

**Universidade Federal do Espírito Santo
Programa de Pós-Graduação em Física**

Ulysses Camara da Silva

**Transições de fase em teorias holográficas sem
supersimetria**

Vitória

2013

Ulysses Camara da Silva

Transições de fase em teorias holográficas sem supersimetria

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, para obtenção do título de doutor em Ciências.

Área de Concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov

Versão Original

Vitória

2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR
QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E
PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores José André Lourenço, José Francisco Gomes, Rodrigo Gonçalves Pereira e Nelson Braga por aceitarem o convite de participar da banca e disponibilizarem seu tempo a leitura do trabalho.

Agradeço aos amigos Gabriel Luchini, Andre Luiz Alves Lima, José André Lourenço, Luis Ivan Morales Bautista, Zui Oporto, Thiago Luiz Antonacci Oakes, Adriano Mesquita, Hugo Leonardo C. Louzada e William C. Algoner Jorge pelo apoio e companheirismo ao longo de tantos anos. Quem sabe não “rola” um churrasco.

Ao professor Clisthenis, que ao me aceitar como aluno de iniciação científica, abriu-me as portas do mundo (tendendo ao) infinito da física teórica, o meu reconhecimento sincero.

Não conheço palavras para agradecer o professor/padrinho Galen Myhailov Sotkov, apenas posso dizer que há oito anos ele “adotou” um aluno regular do curso de física que não sabia nem mecânica clássica. Hoje com a ajuda dele eu aprendi ao menos o mínimo (de Landau) e mais um pouco para escrever este trabalho.

Um agradecimento especial à minha família: meu pai Ferreira, minha mãe Regina, minha irmã Priscila, meu cunhado João Carlos e *baby*, que sempre deram seu total apoio e criaram as condições ideais (de temperatura e pressão) para minha dedicação exclusiva aos estudos.

À minha amada esposa Kátia dedico esta tese. Ao longo deste primeiro ano de casados, compartilhando o mesmo “escritório”, eu trabalhando nesta tese e ela em sua dissertação, dividimos muito mais que um espaço físico, dividimos nossas alegrias, frustrações, cada pequena conquista, dívidas (atualmente todas pagas) e muitas horas de Playstation 3. Parabéns Pequena por sua dissertação elogiada por todos.

Este trabalho foi realizado com o financiamento da Capes.

So it's possible that our lives are really just acting out a painting on the largest canvas of the universe.

Leonard Hofstadter - TBBT

RESUMO

Camara dS, U. *Transições de fase em teorias holográficas sem supersimetria*. 2013. 246 p. Tese de Doutorado – Programa de Pós Graduação em física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

De acordo com as regras da correspondência “teorias de calibre/gravitação”, a descrição holográfica de uma QFT_{d-1} no regime de acoplamento forte (volume infinito e com temperatura nula) é baseada numa classe particular de soluções de sua gravitação dual em d dimensões chamadas de Paredes de Domínio (PD) planas. O principal problema abordado nesta tese consiste na investigação das propriedades do *grupo de renormalização* e da estrutura das fases das QFT_{d-1} duais às gravitações de Gauss-Bonnet (GB) e “Cúbica” Quase-Topológica (GQT), representando uma extensão fora da criticalidade com relação aos recentes estudos holográficos sobre uma família de QFT_{d-1} com cargas centrais diferentes ($a \neq c$) e parâmetro do fluxo de energia t_4 não-nulo.

Por meio da introdução de um superpotencial de matéria, derivamos um sistema de equações de primeira ordem para as PD's planas nas extensões GB e QTG da gravitação de Einstein acoplada à matéria escalar massiva. O conhecimento das soluções de PD's nos permite construir a forma exata da função *beta*, assim como as anomalias $a(l)$ e $c(l)$, em termos dos superpotenciais. Como consequência, somos capazes de determinar o conjunto completo de dados das teorias de campos conformes (*CFT's*), que caracterizam as diferentes classes de universalidade dos pontos críticos UV e IR, como também a evolução dos dados descritos pelo grupo de renormalização. Analisamos a dependência das propriedades críticas das *CFT's* com respeito aos valores dos acoplamentos das gravitações GB e QT e a forma do superpotencial considerado. Para valores ímpares de d , a forma explícita das *cargas centrais* a e c como funções da constante de acoplamento variável estabelece as condições sob as quais os Teoremas a & c são válidos. Também são determinadas as restrições a serem impostas sobre os fluxos não-massivos do grupo de renormalização holográfico pelo requerimento de positividade

dos fluxos de energia. Alguns superpotenciais na forma de polinômios são estudados em detalhes, fornecendo exemplos de QFT 's unitárias, com pontos críticos ($a \neq c$) que representam transições de fase de segunda ordem. Dependendo dos valores dos acoplamentos, temos fases massivas e não-massivas, descritas por uma cadeia de PD's distintas que compartilham as mesmas bordas/horizontes.

É formulada uma extensão do método do superpotencial para gravitação GB e QT acopladas a um número arbitrário de campos escalares interagentes. Para escolhas apropriadas dos superpotenciais de matéria, percebe-se que seus diagramas de fase (planos) possuem a conhecida forma de Berezinski-Kosterletz-Thouless, com uma linha de transição de fase de segunda ordem no regime de acoplamento fraco e transições de fase específicas do tipo massivo-para-não-massivo na região "cross-over".

O objetivo da pesquisa é fornecer mais argumentos a favor da conjectura de que cálculos holográficos baseados em modelos de gravitação GB e GQT em $d = 5$ podem reproduzir os limites de acoplamento forte de certas QFT_4 's unitárias (não-supersimétricas), cujas fases massivas e não-massivas exibem características "fenomenologicamente aceitáveis" fora da criticalidade.

PALAVRAS-CHAVE: transições de fase, correspondência AdS/CFT, teorias conformes, paredes de domínio, gravitação de Gauss-Bonnet e Lovelock, grupo de renormalização holográfico.

ABSTRACT

Camara dS, U. *Phase transitions in non-supersymmetric holographic theories*. 2013. 246 p.
Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

According to the gauge/gravity correspondence rules, the holographic description of certain strongly coupled QFT_{d-1} at infinite volume and zero temperature is based on the particular flat Domain Walls (DW's) solutions of their dual d -dimensional Gravity models. The main problem addressed in the present thesis concerns the systematic application of the Gauss-Bonnet (GB) and cubic Quasi-Topological Gravity (QTG) DW's to the investigation of the Renormalization Group (RG) properties and of the phase structure of their QFT_{d-1} 's duals. It represents an off-critical extension of the recent holographic studies of a family of $a \neq c$ CFT_{d-1} 's with non-vanishing energy flux parameter t_4 .

We derive a BPS-like first order system of equations for a family of flat static DW's for the GB and cubic QTG extensions of Einstein Gravity coupled to massive scalar self-interacting matter, by introducing an appropriate matter superpotential. The knowledge of such DW's solutions, allows us to construct the exact QFT 's beta-functions, as well as of the trace anomalies $a(l)$ and $c(l)$, in terms of the corresponding superpotentials. As a consequence, we are able to determine the complete set of CFT 's data characterizing the universality classes of the UV and IR critical points and to follow the particular RG evolution of this data. We further analyse the dependence of the critical properties of such dual QFT 's on the values of the gravitational GB's and QT couplings and on the shape of the considered superpotentials. For odd values of d , the explicit form of the “ a - and c -central charges”, as functions of the running coupling constant, enable us to establish the conditions under which the a & c -Theorems for their decreasing are valid. The restrictions imposed on the massless Holographic RG flows by the requirements of the positivity of the energy fluxes are also derived. Few specific polynomial superpotentials are studied in detail. They provide examples of unitary dual QFT 's having

$c \neq a$ critical points representing second or infinite order phase transitions. Depending on the range of the values of the coupling constant, they exhibit massive and massless phases, described by a chain of distinct DW's solutions sharing common boundaries.

We have also found an extension of the superpotential method for GB's and cubic Quasi-Topological Gravity coupled to an arbitrary number of interacting scalar fields. For appropriate choices of the matter superpotentials, their phase diagrams turn out to have the well known Berezinski-Kosterletz-Thouless form, with a line of second order phase transitions at weak coupling and specific infinite order massless-to-massive phase transitions in the cross-over region.

The aim of the present research is to provide more arguments in favour of the conjecture that by holographic calculations based on $d = 5$ GB and cubic QT Gravity models one can reproduce the strong coupling limits of certain unitary (non-supersymmetric) QFT_4 's, whose massive and massless phases exhibit "phenomenologically reasonable" off-critical features.

KEYWORDS: Phase transitions, AdS/CFT correspondence, conformal field theories, domain walls, Gauss-Bonnet and Lovelock gravities, holographic renormalization group.

LISTA DE FIGURAS

2.1 magnetização como função do campo magnético externo.	p. 33
2.2 Domínios magnéticos e comprimento de correlação.	p. 33
2.3 Fase ordenada e desordenada no modelo de Ising - aproximação do campo médio.	p. 37
2.4 Esquema de blocos de “spin” numa rede quadrada.	p. 38
2.5 Esquema de bloco de “spins” na linha.	p. 39
2.6 Fluxo à campo magnético nulo.	p. 41
2.7 quebra espontânea de simetria.	p. 46
5.1 Exemplo de fluxos numa cadeia de PD.	p. 116
5.2 Forma do campo escalar.	p. 120
6.1 Dois possíveis fluxos.	p. 149
6.2 Curvas de $W(\sigma)$ para $B_2 > 0$. (a) $\rho \geq 1$; (b) $0 < \rho < 1$	p. 153
6.3 (a) $W(\sigma)$ para $B_2 > 0$ e $\rho < 0$; (b) possíveis $W(\sigma)$ para o caso $B_2 < 0$	p. 154
6.4 Curvas de W para $B_1 = 0$: (a) $\sigma_{IV} > 0$; (b) $\sigma_{IV} < 0$	p. 155
6.5 Curvas de $W(\sigma)$	p. 155
6.6 (a) curvas de $\beta(\sigma)$ para $\rho > 1$; (b) curvas de $\beta(\sigma)$ para $0 < \rho < 1$. Em todos os casos $B_2 > 0$	p. 156
6.7 (a) $\beta(\sigma)$ para $B_2 > 0$ e $\rho < 0$; (b) β para $B_2 < 0$	p. 156
6.8 (a) curvas de β para $\sigma_{IV} > 0$; (b) curva típica de β para $\sigma_{IV} < 0$	p. 157
6.9 Curvas de β	p. 157
7.1 Curvas de $\mu_1(\lambda)$ e $\mu_2(\lambda)$	p. 170

7.2	Curvas de $f_+^{top}(\mu_1; \lambda)$, $f_-^{top}(\mu_1; \lambda)$, $f_+^{top}(\mu_2; \lambda)$ e $f_-^{top}(\mu_2; \lambda)$	p. 171
7.3	Curvas de $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_1)$, $\eta = top, a, h, c'$ para $d = 5$	p. 177
7.4	Curvas de $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_2)$, $\eta = top, a, h, c'$ para $d = 5$	p. 178
7.5	Curvas de $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_1)$, $\eta = top, a, h, c'$ para $d = 7$	p. 179
7.6	Curvas de $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_2)$, $\eta = top, a, h, c'$ para $d = 7$	p. 180
7.7	Curvas de $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_2)$, $\eta = top, a, h, c'$ para $d = 9$	p. 180
7.8	Curvas de $f_{\pm}^{ep,i}(\lambda; \mu_1)$, $i = 1, 2, 3$ no intervalo $-\infty < \lambda < 0.249152$	p. 183
7.9	Curvas de $f_{\pm}^{ep,i}(\lambda; \mu_1)$, $i = 1, 2, 3$ no intervalo $0.249152 < \lambda < 1/3$	p. 184
7.10	Curvas de $f_{\pm}^{ep,i}(\lambda; \mu_2)$, $i = 1, 2, 3$,	p. 185
8.1	Representação da hiperduperfície $C_0 = 0$ no espaço dos campos σ^I	p. 196
8.2	Fluxos para o modelo "BKT".	p. 198
8.3	Possíveis formas da função <i>beta</i> efetiva no modelo "BKT".	p. 199
E.1	Curva de $W(\sigma)$	p. 230
E.2	Função <i>beta</i> para casos com e sem vácuos topológicos.	p. 231

LISTA DE TABELAS

2.1	Definição dos expoentes críticos.	p. 34
5.1	Comparação entre resultados exatos e o aproximados.	p. 129
7.1	Ordenamento dos f 's dado o intervalo de λ	p. 182

SUMÁRIO

PARTE 1: Preliminares

1	Introdução	p. 23
1.1	Princípio holográfico	p. 24
1.2	Paredes de domínio e grupo de renormalização holográfico	p. 26
2	Fenômenos críticos	p. 31
2.1	Comprimento de correlação	p. 32
2.1.1	Expoentes críticos e universalidade	p. 34
2.1.2	Um exemplo: Modelo de Ising	p. 35
2.1.2.1	Teoria do campo médio no modelo de Ising	p. 36
2.1.2.2	Expoentes críticos para o modelo de Ising na aproximação do campo médio	p. 37
2.2	Hipótese de Kadanoff e o grupo de renormalização de Wilson	p. 38
2.2.1	Transformação de blocos de spin no modelo de Ising unidimensional	p. 39
2.2.1.1	Fluxo da temperatura no modelo de Ising em uma dimensão	p. 41
2.2.2	Teoria geral: Grupo de renormalização de Wilson	p. 42
	Definição:	p. 42
	Definição:	p. 43
2.2.3	Relação entre o grupo de renormalização e a teoria das escalas	p. 43
2.3	Relação entre sistemas na rede e teorias de campos	p. 44

2.3.1	Limite termodinâmico - do discreto para o contínuo	p. 44
2.3.2	Teoria de campo do modelo de Ising e generalidades	p. 45
2.3.3	Função <i>beta</i>	p. 47
2.3.4	Transformações de escala para a função de correlação e a equações de Callan-Symanzik	p. 48
2.3.5	Função de correlação: massa do campo e o comprimento de correlação	p. 51
2.3.6	Mecânica estatística e teoria de campo quântica euclidiana	p. 52

3 Teorias conformes p. 55

3.1	Simetrias conformes em d dimensões ($d > 2$)	p. 55
3.1.1	Funções invariantes às transformações conformes	p. 58
3.1.2	Grupo conforme	p. 59
3.1.3	Leis de conservação	p. 60
3.1.4	Campos quase-primários	p. 62
3.1.5	Teoria de campos com simetrias conformes	p. 62
3.2	Teoria de campos conformes quânticos em d dimensões	p. 63
3.2.1	Campo escalar	p. 64
3.2.2	Funções de dois pontos para vetores e o tensor energia momento .	p. 66
3.2.3	Expansão do produto de operadores	p. 67
3.3	Identidades de Ward e anomalias conformes	p. 68
3.3.1	Campos livres	p. 68
3.3.2	Identidades de Ward conformes	p. 69
3.3.3	Anomalias conformes e cargas centrais	p. 70
3.4	Fluxos com energia positiva	p. 71
3.5	Teorias conformes perturbadas	p. 74
3.5.1	Exemplos de fluxos com um acoplamento na aproximação quadrática e a função central a	p. 76

3.5.1.1	Fluxo entre dois pontos críticos	p. 77
3.5.1.2	Fase massiva	p. 78
3.5.1.3	Transição de fase de ordem infinita - ponto fixo marginal	p. 78
	Resumo da primeira parte	p. 80
	PARTE 2: Correspondência AdS/CFT	p. 82
4	Espaço AdS e o princípio holográfico	p. 83
4.1	Espaço de Anti-de Sitter	p. 83
4.1.1	Assinatura Minkowskiana	p. 83
4.1.2	Assinatura Euclidiana: espaço hiperbólico	p. 86
4.1.3	Espaço de Anti-de-Sitter como solução de vácuo na gravitação com constante cosmológica negativa	p. 87
4.2	Função de Green do escalar no espaço H_d	p. 88
4.3	Correspondência AdS/CFT	p. 89
4.3.1	Isometrias de $AdS_d (H_d)$ nas coordenadas de Poincaré	p. 90
4.3.2	Campos escalares no espaço H^d . Definição das condições de contorno.	p. 91
4.3.2.1	Propagador <i>borda-interior</i> na representação dos momentos	p. 92
4.3.2.2	Propagador <i>borda-interior</i> na representação de coordenadas	p. 93
4.3.3	Implementação da correspondência AdS/CFT	p. 96
4.3.3.1	Função de dois pontos do campo escalar	p. 97
4.3.3.2	Função de três pontos do campo escalar	p. 99
4.3.3.3	Função de dois pontos do tensor energia-momento	p. 100
5	Paredes de Domínio: aplicações e limitações na correspondência AdS/CFT	p. 103
5.1	Definição do modelo	p. 104
5.2	Sistema de primeira ordem: o superpotencial	p. 105
5.3	Vácuos	p. 106

5.4	A massa do campo escalar	p. 108
5.5	Construindo soluções de PD, a função <i>beta</i> holográfica e a função central <i>a</i>	p. 109
5.5.1	A ação é uma derivada total	p. 112
5.5.2	Classes de paredes de Domínio	p. 113
5.5.2.1	Dois vácuos: borda - horizonte	p. 113
5.5.2.2	Dois vácuos: <i>Janus</i>	p. 113
5.5.2.3	Vácuo - singularidade nua	p. 114
5.5.2.4	Vácuo degenerado - transição de fase de ordem infinita .	p. 115
5.5.2.5	Cadeia de Paredes de Domínio	p. 116
5.5.3	Exemplos de PD	p. 117
5.5.3.1	<i>W</i> -quadrático	p. 117
5.5.3.2	<i>W</i> -sinh ²	p. 118
5.5.3.3	<i>W</i> -sin ²	p. 119
5.5.4	Flutuações lineares	p. 120
5.5.4.1	Flutuações lineares do campo e métrica no calibre de Newton	p. 121
5.5.4.2	Relação com a mecânica quântica supersimétrica	p. 123
5.5.4.3	Flutuações em um caso particular	p. 124
5.5.4.4	Método aproximativo para as flutuações lineares no calibre de Newton	p. 126
	Soluções do DW na aproximação:	p. 127
	Passando para a coordenada <i>z</i> :	p. 128
	Equações para as flutuações:	p. 128
5.5.4.5	Comparação com o exemplo exato	p. 129
	Resumo da segunda parte	p. 131
	PARTE 3: Teoremas <i>a</i> & <i>c</i> e transições de fase holográficas	p. 133

6 Paredes de domínio na gravitação com termo de Gauss-Bonnet e seu uso em <i>AdS/CFT</i>	p. 135
6.1 Definição do modelo, lagrangiana efetiva e equações do movimento	p. 135
6.2 Superpotencial e o sistema de primeira ordem	p. 137
6.3 Vácuos	p. 138
6.3.1 Vácuo físico	p. 138
6.3.2 Vácuo topológico	p. 139
6.3.3 Vácuo físico-topológico	p. 140
6.4 Massa do campo escalar, a função Beta e a função central a	p. 140
6.5 Carga central c holográfica	p. 142
6.6 Impondo condições físicas sobre o modelo	p. 144
6.6.1 Teorema a & c	p. 144
6.6.2 Energia positiva nos pontos fixos	p. 145
6.7 Sobre a normalização do fator de escala e o hiato de massa	p. 147
6.8 Soluções de PD	p. 148
6.8.1 W - quadrático	p. 148
6.8.2 W - \sinh^2	p. 150
6.8.3 W polinômio de quinta potência	p. 151
6.8.3.1 $B_2 > 0$	p. 153
6.8.3.2 $B_2 < 0$	p. 153
6.8.3.3 Casos particulares	p. 154
$B_1 = 0$:	p. 154
$B_2 = 0$:	p. 154
6.8.3.4 Função β	p. 155
Casos particulares:	p. 156
6.8.3.5 Solução do modelo	p. 157
6.8.3.6 Comparação com QCD	p. 158

6.9	Flutuações lineares	p. 159
6.9.1	Caso $C_{\Delta\Delta\Delta} \neq 0$	p. 160
6.9.2	Exemplo de aproximação com $C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$: W -sinh ²	p. 162
7	Paredes de domínio na gravitação quase-topológica e seu uso em <i>AdS/CFT</i>	p. 165
7.1	Definição e equações de primeira ordem no modelo da GQT	p. 166
7.2	Vácuos físicos e topológicos	p. 167
7.3	Dois modelos pelo preço de um	p. 169
7.4	Massa do campo escalar, função Beta e as funções centrais a e c	p. 171
7.5	Impondo condições físicas sobre o modelo	p. 173
7.5.1	Teoremas a & c	p. 174
7.5.1.1	(i) caso $d = 5$	p. 176
7.5.1.2	(ii) Caso $d \geq 7$	p. 178
	Caso $d = 7, 8$:	p. 179
	Caso $d \geq 9$:	p. 179
7.5.2	Positividade da energia nos pontos fixos	p. 181
7.5.2.1	Modelo μ_1	p. 181
7.5.2.2	Modelo μ_2	p. 182
7.6	Resultados no modelo da GQT através de GB	p. 183
7.6.1	Mais relações	p. 185
7.6.2	Uma generalização hipotética	p. 186
8	Extensão dos resultados para N campos escalares	p. 189
8.1	Função β e vácuos	p. 190
8.2	Acerca do novo vácuo	p. 190
8.3	Estudo nas proximidades de um ponto crítico	p. 191
8.4	Vácuo físico	p. 192
8.4.1	Índices críticos e constantes de estrutura	p. 192

8.4.2	Forma do potencial	p. 193
8.5	Vácuo topológico, índices críticos e constantes de estrutura	p. 194
8.5.1	Forma do potencial	p. 194
8.6	Condições físicas	p. 197
8.7	Exemplo: $W - BKT$	p. 197
	Resumo da terceira parte	p. 202
9	Comentários finais	p. 205
	REFERÊNCIAS	p. 209
	Referências Bibliográficas	p. 209
	APÊNDICE A – Funções especiais	p. 217
A.1	Função <i>Gamma</i>	p. 217
A.2	Funções de Bessel	p. 218
A.2.1	Funções de Bessel de primeiro e segundo tipo	p. 218
A.2.2	Funções de Bessel modificadas	p. 218
A.3	Função hipergeométrica	p. 219
A.4	Função hipergeométrica confluyente	p. 219
	APÊNDICE B – Funções de três pontos	p. 221
	APÊNDICE C – Funções de três pontos como distribuições	p. 223
	APÊNDICE D – Cálculos das flutuações lineares	p. 225
D.1	Flutuações no calibre de Newton	p. 225
D.2	Resultados da linearização dos termos quadráticos na gravitação com termo de GB	p. 227
	APÊNDICE E – Fluxo holográfico $UV \rightarrow IR$ no caso GB	p. 229

APÊNDICE F – Flutuações em um fluxo massivo para $d = 5$ e $s = 1$ na aproximação exploratória p. 235

APÊNDICE G – Derivação da Lagrangeana efetiva nos modelos de GB e da GQT p. 239

PARTE 1:

Preliminares

Introdução

A maioria dos problemas em física moderna não possuem soluções analíticas exatas. Os cálculos de grandezas importantes, como seções de choque e as correções radiativas para as massas numa teoria de campos relativísticos e quânticos, assim como as funções de correlação e partição na matéria condensada e mecânica estatística, são baseados na existência de regimes de pequenos valores dos parâmetros da teoria em questão e nas bem definidas (convergentes) séries de expansão perturbativa.

Alguns exemplos da eficiência destes métodos perturbativos são a eletrodinâmica quântica e o modelo padrão das interações electrofracas, devido aos pequenos valores das constantes de acoplamento (nos intervalos de energias observáveis). A situação é bem diferente no caso das interações fortes, a cromodinâmica quântica (QCD). Agora a constante de acoplamento forte $g_{QCD}(l)$ é uma função da escala l das energias de interação, assumindo valores entre zero e infinito. Para as energias altas (limite UV) o acoplamento “efetivo” tem valores pequenos e define um regime chamado de *liberdade assintótica* (dos quarks), perturbativamente acessível. Porém para energias mais baixas - essenciais na descrição do “confinamentos” dos quarks dentro dos hádrons - a função $g_{QCD}(l)$ torna-se grande, impossibilitando o uso de métodos perturbativos.

Uma alternativa para verificar a validade da QCD no regime infra-vermelho (IV), *i.e.* para energias baixas (acoplamento forte) são os cálculos numéricos (do tipo Monte Carlo, (73–75)) baseados na discretização da QCD (euclidiana) numa rede (cúbica), exatamente como um modelo de mecânica estatística, conhecido como “QCD na rede”. Apesar dos resultados numéricos excelentes existe uma demanda na busca de uma descrição analítica do regime IV da QCD. Nesta direção há pesquisas baseadas na quantização de certas soluções clássicas não perturbativas - como *instantons*, *monopólos*, *dyons* etc. Uma outra abordagem promissora, a adotada nesta tese, é baseada no conceito de dualidades (50). A ideia principal é que a descrição de certos fenômenos naturais (como o confinamento dos quarks na QCD e dos elétrons “fortemente acoplados” em certos modelos da matéria condensada) exige a construção

de *pares* de teorias quânticas de campos chamados *duais*. Cada uma das teorias têm diferentes: (a) simetrias internas, (b) graus de liberdade e (c) interações com constantes de acoplamento. A teoria dual é escolhida assim que seu regime perturbativo (de pequenas valores da constante de acoplamento) é equivalente ao regime de acoplamento forte, sem formulação perturbativa na teoria original. A *dualidade* é baseada na existência de um mapeamento efetivo (em principio não-local) dos campos (os graus de liberdade) e dos acoplamentos da teoria original, digamos com $g_1 \sim 1/g_2$, que providencia resultados analíticos para as grandezas físicas do regime de interação “forte” de uma teoria em termos dos resultados perturbativos obtidos no regime de interação “fraca” da outra (dual).

Diferentes realizações de *dualidades* com consequências práticas na QCD foram obtidas nas teorias de supercordas - interligando objetos distintos (cordas abertas e fechadas) de diferentes teorias de supercordas em regimes de acoplamentos diversos. Um dos resultados mais importantes deste desenvolvimento é a conjectura de Maldacena conhecida como correspondência *AdS/CFT*.

1.1 Princípio holográfico

A correspondência *AdS₅/CFT₄*, em sua forma original deduzida da *teoria das supercordas* (1, 2), estabelece uma equivalência *assintótica* entre:

- Supergravitação em dez dimensões, mais precisamente de soluções de vácuo $AdS_5(L) \otimes S^5(L)$ - com simetria $SO(4, 2) \otimes SO(6)$ - associadas a uma grande escala de comprimento L (ou pequena constante cosmológica $\Lambda_5 = -6/L^2$);
- $SU(N_c)$ super Yang-Mills (YM) com supersimetria $\mathcal{N} = 4$ no espaço-tempo de Minkowski em $3 + 1$ dimensões (M_4) no limite $N_c \rightarrow \infty$, definindo o regime de acoplamento: $g_{YM} N_c \gg 1$.

As consequências práticas desta descoberta são certos *algoritmos analíticos* inéditos para os cálculos das dimensões anômalas e das funções de correlação de uma classe de operadores em certas teorias de campos conformes em quatro dimensões (*CFT₄*), no M_4 , em termos das soluções (semi) clássicas de uma teoria gravitacional com a ação de Einstein-Hilbert ($\Lambda_5 < 0$) em $d = 5$ acoplada a campos de matéria.

Os três principais ingredientes (1, 76) responsáveis pela existência da *correspondência/dualidade AdS_d/CFT_{d-1}* são*:

*ver detalhes no capítulo 4

1. Simetrias: $SO(d-1, 2)$ é tanto o grupo das isometrias do espaço AdS_d quanto o das simetrias de uma CFT_{d-1} no espaço M_{d-1} .

2. As relações

$$\Delta_{\pm}^a = \frac{d-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d-1}{2}\right)^2 + m_a^2 L_a^2}, \quad a = 1, \dots, n, \quad (1.1.1)$$

definindo as *dimensões conformes* Δ_{\pm}^a dos campos de uma CFT_{d-1} em termos das *massas* m_a^2 dos campos num *background* AdS_d .

3. A ação efetiva da gravitação AdS_d , função das formas assintóticas dos campos e métrica - que refletem as condições de contorno impostas na borda - servem como *funcional gerador* das funções de correlação da correspondente CFT_{d-1} dual.

O pioneirismo da teoria das supercordas foi essencial ao vislumbrar o primeiro exemplo de uma identificação entre uma geometria $AdS_5 \otimes S^5$ e uma CFT_4 do tipo YM com supersimetria $\mathcal{N} = 4$. Porém devemos enfatizar que a maioria das relações envolvidas na correspondência AdS/CFT valem em dimensões arbitrárias e para gravitações e teorias de campos com menos ou nenhuma supersimetria. Por exemplo, as três regras listadas anteriormente providenciam uma descrição holográfica *não somente* para a restrita classe das CFT_{d-1} 's supersimétricas $\mathcal{N} = 4$ com cargas centrais[†] iguais: $c = a = \left(\frac{L}{l_{pl}}\right)^{d-2}$ (l_{pl} é a escala de Planck) dual a uma (super)gravitação com $\Lambda_d < 0$. As mesmas valem para outras famílias de CFT_{d-1} 's com $a \neq c$ e supersimetria $\mathcal{N} = 0, 1, 2$. A diferença nestes casos é que as teorias gravitacionais são extensões apropriadas da ação de Einstein-Hilbert (EH) com termos quadráticos, cúbicos, etc. nas curvatura, *i.e.*: $R^2, R^3, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \dots$. Como exemplos temos os famosos termos de Gauss-Bonnet, Lovelock e a gravitação "*quase topológica*" (GQT) (7, 10, 17, 18).

O desenvolvimento das ideias da correspondência AdS/CFT nos últimos quinze anos forneceu diversas indicações para a *universalidade* da equivalência entre teorias gravitacionais em d dimensões (assintoticamente AdS_d) e teorias quânticas de campos em $d-1$ dimensões (QFT_{d-1}) no espaço M_{d-1} , sem a necessidade de ser uma super YM ou fazer referência à (super)cordas. A enorme quantidade e variedade de resultados na área " AdS_d/CFT_{d-1} " (13, 15, 16, 23, 24, 46, 51, 57, 60, 61) fornece um respaldo a favor de um princípio físico maior - o *princípio holográfico* de Susskind-t'Hooft, (59). Ele afirma: os efeitos da gravitação (clássica ou quântica[‡]) numa certa região do espaço-tempo permitem uma descrição equivalente (mesmo número de graus de liberdade) em termos de uma teoria de campos, sem

[†]diferentes CFT_{d-1} 's são caracterizadas pelos valores de suas cargas centrais c e a e pelas dimensões Δ_a dos campos conformes - ver capítulo 3.

[‡]mesmo ainda não existindo uma teoria quântica da relatividade geral.

gravitação, definida na borda da região em questão e vice-versa.

As principais novidades envolvendo o *princípio holográfico* são:

- inclusão das geometrias *não exatamente*[§] AdS_d , *i.e.* com um grupo de isometrias menor que $SO(d-1, 2)$ - buracos negros, paredes de domínio, etc. - cujas QFT'_{d-1} s não obedecem mais a invariância conforme;
- extensão da correspondência AdS/CFT ao incorporar, além da borda do espaço, hiper-superfícies de dimensão $d-1$ no interior da geometria que estão associados a alguma região específica, como um horizonte de eventos ou de Cauchy.

O *princípio holográfico* abre um novo caminho na busca de soluções para problemas importantes da física que envolvem constantes de acoplamento forte, como o *confinamento* dos quarks na QCD e, na matéria condensada, supercondutividade, efeito Hall fracionado, etc.

1.2 Paredes de domínio e grupo de renormalização holográfico

Diferente das simetrias de Poincaré $SO(d-2, 1) \times T_{d-1}$, associadas a relatividade especial, as simetrias conformes $SO(d-1, 2)$ não representam simetrias exatas na natureza. As CFT's tem um uso restrito à situações extremas de altas energia ($E \gg m^2$, $c = 1$) e nas transições de fase de segunda ordem (ou de ordem infinita), caracterizadas pelos valores críticos das constantes de acoplamento, aonde elas se tornam insensíveis à rescaleamentos espaciais (ou de energia). A importância prática das CFT's surge na descrição do comportamento de teorias de campos *não conformes* ao redor de pontos críticos, usando a teoria das perturbações conformes (29), *i.e.*

$$S_{QFT} = S_{CFT} + (g(l) - g_c^{UV}) \int d^{d-1}x \Phi_g(x), \quad (1.2.1)$$

onde $g(l)$ é o acoplamento como função da escala logarítmica adimensional l ($e^l \sim L, \mathbb{L}$), g_c^{UV} é o valor do acoplamento no ponto crítico e $\Phi_g(x)$ é um operador (campo) relevante ou marginal - com dimensão $0 \leq \Delta_g \leq d-1$ - da CFT_{d-1} definida no ponto crítico UV em questão. Toda a informação necessária para a descrição quantitativa das transições de fase e suas propriedades (massivas ou não massivas) da teoria conforme perturbada ($pCFT$) - eq. (1.2.1) - é encontrada na própria CFT_{d-1} ^{||}.

[§]na verdade assintoticamente AdS_d .

[¶] L é a escala de comprimento da teoria de campo.

^{||}os detalhes estão na seção 3.5.

A quebra das simetrias conformes $SO(d-1, 2)$ no seu subgrupo de Poincaré $SO(d-2, 1) \times T_{d-1}$ devido a escala introduzida pelo acoplamento, cuja dimensão em unidades de massa é $[g(l)] = [m]^{d-1-\Delta_g}$, indica que as geometrias** adequadas a descrição da $pCFT_{d-1}$ (1.2.1) devem ter o grupo de Poincaré como isometrias. No limite conforme $g(l) \rightarrow g_c^{UV}$ ($l \rightarrow -\infty$) as soluções gravitacionais devem reproduzir um espaço AdS_d . Os espaço assintoticamente AdS_d ($(a)AdS_d$) que satisfazem as duas condições são conhecidos como *paredes de domínio* (PD's) *planos* (5, 6, 19), definidos pela forma específica da métrica

$$ds^2 = dy^2 + e^{2A(y)} \eta_{ij} dx_i dx_j; \quad i, j = 0, \dots, d-2, \quad (1.2.2)$$

com as condições de contorno (no caso de "PD" 's *não singulares*)

$$e^{A(y)} \approx e^{y/L_{\pm}}, \quad y \rightarrow \pm\infty. \quad (1.2.3)$$

Nesta tese, as PD's são geradas pelas eqs. da relatividade geral acopladas a um campo escalar $\sigma = \sigma(y)$ com potencial $V(\sigma)$ que obedece as condições de contorno $\sigma(\pm\infty) = \sigma_{\pm}$.

Nas proximidades de $y \rightarrow \infty$ - borda do espaço ($e^A \rightarrow \infty$) - e de $y \rightarrow -\infty$ - horizonte de Cauchy ($e^A \rightarrow 0$) - as geometrias são AdS_d com escalas (constantes cosmológicas) diferentes $L_+ \neq L_-$ e distribuições de matéria (uniforme) distintas, $\sigma_+ \neq \sigma_-$. A variação da densidade de matéria na direção y (ortogonal às coordenadas x^i), pois $\sigma = \sigma(y)$, e também a variação do fator de escala, $e^{A(y)}$, dependem das propriedades do potencial $V(\sigma)$ e da forma da ação da gravitação - EH, GB, GQT, etc. A correspondência holográfica *não conforme*, $(a)AdS_d/pCFT_{d-1}$, providencia uma descrição *não perturbativa* das propriedades de certas teorias de campos com simetrias de Poincaré $pCFT_{d-1}$ (com um ou mais pontos críticos) em termos das soluções $(e^{A(y)}, \sigma(y))$ de PD, eq. 1.2.2, de uma gravitação (dual) em d dimensões acoplada a um campo de matéria escalar.

A principal mudança nas regras três regras da correspondência AdS/CFT devido a quebra das simetrias conformes, a presença das escalas $[m^{d-1-\Delta_g}]$ e da renormalização das constantes de acoplamento, $g \rightarrow g(l)$ e dos campos $\Phi_g(x)$ é a inclusão de um novo ingrediente - a *função beta* ($\beta(\sigma)$). Sendo conhecida, ela fornece a forma específica de $g(l)$ (acoplamento *correndo*^{††}), através da eq. do grupo de renormalização (GR) de Wilson (29, 31):

$$\frac{d\sigma}{dl} = -\beta(\sigma). \quad (1.2.4)$$

Para a construção da função *beta* holográfica (3, 4, 21, 22) em termos das PD's (1.2.2) ainda

**soluções das eqs. da relatividade geral em d dimensões.

††do inglês *running*.

é necessário identificar as grandezas da teoria de campo - $g(l)$, l - com as da gravitação - $\sigma(y)$, $A(y)$:

- $e^{-A} \equiv e^l \sim L$, ou seja, o inverso do fator de escala é proporcional a escala da $pCFT_{d-1}$. Grandes escalas na gravitação estão relacionadas a pequenas distâncias (grandes energias) na $pCFT_{d-1}$;
- $g(l) = \sigma(-A(y))$: o acoplamento da $pCFT_{d-1}$ é o campo escalar σ na gravitação dual.

A introdução do superpotencial $W(\sigma)$:

$$V(\sigma) = \frac{2}{\kappa^2} (W'(\sigma))^2 - \left(\frac{d-1}{d-2} \right) W^2(\sigma), \quad (1.2.5)$$

transforma as eqs. do movimento das PD's (1.2.2) num sistema de primeira ordem^{‡‡}:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2}{\kappa} W'(\sigma), \quad \frac{dA}{dy} = -\frac{\kappa}{d-2} W(\sigma), \quad (1.2.6)$$

como consequência, a função *beta* holográfica adquire a forma simples (4):

$$\beta(\sigma) = -\frac{2(d-2)}{\kappa^2} \frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)}. \quad (1.2.7)$$

As regras e identificações *não conformes* estabelecidas, conhecidas como *GR holográfico* (3, 4), obedecem a condição de recuperar o conjunto de regras padrão da correspondência AdS_d/CFT_{d-1} no limite conforme ($y \rightarrow \pm\infty$, i.e. na borda ou horizonte de Cauchy).

Para cada escolha de $V(\sigma)$ (ou melhor, de $W(\sigma)$), com ao menos um extremo $W'(\sigma_*) = 0$ (que também é extremo de $V(\sigma)$), o formalismo do GR holográfico (\equiv (a) $AdS_d/pCFT_{d-1}$) permite a reprodução não somente dos expoentes críticos e da natureza das transições de fase na $pCFT_{d-1}$, como também descreve as propriedades das correspondentes fases - massivas e não massivas. Para isso ele usa as expressões explícitas da parte *singular* da energia livre F_{red} e do comprimento de correlação ξ como potências do fator de escala:

$$F_{red}(\sigma) \sim e^{-(d-1)A(\sigma)}, \quad \xi(\sigma) \sim e^{A(\sigma)} = e^{-l}. \quad (1.2.8)$$

A dedução holográfica da forma explícita das funções de correlação dos campos $\Phi_g(x)$ (ver eq. (1.2.1)) fora dos pontos críticos exige o conhecimento das soluções das eqs. de EH (ou

^{‡‡}a generalização destes resultados para gravitações GB e GQT, respectivamente apresentados nos capítulos 6 e 7 é um dos principais resultados desta tese.

GB, GQT) para as flutuações lineares da geometria de PD e do campo escalar (62–64)

$$\sigma(y; x) = \bar{\sigma}(y) + \phi(y, x), \quad (1.2.9)$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.2.10)$$

ao redor das PD's (1.2.2) (termos com “barra”) com certas condições de contorno impostas sobre as flutuações ϕ e h_{ij} numa superfície $y = \text{const.}$ Cálculos, exatos e aproximados, de flutuações lineares são apresentados nos capítulos 5, 6 e apêndice F.

Desta forma, seguindo as regras (a) $AdS_d/pCFT_{d-1}$, (4, 63), pode-se, a partir da solução de PD da gravitação, determinar para uma certa $pCFT_{d-1}$ a função *beta*, as funções de correlação, os valores críticos dos acoplamentos, os expoentes críticos, a energia livre reduzida, as massas, etc.

Antes de enfrentar o problema do reconhecimento das simetrias extras, da forma explícita da Lagrangiana da $pCFT_{d-1}$ dual, etc. é necessário verificar se nosso “conjunto holográfico” composto pela função *beta*, massas, dimensões anômalas, etc. obedece a todos os requerimentos específicos de uma teoria quântica de campos relativística; como unitariedade, causalidade, localidade, ausência de *tachyons* dentre outros. O mesmo problema existe nos limites conformes, impondo condições sobre os valores fisicamente admissíveis das dimensões anômalas Δ_a^\pm , das cargas centrais a e c (9, 11, 12, 25), das constantes de estrutura $C_{\Delta\Delta\Delta}$, da forma específica das expansões de produtos de operadores (ver capítulo 3).

Nas teorias não conformes além destas condições a consistência física exige certo comportamento das *funções centrais* $a(l)$ e $c(l)$ e suas primeiras derivadas, conhecido como *teorema a & c* (37, 43)

$$a(l) > 0, \quad c(l) > 0; \quad \frac{da}{dl} < 0, \quad \frac{dc}{dl} < 0,$$

logo $a(l \rightarrow \infty) = a_{IV} < a_{UV} = a(l \rightarrow -\infty)$, da mesma forma $c_{IV} < c_{UV}$.

O efeito das restrições é que nem todos os potenciais $V(\sigma)$ (ou $W(\sigma)$) levam a $pCFT_{d-1}$'s consistentes. A implementação destas condições (de origem da $pCFT_{d-1}$) funcionam como uma *regra de seleção* para os possíveis potenciais $V(\sigma)$ e constantes de acoplamento gravitacionais λ e μ (na gravitação de GB e na GQT, ver capítulos 6 e 7).

Todo o formalismo do GR holográfico pode, *a priori*, ser facilmente generalizado para o caso de vários campos escalares na gravitação em d dimensões (vários acoplamentos na $pCFT_{d-1}$). Porém o uso do GR holográfico no caso de mais de um campo escalar quando a gravitação possui os termos de GB ou QGT é um problema não trivial. No capítulo 8 a extensão para muitos campos é formulada, incluindo a construção de soluções de PD's em

termos de “superpotenciais” além do estudo das condições físicas (*teoremas a & c*, etc.).

O problema central desta tese é a dedução da forma explícita das condições de consistência física de $pCFT_{d-1}$'s sem supersimetria, com $a \neq c$, descritas em termos de gravitações generalizadas GB e GQT acopladas a um ou mais campos escalares (5, 65).

