

# Restrições Entrópicas em Cosmologias Quase-Topológicas



UFES

A.A.Lima

Orientador: C.P. Constantinidis

Departamento de Física  
Universidade Federal do Espírito Santo

Dissertação apresentada para obtenção do título de

*Mestre em Física*

Março 2013

## Agradecimentos

Muito tenho a agradecer — e não só no que diz respeito a esta dissertação — ao grupo de teoria dos campos da Universidade Federal do Espírito Santo. Em geral a todos, pelo agradável ambiente de amizade que me proporcionaram e proporcionam. Em particular, pela sempre sincera orientação de C.P. Constantinidis, que me acolheu como aluno e amigo. À companhia de W. Algoner, agradeço com um brinde de vinho. Ao camarada U.C. dS, tenho de agradecer não só pela camaradagem como por muito do que aprendi. Ao professor e amigo G.M. Sotkov, devo tanto do que se encontra nestas páginas — e fora delas — que não sei dizer outra coisa que “obrigado”.

Uma das melhores oportunidades que a Física me proporcionou foi ter convivido ao longo dos anos com pessoas de personalidades tão agradáveis e raras como as de I.F. Justo, J. Guaitolini e R.C. Freitas. Acho pouco provável que eu fosse encontrar gente que pensasse tão parecido comigo em outros meios, acadêmicos ou não, o que sempre me deu a impressão de que eu estou no lugar certo.

Apesar do interesse pouco ou nulo pela área que escolhi por profissão, menciono aqui minhas queridas L.M. Barbosa, A.R. Guimarães, A.L. Freitas, A.C.C. Masiero, A.L.M. Siqueira e A.S. Spalenza, amigos de longa data e motivo de grande orgulho.

À minha família imensa, que são minha amizade mais antiga e permanecem a desejar minha felicidade sempre, eu agradeço de coração. Em particular, aos meus irmãos M. Borjaille e C.A. Lima, que fique aqui registrado meu agradecimento sincero. Pelo carinho incondicional, agradeço às minhas avós Áurea e Armezinda; a esta última ofereço este calhamaço de cobrinhas.

Ao meu pai, A.S. Lima, e à minha mãe, S.M.P. Alves, simplesmente não posso agradecer o suficiente, ou listar todos os motivos pelo qual sou grato — nem com mais duzentas páginas.

À Naiara, flor das águas, meu amor e amizade, minha companheira já de anos: o que houver de bom neste trabalho é tão meu quanto seu.

— Mais uma vez, a todos, os meus sinceros agradecimentos.

## Resumo

Investigamos a consistência causal e termodinâmica de modelos cosmológicos em Gravitação Cúbica Quase-Topológica (GQT), tal como suas consequências fenomenológicas. Para superpotenciais apropriados de um inflaton auto-interagente, derivamos uma forma analítica do fator de escala que reproduz características importantes da evolução do Universo. Calculamos a entropia dos horizontes aparentes e demonstramos que as condições para que esta entropia seja uma função crescente e positiva levam a restrições sobre os valores máximos da densidade de energia. Os valores fisicamente permitidos dos dois novos acoplamentos gravitacionais da GQT são então determinados. De modo similar ao que acontece no caso da gravitação de Einstein-Hilbert (EH), as equações de Friedmann generalizadas da GQT são deduzidas a partir da Primeira Lei Generalizada da Termodinâmica. Estuda-se em detalhes um modelo cosmológico cuja equação de estado na gravitação EH é linear. Uma importante consequência das correções da GQT se comparadas com a gravitação EH é a presença de um novo período de aceleração do Universo jovem. Calculamos as correções dos diamantes causais de Bousso, e demonstramos que seu Princípio Entrópico Causal, no contexto da GQT, continua fornecendo o valor observado — extremamente pequeno — da constante cosmológica.

## Abstract

We investigate the thermodynamical and causal consistency of cosmological models in cubic Quasi-Topological Gravity (QTG) in four dimensions, as well as their phenomenological consequences. For appropriately chosen forms of the inflaton superpotential, we derive the explicit analytic form of the scale factor that reproduces important features of the Universe evolution. We have calculated the entropy for the apparent horizon and further demonstrated that the conditions that it be a nonnegative, nondecreasing function lead to specific restrictions on the maximal values of the matter densities. The allowed range of the values of the two new QTG gravitational couplings is then established. Similarly to the case of Einstein-Hilbert Gravity (EH), the generalized QTG Friedmann equations are shown to be easily derived from the Generalized First Law of thermodynamics. The QTG counterparts of the EH model of linear equations of state are studied in details. An important new feature of these QTG equations of state is that they add a new early-time acceleration period to the evolution of the Universe. The correction to the volume of Bousso's causal diamond are calculated. We have also demonstrated that the Causal Entropic Principle, when applied to this QTG -Quintessence model, still allows one to derive the actual — very small — value of the cosmological constant.

# Conteúdo

<b>Conteúdo</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Gravitação de alta curvatura . . . . .	2
1.2 Termodinâmica e a lei da gravidade . . . . .	3
1.3 Cosmologia Cúbica Quase-Topológica . . . . .	4
<b>2 O Universo Observado</b>	<b>8</b>
2.1 Os princípios da Relatividade Geral . . . . .	8
2.1.1 O desvio da luz . . . . .	8
2.1.2 A Lagrangeana de Einstein-Hilbert . . . . .	9
2.2 A geometria do universo . . . . .	10
2.3 Cosmologia de Friedmann . . . . .	16
2.3.1 Equações de estado . . . . .	17
2.3.2 Singularidades . . . . .	19
2.3.3 Horizonte de partículas . . . . .	20
2.4 Cosmologia a partir de um campo escalar . . . . .	21
2.4.1 Fluido perfeito e um campo escalar . . . . .	22
2.4.2 O método do superpotencial . . . . .	22
2.4.3 Equação de estado determinada pelo superpotencial . . . . .	23
2.4.4 O superpotencial para equações de estado constantes . . . . .	24
2.5 O universo inflacionário . . . . .	25
2.5.1 Problemas do modelo cosmológico padrão . . . . .	25
2.5.2 O paradigma da inflação . . . . .	28
2.5.3 Condições de arrasto . . . . .	29
<b>3 Gravitação e Termodinâmica</b>	<b>32</b>
3.1 Horizontes . . . . .	32
3.1.1 Horizontes de eventos . . . . .	32

3.1.2	Horizontes de eventos dinâmicos . . . . .	35
3.1.3	O horizonte aparente . . . . .	36
3.2	Termodinâmica de horizontes . . . . .	40
3.2.1	O vetor de Kodama . . . . .	41
3.2.2	Cargas conservadas . . . . .	45
3.2.3	A Primeira Lei da Termodinâmica, generalizada . . . . .	46
3.2.4	As equações de Friedmann como relações termodinâmicas . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Cosmologia Quase-Topológica</b>	<b>51</b>
4.1	Gravitação de Lovelock . . . . .	51
4.2	Ação para a Gravitação Quase-Topológica . . . . .	54
4.3	As equações de campo da GQT . . . . .	58
4.3.1	O campo escalar . . . . .	58
4.3.2	Um fluido perfeito . . . . .	59
4.3.3	Espaços assintoticamente de Sitter . . . . .	60
4.4	Entropia na Gravitação Quase-Topológica . . . . .	61
4.4.1	A Fórmula de Wald . . . . .	61
4.4.2	Entropia de Wald para universos FRW . . . . .	64
4.4.3	As equações de Friedmann modificadas como relações termodinâmicas . . . . .	66
4.5	Restrições entrópicas . . . . .	68
4.5.1	Sobre a natureza dos cortes entrópicos . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Superpotencial e o Universo Inflacionário</b>	<b>73</b>
5.1	Superpotencial em Gravitação Quase-Topológica . . . . .	73
5.1.1	Sistema de primeira ordem . . . . .	73
5.1.2	Vácuos . . . . .	73
5.1.3	Equação de estado e o superpotencial em GQT . . . . .	76
5.1.4	Sobre a escolha do superpotencial . . . . .	77
5.2	Cadeias de histórias . . . . .	77
5.2.1	Um exemplo representativo . . . . .	79
5.2.2	A integral do fator de escala . . . . .	81
5.3	Inflação a partir do superpotencial . . . . .	82
5.3.1	Os parâmetros de arrasto . . . . .	82
5.3.2	Construção de períodos inflacionários . . . . .	83
5.4	Dois modelos cosmológicos inflacionários . . . . .	88
5.4.1	Universo singular a partir de um polinômio quártico . . . . .	88
5.4.2	Universo não singular a partir de um polinômio quártico . . . . .	91
5.4.3	Os efeitos de GQT . . . . .	94

<b>6</b>	<b>Equação de Estado Linear e a Constante Cosmológica</b>	<b>97</b>
6.1	A equação de estado linear . . . . .	98
6.2	O princípio entrópico causal e a pequena constante cosmológica . . . . .	101
6.3	A predição da Constante Cosmológica . . . . .	104
6.4	Equação de estado efetiva . . . . .	107
6.4.1	O período inicial de aceleração . . . . .	109
6.4.2	Velocidade do som . . . . .	111
6.4.3	Valores físicos de $\lambda$ e $\mu$ . . . . .	112
6.5	Gravitação Quase-Topológica e o princípio entrópico causal . . . . .	115
6.5.1	O tempo como função da função de Hubble . . . . .	115
6.5.2	Aproximação de primeira ordem para grandezas dinâmicas . . . . .	116
6.5.3	Validade da aproximação . . . . .	121
6.5.4	Correções quânticas no tamanho do universo observável . . . . .	122
6.5.5	Consequências de GQT para o princípio entrópico causal . . . . .	128
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>133</b>
7.1	Principais resultados . . . . .	133
7.2	Problemas em aberto e perspectivas futuras . . . . .	136
<b>A</b>	<b>Isometrias</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>A equação de Raychaudhuri</b>	<b>143</b>
<b>C</b>	<b>Equações de campo e o princípio variacional</b>	<b>148</b>
<b>D</b>	<b>Horizontes de Killing</b>	<b>155</b>
<b>E</b>	<b>Estrutura Conforme de Universos de Friedmann</b>	<b>160</b>
<b>F</b>	<b>O Polinômio Cúbico</b>	<b>167</b>
<b>G</b>	<b>Sobre a integral de uma razão de polinômios</b>	<b>171</b>
<b>H</b>	<b>A integral do tempo em função da função de Hubble</b>	<b>176</b>
H.1	O caso $\mu < 0$ . . . . .	177
H.1.1	Solução exata . . . . .	177
<b>I</b>	<b>Integrais para horizontes de eventos</b>	<b>183</b>
	<b>Referências</b>	<b>189</b>

# Lista de Figuras

4.1	Restrições Entrópicas . . . . .	70
4.2	Representação geométrica do espaço $\mu$ - $\lambda$ . . . . .	71
5.1	Superpotencial do tipo Higgs . . . . .	78
5.2	Existência de vácuos topológicos . . . . .	79
5.3	Transição de histórias . . . . .	84
5.4	Duração do período de arrasto . . . . .	86
5.5	Superpotencial quártico e seu potencial de matéria . . . . .	88
5.6	Equação de estado para o superpotencial quártico . . . . .	89
5.7	Superpotencial quártico e seu potencial de matéria . . . . .	91
5.8	Equação de estado para o superpotencial quártico . . . . .	92
5.9	Possíveis degenerações de história para um polinômio quártico. . .	93
5.10	Modificações da equação de estado para diversos valores de $\mu < 0$	94
5.11	Modificações da equação de estado para diversos valores de $\mu > 0$	95
6.1	Evolução do fator de escala $a_0(t)$ , em Giga-anos. . . . .	100
6.2	Taxa de produção de entropia ao longo da história do universo. Gráfico retirado de <a href="#">Bousso (2007)</a> . . . . .	102
6.3	Evolução do volume comóvel do diamante causal (EH) . . . . .	105
6.4	Parâmetros da equação de estado em função da densidade de energia	107
6.5	Número de períodos de aceleração . . . . .	109
6.6	Equação de estado efetiva para $\mu = -10^{-218}$ . . . . .	112
6.7	Equação de estado efetiva e entropia do horizonte aparente para $\mu = -10^{-218}$ . . . . .	114
6.8	O tempo em função da Função de Hubble . . . . .	115
6.9	Aproximação linear para a Função de Hubble . . . . .	117
6.10	Aproximação linear para a densidade de energia efetiva . . . . .	118
6.11	Aproximação linear para o fator de escala . . . . .	119
6.12	Validade da aproximação de $\rho_{\text{eff}}(t)$ . . . . .	122
6.13	Raio do horizonte de eventos passado em gravitação EH . . . . .	124
6.14	Raio do horizonte de eventos futuro em gravitação EH . . . . .	126

## LISTA DE FIGURAS

---

6.15	Evolução do volume comóvel do diamante causal (GB) . . . . .	128
6.16	Diagramas de Penrose de diamantes causais distintos . . . . .	130
E.1	Universo estático de Einstein. . . . .	160
E.2	Diagramas de Penrose para universos de Friedmann . . . . .	164

“Enquanto não alcançares a verdade,  
não a poderás corrigir. Porém, se  
a não corrigires, não a alcançarás.  
Entretanto, não te resignes.”

J. Saramago, Do Livro dos Conselhos.

# Capítulo 1

## Introdução

A observação feita por Penzias e [Wilson \(1965\)](#) de um banho de radiação térmica à nossa volta, com temperatura de corpo negro de aproximadamente 3K — a chamada Radiação Cósmica de Fundo (CMB na sigla em inglês) —, marcou a compreensão moderna do Universo em dois pontos fundamentais. Em primeiro lugar, confirmou-se que vivemos em um espaço-tempo com um grau notável de isotropia ao redor do nosso planeta; associado à experiência Copernicana de que a Terra não deve ocupar um ponto privilegiado no espaço, isto sugere fortemente que as seções espaciais do Universo sejam, em larga escala, homogêneas. Outras observações indicam que estas seções possuam curvatura *nula*, ou seja: a parte espacial do Universo tem a topologia do espaço Euclidiano.<sup>1</sup> Em segundo lugar, a explicação mais coerente para a presença desta radiação partindo, simultânea e homoganeamente, de todos os pontos do espaço em um passado remoto, é que naquela época o conteúdo material do Universo se encontrava em um estado muito quente e denso; assim, a CMB forneceu uma convincente indicação observacional para o modelo cosmológico conhecido como ‘*big-bang*’.

A característica principal da teoria do big-bang é o fato de que o Universo “nasceu” de uma singularidade — onde densidade e energia do conteúdo material eram infinitamente grandes — há um tempo *finito* no passado. Ele possui, portanto, uma idade finita que, como hoje revela o conjunto de observações astronômicas, é de aproximadamente 13.7 bilhões de anos.<sup>2</sup>

Desde o seu surgimento até os dias atuais, a expansão do espaço-tempo provocou um gradativo resfriamento da matéria presente no Universo, que passou de uma fase de energias extremamente altas até a fase recente com energias muito baixas. Em seu estágio inicial, com energia da ordem da energia de Planck,  $E_{\text{Pl}} \sim 10^{28} \text{eV}$ , a matéria se encontrava em um estado do tipo plasma de quarks e glúons, de natureza exclusivamente quântica. Hoje (mais precisamente, desde a

---

<sup>1</sup>Ver, e.g., [Weinberg \(2008\)](#).

<sup>2</sup>Ver, e.g., [Weinberg \(2008\)](#).

---

época da dominação da radiação), sua baixa densidade de energia torna possível (e apropriada) a descrição como um conjunto de fluidos barotrópicos clássicos.

Um dos maiores enigmas da física atual diz respeito à natureza destes fluidos clássicos. Apenas cerca de 5% da matéria observada, responsável pela formação de estrelas, planetas, etc, é matéria bariônica conhecida dos laboratórios terrestres. Uma quantidade muito maior, cerca de 23% do conteúdo total de matéria, é composta por um tipo exótico de partículas que interage exclusivamente de forma gravitacional — e é portanto invisível por outros meios que não detecção indireta, por exemplo através de curvas de rotação de galáxias. A esta matéria desconhecida e transparente à luz se batizou ‘*matéria escura*’. Mais alarmante ainda é que, fora este conteúdo já parcialmente desconhecido, os restantes 72% do total de matéria presente no universo se encontra na forma de uma “*energia escura*”: algo que atualmente provoca uma expansão *acelerada* do Universo, ao contrário do que seria a princípio esperado de um sistema cuja única forma de interação é exclusivamente atrativa.

A atual fase acelerada do Universo não é, todavia, a primeira. A existência de alguns problemas no modelo cosmológico padrão — eficaz descrição da evolução da história do Universo desde frações de segundo após o big-bang até os dias atuais<sup>1</sup> — levaram à indicação de que o primeiro estágio da “vida” do Universo tenha sido uma expansão acelerada quase-exponencial, conhecida como ‘*era inflacionária*’.<sup>2</sup> Durante a inflação, flutuações quânticas de um campo escalar, chamado de ‘*inflaton*’, deram origem a pequenas inomogeneidades espalhadas pela radiação cósmica de fundo, que se acredita terem sido as sementes das grandes estruturas hoje observadas no Universo, tais como galáxias, aglomerados, e os filamentos de matéria escura.

## 1.1 Gravitação de alta curvatura

A presença da singularidade no início da história do Universo torna inevitável uma formulação quântica da gravitação, ao forçar uma interseção entre os domínios de validade de ambas as teorias. Não há atualmente um consenso sobre qual abordagem fundamental deve levar a uma descrição quântica da gravidade; porém existe, a nível semi-clássico, uma descrição robusta do comportamento de campos quânticos em espaços curvos,<sup>3</sup> que corrige a ação de Einstein-Hilbert com a adição de termos quadráticos do tensor de Riemann,

$$\alpha R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\mu\alpha\nu\beta} + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R^2, \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Um magistral relato desta história pode ser encontrado em [Weinberg \(1988\)](#).

<sup>2</sup>Ver, por exemplo, [Linde \(1990, 2008\)](#), [Lyth \(2000\)](#).

<sup>3</sup>Ver, por exemplo, [Davies \(1982\)](#).

---

onde  $\alpha, \beta, \gamma$ , são coeficientes constantes, proporcionais a  $\hbar^2$ . Em conjunto com a renormalização da constante cosmológica,  $\Lambda$ , e da constante de Newton,  $\varkappa^2 = 16\pi G$ , a presença destes contra-termos garante a renormalização da teoria quântica campos no espaço curvo considerada; sua presença na Lagrangeana gravitacional é portanto *necessária* para que haja consistência “quântica” em uma teoria cosmológica que proponha descrever a matéria no estado super-denso do Universo muito jovem.

Isto motiva a investigação das chamadas *extensões de alta curvatura da ação de Einstein-Hilbert*, teorias gravitacionais com ação do tipo

$$S = \frac{1}{\varkappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \{ R + 2\Lambda + f(g^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta}^{\mu\nu}) + \varkappa^2 \mathcal{L}_{\text{mat}} \} , \quad (1.2)$$

onde  $f(g^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta}^{\mu\nu})$  é uma combinação de potências do tensor de curvatura, tais como

$$R^{n_1} ; (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})^{n_2} ; (R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta})^{n_3} ; (R_{\mu\nu} R^{\mu\sigma} R_{\sigma}^{\nu})^{n_4} ; \text{ etc.}$$

onde  $n_i$  são números inteiros positivos. As extensões de gravitação incluindo este tipo de termos também aparecem nos limites de baixas energias de teorias de cordas fechadas, cf. [Polchinski \(2005\)](#). Um princípio físico para a escolha dos coeficientes relativos das potências de curvaturas (os  $\alpha, \beta, \gamma$  em (1.1)) pode ser tomado como a imposição de causalidade das equações de campo, que devem possuir derivadas de no máximo segunda ordem da métrica. No caso das potências quadráticas (1.1), a única combinação possível que obedece esta condição para uma métrica arbitrária é o conhecido ‘*termo de Gauss-Bonnet*’:

$$R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} .$$

Nesta dissertação, vamos considerar, além destas quadráticas, contribuições de potências cúbicas do tensor de Riemann, com uma combinação específica de coeficientes, mostrada na Eq.(1.4), de maneira a obedecer este princípio de causalidade, chamada Gravitação Quase-Topológica ([Myers \(2010\)](#), [Ray \(2010\)](#)).

## 1.2 Termodinâmica e a lei da gravidade

Uma das maiores descobertas na área do conhecimento representando a fronteira entre a gravitação, as teorias de campos quânticos, e a termodinâmica e a mecânica estatística foi a observação das propriedades “holográficas” dos horizontes que escondem a singularidade no interior de um buraco negro.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Ver, por exemplo, [Penrose \(1996\)](#), [Wald \(1984\)](#).

---

Para que a segunda lei da termodinâmica seja válida na presença de um horizonte de eventos, este deve possuir entropia igual a um quarto de sua área, em unidades geometrizadas.<sup>1</sup> Em conjunto com o fato de que os horizontes, no limite semi-clássico, emitem radiação térmica com temperatura proporcional à sua gravidade superficial (Hawking (1975)), isto estabelece uma relação de Clausius

$$\delta Q = T \delta S , \tag{1.3}$$

entre variação da massa do buraco negro ( $dM = \delta Q$ ), sua gravidade superficial  $T = \kappa/2\pi$  e a variação de sua área ( $dA/4 = \delta S$ ), que é sempre crescente (Hawking (1971)). Esta relação entre entropia e área, proposta por Bekenstein (1973), e a emissão de radiação com temperatura proporcional à gravidade superficial é também válida para o horizonte cosmológico do espaço de deSitter (Hawking (1977)).

A relação profunda entre termodinâmica e gravitação se fez mais sólida com a derivação, por Jacobson (1995), das equações de Einstein a partir da relação de Clausius sobre um horizonte de Rindler. Mais tarde, utilizando o formalismo Noetheresco de Wald (1993, 1994) para associar uma entropia a horizontes de Killing em teorias de gravitação modificada, foi descoberto que a validade da relação de Clausius é na verdade mais geral que a validade das equações de Einstein, isto é: Em uma grande gama de exemplos de teorias, as equações de Einstein modificadas podem ser obtidas a partir da relação termodinâmica (1.3), com a entropia adequada (Padmanabhan (2006, 2010), Kofman (2003), Hadad (2009), Sarkar (2009)).

Em espaços cosmológicos, não estacionários, nos quais (à exceção do caso deSitter) não existe um vetor de Killing temporal, não existe a carga de Noether que se associa à entropia do horizonte. Em casos de simetria esférica, entretanto, é possível construir uma termodinâmica associada ao horizonte aparente (Hayward (1998)) utilizando o chamado vetor de Kodama, que faz papel semelhante ao de um vetor de Killing, e se reduz a um vetor de Killing de fato no caso estacionário. Esta termodinâmica dos horizontes aparentes foi usada por Cai (2007, 2005) para deduzir as equações de Friedmann modificadas.

### 1.3 Cosmologia Cúbica Quase-Topológica

O cenário descrito acima serve como motivação dos três principais pontos de pesquisa a que se dedica esta dissertação.

---

<sup>1</sup>Ver, por exemplo, Bousso (2002).

---

### Ação Quase-Topológica.

Esta dissertação visa obter uma extensão de alta curvatura para a ação de Einstein-Hilbert, sob a condição de causalidade das equações de movimento, isto é: desejamos equações de movimento que possuam derivadas da métrica de grau menor ou igual a dois. Para uma métrica arbitrária, isto só é possível no caso das chamadas Lagrangeanas de Lovelock (Lovelock (1971, 1972), Padmanabhan (2013), Giribet (2008)), em que as combinações de altas curvaturas na ação formam invariantes topológicos, de modo que a única Lagrangeana desta classe que fornece equações de movimento não-triviais em quatro dimensões é a própria Lagrangeana de Einstein-Hilbert.

Como mostrado por Ray (2010), é todavia possível escrever uma ação cúbica tal que as equações de movimento sejam não de sexta ordem (como ocorre em geral), mas sim de *quarta* ordem:

$$\begin{aligned}
S_{\text{GBL}} = \int \frac{\sqrt{-g} d^4x}{\kappa^2} \left\{ R - 2\lambda L^2 [R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}] + \right. \\
+ \frac{\mu L^4}{4} [R^3 + 18R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\gamma\delta\mu\nu}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - 40R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}R^{\gamma\mu}{}_{\beta\nu}R^{\delta\nu}{}_{\alpha\mu} - \\
- 36R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} + 8R^{\alpha\beta}R_{\beta\gamma}R^{\gamma}{}_{\alpha}] - \\
\left. - \nu L^4 [W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}W^{\mu\nu}{}_{\gamma\rho}W^{\gamma\rho}{}_{\alpha\beta}] + \mathcal{L}_{\text{mat}} \right\}. \quad (1.4)
\end{aligned}$$

Abandonando a requisição de causalidade para métricas arbitrárias, nos concentramos no ansatz de Friedmann-Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{A(t)} dx_i dx^i, \quad (1.5)$$

e ajustamos os coeficientes na expansão em potências quadráticas e cúbicas do tensor de Riemann, de modo a obter equações de segunda ordem para esta métrica específica. A Lagrangeana assim obtida é do tipo (1.4). Teorias de gravitação como esta, em que a Lagrangeana é uma série de potências do tensor de curvatura do tipo Lovelock, porém *sem ser um invariante topológico*, são chamadas de Gravitação Quase-Topológica (Myers (2010), Sinha (2011)).

Sendo os espaços FRW conformemente planos, seu tensor de Weyl,  $W_{\mu\nu\alpha\beta}$ , é identicamente nulo. As equações de Friedmann modificadas obtidas da ação (1.4) não dependem portanto do acoplamento  $\nu$ . Além disso, o termo quadrático é simplesmente o invariante topológico de Gauss-Bonnet, e assim as equações de movimento na verdade possuem uma correção parametrizada apenas por  $\mu$ . Apesar disso,  $\lambda$  possui um papel fundamental na definição da entropia dos horizontes aparentes.

---

### **Termodinâmica de horizontes e restrições entrópicas.**

Usando o formalismo de Wald (1993, 1994), Myers (1994), encontramos uma expressão para a entropia,  $s(t)$ , dos horizontes aparentes na gravitação cúbica quase-topológica e, em uma generalização dos métodos de Jacobson (1995) e Cai (2007, 2005), utilizamos esta entropia para derivar as equações de Friedmann modificadas sob o prisma da relação de Clausius (1.3).

Para certos valores dos acoplamentos  $\mu$  e  $\lambda$ , a função entropia não é sempre positiva e/ou crescente — o último caso significando que a condição fraca de energia não é satisfeita. Isto impõe, como consequência das correções quânticas à ação de Einstein-Hilbert, certas *restrições entrópicas* sobre as escalas máximas de energia. Um dos objetivos principais desta dissertação é discutir as consequências destas restrições sobre os modelos cosmológicos seguintes.

### **O universo inflacionário.**

Por construção, teorias do tipo (1.2) diferem de forma significativa dos resultados da gravitação de Einstein em regiões do espaço-tempo onde a curvatura é grande. Portanto a primeira utilidade da Cosmologia Quase-Topológica que desenvolvemos reside na análise de modelos do Universo muito jovem.

Utilizando o método do superpotencial (dS; G.M. Sotkov (2012, 2010)), desenvolvemos um método de obtenção de uma classe de soluções analíticas das equações de campo. Este método nos fornece uma ferramenta poderosa para a criação de modelos cosmológicos que simulem as principais características fenomenológicas do universo observado, como o número de períodos de aceleração. Em particular, desenvolvemos em detalhes modelos que apresentam períodos inflacionários em regime de arrasto (*'slow-roll'*). Partindo de um único potencial (ou superpotencial) de matéria, obtemos uma cadeia de soluções ligando vácuos de Sitter consecutivos, e descrevendo universos não-singulares, de natureza similar aos propostos por Starobinsky (1980) e Brandenberger (1992). Nos propomos a obter um tal modelo que seja não singular e ainda assim seja qualitativamente compatível com as evidências de uma fase inicial quente e densa do universo observado, o que fornece uma indicação de como correções de altas curvaturas na ação gravitacional pode contornar o problema da singularidade inicial.

### **O universo tardio e a constante cosmológica.**

A maneira mais usual de se obter soluções cosmológicas para as equações de Einstein é através da especificação de uma equação de estado relacionando as componentes do tensor de energia-momento. Um modelo cosmológico muito bem sucedido em descrever a evolução do universo desde a época do desacoplamento da CMB até o estágio acelerado atual tem como base uma equação de estado politrópica linear, muito conhecida na literatura (Chavanis (2012), Eroshenko (2005), Linde (1999)). Em particular, este modelo foi usado por Bousso (2007)

---

para a elaboração de uma versão do princípio antrópico — chamada de “Princípio Entrópico Causal” — capaz de prever corretamente a ordem de grandeza da constante cosmológica, cujo pequeno valor é um dos problemas mais profundos da física atual.

A questão abordada nesta dissertação diz respeito à consistência deste modelo de universo tardio em uma gravitação com correções quânticas quase-topológicas. Desenvolvemos em detalhes as modificações que surgem na equação de estado linear, e dedicamos especial atenção para as consequências destas correções nos resultados do Princípio Entrópico Causal.

# Capítulo 2

## O Universo Observado

### 2.1 Os princípios da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral<sup>1</sup> trata a gravitação como a curvatura do espaço-tempo, que é descrito por uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  munida de uma métrica Lorentziana<sup>2</sup>  $\mathbf{g}$ , formando o par  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ . Ao longo desta dissertação, vamos considerar  $\mathcal{M}$  como sendo quadridimensional.

Observadores em queda-livre se movem sobre geodésicas de  $\mathcal{M}$ : corpos massivos se movem sobre geodésicas tipo-tempo, cujo vetor tangente possui norma negativa; fótons se movem sobre geodésicas nulas, cuja norma do vetor tangente é zero. No espaço-plano de Minkowski, i.e. na ausência de gravitação, geodésicas paralelas nunca se cruzam — as seções espaciais do espaço de Minkowski possuem de fato a geometria intuitiva, Euclidiana. A manifestação da gravidade como curvatura pode ser vista ao se analisar um feixe de geodésicas em um espaço curvo: corpos em queda-livre inicialmente paralelos tendem a convergir.

#### 2.1.1 O desvio da luz

Considere uma família de geodésicas nulas vizinhas, parametrizadas por um parâmetro (afim)  $\lambda$ , e formando um feixe de área seccional  $\mathcal{A}(\lambda)$ . Em um espaço com (tensor de) curvatura  $R_{\mu\nu}$  as geodésicas obedecem a equação de Raychaudhuri:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu, \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Ver, e.g., [Hawking \(1973a\)](#), [Wald \(1984\)](#), [Weinberg \(1972\)](#), [Landau \(1975\)](#).

<sup>2</sup>Usamos assinatura  $-+++$ , denotamos as componentes tipo-tempo e tipo-espaço de tensores por índices gregos, na ordem 0123; utilizamos a convenção de sinal para o Tensor de Riemann de [Hawking \(1973a\)](#) e [Landau \(1975\)](#).

---

cf. Apêndice B. Aqui,  $k^\mu$  é o vetor tangente às geodésicas,  $\sigma^{\mu\nu}$  é um tensor simétrico e de traço nulo conhecido como ‘cisalhamento’,  $\omega^{\mu\nu}$  é um tensor anti-simétrico conhecido como ‘torção’, e  $\theta$  é uma função escalar conhecida como ‘expansão’. Esta última fornece a variação da área seccional  $\mathcal{A}$  do feixe de geodésicas:

$$\theta = \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{d\lambda}. \quad (2.2)$$

Suponha que o feixe de raios de luz forme, inicialmente (em  $\lambda = 0$ ), um cilindro “reto”, i.e. que não possua torção nem cisalhamento, e com área seccional constante:  $\omega^{\mu\nu}(0) = \sigma^{\mu\nu}(0) = 0$ , e  $\theta(0) = 0$ . A Eq.(2.1) mostra então que se  $k^\mu k^\nu R_{\mu\nu} \neq 0$ , a expansão não pode continuar sempre nula, e portanto em algum ponto mais à frente teremos  $\mathcal{A}(\lambda) \neq \mathcal{A}(0)$ . Portanto, *a curvatura do espaço-tempo desvia os raios de luz*. Um teorema<sup>1</sup> facilmente demonstrável assegura que, de fato, desde que algumas condições fisicamente razoáveis sobre a matéria seja imposta, as geodésicas de fato convergem para um ponto.

O limite máximo,  $c$ , sobre a velocidade de todos os observadores confina todas as curvas tipo-tempo ao interior de “cones” formados, em cada ponto, pelas geodésicas nulas. À estrutura formada pelo conjunto destes ‘cones de luz’ chamamos ‘estrutura causal’; ela determina quais pontos do espaço-tempo podem trocar entre si informações por meio de sinais que se movam com velocidade no máximo igual à da luz. A deformação de um feixe de geodésicas nulas sugere portanto a deformação de geodésicas tipo-tempo, e de fato estas obedecem uma equação análoga à Eq.(2.1). Chega-se então à conclusão de que observadores inerciais percebem uma aceleração relativa quando em um espaço-tempo curvo. Tal aceleração é determinada pela curvatura do espaço-tempo apenas: partículas teste (i.e. que não modifiquem esta curvatura) seguem as mesmas geodésicas, quaisquer que sejam suas massas. Esta foi precisamente a observação de Galilei (1914): corpos com massas diferentes caem com a mesma aceleração no campo gravitacional terrestre.

### 2.1.2 A Lagrangeana de Einstein-Hilbert

Assim como para todas as outras interações conhecidas, deve também ser possível descrever a gravidade a partir de uma ação apropriada. A (densidade) Lagrangeana correspondente deve ser uma função da variável dinâmica correspondente ao campo gravitacional. Este papel é interpretado pela métrica  $\mathbf{g}$ , que determina a curvatura do espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ .

Vamos fazer a requisição de que as equações de campo possuam, no máximo, derivadas de *segunda ordem* dos campos. Uma vez que as equações de Euler-

---

<sup>1</sup>Conhecido como ‘Teorema da Convergência’ (“*focussing theorem*”); ver, e.g. Hawking (1973a).

Lagrange apresentam uma derivada da Lagrangeana, esta fica restrita, em princípio, a ser função de  $g_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu;\alpha}$  — mas é impossível formar uma função escalar com apenas estes ingredientes. Outra opção é que a Lagrangeana seja uma função *linear* da segunda derivada da métrica, de maneira que esta possa ser transformada, por meio de uma integração por partes, em uma função que ainda dê equações de movimento de segunda ordem. É notável que a função mais simples que apresenta estas características, a própria curvatura escalar do espaço-tempo dada pelo escalar de Ricci,  $R = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta}$ , forneça as equações de campo corretas.

Defina a ‘ação de Einstein-Hilbert’<sup>1</sup>

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{EH}} ; \quad \mathcal{L}_{\text{EH}} = R/\kappa^2 \quad (2.3)$$

como a ação representando o campo gravitacional dado pelo tensor métrico  $\mathbf{g}$ , e acoplado com um conteúdo material composto por uma coleção de campos que denotaremos por  $\Psi$ , e descrito pela ação

$$S_{\text{mat}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}(\Psi, g_{\mu\nu}) .$$

Ao variarmos a ação total  $S = S_{\text{EH}} + S_{\text{mat}}$  com respeito à métrica, mantendo os limites de integração fixos<sup>2</sup> obtemos as equações de campo, as famosas ‘Equações de Einstein’,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu} , \quad (2.4)$$

que descrevem o fenômeno da gravitação em excelente acordo com exaustivos testes observacionais. O tensor  $T_{\mu\nu}$ , obtido a partir da variação de  $S_{\text{mat}}$ , é conhecido como ‘tensor de energia-momento’, e o tensor  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$  é conhecido como ‘tensor de Einstein’; a relação entre ambos expressa de forma elegante a idéia por trás da relatividade geral: a presença de matéria muda a geometria do espaço-tempo.

## 2.2 A geometria do universo

Das interações fundamentais conhecidas, a gravitação é a mais fraca, porém a única que possui, simultaneamente, alcance infinito e natureza exclusivamente

<sup>1</sup>Aqui  $\kappa = 2 \times l_{\text{Pl}} = 2 \times \sqrt{G\hbar/c^3} = \sqrt{16\pi G}$ . No que segue, vamos escrever o elemento de volume curvo explicitamente, fazendo da Lagrangeana uma densidade escalar.

<sup>2</sup>Em espaços assintoticamente planos, é usual tomar como limite de integração o próprio infinito espacial, assumindo que todos os campos tendam a zero neste limite.

atrativa — assim, sendo os corpos macroscópicos em geral eletricamente neutros, é a gravidade a única força a reger o Universo em larga escala, e qualquer teoria moderna a respeito do Universo deve ser consequentemente uma teoria de gravitação.

Por outro lado, afirmar que o Universo pode ser descrito pelo mesmo conjunto de leis físicas que observamos na Terra pode parecer uma extrapolação perigosa. Mas, a menos que surjam efeitos decorrentes das largas escalas em si mesmas, não há motivos para crer que a física local seja diferente daquela em qualquer outro lugar. A experiência da História nos aponta, efetivamente, o seguinte

PRINCÍPIO COPERNICANO DE HUMILDADE:

*O homem não se encontra em um ponto privilegiado no Universo.*

Assumindo que a física seja então ditada pela Relatividade Geral, a pergunta fundamental da Cosmologia pode-se formular como: Qual a geometria do Universo?

Observações do céu noturno revelam uma considerável isotropia ao nosso redor, em distâncias maiores que o tamanho dos aglomerados de galáxias, cerca de 1Mpc.<sup>1</sup> O Princípio de Humildade sugere então que o Universo seja isotrópico ao redor de qualquer outro ponto, tendo por consequência que qualquer ponto pode ser mapeado em qualquer outro através de uma rotação, e portanto todos os pontos são equivalentes. Em outras palavras, o Universo é espacialmente homogêneo;<sup>2</sup> assim podemos reformular o Princípio de Humildade com um fraseado mais usual:

PRINCÍPIO COSMOLÓGICO:

*O universo é, espacialmente, completamente homogêneo.*

Ou seja: O espaço-tempo pode ser folheado em hipersuperfícies tridimensionais a tempo constante, com curvatura constante, nas quais o fluido cósmico formado pelas galáxias, aglomerados de galáxias, etc. se encontram (em média) em repouso. Este fluido define uma velocidade comóvel  $\mathbf{U}$  e um ‘tempo cósmico’,  $t$ , de observadores que se vêem em repouso em relação a este fluido. Matematicamente, o cenário é descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

### **A métrica de Friedmann-Robertson-Walker.**

De acordo com o princípio cosmológico, as seções espaciais a tempo constante do universo devem ser espaços 3-dimensionais de simetria máxima. Sendo assim, da Eq.(A.9) tiramos que o tensor de Riemann das seções espaciais é escrito como

$$R_{cabd} = K (g_{ad} g_{bc} - g_{ab} g_{cd}) , \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Ver Weinberg (1988).

<sup>2</sup>Repare que a única coisa que podemos de fato observar é a isotropia ao redor do planeta ao qual estamos presos. A noção de homogeneidade é uma suposição bem fundamentada.

onde os índices latinos valem 1, 2 ou 3, e  $K = R/6$  é será chamada de “constante de curvatura”. Vale lembrar que este espaço possui assinatura euclidiana.

A hipótese de isotropia em qualquer ponto da (sub)variedade significa que pode-se escrever a métrica como

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) . \quad (2.6)$$

Calculando o tensor Ricci para este ansatz, e usando o fato de que  $R_{ab} = 2K g_{ab}$ , chegamos à conclusão de que:

$$e^\lambda = 1 - Kr^2 ,$$

e temos que as geometrias de simetria máxima para um espaço euclidiano tridimensional são dadas por

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) . \quad (2.7)$$

O valor  $|K|$  pode ser absorvido por meio de uma redefinição da coordenada radial, logo o que importa é somente se  $K$  é positivo, negativo ou nulo. Respectivamente, estes casos dão origem às geometrias de uma 3-esfera, um 3-hiperbolóide e  $\mathbf{R}^3$ , que são as possíveis geometrias das seções espaciais do universo.

O espaço-tempo 4-dimensional, apresentando um subespaço 3-dimensional com uma métrica de simetria máxima do tipo (2.7), é portanto invariante sob as transformações

$$\begin{aligned} x^a &\rightarrow x^{a'} = x^a + \epsilon \zeta^a(x^m, t) , \\ x^0 &\rightarrow x^{0'} = x^0 , \end{aligned}$$

para 6 vetores de Killing — que são o máximo possível para o subespaço tridimensional, mas não o máximo possível para o espaço-tempo. Sendo assim, temos as isometrias  $\mathcal{L}_\zeta g_{\alpha\beta} = 0$ , onde  $\zeta^\mu = (0, \zeta^a)$ :

$$g_{\alpha\beta, n} \zeta^n + g_{n\beta} \zeta^n_{, \alpha} + g_{\alpha n} \zeta^n_{, \beta} = 0 . \quad (2.8)$$

As componentes  $\alpha = a$ ,  $\beta = b$  desta equação são nada mais que as equações de Killing no subespaço 3-dimensional de simetria máxima que é por isso satisfeita por 6 vetores. As componentes  $\alpha = 0$ ,  $\beta = b$  e  $\alpha = \beta = 0$  dão, respectivamente,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{nb} \zeta^n_{, 0} &= 0 , \\ \bar{g}_{00, n} \zeta^n &= 0 , \end{aligned}$$

onde a barra denota uma mudança de variáveis no subespaço 3-dimensional:  $x^a = x^a(\bar{x}^m, x^0)$ ,  $\bar{x}^0 = x^0$ , escolhida de forma que  $\bar{g}_{0a} = (\partial x^m / \partial \bar{x}^a) [(\partial x^n / \partial \bar{x}^0) g_{mn} + g_{m0}]$  se anule, i.e.  $(\partial x^n / \partial \bar{x}^0) g_{mn} = -g_{m0}$ . Se  $\bar{g}_{ab}$  não é singular, vemos que

$$\zeta^n_{, 0} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{g}_{00, n} = 0 ,$$

isto é, podemos fazer uma transformação de coordenadas de forma que a métrica assuma a forma

$$\zeta^n = \zeta^n(x^a) \quad \text{e} \quad \bar{g}_{00} = g_{00}(x^0). \quad (2.9)$$

Assim, a equação de Killing (2.8) fornece a evolução temporal da métrica a partir de um “tempo inicial” fixo  $x^0(0)$ :

$$g_{ab}(x^m, x^0) = f(x^0)g_{ab}(x^m, x^0(0)).$$

Mostramos, então, que a métrica do espaço-tempo do universo pode ser escrita como

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 + f(x^0) d\sigma^2,$$

com  $d\sigma^2$  dado por (2.7). Redefinindo  $x^0$  por  $dx^0 = dt\sqrt{-g_{00}}$ , e chamando  $f(x^0) = a^2(t)$ , ficamos finalmente com a métrica conhecida como métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right\}. \quad (2.10)$$

No que segue, será usual abreviar o elemento de linha sobre a esfera  $\mathbf{S}_2$ , por  $do^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$ . Chamaremos a coordenada tipo-tempo  $t$  de ‘tempo cósmico’; a função  $a(t)$  é conhecida como ‘fator de escala’.

### O espaço de deSitter.

Espaços FRW possuem, em geral, simetria máxima apenas nas seções espaciais, que formam os três espaços Riemannianos de curvatura constante: a esfera, de curvatura positiva; o hiperbolóide, de curvatura negativa; e o plano, de curvatura nula. Um caso especial é aquele em que toda a variedade quadridimensional é completamente homogênea. Vale neste caso a Eq.(2.5) para o tensor de Riemann do espaço-tempo completo, e o sinal da constante de curvatura define os espaços Lorentzianos de curvatura constante: O espaço-tempo de deSitter, de curvatura positiva; o espaço-tempo Anti-deSitter, de curvatura negativa; e o espaço-tempo de Minkowski, de curvatura nula.<sup>1</sup> O espaço-tempo de deSitter pode ser imaginado como um hiperbolóide de uma folha imerso no espaço de Minkowski com uma dimensão a mais, com coordenadas  $\{X^A\}$ ,  $A = 0, \dots, 4$ , e definido pela equação:

$$-X_0^2 + X_i X^i = 4/H^2, \quad i = 1 \dots 4.$$

onde  $H$  é uma constante, que se relaciona com o escalar de Ricci como

$$R = -3H^2 = -4\Lambda.$$

<sup>1</sup>Ver, e.g., [Hawking \(1973a\)](#), [Moschella \(2005\)](#).

Aqui,  $\Lambda$  é uma outra constante, positiva, conhecida como ‘*constante cosmológica*’, que terá papel importante, mais tarde, nesta dissertação.

Dependendo do sistema de coordenadas e da folheação que se faz sobre o hiperbolóide, pode-se obter um espaço-tempo fechado, ou aberto. As coordenadas que nos serão úteis são chamadas de ‘*coordenadas de Poincaré*’, nas quais a métrica de deSitter se escreve

$$ds^2 = -dt^2 + e^{Ht} (dr^2 + r^2 d\sigma^2) , \quad (2.11)$$

descrevendo um universo FRW plano, com fator de escala exponencial.

### Folheações esféricas.

Seja  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo quadridimensional passível de ser folheado em superfícies espaciais esféricamente simétricas:

$$ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b + \tilde{r}^2 d\sigma^2 ; \quad a, b = 0, 1, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{h}$  é uma métrica Lorentziana induzida no espaço-tempo bidimensional  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$ , coberto pelas coordenadas  $\{x^a\}$ ; podemos escrever explicitamente a métrica  $\gamma$  no espaço quociente  $(\mathcal{S}, \gamma)$  formado pelas superfícies de simetria esférica,

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2 = d\sigma^2 . \quad (2.13)$$

A função  $\tilde{r}(x^0, x^1)$  parametriza o raio de esferas de área

$$A(x^a) = 4\pi\tilde{r}^2(x^a) . \quad (2.14)$$

A métrica FRW (2.10) é do tipo (2.12), com  $\{x^a\} = \{t, r\}$ ,  $\tilde{r}(t, r) = a(t)r$ , e

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-Kr} \end{pmatrix} . \quad (2.15)$$

Aqui, estamos escolhendo, em cada ponto  $p \in \mathcal{O}$ , a base do espaço tangente como sendo formada por um vetor tipo-tempo e um tipo-espaço, viz.  $\partial_t$  e  $\partial_r$ ; podemos mudar a base para uma formada por dois vetores nulos, correspondendo às duas geodésicas nulas normais às superfícies de simetria esférica: uma geodésica  $\gamma_-$ , dirigida para interior, com vetor tangente  $\zeta^-$  paralelo ao vetor  $\partial_t - \partial_r$ , e uma geodésica  $\gamma_+$ , dirigida para o exterior, com vetor tangente  $\zeta^+$  paralelo a  $\partial_t + \partial_r$ .

Espaços do tipo (2.12) — às vezes chamados de ‘*espaços retorcidos*’ (‘*warped spaces*’; ver Abreu (2010), da Costa (1993)) — possuem uma estrutura simples do tensor de curvatura. De fato, um cálculo direto mostra que as conexões não nulas são

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}h^{ad}(h_{bd,c} + h_{cd,b} - h_{bc,d}); \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l}); \quad (2.16a)$$

$$\Gamma_{aj}^i = \tilde{r}^{-1}\delta_j^i \partial_a \tilde{r}; \quad \Gamma_{ij}^a = -\tilde{r} \gamma_{ij} h^{ab} \partial_b \tilde{r} , \quad (2.16b)$$

de onde se tira sem muito esforço que as componentes do tensor de Riemann se separam da seguinte maneira:

$$R_{abcd} = \mathcal{R}_{abcd} ; \quad (2.17a)$$

$$R_{aibj} = -\tilde{r} (\nabla_a \nabla_b \tilde{r}) \gamma_{ij} ; \quad (2.17b)$$

$$R_{ikjl} = \tilde{r}^2 \left[ \tilde{\mathcal{R}}_{ikjl} - \nabla_a \tilde{r} \nabla^a \tilde{r} (\gamma_{ij} \gamma_{kl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}) \right] ; \quad (2.17c)$$

aqui,  $\mathcal{R}_{abcd}$  e  $\tilde{\mathcal{R}}_{ijkl}$  são os tensores de Riemann das subvariedades  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$  e  $(\mathcal{S}, \gamma)$ , respectivamente. Os índices latinos do início do alfabeto assumem os valores 0, 1, e os do meio do alfabeto assumem os valores 3, 4. Esta separação é geral, resultado direto da separação de  $\mathbf{g}$ , independente de ser  $\gamma_{ij}$  a métrica de  $\mathbf{S}^2$  e de serem  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{S}$  espaços bidimensionais. Enfatizamos o seguinte fato importante: Seja  $D_a$  a derivada covariante no espaço  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$ ; uma vez que  $\Gamma_{ab}^i = \Gamma_{ai}^b = 0$ , temos que  $D_a = \nabla_a$ , onde  $\nabla^a$  são as componentes 0, 1 da derivada covariante sobre o espaço-tempo completo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ .

No nosso caso de interesse, ser  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$  bidimensional implica que seu tensor de Riemann pode ser escrito em termos apenas do escalar de Ricci  $\mathcal{R} = h^{ab} h^{cd} \mathcal{R}_{abcd}$  e da métrica:

$$\mathcal{R}_{abcd} = \frac{1}{2} \mathcal{R} (h_{ab} h_{cd} - h_{ad} h_{bc}) . \quad (2.18)$$

Além disso, sendo efetivamente  $(\mathcal{S}, \gamma)$  uma esfera de raio unitário, a Eq.(2.5) dá  $\tilde{\mathcal{R}}_{ikjl} = \gamma_{ij} \gamma_{kl} - \gamma_{jk} \gamma_{il}$ , e portanto

$$R_{ikjl} = \tilde{r}^2 (1 - \nabla_a \tilde{r} \nabla^a \tilde{r}) (\gamma_{ij} \gamma_{kl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}) . \quad (2.19)$$

Daí, é trivial o cálculo do tensor de Ricci, cujas únicas componentes não nulas são:

$$R_{ab} = \mathcal{R} h_{ab} - 2\tilde{r}^{-1} \nabla_a \nabla_b \tilde{r} ; \quad (2.20a)$$

$$R_{ij} = (1 - \nabla_a \tilde{r} \nabla^a \tilde{r} - \tilde{r} \nabla_a \nabla^a \tilde{r}) \gamma_{ij} ; \quad (2.20b)$$

o escalar de Ricci do espaço completo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  fica assim

$$R = \mathcal{R} - \frac{4}{\tilde{r}} \nabla_a \nabla^a \tilde{r} + \frac{2}{\tilde{r}^2} (1 - \nabla_a \tilde{r} \nabla^a \tilde{r}) , \quad (2.21)$$

e por fim, podemos escrever as componentes não nulas do tensor de Einstein:

$$G_{ab} = -2\tilde{r}^{-1} \nabla_a \nabla_b \tilde{r} + [2\tilde{r}^{-1} \nabla_c \nabla^c \tilde{r} - \tilde{r}^{-2} (1 - \nabla_c \tilde{r} \nabla^c \tilde{r})] h_{ab} \quad (2.22a)$$

$$G_{ij} = - \left( \frac{1}{2} \mathcal{R} \tilde{r}^2 - \tilde{r} \nabla_a \tilde{r} \nabla^a \tilde{r} \right) \gamma_{ij} . \quad (2.22b)$$

## 2.3 Cosmologia de Friedmann

De acordo com a Eq.(2.4), o conteúdo material do Universo deve ser descrito por um tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  compatível com a métrica FRW (2.10). Isto implica<sup>1</sup> que  $T_{\mu\nu}$  tem a forma do tensor de energia-momento de um fluido perfeito, com densidade de energia  $\rho$ , pressão  $p$ , e velocidade típica  $\mathbf{U}$ :

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} . \quad (2.23)$$

Esta descrição fluidodinâmica, podemos encará-la como dizendo que em larga escala, sendo distribuídos homogeneamente, os aglomerados de galáxias formam como que as “moléculas” de um fluido cósmico que preenche o espaço-tempo. A quadri-velocidade  $U^\mu = \delta_0^\mu$  é a velocidade típica destas galáxias “em queda livre”. Nesta descrição do Universo atual, preenchido por matéria fria não-relativística, a pressão  $p$  é nula. Entretanto no passado, e.g. quando a densidade era alta o suficiente para conferir uma natureza relativística à matéria, tínhamos  $p \neq 0$ , como veremos mais abaixo.

### As equações de Friedmann.

Substituindo o tensor (2.23) nas Equações de Einstein (2.4), obtemos as equações de campo para um universo FRW:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{6} \rho - K/a^2 , \quad (2.24a)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{4} (p + \rho) + K/a^2 , \quad (2.24b)$$

conhecidas como ‘*equações de Friedmann*’. Aqui, a função

$$H(t) = \dot{a}(t)/a(t) \quad (2.25)$$

é conhecida como ‘*função de Hubble*’. A cada instante da história do Universo, ela fornece uma constante de proporcionalidade entre a velocidade de recessão e a distância de galáxias distantes, que se afastam de nós movidas apenas pela expansão do espaço-tempo.

Derivando (2.24a) com respeito a  $t$ :  $2H \dot{H} = \frac{1}{3} \dot{\rho} + 2KH/a^2$ ; e multiplicando (2.24b) por duas vezes a função de Hubble:  $2H \dot{H} = -\frac{H}{3}(\rho + 3p) - 2H^3$ , obtemos  $\frac{1}{3} \dot{\rho} + 2KH/a^2 = -\frac{H}{3}(\rho + 3p) - 2H^3$ , ou  $\frac{1}{3} \dot{\rho} = -\frac{H}{3}(\rho + 3p) - 2H(H^2 + K/a^2)$ , mas o último termo em parênteses é nada mais que  $\frac{1}{3}\rho$ , por (2.24a). Logo, temos a ‘*equação de continuidade*’:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) . \quad (2.26)$$

Este conjunto de equações pode ser integrado para a obtenção de soluções analíticas em alguns casos específicos. Os mais comuns são descritos abaixo.

<sup>1</sup>Ver Weinberg (1972).

### 2.3.1 Equações de estado

Considere modelos cosmológicos nos quais a densidade de energia e a pressão do fluido perfeito (2.23) são relacionadas por uma equação de estado barotrópica:

$$p/\varrho = \omega(\varrho) . \quad (2.27)$$

#### Períodos de aceleração.

O valor do parâmetro da equação de estado,<sup>1</sup>  $\omega(\varrho)$ , está diretamente ligado ao sinal da aceleração da expansão do Universo,  $\ddot{a}$ . É imediato que, sendo  $\ddot{a} = \dot{H} + H^2$ , temos

$$\ddot{a} > 0 \quad \iff \quad \dot{H} + H^2 > 0 . \quad (2.28)$$

Usando as equações de Friedmann (2.24) e a equação de estado (2.27), temos

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa^2}{4}(p + \varrho) + \frac{\kappa^2}{6}\varrho = -\frac{\kappa^2}{12}\varrho (1 + 3\omega(\varrho)) ,$$

e por isso a relação (2.28) pode ser reescrita como

$$\ddot{a} > 0 \quad \iff \quad \omega(\varrho) < -1/3 . \quad (2.29)$$

ou seja: a expansão do universo é acelerada (desacelerada) se  $\omega$  é menor (maior) que  $-1/3$ , e ‘estacionária’ se  $\omega = -1/3$ . Repare que este resultado independe da forma da equação de estado, e independe da maneira com que a solução das equações de Friedmann evoluem com o tempo: o estado da aceleração do Universo depende apenas do valor de  $\varrho$ .

#### Equações de estado constantes.

Suponha que se tenha

$$\omega = \text{constante} .$$

A equação da continuidade implica em  $\frac{d \log \varrho}{d \log a} = -3(\omega + 1)$ , ou seja:

$$\varrho = (a_* a)^{-3(\omega+1)} . \quad (2.30)$$

Aqui,  $a_*$  é uma constante de integração. Supomos que  $\omega > -1$ , caso contrário ocorre a situação não física em que à medida que  $a(t)$  aumenta (i.e. o universo se expande) a densidade de energia  $\varrho(t)$  também aumenta, implicando criação de matéria. Para  $\omega = -1$ , temos a solução é o espaço-tempo de deSitter, (2.11).

<sup>1</sup>No restante deste texto vamos às vezes nos referir ao *parâmetro* da equação de estado,  $\omega$ , utilizando somente o termo “equação de estado”, em um inevitável abuso de linguagem.

Daqui em diante, assumimos que o espaço é plano, e tomamos  $K = 0$  em (2.24a). Temos então que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\varrho}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_* a)^{-\gamma}, \quad \text{ou} \quad \dot{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} a_*^{-\gamma} a^{1-\gamma}, \quad (2.31)$$

com  $\gamma = 3(1 + \omega)/2$ , de onde vem

$$\frac{1}{\sqrt{3}} t = a_*^\gamma \int a^{-1+\gamma} da = \frac{1}{\gamma} a_*^\gamma a^\gamma. \quad (2.32)$$

Podemos normalizar o fator de escala para que no tempo de Planck  $t = 1$  seja  $a(1) = 1$ . A equação acima então determina  $a_*^\gamma = \gamma/\sqrt{3}$ . Por consequência, da Eq.(2.30) fica determinado o valor da densidade de energia no instante de Planck,

$$\varrho_{Pl} \equiv \varrho(t = 1) = 4/3(1 + \omega).$$

Finalmente, com a normalização escolhida, escrevemos a dependência temporal do fator de escala e da densidade:

$$a(t) = t^{2/3(1+\omega)}, \quad (2.33)$$

$$\varrho(t) = \varrho_{Pl} t^{-2}. \quad (2.34)$$

A maior importância das equações de estado com  $\omega = \text{constante}$  reside no fato de que um fluido ultra-relativístico, que descreve por exemplo um gás de fótons (ou simplesmente ‘*radiação*’), e um fluido não relativístico descrevendo matéria fria (também chamada de ‘*poeira*’), ambos são exemplos de tais equações de estado. O último caso é trivial, quando a matéria possui pressão nula, e portanto  $\omega = 0$ . Já para radiação, a teoria cinética nos dá a seguinte relação entre pressão, densidade e temperatura:<sup>1</sup>

$$p = nT, \quad \varrho = 3nT, \quad p = \varrho/3.$$

Conclui-se então da Eq.(2.33) que o fator de escala, em cada caso, evolui com o tempo de acordo com:

$$a = t^{2/3} \quad \text{para um universo dominado por matéria, e} \quad (2.35)$$

$$a = \sqrt{t} \quad \text{para um universo dominado por radiação.} \quad (2.36)$$

Como para radiação  $\varrho \sim a^{-4}$  e para poeira  $\varrho \sim a^{-3}$ , a radiação domina em épocas onde o fator de escala é menor. No universo em expansão do big-bang isto significa que a radiação é mais relevante no início da história, enquanto a poeira domina em épocas mais tardias.

<sup>1</sup>Ver, e.g., Weinberg (1972).

Repare que se deve considerar em separado o caso em que  $\omega = -1/3$ , quando  $\gamma = 1$  e a Eq.(2.31) dá

$$a(t) = t, \quad (2.37)$$

$$\varrho(t) = \varrho_{Pl} t^{-2}. \quad (2.38)$$

### A velocidade do som.

A velocidade do som em um fluido com pressão  $p(\varrho)$  é dada pela relação

$$v_s^2 = \partial p / \partial \varrho; \quad (2.39)$$

para uma equação de estado constante,  $c_s^2 = \omega$ . A condição de que o som não viaje mais rápido que a luz então restringe o valor de  $\omega$  a ser menor que a unidade. Universos acelerados (e de forma geral qualquer universo com  $\omega < 0$ ) possuem velocidade do som imaginária. Isto não constitui um problema por si só, a menos que se tenha  $\omega < -1$ . De fato, suponha  $\omega < -1$ , constante; temos  $\gamma < 0$  na Eq.(2.32), de forma que

$$t_* - t = \frac{\sqrt{3}}{|\gamma|} a_*^\gamma a^{-|\gamma|},$$

sendo  $t_*$  uma constante de integração. O fator de escala  $a(t)$  é sempre crescente (como se pode facilmente verificar,  $\dot{a} > 0$ ), e efetivamente  $a(t) \rightarrow \infty$  á medida que  $t \rightarrow t_0$ . Ou seja: estes espaços apresentam uma singularidade em um instante finito no futuro, no qual a expansão de  $a(t)$  é tão grande que desmantela todas as coisas.<sup>1</sup> Espaços deste tipo são chamados de ‘*fantasmas*’, e não serão considerados no que segue.

Em suma, podemos escrever comoo domínio de validade para o parâmetro da equação de estado o intervalo

$$-1 \leq \omega \leq 1. \quad (2.40)$$

### 2.3.2 Singularidades

Em todos os casos de equação de estado descritos acima, e em geral para todo tipo de matéria cuja equação de estado não permita pressão ou densidade negativas (i.e. sempre que  $\omega > 0$ ), o fator de escala se anula quando  $t = 0$ . Assim, o intervalo de tempo (cósmico) no qual o universo vive é *limitado inferiormente* — o tempo de evolução do universo só “preenche” metade da reta real. Isto não seria necessariamente um problema, já que a singularidade no fator de escala não implica por si só uma singularidade física, podendo ser simplesmente um efeito

<sup>1</sup>Ver Weinberg (2008).

do sistema de coordenadas. Todavia, calculando-se o escalar de Ricci para a métrica FRW vemos que, de fato, há em  $t = 0$  uma singularidade da curvatura, não permitindo a continuação do espaço-tempo para tempos negativos.

De fato, o escalar de curvatura se escreve (enfatizamos que  $K = 0$ ) como

$$R(t) = -6 \left[ \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right]. \quad (2.41)$$

Usando a Eq.(2.33), encontramos

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3(1+\omega)} t^{-(1+3\omega)/3(1+\omega)}; \quad \ddot{a}(t) = -\frac{2}{9} \frac{(1+3\omega)}{(1+\omega)^2} t^{-2(2+3\omega)/3(1+\omega)}. \quad (2.42)$$

Escrevendo explicitamente o parâmetro de Hubble, e o chamado *raio de Hubble comóvel*:

$$H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)} t^{-1}; \quad \frac{1}{a(t)H(t)} = \frac{3(1+\omega)}{2} t^{-3(1+\omega)/(1+3\omega)}, \quad (2.43)$$

e utilizando o resultado (2.29), vemos que o escalar de Ricci (2.41) fica

$$R(t) = \frac{2(1-3\omega)}{9(1+\omega)^2} t^{-2}, \quad (2.44)$$

deixando evidente que se  $-1 < \omega$  a curvatura diverge em  $t \rightarrow 0$ , onde a solução é portanto singular. Deve-se prestar atenção ao caso de um universo dominado por radiação, em que  $\omega = 1/3$  e o escalar de Ricci se anula, dando talvez a impressão de que o espaço-tempo seria plano. Porém este caso também é singular, como se pode ver do cálculo de outro invariante de curvatura:

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 9 \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + 3 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]^2 = \frac{16[(1+3\omega)(2+3\omega)+1]}{27(1+\omega)^4} t^{-4}.$$

Para  $\omega = -1/3$  as fórmulas acima não se aplicam, porém é imediato verificar, usando as Eqs.(2.37) e (2.41) que  $R \sim t^{-2}$  também diverge em  $t = 0$ , assim como nos outros casos.

Estas singularidades presentes em passado finito são a principal característica dos chamados '*modelos cosmológicos de big-bang*'.

### 2.3.3 Horizonte de partículas

A fronteira do passado causal de um observador no instante  $t$  define o chamado '*horizonte de partículas*',<sup>1</sup> uma esfera centrada em  $r = 0$  e com raio comóvel

$$r_p(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.45)$$

<sup>1</sup> Muito utilizado, em particular, na análise de problemas observacionais da cosmologia padrão, que levaram ao desenvolvimento da cosmologia inflacionária. Cf. §2.5.1.

Isto é nada mais que a distância comóvel percorrida por um fóton emitido na origem do sistema de coordenadas, desde o início da história do universo até o instante  $t$ . Repare que aqui usamos o fato de que a descrição do espaço-tempo de fato *termina* em  $t = 0$  por causa da singularidade, tornando as geodésicas inextensíveis a  $t < 0$ . Se um segundo observador se encontra a uma distância comóvel maior que  $r_p(t)$ , é impossível que qualquer sinal emitido por ele tenha influenciado o primeiro. Podemos escrever, com os resultados do §2.3.1,

$$r_p(t) = \int_0^t t^{-2/3(1+\omega)} dt = 3 \left( \frac{1+\omega}{1+3\omega} \right) t^{(\omega+1/3)/(\omega+1)} \Big|_0^t. \quad (2.46)$$

Esta integral converge se  $\omega > -1/3$ , e o tamanho físico do horizonte de partículas,  $l_p(t) = a(t) r_p(t)$  é finito:

$$l_p(t) = 3 \left( \frac{1+\omega}{1+3\omega} \right) t, \quad (2.47)$$

ou seja, existe um horizonte de partículas para universos desacelerados. Para universos acelerados, i.e.  $-1 < \omega < -1/3$ , a integral diverge, e não existe tal horizonte. No caso “estacionário”,  $\omega = -1/3$ , a integral é logarítmica:

$$r_p(t) = \int_0^t \frac{dt'}{t'} = \log t \Big|_0^t, \quad (2.48)$$

e também diverge no limite inferior.

Pode-se redefinir o conceito de horizonte de partículas como sendo o cone de luz partindo não da singularidade em  $t = 0$ , mas do instante de Planck  $t = 1$ :  $r_p(t) = \int_1^t dt'/a$  (como feito e.g. por Linde (1999)). Neste caso, se  $\omega \neq -1/3$ ,

$$r_p(t) = 3 \left( \frac{1+\omega}{1+3\omega} \right) [t^{(\omega+1/3)/(\omega+1)} - 1] \quad (2.49)$$

e a integral não diverge mais para universos acelerados, que passam a ter horizontes de partícula. Para  $\omega = -1/3$ ,  $r_p(t) = \log t$ .

## 2.4 Cosmologia a partir de um campo escalar

A importância do estudo de um universo preenchido por um campo escalar se mostra principalmente em sua utilização no paradigma inflacionário, a ser discutido em detalhes mais adiante. Neste cenário, após de causar a expansão exponencial do universo, um campo escalar decai na matéria presente no universo atual. Além deste motivo que se justifica por si só, um campo escalar surge ainda em outros ramos da gravitação, em particular em algumas descrições do universo tardio, conhecidas como “modelos de quintessência”, em que simulam uma constante cosmológica.

### 2.4.1 Fluido perfeito e um campo escalar

Considere um campo escalar  $\sigma$  auto-interagente com potencial  $V(\sigma)$ , cuja Lagrangeana geral é

$$\mathcal{L}_{\text{mat}} = - \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right) . \quad (2.50)$$

Em um universo homogêneo e isotrópico, o campo não pode depender senão do tempo,  $\sigma = \sigma(t)$ , o que simplifica o termo cinético da Lagrangeana acima. Neste caso, as equações de Einstein podem ser escritas como

$$V'(\sigma) = -(\ddot{\sigma} + 3H \dot{\sigma}) \quad ; \quad \frac{\kappa^2}{2} \dot{\sigma}^2 = 6H^2 - \kappa^2 V(\sigma) \quad ; \quad (2.51)$$

$$\kappa^2 \dot{\sigma}^2 = -4\dot{H} \quad , \quad (2.52)$$

onde  $H = \dot{a}/a$  é a função de Hubble. Vale notar que estas três equações não são independentes; pode-se deduzir a primeira com a ajuda da conservação do tensor de matéria obtido de  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ .

