33,853s	21,110s
1,3	14,337s	29,952s	13,244s
1,35	15,116s	15,537s	13,853s
Suporte Pleno	14,587s	13,603s	13,728s

APF.2 SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DA BARRA DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE COM AJUSTES DE PONTOS.

APF.2.1 Simulação com Densidade Constante com Ajuste de Pontos Interpolantes

Tabela 64 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,072s	0,122s	0,116s	0,125s	0,127s	0,130s	0,081s	0,086s
80	0,442s	0,432s	0,472s	0,440s	0,434s	0,515s	0,457s	0,470s
120	0,990s	1,021s	1,038s	1,003s	1,125s	1,041s	1,041s	1,109s
160	1,876s	1,868s	1,958s	1,905s	1,915s	1,960s	1,987s	2,260s

Tabela 65 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,117s	0,077s	0,077s	0,130s	0,133s	0,100s	0,126s	0,136s
80	0,526s	0,487s	0,526s	0,512s	0,523s	0,503s	0,493s	0,499s
120	1,088s	1,061s	1,086s	1,077s	1,214s	1,295s	1,142s	1,181s
160	2,257s	2,093s	2,126s	2,111s	2,064s	2,061s	2,082s	2,168s

Tabela 66 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL.MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,068s	0,117s	0,086s	0,076s	0,070s	0,074s	0,076s	0,128s
80	0,467s	0,429s	0,404s	0,453s	0,429s	0,445s	0,445s	0,440s
120	0,933s	0,939s	0,965s	0,970s	0,992s	1,042s	1,047s	1,009s
160	1,789s	1,810s	1,758s	1,843s	1,786s	1,823s	1,900s	2,030s

APF.2.1.1 Simulação com Variação do Suporte com Ajuste de Pontos Interpolantes

Tabela 67 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE CONSTANTE. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Constante (Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	Função 1	Função 2	Função 3
Suporte Compacto	Tempo de Processamento		
0,45	1,633s	1,689s	1,634s
0,5	1,643s	1,673s	1,617s
0,55	1,653s	1,681s	1,623s
0,6	1,674s	1,712s	1,648s
0,65	1,727s	1,778s	1,673s
0,7	1,697s	1,750s	1,672s
0,75	1,714s	1,818s	1,692s
0,8	1,748s	1,799s	1,706s
0,85	1,761s	1,817s	1,695s
0,9	1,769s	1,848s	1,726s
0,95	1,781s	1,867s	1,740s
1,1	1,925s	2,028s	1,815s
1,15	1,978s	2,044s	1,827s
1,2	1,940s	2,079s	1,838s
1,25	1,950s	2,072s	1,873s
1,3	1,939s	2,073s	1,859s
1,35	1,968s	2,065s	1,844s
Suporte Pleno	2,005s	2,076s	1,850s

APF.2.2 Simulação com Densidade Linear com Ajuste de Pontos Interpolantes

Tabela 68 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,119s	0,117s	0,089s	0,102s	0,095s	0,090s	0,120s	0,139s
80	0,421s	0,466s	0,485s	0,431s	0,473s	0,46s	0,506s	0,485s
120	0,958s	1,028s	1,041s	1,034s	0,981s	1,090s	1,073s	1,068s
160	1,859s	1,878s	1,909s	1,899s	1,913s	1,967s	1,965s	1,977s

Tabela 69 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,077s	0,141s	0,131s	0,132s	0,135s	0,135s	0,119s	0,114s
80	0,477s	0,472s	0,455s	0,518s	0,518s	0,556s	0,540s	0,526s
120	1,089s	1,042s	1,101s	1,084s	1,065s	1,142s	1,219s	1,143s
160	1,999s	1,995s	2,026s	2,008s	2,030s	2,002s	2,060s	2,103s

Tabela 70 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,070s	0,069s	0,070s	0,092s	0,075s	0,075s	0,133s	0,138s
80	0,412s	0,451s	0,471s	0,407s	0,409s	0,425s	0,525s	0,465s
120	0,961s	0,911s	0,936s	0,948s	0,949s	0,970s	1,018s	1,000s
160	1,743s	1,792s	1,753s	1,764s	1,791s	1,833s	1,822s	1,936s