Fenômenos críticos

Um sistema físico macroscópico em equilíbrio termodinâmico é caracterizado por poucos parâmetros, por exemplo, para um sistema magnético seriam a temperatura, campo magnético externo, magnetização, etc. Ao modificá-los, de forma adiabática, é criada uma competição entre dois princípios fundamentais: o de mínima energia e o de máxima entropia. Por vezes ela resulta em uma transição de fase do sistema - mudanças profundas nas suas simetrias* que ocorrem para certos valores críticos da temperatura, magnetização, etc.

A maioria das transições de fase envolvem um *calor latente*. No ponto de transição, o sistema ganha ou perde uma quantidade fixa de energia (o *calor latente*), enquanto sua temperatura permanece a mesma. Ao longo da transição as duas fases coexistem - como na ebulição da água. Tais transições de fase são ditas de primeira ordem.

Nesta tese, o foco é uma segunda classe de transições de fase, chamadas de transições de fase de *segunda ordem*. Não há *calor latente* envolvido neste tipo de transição de fase, logo o sistema está em uma fase ou outra. O conjunto de valores críticos dos parâmetros termodinâmicos aonde ocorre uma transição de fase de segunda ordem é chamado de *ponto crítico*. A principal característica de uma transição de fase de segunda ordem é a divergência do comprimento de correlação ξ - conceito introduzido na próxima seção - com o seguinte comportamento:

$$\xi \sim \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^{-\nu}, \quad \nu > 0, \quad T \rightarrow T_c$$

onde T é a temperatura[†] e T_c a temperatura crítica.

Existe uma terceira classe, também estudada nesta tese, - as transições de fase de ordem infinita. Nelas a divergência de ξ não obedece a uma lei de potências, a singularidade é

*simetrias discretas podem mudar ou até se tornarem contínuas.

†mas poderia ser outro parâmetro termodinâmico.

essencial, por exemplo

$$\xi \sim e^{\frac{T_c}{T-T_c}}, \quad T \rightarrow T_c.$$

Este capítulo é dedicado a introdução dos conceitos: comprimento de correlação, expoentes críticos, invariância de escala e função *beta*; cruciais para a descrição quantitativa das transições de fase de segunda ordem.

2.1 Comprimento de correlação

Para facilitar a compreensão das transições de fase de segunda ordem e introduzir a ideia do comprimento de correlação, vamos “descrever” um exemplo bem simples. Considere uma rede com N elementos, em que a cada ponto, ou célula[‡], é associado um valor de “spin”. Também é assumido que a interação entre os momentos magnéticos dos átomos é muito fraca (cada átomo só interage com sua vizinhança). Para altas temperaturas e um pequeno campo magnético externo (B), é natural que a magnetização média por célula ($\frac{\langle M \rangle}{N} \equiv m$)[§] seja pequena, já que a energia térmica não deixa os “spins” se alinharem com o campo externo ($h = \frac{B}{kT} \ll 1$) e no limite $B \rightarrow 0$ temos $m \rightarrow 0$ (ver figura 2.1(a)). No contexto de sistemas ferromagnéticos, essa fase é chamada de *desordenada*. Ao abaixar a temperatura, a energia magnética começa a prevalecer e quando a temperatura for baixa o suficiente, mesmo quando o campo magnético é tomado à zero, uma magnetização (residual) permanece, esse fenômeno é chamado de magnetização espontânea e a fase ($T < T_c$) de *ordenada* (ver figura (2.1(b))). A temperatura crítica (T_c) na qual ocorre a mudança de comportamento - a magnetização espontânea - é chamada de *temperatura crítica* ou *de Curie*. Uma pergunta pertinente aqui é: existe alguma propriedade de origem microscópica que caracterize essa transição entre fases distintas? Sim existe, e seu nome é *comprimento de correlação*. A magnetização medida é uma propriedade macroscópica do sistema, dividindo-o em dois pedaços iguais (mantendo a mesma temperatura e campo magnético externo) e medindo a magnetização de cada um separadamente, deve-se chegar ao mesmo resultado. Repetindo o processo muitas vezes, chega-se numa escala, da ordem de alguns raios atômicos, onde as diferentes medidas das

[‡]pode representar um átomo ou uma molécula.

[§]O símbolo $\langle \dots \rangle$ representa o valor médio da quantidade. Na tese sempre será usado o *ensemble* canônico, portanto

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\text{conf}} \dots e^{-\beta H}, \quad Z = \sum_{\text{conf}} e^{-\beta H}, \quad (2.1.1)$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema e $\beta = \frac{1}{kT}$, k é a constante de Boltzmann.

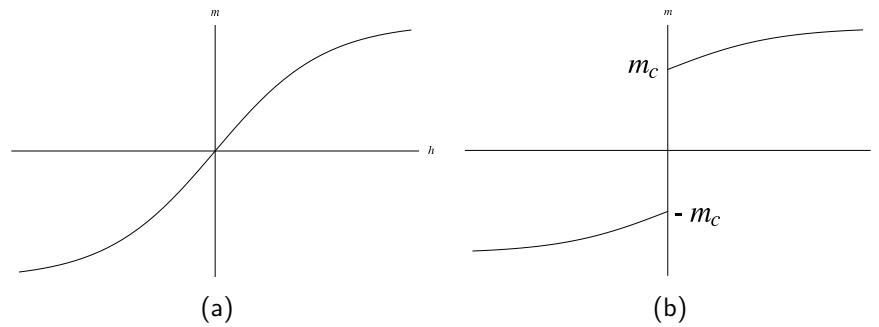


Figura 2.1 – magnetização como função do campo magnético externo adimensional $h = B/kT$: (a) $T > T_c$; (b) $T < T_c$.

diferentes regiões darão resultados diferentes, ou seja, as flutuações do sistema (os “pequenos” domínios magnéticos) passam a ser importantes. Tal escala é chamada de *comprimento de correlação* $\equiv \xi$. Em outras palavras, dado um ponto na rede com seu “spin” apontando em uma direção, então num raio ξ em torno dele a probabilidade de encontrar outros “spins” apontando na mesma direção é grande (ver figura 2.2). Ao diminuir a temperatura (com o campo magnético fraco e constante) o comprimento de correlação deve aumentar e quando chegamos a uma temperatura crítica T_c e é tomado $B \rightarrow 0$, ele (ξ) diverge[¶]! Isso não quer dizer que todos os “spins” estão alinhados na mesma direção, quer dizer que, efetivamente, cada “spin” interage com toda a rede, *i.e.* a interação, originalmente de curto alcance, torna-se de longo alcance. Portanto no ponto crítico não há nenhuma escala na teoria, todos os domínios magnéticos estão presentes, desde pequenas ilhas até linhas infinitas. Analisar o sistema como um todo ou apenas uma parte dele é a mesma coisa. O fato do sistema não ter uma escala natural no ponto crítico é a base para os estudos do grupo de renormalização de Wilson e das teorias de campos conformes.

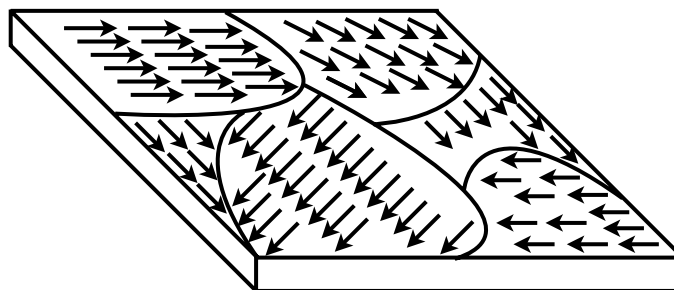


Figura 2.2 – Diversos domínios magnéticos $T > T_c$. A escala de um domínio magnético é dada pelo comprimento de correlação.

[¶]uma propriedade de origem microscópica torna-se macroscópica.

Expoente	Definição
α	$c_B = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_B \sim t ^{-\alpha}$, ou $\sim \frac{1}{\alpha}(t ^{-\alpha} - 1)$, ($\alpha \geq 0$)
β	$m \sim (-t)^{-\beta}$, $T < T_c$, $B = 0$
γ	$\chi = \left(\frac{\partial m}{\partial B} \right)_T \sim t ^{-\gamma}$, $B = 0$, ($\gamma > 0$),
δ	$m \sim B^{1/\delta}$, $B \rightarrow 0$, $T = T_c$
η	$G(r) \sim 1/r^{d-2+\eta}$, $B = 0$, $T = T_c$
ν	$\xi \sim t ^{-\nu}$, $t \equiv (T - T_c)/T_c$, $B = 0$

Tabela 2.1–Definição dos expoentes críticos.

O comprimento de correlação aparece, naturalmente, nos cálculos da chamada função de correlação entre dois “spins”, dada por

$$G(i, j) \equiv \langle \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle - \langle \vec{s}_i \rangle \cdot \langle \vec{s}_j \rangle, \quad (2.1.2)$$

onde \vec{s}_i é o “spin” da i -ésima célula da rede. Em geral, para “spins” distantes $G(i, j)$ possui o seguinte comportamento

$$G(r) \sim \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r^{d-2+\eta}}, \quad r = |i - j|a, \quad (2.1.3)$$

onde r é a distância entre as células, a é o espaçamento da rede e ξ é o comprimento de correlação (essa é a sua definição), que controla o rápido decaimento de G . Já η é a famosa *dimensão anômala*. No ponto crítico $\xi \rightarrow \infty$ e a função de correlação fica

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}, \quad (2.1.4)$$

i.e. a correlação é de longo alcance. Quando $\eta = 0$ (chamado de caso clássico), esse assintótico é solução da eq. de Laplace, como num potencial Newtoniano ou Coulombiano.

2.1.1 Expoentes críticos e universalidade

As principais fontes de dados experimentais num sistema termodinâmico, suponha magnético sob a ação de um campo magnético externo (B), são: a magnetização por célula (m) e as *derivadas termodinâmicas* - suscetibilidade magnética (χ) e o calor específico a campo magnético constante (c_B), definidos na tabela 2.1. Os experimentos indicam que além do comprimento de correlação, nas proximidades de um ponto crítico, as derivadas termodinâmicas também divergem como potências de acordo com a tabela 2.1.

Os parâmetros $\{\alpha, \beta, \delta, \gamma, \nu, \eta\}$ são denominados *expoentes críticos*. Uma propriedade muito importante e interessante deles é que, em sistemas reais efetivamente em d dimensões, as

relações (66)

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad \alpha + \beta(1 + \delta) = 2, \quad (2.1.5)$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \nu d = 2 - \alpha, \quad (2.1.6)$$

são verdadeiras. O conhecimento de dois expoentes críticos determina todos os outros.

As eqs. (2.1.5) e (2.1.6) não podem ser derivadas por princípios termodinâmicos, porém o grupo de renormalização, introduzido mais a frente, fornece um respaldo teórico para elas.

Uma consequência do fato de $\xi \rightarrow \infty$, no ponto crítico, é que como não temos escala, a configuração da rede e a forma da interação de curto alcance entre os “spins” não são muito relevantes. Poucos parâmetros definem um expoente crítico, um deles é a dimensão da rede. Esse fato é chamado de universalidade e é dito que vários sistemas diferentes que possuem os mesmos expoentes críticos pertencem a mesma classe de universalidade.

2.1.2 Um exemplo: Modelo de Ising

O modelo teórico mais simples que reproduz a magnetização espontânea (transição de fase *ordem-desordem*), típica de um sistema ferromagnético, é o modelo de Ising dado pelo Hamiltoniano

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - B \sum_{i=1}^N s_i; \quad s_i = \pm 1, \quad (2.1.7)$$

definido numa rede hipercúbica d -dimensional com N pontos, onde s_i é interpretado como o valor de “spin” (que nesse modelo simples só pode apontar “para cima” ($s_i = 1$) ou “para baixo” ($s_i = -1$)) associado ao i -ésimo ponto da rede. O primeiro termo representa a interação entre os “spins”, na soma $\langle i, j \rangle$ deve-se usar apenas os primeiros vizinhos - $2d$ pontos - portanto $\sum_{\langle i,j \rangle} \rightarrow dN$ termos. Nosso objetivo é calcular a função de partição

$$\mathcal{Z}(T, B, N) = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta H}, \quad \beta \equiv \frac{1}{kT}, \quad (2.1.8)$$

para então determinar, no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), a energia livre de Gibbs por célula

$$f(T, B) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\beta N} \ln \mathcal{Z} \right], \quad (2.1.9)$$

que cria a conexão entre a física estatística e a termodinâmica. Conhecendo a energia livre todas as quantidades termodinâmicas podem ser calculadas, por exemplo, a magnetização e

o calor específico a campo magnético constante são, respectivamente:

$$m(T, B) = - \left(\frac{\partial f}{\partial B} \right)_T, \quad c_B = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_B = -T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_B, \quad (2.1.10)$$

Mesmo sendo muito simples, soluções exatas para o modelo de Ising só foram encontradas para $d = 1$ e $d = 2$, veja por exemplo (31). Tal dificuldade em um exemplo tão simplório já indica que a função de partição, em praticamente todos os casos, não pode ser calculada explicitamente. Quando o estudo é limitado às proximidades do ponto crítico, há técnicas perturbativas bem conhecidas na literatura (31) para extrair alguma informação. Uma pequena abordagem sobre elas é desenvolvida ao longo do texto. Na segunda parte da tese é introduzida uma alternativa não perturbativa - a correspondência *AdS/CFT*. Antes, vamos encontrar uma solução aproximativa para o modelo de Ising.

2.1.2.1 Teoria do campo médio no modelo de Ising

A aproximação do campo médio consiste em supor $\delta s_i \equiv s_i - m \ll 1$ ($m = \langle s \rangle$), *i.e.* s_i não flutua muito em relação a média. Isso implica em

$$s_i s_j = (\delta s_i + m)(\delta s_j + m) = -m^2 + m(s_i + s_j) + \mathcal{O}(\delta s^2), \quad (2.1.11)$$

portanto

$$G(i, j) = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \approx 0, \quad (2.1.12)$$

na aproximação do campo médio a correlação entre os sítios é desprezada. O Hamiltoniano (2.1.7) fica

$$H \approx -J \sum_{\langle i, j \rangle} (-m^2 + m(s_i + s_j)) - B \sum_{i=1}^N s_i = Jm^2 Nd - \sum_{i=1}^N (2mdJ + B) s_i.$$

Na mesma aproximação a função de partição pode ser calculada, o resultado é

$$\mathcal{Z} \approx e^{-\beta Jm^2 Nd} (2 \cosh [\beta(2dmJ + B)])^N, \quad (2.1.13)$$

o que leva, respectivamente a energia livre e magnetização (eq. (2.1.10))

$$f(T, B) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \frac{\ln \mathcal{Z}}{N} \approx m^2 dJ - \frac{1}{\beta} \ln (2 \cosh [\beta(2mJd + B)]), \quad (2.1.14)$$

$$m \approx \tanh \left(\frac{(2dmJ + B)}{kT} \right), \quad (2.1.15)$$

no limite $B \rightarrow 0$

$$m \approx \tanh\left(\frac{2dmJ}{kT}\right) \equiv \tanh\left(\frac{T_c}{T}m\right), \quad T_c \equiv \frac{2dJ}{k}. \quad (2.1.16)$$

A eq. acima é do tipo transcendental, não é possível escrever uma expressão exata de m como função de $\frac{T_c}{T}$, mas graficamente pode-se procurar soluções não triviais ($m \neq 0$). O procedimento, mostrado na figura (2.3), é o seguinte: são traçadas as curvas do lado esquerdo ($F_1(m) = m$) e direito ($F_2(m) = \tanh\left(\frac{T_c}{T}m\right)$) da eq. (2.1.16) e são procurados os pontos coincidentes. Na figura (2.3.a) é verificado que para $T > T_c$ a única interseção ocorre no ponto trivial $m = 0$ (não há magnetização sem campo magnético), já na figura (2.3.b), onde $T < T_c$, mais duas soluções são encontradas $m = \pm m_c$, *i.e.* existem três possíveis valores $m = 0, m_c, -m_c$. O sistema irá assumir a configuração que minimiza a energia livre (ou, de forma equivalente, maximiza a entropia). Tais condições são satisfeitas por m_c e $-m_c$. Para $T < T_c$ ao tomarmos o limite $B \rightarrow 0^\pm$, o sistema permanece com a magnetização espontânea $m = \pm m_c \neq 0$. Ocorre a tão procurada transição da fase *desordenada* ($T > T_c$) para a *ordenada* ($T < T_c$).

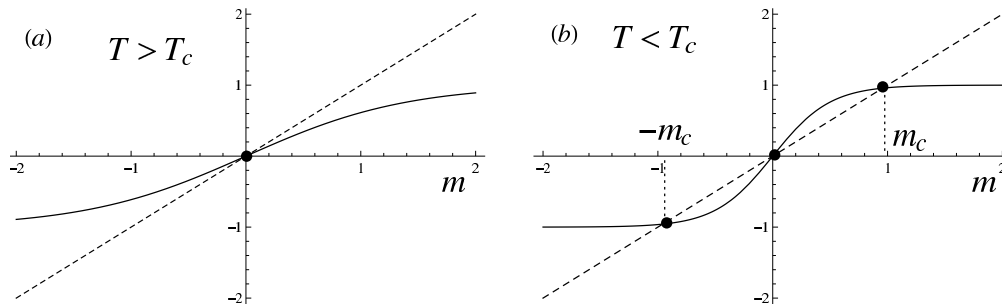


Figura 2.3 – Curvas $F_1 = m$ e $F_2 = \tanh\left(\frac{T_c m}{T}\right)$ sobrepostas nos casos $T > T_c$ e $T < T_c$. Apenas no segundo caso as curvas se cruzam em pontos onde $m \neq 0$.

2.1.2.2 Expoentes críticos para o modelo de Ising na aproximação do campo médio

Caracterizada a transição de fase de segunda ordem e conhecendo, na aproximação do campo médio, a energia livre, devemos ser capazes de calcular os expoentes críticos. Invertendo a eq. (2.1.16)

$$\frac{T_c}{T}m = \tanh^{-1} m = m + \frac{1}{3}m^3 + \mathcal{O}(m^5) \Rightarrow m \sim |t|^{1/2}, \quad (2.1.17)$$

i.e. $\beta = 1/2$. Fixando $T = T_c$ e ao considerar $B \rightarrow 0$, a eq. (2.1.15) fica

$$m + \frac{B}{kT_c} \approx m + \frac{1}{3}m^3 \Rightarrow m \sim B^{1/3}, \quad (2.1.18)$$

o que fixa $\delta = 3$. Os outros podem ser achados de formas semelhantes e são: $\gamma = 1$, $\eta = 0$, $\alpha = 0$ e $\nu = 1/2$. Ao comparar com as eqs. (2.1.5)-(2.1.6), elas só são compatíveis se $d = 4$. Esse fato curioso é discutido no fim da seção 2.3.2.

2.2 Hipótese de Kadanoff e o grupo de renormalização de Wilson

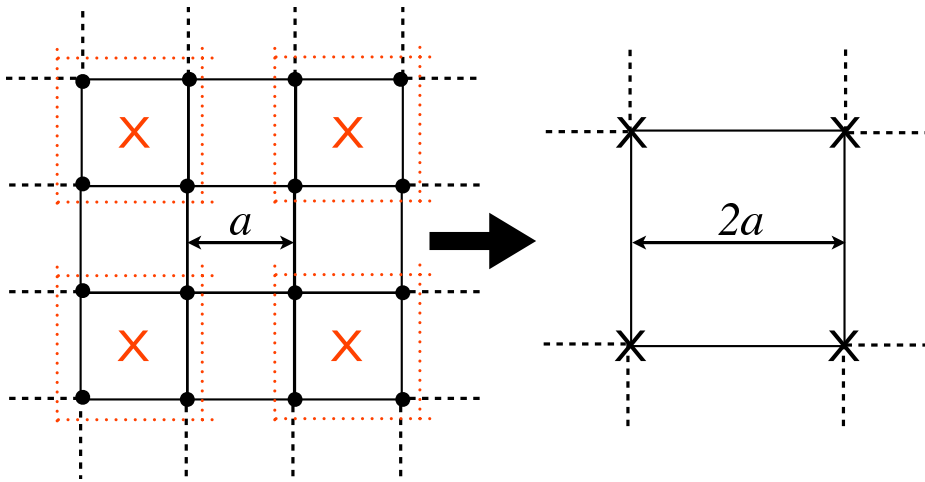


Figura 2.4—Esquema de blocos de “spin” numa rede quadrada ($d = 2$) e $b = 2$.

Suponha uma rede d -dimensional hipercúbica com N “spins”, onde os sítios são separados por uma distância a e a i -ésima célula possui “spin” s_i . Nas proximidades do ponto crítico $\xi \gg a$, portanto existem grandes blocos com vários “spins” altamente correlacionados. Considere b^d células com um espaçamento $a' = ba$ entre elas, com $1 < b \ll \frac{\xi}{a}$, e a cada uma é associado um novo valor de “spin” θ_α , $\alpha = 1, \dots, \frac{N}{b^d}$ (veja a figura 2.4), ou seja, um aglomerado de “spins” (da rede original) é substituído por apenas um “spin” θ_α “efetivo”. A chamada *hipótese de similaridade* de Kadanoff (67) consiste em assumir, que nas proximidades de um ponto crítico, essa transformação não altera a forma do Hamiltoniano, *i.e.* sendo o Hamiltoniano do modelo original (em termos de s_i)

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - B \sum_{i=1}^N s_i, \quad (2.2.1)$$

ele se relaciona com o Hamiltoniano da teoria θ_α da seguinte forma

$$H = H'(J', B'; b) + Nf_0(J', B'; b) = -J' \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \theta_\alpha \theta_\beta - B' \sum_{\alpha=1}^{\frac{N}{b^d}} \theta_\alpha + Nf_0, \quad (2.2.2)$$

$$J' = J'(J, B; b) \text{ e } B' = B'(J, B; b), \quad (2.2.3)$$

cuja única diferença é a eventual existência da constante aditiva f_0 (uma nova energia de fundo). Em termos práticos, a relação é encontrada impondo que a função de correlação seja invariante (a menos de uma constante multiplicativa) ao rescalamento da rede, *i.e.*

$$\mathcal{Z}(J, B) = e^{N\beta f_0} \mathcal{Z}'(J', B'; b). \quad (2.2.4)$$

A eq. acima revela “o grande truque”. A energia livre é dada por $f(t, h) = -\frac{1}{N\beta} \ln \mathcal{Z}$ ou $\mathcal{Z} = e^{-N\beta f(t, h)}$, por outro lado, $\mathcal{Z}' = e^{N' f'(t', h')}$, pela eq. (2.2.4)

$$e^{-Nf(t, h)} = e^{-N' f'(t', h') - Nf_0(t, h)}, \quad (2.2.5)$$

onde $N' = b^{-d}N$ é o número total de blocos. A transformação para a energia livre é

$$f(t, h) = b^{-d} f'(t', h') + f_0(t, h), \quad (2.2.6)$$

as consequências da eq. acima serão discutidas no parágrafo 2.2.3.

A hipótese de Kadanoff nos diz que próximo ao ponto crítico o sistema não possui, efetivamente, uma escala natural (ξ é quase infinito), assim é equivalente observar uma região com uma centena ou um bilhão de “spins”.

2.2.1 Transformação de blocos de spin no modelo de Ising unidimensional

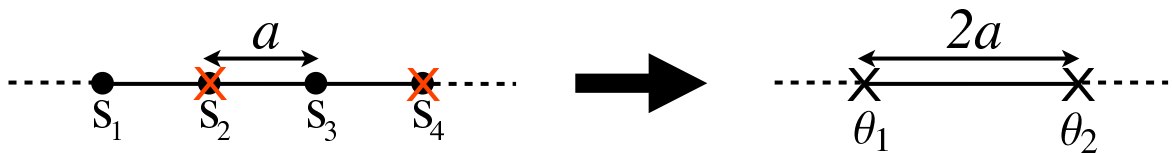


Figura 2.5—Esquema de blocos de “spin” na linha com $b = 2$ e $\theta_1 = s_2, \theta_2 = s_4, \dots$

O modelo de Ising unidimensional com condições de contorno periódicas, *i.e.* $s_i = s_{i+N}$,

é dado pelo Hamiltoniano

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - B \sum_{i=1}^N s_i. \quad (2.2.7)$$

No processo de reescalamento será adotado $a' = 2a$ ($b = 2$) e os novos “spins”, θ_α , são identificados como os s_i , $i = \alpha = 2, 4, 6, \dots$, *i.e.* $s_2 = \theta_1$, $s_4 = \theta_2, \dots$ (veja a figura 2.5). A função de partição do modelo original é a eq. (2.1.8) (em uma dimensão). Já a função de partição reescalada pode ser encontrada simplesmente somando os outros graus de liberdade, ou seja, os “spins” ímpares. Para ilustrar o processo será analisado apenas os termos onde aparece s_3 :

$$\begin{aligned} \sum_{s_3=-1}^1 e^{\beta J(s_2 s_3 + s_3 s_4) + \beta B s_3} &= 2 \cosh(K(s_2 + s_4) + h), \quad K = \beta J, \quad h = \beta B, \\ &= 2 \cosh(K(\theta_1 + \theta_2) + h), \quad \theta_1 = s_2, \quad \theta_2 = s_4, \\ &\stackrel{!}{=} A e^{K' \theta_1 \theta_2 + \frac{h'}{2}(\theta_1 + \theta_2)}, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

ao fixar todas as possibilidades de θ_1 e θ_2 chega-se a um sistema de três eqs. e três incógnitas, cuja solução é:

$$h' = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cosh(2K + h)}{\cosh(2K - h)} \right), \quad (2.2.9)$$

$$K' = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\cosh(2K + h) \cosh(2K - h)}{\cosh^2 h} \right), \quad (2.2.10)$$

$$A = 2 (\cosh^2 h \cosh(2K + h) \cosh(2K - h)). \quad (2.2.11)$$

As eqs. (2.2.9), (2.2.10) e (2.2.11) provam que ao somar os “spins” ímpares a função de partição (2.1.8) se torna

$$e^{-N \frac{1}{2} \ln A} \mathcal{Z} = \mathcal{Z}' = \sum_{\{\theta_\alpha\}} e^{-\beta H'(K', h')}, \quad \text{com} \quad (2.2.12)$$

$$\beta H'(K', h') = -K' \sum_{\alpha=1}^{N/2} \theta_\alpha \theta_{\alpha+1} - \frac{h'}{2} \sum_{\alpha=1}^{N/2} (\theta_\alpha + \theta_{\alpha+1}), \quad (2.2.13)$$

em exata concordância com a hipótese de Kadanoff.

No caso particular de $h = 0$, a eq (2.2.9) e (2.2.10) fornecem, respectivamente, $h' = 0$ e

$$\tanh K' = \tanh^2 K, \quad (2.2.14)$$

o fator 2 aparece pois foi escolhido $b = 2$. O resultado geral é:

$$x' = x^b; \quad 0 \leq x = \tanh K \leq 1. \quad (2.2.15)$$

Os pontos fixos da eq. são $x = 0$ ($T \rightarrow \infty$) e $x = 1$ ($T \rightarrow 0$). Eles são candidatos a pontos críticos, pois neles a teoria é invariante sob reescalamentos.

Nas proximidades do ponto crítico a física das longas distâncias $r \gg a' > a$ não é afetada pelo reescalamento, por isso a função de correlação deve ser a mesma

$$\begin{aligned} G(r') &= G\left(\frac{r}{b}\right) = G(r) \\ \frac{e^{-\frac{r}{b\xi}}}{r^{d-2+\eta}} &\sim \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r^{d-2+\eta}} \\ \rightarrow \xi' &= \frac{\xi}{b}, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

o comprimento de correlação é uma função apenas de K , ou melhor de x (variável mais natural nesse exemplo), assim

$$\xi(x') = \frac{\xi(x)}{b}, x' = x^b, \quad (2.2.17)$$

a solução da eq. é única, a menos de uma constante multiplicativa, e dada por

$$\xi(x) = \frac{const}{\ln x} = \frac{const}{\ln [\tanh(K)]}, \quad (2.2.18)$$

divergente em $x \rightarrow 1$ ($K \rightarrow \infty$), o ponto crítico.

2.2.1.1 Fluxo da temperatura no modelo de Ising em uma dimensão

O reescalamento do modelo de Ising mostrou como os acoplamentos variam com a escala da teoria (uma carga elétrica numa escala/energia não é a mesma em outra escala/energia), as relações explícitas são dadas pelas eqs. (2.2.9) e (2.2.10), mas se $B = 0$, fica-se apenas com a eq. (2.2.15). Por simplificação só será analisado este caso. Qualquer que seja o valor de K (da teoria inicial) após um número $n \gg 1$ de reescalamentos ter-se-á $x' = x^{nb} \ll 1$, *i.e.* nos afastamos do ponto fixo $x = 1$ ($T = 0$) e nos aproximamos do ponto fixo $x = 0$ ($T = \infty$). Por isso o ponto fixo $T = 0$ é chamado de relevante (o fluxo sai dele) e $T = \infty$ de irrelevante (o fluxo entra nele). Na figura 2.6 é encontrado o diagrama do fluxo.

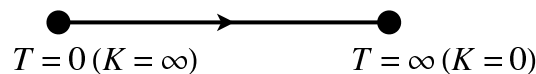


Figura 2.6—Fluxo à campo magnético nulo.

2.2.2 Teoria geral: Grupo de renormalização de Wilson

Com base no exemplo de Ising estamos prontos para montar um esquema geral do que será chamado de grupo de renormalização (GR), (29), e entender como ele ajuda a determinar os expoentes críticos.

Dado um conjunto de p parâmetros extensivos adimensionais: $t, K, h, \dots \equiv \{q_i; i = 1, \dots, p\}$ que serão chamados de acoplamentos, suponha um reescalamento isotrópico da rede com espaçamento a

$$a'^d = b^d a^d. \quad (2.2.19)$$

Próximo ao ponto crítico/fixo, pela hipótese de Kadanoff, as funções de partição antes e depois do reescalamento são relacionadas pela eq. (2.2.4).

Definição: Os q 's transformados, após o reescalamento, são funções analíticas dos q 's originais, *i.e.*

$$q'_i \equiv R_i(q_i, b) \quad (q_i = R(q_i, 1)), \quad (2.2.20)$$

t.q. os pontos críticos da teoria, $q_i'^* \equiv R_i(q_i^*, b) = q_i^* \equiv R(q_i^*, 1)$ são pontos fixos de (2.2.20)^{||}. Pela condição de analiticidade dos q 's, nas proximidades da criticalidade, a eq. (2.2.20) pode ser expandida em uma série de Taylor

$$q'_i \approx \underbrace{R_i(q_i^*, b)}_{=q_i^*} + \left. \frac{dR_i}{dq_j} \right|_{q_j=q_j^*} (q_j - q_j^*), \text{ ou,}$$

$$q'_i - q_i^* \approx T_{ij}(q_i - q_j^*), \quad T_{ij} \equiv \left. \frac{dR_i}{dq_j} \right|_{q_j=q_j^*} \quad (2.2.21)$$

é assumido que a matriz T , cujos elementos são dados por T_{ij} , é não singular, *i.e.* $\det T \neq 0$. Dito isso, a eq. de auto-valores** pela esquerda de T é:

$$\sum_{i=1}^p e_i^m T_{ij} = b^{s_m} e_j^m, \quad m = 1, \dots, p, \quad (2.2.22)$$

o fator s_m é chamado de auto-valor do grupo de renormalização.

^{||}O contrário não é necessariamente verdade, os pontos fixos irrelevantes não caracterizam uma transição de fase.

** p autovalores reais e positivos. Essa hipótese extra é necessária, porque $\det T \neq 0$ só garante auto-valores não nulos.

Definição: As variáveis de escala são:

$$u^m(q, b = 1) \equiv \sum_{i=1}^p e_i^m(q_i - q_i^*), \quad (2.2.23)$$

ao ser realizado uma transformação de escala:

$$\begin{aligned} u'^m(q', b) &= \sum_{i=1}^p e_i^m(q'_i - q_i) = \sum_{i,j=1}^p e_i^m T_{ij}(q_j - q_j^*) = b^{s_m} \sum_{j=1}^p e_j^m(q_j - q_j^*) \\ &= b^{s_m} u^m(q, 1), \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

logo múltiplos reescalamentos são equivalentes a um único reescalamto maior - como uma operação de um grupo abeliano (não depende da ordem), daí o nome de grupo de renormalização (GR), onde o elemento identidade é o não-reescalamto ($b = 1$), mas não existe inversa (o reescalamto só aumenta a escala da rede). O GR não forma um grupo de verdade, um termo melhor é *semi-grupo* (um “grupo” sem inversa), mas o nome histórico será mantido. Se $s_m > 0$ o ponto fixo é *relevante*, se $s_m < 0$ é *irrelevante* e se $s_m = 0$ é dito *marginal*.

2.2.3 Relação entre o grupo de renormalização e a teoria das escalas

Suponha um modelo com p parâmetros extensivos. Sendo as variáveis de escala combinações lineares deles, pode-se reescrever a eq. (2.2.6) (apenas a parte singular) em termos dos u 's

$$f_{sing}(u^1, \dots, u^p) = b^{-d} f_{sing}(b^{s_1} u^1, \dots, b^{s_p} u^p), \quad (2.2.25)$$

realizando n vezes a mesma operação os termos irrelevantes desaparecem^{††} $b^{ns_i} u^i \ll 1$ ($s_i < 0$) e só ficam os relevantes ($s_i > 0$). Suponha dois relevantes: $u^1 = t = \frac{T-T_c}{T_c}$ e $u^2 = h = \frac{B-B_c}{B_c}$

$$f_{sing}(t, h) = b^{-nd} f_s(b^{ns_t} t, b^{ns_h} h), \quad (2.2.26)$$

escolhendo n t.q. $b^{-ns_t} = t$,

$$f_{sing}(t, h) = t^{d/s_t} f_{sing} \left(1, \frac{h}{t^{s_h/s_t}} \right) \equiv t^{d/s_t} F \left(\frac{h}{t^{s_h/s_t}} \right), \quad (2.2.27)$$

a parte singular da energia livre é uma função homogênea generalizada, a chamada hipótese de escala. O fato é suficiente para criar relações entre os índices críticos e os auto valores do

^{††}aqui está a origem da universalidade. Todos os modelos que só diferem por variáveis de escala irrelevantes pertencem a mesma classe de universalidade.

grupo de renormalização. Por exemplo, a magnetização a campo magnético nulo é:

$$m(h = 0, t) \sim -\left. \frac{\partial f_{sing}}{\partial h} \right|_{h=0} = -|t|^{\frac{d}{s_t} - \frac{s_h}{s_t}} F'(0) \sim |t|^\beta, \quad (2.2.28)$$

ver tabela 2.1, ou seja:

$$\beta = \frac{d - s_h}{s_t}. \quad (2.2.29)$$

De forma análoga, é possível determinar as outras relações:

$$\alpha = 2 - \frac{d}{s_t}, \quad \gamma = \frac{2s_h - d}{s_t}, \quad \delta = \frac{s_h}{d - s_h}. \quad (2.2.30)$$

Ao conhecermos como as variáveis de escala mudam após um reescalamto da rede (os s 's) os expoentes críticos são determinados. Devido a relação com os expoentes críticos, a partir deste ponto os auto valores s 's serão chamados de *índices críticos*. Ao eliminar s_t e s_h nas eqs. algumas das relações (2.1.5)-(2.1.6) são recuperadas, portanto o Grupo de Renormalização fornece uma demonstração teórica da teoria de escala que por sua vez deriva as relações entre os expoentes críticos. A relação entre os outros dois expoentes críticos (η e δ) e os índices críticos (s_t e s_h) é explorada na seção 2.3.4.

2.3 Relação entre sistemas na rede e teorias de campos

2.3.1 Limite termodinâmico - do discreto para o contínuo

Considere uma rede unidimensional de $2N + 1$ osciladores harmônicos acoplados, todos com a mesma massa m e ligados por molas com constante elástica k . O espaçamento natural (sem interação) entre as massas é a . Se a interação só ocorre entre vizinhos, a Lagrangiana do modelo é:

$$L = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{m}{2} \dot{\phi}_n^2 - \frac{k}{2} (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 \right), \quad (2.3.1)$$

$$= \sum_{n=-N}^N a \left(\frac{\mu}{2} \dot{\phi}_n^2 - \frac{\rho}{2} \left(\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{a} \right)^2 \right), \quad \frac{m}{a} = \mu, \quad ka = \rho, \quad (2.3.2)$$

caso a escala natural a da rede seja muito pequena em relação a escala em que observamos o sistema e o número de osciladores seja muito grande, $N \gg 1$, o chamado *limite contínuo* pode ser tomado: $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, com o produto Na fixo. A densidade de massa μ e “escala de força” ρ entre os osciladores também permanecem fixas, $\sum_{-N}^N a \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx$ e

$\frac{\phi_{n+1}-\phi_n}{a} \rightarrow \partial_x \phi(x)$. No *limite contínuo* a Lagrangiana torna-se

$$\frac{L}{\rho} \rightarrow L \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} t, \quad (2.3.3)$$

e o funcional ação é dado por:

$$S = \int dx_0 dx \mathcal{L} = \int d^2 x \mathcal{L}, \quad (2.3.4)$$

uma teoria de campo legítima. O exemplo acima serve para ilustrar que em certas condições é possível descrever sistemas discretos - com um número finito de graus de liberdade - através de sistemas contínuos - infinitos graus de liberdade. Exatamente isso ocorre nos sistemas estatísticos na rede quando passamos para o *limite termodinâmico*.

2.3.2 Teoria de campo do modelo de Ising e generalidades

É possível mostrar (29) que no limite termodinâmico o modelo de Ising, a campo magnético nulo, pode ser descrito pela seguinte teoria de campo:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int D\phi e^{-S}, \quad S = \beta \mathcal{H} \quad (2.3.5)$$

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + g_2 \phi^2 + g_4 \phi^4 + \mathcal{O}(\phi^5) \right), \quad (2.3.6)$$

onde S é a ação euclidiana do modelo. Termos de ordem superior, $\mathcal{O}(\phi^5)$, não são importantes nas vizinhanças do ponto crítico - nosso interesse. O termo g_4 é sempre positivo, portanto o potencial de auto interação do campo ϕ pode ter duas formas distintas, uma com um único mínimo - $g_2 > 0$ - outra com dois mínimos - $g_2 < 0$ (ver figura 2.3.2). A mudança na forma da interação caracteriza a transição de fase de segunda ordem - ordenada para a desordenada - e g_2 deve ser proporcional à temperatura adimensional $t = \frac{T-T_c}{T_c}$. Sem o campo magnético o potencial é par, é mantida a simetria \mathcal{Z}_2 , por outro lado as soluções de vácuo no caso $g_2 < 0$ (são dois vácuos degenerados) não são invariantes sob essa simetria. Um caso típico de *quebra espontânea de simetria*.

Para outras teorias na rede, o limite termodinâmico deve levar a uma teoria de campo com a ação:

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\vec{\nabla} \phi, \phi; g_i) = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \sum_{i \geq 2} g_i (\phi)^i \right), \quad (2.3.7)$$

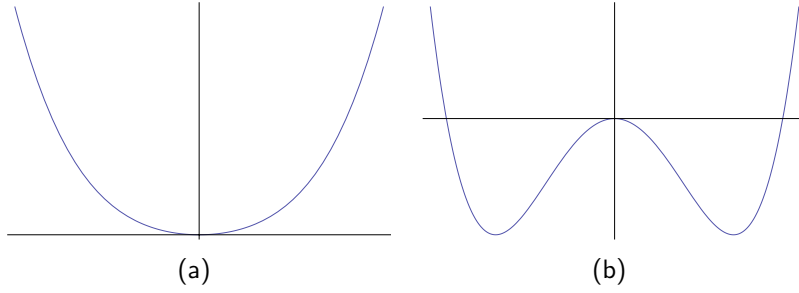


Figura 2.7—Forma do potencial da ação (2.3.6), $g_4 > 0$. (a) $g_2 > 0$, (b) $g_2 < 0$.

o termo g_1 sempre pode ser tomado a zero subtraindo uma constante em \mathcal{L} junto de uma pequena redefinição no campo e nos acoplamentos. Como a rede é hipercúbica, no limite termodinâmico a teoria de campo é invariante sob rotações e translações - grupo $SO(d) \times T_d$, caso o sistema estatístico tenha outras simetrias elas também são refletidas na teoria de campo. Por exemplo, como já foi mencionado anteriormente, no Ising a campo nulo existe uma simetria discreta de reflexão dos “spins”, tal simetria é refletida na teoria de campo que só depende de ϕ^2 , logo possui uma simetria \mathcal{Z}_2 : $\phi \rightarrow -\phi$.

Já que a ação S é adimensional ($\hbar = 1$), é possível determinar a dimensão do campo ϕ e de cada acoplamento g_i . Analisando o termo cinético, a dimensão do campo escalar é $[\phi] = a^{1-d/2}$, que uma vez conhecida fixa a dimensão de qualquer acoplamento g_i , $i = 1, 2, \dots$, como $[g_i] = a^{\delta_i}$, $\delta_i = \frac{d(i-2)}{2} - i$. O único acoplamento cuja dimensão independe de d é g_2 (o termo “massivo”), $[g_2] = a^{-2}$. Também é interessante notar que, para $i > 2$, sempre existe uma dimensão d aonde um dos acoplamentos q_i é adimensional ($\delta_i = 0$), por exemplo para $d = 4$, q_4 é adimensional.

O acoplamento g_i da teoria de campo é claramente proporcional ao parâmetro adimensional q_i da teoria na rede. Para o Ising $g_2 \propto \frac{t}{a^2}$, onde $t = \frac{T-T_c}{T_c}$. Em geral

$$g_i \propto a^{\delta_i} q_i. \quad (2.3.8)$$

Nas proximidades do ponto crítico, a escala da rede a é muito menor que o comprimento de correlação ξ , logo somos naturalmente levados a descrever a transição de fase em termos de quantidades contínuas, *i.e.* como uma teoria de campo. Outro fator importante nas proximidades do ponto crítico é invocar a hipótese de Kadanoff para impor uma invariância de reescalamentos sobre a eq. (2.3.7). Ao analisar o termo cinético após a transformação $a \rightarrow a' = ba$, ou melhor $x \rightarrow x' = bx$, tem-se

$$\phi \rightarrow \phi'(x) = b^{-\frac{(d-2)}{2}} \phi(x'), \quad (2.3.9)$$

o mesmo raciocínio deve ser estendido aos termos de interação. Devido ao fato de $q_i \rightarrow q'_i = b^{s_i} q_i$, a invariância da eq. (2.3.8), nas proximidades da criticalidade, implica em $-\delta_i = s_i$ (índice crítico). A teoria de campo associada ao modelo na rede fornece os índices críticos da teoria. De acordo com a denominação definida no fim da seção 2.2.2, para $\delta_i < 0$ ($s_i > 0$) o acoplamento é relevante e para $\delta_i > 0$ ($s_i < 0$) ele é irrelevante. Já foi mostrado que na teoria definida na rede os acoplamentos irrelevantes são descartados pois desaparecem após um número grande de reescalamentos. Na teoria de campo o mesmo ocorre, ao aproximar a rede por um *continuum*, é assumido que sua separação a é muito pequena em relação as escalas observadas ($\xi \gg a$), logo pela eq. (2.3.8) todo g_i , para $\delta_i > 0$, é desprezível e apenas os acoplamentos relevantes são importantes. Novamente a conclusão é de que modelos que diferem por acoplamentos irrelevantes pertencem a mesma classe de *universalidade*.