Existe uma correspondência entre a dinâmica deste sistema físico e a de um fluido perfeito com pressão  $p$  e densidade de energia  $\varrho$ . De fato, é imediato ver que a identificação

$$\varrho \equiv \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + V(\sigma) \quad ; \quad p \equiv \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 - V(\sigma) \quad (2.53)$$

transforma as duas últimas equações para o campo escalar nas equações de Friedmann (2.24):

$$\kappa^2 \varrho = 6H^2, \quad \kappa^2 (\varrho + p) = -4\dot{H} \quad , \quad (2.54)$$

a partir das quais deduzimos a equação da continuidade (que por outro lado também é consequência da conservação do tensor de energia-momento).

Esta correspondência torna possível o uso de alguns métodos, desenvolvidos acima para encontrar soluções analíticas para algumas classes de fluidos perfeitos, para analisar a dinâmica do campo escalar. Mas também torna possível o caminho inverso: se soubermos a solução das Eqs.(2.51), (2.52), temos em mãos a dinâmica do fluido perfeito correspondente.

### 2.4.2 O método do superpotencial

Em geral, a solução analítica das Eqs.(2.51), (2.52) para um potencial  $V(\sigma)$  arbitrário é complicada ou impossível. Existe todavia uma *classe* de soluções que podem ser obtidas através do chamado ‘*método do superpotencial*’ (Cvetic (1997)), como segue.

Suponha que a função de Hubble dependa do tempo apenas através do campo escalar; i.e. suponha a existência de uma função  $W(\sigma)$ , que chamaremos de ‘*superpotencial*’, tal que as equações de campo sejam reescritas sob a forma de um sistema de equações diferenciais de *primeira ordem* para  $\sigma$ :<sup>1</sup>

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\kappa} W'(\sigma) ; \quad H(\sigma) = -\frac{\kappa}{2} W(\sigma) . \quad (2.55)$$

Para que as Eqs.(2.51), (2.52) sejam consistentes com esta hipótese, é fácil verificar que o potencial de matéria deve então ser dado em termos do superpotencial por:

$$V(\sigma) = -\frac{2}{\kappa^2} [W'(\sigma)]^2 + \frac{3}{2} W^2(\sigma) . \quad (2.56)$$

A eficácia do método do superpotencial reside no fato de que, *se conhecermos* a função  $W(\sigma)$ , o sistema de primeira ordem (2.55) é prontamente resolvido. Entretanto, para determinar  $W(\sigma)$  a partir do conhecimento do potencial de matéria  $V(\sigma)$  devemos resolver uma equação diferencial contendo o quadrado de uma derivada, a Eq.(2.56), o que em geral apresenta dificuldades sérias, e muitas vezes não é sequer possível. Assim, adotamos o procedimento inverso: *escolhemos* uma função  $W(\sigma)$  que produza um potencial de matéria com as características desejadas — por exemplo, se quisermos para  $V(\sigma)$  um polinômio de grau  $2n$ , devemos escolher  $W(\sigma)$  como um polinômio de grau  $n$  —, e partir daí resolvemos a dinâmica de  $\sigma(t)$  e  $H(t)$ . Apesar de parecer talvez um tanto quanto restritiva, esta abordagem produz resultados bastante ricos, como veremos a seguir.

### 2.4.3 Equação de estado determinada pelo superpotencial

Vimos no §2.3.1 que a integração das equações de Friedmann para um fluido perfeito dependem da relação entre as componentes do tensor de energia-momento, que caracterizam o fluido através da equação de estado  $p = \omega(\varrho)\varrho$ . Fixar esta relação funcional entre densidade de energia e pressão é nada mais que determinar as propriedades da Lagrangeana de matéria. No caso de um campo escalar, isto é feito ao se escolher o potencial  $V(\sigma)$ . Por isso, ao fazermos a correspondência (2.53), a equação de estado para o fluido assim obtido já se encontra especificada.

Quando  $V(\sigma)$  é dado por um superpotencial, a relação entre  $p$  e  $\varrho$  é obtida facilmente da combinação das Eqs.(2.54) e (2.55):

$$\varrho = \frac{3}{2} W^2(\sigma) ; \quad p/\varrho = -1 + \frac{8}{3\kappa^2} \left[ \frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)} \right]^2 . \quad (2.57)$$

<sup>1</sup>Denotamos diferenciação com respeito ao tempo por um ponto, e diferenciação com respeito a  $\sigma$  por uma linha, viz.  $\dot{f} = df/dt$ , e  $f' = df/d\sigma$  para uma função  $f$  qualquer.

Se existir uma função  $g(\sigma)$  tal que  $[W'(\sigma)]^2 = g(W^2(\sigma))$ , então o lado direito da segunda das equações acima é uma função da densidade de energia apenas, podemos interpretá-la como uma equação de estado barotrópica, e escrevemos

$$\omega(\sigma) = -1 + \frac{8}{3\kappa^2} \left[ \frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)} \right]^2 . \quad (2.58)$$

É importante mencionar a seguinte relação obtida da Eq.(2.56):

$$V(\sigma) = \frac{3}{4} (\omega(\sigma) - 1) W^2(\sigma) . \quad (2.59)$$

Vê-se que o potencial de matéria é sempre positivo, a menos que  $\omega > 1$ . Levando em conta a restrição (2.40), conclui-se que *o potencial de matéria deve ser sempre positivo para que não se viole a causalidade*.

Temos assim duas motivações para a escolha do superpotencial. Uma é a reprodução, através da Eq.(2.56), de um potencial de matéria  $V(\sigma)$  realístico, que seja compatível com previsões da teoria de cordas ou da teoria quântica de campos, por exemplo. Outra motivação é a reprodução, através da Eq.(2.58), de uma equação de estado com características desejáveis, como por exemplo um número definido de períodos de aceleração. No parágrafo seguinte vamos dar um exemplo do uso do método para a segunda opção, mas no Capítulo 5, veremos que, felizmente, ambas as coisas podem ser obtidas com a escolha de um tipo muito simples de função: polinômios.

#### 2.4.4 O superpotencial para equações de estado constantes

Modelos cosmológicos com  $p/\rho = \omega = \text{constante}$  são um dos exemplos mais simples de solução analítica das equações de Einstein. Utilizamos o método usual das equações de Friedmann para resolvê-los no §2.3; agora desejamos utilizá-los como um exemplo do método do superpotencial.

Para tanto, precisamos de uma função  $W(\sigma)$  que dê  $\omega = \text{constante}$  através da Eq.(2.58). Logo, é necessário que  $W(\sigma)$  satisfaça a equação diferencial

$$W'(\sigma) = \kappa \sqrt{\frac{3}{8}} \sqrt{1 + \omega} W(\sigma) ,$$

cuja solução é trivial:

$$W(\sigma) = W_0 \exp[\alpha \sigma] , \quad \alpha = \kappa \sqrt{\frac{3}{8}} \sqrt{1 + \omega} , \quad (2.60)$$

onde  $W_0$  é constante e supomos  $\omega > -1$ . Como mencionamos mais acima, geralmente consideramos dada a função  $W(\sigma)$ , e desejamos encontrar o fator de escala,  $a(\sigma)$  e, se possível,  $\sigma(t)$  e  $a(t)$ . A maneira mais fácil de proceder é tomando a razão das Eqs.(2.55):

$$A'(\sigma) = \dot{A}/\dot{\sigma} = -\frac{\varkappa^2}{4} W/W' = -\frac{\varkappa^2}{4\alpha},$$

onde  $\dot{A} = H$ , i.e.  $a(\sigma) = e^{A(\sigma)}$ . Assim,

$$a(\sigma) = a_0 \exp\left(-\frac{\varkappa^2}{4\alpha}\sigma\right). \quad (2.61)$$

Podemos encontrar  $\sigma(t)$  diretamente da primeira das Eqs.(2.55):

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\varkappa} W_0 \alpha \exp[\alpha\sigma],$$

ou seja:

$$\sigma(t) = -\frac{1}{\alpha} \log\left[-\frac{2W_0\alpha^2}{\varkappa}(t-t_0)\right]; \quad a(t) = \tilde{a}_0(t-t_0)^{\varkappa^2/4\alpha^2}, \quad (2.62)$$

com  $\tilde{a}_0$  constante, concordando com a Eq.(2.34). Por fim, o superpotencial em função do tempo pode ser encontrado diretamente usando o resultado para  $\sigma(t)$ , ou alternativamente resolvendo a equação diferencial

$$\dot{W} = W' \dot{\sigma} = \frac{2}{\varkappa} (W')^2 = \frac{3\varkappa}{4}(1+\omega)W^2,$$

que dá

$$W(t) = W_\infty - \frac{4}{3\varkappa(1+\omega)} t^{-1}.$$

O potencial de matéria, é determinado pelo superpotencial a partir da Eq.(2.56); trata-se de uma função exponencial com outra amplitude:

$$V(\sigma) = \frac{3}{4}(\omega-1)W_0^2 \exp[\alpha\sigma].$$

## 2.5 O universo inflacionário

### 2.5.1 Problemas do modelo cosmológico padrão

#### O Problema da planaridade.

Suponhamos que, em vez de preenchido por apenas um fluido perfeito, o universo seja preenchido por um conjunto destes, cada um com densidade  $\rho_k$  e equação de

estado  $p_k/\varrho_k = \omega_k$ . É de fato esperada a existência de no mínimo dois fluídos, já que matéria e radiação coexistem. Nas equações de Friedmann, deve-se então trocar  $\varrho$  por  $\sum \varrho_k$  e  $p$  por  $\sum p_k$ . Avaliando (2.24a) nos dias de hoje, temos

$$\varrho_{crit} = \sum \varrho_k - 3K/a^2, \quad \varrho_{crit} \equiv 3H^2, \quad (2.63)$$

$$\sum \Omega_k - 1 = \frac{K}{(Ha)^2}; \quad \Omega_k \equiv \varrho_k/\varrho_{crit}. \quad (2.64)$$

Agora, usando (2.30) na Eq. (2.63), e multiplicando tudo por  $a^2$ , temos que

$$(aH)^2 = \frac{1}{3} \sum \varrho_{0k} a^{-(3\omega_k+1)} - K,$$

e se  $\omega_k > -1/3$  vemos o lado direito diminuir com o passar do tempo (e com o aumento de  $a$ ), enquanto  $(aH)^{-2}$ , por consequência, *umenta*. Desta forma, o lado direito de (2.64) aumenta com o passar do tempo. A não ser que o valor de  $\sum \Omega_k$  fosse muito próximo de 1 no início do universo — o que significa  $|K| \ll 1$  ou, em outras palavras, um universo muitíssimo plano —, hoje ele deveria estar razoavelmente diferente de 1. Mas as medições atuais demonstram que na verdade  $\sum \Omega_k$  está muito *próximo* de 1, e de tal forma que na era de Planck era necessário se ter uma diferença  $|\sum \Omega_k - 1|$  da ordem de  $10^{-61}$ . Este ajuste extremamente fino das condições iniciais conspirando a favor de planaridade do universo é uma coincidência incômoda demais.

### Os muitos horizontes dentro da CMB.

Considere o raio físico do horizonte de partículas atual,

$$l_0 = c a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.65)$$

A integral acima diverge no seu limite inferior, quando  $a(t) \rightarrow 0$  e o integrando é singular, mas sabendo que as equações de Einstein não devem ser válidas arbitrariamente perto da singularidade, vamos assumir que a expansão do universo se inicie a um tempo finito, digamos o tempo de Planck  $t_{P1}$ .

Utilizando  $t_{P1}$  como limite inferior na integral, obtemos um número finito. Um limite inferior para este número é obtido ao substituirmos o integrando pelo seu menor valor ao longo do intervalo de integração  $[t_{P1}, t_0]$ . Uma vez que o fator de escala nunca diminui, este menor valor é justamente o fator de escala do universo atual,  $a_0$ . Assim, podemos garantir que a região dentro do horizonte causal do universo hoje é pelo menos tão grande quanto

$$l_{min} = c(t_0 - t_{P1}) \sim 10^{28} \text{ cm}. \quad (2.66)$$

Observações da radiação cósmica de fundo revelam que na época da recombinação todo este domínio se encontrava homogeneizado com alta precisão.

Uma distância física  $l(t)$ , correspondente a uma distância comóvel (e por isso independente do tempo)  $r$ , tem seu valor a cada instante dado por  $l(t) = a(t)r$ . Assim, se no instante  $t$  um objeto tem o tamanho físico dado por  $l(t) = a(t)r$ , podemos escrever  $r = l(t)/a(t)$ , e comparar com o tamanho físico do mesmo objeto em um outro instante  $t'$ :  $l(t') = a(t')r = [a(t')/a(t)]l(t)$ .

A região do universo de raio  $l_{min}$  que vemos hoje muito homogênea, no instante  $t_i$  tinha portanto um tamanho  $l_i = ct_0 a_i/a_0$ , e podemos assegurar que naquela época um pedaço do universo de raio pelo menos tão grande quanto este estava homogeneizado em alto grau.

Ocorre que podemos repetir o mesmo argumento dado para encontrar  $l_{min}$  para o instante  $t_i$ , e concluir que, naquela época, a região causal tinha um raio da ordem de  $l_c \sim ct_i$ , e podemos comparar este comprimento com  $l_i$ :

$$l_i/l_c \sim (t_0/t_i) (a_i/a_0) .$$

Para obter uma estimativa do número acima, fazemos o seguinte: sabemos que para matéria ultra-relativística a dependência do fator de escala com a temperatura é dada por  $a \sim T^{-1}$  (ver [Weinberg \(2008\)](#)). Assim, considerando que em  $t_i$  a matéria fosse de fato ultra-relativística, e uma vez que a temperatura da radiação cósmica de fundo hoje é  $T_0 \sim 3$  K, temos  $a_i/a_0 \sim T_i/T_0 = T_{pl}/T_0 = 10^{32}$ . Como  $t_i = t_{pl} = 10^{-43}$  sec, e  $t_0 \sim 10^{17}$  sec, temos por fim

$$l_i/l_c \sim 10^{28} .$$

Uma região causal é uma região tridimensional, logo o que vemos hoje é um conjunto de aproximadamente  $(10^{28})^3 = 10^{84}$  regiões causais a princípio desconexas que por algum motivo estão absolutamente homogeneizadas.

### Tamanho angular de cada horizonte primordial.

Na época em que a CMB se desacopla da matéria, o universo já está dominado por matéria, e portanto a equação de estado era dada por  $\omega = 0$ . Com isso,

$$r_h = \int_0^a \frac{da}{a^2 H} = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{\sqrt{a}} = \frac{2}{H_0} \sqrt{a} . \quad (2.67)$$

Assim,

$$r_h \sim 2H_0^{-1} \sqrt{a} \sim t^{1/3} ; \quad (2.68)$$

$$l_h \sim 2H_0^{-1} a^{3/2} = 2H_0^{-1} a_0^{3/2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{-3/2} = 2H_0^{-1} (1+z)^{-3/2} ; \quad (2.69)$$

onde  $a_0/a(t) \equiv 1 + z(t)$ . Podemos comparar isto com a distância diametral angular  $d_A \equiv ra(t)$ , onde  $r$  é a distância entre o observador (nós) e o objeto observado (a CMB):

$$r = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_a^{a_0} \frac{da}{a^2 H} .$$

onde  $t$  é on instante do desacoplamento. Como  $1/a^2 H = H_0^{-1} a^{(3\omega-1)/2}$ , vemos que o integrando diminui para um universo dominado por matéria—o que é o caso entre o desacoplamento e hoje—, e podemos dizer que  $r < \frac{1}{a_0^2 H_0} \int_a^{a_0} da \sim \frac{1}{a_0 H_0}$ , e a distância angular fica [usando  $a_0/a(t) \equiv 1 + z(t)$ ]

$$d_A \lesssim a(t)r = H_0^{-1}(1+z)^{-1} . \quad (2.70)$$

Desta forma, o horizonte de eventos da época da recombinação, dado por (2.69), hoje ocupa um ângulo de visão no céu da ordem de  $l_h/d_A \sim (1+z)^{-1/2}$ , onde  $z$  é o desvio para o vermelho da CMB, medido como  $z \approx 1100$ . Isso dá  $l_h/d_A \sim 0.03$  radianos, ou 1.7 graus, o que é muito pouco para uma radiação homogênea em larga escala.

### 2.5.2 O paradigma da inflação

Os problemas acima são resolvidos simultaneamente por um cenário conhecido como ‘inflação’. Suponha que durante um ‘período inflacionário’, entre os instantes  $t_*$  e  $t_I$ , o fator de escala aumente exponencialmente:

$$a(t_I) = e^{\mathcal{N}} a(t_*) , \quad (2.71)$$

para algum número  $\mathcal{N}$  suficientemente grande,

$$\mathcal{N} = \log \left( \frac{a(t_I)}{a(t_*)} \right) = \int_{t_*}^{t_I} H(t) dt , \quad (2.72)$$

que chamaremos de ‘número de desdobramentos exponenciais’ (‘ $e$ -foldings’).

O lado esquerdo da Eq.(2.64) fica então muito próximo de zero, mesmo que  $K$  não seja nulo. O quão próximo de zero pode ser ajustado determinando-se quanto deve diminuir o raio comóvel de Hubble. Digamos que  $|K/(aH)^2|$  fosse da ordem de 1 antes do início da inflação, e que o raio comóvel de Hubble diminua de tal forma que no fim da inflação tenhamos  $(a_I H_I)^{-1} \sim e^{\mathcal{N}}$ , e  $|K/(a_I H_I)^{-2}| \sim e^{-2\mathcal{N}}$ . Podemos dizer que  $|K| \sim (a_I H_I)^2 e^{-2\mathcal{N}}$ , e hoje em dia a medição do lado direito de (2.64) seria

$$\frac{|K|}{(a_0 H_0)^2} \sim \left( \frac{a_I H_I}{a_0 H_0} \right)^2 e^{-2\mathcal{N}} .$$

A condição para que isto seja muito pequeno é, portanto, que

$$e^{\mathcal{N}} \gg \frac{a_I H_I}{a_0 H_0} . \quad (2.73)$$

Além disso, olhando para a última igualdade em (2.46), vemos que o período em que  $(aH)^{-1}$  é muito pequeno domina facilmente a integral, aumentando muito o

horizonte de eventos de um observador na época do desacoplamento, englobando dentro deste horizonte todos os domínios que presumíamos serem causalmente desconectos.

Se a função de Hubble durante a inflação permanece aproximadamente constante e igual a um certo valor  $H_I$ , este período domina a integral do horizonte de partículas:

$$l_h(t) = a(t)a_I^{-1}e^{H_I t_I} \int_{t_*}^t e^{-H_I t} dt \sim a(t)a_I^{-1}e^{H_I t_I} \int_{t_*}^{t_I} e^{-H_I t} dt = \frac{a(t)}{a_I H_I} (e^{H_I(t_I - t_*)} - 1),$$

e  $\mathcal{N} = H_I(t_I - t_*)$ . Assim,

$$l_h(t) \sim \frac{a(t)}{a_I H_I} (e^{\mathcal{N}} - 1) \sim \frac{a(t)}{a_I H_I} e^{\mathcal{N}},$$

onde supomos  $\mathcal{N} \gg 1$ . Para resolver o problema do horizonte, devemos ter  $l_h/d_A \gg 1$ . Sabemos que  $d_A \sim a(t)/a_0 H_0$ , e a equação acima dá

$$l_h/d_A \sim \frac{a_0 H_0}{a_I H_I} e^{\mathcal{N}},$$

ou seja:

$$e^{\mathcal{N}} \gg \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}, \quad (2.74)$$

o que é a mesma condição do problema da planaridade. A estimativa do número  $\frac{a_I H_I}{a_0 H_0}$  é feita sob algumas hipóteses arriscadas, e se encontra hoje em por volta de 70.

### 2.5.3 Condições de arrasto

Um maneira de implementar o paradigma da inflação é através da utilização de um campo escalar. Suponha que o universo se encontre homogeneamente preenchido por um campo escalar  $\sigma(t)$ , submetido a um potencial de interação  $V(\sigma)$ , e cuja dinâmica é dada pela Lagrangeana (2.50). O campo obedece a primeira das Eqs.(2.51):

$$-V'(\sigma) = \ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma}, \quad (2.75)$$

que é análoga à equação de uma partícula movendo-se em um fluido viscoso, com uma força de arrasto proporcional à velocidade  $\dot{\sigma}$ . Suponha que o termo de arrasto domine o termo cinético,  $\ddot{\sigma}$ , fazendo com que o campo “se arraste lentamente”,<sup>1</sup> i.e. suponha que

$$|\ddot{\sigma}/(H\dot{\sigma})| \ll 1, \quad (2.76)$$

<sup>1</sup> Vale lembrar que a analogia de uma partícula a mover-se em um fluido não passa de uma comparação entre as equações de movimento. O valor de  $\sigma(t)$  representa de fato as oscilações do campo escalar, que ocorrem mais rápido ou mais devagar.

e que, além disso,

$$\frac{\varkappa}{3} |V'(\sigma)/H^2| \ll 1. \quad (2.77)$$

Estas condições, que chamaremos de ‘condições de arrasto’ (‘condições de slow-roll’), implicam em um grande número de desdobramentos exponenciais. De fato, se vale (2.76), a Eq.(2.75) pode ser reescrita como

$$\dot{\sigma} \approx -V'(\sigma)/(3H). \quad (2.78)$$

Assim, o número de desdobramentos exponenciais (2.72) fica

$$\mathcal{N} = \int_{t_*}^{t_I} H(t) dt = \int_{\sigma_*}^{\sigma_I} \frac{H}{\dot{\sigma}} d\sigma \approx \int_{\sigma_*}^{\sigma_I} \frac{V'(\sigma)}{-3H^2} d\sigma.$$

Se  $\sigma_* < \sigma_I$  e  $V(\sigma_*) > V(\sigma_I)$  — isto é, se o potencial de matéria for decrescente durante o período inflacionário —, o integrando acima é positivo e, de acordo com (2.77),

$$\mathcal{N} \gg \varkappa(\sigma_I - \sigma_*). \quad (2.79)$$

Portanto se (2.76) e (2.77) forem válidas por um intervalo suficientemente longo, podemos obter o número de desdobramentos exponenciais necessário para resolver os problemas listados no §2.5.1.

O tempo característico de expansão do universo é dado pelo inverso da função de Hubble,  $1/H$ , também conhecido como ‘tempo de Hubble’. A Eq.(2.78), consequência da condição (2.76), em conjunto com a condição (2.77) e com a Eq.(2.52), implicam que durante um tempo de Hubble a função  $H(t)$  permanece quase constante, i.e.

$$|(\dot{H}/H) \times (1/H)| = \frac{\varkappa^2}{4} \dot{\sigma}^2/H^2 \approx \frac{\varkappa^2}{4} (V'(\sigma)/3H^2)^2 \ll 1. \quad (2.80)$$

Em outras palavras, durante a inflação o universo se expande quase exponencialmente. Podemos reformular as condições de arrasto em termos de características da forma do potencial de matéria. A segunda das Eqs.(2.51) dá  $2V/\dot{\sigma} = \frac{12}{\varkappa^2} H^2/\dot{\sigma}^2 - 1 \gg 3$ , ou seja  $\dot{\sigma}^2 \ll V(\sigma)$ . Retornando à segunda das Eqs.(2.51), temos então  $H^2 \approx \frac{\varkappa^2}{6} V(\sigma)$ . Assim, com (2.80),

$$\frac{1}{\varkappa^2} (V'(\sigma)/V)^2 \ll 1. \quad (2.81)$$

Além disso, derivando (2.78) e usando (2.76) obtemos

$$\frac{1}{\varkappa^2} |V''(\sigma)/V(\sigma)| \ll 1. \quad (2.82)$$

Assim, o potencial deve possuir um “planalto” sobre o qual o campo escalar “se arrasta lentamente”, fazendo com que o universo infle.

Tão importante quanto as condições de arrasto (2.76) e (2.77) (ou (2.81) e (2.82)), é também a condição de que estas desigualdades *deixem de ser válidas* em algum determinado instante  $t_I$ . Afinal, o universo que observamos passou a maior parte de sua história em expansão desacelerada, o que possibilitou a formação das estruturas que hoje observamos. É necessário portanto formular um mecanismo que transforme o universo inflacionário no universo do tipo big-bang que vemos hoje. Exemplos deste tipo de mecanismo, chamado de “saída graciosa” da fase inflacionária (Mukhanov (2005)) envolvem em geral um período chamado de ‘reheating’, em que o campo escalar decai nos componentes — radiação, matéria bariônica, etc. — usuais de cosmologias do tipo descrito no §2.3. Mais adiante, no Capítulo 5, descreveremos modelos de universo que possuem tanto o período inflacionário quanto um tipo de “saída graciosa”.

# Capítulo 3

## Gravitação e Termodinâmica

### 3.1 Horizontes

#### 3.1.1 Horizontes de eventos

Considere espaços descritos pela uma métrica

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + dr^2/f(r) + r^2 d\phi^2, \quad (3.1)$$

em que  $f(r)$  é uma função suave, com um único zero simples  $r_h$  (ver [Padmanabhan \(2010\)](#)). A característica principal da métrica (3.1) é a estrutura peculiar nas componentes  $g_{00} = -1/g_{11}$ , que se tornam singulares quando  $f(r)$  se anula ou diverge.

Tais espaços são estáticos, isto é: existe um vetor de Killing  $\xi = \partial_t$ , correspondendo à isometria sob translações da coordenada temporal  $t$ . Nas coordenadas  $(t, r)$  acima,

$$\xi^\alpha = \delta_0^\alpha, \quad (3.2)$$

e é fácil ver que  $\xi$  de fato obedece a condição de Killing:

$$\nabla^\mu \xi^\nu = g^{\mu\gamma} \partial_\gamma \xi^\nu + g^{\mu\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \xi^\alpha = g^{\mu\gamma} \Gamma_{\gamma 0}^\nu = \frac{1}{2} f' (\delta_1^\mu \delta_0^\nu - \delta_0^\mu \delta_1^\nu) = \nabla^\nu \xi^\mu. \quad (3.3)$$

Também é imediato calcular a norma de  $\xi$ ,

$$\xi_\mu \xi^\mu = -f(r), \quad (3.4)$$

que se mostra tipo-tempo ou tipo-espaço nas regiões em que  $f(r) > 0$  ou  $f(r) < 0$ , respectivamente. A hipersuperfície  $\mathcal{H}$  que separa estas duas regiões, definida pela equação  $f(r) = 0$ , é uma hipersuperfície nula. Isto pode ser verificado ao se notar que seu vetor normal  $n^\alpha = \partial^\alpha f = f'(r) \delta_1^\alpha$  possui norma  $n_\mu n^\mu =$

---

$f(r) [f'(r)]^2|_{\mathcal{H}} = 0$ . (Aqui, denotamos  $f'(r) = df/dr$ .) Portanto  $\mathcal{H}$  é um horizonte de Killing de  $\xi^\alpha$ ; cf. Apêndice D.

Nas coordenadas  $(r, t)$ , que cobrem apenas parte da variedade, a métrica (3.1) é singular sobre o horizonte de Killing. Esta singularidade se deve, porém, apenas ao sistema de coordenadas escolhido: nenhum dos invariantes formados pelo tensor de Riemann diverge, e pode-se obter sistemas de coordenadas apropriados nos quais a métrica é regular em  $r_h$ . Definimos novas coordenadas  $(X, T)$ ,

$$\kappa X = e^{\kappa\chi(r)} \operatorname{ch}(\kappa t) \quad ; \quad \kappa T = e^{\kappa\chi(r)} \operatorname{sh}(\kappa t) \quad (3.5a)$$

$$\kappa \equiv f'|_{r_h} \quad ; \quad \chi \equiv \int dr/f(r) \quad , \quad (3.5b)$$

mantendo intactas as coordenadas angulares da parte da métrica com simetria esférica. Como se pode facilmente verificar, agora temos

$$ds^2 = f(r(X, T)) \exp[-2\kappa\chi(X, T)] (-dT^2 + dX^2) + r^2(X, T) d\omega^2 \quad . \quad (3.6)$$

É possível mostrar que se  $f(r)$  é uma função analítica com um único zero simples em  $r_h$ , então o produto  $f e^{-2\kappa\chi}$  é finito no horizonte de Killing, que fica mapeado em  $X^2 - T^2 = 0$ , ou seja:  $\mathcal{H} = \{X = T\} \cup \{X = -T\}$ . Com a extensão analítica, podemos analisar as componentes do vetor de Killing (3.2) sobre  $\mathcal{H}$ ; nas novas coordenadas,  $\xi^{\mu'} = (\partial x'^{\mu}/x^\nu)\xi^\nu$  se escreve

$$\xi = T\partial_X + X\partial_T \quad , \quad (3.7)$$

e portanto a 2-esfera  $\mathcal{B} = \{X = T = 0\}$  é uma esfera de bifurcação, onde ambas as componentes de  $\xi$  se anulam. Em suma,  $\mathcal{H}$  é um *horizonte de Killing bifurcado*, sobre o qual a *gravidade superficial é constante*, e dada por  $\kappa$  definida em (3.5b), como mostra o resultado (3.3) em conjunto com a Eq.(D.4).

### O buraco negro de Schwarzschild.

A solução mais simples das equações de Einstein (2.4), obtida por Karl Schwarzschild em 1915<sup>1</sup>, descreve um espaço-tempo vazio a não ser por um corpo esfericamente simétrico, de massa  $m$ , situado na origem do sistema de coordenadas. A métrica de Schwarzschild é dada pela Eq.(3.1), com

$$f(r) = 1 - 2m/r \quad , \quad (3.8)$$

parametrizada apenas pela massa  $m$  do corpo que atua como fonte do campo gravitacional central. Esta métrica possui uma singularidade física em  $r = 0$ , onde o tensor de curvatura diverge, e um horizonte de eventos em  $r_h = 2m$ , que é

---

<sup>1</sup>Cf., e.g., Chandrasekhar (1992).

---

uma singularidade das coordenadas e pode ser resolvida com a troca (3.5). Neste caso,  $f e^{-2\kappa\chi} = e^{-r/2m}/r$ , e

$$\kappa = 1/4m \quad (3.9)$$

$$X^2 - T^2 = \frac{1}{\kappa^2} e^{2\kappa\chi} = 16m^2 e^{r/2m} (r - 2m). \quad (3.10)$$

Apesar de a primeira igualdade só valer na região exterior ao buraco negro,  $r > 2m$ , a última expressão é válida para todo  $r$  — as coordenadas  $(X, T)$  são uma ‘*extensão analítica*’ das coordenadas de Schwarzschild.

Considere geodésicas nulas radiais nas coordenadas  $(X, T)$ . A condição  $ds^2 = 0$  aplicada sobre (3.6) dá

$$X = \pm T + \text{constante}. \quad (3.11)$$

e portanto os cones de luz são retas a  $\pm 45^\circ$  no plano  $X$ - $T$ . O sinal positivo corresponde às geodésicas que se afastam do horizonte, e o negativo às geodésicas que dele se aproximam; a coordenada temporal  $T$  cresce na direção do futuro ( $dT/dt = e^{\kappa\chi} \text{ch}(\kappa t) > 0$ ). Fica claro que cada geodésica nula cruza o horizonte  $X = \pm T$  apenas uma vez, em direção ao interior de  $\mathcal{H}$ ; assim, nenhum sinal luminoso pode sair do interior do horizonte de eventos, que fica causalmente desconexo da região exterior — A gravidade nesta região é forte o suficiente para curvar tanto os raios de luz enviados em direção ao exterior da esfera que eles voltam outra vez para dentro, de encontro à singularidade em  $r = 0$ . Um observador em  $r > r_m$ , por conta da ausência de raios de luz provindos de lá, observa a região  $r < r_m$  como uma esfera escura no céu — um ‘*buraco negro*’.

### O horizonte cosmológico do espaço de Sitter.

Apesar de sua aparência dinâmica em (2.11), o espaço de Sitter é na verdade um hiperbolóide fixo, que pode ser folheado de diversas maneiras (que cobrem trechos maiores ou menores do hiperbolóide completo). Em particular, é possível escrever sua métrica na forma (3.1) com<sup>1</sup>

$$f(r) = 1 - H^2 r^2, \quad (3.12)$$

e o horizonte de eventos  $f(r) = 0$  é uma hipersuperfície folheada por 2-esferas tipo espaço com raio  $r_h = 1/H$ , lembrando que  $H$  é uma constante, que assumimos positiva. Aqui, ao contrário do que ocorre no buraco negro de Schwarzschild (3.8), o vetor de Killing (3.2) é tipo-tempo *no interior* do horizonte, em  $r < r_h$ ; isto caracteriza um ‘*horizonte cosmológico*’, por ser típico dos horizontes que ocorrem em espaços FRW acelerados (cf. §3.1.2), dos quais o espaço de Sitter é

---

<sup>1</sup> Cf., e.g., Davies (1982).

---

um exemplo particular. No interior do horizonte, quando  $r/r_h < 1$ , a troca de coordenadas (3.5) dá  $f e^{-2\kappa x} = (1 + Hr)^2$ , e

$$\kappa = H, \quad (3.13)$$

$$X^2 - T^2 = (1 - Hr)/H^2(1 + Hr). \quad (3.14)$$

A mesma análise feita para as geodésicas nulas de Schwarzschild vale aqui, com o detalhe de que agora as geodésicas dirigidas para o futuro tendem a *sair* do horizonte em  $r_h$ , e não retornar para o seu interior; enquanto no espaço-tempo de Schwarzschild um observador posicionado na região com campo gravitacional mais fraco vê os objetos serem puxados para dentro de uma esfera de raio  $r_h$ , um observador no universo de deSitter percebe as coisas serem impelidas para fora de uma esfera que o rodeia.

Também ao contrário do que ocorre em Schwarzschild, atrás do horizonte de eventos de deSitter *não há* singularidade alguma, como se pode ver facilmente calculando o escalar de curvatura que é, efetivamente (e por definição), constante:  $R = H/2$ . A bem da verdade, sendo o espaço de deSitter completamente homogêneo, todas os pontos são equivalentes e portanto dois observadores em locais diferentes perceberão, cada um, o horizonte de eventos como uma esfera de raio  $r_h$  ao redor de si. Em particular, se uma observadora se encontra a uma distância  $r_h$  de um observador na origem do sistema de coordenadas, ela estará exatamente *sobre* o horizonte de eventos dele e vice-versa, o mesmo sendo válido para quaisquer dois pares de pontos.

Esta completa homogeneidade pode ser usada para se obter o raio do horizonte de eventos de uma outra maneira. Voltemos às coordenadas (2.11), e calculemos a distância máxima que uma geodésica nula radial partindo da origem do sistema de coordenadas pode alcançãr. A equivalência entre os pontos inicial ( $r = 0$ ) e final da geodésica implica que esta é também a distância a partir da qual nenhum observador pode se comunicar causalmente com a origem. A distância desejada se obtém da condição  $ds^2 = 0$ :

$$l_h = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = e^{Ht} \int_t^\infty e^{-Ht'} dt' = 1/H, \quad (3.15)$$

coincidindo com o que encontramos acima. (Não se deve confundir as coordenadas “ $r$ ” presentes nas métricas (2.11) e (3.12). Na primeira,  $r$  é uma coordenada comoóvel, que determina uma distância física apenas quando multiplicada pelo fator de escala para formar o raio das esferas com elemento de linha  $do^2$ ; na segunda,  $r$  já é, ele próprio, este raio físico.)

### 3.1.2 Horizontes de eventos dinâmicos

A integral (3.15) pode ser usada para definir um horizonte de eventos em espaços-tempo FRW genéricos (2.10). Tais espaços, por não serem estáticos, não possuem

---

um vetor de Killing associado ao tempo, e portanto não possuem horizontes de Killing como o espaço de deSitter, mas quando a integral

$$r_h(t) = \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} \quad (3.16)$$

converge, podemos definir um horizonte cosmológico de raio físico  $l_h(t) = a(t)r_h(t)$  com propriedades idênticas ao horizonte de deSitter, no que diz respeito à causalidade; isto é: a cada instante, a região em que  $r > r_h(t)$  se encontra causalmente inacessível a um observador na origem. É de se esperar que em universos acelerados, quando  $a(t)$  cresce rápido o suficiente, existam horizontes de eventos. Isto pode ser facilmente verificado em universos de Friedmann com equação de estado constante e  $-1 < \omega < -1/3$ . Usando a Eq.(2.33), temos

$$\int_t^\infty dt'/a(t') = -\frac{(\omega+1)}{\omega-1/3} t^{-(\omega-1/3)/(\omega+1)} \Big|_t^\infty,$$

e portanto

$$r_h(t) \sim t^{-(\omega-1/3)/(\omega+1)},$$

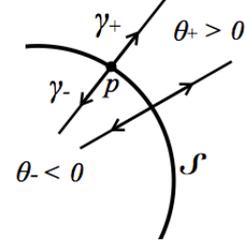
em universos acelerados. Por outro lado, fica claro que em universos desacelerados, quando  $\omega > -1/3$ , não existe horizonte de eventos, já que a integral diverge (pode-se interpretar esta divergência como um “horizonte de eventos de raio infinito”). Uma análise detalhada da geometria destes espaços e seus horizontes é dada no Apêndice E.

### 3.1.3 O horizonte aparente

A análise dos diagramas de Penrose no Apêndice E mostra que horizontes de eventos são objetos *globais*, no sentido de que é impossível detectar, localmente, sua posição. Isto fica particularmente claro ao se observar o limite superior da integral (3.16); é necessário esperar até o fim do universo para calculá-la. Portanto se torna complicado utilizar o conceito de horizonte de eventos em descrições locais do espaço-tempo. Existe entretanto um conceito local que possui natureza similar à de um horizonte de eventos, conhecido como ‘*horizonte aparente*’ e definido como segue.

Suponha que  $\mathcal{S}$  seja a superfície de uma 2-esfera de área  $\mathcal{A}$  com as paredes revestidas, por dentro e por fora, de lâmpadas que piscam uma vez, simultaneamente. Em um espaço-tempo plano, as geodésicas nulas provenientes das lâmpadas exteriores teriam expansão positiva, e as provenientes das lâmpadas interiores, expansão negativa, como na figura ao lado. Assim, de acordo com a Eq.(2.2), pouco após a emissão as frentes de onda dos raios luminosos emitidos do lado de fora formariam uma esfera de área  $\mathcal{A}_+ > \mathcal{A}$ , enquanto pelo lado de dentro as frentes de onda formariam uma nova esfera de área  $\mathcal{A}_- < \mathcal{A}$ .

Mas considere um espaço-tempo curvo onde sobre  $\mathcal{S}$  a expansão das geodésicas internas *se anula*,  $\theta_-|_{\mathcal{S}} = 0$ . Então as frentes de onda no interior da esfera *não convergem*, e portanto em um instante muito próximo da emissão temos  $\mathcal{A}_- = \mathcal{A}$ . Mais ainda, quando  $\theta_- > 0$  as geodésicas interiores *divergem*, e frentes de onda emitidas no interior da esfera têm área  $\mathcal{A}_- > \mathcal{A}$  — consequência de uma expansão muito rápida do espaço — e não chegam ao centro da esfera, que fica assim isolado causalmente.

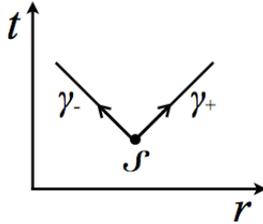


### Horizonte aparente e superfícies de armadilha.

Seja  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo quadridimensional passível de ser folheado em superfícies espaciais esféricas,  $(\mathcal{S}, \gamma)$ , como em (2.12). Sejam  $\theta_{\pm}$  as expansões das geodésicas  $\gamma_{\pm}(\lambda)$ , parametrizadas por um parâmetro afim  $\lambda$ . Inspirados pela discussão que levou à Eq.(3.17), diremos<sup>1</sup> que uma superfície esférica  $\mathcal{S}$  bidimensional é ‘*normal*’ se  $\theta_-|_{\mathcal{S}} < 0$  e  $\theta_+|_{\mathcal{S}} > 0$ ; ‘*marginal*’ se  $\theta_+ \theta_-|_{\mathcal{S}} = 0$ ; e ‘*capturada*’ (“*trapped*”) se  $\theta_+ \theta_-|_{\mathcal{S}} > 0$ .

Uma superfície marginal  $\mathcal{H}$  sobre a qual

$$\theta_-|_{\mathcal{H}} = 0 \quad ; \quad \theta_+|_{\mathcal{H}} > 0, \quad (3.17)$$



é dita um ‘*horizonte aparente*’ (Hayward (1994), ver também Faraoni (2011)). Os raios de luz que partem de  $\mathcal{H}$  em direção ao seu interior são a princípio paralelos. Se a derivada de Lie na direção tangente à geodésica nula exterior (abreviamos  $\mathcal{L}_{\zeta_{\pm}} f \equiv \mathcal{L}_{\pm} f$ ) é positiva,

$\mathcal{L}_- \theta_-|_{\mathcal{H}} > 0$ , então ao se caminhar sobre  $\gamma_+$ , se afastando de  $\mathcal{H}$ , as superfícies esféricas exteriores e “imediatamente próximas” ao horizonte aparente possuem expansão positiva das geodésicas internas,  $\theta_- > 0$ , que são, portanto, divergentes. Mais especificamente, considere uma hipersuperfície *tridimensional*  $\mathcal{T}$  folheada por esferas marginais com

$$\theta_-|_{\mathcal{T}} = 0 \quad \text{e} \quad \theta_+|_{\mathcal{T}} > 0; \quad (3.18a)$$

$$\text{se} \quad \mathcal{L}_+ \theta_-|_{\mathcal{T}} > 0, \quad (3.18b)$$

dizemos que seu fecho  $\tilde{\mathcal{T}}$  é um ‘*horizonte cosmológico de armadilha*’ (“*anti-trapping horizon*”).<sup>2</sup> Horizontes de armadilha possuem uma natureza muito si-

<sup>1</sup> As definições aqui apresentadas são as de Hayward (1994), porém com as mudanças apropriadas — e já discutidas — que distinguem os horizontes de buracos negros de horizontes cosmológicos.

<sup>2</sup> Em contraste com os “*trapping horizons*” que possuem natureza oposta — isto é a área das esferas exteriores diminui ao longo das geodésicas nulas — e surgem no contexto de buracos negros.

---

milar à de horizontes de eventos. Se o espaço-tempo for dividido pelo horizonte de armadilha em duas partes desconexas, pode-se mostrar (Hayward) que as equações de Einstein em conjunto com a condição nula de energia asseguram que observadores exteriores ao horizonte de armadilha cosmológico não retornam ao interior (e que observadores no interior de um horizonte de armadilha de um buraco negro não retornem ao exterior).

As definições acima são baseadas apenas em quantidades locais, como a expansão de geodésicas, ou quase-locais, como a derivada de Lie dessas expansões. Portanto, um horizonte aparente não possui a natureza teleológica inconveniente dos horizontes de eventos.

### Espaços homogêneos e isotrópicos.

Calculemos a posição do horizonte aparente em espaços com métrica (2.10), que reescrevemos como

$$ds^2 = a^2(t) (-d\eta^2 + d\rho^2 + f^2(\rho)d\sigma^2) , \quad (3.19)$$

onde  $\eta(t) = \int^t dt/a(t)$  e  $f(\rho) = \text{sh } \rho$ ,  $\text{sen } \rho$ ,  $\rho$ , para  $K = -1, +1, 0$ , respectivamente (o que pode ser visto a partir de uma integração elementar). A nova coordenada  $\eta$  é chamada de ‘tempo conforme’.

Uma esfera  $\mathcal{S}$ , de raio  $\rho$ , possui área  $\mathcal{A} = 4\pi a^2(t)f^2(\rho)$ . Seguindo Bousso (2002), podemos utilizar a Eq.(2.2) para calcular então a expansão das geodésicas  $\gamma_-(\lambda)$  e  $\gamma_+(\lambda)$ . A expressão mais simples para a equação de uma geodésica nula no sistema de coordenadas (3.19) é dada por  $(d\rho/d\eta)^2 = 1$ . Neste caso as geodésicas são parametrizadas por  $\eta$ , que não é um parâmetro afim, condição necessária para que utilizemos a fórmula (2.2). Pode-se, entretanto, fazer  $\eta$  ser, localmente, idêntico a um parâmetro afim  $\lambda$ . De fato,  $\lambda$  só é definido a menos de um reescalonamento e de uma constante aditiva, i.e. se  $\lambda$  é uma parâmetro afim,  $s(\lambda) = a\lambda + b$  também o é. Se  $\mathcal{S}$  se encontra em  $\lambda = \lambda_0$ , temos

$$\eta(\lambda) \approx \eta(\lambda_0) + \left. \frac{d\eta}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0),$$

e portanto fazendo  $a = \left. \frac{d\eta}{d\lambda} \right|_{\lambda_0}$  e  $b = \eta(\lambda_0) - \lambda_0 \left. \frac{d\eta}{d\lambda} \right|_{\lambda_0}$ , podemos fazer de  $\eta$  um parâmetro afim, localmente, em  $\mathcal{S}$ .

Neste caso, tomando  $\lambda = \eta$ , e escrevendo  $f' = df/d\rho$ , temos

$$d\mathcal{A}/d\lambda = 4\pi d(af)^2/d\eta = 8\pi af (f da/d\eta + a df/d\eta) = 2\mathcal{A} (\dot{a} + (f'/f)d\rho/d\eta) ,$$

e a Eq.(3.19) dá, para geodésicas nulas,  $d\rho/d\eta = \pm 1$ ; logo, usando a Eq.(2.2),

$$\theta_{\pm} = 2a (H \pm f'/(af)) , \quad (3.20)$$

onde  $H \equiv \dot{a}/a$ . O sinal do segundo termo de cada equação vem do fato de  $\rho$  aumentar ou diminuir quando a geodésica se dirige para o exterior ou para o interior de  $\mathcal{S}$ .

---

De acordo com (3.17), o horizonte aparente se localiza em  $\theta_- = 0$ , i.e. quando  $f'(\rho)/f(\rho) = aH$ . Portanto, fica evidente que se  $K = 0$ ,  $f'/f = 1/r$  e o raio físico do horizonte aparente é dado por  $l_{\text{ap}} = 1/H$ . Quando  $K \neq 0$  é fácil ver que podemos escrever

$$l_{\text{ap}} = \frac{1}{\sqrt{H^2 + K/a^2}} . \quad (3.21)$$

Repare que  $f'(\rho)/\rho > 0$ , e portanto desde que  $H > 0$  ambas as condições (3.17) são satisfeitas. Em universos com curvatura nula, o raio do horizonte aparente é igual ao raio de Hubble,  $1/H$ , e em particular no universo de deSitter os horizontes aparente e de eventos coincidem.

Vale notar que nem sempre o horizonte aparente é um horizonte cosmológico de armadilha. A derivada de Lie da expansão das geodésicas internas,  $\mathcal{L}_+\theta_- = d\theta_-/d\lambda$ , pode ser facilmente calculada a partir da Eq.(3.20):

$$d\theta_-/d\eta = \frac{1}{a}d^2a/d\eta^2 - (da/d\eta)^2 - (f''/f)\frac{d\rho}{d\eta} + (f'/f)^2\frac{d\rho}{d\eta}$$

Na direção exterior a  $\mathcal{H}$ ,  $d\rho/d\eta = +1$ ; é fácil ver que  $(f')^2 - f f'' = (f')^2/f^2$  para qualquer  $K$ , e como

$$d^2a/d\eta^2 = a\frac{d}{dt}(a da/dt) = a\dot{a} + a^2\ddot{a} = a^3(\dot{H} + 2H^2) ,$$

temos, sobre o horizonte, onde  $\eta$  é localmente igual ao parâmetro afim  $\lambda$ ,

$$d\theta_-/d\lambda = a^2 \left[ \dot{H} + H^2 + (f'/af)^2 \right]_{\mathcal{H}} ,$$

e usando a expressão (3.21), temos finalmente (Faraoni (2011))

$$\mathcal{L}_+\theta_-|_{\mathcal{H}} = a^2 \left( \dot{H} + 2H^2 + K/a^2 \right) . \quad (3.22)$$

Esta expressão é puramente geométrica, não dependendo das equações de Einstein ou do conteúdo material do universo. O horizonte aparente será um horizonte de armadilha, de acordo com (3.18b), se a expressão em parênteses for positiva. No caso de um universo governado pelas equações de Einstein e preenchido por um fluido perfeito com pressão  $p$ , densidade de energia  $\rho$  e equação de estado  $p = \omega\rho$ , as equações de Friedmann (2.24a) determinam o termo em parênteses como

$$-\frac{\omega^2}{4}\rho(\omega - 1/3) . \quad (3.23)$$

Portanto, conclui-se que neste caso *o horizonte aparente é um horizonte cosmológico de armadilha somente se  $\omega < 1/3$ .*

---

## 3.2 Termodinâmica de horizontes

### Horizonte de eventos.

É muito conhecido<sup>1</sup> o fato de que para preservar a segunda lei da termodinâmica, é necessário se atribuir uma entropia a um horizonte de eventos.

A área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca decresce (Hawking (1971)), indicando que seja ela a possuir natureza entrópica, como sugerido por Bekenstein e posto de forma clara quando Bardeen et al. (Hawking (1973b); ver também Wald (1984)) mostraram que uma pequena variação da massa  $M$  de um buraco negro (sem rotação) é dada por

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A ,$$

sendo  $A$  a área de seu horizonte de eventos. Sabemos que a gravidade superficial  $\kappa$  sobre o horizonte de eventos é constante, e se interpretarmos  $M$  como a energia do buraco negro, temos uma relação muito próxima à relação de Clausius, entre entropia  $S$ , energia interna  $E$  e temperatura  $T$  de um sistema termodinâmico em equilíbrio:

$$\delta E = T \delta S . \tag{3.24}$$

estabelecendo uma analogia entre entropia/área e temperatura/gravidade superficial. Mais tarde, descobriu-se que tanto buracos negros (Hawking (1975)) como o horizonte cosmológico de deSitter (Hawking (1977)) de fato irradiam com uma temperatura de corpo negro igual a  $\kappa/2\pi$ , e ficou assim estabelecida uma relação física, real, entre termodinâmica e geometria de horizontes de eventos:

$$T = \kappa/2\pi \quad ; \quad S = A/4 . \tag{3.25}$$

### Horizonte aparente.

O exemplo dos buracos negros e do espaço-tempo de deSitter aponta uma conexão profunda entre gravitação e termodinâmica, resumida na Eq.(3.25). Tem ali um papel crucial a atribuição de uma temperatura, constante, ao horizonte de eventos, que pode ser então considerado um sistema termodinâmico em equilíbrio. Em espaços cosmológicos, entretanto, não existe um vetor de Killing temporal nem tampouco horizontes de Killing (mesmo quando existe um horizonte de eventos), e por isso não vale a construção do Apêndice D. É necessário, então, uma nova definição de temperatura sobre outro tipo horizonte — o horizonte aparente. Este problema é resolvido pelo chamado “milagre de Kodama” (Abreu (2010)).

---

<sup>1</sup> Ver Bekenstein (1973), Hawking (1973b), Penrose (1996).

### 3.2.1 O vetor de Kodama

Existe em espaços com simetria esférica folheados como em (2.12) um vetor que desempenha papel análogo ao do vetor de Killing em espaços estáticos — fato a que Abreu (2010) se refere como “o milagre de Kodama” —. Trata-se do chamado ‘vetor de Kodama’:

$$k^a = \epsilon^{ab} \nabla_b \tilde{r}, \quad a, b = 0, 1, \quad (3.26)$$

onde  $\epsilon^{ab}$  é a 2-forma que define um volume no espaço-tempo bidimensional  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$ ; para  $\mu = 2, 3$ ,  $k^\mu = 0$ . Esta expressão é covariante, e vale em qualquer sistema de coordenadas, mas repare que, sendo  $\epsilon^{ab}$  definido em  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$ , ela depende da folheação específica (2.12). O vetor de Kodama apresenta várias propriedades notáveis, que passamos a discutir.

(i) O vetor de Kodama caracteriza um horizonte aparente, seu interior e seu exterior. Como visto no §3.1.1, a região em que o vetor de Killing é tipo-tempo determina qual o exterior (interior) do horizonte de eventos de deSitter (de um buraco negro); assim também a natureza causal do vetor de Kodama caracteriza regiões separadas por um horizonte aparente. Usando a identidade  $\epsilon^{ab} \epsilon_{dc} = -(\delta_d^a \delta_c^b - \delta_d^b \delta_c^a)$ , temos  $\epsilon^{ab} \epsilon_{ac} = -\delta_c^b$ , e

$$k_\mu k^\mu = -\nabla_a \tilde{r} \nabla^a \tilde{r}. \quad (3.27)$$

Sejam  $\zeta^\pm$  os vetores tangentes às geodésicas nulas  $\gamma_\pm(\lambda)$ , externas e internas à superfície esférica determinada por  $\tilde{r}(x^a)$ , parametrizadas por um parâmetro afim  $\lambda$ , como no §3.1.2. A Eq.(2.2) com  $\mathcal{A} = 4\pi\tilde{r}^2$  dá

$$\theta_\pm = \frac{2}{\tilde{r}} \partial_\pm \tilde{r}, \quad (3.28)$$

onde  $\partial_\pm = \zeta^\pm \cdot \nabla$  denota a derivada direcional ao longo de  $\gamma_\pm(\lambda)$ . Vimos no §3.1.2 que se pode definir uma base ortornormal em  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$  usando estes vetores nulos tangentes a  $\gamma_\pm$ :

$$\zeta^\pm = \partial_\pm = e^{-\phi} (\partial_t \pm \partial_r),$$

a função positiva  $e^{-\phi(x^a)}$  garantindo a parametrização afim. Neste caso,

$$\nabla_a \tilde{r} \nabla^a \tilde{r} = (\partial_r \tilde{r})^2 - (\partial_t \tilde{r})^2 = -(\partial_t \tilde{r} + \partial_r \tilde{r})(\partial_t \tilde{r} - \partial_r \tilde{r}) = -e^\phi \partial_+ \tilde{r} \partial_- \tilde{r}.$$

Ou seja, juntando (3.27) e (3.28)

$$k_\mu k^\mu = \frac{1}{4} \tilde{r}^2 e^{-\phi} \theta_+ \theta_- . \quad (3.29)$$

Portanto, o sinal da norma do vetor de Kodama sobre a superfície  $\mathcal{S}$  definida por  $\tilde{r} = \text{constante}$  é determinado pelas mesmas condições que definem se  $\mathcal{S}$  é uma superfície normal, capturada, ou um horizonte aparente:

$$\begin{aligned} k^\mu &\text{ é nulo sobre um horizonte aparente, onde } \theta_+ \theta_-|_{\mathcal{H}} = 0 ; \\ k^\mu &\text{ é tipo-tempo sobre uma superfície normal, onde } \theta_+ \theta_- < 0 ; \\ k^\mu &\text{ é tipo-espaço sobre uma superfície capturada, onde } \theta_+ \theta_- > 0 . \end{aligned}$$

(ii) *Gravidade superficial sobre o horizonte aparente.* A gravidade superficial sobre o horizonte de Killing é definida pela Eq.(D.5). Na esperança de definir uma gravidade superficial sobre o horizonte aparente, calculemos  $k^\mu \nabla_{[\mu} k_{\nu]}$ . As componentes não nulas são

$$k^b \nabla_b k_a = \epsilon^{bc} \epsilon_{ad} \nabla_c \tilde{r} \nabla_b \nabla^d \tilde{r} = (\delta_a^b \delta_d^c - \delta_a^c \delta_d^b) \nabla_c \tilde{r} \nabla_b \nabla^d \tilde{r} = \nabla_b \tilde{r} \nabla_a \nabla^b \tilde{r} - \nabla_a \tilde{r} D^2 \tilde{r} ,$$

e  $k^b \nabla_a k_b = \epsilon^{bc} \epsilon_{bd} \nabla_c \tilde{r} \nabla_a \nabla^d \tilde{r} = \nabla_b \tilde{r} \nabla_a \nabla^b \tilde{r}$ , de maneira que

$$k^\mu \nabla_{[\mu} k_{\nu]} = -D^2 \tilde{r} \nabla_a \tilde{r} .$$

Aqui, usamos quando necessário o fato de que  $\nabla_a \epsilon_{bc} = 0$ .

Uma propriedade evidente do vetor de Kodama é que  $k^\mu \nabla_\mu \tilde{r} = \epsilon^{ab} \nabla_a \tilde{r} \nabla_b \tilde{r} = 0$ , pela antisimetria de  $\epsilon^{ab}$ . Portanto  $\nabla^\mu \tilde{r}$  é ortogonal a  $k^\mu$ . Sobre um horizonte aparente, onde o vetor de Kodama é nulo, isto implica que  $\nabla \tilde{r}$  é paralelo a  $\mathbf{k}$ . Porém a Eq.(3.27) mostra que  $k_\mu k^\mu / \nabla_\nu \tilde{r} \nabla^\nu \tilde{r} = -1$ , e portanto sobre o horizonte de eventos temos  $\nabla \tilde{r} = -\mathbf{k}$ . Logo,

$$k^\mu \nabla_{[\mu} k_{\nu]} = 2\kappa k_\nu , \quad (3.30a)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} D^2 \tilde{r} ; \quad (3.30b)$$

$\kappa$  pode ser escrita apenas em termos do vetor de Kodama:

$$\kappa = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \nabla_a k_b , \quad (3.31)$$

como se verifica imediatamente:  $\epsilon^{ab} \nabla_a k_b = \epsilon^{ab} \epsilon_{bc} \nabla^c \nabla_a \tilde{r} = -\nabla_a \nabla^a \tilde{r}$ .

As Eqs.(3.30a) e (3.31) definem a gravidade superficial do horizonte aparente.<sup>1</sup> Repare a semelhança clara entre a Eq.(3.30a) e a definição da gravidade superficial em um horizonte de Killing, Eq.(D.5) — o fator 2 pode ser introduzido na equação (D.5) ao se antisimetrizar os últimos índices, à maneira da Eq.(3.30a). De forma mais simples que no caso do horizonte de Killing, aqui é consequência trivial que  $\kappa$  seja constante sobre o horizonte aparente; efetivamente, o vetor de Kodama e

<sup>1</sup>A definição de gravidade superficial que adotamos é aquela de Hayward (1998). Ela não é única, entretanto: ver por exemplo Abreu (2010).

o elemento de volume  $\epsilon$ , claro, não dependem das coordenadas angulares sobre  $(\mathcal{S}, \gamma)$ .

(iii) O vetor de Kodama se conserva. Ou seja:

$$\nabla_\mu k^\mu = 0. \quad (3.32)$$

Para demonstrar este fato, seguimos [Abreu \(2010\)](#). Considere o tensor anti-simétrico

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon^{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a conhecida identidade para a divergência de um tensor de grau 2, temos

$$\nabla_\mu (\tilde{\epsilon}^{\mu\nu} / \tilde{r}^2) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} / \tilde{r}^2),$$

onde  $g = \text{Det } \mathbf{g}$ . Uma vez que  $\mathbf{g}$  é a composição (um ‘warped product’) de  $\mathbf{h}$  com  $\tilde{r}^2 \gamma$ , onde  $\gamma_{ij}$ ,  $i, j = 2, 3$  é a métrica do espaço  $\mathbf{R}^2$  em coordenadas esféricas, temos

$$\text{Det } \mathbf{g} = \text{Det } \mathbf{h} \times \text{Det } (\tilde{r}^2 \gamma) = (\tilde{r}^2)^2 \text{Det } \mathbf{h} \times \text{Det } \gamma = \tilde{r}^4 \text{Det } \mathbf{h}.$$

Na segunda igualdade, usamos o fato de  $\gamma$  ser uma matriz  $2 \times 2$ . Logo,  $\sqrt{-g} = \tilde{r}^2 \sqrt{-h}$ , denotando  $h = \text{Det } \mathbf{h}$ , e

$$\nabla_\mu (\tilde{\epsilon}^{\mu\nu} / \tilde{r}^2) = \frac{1}{\tilde{r}^2 \sqrt{-h}} \partial_\mu (\sqrt{-h} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu}).$$

As únicas componentes não nulas deste vetor correspondem às componentes não nulas de  $\tilde{\epsilon}$ , a saber

$$\frac{1}{\tilde{r}^2 \sqrt{-h}} \partial_a (\sqrt{-h} \epsilon^{ab}) = \frac{1}{\tilde{r}^2} D_a \epsilon^{ab},$$

sendo  $D_a$  a derivada covariante correspondendo à métrica bidimensional no espaço  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$ . Mas isto é nada mais que a derivada covariante do elemento de volume deste espaço que, por construção, se anula. Portanto, para todas as componentes temos

$$\nabla_\mu (\tilde{\epsilon}^{\mu\nu} / \tilde{r}^2) = \frac{1}{\tilde{r}^2} [\nabla_\mu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} - \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \nabla_\mu \tilde{r}] = 0$$

ou seja:<sup>1</sup>

$$k^\mu = \frac{1}{2} \tilde{r} \nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

<sup>1</sup> Muito embora  $\nabla_c \tilde{\epsilon}^{ab} = \nabla_c \epsilon^{ab} = D_c \epsilon^{ab} = 0$ ,  $\nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{a\nu} \neq 0$ . De fato,  $\nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{a\nu} = \partial_\nu \tilde{\epsilon}^{a\nu} + \Gamma_{\nu\mu}^a \tilde{\epsilon}^{\nu\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\nu \tilde{\epsilon}^{a\mu} = \Gamma_{\nu b}^\nu \epsilon^{ab} \neq 0$ .

Agora,  $\nabla_\mu k^\mu = \frac{1}{2} (\nabla_\mu \tilde{r} \nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} + \tilde{r} \nabla_\mu \nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu})$ . A antisimetria de  $\tilde{\epsilon}^{\mu\nu}$  faz com que  $\nabla_\mu \nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} = -\tilde{\epsilon}^{\mu\sigma} R^\nu_{\sigma\mu\nu} - \tilde{\epsilon}^{\sigma\nu} R^\mu_{\sigma\mu\nu}$ ; o tensor de Riemann é simétrico em  $\sigma\mu$  e  $\sigma\nu$ , no primeiro e segundo termos, respectivamente, logo  $\nabla_\mu \nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} = 0$ . Por outro lado, lembrando que para uma função escalar  $\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} \tilde{r} = 0$ , ao derivarmos (3.26), temos  $\nabla_\mu k^\mu = \nabla_\mu \tilde{r} \nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} = -\nabla_\mu \tilde{r} \nabla_\nu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} = -2\nabla_\mu k^\mu$ , ou seja:  $\nabla_\mu k^\mu = 0$ , como queríamos demonstrar.

(iv) O fluxo de energia-momento na direção do vetor de Kodama se conserva. Ou seja, o vetor  $j^\mu$  se conserva:

$$j^a = T^{ab} k_b, \quad (3.34)$$

$$\nabla_\mu j^\mu = 0. \quad (3.35)$$

Escrevemos apenas as componentes  $a = 0, 1$  de  $j^\mu$ , pois as outras são nulas, por construção. Nossa demonstração mais uma vez segue Abreu (2010). Usando as equações de Einstein,  $j^\mu = \frac{2}{\tilde{\chi}^2} G^{\mu\nu} k_\nu$ . O tensor de Einstein é simétrico, e as únicas componentes não nulas de  $k^\mu$  são  $\mu = a = 0, 1$ , portanto só nos interessa calcular  $G^{ab} k_b$ . Usando a Eq.(2.22a), temos

$$G^{ab} k_b = -2\tilde{r}^{-1} k_b \nabla^a \nabla^b \tilde{r} + [2\tilde{r}^{-1} \nabla_c \nabla^c \tilde{r} - \tilde{r}^{-2} (1 - \nabla_c \tilde{r} \nabla^c \tilde{r})] k^a. \quad (3.36)$$

No primeiro termo do lado direito, aparece  $k_b \nabla^a \nabla^b \tilde{r} = \epsilon_{bc} \nabla^c \tilde{r} \nabla^a \nabla^b \tilde{r}$ , pela definição (3.26). Porém, em um espaço bidimensional a antisimetrização de três índices é sempre nula e por isso, em particular,  $\nabla^{[a} \tilde{r} \epsilon^{bc]} = 0$ , ou seja:  $\nabla^a \tilde{r} \epsilon^{bc} = -(\nabla^c \tilde{r} \epsilon^{ab} + \nabla^b \tilde{r} \epsilon^{ac})$ . Usando também o fato de que  $\nabla^c \epsilon^{ab} = 0$ , a expressão analisada se reescreve como

$$\epsilon_{bc} \nabla^c \tilde{r} \nabla^a \nabla^b \tilde{r} = \nabla_b \nabla^a \tilde{r} \epsilon^{bc} \nabla_c \tilde{r} = \nabla_b (\nabla^a \tilde{r} \epsilon^{bc}) \nabla_c \tilde{r} = -\nabla_b (\nabla^c \tilde{r} \epsilon^{ab} + \nabla^b \tilde{r} \epsilon^{ca}) \nabla_c \tilde{r}.$$

Atentando para a ordem dos índices do último termo dentro dos parênteses, e reescrevendo  $\nabla_c \tilde{r} \nabla_b \nabla^c \tilde{r} = \frac{1}{2} \nabla_b (\nabla_c \tilde{r} \nabla^c \tilde{r})$ , temos por fim

$$k_b \nabla^a \nabla^b \tilde{r} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ab} \nabla_b (\nabla_c \tilde{r} \nabla^c \tilde{r}) + \nabla_c \nabla^c \tilde{r} k^a,$$

de forma que o lado direito de (3.36) fica  $G^{ab} k_b = \frac{1}{\tilde{r}^2} [\tilde{r} \epsilon^{ab} \nabla_b (\nabla_c \tilde{r} \nabla^c \tilde{r}) - (1 - \nabla_c \tilde{r} \nabla^c \tilde{r}) k^a]$ . Mas é fácil ver que os dois termos entre colchetes podem ser agrupados como uma única derivada de uma função escalar:  $G^{ab} k_b = -\frac{2}{\tilde{r}^2} \epsilon^{ab} \nabla_b E$ , sendo

$$E(x^a) = \frac{1}{2} \tilde{r} (1 - h_{ab} \nabla^a \tilde{r} \nabla^b \tilde{r}). \quad (3.37)$$

Uma vez que  $E(x^a)$  é restrita a  $\mathcal{O}$ , podemos finalmente escrever, sobre todo o espaço-tempo,

$$j^\mu = -\frac{4}{\tilde{\chi}^2} \tilde{r}^{-2} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \nabla_\nu E. \quad (3.38)$$

Já demonstramos que  $\nabla_\mu (\tilde{r}^{-2} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu}) = 0$ ; para uma função escalar  $\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} E = 0$ , levando à lei de conservação (3.35).

### 3.2.2 Cargas conservadas

Seja  $\mathbf{v}$  um campo vetorial em uma variedade  $d$ -dimensional  $(\mathcal{N}, \mathbf{g})$  com borda  $\partial\mathcal{N}$ . Vale o teorema de Gauss:<sup>1</sup>

$$\int_{\mathcal{N}} \nabla_{\mu} v^{\mu} = \int_{\partial\mathcal{N}} v^{\mu} \epsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{d-1}}, \quad (3.39)$$

onde  $\epsilon = \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_d}$  é  $d$ -forma de volume natural em  $\mathcal{N}$ , induzida pela métrica  $\mathbf{g}$ .