APF.2.2.1 Simulação com Variação do Suporte com Ajuste de pontos Interpolantes

Tabela 71 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE LINEAR. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Linear(Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Tempo de Processamento		
0,45	1,653s	1,669s	1,607s
0,5	1,732s	1,654s	1,607s
0,55	1,686s	1,669s	1,591s
0,6	1,701s	1,732s	1,685s
0,65	1,763s	1,762s	1,638s
0,7	1,763s	1,748s	1,654s
0,75	1,747s	1,794s	1,653s
0,8	1,780s	1,825s	1,701s
0,85	1,747s	1,841s	1,701s
0,9	1,778s	1,841s	1,685s
0,95	1,810s	1,857s	1,716s
1,1	1,903s	1,996s	1,810s
1,15	1,903s	2,028s	1,825s
1,2	1,997s	2,028s	1,857s
1,25	1,950s	2,075s	1,857s
1,3	1,965s	2,075s	1,810s
1,35	1,919s	2,106s	1,841s
Suporte Pleno	1,935s	2,122s	1,856s

APF.2.3 Simulação com Densidade Senoidal com Ajustes de pontos Interpolantes

Tabela 72 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{5,0}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,072s	0,076s	0,076s	0,075s	0,081s	0,078s	0,081s	0,086s
80	0,432s	0,460s	0,448s	0,465s	0,453s	0,469s	0,464s	0,486s
120	1,053s	0,999s	1,064s	1,021s	1,020s	1,093s	1,059s	1,096s
160	1,994s	1,921s	1,958s	1,957s	1,976s	1,969s	2,109s	2,091s

Tabela 73 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WU $\Phi_{3,3}$ COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,078s	0,081s	0,079s	0,080s	0,081s	0,086s	0,089s	0,088s
80	0,457s	0,467s	0,475s	0,480s	0,490s	0,531s	0,524s	0,532s
120	1,152s	1,138s	1,198s	1,176s	1,332s	1,121s	1,134s	1,197s
160	1,996s	2,077s	1,972s	2,060s	2,251s	2,052s	2,066s	2,162s

Tabela 74 - TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. A FUNÇÃO RADIAL TESTADA É A FUNÇÃO DE WENDLAND $\phi_{3,0}$COM SUPORTE GLOBAL. MALHA VARIÁVEL.

Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos							
	Zero	5	9	16	25	49	65	81
32	0,073s	0,073s	0,077s	0,075s	0,086s	0,079s	0,086s	0,082s
80	0,450s	0,461s	0,436s	0,452s	0,439s	0,484s	0,477s	0,536s
120	1,017s	0,999s	0,979s	0,976s	0,993s	1,066s	1,031s	1,061s
160	1,859s	1,857s	1,895s	1,953s	1,797s	1,849s	1,872s	1,926s

APF.2.3.1 Simulação com Variação do Suporte com Ajuste de Pontos Interpolantes

Tabela 75 – TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA SIMULAÇÃO COM A FORMULAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE CONTORNO COM AJUSTE DE PONTOS INTERPOLANTES PARA BARRA PRISMÁTICA SUBMETIDA AO PRÓPRIO PESO E ENGASTADA NO TOPO, COM DENSIDADE SENOIDAL. TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUME COM VARIAÇÃO DO SUPORTE DAS TRÊS FBRSC, PARA MALHA 160/81.

Otimização do Suporte-Resultados para a Barra de Seção Transversal Constante com Densidade Senoidal(Malha Rica - 241 Pontos Base-160/81)			
	Funções de Base Radial de Suporte Compacto		
	$\phi_{5,0}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\phi_{3,3}(r) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16+29\frac{r}{\delta}+20\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+5\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\right]$	$\phi_{3,0}\left(\frac{r}{\delta}\right) \doteq \left[1-\frac{r}{\delta}\right]_+^2$
Suporte Compacto	Tempo de Processamento		
0,45	1,638s	1,701s	1,575s
0,5	1,716s	1,716s	1,622s
0,55	1,685s	1,748s	1,591s
0,6	1,701s	1,732s	1,591s
0,65	1,653s	1,810s	1,685s
0,7	1,700s	1,826s	1,638s
0,75	1,731s	1,825s	1,638s
0,8	1,779s	1,825s	1,653s
0,85	1,747s	1,794s	1,700s
0,9	1,763s	1,810s	1,685s
0,95	1,794s	1,841s	1,762s
1,1	1,903s	1,965s	1,810s
1,15	1,981s	2,028s	1,809s
1,2	1,934s	2,028s	1,810s
1,25	1,951s	2,028s	1,825s
1,3	1,981s	2,059s	1,840s
1,35	1,997s	2,106s	1,919s
Suporte Pleno	1,965s	2,106s	1,856s

APÊNDICE G - Visualização das Superfícies Geradas pelo Processo de Interpolação Simples com FBRSC's

Neste apêndice é possível visualizar as superfícies analíticas e também as obtidas a partir do processo de interpolação simples, sem ajuste de pontos, com três malhas distintas (121 pontos, 441 pontos e 961 pontos regularmente distribuídos no domínio Ω - Figura 32) dos campos utilizados nos testes bidimensionais com volumes da Função de Wendland $\phi_{3,0}$ com suporte compacto igual a 1.1.