Voltando ao exemplo do modelo de Ising, fica-se com $s_t = 2$, $s_h = \frac{d+2}{2}$ e $s_{g_4} = 4 - d$. No caso de $d = 4$: $s_t = 2$, $s_h = 3$ e $s_{g_4} = 0$; os expoentes críticos são exatamente os mesmos da teoria de campo médio (ver eqs. (2.2.29)-(2.2.30)). O resultado é geral, num modelo cujo o acoplamento de maior índice é q_m , se $d = d_{crit} = \frac{2m}{m-2}$ os índices críticos são os mesmos da teoria de campo médio^{††}. Já se $d < d_{crit}$ existem termos relevantes e fortes flutuações ocorrem, o campo médio não fornece mais bons resultados.

No caso de $d > d_{crit}$, os expoentes críticos previstos fornecem quantidades menos singulares do que a aproximação de campo médio, e eles podem ser interpretados como correções *subleading* da teoria de campo médio predominante.

2.3.3 Função beta

Nas proximidades do ponto fixo a teoria na rede pode ser considerada continua, assim como seus reescalamentos, *i.e.* $b = e^l$, $l > 0$ e ao fazer $l \rightarrow \delta l$, transformação infinitesimal, somos levados à $b \approx 1 + \delta l$. É possível aplicar essa abordagem à teoria geral do grupo de renormalização

$$q'_i = \underbrace{R_i(\{q\}, b)}_{=q_i} \approx R_i(\{q\}, b=1) + \delta l \frac{dR_i}{dl}, \quad (2.3.10)$$

onde

$$\frac{dR_i}{dl} = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{R_i(\{q\}, 1 + \delta l) - R_i(\{q\}, 1)}{\delta l} \equiv -\beta_i(\{q\}) \quad (2.3.11)$$

^{††}no caso do Ising, $m = 4$ e $d_{crit} = 4$.

que é a função beta relacionada a esse parâmetro. A principal característica da função beta é que seus zeros caracterizam um ponto fixo ($q'_i = q_i$).

A relação entre a função beta (uma propriedade fora do ponto crítico) com quantidades definidas no ponto crítico é dada ao lembrarmos da matriz T , cujos autovalores definem os s 's e seus elementos são $T_{ij} = \left. \frac{dR_i}{dq_i} \right|_{q=q^*}$, portanto

$$T_{ij} = \left. \frac{dR_i}{dq_i} \right|_{q=q^*} = \frac{d}{dq_i} \left(\underbrace{R_j(\{q\}, 1)}_{=q_j} + \delta l \beta_j(\{q\}) \right) = \delta_{ij} + \delta l \left. \frac{d\beta_i}{dq_j} \right|_{q=q^*}, \quad (2.3.12)$$

agora defina

$$\gamma_{ij} \equiv - \left. \frac{d\beta_i}{dq_j} \right|_{q=q^*}, \quad (2.3.13)$$

e multiplique a eq. (2.3.12), pela esquerda, por e_i^m (com soma no i). Usando as eqs. (2.2.22) e (2.3.12)

$$\begin{aligned} e_i^m T_{ij} &= b^{s_m} e_j^m = e_j^m + \delta l s_m e_j^m = e_j^m + \delta l e_i^m \gamma_{ij} \\ \Rightarrow e_i^m \gamma_{ij} &= s_m e_j^m, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

então os s 's são autovalores da matriz γ . Invertendo a lógica, em primeira aproximação, a função beta nas proximidades de um ponto fixo é

$$\beta_i \approx -\gamma_{ij}(q_i - q_j^*) + \dots, \quad (2.3.15)$$

em termo das variáveis de escala (os u 's), a matriz γ é diagonal e fica-se com

$$\beta_i \approx -s_i u_i + \dots \quad (2.3.16)$$

Essa primeira aproximação ($s_i \neq 0$) só indica se o ponto fixo é relevante ou irrelevante. O estudo da teoria do campo associada ao ponto crítico (como ϕ^4 é ligado ao Ising) é essencial para um refinamento maior, mas ainda perturbativo, da função *beta*.

2.3.4 Transformações de escala para a função de correlação e a equações de Callan-Symanzik

A função de correlação numa teoria onde uma fonte externa $g_1 = h$ se acopla linearmente ao campo ϕ , pode ser escrita como

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\partial^2}{\partial h(1) \partial h(2)} \ln \mathcal{Z} \Big|_{h=0}, \quad (2.3.17)$$

ao ser feito um reescalamto próximo ao ponto crítico e usando o fato da função de partição ser invariante, fica-se com

$$\frac{\partial^2}{\partial h'(1)\partial h'(2)} \ln \mathcal{Z}' = \frac{\partial^2}{\partial h(1)\partial h(2)} \ln \mathcal{Z}, \quad (2.3.18)$$

o lado esquerdo é simplesmente $G(\frac{r_{ij}}{b}; b^{st}t)$, mas o lado direito não é trivial porque ao mudar o campo externo muda-se a forma como ele interage com os spins. Uma análise ingênua baseada em análise dimensional leva ao resultado

$$G\left(\frac{r_{ij}}{b}; b^{st}t\right) = b^{2d}G(r_{ij}; t), \quad (2.3.19)$$

não verificado nos exemplos. A relação correta é:

$$G\left(\frac{r_{ij}}{b}; b^{st}t\right) = b^{2(d-s_h)}G(r_{ij}; t), \quad (2.3.20)$$

i.e. existe uma “correção”, ou anomalia, na dimensão do espaço.

Para justificar essa expressão começemos com uma hipótese de escala do tipo:

$$G(r; g) = \mathcal{F}(e^l a; g_0)^{-1} G(r_0; g_0), \quad (2.3.21)$$

$$\mathcal{F}(a; g_0) = 1 \quad (2.3.22)$$

onde pequenas mudanças de notação foram feitas para tornar o resultado mais geral: $b = e^l$, $r_{ij} = a|i - j| \rightarrow r_0$, $r = e^{-l}r_0$, $t \rightarrow g$ – agora g representa um conjunto de acoplamentos reescalados e g_0 são os originais. Passando o fator \mathcal{F} para o lado esquerdo da eq. e derivando-o com relação à l :

$$\frac{d}{dl}G(r; g) + 2Y(l)G(r; g) = 0, \quad (2.3.23)$$

$$Y(l) \equiv \frac{d}{dl} \ln \mathcal{F}, \quad (2.3.24)$$

integrando

$$G(r; g) = e^{-2\Gamma(l)}G(r_0; g_0), \quad (2.3.25)$$

$$\int dl' Y(l') \equiv \Gamma(l), \quad (2.3.26)$$

o resultado final é:

$$G(r_0; g_0) = e^{-2\Gamma(l)}G(r; g), \quad b = e^l, \quad (2.3.27)$$

assumindo continuidade na função \mathcal{F} e como, por definição, $\mathcal{F}(e^l a; g_0)|_{l=0} = 1$, para uma transformação infinitesimal $\Gamma(l) \approx \text{const.} \cdot l$. Ao comparar com (2.3.20), $\text{const.} = d - s_h$.

Ao abrir a derivada na eq. (2.3.23) com $\frac{d}{dl} = -r\frac{\partial}{\partial r} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}$ e fazer $Y \approx d - s_h \approx d + \partial_g\beta(g)$, tem-se

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + 2(\partial_g\beta(g) + d) \right) G(r; g) = 0, \quad (2.3.28)$$

a famosa eq. de Callan-Symanzik (CS), (69) para a função de correlação. Escolhendo $b = t^{-\frac{1}{s_t}}$ em (2.3.20)

$$G(r_{ij}, t) = t^{2\frac{(d-s_h)}{s_t}} \Psi(r_{ij}t^{1/s_t}), \quad (2.3.29)$$

para $r \gg a$ é esperado um decaimento exponencial, $G(r_{ij}, t) \sim e^{-r_{ij}/\xi}$ e como $\xi \sim t^\nu$ perto do ponto crítico, descobrimos a relação

$$\nu = \frac{1}{s_t}. \quad (2.3.30)$$

Escolhendo $b = r_{ij}$ em (2.3.20),

$$G(r_{ij}, t) = r_{ij}^{2(s_h-d)} \Phi(t.r_{ij}^{s_t}), \quad (2.3.31)$$

no ponto crítico $t = 0$ e a forma da função de correlação é: $G(r_{ij}) \sim r^{-(d-2+\eta)}$, portanto

$$\eta = d + 2 - 2s_h. \quad (2.3.32)$$

As eqs. (2.3.32) e (2.3.30) em conjunto com (2.2.30), (2.2.29), (2.2.30), (2.2.30) demonstram que todos os expoentes críticos são determinados por s_t e s_h . Também repare que na aproximação do campo médio $s_t = 2$, logo $\eta = 0$ se $d = 4$.

Uma forma alternativa de derivar a eq. (2.3.30) é começar da transformação do comprimento de correlação

$$\xi(g) = b\xi(g'), \quad (2.3.33)$$

tomando $b \approx 1 + \delta l$,

$$\xi \approx (1 + \delta l) \left(\xi - \delta l \beta \frac{\partial}{\partial g} \xi \right), \text{ ou} \quad (2.3.34)$$

$$\left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial g} \right) \xi(g) = 0, \quad (2.3.35)$$

a eq. de CS para o comprimento de correlação. Bem próximo ao ponto crítico $\beta \approx -s_t g$,

$$\left(1 + s_t g \frac{\partial}{\partial g} \right) \xi = 0 \Rightarrow \xi \sim t^{-\frac{1}{s_t}} \sim t^{-\nu}. \quad (2.3.36)$$

A parte singular da energia livre também obedece a uma lei de escala, a eq. (2.2.6),

$$f_{sing}(g) = b^{-d} f_{sing}(g'), \quad (2.3.37)$$

logo existe uma eq. de CS para ela, dada por:

$$\left(d + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) f_{sing}(g) = 0, \quad (2.3.38)$$

nas proximidades do ponto crítico fornece $f_s \sim t^{\frac{d}{st}}$, resultado já conhecido.

As eqs. de CS (2.3.28), (2.3.35) e (2.3.38) são de extrema importância, uma vez que em geral o caminho inverso é tomado. Não conhecemos as leis de escala, porém há métodos, perturbativos ou não, para determinar a função $\beta(g)$ e através das eqs. de CS a função de correlação, o comprimento de correlação e a parte singular da energia livre são determinados.

2.3.5 Função de correlação: massa do campo e o comprimento de correlação

Um modelo estatístico nas proximidades do ponto crítico é descrito por uma teoria de campo. Vamos verificar que a aproximação “quadrática”, *i.e.*

$$S = \int d^d r \left((\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \quad (2.3.39)$$

é suficiente para determinar relação entre o termo “massivo” do campo e o comprimento de correlação. É bem sabido (31) que a função de dois pontos (ou de correlação)

$$G^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{Z} \int D\phi \phi(\vec{x}_1) \phi(\vec{x}_2) e^{-S}, \quad (2.3.40)$$

é igual ao propagador (de Feynmann euclidiano)

$$G^{(2)}(r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = \Delta(r); \quad (-\partial^2 + m^2)\Delta(r) = \delta^d(r), \quad (2.3.41)$$

cujo resultado é^{§§}

$$\Delta(r) \propto \frac{1}{r^{d-2}} K_{\frac{d-2}{2}}(mr), \quad (2.3.42)$$

no limite $mr \gg 1$, o propagador vai à zero devido a forma assintótica

$$\Delta(r) \sim e^{-mr}, \quad (2.3.43)$$

^{§§} $K_\nu(x)$ é a função de Bessel modificada de segundo tipo. Sua definição e algumas propriedades estão listadas no apêndice A.

isso implica na relação $\xi = \frac{1}{m}$. No ponto crítico, $\xi \rightarrow \infty \leftrightarrow m^2 = 0$, *i.e.*, uma transição de fase de segunda ordem só pode ocorrer no limite de massa nula (ξ diverge). No limite em questão forma de $\Delta(r)$ torna-se mais simples

$$\Delta(r) \propto \frac{1}{r^{d-2}}, \quad (2.3.44)$$

i.e. $\eta = 0$, um resultado decepcionante. Muitos sistemas físicos possuem $\eta \neq 0$, logo existe uma falha na descrição de um sistema estatístico como uma teoria de campo. O problema está no fato de usarmos uma teoria de campo *clássica* quando a descrição certa deve ser quântica. Por que quântica?

2.3.6 Mecânica estatística e teoria de campo quântica euclidiana

Na seção anterior foi visto que a teoria de campo associada a um modelo estatístico fornece $\eta = 0$ (chamamos de resultado clássico), mas não é isso que ocorre experimentalmente. Qual origem do erro? O problema está no *clássico*, mesmo o modelo na rede não sendo quântica, para a teoria de campo dela fornecer os expoentes críticos corretos ela deve ser quantizada, ou seja, existe uma relação estreita entre mecânica estatística e teorias quânticas. As integrais de caminho de Feynman (68) elucidam o fato. Por questões didáticas nossa análise será restrita ao âmbito da mecânica quântica unidimensional - o resultado final é facilmente estendido para as teorias de campos quânticos.

A probabilidade de uma partícula quântica ser encontrada no tempo $t = \Delta t$ na posição $x = x_f$, sendo que no instante $t = 0$ ela estava na posição $x = x_i$, é dada pela norma quadrática da quantidade abaixo, chamada de *núcleo*^{¶¶},

$$K(x_f, \Delta t; x_i, 0) = \langle x_f, t | x_i \rangle = \langle x_f | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} | x_i \rangle, \quad (2.3.45)$$

ao fazer um rotação de Wick no tempo $\frac{t}{\hbar} \rightarrow -i\frac{tE}{\hbar} \equiv -i\beta$,

$$K(x_f, -i\beta\hbar; x_i, 0) = \langle x_f | e^{-\beta\hat{H}} | x_i \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | x_i \rangle \langle x_f | n \rangle, \quad (2.3.46)$$

onde foi assumido um espectro discreto para o Hamiltoniano e a relação de completude $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1 \rightarrow \langle n | n \rangle = 1$ foi usada. O último passo é tomar $x_i = x_f \equiv x$ (probabilidade de voltar para o mesmo lugar) e integrar em x :

$$\int dx K(x, -i\beta\hbar; x, 0) = \sum_n e^{-\beta E_n} = \mathcal{Z}, \quad (2.3.47)$$

^{¶¶}do inglês *kernel*.

a função de partição se $\beta = \frac{1}{kT}$, ou seja, $kT = \frac{\hbar}{\Delta t_E}$, com Δt_E sendo o período euclidiano do sistema.

No caso de $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, o formalismo de Feynmann para as integrais de caminho diz que o *núcleo* pode ser escrito da seguinte forma (68)

$$K(x', \Delta t, x, 0) = \mathcal{N} \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} S}, S = \int_0^{\Delta t} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right), \quad (2.3.48)$$

$$Dx = \prod_{i=1}^{N-1} dx_i, \quad x_1 = x_i \text{ e } x_N = x_f., \quad N \rightarrow \infty.$$

perceba que $x_N = x_f$ não é integrado. Substituindo essa eq. em (2.3.47)

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \oint Dx e^{-\beta S_E}, \quad \oint Dx = \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_i, \quad x_1 = x_N, \quad (2.3.49)$$

$$S_E = \int_0^{\hbar\beta} dt_E \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt_E} \right)^2 + V(x(t_E)) \right), \quad (2.3.50)$$

conclui-se que uma teoria quântica com tempo euclidiano e condições de contorno periódicas (período $\Delta t_E = \frac{\hbar}{kT}$) descreve uma teoria estatística. O mesmo procedimento pode ser feito no caso de uma teoria de campo relativística quântica em $d-1$ dimensões espaciais e concluir-se-a que ela descreve (após uma rotação de Wick) um modelo estatístico (clássico) em d dimensões espaciais.

Teorias conformes

No capítulo anterior foi visto que próximo a um ponto crítico o comprimento de correlação de um sistema estatístico fica muito maior do que o parâmetro da rede. Em tal regime o sistema pode ser bem descrito por uma teoria de campos. Quando a rede, assumida hipercúbica, torna-se um *continuum* a teoria de campos resultante é invariante sob translações e rotações. Exatamente no ponto crítico, onde o comprimento de correlação diverge, o sistema ganha uma simetria adicional, a invariância sob reescalamentos (dilatações)

$$x' \rightarrow \rho x, \rho > 0, \quad (3.0.1)$$

e, conseqüentemente, a teoria de campos correspondente também terá essa simetria devido ao fato do termo “massivo” (inverso do comprimento de correlação) desaparecer. Para a afirmação ser verdadeira, de acordo com nossos estudos prévios*, o campo deve sofrer uma transformação de reescalamto:

$$\phi \rightarrow \rho^{-\Delta} \phi, \quad \Delta = \frac{(d-2)}{2}. \quad (3.0.2)$$

O objetivo deste capítulo é estudar as teorias de campos com simetrias de rotações, translações e dilatações - as famosas *teorias de campos conformes* (27–29, 31, 35) - e mostrar que além de descrever o ponto crítico é possível formular uma teoria de perturbações ao redor da teoria conforme para obter informações fora da criticalidade.

3.1 Simetrias conformes em d dimensões ($d > 2$)

As rotações e translações

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (3.1.1)$$

*na seção 3.1.5 o assunto será revisitado.

onde $\Lambda \in SO(d-1, 1)$ (para a assinatura lorentziana) ou $SO(d)$ (para a assinatura euclidiana), são as transformações mais gerais que deixam o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \text{ ou } g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad (3.1.2)$$

invariante. Ao ser acrescentado a simetria de dilatação, é claro que a quantidade acima irá se reescalar, *i.e.* numa transformação conforme o elemento de linha não é invariante, porém sua transformação não é arbitrária e pode ser formulada de forma precisa.

Por definição, uma transformação de coordenadas *conforme* $x \rightarrow x'$ é um mapeamento contínuo e invertível que deixa a métrica invariante a menos de uma função multiplicativa - chamada fator de Weyl, *i.e.*

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}. \quad (3.1.3)$$

A principal propriedade desta transformação é preservar o ângulo entre dois vetores

$$\cos \xi(u, v) \equiv \frac{g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu}{\sqrt{u^2 v^2}} = \frac{g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu}{\sqrt{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta g_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma}}. \quad (3.1.4)$$

Uma transformação infinitesimal (arbitrária) de coordenadas $x \rightarrow x' = x + \epsilon$ cria a seguinte variação na métrica:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \\ \delta g_{\mu\nu} &= -D_\mu \epsilon_\nu - D_\nu \epsilon_\mu = -\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu + 2\Gamma_{\mu\nu}^\rho \epsilon_\rho, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho$ é a derivada covariante usual e $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ é o símbolo de Christoffel. Nos restringindo aos espaços planos com assinatura euclidiana ou lorentziana[†], *i.e.* $g_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}$ ou $\eta_{\mu\nu}$, fica-se com:

$$\delta g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu. \quad (3.1.6)$$

Ao realizar a transformação infinitesimal em (3.1.3) e comparando com a equação acima:

$$\delta g_{\mu\nu} = (\Omega - 1) g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu, \quad (3.1.7)$$

tomando o traço

$$\Omega(x) = 1 - \frac{2}{d} \partial \cdot \epsilon, \quad (3.1.8)$$

[†] não será feita distinção entre os dois casos durante os cálculos. A assinatura para o espaço de Minkowski adotada é: $(-, +, \dots, +)$.

que é a forma infinitesimal de Ω . Substituindo a eq. (3.1.8) em (3.1.7):

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) g_{\mu\nu}, \quad (3.1.9)$$

cujas soluções (31), dadas por

$$\epsilon_\mu = a_\mu + \lambda x_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu + b_\mu x^2 - 2(b \cdot x) x_\mu; \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad (3.1.10)$$

válidas para $d > 2$,[‡]. Elas fornecem todas as possíveis transformações infinitesimais de coordenadas conformes.

Interpretação dos parâmetros:

O número de parâmetros independentes é: $d + 1 + \frac{d(d-1)}{2} + d = \frac{1}{2}(d+2)(d+1)$. Exemplo: se $d = 4$, temos 15 parâmetros arbitrários.

As transformações infinitesimais são interpretadas como: a_μ é uma translação, λx_μ é uma dilatação (reescalamento) e $\omega_{\mu\nu} x^\nu$ uma rotação. Suas versões globais são:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (3.1.11)$$

$$x'^\mu = e^\lambda x^\mu \quad (3.1.12)$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu; \quad \Lambda_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2), \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (3.1.13)$$

A transformação relacionada ao parâmetro b_μ (termos de $\mathcal{O}(x^2)$) merece uma atenção *especial*. Sua versão global é a famosa transformação *conforme especial*, definida como:

$$x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2}. \quad (3.1.14)$$

Tomando b^μ infinitesimal:

$$x'^\mu - x^\mu = \epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2(b \cdot x) x^\mu + \mathcal{O}(b^2),$$

o resultado desejado. A transformação conforme especial é uma composição de três transformações: uma inversão, uma translação e outra inversão, onde a transformação de inversão é definida como $x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}$:

$$\begin{aligned} x^{(1)\mu} &= \frac{x^\mu}{x^2}, \quad x^{(2)\mu} = x^{(1)\mu} + b^\mu, \quad x^{(3)\mu} \equiv x'^\mu = \frac{x^{(2)\mu}}{(x^{(2)})^2} \\ \Rightarrow x'^\mu &= \frac{x^{(1)\mu} + b^\mu}{(x^{(1)\nu} + b^\nu)(x^{(1)}_\nu + b_\nu)} = \frac{\frac{x^\mu}{x^2} + b^\mu}{\left(\frac{x^\nu}{x^2} + b^\nu\right)\left(\frac{x_\nu}{x^2} + b_\nu\right)} \\ &= \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2}. \end{aligned}$$

[‡]o caso $d = 2$ é muito particular e interessante, mas não é assunto desta tese.

A transformação conforme especial deixa o ângulo entre dois vetores invariante. Para verificar a afirmação basta mostrar que a inversão possui tal propriedade (é evidente que uma translação global não altera ângulos):

$$\cos \xi \left(\tilde{u}^\mu = \frac{u^\mu}{u^2}; \tilde{v}^\mu = \frac{v^\mu}{v^2} \right) = \frac{\tilde{u}^\mu \tilde{v}_\mu}{\sqrt{\tilde{u}^2 \tilde{v}^2}} = \frac{u^\mu v_\mu}{u^2 v^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2 v^2}}} = \frac{u^\mu v_\mu}{\sqrt{u^2 v^2}} = \cos \xi(u^\mu; v^\mu).$$

Por fim, é possível mostrar, via cálculo explícito, que sucessivas transformações com a eq. (3.1.14) formam um *grupo*.

No início do capítulo foi dito que uma transformação de coordenadas deveria ser continua e com inversa (única), mas, dependendo de b_μ , é possível que o denominador da eq. (3.1.14) seja nulo num certo ponto $x^\mu = \bar{x}^\mu$. Logo, a imagem do ponto \bar{x}^μ é o infinito, que não pertence ao espaço (seja ele E^d ou M_d). A solução é “adicionar” a borda (o infinito) ao espaço. O procedimento é feito via a famosa compactificação conforme e possui uma relação íntima com o princípio holográfico.

3.1.1 Funções invariantes às transformações conformes

Aqui teremos uma idéia de como as simetrias conformes restringem as possíveis funções que aparecem na teoria. Uma função invariante às translações e rotações só pode depender da distância entre um par de pontos: $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$. Para também ser invariante a uma dilatação tem que depender de razões entre distâncias, *i.e.*: $\frac{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}{|\vec{x}_k - \vec{x}_l|}$.

A transformação especial conforme (3.1.14) leva a:

$$x'^2 = \frac{x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2},$$

com isso

$$|\vec{x}' - \vec{y}'| = \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{\sqrt{\gamma_x \gamma_y}}, \quad \gamma_x = 1 + 2b \cdot x + b^2 x^2. \quad (3.1.15)$$

Uma função invariante a todas essas quatro classes de transformações deve depender de quatro pontos da seguinte forma:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = F \left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{41}} \right), \quad x_{ij} = |x_i - x_j| \quad (3.1.16)$$

3.1.2 Grupo conforme

A forma mais simples de se determinar os geradores de uma álgebra de um grupo de simetrias é associá-los a operadores diferenciais que atuam nas transformações de coordenadas da seguinte forma:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta \hat{O} x^{\mu}, \quad (3.1.17)$$

t.q. δ seja o parâmetro infinitesimal da transformação e \hat{O} é um operador diferencial. Para as transformações de translações, rotações, dilatação e conformes espaciais temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta \hat{O}^{\text{tran}} x^{\mu} &= a^{\mu} \rightarrow \delta \hat{O}^{\text{tran}} = a^{\nu} \partial_{\nu}, \\ \delta \hat{O}^{\text{rot}} x^{\mu} &= w^{\mu\nu} x_{\nu} \rightarrow \delta \hat{O}^{\text{rot}} = \omega^{\rho\nu} x_{\nu} \partial_{\rho} = \frac{1}{2} \omega^{\rho\nu} (x_{\nu} \partial_{\rho} - x_{\rho} \partial_{\nu}), \\ \delta \hat{O}^{\text{dil}} x^{\mu} &= \lambda x^{\mu} \rightarrow \delta \hat{O}^{\text{dil}} = \lambda x^{\rho} \partial_{\rho}, \\ \delta \hat{O}^{\text{esp}} x^{\mu} &= b^{\mu} x^2 - 2b^{\rho} x_{\rho} x^{\mu} \rightarrow \delta \hat{O}^{\text{esp}} = b^{\rho} (x^2 \partial_{\rho} - 2x_{\rho} x^{\nu} \partial_{\nu}). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Os geradores da álgebra conforme (na representação de operadores diferenciais) são definidos como:

$$P_{\mu} = -i \partial_{\mu}, \quad L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu} = -i (x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}), \quad D = -i x^{\mu} \partial_{\mu}, \quad K_{\mu} = -i (x^2 \partial_{\mu} - 2x_{\mu} x^{\nu} \partial_{\nu}),$$

onde P_{μ} gera as translações, $L_{\mu\nu}$ as rotações, D a dilatação e K_{μ} as conformes especiais. As relações de comutação entre os geradores fecham a seguinte álgebra:

$$\begin{aligned} [P_{\mu}, P_{\nu}] &= [L_{\mu\nu}, D] = [K_{\mu}, K_{\nu}] = 0, \\ [P_{\mu}, D] &= P_{\mu}, \\ [P_{\rho}, L_{\mu\nu}] &= -g_{\rho\nu} P_{\mu} + g_{\mu\rho} P_{\nu}, \\ [K_{\mu}, P_{\nu}] &= 2L_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} D, \\ [D, K_{\mu}] &= K_{\mu}, \\ [L_{\mu\nu}, K_{\rho}] &= g_{\rho\nu} K_{\mu} - g_{\rho\mu} K_{\nu}, \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= -g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} + g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma}, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

no caso euclidiano ($g_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}$) a álgebra é isomórfica à $so(d+1, 1)$, gerando o grupo $SO(d+1, 1)$, já para a assinatura lorentziana a álgebra é $so(d, 2)$ que leva ao grupo $SO(d, 2)$. Como foi visto, o número de transformações independentes é $\frac{1}{2}(d+2)(d+1)$ (mesmo número de geradores do grupo $SO(d+1, 1)$ e $SO(d, 2)$, dando uma ideia do isomorfismo).

3.1.3 Leis de conservação

Numa teoria de campos clássicos definida pelo funcional ação

$$S = \int d^d x \mathcal{L}, \quad (3.1.20)$$

o tensor energia-momento (em um espaço(-tempo) curvo arbitrário) pode ser definido como

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.1.21)$$

o sinal negativo na definição é apropriado para teorias com assinatura $(-, +, \dots, +)$. No caso euclidiano S é o Hamiltoniano e a interpretação não é a mesma. Sendo as translações e rotações simetrias da teoria, conseqüentemente

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (3.1.22)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \quad (3.1.23)$$

Porém uma teoria conforme estende o número de simetrias, ela deve ser invariante em relação às dilatações, então:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x T_{\mu\nu} \partial^\mu (\lambda x^\nu) = \lambda \int d^d x T_\mu^\mu = 0, \text{ ou seja,} \\ T_\mu^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Por último, temos as transformações conformes especiais:

$$\delta S = \int d^d x T_{\mu\nu} \partial^\mu (x^2 b^\nu - 2b \cdot x x^\nu) = 2 \int d^d x (T_{\mu\nu} (x^\mu b^\nu - x^\nu b^\mu) - b \cdot x T_\mu^\mu) = 0,$$

uma consequência direta do fato do sistema ser invariante às rotações e dilatações. Resumindo: uma teoria de campos com simetrias conformes em um espaço(-tempo) plano possui um tensor energia-momento que obedece a lei de conservação (3.1.22), é simétrico e tem traço nulo. Todas as correntes conservadas podem ser condensadas em:

$$j_\mu = T_{\mu\nu} \epsilon^\nu, \quad (3.1.25)$$

onde ϵ^μ é solução da eq. (3.1.9). É trivial mostrar a conservação de j_μ : $\partial^\mu j_\mu = (\partial^\mu T_{\mu\nu}) \epsilon^\nu + T_{\mu\nu} \partial^\mu \epsilon^\nu = 0 + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} (\partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu) = \frac{1}{d} (\partial \cdot \epsilon) T_\mu^\mu = 0$. É importante salientar que na derivação dessa lei de conservação utilizamos, além da eq. (3.1.9), as três condições sobre o tensor energia momento - dadas pelas eqs. (3.1.22), (3.1.23) e (3.1.24).

A eq. (3.1.25) pode ser reescrita explicitando cada transformação conforme separadamente:

$$\begin{aligned}
 j^\mu &= j_{(a)}^\mu + j_{(\omega)}^\mu + j_{(\lambda)}^\mu + j_{(b)}^\mu & (3.1.26) \\
 j_{(a)}^\mu &= a_\nu T^{\mu\nu}; \quad j_{(\omega)}^\mu = \frac{\omega_{\nu\rho}}{2} (x^\rho T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\rho}) \equiv \frac{\omega_{\nu\rho}}{2} M^{\mu\rho\nu} \\
 j_{(\lambda)}^\mu &= \lambda x_\nu T^{\mu\nu} \equiv \lambda D^\mu; \quad j_{(b)}^\mu = b_\rho (x^2 \delta_\nu^\rho - 2x^\rho x_\nu) T^{\mu\nu} \equiv b_\rho K^{\mu\rho}
 \end{aligned}$$

Quando a assinatura é lorentziana, pode-se integrar a eq. $\partial_\mu j^\mu = 0$ num volume espacial V (tempo fixo)

$$\int_V d^{d-1}x \partial_\mu j^\mu = \int_V d^{d-1}x \partial_0 j^0 + \oint_{\partial V} d^{d-2}x \hat{n}_i j^i = 0, \quad (3.1.27)$$

onde foi usado o teorema de Gauss e \hat{n}_i é o vetor unitário ortogonal a cada ponto da superfície ∂V . Quando $V \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ (todo o espaço) o termo de superfície se anula, levando a conservação da carga Q :

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{dx^0} &= 0, \\
 Q &\equiv \int d^{d-1}x j^0 = Q_a + Q_\omega + Q_\lambda + Q_b, & (3.1.28)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 Q_a &= a_\mu \int d^{d-1}x T^{0\mu} \equiv a_\mu P^\mu, \\
 Q_\omega &= \frac{\omega_{\nu\mu}}{2} \int d^{d-1}x M^{0\mu\nu} \equiv \frac{\omega_{\nu\mu}}{2} L^{\mu\nu} \\
 Q_\lambda &= \lambda \int d^{d-1}x D^0 \equiv \lambda D \\
 Q_b &= b_\mu \int d^{d-1}x K^{0\mu} \equiv b_\mu K^\mu. & (3.1.29)
 \end{aligned}$$

É possível mostrar que os colchetes de Poisson[§] de P^μ , $L^{\mu\nu}$, D e K^μ fecham a mesma álgebra dada pela eq. (3.1.19), *i.e.* eles formam uma outra representação da álgebra conforme.

[§]para calcular os colchetes de Poisson é necessário um exemplo explícito de uma teoria de campos clássicos com invariância conforme. Numa teoria com densidade lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x))$, os colchetes são determinados através da seguinte relação fundamental: $\{\phi(\vec{x}, x^0), \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi)}(\vec{y}, y^0)\}|_{x^0=y^0} = \delta^{d-1}(\vec{x} - \vec{y})$.

3.1.4 Campos quase-primários

Os campos quase-primários tensoriais, por definição, têm a propriedade de se transformarem sob um mapeamento conforme como:

$$\begin{aligned}\phi^{\rho\sigma\dots}(x) &= \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{\frac{\Delta}{d}} \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} \dots \right) \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}} \dots \right) \phi_{\gamma\delta\dots}(x'), \quad (3.1.30) \\ \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{\frac{\Delta}{d}} &\equiv \left(\det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \right)^{\frac{\Delta}{d}},\end{aligned}$$

onde Δ é a chamada dimensão de $\phi_{\mu\dots}$ e $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$ é o Jacobiano da transformação. Para translações e rotações nós temos

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = 1, \quad (3.1.31)$$

um tensor “usual” - covariante em relação as transformações de Poincaré. Para a dilatação e as conformes especiais têm-se, respectivamente

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \rho^d \quad (\rho = e^{\lambda}), \quad \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{(1 + 2b \cdot x + b^2 x^2)^d}. \quad (3.1.32)$$

A relação entre o Jacobiano e o fator de Weyl é

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \Omega^{-d/2}, \quad (3.1.33)$$

que pode ser facilmente verificada na forma infinitesimal: $x \rightarrow x' = x + \epsilon$, $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \approx 1 + \partial \cdot \epsilon$ e $\Omega \approx 1 - \frac{2}{d} \partial \cdot \epsilon$ (ver eq. (3.1.8)).

3.1.5 Teoria de campos com simetrias conformes

Tenha a seguinte ação para um campo quase-primário escalar:

$$\begin{aligned}S &= \int d^d x \left(-\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi) \right), \quad (3.1.34) \\ V &= \sum_n g_n \phi^n.\end{aligned}$$

Como o Jacobiano das translações e rotações é igual a unidade, a teoria escrita acima já é automaticamente invariante a essas transformações (é relativística). É necessário encontrar a condição para ela ser *invariante* à dilatação, um raciocínio análogo ao feito na seção 2.3.2, entretanto agora a teoria está no ponto crítico e não próxima a ele. A transformação $x \rightarrow$

$x' = \rho x$ ($|\frac{\partial x'}{\partial x}| = \rho^d$), $\phi \rightarrow \phi' = \rho^{-\Delta} \phi$ leva a:

$$S = - \int d^d x' \rho^{-d} \left(\frac{1}{2} \rho^{2\Delta+2} \partial_{\mu'} \phi' \partial^{\mu'} \phi' + \sum_n g_n \rho^{n\Delta} (\phi')^n \right) \stackrel{!}{=} S', \quad (3.1.35)$$

o primeiro termo determina a dimensão *clássica* do campo: $\Delta_{\text{cla}} = \frac{1}{2}(d-2)$. O único n possível é $n = \frac{2d}{d-2}$. Portanto

$$S = \int d^d x \left(-\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - g \phi^{2d/(d-2)} \right), \quad d \neq 2, \quad (3.1.36)$$

é uma teoria de campos conformes se ϕ se transforma de acordo com a eq. (3.1.30). O procedimento pode ser estendido para modelos com campos vetoriais e *spinoriais*. Um potencial quadrático (termo massivo) nunca é invariante à dilatações para qualquer dimensão, *i.e.* uma teoria conforme nunca é massiva. Foi usada a notação Δ_{cla} ao invés de Δ , pois $\Delta = \Delta_{\text{cla}} + \dots$, onde \dots é uma correção que só aparece quando a teoria é quantizada. É exatamente o mesmo problema que aparece na função de Green clássica que possui assintótico da forma $\frac{1}{r^{d-2}}$, levando a uma dimensão anômala nula, *i.e.* $\eta = 0$, algo que nem sempre é verdade. Na próxima seção a relação entre a suposta correção quântica (\dots) e a dimensão anômala ficará clara, pois vamos derivar funções de Green exatas para qualquer teoria conforme.

3.2 Teoria de campos conformes quânticos em d dimensões

A quantização canônica de uma teoria de campos consiste em promover os campos a operadores ($\phi(x)^s \rightarrow: \hat{\phi}(x)^s :$)[¶] que atuam num espaço de Hilbert (com um estado mínimo (vácuo) bem definido).

O estado de vácuo da teoria $|0\rangle$ - assumido como único - é invariante sob as transformações conformes, *i.e.*

$$Q |0\rangle = 0, \quad Q = \{P_{\mu}, D, L_{\mu\nu}, K_{\mu}\}, \quad (3.2.1)$$

onde os operadores acima são as versões quânticas das funções dadas pela eq. (3.1.29).

A função de n -pontos, dada por:

$$G_{\mu\dots\beta\dots}^{\rho\dots\alpha\dots}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | \phi_{\mu\dots}^{\rho\dots}(x_1) \dots \phi_{\beta\dots}^{\alpha\dots}(x_n) | 0 \rangle = \langle \phi_{\mu\dots}^{\rho\dots}(x_1) \dots \phi_{\beta\dots}^{\alpha\dots}(x_n) \rangle, \quad (3.2.2)$$

[¶]: : é o produto de Wick. Para facilitar a notação não vamos colocar “^” sobre os operadores.

deve ser covariante sob a transformação (3.1.30), no sentido de

$$G_{\mu\dots}^{\rho\dots}(x_1, \dots, x_n) = \left| \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \right|^{\frac{\Delta_1}{d}} \dots \left| \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \right|^{\frac{\Delta_n}{d}} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha} \dots \right) \left(\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \dots \right) G_{\gamma\dots}^{\alpha\dots}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.2.3)$$

3.2.1 Campo escalar

Uma grande vantagem das teorias conformes é que o seu grande número de simetrias fixa completamente a forma das funções de dois e três pontos para campos escalares. Vamos ver como isso acontece.

$$G(x_1, x_2) = \left| \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \right|^{\frac{\Delta_1}{d}} \left| \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \right|^{\frac{\Delta_2}{d}} G(x_1, x_2). \quad (3.2.4)$$

rotações e translações implicam em

$$G(x_1, x_2) = G(|x_1 - x_2|),$$

e a dilatação:

$$G(|x_1 - x_2|) = \rho^{(\Delta_1 + \Delta_2)} G(\rho|x_1 - x_2|), \quad (3.2.5)$$

ou seja

$$G(x_1, x_2) = \frac{C_{\Delta_1, \Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}},$$

C_{Δ_1, Δ_2} é uma constante.

Por último, as transformações *conforme especiais* levam à:

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{\gamma^d}; \quad \gamma = 1 + 2b \cdot x + b^2 x^2, \quad (3.2.6)$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{C_{\Delta_1, \Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} &= \left| \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \right|^{\frac{\Delta_1}{d}} \left| \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \right|^{\frac{\Delta_2}{d}} \frac{C_{\Delta_1, \Delta_2}}{|x'_1 - x'_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{1}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \left(\frac{C_{\Delta_1, \Delta_2} (\gamma_1 \gamma_2)^{\frac{(\Delta_1 + \Delta_2)}{2}}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \right), \\ &\Rightarrow \Delta_1 = \Delta_2. \end{aligned}$$

O resultado final da função de dois pontos entre campos quase primários para qualquer teoria conforme é:

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_\Delta}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} & \text{se } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \\ 0 & \text{se } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases} \quad (3.2.7)$$

A simetria conforme não fixa a constante C_Δ .

Já foi visto que no ponto crítico a função de Green tem a forma assintótica $\sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$, comparando com o resultado das teorias conformes temos: $\Delta = \frac{1}{2}(d-2+\eta)$, deixando claro que a dita correção quântica anunciada na seção anterior (os ... de $\Delta = \Delta_{\text{cla}} + \dots = \frac{1}{2}(d-2) + \dots$), é proporcional a dimensão anômala. De forma mais exata $\dots = \frac{\eta}{2}$.

Agora a função de três pontos. As simetrias de translações e rotações implicam em

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) \rangle = f(x_{12}, x_{13}, x_{23}), \quad x_{ij} \equiv |x_i - x_j|, \quad (3.2.8)$$

já a dilatação ($x'^\mu = \rho x^\mu$):

$$f(x_{12}, x_{13}, x_{23}) = \rho^{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3} f(\rho x_{12}, \rho x_{13}, \rho x_{23}) \quad (3.2.9)$$

$$\Rightarrow f(x_{12}, x_{13}, x_{23}) = \frac{C_{123}}{x_{12}^a x_{13}^b x_{23}^c}, \quad (3.2.10)$$

$$a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \quad C_{123} = \text{const.} \quad (3.2.11)$$

Por fim, a simetria com relação a transformação conforme especial

$$\begin{aligned} f(x_{12}, x_{13}, x_{23}) &= \frac{1}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} \gamma_3^{\Delta_3}} f\left(\frac{x_{12}}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}, \frac{x_{13}}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_3}}, \frac{x_{23}}{\sqrt{\gamma_2 \gamma_3}}\right) \\ &= \frac{1}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} \gamma_3^{\Delta_3}} \left((\gamma_1 \gamma_2)^{\frac{a}{2}} (\gamma_1 \gamma_3)^{\frac{b}{2}} (\gamma_2 \gamma_3)^{\frac{c}{2}} \right) f(x_{12}, x_{13}, x_{23}) \\ \Rightarrow 2\Delta_1 - a - b &= 0; \quad 2\Delta_2 - a - c = 0; \quad 2\Delta_3 - b - c = 0, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

condições suficientes para determinar completamente a, b e c (em termos dos Δ 's): $a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3$, $b = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3$, $c = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$. As simetrias conformes fixam a forma da função de três pontos como

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} x_{13}^{\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3} x_{23}^{-\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}} \quad (3.2.13)$$

onde $C_{123} = \text{const} \equiv$ constante de estrutura.

A mesma lógica pode ser repetida para a função de quatro pontos e a quantidade

$$\prod_{i < j} x_{ij}^{-(\Delta_i + \Delta_j) + \Delta/2}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i, \quad (3.2.14)$$

é encontrada, mas, ao contrário dos casos anteriores, o fator que multiplica essa função não é necessariamente constante, porque já mostramos (veja a seção 3.1.1) que com quatro pontos é possível ter uma função invariante as transformações conformes. O máximo que as simetrias

conformes podem dizer sobre a função de quatro pontos é que ela possui a forma

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle = F \left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{41}} \right) \prod_{i<j} x_{ij}^{-(\Delta_i+\Delta_j)+\Delta/2}, \quad (3.2.15)$$

com a função F arbitrária. Apenas em certas teorias bidimensionais é possível determinar F via simetrias conformes.