Considere  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  como uma subvariedade da variedade  $\mathcal{M}$ , ambas  $d$ -dimensionais, sendo  $\partial\mathcal{N} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$  composta por duas hipersuperfícies tipo-espaço  $(d-1)$ -dimensionais,  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ , cujos vetores normais,  $\mathbf{n}_{1,2}$ , são orientados para o interior de  $\mathcal{N}$ . A superfície “lateral”  $\mathcal{S}_3$  é tipo-tempo, e também possui seu vetor normal,  $\mathbf{n}_3$ , apontando para o exterior de  $\mathcal{N}$ . Quando  $\mathbf{v}$  possui divergência nula, o lado esquerdo de (3.39) se anula, e temos

$$\int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1 d\sigma_1 + \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_2 d\sigma_2 = - \int_{\mathcal{S}_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3 d\sigma_3.$$

Se as hipersuperfícies tipo-espaço forem a mesma hipersuperfície que “evolui” na direção de algum vetor tipo-tempo — portanto  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  —, pode-se encarar a igualdade acima como dizendo “a variação da componente  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1$  integrada sobre a superfície  $\mathcal{S}(t)$  é dada somente pelo fluxo  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3$  que entra na superfície através de sua borda  $(d-2)$ -dimensional”. Ou seja, existe uma lei de conservação para a grandeza

$$Q_v = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \epsilon, \quad (3.40)$$

sendo  $\mathcal{S}$  uma hipersuperfície espacial qualquer.

#### A carga associada ao vetor de Kodama.

Consideremos o vetor de Kodama, e calculemos  $Q_k$  usando como hipersuperfície espacial o volume contido na 2-esfera  $\mathcal{S}$  de raio  $\tilde{r}$ . Vamos usar coordenadas FRW, nas quais vale (2.15). O vetor tipo-tempo unitário normal a  $\mathcal{V}$  e apontando para o seu interior é simplesmente  $t^{\mu} = -\delta_0^{\mu}$ . A contração de  $\mathbf{k}$  com o elemento de volume de  $\mathcal{N}$  pode ser reescrita como  $\mathbf{k} \cdot \epsilon = k^{\mu} n_{\mu} \alpha$ , onde  $\alpha_{\mu\nu\sigma}$  é o elemento de volume em  $\mathcal{V}$ . Agora, de (3.26), temos

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{-h}} (\partial_0 \tilde{r} \partial_1 - \partial_1 \tilde{r} \partial_0),$$

<sup>1</sup>Ver, por exemplo, [Hawking \(1973a\)](#), [Wald \(1984\)](#), [Choquet-Bruhat \(1977\)](#), [Novikov \(1979\)](#).

e portanto  $n_\mu k^\mu = \frac{1}{a(t)} \partial_r \tilde{r}(r, t)$ . Assim,

$$Q_k = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{a(t)} \partial_r \tilde{r}(r, t) \sqrt{-\sigma} dV ,$$

onde  $dV$  é o elemento de volume usual em coordenadas esféricas (comóveis), e  $\sigma$  é o determinante da métrica induzida por  $\mathbf{g}$  em  $\mathcal{V}$  que, com  $\mathbf{g}$  diagonal, vemos facilmente ser  $\sigma = a^6 r^4 \sin^2 \vartheta$ . Assim,

$$Q_k = 4\pi \int a^2(t) r^2 \partial_r \tilde{r} dr = 4\pi \int \tilde{r}^2 \partial_r \tilde{r} dr = 4\pi \int \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{4\pi}{3} \tilde{r}^3 .$$

Ou seja: A carga conservada é o volume espacial das esferas de raio  $\tilde{r}$ .

### A carga associada ao fluxo de Kodama.

Para  $\mathbf{j}$ , definido pela Eq.(3.34), usando a fórmula (3.38) temos

$$\mathbf{j} = -\frac{4}{z^2} \tilde{r}^{-2} (\partial_0 E \partial_1 - \partial_1 E \partial_0) / \sqrt{-h} ,$$

onde  $E(r, t)$  é a função definida em (3.37). Calculando  $Q_j$  com integral mais uma vez sobre a hipersuperfície  $\mathcal{V}$  formada pelas esferas de raio  $\tilde{r}$ , temos então  $n_\mu j^\mu = \frac{4}{z^2} \tilde{r}^{-2} \partial_r E / a(t)$ , e

$$Q_j = \frac{4}{z^2} \times 4\pi \int \frac{a^2 r^2}{\tilde{r}^2} \partial_r E dr = \frac{16\pi}{z^2} \int \partial_r E dr = \frac{16\pi}{z^2} E .$$

## 3.2.3 A Primeira Lei da Termodinâmica, generalizada

### Energia em espaços esfericamente simétricos.

A carga associada ao fluxo do vetor de Kodama, a função (3.37), é conhecida como ‘*energia de Misner-Sharp*’, e foi analisada em detalhes por [Hayward \(1996\)](#). Apesar das dificuldades associadas à definição de energia na relatividade geral,  $E(r, t)$  possui uma interpretação notavelmente simples e física. De fato, em coordenadas FRW, onde  $\tilde{r} = a(t) r$ , temos<sup>1</sup>

$$E = \frac{1}{2} H^2 \tilde{r}^3 , \tag{3.41a}$$

e usando as equações de Friedmann (com  $K = 0$ ),

$$E = \frac{z^2}{16\pi} \times \frac{4\pi}{3} \tilde{r}^3 \varrho . \tag{3.41b}$$

<sup>1</sup>A título de referência, listamos os resultados  $\nabla_0 \nabla_0 \tilde{r} = \ddot{a}$ ,  $\nabla_1 \nabla_1 \tilde{r} = -\dot{a} \tilde{r}$ , e

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{r} &= -(\ddot{a}/a + H^2) \tilde{r} = -(\dot{H} + 2H^2) a(t) r \\ \nabla_c \tilde{r} \nabla^c \tilde{r} &= h^{ab} \partial_a \tilde{r} \partial_b \tilde{r} = -(\dot{a} r)^2 + 1 . \end{aligned}$$

---

Ou seja: a energia de Misner-Sharp  $E(r, t)$  é simplesmente a energia total de matéria — definida por  $\varrho$  — contida na esfera de raio físico  $\tilde{r}$ .

Uma expressão para  $E$  sobre o horizonte aparente pode ser obtida de (3.41a), com  $\tilde{r} = \tilde{r}_{\text{ap}} = 1/H$ , ou usando a definição (3.37) e o fato de que sobre o horizonte vale  $\nabla_\mu \tilde{r} \nabla^\mu \tilde{r} = 0$  (cf. Eq.(3.27)):

$$E|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \tilde{r}. \quad (3.42)$$

### A primeira Lei da Termodinâmica.

Seja  $T_{\mu\nu}$  o tensor de energia-momento atuando como fonte do campo gravitacional. No espaço ortogonal às superfícies esféricas  $(\mathcal{O}, \mathbf{h})$  pode-se formar dois invariantes:

$$w = -\frac{1}{2} h_{ab} T^{ab}; \quad (3.43a)$$

$$\psi^\mu = T^{\mu\nu} \nabla_\nu \tilde{r} + w \nabla^\mu \tilde{r}. \quad (3.43b)$$

Ao primeiro, um escalar, chamaremos ‘*densidade de trabalho*’; o segundo, um vetor em  $\mathcal{O}$ , chamaremos de ‘*vetor fluxo de energia*’. Usando o tensor de Einstein (2.22a), que pode ser escrito como função da energia de Misner-Sharp,

$$G_{ab} = -2\tilde{r}^{-1} \nabla_a \nabla_b \tilde{r} + 2\tilde{r}^{-1} (\nabla_c \nabla^c \tilde{r} - \tilde{r}^{-2} E) h_{ab}, \quad (3.44)$$

obtemos muito facilmente a densidade de trabalho:

$$w = \frac{2}{\tilde{r}^2} (2E/\tilde{r}^3 - D^2\tilde{r}/\tilde{r}), \quad (3.45)$$

e o fluxo de energia:

$$\psi^a = -\frac{2}{\tilde{r}^2} \tilde{r}^{-1} (2\nabla_b \tilde{r} \nabla^b \nabla^a \tilde{r} - D^2\tilde{r} \nabla^a \tilde{r}). \quad (3.46)$$

Notando que  $\nabla^a E = \tilde{r}^{-1} E \nabla^a \tilde{r} - \tilde{r} \nabla_b \tilde{r} \nabla^b \nabla^a \tilde{r}$ , como se pode ver derivando diretamente a Eq.(3.37), é então imediato escrever

$$\frac{16\pi}{\tilde{r}^2} \nabla^\mu E = A\psi^\mu + w \nabla^\mu V. \quad (3.47)$$

Aqui,  $A(x^a) = 4\pi\tilde{r}^2$  é a área das esferas de simetria, que possuem volume  $V = \frac{4}{3}\pi\tilde{r}^3$ . Esta equação é conhecida como ‘*primeira Lei da Termodinâmica unificada*’ (Hayward (1998), Ashwort (1999)). Ficam agora claros os motivos para a nomenclatura de  $w$  e  $\psi^a$ . Vimos que  $E$  é nada mais que a energia material contida no volume  $V$ , e a primeira lei unificada pode ser interpretada assim: a variação da energia interna  $E$  contida dentro das esferas de raio  $\tilde{r}$  é dada por um termo de trabalho,  $w \nabla V$ , que atua para aumentar o volume da esfera, mais

uma contribuição de energia que flui para dentro da esfera, em um fluxo  $A\psi$  proporcional à área de sua superfície.

A ligação entre a Eq.(3.47) e fórmula usual (3.25) válida para horizontes de eventos também fica clara ao se escrever o vetor fluxo de energia (3.46), com o auxílio de (3.30b) e de  $\nabla^a(E/\tilde{r}) = -\nabla_b\tilde{r}\nabla^b\nabla^a\tilde{r}$ , como

$$A\psi^a = \frac{16\pi}{\varkappa^2}\tilde{r}\nabla^a(E/\tilde{r}) + \frac{2}{\varkappa^2}\kappa\nabla^aA. \quad (3.48)$$

Sobre o horizonte aparente, por causa de (3.42), o termo em parênteses é constante e sua derivada, nula. Assim, a primeira lei unificada (3.47) se escreve em unidades geometrizadas (nas quais  $\varkappa^2 = 16\pi$ )

$$\nabla^\mu E|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi}\kappa\nabla^\mu(A_{\mathcal{H}}/4) + w\nabla^\mu V_{\mathcal{H}}. \quad (3.49)$$

O último termo pode ser interpretado como um trabalho feito ao se aumentar o horizonte aparente. Em um processo “estático”, em que  $V = \text{constante}$ , resta apenas o primeiro termo no lado direito, que podemos interpretar como  $T\nabla^\mu S_{\mathcal{H}}$ , onde temperatura e entropia são dadas pela Eq.(3.25) — mas usando o horizonte aparente e sua gravidade superficial.

### 3.2.4 As equações de Friedmann como relações termodinâmicas

Até aqui, discutimos a maneira como é possível se formular as equações da relatividade geral de maneira termodinâmica na presença de horizontes. É interessante perceber que se pode realizar o caminho inverso: partindo das relações termodinâmicas, obter-se as equações de campo da relatividade geral.<sup>1</sup>

Considere o horizonte aparente como um sistema em equilíbrio termodinâmico, com volume  $V$  e área superficial  $A$ , preenchido por um fluido perfeito com tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu} = (\varrho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}$ . Vamos assumir que a variação de sua energia interna  $E$  é determinada pela equação termodinâmica (3.47).

Em um processo que muda a energia interna  $E$  sem realizar trabalho sobre as paredes do sistema, a energia interna é modificada pela perda de uma quantidade de calor  $dQ = -dE$ , que cruza o horizonte (de dentro para fora). A variação  $dE$  em um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$  é dada pela componente temporal do vetor fluxo de energia (3.43b), através de (3.47):

$$dE = \partial_0 E dt + (\partial E/\partial\tilde{r}) d\tilde{r} = (\partial_0 E + (\partial r/\partial\tilde{r})\partial_1 E \dot{\tilde{r}}) dt = (A\psi_0 + (\dot{\tilde{r}}/a)A\psi_1) dt,$$

em unidades geometrizadas, nas quais  $\varkappa^2 = 16\pi$ . Uma vez que  $w = (\varrho - p)/2$  e

$$\begin{aligned} \psi_0 &= T_{00}\partial^0\tilde{r} + w\partial_0\tilde{r} = -\frac{1}{2}(p + \varrho)H\tilde{r}, \\ \psi^1 &= T_{11}\partial^1\tilde{r} + w\partial_1\tilde{r} = \frac{1}{2}(p + \varrho)a, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Neste parágrafo, seguimos o método apresentado por Cai (2005); ver também Cai (2007).

temos

$$-dE = 4\pi \tilde{r}^3 (p + \varrho) H dt. \quad (3.50)$$

Vamos assumir que a entropia e temperatura do horizonte aparente sejam dadas pela Eq. (3.25). Vamos considerar  $K = 0$  por simplicidade, mas para universos curvos o raciocínio é idêntico. A gravidade superficial (3.30b) em coordenadas FRW se escreve

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-h}} \partial_a (\sqrt{-h} \partial^a \tilde{r}) = -\frac{1}{2} \tilde{r} (\dot{H} + 2H^2 + K/a^2) = -\tilde{r}_{\text{ap}}^{-1} (1 - \dot{\tilde{r}}_{\text{ap}}/2H\tilde{r}_{\text{ap}}),$$

a última igualdade sendo válida sobre o horizonte aparente, cujo raio é dado pela Eq.(3.21),  $\tilde{r}_{\text{ap}} = 1/\sqrt{H^2 + K/a^2}$ . Agora, estamos considerando um processo em que não se realiza trabalho sobre as paredes do sistema termodinâmico, cujo volume permanece constante; i.e. o raio do horizonte aparente deve ser tomado como constante — ou, por um outro ponto de vista, o aumento infinitesimal de energia não altera a temperatura do sistema, que permanece em equilíbrio termodinâmico. Assim, tomamos  $\dot{\tilde{r}}_{\text{ap}} = 0$  e ficamos com

$$T = \frac{1}{2\pi} |\kappa| = 1/(2\pi\tilde{r}_{\text{ap}}) = \frac{1}{2\pi} H. \quad (3.51)$$

Note que esta é a mesma fórmula válida para o horizonte de deSitter, que é efetivamente um horizonte aparente estático. Com a fórmula de Bekenstein-Hawking para a entropia  $S = A/4 = \pi/H^2$ , temos então sobre o horizonte aparente

$$T dS = -\dot{H} dt/H^2. \quad (3.52)$$

A relação de Clausius  $dQ = T dS$  implica portanto, igualando (3.50) e (3.52),

$$\dot{H} = -4\pi (p + \varrho) + K/a^2, \quad (3.53)$$

que é simplesmente uma das equações de Friedmann, a Eq.(2.24b). A segunda equação de Friedmann pode ser obtida ao se impor a conservação do tensor de energia-momento,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , mais especificamente

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = \dot{\varrho} + 3H(\varrho + p) = 0,$$

que é simplesmente a equação da continuidade (2.26). Combinando isto com (3.53), temos  $\dot{H} = \frac{4\pi}{3} \dot{\varrho}/H + K/a^2$  ou, integrando com respeito ao tempo,

$$\int H \dot{H} dt = \frac{4\pi}{3} \int \dot{\varrho} dt + K \int (H/a^2) dt.$$

As duas primeiras integrais são imediatas, e quanto à última,  $\int (\dot{a}/a^3) dt = \int da/a^3 = -1/2a^2$ . Ou seja: obtemos a Eq.(2.24a),

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \varrho - K/a^2 + \Lambda/3,$$

---

adicionada de uma constante de integração  $\Lambda/3$  — a constante cosmológica.

O vetor fluxo de energia, o raio e a área do horizonte aparente, e a gravidade superficial são objetos independentes das equações dinâmicas da gravitação; uns puramente geométricos, e outros determinados apenas pela escolha do conteúdo material na forma do tensor de energia-momento. Pode então parecer espantoso que a imposição de uma relação termodinâmica entre estas grandezas resulte nas equações de Einstein. O espanto se desfaz ao lembramos que para obter a Eq.(3.50) utilizamos a primeira lei unificada (3.47) e que esta, por sua vez, é obtida das equações de Einstein. De qualquer forma, fica muito claro que as equações de Einstein podem ser interpretadas de forma consistente como uma relação termodinâmica do tipo  $dQ = T dS$  sobre o horizonte aparente, que possui uma entropia de Bekenstein-Hawking. Por outro lado, esta relação seja talvez válida apenas aproximadamente, tendo em vista a aproximação feita em  $\kappa$ .

A grande questão que paira é a seguinte: Sabemos que a termodinâmica usual é o resultado estatístico, macroscópico, de uma física microscópica. Existirá tal física subjacente à termodinâmica dos horizontes da Relatividade Geral?

A resposta ainda está em aberto.

# Capítulo 4

## Cosmologia Quase-Topológica

### 4.1 Gravitação de Lovelock

Apesar da concordância entre as previsões da gravitação de Einstein-Hilbert (EH) e testes empíricos, é curioso que uma das soluções mais simples, senão a mais simples, das equações de Einstein (2.4) apresente características singulares: a solução estática e esfericamente simétrica, no vácuo, chamada de solução de Schwarzschild, apresenta (além do horizonte de eventos mencionado mais acima) um ponto em que as equações são mal definidas e a curvatura, divergente. Coisa similar ocorre em espaços-tempo homogêneos e isotrópicos (2.10) descrevendo modelos cosmológicos, e efetivamente teoremas devidos a Hawking e Penrose mostram que tais singularidades são uma característica intrínseca da gravitação de Einstein (Hawking (1973a)).

Sugestivamente, as singularidades de Schwarzschild e cosmológica ocorrem em regiões do espaço-tempo onde a densidade de energia é muito alta, implicando que se deve assim levar em conta efeitos quânticos. A gravitação de Einstein é uma teoria clássica, para a qual ainda não foi encontrada uma formulação quântica definitiva, e se acredita largamente que esta, quando finalmente descoberta, de alguma forma “dissolva” as singularidades. Apesar do insucesso na formulação da gravidade quântica, há diversas indicações de que correções de altas energias introduzem na ação gravitacional termos com maiores potências da curvatura como, por exemplo,  $R^2$ ,  $R^3$ , etc. Correções deste tipo aparecem em alguns limites de teorias de cordas (ver Giribet (2008) e referências) e uma correção em particular, conhecida como gravitação de Gauss-Bonnet, aparece naturalmente ao se considerar campos quânticos evoluindo sobre um espaço-tempo clássico (Davies (1982)).

A escolha de  $R$ , e não suas potências mais altas, para compor a Lagrangeana (2.3) se deveu à linearidade do escalar de Ricci em derivadas segundas da métrica, resultando em equações de campo de segunda ordem — e não terceira. Esta

linearidade é evidentemente perdida em qualquer contração do produto de mais de um tensor de Riemann que por isso, em geral, fornecem equações de campo com derivadas superiores da métrica. Isto entretanto pode ser evitado ao se formar certas combinações específicas destas contrações.

Um teorema devido a Lovelock assegura que em um espaço-tempo de  $d$  dimensões a única combinação desta natureza que produz equações de segunda ordem para métricas arbitrárias é dada pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{d/2} \alpha_n \mathcal{R}^n ; \quad \mathcal{R}^n = \frac{1}{n! 2^n} \delta_{[\alpha_1}^{\mu_1} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\nu_n}^{\mu_n} \delta_{\beta_n]} \prod_{k=1}^n R^{\alpha_k \beta_k}_{\mu_k \nu_k} , \quad (4.1)$$

onde  $\alpha_n$  são coeficientes constantes com dimensão de [comprimento] $^{-n}$ . Aqui e no que segue supomos  $d$  par, caso contrário o limite superior do somatório deve ser substituído por  $(d-1)/2$ . Estas ‘*Lagrangeanas de Lovelock*’<sup>1</sup> são uma generalização natural daquela introduzida por Einstein e Hilbert, que corresponde a

$$\mathcal{R}^1 = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu}) R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = R .$$

Inspeção da estrutura dos termos  $\mathcal{R}^n$  da Eq.(4.1) revela que em um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$   $d$ -dimensional vale, identicamente,  $\mathcal{R}^n = 0$  para todo  $n > d/2$ , como consequência da total antisimetria nos  $n$  índices do produto de símbolos de Kronecker (é impossível preencher  $2n$  posições com apenas  $d < 2n$  objetos sem repetir objeto algum). O último termo não nulo,  $\mathcal{R}^d$ , é na verdade um objeto topológico, a ‘densidade de Euler’ que quando integrado sobre uma variedade compacta  $\mathcal{M}$ , dá um número característico conhecido como o ‘invariante de Euler’ de  $\mathcal{M}$  (ver Choquet-Bruhat (1977)). Em outras palavras,  $\mathcal{R}^d$  é independente de variações locais da métrica, e portanto *não contribui para as equações de Euler-Lagrange*.

Em quatro dimensões, a densidade de Euler é conhecida como ‘*termo de Gauss-Bonnet*’ (GB):

$$\mathcal{R}^2 = R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\mu\alpha\nu\beta} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 . \quad (4.2)$$

Uma vez que ele não contribui para as equações de movimento, a dinâmica da gravitação de Lovelock é neste caso idêntica à dinâmica dada pela ação EH, quando adicionada da constante  $\mathcal{R}^0$ , que pode ser incorporada à Lagrangeana de matéria. Esta constante, introduzida por Einstein em um contexto muito diferente, é chamada de ‘*constante cosmológica*’.

<sup>1</sup> Também conhecidas como Lagrangeanas de Lanczos-Lovelock.

### Equações de campo para gravitação de altas derivadas.

Considere uma teoria de gravitação que, a exemplo da teoria de Lovelock, possui Lagrangeana gravitacional

$$\mathcal{L} (g^{\alpha\beta}, R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}) \quad (4.3)$$

dependente da métrica e do tensor de Riemann. As equações de campo obtidas ao se variar a ação construída a partir de (4.3) são facilmente encontradas (ver Apêndice C):

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}T_{\mu\nu} , \quad (4.4)$$

onde  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  é uma generalização do tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu} &= \partial\mathcal{L}/\partial g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{L} g_{\mu\nu} - 2\nabla^\alpha\nabla^\beta P_{\mu\alpha\nu\beta} ; \\ P_{\mu\alpha\nu\beta} &= \partial\mathcal{L}/\partial R^{\mu\alpha\nu\beta} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como esperado,  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  possui um termo de altas derivadas da métrica:  $\nabla^\alpha\nabla^\beta P_{\mu\alpha\nu\beta}$ ; em geral, portanto, as equações de movimento advindas de uma Lagrangeana do tipo (4.3) possuem derivadas de até quarta ordem.

Sabendo a expressão explícita das equações de campo, podemos demonstrar que de fato teorias de Lovelock possuem equações de *segunda* ordem, como segue. Para obter o tensor  $P_{\alpha\mu\beta\nu}$ , derivamos cada termo de (4.1),

$$\partial\mathcal{R}^n/\partial R^{\gamma\delta}_{\sigma\tau} = \frac{1}{n!2^n} \delta_{[\alpha_1}^{\mu_1} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \cdots \delta_{\nu_n}^{\mu_n} \delta_{\beta_n]}^{\nu_n} \frac{\partial}{\partial R^{\gamma\delta}_{\sigma\tau}} \prod_{k=1}^n R^{\alpha_k \beta_k}_{\mu_k \nu_k} .$$

Cada um dos  $n$  termos resultantes da derivada do produto de tensores de Riemann são idênticos, e podem ser organizados de forma que em todos eles o resultado

$$\partial R^{\alpha_k \beta_k}_{\mu_k \nu_k} / \partial R^{\gamma\delta}_{\sigma\tau} = \delta_{\gamma}^{\alpha_k} \delta_{\delta}^{\beta_k} \delta_{\mu_k}^{\sigma} \delta_{\nu_k}^{\tau}$$

esteja posicionado com todos os  $n - 1$  tensores  $R^{\alpha_j \beta_j}_{\mu_j \nu_j}$  restantes à esquerda. Com isso

$$\partial\mathcal{R}^n/\partial R^{\gamma\delta}_{\sigma\tau} = \frac{1}{(n-1)!2^n} \delta_{[\alpha_1}^{\mu_1} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \cdots \delta_{\alpha_{n-1}}^{\mu_{n-1}} \delta_{\beta_{n-1}}^{\nu_{n-1}} \delta_{\sigma}^{\gamma} \delta_{\tau}^{\delta}] \prod_{k=1}^{n-1} R^{\alpha_k \beta_k}_{\mu_k \nu_k} .$$

Agora, a completa antisimetria dos índices covariantes nesta expressão faz com que a divergência  $\nabla^\gamma \partial\mathcal{R}^n/\partial R^{\gamma\delta}_{\sigma\tau}$  seja uma soma de termos do tipo  $R^{\alpha\beta}_{[\mu\nu;\gamma]}$ , que são identicamente nulos por conta das identidades de Bianchi. Uma vez que  $P_{\alpha\mu\beta\nu;\gamma}$  é uma soma de termos do tipo discutido acima, concluímos que sua divergência também se anula. Assim, para Lagrangeanas de Lovelock o termo de altas derivadas presente em (4.4) é *identicamente* nulo e restam apenas derivadas de segunda ordem nas equações de campo.

## 4.2 Ação para a Gravitação Quase-Topológica

Existem oito invariantes escalares distintos formados de combinações cúbicas do tensor de Riemann (ver e.g. Ray (2010)):

$$\begin{aligned} L_1 &= R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\lambda\tau} R^{\lambda\tau}_{\mu\nu}, & L_2 &= R^{\mu\nu}_{\rho\sigma} R^{\rho\lambda}_{\nu\tau} R^{\sigma\tau}_{\mu\lambda}, \\ L_3 &= R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\nu\lambda} R^{\lambda}_{\mu}, & L_4 &= R R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \\ L_5 &= R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\rho} R_{\nu\sigma}, & L_6 &= R^{\mu\nu} R_{\nu\sigma} R^{\sigma}_{\mu}, & L_7 &= R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, & L_8 &= R^3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

De acordo com o §4.1 a única combinação linear destes invariantes a permitir equações de segunda ordem para uma métrica *arbitrária* é dada por (4.1), que não apresenta contribuições diferentes da gravitação EH em  $d = 4$ . Porém *para uma métrica específica* é sim possível combinar os invariantes de forma a que a) os efeitos em quatro dimensões não sejam triviais e b) as equações de campo sejam ainda de segunda ordem.

A métrica específica em que estamos interessados é a de espaços-tempo cosmológicos, com seções espaciais completamente homogêneas e de curvatura zero. Tais espaços são conformemente planos, i.e. existe uma função não nula  $\Omega^2(x^\mu)$  tal que seu elemento de linha pode ser escrito como (cf. Eq.(E.1))

$$ds^2 = \Omega^2(x^\mu) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço de Minkowski. Neste caso o tensor de Weyl

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + g_{\alpha[\nu} R_{\mu]\beta} + g_{\beta[\mu} R_{\nu]\alpha} + \frac{1}{3} R g_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta}$$

se anula identicamente, e com isso o tensor de Riemann fica dado como uma combinação do tensor de Ricci e da métrica. Os invariantes linearmente independentes (4.6) são assim reduzidos a apenas quatro:  $L_2$ ,  $L_6$ ,  $L_7$  e  $L_8$ . Juntando-os aos dois únicos invariantes quadráticos formados com o tensor de Ricci, viz.  $R^2$  e  $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ , escrevemos a ação genérica

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ R + L^2 \lambda (R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \gamma R^2) + \right. \\ & \left. + \frac{7}{36} L^4 \mu (R^3 + \alpha R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \beta R^\mu_\nu R^\nu_\rho R^\rho_\mu) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

e temos agora que determinar as constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sob a condição de que as equações de campo sejam de segunda ordem. Repare que esta condição não fixa os coeficientes  $\lambda$  e  $\mu$ ; porque se pode encarar cada um dos termos na ação acima como uma Lagrangeana independente, separadamente sujeitas a fornecer equações com

as características desejadas, o que independe dos coeficientes “globais”  $\lambda$  e  $\mu$ . Repare também que separamos uma constante com dimensão de comprimento,  $L$ , de modo que  $\lambda$  e  $\mu$  sejam adimensionais.

Apesar de as Eqs.(4.4) fornecerem as equações de movimento para a métrica (3.19), é mais prático e instrutivo derivá-las desde o começo utilizando um outro método conhecido como ‘método da Lagrangeana efetiva’,<sup>1</sup> como segue. Considere a métrica FRW plana

$$ds^2 = -f^2(t) e^{6A(t)} dt^2 + e^{2A(t)} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.8)$$

mantendo arbitrária a função ‘lapso’,  $f(t)$ . A estratégia consiste em substituir esta métrica diretamente na ação (4.7), obtendo uma Lagrangeana efetiva cujas coordenadas generalizadas são as funções  $f$  e  $A$ .

A partir das conexões não nulas

$$\Gamma_{0j}^i = \dot{A} \delta_j^i; \quad \Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{f^2} \dot{A} e^{-4A} \delta_{ij}; \quad \Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{f}}{f} + 3\dot{A},$$

e seguindo um cálculo tedioso mas absolutamente trivial, calculamos todas as componentes do tensor de curvatura e suas contrações. Para o termo quadrático, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} (R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \gamma R^2) &= \frac{12}{f^3} e^{-6A} (1 - 3\gamma) \left[ \ddot{A}^2 + \left( \dot{A} \dot{f} / f \right)^2 - 2\dot{f} \dot{A} \ddot{A} / f \right] + \\ &+ 36(1 - \gamma) \frac{1}{f^3} e^{-6A} \dot{A}^4 + 36(1 - 2\gamma) \frac{1}{f^3} e^{-6A} \left[ -\ddot{A} \dot{A}^2 + \dot{f} \dot{A}^3 / f \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como foi há pouco mencionado, este termo equivale a uma Lagrangeana independente, que deve fornecer equações de Euler-Lagrange contendo no máximo derivadas segundas de  $t$ . Assim, a expressão acima só pode conter termos lineares em derivadas segundas, pois estes podem ser redefinidos como uma derivada total; é o caso do último termo em colchetes:

$$\frac{1}{f^3} e^{-6A} \left[ -\ddot{A} \dot{A}^2 + \dot{f} \dot{A}^3 / f \right] = -\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left( e^{-6A} \dot{A}^3 / f^3 \right) - 2e^{-6A} \dot{A}^4 / f^3. \quad (4.10)$$

Já os termos não lineares, como é o caso do primeiro termo em colchetes, contribuem com altas derivadas nas equações de movimento, forçando-nos a ajustar  $\gamma$  de maneira que seu coeficiente se anule:

$$\gamma = 1/3. \quad (4.11)$$

---

<sup>1</sup>Cf. [Townsend \(2006, 2007\)](#), dS; [G.M. Sotkov \(2012\)](#).

O termo cúbico da ação (4.7), por sua vez, fica escrito

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g} (R^3 + \alpha R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \beta R_\nu^\mu R_\rho^\nu R_\mu^\rho) = \\ & -\frac{1}{f^5} e^{-12A} \left\{ 6(36 + 12\alpha + 5\beta) \left[ -\ddot{A}^3 + \left( \dot{f} \dot{A} / f \right)^3 + 3 \dot{f} \dot{A} \ddot{A}^2 / f - 3 \left( \dot{f} \dot{A} / f \right)^2 \ddot{A} \right] + \right. \\ & \quad + 18(36 + 16\alpha + 9\beta) \left[ \dot{A}^2 \ddot{A}^2 + \left( \dot{f} \dot{A}^2 / f \right)^2 - 2 \dot{f} \dot{A}^3 \ddot{A} / f \right] + \\ & \quad \left. + 216(1 + \alpha + \beta) \dot{A}^6 - 108(6 + 4\alpha + 3\beta) \left[ \dot{A}^4 \ddot{A} - \dot{f} \dot{A}^5 / f \right] \right\}. \end{aligned}$$

Aqui também o último termo em colchetes, por ser linear em  $\ddot{A}$ , pode ser redefinido como uma derivada total:

$$\frac{1}{f^5} e^{-12A} \left[ \dot{A}^4 \ddot{A} - \dot{f} \dot{A}^5 / f \right] = \frac{1}{5} \frac{d}{dt} \left( e^{-12A} \dot{A}^5 / f^5 \right) + \frac{12}{5} e^{-12A} \dot{A}^6 / f^5, \quad (4.12)$$

enquanto os outros termos em colchetes devem ser eliminados ao se anularem seus coeficientes:

$$\begin{aligned} 36 + 12\alpha + 5\beta &= 0, \\ 36 + 16\alpha + 9\beta &= 0, \end{aligned}$$

um sistema linear trivial cuja solução determina as constantes que faltavam,

$$\alpha = -36/7 = -\beta. \quad (4.13)$$

Basta agora o escalar de Ricci,

$$\sqrt{-g} R = -6 \dot{A}^2 / f + 6 \frac{d}{dt} \left( \dot{A} / f \right), \quad (4.14)$$

para que escrevamos finalmente a ação (4.7), com os coeficientes ajustados:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{eff}} + S_{\mathcal{B}}, \quad (4.15)$$

onde a Lagrangeana efetiva é dada por

$$\varkappa^2 \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{eff}}(A, f, \dot{A}, \dot{f}) = -6 \dot{A}^2 / f + \mu L^4 \frac{6}{5} f^{-5} e^{-12A} \dot{A}^6, \quad (4.16)$$

e  $S_{\mathcal{B}}$  é um termo de borda proveniente das derivadas totais (4.10), (4.12) e (4.14):

$$S_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\varkappa^2} \int d^3x dt \frac{d}{dt} \left[ \frac{6}{f} \dot{A} \left( 1 - \frac{2}{3} L^2 \lambda \frac{1}{f^2} e^{-6A} \dot{A}^2 + L^4 \mu \frac{3}{5} \frac{1}{f^4} e^{-12A} \dot{A}^4 \right) \right]. \quad (4.17)$$

---

A ausência de contribuição dos termos quadráticos na Lagrangeana efetiva (que não depende de  $\lambda$ ) se explica: com  $\gamma = 1/3$  o termo quadrático na ação é simplesmente o invariante de Gauss-Bonnet (4.2), escrito para um espaço conformemente plano. Sendo um invariante topológico, este termo não contribui para as equações de movimento, como explicitado no §4.1.

**Sobre a escala introduzida em gravitações de alta curvatura.**

A necessidade de se ter acoplamentos gravitacionais com dimensão é uma característica de toda teoria de alta curvatura, consequência simples do fato de que o tensor de Riemann possui dimensão [comprimento]<sup>-2</sup>. Portanto, cada termo de  $n$ -ésima potência da curvatura que se adiciona à ação de Einstein-Hilbert deve ser multiplicado por um número com dimensão [comprimento]<sup>2 $n$ -2</sup> para possuir a mesma dimensão de [comprimento]<sup>-2</sup> do escalar de Ricci.

Nós fatoramos esta dimensionalidade dos acoplamentos quadrático e cúbico em uma única escala, que denotamos  $L$ . A escolha de  $L$  define uma escala fundamental, a aparecer explicitamente na ação gravitacional. Uma escolha natural seria, portanto, identificá-la com a constante cosmológica,  $\Lambda$ :

$$L = \sqrt{3/\Lambda} . \tag{4.18}$$

Em teorias que oferecem vários vácuos com constantes cosmológicas diferentes,<sup>1</sup> todavia, a escolha acima não é bem definida, sendo necessário critérios complementares para que se escolha qual das múltiplas constantes cosmológicas definirá a escala fundamental  $L$ .

Um outro ponto de vista vem da interpretação das correções de alta curvatura como efeitos quânticos sobre a ação de Einstein-Hilbert. Neste viés, pode-se argumentar que a escolha mais natural para  $L$  é a escala de Planck:

$$L = l_{\text{Pl}} . \tag{4.19}$$

É interessante ressaltar a diferença entre as escolhas (4.18) e (4.19) é bastante considerável de 61 ordens de grandeza caso se associe à constante cosmológica o valor observado,  $\Lambda \sim 10^{-122} l_{\text{Pl}}^{-2}$ .

Os efeitos dos termos de alta curvatura são controlados pelos valores de seus acoplamentos. Se um certo efeito do termo cúbico, digamos, é esperado apenas em escalas de energia altas, e não pode ocorrer em escalas de energia correspondendo ao Universo atual, isto põe uma restrição sobre o valor de  $\mu L^4$ . Desta forma, a diferença entre as escolhas de  $L$  tem consequências fenomenológicas; ao se aumentar seu valor, os efeitos dos termos de alta curvatura se fazem sentir em escalas de comprimento maiores — ou em menores escalas de energia. Mas uma

---

<sup>1</sup>Como ocorre, por exemplo, nas cosmologias obtidas de um superpotencial polinomial no Capítulo 5.

vez que são as *combinações*  $\lambda L^2$  e  $\mu L^4$  que controlam estes efeitos, a diferença de escolha de  $L$  pode ser absorvida nos fatores dimensionais  $\lambda$  e  $\mu$ .

Assim, as restrições fenomenológicas que mais adiante vamos impor sobre  $\lambda$  e  $\mu$  vão depender da escolha específica que fizermos para  $L$  — e podem, entretanto, ser facilmente “traduzidas” para qualquer outra escolha, digamos  $\tilde{L}$ :

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \quad \iff \quad (L/\tilde{L})^2 \lambda_1 < \lambda < (L/\tilde{L})^2 \lambda_2 \quad (4.20a)$$

$$\mu_1 < \mu < \mu_2 \quad \iff \quad (L/\tilde{L})^4 \mu_1 < \mu < (L/\tilde{L})^4 \mu_2 . \quad (4.20b)$$

### 4.3 As equações de campo da GQT

A partir da Lagrangeana efetiva, podemos determinar as equações de campo para a Gravitação Quase-Topológica acoplada com uma dada Lagrangeana de matéria. Suponha que a Lagrangeana de matéria que se acopla a  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  seja da forma

$$\mathcal{L}_{\text{mat}}(A, f, \psi_k, \dot{A}, \dot{f}, \dot{\psi}_k) , \quad (4.21)$$

onde  $\psi_k(t)$  é uma coleção de campos escalares. A ação (4.15) pode ser encarada como um sistema clássico com coordenadas generalizadas  $A(t)$  e  $f(t)$ , que são, efetivamente, os graus de liberdade da métrica (4.8) que tomamos como ansatz. O procedimento geral de se variar a ação com respeito a  $\delta g_{\mu\nu}$ , que leva às equações gerais (4.4), é aqui equivalente a variar  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  com respeito as estas coordenadas, o que leva às equações de Euler-Lagrange para a Lagrangeana total  $\mathcal{L}_{\text{eff}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} [\sqrt{-g} (\mathcal{L}_{\text{eff}} + \mathcal{L}_{\text{mat}})] = \frac{\partial}{\partial q} [\sqrt{-g} (\mathcal{L}_{\text{eff}} + \mathcal{L}_{\text{mat}})]$$

sendo  $q(t) = A(t), f(t), \psi_k(t)$ . Após obtermos as  $k + 2$  equações de movimento, fixamos a função ‘lapso’ no calibre usual do tempo cósmico, que deixa (4.8) na forma (2.10), viz.

$$f(t) = e^{-3A(t)} .$$

Ressaltamos a importância de se fazer esta escolha somente após a obtenção de *todas* as equações do movimento, assegurando que todos os graus de liberdade da métrica sejam levados em conta.

Vamos nos interessar, no que segue, em dois tipos de matéria: um campo escalar auto-interagente e um fluido perfeito.

#### 4.3.1 O campo escalar

Em primeiro lugar, consideramos um campo escalar com Lagrangeana dada por (2.50). Para a métrica (4.8), temos

$$\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}} = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2(t) / f(t) - f(t) e^{6A(t)} V(\sigma) , \quad (4.22)$$

e as três equações de movimento, após fixado  $f(t)$ , ficam dadas por

$$V'(\sigma) = -(\ddot{\sigma} + 3\dot{A}\dot{\sigma}) \quad ; \quad \frac{\kappa^2}{2}\dot{\sigma}^2 = 6\dot{A}^2 \left(1 - \mu L^4 \dot{A}^4\right) - \kappa^2 V(\sigma) \quad ; \quad (4.23)$$

$$\kappa^2 \dot{\sigma}^2 = -4\ddot{A} \left(1 - 3\mu L^4 \dot{A}^4\right) . \quad (4.24)$$

No limite em que  $\mu = 0$ , recuperamos as Eqs.(2.51) e (2.52), como era de se esperar. Repare que a primeira das equações corresponde à coordenada  $\sigma(t)$ , que só aparece em  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ ; por isso é idêntica à equação correspondente na gravitação EH.

### 4.3.2 Um fluido perfeito

De posse das equações para um campo escalar em GQT, podemos usar os resultados do §2.4.1 para determinar as equações de Friedmann modificadas pelos termos cúbicos. Com a mesma transformação (2.53),

$$\varrho_0 \equiv \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + V(\sigma) \quad ; \quad p_0 \equiv \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 - V(\sigma) , \quad (4.25)$$

obtemos de (4.23) e (4.24) as equações de Friedmann modificadas:

$$\frac{\kappa^2}{6}\varrho_0 = H^2 (1 - \mu L^4 H^4) , \quad (4.26a)$$

$$\frac{\kappa^2}{4}(\varrho_0 + p_0) = -\dot{H} (1 - 3\mu L^4 H^4) . \quad (4.26b)$$

No limite em que  $\mu = 0$ , recuperamos naturalmente as Eqs.(2.24a), (2.24b).

Apesar do método um tanto quanto indireto apresentado para a derivação das Eqs.(4.26), elas ainda assim são componentes das equações de Einstein modificadas, obtidas ao se variar a ação (4.7) com respeito à métrica. Podemos interpretá-las da seguinte forma. Se tratamos os termos provenientes das contribuições cúbicas como uma correção da *matéria*, deixando o lado esquerdo (geométrico) das equações de Einstein inalterado,

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{2}(T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(\text{GQT})}) ,$$

como consequência das identidades de Bianchi,  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ , e da conservação do tensor de matéria pura,  $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(0)} = 0$ , segue que também se conserva o “tensor de matéria gravitacional”, i.e.  $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\text{GQT})} = 0$ . Ou seja, o tensor efetivo

$$\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(\text{GQT})} \quad (4.27)$$

se conserva,  $\nabla^\mu \tilde{T}_{\mu\nu} = 0$ , e obedece as equações de Einstein usuais. Com isso, podemos definir uma densidade de energia efetiva, assim como uma pressão efetiva, componentes do tensor  $\tilde{T}_{\mu\nu}$ , que obedecem a equação da continuidade,

$$\dot{\varrho} + 3H(p + \varrho) = 0 , \quad (4.28)$$

---

e cuja evolução é dada pelas equações usuais da gravitação EH:

$$\kappa^2 \varrho = 6H^2, \quad \kappa^2(\varrho + p) = -4\dot{H}. \quad (4.29)$$

Observações cosmológicas, sendo baseadas em  $H(t)$  e utilizando a gravitação EH como base, devem enxergar como densidade do “fluido cósmico” não  $\varrho_0$  — correspondente à matéria ‘pura’ — mas sim  $\varrho_{\text{eff}}$ , uma vez que é esta que se relaciona da maneira adequada com a função de Hubble. Em todo caso, ambas as grandezas estão relacionadas pela Eq.(4.26a):

$$\varrho_0 = \varrho \left( 1 - \mu L^4 \frac{\kappa^4}{36} \varrho^2 \right). \quad (4.30)$$

### 4.3.3 Espaços assintoticamente de Sitter

Espaços assintoticamente de Sitter são descritos por Lagrangeanas de matéria que tendem a uma constante cosmológica no futuro (ou passado) remoto:

$$\mathcal{L}_{\text{mat}} \rightarrow 2\Lambda_0. \quad (4.31)$$

#### O campo escalar.

Para a Lagrangeana do campo escalar, isto equivale a dizer que  $V(\sigma)$  tende a uma constante; logo o próprio campo  $\sigma$  deve tender a uma constante, digamos  $\sigma = \sigma_*$ . Neste caso, as condições  $\dot{\sigma} = 0$  e  $\ddot{\sigma} = 0$  implicam em  $V'(\sigma_*) = 0$ , a partir da primeira das Eqs.(4.23). Portanto, os extremos do potencial de matéria são configurações de simetria máxima, correspondendo a espaços de de Sitter com constante cosmológica (cf. Eqs.(4.31) e (2.50))

$$\Lambda_0 = \frac{\kappa^2}{2} V(\sigma_*). \quad (4.32)$$

Vamos nos referir a isto como ‘configurações de vácuo’ do campo escalar.

Pelo que discutimos na seção anterior, não é (4.32) a constante cosmológica observável, mas sim aquela ligada ao valor  $H_* = \dot{A}_*$ , constante, que função de Hubble assume no vácuo. A segunda das Eqs.(4.23) nos mostra que esta ‘constante cosmológica efetiva’  $\Lambda_* = 3H_*^2$  se relaciona com (4.32) — que passaremos a chamar de ‘constante cosmológica nua’ — através de uma equação cúbica:

$$\Lambda_0 = \Lambda_{\text{eff}} \left( 1 - \frac{\mu L^4}{9} \Lambda_{\text{eff}}^2 \right). \quad (4.33)$$

A primeira vista, isto pode sugerir a possibilidade de se ter uma constante cosmológica nua negativa na ação, o que corresponderia a um espaço anti-de Sitter, e todavia o espaço-tempo observado ser de Sitter, com  $\Lambda_{\text{eff}}$  positiva. Veremos mais tarde que condições de energia não permitem que isto ocorra.

### Um fluido perfeito.

Para a Lagrangeana do fluido perfeito, isto equivale a dizer que a densidade de energia relativa ao tensor de matéria pura,  $\rho_0$ , se torna constante:

$$\Lambda_0 = \frac{z^2}{2} \rho_0 . \quad (4.34)$$

Assim como ocorre para o campo escalar, sendo  $\rho_{\text{eff}}$  a densidade de energia de fato observável, a constante cosmológica observável é  $\Lambda_{\text{eff}} = \frac{z^2}{2} \rho_{\text{eff}}$ , que se relaciona com (4.34) pela mesma relação dada na Eq.(4.33), como se pode ver da Eq.(4.30).

## 4.4 Entropia na Gravitação Quase-Topológica

Em teorias de gravitação com Lagrangeanas gerais do tipo (4.3), também é possível formular uma termodinâmica para os horizontes. Entretanto, não vale mais a fórmula de Bekenstein-Hawking (3.25). Um método devido a Wald (1993, 1994) permite identificar a entropia do horizonte como uma carga de Noether. Apresentamos uma versão menos rigorosa deste método (cf. Padmanabhan (2010)).

### 4.4.1 A Fórmula de Wald

Considere uma teoria de gravitação cuja Lagrangeana é da forma (4.3). Para ser compatível com a Relatividade Geral, é necessário que  $\mathcal{L}(g^{\alpha\beta}, R_{\mu\nu}^{\alpha\beta})$  seja invariante sob difeomorfismos  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ , de forma que

$$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu , \quad (4.35)$$

$$\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}) = -\sqrt{-g} \nabla_\mu (\xi^\mu \mathcal{L}) . \quad (4.36)$$

Por outro lado, segundo a Eq.(C.16), quando usamos (4.35), lembrando que  $\mathcal{G}^{\mu\nu}$  é simétrico,

$$\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}) = 2\mathcal{G}_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla_\mu \delta v^\mu , \quad (4.37)$$

onde  $\delta v^\mu$  é dado por (C.14). Assim, subtraindo (4.37) e (4.36), e usando a identidade de Bianchi  $\nabla_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$ , obtemos uma quantidade conservada,

$$\sqrt{-g} \nabla_\mu J^\mu = 0 , \quad (4.38a)$$

$$J^\mu = 2\mathcal{G}^{\mu\nu} \xi_\nu + \mathcal{L} \xi^\mu + \delta v^\mu = 0 . \quad (4.38b)$$

Com alguma manipulação algébrica (cf. Eqs.(C.24), (C.25)), podemos escrever

$$J^\mu = -2\nabla_\nu (P^{\mu\alpha\nu\beta} + P^{\mu\beta\nu\alpha}) \nabla_\alpha \xi_\beta + 2P^{\mu\alpha\nu\beta} \nabla_\alpha \nabla_\nu \xi_\beta - 4\xi_\beta \nabla_\alpha \nabla_\nu P^{\mu\alpha\nu\beta} , \quad (4.39a)$$

e definir o tensor antisimétrico  $J^{\mu\nu}$  tal que  $J^\mu = \nabla_\nu J^{\mu\nu}$ :

$$J^{\mu\nu} = 2P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta - 4\xi_\beta\nabla_\alpha P^{\mu\nu\alpha\beta} . \quad (4.39b)$$

O vetor de divergência nula (4.39a) é chamado de ‘*corrente de Noether*’, enquanto o tensor antisimétrico (4.39b) é chamado de ‘*potencial de Noether*’.

Chamamos atenção para o fato de que estamos desconsiderando a contribuição de matéria, que é de fato nula nas soluções, in vacuo, de buracos negros. Mas em espaços cosmológicos, por exemplo, isto não é mais verdade. Nestes casos em que matéria está presente, o resultado da variação da ação completa inclui  $T^{\mu\nu}$ , que pode ser incorporado na corrente de Noether, uma vez que este se conserva:  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Isto equivale a substituir  $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ , em (4.38b) por

$$\mathcal{E}^{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\mu\nu} . \quad (4.40)$$

Deve-se reparar que as fórmulas (4.39) não são mais válidas neste caso.

#### A carga de Noether.

A divergência nula da corrente de Noether implica na conservação da ‘*carga de Noether-Wald*’

$$Q_{\text{NW}} = \int_{\mathcal{N}} J^\mu d\sigma_\mu = \oint_{\mathcal{B}} J^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} , \quad (4.41)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma hipersuperfície espacial com borda  $\partial\mathcal{N} = \mathcal{B}$ , como descrito no §3.2.2. A existência do potencial  $J^{\mu\nu}$  então permite que se utilize o teorema de Gauss mais uma vez para se obter a integral sobre  $\mathcal{B}$  apresentada na segunda igualdade acima. Aqui,  $d\sigma_\mu$  trata-se do elemento de interseção do espaço tridimensional  $\mathcal{N}$ , enquanto  $d\sigma_{\mu\nu}$  é o elemento de área binormal à 2-superfície espacial  $\mathcal{B}$ .

#### Horizontes de Killing e a Entropia de Wald.

Quando  $\xi$  é um vetor de Killing, podemos tomar  $\mathcal{B}$  como a 2-esfera de bifurcação de seu horizonte. Como discutido no Apêndice B (cf. Eq.(B.3)), o espaço bidimensional ortogonal ao horizonte tem como base o vetor (nulo) de Killing e um segundo vetor nulo  $l^\mu$  tal que  $\xi_\mu l^\mu = -1$ . Assim, o elemento de volume em  $\mathcal{B}$ , é induzido pelo elemento de volume  $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$  em  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  por  $\epsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2}l^\alpha\xi^\beta\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ ; portanto

$$d\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}l_{[\mu}\xi_{\nu]}\sqrt{\gamma}d^2x , \quad (4.42)$$

onde  $\gamma$  é o determinante da métrica (Riemanniana) sobre a esfera  $\mathcal{B}$ , coberta por coordenadas  $\{x^i\}$ ,  $i = 2, 3$ . Por ser  $\mathcal{B}$  uma esfera de bifurcação,  $\xi|_{\mathcal{B}} = 0$  e na

Eq.(4.39b) resta apenas o primeiro termo. A fórmula de Wald (4.41) então se simplifica

$$Q_{\text{NW}} = \oint_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}} \nabla_{\alpha} \xi_{\beta} l_{[\mu} \xi_{\nu]} \sqrt{\gamma} d^2x . \quad (4.43)$$

Para a Lagrangeana de Einstein-Hilbert vale a Eq.(C.20), e portanto (em unidades geometrizadas)

$$Q_{\text{NW}} = \oint_{\mathcal{B}} P^{\mu\alpha\nu\beta} \nabla_{\alpha} \xi_{\beta} l_{[\mu} \xi_{\nu]} \sqrt{\gamma} d^2x = \frac{1}{32\pi} \oint_{\mathcal{B}} \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} l_{[\mu} \xi_{\nu]} \sqrt{\gamma} d^2x .$$

Agora,  $l_{[\mu} \xi_{\nu]} \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} = 4l_{\mu} \xi_{\nu} \nabla^{\mu} \xi^{\nu} = -4l_{\mu} \xi_{\nu} \nabla^{\nu} \xi^{\mu} = -4\kappa l_{\mu} \xi^{\mu} = 2\kappa$ . Portanto, sendo  $\kappa$  constante sobre o horizonte de eventos,

$$Q_{\text{NW}} = \frac{1}{8\pi} \kappa \oint_{\mathcal{B}} \sqrt{\gamma} d^2x = \kappa A/8\pi . \quad (4.44)$$

Ou seja, fazendo as identificações (3.25), a entropia de Bekenstein-Hawking do horizonte de eventos é dada pela fórmula de Wald, com

$$S = 2\pi Q_{\text{NW}}/\kappa . \quad (4.45)$$

Como  $\kappa$  é constante sobre o horizonte de Killing, a variação da carga de Noether-Wald é simplesmente  $TdS$ . Mas além de ser válida no caso EH, a fórmula (4.43) pode ser evidentemente aplicada para *qualquer* teoria cuja Lagrangeana é do tipo (4.3) — em particular as teorias de Lovelock, com Lagrangeanas do tipo (4.1) — e, como demonstrado por Wald (1993, 1994), ela de fato recupera o lado direito da relação termodinâmica (3.24).

### Entropia de Wald e o vetor de Kodama.

Consideremos agora que os difeomorfismos  $\xi^{\mu}$  sejam dados pelo vetor de Kodama,  $k^{\mu}$ . A fórmula (4.43) foi obtida utilizando o fato de que o segundo termo do lado direito da Eq.(4.39b) se anula sobre o horizonte (bifurcado) de Killing em qualquer teoria de gravitação. Apesar de o vetor de Kodama não se anular sobre o horizonte aparente, em teorias de Lovelock o mesmo termo se anula porque  $\nabla_{\mu} P^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ , como mostrado no §4.1. Na gravitação de Einstein-Hilbert podemos então utilizar mais uma vez a Eq.(4.43), com o potencial de Noether dado por

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \nabla^{[\mu} k^{\nu]} . \quad (4.46)$$

O vetor normal ao horizonte aparente é o próprio vetor de Kodama, que é um vetor nulo. Assim, vale mais uma vez a construção do Apêndice B, e o elemento de integração é outra vez dado por (4.42):

$$d\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} l_{[\mu} k_{\nu]} \sqrt{\gamma} d^2x ,$$

onde  $l^\mu$  é um vetor nulo tal que  $l_\mu k^\mu = -1$ . A carga de Noether (4.41) é então

$$Q_{\text{NW}} = \frac{1}{32\pi} \oint_{\mathcal{B}} \nabla^{[\mu} k^{\nu]} l_{[\mu} k_{\nu]} \sqrt{\gamma} d^2x .$$

O integrando se avalia com a ajuda da Eq.(3.30a):

$$\nabla^{[\mu} k^{\nu]} l_{[\mu} k_{\nu]} = 2l_\mu k_\nu \nabla^{[\mu} k^{\nu]} = 4l_\mu k_\nu \nabla^{[\nu} k^{\mu]} = -4\kappa l^\mu k_\mu = 4\kappa .$$

Como discutido no §3.2.1, a gravidade superficial  $\kappa$ , dada pela Eq.(3.31), é constante sobre o horizonte aparente, de forma que a integral acima se reduz a

$$Q_{\text{NW}} = \frac{1}{8\pi} \kappa \oint_{\mathcal{B}} \sqrt{\gamma} d^2x = \kappa A/8\pi , \quad (4.47)$$

onde  $A$  é a área do horizonte aparente. Conclui-se que vale a mesma prescrição (3.25), com a entropia de Bekenstein-Hawking sendo associada à área do horizonte aparente, que possui gravidade superficial  $\kappa$  dada pela Eq.(3.30b). Este resultado foi obtido por Hayward (1999).

#### 4.4.2 Entropia de Wald para universos FRW

Desejamos determinar a entropia do horizonte aparente na Gravitação Quase-Topológica. Uma expressão explícita para  $P^{\mu\nu\alpha\beta}$  pode ser obtida diretamente da ação (4.7) com os coeficientes determinados no §4.2, e depois se pode utilizar as fórmulas (4.41) para encontrar  $Q_{\text{NW}}$  utilizando-se o vetor de Kodama como gerador dos difeomorfismos.

Vamos adotar um atalho, analisando o caso do espaço de deSitter, em que os difeomorfismos são isometrias (i.e. o vetor de Kodama coincide com o vetor de Killing). Da Eq.(C.14) se vê então que  $\delta v^\mu = 0$ , simplificando a corrente de Noether (4.38b):

$$J^\mu = 2\mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu + \mathcal{L} \xi^\mu . \quad (4.48)$$

Repare que estamos incluindo na corrente de Noether o tensor de energia momento, e utilizando portanto a Eq.(4.40).

Escolhemos a fronteira da região  $\mathcal{N}$  como uma hipersuperfície ortogonal a  $\xi$ , mas ligeiramente afastada do horizonte, de modo que  $\xi$  não seja ali um vetor nulo, e o elemento de integração em (4.41) fica

$$d\sigma_\mu = \frac{1}{\xi^2} \xi_\mu dV ,$$

onde  $dV$  é o elemento de volume (tridimensional) em  $\mathcal{N}$ . Integrando a corrente de Noether, obtemos

$$Q_{\text{NW}} = \int J^\mu d\sigma_\mu = \int [2\xi^{-2} \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu + \mathcal{L}] dV.$$

Quando se faz valer as equações de movimento, o primeiro termo dentro de colchetes se anula, e o que resta do lado direito é simplesmente a ação:<sup>1</sup>

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int dt Q_{\text{NW}} . \quad (4.49)$$

Por continuidade, podemos estender esta relação até sobre o horizonte.

#### A ação Quase-Topológica como uma derivada total.

A Lagrangeana efetiva total — com a contribuição de (4.22) e (4.16), fixado  $f(t) = e^{-3A(t)}$  e quando se assumem válidas as equações de movimento (4.23) e (4.24), forma uma derivada total:

$$\begin{aligned} \varkappa^2 \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{\text{eff}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}) &= e^{3A} \left[ -6H^2 \left( 1 - \frac{1}{5} \mu L^4 H^4 \right) + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 - V(\sigma) \right] \\ &= -4e^{3A} \left[ 3H^2 \left( 1 - \frac{1}{5} \mu L^4 H^4 \right) + \dot{H} \left( 1 - 3\mu L^4 H^4 \right) \right] , \end{aligned}$$

ou seja:

$$\varkappa^2 \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{\text{eff}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}) = \frac{d}{dt} \left[ -4e^{3A} H \left( 1 - \frac{3}{5} \mu L^4 H^4 \right) \right] . \quad (4.50)$$

Assim, a ação (4.15) se torna, ela toda, também uma derivada total ao se incluir a contribuição do termo de borda (4.17):

$$S = \frac{1}{\varkappa^2} \int d^3x dt \frac{d}{dt} \left[ 2e^{3A} H \left( 1 - 2\lambda L^2 H^2 + 3\mu L^4 H^4 \right) \right] . \quad (4.51)$$

#### Uma fórmula para a entropia do horizonte aparente.

Com as Eqs.(4.49) e (4.51), podemos obter facilmente uma fórmula para a entropia do horizonte aparente em um universo de deSitter. Temos

$$Q_{\text{NW}} = \frac{1}{\varkappa^2} \int d^3x \frac{d}{dt} \left[ 2e^{3A} H \left( 1 - 2\lambda L^2 H^2 + 3\mu L^4 H^4 \right) \right] .$$

O integrando não depende das coordenadas espaciais, e por isso a integração resulta apenas em um fator multiplicativo igual ao volume da região sobre a qual se integra. A fronteira desta região será tomada como o horizonte do espaço de deSitter, uma esfera de raio físico  $1/H$ . Uma vez que  $\dot{H} = 0$ , o resultado final é

$$Q_{\text{NW}} = \frac{6}{\varkappa^2} a(t) V H^2 \left( 1 - 2\lambda L^2 H^2 + 3\mu L^4 H^4 \right) .$$

onde  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  é o volume comóvel do horizonte, logo  $a(t) V = \frac{4}{3} \pi / H^3$  e

$$Q_{\text{NW}} = \frac{8\pi}{\varkappa^2} H^{-1} \left( 1 - 2\lambda L^2 H^2 + 3\mu L^4 H^4 \right) . \quad (4.52)$$

---

<sup>1</sup>De maneira um tanto quanto infeliz, utilizamos a mesma notação para a entropia e para a ação. Esperamos que a distinção entre ambas fique clara pelo contexto.

A interpretação termodinâmica da carga de Noether-Wald, Eq.(4.45), determina então a entropia do horizonte aparente na GQT:

$$s = \frac{16\pi^2}{\varkappa^2} \frac{1}{H^2} (1 - 2\lambda L^2 H^2 + 3\mu L^4 H^4) , \quad (4.53)$$

onde usamos a gravidade superficial do horizonte de deSitter dada pela Eq.(3.13).

Vai nos interessar no restante desta dissertação o caso de espaços que não são exatamente deSitter, mas sim *assintoticamente deSitter*. Isto é, espaços FRW para os quais o fator de escala  $a(t)$  se comporta exponencialmente no limite  $t \rightarrow \infty$  — e, em certos casos, também para  $t \rightarrow -\infty$ . Tais espaços surgem como uma classe de soluções analíticas das equações de Friedmann modificadas (cf. Capítulo 5), e incluem o nosso Universo observado, cuja expansão tardia se encontra dominada pela constante cosmológica (cf. Capítulo 6).

Em geral, Universos deste tipo não possuem horizontes de eventos, como discutido no §3.1.2, mas sempre possuem um horizonte aparente com raio igual à escala de Hubble (cf. §3.1.3), ao qual vamos associar um caráter termodinâmico.

Fora do espaço de deSitter, não podemos garantir que o termo  $\delta v^\mu$  na Eq.(4.38b) se anule sobre o horizonte aparente; a corrente de Noether não fica então simplificada como em (4.48), e deve-se considerar a possível existência de um termo aditivo na carga de Noether-Wald, i.e.

$$s(t) = \frac{16\pi^2}{\varkappa^2} \left\{ \frac{1}{H^2} (1 - 2\lambda L^2 H^2 + 3\mu L^4 H^4) + \zeta(t) \right\} . \quad (4.54)$$

Repare que agora  $s(t)$  é uma função do tempo, que muda à medida que o horizonte aparente evolui junto com a função de Hubble  $H(t)$ . Vamos a seguir mostrar que em espaços assintoticamente deSitter a função  $\zeta(t)$  deve ser constante e nula para que  $s(t)$  possua uma interpretação consistente como a entropia do horizonte.

### 4.4.3 As equações de Friedmann modificadas como relações termodinâmicas

Assim como as equações de Friedmann da gravitação EH foram derivadas no §3.2.4 usando a relação termodinâmica  $dQ = T ds$ , também se pode fazer o mesmo com relação às equações de Friedmann modificadas (4.26).

Considerando o universo preenchido por um fluido perfeito, vamos mais uma vez tomar o interior do horizonte aparente como um sistema termodinâmico em equilíbrio, cujo balanço de energia é dado pela primeira lei unificada (3.47). A variação da energia interna  $dE = -dQ$  depende exclusivamente do tensor de energia-momento, e é dada pela Eq.(3.50). A temperatura do horizonte aparente é um objeto puramente geométrico, dado pela Eq.(3.51). Porém a entropia não é mais dada pela fórmula de Bekenstein-Hawking, mas sim modificada de acordo

com a Eq.(4.53). Em unidades geometrizadas,

$$s(t) = \pi (\tilde{r}_{\text{ap}}^2 - 2\lambda L^2 + 3\mu L^4 \tilde{r}_{\text{ap}}^{-2}) + \pi \zeta(t) \quad (4.55)$$

e portanto  $ds = 2\pi (1 - 3\mu L^4 \tilde{r}_{\text{ap}}^{-4}) \tilde{r}_{\text{ap}} \dot{\tilde{r}}_{\text{ap}} dt + \pi \dot{\zeta} dt$ . Ou seja, com (3.51), e  $\tilde{r}_{\text{ap}} = 1/H$ ,

$$T ds = \left\{ -(1 - 3\mu L^4 H^4) \dot{H}/H^2 + H \dot{\zeta}/2 \right\} dt ; \quad (4.56)$$

juntando a Eq.(4.56) à Eq.(3.50) na relação termodinâmica  $dQ = T ds$ , temos

$$4\pi(p + \varrho) = -\dot{H}(1 - 3\mu L^4 H^4) + H^3 \dot{\zeta}/2 . \quad (4.57)$$

Obtemos assim a equação de Friedmann modificada (4.26b), desde que  $\dot{\zeta} = 0$ , o que somos então levados a impor. Com isto, fixamos  $\zeta = \text{constante}$ . Como no limite em que  $t \rightarrow \infty$ , em um espaço de deSitter, a função  $s(t)$  deve se igualar à expressão em (4.53), segue que  $\zeta = 0$ . Portanto, conclui-se:

*É a função  $s(t)$  dada pela Eq.(4.53), com  $H = H(t)$ , quem possui interpretação de entropia dos horizontes aparente nos espaços assintoticamente deSitter.*

Utilizando a equação da conservação da energia  $\nabla_{\mu} T^{\mu 0} = 0$  para substituir  $p + \varrho = -\dot{\varrho}/3H$  na Eq.(4.57), temos

$$\frac{4\pi}{3} \int \dot{\varrho} dt = \int H(1 - 3\mu L^4 H^4) H \dot{H} dt ,$$

que dá a equação (4.26a), acrescida de uma constante de integração que é simplesmente a constante cosmológica:

$$\frac{8\pi}{3} \varrho + \Lambda/3 = H^2(1 - \mu L^4 H^4) .$$

O fato de se obter as equações de campo da QTG desta maneira nos ensina duas coisas. A primeira é que (4.53) é de fato a fórmula correta para a entropia do horizonte aparente na cosmologia modificada. Devemos comentar que a imposição de que se tenha  $\dot{\zeta} = 0$  para a dedução das equações de Friedmann pode parecer um tanto quanto forçada; porém o que permite a associação do nome ‘entropia’ à carga de Noether-Wald em espaços estáticos é a existência de uma relação de Clausius entre objetos geométricos, ou “grandezas gravitacionais”. Nos espaços dinâmicos que descrevemos, a recuperação da relação de Clausius utilizando a função  $s(t)$  — com  $\dot{\zeta} = 0$  — nos permite fazer a mesma identificação entre esta função e a ‘entropia’ do horizonte aparente.

A segunda lição, mais sutil, é a seguinte: a equação (3.50) é uma consequência das equações de Einstein usuais, da gravitação de Einstein-Hilbert; e é somente

através deste fato que se introduz dinâmica na dedução que acabamos de fazer. Portanto, sob esta ótica, podemos encarar a gravitação quase-topológica como sendo uma correção não das equações de Einstein em si, mas sim da entropia do horizonte aparente, que deixa de ser dada pela fórmula de Bekenstein-Hawking para ser corrigida como em (4.53).

## 4.5 Restrições entrópicas

A principal consequência da existência da fórmula (4.53) para a densidade de entropia é que os termos de alta curvatura da ação impõem certas restrições sobre a geometria do espaço-tempo.