Nota-se que há variações entre as superfícies analíticas e interpoladas dos Campos em questão. Entretanto, não se verifica uma compensação de erros no cálculo do volume abaixo dessas superfícies analisadas, de modo que possa gerar um falso entendimento acerca da eficácia do processo de interpolação com FBRSC's. As variações experimentadas pelas funções aproximantes são curvas suaves que unem os pontos de informação e (observem-se especialmente os gráficos da figura 116). Veja então que o teste bidimensional com volume é adequado para aferir o desempenho das FBRSC's no processo de interpolação simples.

Comenta-se ainda que as maiores variações da superfície interpolada, se comparada com a superfície real, encontram-se na região da superfície interpolada vinculada ao contorno do domínio Ω.

Vejam a Figura 116, a Figura 117, a Figura 118 e a Figura 119.

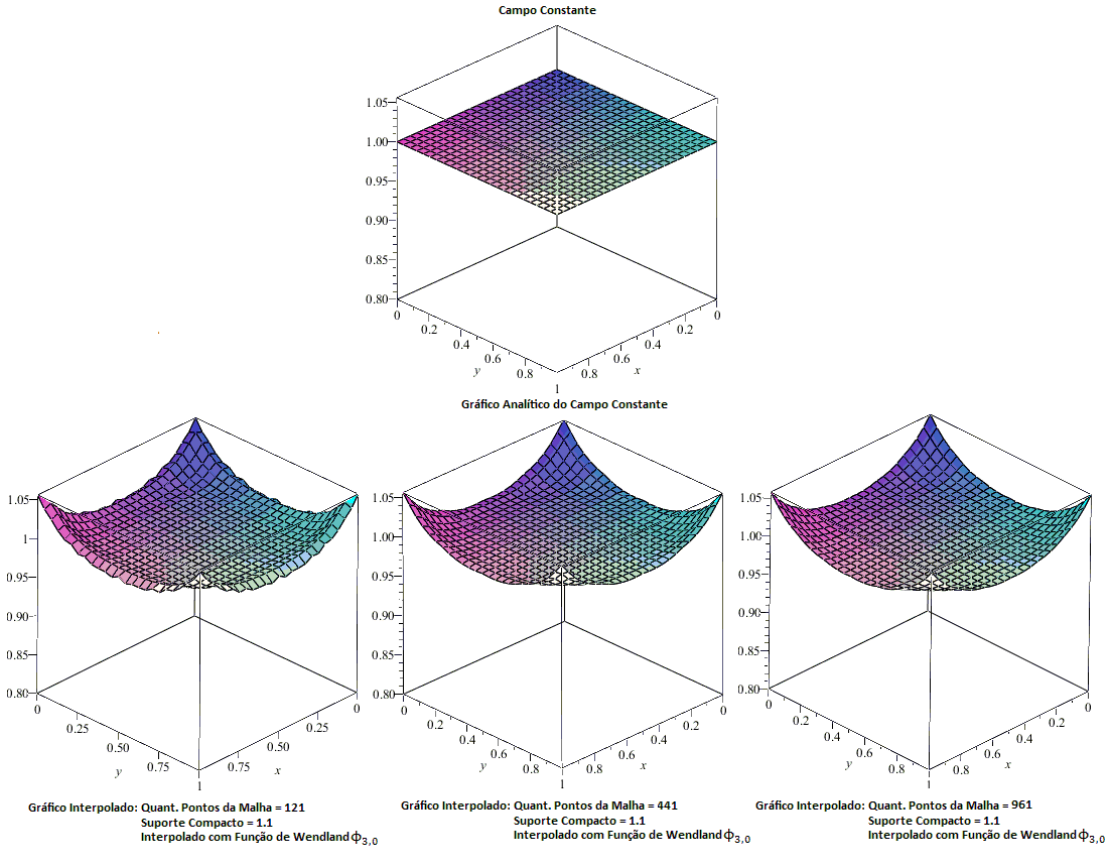


Figura 116 – Visualização dos gráficos analítico (real) e interpolado do Campo Constante.