3.2.2 Funções de dois pontos para vetores e o tensor energia momento

No caso de um campo quase-primário vetorial, ϕ_Δ^μ , a eq. (3.2.3) fornece a relação

$$\langle \phi_{\Delta_1}^\mu(x_1)\phi_{\Delta_2}^\nu(x_2) \rangle \equiv G_{\Delta_1\Delta_2}^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \left| \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \right|^{\frac{\Delta_1}{d}} \left| \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \right|^{\frac{\Delta_2}{d}} \frac{\partial x'_1{}^\mu}{\partial x_1{}^\alpha} \frac{\partial x'_2{}^\nu}{\partial x_2{}^\beta} G^{\alpha\beta}(x'_1, x'_2), \quad (3.2.16)$$

a lógica utilizada para o campo escalar não muda e as simetrias de rotações, translações e dilatação implicam que se $\Delta_1 \neq \Delta_2$ a função de dois pontos é zero e se $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$:

$$G_{\Delta}^{\mu\nu}(x_1, x_2) \propto \frac{I^{\mu\nu}(x_{12})}{x_{12}^{2\Delta}}, \quad (3.2.17)$$

a diferença está na quantidade $I^{\mu\nu}$ - um tensor de rank dois para transformações de Lorentz e invariante à dilatações. Para garantir a simetria $x_1 \leftrightarrow x_2$, $I^{\mu\nu} = I^{\nu\mu}$, *i.e.* ele é simétrico nos índices de Lorentz. As únicas quantidades a nossa disposição para construir $I_{\mu\nu}(x_{12})$ é a métrica $g_{\mu\nu}$ e o vetor x_{12}^μ . A combinação mais geral possível é:

$$I^{\mu\nu}(x_{12}) = g^{\mu\nu} + (-2 + a) \frac{x_{12}^\mu x_{12}^\nu}{x_{12}^2} = \frac{x_{12}^2}{2} \partial_1^\mu \partial_2^\nu \ln x_{12}^2 + a \frac{x_{12}^\mu x_{12}^\nu}{x_{12}^2}, \quad (3.2.18)$$

após uma transformação *conforme especial* o primeiro termo (independente de a) muda por um fator $\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}$ que cancela com a contribuição vetorial, exatamente o comportamento procurado, já o segundo destrói tal propriedade. Portanto, as simetrias conformes fixam $a = 0$, e a função de dois pontos é:

$$G_{\Delta}^{\mu\nu}(x_1, x_2) = C_{\Delta} \frac{I^{\mu\nu}(x_{12})}{x_{12}^{2\Delta}}, \quad (3.2.19)$$

$$I^{\mu\nu}(x_{12}) = \frac{x_{12}^2}{2} \partial_1^\mu \partial_2^\nu \ln x_{12}^2 = g^{\mu\nu} - 2 \frac{x_{12}^\mu x_{12}^\nu}{x_{12}^2}, \quad (3.2.20)$$

C_{Δ} é uma constante arbitrária.

O mesmo se aplica a função de correlação do produto de dois tensores energia-momento

$$G^{\mu\nu\rho\sigma} = \langle T^{\mu\nu}(x_1)T^{\rho\sigma}(x_2) \rangle, \quad (3.2.21)$$

ela deve ser uma combinação de produtos de $I^{\mu\nu}(x_{12})$ multiplicando o fator $\frac{1}{x_{12}^{2d}}$ ($\Delta = d$ pela própria definição do tensor, ver eq. (3.1.21)). A combinação deve obedecer certas propriedades: manter a simetria $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ e sua conservação, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. A única combinação possível é:

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu}(x_1)T^{\rho\sigma}(x_2) \rangle &= \frac{C_T}{x_{12}^{2d}} \mathcal{J}^{\mu\nu,\rho\sigma}(x_{12}), \\ \mathcal{J}^{\mu\nu,\rho\sigma}(x_{12}), &= \frac{1}{2} (I^{\mu\sigma}(x_{12})I^{\nu\rho}(x_{12}) + I^{\mu\rho}(x_{12})I^{\nu\sigma}(x_{12})) - \frac{1}{d} \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

C_T é uma constante.

3.2.3 Expansão do produto de operadores

Suponha que o produto de dois operadores (escalares para facilitar) possa ser expandido em termos dos outros operadores da teoria, algo da forma

$$\phi_i(x_1)\phi_j(x_2) = \sum_{l,n=0}^{\infty} C_{ijl} \frac{a_{ijl}^n}{n!} \frac{1}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_l - n}} \partial^n \phi_l(x_2), \quad (3.2.23)$$

o termo $|x_1 - x_2|^{(\dots)}$ é importante para que ambos os lados sejam compatíveis ao ser realizado um reescalamento $x' = \rho x$. Sendo a eq. verdadeira não é difícil determinar os coeficientes da expressão através do uso das funções de dois e três pontos (eqs. (3.2.7) e (3.2.13)). Aplique nos dois lados da eq. o campo $\phi_k(x)$ no ponto $x = 0$ e tome o valor no vácuo

$$\langle \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\phi_k(0) \rangle = \sum_{l,n=0}^{\infty} C_{ijl} \frac{a_{ijl}^n}{n!} \frac{1}{|x_1 - x_2|^{h_i + h_j - h_l - n}} \langle \partial^n \phi_l(x_2)\phi_k(0) \rangle, \quad (3.2.24)$$

faça $x_2 \rightarrow 1$. No lado direito, através de (3.2.7), temos

$$\langle \partial^n \phi_l(x_2)\phi_k(0) \rangle \Big|_{x_2=1} = \delta_{lk} C_{\Delta_k} (-1)^n \frac{\Gamma(2h_k + n)}{\Gamma(2h_k)}, \quad (3.2.25)$$

e no esquerdo, via eq. (3.2.13)

$$\langle \phi_i(x_1)\phi_j(1)\phi_k(0) \rangle = \frac{C_{ijk}}{(x_1 - 1)^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k} x_1^{\Delta_i - \Delta_j + \Delta_k}}. \quad (3.2.26)$$

Com os resultados parciais acima mais a relação

$$\frac{1}{x_1^{\Delta_i - \Delta_j + \Delta_k}} = \frac{1}{(1 + (x_1 - 1))^{\Delta_i - \Delta_j + \Delta_k}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k + n)}{\Gamma(\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k)} \frac{(x_1 - 1)^n}{n!},$$

onde $\Gamma(x)$ é a função *gamma*^{||}. Não é difícil concluir que:

$$C_{ijk} = \frac{C_{ijk}}{C_{\Delta_k}}, \quad (3.2.27)$$

$$a_{ij}^n = \frac{\Gamma(\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k + n)\Gamma(2\Delta_k)}{\Gamma(2\Delta_k + n)\Gamma(\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k)}. \quad (3.2.28)$$

A EPO de dois campos quase-primários é

$$\phi_i(x_1)\phi_j(x_2) = \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{C_{ijk}}{C_{\Delta_k}(x_1-x_2)^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k-n}} \frac{\Gamma(\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k+n)\Gamma(2\Delta_k)}{\Gamma(2\Delta_k+n)\Gamma(\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k)} \frac{1}{n!} \partial^n \phi_k(x_2) \quad (3.2.29)$$

onde C_{ijk} e C_{Δ_i} são os coeficientes das funções de três e dois pontos, respectivamente.

3.3 Identidades de Ward e anomalias conformes

A forma específica das correntes conservadas conformes em termos do tensor energia-momento, eq. (3.1.26), indica a importância dos coeficientes C_T , \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} das funções de dois e três pontos de $T_{\mu\nu}$ (ver eq. (3.2.22) e o apêndice B) na descrição e classificação das distintas CFT'_D ^{**, **}. É necessário estabelecer as eventuais relações entre eles e suas restrições, impostas pelas condições de unitariedade, causalidade e positividade dos fluxos de energia.

3.3.1 Campos livres

Dado um conjunto de n_S campos escalares sem massa, $\phi^a(x)$, $a = 1, \dots, n_S$, com dimensão conforme $\Delta_\phi = (D-2)/2$. As correspondentes funções de 2-pontos (ver eq. (3.2.7)) podem ser normalizadas como:

$$\langle \phi^a(x)\phi^b(0) \rangle = \frac{\delta^{ab}}{(d-2)\Omega_{D-1}(x^2)^{\frac{D-2}{2}}}, \quad \Omega_{D-1} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}, \quad (3.3.1)$$

ao tomar em conta a famosa identidade para o propagador em D -dimensões (D é par):

$$\square \frac{1}{(x^2)^{(D-2)/2}} = -(D-2)\Omega_{D-1}\delta^D(x). \quad (3.3.2)$$

A forma explícita do correspondente $\tilde{T}_{\mu\nu}$ “melhorado”^{††}:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{n_S} : \left\{ \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^a - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \partial_\rho \phi^a \partial^\rho \phi^a - \frac{D-2}{4(D-1)} (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \phi^a \phi^a \right\} :, \quad (3.3.3)$$

^{||}sua definição e algumas propriedades são encontradas no apêndice A.

^{**}a notação $D = d - 1$ é usada nas seções 3.3, 3.4 e apêndices B e C para indicar a dimensão da teoria conforme.

^{††}*i.e.* com $\tilde{T}_\mu^\mu = 0$, *on-shell*.

junto com as regras de Wick são suficientes para a dedução do fator C_T (eq. (3.2.22)) neste exemplo (39, 44):

$$C_T(n_S, D) = \frac{Dn_S}{(D-1)\Omega_{D-1}^2} > 0. \quad (3.3.4)$$

3.3.2 Identidades de Ward conformes

As singularidades nos produtos de dois operadores - campos - $S_\Delta(x)$ em dois (ou mais) pontos coincidentes (ver eq. 3.2.29):

$$S_\Delta(x_1)S_\Delta(x_2) \sim \frac{1}{(x_{12}^2)^\Delta} + \dots, \quad (3.3.5)$$

estão presentes em todas as teorias quânticas de campos *locais* (incluindo as CFT_D 's). Elas são pólos ou cortes nas correspondentes funções de n -pontos. O método para remediar o problema consiste em interpretar tais “funções singulares” como *distribuições*, o que exige a introdução de certas *regularizações* (com ou sem escalas de massa) necessárias para o isolamento de partes finitas dos termos singulares^{‡‡}. O principal efeito do *procedimento de regularização* nas EPO's envolvendo um ou mais tensores energia-momento são as chamadas *identidades de Ward* (IW), veja por exemplo (44):

$$\begin{aligned} \partial^\mu \langle T_{\mu\nu}(x_1)T_{\rho\sigma}(x_2)T_{\alpha\beta}(x_3) \rangle = & (\partial_\nu \delta^D(x_{12})) \langle T_{\rho\sigma}(x_1)T_{\alpha\beta}(x_3) \rangle + \\ & (\partial_\nu \delta^D(x_{13})) \langle T_{\rho\sigma}(x_2)T_{\alpha\beta}(x_1) \rangle + \\ & \{ \partial_\sigma (\delta^D(x_{12}) \langle T_{\rho\nu}(x_1)T_{\alpha\beta}(x_3) \rangle) + \sigma \leftrightarrow \rho \} \\ & \{ \partial_\alpha (\delta^D(x_{13}) \langle T_{\beta\nu}(x_1)T_{\rho\sigma}(x_2) \rangle) + \alpha \leftrightarrow \beta \}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

O resultado demonstra que as leis de conservação “operatorial” $\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$, quando aplicadas às correspondentes funções de correlação *regularizadas*, são modificadas devido ao ganho de “anomalias” (parte direita da eq. (3.3.6)) válidas somente nos pontos coincidentes $x_1 = x_2$ e $x_1 = x_3$. A origem destes termos torna-se evidente ao ser considerado o limite $x_1 \rightarrow x_2$ na função de três tensores $T_{\mu\nu}$, eq. (B.0.1), (42, 44):

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x_1)T_{\rho\sigma}(x_2)T_{\alpha\beta}(x_3) \rangle \xrightarrow{x_1 \rightarrow x_2} & \left(\partial_\mu^1 \partial_\nu^1 \frac{1}{(x_{12})^{(D-2)/2}} \right) F_{\rho\sigma,\alpha\beta}(x_{23}) + (\mu, \nu \leftrightarrow \rho, \sigma), \\ F_{\rho\sigma,\alpha\beta}(x_{23}) \sim & \langle T_{\rho\sigma}(x_2)T_{\alpha\beta}(x_3) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

^{‡‡}um exemplo mais ilustrativo, (44) é apresentado em mais detalhes do método de regularização e renormalização adotado é encontrado no apêndice C.

As IW (3.3.6) refletem a propriedade das derivadas da distribuição $(1/(x_{12}^2)^{(D-2)/2})_{reg}$:

$$\partial_\nu^1 \square_1 (1/(x_{12}^2)^{(D-2)/2})_{reg} \sim \partial_\nu^1 \delta^D(x_{12}), \quad (3.3.8)$$

obtidas da eq. (3.3.2).

Uma consequência mais importante de (3.3.6) nas CFT_D 's é a relação simples

$$C_T = \frac{\Omega_{D-1}}{2D(D+2)} ((D+2)(D-1)\mathcal{A} - 2\mathcal{B} - 4(D+1)\mathcal{C}), \quad (3.3.9)$$

entre os coeficientes da funções de dois e três pontos, apesar da complexidade da função de três pontos (B.0.1).

3.3.3 Anomalias conformes e cargas centrais

A implementação da condição $T_\mu^\mu = 0$ nas funções de três pontos *regularizadas* tem como resultado certos termos *anômalos*, por exemplo, para $D = 4$, (41, 44)

$$\eta^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu}(x_1) T_{\rho\sigma}(x_2) T_{\alpha\beta}(x_3) \rangle_{reg} = 2 (\delta^4(x_{12}) + \delta^4(x_{13})) \langle T_{\rho\sigma}(x_2) T_{\alpha\beta}(x_3) \rangle + 2\Omega_3 [c(4) D_{\rho\sigma,\alpha\beta}^c(x_{12}, x_{13}) + a(4) D_{\rho\sigma,\alpha\beta}^a(x_{12}, x_{13})], \quad (3.3.10)$$

onde

$$c(4) = \frac{1}{12} (9\mathcal{A} - \mathcal{B} - 10\mathcal{C}) = \frac{2}{\Omega_3} C_T(D=4), \quad (3.3.11)$$

$$a(4) = \frac{1}{72} (13\mathcal{A} - 2\mathcal{B} - 40\mathcal{C}), \quad (3.3.12)$$

$$D_{\rho\sigma,\alpha\beta}^a(x_{12}, x_{13}) = \epsilon_{\sigma\alpha\gamma\kappa} \epsilon_{\rho\beta\tau\lambda} \partial_\kappa \partial_\lambda (\partial_\gamma \delta^4(x_{13}) \partial_\tau \delta^4(x_{13})) + \sigma \leftrightarrow \rho, \quad (3.3.13)$$

$$D_{\rho\sigma,\alpha\beta}^c(x_{12}, x_{13}) = \delta^4(x_{12}) \tilde{\Delta}_{\rho\sigma,\alpha\beta}^{(2)} \delta^4(x_{23}), \quad (3.3.14)$$

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (S_{\rho\alpha} S_{\sigma\beta} + S_{\rho\beta} S_{\sigma\alpha}) - \frac{1}{3} S_{\rho\sigma} S_{\alpha\beta}; \quad S_{\rho\sigma} = \partial_\rho \partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma} \square.$$

A presença de termos que violam a condição de traço nulo nos pontos $x_1 = x_2$ e $x_1 = x_3$, indicam a *quebra* das simetrias conformes *quantizadas* nos pontos *isolados* no espaço M_4 . As identidades (3.3.10) são conhecidas como anomalias conformes (AC) ou anomalias de Weyl.

Os coeficientes $c(4)$ e $a(4)$ são universais, não dependem do método de regularização adotado, e são chamados de *cargas centrais* da CFT_4 ,^{§§}. Os valores de a e c numa CFT_D (D par) possuem uma relação íntima com: (1) o número de graus de liberdade; (2) as possíveis formas de “interações conformes”; (3) as eventuais (super)simetrias e simetrias internas do tipo $SU(N_c)$. Um resultado físico diretamente atrelado a carga central a é o efeito Casimir.

^{§§}segundo a tradição das teorias conformes em duas dimensões (38).

Para um campo escalar (sem massa) definido num cilindro de raio R , a energia de Casimir é, (40, 70, 71):

$$E_{cas} = \frac{a}{360R} > 0, \quad (3.3.15)$$

i.e. $a > 0$. Outros valores conhecidos da carga a , como por exemplo (36, 39)

$$c(N_c, D = 4) = \frac{1}{4}(N_c^2 - 1) = a(N_c, D = 4), \quad (3.3.16)$$

da teoria superconforme de Yang-Mills em quatro dimensões com $\mathcal{N} = 4$ e $SU(N_c)$ corroboram com a condição

$$a \geq 0. \quad (3.3.17)$$

Mais restrições sobre os possíveis valores das cargas centrais a e c , relacionadas a positividade dos fluxos de energia, são derivadas na seção 3.4.

3.4 Fluxos com energia positiva

Numa colisão de entre duas partículas^{¶¶} com energias altas, $E \approx p$ ($c = 1$), é produzida uma certa quantidade de energia E_0 . Assumindo que o processo seja descrito por uma CFT_D com tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ conhecido, é de nosso interesse calcular o *fluxo de energia* em um infinitésimo de ângulo sólido $d\Omega_{D-2}$ na direção espacial $n^i = \frac{x^i}{r}$:

$$\mathcal{E}(n) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{D-2} \int_{-\infty}^{\infty} dt T_i^0(t, rn^i) n^i, \quad (3.4.1)$$

a colisão ocorre no centro de um detetor de raio muito maior que a escala típica da colisão e o intervalo de tempo do processo como um todo - incidência, espalhamento e medição das partículas - é longo (no sentido de ser muito maior que o tempo efetivo da colisão), por isso a integração é tomado ao longo de toda a reta real. Uma informação obtida de forma simples através do método das teorias conformes quânticas é a função de um ponto do operador $\mathcal{E}(n)$ (13, 14):

$$\langle \mathcal{E}(n) \rangle_S \equiv \frac{\langle S_q \mathcal{E}(n) S_q \rangle}{\langle S_q^\dagger S_q \rangle}, \quad (3.4.2)$$

$$S_q = \int d^D x S(x) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - Et)}, \quad q^\mu = (E, \vec{q}),$$

^{¶¶}representadas pelos estados $S(x_1) |0\rangle$ e $S(x_2) |0\rangle$.

realizada em termos de integrais (transformadas de Fourier) das funções de dois e três pontos:

$$\langle S(x)S(0) \rangle \text{ e } \langle S(x_2)T^{\mu\nu}(x_1)S(0) \rangle. \quad (3.4.3)$$

Com a intenção de investigar as novas restrições sobre as cargas centrais a e c e os coeficientes \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} , devido a imposição de um fluxo positivo de energia, *i.e.*

$$\langle \mathcal{E}(n) \rangle_S \geq 0, \quad (3.4.4)$$

vamos considerar o caso particular em que os estados " $S_q|0\rangle$ " são criados por T^{ij} , $i, j = 1, \dots, D-1$.

Ao fixar \vec{n} na direção x^1 e usando as simetrias residuais de rotações, $SO(D-2)$, devemos ser capazes de distinguir três classes distintas de estados $S_q = \epsilon_{ij}T^{ij}$, (7, 8). Elas são caracterizadas pela escolha do tensor de polarização ϵ_{ij} - projeções do *spin* na direção \vec{n} - que podem formar estados com *spin* $s = 0, 1$ e 2 - respectivamente um escalar, vetor ou tensor com respeito ao grupo $SO(D-2)$. Escolhas apropriadas das componentes não nulas do *projektor* ϵ_{ij} são:

- tensor $s = 2$: $\epsilon_{23}^T = \epsilon_{32}^T = 1$. O estado é: $|t\rangle_q = \epsilon_{ij}^T T^{ij}(q) |0\rangle$.
- vetor $s = 1$: $\epsilon_{12}^v = \epsilon_{21}^v = 1$. O estado é: $|v\rangle_q = \epsilon_{ij}^v T^{ij}(q) |0\rangle$.
- escalar $s = 0$: $\epsilon_{ij}^{esc} = \text{Diag.}(- (D-2), 1, \dots, 1)$, logo $\epsilon_i^i = 0$. O estado é: $|e\rangle_q = \epsilon_{ij}^{esc} T^{ij}(q) |0\rangle$.

A simetria $SO(D-2)$ determina que a função de um ponto (3.4.2) - razão entre o valor médio $\langle \epsilon_{ij}^* T^{ij} \mathcal{E}(n) \epsilon_{kl} T_{kl}(q) \rangle$ e a norma $\langle \epsilon_{ij}^* T^{ij} \epsilon_{kl} T_{kl} \rangle$ - pode depender somente dos seguintes invariantes:

$$\epsilon_{ij}^* \epsilon^{ij}, \quad (\epsilon_{ij}^* n^i n^j)(\epsilon_{kl} n^k n^l), \quad \epsilon_{il}^* \epsilon^{lj} n^i n_j. \quad (3.4.5)$$

A combinação mais geral com simetria $SO(D-2)$ compatível com a energia total (E_0)

$$\int \langle \mathcal{E}(n) \rangle_{\epsilon_{ij} T^{ij}} d\Omega_{D-2} = E_0, \quad (3.4.6)$$

pode ser escrita como (7, 8, 13):

$$\langle \mathcal{E}(n) \rangle_{\epsilon_{ij} T^{ij}} = \frac{E_0}{\Omega_{D-2}} \left[1 + t_2 \left(\frac{n^i \epsilon_{ik}^* \epsilon^{kj} n_j}{\epsilon_{kn}^* \epsilon^{kn}} - \frac{1}{D-1} \right) + t_4 \left(\frac{|\epsilon_{ij}^i n^j|^2}{\epsilon_{kn}^* \epsilon^{kn}} - \frac{2}{D^2 - 1} \right) \right], \quad (3.4.7)$$

envolvendo dois parâmetros arbitrários, t_2 e t_4 .

As condições para termos um *fluxo de energia positiva* (FEP) em cada um dos estados - tensor, vetor e escalar - levam às três desigualdades (7, 13):

$$E_t = \langle \mathcal{E}(n) \rangle_{\text{tensor}} = \frac{E_0}{\Omega_{D-2}} \left(1 - \frac{1}{D-1}t_2 - \frac{2}{D^2-1}t_4 \right) \geq 0, \quad (3.4.8)$$

$$E_v = \langle \mathcal{E}(n) \rangle_{\text{vetor}} = \frac{E_0}{\Omega_{D-2}} \left(1 + \frac{D-3}{2(D-1)}t_2 - \frac{2}{D^2-1}t_4 \right) \geq 0, \quad (3.4.9)$$

$$E_{esc} = \langle \mathcal{E}(n) \rangle_{\text{escalar}} = \frac{E_0}{\Omega_{D-2}} \left(1 + \frac{D-3}{D-1}t_2 - \frac{D^2-D-3}{D^2-1}t_4 \right) \geq 0, \quad (3.4.10)$$

elas são consequências de (3.4.7) aplicada a cada uma das três polarizações possíveis. As restrições sobre os parâmetros t_2 e t_4 podem ser visualizadas como pontos dentro do triângulo formado pelos três pontos $E_{esc}(t_2, t_4) = 0$, $E_v(t_2, t_4) = 0$ e $E_t(t_2, t_4) = 0$ no plano (t_2, t_4) . Em particular se $t_4 = 0$ (caso estudado no cap. 6), a condição de FEP impõe que t_2 assuma valores no intervalo:

$$-\left(\frac{D-1}{D-3}\right) \leq t_2 \leq \frac{D}{2}. \quad (3.4.11)$$

A própria definição (3.4.2) com $S \rightarrow \epsilon_{ij}T^{ij}$ sugere que os parâmetros t_2 e t_4 são funções das constantes C_T , \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} . Na referência (7) E_t e E_v são calculados em termos dessas constantes, o resultado é:

$$E_t = -\frac{E_0(D+1)}{\Omega_{D-2}D} \frac{[(D^2-4)\mathcal{A} + 2D\mathcal{B} - 4D\mathcal{C}]}{[(D-1)(D+2)\mathcal{A} - 2\mathcal{B} - 4(D+1)\mathcal{C}]}, \quad (3.4.12)$$

$$E_v = \frac{E_0(D+1)}{\Omega_{D-2}} \frac{[(D^2-4)\mathcal{A} + (3D-2)\mathcal{B} - 8D\mathcal{C}]}{[(D-1)(D+2)\mathcal{A} - 2\mathcal{B} - 4(D+1)\mathcal{C}]}, \quad (3.4.13)$$

ao comparar com (3.4.8) e (3.4.9) é possível escrever t_2 e t_4 em termos de \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} da função de três pontos (B.0.1):

$$t_2 = \frac{2(D+1)[(D^2-1)\mathcal{A} + 3D^2\mathcal{B} - 4D(2D+1)\mathcal{C}]}{D[(D-1)(D+2)\mathcal{A} - 2\mathcal{B} - 4(D+1)\mathcal{C}]}, \quad (3.4.14)$$

$$t_4 = -\frac{(D+1)[(D+2)(2D^2-3D-3)\mathcal{A} + 2D^2(D+2)\mathcal{B} - 4D(D+1)(D+2)\mathcal{C}]}{D[(D-1)(D+2)\mathcal{A} - 2\mathcal{B} - 4(D+1)\mathcal{C}]},$$

logo as desigualdades (3.4.8)-(3.4.10) que limitam os possíveis valores de t_2 e t_4 criam restrições sobre \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} , que por sua vez podem ser escritos em termos das cargas centrais a e c . Portanto as condições de FEP introduzem severas restrições sobre as cargas centrais a e c dum CFT_D . Por exemplo, no caso particular de $t_4 = 0$, t_2 pode ser reescrito completamente em termos da razão a/c :

$$t_2 = \frac{D(D-1)}{D-2} \left(1 - \frac{a}{c} \right), \quad (3.4.15)$$

que junto com (3.4.11) implica em:

$$\frac{D(D-3)}{D^2-2D-2} \leq \frac{c}{a} \leq \frac{D}{2}. \quad (3.4.16)$$

As conseqüências das condições de FEP na descrição holográfica de certas QFT_D 's duais a gravitações em $d = D + 1$ dimensões com o termo de Gauss-Bonnet (representam o caso $t_4 = 0$) ou as *quase topológicas* (caso com $t_4 \neq 0$) são estudadas nos capítulos 6 e 7.

3.5 Teorias conformes perturbadas

Suponha uma teoria de campos não conforme em $d - 1$ dimensões, cuja ação (euclidiana) é:

$$S = S[\phi]_{CFT} + g_i \int d^{d-1}x \Phi_i(x), \quad (3.5.1)$$

onde S_{CFT} é a ação duma teoria conforme - por exemplo a dada pela eq. (3.1.36) -, os termos Φ_i são campos quase primários com dimensões Δ_i - funções dos campos da teoria conforme - e g_i são os acoplamentos responsáveis por quebrar as simetrias conformes. A função de partição do modelo é:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int d\phi e^{-S} = \int d\phi e^{-S_{CFT}} \exp\left(-g_i \int d^{d-1}x \Phi_i(x)\right) \\ &= \langle : \exp\left(-g_i \int d^{d-1}x \Phi_i(x)\right) : \rangle_{CFT}, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

nas proximidades de um ponto crítico a hipótese de Kadanoff é válida e a função de partição deve ficar invariante*** a um reescalamto na rede: $x' = bx$, $\Phi'_i(x) = b^{\Delta_i} \Phi_i(x')$. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &\approx \mathcal{Z}', \text{ ou} \\ \langle : \exp\left(-g_i \int d^{d-1}x \Phi_i(x)\right) : \rangle_{CFT} &\approx \langle : \exp\left(-g'_i \int d^{d-1}x \Phi'_i(x)\right) : \rangle_{CFT}, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

é possível extrair informação, de forma perturbativa, acerca da função *beta*, *i.e.* sobre como o acoplamento g_i muda de acordo com a escala de comprimento/energia da teoria. Para isso, vamos expandir os dois lados da eq. em potências de g_i e comparar os termos lineares em $\Phi_\Delta(x)$, veja por exemplo (29). O lado esquerdo fica:

$$\mathcal{Z}_{CFT} \left(1 - g_i \int d^{d-1}x \langle : \Phi_i(x) : \rangle + \frac{1}{2} g_i g_j \int d^{d-1}x_1 \int d^{d-1}x_2 \langle : \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) : \rangle + \dots \right).$$

***a menos de uma constante multiplicativa não relevante para está análise.

Termo linear em g : Ao efetuar a troca $x \rightarrow x' = bx$ na variável de integração, fica-se com

$$g_i \int d^{d-1}x' \langle : \Phi_i(x') : \rangle = g_i b^{d-1-\Delta} \int d^{d-1}x \langle : \Phi'_i(x) : \rangle, \quad (3.5.4)$$

exatamente o termo linear do lado direito da eq. (3.5.3) ao identificarmos $g'_i \approx b^{d-1-\Delta} g_i$, sendo o reescalamento infinitesimal $b = e^{\delta l} \approx 1 + \delta l$, a eq. diferencial

$$- \beta_i(g) = \frac{dg_i}{dl} \approx (d-1-\Delta_i)g_i, \quad \frac{dg_i}{dl} \equiv \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{g'_i - g_i}{\delta l}, \quad (3.5.5)$$

é encontrada, reproduzindo a aproximação linear (eq. (2.3.16)) discutida no capítulo anterior. O grande mérito aqui é relacionar o índice crítico com a dimensão do campo Φ_i : $s = d-1-\Delta_i$. A condição necessária para o ponto crítico ser relevante ($s > 0$), em termos da dimensão da perturbação é: $\Delta < d-1$.

Termo quadrático em g : É possível ir além da aproximação linear, vamos analisar o termo $\mathcal{O}(g^2)$. A integral é divergente, mas esse problema é solucionado *cortando* a integração na escala natural da rede a , *i.e.* deve-se integrar apenas na região $|x_{12}| > a$, logo

$$\frac{g_i g_j}{2} \iint_{|x_{12}| > a} d^{d-1}x_1 d^{d-1}x_2 \langle : \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) : \rangle, \quad (3.5.6)$$

novamente é feita a troca nas coordenadas de integração: $x_i \rightarrow x'_i = bx_i \approx (1 + \delta l)x_i$

$$\begin{aligned} & \frac{g_i g_j}{2} \iint_{|x'_{12}| > a} d^{d-1}x'_1 d^{d-1}x'_2 \langle : \Phi_i(x'_1) \Phi_j(x'_2) : \rangle = \\ & \frac{g_i g_j}{2} b^{2(d-1-\Delta)} \iint_{|x_{12}| > a} d^{d-1}x_1 d^{d-1}x_2 \langle : \Phi'_i(x_1) \Phi'_j(x_2) : \rangle +, \\ & \frac{g_i g_j}{2} b^{2(d-1-\Delta)} \iint_{a(1-\delta l) < |x_{12}| < a} d^{d-1}x_1 d^{d-1}x_2 \langle : \Phi'_i(x_1) \Phi'_j(x_2) : \rangle, \end{aligned}$$

o primeiro termo reproduz o lado direito da eq. (3.5.3) e apenas confirma a eq. (3.5.5), já o segundo é mais interessante, ele fornece a correção quadrática à eq. (3.5.5). Nele vamos substituir o termo $\Phi'_i(x_1) \Phi'_j(x_2)$ pela EPO dada pela eq. (3.2.29). A integração se dá numa região aonde $|x_{12}|$ é muito pequeno, por isso o termo que contribui na integração é a EPO

mais divergente em $x_{12} = 0$, *i.e.* o termo $n = 0$ em (3.2.29)

$$\begin{aligned}
& \frac{g_i g_j}{2} b^{2(d-1-\Delta)} \iint_{a(1-\delta l) < |x_{12}| < a} d^{d-1} x_1 d^{d-1} x_2 \langle : \Phi'_i(x_1) \Phi'_j(x_2) : \rangle, \\
& \approx \frac{C_{ijk}}{C_{\Delta_k}} \frac{g_i g_j}{2} b^{2(d-1-\Delta_k)} \iint_{a(1-\delta l) < |x_{12}| < a} d^{d-1} x_1 d^{d-1} x_2 \frac{\langle : \Phi'_k(x_2) : \rangle}{|x_{12}|^\Delta}, \\
& = \frac{C_{ijk}}{C_{\Delta_k}} \frac{g_i g_j}{2} b^{2(d-1-\Delta_k)} \int d^{d-1} x_2 \langle : \Phi'_k(x_2) : \rangle \Omega_{d-1} \int_{a(1-\delta l)}^a d|x_{12}| |x_{12}|^{d-2-\Delta}, \\
& = \frac{C_{ijk}}{C_{\Delta_k}} \frac{g_i g_j}{2} \Omega_{d-1} a^{d-1-\Delta_k} \delta l \int d^{d-1} x_2 \langle : \Phi'_k(x_2) : \rangle, \\
& = \frac{C_{ijk}}{C_{\Delta_k}} \frac{g_i g_j}{2} \Omega_{d-1} a^{d-1-\Delta_k} \delta l \int d^{d-1} x_2 \langle : \Phi'_k(x_2) : \rangle + \mathcal{O}(\delta l^2), \tag{3.5.7}
\end{aligned}$$

onde $\Omega_x = \frac{2\pi^{x/2}}{\Gamma(x/2)}$ - o ângulo sólido em x dimensões. Agregando o resultado acima ao da aproximação linear é encontrada a função *beta* até a aproximação quadrática:

$$- \beta_k(g) = \frac{dg_k}{dl} \approx (d-1-\Delta_k)g_k - \frac{\Omega_{d-1}}{2} a^{d-\Delta_k} \frac{C_{ijk}}{C_{\Delta_k}} g_i g_j, \tag{3.5.8}$$

é evidente que g_k é um acoplamento com dimensão $[g_k] = [a]^{-(d-1-\Delta)}$. Com a redefinição $g_k = \frac{2a^{-(d-1-\Delta_k)}}{\Omega_{d-1}} u_k$, fica-se com o acoplamento adimensional u_k e a eq.

$$- \beta_k(u) = \frac{du_k}{dl} \approx (d-1-\Delta_k)u_k - \frac{C_{ijk}}{C_{\Delta_k}} u_i u_j, \tag{3.5.9}$$

ganha uma forma mais simples, sem dependência explícita na escala a da rede. O resultado mostra a força das simetrias conformes, apenas com o conhecimento no ponto crítico (funções de dois e três pontos na teoria conforme) é possível determinar a função *beta* perturbativamente.

3.5.1 Exemplos de fluxos com um acoplamento na aproximação quadrática e a função central a .

Para um único acoplamento e as identificações: $s = d-1-\Delta$ e $C_{\Delta\Delta\Delta} = \frac{C_{111}}{C_\Delta}$; a eq. (3.5.9) pode ser escrita da forma

$$- \beta(u) = \frac{du}{dl} \approx su - C_{\Delta\Delta\Delta} u^2, \tag{3.5.10}$$

$$= -\partial_u a(u) \approx -\partial_u \left(a_{CFT} - \frac{s}{2} u^2 + \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{3} u^3 \right), \tag{3.5.11}$$

onde constante a_{CFT} é a carga central “ a ” da CFT (ver seção 3.3) e $a(u)$ é a *função central*. Na aproximação:

$$\beta \approx \partial_u a(u) = -\frac{\partial_l a(l)}{\beta}, \text{ ou}$$

$$\frac{da(l)}{dl} \approx -\beta^2 < 0, \quad (3.5.12)$$

i.e. a função carga central $a(u)$ é monotônica decrescente e, por construção, reproduz a carga central no ponto crítico.

3.5.1.1 Fluxo entre dois pontos críticos

Se $s > 0$, o ponto fixo $u = u_{UV} = 0$ é relevante, porém na aproximação (3.5.10) surge um novo ponto fixo em $u = u_{IV} = \frac{s}{C_{\Delta\Delta\Delta}}$. Expandindo a função *beta* ao redor do ponto u_{IV}

$$-\beta(u) = \frac{du}{dl} \approx -s(u - u_{IV}) + C_{\Delta\Delta\Delta}(u - u_{IV})^2, \quad (3.5.13)$$

i.e. o ponto u_{IV} possui índice crítico $-s < 0$ - é irrelevante. A aproximação quadrática permite a possibilidade de um fluxo entre um ponto fixo relevante^{†††} e um irrelevante^{‡‡‡}. A solução da função *beta* na aproximação quadrática é:

$$u(l) = u_{IV} \frac{e^{s(l-l_0)}}{1 + e^{s(l-l_0)}}, \text{ ou}$$

$$e^l = e^{l_0} u^{\frac{1}{s}} (u_{IV} - u)^{-\frac{1}{s}} \sim \begin{cases} u^{\frac{1}{s}}, & u \rightarrow u_{UV}, \\ (u_{IV} - u)^{-\frac{1}{s}}, & u \rightarrow u_{IV} \end{cases}, \quad (3.5.14)$$

l_0 é a constante de integração. No limite $l \rightarrow -\infty$, $u \rightarrow u_{UV} = 0$ e para $l \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow u_{IV} = \frac{y}{C_{\Delta\Delta\Delta}}$. As conclusões se tornam mais claras quando, via eq. (2.3.35), a relação^{§§§} entre o comprimento de correlação e l é lembrado: $\xi \sim b = e^{-l}$. O ponto crítico UV, por definição, é a singularidade de ξ , portanto $l \rightarrow -\infty$, enquanto o ponto IV é um zero de ξ ($l \rightarrow \infty$).

O ponto fixo IV pode ser fictício, um “defeito” da aproximação, por exemplo dada a função *beta* exata

$$-\beta(u) = \frac{du}{dl} = 1 - e^{-su}, \quad (3.5.15)$$

^{†††}também será chamado de ponto ultravioleta (UV)

^{‡‡‡}também será chamado de ponto infravermelho (IV)

^{§§§}o mesmo raciocínio pode ser feito através de (2.3.38), *i.e.* $f \sim e^{dl}$.

cujo único zero é o ponto $u = 0$. Entretanto nas proximidades de $u = 0$ ela pode ser aproximada por

$$-\beta(u) = \frac{du}{dl} \approx su - \frac{s^2}{2}u^2 + \dots, \quad (3.5.16)$$

e surge um segundo ponto crítico (fictício) em $u = \frac{2}{s}$. Aqui está o ponto central de um grande problema da abordagem perturbativa, não é possível saber se o segundo ponto fixo é real ou simplesmente um “erro perturbativo” - como no exemplo anterior. E mesmo existindo esse segundo ponto fixo, a eq. (3.5.9) só descreve o fluxo correto caso ambos estejam próximos, *i.e.* $|u_{IV} - u_{UV}| \ll 1$. Um flagrante da limitação da aproximação quadrática é que se o índice crítico do ponto UV é s , necessariamente o índice crítico do ponto IV é $-s$. Em inúmeros exemplos o mesmo não é verdade e os dois índices críticos são completamente independentes.

3.5.1.2 Fase massiva

Limitando-nos a semi-reta $u > 0$, $s > 0$ e ao caso $C_{\Delta\Delta\Delta} < 0$. Na aproximação quadrática o único zero da função $\beta(u)$ é $u = u_{IV} = 0$. A função $u = u(l)$ toma a forma:

$$u(l) = \frac{e^{s(l-l_0)}}{1 - \frac{|C_{\Delta\Delta\Delta}|}{s}e^{s(l-l_0)}}, \text{ ou}$$

$$e^l = e^{l_{cr}} u^{\frac{1}{s}} \left(u + \frac{s}{|C_{\Delta\Delta\Delta}|} \right)^{-\frac{1}{s}}, \quad l_{cr} = l_0 + \frac{1}{s} \ln \left(\frac{s}{|C_{\Delta\Delta\Delta}|} \right), \quad (3.5.17)$$

definida no intervalo $-\infty < l < l_{cr}$. No limite $l \rightarrow -\infty$ a solução reproduz o ponto fixo $u_{UV} = 0$ e em $l \rightarrow l_{cr}$ $u \rightarrow \infty$. A aproximação não descreve bem a função *beta* para valores grandes de u , porém essa análise serve ao menos para demonstrar a possibilidade de existir um valor limite $l = l_{cr}$. Uma vez que $\xi \sim e^l$, o fato de existir um l_{cr} implica numa *escala* $\xi_{cr} \equiv \frac{1}{m} \sim e^{l_{cr}} - m$ é interpretado como a massa da teoria de campo, uma vez que a função de correlação, na região $l \rightarrow l_{cr}$, terá o comportamento $G(r) \sim e^{-mr}$. Por isso a fase é dita massiva. Se $\frac{s}{|C_{\Delta\Delta\Delta}|} \ll 1$, existe u t.q. $\frac{s}{|C_{\Delta\Delta\Delta}|} \lesssim u \ll 1$ - apenas neste caso a fase massiva é descrita pela aproximação quadrática, com $\frac{1}{m} \propto e^{l_{cr}} \approx \left(\frac{s}{|C_{\Delta\Delta\Delta}|} \right)^{\frac{1}{s}}$.

3.5.1.3 Transição de fase de ordem infinita - ponto fixo marginal

O último caso de interesse é $s = 0$, a eq. *beta* fica

$$-\beta u = \frac{du}{dl} \approx -C_{\Delta\Delta\Delta} u^2, \quad (3.5.18)$$

com solução

$$\begin{aligned} u(l) &= \frac{1}{C_{\Delta\Delta\Delta}(l-l_0)}, \text{ ou} \\ e^{l-l_0} &= e^{\frac{1}{C_u}}, \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

o ponto crítico, chamado de *marginal*, $u = 0$ se comporta como um ponto UV quando $u \rightarrow 0^-$ ($l \rightarrow -\infty$), já para $u \rightarrow 0^+$ ele é um ponto crítico irrelevante ($l \rightarrow +\infty$). A grande diferença do ponto fixo marginal está no fato das singularidades ou zeros das quantidades estatísticas/termodinâmicas no ponto crítico não obedecerem a leis de potências, mas sim singularidades (ou zeros) essenciais. Por exemplo, o comprimento de correlação possui o comportamento

$$\xi \sim e^{-l} \sim e^{\frac{-1}{C_u}}. \quad (3.5.20)$$

Em todo caso que $-\beta \propto u^n + \dots$, $n \geq 2$, o ponto crítico (no caso $u = 0$) é dito marginal, a escala como função do acoplamento é da forma

$$\xi \sim e^l \sim \exp\left(\frac{const}{u^{n-1}}\right), \quad (3.5.21)$$

mais detalhes acerca do ponto fixo marginal são encontrados na seção 5.5.2.4.