### Condições para uma entropia não decrescente.

A primeira restrição vem do fato de que a entropia não pode ser uma função decrescente do tempo, i.e.  $\dot{s}(t) \geq 0$ . Derivando a Eq.(4.53) e usando as equações de Friedmann modificadas (4.26), obtemos

$$\dot{s}(t) = -\frac{1}{2G} (1 - 3L^4 \mu H^4) \frac{\dot{H}}{H} = \frac{\varkappa^2}{8G} \frac{(\varrho_0 + p_0)}{H}. \quad (4.58)$$

Portanto em um universo em expansão, que tem portanto  $H > 0$ , a densidade de entropia é uma função não-decrescente se o tensor de energia-momento que compõe a Lagrangeana de matéria satisfizer a condição fraca de energia:

$$\varrho_0 \geq 0 ; \quad p_0 + \varrho_0 \geq 0 . \quad (4.59)$$

Repare que em termos do campo escalar, a condição acima significa apenas que  $\dot{\sigma}^2(t) \geq 0$  (cf. Eq.(4.25)).

### Positividade da entropia.

Além de ser não decrescente, a entropia do horizonte aparente deve ser sempre positiva (ou zero). Será vantajoso reescrever (4.53) como uma função da densidade de energia (4.29):

$$s(\varrho) = \frac{3}{2G\varkappa^2} \frac{1}{\varrho} \left( 1 - \frac{\varkappa^2}{3} L^2 \lambda \varrho + \frac{\varkappa^4}{12} L^4 \mu \varrho^2 \right) . \quad (4.60)$$

O lado direito desta equação *não* é positivo para qualquer valor de  $\varrho$ . Supondo que  $\varrho > 0$  (ver (4.62)), devemos analisar uma desigualdade quadrática:

$$1 - \frac{\varkappa^2}{3} L^2 \lambda \varrho + \frac{\varkappa^4}{12} L^4 \mu \varrho^2 \geq 0 .$$

O lado direito desta desigualdade é uma parábola com raízes

$$\varrho_{\pm} = \frac{2}{\varkappa^2 L^2} \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 3\mu/\lambda^2} \right) . \quad (4.61)$$

Se  $\mu < 0$ , a parábola possui concavidade voltada para baixo, e a desigualdade é válida no intervalo entre as raízes (4.61). Independentemente do sinal de  $\lambda$ ,  $\varrho_{\pm}$  sempre possuem sinais opostos. Uma vez que consideramos apenas valores positivos da densidade de energia (e além disso,  $s(\varrho)$  diverge se  $\varrho \rightarrow 0$ ), a entropia é positiva apenas no intervalo entre zero e a raiz positiva.

Se  $\mu > 0$ , nem sempre as soluções (4.61) são reais. Caso elas o sejam, i.e.  $0 < 3\mu/\lambda^2 < 1$ , a entropia será positiva nos intervalos “exteriores” às raízes, e.g.  $-\infty < \varrho < \varrho_-$  ou  $\varrho_+ < \varrho < \infty$  se  $\varrho_- < \varrho_+$ . Caso  $3\mu/\lambda^2 > 1$ , a entropia é positiva para qualquer valor de  $\varrho$ .

### Condições de energia para o fluido efetivo.

Uma última restrição sobre a geometria do espaço é consequência da requisição de que, além do fluido de matéria pura, também o fluido *efetivo* satisfaça a condição fraca de energia:

$$\varrho \geq 0; \quad \varrho + p \geq 0. \quad (4.62)$$

Neste caso, a função

$$C_0 \equiv (p + \varrho)/(p_0 + \varrho_0),$$

deve ser sempre positiva. Porém isto não acontece para todo valor de  $\varrho$ ; de fato se  $\mu > 0$ ,

$$C_0 = 1 - \frac{z^4}{12} L^4 \mu \varrho^2 = 1 - 3L^4 \mu H^4 \quad (4.63)$$

só não é negativa para (assumindo  $\varrho > 0$ )  $0 < \varrho \leq \frac{2}{z^2 L^2} \sqrt{3/\mu}$ .

### Densidades máximas de energia.

O conjunto das restrições acima fornecem o intervalo de possíveis valores para a densidade efetiva do universo. Note que a condição  $C_0(\varrho) = 0$  é equivalente à condição  $\partial s(\varrho)/\partial \varrho = 0$ . Portanto, quando  $\mu > 0$ , a função fica negativa entre as raízes  $\varrho_{\pm}$ , e apenas o intervalo entre zero e a menor raiz (4.61) satisfaz todas as condições. Em resumo, temos (ver Fig.4.5):

$$\begin{aligned} \text{Se } -\infty < \mu < \lambda^2/3, \text{ então } 0 \leq \varrho \leq \varrho_{\text{GQT}}, \text{ com} \\ \varrho_{\text{GQT}} \equiv \frac{2}{z^2 L^2} \frac{1}{\mu} \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\mu} \right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \mu > \lambda^2/3, \text{ então } 0 \leq \varrho \leq \varrho_{\text{top}}, \text{ com} \\ \varrho_{\text{top}} \equiv \frac{2}{z^2 L^2} \sqrt{3/\mu}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Alguns comentários sobre dois casos específicos são válidos.

### Gravitação cúbica pura.

Quando  $\lambda = 0$ , a entropia é sempre positiva para  $\mu > 0$ , mas  $C_0(\varrho)$  se torna negativa. Já quando  $\mu < 0$ ,  $C_0(\varrho)$  nunca se torna negativa, porém a entropia sim. Em ambos os casos, a entropia máxima é dada pela fórmula de  $\varrho_{\text{top}}$ :  $\frac{2}{\kappa^2 L^2} \sqrt{3/|\mu|}$ . Note, entretanto, que devemos tomar o módulo de  $\mu$  no segundo caso.

### Gravitação de Gauss-Bonnet.

Quando  $\mu = 0$ , temos sempre  $C_0 = 1$  e, como já foi observado, a dinâmica é idêntica à da gravitação EH. Porém a entropia recebe sim uma contribuição do termo quadrático da ação, que adiciona uma constante à fórmula de EH:

$$s(t) = \frac{1}{4G} \left( \frac{1}{H^2} - 2\lambda L^2 \right) .$$

Mais ainda, se  $\lambda > 0$ , a entropia eventualmente se torna negativa, e impõe uma densidade máxima de energia:

$$0 \leq \varrho_{\text{eff}} \leq \varrho_{\text{GB}} ; \quad \varrho_{\text{GB}} \equiv \frac{3}{\kappa^2 L^2 \lambda} . \quad (4.66)$$

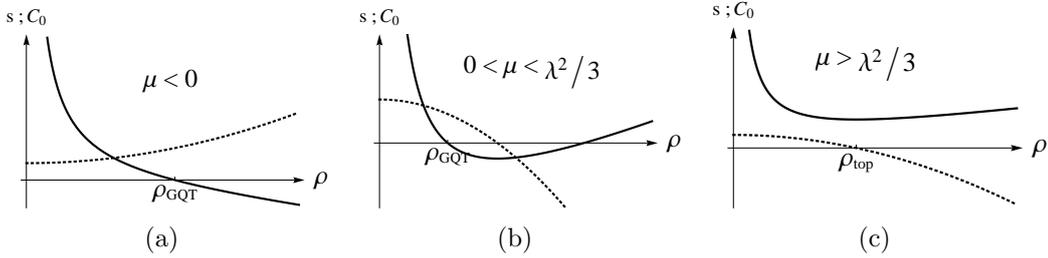


Figura 4.1: Densidade de entropia  $s(\varrho)$  (linha solid) e  $C_0(\varrho)$  (linha pontilhada). (a)  $\mu < 0$  ; (b)  $0 < \mu < \lambda^2/3$  ; (c)  $\lambda^2/3 < \mu$ .

#### 4.5.1 Sobre a natureza dos cortes entrópicos

Em um universo singular, é inevitável que as restrições acima sejam violadas à medida que a densidade de energia diverge. Se assumirmos a validade da entropia do horizonte aparente, estas regiões não podem ser consideradas físicas. Ou seja: nesta faixa de energias que violam as restrições entrópicas, as soluções cosmológicas não correspondem a uma descrição da natureza.

Pode parecer à primeira vista estranho que “cortemos” desta maneira uma parte do espaço-tempo. Mas vale lembrar que estes espaços já são naturalmente incompletos, pois lhes “falta” o ponto onde se encontra a singularidade. Além disso, mesmo na gravitação EH, existe um limite máximo de energia, dado por  $\varrho_{\text{P1}}$ ,

acima do qual se acredita ser impossível descrever classicamente o espaço-tempo. As restrições da gravitação quase-topológica só vêm a confirmar esta hipótese.

Por fim, ressaltamos que a correção de Gauss-Bonnet é efetivamente prevista ao se adicionar campos quânticos ao espaço-tempo clássico. O fato de esta correção, sozinha, prever uma restrição entrópica, é portanto bastante significativo.<sup>1</sup>

### Valores físicos de $\lambda$ e $\mu$ .

Devemos todavia cuidar para que as restrições entrópicas do horizonte aparente não ocorram para densidades de energia tão pequenas “censurem” regiões que *sabemos* ser físicas. Digamos que  $\varrho_S$ , com  $S = \text{GB}, \text{GQT}$ , esteja em uma faixa  $10^{-m} \times \varrho_{\text{Pl}} \lesssim \varrho_S \lesssim \varrho_{\text{Pl}}$ . Isto impõe restrições sobre os possíveis valores de  $\lambda$  e  $\mu$ .

De fato, encarando (4.64) como uma relação entre  $\lambda$  e  $\mu$ , supondo  $\varrho_{\text{GQT}}$  dado (e dentro da faixa desejada), ficamos com um conjunto de retas no espaço do parâmetros  $\mu$ - $\lambda$ , cada reta determinada pelo valor da razão  $\varrho_{\text{Pl}}/\varrho_{\text{GQT}}$ :

$$\lambda = \frac{3}{4} \left( \frac{l_{\text{Pl}}}{L} \right)^2 \frac{\varrho_{\text{Pl}}}{\varrho_{\text{GQT}}} + \frac{\varrho_{\text{GQT}}}{\varrho_{\text{Pl}}} \left( \frac{L}{l_{\text{Pl}}} \right)^2 \mu. \quad (4.67)$$

O conjunto de retas se encontra desenhado na Fig.4.2: A reta vermelha corresponde a  $\varrho_{\text{GQT}} = 10^{-m} \times \varrho_{\text{Pl}}$ , a reta azul a  $\varrho_{\text{GQT}} = \varrho_{\text{Pl}}$ , as linhas pontilhadas correspondem a  $10^{-m} \times \varrho_{\text{Pl}} < \varrho_{\text{GQT}} < \varrho_{\text{Pl}}$ , e as retas pretas contínuas a  $\varrho_{\text{GQT}} > \varrho_{\text{Pl}}$ . Repare que para cada valor de  $\varrho_{\text{GQT}}$  podemos escolher infinitos pares  $(\mu, \lambda)$ , cor-

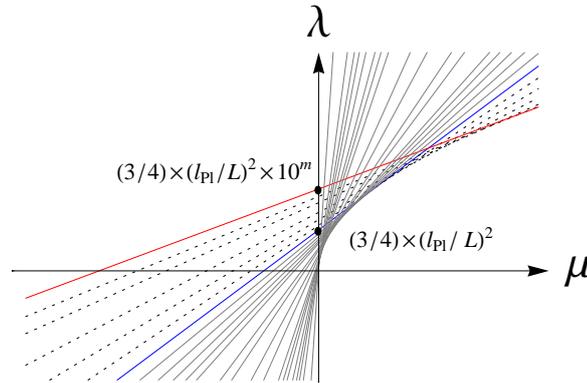


Figura 4.2: Representação geométrica no espaço  $\mu$ - $\lambda$  da Eq.(4.67).

respondendo a uma das retas. O espaço em branco da região em que  $\mu > 0$

<sup>1</sup> Apesar disso, existe um (único) caso em que *não* há restrição alguma — fora, é claro, a gravitação EH —, a saber: Gauss-Bonnet com  $\lambda < 0$ . Se acreditarmos que as restrições de entropia *não são físicas*, isto implica que dos casos aqui considerados apenas este último é razoável. Não vamos adotar este ponto de vista. Ao contrário, vamos levar até onde pudermos as consequências das restrições entrópicas.

corresponde aos pares  $(\mu, \lambda)$  para os quais  $\mu > \lambda^2/3$  e a restrição é dada por (4.65). Neste caso, um dado valor de  $\varrho_{\text{GQT}}$  fixa univocamente o valor de  $\mu$ , e deixa arbitrário o valor de  $\lambda$ .

# Capítulo 5

## Superpotencial e o Universo Inflacionário

### 5.1 Superpotencial em Gravitação Quase-Topológica

O método descrito no §2.4.2 pode ser generalizado para GQT, e se torna em uma ferramenta extremamente útil para a determinação de soluções analíticas das equações de campo.

#### 5.1.1 Sistema de primeira ordem

Seguindo a mesma filosofia do §2.4.2, e supondo a existência do superpotencial, a Eq.(4.24) fornece o sistema de primeira ordem

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{z} W'(\sigma) \left[ 1 - \frac{3\mu L^4}{16} z^4 W^4(\sigma) \right] ; \quad H(\sigma) = -\frac{z}{2} W(\sigma) , \quad (5.1)$$

com a seguinte fórmula para o potencial de matéria:

$$V(\sigma) = -\frac{2}{z^2} [W'(\sigma)]^2 \left[ 1 - \frac{3\mu L^4}{16} z^4 W^4(\sigma) \right]^2 + \frac{3}{2} W^2(\sigma) \left[ 1 - \frac{\mu L^4}{16} z^4 W^4(\sigma) \right] (5.2)$$

Note que as equações acima se reduzem às Eqs.(2.55) e (2.52) no limite  $\mu = 0$ .

#### 5.1.2 Vácuos

Nosso principal interesse no restante desta dissertação será em espaços assintoticamente de Sitter, introduzidos no §4.3.3. Quando assumimos o sistema de primeira ordem, a condição de vácuo  $\dot{\sigma} = 0$  implica que o lado direito da primeira

das Eqs.(5.1) deve ser zero, portanto há duas opções:

$$\text{ou} \quad W'(\sigma) = 0, \quad (5.3)$$

$$\text{ou} \quad C_0(\sigma) = 0, \quad C_0(\sigma) = 1 - \frac{3\mathcal{Z}^4}{16} L^4 \mu W^4(\sigma). \quad (5.4)$$

Vamos denominar os vácuos do tipo (5.3), extremos do superpotencial, de vácuos ‘físicos’, e geralmente usaremos uma letra romana para identificá-los, e.g.  $\sigma_k$ ; os vácuos do tipo (5.4), característicos de GQT, serão ditos ‘topológicos’, e serão denotados por  $\sigma_{\text{top}}$ . Fica claro que vácuos topológicos são possíveis apenas quando  $\mu > 0$ . Caso contrário, são compatíveis com o sistema de primeira ordem apenas os vácuos físicos. Vimos no §4.3.3 que vácuos são extremos do potencial de matéria, uma consequência da primeira das Eqs.(4.23) — idêntica em EH e em GQT, sendo obtida diretamente da Lagrangeana de matéria. Entretanto, se derivarmos a Eq.(5.2), obtemos como resultado, avaliado sobre um vácuo  $\sigma_*$ ,

$$V'(\sigma_*) = -\frac{2}{\mathcal{Z}^2} W'(\sigma) C_0(\sigma) \mathcal{F}(\sigma) \Big|_{\sigma_*};$$

$$\mathcal{F}(\sigma) = 2W''(\sigma)C_0(\sigma) - \frac{3}{2}\mathcal{Z}^2 W(\sigma) - 6\mathcal{Z}^4 L^4 \mu [W'(\sigma)]^2 W^3(\sigma).$$

Portanto as soluções de (5.3) e (5.4) não esgotam, em geral, todos os vácuos do potencial de matéria; restam aqueles para os quais  $\mathcal{F}(\sigma_*) = 0$ . Estes vácuos associados à função  $\mathcal{F}(\sigma)$  não podem ser descritos pelo sistema de primeira ordem, e há argumentos de que eles não são estáveis (cf. [Townsend \(1999\)](#)). A partir daqui, eles serão ignorados, mas antes se faz válido um esclarecimento a respeito de sua existência ou, em outras palavras, do motivo de o sistema de primeira ordem não exaurir todos os vácuos possíveis. Ocorre que, ao assumirmos a existência do superpotencial e passarmos da Eq.(4.24) para a primeira das Eqs.(5.1), há uma equação intermediária:

$$\dot{\sigma}^2 = \frac{2}{\mathcal{Z}} \dot{\sigma} W'(\sigma) \left[ 1 - \frac{3\mu L^4}{16} \mathcal{Z}^4 W^4(\sigma) \right].$$

O sistema de primeira ordem é obtido sob a hipótese de que  $\dot{\sigma} \neq 0$ , o que permite a simplificação da equação acima. Mas quando  $\dot{\sigma} = 0$ , ou seja, em um vácuo, esta equação é válida, *independentemente* da anulação do termos (5.3) ou (5.4), e em particular é válida nos zeros de  $\mathcal{F}(\sigma)$ , que são assim “perdidos” após a simplificação que leva à Eq.(5.1).

### Constantes cosmológicas.

Sabemos que as configurações de vácuo descrevem espaços-tempo de Sitter, em que a função de Hubble é constante. Ela, assim como a constante cosmológica, fica determinada pelo valor do superpotencial:

$$H_* = -\frac{\mathcal{Z}W(\sigma_*)}{2} = \sqrt{\frac{\Lambda_*}{3}}. \quad (5.5)$$

Uma vez que desejamos descrever espaços assintoticamente de Sitter, devemos assumir que  $W(\sigma_*) < 0$ . Mais ainda, no que segue, nosso interesse será em universos que sempre se expandem, e portanto  $H(t) > 0$  não muda nunca de sinal. Neste caso, o superpotencial é uma função sempre *negativa*,  $W(\sigma) < 0$ .

O valor da constante cosmológica em um vácuo físico depende da escolha do superpotencial e de seus parâmetros, isto é: depende da escolha da matéria. Porém o vácuo topológico apresenta uma constante cosmológica — ou, alternativamente, uma escala de Hubble — determinada *somente pelo acoplamento gravitacional*:

$$H_{\text{top}} = 1/L_{\text{top}} = -\frac{\varkappa W_{\text{top}}}{2} = \frac{1}{L(3\mu)^{1/4}} = \sqrt{\frac{\Lambda_{\text{top}}}{3}}. \quad (5.6)$$

### Comportamento assintótico.

O comportamento assintótico do fator de escala à medida que se aproxima de um vácuo<sup>1</sup> é o esperado de um espaço-tempo assintoticamente de Sitter: quando  $H(\sigma) \approx H_* = \text{constante}$ , temos  $A(t) \approx H_* t + A_0$ , e portanto  $a(t) = e^{A(t)} \sim e^{H_* t}$ . Vamos determinar agora o comportamento assintótico de  $W(\sigma)$  e de  $\sigma(t)$ .

Definimos a função

$$\beta(\sigma) = -\frac{4}{\varkappa^2} \frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)} C_0(\sigma) = \frac{d\sigma}{dA}. \quad (5.7)$$

A última igualdade se obtém da razão entre ambas equações do sistema de primeira ordem (5.1). A primeira derivada de  $\beta(\sigma)$ , quando avaliada em um vácuo, será chamada de ‘expoente assintótico’, e denotada por  $y_*$ ,

$$y_* = -\beta'(\sigma)|_{\sigma_*}. \quad (5.8)$$

Fórmulas para o expoente assintótico podem ser facilmente encontradas, e diferem para vácuos físicos  $\sigma_k$  e topológico  $\sigma_{\text{top}}$ :

$$y_k = -\frac{4}{\varkappa^2} \frac{W_k''}{W_k} C_0(\sigma_k), \quad y_{\text{top}} = 3\mu L^4 \varkappa^2 (W'_{\text{top}} W_{\text{top}})^2, \quad (5.9)$$

O motivo das definições acima fica claro. Por construção, os vácuos são determinados pelos zeros de  $\beta(\sigma)$ , que portanto quando expandida em série de Taylor na vizinhança de um deles dá

$$W'(s)C_0(\sigma) \approx -\frac{\varkappa^2}{4} W_* y_*(\sigma - \sigma_*).$$

<sup>1</sup> A partir daqui, sempre estaremos nos referindo a vácuos dos tipos (5.3) ou (5.4), salvo menção explícita em contrário.

---

Substituindo este resultado em (5.1), concluímos que se  $\sigma \approx \sigma_*$ ,

$$\sigma \approx \sigma_* + \text{constante} \times \exp[-y_* H_* t] . \quad (5.10)$$

Isto só é válido quando  $y_* \neq 0$ . Caso contrário, é preciso levar a expansão da função  $\beta(\sigma)$  até ordens mais altas. Por exemplo, se  $\sigma_*$  é um zero de segunda ordem, temos

$$\sigma \approx \sigma_* + \left[ \frac{2}{\varkappa} W_*'' C_{0*}' + \frac{1}{\varkappa} (W_*''' + C_{0*}'') \right] t^{-1} , \quad (5.11)$$

e um procedimento similar pode ser realizado para zeros de ordem  $n$  qualquer, resultando em um comportamento do tipo  $t^{-1/(n-1)}$ .

Por fim, vale notar que os expoentes assintóticos também podem ser usados para descrever de maneira simples a massa do campo escalar em cada vácuo:

$$V''(\sigma_*) = -\frac{\varkappa^2}{4} W_*^2 y_* (y_* - 3) , \quad (5.12)$$

o que pode ser obtido facilmente ao se derivar a Eq.(5.2) e avaliar o resultado sobre  $\sigma_*$ , com  $\beta(\sigma_*) = 0$ .

### 5.1.3 Equação de estado e o superpotencial em GQT

Seguindo um raciocínio análogo ao do §2.4.3, mas utilizando as equações de Friedmann modificadas (4.26), obtemos facilmente a generalização da equação de estado a partir do superpotencial:

$$\varrho = \frac{3}{2} W^2(\sigma) ; \quad p/\varrho = -1 + \frac{8}{3\varkappa^2} \left[ \frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)} \right]^2 C_0(\sigma) , \quad (5.13)$$

que para  $\mu = 0$  se reduz à Eq.(2.57). Mais uma vez, só podemos interpretar  $p/\varrho$  como uma equação de estado barotrópica desde que exista uma função  $g$  tal que  $W'^2 = g(W^2)$ . Neste caso, escrevemos

$$\omega(\varrho) = -1 + \frac{4}{\varkappa^2} \frac{g^2(\varrho)}{\varrho} C_0(\varrho) ; \quad C_0(\varrho) = 1 - \frac{1}{12} \mu L^4 \varkappa^4 \varrho^2 . \quad (5.14)$$

Vale notar que em um vácuo físico ou topológico temos  $\omega = -1$ , o que era de se esperar de universos de Sitter. Repare também que se  $W(\sigma)$  é um polinômio devemos impor que, além de negativo, ele seja não nulo. Caso contrário, no ponto em que  $W = 0$  teríamos  $\omega \rightarrow \infty$ , i.e. a velocidade efetiva do som seria infinita, violando a causalidade. Além disso, a condição de se ter  $C_0(\varrho) > 0$  equivale a  $\varrho + p > 0$ , o que não é mais que a condição fraca de energia sobre o fluido efetivo.

### 5.1.4 Sobre a escolha do superpotencial

De agora em diante, pelos motivos já apresentados no §2.4.2, vamos sempre *escolher* o superpotencial, e a partir dele derivar todas as grandezas relevantes, incluindo o potencial de matéria, a partir da Eq.(5.2).<sup>1</sup> Esta abordagem torna possível a integração do fator de escala e a determinação da dinâmica, e nos proporcionará uma poderosa ferramenta na construção de modelos cosmológicos com propriedades desejáveis.

A escolha de  $W(\sigma)$  pode ser motivada de diferentes maneiras. Poderíamos pensar em potenciais do tipo Coleman-E. Weinberg, em potenciais hiperbólicos inspirados em teorias de cordas, potenciais periódicos vindos de teorias de inflação natural, etc. Todos eles, entretanto, podem ser em algum grau aproximados por uma série de Taylor usando potenciais de um tipo mais simples: polinomiais. Escolhendo um polinômio de ordem suficientemente alta, podemos descrever com bastante detalhe o comportamento qualitativo da maioria das funções. Veremos que ajustando os parâmetros de um superpotencial polinomial, temos um excelente controle sobre propriedades-chave de modelos cosmológicos. Além disso, a integração das equações de campo é simple, e a quantidade e estrutura dos vácuos do superpotencial são facilmente descritas. No que segue, portanto, vamos considerar apenas  $W(\sigma)$  — e junto com ele  $V(\sigma)$  — como sendo um polinômio.

## 5.2 Cadeias de histórias

Por sua própria construção, espaços-tempo que podem ser descritos pelo método do superpotencial têm, a cada instante, as grandezas dinâmicas (fator de escala, função de Hubble, etc.) completamente determinadas pelo valor do campo escalar apenas. Isto sugere a possibilidade de se descrever a evolução destes universos usando o campo escalar como coordenada “temporal”.

Uma tal mundaça de coordenadas será possível se a função  $\sigma(t)$  for invertível, i.e. se existe uma função  $t(\sigma)$ , ambas bem definidas nos intervalos apropriados. A primeira das Eqs.(5.1) garante que entre dois vácuos consecutivos, digamos no intervalo<sup>2</sup>  $(\sigma_k, \sigma_{k+1})$ , a derivada  $d\sigma/dt$  não se anula e tende a zero nas proximidades dos vácuos; logo  $\sigma(t)$  é uma função monótona e pode, sim ser invertida. Pelo mesmo motivo a função inversa,  $t(\sigma)$ , dada pela integral (cf. Eqs.(5.1))

$$t(\sigma) = \frac{\varkappa}{2} \int^{\sigma} \frac{d\sigma}{W'(\sigma)C_0(\sigma)}, \quad \sigma \in (\sigma_k, \sigma_{k+1}), \quad (5.15)$$

<sup>1</sup>Este ponto de vista é de fato adotado em outros lugares na literatura, como por exemplo por Lyth (2000).

<sup>2</sup> Aqui,  $\sigma_k$  pode muito bem ser um vácuo topológico.

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

---

é também uma função monótona, mas cuja derivada diverge nas proximidades dos vácuos. Logo, enquanto o campo escalar percorre um intervalo finito,  $\sigma \in (\sigma_k, \sigma_{k+1})$ , o tempo (cósmico) percorre toda a reta real,  $t \in (-\infty, \infty)$ . Para sermos ilustrativos, as funções  $\sigma(t)$  e  $t(\sigma)$  apresentam um comportamento similar ao das funções  $\arctg(t)$  e  $\arctg(\sigma)$ , respectivamente.

Vemos, assim, que em uma coleção de vácuos  $\{\sigma_k\}$  de um dado superpotencial, incluindo o vácuos topológicos e ordenada de forma que  $\sigma_k < \sigma_{k+1}$ , cada intervalo  $(\sigma_k, \sigma_{k+1})$  descreve toda a história de um universo eterno. Não é difícil concluir que algo similar ocorre nos intervalos do tipo  $\sigma \in (\sigma_*, \pm\infty)$ , típicos de universos singulares; neste caso, o tempo fica mapeado em um intervalo semi-infinito do tipo  $[t_0, \infty)$ , onde  $t_0$  corresponde à singularidade. Vamos dar para este conjunto de intervalos adjacentes o nome de ‘cadeia de histórias’. Cada cadeia será denotada da seguinte forma: para um superpotencial com, digamos, três vácuos  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_{\text{top}}$ , escreveremos  $dS[\Lambda_1, y_1]/dS[\Lambda_2, y_2]/dS[\Lambda_{\text{top}}, y_{\text{top}}]/\text{sing}$ . Aqui, ‘sing’ significa ‘singularidade’.

A especificação dos expoentes assintóticos  $y_*$  é necessária pelo motivo seguinte. Na primeira das Eqs.(5.1) é possível ver que se nos encontramos à esquerda ou a direita de um determinado vácuo, i.e. se  $\sigma \in (\sigma_{k-1}, \sigma_k)$  ou  $\sigma \in (\sigma_k, \sigma_{k+1})$ , o sinal do lado direito da equação muda. Assim,  $t(\sigma)$  é uma função crescente ou decrescente em cada um dos intervalos, e portanto  $\sigma_k$  estará no futuro ou no passado de ambas as histórias consecutivas. O que determina “a natureza futura ou um passada” de um dado vácuo  $\sigma_*$  é o sinal de  $y_*$ . Uma vez que consideramos universos em expansão, para os quais  $H_* > 0$ , a Eq.(5.10) mostra que

$$\text{se } y_* < 0, \sigma \rightarrow \sigma_* \text{ quando } t \rightarrow -\infty, \text{ e} \quad (5.16)$$

$$\text{se } y_* > 0, \sigma \rightarrow \sigma_* \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (5.17)$$

Além disso, sabemos que o fator de escala se comporta exponencialmente nas vizinhanças dos vácuos, mostrando que à medida que  $\sigma$  percorre o intervalo  $(\sigma_k, \sigma_{k+1})$ , com  $y_k < 0$  e  $y_{k+1} > 0$ , o espaço-tempo evolui de uma geometria do tipo de Sitter com raio de curvatura  $1/H_k$  em  $t = -\infty$ , no passado distante, até um outro espaço de Sitter no futuro distante, em  $t \rightarrow \infty$ , com um novo raio de curvatura  $1/H_{k+1}$ .

Apesar de existir, a função inversa de  $\sigma(t)$  não pode ser descrita por meio de funções simples, em geral. Uma vez que o sistema de primeira ordem (5.1) fornece funções cujo argumento é  $\sigma$ , encontrar sua evolução com o tempo cósmico, em geral, não é possível, portanto.<sup>1</sup> Por isso, no restante deste capítulo, vamos sempre usar o campo escalar como coordenada.

---

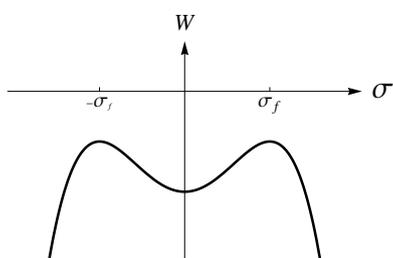
<sup>1</sup> Apesar disso, em alguns casos simples podemos sim determinar todas as grandezas como funções de  $t$ . Um exemplo já foi dado, inclusive, no §2.4.4, para gravitação EH. Um exemplo GQT é dado pelo superpotencial  $W(\sigma) = -B\sigma^2$ .

### 5.2.1 Um exemplo representativo

Para ilustrar os conceitos do parágrafo acima, consideremos um potencial quártico do tipo Higgs,

$$W(\sigma) = -B [(\sigma^2 - \sigma_f^2)^2 + D] ; \quad B, D > 0 . \quad (5.18)$$

Por causa da simetria  $Z_2$ , este é o polinômio de mais fácil integração a apresentar mais de um vácuo físico. Escolhemos os sinais de  $B$  e  $D$  de maneira que o superpotencial seja sempre negativo.



Nos dois vácuos físicos,  $\sigma_p = 0$  e  $\sigma_f$ , o superpotencial assume os valores

$$W_p = -B(\sigma_f^4 + D) \quad \text{e} \quad W_f = -BD ,$$

respectivamente. É evidente que  $|W_p| > |W_f|$ ; mais que isso,  $|W_f|$  é o menor valor possível de  $|W(\sigma)|$ , para qualquer  $\sigma$ .

Figura 5.1: Superpotencial do tipo Higgs.

Substituindo o valor dado na Eq.(5.6) para o superpotencial, temos que os vácuos topológicos ocorrem em

$$\sigma_{\text{top}}^2 = \sigma_f^2 \pm \sqrt{D [(W_{\text{top}}/W_f) - 1]} . \quad (5.19)$$

Para valores negativos de  $\mu$ ,  $W_{\text{top}}$  é imaginário e a expressão acima é complexa, refletindo a ausência de vácuos topológicos. O potencial de matéria está, neste caso, desenhado na Fig.5.2(a), e é qualitativamente o mesmo da gravitação EH. Vemos que os extremos de  $W(\sigma)$  são de fato extremos de  $V(\sigma)$ , mas existem extremos de  $V(\sigma)$  que não são ligados ao superpotencial, como previsto no §5.1.2.

Para  $\mu > 0$  existem vácuos topológicos, sobre os quais o valor do superpotencial é fixo pela Eq.(5.6). Podemos imaginar  $W_{\text{top}}$  como uma linha horizontal na Fig.5.2.1; se  $\mu$  é suficientemente pequeno, esta linha horizontal é suficientemente baixa, e só corta o gráfico de  $W(\sigma)$  em dois pontos, simétricos em relação ao eixo vertical. Aumentando-se o valor de  $\mu$ , a linha sobe e, quando  $|W_f| \leq |W_{\text{top}}| \leq |W_p|$ , ela passa a cortar o gráfico do superpotencial em primeiro três ( $\sigma_p$  se torna um vácuo topológico), depois quatro e por fim dois pontos ( $\pm\sigma_f$  se tornam vácuos topológicos). Aumentando ainda mais o valor de  $\mu$ , temos  $|W_{\text{top}}| < |W_f|$ , e todo o gráfico do superpotencial fica abaixo da linha horizontal. Em cada um destes casos, o número de vezes que a linha horizontal corta  $W(\sigma)$  é a representação geométrica do número de raízes reais em (5.19), e dá portanto o número e a posição dos vácuos topológicos. A descrição geométrica acima está representados nas Figs.5.2(b)-5.2(d), onde substituímos a linha horizontal marcando  $W_{\text{top}}$  pelo gráfico da função  $C_0(\sigma)$ , que se anula em cada vácuo topológico.

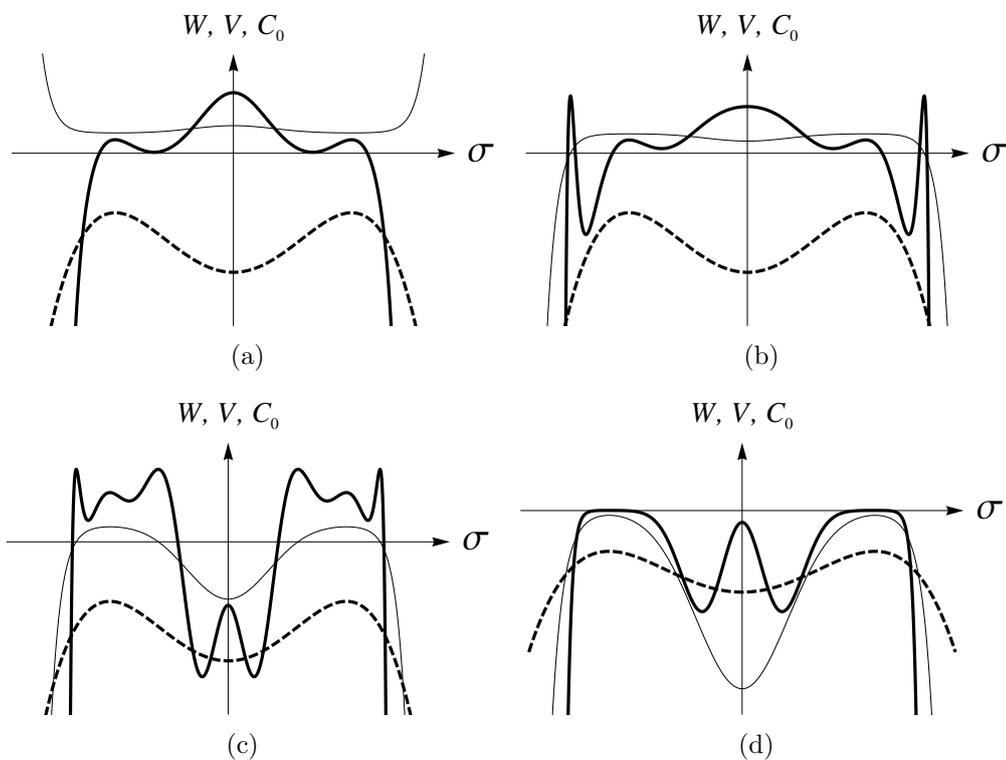


Figura 5.2: Existência de vácuos topológicos. As linhas sólidas contínuas representam  $V(\sigma)$ , as linhas tracejadas representam  $W(\sigma)$ , e as linhas finas representam  $C_0(\sigma)$ . (a)  $\mu < 0$ ; (b)  $\mu < 0$ ,  $|W_f| < |W_p| < |W_{\text{top}}|$ ; (c)  $\mu < 0$ ,  $|W_f| < |W_{\text{top}}| < |W_p|$ ; (d)  $\mu < 0$ ,  $|W_{\text{top}}| < |W_f|$ .

Também representamos o potencial de matéria  $V(\sigma)$ , que ganha ou perde novos extremos à medida que se aumenta ou diminui o número de raízes reais em (5.19).

Em cada um dos casos representados na Fig.5.2.1, temos cadeias distintas de histórias, todas simétricas em relação  $\sigma_p = 0$ . Considerando apenas a parte relativa a  $\sigma \geq 0$ , e escrevendo apenas o sinal dos expoentes críticos, cada figura apresenta a seguinte cadeia de histórias:

- (a)  $dS[\Lambda_p, +] / dS[\Lambda_f, -] / \text{sing.}$
- (b)  $dS[\Lambda_p, +] / dS[\Lambda_f, -] / dS[\Lambda_{\text{top}}, +] / \text{sing.}$
- (c)  $dS[\Lambda_p, -] / dS[\Lambda_{\text{top}}, +] / dS[\Lambda_f, -] / dS[\Lambda_{\text{top}}, +] / \text{sing.}$
- (d)  $dS[\Lambda_p, -] / dS[\Lambda_f, +] / \text{sing.}$

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

---

e os expoentes assintóticos são dados explicitamente por

$$y_p = -\frac{16B\sigma_f^2}{z^2|W_p|} (1 - W_p/W_{\text{top}}) \quad ; \quad y_f = \frac{32B\sigma_f^2}{z^2|W_f|} \sqrt{\frac{6}{\rho_f}} (1 - W_f/W_{\text{top}}) \quad ; \quad (5.20)$$

$$y_{\text{top}} = -\frac{64B^2\sigma_f^4}{z^2} \sigma_{\text{top}}^2 (\sigma_{\text{top}}^2 - \sigma_f^2) . \quad (5.21)$$

### 5.2.2 A integral do fator de escala

A principal vantagem do sistema de primeira ordem (5.1) é fornecer uma fórmula analítica para o fator de escala  $a(\sigma) = e^{A(\sigma)}$ . A partir da Eq.(5.7), temos que  $A(\sigma) = \int \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} + \text{constante}$ , e quando  $W(\sigma)$  é um polinômio, a solução das equações de campo se resume a uma integração de uma função racional. Uma fórmula geral para integrais deste tipo é apresentada no Apêndice G:

$$\exp [A(\sigma) - A_\infty] = \prod_k |\sigma - \sigma_k|^{-1/y_k} \prod_j |\sigma - \sigma_j|^{-1/y_{\text{top}}^{(j)}} , \quad (5.22)$$

onde os expoentes  $y_*$  são dados pelas Eqs.(5.9). Aqui, o índice  $k$  corre sobre as soluções (possivelmente complexas) de  $W'(\sigma_k) = 0$ , enquanto  $j$  corre sobre todas as soluções (possivelmente complexas) de  $C_0(\sigma_{\text{top}}^{(j)}) = 0$ . Quando um dos  $\sigma_*$  é complexo, o expoente  $y_*$  correspondente também o é, de forma que a função acima é sempre real. Para o superpotencial do tipo Higgs do §5.2.1, por exemplo,

$$e^{A(\sigma)} = e^{A_\infty} |\sigma^2 - \sigma_p^2|^{-1/2y_p} |\sigma^2 - \sigma_f^2|^{-1/y_f} |\sigma^2 - \sigma_c^2|^{-1/y_c} \prod_j |\sigma^2 - \sigma_{\text{top},j}^2|^{-1/y_{\text{top}}^{(j)}} ,$$

com o índice  $j$  indicando *todas* as raízes dadas pela Eq.(5.19), reais e complexas, e com os expoentes assintóticos dados nas Eqs.(5.20), (5.21).

Quando um dos  $y_*$  se anula, a fórmula geral para o fator de escala muda, sendo dada por

$$\exp [A(\sigma) - A_\infty] = \exp \left[ \frac{-2}{\chi_*(\sigma - \sigma_*)} \right] \sigma^{\zeta_*} \prod_k |\sigma - \sigma_k|^{-1/y_k} \prod_j |\sigma - \sigma_j|^{-1/y_{\text{top}}^{(j)}} , \quad (5.23)$$

onde  $\chi(\sigma) \equiv \beta''(\sigma)$  e  $\zeta_* = \frac{2}{\chi_*} \sum_l \frac{1}{(\sigma_* - \sigma_l)}$ , o somatório percorrendo todos os zeros  $\sigma_l \neq \sigma_*$  de  $\beta(\sigma)$ .

Notemos que apesar de estas fórmulas serem bastante gerais, na prática a determinação dos valores de  $\sigma_k$  é muito complicada quando  $W(\sigma)$  é um polinômio de alta ordem — por exemplo, tratando-se de um polinômio de ordem maior que seis (cuja derivada é um polinômio de ordem cinco), as raízes só podem ser encontradas numericamente.

A fórmula (5.22) deixa explícito o fato de que uma cadeia de histórias é um objeto unificado, isto é: *não se pode alterar as características de uma história sem*

*mudar a evolução de todas as outras, pois o fator de escala de todas elas é dado pela mesma fórmula, em termos do campo escalar. Este fato será de particular importância no §5.3.*

## 5.3 Inflação a partir do superpotencial

Uma das aplicações mais interessantes do método do superpotencial será a sua utilização na construção de universo inflacionários.

### 5.3.1 Os parâmetros de arrasto

Vimos no §2.5.3 que a inflação ocorre sob certas condições conhecidas como ‘condições de arrasto’. Podemos formular estas condições em termos do superpotencial definindo os ‘parâmetros de arrasto’<sup>1</sup>

$$\varepsilon_{\text{SR}} \equiv \frac{16}{\varkappa^2} \left[ \frac{W' C_0}{W} \right]^2 \quad ; \quad \eta_{\text{SR}} \equiv -\frac{2\ddot{\sigma}}{\varkappa W \dot{\sigma}}, \quad (5.24)$$

e impondo que

$$\varepsilon_{\text{SR}} \ll 1 \quad ; \quad |\eta_{\text{SR}}| \ll 1. \quad (5.25)$$

A segunda destas desigualdades é simplesmente a mesma condição (2.76), reescrita em termos do superpotencial. Por sua vez, a primeira desigualdade equivale à condição (2.77), pois usando as equações de movimento vemos que

$$\left( \frac{\varkappa V'}{3H^2} \right)^2 = \left( \frac{\varkappa(\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma})}{3H^2} \right)^2 \approx \left( \frac{\varkappa \dot{\sigma}}{H} \right)^2 = \left( \frac{4}{\varkappa} \frac{H'}{H} C_0 \right)^2 = \varepsilon_{\text{SR}}.$$

Há uma interpretação direta das condições de arrasto (5.25) em termos da função  $\beta(\sigma)$  definida pela Eq.(5.7); é fácil ver que

$$\varepsilon_{\text{SR}}(\sigma) = \varkappa^2 \beta^2(\sigma), \quad \eta_{\text{SR}}(\sigma) = -\frac{d\beta}{d\sigma}. \quad (5.26)$$

A primeira igualdade é de fato evidente, e a segunda vale pois

$$\eta_{\text{SR}}(\sigma) = \frac{d \log \dot{\sigma}}{d \log a} = \frac{1}{\dot{\sigma}} \frac{d^2 \sigma}{dt dA} = -\frac{\dot{\beta}}{\dot{\sigma}} = -\frac{d\beta}{d\sigma}.$$

Ficam evidentes, das Eqs.(5.26), alguns casos específicos em que as condições de arrasto são satisfeitas de forma trivial. Um exemplo é a singularidade que

<sup>1</sup> Na gravitação EH, quando  $C_0 = 1$ , esta definição é idêntica à apresentada por [Liddle \(1994\)](#).

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

---

ocorre no limite  $\sigma \rightarrow \infty$  para um superpotencial polinomial em gravitação EH. Sendo, então, tanto  $\beta(\sigma)$  quanto sua derivada razões de polinômios em que o denominador possui o maior grau, o limite em questão implica  $\varepsilon_{\text{SR}}, \eta_{\text{SR}} \rightarrow 0$ .

Considere agora um vácuo  $\sigma_*$  qualquer. Temos  $\varepsilon_{\text{SR}}(\sigma_*) = \beta^2(\sigma_*) = 0$ , e portanto a primeira desigualdade (5.25) é evidentemente satisfeita. Se o vácuo for degenerado, i.e. se possuir expoente assintótico nulo, a segunda desigualdade é também satisfeita de forma trivial, pois a Eq.(5.26) dá  $\eta_{\text{SR}}(\sigma_*) = y_* = 0$ . Portanto, *nas vizinhanças de vácuos degenerados o universo entra em uma fase inflacionária.*

Em ambos os exemplos, o período de arrasto fica restrito ao início (ou ao final) das histórias, em escalas de energia ou divergentes ou determinadas por um dos vácuos. No que segue, apresentaremos um método que permite “construir” períodos inflacionários em escalas de energia arbitrária.

### 5.3.2 Construção de períodos inflacionários

Neste parágrafo, vamos considerar apenas a gravitação EH. As contribuições de GQT serão analisadas nos exemplos desenvolvidos na seção seguinte.

De forma geral, as Eqs.(5.26) e (5.25) garantem que um período de arrasto ocorre quando ambas as desigualdes

$$\beta^2(\sigma) \ll 1 \quad ; \quad |\beta'(\sigma)| \ll 1 \quad (5.27)$$

são satisfeitas. A segunda desigualdade é válida sempre em um ponto  $\sigma_{\text{SR}}$  na vizinhança de um extremo de  $\beta(\sigma)$ . Uma vez que

$$\beta'(\sigma) = -\frac{4}{z^2} \frac{1}{W^2(\sigma)} [W(\sigma) W'''(\sigma) - W'^2(\sigma)] \quad , \quad (5.28)$$

a identificação destes extremos é possível somente através de métodos numéricos, em geral: por exemplo, se  $W(\sigma)$  é um polinômio quártico, a equação  $\beta'(\sigma) = 0$  equivale a uma equação polinomial do sexto grau para  $\sigma$ .

Considere, entretanto, um ponto  $\sigma_{\text{SR}}$  tal que  $W''(\sigma_{\text{SR}}) = 0$ . A Eq.(5.28) nos mostra que então que

$$|\eta_{\text{SR}}| = \frac{1}{4} \varepsilon_{\text{SR}} \quad , \quad (5.29)$$

e portanto ambas as condições (5.27) são satisfeitas simultaneamente se o superpotencial for suficientemente plano:

$$W'''(\sigma_{\text{SR}}) \equiv 0 \quad , \quad \left( \frac{4}{z} W'(\sigma_{\text{SR}})/W(\sigma_{\text{SR}}) \right)^2 \ll 1 \quad . \quad (5.30)$$

Um vácuo degenerado corresponde ao caso especial em que  $W'(\sigma_{\text{SR}}) = 0$ .

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

---

Um polinômio de grau  $n + 1 \geq 3$  com as características (5.30) não possui o termo quadrático, e pode ser escrito, em geral, como

$$W(\sigma) = W_{\text{SR}} + \alpha_0(\sigma - \sigma_{\text{SR}}) + \sum_{k=3}^{n+1} \alpha_k (\sigma - \sigma_{\text{SR}})^k. \quad (5.31)$$

Variando o parâmetro  $\alpha_0 = |W'(\sigma_{\text{SR}})|$  podemos obter uma “transição de histórias”, criando um período de arrasto da maneira que descreveremos a seguir, e que se encontra representada na Fig.5.3 para os casos em que  $W(\sigma)$  é um polinômio (a) cúbico, (b) quártico e (c) quántico.

As  $n$  raízes da equação  $W'(\sigma) = 0$  dão o conjunto dos vácuos físicos,  $\{\sigma_i\}$ , e uma história de universo se passa inteira entre duas raízes consecutivas. Se  $\sigma_{\text{SR}}$  é um mínimo de  $W'(\sigma)$ , então para  $\alpha_0 < 0$  existem duas raízes de  $W'(\sigma)$ ,  $\sigma_i, \sigma_{i+1}$ , que definem uma história, e tais que  $\sigma_{\text{SR}} \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$  (Figs.5.3, linhas pontilhadas). Se  $\alpha_0 = 0$ , estas raízes se degeneram, fazendo com que  $\sigma_{\text{SR}}$  se torne um ponto de inflexão de  $W'(\sigma)$ , i.e.  $W'(\sigma_{\text{SR}})|_{\alpha_0=0} = W''(\sigma_{\text{SR}}) = 0$ , o que caracteriza um vácuo degenerado onde as condições de arrasto, como discutido acima, são trivialmente satisfeitas (Figs.5.3, linhas contínuas). Mas assim que  $0 < \alpha_0 \ll 1$ , o ponto  $\sigma_{\text{SR}}$  *deixa* de ser uma inflexão, pois apesar de valer ainda  $W''(\sigma_{\text{SR}}) = 0$ , agora  $W'(\sigma_{\text{SR}}) = \alpha_0 \neq 0$ ; assim,  $\sigma_{\text{SR}}$  *não é mais um vácuo*, mas os parâmetros de  $W(\sigma_{\text{SR}})$  estão ajustados para que a curva tenha ainda o formato aproximado de uma inflexão : foi construída uma região de arrasto em torno de  $\sigma_{\text{SR}}$  (Figs.5.3, linhas tracejadas). Quando  $\sigma_{\text{SR}}$  é um máximo de  $W'(\sigma)$ , a construção é idêntica, bastando trocar o sinal de  $\alpha_0$ .

No processo de se diminuir o módulo de  $\alpha_0 < 0$ , a história  $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$  tem a sua duração (em  $\sigma$ ) encurtada<sup>1</sup> gradualmente até se degenerar em um único ponto,  $\sigma_{\text{SR}}$ , quando  $\alpha_0 = 0$ , e o que antes era uma história inteira se torna um único vácuo degenerado. À medida que o comprimento do intervalo  $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$  diminui, as condições de arrasto passam a ser satisfeitas ao longo de toda a história, que possui  $W(\sigma_i) \approx W(\sigma_{i+1})$ . O resultado é um universo com geometria sempre aproximadamente de Sitter que apresenta, no passado e no futuro distantes, raios de curvatura muito próximos. Por fim, quando  $\alpha_0 > 0$ , a cadeia de histórias sofre outra mudança radical: o vácuo que se formara no ponto  $\sigma_{\text{SR}}$  desaparece, e as duas histórias que o tinham como limite assintótico se fundem em uma só, que apresenta ali o período de arrasto.

A natureza do universo que em que se forma o período de arrasto depende da posição, dentro da cadeia, da história que se degenera. Por exemplo, o polinômio quártico tem a princípio três vácuos físicos (Figs.5.3(b), linha pontilhada), digamos  $\sigma_{1,2,3}$ , e apresenta uma cadeia de histórias do tipo

$$\text{Sing.} / \text{dS}[\Lambda_1, y_1] / \text{dS}[\Lambda_2, y_2] / \text{dS}[\Lambda_3, y_3] / \text{Sing.}$$

---

<sup>1</sup> Repare que, por menor que seja a duração “conforme”, em  $\sigma$ , de uma história, como função do tempo cósmico  $t$  ela é sempre infinita.

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

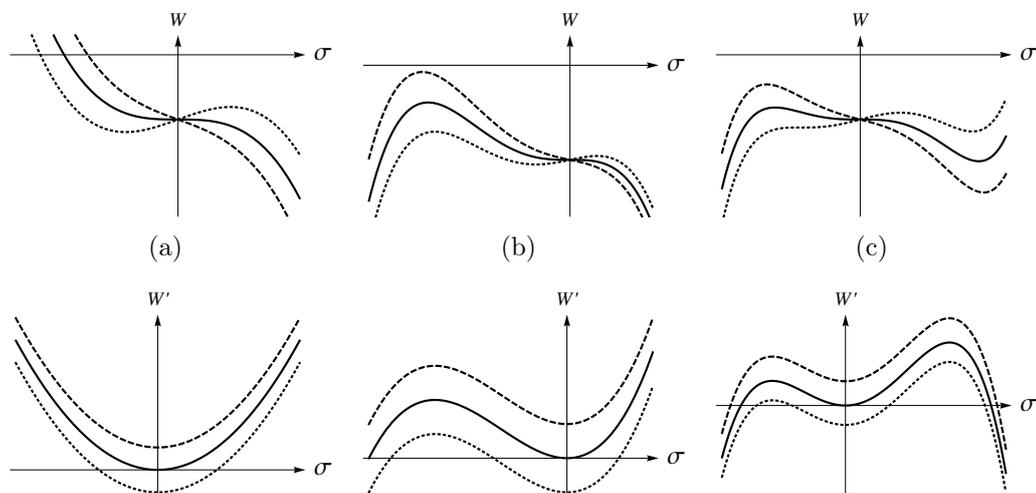


Figura 5.3: Transição de histórias para  $W(\sigma)$  (a) cúbico, (b) quártico e (c) quántico. Na primeira linha, gráficos de  $W(\sigma)$ , com suas respectivas derivadas,  $W'(\sigma)$ , abaixo.

Quando  $\alpha_0 = 0$ , as duas raízes  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  se tornam um vácuo degenerado:  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{\text{SR}}$ , e a cadeia se torna

$$\text{Sing.} / \text{dS}[\Lambda_1, y_1] / \text{dS}[\Lambda_{\text{SR}}, 0] / \text{Sing.}$$

Após a degeneração, quando  $\alpha_0 > 0$ , resta apenas a raíz  $\sigma_1$ , e a cadeia de histórias tem a forma

$$\text{Sing.} / \text{dS}[\Lambda_1, y_1] // \text{Sing.} \quad (5.32)$$

com  $//$  representando o período de arrasto na história à direita (Figs.5.3(b), linha tracejada). Neste caso, a degeneração pode ser interpretada como o processo de se mudar o sinal do discriminante da equação cúbica  $W'(\sigma) = 0$ , fazendo com que de três raízes reais distintas, passe a haver uma só. O polinômio quántico, por sua vez, tem a princípio quatro extremos (Figs.5.3(c), linha pontilhada), raízes da equação quártica  $W'_5(\sigma) = 0$ , que podemos escrever como  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4$ . A mudança de  $\alpha_0$  degenera  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , e em seguida as torna complexas, formando o arrasto entre os dois vácuos dS em  $\sigma_1$  e  $\sigma_4$ . Assim, restam uma história  $\text{Sing.} / \text{dS}[\Lambda_1, y_1]$ , outra história  $\text{dS}[\Lambda_1, y_1] / \text{dS}[\Lambda_4, y_4]$  com arrasto, e uma última,  $\text{dS}[\Lambda_4, y_4] / \text{Sing.}$ , sem arrasto (Figs.5.3(c), linha tracejada). Para o polinômio cúbico, após a degeneração, não resta vácuo algum e  $W(\sigma)$  muda de sinal, por isso não vamos mais discuti-lo. Repare que com um polinômio quádrático, que possui apenas um extremo, o método não pode ser utilizado.

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

---

Por fim, chamamos atenção para o fato de os polinômios desenhados na parte superior da Fig.5.3 já possuírem um formato específico: todos têm o maior número possível de extremos, o que já põe algumas restrições sobre seus coeficientes. Estes formatos não são por acaso: se houvesse menos extremos, por exemplo, no polinômio quártico, seria impossível formar o arrasto entre dois vácuos de Sitter, e se houvesse um extremo a menos no polinômio quártico seria impossível formar qualquer tipo de arrasto que fosse.

### Significado físico dos coeficientes do superpotencial.

Alguns coeficientes do polinômio geral (5.31) são diretamente ligados a características fundamentais do período de arrasto.

(i) *A constante de Hubble.* Ao longo do período inflacionário, o universo se expande exponencialmente e a função de Hubble permanece quase constante e igual a  $H_{\text{SR}} = -\frac{z}{2}W(\sigma_{\text{SR}}) = \frac{z}{2}|W_{\text{SR}}|$ . Logo,

$$W_{\text{SR}} = -\frac{2}{z}H_{\text{SR}}. \quad (5.33)$$

(ii) *Os parâmetros de arrasto.* O coeficiente do termo linear,  $\alpha_0$ , é diretamente proporcional aos parâmetros de arrasto que, por sua vez, são também proporcionais entre si, por construção — cf. Eq.(5.29). Temos

$$\varepsilon_{\text{SR}}(\sigma_{\text{SR}}) = \frac{16}{z^2} \left( \frac{W'(\sigma_{\text{SR}})}{W(\sigma_{\text{SR}})} \right)^2 = 4\alpha_0^2/H_{\text{SR}}^2,$$

e portanto

$$\alpha_0^2 = \frac{1}{4}H_{\text{SR}}^2 \varepsilon_{\text{SR}} = H_{\text{SR}}^2 |\eta_{\text{SR}}|. \quad (5.34)$$

(iii) *A duração do período de arrasto.* Vimos no §2.5.3 que as condições de arrasto devem ser satisfeitas em um intervalo cujo comprimento seja suficiente para fornecer o número de desdobramentos exponenciais necessário, ver Eq.(2.79). Nossa construção é tal que a aproximação de arrasto é válida em  $\sigma_{\text{SR}}$  e, por continuidade, em um intervalo ao seu redor. O tamanho deste intervalo pode ser ajustado pelo coeficiente do termo cúbico de (5.31),  $\alpha_3$ , como segue.

Sabemos que as condições de arrasto ficam determinadas pela função  $\beta(\sigma)$  e sua derivada primeira que devem ser ambas, em módulo, muito pequenas. Vamos considerar que quando termina o período de arrasto, seja necessário expandir  $\beta(\sigma)$  até terceira ordem:

$$\beta(\sigma) = \frac{1}{z}\sqrt{\varepsilon_{\text{SR}}} - \eta_{\text{SR}}(\sigma - \sigma_{\text{SR}}) + \frac{1}{6}\beta''(\sigma_{\text{SR}})(\sigma - \sigma_{\text{SR}})^2 + \dots$$

Definindo

$$\chi_{\text{SR}} \equiv \frac{1}{6z}\beta''(\sigma_{\text{SR}}), \quad (5.35)$$

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

temos

$$\beta^2(\sigma) \approx \frac{1}{\varkappa^2} \varepsilon_{\text{SR}} - \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\varepsilon_{\text{SR}}} \eta_{\text{SR}} (\sigma - \sigma_{\text{SR}}) + (\eta_{\text{SR}}^2 + \chi_{\text{SR}} \sqrt{\varepsilon_{\text{SR}}}) (\sigma - \sigma_{\text{SR}})^2 .$$

Se ao fim do período de arrasto tivermos  $\beta^2(\sigma_I) \sim 10^{-n}$ , com  $n$  tal que, digamos,  $\beta^2(\sigma_I)$  seja uma ordem de grandeza maior que  $\beta^2(\sigma_{\text{SR}})$ , então podemos estimar o comprimento do intervalo no qual as condições de arrasto são satisfeitas em  $\Delta\sigma = |2(\sigma_I - \sigma_{\text{SR}})|$ , com

$$\Delta\sigma \approx \frac{|\eta_{\text{SR}}|}{\varkappa\chi_{\text{SR}}} \left[ 1 - \sqrt{1 + 4 \times 10^{-n} \times (1 - 16\chi_{\text{SR}} \varepsilon_{\text{SR}}^{-3/2})} \right] . \quad (5.36)$$

e portanto quanto menor o valor de  $\chi_{\text{SR}}$ , maior a duração do período de arrasto. Uma outra maneira de ver as propriedades do parâmetro  $\chi_{\text{SR}}$  é notando que ele é, aproximadamente, a (raíz quadrada da) curvatura (de Serret-Frenet) da curva  $\beta(\sigma)$ , dada por  $(\beta''(\sigma))^2 / (1 + (\beta'(\sigma))^2)^3$ . Assim, quanto menor o valor de  $\chi_{\text{SR}}$ , mais “aberta” a curva  $\beta^2(\sigma)$ . Ver Fig.5.4.

Um cálculo direto dá

$$\alpha_3 = \varkappa^2 H_{\text{SR}} \left( 3\chi_{\text{SR}} + \frac{1}{16} \varepsilon_{\text{SR}}^{3/2} \right) , \quad (5.37)$$

logo quanto menor  $\alpha_3$ , maior a duração do arrasto.

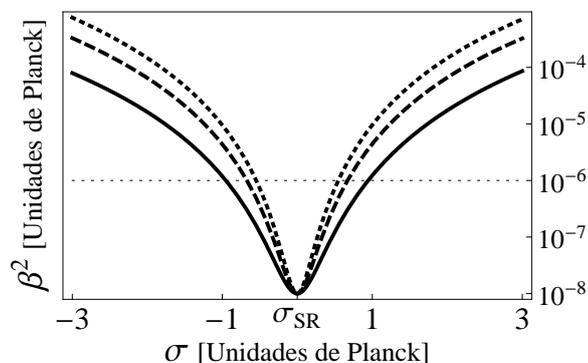


Figura 5.4: Exemplo do efeito de se aumentar o valor do coeficiente cúbico do superpotencial: Linha cheia,  $\alpha_3$  ; Linha tracejada,  $2\alpha_3$  ; Linha pontilhada,  $3\alpha_3$ .

### Superpotenciais de graus quatro e cinco.

Vimos mais acima que polinômios de graus dois e três não são apropriados para a construção do período de arrasto. É necessário um polinômio de grau quatro ou maior. No que segue nos interessaremos em descrever o conteúdo material do universo como um fluido barotrópico, usando a correspondência descritas nos

§§2.4.1 e 5.1.3. Neste caso, deve ser possível que se escreva  $W'(\sigma)$  como função de  $W(\sigma)$ . Para um polinômio de grau até cinco, é possível encontrar uma solução analítica de  $\sigma$  em termos de  $W$ , o que garante a existência da função  $W'(W)$  — por mais complicada que seja. Porém se  $W(\sigma)$  é um polinômio de grau seis ou maior, não podemos mais assegurar a validade da representação do campo escalar como um fluido barotrópico. Felizmente, os polinômios quártico e quántico são suficientes para que possamos utilizar os métodos até aqui desenvolvidos na elaboração de dois modelos cosmológicos representativos.

### 5.4 Dois modelos cosmológicos inflacionários

Desejamos obter uma descrição razoável do universo observado através da equação de estado (5.13). Mais especificamente, queremos descrever um universo que sofre uma inflação e após o período de arrasto apresenta um período de desaceleração, precedendo a fase final, assintoticamente de Sitter. O período inflacionário deve ser longo o suficiente para que o número de desdobramentos exponenciais seja muito maior que a unidade.

O modelo de concordância revela um universo que evolui de um estado muito quente um tempo finito no passado. Usualmente, este cenário é reproduzido em modelos cosmológicos que possuem uma singularidade. Um exemplo de modelo desta natureza será apresentado no §5.4.1, onde utilizaremos um superpotencial quártico. No §5.4.2 apresentaremos uma abordagem alternativa, em que um universo eterno possui uma configuração do tipo de Sitter altamente energética, e demora um tempo infinito para chegar às escalas de energia típicas do big-bang.

#### 5.4.1 Universo singular a partir de um polinômio quártico

Na análise feita no §5.3.2, vimos que é possível degenerar uma cadeia de histórias de um superpotencial quártico e obter uma cadeia do tipo (5.32), em que a história da direita começa em uma singularidade e termina em um espaço de Sitter, passando por um período de arrasto. Parte das características desejadas para a equação de estado ficam então dadas automaticamente. No restante desta seção analisaremos com cuidado as características restantes.

Consideremos o superpotencial quártico

$$W(\sigma) = W_{\text{SR}} + \alpha_0 (\sigma - \sigma_{\text{SR}}) + \alpha_3 (\sigma - \sigma_{\text{SR}})^3 + \alpha_4 (\sigma - \sigma_{\text{SR}})^4. \quad (5.38)$$

Não deve haver termo quadrático para que  $W''(\sigma_{\text{SR}}) = 0$ . Os vácuos físicos são as raízes de uma equação cúbica; denotemos cada um por  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ . Quando  $\alpha_0 = 0$ , duas destas raízes se degeneram. Quais duas depende do sinal de  $\alpha_3$ : se  $\alpha_3 > 0$ , o ponto  $\sigma_{\text{SR}}$  é um mínimo de  $W'(\sigma_{\text{SR}})$ , e temos uma configuração como

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

a da Fig.5.3(b), em que as raízes que se degeneram são  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_3$ . Para  $\alpha_3 < 0$ , a situação é oposta: a função  $W'(\sigma)$  possui um máximo em  $\sigma_{\text{SR}}$ , e as raízes que se degeneram são  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ . Vamos escolher  $\alpha_3 > 0$ , e denotar o vácuo restante,  $\sigma_1$ , por  $\sigma_f$ .

### O período de arrasto.

O período inflacionário ocorre em escalas de energia com ordens de grandeza entre  $\varrho_{\text{Pl}}$  e  $10^{-12} \times \varrho_{\text{Pl}}$  (Linde (1990, 2008)). Vamos supor o valor do superpotencial durante a inflação como sendo  $W_{\text{SR}} \sim -10^{-6}$ , de forma que a energia seja dada por  $V_{\text{SR}} \sim W_{\text{SR}}^2 \sim 10^{-12}$ . Na Fig.5.5, damos um exemplo de  $W(\sigma)$ , com o potencial de matéria correspondente, que satisfazem as condições de arrasto. A parametrização é dada por

$$\begin{aligned} W_{\text{SR}} &= -10^{-6} \quad , \quad \alpha_0 = -2.6363 \times 10^{-9} \quad , \\ \alpha_3 &= -2.9293 \times 10^{-12} \quad , \quad \alpha_4 = -2.1970 \times 10^{-14} \quad , \end{aligned}$$

e os parâmetros de arrasto ficam determinados pelas Eqs.(5.34), com  $\varepsilon_{\text{SR}} \approx 2.78 \times 10^{-5}$ . A duração do período de arrasto, estimada pela Eq.(5.36), dá  $\varkappa \Delta\sigma \sim 10$ , e a Eq.(2.79) então garante que o número de desdobramentos exponenciais  $\mathcal{N} \ll 10$  é suficiente para resolver os problemas do modelo cosmológico padrão. Ver Fig.5.6(b).

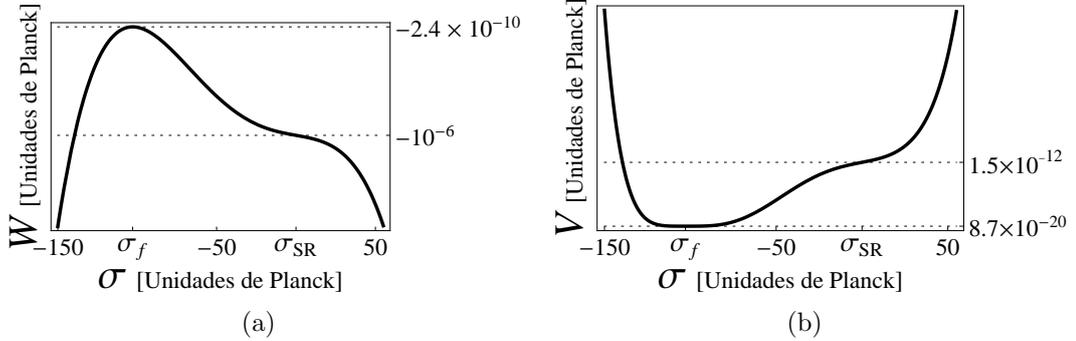


Figura 5.5: (a) Superpotencial quártico e (b) potencial de matéria para um universo com período inflacionário ao redor de  $\sigma_{\text{SR}} = 0$ .

### A equação de estado.

A parametrização da Fig.5.5 foi ajustada de forma que a equação de estado correspondente, obtida da Eq.(5.13), possua as características desejadas. Como se pode ver na Fig.5.6(a), ela apresenta um período de desaceleração após o arrasto, no qual temos  $-1/3 < \omega \leq 1/3$ , simulando uma fase dominada por radiação.