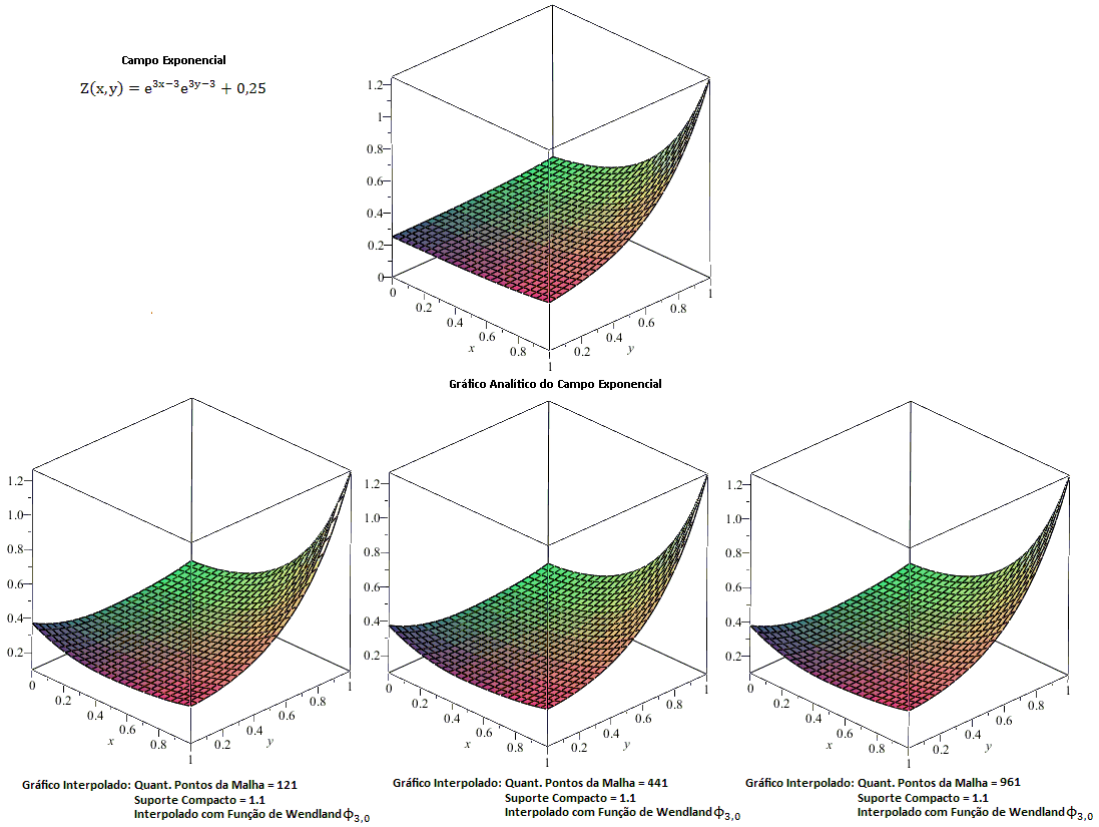


Figura 117 - Visualização dos gráficos analítico (real) e interpolado do Campo Exponencial.