Resumo da primeira parte

No capítulo 2 foi introduzido o nosso principal objetivo de estudo - transições de fase de segunda (e infinita) ordem. Elas ocorrem nos chamados *pontos críticos*, ou *pontos fixos*, e uma de suas características é a divergência do comprimento de correlação - obedecendo a uma lei de potências no caso de transições de segunda ordem ou uma singularidade essencial para transições de ordem infinita. No mesmo capítulo é apresentada a hipótese de Kadanoff - sistema torna-se invariante a dilatações no ponto crítico, *i.e.* ele não possui escalas - um reflexo do fato da divergência do comprimento de correlação. O passo seguinte foi definir a função *beta* para o estudo da dependência dos acoplamentos nos entornos do ponto crítico com relação a variação das escalas de comprimento/energia.

Como já foi mencionado, no ponto crítico o comprimento de correlação diverge e o sistema físico, definido numa rede isotrópica, não possui nenhuma escala, por isso a rede pode ser aproximada por um *continuum* culminando numa teoria de campos quânticos^{¶¶¶}. Porém a teoria de campos é muito especial, fora as simetrias de translações e rotações, herdadas da rede isotrópica, ela deve ser invariante a dilatações - principal propriedade do ponto crítico. A teoria de campos *conformes* é a classe que atende a todas essas condições, portanto no capítulo 3 elas são estudadas. Funções de dois e três pontos de teorias conformes são apresentadas, junto com as cargas centrais a e c , que surgem devido as anomalias conformes, e uma análise de como a imposição de um fluxo de energia positivo limita os possíveis valores dessas cargas centrais é feito.

No fim deste capítulo há uma seção sobre teorias conformes perturbadas (*pCFT*), *i.e.* o sistema está fora, mas não muito, do ponto fixo. E é demonstrado que com apenas o conhecimento da teoria no ponto crítico (teoria conforme) pode-se encontrar uma aproximação, em torno do ponto fixo, da função *beta*

O estudo das transições de fase de segunda ordem através de *pCFT* foi amplamente desenvolvido (11, 29, 84, 88), principalmente nos anos oitenta, e muito bem sucedido. A grande limitação do método é sua origem perturbativa, ou seja, ele é limitado na análise de fluxos massivos e só descreve fluxos entre dois pontos fixos muito próximos. Devido aos avanços nos estudos da QCD no regime de acoplamento forte, a carência de uma formulação não perturbativa no estudo dos fenômenos críticos tornou-se um grande desafio. Uma tentativa de solução promissora é a correspondência *AdS/CFT*, um exemplo da dualidade *teorias de calibre/gravitação*. Nela é suposto que os graus de liberdade de uma teoria com gravitação em um espaço-tempo de d dimensões assintoticamente *AdS* ao serem mapeados em sua borda (ou parte dela) descrevem, de forma não perturbativa, uma teoria de campos num espaço de

^{¶¶¶}o motivo da teoria ser *quântica* é discutido na seção 2.3.6

Minkowski (sem gravitação) em $d - 1$ dimensões.

O assunto central do restante da tese é analisar o GR, de uma suposta $pCFT_{d-1}$, gerado pela correspondência AdS_d/CFT_{d-1} . Um sério candidato a descrever funções *beta's* exatas.

PARTE 2:

Correspondência AdS/CFT

Espaço AdS e o princípio holográfico

Na primeira parte deste capítulo é apresentado o espaço de Anti-de-Sitter em d dimensões (AdS_d), com assinatura lorentziana e euclidiana, cuja principal característica é possuir curvatura constante e negativa - o texto segue as notas de aula (72). Na segunda é mostrado a relação entre espaços AdS_d e teorias conformes em $d - 1$ dimensões, a correspondência AdS/CFT .

4.1 Espaço de Anti-de Sitter

4.1.1 Assinatura Minkowskiana

O espaço AdS_d pode ser definido como um hiperbolóide imerso em um espaço de curvatura nula em $d + 1$ dimensões com assinatura $(-, +, +, \dots, +, -)$

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + \dots + (X^{d-1})^2 - (X^d)^2 = -L^2, \quad (4.1.1)$$

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^{d-1})^2 - (dX^d)^2, \quad (4.1.2)$$

a escala $L^2 > 0$ caracteriza completamente o espaço AdS_d . A eq. (4.1.1) evidencia o grupo de simetria do espaço - $SO(d - 1, 2)$ - com $\frac{d(d+1)}{2}$ parâmetros arbitrários, portanto um espaço de simetria máxima.

Ao eliminar X^d na eq. (4.1.2) através do vínculo (4.1.1), fica-se com a métrica real do espaço

$$ds^2 = \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{X_\mu X_\nu}{L^2 + \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu} \right) dX^\mu dX^\nu = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu. \quad (4.1.3)$$

O escalar de Ricci (curvatura) da métrica acima é

$$R = -\frac{d(d-1)}{L^2}, \quad (4.1.4)$$

constante e negativo - a maior característica do espaço AdS_d . No limite $L^2 \rightarrow \infty$, a curvatura

tende a zero e o espaço de Minkowski (M_d) é recuperado.

Toda parametrização da eq. (4.1.1) é um sistema de coordenadas do espaço AdS_d , alguns cobrem toda a variedade outros parte, aqui são apresentados dois exemplos:

- Coordenadas Globais

O espaço AdS pode ser completamente parametrizado pelas coordenadas

$$X^0 = L \frac{\sin \frac{t}{L}}{\cos \Psi}, \quad (4.1.5)$$

$$X^l = L \omega^l \tan \Psi, \quad l = 1, \dots, d-1, \quad (4.1.6)$$

$$X^d = L \frac{\cos \frac{t}{L}}{\cos \Psi}, \quad (4.1.7)$$

com $0 < \Psi < \frac{\pi}{2}$ e

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \cos \theta^1; \quad \omega^2 = \sin \theta^1 \cos \theta^2; \dots; \\ \omega^{d-1} &= \sin \theta^1 \dots \sin \theta^{d-3} \sin \theta^{d-2} \\ 0 < \theta^p < \pi &; \quad p = 1, 2, \dots, d-3; \quad 0 \leq \theta^{d-2} < 2\pi \\ \sum_l (\omega^l)^2 &= 1, \end{aligned}$$

a métrica final em termos das d coordenadas globais $\{\Psi, t, \theta^i, i = 1, \dots, d-2\}$ é

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \Psi} (-dt^2 + L^2 d\Psi^2 + L^2 \sin^2 \Psi d\Omega_{(d-2)}^2). \quad (4.1.8)$$

Pela parametrização o tempo t é $\frac{2\pi}{L}$ -periódico. O problema pode ser solucionado devido o caráter estático do espaço AdS_d ($\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ e $g_{ti} = 0$), assim basta “desenrolar” a coordenada t , *i.e.* devemos considerar $t \in \mathbb{R}$, “abrir” o hiperbolóide (na literatura o processo é conhecido como *universal covering*). A borda do espaço encontra-se, por definição, no ponto $\Psi = 0$, onde o fator conforme da métrica se anula, *i.e.* ponto onde ds^2 diverge. A estrutura causal de AdS_d pode ser entendida através do estudo da métrica *não física* definida por $d\bar{s}^2 = \mathcal{U}(x^\mu) \cos^2 \Psi ds^2$ ($\mathcal{U}(x^\mu)$ é qualquer função regular e não nula em todos os pontos da variedade) que possui a mesma estrutura causal de AdS_d ($d\bar{s}^2 = ds^2 = 0$), porém é bem definida na borda. A topologia do espaço não físico é a de um “cilindro” infinito (na direção do tempo “desenrolado”) com raio L . Num corte $t = const.$ ao fixarmos Ψ tem-se uma esfera S^{d-2} de raio $\sin \Psi L$. A borda do espaço *não física* é a “casca do cilindro” com topologia $\mathcal{R} \otimes S^{d-2}$. Repare que a borda é definida a menos de um fator conforme, pois o próprio espaço *não física* é definido a menos de um fator conforme regular na borda (a função $\mathcal{U}(\Psi = \pi/2; x^i)$). Por isso ela é chamada de *borda conforme*.

Voltando para a questão do tempo, o fato de o considerarmos na reta não muda seu caráter

periódico - refletido nas geodésicas, por exemplo as do tipo-luz nas coordenadas globais são*:

$$\frac{t_{\pm}}{L} = \pm\Psi + const., \quad (4.1.9)$$

a solução com o de sinal $+$ move-se em direção a borda e a com sinal $-$ vem da borda. Um feixe de luz, do tipo t_+ , ao sair da origem ($t = 0, \Psi = 0$) chega à borda do espaço ($\Psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$) após um tempo finito $\frac{\pi}{2L}$ e a descrição com a solução t_+ termina, a geodésica t_+ não descreve a trajetória do feixe de luz para todo tempo, esse é um exemplo de *horizonte de Cauchy*. É necessário impor que o feixe seja refletido na borda de volta para o interior do espaço e solução passa a ser t_- . A ida e vinda do feixe de luz evidencia a periodicidade inerente ao espaço AdS_d .

- Coordenadas de Poincaré

As coordenadas globais de AdS_d são importantes para o entendimento pleno da geometria do espaço - geodésicas, horizontes de Cauchy, etc. - porém elas não são as únicas. Outro conjunto de coordenadas, o mais importante para esta tese, é o de Poincaré, definido por:

$$X^0 = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{L}} \left[L + \frac{e^{\frac{2y}{L}}}{L} (L^2 + (x^l)^2 - t^2) \right], \quad (4.1.10)$$

$$X^l = e^{\frac{y}{L}} x^l, \quad l = 1, \dots, d-2, \quad (4.1.11)$$

$$X^{d-1} = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{L}} \left[L - \frac{e^{\frac{2y}{L}}}{L} (L^2 - (x^l)^2 + t^2) \right], \quad (4.1.12)$$

$$X^d = e^{\frac{y}{L}} t, \quad (4.1.13)$$

$$ds^2 = dy^2 + e^{\frac{y}{L}} \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 0, \dots, d-2, \quad (4.1.14)$$

com $y, t, x^i \in \mathbb{Z}$. A desigualdade $X^0 - X^{d-1} = Le^{\frac{y}{L}} > 0$ demonstra a limitação do sistema de coordenadas. Apenas a região $X^0 > X^{d-1}$, metade de AdS_d é mapeada. Uma das razões da eq. (4.1.14) ser essencial no desenvolvimento da tese é que ela é a forma assintótica das soluções de Paredes de Domínio (PD) desenvolvidas ao longo de todo o texto. Cada hipersuperfície $y = const.$ representa um espaço M_{d-1} cujas coordenadas físicas são: $x_{fis}^i = e^{\frac{y}{L}} x^i$, ou seja, espaços M_{d-1} resultantes de diferentes "cortes" em y possuem coordenadas físicas relacionadas por um reescalamiento: $x_{fis,1}^i = e^{\frac{y_1 - y_2}{L}} x_{fis,2}^i$. De forma equivalente, pode-se concluir que a transformação $(y, x^i) \rightarrow (y + y_0, e^{-\frac{y_0}{L}} x^i)$ deixa a métrica de Poincaré invariante, *i.e.* é uma isometria de AdS_d . Uma outra forma de escrever (4.1.14) é através da

*essas são geodésicas *radiais* nulas, *i.e.* os ângulos são fixos, mas não há perda de generalidade devido as simetrias de AdS_d .

troca $z = Le^{-\frac{y}{L}}$

$$ds^2 = \frac{dz^2 + \eta_{ij}dx^i dx^j}{z^2}, \quad (4.1.15)$$

a isometria comentada anteriormente se torna um simples reescalamento total $(z, x^i) \rightarrow (\rho z, \rho x^i)$, $\rho = e^{-\frac{y_0}{L}}$. Tal propriedade é a base fundamental para a construção da correspondência AdS_d/CFT_{d+1} . No limite $z \rightarrow 0$ ($y \rightarrow \infty$), o fator conforme z^2 , na métrica (4.1.15), torna-se nulo (o elemento de linha diverge), caracterizando a borda do espaço (parte da borda, uma vez que as coordenadas não são globais). Já no limite $z \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow -\infty$) há uma hipersuperfície nula ($ds^2 = 0$), o horizonte de Cauchy[†] que marca o fim da descrição das coordenadas de Poincaré.

4.1.2 Assinatura Euclidiana: espaço hiperbólico

O espaço AdS_d euclidiano, ou simplesmente o espaço hiperbólico em d dimensões (H^d), consiste na continuação analítica $X^d \rightarrow iX_E^d$ nas eqs. (4.1.1) e (4.1.2)

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + \dots + (X_E^d)^2 = -L^2, \quad X^0 > L \quad (4.1.16)$$

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX_E^d)^2. \quad (4.1.17)$$

O vínculo (4.1.16) representa um hiperboloide imerso num espaço de Minkowski $(d+1)$ -dimensional. Assumir $X_0 > L$ é importante, pois há um segundo hiperboloide, desconectado do primeiro, em $X^0 < L$. Ainda de acordo com (4.1.16), o grupo de simetria de H^d é $SO(d, 1)$, novamente com $\frac{d(d+1)}{2}$ parâmetros. A troca formal $X^d \rightarrow iX_E^d$ induz a troca $t \rightarrow it_E$ no conjunto de eqs. (4.1.10)-(4.1.14), e a métrica de Poincaré na versão euclidiana torna-se:

$$ds^2 = \frac{dz^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j}{z^2}, \quad z = e^{-\frac{y}{L}} \quad (4.1.18)$$

a restrição $X^0 > X^{d-1}$ é automaticamente satisfeita, portanto a métrica acima cobre toda a variedade de H^d . A curvatura ainda é $R = -\frac{d(d-1)}{L^2}$, constante e negativa. No limite $L^2 \rightarrow \infty$, o espaço H^d reproduz o espaço euclidiano (E^d). Para $z \rightarrow 0$ o fator conforme $z^2 \rightarrow 0$ e o elemento de linha ds^2 diverge, caracterizando a borda do espaço. Por outro lado em $z \rightarrow \infty$ o elemento de linha se anula e temos um ponto[‡]. Uma questão importante é saber onde se encontra esse ponto. Para responder de forma mais clara a questão é melhor trabalharmos

[†]a partir deste ponto todas as vezes em que aparecer a palavra horizonte no texto, entenda horizonte de Cauchy.

[‡]como a assinatura da métrica é euclidiana $ds^2 = 0$ é um ponto, não há superfícies nulas.

com um outro sistema de coordenadas (que também nos será útil), o “esférico simétrico”, definido por:

$$X^0 = L \cosh r, \quad (4.1.19)$$

$$X^l = L \omega^l \sinh r, \quad (4.1.20)$$

$$X_E^d = L \omega^d \sinh r, \quad (4.1.21)$$

$$ds^2 = L^2 (dr^2 + \sinh^2 r d\Omega_{d-1}^2), \quad (4.1.22)$$

(r, t, θ^i) são coordenadas adimensionais globais com $t \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Supondo que o ponto $r = 0$ corresponda ao ponto (z', \vec{y}) nas coordenadas de Poincaré e r seja (z, \vec{x}) . Então r , em termos de $(z, z'; \vec{x}, \vec{y})$ é:

$$\frac{1}{\cosh r} = \frac{2zz'}{z^2 + z'^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2}. \quad (4.1.23)$$

Na métrica (4.1.22) é evidente que a borda se encontra no limite $r \rightarrow \infty$. O lado esquerdo de (4.1.23) assume o comportamento: $2e^{-r} \rightarrow 0$. No lado direito, o mesmo comportamento ocorre para $z = 0$ ou $z \rightarrow \infty$. Ou seja, o ponto $z \rightarrow \infty$ faz parte da borda. O resultado fica em maior evidência quando é percebido, via métrica (4.1.22), que a borda conforme de H^d é a esfera S^{d-1} e nas coordenadas de Poincaré $z = 0$ é apenas um plano, é necessário acrescentar um ponto ($z \rightarrow \infty$) para ser possível compactificar o plano numa esfera.

4.1.3 Espaço de Anti-de-Sitter como solução de vácuo na gravitação com constante cosmológica negativa

Suponha o modelo definido pelo seguinte funcional ação:

$$S = \int d^d x \sqrt{|g|} \frac{R}{\kappa^2} + S_{mat}, \quad (4.1.24)$$

onde $\kappa^2 \sim G_d$ (constante de Newton em d dimensões) e S_{mat} é a parte relacionada a matéria. O exemplo utilizado nesta tese é:

$$S_{mat} = - \int d^d x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + V(\sigma) \right). \quad (4.1.25)$$

A solução de vácuo do modelo, por definição, é $\sigma = \sigma^* = const$, t.q. σ^* seja um extremo do potencial ($V'(\sigma^*) = 0$). A contribuição do termo de matéria na solução de vácuo é dada apenas por $V(\sigma^*) \equiv -\frac{2\Lambda}{\kappa^2}$ (Λ é a constante cosmológica). A ação do modelo no vácuo fica:

$$S_{vac} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{|g|} (R^{vac} - 2\Lambda), \quad (4.1.26)$$

cuja eq. do movimento é:

$$R_{\mu\nu}^{vac} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{vac} = -\Lambda g_{\mu\nu}, \quad (4.1.27)$$

ao tirar o traço da eq. é encontrado:

$$R^{vac} = \frac{2d}{(d-2)}\Lambda, \quad (4.1.28)$$

caso $\Lambda < 0$ ($V(\sigma^*) < 0$) a solução de vácuo é dada pelo espaço AdS_d (ou H^d , dependendo da assinatura da métrica), com a identificação:

$$|\Lambda| = \frac{(d-1)(d-2)}{2L^2}. \quad (4.1.29)$$

4.2 Função de Green do escalar no espaço H_d

A função de Green[§] de um campo escalar massivo é (76, 77)

$$(\square_x - m^2) G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\delta^d(\vec{x} - \vec{x}')}{\sqrt{|g|}}, \quad \square = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial^\mu (\sqrt{|g|} \partial_\mu). \quad (4.2.1)$$

O uso da métrica (4.1.22) surge como uma ótima opção para resolver a eq. diferencial acima devido ao fato do espaço H_d ser homogêneo e isotrópico, portanto toda geodésica que passa pela origem do sistema de coordenadas é radial, *i.e.* com ângulos fixos e a distância geodésica é $\int ds = Lr$. Sem perda de generalidade podemos escolher $\vec{x}' = \vec{0}$ e fixar os ângulos $\theta^i = \frac{\pi}{2}$ (equador). A função de correlação torna-se a função de r :

$$(\partial_r^2 + (d-1) \coth r \partial_r - L^2 m^2) G(r) = 0, \quad r \neq 0. \quad (4.2.2)$$

As condições de contorno são: $r \rightarrow \infty$, $G(r) \rightarrow e^{-Cr}$ para alguma constante $C > 0$ e no assintótico $r \rightarrow 0$, $G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2}}$ (como um espaço E^d).

Com o *ansatz*

$$G(\xi) = v^{\frac{\Delta}{2}} F(v), \quad v = \frac{1}{\cosh^2 r}, \quad (4.2.3)$$

[§]ou função de correlação, ou ainda propagador.

é encontrada a eq. diferencial:

$$\begin{aligned} & \left(v(1-v) \frac{d^2}{dv^2} + (c - (a+b+1)v) \frac{d}{dv} - ab \right) F(v) = 0, \\ & a = \frac{\Delta}{2}, \quad b = \frac{\Delta+1}{2}, \quad c = \Delta - \frac{d-3}{2}, \\ & \Delta^2 - (d-1)\Delta - L^2 m^2 = 0 \text{ ou} \\ & \Delta_{\pm} = \frac{d-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} + L_*^2 m_*^2}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

A solução geral é dada em termos de funções hipergeométricas[¶]:

$$\begin{aligned} G(v) = & C_+ v^{\frac{\Delta_+}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{\Delta_+}{2}, \frac{\Delta_+ + 1}{2}; \Delta_+ - \frac{n-3}{2}; v \right) + \\ & + C_- v^{\frac{\Delta_-}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{\Delta_-}{2}, \frac{\Delta_- + 1}{2}; \Delta_- - \frac{n-3}{2}; v \right), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

C_{\pm} são constantes. No limite $r \rightarrow 0$ ($v \rightarrow 1$) ambas as soluções apresentam o mesmo comportamento $\sim \frac{1}{r^{d-2}}$. Já para $r \rightarrow \infty$ ($v \rightarrow 0$), fica-se com

$$G(v) \approx C_+ v^{\frac{\Delta_+}{2}} + C_- v^{\frac{\Delta_-}{2}} \approx C_+ 2^{\Delta_+} e^{-\Delta_+ r} + C_- 2^{\Delta_-} e^{-\Delta_- r} \rightarrow 0, \quad (4.2.6)$$

para evitar um comportamento oscilatório no assintótico é necessário $\Delta_{\pm} \in \mathbb{R}$, *i.e.*

$$m^2 L^2 > -\frac{(d-1)^2}{4}, \quad (4.2.7)$$

chamada de condição de Breitenlohner e Freedman (BF) (26). No caso de AdS_d , a condição BF fornece o limite mínimo para uma partícula, cuja massa ao quadrado é m^2 , ser causal^{||}. A condição BF não esgota as restrições sobre $G(r)$. Caso $m^2 L^2 > 0$, necessariamente $\Delta_- < 0$ e a condição de contorno força a escolha $C_- = 0$. Na região $-\frac{(d-1)^2}{4L^2} < m^2 < 0$, ambas soluções fornecem assintóticos corretos e não há razão para descartar alguma.

4.3 Correspondência AdS/CFT

Ao longo desta seção são apresentados dois argumentos a favor da correspondência AdS/CFT: 1) a relação entre as isometrias de AdS_d (H^d) e as transformações conformes numa CFT_{d-1} ; 2) o cálculo explícito da função de dois e três pontos de um operador escalar e a função de dois pontos do tensor energia-momento (identificando a carga central) de uma CFT_{d-1} através de uma teoria de campo num *background* H^d .

[¶]no apêndice A estão listadas as principais propriedades da função hipergeométrica.

^{||}neste sentido, partículas com $-\frac{(d-1)^2}{4L^2} < m^2 < 0$ não são *tachyons* em AdS_d .

A versão euclidiana de AdS_d será usada, pois além de termos interesse em modelos estatísticos tal escolha evita dificuldades técnicas.

4.3.1 Isometrias de $AdS_d (H_d)$ nas coordenadas de Poincaré

Vamos encontrar as transformações infinitesimais

$$z \rightarrow z' = z + \xi^z, \quad (4.3.1)$$

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (4.3.2)$$

tais que a métrica (4.1.15) fique invariante. O conjunto $\{\xi^\mu; \mu = z, i\}$ que gera as transformações isométricas é formado pelos vetores de Killing, soluções da eq.

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 2\xi_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho. \quad (4.3.3)$$

Dada a métrica (4.1.15), os símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\Gamma_{zz}^z = -\frac{1}{z}, \quad \Gamma_{ij}^z = \frac{\eta_{ij}}{z}, \quad \Gamma_{jz}^i = -\frac{\delta_j^i}{z}. \quad (4.3.4)$$

Começemos com o *ansatz*:

$$(\xi^z, \xi^i) = (zG(z, x), \xi^i(z, x)), \quad \text{ou} \quad (4.3.5)$$

$$(\xi_z, \xi_i) = \frac{L^2}{z^2} (zG(z, x), \bar{\xi}_\mu(z, x)), \quad \bar{\xi}_i = \eta_{ij}\xi^j. \quad (4.3.6)$$

Substituindo em (4.3.3) encontramos que $G = G(x)$ e a eq. diferencial:

$$\partial_i \bar{\xi}_j + \partial_j \bar{\xi}_i = 2G(x)\eta_{ij}, \quad (4.3.7)$$

exatamente a de uma transformação conforme num espaço plano em $(d - 1)$ -dimensões. A diferença crucial está no fato de $\bar{\xi}_i$ ser função não só de x^i mas também de z . A solução das isometrias, para $d - 1 \neq 2$, é:

$$z' - z = \delta z = z(\lambda - 2(b \cdot x)), \quad (4.3.8)$$

$$x'^i - x^i = \delta x^i = a^i + b^i z^2 + \omega_j^i x^j + \lambda x^i + b^i x^2 - 2(b \cdot x)x^i, \quad (4.3.9)$$

cujo número de parâmetros ($= \frac{d(d+1)}{2}$) é o mesmo numa teoria conforme num espaço plano em $d - 1$ dimensões, algo esperado já que possuem o mesmo grupo de simetrias**, porém as isometrias de $AdS_d (H^d)$ são bem diferentes das transformações conformes de uma CFT_{d-1} .

** $SO(D, 2)$ para a assinatura Lorentziana e $SO(D + 1, 1)$ para a Euclidiana.

Uma única exceção é encontrada quando elas são estendidas até a borda $z = 0$

$$\delta z = 0, \quad (4.3.10)$$

$$\delta x^i = a^i + \omega_j^i x^j + \lambda x^i + b^i x^2 - 2(b \cdot x)x^i, \quad (4.3.11)$$

aqui a correspondência é exata. O resultado não é de grande alarde, como já foi mencionado na seção 4.1.2, a “borda” dum espaço aberto^{††} não é determinada de forma unívoca, uma vez que sua métrica é definida a menos de um fator conforme, *i.e.*

$$\Omega^{-2}(x) \frac{z^2}{L^2} ds^2|_{z=0} \equiv ds_{borda}^2 = \Omega^{-2}(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.3.12)$$

então se existe alguma teoria (de campo) definida na “borda” de qualquer espaço, ela deve ser invariante a uma transformação conforme. Em particular, no caso $AdS_d (H^d)$ nas coordenadas de Poincaré, a teoria “vive” num espaço plano (sem gravitação), devida a forma de (4.3.12).

4.3.2 Campos escalares no espaço H^d . Definição das condições de contorno.

As soluções aproximativas de um conjunto de campos escalares massivos num *background* H^d sob condições de contorno específicas são apresentadas através seus propagadores livres desenvolvidos em duas representações: 1) representação de momentos (da transformada de Fourier) - útil mais adiante para estudar as flutuações nas soluções de Paredes de Domínio; 2) representação de coordenadas - muito mais prática para derivar as funções de dois e três pontos de uma CFT_{d-1} via princípio holográfico, ver seção 4.3.3.1.

Tenha um conjunto de N campos escalares interagindo entre si via um potencial em um espaço H^d acoplados a fontes externas $J_A(x)$, $A = 1, \dots, N$. Nas proximidades de um vácuo (extremo do potencial), é possível diagonalizar o termo quadrático e o funcional ação é escrito como:

$$S[\phi] = - \int dx^d \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_A \partial_\nu \phi_A - J_A(x) \phi_A + \frac{1}{2} m_A^2 \phi_A^2 + b_{ABC} \phi_A \phi_B \phi_C + \dots \right) \quad (4.3.13)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(b_{ABC})$, as eqs. do movimento para os campos são dadas por:

$$(-\square + m_A^2) \phi_A(x) = J_A(x). \quad (4.3.14)$$

^{††}logo não possui uma borda real, apenas o conceito de *borda conforme*.

4.3.2.1 Propagador borda-interior na representação dos momentos

Escolhemos trabalhar com as coordenadas de Poincaré, eq. (4.1.18). Na ausência de fontes externas ($J_A(x) = 0$), (4.3.14) fica:

$$(z^2 \partial_z^2 - (D-1)z \partial_z + z^2 \delta^{ij} \partial_i \partial_j - L^2 m_A^2) \phi_A(z, \vec{x}) = 0. \quad (4.3.15)$$

Pela simetria $SO(d-1) \times T_{d-1}$ da métrica existe a separação de variáveis

$$\phi_A(z, \vec{x}) = f_{p,A}(z) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \quad (4.3.16)$$

levando a seguinte eq. diferencial ordinária de segunda ordem para f_p

$$(\rho^2 \partial_\rho^2 - (D-1)\rho \partial_\rho - \rho^2 - L^2 m_A^2) f_{p,A}(\rho) = 0, \quad \rho = pz, \quad p = |\vec{p}|. \quad (4.3.17)$$

A solução geral é dada em termos de funções de Bessel modificadas^{††}

$$f_{p,A}(z) = (pz)^{\frac{D}{2}} [A_A(p) K_{\nu_A}(pz) + B_A(p) I_{\nu_A}(pz)], \quad (4.3.18)$$

$$\nu_A = \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} + m_A^2 L^2} = \Delta_+^A - \frac{(d-1)}{2} = -\Delta_-^A + \frac{(d-1)}{2}. \quad (4.3.19)$$

Agora serão impostas as condições de contorno. É desejado que ϕ tenda à zero na borda do espaço - de acordo com a discussão no fim da seção 4.1.2 a borda de H^d é o plano $z = 0$ acrescido do ponto $z \rightarrow \infty$. Começemos com o comportamento em $z \rightarrow \infty$:

$$K_{\nu_A}(\rho) \propto \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad I_{\nu_A}(\rho) \propto \frac{e^\rho}{\sqrt{\rho}}, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (4.3.20)$$

a condição de contorno só é satisfeita se $B_A(\rho) = 0$. Para $z \rightarrow 0$ temos o assintótico

$$K_{\nu_A}(pz) \approx 2^{\nu_A-1} \Gamma(\nu_A) (pz)^{-\nu_A} (1 + \mathcal{O}((pz)^2)) + \frac{\Gamma(-\nu_A)}{2^{\nu_A+1}} (pz)^{\nu_A} (1 + \mathcal{O}((pz)^2)), \quad (4.3.21)$$

$\nu_A \notin \mathbb{N}$. Quando $\nu_A \in \mathbb{N}$ o resultado muda - aparecem termos logarítmicos^{§§}. A forma assintótica de $f_p(z)$ é ($\nu_A \notin \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} f_{p,A}(z) &\approx A_A(p) \left(2^{\nu_A-1} \Gamma(\nu_A) (pz)^{\frac{(d-1)}{2}-\nu_A} (1 + \mathcal{O}((pz)^2)) + \frac{\Gamma(-\nu_A)}{2^{\nu_A+1}} (pz)^{\frac{(d-1)}{2}+\nu_A} (1 + \mathcal{O}((pz)^2)) \right) \\ &\approx A_A(p) 2^{\nu_A-1} \Gamma(\nu_A) p^{\Delta_+^A} z^{\Delta_-^A} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

onde foram usadas a definição de ν_A , a igualdade $\Delta_+^A + \Delta_-^A = D$ e o fato de $\Delta_+^A > \Delta_-^A$. A solução homogênea satisfaz a condição de contorno se $\Delta_-^A > 0$, assumido como verdade a

^{††}no apêndice A estão listadas as principais propriedades das funções de Bessel.

^{§§}o leitor interessado pode consultar (76) para ver os detalhes deste caso particular.

partir deste ponto. Tal condição, como já foi mostrado, restringe o valor da massa do campo a região $-\frac{(d-1)^2}{4} \leq m_A^2 L^2 < 0$. A solução geral da eq. homogênea é dada pela transformada de Fourier

$$\phi_A(z, \vec{x}) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} A_A(p) (pz)^{\frac{(d-1)}{2}} K_{\nu_A}(pz) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad (4.3.23)$$

$$\approx z^{\Delta_-^A} \phi_A^0(\vec{x}), \quad \Delta_-^A > 0, \quad z \rightarrow 0, \quad (4.3.24)$$

para alguma função $\phi_A^0(\vec{x})$. No limite $z \rightarrow \infty$, $\phi_A(z, \vec{x})$ vai à zero muito rapidamente (exponencialmente) tornando-se irrelevante em todos os cálculos.

A função $\phi_A^0(\vec{x})$ é muito importante para os nossos propósitos. É interessante eliminar o fator $A_A(p)$ na eq. (4.3.23) em favor dela. Uma é basicamente a transformada de Fourier da outra, mais especificamente:

$$A_A(p) = \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu) p^{\Delta_-}} \int d^d x \phi_A^0(\vec{x}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad (4.3.25)$$

substituindo na eq. (4.3.23)

$$\phi_A(z, \vec{x}) \equiv \phi_A^{clas}(z, \vec{x}) = \int d^D y K_A(\vec{x}, \vec{y}, z) \phi_A^0(\vec{y}), \quad (4.3.26)$$

$$K_A(\vec{x}, \vec{y}, z) = z^{\Delta_-^A} \int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{(pz)^{\nu_A}}{2^{\nu_A-1} \Gamma(\nu_A)} K_{\nu_A}(pz) e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}, \quad (4.3.27)$$

o núcleo $K_A(\vec{x}, \vec{y}, z)$ é o famoso propagador *borda-interior*^{¶¶} associado ao campo ϕ_A na representação dos momentos, pois uma vez conhecida a forma assintótica (na borda) do campo, *i.e.* $\phi_A^0(\vec{x})$, é possível descrever o mesmo em todo o interior. Para $z \rightarrow 0$ (4.3.27), com a ajuda de (4.3.28), torna-se:

$$K_A(\vec{x}, \vec{y}, z) \approx z^{\Delta_-^A} \int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^D} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = z^{\Delta_-^A} \delta^{d-1}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.3.28)$$

corroborando com (4.3.24).

4.3.2.2 Propagador borda-interior na representação de coordenadas

Vamos supor que seja possível escrever a solução da eq. (4.3.14) da seguinte forma:

$$\phi_A(z, \vec{x}) = \int d^{d-1} y K_A(\vec{x}, \vec{y}; z) \phi_A^0(\vec{y}) + \int dz' d^{d-1} y G_A(\vec{x}, \vec{y}; z, z') J_A(z', \vec{y}), \quad (4.3.29)$$

o primeiro termo do lado direito é solução da eq. homogênea com K_A e ϕ_A^0 sendo os mesmos de (4.3.26) e (4.3.27). O segundo é a solução da eq. não-homogênea, logo G_A é a função

^{¶¶}do inglês *bulk to boundary*

de Green (4.2.5) escrita nas coordenadas de Poincaré via relação (4.1.23) - ou o propagador *borda-borda*. As densidades $K_A(\vec{x}, \vec{y}; z)$ e $G_A(\vec{x}, \vec{y}; z, z')$ satisfazem as eqs.

$$(-\square + m_A^2)K_A(\vec{x}, \vec{y}; z) = 0, \quad (4.3.30)$$

$$(-\square + m_A^2)G_A(\vec{x}, \vec{y}; z, z') = \frac{\delta^D(\vec{x} - \vec{y})\delta(z - z')}{\sqrt{|g|}}. \quad (4.3.31)$$

O propósito desta seção é derivar a expressão de K_A no espaço das coordenadas. Como a região de interesse é $\Delta_- > 0$ ($-\frac{(d-1)^2}{4} \leq \mu^2 < 0$), então *a priori* não podemos descartar nenhuma das soluções de (4.2.5), ambas satisfazem as condições de contorno já discutidas para G_A .

Vamos apresentar argumentos para fixar $C_- = 0$ em (4.2.5) e criar uma relação entre os dois propagadores. Iniciamos com a invocação da primeira identidade de Green. Dados ψ e φ quaisquer num espaço arbitrário em d dimensões:

$$\begin{aligned} \int_V d^d x' \sqrt{|g|} [\psi (-\square + m^2) \varphi - \varphi (-\square + m^2) \psi] &= - \int_V d^d x' \sqrt{|g|} (\psi \square \varphi - \varphi \square \psi) \\ &= - \int_V d^d x' \sqrt{|g|} \nabla_\mu (g^{\mu\nu} (\psi \nabla_\nu \varphi - \varphi \nabla_\nu \psi)) = - \int_{\partial V} d^{d-1} x' \sqrt{|g|} n_\mu (g^{\mu\nu} (\psi \nabla_\nu \varphi - \varphi \nabla_\nu \psi)). \end{aligned}$$

Ao fixar o espaço como H^d , as quantidades $\varphi = G_A$ e $\psi = \phi_A$ e o volume V como todo o espaço ($G_A|_{\partial V} = 0$ - condição de contorno de Dirichlet satisfeita pela eq. (4.2.5)); a primeira identidade de Green toma a forma:

$$\int dz' d^{d-1} y \sqrt{|g|} [\phi (-\square + m_A^2) G_A - G_A (-\square + m_A^2) \phi] = - \int d^{d-1} y \frac{L^{D+1}}{z'^d} \frac{z'^2}{L^2} \phi_A \partial_{z'} G_A \Big|_{z' \rightarrow 0},$$

usando as eqs. (4.3.14) e (4.3.31) no lado esquerdo da igualdade e a forma assintótica de ϕ no lado direito (eq. (4.3.24)) chega-se a forma final

$$\phi_A(z, \vec{x}) = -L^{d-2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^{d-1} y \epsilon^{-d+2+\Delta_A} \partial_\epsilon G_A(\vec{x}, \vec{y}; z, \epsilon) \phi_A^0(\vec{y}) + \int dz' d^{d-1} y G_A(\vec{x}, \vec{y}; z, z') J_A(z', \vec{y}).$$

Comparando com a eq. (4.3.29), K_A é determinado em termos de G_A

$$K_A(\vec{x}, \vec{y}; z) = -L^{d-2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-d+2+\Delta_A} \partial_\epsilon G_A(\vec{x}, \vec{y}; z, \epsilon). \quad (4.3.32)$$

O limite $z' = \epsilon \rightarrow 0$ corresponde à $v = \left(\frac{2z\epsilon}{z^2 + \epsilon^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2} \right)^2 \rightarrow 0$ e:

$$G_A(\vec{x}, \vec{y}; z; \epsilon) \approx C_+ \frac{(2z\epsilon)^{\Delta_A^+}}{(z^2 + \epsilon^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2)^{\Delta_A^+}} + C_- \frac{(2z\epsilon)^{\Delta_A^-}}{(z^2 + \epsilon^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2)^{\Delta_A^-}}, \quad (4.3.33)$$

portanto

$$\begin{aligned} \epsilon^{-d+\Delta_-} \partial_\epsilon G_A(\vec{x}, \vec{y}; z, \epsilon) \approx & C_+ \Delta_+^A \frac{z^{\Delta_+}}{(z^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2)^{\Delta_+}} + \\ & C_- \Delta_-^A \epsilon^{-(d-1)+2\Delta_-} \frac{z^{\Delta_-}}{(z^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2)^{\Delta_-}} + C_+ \mathcal{O}(\epsilon^2) + C_- \mathcal{O}(\epsilon^{-d+3\Delta_-+2}), \end{aligned}$$

repare que $-(d-1) + 2\Delta_- = -\sqrt{\frac{D^2}{4} + \mu^2} < 0$, assim no limite $\epsilon \rightarrow 0$, K_A irá divergir (consequentemente ϕ_A) a menos que $C_- = 0$. A condição de contorno () fixa o propagador *borda-borda* e *borda-interior* como:

$$G_A(v) = C_+ \xi^{\Delta_+} F\left(\frac{\Delta_+^A}{2}, \frac{\Delta_+^A + 1}{2}; \Delta_+^A - \frac{d-3}{2}; v\right), \quad (4.3.34)$$

$$K(\vec{x}, \vec{y}; z) = C \frac{z^{\Delta_+}}{(z^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2)^{\Delta_+}}, \quad C = -L^{d-2} \Delta_+^A C_+. \quad (4.3.35)$$

A constante C é fixada via eq. (4.3.28), *i.e.* pela condição

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^{\Delta_-}} \int d^D y K(\vec{x}, \vec{y}; z) \stackrel{!}{=} 1, \quad (4.3.36)$$

o resultado é:

$$C = \frac{\Gamma(\Delta_+^A)}{\pi^{\frac{(d-1)}{2}} \Gamma\left(\Delta_+^A - \frac{(d-1)}{2}\right)}. \quad (4.3.37)$$

Por fim, combinando as eqs. (4.3.29) e (4.3.35), temos as soluções das eqs. do movimento na aproximação quadrática sem fontes externas ($J_A = 0$) que obedecem as condições de contorno

$$\phi_A(\vec{x}, z) \equiv \phi_A^{clas}(\vec{x}, z) = \frac{\Gamma(\Delta_+^A)}{\pi^{\frac{(d-1)}{2}} \Gamma\left(\Delta_+^A - \frac{(d-1)}{2}\right)} \int d^{d-1} y \frac{z^{\Delta_+^A}}{(z^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2)^{\Delta_+^A}} \phi_A^0(\vec{y}) \quad (4.3.38)$$

expressão equivalente à (4.3.27), agora em termos de coordenadas. Para fins futuros, vamos escrever a forma assintótica de $K_A(\vec{x}, \vec{y}; z)$:

$$\begin{aligned} K_A(\vec{x}, \vec{y}; \epsilon) \approx & \epsilon^{\Delta_-} \delta^{d-1}(\vec{x} - \vec{y}) (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) + \\ & \frac{\Gamma(\Delta_+^A)}{\pi^{\frac{(d-1)}{2}} \Gamma\left(\Delta_+^A - \frac{(d-1)}{2}\right)} \frac{\epsilon^{\Delta_+^A}}{(\vec{x} - \vec{y})^{2\Delta_+^A}} (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

que aplicada à eq. (4.3.38) resulta em:

$$\phi_A^{clas}(\vec{x}, \epsilon) \stackrel{\epsilon \ll L}{\approx} \epsilon^{\Delta_-} \phi_A^0(\vec{x}) (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) + \epsilon^{\Delta_+} A_A(\vec{x}) (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)), \quad (4.3.40)$$

$$A_A(\vec{x}) = \frac{\Gamma(\Delta_+^A)}{\pi^{\frac{(d-1)}{2}} \Gamma\left(\Delta_+^A - \frac{(d-1)}{2}\right)} \int d^{d-1} y \frac{\phi_A^0(\vec{y})}{(\vec{x} - \vec{y})^{2\Delta_+^A}}, \quad (4.3.41)$$

a expressão $A_A(\vec{x})$ é formal, pois é divergente.