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

Antes do vácuo final em  $\sigma_f \approx -102.84$ , a equação de estado cai bruscamente até  $\omega = -1$ , valor característico de um espaço de Sitter. Para  $\sigma < \sigma_f$ , o gráfico descreve a equação de estado da história adjacente, que não possui período inflacionário.

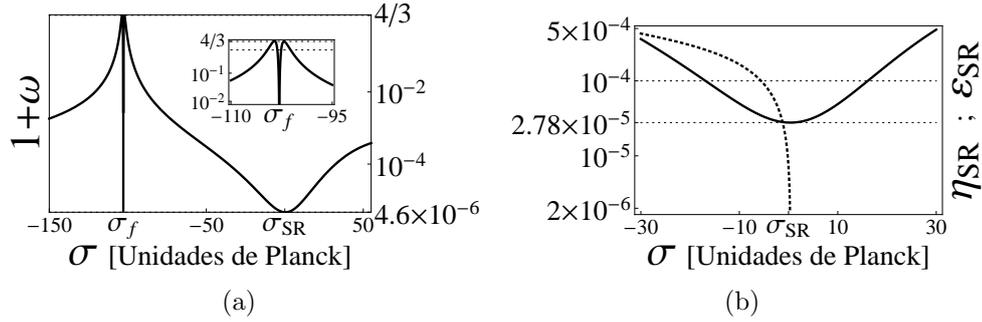


Figura 5.6: (a) Equação de estado para um universo dado pelos parâmetros da Fig.5.5 ; Detalhe: Proximidades do vácuo final. A região entre as retas horizontais (Reta tracejada,  $\omega = -1/3$  ; Reta pontilhada,  $\omega = 1/3$ ) indica o período de desaceleração. (b) Parâmetros de arrasto:  $\epsilon_{SR}$ , linha sólida ;  $\eta_{SR}$ , linha pontilhada.

### A constante cosmológica.

A constante cosmológica  $\Lambda_f = \varkappa^2 V_f/2$  observada hoje possui um valor curiosamente pequeno,  $\Lambda_f \sim 10^{-122}$  em unidades de Planck. O potencial de matéria representado na Fig.5.5 se encontra, portanto, mais de cem ordens de grandeza acima do valor observado. Cabe então a pergunta: será possível ajustar os parâmetros do superpotencial de forma a escolher o valor a constante cosmológica final?

Na ausência do termo quadrático, existem quatro parâmetros livres em (5.38), estando três diretamente ligados à fase de arrasto, como descrito no §5.3.2. Podemos (e de fato o fizemos) usar o quarto parâmetro para modelar o período de aceleração do universo, determinando o máximo da equação de estado em um valor  $-1/3 < \omega < 1$ . Não nos restam então parâmetros ajustáveis para fixar o valor de  $\Lambda_f$ . Não podemos excluir a possibilidade de que alguma combinação precisa dos coeficientes do superpotencial proporcionem tanto a fase desacelerada quanto a constante cosmológica próxima do observado, mas não possuímos um método sistemático para encontrá-la. O problema da constante cosmológica final será abordado sob um outro ponto de vista no Capítulo 6; por enquanto vamos ignorar nosso erro de cem ordens de grandeza.

### A passagem do tempo.

Como discutido no §5.2, não é possível determinar as grandezas acima explicitamente em função do tempo cósmico. Entretanto é possível determinar a duração, em anos ou giga-anos, do período de desaceleração, ou do período de arrasto, por meio da integral (5.15). O resultado para os universos representados nas Figs.5.5 e 5.6 é muito aquém do observado: entre o período de arrasto e o período de desaceleração decorre um intervalo de tempo de, aproximadamente,  $10^{10} \times t_{\text{PI}} \sim 10^{-33}$  seg. Ambos os períodos de arrasto e de desaceleração possuem uma duração aproximada de  $10^9 \times t_{\text{PI}} \sim 10^{-34}$  seg. Evidentemente, estes valores estão muito longe daqueles esperados em universo de quase 14 giga-anos de idade. É, todavia, oportuno ressaltar que a duração do período de desaceleração pode ser aumentada com a escolha de outros valores para os coeficientes do superpotencial. Isto é possível caso se tenha  $|W'(\sigma)| \ll 1$  em um intervalo suficientemente grande ao redor do vácuo final, como se pode ver da integral (5.15). Esta é a mesma condição, note-se, necessária para diminuirmos o valor de  $|W(\sigma_f)|$ , o que equivale a diminuir o valor da constante cosmológica final.

### 5.4.2 Universo não singular a partir de um polinômio quártico

Modelos de universos não singulares aparecem com alguma frequência na literatura (e.g. Starobinsky (1980), Brandenberger (1992)). Uma das características mais peculiares de superpotenciais polinomiais é que, em geral, eles formam cadeias de histórias contendo diversos universos desse tipo. Como foi dito mais acima, o modelo de concordância sugere que o *nosso* universo passou por uma fase muito densa no passado, seguida de um período inflacionário que “apagou” as condições iniciais do seu “surgimento”. Nada impede, entretanto, que antes da inflação tenha se passado um tempo infinito em que a energia do universo fosse da ordem da energia de Planck.

Vamos descrever um universo com estas características utilizando o superpotencial quártico

$$W(\sigma) = W_{\text{SR}} + \alpha_0 (\sigma - \sigma_{\text{SR}}) + \alpha_3 (\sigma - \sigma_{\text{SR}})^3 + \alpha_4 (\sigma - \sigma_{\text{SR}})^4 + \alpha_5 (\sigma - \sigma_{\text{SR}})^5 , \quad (5.39)$$

em conjunto com o método desenvolvido no §5.3.2.

#### Um exemplo explícito.

Um exemplo de aprametrização que fornece as características desejadas é

$$\begin{aligned} W_{\text{SR}} &= -10^{-6} , \quad \alpha_0 = 1.90054 \times 10^{-9} , \\ \alpha_3 &= 3.80108 \times 10^{-16} , \quad \alpha_4 = -1.90054 \times 10^{-18} , \quad \alpha_5 = -3.80108 \times 10^{-23} . \end{aligned}$$

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

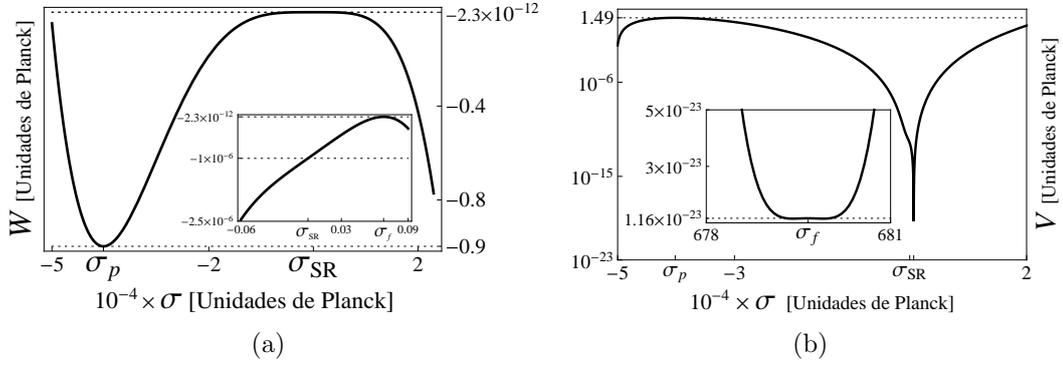


Figura 5.7: (a) Superpotencial quântico; (b) Potencial de matéria correspondente; Detalhes: Proximidades do vácuo final  $\sigma_f \approx 6.797 \times 10^2$ .

O superpotencial e o potencial de matéria correspondente se encontram na Fig. 5.7.

O vácuo físico inicial, no passado remoto da história do universo, está situado em  $\sigma_p \approx -4 \times 10^4$ , e o vácuo final, no futuro remoto da história do universo, em  $\sigma_f \approx 6.797 \times 10^2$ . O valor inicial do potencial de matéria é  $V(\sigma_p) \sim 1$ , e o universo surge em  $t \rightarrow -\infty$  como um espaço-tempo de Sitter com raio de curvatura da ordem do comprimento de Planck. Após um tempo infinito, quando  $\sigma \rightarrow \sigma_{SR}$ , a energia cai para  $\sim 10^{-12}$ . Em  $\sigma \approx 677.9$ , tem início um período de desaceleração, durante o qual a equação de estado alcança o valor máximo  $\omega = 1/3$  característico de um universo dominado por radiação, para depois voltar a decrescer até  $\omega = -1$  em  $\sigma_f$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . A evolução da equação de estado se encontra na Fig. 5.8.

Observe que apesar da grande diferença de energia entre  $\sigma_p$  e  $\sigma_{SR}$ , a transição ocorre de forma suave em  $V(\sigma)$ , e as condições de arrasto são de fato satisfeitas desde o vácuo inicial até pouco antes da época de aceleração, quando a condição  $\varepsilon_{SR} \ll 1$  é finalmente violada, o que pode ser visto claramente na Fig. 5.8(b). Este período de arrasto eterno produz um número de desdobramentos exponenciais mais que suficiente:  $\mathcal{N} \sim \varkappa(\sigma_{SR} - \sigma_p) \sim 10^5$ .

O valor final do potencial de matéria,  $V(\sigma_f) \sim 10^{-23}$ , é mais uma vez muito maior que o valor observado. Aqui valem os mesmos argumentos dados no caso do polinômio quártico: não há parâmetros livres suficientes para se ajustar ambos os valores de  $V(\sigma)$  no vácuo inicial e final. Também devemos declarar que a duração da época de desaceleração é mais uma vez muito pequena, aproximadamente  $10^{-32}$  seg.

### Possíveis degenerações.

Como foi observado no §5.3.2, existe a possibilidade de diferentes degenerações a partir de uma mesma cadeia de histórias. O exemplo acima possui o período de

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

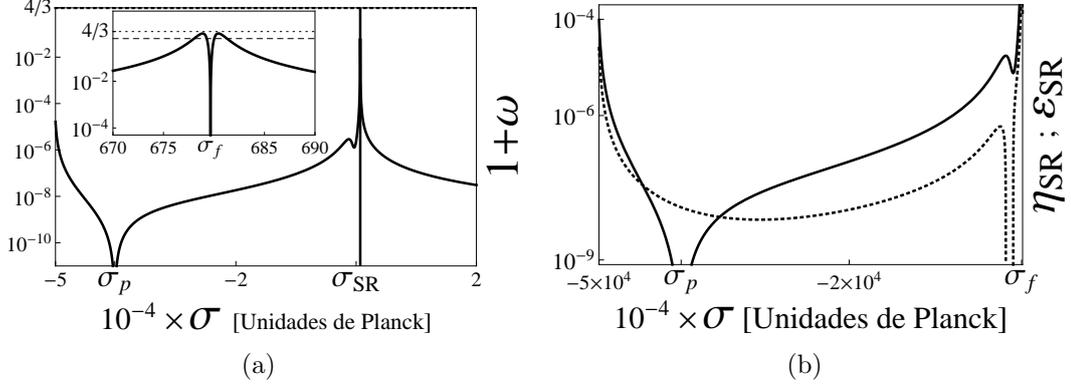


Figura 5.8: (a) Equação de estado para um universo dado pelos parâmetros da Fig. 5.7 ; Detalhe: Proximidades do vácuo final. A região entre as retas horizontais (Reta tracejada,  $\omega = -1/3$  ; Reta pontilhada,  $\omega = 1/3$ ) indica o período de desaceleração. (b) Parâmetros de arrasto:  $\epsilon_{\text{SR}}$ , linha sólida ;  $\eta_{\text{SR}}$ , linha pontilhada.

arrasto entre dois vácuo de Sitter, mas o superpotencial (5.39) oferece também a possibilidade de se ter uma história singular com arrasto, similar à que construímos a partir do superpotencial quártico. Para determinar as condições sobre os coeficientes de (5.39) que dão a degeneração desejada, procedemos como segue.

No caso mais geral, há quatro vácuos físicos distintos, as quatro raízes reais da equação quártica  $W'(\sigma) = 0$ . Os denotaremos por  $\{\sigma_k\}$ . Seja  $\{\tilde{\sigma}_k\}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , o conjunto de extremos da função  $W'(\sigma)$ , determinados pelas soluções da equação cúbica  $W''(\sigma) = 0$ . Temos que

$$\sigma_1 < \tilde{\sigma}_1 < \sigma_2 < \tilde{\sigma}_2 < \sigma_3 < \tilde{\sigma}_3 < \sigma_4 ,$$

e desejamos fazer  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_3$ . Os pontos  $\{\tilde{\sigma}_k\}$  devem ser ordenados como

$$\tilde{\sigma}_1 < \sigma_2 < \tilde{\sigma}_2 = \sigma_{\text{SR}} < \sigma_3 < \tilde{\sigma}_3 .$$

Eles ficam determinados pelas raízes da equação

$$(10\alpha_5 x^2 + 6\alpha_4 x + 3\alpha_3)x = 0 ,$$

onde  $x = \sigma - \sigma_{\text{SR}}$ , e incluem  $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_{\text{SR}}$ , consequência de não haver termo quadrático em (5.39). O ordenamento desejado requer que as raízes restantes sejam uma positiva e outra negativa. Logo, devemos ter  $x_{\pm}$ ,

$$x_{\pm} = -\frac{3\alpha_4}{10\alpha_5} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{10}{3} \frac{\alpha_3 \alpha_5}{\alpha_4^2}} \right) ,$$

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

com sinais opostos. Assumindo  $\alpha_5 < 0$ , isto equivale a  $\alpha_3 < 0$ . O resultado se encontra representado pelas curvas sólidas nas Figs.5.9. Quanto maior  $|\alpha_3 \alpha_5|$ , maior a distância entre  $x_+$  e  $x_-$ , maior a distância entre os extremos de  $W'(\sigma)$ , e portanto maior a distância entre os vácuos  $\sigma_1$  e  $\sigma_4$  que formam os limites assintóticos da história (inflacionária) resultante.

Note que se  $\alpha_4 = 0$ , então  $x_+ = -x_-$ , e  $W'(\sigma)$  se torna simétrico em torno de  $\sigma_{\text{SR}}$  — de fato, na ausência do termo cúbico,  $W'(\sigma)$  se torna do tipo Higgs, logo a duração da história antes e depois do arrasto deve ser a mesma. Se  $0 < \alpha_3 \alpha_5 < \frac{3}{10}\alpha_4^2$ , ambos  $x_{\pm}$  terão o mesmo sinal: positivo se  $\alpha_4 > 0$  (Fig.5.9, linha pontilhada), e negativo se  $\alpha_4 < 0$  (Fig.5.9, linha tracejada). Esta é a condição para que o arrasto fique posicionado em uma das histórias singulares. Por fim, se  $\alpha_3 \alpha_5 > \frac{3}{10}\alpha_4^2$ , o formato de  $W(\sigma)$  é qualitativamente idêntico ao de um polinômio cúbico, impedindo a criação do período de arrasto (cf. §5.4.1).

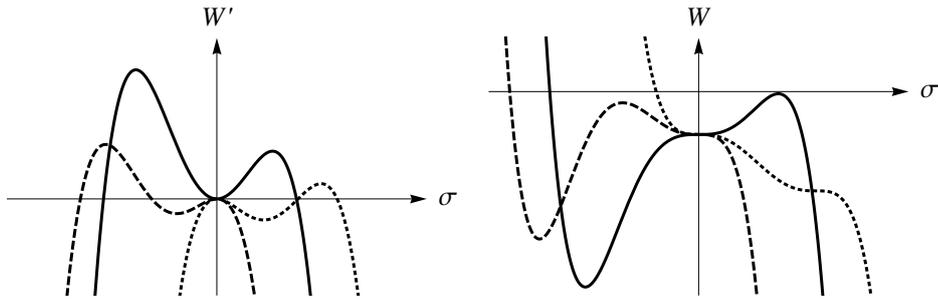


Figura 5.9: Possíveis degenerações de história para um polinômio quártico.

### 5.4.3 Os efeitos de GQT

Quando  $\mu \neq 0$ , a equação de estado é modificada pela multiplicação do fator  $C_0(\varrho)$ , não mais igual à unidade. Entretanto, uma vez que as energias características do período de arrasto até o vácuo final são da ordem de  $\varrho \sim 10^{-12}$ , teremos  $C_0 - 1 \sim -L^4 \mu \times 10^{-24}$ . Logo, para que as contribuições de GQT afetem a inflação, é necessário um valor muito grande do acoplamento gravitacional,  $L^4 |\mu| \gtrsim 10^{24}$ . Assim, para valores razoáveis de  $|\mu| L^4 < 1$ , a contribuição dos termos cúbicos se faz apreciável apenas em faixas de energia muito próximas da singularidade, em geral maiores que a energia de Planck. Por outro lado, qualitativamente ocorrem certas mudanças notáveis.

Antes de discuti-las, vamos fixar a escala quase-topológica  $L$ . Como dito no §4.2, uma opção é escolher  $L$  como dada pela constante cosmológica de um dos vácuos (cf. Eq.(4.18)). No caso em que existe um vácuo topológico, ele fornece

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

uma escolha preferencial: sua escala é definida exclusivamente pelo acoplamento cúbico e, para  $\mu < 0$ , é a menor escala possível a obedecer as restrições entrópicas do §4.5. Na ausência de um vácuo topológico, pode-se tomar  $L$  como a escala do vácuo deSitter com maior densidade de energia, ou com a maior densidade dentro das restrições entrópicas. A segunda escolha possível discutida no §4.2 é dada pela Eq.(4.19), que deixa explícita a natureza “quântica” das correções quase-topológicas. Esta será a escolha adotada aqui, diante da ambiguidade oferecida pela possibilidade de se fazer  $L = \sqrt{3/\Lambda}$ . Assim, uma vez que trabalhamos em unidades de Planck, na discussão a seguir fazemos  $L = l_{\text{Pl}} = 1$ .

Quando  $\mu < 0$ , existe uma certa densidade  $\varrho_*$  tal que para  $\varrho > \varrho_*$  a causalidade da equação de estado é violada, i.e.  $\omega > 1$ . Mas  $\varrho_*$  é muito grande quando  $|\mu| < 1$ . Além disso, como mostrado no §4.5.1, é sempre possível encontrar  $\lambda$  tal que a entropia se anule em uma densidade  $\varrho_S \lesssim \varrho_*$ , “escondendo” o período em que  $\omega > 1$ . Em um universo singular, esta violação da causalidade é inevitável — ver Fig.5.11(a) —, mas em um universo do tipo dS / dS, não. Nestes últimos, valores adequados (porém, em geral, muito grandes) de  $|\mu|$  podem fazer com que ocorra um novo período de desaceleração *antes* do arrasto, como podemos ver na Fig.5.11(b).

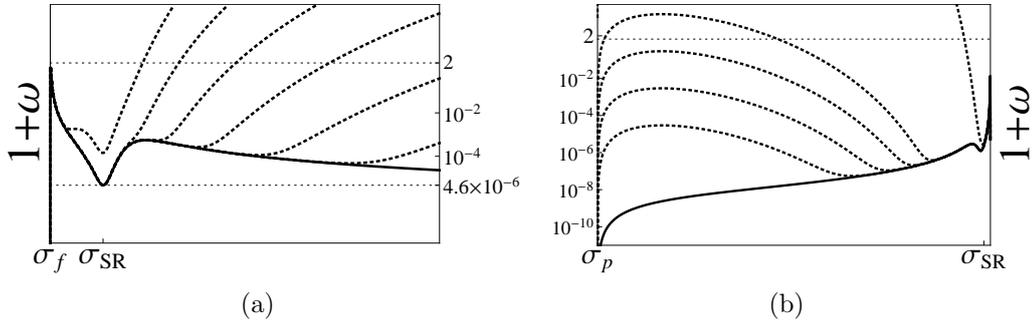


Figura 5.10: Modificações da equação de estado para diversos valores de  $\mu < 0$ . As linhas contínuas em (a) e (b) marcam os gráficos de gravitação EH, Figs.5.6(a) e 5.8(a), respectivamente. As linhas pontilhadas correspondem às funções em GQT com (a) Superpotencial quártico,  $\mu$  variando de  $-10^{25}$  a  $-10^{10}$ ; (b) Superpotencial quártico,  $\mu$  variando de  $-10^4$  a  $-10^{23}$ .

Já se  $\mu > 0$ , temos  $\omega \rightarrow -\infty$  quando  $\varrho \rightarrow \infty$ . Isto significa que, como esperado, surge um novo vácuo (topológico), onde  $\omega = -1$ . A história subsequente a este vácuo possui, toda ela,  $\omega < -1$  (de fato,  $-1 > \omega > -\infty$ ), ou seja: o universo nela descrito é do tipo ‘fantasma’. As modificações podem ser vistas na Fig.5.11. Mais uma vez, a não ser que  $\mu$  seja muito grande, do período de arrasto em diante a equação de estado é pouco modificada. Em geral, se  $\mu < 1$ , o vácuo

## 5. Cosmologia Inflacionária Quase-Topológica

topológico ficará posicionado em energias maiores que a de Planck, e portanto de fato toda a história dS / dS pouco é modificada. Mas, se  $\mu$  é grande o suficiente, podemos ter  $\sigma_{\text{top}} > \sigma_p$ : a história descrita no §5.4.2 passa então a ter início no vácuo topológico, com uma constante cosmológica — dependente apenas de  $\mu$ , e não dos parâmetros do superpotencial —, distinta da anterior. Mais significativa é a consequência de  $\mu > 0$  sobre uma história singular, como a descrita no §5.4.1. Por menor que seja  $\mu$ , e por maior que seja  $\rho_{\text{top}}$ , a história sempre *deixa de ser singular*, e passa a ter início em  $\sigma_{\text{top}}$ , ou seja: passa a ser do tipo dS / dS, com uma duração *infinita*!

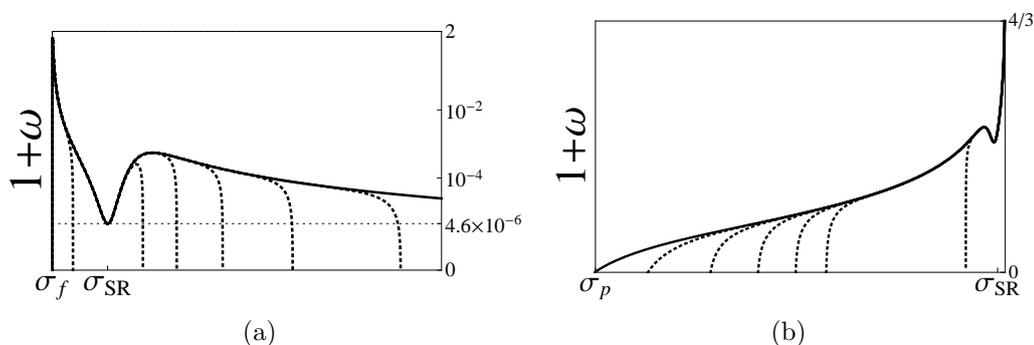


Figura 5.11: Modificações da equação de estado para diversos valores de  $\mu > 0$ . As linhas contínuas em (a) e (b) marcam os gráficos de gravitação EH, Figs.5.6(a) e 5.8(a), respectivamente. As linhas pontilhadas correspondem às funções em GQT com (a) Superpotencial quártico,  $\mu$  variando de  $10^{10}$  a  $10^{25}$ ; (b) Superpotencial quártico,  $\mu$  variando de 1 a  $10^{15}$ .

## Capítulo 6

# Equação de Estado Linear e a Constante Cosmológica

A constante cosmológica,  $\Lambda$ , segundo [Susskind \(2006\)](#) é “a mãe de todos os problemas da física”. Desde que introduzida por um equívoco de Einstein em 1917,<sup>1</sup> com o objetivo de balancear a atração gravitacional e permitir um universo estático, a existência e, principalmente, o valor de  $\Lambda$  são fontes de controvérsia.

O fato é que a interpretação mais imediata de constante cosmológica é como a energia do vácuo que, do ponto de vista da teoria quântica de campos, deveria ser infinita ou, pelo menos, muito grande. Apesar disso, as observações sugeriam um valor tão pequeno para  $\Lambda$  que por muito tempo a crença era em que ela fosse de fato nula. Até que se descobriu ([S. Perlmutter \(1999\)](#), [A.G. Riess \(1998\)](#)) que seu valor não era zero mas — ainda mais inesperadamente — tinha um valor finito e extremamente pequeno (usamos aqui o valor dado por [Bousso \(2007\)](#)):

$$\Lambda_0 = 3.142 \times 10^{-122} l_{\text{Pl}}^{-2} . \quad (6.1)$$

Com esta descoberta, a história (pós-inflacionária) do universo que observamos pode ser descrita por um ‘Modelo de Concordância’: Após um período inicial muito quente, durante o qual o conteúdo material se encontrava em estado ultra-relativístico, nosso universo se resfriou e passou quase toda a sua história preenchido principalmente pela matéria fria, de pressão nula, que compõe hoje as galáxias e as estruturas de matéria escura. Pouco tempo antes do estágio atual da evolução este cenário começou a mudar, com a gradual dominação pela constante cosmológica. Em seguida,  $\Lambda$  passa a ser a única contribuição relevante para o conteúdo do universo, e o fator de escala então se comporta como o de um espaço de deSitter,  $a(t) \sim \exp(t/\tau)$ . É admirável que se possa descrever em linhas gerais a maior parte desta história, que se passa depois da dominação da radiação, através de uma única equação de estado simples, como passamos a discutir.

---

<sup>1</sup> Ver, por exemplo, [Weinberg \(2008\)](#) e [Susskind \(2006\)](#).

## 6.1 A equação de estado linear

Uma generalização imediata das equações de estado usadas nas cosmologias de Friedmann do §2.3 é a adição de um termo politrópico (Chavanis (2012)):<sup>1</sup>

$$p_0 = w_1 \varrho_0 - w_2 \varrho_0^n ,$$

com  $w_1$  e  $w_2$  constantes. Os efeitos do novo termo dependem dos sinais de  $w_2$  e  $n$ . Para  $n > 0$  o segundo termo domina o primeiro quando a densidade de energia é muito alta, e vice-versa para  $n < 0$ . Já o sinal de  $w_2$  determina a natureza “atrativa ou repulsiva” do termo politrópico, em um sentido que ficará mais claro abaixo. Equações de estado deste tipo podem descrever condensados de Bose-Einstein (Chavanis (2012)), o que pode ser dado como argumento para a sua utilização na descrição do universo primordial, onde interações quânticas de seu conteúdo material devem ser relevantes. Nós vamos, todavia, nos concentrar no universo tardio, e usar o termo politrópico para criar uma dinâmica inicialmente similar à das cosmologias de Friedmann, mas que mais tarde passa a ser dominada por uma constante cosmológica. Para tanto, consideremos um fluido que obedeça à equação de estado linear  $p_0 = \omega_0(\varrho_0) \varrho_0$ , com

$$\omega_0(\varrho_0) = w_1 - \frac{w_2}{\varrho_0} , \quad (6.2)$$

$w_1$  e  $w_2$  constantes. Quando  $\omega_0 \approx w_1$ , podemos usar os resultados do §2.3 para concluir que se  $w_1 < -1/3$  ou  $w_1 > -1/3$ , em uma fase muito densa o universo é acelerado ou desacelerado, respectivamente. Por outro lado, quando a densidade de energia é pequena, o segundo termo domina, e veremos a seguir que se  $w_2 > 0$  o universo então sofre uma expansão acelerada. Por motivos de causalidade, vamos restringir o valor de  $w_1$  ao intervalo  $(-1, 1)$  (cf. §6.4.2).

A função de Hubble  $H_0(t)$  é obtida a partir de integração direta da Eq.(2.24b):

$$- \frac{3(1+w_1)}{2} (t - t_0) = \int \frac{dH}{H^2 - \frac{\varkappa^2 w_2}{6(1+w_1)}} . \quad (6.3)$$

Consideremos  $w_2 > 0$ . A integral é então da forma  $\int dx/(1-x^2)$ , com  $x^2 = H_0^2/H_\Lambda^2 = \varrho_0/\varrho_\Lambda$ , sendo

$$H_\Lambda = \varkappa \sqrt{\frac{w_2}{6(1+w_1)}} ; \quad \varrho_\Lambda = \frac{w_2}{1+w_1} , \quad (6.4)$$

<sup>1</sup> Ao longo de todo este capítulo usaremos o subscrito “0” para distinção entre grandezas na gravitação usual de EH e as mesmas grandezas na GQT (a ser discutida nas seções posteriores). Por exemplo,  $a(t)$  denota o fator de escala em GQT, enquanto  $a_0(t)$  denota o fator de escala quando  $\mu = 0$ .

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

e portanto possui duas soluções distintas dependendo se  $x > 1$  ou  $x < 1$ . Para que a solução descreva um universo singular, a densidade de energia deve ser *ilimitada* e, portanto, *maior que o valor mínimo*  $\varrho_\Lambda$ , i.e.  $x > 1$ . Então  $\int dx/(1-x^2) = \text{arccth}(x)$ . Se, ao contrário, considerarmos que a densidade de energia do universo é sempre *finita e menor que o valor máximo*  $\varrho_\Lambda$ , i.e.  $x < 1$ , então  $\int dx/(1-x^2) = \text{arth}(x)$ . Neste último caso o universo é eterno, não-singular, e sua dinâmica é do tipo ‘ricochete’: em  $t \rightarrow -\infty$  possui uma densidade  $\varrho_\Lambda$  que diminui gradualmente e se anula, para em seguida aumentar mais uma vez até retornar a  $\varrho_\Lambda$  em  $t \rightarrow +\infty$ .

Quando  $w_2 < 0$ , a discussão é similar, com as funções trigonométricas hiperbólicas trocadas por funções trigonométricas usuais. O resultado são universos que possuem singularidades futuras, nascendo de um big bang e recolapsando em um intervalo de tempo finito (Linde (1999), Eroshenko (2005)).

Vamos considerar o caso singular, com  $w_2 > 0$ , no restante deste capítulo. Definindo

$$\tau = \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{8}{3(1+w_1)w_2}}, \quad (6.5)$$

a função de Hubble se escreve<sup>1</sup>

$$H_0(t) = H_\Lambda \text{cth} \left[ \frac{(t-t_0)}{\tau} \right], \quad (6.6)$$

e a densidade de energia  $\varrho_0(t) = \frac{6}{\varkappa^2} H_0^2(t)$  fica

$$\varrho_0(t) = \varrho_\Lambda \text{cth}^2 \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right). \quad (6.7)$$

A confirmação da existência de uma singularidade vem do escalar de Ricci,

$$R_{(0)}(t) = -6 \left[ 2H_0^2(t) + \dot{H}_0(t) \right] = -\frac{6}{\tau^2} \left[ 1 + \left( \frac{4}{3(1+w_1)} - 1 \right) \text{cth}^2 \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) \right],$$

que diverge junto com a densidade de energia em  $t = t_0$ . Marcamos então o instante  $t_0 = 0$  como ‘início do tempo’, e vamos nos referir a esta singularidade inicial como ‘big-bang’.

Escrevendo  $a_0(t) = e^{A_0(t)}$ , temos  $H_0(t) = \dot{A}_0(t)$  e integração direta da Eq.(6.6) dá o fator de escala como função do tempo:

$$a_0(t) = a_0^{(0)} \text{sh}^\delta \left( \frac{t}{\tau} \right), \quad \delta = \frac{2}{3(1+w_1)}. \quad (6.8)$$

---

<sup>1</sup> O resultado (6.6) vale para  $w_2 \neq 0$ . Caso contrário, temos uma cosmologia de Friedmann usual, com equação de estado constante.

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

Fica então claro que em tempos tardios,  $t \rightarrow \infty$ , o fator de escala se comporta exponencialmente,

$$a_0(t) \sim \exp(\delta t/\tau) ,$$

e portanto o universo é assintoticamente de Sitter, com constante cosmológica

$$\Lambda_0 = 3\delta^2/\tau^2 = \varkappa^2 w_2/2(1 + w_1) . \quad (6.9)$$

Além disso, para tempos pequenos em relação ao instante característico  $\tau$ , quando  $\text{sh}(t/\tau) \approx t/\tau$ , o fator de escala se comporta com uma lei de potência típica das cosmologias de Friedmann,

$$a_0(t) \approx a_0^{(0)}(t/\tau)^\delta .$$

Uma vez que seções do tipo espaço são completamente homogêneas, há uma liberdade de reescalonamento das distâncias, o que se reflete em uma certa arbitrariedade de normalização do fator de escala. Nós vamos utilizar a seguinte escolha (Bousso (2007)):

$$a_0^{(0)} = (\tau/\delta)^\delta . \quad (6.10)$$

Garantimos desta forma que a dinâmica do universo jovem seja explicitamente independente de  $\Lambda_0$ , i.e.

$$a_0(t) \approx (t/\delta)^\delta , \quad t/\tau \ll 1 .$$

A equação de estado (6.2) nos dá, assim, um modelo cosmológico cuja história começa similar à de um universo dominado por um fluido perfeito, mas que eventualmente passa a expandir aceleradamente, impelido por uma constante cosmológica  $\Lambda_0$  — precisamente o esperado pelo Modelo de Concordância. Esta descrição dos períodos inicial e final do universo fixa os dois parâmetros da equação de estado. Sabemos da Eq.(2.35) que o período dominado por matéria é descrito por  $\delta = 2/3$ , o que implica  $w_1 = 0$ . O valor de  $w_2$  fica então determinado por (6.1). Além disso, fica dado o valor do instante característico  $\tau$ , Eq.(6.5):

$$\tau \approx 11.1 \text{ Gyr} . \quad (6.11)$$

A evolução do fator de escala com o tempo se encontra na Fig.6.1, onde marcamos os instantes descritos acima, além do instante em que o universo começa a acelerar, quando  $\varrho_0 = w_2/(w_1 + 1/3)$  e  $\omega_0(\varrho_0) = -1/3$ .

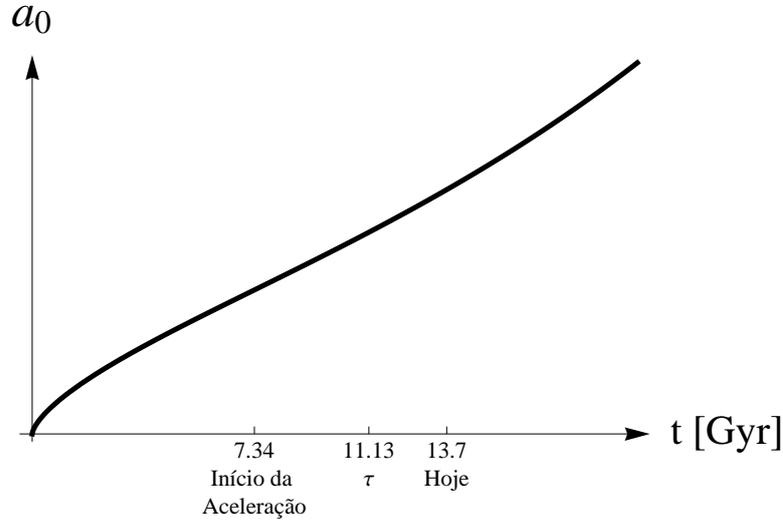


Figura 6.1: Evolução do fator de escala  $a_0(t)$ , em Giga-anos.

## 6.2 O princípio entrópico causal e a pequena constante cosmológica

O valor desconcertante da constante cosmológica levou [Weinberg \(1987\)](#) a formular o chamado ‘*Princípio Antrópico*’. Não sendo possível explicar o motivo pelo qual o valor de  $\Lambda$  é tão pequeno, vale a pena saber se, caso  $\Lambda$  fosse grande, haveria a possibilidade de formação de vida no universo — e, conseqüentemente, se haveria cientistas a fazer perguntas.

Note-se que esta condição antrópica não oferece, por si só, uma explicação para o problema da constante cosmológica. Para que faça algum sentido, o argumento antrópico deve estar associado a uma teoria que a) Prediga a existência de uma coleção de ‘vácuos’, cada um apresentando uma constante cosmológica com valor diferente, e tais que a diferença entre dois valores consecutivos seja muito menor do que o valor (6.1); e b) Permita transição dinâmica entre estes vácuos. [Weinberg \(1987\)](#) e [Bousso \(2007\)](#) citam alguns exemplos de tais teorias, a mais importante das quais talvez seja, hoje, a Teoria de Cordas. Nestas condições, a explicação para o valor de  $\Lambda$  fica dada: Existe uma infinidade de valores possíveis para a constante cosmológica, que variam de vácuo para vácuo — em particular, e não especialmente, o nosso vácuo onde vale (6.1). Entretanto, em vácuos onde  $\Lambda$  é maior que um certo valor  $\Lambda_{\max}$ , nós não poderíamos existir (supondo que a física seja igual à nossa, a menos deste detalhe específico). Como, percebe-se, nós existimos, devemos observar  $\Lambda < \Lambda_{\max}$ .

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

Isto resolve o problema se  $\Lambda_{\max}$  for da ordem de (6.1), e  $\Lambda_{\max}$  depende do critério utilizado na definição de “o que é necessário para a existência de observadores”. O critério adotado por Weinberg (1987) foi a possibilidade de formação de objetos, ligados gravitacionalmente, de tamanho suficientemente grande para permitir a existência de estrelas e de átomos pesados formados por elas, ou seja: a formação de galáxias e aglomerados globulares. O resultado obtido para  $\Lambda_{\max}$  foi, entretanto, três ordens de grandeza maior do que o valor observado (6.1):

$$\Lambda_{\max}/\Lambda_0 < 550 .$$

Mais ainda, descobertas posteriores aumentaram o valor de  $\Lambda_{\max}/\Lambda_0$  obtido pelo argumento de Weinberg para quatro ordens de grandeza:

$$\Lambda_{\max}/\Lambda_0 < 5500 ,$$

como exposto por Bousso (2007). Em suma: mesmo assumindo o argumento antrópico de Weinberg (1987), a constante cosmológica (6.1) ainda é inexplicavelmente pequena.

### O Princípio Entrópico Causal.

Uma reformulação do Princípio Antrópico dapaz de explicar com mais sucesso o valor da constante cosmológica foi dado por Bousso (2007). O argumento se divide em duas partes, como segue. Por um lado, se um observador obedece as leis da termodinâmica, medições — i.e. observações — aumentam a entropia, cuja produção pode então ser tomada como uma medida proporcional ao número de observadores. Por outro lado, baseado na unitariedade de processos quânticos envolvendo horizontes de eventos, é de se esperar que a medição da entropia feita por um observador deve se restringir à região que lhe é causalmente acessível. Esta região é chamada de ‘*diamante causal*’, e seu volume depende do valor da constante cosmológica, como se vai detalhar mais adiante.

A proposta de Bousso (2007), batizada de ‘*Princípio Entrópico Causal*’, se constitui então no seguinte: Há maior probabilidade de surgimento de vida, ou melhor: existem mais observadores, em um vácuo onde a constante cosmológica é tal que o volume do diamante causal seja máximo durante a máxima produção de entropia no seu interior. Esta entropia, seja observado, não inclui a contribuição da entropia de horizontes, que são um fenômeno puramente gravitacional, não conectado com “observações” passíveis de serem chamadas, em qualquer grau, de antrópicas.

Uma estimativa da taxa de produção de entropia no nosso universo foi então realizada, avaliando-se a contribuição de diversos processos como, por exemplo, a explosão de supernovas e a entropia produzida por galáxias com núcleos ativos. A conclusão a que se chega é de que a contribuição mais significativa para a

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

produção de entropia é proveniente da luminosidade de estrelas ao ser refletida e termalizada por poeira cósmica.<sup>1</sup>

A dependência temporal da produção de entropia pode ser então estimada, para o nosso universo, através de uma análise fenomenológica da taxa de formação estelar. O resultado obtido por [Bousso \(2007\)](#) se encontra resumido na Fig. 6.2, que mostra a taxa de produção de entropia  $dS/dt$  por unidade de volume do diamante causal. O formato da curva é consequência da alta taxa de formação de estrelas no universo jovem e denso, que tem um pico por volta de 2.5 Gyr, depois do que começa diminuir exponencialmente. As estrelas vivem, entretanto, por um período de tempo considerável (umas mais, outras menos) após sua formação, resultando na cauda da curva mostrada.

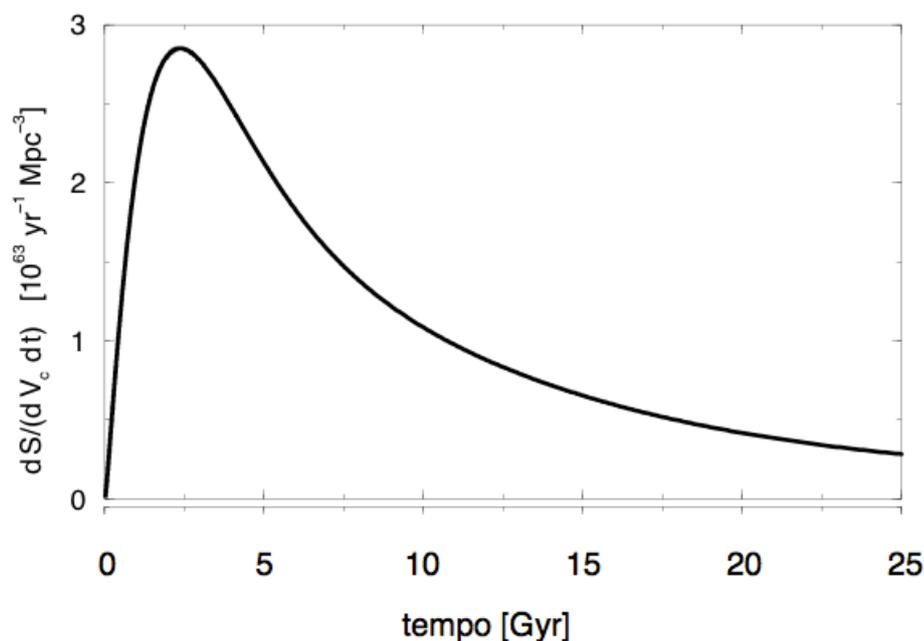


Figura 6.2: Taxa de produção de entropia ao longo da história do universo. Gráfico retirado de [Bousso \(2007\)](#).

Sabendo o perfil da dependência temporal da taxa de produção de entropia no nosso universo, resta saber como e quanto muda esta distribuição ao se variar o valor da constante cosmológica. Ocorre que a dinâmica estelar é efetivamente independente dos efeitos cosmológicos de  $\Lambda$ , que atuam em escala muito maior. A única maneira com que esta pode influenciar aquela é através da supressão da

<sup>1</sup>Repare que a ida do leitor à praia é um exemplo de tal processo.

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

formação de halos de matéria — berçários de estrelas — devido a uma possível expansão muito rápida causada por valores grandes de  $\Lambda$ . Este efeito é muito tênue, e a conclusão de Bousso (2007) é de que não há mudanças significativas para uma variação de  $\Lambda$  uma ordem de grandeza maior ou menor que o valor em (6.1). Isto era de se esperar, devido ao próprio resultado de Weinberg (1987).

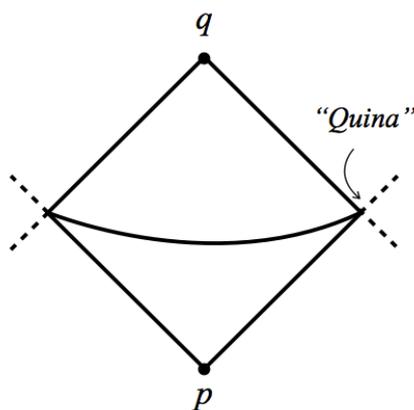
A influência da constante cosmológica no princípio entrópico causal, conclui-se, é restrita ao volume do diamante causal e, veremos, ela será suficiente para prever o valor de  $\Lambda$ . A bem da verdade, como observado por Bousso (2007), a substituição da condição “existência de galáxias”, presente no argumento antrópico original, pela condição muito menos restritiva de que “observadores obedecem as leis da termodinâmica” só é de fato possível por consequência da restrição à região causalmente acessível, o diamante causal.

### 6.3 A predição da Constante Cosmológica

#### Diamantes causais.

Um diamante causal (Bousso (2000))  $\mathcal{C}(p, q)$  gerado pelos pontos  $p$  e  $q$ , com  $q$  no futuro causal de  $p$ , é a região do espaço-tempo composta da interseção do futuro causal de  $p$  com o passado causal de  $q$ .

Em outras palavras, trata-se da região delimitada pelo cone de luz futuro de  $p$  e o cone de luz passado de  $q$ . Em um diagrama de Penrose, onde geodésicas nulas são representadas por linhas retas a  $\pm 45^\circ$ ,  $\mathcal{C}(p, q)$  possui de fato a forma de um “diamante”. Para obter o diagrama de Penrose, é necessário realizar a troca de coordenadas passando do tempo cósmico  $t$  para o tempo conforme  $\eta = \int^t dt/a(t)$ ; feito isto, a “altura” do diagrama de  $\mathcal{C}(p, q)$  fica dada por  $\Delta\eta = \eta(q) - \eta(p)$ . A cada instante conforme  $\eta \in [\eta(p), \eta(q)]$ , o diamante causal define uma região espacial de raio  $r(\eta)$  ao redor do observador.



A equação de  $r(\eta)$  é a equação das retas no espaço  $r$ - $\eta$  do diagrama de Penrose, e portanto depende se  $\eta$  está “mais próximo” de  $p$  ou de  $q$ . Ambos os casos podem ser resumidos em

$$r(\eta) = \frac{\Delta\eta}{2} - \left| \frac{\Delta\eta}{2} + \eta \right|. \quad (6.12)$$

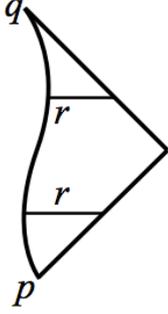
A porção do diamante a meio caminho entre  $p$  e  $q$ , i.e. onde  $\eta = \Delta\eta/2$  — e portanto  $r = \Delta\eta/2$  — é chamada de *quina* do diamante. Lembre que cada ponto

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

no diagrama de Penrose descreve uma 2-esfera espacial, e em particular a quina do diamante é uma 2-esfera espacial de raio  $r = \Delta\eta/2$ .

Em espaços completamente homogêneos, como é o caso das métricas FRW, é irrelevante a posição espacial dos pontos  $p$  e  $q$ , que tomaremos (ambas) como a origem do sistema de coordenadas. O diagrama causal fica então determinado pela distância temporal entre  $p$  e  $q$ . No que segue, vamos considerar diamantes causais onde  $q$  está no futuro infinito,<sup>1</sup> i.e.  $t \rightarrow \infty$ . Por outro lado,  $p$  vai ser dado pelo instante em que a entropia se anula.



### O volume do diamante.

O tempo conforme é dado pela Eq.(I.4) sem a constante de integração, i.e.

$$\eta^{(0)}(t) = -\frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] \quad (6.13)$$

Posicionando a ponta inferior do diamante em  $t = 0$ , temos

$$\Delta\eta = \eta(\infty) - \eta(0) = 0 - \left\{ -\frac{\tau}{2a_0^{(0)}} \text{B} \left( \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2} \right) \right\} = \frac{\tau}{2a_0^{(0)}} \text{B} \left( \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2} \right),$$

ou seja, usando a normalização (6.10) para o fator de escala,

$$\Delta\eta = \frac{\delta^\delta}{2} \tau^{1-\delta} \text{B} \left( \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2} \right). \quad (6.14)$$

A cada instante conforme  $\eta$ , o volume espacial delimitado pelo diamante causal é dado pela fórmula (6.12). Na “metade superior do diamante”, i.e. para  $|\eta| < \Delta\eta/2$ , temos  $r = |\eta|$ , logo

$$r = \frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \left( \frac{1+\delta}{2} \right); \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right]. \quad (6.15)$$

Já para  $|\eta| > \Delta\eta/2$ ,  $r = \Delta\eta - |\eta|$  ou

$$r = \frac{\tau}{2a_0^{(0)}} \text{B} \left( \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2} \right) - \frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right]. \quad (6.16)$$

Repare que a metade superior do diamante é delimitada pelo horizonte de eventos futuro, enquanto a metade inferior é delimitada pelo horizonte de partículas.

---

<sup>1</sup>Uma descrição de diamantes causais “pequenos” e “grandes” pode ser encontrada em Gibbons (2007a,b).

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

Para obter resultados numéricos qualitativos, é necessário restaurar as unidades corretas nas fórmulas acima, que se encontram em unidades de Planck.<sup>1</sup>

Desejamos avaliar o volume espacial do diamante causal em função do tempo:

$$V_c(t) = \frac{4\pi}{3} r^3(t), \quad (6.17)$$

onde  $r(t)$  é dado pela “colagem” das duas funções (6.15) e (6.16) na quina do diamante. O resultado se encontra na Fig.6.3, onde estão os gráficos correspondentes a três valores distintos da constante cosmológica. Em destaque, no gráfico (a), encontra-se a evolução para o valor observado  $\Lambda_0 = 3.142 \times 10^{-122} \times l_{\text{Pl}}^{-2}$ ; nos outros gráficos, mostramos o efeito de se ter a constante cosmológica uma ordem de grandeza maior (b) ou menor (c) do que o valor observacional.

A grande informação que se tira dos gráficos na Fig.6.3 é que o volume máximo do diamante causal no nosso universo ocorre em excelente concordância com o pico da taxa de produção de entropia, exposto na Fig.6.2. Mais ainda, os máximos dos volumes dos diamantes correspondentes a  $\Lambda$  uma ordem de grandeza maior ou menor que o valor (6.1) ocorrem em instantes que diferem muito do valor desejado, fornecendo uma seleção clara a favor de  $\Lambda \sim 10^{-122} \times l_{\text{Pl}}^{-2}$ .

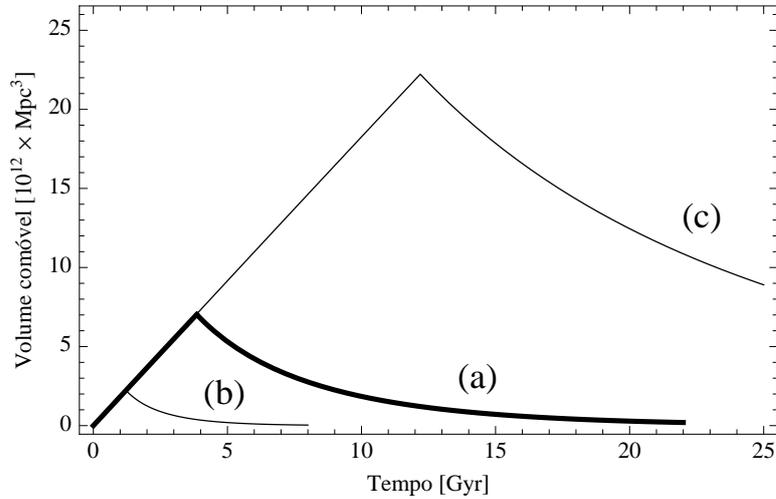


Figura 6.3: Evolução do volume comóvel do diamante causal em gravitação EH para diversos valores da constante cosmológica: (a)  $\Lambda_{(a)} = 3.142 \times 10^{-122} \times l_{\text{Pl}}^{-2}$ ; (b)  $\Lambda = 10 \times \Lambda_{(a)}$ ; (c)  $\Lambda = 0.1 \times \Lambda_{(a)}$ .

<sup>1</sup> As dimensões de cada grandeza são obtidas multiplicando-se, quando necessário, por  $l_{\text{Pl}}$ ,  $t_{\text{Pl}}$ , com a conversão correta. Usaremos como unidade de distância o Megaparsec [Mpc], e como unidade de tempo o Giga Ano [Gyr].

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

OBSERVAÇÃO: Existe uma certa liberdade de normalização do raio comóvel do diamante causal  $r(t)$ , e conseqüentemente do volume comóvel (6.17), proveniente da liberdade de normalização do fator de escala (que muda a constante  $1/a_0^{(0)}$  nas Eqs.(6.15) e (6.16)).<sup>1</sup> Esta ambigüidade não afeta os valores de raio e volume físicos, mensuráveis, do diamante causal, uma vez que ao se multiplicar  $r(t)$  pelo fator de escala  $a(t)$ , as constantes multiplicativas  $1/a_0^{(0)}$  e  $a_0^{(0)}$  se cancelam.

Por causa do fator  $10^{40}$  que aparece na normalização (6.10) do fator de escala, ao se avaliar  $V_c(t)$  sem fazer um reescalonamento de  $r(t)$  obtemos um resultado com uma ordem de grandeza 120 vezes menor ( $(10^{-40})^3 = 10^{-120}$ ) do que mostrado na Fig.6.3. Este valor é também 120 ordens de grandeza menor do que os valores físicos do volume comóvel, por conta do cancelamento do fator  $1/a_0^{(0)} \sim 10^{-40}$  que acabamos de discutir.

Para contornar essa discrepância imensa de ordens de grandeza entre o volume físico e o comóvel, multiplicamos o volume causal  $V_c(t)$  pelo fator de escala avaliado no instante de transição entre o domínio de poeira e o domínio da energia escura,  $t_\Lambda = \tau/\delta_0$ . Assim, os gráficos da Fig.6.3 não descrevem exatamente a Eq.(6.17), mas sim

$$\mathcal{V}(t) = [a^{(0)}(t_\Lambda)]^3 \times V_c(t) \approx 4.33 \times 10^{122} \times V_c(t) . \quad (6.18)$$

Repare que a multiplicação *não equivale a transformar o volume comóvel em volume físico*, pois não estamos multiplicando pela função  $a^{(0)}(t)$ , mas apenas por um fator *constante (e inobservável!)*  $[a^{(0)}(t_\Lambda)]^3$ .

### 6.4 Equação de estado efetiva

Vamos assumir que as correções da ação de EH não alterem a relação funcional entre as componentes do tensor de energia-momento da matéria pura. Ou seja, a equação de estado linear (6.2) continua sendo satisfeita por  $\varrho_0$  e  $p_0$ . Mas sabemos que na gravitação quase-topológica não é mais  $T_{\mu\nu}^{(0)}$  a grandeza observável, e sim o tensor efetivo com componentes  $\varrho_{\text{eff}}$  e  $p_{\text{eff}} = \omega_{\text{eff}}(\varrho_{\text{eff}}) \varrho_{\text{eff}}$ . A nova equação de estado deve depender explicitamente de  $\mu$ , que entra diretamente na relação entre  $\varrho_{\text{eff}}$  e  $\varrho_0$ . De fato, dividindo as Eqs.(4.26) e (4.29), obtemos

$$1 + \omega_{\text{eff}}(\varrho_{\text{eff}}) = \frac{1 - \mu L^4 \mathcal{K}^4 \varrho_{\text{eff}}^2 / 36}{1 - \mu L^4 \mathcal{K}^4 \varrho_{\text{eff}}^2 / 12} (1 + \omega_0(\varrho_{\text{eff}})) , \quad (6.19)$$

onde  $\omega_0(\varrho_{\text{eff}})$  denota abreviadamente  $\omega_0(\varrho_0(\varrho_{\text{eff}}))$ , cf. Eq.(4.30). Note que a fórmula acima é na verdade geral, e vale para qualquer função  $\omega_0(\varrho_0)$  (e.g.  $\omega_0 =$

---

<sup>1</sup>É a mesma liberdade que se tem de reescalonar o raio comóvel de um horizonte de eventos.

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

constante). Quando nos aproximamos de uma singularidade e  $\varrho_{\text{eff}}$  diverge, temos

$$\omega_{\text{eff}} \approx \frac{1}{3}(\omega_0 - 2) ;$$

logo mesmo para  $\omega_0 \lesssim 1$ , o que para  $\mu = 0$  implicaria em um universo “o mais desacelerado possível”, quando  $\mu \neq 0$  temos  $\omega_{\text{eff}} \lesssim -1/3$ . Repare que isto *independe* do valor de  $\mu$ , desde que  $\varrho_{\text{eff}}$  seja grande o suficiente para que o limite acima seja tomado. Assim, quando há uma singularidade inicial, *a gravitação quase-topológica cria um período de aceleração no início da vida da universo*.

Em particular, para a equação de estado (6.2), temos

$$\omega_0(\varrho_{\text{eff}}) = w_1 - \frac{w_2}{\varrho_{\text{eff}} (1 - \mu L^4 \chi^4 \varrho_{\text{eff}}^2 / 36)} ,$$

e portanto

$$\omega_{\text{eff}}(\varrho_{\text{eff}}) = -1 + \frac{-w_2 + (1 + w_1) (1 - \mu L^4 \chi^4 \varrho_{\text{eff}}^2 / 36) \varrho_{\text{eff}}}{\varrho_{\text{eff}} (1 - \mu L^4 \chi^4 \varrho_{\text{eff}}^2 / 12)} . \quad (6.20)$$

Na Fig.6.4 comparamos a equação de estado evoluindo na gravitação EH com a evolução na GQT. Fica claro a diferença entre ambas á medida que a densidade cresce, e podemos ver para  $\varrho_{\text{eff}} \rightarrow \infty$  que  $\omega_{\text{eff}}$  passa a ser menor que  $-1/3$ , como previsto.

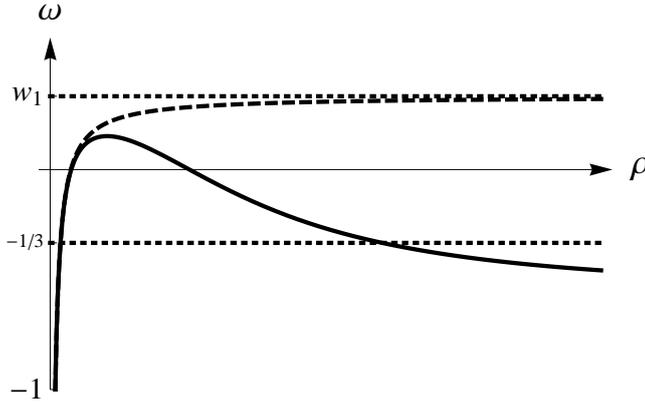


Figura 6.4: Parâmetros da equação de estado em função da densidade de energia. Linha tracejada: Equação de estado linear,  $\omega_0(\varrho_0)$ , Eq.(6.2) ; Linha contínua: Equação de estado efetiva,  $\omega_{\text{eff}}(\varrho_{\text{eff}})$ , Eq.(6.20).

### 6.4.1 O período inicial de aceleração

Para a equação de estado (6.20), há evidentemente dois períodos de aceleração na história do universo: aquele criado pelos efeitos da GQT, e o um período final de aceleração induzido pelo termo politrópico da equação original, (6.2). Para determinar os valores de  $\varrho_{\text{eff}}$  onde acabam e onde começam, respectivamente, tais períodos, devemos resolver a equação cúbica

$$\frac{(w_1-1)}{36} \varkappa^4 \mu L^4 \varrho_{\text{eff}}^3 - \frac{3w_1+1}{3} \varrho_{\text{eff}} + w_2 = 0, \quad (6.21)$$

obtida da Eq.(6.20), ao se impor  $\omega_{\text{eff}} = -1/3$ .

No caso EH a única raiz desta equação é aquela que determina o instante do início da aceleração na Fig.6.1. Quando  $\mu \neq 0$ , há três raízes, pelo menos uma delas real, que vamos denotar por  $\varrho_{1,2,3}$ . Os extremos do polinômio cúbico (6.21) ocorrem nos pontos em que a derivada (em respeito de  $\varrho_{\text{eff}}$ ) se anula, i.e. em

$$\varrho_{\text{eff}} = \pm \frac{2}{\varkappa^2} \sqrt{\frac{1+3w_1}{(w_1-1)L^4\mu}}.$$

Vamos supor  $\mu < 0$  e  $w_1 > -1/3$ , de forma que a raiz quadrada acima é real, e temos um extremo em valores positivos de  $\varrho_{\text{eff}}$  e outro em valores negativos<sup>1</sup>. Portanto se há mais de uma raiz real, ao menos uma delas é positiva e outra, negativa. Para saber o sinal da terceira raiz (caso todas sejam reais), usamos as fórmulas de Viéta, que dão

$$\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = -\frac{36w_2}{(w_1-1)\varkappa^4 L^4 \mu} < 0.$$

Portanto, *se três raízes forem reais, duas são positivas; se duas raízes forem reais, uma é positiva e outra negativa; e se apenas uma raiz for real, ela é negativa.*

Para determinar a quantidade de raízes reais, devemos olhar para o discriminante da equação (6.21):

$$\Delta = \frac{4 [81w_2^2(w_1 - 1)\varkappa^4 L^4 \mu - 16(3w_1 + 1)^3]}{(w_1 - 1)^3 \varkappa^{12} L^{12} \mu^3}. \quad (6.22)$$

O denominador é positivo, e o termo entre chaves no numerador controla o sinal global. Levando em consideração a análise dos sinais das raízes reais feita acima,

- (a)  $L^4|\mu| > \frac{16(3w_1 + 1)^3}{81(1 - w_1)\varkappa^4 w_2^2} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$  Nenhuma raiz positiva
- (b)  $L^4|\mu| = \frac{16(3w_1 + 1)^3}{81(1 - w_1)\varkappa^4 w_2^2} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$  Apenas 1 raiz positiva
- (c)  $L^4|\mu| < \frac{16(3w_1 + 1)^3}{81(1 - w_1)\varkappa^4 w_2^2} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$  2 raízes positivas distintas

---

<sup>1</sup> Soluções da equação cúbica para as quais  $\varrho_{\text{eff}} < 0$  devem evidentemente ser fisicamente descartadas ao fim da análise.

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

O valor crítico  $L^4\mu = -\frac{16(3w_1+1)^3}{81(1-w_1)\varkappa^4 w_2^2}$  representa então o valor do acoplamento gravitacional para o qual o período inicial de aceleração do universo, devido à GQT, se estende tanto que termina exatamente no instante em que começa o período final de aceleração, devido à constante cosmológica. Há então apenas um único instante em que o universo possui aceleração nula. Se  $L^4|\mu|$  for maior que este valor crítico, a expansão nunca deixa de ser acelerada. Os gráficos da equação de  $\omega_{\text{eff}}(\varrho_{\text{eff}})$  correspondendo a valores de  $\mu$  para cada um dos casos (a), (b) e (c) acima estão dados na Fig.6.5. A título de referência, damos o valor crítico acima para o caso físico de [Bousso \(2007\)](#):

$$\mu L^4 = -\frac{16(3w_1+1)^3}{81(1-w_1)\varkappa^4 w_2^2} = -5.01 \times 10^{241} \times l_{\text{Pl}}^4.$$

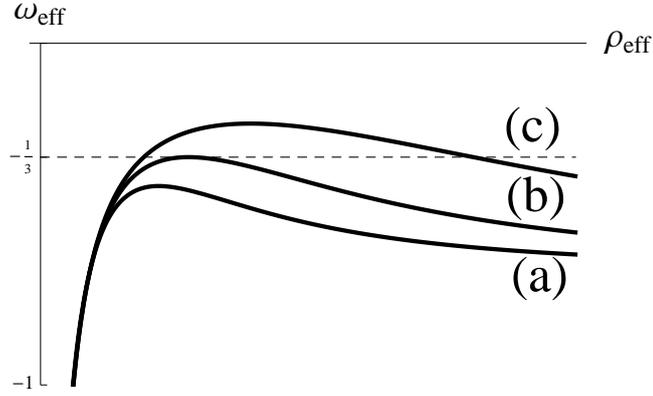


Figura 6.5: Número de períodos de aceleração.

Expressões exatas para as raízes  $\varrho_{1,2,3}$  são dadas pelas fórmulas de Cardano. Interessamo-nos apenas o caso em que há três raízes reais, digamos:  $\varrho_3 < 0$  e  $0 < \varrho_1 < \varrho_2$  marcando, respectivamente, os períodos final e inicial de aceleração. Neste caso, as fórmulas de Cardano podem ser escritas na forma trigonométrica:

$$\theta = \arccos \left[ \frac{-9w_2\varkappa^2}{4} \frac{(1-w_1)^{1/2}}{(1+3w_1)^{3/2}} (L^4|\mu|)^{1/2} \right] ; \quad (6.23)$$

$$\varrho_1 = \frac{4}{\varkappa^2} \sqrt{\frac{1+3w_1}{1-w_1}} (L^4|\mu|)^{-1/2} \cos \left( \frac{\theta+4\pi}{3} \right) \quad (6.24)$$

$$\varrho_2 = \frac{4}{\varkappa^2} \sqrt{\frac{1+3w_1}{1-w_1}} (L^4|\mu|)^{-1/2} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) \quad (6.25)$$

$$\varrho_3 = \frac{4}{\varkappa^2} \sqrt{\frac{1+3w_1}{1-w_1}} (L^4|\mu|)^{-1/2} \cos \left( \frac{\theta+2\pi}{3} \right) \quad (6.26)$$

O ordenamento acima considera  $|\mu| \ll 1$ . Note que com estas equações, é possível calcular os instantes na história do universo em que ocorre a mudança de expansão acelerada para desacelerada. Para isto, basta usar a Eq.(6.35). Pode-se, inclusive, calcular a duração do período de desaceleração, que fica dada por  $t(\varrho_2) - t(\varrho_1)$ .

### 6.4.2 Velocidade do som

Desejamos que o módulo da velocidade do som, dada pela Eq.(2.39), obedeça o intervalo físico (2.40). A equação de estado linear (6.2) possui a característica notável de que mesmo durante o período de expansão acelerada temos  $v_0^2 = \partial p_0 / \partial \rho_0 = w_1$ , e a velocidade do som é real se  $w_1 \geq 0$ . Repare que esta conclusão é válida tanto em gravitação EH quando em GQT, uma vez que a relação funcional  $p_0 = \omega_0(\rho_0) \rho_0$  permanece inalterada em ambos os casos. A requisição de que a velocidade do som não ultrapasse a da luz justifica a escolha do intervalo  $-1 < w_1 < 1$  dada no §6.1.

De posse da Eq.(6.20) podemos escrever a velocidade efetiva do som, no fluido efetivo de densidade  $\rho_{\text{eff}}$  e pressão  $p_{\text{eff}} = \omega_{\text{eff}}(\rho_{\text{eff}}) \rho_{\text{eff}}$ :

$$v_{\text{eff}}^2 = \frac{w_1 + \varkappa^4 L^4 \mu \rho_{\text{eff}}^2 (1 - w_2 / \rho_{\text{eff}}) / 6 + \varkappa^8 L^8 \mu^2 (w_1 - 2) \rho_{\text{eff}}^4 / 432}{(1 - \mu L^4 \varkappa^4 \rho^2 / 12)^2}. \quad (6.27)$$

Podemos demonstrar que  $-1 < v_{\text{eff}}^2 < 1$ , se  $\mu < 0$  e  $|w_1| < 1$ . Primeiro olhemos o lado direito da desigualdade, que se resume a

$$432(w_1 - 1) + 72\varkappa^4 L^4 \mu \rho_{\text{eff}}^2 (2 - w_2 / \rho_{\text{eff}}) + \varkappa^8 L^8 \mu^2 \rho_{\text{eff}}^4 (w_1 - 5) < 0.$$

Ocorre que quando  $|w_1| < 1$ , o primeiro e o último termos do membro esquerdo da desigualdade são negativos. O segundo termo também é negativo para  $\mu < 0$ , pois em um universo singular temos sempre  $\rho_{\text{eff}} \geq w_2$ . Logo, é verdade que  $v_{\text{eff}}^2 < 1$ . Agora confirmamos o lado esquerdo da desigualdade. Se  $v_{\text{eff}}^2 > -1$ , então

$$432(1 + w_1) - 72\varkappa^4 L^4 \mu w_2 \rho_{\text{eff}} + (1 + w_1) \varkappa^8 L^8 \mu^2 \rho_{\text{eff}}^4 > 0.$$

Quando  $\mu < 0$ , todos os termos são claramente positivos se  $|w_1| < 1$ , e fica mostrado o que afirmamos.