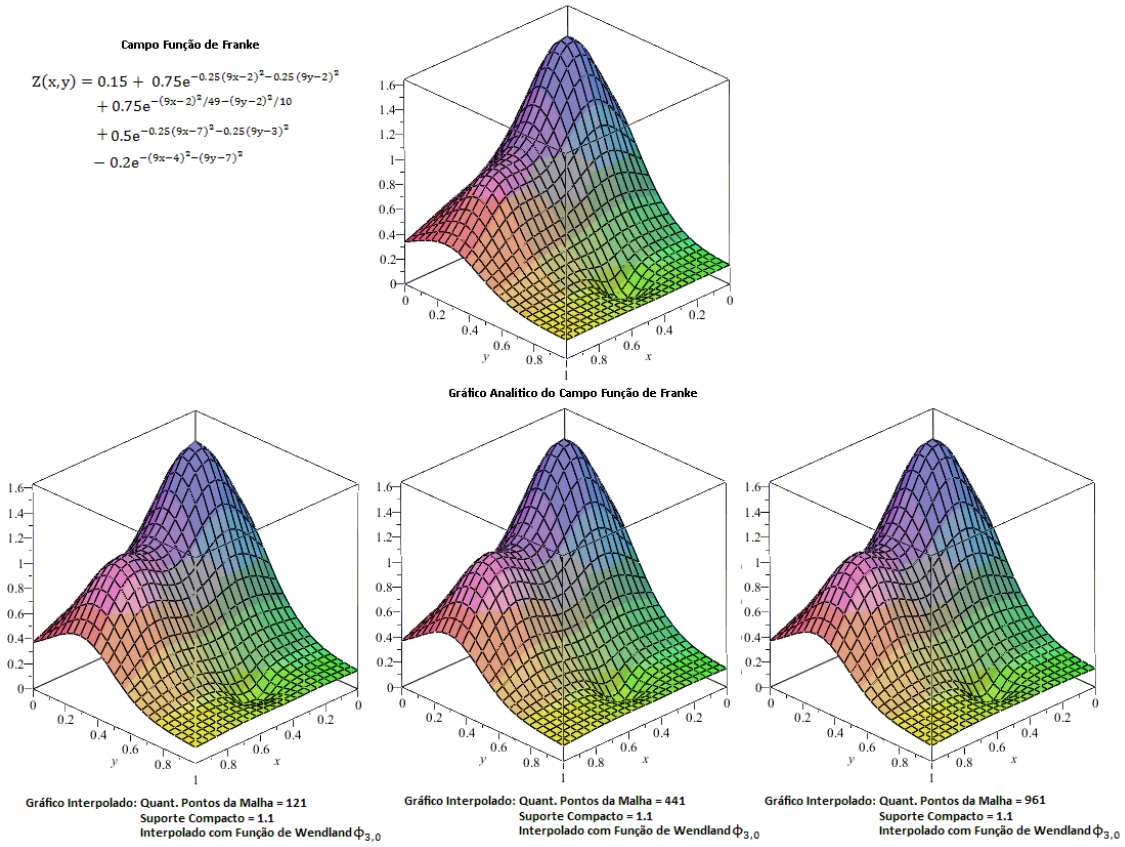


Figura 118 - Visualização dos gráficos analítico (real) e interpolado do Campo Função de Franke.

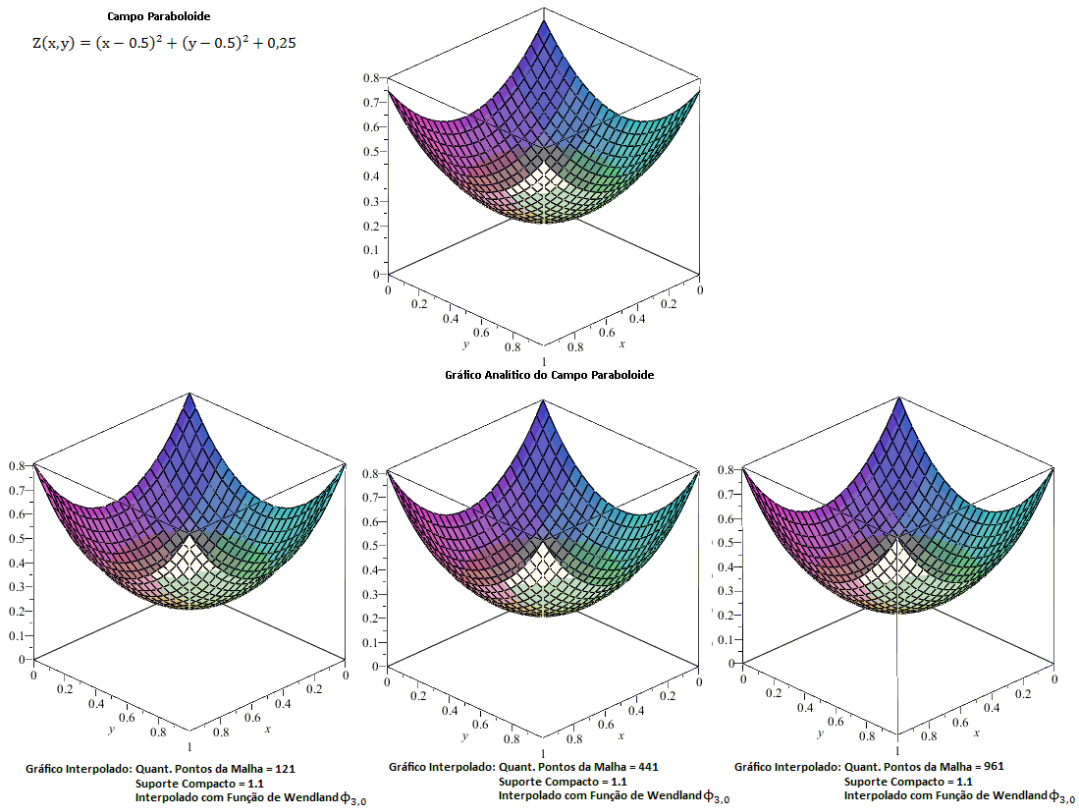


Figura 119 - Visualização dos gráficos analítico (real) e interpolado do Campo Paraboloide.