A eq. (4.3.26) também mostra como $\phi_A^0(\vec{y})$ muda após um reescalamto. A transformação $(z, \vec{x}) \rightarrow (\lambda z, \lambda \vec{x})$ é uma isometria de H^d . O fato deve ser refletido na solução do campo escalar, *i.e.* $\phi_A(z, \vec{x}) = \phi_A(\lambda z, \lambda \vec{x})$, forçando a transformação

$$\phi_A^0(\vec{y}) = \lambda^{\Delta_A} \phi_A^0(\lambda \vec{y}). \quad (4.3.42)$$

4.3.3 Implementação da correspondência AdS/CFT

A relação entre a teoria gravitacional em d dimensões e a teoria conforme em $(d - 1)$ dimensões é dada pela identificação da função de partição da teoria no interior (gravitação) *on shell* com o gerador funcional de uma teoria conforme, onde a função $\phi_0(\vec{x})$ funciona como o acoplamento de um operador relevante $\mathcal{O}(\vec{x})$ (1, 76). De forma prática:

$$\mathcal{Z}[\phi^0] \equiv \int_{\phi \sim \phi_0} D\phi e^{-S[\phi]} = \langle e^{-\int d^{d-1}x \phi^0(\vec{x}) \mathcal{O}(\vec{x})} \rangle_{CFT}, \quad (4.3.43)$$

no limite^{***} $\frac{L^{d-2}}{\kappa^2} \sim \left(\frac{L}{l_{pl}}\right)^{d-2} \gg 1$ (L é a escala do espaço H^d), a gravitação clássica descreve a parte gravitacional e a aproximação de ponto de sela é suficiente,

$$e^{-S[\phi_{clas}]} = \langle e^{-\int d^{d-1}x \phi^0 \mathcal{O}(\vec{x})} \rangle_{CFT}, \quad (4.3.44)$$

então uma vez conhecida a ação gravitacional *on shell* (lado esquerdo da eq. acima) é possível calcular a função de n -pontos da teoria conforme definida na borda $\partial H^d \approx E^{d-1}$ via a fórmula:

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}(\vec{x}_n) \rangle = (-)^{n+1} \frac{\delta^n S}{\delta \phi^0(\vec{x}_1) \dots \delta \phi^0(\vec{x}_n)} \Bigg|_{\phi^0=0}. \quad (4.3.45)$$

Caso haja mais campos na teoria definida no *interior* mais acoplamentos surgirão na teoria conforme,^{†††} $\phi_0 \mathcal{O} \rightarrow \sum_i \phi_i^0 \mathcal{O}_i$. Outra observação digna de nota é que ambos os lados da igualdade (4.3.43) (ou (4.3.44)) são divergentes^{‡‡‡}. No lado direito das eqs. - associada a teoria de campo - o problema pode ser resolvido ao ser colocado um corte (*cut-off*), algo equivalente será necessário no lado esquerdo - ligado à gravitação.

A eq. (4.3.43) é suficiente para determinar a dimensão de escala do operador $\mathcal{O}(\vec{x})$. Para o funcional gerador ser conforme invariante ele deve ser insensível a um reescalamto $\vec{x} \rightarrow$

^{***}No caso $H_d \rightarrow AdS_d$ essa quantidade é interpretada como a área em torno de um volume $(d-1)$ -dimensional (tempo fixo) por unidades de Planck. Num buraco negro, sabe-se que a entropia é proporcional a área do horizonte, logo esse limite é o de uma grande entropia (muitos graus de liberdade).

^{†††}o mesmo raciocínio pode ser implementado quando há fontes vetoriais e tensoriais, ver seção 4.3.3.3

^{‡‡‡}a divergência no lado direito será mostrada mais a frente.

$$\vec{x}' = \lambda \vec{x}:$$

$$\langle e^{\int d^{d-1}x \phi_0(\vec{x}) \mathcal{O}(\vec{x})} \rangle_{CFT} = \langle e^{\int d^{d-1}x' \phi_0(\vec{x}') (\lambda^{-(d-1)+\Delta_-} \mathcal{O}(\vec{x}))} \rangle_{CFT} \quad (4.3.46)$$

$$\stackrel{!}{=} \langle e^{\int d^{d-1}x' \phi_0(\vec{x}') \mathcal{O}(\vec{x}')} \rangle_{CFT}, \quad (4.3.47)$$

que só é verdade se:

$$\mathcal{O}(\vec{x}) \equiv \mathcal{O}_{\Delta_+}(\vec{x}) = \lambda^{\Delta_+} \mathcal{O}_{\Delta_+}(\vec{x}'), \quad (4.3.48)$$

assim a dimensão de escala do operador \mathcal{O} é $\Delta_+ > 0$, provando que ele é relevante. Ao comparar (4.3.42) e (4.3.48), fica clara a identificação de $\phi^0(\vec{x})$ como a fonte na *CFT* perturbada. Pelos resultados do capítulo anterior, as funções de dois pontos e três pontos do operador \mathcal{O} devem ser:

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_+}(\vec{x}_1) \mathcal{O}_{\Delta_+}(\vec{x}_2) \rangle_{CFT} \propto \frac{1}{x_{12}^{2\Delta_+}}, \quad (4.3.49)$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_+}(\vec{x}_1) \mathcal{O}_{\Delta_+}(\vec{x}_2) \mathcal{O}_{\Delta_+}(\vec{x}_3) \rangle_{CFT} \propto \frac{1}{x_{12}^{\Delta_+} x_{13}^{\Delta_+} x_{23}^{\Delta_+}}, \quad (4.3.50)$$

Nas seções 4.3.3.1 e 4.3.3.2 a eq. (4.3.45) será usada para calcular as funções de dois e três pontos, reproduzindo (4.3.49) e (4.3.50). Já na seção (4.3.3.3), a eq. 4.3.45 é adaptada para o cálculo da função de dois pontos do tensor energia-momento, com o intuito de não apenas mostrar a força da correspondência AdS/CFT, ao reencontrar a eq. (3.2.22), mas também de identificar a carga central c de uma CFT_{d-1} (ver seção 3.3.3) com objetos do espaço AdS_d .

4.3.3.1 Função de dois pontos do campo escalar

A ação (4.3.13), sem fonte externa e desprezando os termos cúbicos, pode ser reescrita como^{§§§}

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{|g|} (\nabla_\mu (\phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \phi (-\square + m^2) \phi), \quad (4.3.51)$$

no caso de $\phi = \phi_{clas}$ (eq. (4.3.26)), só sobra o termo de superfície. Usando as coordenadas de Poincaré e fazendo uso dos mesmos argumentos supracitados para desprezar o limite $z \rightarrow \infty$

^{§§§}para simplificar a notação o índice A será suprimido nesta seção.

temos:

$$\begin{aligned}
S[\phi_{clas}] &= -\frac{1}{2} \int d^{d-1}y L^{d-2} \epsilon^{-d+2} \phi_{clas}(\vec{y}, \epsilon) \partial_\epsilon \phi_{clas}(\vec{y}, \epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0 \\
&= -\frac{L^{d-2} \epsilon^{-d+2}}{2} \int d^{d-1}y \int d^{d-1}y_1 \int d^{d-1}y_2 K(\vec{y}, \vec{y}_1; \epsilon) \partial_\epsilon K(\vec{y}, \vec{y}_2; \epsilon) \phi_0(\vec{y}_1) \phi_0(\vec{y}_2), \quad \epsilon \rightarrow 0 \\
&\equiv -\frac{1}{2} \int d^{d-1}y_1 \int d^{d-1}y_2 \phi_0(\vec{y}_1) \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \phi_0(\vec{y}_2), \tag{4.3.52}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2) &= L^{d-2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-d+2} \int d^D y K(\vec{y}, \vec{y}_1; \epsilon) \partial_\epsilon K(\vec{y}, \vec{y}_2; \epsilon) \\
&= L^{d-2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\Delta_+ + 1} \partial_\epsilon K(\vec{y}_1, \vec{y}_2; \epsilon), \tag{4.3.53}
\end{aligned}$$

usando a forma de $K(\vec{y}_1, \vec{y}_2; \epsilon)$ derivada via propagadores, eq. (4.3.39):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2) &= L^{d-2} \Delta_- \epsilon^{-(\Delta_+ - \Delta_-)} \delta^{d-1}(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) + L^{d-2} \frac{\Gamma(\Delta_+)}{\pi^{\frac{(d-1)}{2}} \Gamma\left(\Delta_+ - \frac{(d-1)}{2}\right)} \frac{L^{d-2} \Delta_+}{(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)^{2\Delta_+}}, \\
&\equiv \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2; \epsilon)_{(I)} + \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)_{(II)}, \tag{4.3.54}
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2; \epsilon)_{(I)}$ gera termos singulares em $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$, ao mesmo tempo em que não contribui nos outros casos. Seus componentes são chamados de *termos de contato*. Ao Assumir $\vec{y}_1 \neq \vec{y}_2$, via eq. (4.3.45) ($n = 2$) a função de dois pontos do operador \mathcal{O}_{Δ_+} é:

$$-\frac{\delta^2 S[\phi_{clas}]}{\delta \phi_0(\vec{y}_1) \delta \phi_0(\vec{y}_2)} = \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \frac{L^{d-2} \Gamma(\Delta_+ + 1)}{\pi^{(d-1)/2} \Gamma\left(\Delta_+ - \frac{(d-1)}{2}\right)} \frac{1}{(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)^{2\Delta_+}} = \langle \mathcal{O}_{\Delta_+} \mathcal{O}_{\Delta_+} \rangle,$$

de acordo com a discussão no fim da seção anterior.

Voltando ao termo $\mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2; \epsilon)_{(I)}$. A sua primeira contribuição na ação é:

$$\begin{aligned}
S[\phi]_{(I)} &= -\frac{1}{2} \int d^{d-1}y_1 \int d^{d-1}y_2 \phi_0(\vec{y}_1) \mathcal{F}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)_{(I)} \phi_0(\vec{y}_2) \\
&= -\frac{\Delta_-}{2L} \int d^{d-1}y \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-1} (\epsilon^{\Delta_-} \phi_0(\vec{y}))^2 (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)),
\end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma covariante:

$$S[\phi]_{(I)} = -\frac{\Delta_-}{2L} \int_\epsilon d^{d-1}x \left(\sqrt{|\gamma|} \phi(\epsilon, \vec{x})^2 + \dots \right), \tag{4.3.55}$$

os ... são as contribuições (também singulares) de ordem maior em ϵ . O termo $\sqrt{|\gamma|}$ é o módulo da raiz do determinante da métrica induzida na borda - nas coordenadas de Poincaré $\sqrt{|\gamma|} = \frac{L^{(d-1)}}{\epsilon^{(d-1)}}$. É importante salientar o fato da eq. (4.3.55) ser covariante, apesar do cálculo ser feito no corte $z = \epsilon$ (esquema de regularização). No fim, o termo divergente criado por

(I) é eliminado ao ser acrescentado à ação um termo de superfície (não altera as eqs. do movimento nem o cálculo da função de n - pontos), *i.e.* um contra-termo, e só no fim o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado:

$$S[\phi]_{reg} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (S[\phi] + S[\phi]_{ct}), \quad (4.3.56)$$

$$S_{ct}[\phi] = -S[\phi]_{(I)} = \frac{\Delta_-}{2L} \int_{\epsilon} d^{d-1}x \left(\sqrt{|\gamma|} \phi(\epsilon, \vec{x})^2 + \dots \right). \quad (4.3.57)$$

A “receita” holográfica pode ser resumida da seguinte forma: Ação *on shell* não deve ser calculada diretamente na borda, mas sim na superfície $z = \epsilon$, onde ϵ é arbitrariamente pequeno. Os contra-termos necessários devem ser acrescentados para eliminar as divergências (termos de contato), e só no fim o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado. O esquema de regularização e renormalização na borda da ação gravitacional reflete o procedimento análogo que ocorre em qualquer teoria de campo quântica (no caso a CFT_{d-1} definida na borda), quando a regularização escolhida consiste em discretizar o espaço em células de volume ϵ^{d-1} (refletindo uma estrutura de rede); contra-termos são adicionados à ação e só no fim $\epsilon \rightarrow 0$ (limite termodinâmico).

A representação dos momentos também pode ser usada para calcular a função de dois pontos, ver detalhes em (76).

4.3.3.2 Função de três pontos do campo escalar

Sem desprezar os termos $\mathcal{O}(b_{ABC})$, as eqs. do movimento da ação (4.3.13), sem fontes externas ($J_A(x) = 0$), são:

$$(-\square + m_A^2) \phi_A = -b_{ABC} \phi_B \phi_C, \quad (4.3.58)$$

cuja solução para ϕ_A é:

$$\begin{aligned} \phi_A(z, \vec{x}) = & \int d^D y K_A(z, \vec{x}; \vec{y}) \phi_A^0(\vec{y}) \\ & - b_{ABC} \int d^D y \int_0^\infty dw \sqrt{|g|} G_A(z, \vec{x}; w, \vec{y}) \phi_B^0(\vec{y}) \phi_C^0(\vec{y}). \end{aligned} \quad (4.3.59)$$

Reescrevendo o termo cinético da ação - como feito na função de dois pontos - e substituindo as eqs. do movimento (respeitando a aproximação), tem-se:

$$\begin{aligned} S &= - \int dz d^D x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu (\phi_A \partial^\mu \phi_A) - \frac{1}{2} \underbrace{\phi_A (\square - m_A^2) \phi_A}_{=b_{ABC} \phi_A \phi_B \phi_C} + b \phi_A \phi_B \phi_C + \mathcal{O}(b^2) \right) \\ &= - \int dz d^D x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu (\phi_A \partial^\mu \phi_A) - \frac{b_{ABC}}{2} \phi_A \phi_B \phi_C + \mathcal{O}(b^2) \right) \end{aligned}$$

o termo de derivada total gera as funções de dois pontos e será ignorado, o termo de interesse é o de $\mathcal{O}(b)$. Ao substituir a solução (4.3.59) nele temos:

$$\frac{b_{ABC}}{2} \int d^{d-1} x dz \sqrt{|g|} \int d^{d-1} y_1 d^{d-1} y_2 d^{d-1} y_3 K_A(z, \vec{x}; \vec{y}_1) K_B(z, \vec{x}; \vec{y}_2) K_C(z, \vec{x}; \vec{y}_3) \phi_A^0(\vec{y}_1) \phi_B^0(\vec{y}_2) \phi_C^0(\vec{y}_3),$$

portanto

$$\begin{aligned} &\frac{\delta S}{\delta \phi_A^0(\vec{y}_1) \delta \phi_B^0(\vec{y}_2) \delta \phi_C^0(\vec{y}_3)} \Big|_{\phi_A^0=0} \equiv \mathcal{P}_3 \\ &= \frac{b_{ABC}}{2} \int d^{d-1} x dz \sqrt{|g|} K_A(z, \vec{x}; \vec{y}_1) K_B(z, \vec{x}; \vec{y}_2) K_C(z, \vec{x}; \vec{y}_3), \end{aligned} \quad (4.3.60)$$

sem somas nos índices repetidos. Após um cálculo árduo e entediante chega-se a expressão final ($\Delta_A \equiv \Delta_+^A$):

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^3 S}{\delta \phi_A^0(\vec{y}_1) \delta \phi_B^0(\vec{y}_2) \delta \phi_C^0(\vec{y}_3)} \Big|_{\phi_i^0=0} \stackrel{!}{=} \langle \mathcal{O}(\vec{y}_1)_{\Delta_A} \mathcal{O}(\vec{y}_2)_{\Delta_B} \mathcal{O}(\vec{y}_3)_{\Delta_C} \rangle \\ &= \text{const.}_{ABC} y_{12}^{-\Delta_A - \Delta_B + \Delta_C} y_{13}^{-\Delta_A + \Delta_B - \Delta_C} y_{23}^{\Delta_A - \Delta_B - \Delta_C}, \end{aligned} \quad (4.3.61)$$

$$\text{const.}_{ABC} = \frac{b_{ABC}}{4\pi^{d-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\Delta_A + \Delta_B + \Delta_C - (d-1)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\Delta_A + \Delta_B - \Delta_C}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\Delta_A - \Delta_B + \Delta_C}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-\Delta_A + \Delta_B + \Delta_C}{2}\right)}{\Gamma\left(\Delta_A - \frac{(d-1)}{2}\right) \Gamma\left(\Delta_B - \frac{(d-1)}{2}\right) \Gamma\left(\Delta_C - \frac{(d-1)}{2}\right)},$$

sem soma nos índices. O resultado é exatamente o esperado de uma CFT_{d-1} e no caso particular $A = B = C$ reproduz eq. (4.3.48).

4.3.3.3 Função de dois pontos do tensor energia-momento

Para a correspondência AdS_d/CFT_{d-1} , ou melhor H^d/CFT_{d-1} , incorporar cálculos envolvendo o tensor “energia-momento” da CFT_{d-1} euclidiana, é preciso achar seu correspondente na teoria gravitacional (veja por exemplo (1, 78)). Ele precisa estar definido sobre um *background* AdS_d e ser um tensor de rank 2 (em $d - 1$ dimensões), simétrico e de traço nulo. O único tensor de rank 2 simétrico na teoria gravitacional é a métrica, portanto o tensor energia-momento *holográfico* deve ter relação com as flutuações, $h_{\mu\nu}$, da métrica ao redor do

background H^d , i.e.

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, d-1, \quad (4.3.62)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica de H^d nas coordenadas de Poincaré, eq. (4.1.18). A flutuação pode ser desmembrada em componentes escalares, vetoriais e tensoriais. Nosso interesse é apenas na parte tensorial h_{ij}^{TT}

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}(z, \vec{x})) dx^i dx^j), \quad (4.3.63)$$

$i, j = 0, 1, \dots, d-2$, com $h^{TT}{}_{i i} = \partial^i h_{ij}^{TT} = 0$, já que $T_i^i = \partial^i T_{ij} = 0$. Assim ao impor a condição de contorno na borda

$$h_{ij}^{TT}(z, \vec{x}) \approx z^{\Delta_-} h_{ij}^0(\vec{x}), \quad z \rightarrow 0, \quad (4.3.64)$$

é esperado que da ação *on-shell*, via eq. (4.3.45) (caso $n = 2$), seja encontrado:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ij}^0 \delta h_{kl}^0} = \langle T_{ij}(\vec{x}) T_{kl}(\vec{y}) \rangle, \quad (4.3.65)$$

sendo o lado direito dado pela eq. (3.2.22) - com a troca dos índices gregos para os latinos.

Ao substituir (4.3.63) nas eqs. de Einstein e negligenciando termos de $\mathcal{O}((h^{TT})^2)$, é encontrado:

$$\square_{(H^d)} h_{ij}^{TT} = 0, \quad (4.3.66)$$

ou seja, a componente tensorial transversa e de traço nulo da flutuação da métrica obedece a uma eq. de Klein-Gordon (no espaço H^d) com massa nula, logo $\Delta_- = 0$ em (4.3.64).

A escassez de cálculos e argumentos para realmente demonstrar que a componente h_{ij}^{TT} se desacopla dos outros termos da flutuação (e só por isso podemos descartá-los nesta análise) se deve ao fato de que as flutuações lineares^{¶¶¶} são estudadas em detalhes na seção 5.5.4 e no apêndice D. Por exemplo, (4.3.66) nada mais é do que a eq. (5.5.63) para $e^{A(y)} = e^{y/L}$ - após a troca $z = Le^{y/L}$.

Análogo ao caso do campo escalar, ver eq. (4.3.35), a solução de $h_{ij}^{TT}(z; \vec{x})$ pode ser escrita em termos de um propagador *borda-interior*:

$$h_{ij}^{TT}(z; \vec{x}) = \int d^{d-1} y K_{ij;{}^{kl}}(\vec{x}, \vec{y}; z) h_{kl}^0(\vec{y}). \quad (4.3.67)$$

^{¶¶¶}em espaços assintoticamente AdS_d (ou H^d).

A expressão acima é solução de (4.3.66) com a condição de contorno (4.3.64) se (78):

$$K_{ij,kl}(\vec{x}, \vec{y}; z) = \text{const.} \frac{z^{d-1}}{[z^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2]^{d-1}} I_i^l(\vec{x} - \vec{y}) I_j^k(\vec{x} - \vec{y}) \epsilon_{ij,kl}, \quad (4.3.68)$$

$$\text{const.} = \frac{d\Gamma(d-1)}{(d-2)\pi^{(d-1)/2}\Gamma((d-1)/2)} \quad (4.3.69)$$

$$\epsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) - \frac{1}{d-1} \delta_{ij} \delta^{kl}, \quad (4.3.70)$$

onde I_{ij} é dado por (3.2.20) (troque os índices gregos por latinos). É fácil verificar o comportamento

$$K_{ij,kl}(\vec{x}, \vec{y}; z) \approx \epsilon_{ij,kl} \delta^{d-1}(\vec{x} - \vec{y}), \quad z \rightarrow 0, \quad (4.3.71)$$

satisfeito por (4.3.68) - análogo a (4.3.28) ($\Delta_- = 0$). Substituindo a métrica (4.3.63) na ação (4.1.26), o termo referente a flutuação - uma vez eliminado os termos de *contato* - é:

$$S_h = \frac{\text{const.}}{8} \left(\frac{L}{l_{pl}} \right)^{d-2} \int d^{d-1}x d^{d-1}y h_{ij}^0(\vec{x}) \frac{\mathcal{J}^{ij,kl}}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2(d-1)}} h_{kl}^0(\vec{y}), \quad (4.3.72)$$

$\mathcal{J}^{ij,kl}$ é definido na eq. (3.2.22) - trocando os índices gregos por latinos. Finalmente podemos calcular:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ij}^0 \delta h_{kl}^0} = \text{const.} \left(\frac{L}{l_{pl}} \right)^{d-2} \frac{\mathcal{J}^{ij,kl}}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2(d-1)}}, \quad (4.3.73)$$

exatamente (3.2.22) ao identificarmos a carga central c como:

$$c \equiv \frac{C_T}{\text{const.}} = \left(\frac{L}{l_{pl}} \right)^{d-2}, \quad (4.3.74)$$

como trabalhamos no regime de gravitação clássica, $L/l_{pl} \gg 1$, então a teoria conforme holográfica possui uma carga central c grande. No próximo capítulo é mostrado que a carga central a *holográfica* possui o mesmo valor, logo a correspondência AdS_d/CFT_{d-1} (ou melhor H^d/CFT_{d-1}), utilizando a gravitação EH, só descreve teorias conformes com $a = c \gg 1$.

A forma exata das funções de dois e três pontos de um campo escalar e da função de dois pontos do tensor energia-momento numa CFT_{d-1} foram derivadas através de uma gravitação AdS_d uma vez estabelecido o *dicionário holográfico*. O resultado é fantástico, mas nosso objetivo vai um pouco além, descrever o fluxo do GR de uma teoria conforme perturbada (fora do ponto fixo) em $d-1$ dimensões, através de uma gravitação em d dimensões.

Paredes de Domínio: aplicações e limitações na correspondência *AdS/CFT*

Até aqui foram mostrados indícios da relação entre uma CFT_{d-1} e a borda do espaço AdS_d (H^d). Todavia, a correspondência AdS/CFT pode ser estendida para descrever sistemas fora do ponto fixo, *i.e.* uma teoria conforme perturbada ($pCFT_{d-1}$). O interesse principal desta tese é descrever a função *beta*, ou seja, os fluxos do GR de possíveis $pCFT_{d-1}$'s em seus três casos: fluxo entre dois pontos fixos - não-massivo; o fluxo com apenas um ponto fixo terminando numa escala finita - massivo; fluxo marginal - as singularidades/zeros das quantidades de interesse (energia livre, comprimento de correlação, etc.) são do tipo essenciais*, não obedecendo à leis de potências. Um segundo objetivo é, nos casos de fluxos massivos, desenvolver métodos para determinar o espectro de massa.

Para descrever um sistema fora da criticalidade o espaço AdS_d (H^d) não é mais suficiente, é necessário estudar espaços assintoticamente AdS_d (H^d) ($aAdS_d$ ou aH^d) - por exemplo o buraco negro Schwarzschild-AdS,[†]. O foco desta tese é uma classe muito específica de soluções das eqs. da Relatividade Geral assintoticamente AdS_d (H^d) chamadas de Paredes de Domínio[‡] (PD) (19, 20). Devido ao fato delas interpolarem entre dois vácuos AdS_d (H^d) diferentes elas são a melhor escolha para tentar descrever o GR numa $pCFT_{d-1}$. Também será visto que as flutuações lineares ao redor de soluções que interpolam entre vácuo AdS_d (H^d) e uma singularidade nua[§] fornece o espectro de massa em um fluxo massivo.

No capítulo anterior foi mostrado um método perturbativo para calcular a função *beta* uma

*exemplo: $e^{\frac{1}{x}}$, $x \rightarrow 0$.

[†]a importância das soluções de buracos negros assintoticamente AdS está no fato da temperatura de Hawking ser a temperatura da teoria na borda.

[‡]ao contrário dos buracos negros, a temperatura de Hawking das soluções de PD é nula, portanto elas descrevem transições de fase que não envolvem uma temperatura crítica.

[§]essas não são PD verdadeiras, mas são soluções das mesmas eqs. e serão usadas.

vez conhecida a teoria na criticalidade, a vantagem da “descrição holográfica” da função *beta* é ser, por construção, não perturbativa, o resultado é *exato* - dentro do limite de aplicação $\frac{L_{AdS}}{l_{pl}} \gg 1$.

5.1 Definição do modelo

O modelo a ser trabalhado é o de um campo escalar σ , com auto-interação dada pelo potencial $V(\sigma)$, num espaço curvo dinâmico. A ação é:

$$S = \int d^d x \sqrt{|g|} \left(\frac{R}{\kappa^2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right), \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, d-1, \quad (5.1.1)$$

As eqs. do movimento para a ação acima são:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{2} \left[\partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\rho \sigma \partial^\rho \sigma + V(\sigma) \right) \right] \\ g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_\nu \sigma) &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \sigma) = V'(\sigma) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Procuramos soluções com simetrias específicas, as chamadas “Parede de Domínio” (PD), caracterizadas pela métrica[¶]

$$ds^2 = dy^2 + e^{2A(y)} \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 0, 1, \dots, d-2. \quad (5.1.3)$$

A métrica acima reproduz a de um espaço AdS_d , nas coordenadas de Poincaré, quando $A(y) = \frac{y}{L}$ e o espaço M_d em coordenadas cartesianas se $A(y) = 0$ (ou qualquer constante) - ambas soluções com $\frac{d(d+1)}{2}$ simetrias. Para outras funções $A(y)$ a métrica possui um número menor de simetrias $\left(\frac{d(d-1)}{2} \right)$, apenas o subgrupo de Poincaré, $SO(d-2, 1) \rtimes T_{d-1}$, se mantém. Outra característica do *ansatz* é ser muito parecido com o modelo cosmológico de FRW (no caso de um universo plano), entretanto, agora as seções $y = const$ são espaços-tempo de Minkowski ao contrário da cosmologia, onde as seções $t = const$ são planos Euclidianos^{||}. Uma segunda imposição é que o campo escalar é função apenas da “coordenada axial” y , *i.e.*

$$\sigma = \sigma(y). \quad (5.1.4)$$

[¶]a partir desta seção todos os cálculos serão feitos assumindo uma assinatura lorentziana, porém os resultados são absolutamente os mesmos para a assinatura euclidiana. Basta a troca formal $\eta_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$.

^{||}é trivial relacionar as soluções dos dois modelos, ver por exemplo (19, 33).

Uma PD legítima deve ser uma solução de (5.1.2) que segue o *ansatz* definido pelas eqs. (5.1.3) e (5.1.4) com as seguintes condições de contorno:

$$A(y) \rightarrow \frac{y}{L_1}, \quad \sigma(y) \rightarrow \sigma_1 = \text{const.}, \quad y \rightarrow -\infty, \quad (5.1.5)$$

$$A(y) \rightarrow \frac{y}{L_2}, \quad \sigma(y) \rightarrow \sigma_2 = \text{const.}, \quad y \rightarrow \infty, \quad (5.1.6)$$

em geral $L_1 \neq L_2$ e $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Ao substituir (5.1.3) e (5.1.4) no sistema (5.1.2) encontramos:

$$(d-1)(d-2)\dot{A}^2 - \frac{\kappa^2}{2}\dot{\sigma}^2 = -\kappa^2 V(\sigma), \quad (5.1.7)$$

$$2(d-2)\ddot{A} + (d-2)(d-1)\dot{A}^2 = -\kappa^2 \left(\frac{\dot{\sigma}^2}{2} + V(\sigma) \right), \quad (5.1.8)$$

$$\ddot{\sigma} + (d-1)\dot{A}\dot{\sigma} = V'(\sigma). \quad (5.1.9)$$

Manipulando as eqs. (5.1.7) e (5.1.8) é possível chegar a:

$$(d-2)\ddot{A} = -\frac{1}{2}\kappa^2\dot{\sigma}^2. \quad (5.1.10)$$

As eqs. (5.1.10) e (5.1.9) determinam completamente a métrica e o campo escalar dado o potencial $V(\sigma)$ (a eq. (5.1.7) funciona como um vínculo automático** e será importante na próxima seção).

5.2 Sistema de primeira ordem: o superpotencial

Suponha que seja possível escrever $\dot{A}(y)$ como uma função de σ , *i.e.*

$$\dot{A} = -\frac{\kappa}{(d-2)}W(\sigma), \quad (5.2.1)$$

então

$$\ddot{A} = -\frac{\kappa}{(d-2)}\dot{\sigma}W'(\sigma), \quad (5.2.2)$$

substituindo na eq. (5.1.10)

$$\dot{\sigma}^2 = \dot{\sigma} \frac{2}{\kappa} W'(\sigma), \quad \text{ou} \quad (5.2.3)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\kappa} W'(\sigma), \quad (5.2.4)$$

**apenas duas das três eqs. são independentes, porque das eqs. da gravitação podemos derivar a eq. da variação do campo escalar (eq. (5.1.9)) utilizando a identidade de Bianchi $\nabla^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 0 = \frac{\kappa^2}{2}\nabla^\mu T_{\mu\nu}$.

caso $\dot{\sigma} \neq 0$. As eqs. (5.2.1) e (5.2.4) substituídas em (5.1.7) levam a seguinte relação:

$$\kappa^2 V(\sigma) = 2 (W'(\sigma))^2 - \kappa^2 \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2(\sigma). \quad (5.2.5)$$

Uma vez conhecido um $W(\sigma)$ que reproduza o potencial desejado (via eq. (5.2.5)), basta resolver o sistema de primeira ordem definido pelas eqs. (5.2.1) e (5.2.4). Na prática o inverso é feito, o superpotencial $W(\sigma)$ é encarado como a “base do modelo” e o potencial $V(\sigma)$ é a consequência. Um ponto importante a ser observado é: diferentes W 's podem levar ao mesmo potencial $V(\sigma)$, por exemplo (79):

$$W_1(\sigma) = \sqrt{2 \frac{(d-2)}{(d-1)} |\Lambda|}, \quad (5.2.6)$$

$$W_2(\sigma) = \sqrt{2 \frac{(d-2)}{(d-1)} |\Lambda|} \cosh \left(\kappa \sqrt{\frac{(d-1)}{2(d-2)}} (\sigma - \sigma_0) \right), \quad (5.2.7)$$

levam a sistemas de primeira ordem completamente diferentes, logo a soluções de PD diferentes. Entretanto ambos reproduzem o mesmo potencial $V(\sigma) = -2|\Lambda|$. Neste caso cada $W(\sigma)$ está associado a uma classe de soluções de um mesmo potencial.

Outra relação importante é a entre o superpotencial e o escalar de curvatura^{††}

$$R(\sigma) = -2(d-1) \left(-\frac{2}{(d-2)} (W'(\sigma))^2 + \frac{\kappa^2 d}{2(d-2)^2} W^2(\sigma) \right). \quad (5.2.8)$$

Pela eq. (5.2.8), se para algum σ : $\frac{W}{W'} \rightarrow \infty$, então R diverge e temos uma singularidade nua.

5.3 Vácuos

A configuração de vácuo é caracterizada por soluções $\sigma \equiv \sigma^* = \text{const}$ para o campo escalar e $A(y) = \frac{y}{L}$ (vácuo AdS_d) ou $A(y) = \text{const}$ (vácuo M_d)^{‡‡}. Pela eq. (5.1.9)

$$V'(\sigma) \Big|_{\sigma=\sigma^*} = 0, \quad (5.3.1)$$

os extremos do potencial (quando existem). Em (5.2.5) a condição de vácuo leva a:

$$V'(\sigma) \Big|_{\sigma=\sigma^*} = 0 = \frac{2W'}{\kappa^2} \mathcal{F}(\sigma) \Big|_{\sigma=\sigma^*}, \quad (5.3.2)$$

$$\mathcal{F}(\sigma) = 2W'' - \kappa^2 \left(\frac{d-1}{d-2} \right) W, \quad (5.3.3)$$

^{††}para derivá-la basta substituir (5.2.1), (5.2.2) e (5.2.4) em (G.0.6) com $f(y) = e^{-(d-1)A(y)}$.

^{‡‡}para o *ansatz* (5.1.3) não é possível realizar um vácuo de Sitter (dS_d).

portanto há duas classes de vácuos: os extremos de $W(\sigma)$, denominados de vácuos *estáveis* ou *físicos*; e os zeros da função $\mathcal{F}(\sigma)$, os vácuos *instáveis* ou *não físicos*. Apenas os vácuos *físicos* são compatíveis com o sistema de primeira ordem - a condição de vácuo na eq. (5.2.4) força $W'(\sigma^*) = 0$. Não conhecemos métodos analíticos que descrevam os vácuos *não físicos* e eles serão descartados, porém isso não parece ser um incômodo tão grande, nas referências (21, 79) são apresentados argumentos que defendem a instabilidade dessas soluções. Não devemos ficar surpresos pelo fato da eq. (5.2.4) não descrever todos os vácuos (extremos de $V(\sigma)$), não há nenhum erro no método do superpotencial, apenas que na passagem de (5.2.3) para (5.2.4) deve ser assumido $\dot{\sigma} \neq 0$, o caso $\dot{\sigma} = 0$ é uma solução automática de (5.2.3), independente se o mesmo é verdadeiro em (5.2.4).

Para uma análise mais detalhada sobre o vácuo vamos supor, além de $W'(\sigma^*) = 0$, que $W(\sigma^*) \neq 0$. Com isso as eqs. do movimento ficam

$$\sigma = \sigma^* = \text{const} \quad (5.3.4)$$

$$\dot{A} = -\frac{\kappa}{d-2}W(\sigma^*) \equiv \pm \frac{1}{L_*} \rightarrow A(y) = \pm \frac{y}{L_*} \quad (5.3.5)$$

$$V(\sigma^*) \equiv \frac{2\Lambda_*}{\kappa^2} = -\frac{(d-1)}{(d-2)}W^2(\sigma^*) < 0, \quad (5.3.6)$$

ou

$$\Lambda_* = -\frac{1}{2} \frac{(d-1)(d-2)}{L_*^2} < 0, \quad (5.3.7)$$

como $W(\sigma)$ é definido a menos de um sinal, $W(\sigma^*)$ pode sempre ser escolhido tal que L_* seja positivo, definindo $W(\sigma)$ de forma única. A menos que se diga o contrário sempre será assumido $W(\sigma_*) < 0$ implicando no sinal positivo em (5.3.5). O escalar de curvatura (de Ricci) (ver eq. (5.2.8)) é constante e negativo

$$R_* = -\frac{d(d-1)}{L_*^2} = \frac{2d}{(d-2)}\Lambda_* < 0, \quad (5.3.8)$$

mostrando que o vácuo definido pelas eqs. $W'(\sigma^*) = 0$ e $W(\sigma^*) \neq 0$ é um espaço-tempo AdS_d parametrizado pelas coordenadas de Poincaré

$$ds^2 = dy^2 + e^{2\frac{y}{L_*}} \eta_{ij} dx^i dx^j. \quad (5.3.9)$$

No caso excluído, $W(\sigma^*) = 0$, a eq. (5.2.1) fornece $\dot{A} = 0 \rightarrow A = \text{const.}$, que, sem perda de generalidade, pode ser fixada como zero. O vácuo é um espaço de M_d em coordenadas cartesianas.

5.4 A massa do campo escalar

Quando o potencial de um campo escalar possui um extremo, a massa ao quadrado do campo com relação a esse extremo é definida como a seguinte quantidade

$$m_*^2 = V''(\sigma) \Big|_{\sigma=\sigma_*}, \quad (5.4.1)$$

que pode ser positiva (quando é um mínimo do potencial efetivo), negativa (quando é um máximo) ou nula (ponto de inflexão). No âmbito da teoria de campos quânticos no espaço-tempo M_d , é exigido, por questões de causalidade, $m_*^2 \geq 0$. Para o espaço-tempo de AdS_d algo similar ocorre, mas agora o limite mínimo de m_*^2 é dado pela condição BF, ver eq. (4.2.7). No caso de um *vácuo físico*, a eq. (5.2.5) fornece (5, 65):

$$\begin{aligned} L_*^2 m_*^2 &= L_*^2 \frac{\kappa^2 W^2}{(d-2)^2} \left(\frac{2(d-2)\partial_\sigma^2 W(\sigma)}{\kappa^2 W} \right) \left[\left(\frac{2(d-2)\partial_\sigma^2 W(\sigma)}{\kappa^2 W} \right) - (d-1) \right] \Big|_{\sigma=\sigma_*}, \\ &= s(s - (d-1)) \geq -\frac{(d-1)^2}{4}, \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

$$s \equiv \frac{2(d-2)\partial_\sigma^2 W(\sigma)}{\kappa^2 W} \Big|_{\sigma=\sigma_*} = -\frac{2L_*}{\kappa} W''(\sigma_*). \quad (5.4.3)$$

onde (5.3.5) foi usada na última igualdade. Os vácuos físicos descritos pelo método do superpotencial satisfazem, automaticamente, a condição BF. A função $m_*^2 L_*^2(s)$ é uma parábola com concavidade para cima, zeros em $s = 0$ e $s = d-1$ e mínimo em $s = \frac{d-1}{2}$. A troca $s \rightarrow d-1-s$ não altera a eq. (5.4.2), *i.e.* sempre há dois s 's diferentes para um mesmo $m_*^2 L_*^2$, exceto no caso $m_*^2 L_*^2 = -\frac{(d-1)^2}{4}$, que corresponde a $s = \frac{(d-1)}{2}$.

As quantidades Δ_\pm , definidas na eq. (4.2.4), podem ser escritas em termos de s .

$$\Delta_+(s) = \frac{d-1}{2} + \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} + L_*^2 m_*^2} = \begin{cases} s, & s > \frac{d-1}{2} \\ d-1-s, & s \leq \frac{d-1}{2} \end{cases}, \quad (5.4.4)$$

$$\Delta_-(s) = \frac{d-1}{2} - \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} + L_*^2 m_*^2} = \begin{cases} d-1-s, & s > \frac{d-1}{2} \\ s, & s \leq \frac{d-1}{2} \end{cases}. \quad (5.4.5)$$

$$(5.4.6)$$

Dentro da correspondência AdS/CFT , $\Delta_+ > 0$ é a dimensão de escala do operador relevante que perturba a CFT. Por outro lado, se s_{CFT} é o índice crítico associado ao ponto fixo, então $\Delta_+ = (d-1) - s_{CFT} > 0$ ($s_{CFT} < d-1$). Repare que para $s < \frac{d-1}{2}$ o índice crítico da teoria conforme, s_{CFT} , é exatamente igual a s , calculado da solução de PD, dado por (5.4.3). Na região $\frac{d-1}{2} < s < d-1$,^{§§} a identificação deve ser: $s_{CFT} = d-1-s$.

^{§§}na próxima seção é mostrado que na verdade a relação entre s_{CFT} e s não é verdadeira nesta região.

5.5 Construindo soluções de PD, a função beta holográfica e a função central α

A priori devemos ser capazes de determinar $A(y)$ e $\sigma(y)$ através do sistema de primeira ordem (eqs. (5.2.1) e (5.2.4)) dado $W(\sigma)$. Porém são raros os casos em que a solução explícita é encontrada. Algo mais simples é calcular o fator de escala como função do campo escalar, *i.e.* $A = A(\sigma)$. Dividindo a eq. (5.2.4) pela (5.2.1)

$$\frac{d\sigma}{dA} = -\frac{2(d-2)}{\kappa^2} \frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)}, \quad (5.5.1)$$

ao integrar encontra-se

$$e^{A(\sigma)} = e^{A_0} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2(d-2)} \int d\sigma \frac{W(\sigma)}{W'(\sigma)}\right), \quad A_0 = \text{const.} \quad (5.5.2)$$

a eq. acima determina completamente a solução de PD, pois o campo σ pode ser usado como uma coordenada. Através da eq. (5.2.4), a métrica (5.1.3) pode ser reescrita

$$ds^2 = \frac{\kappa^2}{4(W'(\sigma))^2} d\sigma^2 + e^{A_0} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2(d-2)} \int d\sigma \frac{W(\sigma)}{W'(\sigma)}\right) \eta_{ij} dx^i dx^j. \quad (5.5.3)$$

A construção do fator de escala, e^A , como função de σ não é apenas um método para encontrar soluções de PD para uma grande gama de superpotenciais W , ela é a ponte necessária para a construção da função *beta* holográfica. Tal conexão pode ser demonstrada ao expandirmos o superpotencial ao redor de um ponto fixo físico ($W'(\sigma_*) = 0$, $W(\sigma_*) \neq 0$)

$$W(\sigma) \approx W(\sigma_*) + \frac{1}{2} W''(\sigma_*) (\sigma - \sigma_*)^2 + \dots, \quad (5.5.4)$$

onde foi assumido $W''(\sigma_*) \neq 0$. Através de (5.3.5) e (5.4.3), $W(\sigma_*)$ e $W''(\sigma_*)$ podem ser eliminados em favor de L_* e s . A eq. torna-se:

$$W(\sigma) \approx -\frac{1}{\kappa L_*} \left(d - 2 + \kappa^2 \frac{s}{4} (\sigma - \sigma_*)^2 + \dots \right), \quad (5.5.5)$$

substituindo na eq. (5.5.1): $\frac{d\sigma}{dA} \approx -s(\sigma - \sigma_*)$, *i.e.*

$$e^{A(\sigma)} \sim (\sigma - \sigma_*)^{-\frac{1}{s}}, \quad (5.5.6)$$

na mesma aproximação, (5.2.4) pode ser resolvida e o assintótico

$$\sigma - \sigma_* \sim e^{-\frac{y}{L_*}} = z^s, \quad z = e^{-\frac{y}{L_*}}, \quad (5.5.7)$$

é encontrado - exatamente o esperado para um campo escalar num *background* AdS_d de acordo com a seção 4.3.2. Voltando fica-se com $e^{A(y)} \approx e^{\frac{y}{L_*}}$ - AdS_d puro.

Mesmo conhecidos $\sigma(y)$ e $A(y)$ nas proximidades da solução de vácuo, ainda vamos insistir na forma $A(\sigma)$, eq. (5.5.6). Pelo “dicionário holográfico”, $\sigma - \sigma_*$ é identificado como o acoplamento que perturba a teoria conforme e no caso de $s < \frac{d-1}{2}$, via eq. (5.4.4), a quantidade s é o índice crítico da teoria conforme na borda. Assim a eq. (5.5.6) possui a forma assintótica do comprimento de correlação, ver eq. (2.3.36), e mais um elemento pode ser adicionado ao “dicionário holográfico” (3, 4, 22):

$$e^{A(\sigma)} \equiv b^{-1} = e^{-l} \sim \xi(\sigma), \quad (5.5.8)$$

ou seja, o inverso do fator de escala de uma solução de PD assintoticamente AdS_d é o fator que reescala uma $pCFT_{d-1}$ após a atuação do GR^{¶¶}. Outro ponto importante a ser mencionado, a identificação $A = -l$ resulta em: num ponto crítico UV ($l \rightarrow +\infty$) $A \rightarrow \frac{y}{L_{UV}}$, $y \rightarrow \infty$ - borda do espaço; já num ponto crítico IV ($l \rightarrow -\infty$) $A \rightarrow \frac{y}{L_{IV}}$, $y \rightarrow -\infty$ - horizonte^{***} do espaço.