Entretanto, quando  $\mu > 0$ , as desigualdades deixam de ser verdade. Neste caso a condição  $v_{\text{eff}}^2 < 1$  só é obedecida se

$$72\varkappa^4 L^4 \mu \rho_{\text{eff}}^2 (2 - w_2 / \rho_{\text{eff}}) < 432(1 - w_1) + \varkappa^8 L^8 \mu^2 \rho_{\text{eff}}^4 (5 - w_1),$$

ou

$$72\varkappa^4 L^4 \mu \rho_{\text{eff}} (2\rho_{\text{eff}} - w_2) < 432(1 - w_1) + \varkappa^8 L^8 \mu^2 \rho_{\text{eff}}^4 (5 - w_1).$$

Não é trivial determinar os limites de  $\rho_{\text{eff}}$  onde vale a desigualdade acima — para tal devemos encontrar as soluções de uma equação polinomial quártica. Mas não é necessário saber exatamente para quais densidades se tem  $v_{\text{eff}}^2 = 1$  para saber que para certos valores de  $\rho_{\text{eff}}$  de fato  $v_{\text{eff}}^2 > 1$ . Basta olhar a Eq.(6.27) para ver

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

que quando  $\varrho_{\text{eff}} \rightarrow \sqrt{12/\mu L^4 \varkappa^4}$ , i.e. no vácuo topológico, o denominador tende a zero enquanto o numerador tende a

$$(1 - \varkappa^4 L^4 \mu \varrho_{\text{eff}}^2 / 12) v_{\text{eff}}^2 \rightarrow \frac{4}{3}(1 + w_1) - \frac{w_2}{\sqrt{3}} \varkappa^2 L^2 \sqrt{\mu} .$$

Para pequenos valores de  $\mu L^4$  (lembremos ainda que  $w_2$ , igual à densidade final do universo, tem um valor muito pequeno), a expressão acima é positiva<sup>1</sup> para  $|w_1| < 1$ , logo

$$v_{\text{eff}}^2 \rightarrow \infty .$$

Assim, quando  $\mu > 0$  há uma região com sérios problemas de causalidade perto do vácuo topológico.

### 6.4.3 Valores físicos de $\lambda$ e $\mu$

#### Escolha de $L$ .

Ao contrário dos múltiplos vácuos do §5.4.3, aqui existe uma escolha evidente para a constante cosmológica a ser usada para definir a escala introduzida pela GQT através da Eq.(4.18): Podemos utilizar o valor observado (6.1). Neste caso,

$$L = \sqrt{3/\Lambda_0} \approx 9.77 \times 10^{60} \times l_{\text{Pl}} . \quad (6.28)$$

Esta é uma escolha puramente gravitacional — de fato a única escala gravitacional a aparecer na ação no limite  $t \rightarrow \infty$ . Para que os efeitos das correções quase-topológicas sejam válidos apenas em escalas de energia comparáveis àquelas do início do Universo, da ordem da energia de Planck, é então necessário que

$$|\mu| \sim (l_{\text{Pl}}/L^4) \sim 10^{-244} .$$

Nós vamos adotar no que segue a normalização (6.28), em contraste com o que fora adotado no Capítulo 5. Os valores extremamente pequenos de  $|\lambda|$  e  $|\mu|$  que obteremos na análise fenomenológica seguinte devem ser então encarados como uma consequência do (curioso) valor da constante cosmológica no nosso Universo. Lembramos ainda que sempre podemos redefinir  $L$  para, digamos, o comprimento de Planck através das Eqs.(4.20).

#### O período de aceleração.

Desejamos determinar para qual faixa de valores de  $\mu$  e  $\lambda$  as mudanças da equação de estado descritas acima ocorrem com valores fisicamente aceitáveis. Mais precisamente: desejamos que o período inicial de aceleração gerado pela GQT ocorra

---

<sup>1</sup>Vale notar que, seja qual for o sinal do numerador, ele é finito, e portanto de qualquer maneira  $v_{\text{eff}}^2 \rightarrow \pm\infty$ .

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

para densidades de energia não muitas ordens de grandeza menores que a densidade de Planck. Digamos que  $\varrho_2$  seja  $n$  ordens de grandeza menor que  $\varrho_{\text{Pl}}$ , com  $n$  a ser escolhido a partir de diferentes critérios;  $10^{-n} \times \varrho_{\text{Pl}} \lesssim \varrho_2 \lesssim \varrho_{\text{Pl}}$ . Para estimar o valor de  $\mu$ , usamos a fórmula (6.25). Se  $|\mu| \ll 1$ ,  $\cos(\theta/3) \sim 1$ , e

$$10^{-n} \times \varrho_{\text{Pl}} \lesssim \frac{4}{\varkappa^2} \sqrt{\frac{1+3w_1}{1-w_1}} (L^4 |\mu|)^{-1/2} \lesssim \varrho_{\text{Pl}}.$$

Lembrando que  $\varkappa = 2l_{\text{Pl}}$ , as desigualdades acima se reescrevem

$$\left( \frac{1+3w_1}{1-w_1} \right) \frac{1}{l_{\text{Pl}}^4 \varrho_{\text{Pl}}^2} \lesssim |\mu| L^4 \lesssim 10^{2n} \times \left( \frac{1+3w_1}{1-w_1} \right) \frac{1}{l_{\text{Pl}}^4 \varrho_{\text{Pl}}^2}. \quad (6.29)$$

Linde (2008) estima que valores realísticos para a densidade de energia do universo durante a inflação (ao menos no contexto de inflação caótica) sejam tais que o período inflacionário ocorre para densidades de energia na faixa de ordens de grandeza entre  $10^{-12} \times \varrho_{\text{Pl}} \lesssim \varrho \lesssim \varrho_{\text{Pl}}$ , i.e.  $n = 12$  nas fórmulas acima. Considerando o período inicial de aceleração como uma fase inflacionária, deveríamos ter então

$$\mu \lesssim -10^{-218}, \quad n = 12 \quad (6.30)$$

para que a inflação terminasse na faixa de energia estimada por Linde. O gráfico correspondente da equação de estado se encontra na Fig.6.6, onde  $\varrho_{\text{eff}}$  é apresen-

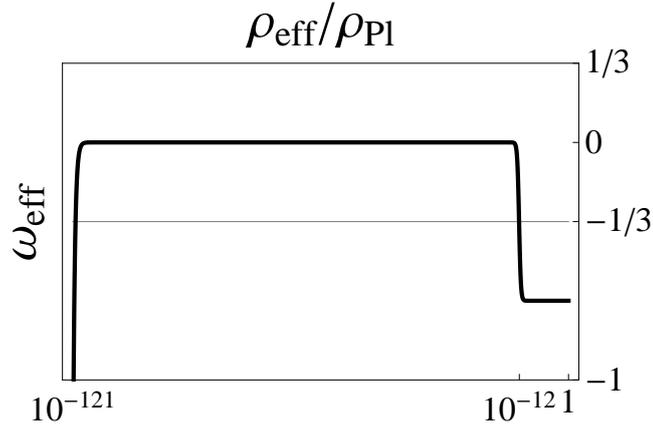


Figura 6.6: Equação de estado efetiva para  $\mu = -10^{-218}$ , de modo que o período de aceleração inicial termina para densidades de energia  $\sim 10^{-12} \times \varrho_{\text{Pl}}$ .

tada em escala logarítmica, deixando evidente o fato de que durante a grande parte de sua vida o universo é dominado por matéria fria com  $\omega_{\text{eff}} = 0$  — Vale

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

lembrar, entretanto, que o curto intervalo para o qual  $\omega_{\text{eff}}$  entra no período final de aceleração, com  $\varrho_{\text{eff}}/\varrho_{\text{P1}} \lesssim 10^{-121}$ , dura eternamente. Para densidades maiores que  $\varrho_{\text{P1}}$ , não há muito sentido em descrever o espaço-tempo. Em verdade, nem em densidades  $\varrho_{\text{eff}} \lesssim \varrho_{\text{P1}}$  esperamos que GQT seja uma correção suficiente para a ação de EH.

### Restrições entrópicas.

No mesmo espírito, devemos considerar os resultados do §4.5.1 para não permitir que as restrições entrópicas censurem energias muito baixas.

Uma vez que a equação de estado não muda ao se variar  $\lambda$ , este pode ser escolhido de forma que para qualquer valor de  $\mu < 0$  tenha-se  $\varrho_{\text{GQT}}$  dentro de uma faixa desejada. Por exemplo: digamos que se escolha  $\mu = -10^{-218}$  (Fig.6.6), e desejamos encontrar  $\lambda$  tal que  $\varrho_{\text{GQT}} = \varrho_{\text{P1}}$ . Usando a Eq.(4.67), temos

$$\lambda = - \left( \frac{L}{l_{\text{P1}}} \right)^2 \times 10^{-218} + \frac{3}{4} \left( \frac{l_{\text{P1}}}{L} \right)^2 = -9.470 \times 10^{-120} .$$

Da mesma maneira, podemos escolher  $\lambda$  de forma a posicionar a densidade de energia máxima  $\varrho_{\text{GQT}}$  antes ou depois do período de aceleração inicial. O período de aceleração inicial da Fig.6.6 termina em  $\varrho_{\text{eff}} = 8.66 \times 10^{-13} \times \varrho_{\text{P1}}$ , e substituindo este valor para  $\varrho_{\text{GQT}}$  na Eq.(4.67) com  $\mu = -10^{218}$  temos que se  $\lambda = -2.618 \times 10^{-110}$  a entropia se anula exatamente no fim do primeiro período de aceleração (e portanto ele pertence inteiro à fase “não física” da história do universo). Podemos “cortar” uma parte ainda maior do início da história do universo, escolhendo  $\varrho_{\text{GQT}}$  cada vez menor. Assim, para o mesmo valor de  $\mu$ , se escolhermos por exemplo  $\varrho_{\text{GQT}} = 10^{-30} \times \varrho_{\text{P1}}$ , ficamos com  $\lambda = 7.855 \times 10^{-92}$ , etc. Estes resultados se encontram na Fig.6.7. É evidente que um procedimento completamente análogo é válido seja qual for o valor de  $\mu < 0$ .

Vale notar que quando  $\lambda = 0$  a Eq.(4.64) dá

$$\varrho_{\text{GQT}} = \frac{2\sqrt{3}}{\varkappa^2 L^2} |\mu|^{-1/2} .$$

Por outro lado, para pequenos valores de  $|\mu|$ , vemos da Eq.(6.25) que

$$\varrho_2 \approx \frac{4}{\varkappa^2 L^2} |\mu|^{-1/2}, \tag{6.31}$$

onde fixamos  $w_1 = 0$ . Poranto, no caso QTG “puro” em que  $\lambda = 0$ , para  $|\mu|$  pequeno, a entropia se anula muito perto do fim do período de aceleração inicial.

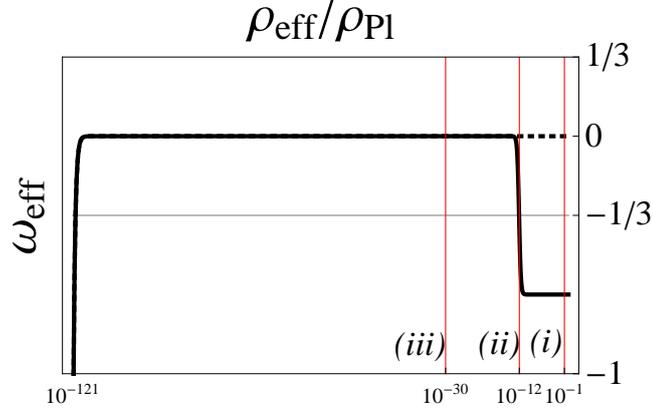


Figura 6.7: Equação de estado efetiva (linha sólida preta) e entropia do horizonte aparente (linhas vermelhas), para  $\mu = -10^{-218}$  e (i)  $\lambda = -1.047 \times 10^{-98}$ ; (ii)  $\lambda = -2.618 \times 10^{-110}$ ; (iii)  $\lambda = 7.855 \times 10^{-92}$ .

## 6.5 Gravitação Quase-Topológica e o princípio entrópico causal

### 6.5.1 O tempo como função da função de Hubble

Usando a equação de estado (6.2) e combinando ambas as Eqs.(4.26) de modo a eliminar  $\varrho_0$ , temos

$$(1 - 3\mu L^4 H^4) \dot{H} = -\frac{3}{2} H^2 (1 - \mu L^4 H^4) (1 + w_1) + \frac{\varkappa^2}{4} w_2. \quad (6.32)$$

Esta é a equação que rege a dinâmica do espaço-tempo. Ela fornece uma fórmula para  $t(H)$ , resultado da integral

$$\frac{3}{2}(1 + w_1)\mu L^4 t = \int \frac{1 - 3\mu L^4 H^4}{H^6 + p H^2 + q} dH, \quad (6.33)$$

onde

$$p = -1/L^4 \mu; \quad q = \varkappa^2 w_2 / 6L^4 \mu (1 + w_1). \quad (6.34)$$

O método de solução de (6.33) está apresentado no Apêndice H. O resultado final,

$$t = \frac{2}{3(1 + w_1)} \frac{1}{L^4 \mu} \left\{ -\frac{\alpha_1}{h_1} \operatorname{arc} \operatorname{cth} (H/h_1) + \chi \log \left( \frac{(H-x)^2 + y^2}{(H+x)^2 + y^2} \right) - \right. \\ \left. - 2v \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{H-x}{y} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{H+x}{y} \right) \right] + 2\pi v \right\}, \quad (6.35)$$

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

está representado na Fig.6.8(a), como a curva sólida, preta, acompanhada, em tracejado, pela solução da gravitação EH. Nós consideramos apenas o “ramo” direito da curva, em que  $H > h_1 > 0$ ; o ramo central, percorrendo um intervalo limitado de  $H$  em um tempo infinito, é simplesmente a solução do tipo ricochete mencionada no §6.1. Na Fig.6.8(a) temos  $t_0 < 0$ , mas podemos ajustar livremente a origem do tempo com uma constante de integração, o que é feito Fig.6.8(b).

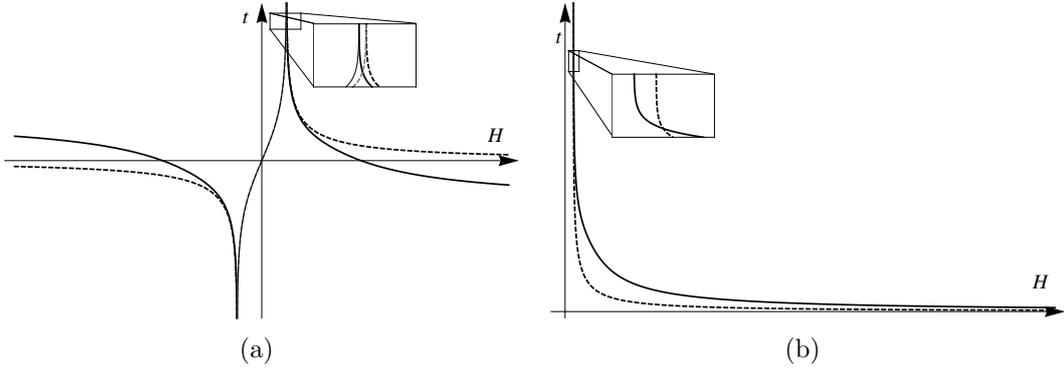


Figura 6.8: O tempo em função da função de Hubble.

### 6.5.2 Aproximação de primeira ordem para grandezas dinâmicas

A fórmula para  $t(H)$  dada pela Eq.(6.35) não pode ser invertida para obtermos  $H(t)$ , impedindo a descrição exata das grandezas dinâmicas como  $\rho_{\text{eff}}(t)$  e  $a(t)$ . Todavia é possível encontrar uma fórmula aproximada para  $H(t)$  se considerarmos o acoplamento gravitacional como perturbativo, i.e.  $|\mu| \ll 1$ , e expandirmos a Eq.(6.32) em séries de potência de  $\mu$ :

$$H(t; \mu) = H_0(t) + \mu H_1(t) + \mu^2 H_2(t) + \dots \quad (6.36)$$

Por economia de notação, vamos omitir temporariamente a escala da QTG,  $L$ . Até primeira ordem em  $\mu$ , temos

$$\dot{H}_0 + \mu \left( \dot{H}_1 - 3H_0^4 \dot{H}_0 \right) \approx -\frac{3}{2} [H_0^2 + \mu H_0 (2H_1 - H_0^5)] (1 + w_1) + \frac{\kappa^2}{4} w_2$$

ou seja, devemos resolver o par de equações

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= -\frac{3}{2} H_0^2 (1 + w_1) + \frac{\kappa^2}{4} w_2 \\ \dot{H}_1 &= 3\dot{H}_0 H_0^4 - \frac{3}{2} H_0 (2H_1 - H_0^5) (1 + w_1), \end{aligned}$$

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

cuja segunda equação se simplifica ao eliminarmos  $\dot{H}_0$  a partir da primeira:

$$\dot{H}_0 = -\frac{3}{2}H_0^2(1+w_1) - \frac{\varkappa^2}{4}w_2 \quad (6.37)$$

$$\dot{H}_1 = -3H_0^4 \left[ H_0^2(1+w_1) - \frac{\varkappa^2}{4}w_2 \right] - 3(1+w_1)H_0 H_1 . \quad (6.38)$$

A solução da equação de ordem zero,  $H_0(t)$ , é simplesmente a função de Hubble do caso EH, dada pela Eq.(6.6), como era de se esperar. A partir dela, podemos integrar a equação de primeira ordem em  $\mu$  (6.38), uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, cuja solução geral é dada por

$$H_1(t) = \exp \left[ \int^t P(x) dx \right] \left\{ \int^t Q(z) \exp \left[ -\int^z P(x) dx \right] dz + \text{constante} \right\} ,$$

onde

$$P(t) = -3(1+w_1)H_0(t-t_0) ; \quad Q(t) = -3H_0^4(t-t_0) \left[ H_0^2(t-t_0)(1+w_1) - \frac{\varkappa^2}{4}w_2 \right] .$$

Temos

$$\int P dt = -\varkappa \sqrt{\frac{3(1+w_1)w_2}{2}} \int \text{cth} \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] dt = -2 \log \left[ \text{sh} \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) \right] .$$

Analisemos agora a integral  $I = \int^t Q(z) \exp \left[ -\int^z P(x) dx \right] dz$ . Podemos escrever

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\varkappa^6 w_2^3}{24(1+w_1)^2} \int \text{sh}^2 \left[ (t-t_0)/\tau \right] \text{cth}^4 \left[ (t-t_0)/\tau \right] \left\{ \frac{1}{3} \text{cth}^2 \left[ (t-t_0)/\tau \right] - \frac{1}{2} \right\} dt \\ &= -\frac{\varkappa^6 \tau w_2^3}{24(1+w_1)^2} \left\{ \frac{1}{12} (t-t_0) - \frac{\tau}{24} \text{sh} \left[ 2 \frac{(t-t_0)}{\tau} \right] - \frac{5\tau}{18} \text{cth} \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] - \frac{\tau}{9} \text{csech}^2 \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] \text{cth} \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] \right\} . \end{aligned}$$

Portanto, definindo<sup>1</sup>  $\tilde{H}_1 = -\varkappa^6 w_2^3 \tau L^4 / 72 (1+w_1)^2$  e introduzindo a constante de integração arbitrária  $h$ , temos

$$\begin{aligned} H_1(t) = \tilde{H}_1 \left\{ \right. & h + \frac{t-t_0}{4\tau} - \frac{1}{8} \text{sh} \left[ \frac{2(t-t_0)}{\tau} \right] - \\ & \left. - \frac{1}{3} \text{cth} \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] \left( \text{csech}^2 \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] + \frac{5}{2} \right) \right\} \text{csech}^2 \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] \quad (6.39) \end{aligned}$$

A constante de integração  $h$  pode ser fixada como nula sem nenhum prejuízo, o que equivale a considerar apenas a solução da equação diferencial inhomogênea (6.38). Resta a liberdade sobre o tempo inicial,  $t_0$ , que fixamos de acordo com a Eq.(H.5) de maneira que a singularidade ocorra em  $t = 0$ .

Na Fig.6.9 traçamos, simultaneamente, a função de Hubble  $H_0(t)$  da gravitação de EH (linha pontilhada, cinza), a aproximação de primeira ordem  $H_0(t) +$

<sup>1</sup> Note que restauramos a unidade correta de  $H_1(t)$ , viz.  $[H_1] = [H_0] = L^{-1}$ .

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

$\mu H_1(t)$  (linha tracejada, preta) e a função de Hubble exata, obtida por inversão gráfica<sup>1</sup> da fórmula exata (6.35). Fica claro que a aproximação de primeira ordem é boa para tempos muito próximos e posteriores ao ponto  $t_*$  em que  $H_0(t) + \mu H_1(t)$  possui um máximo. Porém, para  $t < t_*$ , a aproximação se comporta de maneira muito problemática, e não podemos utilizá-la. O motivo da divergência entre amdas as curvas é que a função  $H_1(t)$  diverge mais rapidamente que o termo de ordem zero,  $H_0(t)$ , ao nos aproximarmos da singularidade; assim, quanto menor o valor de  $|\mu|$ , menor o valor de  $t_*$ .

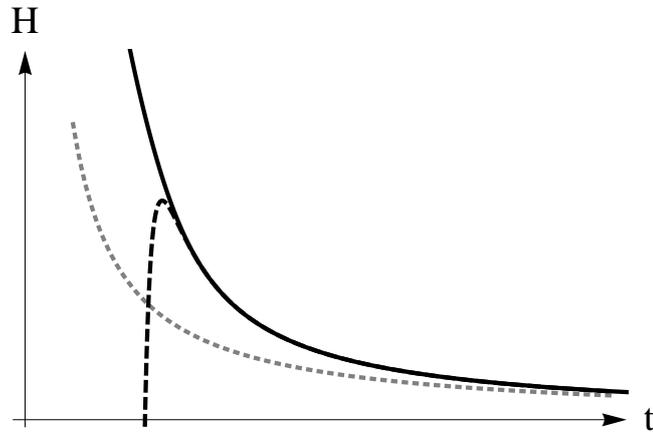


Figura 6.9: Função de Hubble  $H(t)$ : Na gravitação de EH (linha pontilhada, cinza) ; Em GQT, exata (linha preta sólida) ; Em GQT, com aproximação de primeira ordem em  $\mu$  (linha preta tracejada).

Tendo em mãos uma fórmula aproximada para a função de Hubble, fica dada a evolução temporal da densidade de energia. Em primeira ordem em  $\mu$ ,

$$\varrho = \frac{6}{\varkappa^2} (H_0 + \mu H_1)^2 \approx \frac{6}{\varkappa^2} H_0^2 + \frac{12}{\varkappa^2} \mu H_0 H_1 .$$

A função de ordem zero é dada pela Eq.(6.7), e podemos escrever, com (6.6) e (6.39), a função de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \varrho_1(t) = & \frac{\varkappa^4 w_2^3 L^4}{9(1+w_1)^3} \left\{ \frac{t-t_0}{4\tau} - \frac{1}{8} \operatorname{sh} \left[ \frac{2(t-t_0)}{\tau} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \operatorname{cth} \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] \left( \operatorname{csech}^2 \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] + \frac{5}{2} \right) \right\} \operatorname{csech}^2 \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] \operatorname{cth} \left[ \frac{t-t_0}{\tau} \right] . \end{aligned} \quad (6.40)$$

Na Fig.6.10 mostramos a comparação entre o comportamento de  $\varrho(t)$  na gravitação EH (linha cinza pontilhada), e em GQT (linhas pretas). A função exata

---

<sup>1</sup>Usando *Mathematica*.

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

$\rho_{\text{eff}}(t)$ , está representada pela linha sólida, obtida por inversão gráfica da função exata  $t(\rho_{\text{eff}})$ , Eq.(6.35), enquanto a correção em primeira ordem em  $\mu$  é dada pela linha preta tracejada. O comportamento problemático de  $H_0(t) + \mu H_1(t)$  induz a discrepância entre a densidade exata e a aproximada.

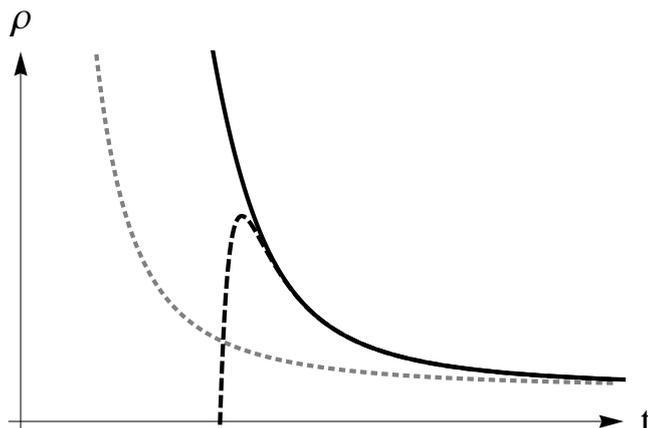


Figura 6.10: Evolução da densidade de energia (efetiva) para gravitação EH (linha cinza pontilhada) ; Para GQT, exata (linha preta contínua) ; Para GQT, em primeira ordem em  $\mu$  (linha preta tracejada).

Para determinar a correção de primeira ordem para o fator de escala, escrevemos  $a(t) = e^{A(t)}$ , de forma que  $H(t) = \dot{A}(t)$ , e usamos as fórmulas (6.6) e (6.39). Em ordem zero, temos o fator de escala de EH, Eq.(6.8), e em primeira ordem,

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \int H_1 dt \\ &= \frac{\tilde{H}_1}{12} \tau \left\{ \text{cth} \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) \left[ 5 \text{cth} \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) - 3 \frac{(t+4h\tau)}{\tau} \right] + \text{csech}^4 \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Como

$$a(t) = \exp [A_0(t) + \mu A_1(t) + \dots] \approx a_0(t) [1 + \mu A_1(t)] ,$$

temos

$$\begin{aligned} a(t) &\approx a_0^{(0)} \text{sh}^{\delta_0} \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) \left\{ 1 + \right. \\ &+ \mu \frac{\tilde{H}_1}{12} \tau \left[ \text{cth} \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) \left[ 5 \text{cth} \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) - 3 \frac{(t+4h\tau)}{\tau} \right] + \text{csech}^4 \left( \frac{t-t_0}{\tau} \right) \right] \left. \right\} . \end{aligned} \quad (6.42)$$

Na Fig.6.11, mostramos a evolução temporal do fator de escala, tanto para a gravitação EH (curva cinza pontilhada), i.e.  $a_0(t)$ , quanto a correção em primeira

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

ordem em  $\mu$ , i.e.  $a(t) = a_0(t) + \mu a_1(t)$  (curva sólida). Vemos que ela falha à medida que se aproxima muito da singularidade. Ao contrário do caso de  $H(t)$  (e de  $\varrho_{\text{eff}}(t)$ , discutido mais adiante), não podemos desenhar o gráfico de  $a(t)$  exato, pois precisaríamos de uma *fórmula* diferenciável de  $H(t)$  exata, impossibilitando o método de inversão gráfica utilizado nas Figs.6.10 e 6.9.

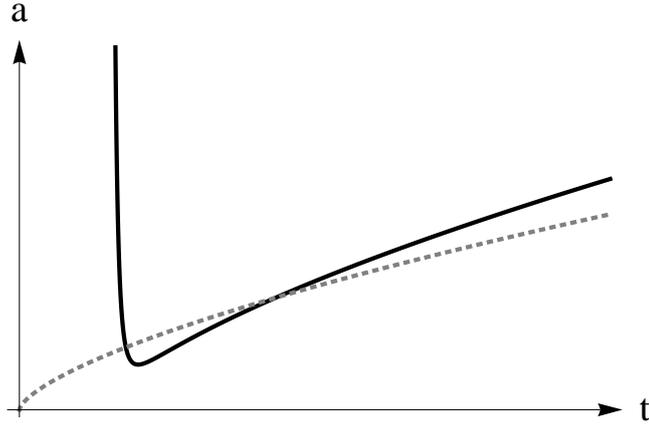


Figura 6.11: Evolução do fator de escala para gravitação EH (linha cinza pontilhada) e com correção de primeira ordem em  $\mu$  (linha sólida).

### Correção para a constante cosmológica.

Quando  $t \rightarrow \infty$ , o espaço-tempo se torna de Sitter com constante cosmológica efetiva

$$\Lambda_{\text{eff}} = 3H^2 \approx 3H_0^2 + \mu 6H_0 H_1 .$$

A correção de primeira ordem pode ser obtida da Eq.(6.39), se tomamos o limite  $t \rightarrow \infty$ :

$$H_1 \rightarrow -\frac{\tilde{H}_1}{4} = \frac{\varkappa^6 w_2^3 \tau L^4}{288(1+w_1)^2} .$$

Com isso,

$$\Lambda_1 = 6H_0 H_1|_{\infty} = \sqrt{\frac{w_2}{6(1+w_1)}} \frac{\varkappa^6 w_2^3 \tau L^4}{48(1+w_1)^2} = \frac{\Lambda_0^3 L^4}{9} . \quad (6.43)$$

onde usamos a Eq.(6.5). Logo, para  $|\mu| \ll 1$ , podemos inverter a relação (4.33), para obter a constante cosmológica observável a partir da constante cosmológica nua:

$$\Lambda_{\text{eff}} \approx \Lambda_0 + L^4 \mu \frac{\Lambda_0^3}{9} . \quad (6.44)$$

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

Este mesmo resultado, evidentemente, pode ser encontrado ao se resolver a equação cúbica (4.33), que só possui uma raiz real, para  $\Lambda_{\text{eff}}$ . Repare que como  $\mu < 0$ , observa-se uma constante cosmológica *menor* do que a presente na ação.

### 6.5.3 Validade da aproximação

Vimos que as fórmulas aproximadas para as grandezas físicas em função do tempo, derivadas, no parágrafo anterior deixam de ser válidas nas vizinhanças da singularidade, e é importante analisar mais detalhadamente até onde elas são de fato úteis. Mais especificamente, desejamos responder se temos, por exemplo, fórmulas válidas das grandezas físicas como funções do tempo durante o período inicial de aceleração.

Vamos considerar que as aproximações de primeira ordem são válidas para  $t > t_*$ , onde  $t_*$  é o instante em que a curva  $\varrho_0(t) + \mu\varrho_1(t)$  possui um máximo. Essa escolha se justifica porque para  $t < t_*$  a aproximação chega a ser qualitativamente errada: enquanto a função exata é sempre decrescente, antes de  $t_*$  a aproximação fornece uma função crescente. Além disso, como se pode ver das Figs.6.10 e 6.12, a curva aproximada em  $t_*$  permanece razoavelmente próxima da curva exata.

Após derivarmos a função  $\varrho_0(t) + \mu\varrho_1(t)$  dada pelas Eqs.(6.7) e (6.40), e expandirmos para pequenos valores de  $t$ , ao igualar o resultado<sup>1</sup> a zero — condição para se ter um extremo — nos deparamos com uma equação (bi)quadrática para  $t$ :

$$\left[ \frac{1080(1+w_1)^{3/2}}{\sqrt{6}w_2^{5/2}z^5L^4\mu} + 7 \right] (t - t_0)^4 + 50\tau^3 (t - t_0)^2 + 30\tau^5 = 0 .$$

O termo de menor ordem em  $|\mu|$  obtido das soluções reais desta equação nos dá o valor aproximado de  $t_*$ :

$$t_* \approx (2(1 + w_1)^{3/8} + \pi) \frac{\sqrt{2}}{3(1 + w_1)} L|\mu|^{1/4} . \quad (6.45)$$

Vemos que de fato  $t_* \rightarrow 0$  à medida que  $\mu \rightarrow 0$ , e a qualidade da aproximação de primeira ordem pode ser aumentada indefinidamente diminuindo-se o acoplamento gravitacional.

Entretanto, sabemos dos §§6.4.1, 6.4.3 que ao diminuirmos  $|\mu|$  fazemos com que o período de aceleração inicial termine cada vez mais cedo (isto é, em densidades de energia cada vez maiores). Para calcular o instante  $t_{\text{ac}}$  em que termina a aceleração, substituímos a densidade (6.31) na Eq.(6.35), e expandimos para

---

<sup>1</sup> O processo é tedioso, mas trivial. Trata-se da derivação e expansão de produtos de funções trigonométricas usuais.

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

pequenos valores de  $|\mu|$ . Tomando apenas a menor potência de  $|\mu|$ , temos<sup>1</sup>

$$t_{\text{ac}} \approx \frac{(\sqrt{3} + \pi)\sqrt{2}}{3(1 + w_1)} L|\mu|^{1/4}. \quad (6.46)$$

Assim, quando  $w_1 = 0$ , temos que  $t_*/t_{\text{ac}} \approx 1.05$ , ou seja:  $t_{\text{ac}} < t_*$ . Conclui-se portanto que *não podemos descrever o período de aceleração inicial usando a aproximação de primeira ordem em  $|\mu|$ ; esta vale somente a partir de um instante (muito ligeiramente) posterior ao fim da aceleração.*

Uma outra maneira de se visualizar este fato é observando os gráficos de  $\varrho_{\text{eff}}(t)$  aproximados, para diversos valores de  $\mu$ , e comparando a densidade máxima a que chega a aproximação com a densidade necessária para que se esteja no período de aceleração. Esta comparação está feita na Fig.6.12, para três valores de  $\mu$ . Em nenhum dos casos a aproximação vale na faixa de densidades de energia suficientemente grandes para que descrevamos a primeira época de aceleração — em outras palavras, em nenhum dos casos o valor do extremo da linha preta tracejada ultrapassa a linha cinza horizontal. É válido conferir que as Eqs.(6.45) e (6.46) concordam com os gráficos de forma admirável. Também é válido notar que no instante  $t_*$  a diferença entre os valores exato e aproximado de  $\varrho_{\text{eff}}$  é pequena e diminui com  $|\mu|$ .

Apesar desta limitação com respeito ao período de aceleração, é todavia sempre possível ajustar  $\lambda$  sem mudar  $\omega_{\text{eff}}(\varrho_{\text{eff}})$ , de forma a posicionar  $\varrho_{\text{GQT}}$  em uma região onde a aproximação é válida. Por exemplo, no caso da Fig.6.7(iii): para as densidades permitidas pelas restrições entrópicas,  $\varrho_{\text{eff}} < \varrho_{\text{GQT}} \sim 10^{-30} \times \varrho_{\text{P1}}$ , a aproximação é boa, como se pode ver na Fig.6.12(a).

Além disso, vale ressaltar que o fato de não conseguirmos usar as fórmulas do §6.5.2 para descrever o período de aceleração não significa de forma alguma que há algum problema com a dinâmica do período em si, nem tampouco que não poderíamos descrevê-lo com uma aproximação, digamos, de segunda ordem em  $|\mu|$ . E na verdade, como veremos mais adiante, nem mesmo seria grande vantagem caso a aproximação descrevesse a aceleração inicial.

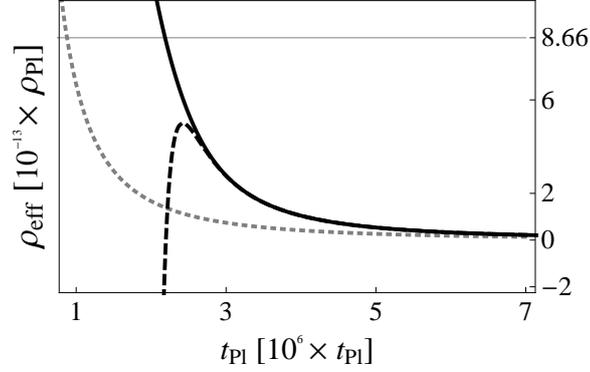
### 6.5.4 Correções quânticas no tamanho do universo observável

Talvez a característica mais importante das correções da GQT seja a mudança que ela induz no raio do universo observável. Trata-se de um exemplo notável em que correções quânticas (na ação) modificam a estrutura de maior escala possível.

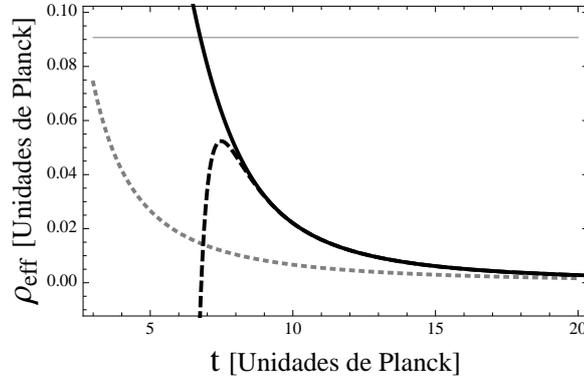
---

<sup>1</sup> Ver a Eq.(H.10).

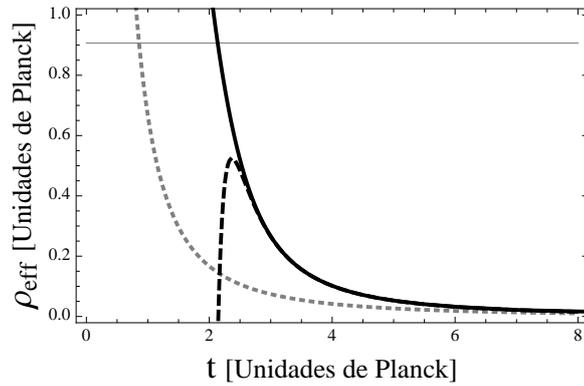
## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear



(a)



(b)



(c)

Figura 6.12: Validade da aproximação de  $\varrho_{\text{eff}}(t)$ . As linhas pretas sólidas representam a função exata  $\varrho_{\text{eff}}(t)$  obtida da inversão gráfica da função  $t(\varrho_{\text{eff}})$  dada pela Eq.(6.35). A aproximação de primeira ordem,  $\varrho_0(t) + \mu\varrho_1(t)$  é representada pelas linhas pretas tracejadas; as linhas cinzas pontilhadas dão a função de ordem zero,  $\varrho_0(t)$  válida na gravitação EH; as linhas finas horizontais marcam os valores de  $\varrho_{\text{eff}}$  para os quais  $\omega_{\text{eff}} = -1/3$ . (a)  $\mu = -10^{-218}$ , (b)  $\mu = -10^{-240}$ , (c)  $\mu = -10^{-242}$

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

### O horizonte de partículas.

O raio comóvel do horizonte (passado) de eventos,

$$r_p(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.47)$$

pode ser calculado aproximadamente usando os resultados do §6.5.2:

$$r_p(t) \approx \int_0^t \frac{dt}{a_0(t) [1 + \mu A_1(t)]} \approx \int_0^t \frac{[1 - \mu A_1(t)]}{a_0(t)} dt = r_p^{(0)}(t) + \mu r_p^{(1)}(t),$$

onde

$$r_p^{(1)}(t) \equiv \int_{t_*}^t \frac{A_1(t)}{a_0(t)} dt, \quad (6.48)$$

e a integral de ordem zero,

$$r_p^{(0)}(t) = \frac{1}{a_0^{(0)}} \int_0^t [\text{sh}(x/\tau)]^{-\delta} dx, \quad (6.49)$$

é o raio do horizonte na gravitação de EH. Sua solução é dada pela Eq.(I.4):

$$r_p^{(0)}(t) = -\frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] + \frac{\tau}{2a_0^{(0)}} B \left( \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2} \right), \quad (6.50)$$

de maneira que o raio físico,  $l_p(t) = a(t)r_p(t)$ , em gravitação EH, mede

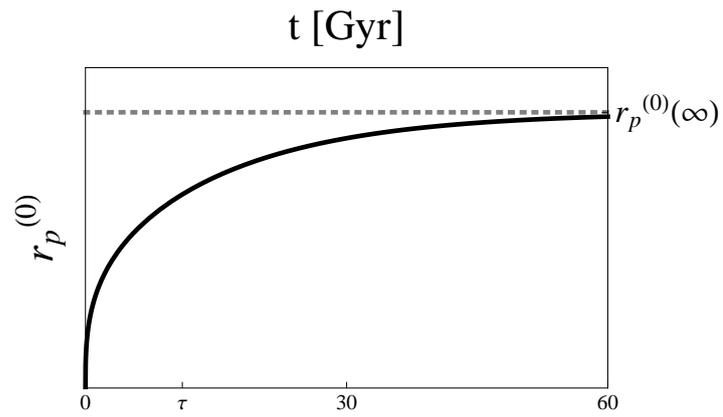
$$l_p^{(0)}(t) = -\frac{\tau}{\delta} \text{th}^\delta(t/\tau) {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] + \frac{\tau}{2} \text{sh}^\delta(t/\tau) B \left( \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2} \right). \quad (6.51)$$

Se  $\delta < 1$ , quando  $t = 0$ ,  $l_p^{(0)} = 0$ , e quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $l_p^{(0)} \rightarrow \infty$ . Na Fig.6.13 se encontram os gráficos de  $r_p^{(0)}(t)$  e  $l_p^{(0)}(t)$ , para  $\delta = 2/3$  e  $\tau$  dado pela Eq.(6.11).

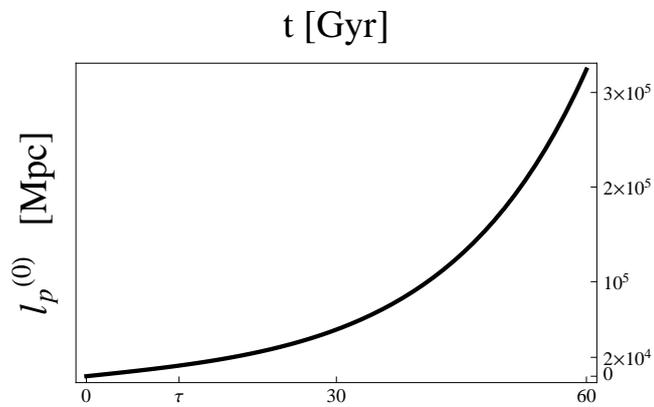
O termo de primeira ordem (6.48) é dado pela Eq.(I.8):

$$\begin{aligned} r_p^{(1)}(t) = & -\frac{\tilde{H}_1 \tau^2}{12a_0^{(0)}} \left\{ \frac{5}{\delta} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{3+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{4+\delta} [\text{ch}(t/\tau)]^{-(4+\delta)} {}_2F_1 \left[ \frac{4+\delta}{2}, \frac{5+\delta}{2}; \frac{6+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] - \frac{3}{\delta} (t/\tau) [\text{sh}(t/\tau)]^{-\delta} - \\ & \left. - \frac{3}{\delta^2} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] \right\} - \eta^{(1)}(t_*). \quad (6.52) \end{aligned}$$

O limite inferior da integral deve ser posicionado sobre  $t_*$ , pois antes disso sabemos que a aproximação não é vádua (cf. também a Eq.(I.9)).



(a)



(b)

Figura 6.13: Raio do horizonte de eventos passado em gravitação EH, com  $\delta = 2/3$  e  $\tau \approx 11.1$ Gyr. (a) Raio comóvel ; (b) Raio físico, em Mpc.

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

### O horizonte futuro.

O raio comóvel do horizonte de eventos futuro é dado por

$$r_f(t) = \int_t^\infty \frac{dt}{a(t)}.$$

Em ordem zero, as integrais calculadas no Apêndice I dão

$$r_f^{(0)}(t) = \frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \left( \frac{1+\delta}{2} \right); \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right]. \quad (6.53)$$

Quando  $t = 0$ ,  $r_f^{(0)}(0) = \frac{t_0}{2a_0^{(0)}} \text{B} \left( \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2} \right) = r_p^{(0)}(\infty)$ ; e quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $r_f^{(0)} \rightarrow 0$ .

O raio físico do horizonte de eventos futuro,

$$l_f^{(0)}(t) = \frac{\tau}{\delta} \text{th}^\delta(t/\tau) {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \left( \frac{1+\delta}{2} \right); \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right], \quad (6.54)$$

tem como assintóticos  $l_f^{(0)} \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow 0$  e  $l_f^{(0)} \rightarrow \tau/\delta$  para  $t \rightarrow \infty$ . Logo existe um horizonte de eventos futuro em gravitação de EH, o que era de se esperar, uma vez que o espaço-tempo é assintoticamente de Sitter. As funções  $r_f^{(0)}(t)$  e  $l_f^{(0)}(t)$  estão representadas na Fig.6.14 para os mesmos valores físicos dos parâmetros da Fig.6.13.

O termo de primeira ordem em  $\mu$  é dado pelo análogo da Eq.(6.52):

$$\begin{aligned} r_f^{(1)}(t) = & \frac{\tilde{H}_1 \tau^2}{12a_0^{(0)}} \left\{ \frac{5}{\delta} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{3+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{4+\delta} [\text{ch}(t/\tau)]^{-(4+\delta)} {}_2F_1 \left[ \frac{4+\delta}{2}, \frac{5+\delta}{2}; \frac{6+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] - \frac{3}{\delta} (t/\tau) [\text{sh}(t/\tau)]^{-\delta} - \\ & \left. - \frac{3}{\delta^2} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] \right\} + \eta^{(1)}(\infty). \quad (6.55) \end{aligned}$$

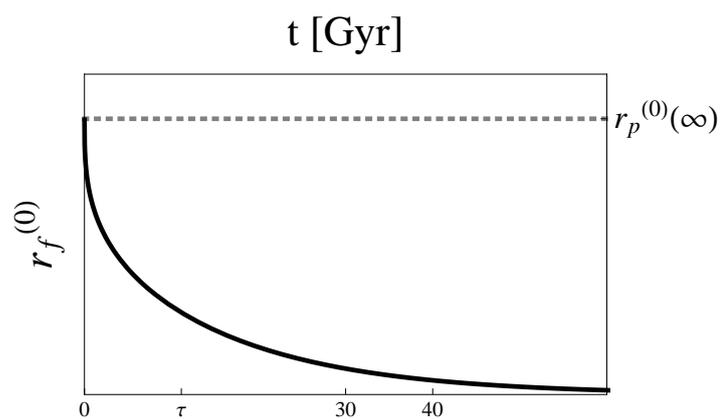
Note que  $\eta^{(1)}(\infty)$  (assim como  $\eta^{(0)}(\infty)$ ) se anula. De fato, como o argumento das hipergeométricas todos tendem a  $1/\text{ch}^2(t/\tau) \rightarrow 0$ , temos  ${}_2F_1[\dots] \rightarrow 1$ . Multiplicando cada hipergeométrica há termos  $\text{ch}^{-a}(t/\tau) \rightarrow 0$ , pois  $a > 0$ . O termo sem hipergeométrica,  $\sim t \text{sh}^{-\delta}(t/\tau)$  também tende a zero, pois o coseno hiperbólico diverge exponencialmente. Logo,  $\eta^{(1)}(\infty) \approx 0$ .

Desde que  $t$  não seja muito pequeno, não é necessário preocupar-se com o limite da aproximação, e podemos assim calcular a correção para o raio *atual* do horizonte futuro. Em primeira ordem, temos

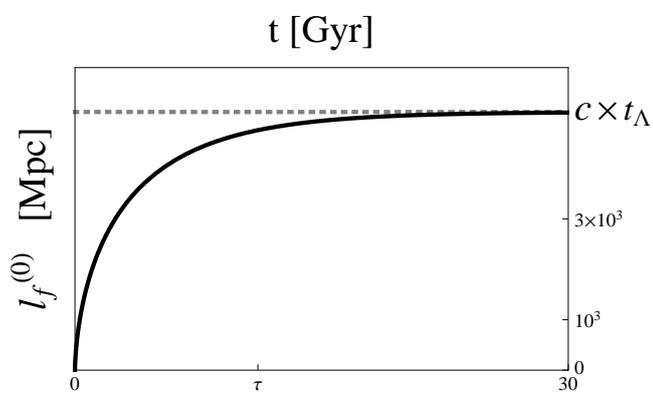
$$l_f(t) \approx a_0(t) r_f^{(0)}(t) + \mu \left[ a_0(t) r_f^{(1)}(t) + a_1(t) r_f^{(0)}(t) \right], \quad (6.56)$$

e hoje, em  $t = 13.8\text{Gyr}$ ,

$$l_f \approx 4.90 \times 10^3 \text{Mpc} + L^4 \mu \times 1.21 \times 10^{-18} \times \text{Mpc}^{-3}. \quad (6.57)$$



(a)



(b)

Figura 6.14: Raio do horizonte de eventos futuro em gravitação EH, com  $\delta = 2/3$  e  $\tau \approx 11.1$ Gyr. (a) Raio comóvel ; (b) Raio físico, em Mpc.

### 6.5.5 Consequências de GQT para o princípio entrópico causal

Neste parágrafo, usamos sempre os valores físicos de  $w_{1,2}$  determinados no §6.1.

#### Gravitação de Gauss-Bonnet

Vamos analisar as consequências da gravitação de Gauss-Bonnet, i.e. com  $\lambda \neq 0$  e  $\mu = 0$ , para as predições do princípio entrópico causal discutido no §6.3. O tempo conforme é evidentemente dado pela mesma fórmula da gravitação EH, Eq.(6.13); será útil, todavia, reescrevê-la como uma função apenas de  $\varrho_0$ , o que podemos fazer usando  $\text{ch}^{-2}(t/\tau) = 1 - \text{th}^2(t/\tau) = 1 - w_2/[(1 + w_1)\varrho_0(t)]$ :

$$\eta^{(0)}(\varrho_0) = -\frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} \left[ 1 - \frac{w_2}{(1+w_1)\varrho_0} \right]^{-\delta/2} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; \frac{2+\delta}{2}; 1 - \frac{w_2}{(1+w_1)\varrho_0} \right]. \quad (6.58)$$

Apesar da dinâmica idêntica à da gravitação EH, quando  $\lambda > 0$  a entropia do horizonte de eventos impõe restrições sobre  $\varrho_0$ , como visto no §4.5 :

$$\varrho_0 \leq \varrho_{\text{GB}} = \frac{3}{\varkappa^2 L^2 \lambda}. \quad (6.59)$$

Repare que existe um valor máximo de  $\lambda$  consistente com o modelo cosmológico adotado: como pode ser visto da Eq.(6.7), a densidade de energia está sempre limitada inferiormente pela densidade final (6.4),  $\varrho_{\text{GB}} \geq \varrho_{\Lambda}$ , portanto

$$\lambda \leq \frac{3}{\varkappa^2 L^2 \varrho_{\Lambda}} = \frac{3(1+w_1)}{\varkappa^2 L^2 w_2}. \quad (6.60)$$

Usando a normalização em que  $L$  é o raio do vácuo dS final, i.e.  $L = \sqrt{3/\Lambda_0} = \varkappa^{-1} \sqrt{6(1+w_1)/w_2}$ , temos que  $\lambda \leq 1/2$ .

O instante  $t_{\text{GB}}$  em que  $\varrho(t_{\text{GB}}) = \varrho_{\text{GB}}$  é dado pela Eq.(6.7):

$$t_{\text{GB}} = \tau \text{arc cth} \left[ \sqrt{\frac{3(1+w_1)}{w_2 \varkappa^2 L^2 \lambda}} \right]; \quad (6.61)$$

a Eq.(6.60) significa apenas que  $t_{\text{GB}} < \infty$ .

Usando de um raciocínio análogo ao apresentado no §6.4.3, não é fisicamente razoável que  $\lambda$  seja grande o suficiente para que a entropia do horizonte aparente seja negativa durante épocas bem fundamentada da evolução do universo. Vamos supor — já com bastante exagero — que  $t_{\text{GB}}$  seja menor que o tempo de recombinação  $t_{\text{rec}} \approx 4 \times 10^{-3} \text{ Gyr}$ ,<sup>1</sup> logo

$$\text{arc cth} \left[ \sqrt{\frac{3(1+w_1)}{w_2 \varkappa^2 L^2 \lambda}} \right] \lesssim 3.60 \times 10^{-4}, \quad \text{ou} \quad \lambda \lesssim \frac{1}{2 \text{cth}^2(3.60 \times 10^{-4})}.$$

<sup>1</sup> Ver Weinberg (2008), pg. 124.

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

Para  $L = \sqrt{3/\Lambda_0}$  isto dá  $\lambda \lesssim 6.46 \times 10^{-8}$ .

Sendo forçados a ignorar a era inicial  $t < t_{\text{GB}}$  quando a entropia do horizonte aparente é negativa, a ponta inferior do diamante causal deve ser posicionada não mais sobre a singularidade em  $t = 0$ , mas sobre o instante  $t_{\text{GB}}$ . O número  $\eta(t_{\text{GB}})$  pode ser avaliado de duas maneiras: usando (6.61) na Eq.(6.13) ou, alternativamente, usando diretamente o valor máximo da densidade de energia (4.66) na Eq.(6.58):

$$\eta^{(0)}(\rho_{\text{GB}}) = -\frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} \left[ 1 - \frac{w_2 \kappa^2 L^2 \lambda}{3(1+w_1)} \right]^{-\delta/2} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; \frac{2+\delta}{2}; 1 - \frac{w_2 \kappa^2 L^2 \lambda}{3(1+w_1)} \right], \quad (6.62)$$

de forma que o intervalo de tempo conforme decorrido desde  $t_{\text{GB}}$  até  $t \rightarrow \infty$  fica dado por  $\Delta_{\text{GB}}\eta^{(0)} = \eta^{(0)}(\infty) - \eta(t_{\text{GB}})$ ,

$$\Delta_{\text{GB}}\eta^{(0)} = -\eta(t_{\text{GB}}) = \frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} \left[ 1 - \frac{w_2 \kappa^2 L^2 \lambda}{3(1+w_1)} \right]^{-\delta/2} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \left( \frac{1+\delta}{2} \right); \frac{2+\delta}{2}; 1 - \frac{w_2 \kappa^2 L^2 \lambda}{3(1+w_1)} \right].$$

Usando (6.12) temos então a evolução do raio do diamante causal, e podemos calcular a evolução de seu volume comóvel.

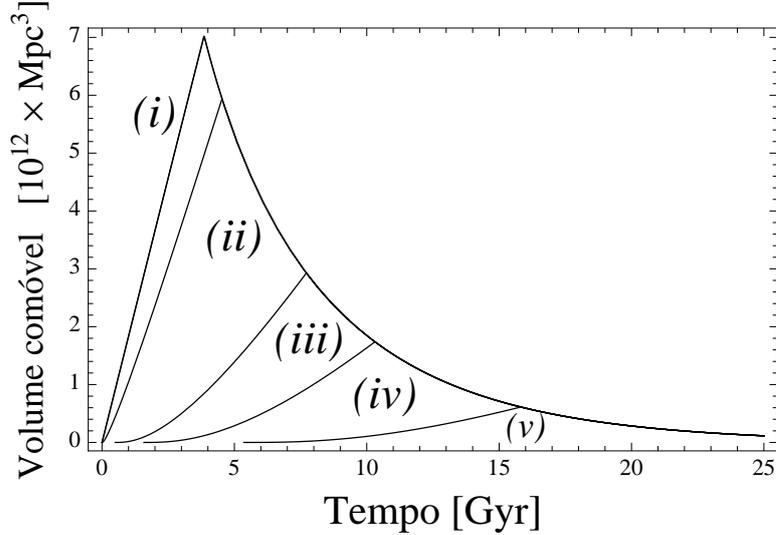


Figura 6.15: Evolução do volume comóvel do diamante causal em gravitação GB para diversos valores do acoplamento  $\lambda$ ; Em todos os gráficos a constante cosmológica tem o valor observado, i.e.  $\Lambda = 3.142 \times 10^{-122} \times l_{\text{Pl}}^{-2}$ . Ver tabela abaixo.

Para que fiquem claros os efeitos do termo de GB na evolução do volume comóvel (6.18), vamos fixar a constante cosmológica como tendo o valor observável  $\Lambda = 3.142 \times 10^{-122} \times l_{\text{Pl}}^{-2}$ , e realizar os gráficos correspondentes à curva

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

(a) da Fig.6.3 para diferentes valores de  $\lambda$ . O resultado é dado na Fig.6.15: A curva (i) representa o volume comóvel do caso EH (Fig.6.3(a)); as curvas subsequentes representam os volumes dos diamantes de alturas  $\Delta_{\text{GB}}\eta$ , com início em  $t_{\text{GB}}$ , para diferentes valores de  $\lambda$ , de acordo com a tabela abaixo.

	$\lambda$	$t_{\text{GB}}$ [Gyr]	$t_{\text{max}}$ [Gyr]
(i)	0	0	3.86
	$\frac{3}{4} (10^2 \times \frac{l_{\text{Pl}}}{L})^2$	$1.39 \times 10^{-58}$	*
(ii)	$10^{-7}$	$4.98 \times 10^{-3}$	4.53
(iii)	$10^{-3}$	$4.98 \times 10^{-1}$	7.72
(iv)	$10^{-2}$	1.58	10.31
(v)	$10^{-1}$	5.35	15.82

\* Diferença para EH apenas na 14<sup>a</sup> casa decimal

Quanto maior o valor de  $\lambda$ , mais tardio o início do diamante e portanto menor sua altura e seu volume máximo — situação representada esquematicamente na Fig.6.16 — causando o “rebaixamento” dos gráficos do volume comóvel na Fig.6.15. As conclusões de Bousso et al. se baseiam no fato de que, para o valor observado de  $\Lambda$ , o diamante causal possui seu volume máximo no instante em que há maior produção de entropia (em  $t_{\text{max}} \approx 3.86$  Gyr), e portanto o deslocamento para tempos mais tardios do instante de volume máximo compromete os resultados do princípio causal entrópico. Nossa hipótese aqui é de que o princípio causal entrópico *é válido*, o que leva às conclusões seguintes.

Em primeiro lugar, uma vez que aumentar o valor de  $\lambda$  faz com que o instante de pico de  $V_c(t)$  se desloque para a direita, vemos que só é possível manter a maximização simultânea de entropia produzida (pela matéria) e volume do diamante causal se, ao aumentarmos  $\lambda$ , deslocarmos para a *esquerda* o valor “original” (i.e. correspondendo a um diamante entre  $t = 0$  e  $t = \infty$ ) do máximo de  $V_c(t)$ . Assim, de acordo com a Fig.6.3, conclui-se que *maiores valores de  $\lambda$  acarretam em uma constante cosmológica cada vez maior, segundo o princípio entrópico causal.*

Por outro lado, lembramos que não podemos aumentar  $\lambda$  inadvertidamente, pois não queremos que a densidade máxima de energia,  $\rho_{\text{GB}}$ , seja demasiadamente pequena. De acordo com a análise feita na Fig.4.2, para que tenhamos um valor limite de  $\rho_{\text{GB}} = 10^{-4} \times \rho_{\text{Pl}}$ , devemos ter  $\lambda = \frac{3}{4} (10^2 \times \frac{l_{\text{Pl}}}{L})^2 = 7.86 \times 10^{-119}$ . O gráfico do volume causal para um valor tão pequeno de  $\lambda$  é virtualmente indistinguível do gráfico de EH descrito na curva (i) da Fig.6.15 (ver também a tabela acima) — e dessa forma valem as conclusões de Bousso et al. Porém o diamante de fato se inicia em um instante posterior à singularidade:

$$t_{\text{GB}} = 1.39 \times 10^{-58} \text{ Gyr} = 81.65 \times t_{\text{Pl}} .$$

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

Por fim, insistimos que valores negativos de  $\lambda$  não levam a nenhuma restrição na densidade de energia e são, no que diz respeito à entropia de horizontes, qualitativamente idênticos ao caso EH. Em particular,  $\lambda < 0$  pode ter valores muito grandes, em módulo.

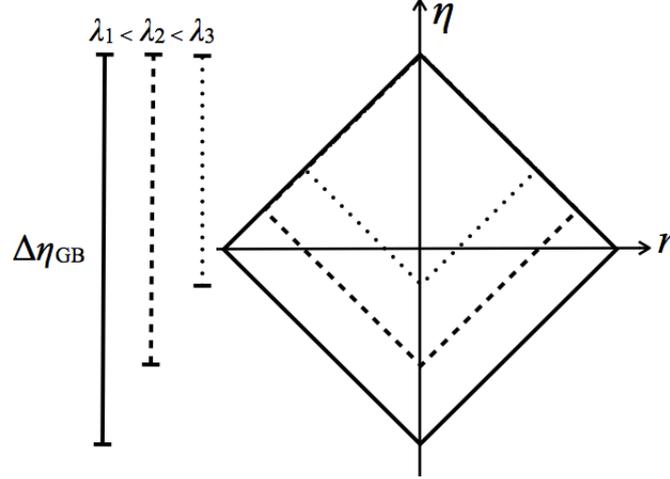


Figura 6.16: Diagramas de Penrose de diamantes causais distintos, começando em tempos  $t_{GB}$  cada vez maiores para maiores valores de  $\lambda$ . O raio máximo (correspondendo às quinas) dos diamantes são cada vez menores, assim como seus volumes máximos.

### Diamantes causais em GQT

Além das correções devidas ao reposicionamento da ponta inferior do diamante causal, análogas ao que foi apresentado acima para a gravitação de Gauss-Bonnet, em GQT o tempo sofre uma correção de primeira ordem em  $\mu$ , dada pela Eq.(I.8):

$$\begin{aligned} \eta(t) \approx & -\frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \left( \frac{1+\delta}{2} \right); \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] - \\ & -\mu \frac{\tilde{H}_1 \tau^2}{12 a_0^{(0)}} \left\{ \frac{5}{\delta} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{3+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4+\delta} [\text{ch}(t/\tau)]^{-(4+\delta)} {}_2F_1 \left[ \frac{4+\delta}{2}, \frac{5+\delta}{2}; \frac{6+\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{\delta} (t/\tau) [\text{sh}(t/\tau)]^{-\delta} - \frac{3}{\delta^2} [\text{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; \frac{1}{\text{ch}^2(t/\tau)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Não é possível agora determinar uma fórmula análoga à Eq.(6.62), com  $\eta(t)$  em função apenas da densidade de energia limite  $\varrho_{GQT}$ . Para determinar o instante

## 6. Cosmologia Quase-Topológica e a Equação de Estado Linear

---

$t_{\text{GQT}}$  no qual a entropia do horizonte aparente se anula, devemos substituir a densidade de energia (4.64) na Eq.(6.35).

Porém antes de irmos adiante, uma breve reflexão se faz necessária. Qualquer que seja o valor de  $t_{\text{GQT}}$ , sabemos que a aproximação acima só pode descrever o universo posterior ao período inicial de aceleração. Assim, para realizar um procedimento similar ao do caso de Gauss-Bonnet, e posicionar a ponta inferior do diamante causal sobre o instante em que a entropia se anula, precisamos escolher  $\lambda$  de forma que se tenha  $t_{\text{ac}} < t_{\text{GQT}}$ . Mas esta escolha implica em considerar o período inicial de aceleração desprovido de sentido físico ao dizer que, durante todo ele, a entropia do horizonte aparente é negativa.

Se por outro lado decidimos manter a entropia positiva durante o período de aceleração, escolhendo  $t_{\text{GQT}} < t_{\text{ac}}$ , não nos resta outra escolha que não posicionar a ponta inferior do diamante causal sobre o menor instante em que podemos usar as fórmulas acima, viz.  $t_*$ . À primeira vista, esta parece uma escolha muito pouco natural, mas graças ao fato anunciado no §6.5.3, posicionar o diamante sobre  $t_*$  é na prática equivalente a posicioná-lo sobre  $t_{\text{ac}}$ . Por sua vez, isto pode ser interpretado como uma escolha de ignorar o período inflacionário, o que é de fato assumido pelo princípio entrópico causal! O término da inflação (em teorias inflacionárias realísticas), ao final do ‘reheating’, apresenta entropia a mais baixa possível. Só a partir daí começa a se dar a produção de entropia pelo (novo) conteúdo material do universo, que é usada como medida de probabilidade da existência de observadores e acarreta na predição do valor de  $\Lambda$ . A bem da verdade o modelo cosmológico dado pela Eq.(6.2) em gravitação EH ignora até mesmo o período de dominação da radiação. Vamos portanto preservar o caráter físico do período “inflacionário” criado pela GQT.

Na ponta superior do diamante, posicionamos então  $t \rightarrow \infty$ , e  $\eta(\infty) \approx 0$ . Na ponta inferior colocamos  $t_*$ , e temos

$$\Delta_{\text{GQT}}\eta = -\eta(t_*).$$

A menor potência de  $|\mu|$  em  $\eta^{(1)}(t_*)$  para  $|\mu| \ll 1$  pode ser obtida facilmente a partir da Eq.(I.9):  $-(3 + \delta)/4 = -11/12$  para  $\delta = 2/3$ . Assim, apesar de  $\eta^{(1)}(t)$  divergir quando  $t \rightarrow 0$ , o produto  $\mu \eta^{(1)}(t_*)$  é ainda pequeno:

$$\mu \eta^{(1)}(t_*) \sim |\mu|^{1/12}.$$

Logo o termo de correção é pequeno ao longo de todo o diamante causal, e para os valores de  $\mu$  muito pequenos estimados no §6.4.3 vemos que a correção de GQT não é grande o suficiente para modificar as conclusões do §6.3; o princípio entrópico causal, portanto, continua válido.

# Capítulo 7

## Conclusão

A presente dissertação teve como objetivo um estudo “quase-completo” dos diversos efeitos cosmológicos induzidos pelos termos quadráticos e cúbicos no tensor de curvatura da Ação Quase-Topológica (4.7).

### 7.1 Principais resultados

Partimos no §4.2 da própria formulação do problema de se definir uma Lagrangeana de gravitação estendida que fosse causal e apresentasse correções de natureza quântica à ação de Einstein-Hilbert. Tendo encontrado esta Lagrangeana, passamos a analisar sistematicamente as suas consequências.

#### Método do superpotencial para GQT.

De importância comparável à obtenção das equações de movimento é o conhecimento de suas soluções, descrevendo de forma analítica o fator de escala da métrica FRW (1.5),  $a(t) = e^{A(t)}$ , assim como os campos de matéria como funções do tempo — i.e. o conhecimento da evolução da geometria do espaço-tempo. Apesar de serem de segunda ordem, as equações de Friedmann modificadas (4.23), (4.26a), são não lineares, apresentando termos do tipo  $\sim \ddot{A} \dot{A}^4$ , o que dificulta a já não muito fácil tarefa de se obter soluções analíticas para  $A(t)$ .

Este problema foi resolvido com o desenvolvimento do método do superpotencial e a dedução de um sistema de equações diferenciais de *primeira* ordem (5.1), equivalente às equações de campo da GQT para uma classe de soluções. Este sistema é de fato uma simples adaptação dos métodos utilizados em artigo de co-autoria do dissertante (dS; G.M. Sotkov (2012)), desenvolvidos para soluções do tipo paredes de domínio em  $d$  dimensões.

O método do superpotencial nos permite a formulação de modelos cosmológicos com características qualitativas que seguem a fenomenologia básica do Universo

---

observado, utilizando-se um campo escalar  $\sigma$  (um “inflaton”). Nós determinamos a forma explícita de superpotenciais  $W(\sigma; \alpha_k)$  e seus parâmetros  $\alpha_k$ , assim como os intervalos dos valores “permitidos” dos acoplamentos gravitacionais  $\lambda$  e  $\mu$ , tais que se reproduza estas características fenomenológicas.

Com um único campo escalar, conseguimos assim obter modelos singulares (utilizando um polinômio quártico como superpotencial) e não singulares (utilizando um polinômio quártico) que contém tanto uma fase inicial de inflação — apresentando um período de arrasto sobre o qual temos franco controle —, quanto uma fase de expansão final assintoticamente deSitter, de natureza similar à de modelos de quintessência, interpolando no meio-tempo uma fase de desaceleração.

Apesar de não produzirem uma descrição perfeita da história do Universo — por exemplo, o período de desaceleração em um dos casos dura cerca de  $10^{-33}$  segundos —, estes modelos são exemplo notável do poder do método do superpotencial para a determinação de soluções analíticas não triviais das equações de campo. Pode-se ver mais claramente o efeito através das equações de estado (5.13), que são *deduzidas* a partir do superpotencial. Nos casos abordados, estas equações são absolutamente complicadas e, à primeira vista, impossíveis de serem utilizadas como uma ferramenta de solução das equações de Friedmann.

**Modelos com equação de estado linear e o Princípio Entrópico Causal.** Por outro lado, considerando uma dada a equação de estado linear

$$p = w_1 \varrho + w_2 ,$$

na gravitação EH, mostramos no Capítulo 6 que as correções cúbicas da GQT produzem uma equação efetiva (6.20) — razoavelmente mais elaborada:

$$p_{\text{eff}} = -\varrho_{\text{eff}} + \frac{-w_2 + (1 + w_1)(1 - \mu L^4 \kappa^4 \varrho_{\text{eff}}^2/36) \varrho_{\text{eff}}}{(1 - \mu L^4 \kappa^4 \varrho_{\text{eff}}^2/12)} ,$$

que além de permitir uma abordagem (até certo ponto) analítica de dinâmica da GQT, revela todas as mudanças em comparação com o modelo na gravitação de Einstein: Surge *um novo período de aceleração inicial*, similar a uma inflação, muito embora sem um período de arrasto; Corrigimos perturbativamente, em ordem  $\mu$ , a constante cosmológica final  $\Lambda$ ; Calculamos as correções para os volumes dos diamantes causais, e concluímos que o Princípio Entrópico Causal de Bousso permanece válido e capaz de prever o valor observado de  $\Lambda \sim 10^{-122} \times l_{\text{Pl}}^{-2}$ . A validade deste modelo notável nunca tinha sido testada em modelos gravitacionais de alta curvatura.

---

### Termodinâmica de horizontes...

Além dos resultados dizendo respeito à dinâmica proveniente da Ação Cúbica Quase-Topológica, também investigamos de forma profunda as propriedades “gravito-termodinâmicas” dos diversos tipos de horizontes — partindo dos bem conhecidos conceitos dos horizontes estacionários de Killing de buracos negros e dos espaços de deSitter, e chegando aos horizontes, aparentes e de eventos, não-estacionários, dos espaços assintoticamente deSitter. Nosso principal interesse se concentrou na dedução de uma *entropia* de Wald-Kodama para os *horizontes aparentes, dinâmicos*, presentes em todos os exemplos de espaços assintoticamente deSitter, que constituem sempre a geometria resultante do acoplamento de um campo escalar com a GQT.

Como esperado, o resultado (Eq.(4.53)):

$$s = \frac{16\pi^2}{\kappa^2} \frac{1}{H^2} (1 - 2\lambda L^2 H^2 + 3\mu L^4 H^4) ,$$

difere consideravelmente daquele conhecido em gravitação EH, que se recupera no limite  $\lambda = 0 = \mu$ . Uma propriedade notável desta “entropia” do horizonte aparente é a validade da segunda lei da termodinâmica:  $ds/dt \geq 0$ , desde que a matéria não viole a condição fraca de energia.

Utilizando esta fórmula para a entropia, obtivemos no Capítulo 5 um dos resultados inéditos marcantes deste trabalho: mostramos que as equações de Friedmann modificadas dos modelos cosmológicos estendidos da GQT são equivalentes à primeira lei da termodinâmica.

### ...e restrições entrópicas.

Além dos resultados acima, de natureza conceitual, fizemos uma análise exaustiva das consequências fenomenológicas da GQT sobre os modelos cosmológicos que consideramos. Em particular, nos ocupamos com o fato de a entropia (4.53) dos horizontes aparentes definir restrições entrópicas “quantitativas” sobre as densidades máximas de energia — ou sobre as escalas mínimas de comprimento. Analizamos estas restrições em detalhes nos modelos inflacionários obtidos a partir dos superpotenciais de matéria e no modelo construído a partir da equação de estado; pudemos assim estabelecer restrições fenomenológicas sobre os intervalos “fisicamente possíveis” dos acoplamentos gravitacionais  $\lambda$  e  $\mu$ .

---

## 7.2 Problemas em aberto e perspectivas futuras

Apesar dos promissores resultados confirmando a consistência termodinâmica das Cosmologias Quase-Topológicas e dos exemplos de modelos de GQT cosmológicos com relevância fenomenológica, devemos mencionar alguns problemas que permanecem em aberto.

### Espectro das flutuações lineares.

A forma explícita das flutuações lineares da métrica,  $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ , e do campo escalar  $\phi(\mathbf{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) &= g_{\mu\nu}^{(0)}(t) + \varkappa h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) ; \\ \sigma(\mathbf{x}, t) &= \sigma_0(t) + \varkappa \phi(\mathbf{x}, t) , \end{aligned}$$

ao redor das soluções de tipo FRW  $g_{\mu\nu}^{(0)}(t)$ ,  $\sigma_0(t)$ , é ainda desconhecida. Diferente dos casos de dimensão  $d \geq 5$  — nos quais as equações das flutuações são de *segunda* ordem (Myers (2010)) — tudo indica que em  $d = 4$ , especificamente para  $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ , elas devam ser de *quarta* ordem. Este fato não somente dificulta o cálculo do espectro<sup>1</sup> e a verificação das condições de estabilidade da “métrica de fundo”  $g_{\mu\nu}^{(0)}(t)$ ,<sup>2</sup> como também torna o problema da normalização das auto-funções quase incompreensível. É bom lembrar que a *solução analítica* deste problema é de *utilidade prática* para as eventuais comparações com os resultados observacionais conhecidos sobre o espectro da CMB — e seus eventuais desvios “não-Gaussianos” — que poderiam confirmar ou descartar o uso fenomenológico dos modelos de GQT. Assim como no caso padrão de cosmologias EH (com  $\Lambda > 0$ ), o estudo das flutuações tem um papel fundamental na descrição das inhomogeneidades da distribuição de matéria no Universo (Weinberg (2008), Mukhanov (2005)). Uma solução bem mais fácil de se realizar é a aproximação “exploratória” (“*probe approximations*”) considerando apenas flutuações do campo de matéria,  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , sem levar em conta a “reação” sobre a métrica de fundo  $g_{\mu\nu}^{(0)}(t)$  (i.e. tomando  $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \approx 0$ ). Os estudos preliminares das equações para o espectro de  $\phi(\mathbf{x}, t)$  — que são de *segunda* ordem, do tipo “Schrödinger”, estacionárias e unidimensional com única coordenada sendo o tempo conforme — na região ao redor da região de arrasto inflacionário (“slow-roll”) demonstraria a compatibilidade do espectro com as observações da CMB.

### Termodinâmica de horizontes dinâmicos.

Os casos de horizontes cuja área aumenta com o tempo com uma certa velocidade

---

<sup>1</sup>I.e., os auto-valores de certo operador de *quarta ordem*  $\hat{V}(\eta)$ , onde  $\eta$  é o tempo conforme.

<sup>2</sup>I.e., a positividade de seus auto-valores.

---

não-constante dificultam a interpretação adiabática das mudanças na entropia e temperatura. Nestes casos de termodinâmica fora-do-equilíbrio os “fenômenos de transporte” (i.e. os fluxos de entropia) exigem certas modificações da primeira lei da termodinâmica (a energia não é mais conservada) e das origens físicas (quânticas) responsáveis pela produção de entropia ([Jacobson \(2012, 1995\)](#), [Wald \(1994\)](#)).

### **Inflação híbrida na GQT.**

Os exemplos das “correções quânticas” induzidas pelos termos cúbicos da GQT estudados nesta dissertação foram baseados em matéria escalar contendo apenas um campo. Porém a maioria dos modelos inflacionários promissores (mesmo no caso EH) aponta a importância da inclusão de ao menos dois campos interagentes, como nos modelos de inflação híbrida ([Linde \(1990\)](#)).

Além disso, a descrição das equações de estado consideradas importantes na descrição fenomenológica do Universo — como por exemplo o Gás de Chapligyn, com  $p = -\alpha/\varrho + \beta$  — envolve uma nova espécie de termos cinéticos:

$$\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{Ch}} = \sqrt{-g} U(\chi) \sqrt{1 - \gamma_0 \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi},$$

do tipo Born-Infeld, em conjunto com campos “ordinários”  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  estudados nesta dissertação. Esta forma da densidade de energia da matéria com dois ou mais campos e  $\mathcal{L}_{\text{Ch}}$  é também um resultado dos modelos de supercordas em energias relativamente baixas que a de Planck, com  $\chi$  representando um “condensado de táquions” ([Polchinski \(2005\)](#)). A generalização dos modelos cosmológicos em GQT acoplados com mais campos de natureza diferente exige antes de tudo o desenvolvimento de métodos — como o método do superpotencial — que facilitem a construção de soluções analíticas das equações de Friedmann correspondentes. O estudo deste problema em modelos de GQT do tipo inflação-híbrida (como também de equações de estado do tipo Chapligyn), com a participação do disser-tante, se encontram em estágio avançado ([dS; G.M. Sotkov \(a\)](#)).

### **Efeitos de curvatura espacial em GQT.**

Ainda que as observações astronômicas indiquem que a curvatura espacial do Universo é plana ( $K = 0$ ), modelos cosmológico com métrica FRW curvas ([2.10](#)) apresentam propriedades físicas qualitativamente diferentes e são considerados ainda de certa relevância. É natural buscar generalizações dos resultados aqui obtidos para  $K = 0$  dos efeitos da GQT na cosmologia para os casos curvos. Mais uma vez, esta investigação exige o conhecimento da forma analítica das soluções não-lineares e de segunda ordem (a ser provado para métricas não conformemente planas ([dS; G.M. Sotkov \(b\)](#))). O método do superpotencial e o uso das equações de primeira ordem para partes de domínio (e para modelos FRW) curvas foi

---

desenvolvido com a participação do dissertante. Os problemas dos estudos sobre as restrições entrópicas neste caso, como também a própria dedução da densidade de entropia de Wald-Kodama se encontram em aberto.

Em conclusão, é necessário declarar que os motivos para a escolha em específico das Cosmologias Cúbicas Quase-Topológicas foram baseados no Princípio da Simplicidade e na experiência própria do autor nesta área. No último ano, foram introduzidos e estudados modelos de gravitação estendida envolvendo termos de quárticos na curvatura ([Ghanaatian \(2012\)](#)), e os já mencionados modelos de Born-Infeld ([Yi \(2012\)](#)) — todos com equações de segunda ordem para métricas conformemente planas. Logo, um problema interessante para novas investigações sobre os “efeitos de alta curvatura sobre o Universo” é uma comparação entre todos estes modelos, com o objetivo de encontrar critérios simples e efetivos que permitissem a seleção de um deles como mais apropriado para a reprodução dos dados observacionais, obedecendo todos as condições de consistência termodinâmica, causal e holográfica.

# Apêndice A

## Isometrias

Para encontrarmos geometrias simétricas, devemos dar sentido matemático a tais simetrias em uma variedade dimensional  $N$ -dimensional  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  (o espaço-tempo é uma variedade diferencial 4-dimensional, mas desejamos ser tão gerais quanto possível). Uma família de curvas  $x^\mu(u)$ , parametrizadas por um parâmetro  $u \in \mathbf{R}$ , pode ser descrita pelo campo vetorial gerados por seus vetores tangentes

$$\frac{dx^\mu}{du} = v^\nu.$$

Reciprocamente, um campo vetorial  $v^\nu(x)$  descreve uma família de curvas  $x^\nu(u)$ . Sejam P e Q dois pontos sobre uma mesma curva; define-se um mapeamento  $\phi_u : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,

$$\phi_u(P) = Q, \tag{A.1}$$

o que induz, para cada curva, um mapeamento entre os espaços tangentes de P e Q:  $\phi_u^*(T_P) \rightarrow T_Q$ , mapeando assim um tensor “no ponto” P em outro “no ponto” Q. Define-se então a *derivada de Lie* de um tensor  $\mathbf{T}$  com relação ao vetor  $v^\nu$  por

$$\mathcal{L}_v \mathbf{T} \equiv \lim_{u \rightarrow 0} \left\{ \frac{\phi_u^*(\mathbf{T}) - \mathbf{T}}{u} \right\}. \tag{A.2}$$

Repare que, estando associado ao seu vetor tangente, a derivada de Lie é automaticamente associada a uma curva. Se o ponto P tem coordenadas  $x^\nu$ , um deslocamento infinitesimal sobre a curva até o ponto Q leva a  $\bar{x}^\nu = x^\nu + u v^\nu$ . Se

---

fizemos então uma mudança de coordenadas que leve  $\bar{x}^\nu \rightarrow \bar{x}^{\nu'} = x^\nu$ , i.e.

$$\bar{x}^{\nu'} = x^{\nu'} + uv^{\nu'} = x^\nu ,$$

$$x^{\nu'} = x^\nu - uv^\nu ,$$

um tensor  $T_{\mu\nu}$  antes em  $Q$ , transforma-se como

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} T_{\alpha\beta}(x^\sigma + uv^\sigma) .$$

Uma vez que  $\partial x^\alpha / \partial x^{\mu'} = \delta^\alpha_\mu + uv^\alpha_{,\mu}$ , então, em primeira ordem em  $u$ ,

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(x) + u [v^\sigma T_{\mu\nu,\sigma} + T_{\gamma\nu} v^\gamma_{,\mu} + T_{\mu\gamma} v^\gamma_{,\nu}] ,$$

ou seja, as componentes da derivada de Lie de  $\mathbf{T}$  se escrevem

$$\mathcal{L}_v T_{\mu\nu} = v^\sigma T_{\mu\nu,\sigma} + T_{\gamma\nu} v^\gamma_{,\mu} + T_{\mu\gamma} v^\gamma_{,\nu} . \quad (\text{A.3})$$

De sua própria definição (A.2), vemos que  $\mathcal{L}_v \mathbf{T}$  é um tensor de mesma ordem que  $\mathbf{T}$ . É imediato verificar que as derivadas parciais na equação acima podem ser trocadas por derivadas covariantes, e assim temos

$$\mathcal{L}_v T_{\mu\nu} = v^\sigma T_{\mu\nu;\sigma} + T_{\gamma\nu} v^\gamma_{;\mu} + T_{\mu\gamma} v^\gamma_{;\nu} .$$

Em particular, para a métrica (cuja derivada covariante é nula), temos

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = v_{\mu;\nu} + v_{\nu;m} . \quad (\text{A.4})$$

Fórmula similar se obtém para um tensor covariante de de qualquer ordem. Já para um tensor contravariante  $T^{\mu\nu}$ , temos

$$\mathcal{L}_v T^{\mu\nu} = v^\sigma T^{\mu\nu}_{,\sigma} - T^{\gamma\nu} v^\mu_{,\gamma} - T^{\mu\gamma} v^\nu_{,\gamma} , \quad (\text{A.5})$$

e fórmula análoga para qualquer ordem. Se  $\mathbf{T}$  é um campo vetorial  $w^\mu$ , então também define (ao menos localmente) uma família de curvas integrais, assim

---

como  $v^\mu$ . A fórmula acima mostra que  $\mathcal{L}_v w^\mu = 0$  equivale a

$$\mathcal{L}_v w^\mu = v^\sigma w^\mu{}_{,\sigma} - w^\sigma v^\mu{}_{,\sigma} = -\mathcal{L}_w v^\mu . \quad (\text{A.6})$$

Por isso, às vezes chama-se  $\mathcal{L}_v w^\mu$  de ‘comutador’ de  $v^\mu$  e  $w^\mu$ .

Por construção, a derivada de Lie fornece a variação de um tensor sob difeomorfismos locais e, portanto, o fato de um determinado tensor possuir derivada de Lie nula em alguma direção implica em uma certa invariância. No caso de o tensor ser a métrica, esta invariância traduz-se em uma simetria, dita uma *isometria*, da variedade diferencial com respeito aos difeomorfismos. A um vetor  $\zeta^\mu$  tal que  $\mathcal{L}_\zeta g_{\mu\nu} = 0$ , chama-se *vetor de Killing*, e estes satisfazem, por (A.4), a *equação de Killing*:

$$\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu} = 0 . \quad (\text{A.7})$$

Pode-se demonstrar que, dado um vetor de Killing  $\zeta_\mu$  e sua derivada primeira  $\zeta_{\mu;\alpha}$ , a derivada segunda é dada por

$$\zeta_{\mu;\alpha\beta} = R^\nu{}_{\beta\alpha\mu} \zeta_\nu ,$$

e assim, iterativamente, as derivadas de todas as ordens podem ser conhecidas em termos de  $\zeta_\mu$  e  $\zeta_{\mu;\alpha}$ , de modo que se estes forem dados em um determinado ponto  $x_0$ , pode-se construir todo o campo de Killing através de uma série de Taylor<sup>1</sup>:

$$\zeta_\mu(x) = A^\nu{}_\mu(x, x_0) \zeta_\nu(x_0) + B^{\alpha\beta}{}_\mu(x, x_0) \zeta_{\alpha;\beta}(x_0) . \quad (\text{A.8})$$

Em um espaço  $N$ -dimensional, o número de componentes independentes de um vetor  $\zeta_\mu$  em um ponto é, no máximo,  $N$ . E o número de componentes independentes de um tensor antisimétrico  $\zeta_{\mu;\nu}$  em um ponto é, no máximo,  $(N^2 - N)/2$ . Logo, pela construção acima, o número máximo de vetores de Killing em um espaço  $N$  dimensional é

$$N + N(N + 1)/2 = N(N + 1)/2 ,$$

que é também, por consequência, o número máximo possível de isometrias.

Entretanto, no geral, como era de se esperar,  $\zeta_\mu$  e  $\zeta_{\mu;\nu}$  *não* são independentes.

---

<sup>1</sup>Supondo que tal campo seja analítico em toda a variedade.

---

Eles se relacionam através da seguinte identidade:

$$[R^\mu{}_{\alpha\beta\nu;\gamma} - R^\mu{}_{\gamma\beta\nu;\alpha}] \zeta_\mu + [R^\mu{}_{\alpha\beta\nu} g^\sigma{}_\gamma - R^\mu{}_{\gamma\beta\nu} g^\sigma{}_\alpha + R^\mu{}_{\beta\alpha\gamma} g^\sigma{}_\nu - R^\mu{}_{\nu\alpha\gamma} g^\sigma{}_\beta] \zeta_{\mu;\sigma} = 0 ,$$

e portanto o número máximo de isometrias só pode ocorrer quando ambos os coeficientes em colchetes na equação acima se anulam. Um exemplo especial é o espaço plano de Minkowski 4-dimensional, para o qual a curvatura é nula, e se encontram 10 isometrias, correspondendo ao grupo de Poincaré.

O anulamento dos colchetes da equação acima impõe duas restrições. A primeira é  $R^\mu{}_{\alpha\beta\nu;\gamma} = R^\mu{}_{\gamma\beta\nu;\alpha}$ ; a segunda vem do anulamento da parte antisimétrica do segundo colchete (a parte simétrica do segundo termo se anula automaticamente, pela antisimetria de  $\zeta_{\mu;\nu}$ ), que pode ser reduzida a

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} = \frac{R}{N(N-1)} (g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}) . \quad (\text{A.9})$$

Usando este resultado na identidade de Bianchi:  $(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}R g^\mu{}_\nu)_{;\mu} = 0$ , temos que

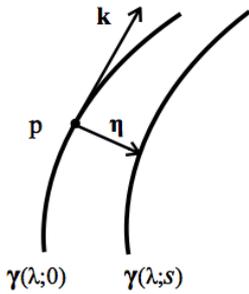
$$R = \text{constante} . \quad (\text{A.10})$$

Portanto, espaços com simetria máxima são espaços com (escalar de) curvatura constante. Reciprocamente, pode-se demonstrar que espaços com curvatura constante são espaços de simetria máxima.

# Apêndice B

## A equação de Raychaudhuri

Seja  $(\mathcal{M}, g)$  um espaço-tempo e  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$  uma vizinhança do ponto  $p \in \mathcal{M}$ .



Chamamos ‘congruência’ a uma família de curvas  $\gamma(\lambda; s^A)$ , onde cada valor de  $s^A$ , com  $A = 0, 1, 2$ , determina uma geodésica com parâmetro afim  $\lambda_A$ , e tal que sobre cada ponto de  $\mathcal{U}$  passa apenas *uma* curva. Vamos suprimir os índices  $A$ , no que segue. Vamos considerar uma congruência de geodésicas nulas, cada uma com vetor tangente  $k^\mu = (\partial/\partial\lambda)_s$ , com  $k^\mu k_\mu = 0$ .

Os vetores  $z_A^\mu = (\partial/\partial s^A)_\lambda$  descrevem deslocamentos entre geodésicas vizinhas, e são supostos linearmente independentes. Como cada ponto  $p \in \mathcal{U}$  pertence a apenas uma geodésica, podemos definir na vizinhança de  $p$  um sistema de coordenadas  $\{\lambda, s^A\}$ , e portanto a derivada de Lie de  $k^\mu$  com  $z_A^\mu$  se anula:

$$\mathcal{L}_v z_A^\mu = 0. \quad (\text{B.1})$$

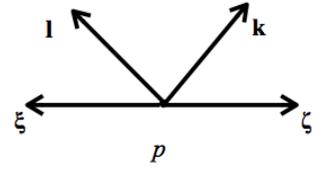
Sendo esta uma relação covariante, a derivada de Lie  $\mathcal{L}_v z_A^\mu$  é sempre zero, seja qual for o sistema de coordenadas. Portanto,

$$k^\nu z_{A;\nu}^\mu = k^\mu{}_{;\nu} z_A^\nu. \quad (\text{B.2})$$

Em um ponto  $p \in \gamma(\lambda; 0)$ , sobre uma geodésica arbitrária da congruência, pode-se introduzir uma base ‘pseudo-ortonormal’ do espaço tangente  $T_p$ , formada

pelos vetores  $\{\mathbf{E}_A\} = \{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}\}$ ,  $A = 0, 1, 2, 3$ , sendo  $\mathbf{k}$  o vetor tangente a  $\gamma(\lambda; 0)$ ,  $\mathbf{l}$  um segundo vetor nulo tal que  $k_\mu l^\mu = -1$ , e  $\boldsymbol{\zeta}$  e  $\boldsymbol{\xi}$  dois vetores tipo-espaço, ortonormais entre si e a  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{l}$ . Apesar da não ortogonalidade de  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{k}$ , os quatro vetores são claramente independentes<sup>1</sup>. Em um outro ponto  $q \in \gamma(\lambda; 0)$  fica então definida uma base do espaço tangente  $T_q$  ao se transportar paralelamente a base de  $p$ . Para isto, devemos impor  $k^\nu l^\mu{}_{;\nu} = 0$ ,  $k^\nu \zeta^\mu{}_{;\nu}$ , etc.

Um vetor de deslocamento para uma geodésica vizinha  $\gamma(\lambda; s)$  deve ser ortogonal a  $\mathbf{k}$ . Entretanto, uma vez que o vetor tangente  $\mathbf{k}$  é nulo,  $k_\mu k^\mu = 0$ , o subespaço de  $H_p \subset T_p$  formado pelos vetores ortogonais a  $\mathbf{k}$  contém o próprio  $\mathbf{k}$ . Naturalmente, o que nos interessa é o subespaço  $S_p \subset H_p$  formado pela classe de equivalência de vetores que diferem apenas por um vetor proporcional a  $k^\mu$ . Em outras palavras, dois vetores  $\eta^\mu$  e  $\chi^\mu$  são considerados equivalentes se  $\eta^\mu = \chi^\mu + \alpha k^\mu$ , com  $\alpha$  constante. É evidente que a parte de  $\boldsymbol{\eta}$  paralela a  $\mathbf{k}$  em  $p$  permanece constante sobre a geodésica — pois  $\mathbf{k}$  é transportado paralelamente — e portanto não possui dinâmica. Uma maneira simples de definir  $S_p$  é como o espaço dos vetores ortogonais a ambos  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{l}$ . Fica então claro que o tensor



$$h^\alpha{}_\beta = g^\alpha{}_\beta + k^\alpha l_\beta + l^\alpha k_\beta \quad (\text{B.3})$$

é um projetor sobre  $S_p$ . Note que  $h_{\mu\nu}$  pode ser interpretado como uma métrica no espaço bidimensional ortogonal às geodésicas, com base  $\{\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}\}$ , e seu traço vale  $h_\mu{}^\mu = 4 - 1 - 1 = 2$ .

Deve-se notar que ter  $\eta_\mu k^\mu = 0$  em  $p$  não implica que o mesmo valha ao longo de toda a geodésica. Mas como

$$k^\mu \nabla_\mu (k^\nu \eta_\nu) = k_\nu k^\mu \nabla_\mu \eta^\nu = \eta^\mu k_\nu \nabla_\mu k^\nu = 0,$$

a escolha de  $\boldsymbol{\eta}$  ortogonal a  $\mathbf{k}$  em um ponto efetivamente implica que o mesmo ocorre em todos os outros pontos de  $\gamma(\lambda, 0)$ . Na equação acima usamos a equação das geodésicas na primeira igualdade, a Eq.(B.1) na segunda, e na última o fato de que  $\nabla_\mu (k_\nu k^\nu) = 0$  ao longo da geodésica.

Da mesma forma, o fato de  $\boldsymbol{\eta}$  pertencer a  $S_p$  não significa que  $\boldsymbol{\eta} \in S_q$  em um

<sup>1</sup> Uma vez que  $\mathbf{k}$  é nulo, se fosse proporcional a  $\mathbf{l}$  teríamos  $l_\mu k^\mu = 0$ . Como isso não acontece, vemos que o conjunto de vetores é de fato linearmente independente (e portanto uma base de  $T_p$ ).

outro ponto  $q \in \gamma(\lambda; 0)$ . Entretanto, se  $\boldsymbol{\eta} \in S_p$ , como  $h^\mu{}_\nu \eta^\nu = \eta^\mu$ , temos

$$k^\nu \eta^\mu{}_{;\nu} = k^\nu (h^\mu{}_\beta \eta^\beta)_{;\nu} = h^\mu{}_\beta k^\nu \eta^\beta{}_{;\nu},$$

onde usamos o fato de que  $l^\mu$  e  $k^\mu$  são transportados paralelamente ao longo da geodésica. Da Eq.(B.2), temos que  $k^\mu \eta^\mu{}_{;\nu} = k^\mu{}_{;\nu} \eta^\nu$ , logo  $k^\nu \eta^\mu{}_{;\nu} = h^\mu{}_\beta k^\beta{}_{;\nu} \eta^\nu$ , e fica provada a afirmação. Portanto, sabendo que  $\eta^\mu = h^\mu{}_\nu \eta^\nu$  vale ao longo de toda a geodésica, temos que o tensor

$$B_{\mu\nu} = h^\mu{}_\alpha k^\alpha{}_{;\beta} h^\beta{}_\nu \quad (\text{B.4})$$

mede as mudanças que ocorrem no “formato” de uma secção do feixe de geodésicas nulas. Mais precisamente, se  $B_{\mu\nu}$  se anula, os vetores de deslocamento entre as geodésicas são transportados paralelamente (e seu “formato” é preservado); caso contrário,

$$k^\nu \eta^\mu{}_{;\nu} = B^\mu{}_\nu \eta^\nu. \quad (\text{B.5})$$

### Expansão; torção; cisalhamento.

Uma vez que  $B_{\mu\nu}$  pertence ao espaço  $S_p \otimes S_p$ , podemos decompô-lo usando o projetor  $h_{\mu\nu}$  em uma parte simétrica e sem traço  $\sigma_{\mu\nu}$  que chamaremos ‘cisalhamento’; uma parte antisimétrica, também naturalmente sem traço,  $\omega_{\mu\nu}$ , que chamaremos ‘torção’ :

$$\sigma_{\mu\nu} = B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\theta h_{\mu\nu} \quad ; \quad \omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}; \quad (\text{B.6})$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (\text{B.7})$$

onde denotamos  $\theta \equiv B_\mu{}^\mu$ ; e por fim adicionamos o traço de  $B_{\mu\nu}$  por meio de um termo  $\frac{1}{2}\theta h_{\mu\nu}$ .

Sejam  $\tilde{\zeta} = f(\lambda) \boldsymbol{\zeta}$  e  $\tilde{\xi} = g(\lambda) \boldsymbol{\xi}$  dois vetores de deslocamento entre as geodésicas vizinhas, linearmente independentes, i.e.  $\tilde{\zeta}_\mu \tilde{\xi}^\mu = 0$  e com norma unitária. Ao atuar sobre estes vetores, a parte antisimétrica de  $B_{\mu\nu}$  age como uma rotação, fazendo com que a família de geodésicas “espirale”; daí o nome ‘torção’. A parte simétrica de  $B_{\mu\nu}$  faz com que a proporção relativa dos módulos de  $\tilde{\zeta}$  e  $\tilde{\xi}$  mude, causando uma mudança no formato do feixe de geodésicas, e.g. uma inclinação na direção de um dos vetores; daí o nome ‘cisalhamento’. Por sua vez,  $\theta$  mede a mudança da área seccional do feixe de geodésicas.

---

Efetivamente, os vetores  $\tilde{\zeta}$  e  $\tilde{\xi}$  definem uma área por meio de seu produto vetorial, projetado no espaço ortogonal a  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{k}$ :

$$\mathcal{A} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\mu l_\nu \tilde{\zeta}_\alpha \tilde{\xi}_\beta . \quad (\text{B.8})$$

A variação desta área ao longo da geodésica é dada por

$$d\mathcal{A}/d\lambda = k^\mu \mathcal{A}_{;\mu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\mu l_\nu \left( k^\sigma \tilde{\zeta}_{\alpha;\sigma} \tilde{\xi}_\beta + \tilde{\zeta}_\alpha k^\sigma \tilde{\xi}_{\beta;\sigma} \right) ,$$

onde usamos o fato de serem ambos  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{l}$  transportados paralelamente. Usando agora a Eq.B.2 para ambos os vetores de deslocamento, ficamos com

$$d\mathcal{A}/d\lambda = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\mu l_\nu \left( B_\alpha{}^\sigma \tilde{\zeta}_\sigma \tilde{\xi}_\beta + \tilde{\zeta}_\alpha B_\beta{}^\sigma \tilde{\xi}_\sigma \right) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\mu l_\nu B_\alpha{}^\sigma \left( \tilde{\zeta}_\sigma \tilde{\xi}_\beta - \tilde{\zeta}_\beta \tilde{\xi}_\sigma \right) ,$$

onde usamos na última igualdade a anti-simetria do tensor de Levi-Civita. Agora, o tensor  $B_{\alpha\beta}$  pode ser escrito, no ponto  $p$ , como

$$B_{\alpha\beta} = a \tilde{\zeta}_\alpha \tilde{\xi}_\beta + b \tilde{\zeta}_\beta \tilde{\xi}_\alpha + c \tilde{\zeta}_\alpha \tilde{\zeta}_\beta + d \tilde{\xi}_\alpha \tilde{\xi}_\beta ,$$

e portanto  $B_\alpha{}^\sigma \left( \tilde{\zeta}_\sigma \tilde{\xi}_\beta - \tilde{\zeta}_\beta \tilde{\xi}_\sigma \right) = c \tilde{\zeta}_\alpha \tilde{\xi}_\beta - d \tilde{\zeta}_\beta \tilde{\xi}_\alpha$ . Ao ser antisimetrizado pelo tensor de Levi-Civita, o lado direito desta equação dá  $\tilde{\zeta}_\alpha \tilde{\xi}_\beta (c + d) = \tilde{\zeta}_\alpha \tilde{\xi}_\beta B^\mu{}_\mu = \theta \tilde{\zeta}_\alpha \tilde{\xi}_\beta$ . Substituindo este resultado na equação para  $d\mathcal{A}/d\lambda$ , temos então  $d\mathcal{A}/d\lambda = \theta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\mu l_\nu \tilde{\zeta}_\sigma \tilde{\xi}_\beta = \theta \mathcal{A}$ , e chegamos por fim à Eq.2.2:

$$\theta = \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{d\lambda} . \quad (\text{B.9})$$

### A equação de Raychaudhuri.

A equação de Raychaudhuri se obtém agora facilmente. Basta notar que, pela definição do tensor de Riemann,  $k_{\mu;\alpha\beta} - k_{\mu;\beta\alpha} = R_{\mu\alpha\beta}{}^\nu k_\nu$ . Então

$$k^\mu B_{\alpha\beta;\mu} = k^\mu k_{\alpha;\beta\mu} + R_{\mu\beta\alpha}{}^\nu k^\mu k_\nu ,$$

---

e usando o fato de que  $(k^\mu k^\nu{}_{;\mu})_{;\nu} = 0$  temos

$$k^\mu B_{\alpha\beta;\mu} = -B^\mu{}_\beta B_{\alpha\mu} + R_{\mu\beta\alpha}{}^\nu k^\mu k_\nu.$$

Tomemos o traço desta equação; como  $k^\mu B^\alpha{}_{\alpha;\mu} = d\theta/d\lambda$ , ambos  $\sigma_{\mu\nu}$  e  $\omega_{\mu\nu}$  possuem traço nulo e a contração de um tensor simétrico com um antisimétrico é nula, então

$$B^{\mu\alpha} B_{\alpha\mu} = \left(\frac{1}{2}\theta h^{\mu\alpha} + \sigma^{\mu\alpha} + \omega^{\mu\alpha}\right) \left(\frac{1}{2}\theta h_{\mu\alpha} + \sigma_{\mu\alpha} - \omega_{\mu\alpha}\right) = \theta^2 + \sigma^{\mu\alpha} \sigma_{\mu\alpha} - \omega^{\mu\alpha} \omega_{\mu\alpha}.$$

Lembrando por fim da antisimetria dos índices do tensor de Riemann:  $R_{\mu}{}^\alpha{}_\alpha{}^\nu = -R^\alpha{}_{\mu\alpha}{}^\nu = -R_{\mu}{}^\nu$ , chegamos à Eq.(2.1):

$$d\theta/d\lambda = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu. \quad (\text{B.10})$$

Devemos aqui ressaltar o fato de que a bem da verdade o que usualmente se conhece por ‘equação de Raychaudhuri’ é uma equação análoga à (B.10), mas para geodésicas tipo-tempo. Neste sentido, estamos fazendo aqui uma extrapolação de nomenclatura.

# Apêndice C

## Equações de campo e o princípio variacional

Vamos aqui deduzir as equações de campo para uma teoria da Gravitação que apresenta como Lagrangeana uma função genérica da métrica e do tensor de Riemann, Eq.(4.3), e cuja ação é portanto

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} (g^{\alpha\beta}, R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}). \quad (\text{C.1})$$

A variável dinâmica da Relatividade Geral é o tensor métrico  $\mathbf{g}$ , que descreve o campo gravitacional. As equações de campo provém da requisição de que a ação seja estacionária sob pequenas flutuações  $\delta g_{\mu\nu}$ , arbitrárias, da métrica:

$$\delta S = \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}) = 0 .$$

Calculemos primeiro a variação do “elemento de volume”  $\delta\sqrt{-g}$ . O determinante da métrica se escreve (lembramos que  $g = \text{Det } g_{\mu\nu}$ )

$$g = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_4} \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_4} \prod_{k=1}^4 g_{\alpha_k \beta_k} ,$$

---

e portanto  $\delta g/\delta g_{\mu\nu}$  é uma soma de quatro termos que se organizam como

$$\delta g/\delta g_{\mu\nu} = \frac{4}{4!} \varepsilon^{\mu\alpha_2\cdots\alpha_4} \varepsilon^{\nu\beta_2\cdots\beta_4} \prod_{k=2}^4 g_{\alpha_k\beta_k} .$$

É evidente que se multiplicarmos o lado direito por  $g_{\mu\nu}$  obtemos outra vez o determinante, logo  $g_{\mu\nu}\delta g/\delta g_{\mu\nu} = 4g$ , ou seja:  $g_{\mu\nu}\delta g = 4g \delta g_{\mu\nu}$ . Assim, contraindo ambos os lados e lembrando que  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ , temos

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} . \quad (\text{C.2})$$

Com a fórmula acima é trivial ver que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} . \quad (\text{C.3})$$

Repare que se deve atentar para o sinal das expressões ao se realizar variações com respeito à métrica ou à sua inversa; pois diferenciando a relação  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ , temos  $g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0$  e por isso

$$g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{C.4})$$

Agora, para a variação da Lagrangeana,

$$\delta\mathcal{L}(g^{\alpha\beta}, R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}) = (\partial\mathcal{L}/\partial g^{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} + (\partial\mathcal{L}/\partial R^{\mu\alpha\nu\beta}) \delta R^{\mu\alpha\nu\beta} , \quad (\text{C.5})$$

notamos primeiro que

$$\partial\mathcal{L}/\partial g^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R^{\sigma\alpha\beta\gamma}} \frac{\partial R^{\sigma\alpha\beta\gamma}}{\partial g^{\sigma\delta}} \frac{\partial g^{\sigma\delta}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R^{\sigma\alpha\beta\gamma}} \frac{\partial (g^{\sigma\delta} R_{\delta}^{\alpha\beta\gamma})}{\partial g^{\sigma\delta}} \delta_{\mu}^{\sigma} \delta_{\nu}^{\delta} ,$$

e portanto

$$\partial\mathcal{L}/\partial g^{\mu\nu} = P_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} , \quad (\text{C.6})$$

$$\text{onde } P_{\mu\alpha\nu\beta} = \partial\mathcal{L}/\partial R^{\mu\alpha\nu\beta} . \quad (\text{C.7})$$

Quanto ao cálculo do segundo termo do lado esquerdo de (C.5), é necessário de-

terminar  $\delta R^{\mu\alpha\nu\beta}$ . O tensor de Riemann é composto das conexões e suas derivadas:

$$R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\nu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} . \quad (\text{C.8})$$

Vamos utilizar coordenadas geodésicas, em que a métrica é localmente plana e portanto as conexões se anulam, mas não suas derivadas:  $R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\nu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu,\beta}$ . Escrevendo explicitamente as derivadas das conexões, sob a condição  $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$ ,

$$\delta R_{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha}\partial_{\nu} \delta g_{\mu\beta} + \partial_{\mu}\partial_{\beta} \delta g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\beta} \delta g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu} \delta g_{\alpha\beta}) . \quad (\text{C.9})$$

Para obter as equações de campo, devemos isolar as variações da métrica que se encontram sob derivadas segundas. Para isso, realizamos integrações por partes em cada um dos quatro termos presentes em

$$\int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\alpha\nu\beta} \delta R_{\mu\alpha\nu\beta} ,$$

com  $\delta R_{\mu\alpha\nu\beta}$  dado pela Eq.(C.9). Após duas integrações por partes, o primeiro termo fica

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\alpha\nu\beta} \partial_{\alpha}\partial_{\nu} \delta g_{\mu\beta} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \partial_{\alpha}\partial_{\nu} P^{\mu\alpha\nu\beta} \delta g_{\mu\beta} + \frac{1}{2} \mathcal{S}_{\mathcal{B}I} , \quad (\text{C.10})$$

onde  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}I}$  é uma integral de borda,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}I} = \oint dS_{\alpha} \sqrt{-g} [P^{\mu\alpha\nu\beta} \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\beta} - \nabla_{\nu} P^{\mu\nu\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta}] , \quad (\text{C.11})$$

sobre uma superfície tridimensional  $\mathcal{B}$ . A contribuição do segundo termo em (C.9) é análoga:

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\alpha\nu\beta} \partial_{\mu}\partial_{\beta} \delta g_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \partial_{\mu}\partial_{\beta} P^{\mu\alpha\nu\beta} \delta g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{S}_{\mathcal{B}II} , \quad (\text{C.12})$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}II} = \oint dS_{\alpha} \sqrt{-g} [P^{\alpha\mu\beta\nu} \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\beta} - \nabla_{\nu} P^{\nu\mu\beta\alpha} \delta g_{\mu\beta}] . \quad (\text{C.13})$$

Uma vez que  $P^{\mu\alpha\nu\beta}$  possui as mesmas simetrias nos índices que o tensor de Riemann, a contribuição dos terceiro e quarto termos de (C.9) são iguais às dos primeiro e segundo termos, respectivamente. Escrevendo os termos de borda

como uma divergência:

$$\begin{aligned} 2(\mathcal{S}_{\mathcal{B}I} + \mathcal{S}_{\mathcal{B}II}) &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \delta v^\mu ; \\ \delta v^\alpha &= 2 \left[ P^{\mu\alpha\nu\beta} \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} - \nabla_\nu P^{\mu\nu\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta} \right] , \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\alpha\nu\beta} \delta R_{\mu\alpha\nu\beta} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left( \partial_\alpha \partial_\nu P^{\mu\alpha\nu\beta} \delta g_{\mu\beta} + \partial_\mu \partial_\beta P^{\mu\alpha\nu\beta} \delta g_{\alpha\nu} \right) + \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \delta v^\mu . \end{aligned}$$

Usando em ambos os termos da expressão em parênteses as simetrias dos índices de  $P^{\mu\alpha\nu\beta}$ , temos por fim

$$\int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\alpha\nu\beta} \delta R_{\mu\alpha\nu\beta} = \int d^4x \sqrt{-g} 2 \nabla_\alpha \nabla_\beta P^{\mu\alpha\beta\nu} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \delta v^\mu . \quad (\text{C.15})$$

Repare que escrevemos a fórmula acima de maneira covariante, válida em qualquer sistema de coordenadas.

A variação da ação,  $\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}) = \sqrt{-g} \delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \delta \sqrt{-g}$ , é finalmente obtida com (C.3), (C.5), (C.6), (C.14) e (C.15):<sup>1</sup>

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \mathcal{G}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu \delta v^\mu \right\} ; \quad (\text{C.16a})$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = P_{\mu\alpha\beta\gamma} R_\nu^{\alpha\beta\gamma} - 1/2 \mathcal{L} g_{\mu\nu} - 2 \nabla^\alpha \nabla^\beta P_{\mu\alpha\beta\nu} . \quad (\text{C.16b})$$

Assim, para variações arbitrárias da métrica que se anulam na superfície  $\mathcal{B}$ , temos as equações de movimento (4.4):

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} , \quad (\text{C.17})$$

onde o ‘tensor de energia-momento’  $T_{\mu\nu}$  resulta da variação da Lagrangeana de matéria, como descrito a seguir.

### O tensor de energia-momento.

<sup>1</sup>Esta expressão pode ser encontrada, por exemplo, em Padmanabhan (2010).

---

A contribuição da Lagrangeana de matéria  $\mathcal{L}_{\text{mat}}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}, \psi, \psi_{,\alpha})$  para a ação se dá sob a forma  $S_{\text{mat}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}$ . Variando  $S_{\text{mat}}$  com relação à métrica, temos

$$\delta S_{\text{mat}} = \int d^4x \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \partial_\alpha \delta g^{\mu\nu} \right].$$

Realizando uma integração por partes no último termo a variação da ação pode ser escrita, a menos de um termo de borda, como

$$\delta S_{\text{mat}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}; \quad (\text{C.18})$$

$$\sqrt{-g} T_{\mu\nu}/2 = \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}) \right]. \quad (\text{C.19})$$

o tensor simétrico  $T^{\mu\nu}$  é chamado de ‘*tensor de energia-momento*’.

### As equações de Einstein.

A ação de Einstein-Hilbert é da forma (C.1):  $L_{\text{EH}} = \frac{1}{\kappa^2} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} R^{\mu\alpha\nu\beta}$ , e portanto

$$P_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa^2} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}). \quad (\text{C.20})$$

Sendo nula a derivada covariante da métrica, então  $\nabla_\mu P^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ ; este é um resultado geral de qualquer teoria de Lovelock, como discutido no §4.1. O tensor de Einstein generalizado (C.16b) se resume então, como era de se esperar, a

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \partial \mathcal{L}_{\text{EH}} / \partial g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\text{EH}} g_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa^2} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = \frac{1}{\kappa^2} G_{\mu\nu}.$$

### A corrente de Noether.

Finalizamos este apêndice com o detalhamento da manipulação algébrica que leva às Eqs.(4.39).

Substituindo as expressões explícitas (C.16b) e (C.14), de  $\mathcal{G}^{\mu\nu}$  e  $\delta v^\mu$ , na fórmula (4.38b), temos

$$J^\mu = 2P^{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \xi^\nu - 4\nabla_\alpha \nabla_\beta P^{\mu\alpha\beta\nu} \xi_\nu + 2P^{\mu\alpha\nu\beta} \nabla_\beta \delta g_{\alpha\nu} + 2\delta g_{\alpha\beta} \nabla_\nu P^{\mu\alpha\nu\beta}. \quad (\text{C.21})$$

---

Para o caso de variações da métrica do tipo (4.35),  $\delta g_{\mu\nu} = -\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}$ , cada um dos termos em (C.21) se pode organizar como segue: Para o último termo,

$$\begin{aligned}\delta g_{\alpha\beta}\nabla_{\nu}P^{\mu\alpha\nu\beta} &= -\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)}\nabla_{\nu}P^{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= -\nabla_{\nu}(P^{\mu\alpha\nu\beta} + P^{\mu\beta\nu\alpha})\nabla_{\alpha}\xi_{\beta}.\end{aligned}\quad (\text{C.22})$$

Usando a definição do tensor de Riemann no primeiro termo, i.e.  $R^{\nu}{}_{\alpha\beta\gamma}\xi_{\nu} = \nabla_{\beta}\nabla_{\gamma}\xi_{\alpha} - \nabla_{\gamma}\nabla_{\beta}\xi_{\alpha}$ , e renomeando os índices mudos, temos

$$P^{\mu\alpha\nu\beta}R^{\sigma}{}_{\alpha\nu\beta}\xi_{\sigma} = P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\nu}\nabla_{\beta}\xi_{\alpha} - P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\beta}\nabla_{\nu}\xi_{\alpha}.\quad (\text{C.23})$$

Usando a identidade  $R^{\mu}{}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0$  no terceiro termo de (C.21),

$$\begin{aligned}-P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\beta}\nabla_{(\alpha}\xi_{\nu)} &= -(P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\xi_{\nu} + P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\beta}\nabla_{\nu}\xi_{\alpha}) \\ &= P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}\xi_{\beta} + P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\nu}\nabla_{\beta}\xi_{\alpha} - P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\beta}\nabla_{\nu}\xi_{\alpha}\end{aligned}$$

e os dois últimos termos da expressão acima cancelam (C.23); o conjunto dos últimos resultados forma a Eq.(4.39a):

$$J^{\mu} = -2\nabla_{\nu}(P^{\mu\alpha\nu\beta} + P^{\mu\beta\nu\alpha})\nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + 2P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}\xi_{\beta} - 4\xi_{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}P^{\mu\alpha\nu\beta}.\quad (\text{C.24})$$

Agora, olhando mais uma vez para cada termo separadamente, temos

$$\begin{aligned}P^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}\xi_{\beta} &= P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\xi_{\beta} \\ &= \nabla_{\nu}(P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\xi_{\beta}) - \nabla_{\nu}P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\xi_{\beta}.\end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}\xi_{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}P^{\mu\alpha\nu\beta} &= \xi_{\beta}\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}P^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= \nabla_{\nu}(\xi_{\beta}\nabla_{\alpha}P^{\mu\nu\alpha\beta}) - \nabla_{\nu}\xi_{\beta}\nabla_{\alpha}P^{\mu\nu\alpha\beta}.\end{aligned}$$

---

Portanto,

$$\begin{aligned}
J^\mu &= \nabla_\nu(2P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta - 4\xi_\beta\nabla_\alpha P^{\mu\nu\alpha\beta}) - \\
&\quad - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta + 4\nabla_\nu\xi_\beta\nabla_\alpha P^{\mu\nu\alpha\beta} - \\
&\quad - 2\nabla_\nu(P^{\mu\alpha\nu\beta} + P^{\mu\beta\nu\alpha})\nabla_\alpha\xi_\beta \\
&= \nabla_\nu(2P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta - 4\xi_\beta\nabla_\alpha P^{\mu\nu\alpha\beta}) + \\
&\quad + 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta + \\
&\quad + 2\nabla_\nu(P^{\mu\nu\beta\alpha} + P^{\mu\beta\alpha\nu})\nabla_\alpha\xi_\beta - 2\nabla_\nu P^{\mu\beta\nu\alpha}\nabla_\alpha\xi_\beta \\
&= \nabla_\nu(2P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta - 4\xi_\beta\nabla_\alpha P^{\mu\nu\alpha\beta}) + \\
&\quad + 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta + \\
&\quad - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta ,
\end{aligned}$$

ou seja:  $J^\mu = \nabla_\nu(2P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta - 4\xi_\beta\nabla_\alpha P^{\mu\nu\alpha\beta})$ , e podemos definir

$$J^{\mu\nu} = 2P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\alpha\xi_\beta - 4\xi_\beta\nabla_\alpha P^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{C.25})$$

tal que  $J^\mu = \nabla_\nu J^{\mu\nu}$ , como especificado na Eq.(4.39b).

# Apêndice D

## Horizontes de Killing

Sejam  $\{x^\alpha\}$  coordenadas locais em uma variedade quadridimensional  $\mathcal{M}$  com métrica  $\mathbf{g}$ , e seja  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função real suave. A equação

$$S(x^\alpha) = \text{constante} \tag{D.1}$$

define localmente uma ‘hipersuperfície’  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ , de codimensão<sup>1</sup> 1. Um vetor  $n^\alpha$  é dito ‘normal’ a  $\mathcal{S}$  se existe uma função  $N(x)$  tal que  $n^\alpha = N(x)\nabla^\alpha S(x)$ .

### O teorema de Fröbenius.

Em uma variedade  $\mathcal{M}$  munida de uma conexão compatível com a métrica, vale o seguinte

TEOREMA (*de Fröbenius*): Uma condição necessária e suficiente para que um campo vetorial  $\xi^\alpha$  seja normal a uma hipersuperfície  $\mathcal{S}$  é

$$\xi_{[\alpha}\nabla_\mu\xi_{\nu]} = 0 \tag{D.2}$$

sobre  $\mathcal{S}$ .

Uma demonstração pode ser encontrada em [Wald \(1984\)](#).

### Hipersuperfícies nulas.

Uma hipersuperfície  $\mathcal{N}$  que possui como normal um vetor nulo  $l^\alpha$ ,  $l_\alpha l^\alpha = 0$ ,

---

<sup>1</sup> Se  $\mathcal{M}$  é um espaço  $n$ -dimensional, dizemos que um subespaço  $m$ -dimensional  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  possui ‘codimensão’  $s$  quando  $m = n - s$ .

---

é dita uma ‘hipersuperfície nula’. É característico o fato de que estes vetores normais a  $\mathcal{N}$  também lhe são tangentes, e portanto definem curvas nulas que, em coordenadas locais, podem ser escritas como  $x^\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{N}$ , ou  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ , com  $\lambda \in \mathbf{R}$ , e  $l^\alpha = dx^\alpha(\lambda)/d\lambda$ .

As curvas  $x^\alpha(\lambda)$  tendo  $l^\alpha$  como vetor tangente são geodésicas. De fato,

$$l^\mu \nabla_\mu l^\alpha = l^\mu \nabla_\mu (N(x) \partial^\alpha S(x)) = (l^\mu \partial_\mu N) \partial^\alpha S + N l^\mu \nabla_\mu (\partial^\alpha S) .$$

Mas o último termo se reescreve como

$$l^\mu \nabla_\mu (\partial^\alpha S) = l^\mu \partial_\mu \partial^\alpha S - l^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial^\nu S = l^\mu \partial^\alpha \partial_\mu S - l^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial^\nu S = l^\mu \nabla^\alpha \partial_\mu S ,$$

e o primeiro termo também pode ser reformulado:

$$\partial_\mu N \partial^\alpha S = (\partial_\mu N) \frac{1}{N} l^\alpha = l^\alpha \partial_\mu \log |N| ,$$

de forma que

$$l^\mu \nabla_\mu l^\alpha = l^\alpha l^\mu \partial_\mu \log |N| + N l^\mu \nabla^\alpha \left( \frac{1}{N} l_\mu \right) = l^\alpha l^\mu \partial_\mu \log |N| + l^\mu \nabla^\alpha l_\mu ,$$

onde na última passagem usamos o fato de ser  $l_\mu l^\mu = 0$ . Uma vez que sobre  $\mathcal{N}$  temos  $l_\mu l^\mu = 0$ , então  $l_\mu \nabla^\alpha l^\mu = \frac{1}{2} \nabla^\alpha (l_\mu l^\mu) = 0$ . Portanto

$$l^\mu \nabla_\mu l^\alpha = h(x) l^\alpha , \tag{D.3}$$

com  $h(x) = l^\mu \partial_\mu \log |N|$  uma função das coordenadas. Esta é a equação de uma geodésica parametrizada por um parâmetro arbitrário, que pode ser tomado como um parâmetro afim se ajustarmos a função  $h(x)$  a zero sobre  $\mathcal{N}$ .

Portanto, hipersuperfícies nulas são formadas por geodésicas nulas, órbitas do campo de vetores  $l^\alpha$ , normais à hipersuperfície; a estas geodésicas designaremos ‘geradores da hipersuperfície’  $\mathcal{N}$ .

### Horizontes de Killing e gravidade superficial.

Se existe em  $\mathcal{M}$  um campo de vetores de Killing  $\xi^\alpha$  que é nulo sobre a hipersuperfície nula  $\mathcal{N}$ , i.e.  $\xi_\mu \xi^\mu|_{\mathcal{N}} = 0$ , diz-se que  $\mathcal{N}$  é um ‘horizonte de Killing’ de  $\xi^\alpha$ . Uma vez que  $\xi^\alpha$  é normal a  $\mathcal{N}$ , existe uma função  $h(x)$  tal que  $\xi^\alpha = h(x) l^\alpha$  sobre  $\mathcal{N}$ ; se as geodésicas geradas por  $l^\alpha = \frac{1}{h} \xi^\alpha$  forem parametrizadas por parâmetro

---

afim, então  $\frac{1}{h}\xi^\mu \nabla_\mu \left(\frac{1}{h}\xi^\alpha\right) = \frac{1}{h}\xi^\alpha \xi^\mu \partial_\mu (1/h) + \frac{1}{h^2}\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\alpha = 0$ . Definindo a função

$$\kappa = \xi^\mu \nabla_\mu \log |h| , \quad (\text{D.4})$$

concluimos então que sobre a hipersuperfície nula  $\mathcal{N}$ , horizonte de Killing do campo  $\xi^\alpha$ , vale

$$\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\alpha = \kappa \xi^\alpha . \quad (\text{D.5})$$

A função  $\kappa(x)$  será chamada a ‘*gravidade superficial*’ do horizonte de Killing  $\mathcal{N}$ . Repare que apesar de se ter  $\xi_\mu \xi^\mu = 0$  sobre todo o horizonte, o lado esquerdo da equação acima não se anula, consequência do fato de  $\xi^\alpha$  não ser paralelamente transportado sobre  $\mathcal{N}$  ou, em outras palavras, do fato de que as órbitas de  $\xi^\alpha$ , ao contrário das órbitas de  $l^\alpha$ , não são parametrizadas por um parâmetro afim. Quando  $\kappa = 0$ , diz-se que temos um ‘horizonte de Killing degenerado’; este caso não será considerado neste texto. Usando (D.5), o Teorema de Fröbenius (D.2) e a equação de Killing,  $\nabla_{[\mu}\xi_{\nu]} = 0$ , podemos encontrar uma fórmula explícita para  $\kappa$  em termos apenas do vetor de Killing  $\xi^\alpha$ , como segue.

Uma vez que  $\xi^\alpha$  é normal à superfície  $\mathcal{N}$ , vale a Eq.(D.2):

$$\xi_{[\alpha} \nabla_\mu \xi_{\nu]} = \frac{1}{3!} (\xi_\alpha \nabla_\mu \xi_\nu - \xi_\alpha \nabla_\nu \xi_\mu + \xi_\mu \nabla_\nu \xi_\alpha - \xi_\mu \nabla_\alpha \xi_\nu + \xi_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu - \xi_\nu \nabla_\mu \xi_\alpha) = 0 ,$$

Usando a equação de Killing em cada par de termos, a expressão em parênteses se reescreve como

$$2\xi_\alpha \nabla_\mu \xi_\nu + 2\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\alpha + 2\xi_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu = 2\xi_\alpha \nabla_\mu \xi_\nu + 4\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\alpha = 0 ,$$

onde na primeira igualdade utilizamos a equação de Killing no último termo. Portanto,  $\xi_\alpha \nabla_\mu \xi_\nu = -2\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\alpha$ , e podemos escrever

$$\xi_\alpha (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu) = -(\xi_\mu \nabla^\mu \xi^\nu \nabla_\nu \xi_\alpha - \xi_\nu \nabla^\mu \xi^\nu \nabla_\mu \xi_\alpha) = -2\xi_\mu \nabla^\mu \xi^\nu \nabla_\nu \xi_\alpha ,$$

onde usamos mais uma vez a equação de Killing. Mas o último termo é dado em termos da Eq.(D.5) como  $\xi_\mu \nabla^\mu \xi^\nu \nabla_\nu \xi_\alpha = \kappa \xi^\nu \nabla_\nu \xi^\alpha = \kappa^2 \xi^\alpha$ , e obtemos a fórmula

desejada:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu \xi^\nu)(\nabla_\mu \xi_\nu). \quad (\text{D.6})$$

A fórmula acima é útil para demonstrar uma propriedade chave dos horizontes de Killing, a saber:

*A gravidade superficial  $\kappa$  é constante sobre órbitas do vetor  $\xi^\alpha$ .*

De fato, lembrando que para um vetor de Killing qualquer vale  $\nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\alpha = R^\alpha{}_{\nu\mu\beta} \xi^\beta$ , temos

$$\xi^\mu \partial_\mu \kappa^2 = -(\nabla^\alpha \xi^\beta) \xi^\mu \nabla_\mu (\nabla_\alpha \xi_\beta) = -(\nabla^\alpha \xi^\beta) \xi^\mu \xi^\nu R_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (\text{D.7})$$

e o último termo se anula por conta da antisimetria do tensor de Riemann em seus dois últimos índices. Portanto,  $\xi^\mu \partial_\mu \kappa^2 = 0$ , e  $\kappa$  é constante ao longo das órbitas de  $\xi^\alpha$ .

### **Esfera de bifurcação.**

Até aqui, sabemos que se  $\mathcal{N}$  é um horizonte de Killing, então: a)  $\mathcal{N}$  é uma hipersuperfície tridimensional gerada por uma família de geodésicas nulas cujas tangentes são um campo vetorial  $l^\alpha$  ortogonal a  $\mathcal{N}$ . b) Existe um campo de vetores de Killing  $\xi^\alpha$  que é nulo sobre  $\mathcal{N}$ , e portanto  $\xi^\alpha|_{\mathcal{N}} \sim l^\alpha$ . c) A gravidade superficial  $\kappa$  definida por (D.6) é constante ao longo das órbitas de  $\xi^\alpha$ .

Se  $\kappa \neq 0$ , as órbitas de  $\xi^\alpha$  sobre  $\mathcal{N}$  *não coincidem* com as órbitas de  $l^\alpha$ , apesar de ambos os vetores serem paralelos. De fato, vimos na Eq.(D.5) que as órbitas de  $\xi^\alpha$  em  $\mathcal{N}$  não são parametrizadas por um parâmetro afim. Seja  $s$  o parâmetro destas órbitas; para uma função  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ , temos  $\xi(f) = df/ds = (d\lambda/ds)df/d\lambda = (d\lambda/ds)l(f)$ . Então vemos que  $h = d\lambda/ds$ , e a Eq.(D.4) nos dá

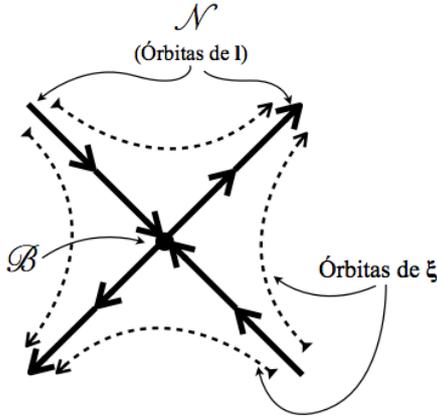
$$\kappa = \frac{d}{ds} \log |h| \Rightarrow h = \pm e^{\kappa s},$$

pois sobre uma órbita de  $\xi^\mu$  a gravidade superficial é constante. Note que ajustamos a constante de integração multiplicativa utilizando a liberdade de se adicionar uma constante a  $s$ . Agora, a relação entre os parâmetros das órbitas de  $\xi$  e  $l$  nos dá, por fim

$$\lambda = \pm e^{\kappa s}. \quad (\text{D.8})$$

(tomamos a zero uma constante de integração.)

Assim, vê-se que as órbitas de  $\xi^\mu$  sobre  $\mathcal{N}$  não acompanham mais que “metade” das órbitas de  $l^\mu$ ; pois enquanto  $s$  percorre toda a Reta Real  $(-\infty, \infty)$  ao longo da órbita de Killing completa, vemos que  $\lambda$  percorre apenas as semi-retas  $\lambda \in (0, \infty)$  ou  $(-\infty, 0)$ .



O ponto  $p \in \mathcal{N}$  sobre a hipersuperfície tridimensional  $\mathcal{N}$  no qual o parâmetro afim dos geradores se anula, i.e. no qual  $\lambda = 0$ , define uma superfície nula bidimensional  $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ , chamada de ‘esfera de bifurcação’ do horizonte de Killing, que fica sendo chamado de ‘Horizonte de Killing bifurcado’. Este ponto é um ponto fixo das órbitas de  $\xi^\mu$ , isto é: o vetor de Killing se anula sobre  $\mathcal{B}$ ,  $\xi^\mu|_{\mathcal{B}} = 0$ . De fato,  $\xi^\mu = dx^\mu/ds = (d\lambda/ds)l^\mu = \pm\kappa\lambda l^\mu$ , logo se  $\lambda = 0$  então  $\xi^\mu = 0$ . Isto implica que as órbitas de Killing não chegam a tocar  $\mathcal{B}$ , mas lhe podem ser arbitrariamente próximas.

Vimos que  $\kappa$  é constante ao longo de cada órbita de  $\xi^\mu$ , o não implica que seu valor seja o mesmo em todas as órbitas. Porém todas as órbitas de  $\xi^\mu$  têm como limite o ponto fixo em  $\mathcal{B}$ , e se  $\kappa$  for constante sobre a esfera de bifurcação segue que por continuidade todas as órbitas possuem a mesma gravidade superficial. Assim, considere um vetor  $\zeta^\alpha$  tangente a  $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ . Sobre o horizonte de Killing, o mesmo procedimento que levou à Eq.(D.7) dá agora

$$\zeta^\mu \nabla_\mu \kappa^2 = -(\nabla^\alpha \xi^\beta) \zeta^\mu \xi^\nu R_{\beta\alpha\mu\nu} ;$$

mas sobre a esfera de bifurcação o lado direito se anula, pois  $\xi^\mu = 0$ . Logo sobre qualquer órbita do vetor  $\zeta^\mu$  tangente à esfera  $\mathcal{B}$  a gravidade superficial se conserva; segue que  $\kappa$  é constante sobre *toda o horizonte de Killing*  $\mathcal{N}$ .

# Apêndice E

## Estrutura Conforme de Universos de Friedmann

Uma análise global da estrutura causal de um espaço-tempo pode ser feita por meio de um método geral, devido a Penrose, que detalharemos aqui para universos FRW planos.

As geodésicas nulas de um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ , por definição, obedecem

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0.$$

Portanto, um *outro*<sup>1</sup> espaço-tempo  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{g}})$  apresenta estrutura causal idêntica se  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ , onde  $\Omega$  é uma função não negativa.

Em primeiro lugar, fazemos a transformação para o chamado ‘*tempo conforme*’  $\eta$ , dado por  $d\eta = dt/a(t)$ , que mapeia o espaço (2.10) no espaço de Minkowski:

$$ds^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\sigma^2). \quad (\text{E.1})$$

Em seguida, fazemos uma segunda transformação que mapeia os domínios “infinitos” das coordenadas do espaço de Minkowski, e.g.  $r \in (0, \infty)$ , em coordenadas

---

<sup>1</sup> É importante enfatizar que não se trata de um mesmo espaço-tempo coberto com coordenadas diferentes, mas sim de espaços distintos, em geral.

de domínio finito  $\chi$  e  $\tau$  definidas por

$$r = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\chi+\tau}{2} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\chi-\tau}{2} \right) \right] ; \quad \eta = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\chi+\tau}{2} \right) - \operatorname{tg} \left( \frac{\chi-\tau}{2} \right) \right] , \quad (\text{E.2})$$

$$-\pi < \tau \pm \chi < \pi ,$$

o que dá

$$-d\eta^2 + dr^2 = \frac{1}{4} \sec^2 \left( \frac{\chi+\tau}{2} \right) \sec^2 \left( \frac{\chi-\tau}{2} \right) (d\chi^2 - d\tau^2) .$$

Podemos reescrever as relações (E.2) como

$$\eta = \frac{1}{2} \sec \left( \frac{\chi+\tau}{2} \right) \sec \left( \frac{\chi-\tau}{2} \right) \operatorname{sen} \tau ; \quad r = \frac{1}{2} \sec \left( \frac{\chi+\tau}{2} \right) \sec \left( \frac{\chi-\tau}{2} \right) \operatorname{sen} \chi ,$$

de forma que a métrica (E.1) fica

$$ds^2 = \frac{1}{4} \Psi^2(\chi, \tau) \sec^2 \left( \frac{\chi+\tau}{2} \right) \sec^2 \left( \frac{\chi-\tau}{2} \right) \{-d\tau^2 + d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi d\sigma^2\} , \quad (\text{E.3})$$

onde  $\Psi(\chi, \tau) = a(\eta(\chi, \tau))$ . Fica claro pela fórmula acima que  $\chi$  é uma coordenada tipo-espaço, e  $\tau$ , tipo-tempo.

O espaço-tempo descrito pela métrica

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi d\sigma^2 \quad (\text{E.4})$$

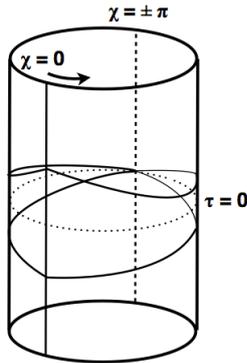


Figura E.1: Universo estático de Einstein.

tem a topologia evidente de um cilindro:  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}_3$ , e é conhecido como ‘Universo Estático de Einstein’. Por estarmos tratando de espaços-tempo com parte espacial isotrópica, podemos suprimir a parte angular das esferas  $\mathbf{S}_2$  e desenhar (E.4) como um cilindro usual. A transformação conforme (E.2) mapeia os universos (2.10) em domínios compactos sobre a superfície do cilindro, cujas fronteiras são delimitadas pelos ‘infinitos’  $r, t \rightarrow \infty$  e pela singularidade em  $t = 0$ .