Após feita a identificação, a eq. (5.5.1) ganha uma nova interpretação, ela é a função *beta* holográfica. Mais especificamente:

$$-\beta(\sigma) \equiv \frac{d\sigma}{dl} = \frac{d\sigma}{d(-A)} = \frac{2(d-2)W'(\sigma)}{\kappa^2 W(\sigma)}, \quad (5.5.9)$$

a principal fórmula desta tese. Fora os argumentos já apresentados para o fator de escala, há outros a favor desta função *beta*: 1) $\beta = 0$ apenas nos vácuos físicos AdS_d , *i.e.* quando a teoria holográfica é uma CFT_{d-1} ; 2) nas proximidades do vácuo^{†††} $-\beta(\sigma) \approx s(\sigma - \sigma_*)$ - comportamento correto se s for o índice crítico da teoria holográfica, algo verdadeiro apenas para $s \leq \frac{(d-1)}{2}$ - no caso de um ponto fixo relevante. A última desigualdade decreta a região de validade da descrição holográfica da função *beta*.

A eq. (5.5.9) pode ser reescrita em termos da função $a(\sigma)$ definida por:

$$a(\sigma) = \left(\frac{d-2}{(l_{pl}\kappa|W|)} \right)^{d-2}, \quad (5.5.10)$$

que num ponto fixo assume o valor: $a(\sigma_*) \equiv a = \left(\frac{L_*}{l_{pl}} \right)^{d-2} \gg 1$, interpretada como a carga central a da teoria conforme no ponto fixo. O valor é exatamente o mesmo do da carga central

¶¶ grandes escalas (pequenas energias) na geometria em d dimensões correspondem a pequenas escalas (grandes energia) na teoria *holográfica* em $d-1$ dimensões.

*** no caso de assinatura euclidiana é um ponto.

††† do ponto de vista da teoria gravitacional. Já do ponto de vista da teoria holográfica a sentença poderia ser trocada por “nas proximidades do ponto crítico”. Ambas as linguagens serão utilizadas ao longo do texto.

c , como havia sido adiantado na seção 4.3.3.3, ver eq. (4.3.74). Então:

$$\beta(\sigma) = \frac{1}{g} \frac{da(\sigma)}{d\sigma}, \quad (5.5.11)$$

$$g(\sigma) = \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{d-2}{l_{pl}\kappa|W(\sigma)|} \right)^{d-2} > 0, \quad (5.5.12)$$

onde a função $g(\sigma)$ representa o análogo unidimensional da métrica de Zamolodchikov no espaço do acoplamento (11). O maior mérito da eq. (5.5.11) é garantir o comportamento monotônico decrescente de a como função da escala l ($= -A$) do GR, uma vez que:

$$\begin{aligned} \beta(\sigma) &= \frac{1}{g} \frac{da(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{g} \frac{da(l)}{dl} \left(-\frac{1}{\beta(\sigma)} \right) \text{ ou} \\ \frac{da(l)}{dl} &= -g(\sigma)\beta^2(\sigma) < 0, \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

condição necessária para a interpretar a eq. (5.5.10) como a *função central* a ,^{†††}. No caso de um fluxo entre dois pontos fixos, o ponto UV corresponde ao limite $l \rightarrow -\infty$ e o IV a $l \rightarrow +\infty$. Pela função central a ser monotônica decrescente, necessariamente:

$$a(l = -\infty) = a_{UV} > a_{IV} = a(l = \infty) \Rightarrow L_{UV} > L_{IV}, \quad (5.5.14)$$

pela própria definição (5.5.10).

Sendo a função *beta* exata, ela deve reproduzir a análise perturbativa, eq. (3.5.10). Em primeira ordem já foi verificado a sua veracidade. Para o segundo termo precisamos expandir a aproximação até $\mathcal{O}[(\sigma - \sigma_*)^3]$ em $W(\sigma)$. O $W(\sigma)$ perturbativo que reproduz (3.5.10) é:

$$\begin{aligned} W(\sigma) &\approx -\frac{1}{\kappa L_*} \left(d-2 + \frac{s}{4} \kappa^2 (\sigma - \sigma_*)^2 - \frac{\bar{C}_{\Delta\Delta\Delta}}{6\kappa} \kappa^3 (\sigma - \sigma_*)^3 + \dots \right), \text{ ou} \\ W'''(\sigma_*) &= -\frac{\kappa}{L_*} \bar{C}_{\Delta\Delta\Delta}. \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

Na mesma aproximação as eqs. (5.5.9) e (5.5.10) tomam a forma

$$-\beta(\sigma) \approx s(\sigma - \sigma_*) - \bar{C}_{\Delta\Delta\Delta}(\sigma - \sigma_*)^2, \quad (5.5.16)$$

$$a(\sigma) \approx a_{CFT} \left(1 - \frac{s}{4} \kappa^2 (\sigma - \sigma_*)^2 + \frac{\bar{C}_{\Delta\Delta\Delta}}{6\kappa} \kappa^3 (\sigma - \sigma_*)^3 \right), \quad (5.5.17)$$

a função $a(\sigma)$ não é exatamente igual a forma perturbativa dada por (3.5.11). O motivo é a presença, no caso exato, do fator $\frac{1}{g}$.

^{†††} outra forma de derivar a desigualdade $\frac{da}{dl} < 0$, (4), é impor a condição de energia fraca ao modelo, $\xi^i T_{ij} \xi^j > 0 - \xi^i \xi_i < 0$ (assinatura lorentziana) -, que neste caso culmina em na desigualdade $\dot{\sigma}^2 > 0$, sempre satisfeita.

O potencial $V(\sigma)$, na mesma aproximação, é determinado via eq. (5.2.5):

$$V(\sigma) \approx -\frac{(d-1)(d-2)}{\kappa^2 L_*^2} + \frac{1}{2} \frac{s(s-(d-1))}{L_*^2} (\sigma - \sigma_*)^2 - \frac{1}{3!} \frac{2\bar{C}_{\Delta\Delta\Delta}(3s-(d-1))}{L_*^2} (\sigma - \sigma_*)^3. \quad (5.5.18)$$

A razão da “barra” acima da quantidade $\bar{C}_{\Delta\Delta\Delta}$ se deve ao fato dela ser diferente da apresentada na eq. (3.5.10). Ele, $\bar{C}_{\Delta\Delta\Delta}$, possui dimensão $[\kappa]$ enquanto $C_{\Delta\Delta\Delta}$ é adimensional. Da mesma forma o campo escalar σ tem dimensão $[\kappa]^{-1}$ e o acoplamento u é adimensional. A forma mais simples de solucionar o pequeno problema é trabalhar em unidades de $[\kappa]$, com as trocas formais:

$$\begin{aligned} \kappa\sigma &\rightarrow \sigma; \quad \frac{\bar{C}_{\Delta\Delta\Delta}}{\kappa} \rightarrow C_{\Delta\Delta\Delta}, \\ \kappa^2 V(\sigma) &\rightarrow V(\sigma); \quad \kappa W(\sigma) \rightarrow W(\sigma), \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

na nova notação σ e $C_{\Delta\Delta\Delta}$ são adimensionais, $V(\sigma)$ possui dimensão de massa ao quadrado e $W(\sigma)$ dimensão de massa. Em termos práticos a eq. (5.5.19) é equivalente à fixar $\kappa = 1$ em todas as eqs.

5.5.1 A ação é uma derivada total

Assumindo a eq. (5.2.5) como uma definição para o potencial e o nosso *ansatz* (5.1.3), então a ação (5.1.1) pode ser reescrita da seguinte forma (79):

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\kappa^2} \int d^{d-1}x dy e^{(d-1)A} \left[-2(d-1)\ddot{A} - d(d-1)\dot{A}^2 - \frac{\kappa^2}{2}\dot{\sigma}^2 - 2(W')^2 + \kappa^2 \frac{d-1}{d-2} W^2 \right] \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \int d^{d-1}dy \left\{ -2\partial_y \left[((d-1)\dot{A} + \kappa W) e^{(d-1)A} \right] + e^{(d-1)A} \left[-\frac{\kappa^2}{2} \left(\dot{\sigma} - \frac{2\partial_\sigma W}{\kappa} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (d-1)(d-2) \left(\dot{A} + \frac{\kappa W}{(d-2)} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

onde nenhuma eq. do movimento foi utilizada, ou seja, é a mesma ação original restringida ao nosso *ansatz* particular. Agora substituindo as eqs. do movimento (5.2.1) e (5.2.4), apenas o termo de derivada total sobrevive

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{\kappa(d-2)} \int d^{d-1}x \int dy \frac{d}{dy} (e^{(d-1)A} W(\sigma)), \\ &= -\frac{2}{l_{pl}(d-2)^{d-1}} \int d^{d-1}x \int dy \frac{d}{dy} [e^{(d-1)A(y)} (l_{pl}\kappa|W|)^{d-1} a(\sigma)], \quad W < 0 \end{aligned} \quad (5.5.21)$$

A relação acima (em termos de $a(\sigma)$) parece ser uma construção arbitrária, porém ela irá se repetir mesmo quando os termos de Gauss-Bonnet e Lovelock são adicionados.

5.5.2 Classes de paredes de Domínio

O sistema de primeira ordem definido por (5.2.1) e (5.2.4) pode produzir várias classes de soluções dependendo da forma de W e das condições iniciais. É importante classificar todas as possíveis soluções, pois nem todas são PD legítimas e algumas devem ser evitadas no estudo do grupo de renormalização holográfico.

5.5.2.1 Dois vácuos: borda - horizonte

Suponha um $W(\sigma)$ que possui dois extremos adjacentes nos pontos σ_1 e σ_2 , *i.e.* $W'(\sigma_1) = W'(\sigma_2) = 0$. Também são assumidos: $0 > W(\sigma_1) > W(\sigma_2)$ e $\sigma_1 < \sigma_2$. O objetivo é estudar o fluxo entre os dois pontos fixos $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Uma consequência das hipóteses é que na região em questão o *superpotencial* é uma função monotônica (descrescente, devido a escolha feita) - cada ponto σ corresponde a apenas um valor de $W(\sigma)$. Pelas eqs. (5.2.1) e (5.5.14), o ponto σ_1 é o ponto crítico UV e σ_2 é o IV, devido ao fato de $|W(\sigma_1)| < |W(\sigma_2)| \rightarrow L_1 > L_2$. Assim o índice 1 pode ser trocado por UV e 2 por IV. Nos assintóticos devemos ter os comportamentos:

$$\begin{aligned} e^A &\approx e^{\frac{y}{L_{UV}}} \sim (\sigma - \sigma_{UV})^{-\frac{1}{s_{UV}}}, \quad y \rightarrow \infty, \\ e^A &\approx \text{const.} e^{\frac{y}{L_{IV}}} \sim (\sigma - \sigma_{IV})^{-\frac{1}{s_{IV}}}, \quad y \rightarrow -\infty, \\ s_{UV} &\equiv -\beta'(\sigma_{UV}), \quad s_{IV} \equiv -\beta'(\sigma_{IV}). \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

A grande diferença deste caso para o espaço $AdS_d (H^d)$ puro não está na parte geométrica em si, mas sim na solução do campo escalar. Foi visto que o ponto $z \rightarrow \infty (y \rightarrow -\infty)$ pode ser descartado no estudo de um campo escalar no espaço de H_d devido ao seu decaimento exponencial. Na solução de PD apresentada aqui, o mesmo não ocorre, nesse limite o campo escalar possui o comportamento mostrado em (5.5.22) possibilitando o uso dos métodos holográficos mesmo quando o ponto fixo é IV.

5.5.2.2 Dois vácuos: Janus

Novamente temos dois pontos fixos físicos, σ_1 e σ_2 . A diferença é que $W(\sigma_2) < 0$ e $W(\sigma_1) > 0$, *i.e.* para algum σ_s : $\sigma_1 < \sigma_s < \sigma_2$, $W(\sigma_s) = 0$. Pela eq. (5.2.1) a troca de sinal de $W(\sigma)$ indica um extremo da função $A(y)$ em $y(\sigma_s)$, conseqüentemente um extremo de $e^{A(y)}$. Os dois vácuos são da mesma "natureza" - duas bordas ou dois horizontes/pontos

- e em σ_1 o sinal negativo deverá ser usado em (5.3.5). As formas assintóticas são:

$$\begin{aligned} e^A &\approx \exp\left(\frac{y}{L_{UV/IV}^{(1)}}\right) \sim (\sigma - \sigma_{UV/IV}^{(1)})^{-\frac{1}{s_{UV/IV}^{(1)}}}, \quad y \rightarrow \infty, \\ e^A &\approx \exp\left(\frac{y}{L_{UV/IV}^{(2)}}\right) \sim (\sigma - \sigma_{UV/IV}^{(2)})^{-\frac{1}{s_{IV/IV}^{(2)}}}, \quad y \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

O problema dessa classe de PD é que no ponto σ_s ($W(\sigma_s) = 0$, $W'(\sigma_s) \neq 0$) a função *beta*, eq. (5.5.9), diverge e a descrição holográfica termina. Se os pontos fixos são relevantes, eles acabam em σ_s , caso sejam irrelevantes eles saem de σ_s . O *salto* (singular) da função *beta* em σ_s dificulta a interpretação holográfica desta classe de soluções de PD, por isso ela será evitada.

5.5.2.3 Vácuo - singularidade nua

O superpotencial possui um extremo em σ_{UV} e $W(\sigma = \infty) = \infty$, com $\frac{W}{W'}(\sigma = \infty) = \infty$. A divergência de W resultada no mesmo para o escalar de curvatura R , ver eq. (5.2.8) - é uma singularidade (nua) real do espaço. Na região $\sigma_{UV} < \sigma < \infty$ o sistema (5.2.1) e (5.2.4) fornece uma geometria que interpola entre o vácuo AdS_d e a singularidade nua. Supondo um comportamento de polinômio $W(\sigma) \approx -const.\sigma^n$, ($const. > 0$) para $\sigma \rightarrow \infty$ ($n > 2$), as formas assintóticas do fator de escala e campo escalar são:

$$e^A \approx e^{\frac{y}{L_{UV}}} \sim (\sigma - \sigma_{UV})^{-\frac{1}{s_{UV}}}, \quad y \rightarrow \infty, \quad (5.5.24)$$

$$e^{A(\sigma)} \sim e^{\frac{-\sigma^2}{2(d-2)n}} \rightarrow 0, \quad \sigma(y) \sim \frac{1}{(y - y_s)^{\frac{1}{n-2}}}, \quad y \rightarrow y_s, \quad (5.5.25)$$

a coordenada y é definida na semi-reta $y > y_s$, onde o ponto y_s corresponde a singularidade. A singularidade no ponto $y = y_s$ (ou $\sigma \rightarrow \infty$) indica uma escala na teoria, portanto era de se esperar que essa classe de soluções descrevesse fluxos massivos. Porém o fator de escala tende a zero na singularidade, *i.e.* $l \rightarrow \infty$ na teoria holográfica, e o pior, o limite $\sigma \rightarrow \infty$ é um zero da função *beta*. Ou seja, a singularidade se comporta, aparentemente, como um ponto fixo (IV) do sistema, mas, como fica claro pela forma assintótica (5.5.25), a geometria nas redondezas da singularidade não é AdS_s - não é um ponto fixo. Essa contradição "singularidade = falso ponto fixo IV" é uma grande falha na descrição do GR holográfico utilizando a gravitação de EH.

Uma outra situação possível e importante, que serve como um contra-exemplo, é no caso da divergência do superpotencial ser $W(\sigma) \approx -const.\sigma^n e^{\delta\sigma}$, $\sigma \rightarrow \infty$ ($\delta, const. > 0$). Agora na

singularidade a função β não tende a zero, mas sim a constante

$$-\beta(\infty) = \frac{2(d-2)\delta}{\kappa^2}, \quad (5.5.26)$$

um resultado também preocupante, pois o fluxo (não perturbativo) terminou num valor finito de β . Para o fator de escala e campo escalar temos, no caso $n = 0$:

$$\begin{aligned} e^{A(y)} &\approx (y - y_c)^{\frac{\kappa \text{const.}}{(d-2)}} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow y_c^+, \\ \sigma(y) &\sim \ln \left(\frac{\kappa}{\delta^2(y - y_c)} \right) \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow y_c^+, \end{aligned} \quad (5.5.27)$$

o fator de escala novamente tende a zero, logo o comprimento de correlação se anula na singularidade - não é o comportamento esperado para uma fase massiva - o problema permanece. O fator de escala ser nulo na singularidade é o comportamento esperado para a solução - o que aparentemente sepulta qualquer tentativa de descrever fluxos massivos através do GR holográfico -, porém no próximo capítulo é mostrado que ao incluir o termo de Gauss-Bonnet à ação o problema é completamente solucionado, *i.e.* a função β diverge na singularidade e o fator de escala se torna finito.

5.5.2.4 Vácuo degenerado - transição de fase de ordem infinita

Em muitos exemplos reais importantes, não apenas a primeira derivada de $W(\sigma)$ é nula no ponto crítico. O vácuo degenerado ou marginal é, por definição, um vácuo AdS_d , no ponto $\sigma = \sigma_{\text{marg}}$, onde $\kappa W(\sigma_{\text{marg}}) = -\frac{d-2}{L_{\text{marg}}}$ e além de $W'(\sigma_{\text{marg}}) = 0$, tem-se $W''(\sigma_{\text{marg}}) = \dots = W^n(\sigma_{\text{marg}}) = 0$, $n \geq 2$, *i.e.* próximo ao ponto σ_{marg} o superpotencial é aproximadamente:

$$W(\sigma) \approx -\frac{1}{\kappa L_{\text{marg}}} \left(d-2 + \frac{\mathcal{D}}{2(n+1)} \kappa^{n+1} (\sigma - \sigma_{\text{marg}})^{n+1} + \dots \right), \quad (5.5.28)$$

\mathcal{D} é uma constante adimensional. Na aproximação a função β e o fator de escala são:

$$-\beta(\sigma) \approx \mathcal{D} \kappa^{n-1} (\sigma - \sigma_{\text{marg}})^n, \quad (5.5.29)$$

$$e^A \approx e^{\frac{y}{L_{\text{marg}}}} \sim \exp \left(\frac{1}{(n-1)\mathcal{D} \kappa^{n-1} (\sigma - \sigma_{\text{marg}})^{n-1}} \right), \quad (5.5.30)$$

ao lembrar que $e^A \sim \xi$, fica caracterizado uma transição de fase de ordem infinita. Tenha, por exemplo, $\mathcal{D} > 0$ (o caso $\mathcal{D} < 0$ é análogo), então se n for par

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_{\text{marg}}^+} e^{A(\sigma)} = \infty; \quad \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_{\text{marg}}^-} e^{A(\sigma)} = 0,$$

e o ponto fixo σ_{marg} é dito *marginal clássico* - por um lado (no caso à direita) ele se comporta como um ponto UV, o fluxo sai dele; pelo outro (à esquerda) ele é um ponto IV, o fluxo entra

no ponto. Para n ímpar o limite pelos dois lados é igual e o ponto é dito *marginal UV* - quando nos dois limites o fator de escala diverge, ou *marginal IV* - quando o resultado dos dois limites é zero.

Todo ponto fixo marginal de “ordem $n + 1$ ” pode ser encarado como a fusão de n pontos fixos ordinários. Como exemplo vamos analisar o caso $n = 2$. Remetendo a seção 3.5.1.1, mas usando a notação definida aqui, quando dois pontos fixos UV e IV são muito próximos, a função *beta* que descreve o fluxo entre eles tem a forma:

$$-\beta(\sigma) = s(\sigma - \sigma_{UV}) + \mathcal{D}\kappa(\sigma - \sigma_{UV})^2, \quad (5.5.31)$$

para $s > 0$, σ_{UV} é o ponto crítico UV. O ponto IV é $\sigma_{IV} = \sigma_{UV} - \frac{s}{\kappa\mathcal{D}}$. É evidente que se os pontos fixos são próximos, então $s \ll 1$ e o índice crítico associado ao ponto IV é $-s < 0$. O fator de escala fica:

$$e^{A(\sigma)} \sim (\sigma - \sigma_{UV})^{-\frac{1}{s}}(\sigma - \sigma_{IV})^{\frac{1}{s}} = (\sigma - \sigma_{UV})^{-\frac{1}{s}} \left[(\sigma - \sigma_{UV}) + \frac{s}{\kappa\mathcal{D}} \right]^{\frac{1}{s}} = \left[1 + \frac{s}{\kappa\mathcal{D}(\sigma - \sigma_{UV})} \right]^{\frac{1}{s}},$$

no limite $s \rightarrow 0$, $\sigma_{UV} \rightarrow \sigma_{marg}$ tem-se

$$e^{A(\sigma)} \sim \exp\left(\frac{1}{\mathcal{D}\kappa(\sigma - \sigma_{marg})}\right), \quad (5.5.32)$$

como queríamos demonstrar^{§§§}

5.5.2.5 Cadeia de Paredes de Domínio

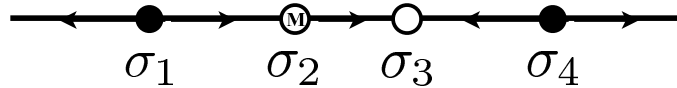


Figura 5.1 – Exemplo de fluxos numa cadeia de PD. Os círculos negros são os pontos UV, o branco é o IR e o com a letra *M* é o marginal.

Em geral, um $W(\sigma)$ não se encaixa em uma única classe de PD apresentada, ele gera uma “cadeia de PD”. Por exemplo, suponha um $W(\sigma) < 0 \forall \sigma$ que só diverge nos infinitos, *i.e.* $W(\pm\infty) = -\infty$. Ele também tem quatro extremos: $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4$. Os pontos fixos σ_1 e σ_4 são UV, σ_3 é IV e σ_2 é marginal, sendo IV pela esquerda e UV pela direita. Na figura 5.1 é apresentado o diagrama do fluxo do GR para os “elos da cadeia” do modelo: $-\infty \leftarrow \sigma_1$; $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$; $\sigma_2 \rightarrow \sigma_3$; $\sigma_3 \leftarrow \sigma_4$ e $\sigma_4 \rightarrow \infty$. Um “elo” representa uma geometria completa, mas

^{§§§}Foi usado o limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 + \epsilon x)^{\frac{1}{\epsilon}} = e^x$.

todos são soluções do mesmo modelo (mesmo $W(\sigma)$) para “condições iniciais” diferentes em σ .

5.5.3 Exemplos de PD

Soluções explícitas de PD são apresentadas^{¶¶¶} para ilustrar os méritos e problemas da descrição holográfica do GR quando a gravitação de EH é utilizada.

5.5.3.1 W -quadrático

O superpotencial mais simples com um ponto fixo é um polinômio quadrático, dado por:

$$W(\sigma) = -\frac{1}{L} \left(d - 2 + \frac{s}{4} \sigma^2 \right), \quad (5.5.33)$$

onde foi mantida a notação introduzida em (5.5.5), *i.e.* s é o índice crítico associado ao ponto fixo escolhido como $\sigma = 0$. No caso de $s > 0$ o ponto é UV e se $s < 0$ ele é IR. O potencial é o polinômio quártico:

$$V(\sigma) = -\frac{(d-1)(d-2)}{L^2} + \frac{s(s-(d-1))}{2L^2} \sigma^2 - \left(\frac{d-1}{d-2} \right) \frac{s^2}{16L^2} \sigma^4, \quad (5.5.34)$$

um “Higgs” invertido. Algumas particularidade do modelo são: $C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$ ($W'''(\sigma) = 0$) e como $W(\sigma)$ é par, basta resolver o problema para $\sigma > 0$, para descrever a semi-reta negativa é suficiente a troca $\sigma \rightarrow -\sigma$. A função *beta* do modelo é:

$$-\beta(\sigma) = \frac{d\sigma}{d(-A)} = \frac{s\sigma}{1 + \frac{s}{4(d-2)} \sigma^2}, \quad (5.5.35)$$

se $s < 0$ (ponto IV) a função *beta* é singular no ponto $\sigma_s = \sqrt{\frac{4(d-2)}{|s|}}$ - caso discutido na seção 5.5.2.2. Na singularidade nua, limite $\sigma \rightarrow \infty$ a função *beta* tende a zero - como um segundo ponto fixo. As soluções de (5.2.1) e (5.2.4) são:

$$\sigma(y) = \sigma_0 e^{-s\frac{y}{L}}, \quad (5.5.36)$$

$$e^A = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-\frac{1}{s}} e^{-\frac{\sigma^2}{8(d-2)}} = e^{\frac{y}{L}} \exp \left(-\frac{\sigma_0^2}{8(d-2)} e^{-2s\frac{y}{L}} \right), \quad (5.5.37)$$

supondo $s > 0$, o fator de escala se torna AdS_d , *i.e.* $e^{\frac{y}{L}} \sim \sigma^{-\frac{1}{s}}$, para $y \gg L$, e tende zero no limite $y \rightarrow -\infty$ ($\sigma \rightarrow \infty$), aonde $W(\sigma)$ diverge, conseqüentemente o mesmo ocorre com curvatura escalar R (singularidade nua), ver eq. (5.2.8). Por um lado a função *beta* se anula no limite $\sigma \rightarrow \infty$ - como um ponto fixo, mas por outro o fator de escala, como função de

^{¶¶¶}nesta seção é usado $\kappa = 1$ de acordo com a explicação fornecida na eq. (5.5.19)

σ , possui um decaimento *gaussiano* - não correspondendo a nenhum tipo de ponto fixo. O resultado está de acordo com a contradição declarada na seção 5.5.2.3.

Qualquer W nas redondezas de um ponto crítico físico, com s não nulo, pode ser aproximado por (5.5.3.1), portanto o assintótico $e^{A(\sigma)} \sim |\sigma - \sigma_*|^{-1/s}$, $|\sigma - \sigma_*| \ll 1$, é universal ($s \neq 0$).

5.5.3.2 W -sinh²

Outro exemplo com um ponto fixo, escolhido em $\sigma = 0$, e simetria $\sigma \rightarrow -\sigma$ ($C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$) é

$$W(\sigma) = -\frac{1}{L} \left(d - 2 + \frac{s}{\alpha^2} \sinh^2 \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right), \quad (5.5.38)$$

α é uma constante adimensional ($\kappa = 1$). Na região $\alpha\sigma \ll 1$, a eq. (5.5.5) é recuperada identificando s como o índice crítico. O potencial real é:

$$V(\sigma) = -\frac{(d-1)(d-2)}{L^2} + \frac{2s}{\alpha^2 L^2} \left(\frac{s}{2} (1 + \cosh(\alpha\sigma)) - (d-1) \right) \sinh^2 \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) - \left(\frac{d-1}{d-2} \right) \frac{s^2}{\alpha^4 L^2} \sinh^4 \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right). \quad (5.5.39)$$

A função *beta* tem a forma:

$$-\beta(\sigma) = \frac{s}{\alpha} \frac{\sinh(\alpha\sigma)}{\left(1 + \frac{s}{(d-2)\alpha^2} \sinh^2 \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right)}, \quad (5.5.40)$$

mais uma vez se $s < 0$ (ponto $\sigma_{IV} = 0$), há uma singularidade na expressão acima no zero do superpotencial.

O $W(\sigma)$ escolhido se encaixa na descrição dada pela eq. (5.5.27), *i.e.* a função *beta* tende a uma constante na singularidade devido ao comportamento exponencial de $W(\sigma)$ para $\sigma \rightarrow \infty$ e o fator de escala se anula na singularidade. As soluções do campo escalar e fator de escala são mais complicadas do que as do exemplo anterior, mas ainda é possível escrevê-las de forma explícita:

$$\sigma(y) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\coth \left(\frac{s}{2L} (y - y_c) \right) \right), \quad (5.5.41)$$

$$e^A = \left(\frac{\alpha\sigma_0}{2} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\tanh \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{s}} \left(\cosh \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{(d-2)\alpha^2}} = e^{\frac{y}{L}} \left(1 - e^{-2\frac{s}{L}(y-y_c)} \right)^{\frac{1}{2(d-2)\alpha^2}}, \quad (5.5.42)$$

$$y_c \equiv \frac{L}{s} \ln \left(\frac{\alpha\sigma_0}{2} \right), \quad (5.5.43)$$

a constante y_c foi escolhida para manter a forma dos assintóticos: $\sigma \approx \sigma_0 e^{-s\frac{y}{L}}$ e $e^A \approx e^{\frac{y}{L}}$ nas proximidades do ponto fixo. O ganho deste modelo em relação ao quadrático é que agora a

singularidade nua se encontra num valor finito de y , no ponto y_c , não mais no limite $y \rightarrow -\infty$. É evidente que a solução só é definida para $y > y_c$ e em $y = y_c$ o campo escalar diverge - singularidade nua, pois R também diverge (ver eq. (5.2.8)) - e para $y \rightarrow \infty$ temos um assintótico AdS_d .

5.5.3.3 W -sin²

Como último exemplo será analisado um fluxo entre dois pontos críticos através do superpotencial

$$W(\sigma) = -\frac{1}{L} \left(d - 2 + \frac{s}{\alpha^2} \sin^2 \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right), \quad 0 < \sigma < \frac{\pi}{\alpha}. \quad (5.5.44)$$

Para a função *beta*, basta a troca formal $\alpha \rightarrow i\alpha$ em (5.5.40)

$$-\beta(\sigma) = \frac{s}{\alpha} \frac{\sin(\alpha\sigma)}{\left(1 + \frac{s}{(d-2)\alpha^2} \sin^2 \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right)}, \quad (5.5.45)$$

o mesmo vale para o potencial com a eq. (5.5.39). Escolhendo $s = s_{UV} > 0$, temos um ponto fixo UV em $\sigma_{UV} = 0$ e um IV em $\sigma_{IV} = \frac{\pi}{\alpha}$. A escala do espaço AdS_d do ponto fixo UV é $L = L_{UV}$ e a do ponto IV é:

$$L_{IV} = \frac{L_{UV}}{1 + \frac{s_{UV}}{(d-2)\alpha^2}} < L_{UV}. \quad (5.5.46)$$

O índice crítico associado ao ponto fixo IV ($-\beta'(\sigma_{IV}) \equiv s_{IR}$) pode ser escrito em termos de s_{UV} e α

$$s_{IR} = -\frac{s_{UV}}{1 + \frac{s_{UV}}{(d-2)\alpha^2}} < 0. \quad (5.5.47)$$

Uma particularidade do modelo é a relação:

$$\frac{s_{UV}}{L_{UV}} = -\frac{s_{IR}}{L_{IV}}. \quad (5.5.48)$$

As soluções do campo escalar e fator de escala são:

$$\tan \left(\frac{\alpha\sigma(y)}{2} \right) = \frac{\alpha\sigma_0}{2} e^{-s \frac{y}{L_{UV}}}, \quad (5.5.49)$$

$$\begin{aligned} e^A &= \left(\frac{2}{\alpha\sigma_0} \sin \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{s_{UV}}} \left(\cos \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{s_{IV}}} \\ &= e^{\frac{y}{L_{UV}}} \left(1 + \frac{\alpha^2\sigma_0^2}{4} e^{-2s_{UV} \frac{y}{L_{UV}}} \right)^{-\frac{1}{2(d-2)\alpha^2}}. \end{aligned} \quad (5.5.50)$$

O modelo descreve uma verdadeira PD interpolando entre os dois vácuos (pontos fixos), como pode ser visto na figura (5.2).

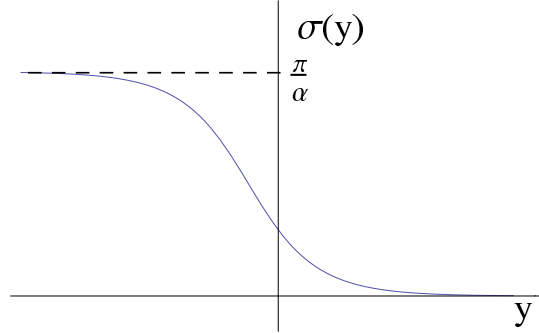


Figura 5.2–Forma do campo escalar para o superpotencial (5.5.44).

A constante de integração foi escolhida para que nas proximidades do ponto UV: $e^A \approx e^{\frac{y}{L_{UV}}}$ e $\sigma \approx \sigma_0 e^{-s \frac{y}{L_{UV}}}$. Como consequência, perto do ponto IV ($\sigma_{IV} = \frac{\pi}{\alpha}$)

$$e^{A(y)} \approx \left(\frac{\alpha\sigma_0}{2}\right)^{-\frac{1}{(d-2)\alpha^2}} e^{\frac{y}{L_{IV}}}, \quad y \rightarrow -\infty,$$

$$\sigma(y) \approx \frac{\pi}{\alpha} - \frac{4}{\alpha^2\sigma_0} e^{s_{UV} \frac{y}{L_{UV}}} = \frac{\pi}{\alpha} - \frac{4}{\alpha^2\sigma_0} e^{-s_{IV} \frac{y}{L_{IV}}}, \quad y \rightarrow -\infty.$$

A troca UV \rightarrow IV nos índices é possível devido a (5.5.48).

O fluxo não massivo descrito por este exemplo não sofre de nenhum defeito aparente. A solução do campo escalar é um verdadeiro *kink* e a geometria de PD interpola entre dois vácuos AdS_d com escalas distintas. A particularidade do modelo é a eq. (5.5.48) que força $s_{UV} > |s_{IV}|$, pois $L_{UV} > L_{IV}$.

5.5.4 Flutuações lineares

Uma vez determinados o campo escalar e a métrica de uma solução de PD, o passo seguinte é analisar as flutuações ao redor dessas. O interesse não é apenas estudar a estabilidade das soluções, as flutuações possuem papel importante na descrição holográfica. No exemplo da seção 5.5.4.3 é mostrado como as flutuações ao redor de uma solução explícita de PD reproduz o espectro de massa de uma $pCFT_{d-1}$. As flutuações lineares do campo e da métrica são estudadas num calibre particular, *de Newton*, culminando em eqs. equivalentes a um problema de mecânica quântica supersimétrica.

5.5.4.1 Flutuações lineares do campo e métrica no calibre de Newton

A métrica e campo escalar são:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \\ \sigma &= \bar{\sigma} + \phi, \end{aligned} \quad (5.5.51)$$

onde as quantidades com “barra” remetem a um modelo do tipo PD já resolvido - o famoso *background*. Já $h_{\mu\nu}$ e ϕ são flutuações lineares (quantidades pequenas em relação ao *background*, assim só são consideradas as primeiras correções) da PD dada. Na aproximação linear, as quantidades geométricas de interesse ficam

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\tau} h_{\rho\tau}, \quad (5.5.52)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda(1)}, \quad (5.5.53)$$

$$R_{\rho\mu\nu}^{\lambda} = \bar{R}_{\rho\mu\nu}^{\lambda} + R_{\rho\mu\nu}^{\lambda(1)}, \quad (5.5.54)$$

com

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda(1)} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\lambda\alpha} (\bar{\nabla}_{\mu} h_{\alpha\nu} + \bar{\nabla}_{\nu} h_{\mu\alpha} - \bar{\nabla}_{\alpha} h_{\mu\nu}), \quad (5.5.55)$$

$$R_{\rho\mu\nu}^{\lambda(1)} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\lambda\alpha} (\bar{\nabla}_{\nu} \bar{\nabla}_{\mu} h_{\alpha\rho} + \bar{\nabla}_{\nu} \bar{\nabla}_{\rho} h_{\mu\alpha} - \bar{\nabla}_{\nu} \bar{\nabla}_{\alpha} h_{\mu\rho}) - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (5.5.56)$$

Consequentemente

$$R_{\mu\nu}^{(1)} \equiv (R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda})^{(1)} = \frac{1}{2} (-\bar{\nabla}^2 h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_{\mu} \bar{\nabla}_{\nu} h + \bar{\nabla}^{\sigma} \bar{\nabla}_{\nu} h_{\sigma\mu} + \bar{\nabla}^{\sigma} \bar{\nabla}_{\mu} h_{\sigma\nu}), \quad (5.5.57)$$

$$R^{(1)} \equiv (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})^{(1)} = -\bar{\nabla}^2 h + \bar{\nabla}_{\mu} \bar{\nabla}_{\nu} h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}. \quad (5.5.58)$$

Repare que nos termos lineares quem sobe e desce os índices são os elementos $\bar{g}_{\mu\nu}$. Os resultados acima podem ser encontrados em quase todos os livros sobre Relatividade Geral, (80).

Na aproximação linear as eqs. de Einstein são:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} R^{(1)} \bar{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} h_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (5.5.59)$$

que podem ser reescritas da forma:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2} T \right)^{(1)} = \frac{\kappa^2}{2} \left(T_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{\bar{g}_{\mu\nu}}{d-2} T^{(1)} - \frac{h_{\mu\nu}}{d-2} \bar{T} \right), \quad (5.5.60)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(1)} &= \delta_\mu^y \dot{\bar{\sigma}} \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \delta_\nu^y \dot{\bar{\sigma}} - h_{\mu\nu} \left(\frac{\dot{\bar{\sigma}}^2}{2} + V(\bar{\sigma}) \right) - \bar{g}_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} h^{yy} \dot{\bar{\sigma}}^2 + \dot{\bar{\sigma}} \partial_y \phi + \partial_{\bar{\sigma}} V(\bar{\sigma}) \phi \right), \\ T^{(1)} &= (g^{\mu\nu} T_{\mu\nu})^{(1)} = \bar{g}^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(1)} - h^{\mu\nu} \bar{T}_{\mu\nu} \\ &= 2\dot{\bar{\sigma}} \partial_y \phi - h \left(\frac{\dot{\bar{\sigma}}^2}{2} + V(\bar{\sigma}) \right) - d \left(-\frac{1}{2} h^{yy} \dot{\bar{\sigma}}^2 + \dot{\bar{\sigma}} \partial_y \phi + \partial_{\bar{\sigma}} V(\bar{\sigma}) \phi \right) - h^{\mu\nu} \bar{T}_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Já a eq. para a flutuação do campo escalar é:

$$(\bar{\nabla}^2 - \partial_{\bar{\sigma}}^2 V(\bar{\sigma})) \phi = h^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu (\partial_\nu \bar{\sigma}) + \bar{g}^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{y(1)} \dot{\bar{\sigma}}. \quad (5.5.61)$$

Com o intuito de simplificar as eqs. escolhemos fixar as arbitrariedades da métrica com o chamado de *calibre de Newton* (62), definido por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - 2(d-3)B)dy^2 + e^{2A}(\eta_{ij} + h_{ij}^{TT} + 2B\eta_{ij})dx^i dx^j, \quad (5.5.62) \\ \eta^{ij} h_{ij}^{TT} &= \partial^i h_{ij}^{TT} = 0. \end{aligned}$$

No calibre de Newton ambos os lados da eq. (5.5.60) podem ser determinados na aproximação linear para todas as combinações de índices. Os cálculos são longos e podem ser encontrados no apêndice D. O resultado final é:

$$\left(e^{-2A} \square_{d-1} + \partial_y^2 + (d-1)\dot{A}\partial_y \right) h_{ij}^{TT} = 0, \quad (5.5.63)$$

$$\begin{aligned} &\left(e^{-2A} \square_{d-1} + \partial_y^2 + (3d-5)\dot{A}\partial_y + 2(d-3) \left((d-1)\dot{A}^2 + \ddot{A} \right) \right) B = \\ &-\frac{\kappa^2 \partial_{\bar{\sigma}} V(\bar{\sigma})}{d-2} \phi, \quad (5.5.64) \end{aligned}$$

$$\left(\partial_y + (d-3)\dot{A} \right) B = -\frac{\kappa^2}{2(d-2)} \dot{\bar{\sigma}} \phi, \quad (5.5.65)$$

$$\begin{aligned} &\left[(d-3)e^{-2A} \square_{d-1} - (d-1)^2 \dot{A}\partial_y - (d-1)\partial_y^2 \right] B = \\ &\kappa^2 \left(\dot{\bar{\sigma}} \partial_y \phi + \frac{\partial_{\bar{\sigma}} V(\bar{\sigma})}{(d-2)} - \frac{2(d-3)}{(d-2)} V(\bar{\sigma}) B \right). \quad (5.5.66) \end{aligned}$$

A primeira eq. é a parte com traço nulo das componentes (i, j) , a segunda é a parte com traço não nulo da mesma eq., a terceira é a componente (y, j) e a última é a componente (y, y) que não fornece nenhuma informação nova. A eq. (5.5.61) fica

$$\begin{aligned} \left(e^{-2A} \square_{d-1} + \partial_y^2 + (d-1)\dot{A}\partial_y - \partial_{\bar{\sigma}}^2 V(\bar{\sigma}) \right) \phi &= -2(d-3)\partial_{\bar{\sigma}} V(\bar{\sigma}) B \\ &-2(d-2)\dot{\bar{\sigma}} \partial_y B, \quad (5.5.67) \end{aligned}$$

onde a eq. (5.1.9) foi usada para eliminar o termo $\ddot{\bar{\sigma}}$.

5.5.4.2 Relação com a mecânica quântica supersimétrica

Seguindo (62), vamos desacoplar as eqs. e chegar em duas eqs. diferenciais do tipo Schrödinger supersimétricas. O primeiro passo é realizar a troca de coordenada $y \rightarrow z$

$$z = - \int e^{-A(y)} dy, \quad d\bar{s}^2 = e^{2A(y(z))} (dz^2 + \eta_{ij} dx^i dx^j). \quad (5.5.68)$$

Nos cálculos que seguem o “ponto” remete a derivada com relação à y e “linha” com relação à z . Começando com a flutuação tensorial, definimos $h_{ij}^{TT} = e^{-\frac{(d-2)}{2}A} \tilde{h}_{ij}^{TT}$ e a eq. (5.5.63) fica

$$\square_{d-1} \tilde{h}_{ij}^{TT} = (-\partial_z^2 + \mathcal{V}_h) \tilde{h}_{ij}^{TT}, \quad \mathcal{V}_h = \left(\frac{d-2}{2} \right)^2 A'^2 + \frac{d-2}{2} A'', \quad (5.5.69)$$

que tem a forma de uma eq. de Schrödinger com a energia sendo o auto-valor do operador \square_{d-1} , *i.e.* uma mecânica quântica (M.Q.) para a transformada de Fourier de \tilde{h}_{ij}^{TT} . Essa “M.Q.” é muito especial, pela forma do potencial

$$\mathcal{V}_h = \mathcal{W}_h^2 - \mathcal{W}'_h, \quad \mathcal{W}_h = -\frac{(d-2)}{2} A', \quad (5.5.70)$$

ela é supersimétrica, ver detalhes em (81).