Universos de Friedmann, com equação de

estado  $\omega = \text{constante}$ , têm fator de escala dado pela Eq.(2.33),

$$a(t) = a_0 (t/t_0)^{1/\gamma} ,$$

onde  $\gamma = \frac{3}{2}(1 + \omega)$  e  $\omega \neq -1/3$ . O tempo conforme fica dado por

$$\eta = \frac{1}{a_0} \int \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/\gamma} dt = \frac{3t_0}{a_0} \left(\frac{1+\omega}{1+3\omega}\right) (t/t_0)^{3(1+\omega)/(1+3\omega)} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{t_0}{a(t)} (a(t)/a_0)^\gamma , \quad (\text{E.5})$$

e portanto podemos escrever o fator de escala como função do tempo conforme:

$$a(\eta) = \xi \left(\frac{1+3\omega}{3(1+\omega)} \eta\right)^{2/(1+3\omega)} ,$$

onde  $\xi \equiv a_0 t_0^{-2/(1+\omega)}$  tem dimensão de comprimento. Pela Eq.(E.3) obtemos a métrica desejada, com

$$\Psi(\chi, \tau) = \xi \left[ \frac{1+3\omega}{6(1+\omega)} \sec\left(\frac{\chi+\tau}{2}\right) \sec\left(\frac{\chi-\tau}{2}\right) \text{sen } \tau \right]^{2/(1+3\omega)} . \quad (\text{E.6})$$

Há dois casos distintos a serem considerados, viz.  $\omega \leq -1/3$ . Se  $\omega > -1/3$ , temos um universo ‘acelerado’, i.e.  $\ddot{a}(t) > 0$ , e se  $\omega < -1/3$ , o universo é ‘desacelerado’,  $\ddot{a}(t) < 0$ . Das Eqs.(E.2) e (E.5), vemos que

$$\frac{1}{2} \left[ \text{tg}\left(\frac{\chi+\tau}{2}\right) - \text{tg}\left(\frac{\chi-\tau}{2}\right) \right] = \frac{3t_0}{a_0} \left[ \frac{1+\omega}{1+3\omega} \right] \left(\frac{t}{t_0}\right)^{3(1+\omega)/(1+3\omega)} . \quad (\text{E.7})$$

Consideremos primeiro os universos desacelerados. Em primeiro lugar, o tempo conforme tem como domínio a semi-reta positiva,  $\eta \in (0, +\infty)$ , correspondendo a  $t \in (0, \infty)$ . Assim,  $\text{tg}\left(\frac{\chi+\tau}{2}\right) \geq \text{tg}\left(\frac{\chi-\tau}{2}\right)$ , o que implica que  $\chi+\tau \geq \chi-\tau$ , ou seja:  $\tau \geq 0$ . A singularidade em  $t = 0$  é mapeada em  $\chi$  e  $\tau$  tais que  $\text{tg}\left(\frac{\chi+\tau}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{\chi-\tau}{2}\right)$ , o que ocorre para ângulos iguais, ou seja: no ‘círculo’ tipo-espaço do universo de Einstein  $\mathcal{S}^-$ , dado por:  $\mathcal{S}^- = \{\tau = 0, -\pi < \chi < \pi\}$ . Este círculo (assim como os outros descritos abaixo) está desenhado na Fig.E. O ‘futuro infinito’ do espaço-tempo corresponde ao limite  $t \rightarrow +\infty$ , i.e.  $\pm \text{tg}\left(\frac{\chi \pm \tau}{2}\right) \rightarrow \infty$ , o que é válido em  $\mathcal{S}^+ = \{\chi + \tau = \pi\} \cup \{\chi - \tau = -\pi\}$ , união dos dois ‘círculos’

$\{\chi + \tau = \pi\}$  e  $\{\chi - \tau = -\pi\}$  que envolvem o cilindro do universo estático de Einstein diagonalmente, cruzando-se nos pontos  $i^+ = \{\tau = \pi, \chi = 0\}$  e  $i^0 = \{\tau = 0, \chi = \pm\pi\}$  — o que limita  $\tau$ :  $0 \leq \tau \leq \pi$ . O ponto  $i^0$  a princípio corresponde a dois pontos diferentes, dados pelos dois sinais  $\pm\pi$ , mas que são na verdade identificados devido à periodicidade de  $\chi$ . Olhando a Eq.(E.2) vemos que  $r = 0$  na linha vertical  $\{\chi = 0, 0 < \tau < \pi\}$  e que, como  $\tau > 0$ , o semicírculo  $-\pi < \chi < 0$  corresponde a  $r < 0$ . Os infinitos espaciais,  $r \rightarrow \pm\infty$ , correspondem justamente aos dois pontos que se identificam como  $i^0$ .

Consideremos agora universos acelerados, nos quais  $-1 < \omega < -1/3$ , e o lado direito da Eq.(E.7) passa a ter  $t$  no denominador:

$$\frac{1}{2} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\chi + \tau}{2} \right) - \operatorname{tg} \left( \frac{\chi - \tau}{2} \right) \right] = -\frac{3t_0}{a_0} \left[ \frac{1 + \omega}{|1 + 3\omega|} \right] \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-3(1+\omega)/|1+3\omega|} .$$

Assim, a singularidade em  $t = 0$  passa agora a corresponder ao que, nos universos desacelerados, correspondia ao futuro temporal (i.e.  $t \rightarrow +\infty$ ). Antes de mais nada, vê-se de (E.5) que o tempo conforme tem como domínio a semi-reta *negativa*:  $\eta \in (-\infty, 0)$ , à medida que  $t$  percorre a semi-reta positiva  $(0, \infty)$ . Assim, vemos que  $\tau \leq 0$ . A singularidade mapeia-se nos dois ‘círculos’ tipo-luz  $\mathcal{I}^- = \{\chi + \tau = -\pi\} \cup \{\chi - \tau = \pi\}$ , que se intersectam nos pontos  $i^+ = \{\chi = 0, \tau = -\pi\}$  e  $i^0 = \{\tau = 0, \chi = \pm\pi\}$ . Novamente,  $i^0$  corresponde à identificação dos dois pontos  $r \rightarrow \pm\infty$  que dão os infinitos tipo-espaço, e na verdade toda a estrutura tipo-espaço (viz.  $r = 0$  correspondendo a  $\chi = 0$ , e  $r \leq 0$  correspondendo a  $\chi \leq 0$ ) é a mesma. O futuro infinito  $t \rightarrow +\infty$  é agora mapeado no círculo tipo-espaço  $\mathcal{I}^+ = \{\tau = 0, -\pi < \chi < \pi\}$ .

Notamos que em ambos os casos, as geodésicas nulas (radiais) são dadas pela relação  $ds^2 = 0$  que implica  $d\tau = \pm d\chi$ , ou seja:  $\tau = \pm\chi + \text{constante}$ . É este o motivo pelo qual dizemos que as curvas  $\{\chi \pm \tau = \pm\pi\}$  são curvas do tipo-luz. Raciócinio parecido se aplica ao círculo  $\{\tau = 0, -\pi < \chi < \pi\}$  ao longo do qual  $d\tau = 0$ , e portanto  $ds^2 > 0$ , caracterizando uma hipersuperfície tipo-espaço.

Seguimos por fim para o caso degenerado em que  $\omega = -1/3$ , que representa um universo com aceleração nula. O tempo conforme agora é dado por

$$\eta = \frac{t_0}{a_0} \int \frac{dt}{t} = \frac{t_0}{a_0} \log \left( \frac{t}{t_0} \right) ,$$

e seu domínio é toda a reta real:  $\eta \in (-\infty, +\infty)$  à medida que  $t \in (0, \infty)$ . O

fator de escala,  $a(t) = a_0 t/t_0$ , em função do tempo conforme se escreve

$$a(\eta) = a_0 \exp \left[ \frac{a_0}{t_0} \eta \right] , \quad (\text{E.8})$$

e portanto a métrica conforme ao universo de Einstein, Eq.(E.3), tem

$$\Psi(\chi, \tau) = a_0 \exp \left[ \frac{a_0}{2t_0} \sec \left( \frac{\chi + \tau}{2} \right) \sec \left( \frac{\chi - \tau}{2} \right) \operatorname{sen} \tau \right] .$$

A equação análoga a (E.7) é

$$\frac{1}{2} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\chi + \tau}{2} \right) - \operatorname{tg} \left( \frac{\chi - \tau}{2} \right) \right] = \frac{t_0}{a_0} \log \left( \frac{t}{t_0} \right) . \quad (\text{E.9})$$

Como o lado direito assume valores em toda a reta  $(-\infty, +\infty)$ , o domínio de  $\tau$  é todo o intervalo  $(-\pi, +\pi)$ . A singularidade é mapeada nos círculos tipo-luz  $\{\chi + \tau = -\pi\}$  e  $\{\chi - \tau = \pi\}$ , cuja união compõe  $\mathcal{S}^-$ , e o futuro infinito é mapeado em outros dois círculos tipo-luz:  $\mathcal{S}^+ = \{\chi + \tau = \pi\} \cup \{\chi - \tau = -\pi\}$ . Os dois primeiros se intersectam no ponto  $\{\chi = 0, \tau = -\pi\}$ ; os dois últimos no ponto  $i^+ = \{\chi = 0, \tau = +\pi\}$ ; e todos os quatro se encontram no ponto  $i^0 = \{\tau = 0, \chi = \pm\pi\}$ , que corresponde como de costume ao infinito tipo-espaço.

Os pedaços do universo de Einstein em que são mapeados os espaços descritos acima podem ser vistos separadamente, ‘desenrolados’ do cilindro sobre o qual se encontram, numa representação pictórica (finita) de todo o espaço-tempo (infinito). São os conhecidos *diagramas de Penrose*, Fig.E.2. Fazemos agora a seguinte definição:

*Um horizonte futuro é a superfície (esférica) bidimensional gerada pelas geodésicas nulas que descrevem o cone de luz passado do ponto futuro infinito  $i^+$ .*

Uma vez que as geodésicas nulas são linhas a  $\pm 45^\circ$ , o horizonte de eventos é representado nos diagramas de Penrose como a diagonal que passa por  $i^+$ . De forma análoga, o horizonte de partículas definido no §2.3.3 corresponde ao cone de luz futuro do passado infinito (ou, no nosso caso, da singularidade), e é portanto representado pela diagonal que passa por  $\{r = 0, t = 0\}$ . Por conta disso, ambos os horizontes cosmológicos são às vezes chamados de ‘horizonte futuro’ (horizonte de eventos) e ‘horizonte passado’ (horizonte de partículas).

Enfatizamos que o fato de o horizonte de eventos ser um objeto global não significa que ele seja um objeto *independente do tempo*. O raio do horizonte

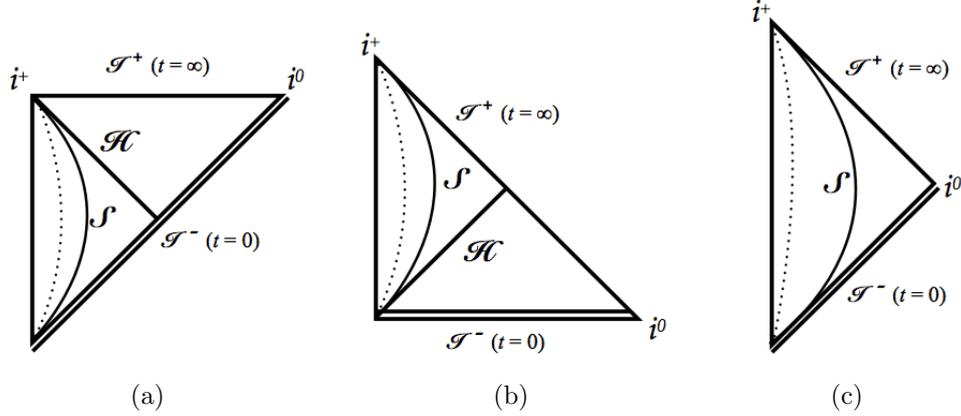


Figura E.2: Diagramas de Penrose. As linhas pontilhadas indicam trajetórias tipo-tempo genéricas de partículas deixando a origem  $r = 0$  no instante inicial  $t = 0$ . As linhas tipo-tempo sólidas indicam o horizonte aparente  $\mathcal{S}$  (ver §3.1.3). (a) universo acelerado,  $-1 < \omega < -1/3$ , com horizonte de eventos futuro  $\mathcal{H}$ ; (b) universo desacelerado  $-1/3 < \omega < 1$ , com horizonte de eventos passado  $\mathcal{H}$ ; (c) universo estacionário  $\omega = -1/3$ .

cosmológico é sim uma função do tempo cósmico; porém uma função que, para ser determinada, exige conhecimento do espaço-tempo como um todo.

### Natureza causal do horizonte aparente.

Ao contrário do que ocorre com o horizonte de eventos, sempre existe um horizonte aparente, de raio igual ao raio de Hubble,  $l_{\text{ap}} = 1/H$ , em todos os casos possíveis descritos acima. Para determinar se este horizonte é tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz, escrevemos a equação da superfície  $\mathcal{S}$  dada por (3.21):

$$h(r, t) = a(t)r - 1/H(t) = 0.$$

O vetor normal  $n_\mu = \partial_\mu h(r, t)|_{\mathcal{S}} = \left[ (\dot{a}r + \dot{H}/H^2)\delta_{0\mu} + a\delta_{1\mu} \right]_{\mathcal{S}}$ , pode ser escrito em termos de  $\omega$ :

$$n_\mu|_{\mathcal{S}} = \frac{1}{H^2}(H^2 + \dot{H})\delta_{0\mu} + a\delta_{1\mu} = -\frac{1}{2}\varrho(1 + 3\omega)\delta_{0\mu} + a\delta_{1\mu},$$

e possui norma

$$n_\mu n^\mu|_{\mathcal{S}} = -\frac{9}{4}\left(\omega^2 + \frac{2}{3}\omega - \frac{1}{3}\right),$$

---

onde usamos as equações de Friedmann. A expressão quadrática em parênteses se anula para  $\omega = -1$  ou  $\omega = 1/3$ . Fica então claro que (Faraoni (2011))

- (i) Se  $-1 < \omega < 1/3$ , então  $n_\mu n^\mu|_{\mathcal{S}} > 0$ , e  $\mathcal{S}$  é uma superfície tipo-tempo;
- (ii) Se  $\omega = -1$  ou  $\omega = 1/3$ , então  $n_\mu n^\mu|_{\mathcal{S}} = 0$ , e  $\mathcal{S}$  é uma superfície tipo-luz;
- (iii) Se  $\omega < -1$  ou  $\omega > 1/3$ , então  $n_\mu n^\mu|_{\mathcal{S}} < 0$ , e  $\mathcal{S}$  é uma superfície tipo-espaço.

Os casos (i) e (ii) estão representados na Fig.E.2. Note que o caso (iii) engloba universos “fantasmas” ou dominados por matéria com pressão maior que a da radiação, o que supostamente não ocorre no universo observado.

# Apêndice F

## O Polinômio Cúbico

Consideremos a equação cúbica

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 . \quad (\text{F.1})$$

A solução de (F.1), pode ser obtida pelo método de Vieta, como segue. Por meio de uma translação  $x \rightarrow x + \text{const.}$  apropriada, escolhendo-se a constante, é sempre possível eliminar uma das potências menores de  $x$ . Em particular, a transformação

$$x = y - b/3 \quad (\text{F.2})$$

transforma (F.1) em

$$y^3 + py + q = 0 , \quad (\text{F.3})$$

$$p = c - b^2/3 ; \quad q = \frac{2}{27}b^3 - \frac{1}{3}bc + d . \quad (\text{F.4})$$

Façamos então a substituição de Vieta:

$$y = z - \frac{p}{3}z^{-1} . \quad (\text{F.5})$$

---

Temos  $y^3 = z^3 - \frac{p^3}{27}z^{-3} + \frac{p^2}{3}z^{-1} - pz$ , e  $z^3 - \frac{p^3}{27}z^{-3} + q = 0$ , ou seja: temos uma equação quadrática para  $z^3$ :

$$(z^3)^2 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (\text{F.6})$$

E a equação está resolvida:

$$z_{\pm}^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}; \quad (\text{F.7})$$

A expressão à direita na equação acima é em geral um número complexo, e o processo de se tomar a raiz cúbica deve ser considerado neste âmbito. Ao fim, como é de se esperar, há somente três soluções (reais ou complexas) para  $\sigma$ , variável da equação cúbica original. Há um método para se determinar o número de raízes reais distintas da equação, sem que seja necessário se determinar as raízes em si. Define-se o *discriminante* da equação cúbica (F.1) por

$$\Delta = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3, \quad (\text{F.8})$$

uma generalização do discriminante da equação quadrática. O sinal de  $\Delta$  determina o número de raízes reais distintas:

$$\Delta > 0 \iff \text{há **uma** raiz real}; \quad (\text{F.9})$$

$$\Delta = 0 \iff \text{há **duas** raízes reais distintas}; \quad (\text{F.10})$$

$$\Delta < 0 \iff \text{há **três** raízes reais distintas}. \quad (\text{F.11})$$

Definindo ainda

$$S = \left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}\right)^{1/3}; \quad T = \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}\right)^{1/3}, \quad (\text{F.12})$$

as soluções podem ser escritas como

$$x_1 = -\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T); \quad (\text{F.13})$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}(S + T) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T); \quad (\text{F.14})$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}b + S + T; \quad (\text{F.15})$$

---

conhecidas como *fórmulas de Cardano*. Em particular, quando  $\Delta = 0$ , as raízes se escrevem explicitamente em termos dos parâmetros originais da equação como

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{3} \left( b + \frac{1}{3}b^2 - c \right) , \quad (\text{F.16})$$

$$x_3 = -\frac{1}{3} \left( b + \frac{2}{3}b^2 - 2c \right) . \quad (\text{F.17})$$

Apesar de, em geral,  $S$  e  $T$  serem complexos, e portanto as fórmulas acima não deixarem claro quais soluções são complexas ou não, fica claro a importância do sinal de  $\Delta$ . Em particular, é fácil ver que se  $\Delta = 0$  então temos todas as raízes reais, com  $\sigma_2 = \sigma_1$ ; ou duas raízes reais distintas.

Se  $\Delta < 0$ , é necessário que se tenha  $|\frac{\sqrt{27}}{2} \frac{q}{\sqrt{(-p^3)}}| < 1$  (cf. Eq. (F.8)), logo podemos definir o ângulo

$$\theta = \arccos \left[ \frac{\sqrt{27}}{2} \frac{q}{\sqrt{(-p^3)}} \right] , \quad (\text{F.18})$$

com o qual podemos reescrever as soluções reais na forma

$$x_1 = -\frac{1}{3}b + 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \left( \frac{\theta+4\pi}{3} \right) ; \quad (\text{F.19})$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}b + 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \left( \frac{\theta+2\pi}{3} \right) ; \quad (\text{F.20})$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}b + 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) . \quad (\text{F.21})$$

Mais adiante será necessário ajustar os coeficientes de (F.1) para que suas raízes sejam todas positivas. Para tanto, procedemos como segue: não é difícil ver que caso os dois extremos (o máximo e o mínimo locais) do polinômio cúbico estiverem em valores de  $\sigma > 0$ , podemos garantir que apenas uma das suas raízes pode ser negativa. Mas pode-se mostrar (e.g. a partir das soluções de Cardano) que as raízes da equação cúbica apresentam as simetrias (chamadas “fórmulas de Vieta”)

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = c ; \quad x_1 x_2 x_3 = -d ; \quad x_1 + x_2 + x_3 = -b . \quad (\text{F.22})$$

Algumas consequências são que, se duas das raízes são positivas, devemos impor  $d < 0$  para que a terceira seja também positiva. Se uma das raízes é nula, então  $d = 0$ , etc.

Os extremos do polinômico cúbico se encontram onde sua derivada se anula,

---

i.e. quando  $3\sigma^2 + 2b\sigma + c = 0$ , ou

$$x_{\pm} = -\frac{1}{3} \left( b \pm \sqrt{b^2 - 3c} \right). \quad (\text{F.23})$$

Em particular, para que ambos  $x_{\pm}$  sejam positivos, devemos ter  $\beta < 0$  e  $c > 0$ ; assim uma condição suficiente para que as três raízes reais de (F.1), quando existirem, sejam todas positivas, é que

$$b < 0 ; \quad c > 0 ; \quad d < 0. \quad (\text{F.24})$$

Com essas condições satisfeitas, é fácil ver que no caso em que  $\Delta = 0$ , as duas soluções reais distintas se ordenam em:  $0 < x_1 = x_2 < x_3$ .

# Apêndice G

## Sobre a integral de uma razão de polinômios

Um dos resultados mais bem conhecidos da análise complexa é o seguinte

TEOREMA: *Toda função  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  analítica no anel  $\mathcal{A} = \{z : r_0 < |z - z_0| < R_0\}$  pode ser expandida na série*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(z - z_0)^n},$$

*chamada série de Laurent de  $f(z)$ , que converge em  $K$ . O número  $\alpha_{-1}$  é o Resíduo de  $f(z)$  em  $z_0$ .*

Seguem então os seguintes resultados:

COROLÁRIO I: *Se  $f(z)$  é analítica em  $\mathbf{C}$  a menos de um número finito de pólos  $z_k$  de ordem  $m_k$ , ela pode ser expandida na série*

$$f(z) = \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\alpha_{j,k}}{(z - z_0)^j} + F(z), \tag{G.1}$$

onde  $F(z)$  é analítica em todo  $\mathbf{C}$  e  $\alpha_{1,k}$  é o resíduo de  $f(z)$  em  $z_k$ .

PROVA. Considere o ponto  $z_k$ , pólo de ordem  $m_k$  de  $f(z)$ , e o ponto  $z_{k+1}$  que se encontra mais próximo de  $z_k$  que qualquer outro pólo. Seja  $d_k = |z_k - z_{k+1}|$ . Pelo teorema acima, como  $f(z)$  é analítica no anel  $\mathcal{A}_k = \{z : r_k < |z - z_k| < R_k\}$  com  $r_k \rightarrow 0$  e  $R_k < d_k$ , pode ser expandida em  $\mathcal{A}$  na série

$$f(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\alpha_{j,k}}{(z - z_k)^j} + F_k(z),$$

onde  $\alpha_{1,k}$  é o resíduo de  $f(z)$  em  $z_k$ , e  $F_k(z)$  é analítica em todo  $\mathbf{C}$  a menos dos pólos  $z_l$ ,  $l \neq k$ . Da mesma forma,  $F_k(z)$  pode ser escrita como  $F_k(z) = \sum_{j=1}^{m_{k+1}} \frac{\alpha_{j,k+1}}{(z - z_{k+1})^j} + F_{k+1}(z)$ , que converge no anel  $\mathcal{A}_k = \{z : r_{k+1} < |z - z_{k+1}| < R_{k+1}\}$  com  $r_{k+1} \rightarrow 0$  e  $R_{k+1} < d_{k+1}$ , onde  $d_{k+1} > d_k$  é a distância de  $z_{k+1}$  para o segundo pólo mais próximo (uma vez que o primeiro pólo mais próximo é  $z_k$  onde, por construção,  $F_k(z)$  é analítica). Repetindo este argumento pólo a pólo, chegamos à Eq.(G.1).

COROLÁRIO II: *Seja  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Caso exista, a primitiva de  $f(x)$  é dada por*

$$\int f(x) dx = \sum_k \left[ \log [|x - z_k|^{\alpha_{k,1}}] - \sum_{j=2}^{m_k} \frac{\alpha_{j,k}}{(j-1)(x - z_k)^{j-1}} \right] + \int F(x) dx + \text{constante} \quad (\text{G.2})$$

onde  $z_k$  são os pólos (finitos) de ordem  $m_k$  da função  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ .

PROVA. A demonstração consiste simplesmente em se integrar a fórmula (G.1).

COROLÁRIO III: *Seja  $f(z)$ , analítica em  $\mathbf{C}$  a menos de um número finito de pólos  $z_k$  de ordem  $m_k$ . Se a integral  $\oint_{\gamma} f(z) dz$ , sobre o círculo  $\gamma$  de raio  $R \rightarrow \infty$ , centrado na origem, se anula, então  $\sum_k \alpha_{k,1} = 0$ .*

PROVA. Seja  $R^2 > r^2$ , onde  $r^2 = \max_k |z_k|^2$ . A integral  $\oint_{\gamma} f(z) dz$  sobre o círculo  $\gamma$  de raio  $R$  é igual à soma dos resíduos de  $f(z)$ ,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_k \alpha_{k,1}.$$

Tomando  $R \rightarrow \infty$ , e assumindo que a integral tende a zero, está provada a afirmação.

---

### Sobre funções racionais.

Note que se  $f(z) = P(z)/Q(z)$  é uma função racional, i.e.  $P(z)$  e  $Q(z)$  são polinômios de raízes não coincidentes e o grau de  $Q(z)$  é maior do que o grau de  $P(z)$ , então  $z_k$  são zeros de ordem  $m_k$  de  $Q(z)$ , e  $F(z) = 0$ .<sup>1</sup> Neste caso, seja  $A(x) = \int f(x)dx$ , temos que

$$e^{A(x)} = \text{constante} \times \prod_{j=2}^{m_k} \exp \left[ \frac{-\alpha_{j,k}}{(j-1)(x-z_k)^{j-1}} \right] \prod_k |x-z_k|^{\alpha_{k,1}} .$$

Consideremos  $f(x) = 1/\beta(x)$ , e que os pólos de  $f(x)$  — ou seja: os zeros de  $\beta(x)$  — são todos de ordem um, com exceção de  $x_*$  que é de ordem dois. Então

$$e^{A(x)} = e^{A_\infty} \exp \left[ \frac{-\alpha_{*,2}}{(x-x_*)} \right] |x-x_*|^{\alpha_{*,1}} \prod_k |x-z_k|^{\alpha_{k,1}} .$$

Os números  $\alpha_{k,1}$  são os resíduos de  $f(x)$  em cada solução  $x_k$  (possivelmente complexa) da equação  $\beta(x_k) = 0$ . Como estes são pólos de primeira ordem, temos

$$\alpha_{k,1} = \text{Res} [f, x_k] = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x-x_k)}{\beta(x) - \beta(x_k)} = \frac{1}{\beta'(x_k)} ,$$

onde usamos o fato de que  $\beta(x_k) = 0$ . O número  $\alpha_{*,1}$  é o resíduo de  $f(x)$  no pólo de *segunda* ordem  $x_*$ , e pode ser calculado pela fórmula conhecida

$$\alpha_{*,1} = \text{Res} [f, x_*] = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{d}{dx} \left[ \frac{(x-x_*)^2}{\beta(x)} \right] .$$

Uma vez que  $\beta(x_*) = \beta'(x_*) = 0$ , podemos expandir  $\beta(x)$  em torno de  $x_*$  como  $\beta(x) = \frac{1}{2}\beta''(x_*)(x-x_*)^2 + \frac{1}{6}\beta'''(x_*)(x-x_*)^3 + \dots$ . Logo, temos que

$$\alpha_{*,1} = -\frac{2}{3} \frac{\beta'''(x_*)}{(\beta''(x_*))^2} .$$

---

<sup>1</sup>Pois, devido à fatoração de um polinômio em monômios, ao tirar-se o denominador comum das frações sob o somatório em (G.1) forma-se no denominador o polinômio  $Q(x)$ , e no numerador um polinômio que é necessariamente igual a  $P(x)$ .

---

Vamos calcular  $\alpha_{*,2}$  no caso específico em que  $\beta(x) = \frac{W'(x)}{W(x)} C(x)$ , onde  $W(x)$  e  $C(x)$  são polinômios que supomos, por conveniência, estarem normalizados. Supomos também que  $x_*$  é um zero de segunda ordem de  $W'(x)$ . Se o grau de  $C(x)$  for maior que o grau de  $W(x)$  por no mínimo 3, vale o Corolário III. Notemos que a expansão de  $1/\beta(x)$ ,

$$\frac{1}{\beta(x)} = \frac{\alpha_{*,2}}{(x - x_*)^2} + \frac{\alpha_{*,1}}{(x - x_*)} + \sum_k \frac{\alpha_{k,1}}{(x - x_k)},$$

pode ser escrita como

$$\frac{1}{\beta(x)} = \frac{\alpha_{*,2} \prod_k (x - x_k) + \alpha_{*,1} (x - x_*) \prod_k (x - x_k) + \sum_k \alpha_{k,1} (x - x_*)^2 \prod_{j \neq k} (x - x_j)}{(x - x_*)^2 \prod_k (x - x_k)},$$

e o numerador da fração acima deve ser igual a  $W(x)$ . Derivando este denominador, temos

$$W'(x_*) = \alpha_{*,2} \sum_k \left( \prod_{j \neq k} (x_* - x_k) \right) + \alpha_{*,1} \prod_k (x_* - x_k) = 0,$$

ou seja:

$$\alpha_{*,2} = - \frac{\alpha_{*,1}}{\sum_k (x_* - x_k)^{-1}}. \quad (\text{G.3})$$

Suponhamos por fim que  $W(x)$  seja um polinômio quártico e  $C(x) = C(W(x))$ .

---

Temos

$$\beta(x) = \frac{W'(x)}{W(x)} C(x) = W'(x) g(W),$$

$$\beta'(x) = W''g + (W')^2 \frac{dg}{dW},$$

$$\beta''(x) = W'''g + 3W'W'' \frac{dg}{dW} + (W')^3 \frac{d^2g}{dW^2},$$

$$\beta'''(x) = W^{(4)}g + 3[(W'')^2 + W'W'''] \frac{dg}{dW} + 5(W')^2W'' \frac{d^2g}{dW^2} + (W')^4 \frac{d^3g}{dW^3}$$

$$\beta^{(4)}(x) = W^{(5)}g + 3[3W''W''' + W'W^{(4)}] \frac{dg}{dW} + 5[2W'(W'')^2 + (W')^2W'''] \frac{d^2g}{dW^2} + 9(W')^3W'' \frac{d^3g}{dW^3} + (W')^5 \frac{d^4g}{dW^4},$$

e não é difícil ver que como  $W'(x_*) = W''(x_*) = 0$ , e  $W^{(n)}(x) = 0$  para  $n \geq 5$ , temos que  $\beta^{(n)}(x_*) = 0$  para  $n \geq 4$ . Assim, a série de Taylor de  $\beta(x)$  em torno de  $x_*$  se escreve

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\beta''(x_*)(x - x_*)^2 + \frac{1}{6}\beta'''(x_*)(x - x_*)^3.$$

Para um vácuo  $x_k \neq x_*$ , digamos  $x_1$ , como  $\beta(x_1) = 0$ ,  $\beta'''(x_*) = -\frac{3}{2} \frac{\beta''(x_*)}{(x_1 - x_*)}$ , e portanto

$$\alpha_{*,1} = \frac{1}{\beta''(x_*)(x_1 - x_*)}; \quad \alpha_{*,2} = -\frac{1}{\beta''(x_*)} \frac{1}{\left[1 + \sum_{k \neq 1} (x_* - x_k)^{-1}\right]}.$$

## Apêndice H

# A integral do tempo em função da função de Hubble

Para avaliar a integral (6.33),

$$I = \int \frac{1 - 3\mu L^4 H^4}{H^6 + p H^2 + q} dH ,$$

notamos o denominador do integrando é um polinômio cúbico em  $H^2$ , e o fatoramos em suas três raízes  $h_{1,2,3}$ :

$$f(H^2) = H^6 + p H^2 + q = (H^2 - h_1^2)(H^2 - h_2^2)(H^2 - h_3^2) . \quad (\text{H.1})$$

Podemos então fragmentar o integrando em três frações,

$$I = \int \left\{ \frac{\alpha_1}{H^2 - h_1^2} + \frac{\alpha_2}{H^2 - h_2^2} + \frac{\alpha_3}{H^2 - h_3^2} \right\} dH , \quad (\text{H.2})$$

onde  $\alpha_i$  são constantes em geral complexas facilmente determinadas:

$$\alpha_1 = \frac{1-3\mu L^4 h_1^4}{(h_1^2-h_2^2)(h_1^2-h_3^2)} ; \quad \alpha_2 = \frac{1-3\mu L^4 h_2^4}{(h_2^2-h_1^2)(h_2^2-h_3^2)} ; \quad \alpha_3 = \frac{1-3\mu L^4 h_3^4}{(h_3^2-h_1^2)(h_3^2-h_2^2)} .$$

---

As propriedades analíticas da integral ficam determinadas pela natureza das raízes  $h_i^2$ , em geral complexas, que passamos a investigar. O número de raízes reais é dado pelo sinal do discriminante da Eq.(H.1),

$$\Delta = \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{\varkappa^4}{36^2 L^8 \mu^2} (9\varrho_\Lambda^2 - 4\varrho_{\text{top}}^2) ,$$

onde reescrevemos

$$p = -\varkappa^4 \varrho_{\text{top}}^2 / 12 ; \quad q = \varkappa^2 \varrho_\Lambda / 6L^4 \mu = \varkappa^6 \varrho_{\text{top}}^2 \varrho_\Lambda / 72 ,$$

com  $\varrho_\Lambda$  definido em (6.4) e  $\varrho_{\text{top}}^2 = 12/\mu L^4 \varkappa^4$ . Note que

$$\varrho_{\text{top}}^2 \begin{cases} > 0 & \text{se } \mu > 0; \\ < 0 & \text{se } \mu < 0. \end{cases}$$

Se  $\mu < 0$  temos sempre  $\Delta > 0$  e temos apenas *uma raiz real*. Se  $\mu > 0$ , consideremos  $|\mu| \ll 1$ , o primeiro termo domina sobre o segundo já que  $p^3 \sim 1/\mu^3$  e  $q^2 \sim 1/\mu^2$ . Assim,  $\Delta \approx -\frac{1}{27L^{12}\mu^3} < 0$  e temos *3 raízes reais*.

## H.1 O caso $\mu < 0$ .

### H.1.1 Solução exata

Quando  $\mu < 0$ , temos uma raiz real, digamos  $h_1^2$ , e duas complexas,  $h_2^2 = \bar{h}_3^2$ . Afirmamos que a raiz real é positiva. De fato, usando uma das fórmulas de Viéta para as simetrias das raízes da equação cúbica:

$$h_1^2 h_2^2 h_3^2 = -q > 0 .$$

Uma vez que  $h_2^2 h_3^2 = |h_2^2|^2 > 0$ , segue o que se afirma. A consequência disto é que a integral (H.2) se escreve como

$$\frac{3}{2}(1 + w_1)\mu L^4 t = -\frac{\alpha_1}{h_1} \text{arc cth}(H/h_1) + \mathcal{F}(H) , \quad (\text{H.3})$$

---

onde  $\mathcal{F}(H)$  é uma função real não singular. Note que assumimos que a relação  $H > h_1$  é sempre válida, para que seja possível recuperar o limite da gravitação E.H., no qual  $h_1 \rightarrow H_\Lambda$  (ver discussão após a Eq.(6.4)).<sup>1</sup> Note ainda que  $h_1^2$  é a única raiz real da equação cúbica (H.1); mas esta equação é nada mais que a Eq.(4.30) escrita em termos de  $H$  através da fórmula  $\Lambda = 3H^2$ , logo

$$h_1^2 = \Lambda_{\text{eff}}/3. \quad (\text{H.4})$$

Para analisarmos o comportamento de  $\mathcal{F}(H)$ , notamos primeiro que  $\alpha_2 = \bar{\alpha}_3$ , e como  $h_2^2 = \bar{h}_3^2 \in \mathbf{C}$ , escrevemos  $h_2 = x + iy$  e  $\alpha_2/2h_2 = \chi + iv$ . Temos

$$\mathcal{F}(H) = \int \left\{ \frac{\alpha_2}{H^2 - h_2^2} + \frac{\alpha_3}{H^2 - h_3^2} \right\} dH = \frac{\alpha_2}{2h_2} \log \left[ \frac{H - h_2}{H + h_2} \right] + \frac{\alpha_3}{2h_3} \log \left[ \frac{H - h_3}{H + h_3} \right],$$

o que se pode reescrever como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H) = & \chi \left\{ \log(H - x - iy) + \log(H - x + iy) - \right. \\ & \left. - \log(H + x + iy) - \log(H + x - iy) \right\} + \\ & + iv \left\{ \log(H - x - iy) - \log(H - x + iy) - \right. \\ & \left. - \log(H + x + iy) + \log(H + x - iy) \right\}; \end{aligned}$$

o primeiro termo é real:

$$\chi\{\dots\} = \chi \left[ \log((H - x)^2 + y^2) - \log((H + x)^2 + y^2) \right].$$

Já o segundo termo,  $iv\{\dots\}$ , pode ser transformado em uma expressão real por meio da identidade

$$i \log(1 - iz) - i \log(1 + iz) = 2 \operatorname{arc\,tg} z = -\pi - 2 \operatorname{arc\,tg}(1/z),$$

de onde tiramos

$$iv\{\dots\} = -2v \left\{ \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{H - x}{y} \right) + \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{H + x}{y} \right) \right\}$$

---

<sup>1</sup> No limite  $\mu \rightarrow 0$ , as partes imaginárias das raízes complexas divergem.

---

e, por fim, ignorando por enquanto a constante  $-2\pi v$ , que será ajustada com a constante de integração,

$$\mathcal{F}(H) = \chi \log \left( \frac{(H-x)^2+y^2}{(H+x)^2+y^2} \right) - 2v \left[ \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{H-x}{y} \right) + \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{H+x}{y} \right) \right].$$

Assim, vemos que

$$\begin{aligned} \text{se } H \rightarrow \infty, \quad \mathcal{F} &\rightarrow \chi \log(1) - 4v \operatorname{arc\,tg}(\infty) = -2\pi v, \\ \text{se } H \rightarrow 0, \quad \mathcal{F} &\rightarrow \chi \log(1) - 4v \operatorname{arc\,tg}(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto a única divergência de  $t(H)$  é em  $h_1^2 = \Lambda_{\text{eff}}/3$ ; ou seja: no futuro distante, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $H \rightarrow \sqrt{\Lambda_{\text{eff}}/3}$ , e em algum instante finito  $t_0$  no passado a função de Hubble diverge, indicando a existência de uma singularidade. Este instante pode ser fixado como zero ao se subtrair da função  $\mathcal{F}$  a constante (de integração) limite<sup>1</sup>

$$t_0 = \frac{4\pi v}{3(1+w_1)\mu L^4}. \quad (\text{H.5})$$

A forma final da Eq.(H.3) com a constante de integração acima ajustada pode enfim ser escrita:

$$t - t_0 = \frac{2}{3(1+w_1)} \frac{1}{L^4 \mu} \left\{ -\frac{\alpha_1}{h_1} \operatorname{arc\,cth}(H/h_1) + \chi \log \left( \frac{(H-x)^2+y^2}{(H+x)^2+y^2} \right) - 2v \left[ \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{H-x}{y} \right) + \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{H+x}{y} \right) \right] \right\}. \quad (\text{H.6})$$

**Aproximação para  $|\mu| \ll 1$ .**

Como já foi dito,  $h_{1,2,3}^2$  são as raízes da Eq.(4.33), e podemos encontrá-las usando

---

<sup>1</sup> Apesar de  $\mu$  aparecer explicitamente no denominador de  $t_0$ , ele também aparece implicitamente em  $v$ , de forma que pode-se mostrar que no limite  $\mu \rightarrow 0$  temos de fato o mesmo resultado do que em EH, viz.  $t_0 \rightarrow 0$ .

---

as Eqs.(F.13)-(F.15). Com  $S$  e  $T$  definidos na Eq.(??), temos

$$3h_1^2 = S + T \quad (\text{H.7a})$$

$$3h_2^2 = \frac{1}{2}(S + T) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) = 3\bar{h}_3^2. \quad (\text{H.7b})$$

Agora, expandindo para  $|\mu| \ll 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} S \pm T \approx & \frac{1}{\sqrt{|\tilde{\mu}|}} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \pm (-)^{1/3}) + \sqrt{|\tilde{\mu}|} \frac{\Lambda_0}{2} (1 \mp (-)^{1/3}) + \right. \\ & \left. + |\tilde{\mu}| \frac{\sqrt{3}\Lambda_0^2}{8} (1 \pm (-)^{1/3}) - |\tilde{\mu}|^{3/2} \frac{\Lambda_0^3}{2} (1 \mp (-)^{1/3}) \right] \end{aligned}$$

Note qua há ambiguidade na escolha de  $(-)^{1/3}$  que pode ser

$$(-)^{1/3} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \end{cases}$$

As fórmulas (H.7) correspondem à primeira escolha (i.e.  $(-)^{1/3} = -1$ ). Caso se escolha  $(-)^{1/3} = (1 \pm i\sqrt{3})/2$ , as fórmulas para as raízes continuam as mesmas, porém a raíz real (no caso,  $h_1^2$ ) não será mais dada por  $S + T$ , mas por uma das outras fórmulas. Assim, tomando  $(-)^{1/3} = -1$ , temos

$$S + T \approx \Lambda_0 - |\tilde{\mu}| \Lambda_0^3; \quad S - T \approx \frac{2}{\sqrt{3|\tilde{\mu}|}} + \sqrt{|\tilde{\mu}|} \frac{\sqrt{3}\Lambda_0^2}{4},$$

e portanto (compare a expressão para  $h_1$  com a Eq.(4.33))

$$h_1^2 \approx \frac{\Lambda_0}{3} + \frac{\Lambda_0^3}{27} L^4 \mu, \quad (\text{H.8})$$

$$h_2^2 \approx \frac{\Lambda_0}{6} + \frac{\Lambda_0^3}{54} L^4 \mu + i \left( \frac{1}{L^2 \sqrt{|\mu|}} + \frac{\Lambda_0^2 L^2}{24} \sqrt{|\mu|} \right). \quad (\text{H.9})$$

Note que a parte imaginária das raízes complexas divergem no limite  $\mu \rightarrow 0$ .

Será útil mais adiante ter em mãos uma fórmula para  $t(H)$  quando  $|\mu| \ll 1$ . Para tanto, precisamos determinar o valor de  $x$ ,  $y$ , etc. na Eq.(H.6). Usando a Eq.(H.9), podemos obter o valor de  $x$  e  $y$ . Com (H.9) obtemos para  $h_2 = x + iy =$

---

$\sqrt{X + iY}$

$$x = \sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}},$$

e expandindo em primeira ordem em  $\mu$ , temos

$$t \approx \frac{2\sqrt{3\Lambda_0}}{(1+w_1)} \operatorname{arc} \operatorname{cth} \left[ \frac{H}{\sqrt{\Lambda_0/3}} \right] + L^4 \mu \left\{ \frac{7\sqrt{\Lambda_0^3/3}}{9(1+w_1)} \operatorname{arc} \operatorname{cth} \left[ \frac{H}{\sqrt{\Lambda_0/3}} \right] - \frac{H(12H^4 + 5\Lambda_0 H^2 - 4\Lambda_0^2)}{9(1+w_1)(3H^2 - \Lambda_0)} \right\} + \frac{\sqrt{2}\pi}{3(1+w_1)} L |\mu|^{1/4} + \frac{\sqrt{2}\pi\Lambda_0}{9(1+w_1)} L^3 |\mu|^{3/4} \quad (\text{H.10})$$

**O caso  $\mu > 0$ .**

Quando  $\mu > 0$  existem três raízes reais para (H.1) e a integral (H.2) dá uma soma de três arcos tangentes hiperbólicos ou trigonométricos, dependendo do sinal das raízes  $h_i^2$ . Afirmamos que uma raiz, digamos  $h_3^2$ , é negativa; as outras duas são positivas.

A demonstração se faz em duas partes: (i) Os extremos da função cúbica (H.1) são em  $H^2 = \pm\sqrt{p}$ , e portanto ao menos uma raízes é negativa (diremos  $h_3^2$ ) e uma é positiva (digamos  $h_1^2$ ). (ii) Da fórmula de Viéta  $h_1^2 h_2^2 h_3^2 = -q < 0$ , vemos que um número ímpar de raízes devem ser negativas; logo  $h_2^2 > 0$ .

Assim, a integral (H.2) tem a forma

$$I = -\frac{\alpha_1}{h_1^2} \operatorname{arc} \operatorname{th} (H^2/h_1^2) - \frac{\alpha_2}{h_2^2} \operatorname{arc} \operatorname{th} (H^2/h_2^2) + \frac{\alpha_3}{|h_3^2|} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (H^2/|h_3^2|) . \quad (\text{H.11})$$

As raízes podem ser escritas explicitamente usando as fórmulas de Cardano. Definindo  $\theta = \operatorname{arc} \cos \left[ \frac{\sqrt{27}}{2} \frac{q}{\sqrt{(-p^3)}} \right]$ , temos

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \left( \frac{\theta+4\pi}{3} \right) ; \quad x_2 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \left( \frac{\theta+2\pi}{3} \right) ; \quad x_3 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) .$$

Aqui, deve-se fazer a correspondência adequada entre os  $x_i$  e os  $h_j^2$ . Entretanto, note que os argumentos dos cossenos são separados por  $2\pi/3$ , e um dos  $x_i < 0$ . Logo, o argumento dos cossenos positivos não podem ser ambos maiores que  $(\pi/2) - (\pi - 2\pi/3)/2 = \pi/3$ , e portanto para algum dos  $x_k > 0$ , temos

$$x_k < 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \frac{1}{2} = \frac{1}{L^2 \sqrt{3}\mu} = H_{\text{top}}^2 .$$

---

O lado direito da Eq.(H.11) diverge quando  $H^2$  tende ao menor valor positivo de  $h_i^2$  (que é restrito pela desigualdade acima). Logo, passa-se um tempo infinito antes que  $H$  chegue a  $H_{\text{top}}$ .

# Apêndice I

## Integrais para horizontes de eventos

Neste apêndice, apresentamos as soluções de integrais dos tipos

$$I_1 = \int \operatorname{sh}^a(t/\tau) \operatorname{ch}^b(t/\tau) dt ; \quad I_2 = \int t \operatorname{sh}^{-1-\delta}(t/\tau) \operatorname{ch}(t/\tau) dt . \quad (\text{I.1})$$

O primeiro pode ser resolvido com a troca de variáveis

$$y = 1/\operatorname{ch}^2(x/\tau) , \quad dx = -\frac{\tau dy}{2y\sqrt{1-y}} , \quad (\text{I.2})$$

de onde temos uma função Beta de Euler incompleta (I.11):

$$I_1 = -\frac{\tau}{2} \int (1-y)^{-1+(a+1)/2} y^{-1-(a+b)/2} dy = -\frac{\tau}{2} \operatorname{B}_y \left( -\frac{a+b}{2}, \frac{a+1}{2} \right) ,$$

e portanto pela fórmula (I.10) ficamos com

$$I_1 = \frac{\tau}{2} \frac{y^{-(a+b)/2}}{(a+b)/2} {}_2F_1 \left[ -\frac{(a+b)}{2}, \frac{1-a}{2}; 1 - \frac{(a+b)}{2}; y \right] ,$$

---

ou seja:

$$I_1(a, b; t) = \frac{\tau}{a+b} \operatorname{ch}^{(a+b)}(t/\tau) {}_2F_1 \left[ -\frac{(a+b)}{2}, \frac{1-a}{2}; 1 - \frac{(a+b)}{2}; 1/\operatorname{ch}^2(t/\tau) \right] . \quad (\text{I.3})$$

No cálculo do raio de horizontes de eventos, um dos limites de integração das integrais (I.1) é definido, e devemos determinar uma constante de integração na solução acima. Para tanto podemos avaliar a anti-derivada (I.3) no limite de integração desejado. Assim, por exemplo, a integral (6.48), do tipo  $I_1$  com  $a = -\delta$ ,  $b = 0$ , e limite de integração inferior  $t = 0$ , tem como solução  $I_1(-\delta, 0; t) - I_1(-\delta, 0; 0)$ , i.e.

$$r_p^{(0)}(t) = -\frac{\tau}{\delta a_0^{(0)}} [\operatorname{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t/\tau)} \right] + \frac{\tau}{2a_0^{(0)}} B \left( \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2} \right) . \quad (\text{I.4})$$

Ao se calcular tempos conformes, apenas a anti-derivada é necessária, e não precisamos nos preocupar com a constante de integração. Por exemplo, para calcular a correção (6.63), devemos integrar dois termos do tipo  $I_1$ , o primeiro,

$$I_1^{(A)} = \frac{5\tilde{H}_1\tau}{12a_0^{(0)}} \int^t \operatorname{sh}^{-\delta}(t/\tau) \operatorname{cth}^2(t/\tau) dt = \frac{5\tilde{H}_1\tau}{12a_0^{(0)}} \int^t \operatorname{sh}^{-\delta}(t/\tau) \operatorname{sh}^{-2}(t/\tau) \operatorname{ch}^2(t/\tau) dt,$$

tem  $a = -2 - \delta$  e  $b = 2$ . Portanto, usando (I.3),

$$I_1^{(A)} = -\frac{5\tilde{H}_1\tau^2}{12a_0^{(0)}\delta} \operatorname{ch}^{-\delta}(t/\tau) {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{3+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; 1/\operatorname{ch}^2(t/\tau) \right] . \quad (\text{I.5})$$

O segundo termo,

$$I_1^{(B)} = \frac{\tilde{H}_1\tau}{12a_0^{(0)}} \int^t \operatorname{sh}^{-\delta}(t/\tau) \operatorname{csech}^4(t/\tau) dt = \frac{\tilde{H}_1\tau}{12a_0^{(0)}} \int^t \operatorname{sh}^{-\delta}(t/\tau) \operatorname{sh}^{-4}(t/\tau) dt$$

possui  $a = -\delta - 4$  e  $b = 0$ , e portanto

$$I_1^{(B)} = -\frac{\tilde{H}_1\tau^2}{12a_0^{(0)}(4+\delta)} \operatorname{ch}^{-(4+\delta)}(t/\tau) {}_2F_1 \left[ \frac{4+\delta}{2}, \frac{5+\delta}{2}; 3 + \frac{\delta}{2}; 1/\operatorname{ch}^2(t/\tau) \right] . \quad (\text{I.6})$$

Para resolver o segundo tipo de integral na Eq.(I.1), que também é necessário

---

em (6.63), notemos que

$$\operatorname{sh}^{-1-\delta}(x) \operatorname{ch}(x) = -\frac{1}{\delta} \frac{d}{dx} \operatorname{sh}^{-\delta}(x).$$

Portanto, fazendo  $x = t/\tau$ , uma integração por partes fornece

$$I_2 = -\frac{\tau^2}{\delta} \int x \frac{d}{dx} \operatorname{sh}^{-\delta}(x) dx = -\frac{\tau^2}{\delta} x \operatorname{sh}^{-\delta}(x) + \frac{\tau}{\delta} \int \operatorname{sh}^{-\delta}(t/\tau) dt.$$

A integral restante é a mesma que a da Eq.(6.49), mas com os limites de integração invertidos, e sem o limite de integração definido. A solução é, portanto, (menos) a Eq.(I.4) sem a constante de integração:

$$I_2(t) = -\frac{\tau}{\delta} t \operatorname{sh}^{-\delta}(t/\tau) + \frac{\tau^2}{\delta^2} [\operatorname{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; \frac{2+\delta}{2}; \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t/\tau)} \right]. \quad (\text{I.7})$$

Assim, temos por fim que

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}(t) = & -\frac{\tilde{H}_1 \tau^2}{12a_0^{(0)}} \left\{ \frac{5}{\delta} [\operatorname{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{3+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t/\tau)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4+\delta} [\operatorname{ch}(t/\tau)]^{-(4+\delta)} {}_2F_1 \left[ \frac{4+\delta}{2}, \frac{5+\delta}{2}; \frac{6+\delta}{2}; \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t/\tau)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{3}{\delta} (t/\tau) [\operatorname{sh}(t/\tau)]^{-\delta} - \frac{3}{\delta^2} [\operatorname{ch}(t/\tau)]^{-\delta} {}_2F_1 \left[ \frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}; 1 + \frac{\delta}{2}; \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t/\tau)} \right] \right\}. \quad (\text{I.8}) \end{aligned}$$

Esta mesma fórmula dá a correção para o raio comóvel, (6.48), quando adicionada a constante de integração correspondente ao limite definido da integral.

**Tempo conforme para  $t/\tau \ll 1$ .** Vamos determinar uma expressão para  $\eta^{(1)}(t)$  no limite em que  $t/\tau \ll 1$ , que será útil para calcularmos os valores das alturas dos diamantes causais em GQT, quando é preciso avaliar  $\eta^{(1)}(t)$  em tempos muito menores que o instante característico  $\tau$ .

Uma hipergeométrica qualquer possui o seguinte limite assintótico:

$${}_2F_1[a, b; c; x] \approx \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-x)^{c-(a+b)}; \quad x \rightarrow 1,$$

---

o que deixa claro a divergência de  ${}_2F_1[a, b; c; x]$  perto da singularidade  $x = 1$ , quando (as partes reais de)  $c < a + b$ . Agora, para  $\delta > 0$ , temos na fórmula (??):  
 — A primeira hipergeométrica apresenta

$$c - (a + b) = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\delta}{2} = -\frac{(1+\delta)}{2} < 0,$$

e portanto diverge no limite em que  $t \rightarrow 0$  (lembrando que o argumento da hipergeométrica,  $1/\text{ch}^2(t/\tau)$ , tende a 1 neste limite).  
 — A segunda hipergeométrica apresenta

$$c - (a + b) = 3 + \frac{\delta}{2} - 2 - \frac{\delta}{2} - \frac{5}{2} - \frac{\delta}{2} = -\frac{(3+\delta)}{2} < 0,$$

e também diverge.

— A terceira hipergeométrica apresenta

$$c - (a + b) = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{1-\delta}{2},$$

e diverge para  $\delta > 1$ , ou tende a um valor finito para  $\delta < 1$ .

Desta forma, a correção do tempo conforme diverge para tempos pequenos como

$$\eta_h^{(1)}(t) \approx -\frac{\tilde{H}_1 \tau^2}{12a_0^{(0)}} \left[ \frac{5}{1+\delta} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1+\delta} + \frac{1}{3+\delta} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{3+\delta} \right]; \quad t \rightarrow 0. \quad (\text{I.9})$$

Aqui, usamos

$$(1 - \text{ch}^{-2}(t/\tau))^{-1} \approx \tau^2/t^2; \quad (t/\tau) \text{sh}^{-\delta}(t/\tau) \approx (t/\tau)^{-\delta} O(t/\tau) \approx 0,$$

e consideramos  $\delta < 1$ , de forma que apenas os dois primeiros termos de (??) contribuem.

Uma consequência colateral da análise acima é a confirmação de que, assim como as aproximações para a função de Hubble, para o fator de escala, etc. apresentam comportamento indesejado à medida que se aproxima da singularidade em  $t = 0$ , também a correção do tempo conforme (e, conseqüentemente, do raio do horizonte de eventos passado) falha neste limite.

— **Relação entre a função Beta de Euler e a Hipergeométrica.**

---

A função Beta de Euler incompleta e a função Hipergeométrica se relacionam através da fórmula

$$B_x(a; b) = \frac{x^a}{a} {}_2F_1 [a, (1 - b); (a + 1); x] . \quad (\text{I.10})$$

*Demonstração:*

A função Beta de Euler incompleta é definida pela integral

$$B_x(p; q) = \int_0^x z^{p-1} (1 - z)^{q-1} dz . \quad (\text{I.11})$$

Quando  $x = 1$ , temos a função Beta de Euler usual, que pode ser escrita em termos de funções Gamma de Euler:  $B_1(a; b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a + b)$ . Por sua vez, a função hipergeométrica pode ser representada por

$${}_2F_1 [a, b; c; x] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \int_1^\infty (z - x)^{-a} (z - 1)^{c-b-1} z^{a-c} dz . \quad (\text{I.12})$$

A fórmula desejada pode ser obtida reparando que a mudança de variáveis  $y = x/z$ ;  $dz = -(x/y^2) dy$ , mapeia o intervalo de integração da função Beta incompleta no intervalo de integração de (I.12), i.e.  $z \in (0, x) \iff y \in (\infty, 1)$ . Assim,

$$\begin{aligned} B_x(a; b) &= \int_1^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{q-1} \frac{x}{y^2} dy \\ &= x^{-a} \int_0^\infty (y - x)^{q-1} y^{-(p+q)} dy , \end{aligned}$$

e comparando com o integrando da Eq.(I.12), vemos que com a identificação

$$\begin{aligned} a = 1 - q; \quad c - b - 1 = 0; \quad p + q = c - a , \\ a = 1 - q; \quad b = p; \quad c = 1 + p , \end{aligned}$$

---

temos

$$B_x(p; q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(1)}{\Gamma(p+1)} x^p {}_2F_1[(1-q), p; (1+p); x] .$$

Como  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  e  ${}_2F_1[a, b; c; x] = {}_2F_1[b, a; c; x]$ , fica demonstrada a fórmula. Note entretanto que a Eq.(1.12) é válida para  $c > b > 0$  (supomos todos os parâmetros reais), e que portanto devemos ter  $p > 0$ .

# Referências

- M. Visser; G. Abreu. Kodama time: Geometrically preferred foliations of spherically symmetric spacetimes. *Phys. Rev. D*, 82:044027, 2010. [14](#), [40](#), [41](#), [42](#), [43](#), [44](#)
- et al. [Supernova Search Team Collaboration] A.G. Riess. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J*, 116, 1998. [97](#)
- S.A. Hayward; S. Mukohyama; M.C. Ashwort. Dynamic black-hole entropy. *Phys.Lett.A*, 256:347–350, 1999. [47](#)
- J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, 1973. [4](#), [40](#)
- R. Bousso. Positive vacuum energy and the n bound. *JHEP*, 0011:038, 2000. [104](#)
- R. Bousso. The holographic principle. *Rev. Mod. Phys.*, 74:825–874, 2002. [4](#), [38](#)
- R. Harnik; G.D. Kribs; G. Perez; R. Bousso. Predicting the cosmological constant from the causal entropic principle. *Phys. Rev. D*, 76:043513, 2007. [viii](#), [6](#), [97](#), [100](#), [101](#), [102](#), [103](#), [104](#), [110](#)
- V. Mukhanov; R. Brandenberger. A nonsingular universe. *Phys. Rev. Lett.*, 68 (13):1969–1972, 1992. [6](#), [91](#)
- M. Akbar; Rong-Gen Cai. Thermodynamic behavior of friedmann equations at apparent horizon of frw universe. *Phys. Rev. D*, 75:084003, 2007. [4](#), [6](#), [48](#)
- S.P. Kim; Rong-Gen Cai. First law of thermodynamics and friedmann equations of friedmann-robertson-walker universe. *JHEP*, 0502:050, 2005. [4](#), [6](#), [48](#)
- S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, New York, 1992. [33](#)

- P-H. Chavanis. Models of universe with a polytropic equation of state: Ii. the late universe. *ArXiv: astro-ph [1208.0801]*, 2012. [6](#), [98](#)
- Margaret Dillard-Bleick; Cécile DeWitt-Morette; Yvonne Choquet-Bruhat. *Analysis, Manifolds and Physics – Part I: Basics*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1982 edition, 1977. [45](#), [52](#)
- H.H. Soleng; M. Cvetič. Supergravity domain walls. *Phys. Rep.*, 282:159–223, 1997. [22](#)
- J. Carot; J. da Costa. On the geometry of warped spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 19:461–482, 1993. [14](#)
- N.D. Birrel; P.C.W. Davies. *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1982. [2](#), [34](#), [51](#)
- A.A. Lima; U. Camara dS; G.M. Sotkov. Hybrid inflation in quasi-topological cosmology. *Em preparação.*, a. [137](#)
- C.P. Constantinidis; A.A. Lima; U. Camara dS; G.M. Sotkov. Domain walls in extended lovelock gravity. *JHEP*, 1204:109, 2012. [6](#), [55](#), [133](#)
- C.P. Constantinidis; W. Algoner; A.A. Lima; U. Camara dS; G.M. Sotkov. Curved domain walls in quasi-topological gravity. *Em preparação.*, b. [137](#)
- H.L.C. Louzada; U. Camara dS; G.M. Sotkov. Massive 3d gravity big-bounce. *Phys.Lett.B*, 686:268–272, 2010. [6](#)
- E. Babichev; V. Dokuchaev; Yu. Eroshenko. Dark energy cosmology with generalized linear equation of state. *Class. Quantum Grav.*, 22:143–154, 2005. [6](#), [99](#)
- V. Faraoni. Cosmological apparent and trapping horizons. *Phys. Rev. D*, 84:024003, 2011. [37](#), [39](#), [166](#)
- G. Galilei. *Dialogues concerning two new sciences*. The Macmillan Co., New York, 1914. [9](#)
- M.H. Dehghani; A. Bazrafshan; R.B. Mann; M.R. Mehdizadeh; M. Ghanaatian. Black holes in quartic quasitopological gravity. *Phys. Rev. D*, 85:104009, 2012. [138](#)
- S.N. Solodukhin; G.W. Gibbons. The geometry of large causal diamonds and the no hair property of asymptotically de-sitter spacetimes. *Phys.Lett.B*, 652:103–110, 2007a. [105](#)

- S.N. Solodukhin; G.W. Gibbons. The geometry of small causal diamonds. *Phys.Lett.B*, 649:317–324, 2007b. [105](#)
- C. Garraffo; G. Giribet. The lovelock black holes. *Mod. Phys. Lett. A*, 23:1801–1818, 2008. [5](#), [51](#)
- R. Brustein; M. Hadad. The einstein equations for generalized theories of gravity and the thermodynamic relation  $\delta q = t \delta s$  are equivalent. *Phys. Rev. Lett.*, 103:101301, 2009. [4](#)
- G.F.R Ellis; S.W. Hawking. *The large scale structure os space-time*. Cambridge University Press, New York, 1973a. [8](#), [9](#), [13](#), [45](#), [51](#)
- G.W. Gibbons; S.W. Hawking. Cosmological event horizons, thermodynamics and particle creation. *Phys. Rev. D*, 15:2738–2751, 1977. [4](#), [40](#)
- J.M. Bardeen; B. Carter; S.W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 31(2):161–170, 1973b. [40](#)
- S.W. Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 26:1344–1446, 1971. [4](#), [40](#)
- S.W. Hawking. Particle creation by black holes. *Comm. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975. [4](#), [40](#)
- M.C. Ashworth; S.A. Hayward. Boundary terms and noether current of spherical black holes. *Phys. Rev. D*, 60:084004, 1999. [64](#)
- S.A. Hayward. Confinement by black holes. arXiv [gr-qc/9405055]. [38](#)
- S.A. Hayward. General laws of black-hole dynamics. *Phys. Rev. D*, 49(12):6467–6474, 1994. [37](#)
- S.A. Hayward. Gravitational energy in spherical symmetry. *Phys. Rev. D*, 53(4):1938, 1996. [46](#)
- S.A. Hayward. Unified first law of black-hole dynamics and relativistic thermodynamics. *Class. Quantum Grav.*, 15:3147, 1998. [4](#), [42](#), [47](#)
- R. Guedens; S. Sarkar; T. Jacobson. Horizon entropy and higher curvature equations of state. *Phys. Rev. D*, 85:064017, 2012. [137](#)
- T. Jacobson. Thermodynamics of space-time: The einstein equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1260–1263, 1995. [4](#), [6](#), [137](#)

## REFERÊNCIAS

---

- A. Frolov; L. Kofman. Inflation and de sitter thermodynamics. *JCAP*, 0305:009, 2003. [4](#)
- E.M. Lifshitz; L.D. Landau. *The Classical Theory of Fields; Course of Theoretical Physics, Volume 2*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975. [8](#)
- P. Parsons; J.D. Barrow; A.R. Liddle. Formalizing the slow roll approximation in inflation. *Phys. Rev. D*, 50:7222–7232, 1994. [82](#)
- A. Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Harwood Academic Publishers, London, 1990. [2](#), [89](#), [137](#)
- A. Linde. Inflationary cosmology. *Lect. Notes Phys.*, 738:1–54, 2008. [2](#), [89](#), [113](#)
- N. Kaloper; A. Linde. Cosmology versus holography. *Phys. Rev. D*, 60:103509, 1999. [6](#), [21](#), [99](#)
- D. Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *J.Math.Phys.*, 12:498, 1971. [5](#)
- D. Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *J.Math.Phys.*, 13:874, 1972. [5](#)
- A.R. Liddle; D.H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000. [2](#), [77](#)
- Ugo Moschella. The de sitter and anti-de sitter sightseeing tour. *Séminaire Poincaré*, 1:1–12, 2005. [13](#)
- V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 2005. [31](#), [136](#)
- B. Robinson; R.C. Myers. Black holes in quasi-topological gravity. *JHEP*, 1008:067, 2010. [3](#), [5](#), [136](#)
- T. Jacobson; G. Kang; R.C. Myers. On black hole entropy. *Phys. Rev. D*, 49 (6587-6598), 1994. [6](#)
- B.A. Dubrovín; A.T. Fomenko; S.P. Novikov. *Modern Geometry — Methods and Applications; Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer-Verlag, New York, 1992 edition, 1979. [45](#)
- A. Mukhopadhyay; T. Padmanabhan. Holography of gravitational action functionals. *Phys. Rev. D*, 74:124023, 2006. [4](#)

- D. Kothawala; T. Padmanabhan. Lanczos-lovelock models of gravity. *arXiv: gr-qc [1302.2151]*, 2013. [5](#)
- T. Padmanabhan. Thermodynamical aspects of gravity: New insights. *Rep. Prog. Phys.*, 73:046901, 2010. [gr-qc/0911.5004v2]. [4](#), [32](#), [61](#), [151](#)
- S.W. Hawking; R. Penrose. *The nature of space and time*. Princeton University Press, 1996. [3](#), [40](#)
- J. Polchinski. *String Theory, Vols. I and II*. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 2005. [3](#), [137](#)
- J. Oliva; S. Ray. Classification of six derivative lagrangians of gravity and static spherically symmetric solutions. *Phys. Rev. D*, 82:124030, 2010. [3](#), [5](#), [54](#)
- et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration] S. Perlmutter. Measurements of omega and lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J*, 517:565–586, 1999. [97](#)
- M. Parikh; S. Sarkar. Beyond the einstein equation of state: Wald entropy and thermodynamical gravity. *ArXiv: hep-th [0903.1176]*, 2009. [4](#)
- A. Sinha. On higher derivative gravity, c-theorems and cosmology. *Class. Quantum Grav.*, 28:085002, 2011. [5](#)
- A.A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys.Lett.B*, 91(1):99–102, 1980. [6](#), [91](#)
- L. Susskind. *The Cosmic Landscape — String Theory and the illusion of intelligent design*. Back Bay Books, New York, 2006. [97](#)
- J. Sonner; P.K. Townsend. Dilaton domain walls and dynamical systems. *Class. Quantum Grav.*, 23:441–464, 2006. [55](#)
- J. Sonner; P.K. Townsend. Axion-dilaton domain walls and fake supergravity. *Class. Quantum Grav.*, 24:3479–3514, 2007. [55](#)
- K. Skenderis; P.K. Townsend. Gravitational stability and renormalization group flow. *Phys.Lett.B*, 468:46–51, 1999. [74](#)
- R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, London, 1984. [3](#), [8](#), [40](#), [45](#), [155](#)
- R.M. Wald. Black hole entropy is the noether charge. *Phys. Rev. D*, 48:3427–3431, 1993. [4](#), [6](#), [61](#), [63](#)

## REFERÊNCIAS

---

- V. Iyer; R.M. Wald. Some properties of noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Phys. Rev. D*, 50:846–864, 1994. [4](#), [6](#), [61](#), [63](#), [137](#)
- S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, New York, 1972. [8](#), [16](#), [18](#)
- S. Weinberg. Anthropic bound on the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2607–2610, 1987. [101](#), [102](#), [104](#)
- S. Weinberg. *The First Three Minutes*. Basic Books, New York, 1988. [2](#), [11](#)
- S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, New York, 2008. [1](#), [19](#), [27](#), [97](#), [128](#), [136](#)
- A.A. Penzias; R.W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *ApJ*, 142:419–421, 1965. [1](#)
- S.-H. Yi. Born-infeld type extension of (non-)critical gravity. *Phys. Rev. D*, 86:024023, 2012. [138](#)