Seguindo para a abordagem da flutuação escalar B . Primeiramente com uma combinação das eqs. (5.5.64) e (5.5.65) chega-se a seguinte eq. para B

$$\left[e^{-2A} \square_{d-1} + \partial_y^2 + \left((d-3)\dot{A} - 2\frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}} \right) \partial_y + 2(d-3) \left(\ddot{A} - \dot{A}\frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}} \right) \right] B = 0, \quad (5.5.71)$$

também foi utilizada a eq. (5.1.9) para eliminar o termo $\partial_{\bar{\sigma}} V(\bar{\sigma})$. Passando a eq. acima para a coordenada z e depois definindo $B = \bar{\sigma}' e^{-\frac{(d-2)}{2}A} \tilde{B}$, acha-se

$$\begin{aligned} (-\partial_z^2 + \mathcal{V}_B) \tilde{B} &= \square_{d-1} \tilde{B}, \\ \mathcal{V}_B &= -\frac{\bar{\sigma}'''}{\bar{\sigma}'} + 2 \left(\frac{\bar{\sigma}''}{\bar{\sigma}'} \right)^2 - \frac{(3d-10)}{2} A'' + (d-4) \frac{\bar{\sigma}''}{\bar{\sigma}'} A' + \left(\frac{d-2}{2} \right)^2 A'^2, \end{aligned} \quad (5.5.72)$$

uma eq. de Schrödinger para o Fourier de \tilde{B} . O potencial \mathcal{V}_B é supersimétrico porque pode ser escrito como

$$\mathcal{V}_B = \mathcal{W}_B^2 - \mathcal{W}'_B, \quad \mathcal{W}_B = -\partial_z \left[\ln \left(e^{-\frac{(d-2)}{2}A} \frac{A'}{\bar{\sigma}'} \right) \right]. \quad (5.5.73)$$

Chegar na forma acima não é complicado, mas é necessário usar a identidade

$$\bar{\sigma}' (A''' - 2A'A'') = 2\bar{\sigma}'' (A'' - A'^2).$$

As soluções descritas pelo método do superpotencial são estáveis pois o espectro de suas flutuações são positivos devido a supersimetria.

Conclusão: encontrando as soluções das eqs. (5.5.69) e (5.5.72) (com certas condições de contorno) o problema está completamente resolvido, porque conhecendo B (e seu espectro), automaticamente sabe-se ϕ (e seu espectro) via eq. (5.5.65). A grande dificuldade do método é uma vez conhecido $A(y)$ realizar a passagem para a coordenada z - eq. (5.5.68). São poucos os casos em que a integral pode ser determinada, na próxima seção uma dessas raridades é estudada.

5.5.4.3 Flutuações em um caso particular

Fixando $s = 1$ e $\alpha^2 = \frac{1}{d-2}$ na eq. (5.5.38) ($\kappa = 1$)

$$W(\sigma) = -\frac{(d-2)}{L} \left(1 + \sinh^2 \left(\frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{d-2}} \right) \right), \quad (5.5.74)$$

as soluções do campo e métrica e em termos de y ou z se simplificam em

$$e^A = \sqrt{e^{\frac{2y}{L}} - 1} = \frac{1}{\sinh \left(\frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{d-2}} \right)} \quad (5.5.75)$$

$$e^{-\frac{y}{L}} = \tanh \left(\frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{d-2}} \right) = \sin \left(\frac{z}{L} \right), \quad 0 < \frac{z}{L} < \frac{\pi}{2}, \quad (5.5.76)$$

consequentemente

$$e^{A(z)} = \frac{1}{\tan \left(\frac{z}{L} \right)}, \quad (5.5.77)$$

$$\sigma'(z) = \frac{2\sqrt{d-2}}{L \cos \left(\frac{z}{L} \right)}. \quad (5.5.78)$$

As eqs. acima são suficientes para determinar \mathcal{V}_h e \mathcal{V}_B (eqs. (5.5.70) e (5.5.73))

$$\mathcal{V}_h = \frac{d-2}{L^2} \frac{1}{\sin^2 \left(-\frac{2z}{L} \right)} \left((d-2) + 2 \cos \left(\frac{2z}{L} \right) \right), \quad (5.5.79)$$

$$\mathcal{V}_B = \frac{1}{4L^2} \left(-4 + \frac{(d-4)(d-6)}{\sin^2 \left(\frac{z}{L} \right)} + \frac{d(d-2)}{\cos^2 \left(\frac{z}{L} \right)} \right). \quad (5.5.80)$$

Como o parâmetro z é limitado ao segmento de reta $(0, \frac{\pi L}{2})$, as condições de contorno

$$\lim_{z \rightarrow 0, \frac{\pi L}{2}} \tilde{h}_{ij}(z) = \lim_{z \rightarrow 0, \frac{\pi L}{2}} \tilde{B}(z) = 0, \quad (5.5.81)$$

devem ser impostas. Elas também garantem o comportamento correto na geometria - as flutuações desaparecem na borda e a divergência na singularidade está no *background* e não

na flutuação. Como consequência das condições de contorno é evidente que o espectro dos autovalores do operador \square_{d-1} será discreto - um problema de Mecânica Quântica Supersimétrica com estados ligados.

A eq. para o Fourier da flutuação tensorial é

$$\left(-\partial_z^2 + \frac{d-2}{L^2} \frac{1}{\sin^2\left(-\frac{2z}{L}\right)} \left((d-2) + 2 \cos\left(-\frac{2z}{L}\right) \right) \right) \tilde{h}_{ij}^F = m_h^2 \tilde{h}_{ij}^F, \quad (5.5.82)$$

cuja solução, para $d \neq 4$, regular em $z = 0$ é:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ij}^F &= A_{ij}(p) \sin^{\frac{d}{2}}\left(\frac{z}{L}\right) \cos^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{z}{L}\right) F\left(\frac{z}{L}\right), \\ F\left(\frac{z}{L}\right) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\left(d-1-\sqrt{L^2 m_h^2}\right), \frac{1}{2}\left(d-1+\sqrt{L^2 m_h^2}\right); \frac{d+1}{2}; \sin^2\left(\frac{z}{L}\right)\right), \end{aligned}$$

onde ${}_2F_1(a, b; c; x)$ é a função hipergeométrica. Suas principais propriedades estão listadas no apêndice A.

A solução diverge no limite $z \rightarrow \frac{\pi L}{2}$ a menos que a hipergeométrica seja um polinômio de grau n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Isso ocorre quando

$$\begin{aligned} -n &= \frac{1}{2} \left(d-1 - \sqrt{L^2 m_h^2} \right), \text{ ou} \\ m_h^2(N) &= \frac{N^2}{L^2}, \quad N = d-1 + 2n = d-1, d+1, d+3, \dots, \end{aligned} \quad (5.5.83)$$

i.e. m_h^2 possui um espectro discreto de acordo com o esperado para um estado ligado.

A eq. de Schrödinger que descreve o Fourier da flutuação escalar é:

$$\left[-\partial_z^2 + \frac{1}{4L^2} \left(-4 + \frac{(d-4)(d-6)}{\sin^2\left(-\frac{z}{L}\right)} + \frac{d(d-2)}{\cos^2\left(-\frac{z}{L}\right)} \right) \right] \tilde{B}_F = m_B^2 \tilde{B}_F, \quad (5.5.84)$$

cuja solução que atende todas as condições de contorno é:

$$\tilde{B}_F = A(p) \sin^{\frac{(d-4)}{2}}\left(\frac{z}{L}\right) \cos^{\frac{d}{2}}\left(\frac{z}{L}\right) F\left(\frac{z}{L}\right), \quad (5.5.85)$$

$$F\left(\frac{z}{L}\right) = {}_2F_1\left(a_-, a_+; \frac{d-3}{2}; \sin^2\left(\frac{z}{L}\right)\right) \quad (5.5.86)$$

$$a_{\pm} = \frac{d-2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + L^2 m^2}, \quad (5.5.87)$$

para a solução atender as condições de contorno é necessário $a_- = -n_B$, $n_B = 0, 1, \dots$

Assim:

$$m_B^2(n_B) = \frac{1}{L^2} \left((d-2 + 2n_B)^2 - 1 \right), \quad (5.5.88)$$

novamente um espectro discreto. No caso particular de $d = 5$

$$m_B(n) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} m_B(1), \quad n = n_B + 1 = 1, 2, \dots, \quad (5.5.89)$$

As massas (5.5.83) ($d = 5$) e (5.5.89) são bem conhecidas na literatura (63, 64) e são interpretadas como o espectro de massa das partículas da $pCFT_4$ dual. Mas ao contrário das referências supracitadas, não calculamos a função de dois pontos de forma explícita para só depois identificar seus pólos com o espectro de massa. No calibre de Newton, as massas são automaticamente obtidas uma vez impostas as condições de contorno “usuais” de um problema de *mecânica quântica*.

Um método holográfico alternativo de calcular espectros de massa, por exemplo, dos *glueballs* mais leves, é o das “Paredes Duras” (do inglês *hard walls*)(57), onde a “escala” massiva é criada por um *cut* no espaço AdS_d .

5.5.4.4 Método aproximativo para as flutuações lineares no calibre de Newton

Como já foi dito anteriormente são raros os casos em que é possível escrever o fator de escala e o campo escalar como funções da coordenada conforme $z = -\int e^{-A(y)} dy$ - condição necessária para a aplicação do método desenvolvido na seção 5.5.4.1. Mesmo quando os potenciais $\mathcal{V}_h(z)$ e $\mathcal{V}_B(z)$ são conhecidos não há garantias de que seremos capazes resolver as “eqs. de Schrödinger”. Uma forma de obter alguma informação é estudar o superpotencial W ao redor de um ponto fixo físico, e dentro da aproximação encontrar as eqs. que descrevem as flutuações lineares.

Sem perda de generalidade, o ponto fixo (do tipo físico) será assumido em $\sigma = 0$. Em suas proximidades, o superpotencial é:

$$W \approx -\frac{1}{L} \left((d-2) + \frac{s}{4}\sigma^2 + \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{6}\sigma^3 + \frac{\gamma}{8}\sigma^4 + \dots \right), \quad (5.5.90)$$

$s \neq 0$, $C_{\Delta\Delta\Delta}$ e γ são quantidades adimensionais, assim como σ ($\kappa = 1$). A função $\beta(\sigma)$ é:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d(-A)} = -\beta(\sigma) &= 2(d-2) \frac{W'}{W} = \sigma \frac{(d-2)(s + C_{\Delta\Delta\Delta}\sigma + \gamma\sigma^2)}{(d-2) + \frac{s}{4}\sigma^2 + \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{6}\sigma^3 + \frac{\gamma}{8}\sigma^4} \\ &= \frac{(d-2)\sigma\gamma(\sigma - \sigma_1^*)(\sigma - \sigma_2^*)}{(d-2) + \frac{s}{4}\sigma^2 + \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{6}\sigma^3 + \frac{\gamma}{8}\sigma^4}, \end{aligned} \quad (5.5.91)$$

$$\approx s\sigma + C_{\Delta\Delta\Delta}\sigma^2 + \left(\gamma - \frac{s^2}{4(d-2)} \right) \sigma^3 + \dots, \quad (5.5.92)$$

onde ($C_{\Delta\Delta\Delta} \neq 0$)

$$\sigma_1^* = -\frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{2\gamma} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma s}{C_{\Delta\Delta\Delta}^2}} \right) \approx -\frac{s}{C_{\Delta\Delta\Delta}} - \gamma \frac{s^2}{C_{\Delta\Delta\Delta}^3} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (5.5.93)$$

$$\sigma_2^* = -\frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{2\gamma} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\gamma s}{C_{\Delta\Delta\Delta}^2}} \right) \approx -\frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{\gamma} + \frac{s}{C_{\Delta\Delta\Delta}} + \frac{s^2\gamma}{C_{\Delta\Delta\Delta}^3} + \mathcal{O}(\gamma^2) \quad (5.5.94)$$

Os pontos σ_1^* e σ_2^* não precisam ser encarados como pontos fixos, mesmo quando são números reais, são apenas um reflexo do método perturbativo. O ponto $\sigma = 0$ é relevante quando $s > 0$ e irrelevante para $s < 0$.

Para $C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$, σ_1^* e σ_2^* em (5.5.91) devem ser substituídos por

$$\sigma_{1,2}^* = \pm \sqrt{\frac{-s}{\gamma}}. \quad (5.5.95)$$

Soluções do DW na aproximação: Integrando $\dot{\sigma} = 2W'$, via (5.5.90), encontra-se:

$$e^{\frac{y-y_{min}}{L}} = |\sigma|^{-\frac{1}{s}} |\sigma - \sigma_1^*|^{-\frac{1}{s_1}} |\sigma - \sigma_2^*|^{-\frac{1}{s_2}}, \quad (5.5.96)$$

$$s_1 = \gamma \sigma_1^* (\sigma_1^* - \sigma_2^*), \approx -s + \gamma \frac{s^2}{C_{\Delta\Delta\Delta}^2}, \quad (5.5.97)$$

$$s_2 = -\gamma \sigma_2^* (\sigma_1^* - \sigma_2^*) \approx \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}^2}{\gamma}. \quad (5.5.98)$$

Repare que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 0,$$

portanto no limite $y \rightarrow y_{min}$: $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Ao definir a constante σ_0 , t.q. $\sigma \approx \sigma_0 e^{-s\frac{y}{L}}$, $y \rightarrow \infty$, a razão $\frac{y_{min}}{L}$ passa a ser dada por:

$$e^{\frac{y_{min}}{L}} = |\sigma_0|^{\frac{1}{s}} |\sigma_1^*|^{\frac{1}{s_1}} |\sigma_2^*|^{\frac{1}{s_2}}. \quad (5.5.99)$$

Invertendo, perturbativamente, a eq. (5.5.96), tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma(y) \approx & \sigma_0 e^{-s\frac{y}{L}} \left(1 + \sigma_0 \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{s} e^{-s\frac{y}{L}} + \sigma_0^2 \left(\frac{C_{\Delta\Delta\Delta}^2}{s^2} + \frac{\gamma}{2s} \right) e^{-2s\frac{y}{L}} \right. \\ & \left. + \sigma_0^3 \left(\frac{C_{\Delta\Delta\Delta}^3}{s^3} + \frac{4}{3} \gamma \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{s^2} \right) e^{-3s\frac{y}{L}} + \mathcal{O} \left(\sigma_0^4 e^{-4s\frac{y}{L}} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.5.100)$$

Da eq. (5.5.92) é possível calcular $A = A(\sigma)$, mas nosso interesse está em $A = A(y)$ nas proximidades do ponto crítico. Algo simples de ser encontrado via (5.5.100), o resultado é:

$$e^{A(y)} \approx e^{\frac{y}{L}} \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{8(d-2)} e^{-2s\frac{y}{L}} - \frac{\sigma_0^3 C_{\Delta\Delta\Delta}}{9(d-2)s} e^{-3s\frac{y}{L}} + \mathcal{O} \left(\sigma_0^4 e^{-4s\frac{y}{L}} \right) \right), \quad (5.5.101)$$

é interessante notar que até a ordem analisada $A(y)$ independe de γ , ao contrário de $\sigma(y)$.

Passando para a coordenada z : Para usar nossos resultados é preciso reescrever as eqs. em termos da coordenada

$$\frac{z}{L} = - \int dy e^{-A(y)}, \quad (5.5.102)$$

invertendo ordem a ordem, fica-se com:

$$e^{-\frac{y}{L}} = \frac{z}{L} \left(1 - \frac{\sigma_0^2 s}{8(d-2)(1+2s)} \left(\frac{z}{L}\right)^{2s} - \frac{2\sigma_0^3 C_{\Delta\Delta\Delta}}{9(d-2)(1+3s)} \left(\frac{z}{L}\right)^{3s} + \mathcal{O}\left(\sigma_0^4 e^{-4s\frac{y}{L}}\right) \right),$$

e o valor y_{min} é mapeado em:

$$\frac{z_{max}}{L} = |\sigma_0|^{-\frac{1}{s}} |\sigma_1^*|^{-\frac{1}{s_1}} |\sigma_2^*|^{-\frac{1}{s_2}}. \quad (5.5.103)$$

O campo escalar e o fator de escala são escritos em termos da nova coordenada:

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma_0 \left(\frac{z}{L}\right)^s \left(1 + \sigma_0 \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{s} \left(\frac{z}{L}\right)^s + \sigma_0^2 \left(\frac{C_{\Delta\Delta\Delta}^2}{s^2} - \frac{s}{8(d-2)(1+2s)} + \frac{\gamma}{2s} \right) \left(\frac{z}{L}\right)^{2s} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_0^3 \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{s} \left(\frac{C_{\Delta\Delta\Delta}^2}{s^2} + \frac{4C_{\Delta\Delta\Delta}\gamma}{3s^2} - \frac{s(17+43s)}{32(d-2)(1+2s)(1+3s)} \right) \left(\frac{z}{L}\right)^{3s} + \mathcal{O}\left(\sigma_0^4 \left(\frac{z}{L}\right)^{4s}\right) \right) \\ e^{A(z)} &= \frac{L}{z} \left(1 - \frac{\sigma_0^2 s}{4(d-2)(1+2s)} \left(\frac{z}{L}\right)^{2s} - \frac{2\sigma_0^3 C_{\Delta\Delta\Delta}}{3(d-2)(1+3s)} \left(\frac{z}{L}\right)^{3s} + \mathcal{O}\left(\sigma_0^4 \left(\frac{z}{L}\right)^{4s}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.5.104)$$

Equações para as flutuações: Abastecidos de $\sigma(z)$ e $A(z)$, os potenciais $\mathcal{V}_h(z)$ e $\mathcal{V}_B(z)$, eqs. (5.5.69) e (5.5.72), podem ser calculados:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &= \frac{d(d-2)}{4z^2} + \sigma_0^2 \frac{s^2(d-1-2s)}{4(1+2s)L^2} \left(\frac{z}{L}\right)^{2s-2} \\ &\quad + \sigma_0^3 \frac{sC_{\Delta\Delta\Delta}(d-1-3s)}{(1+3s)L^2} \left(\frac{z}{L}\right)^{3s-2} + \mathcal{O}\left(\sigma_0^4 \left(\frac{z}{L}\right)^{4s-2}\right), \end{aligned} \quad (5.5.105)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_B &= \frac{(d-2-2s)(d-4-2s)}{4z^2} - 2\sigma_0 \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}(d-3-s)}{L^2} \left(\frac{z}{L}\right)^{s-2} \\ &\quad + \frac{\sigma_0^2}{4(d-2)s(1+2s)L^2} \left(-8C_{\Delta\Delta\Delta}^2(d-2)(d-3-2s)(1+2s) \right. \\ &\quad \left. + (d-3)s(s^2(d-2+7s) - 12(d-2)(1+2s)\gamma) \right) \left(\frac{z}{L}\right)^{2s-2} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\sigma_0^4 \left(\frac{z}{L}\right)^{3s-2}\right). \end{aligned} \quad (5.5.106)$$

n	1	2	3	4	5	6
eq. (5.5.89)	1	1.73	2.45	3.16	3.87	4.58
eq. (5.5.110)	1	1.76	2.62	3.51	4.41	5.31

Tabela 5.1 – razão entre a massa do n -ésimo estado e do estado fundamental calculadas via eq. (5.5.89) e sua aproximação (5.5.110) no caso $d = 5$.

As eqs. (5.5.105) e (5.5.106) são válidas, dentro da aproximação, até nos casos particulares $C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$ ou $\gamma = 0$. Porém não são válidas em $s = 0$ - vácuo degenerado.

5.5.4.5 Comparação com o exemplo exato

Na seção 5.5.4.3 foi calculado para um $W(\sigma)$ específico o espectro de massa da flutuação escalar. Aqui vamos comparar o resultado com o previsto pelo nosso cálculo perturbativo. Nas proximidades do ponto crítico, (5.5.74) é:

$$W(\sigma) \approx -\frac{1}{L} \left(d - 2 + \frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{6(d-2)} \frac{\sigma^4}{8} + \dots \right), \quad (5.5.107)$$

comparando com (5.5.90) tem-se $s = 1$, $C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$ e $\gamma = \frac{1}{6(d-2)}$. Da eq. (5.5.76) é evidente a forma assintótica $\sigma(z) \approx 2\sqrt{d-2} \frac{z}{L} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)$, i.e. $\sigma_0 = 2\sqrt{d-2}$.

Neste exemplo (5.5.106) é simplesmente

$$\mathcal{V}_B(z) \approx \frac{(d-4)(d-6)}{4z^2} + \frac{(d-3)(d-1)}{3L^2} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{z}{L}\right)^2\right], \quad (5.5.108)$$

e a solução do Fourier de $\tilde{B}(z)$ regular em $z = 0$ é:

$$\tilde{B}^F(z; p) = A(p) \sqrt{z} J_0(Mz), \quad M = \sqrt{m_B^2 - \frac{(d-3)(d-2)}{3L^2}}, \quad (5.5.109)$$

que não possui um espectro discreto, entretanto ao impor a condição de contorno $\tilde{B}(z_{max}; p) = 0$, temos

$$J_0(z_{max}M) = 0 \rightarrow \frac{(m_B)_n}{(m_B)_1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + (d-3)(d-2)}}{\sqrt{5.78319 + (d-3)(d-2)}}, \quad (5.5.110)$$

um espectro discreto, onde x_n é o n -ésimo zero de $J_0(x)$. Para o caso $d = 5$ comparamos na tabela 5.1 as razões $\frac{(m_B)_n}{(m_B)_1}$, obtidas pelo resultado exato (5.5.89) com a aproximação (5.5.110). O erro relativo entre os resultados aumenta com n , no primeiro estado excitado ($n = 2$) ele é de 1.73%, já para $n = 6$ passa a ser de 15.9%. Podemos concluir que os resultados aproximativos foram satisfatórios ao serem confrontados com cálculos exatos.

Uma vez estabelecido o valor da aproximação, uma possibilidade seria a tentativa de resolver as eqs. (5.5.105) e (5.5.105) para s 's mais gerais, o que não é feito nesta tese. O leitor interessado pode consultar (58), onde o espectro dos auto valores para potenciais com essa estrutura é estudado através do método WKB exato.

Resumo da segunda parte

Neste segundo terço de tese foi apresentado o espaço de anti de Sitter em d dimensões, solução das eqs. de Einstein sem matéria e com constante cosmológica negativa, em suas duas versões: assinatura lorentziana (AdS_d) e euclidiana (H^d). O fato das isometrias da métrica de AdS_d nas coordenadas de Poincaré no limite da borda do espaço ($z \rightarrow 0$) reproduzirem exatamente as transformações conformes em $d-1$ dimensões é o um dos grandes indícios da correspondência AdS_d/CFT_{d-1} (ver seção 4.3.1). No capítulo 4 o princípio holográfico é confirmado ao ser demonstrado que a ação *on shell* da solução de um campo escalar massivo, ϕ , num *background* H_d - com a condição de contorno (nas coordenadas de Poincaré) $\phi(z; \vec{x}) \approx z^{\Delta} \phi_0(\vec{x})$, $z \rightarrow 0$ - funciona (após o acréscimo de contra-termos) como o funcional gerador de uma CFT_{d-1} se $\phi_0(\vec{x})$ for identificado como uma fonte externa. Através deste método foram calculadas as funções de dois e três pontos de uma CFT_{d-1} .

Na tentativa de descrever a função *beta* de uma $pCFT_{d-1}$, assunto do capítulo 5, é preciso estender a correspondência AdS_d/CFT_{d-1} para uma $(a)AdS_d/pCFT_{d-1}$, ou seja a gravitação não pode ser um simples espaço AdS_d , mas sim um assintoticamente AdS_d . A classe de espaços $(a)AdS_d$ escolhida é a PD - geometrias conforme planas que interpolam entre dois vácuos AdS_d ou entre um vácuo AdS_d e uma singularidade nua - descritas pela métrica $ds^2 = dy^2 + e^{2A(y)} \eta_{ij} dx^i dx^j$. As eqs. do movimento são reescritas em termos de um sistema de primeira ordem ao ser introduzido o superpotencial W . Ele descreve os chamados *vácuos físicos* - extremos de W - e a simplicidade das eqs. facilita os cálculos para a obtenção de resultados exatos.

Cada corte $y = const.$ numa PD representa um espaço M_d (ou H^d na versão euclidiana) com uma escala física diferente, e como a borda do espaço (onde $e^A \rightarrow \infty$) deve corresponder a um ponto fixo UV, a identificação $e^A = e^{-l} \sim L^{-1}$ é natural, - L é a escala de comprimento da $pCFT_{d-1}$, *i.e.* grandes escalas na gravitação correspondem a pequenas escalas (grandes energias) na teoria de campo holográfica. Outras identificações são a do campo escalar, $\sigma(y)$, (que gera a geometria $(a)AdS_d$) como o acoplamento do termo que perturba a CFT_d e $m^2 \sim s(s - (d-1))$ - m^2 é a massa ao quadrado, com relação a um vácuo AdS_d , do campo escalar e s é o índice crítico associado a CFT_{d-1} correspondente. Como consequência temos a função *beta* holográfica, $-\beta(\sigma) = \frac{d\sigma}{d(-A)}$. Uma limitação clara dessa descrição holográfica, reflexo de uma supersimetria escondida na gravitação, é que ela só descreve $pCFT_{d-1}$'s com as funções cargas centrais, $a(\sigma)$ e $c(\sigma)$, coincidentes. Os tipos de geometrias que geram diferentes fluxos holográficos são listados na seção 5.5.2 e surge um novo problema. Ao invés da função *beta* divergir na fase massiva ela torna-se nula (ver detalhes na seção 5.5.2.3). Mesmo sendo

uma abordagem não perturbativa, novamente encaramos limitações na descrição da função β longe do ponto crítico.

Ainda no capítulo 5 o *dicionário holográfico* relacionando a $(a)AdS_d$ com uma $pCFT_{d-1}$ ganha seu último elemento ao analisarmos as flutuações lineares da métrica e do campo escalar ao redor de uma geometria PD e seu uso na descrição da $pCFT_{d-1}$ - por exemplo, elas são necessárias para o cálculo do espectro de massa e das funções de correlação. Descritas no calibre de Newton, as flutuações lineares, culminam em eqs. com a mesma estrutura de uma mecânica quântica supersimétrica. No texto é calculado em detalhes as flutuações num exemplo com fluxo massivo (mesmo ele tendo os problemas já citados) exato e o espectro de massa da teoria de campo holográfica é determinado. Mesmo com uma estrutura simples, as eqs. das flutuações lineares só podem ser resolvidas de forma exata para poucas geometrias de PD, por isso no fim do capítulo uma formulação aproximativa é feita e testada ao compararmos os resultados com um caso exato.

Terminada a revisão, na terceira e última parte da tese são apresentados nossos resultados originais na tentativa de resolver o que consideramos as duas grandes falhas na descrição holográfica da função β : 1) só descreve teorias de campos com $a(\sigma) = c(\sigma)$; 2) a função β não descreve o comportamento correto numa eventual fase massiva, onde a PD possui uma singularidade nua.

PARTE 3:

**Teoremas *a* & *c* e
transições de fase holográficas**

Paredes de domínio na gravitação com termo de Gauss-Bonnet e seu uso em AdS/CFT

No capítulo anterior foi introduzido o dicionário holográfico para determinar a função *beta* de uma $pCFT_{d-1}$ através de geometrias $(a)AdS_d$ do tipo PD geradas por um campo escalar com auto-interação numa gravitação de EH. Apesar do método ser promissor, *a priori* fornece resultados exatos para a função *beta*, duas limitações são evidentes: 1) ele sempre descreve teorias $pCFT_{d-1}$ com as cargas centrais iguais, *i.e.* $a = c$ - um reflexo da supersimetria $\mathcal{N} = 4$; 2) as soluções de PD (“falsas”) que interpolam entre um vácuo AdS_d e uma singularidade *nua** deveriam descrever fluxos massivos. Para o fluxo ser caracterizado como massivo, na singularidade o fator de escala, identificado como o comprimento de correlação da $pCFT_{d-1}$, deveria tender a um valor finito não nulo e a função *beta* divergir. Porém o que ocorre é justamente a anulação do fator de escala e da função *beta*†. O objetivo deste e do próximo capítulo é descrever teorias alternativas que solucionem os dois problemas.

6.1 Definição do modelo, lagrangiana efetiva e equações do movimento

Focando no problema 2) enunciado no início do capítulo, uma tentativa de conseguir resultados melhores é acrescentar termos à ação que alterem a forma da singularidade ao mesmo tempo que não modificam muito a parte do vácuo (AdS_d). Em outras palavras, modificar a gravitação para *suavizar* as singularidades‡. Isso pode ser feito acrescentando termos de ordens maiores da curvatura, eles serão grandes nas proximidades da singularidade

*logo existe um corte (uma escala) na coordenada axial no ponto $y = y_{crit}$

†em alguns casos, discutidos no capítulo anterior, ao invés de se anular ela tende a uma constante.

‡pode-se pensar numa gravitação *semi clássica*.

(onde a curvatura diverge) e, nas proximidades do vácuo AdS_d serão absorvidos na constante cosmológica - uma vez que tenderão a constantes. O termo escolhido neste capítulo para ser acrescido à ação é o famoso termo de Gauss-Bonnet (GB). O novo modelo é:

$$S_{GB} = \int d^d x \sqrt{-g} \left[R + \frac{\lambda L^2}{(d-3)(d-4)} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right], \quad d > 4 \quad (6.1.1)$$

onde já foi fixado $\kappa^2 = 1$ (ver o final da seção 5.5), λ é um parâmetro adimensional e L é uma escala com unidade de comprimento.

A escolha do termo de GB não é arbitrária, no apêndice G é mostrado que esta ação é a mais geral possível, com termos de até segunda ordem na curvatura, que fornece eqs. diferenciais de segunda ordem para geometrias do tipo de PD,[§]. No mesmo apêndice é demonstrado que para uma métrica da forma

$$ds^2 = f^2(y) e^{2(d-1)A(y)} dy^2 + e^{2A(y)} \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.1.2)$$

a ação (6.1.1) é equivalente a (5, 6)

$$S_{GB} = \int d^{d-1} x dy \mathcal{L}_{ef} - 2(d-1) \int d^{d-1} x dy \frac{d}{dy} \left[\frac{\dot{A}}{f} \left(1 - \frac{2\lambda L^2 (d-2)}{3(d-4)} \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^2} \dot{A}^2 \right) \right]$$

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{2f(y)} \left(2(d-1)(d-2) \dot{A}^2(y) - \dot{\sigma}^2(y) \right)$$

$$- \lambda L^2 \frac{(d-1)(d-2)}{3} \frac{e^{-2(d-1)A(y)}}{f^3(y)} \dot{A}^4(z) - f(z) e^{2(d-1)A(y)} V(\sigma), \quad (6.1.3)$$

as variações desta ação com relação as três coordenadas $\sigma(y)$, $A(y)$ e $f(y)$ fornecem, respectivamente, as seguintes eqs. do movimento

$$\ddot{\sigma} + (d-1) \dot{\sigma} \dot{A} = V'(\sigma), \quad (6.1.4)$$

$$\ddot{A} \left(1 - 2\lambda L^2 \dot{A}^2 \right) = -(d-1) \dot{A}^2 \left(1 - \lambda L^2 \dot{A}^2 \right) - \frac{V}{(d-2)}, \quad (6.1.5)$$

$$-(d-1)(d-2) \dot{A}^2 \left(1 - \lambda L^2 \dot{A}^2 \right) + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 = V(\sigma), \quad (6.1.6)$$

onde após as variações foi fixado $f = e^{-(d-1)A}$ para a métrica ser

$$ds^2 = dy^2 + e^{2A(y)} \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.1.7)$$

[§]na verdade o resultado é mais geral, a eq. (6.1.1) é a combinação mais geral que fornece eqs. de segunda ordem para qualquer geometria "conforme plana", *i.e.* que pode ser descrita por uma métrica da forma $ds^2 = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

a de uma PD.

Após várias manipulações das eqs. (6.1.5) e (6.1.6), análogas as feitas no capítulo anterior, chega-se ao resultado:

$$\dot{\sigma}^2 = -2(d-2)\ddot{A} \left(1 - 2\lambda L^2 \dot{A}^2\right). \quad (6.1.8)$$

6.2 Superpotencial e o sistema de primeira ordem

Supondo que seja possível escrever \dot{A} como uma função de σ , então definimos:

$$\dot{A} = -\frac{1}{(d-2)}W(\sigma), \quad (6.2.1)$$

que em (6.1.8) leva à:

$$\dot{\sigma} = 2W'C_0(W) \quad (6.2.2)$$

$$C_0(W) \equiv \left(1 - 2\lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2}\right), \quad (6.2.3)$$

e em (6.1.6) fornece a relação entre W e o potencial real

$$V(\sigma) = 2(W')^2 C_0^2(W) - \left(\frac{d-1}{d-2}\right) W^2 \left(1 - \lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2}\right). \quad (6.2.4)$$

As eqs. (6.2.1), (6.2.2) e (6.2.4) formam nosso sistema de primeira ordem. As três equações foram determinadas sem fazer referência à eq. (6.1.4), mas por inspeção direta é possível mostrar que soluções dela satisfazem automaticamente a outra. Portanto o método do “superpotencial” também funciona no caso com o termo GB, a relação entre W e \dot{A} permanece inalterada (por definição), mas surgem correções nas eqs. envolvendo $\dot{\sigma}$ e $V(\sigma)$. Ao substituir as eqs. do movimento (6.2.1), (6.2.2) e (6.2.4) na ação (6.1.3) fica-se apenas o termo de derivada total:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{d-2} \int d^{d-1}x dy \frac{d}{dy} \left[e^{(d-1)A(y)} W \left(1 - \frac{2\lambda L^2}{(d-2)(d-4)} W^2\right) \right], \quad (6.2.5) \\ &= -\frac{2}{l_{pl}(d-2)^{d-1}} \int d^{d-1}x \int dy \frac{d}{dy} \left[e^{(d-1)A(y)} (l_{pl}\kappa|W|)^{d-1} a(\sigma) \right], \quad W < 0, \end{aligned}$$

onde

$$a(\sigma) = \left(\frac{d-2}{(l_{pl}|W|)}\right)^{d-2} a_0(W), \quad (6.2.6)$$

$$a_0(W) = 1 - 2\lambda \left(\frac{d-2}{d-4}\right) \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2}, \quad (6.2.7)$$

como será visto mais a frente a função $a(\sigma)$ definida acima é a função central a , análoga a eq. (5.5.10). O fator $a_0 = 1 + \mathcal{O}(\lambda)$ carrega a correção devida ao termo de GB.

Por fim, a curvatura escalar também pode ser escrita em termos de $W(\sigma)$ como:

$$R(\sigma) = -2(d-1) \left(-\frac{2}{(d-2)} (W'(\sigma))^2 C_0(W) + \frac{d}{2(d-2)^2} W^2(\sigma) \right) \quad (6.2.8)$$

6.3 Vácuos

A definição da configuração de vácuo é a mesma da seção 5.3, levando a:

$$V'(\sigma) = 0 = 2W'(\sigma)C_0(W(\sigma))\mathcal{F}(\sigma), \quad (6.3.1)$$

$$\mathcal{F}(\sigma) = 2W''(\sigma)C_0(W(\sigma)) - \frac{8\lambda L^2}{(d-2)^2} W(\sigma)(W'(\sigma))^2 - \left(\frac{d-1}{d-2} \right) W(\sigma), \quad (6.3.2)$$

agora há três possibilidades de vácuos. Os dois já conhecidos: extremos de W - vácuos físicos; os zeros de $\mathcal{F}(\sigma)$ - vácuos instáveis que não são descritos pelo método do "superpotencial", pelos mesmos motivos apresentados no capítulo anterior eles serão descartados. E a novidade, os zeros da função $C_0(W)$ - chamados de vácuos topológicos.

6.3.1 Vácuo físico

Os vácuos físicos são os extremos do "superpotencial", *i.e.* $\sigma = \sigma_{fis}$ é um vácuo físico se:

$$W'(\sigma_{fis}) = 0, \quad W(\sigma_{fis}) \neq 0, \quad (6.3.3)$$

no caso de $W(\sigma_{fis}) = 0$ o vácuo é M_d e será evitado - não há descrição holográfica associada a esse caso. Pela eq. (6.2.1)

$$\dot{A} = -\frac{W(\sigma_{fis})}{(d-2)} = \pm \frac{1}{L_{fis}}, \quad (6.3.4)$$

o sinal acima deve ser escolhido tal que $L_{fis} > 0$. Ao assumir $W(\sigma_{fis}) < 0$ (nossa escolha a menos que se diga o contrário) deve-se tomar o sinal positivo. A métrica é

$$ds^2 = dy^2 + e^{\frac{y}{L_{fis}}} \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.3.5)$$

uma geometria AdS_d descrita nas coordenadas de Poincaré. Até este ponto, todas as conclusões são exatamente as mesmas apresentadas no capítulo anterior. Porém num vácuo AdS_d

físico a eq. (6.2.4) fornece:

$$-\frac{(d-2)}{(d-1)}V(\sigma_{fis}) = -2\frac{(d-2)}{(d-1)}\Lambda \equiv \frac{1}{L_{bare}^2} = \frac{1}{L_{fis}^2} \left(1 - \lambda \frac{L^2}{L_{fis}^2}\right), \quad (6.3.6)$$

invertendo

$$\frac{1}{L_{fis}^2} = \frac{1}{2\lambda L^2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\lambda \frac{L^2}{L_{bare}^2}}\right), \quad (6.3.7)$$

a outra solução deve ser descartada pois não recupera o caso EH no limite $\lambda \rightarrow 0$ ($L_{bare} = L_{fis}$)[¶]. Ou seja, a escala (L_{bare}) associada ao extremo do potencial real $V(\sigma)$ é diferente da escala do espaço AdS_d (L_{fis}). O termo de GB é o responsável pela diferença. Uma vez que L_{fis}^2 é uma quantidade real e positiva, a eq. (6.3.7) fornece a desigualdade não trivial

$$\lambda < \frac{1}{4} \frac{L_{bare}^2}{L^2}, \quad (6.3.8)$$

restringindo os possíveis valores de λ caso L_{bare}^2 e L^2 sejam fixados previamente.

6.3.2 Vácuo topológico

Ocorre quando existem zeros reais da função $C_0(W)$. Eles são determinados por:

$$\frac{W(\sigma_{top})^2}{(d-2)^2} = \frac{1}{2\lambda L^2} \equiv \frac{1}{L_{top}^2} \rightarrow L_{top} = \sqrt{2\lambda}L, \quad (6.3.9)$$

é evidente que o vácuo só pode ocorrer se $\lambda > 0$. Pela eq. (6.2.1) o vácuo “topológico” é um espaço AdS_d com escala natural L_{top} . Se no vácuo topológico o potencial $V(\sigma)$ possui o valor $-\frac{(d-1)(d-2)}{L_{bare}^2}$, então pela eq. (6.2.4)

$$L_{bare}^{top} = 2\sqrt{\lambda}L_{top} = 2\sqrt{2}\lambda L, \quad (6.3.10)$$

ao contrário do vácuo físico, aqui as duas escalas são proporcionais. Os vácuos topológicos sempre possuem a mesma escala L_{top} completamente definida por λ e L . Substituindo (6.3.9) em (6.3.6), é possível escrever a relação:

$$\frac{L_{top}^2}{L_{fis}^2} = 1 - \sqrt{1 - 2\frac{L_{top}^2}{L_{bare}^2}} < 1 \rightarrow L_{top}^2 < L_{fis}^2, \quad (6.3.11)$$

[¶]implicitamente estamos assumindo $L_{bare}^2 > 0$, ou $\Lambda < 0$, algo que *a priori* não é necessário para o vácuo AdS_d após o acréscimo do termo de GB. Porém essa condição é importante, pois em (89) é argumentado que vácuos AdS_d obedecendo (6.3.6) com $\Lambda > 0$, *i.e.* que não possuem o limite $\lambda \rightarrow 0$, são instáveis. Também repare que no caso de $\lambda < 0$, a condição $V(\sigma_{fis}) < 0$ é automaticamente satisfeita.

a escala do vácuo topológico é sempre menor que a de qualquer vácuo físico. Um resultado fundamental para o restante do capítulo.

A razão da nomenclatura *vácuo topológico* é porque em $d = 5$, a ação do vácuo topológico:

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \left[R + \frac{12}{(L_{bare}^{top})^2} + \frac{1}{4} (L_{bare}^{top})^2 (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) \right], \quad (6.3.12)$$

é exatamente a ação de Chern-Simons (56):

$$\begin{aligned} S_{CS} &= (L_{bare}^{top})^2 \int Tr \left[A \wedge dA \wedge dA + \frac{3}{2} A \wedge A \wedge A \wedge dA + \frac{3}{5} A \wedge A \wedge A \wedge A \right] \\ &= (L_{bare}^{top})^2 \epsilon_{abcde} \int_M \left[e^a \wedge R^{bc} \wedge R^{de} + \frac{2}{3(L_{bare}^{top})^2} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge R^{de} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{5(L_{bare}^{top})^2} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \wedge e^e \right], \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

reescrita no formalismo métrico: $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ e $R^{ab} = \frac{1}{2} R^{ab}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

6.3.3 Vácuo físico-topológico

Esse caso peculiar acontece quando as duas definições anteriores coincidem, ou seja, $\sigma_{fis} = \sigma_{top} \equiv \sigma_{top}^{fis}$

$$W'(\sigma_{top}^{fis}) = 0, \quad W(\sigma_{top}^{fis})^2 = \frac{(d-2)^2}{2\lambda L^2}, \quad (6.3.14)$$

o vácuo é uma geometria AdS_d com a escala de comprimento $L_{fis} = L_{top} = 2\sqrt{\lambda}L$. A principal característica dessa configuração é que ela é um ponto de inflexão do potencial, *i.e.* além da primeira derivada do potencial ser zero no ponto em questão a segunda derivada também é nula (ver próxima seção).

6.4 Massa do campo escalar, a função Beta e a função central a

A massa ao quadrado do campo escalar, em relação a um vácuo, físico ou topológico, mantém a mesma estrutura apresentada no capítulo anterior (65):

$$m_*^2 = \frac{d^2 V(\sigma)}{d\sigma^2} \Big|_{\sigma=\sigma_*} = \frac{s_*}{L_*^2} (s_* - (d-1)), \quad (6.4.1)$$

logo a condição BF é sempre satisfeita, mas agora

$$s_* = s_{fis} = 2(d-2) \frac{W''(\sigma_{fis})}{W(\sigma_{fis})} C_0(\sigma_{fis}) = 2(d-2) \frac{W''(\sigma_{fis})}{W(\sigma_{fis})} \left(1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_{fis}^2} \right), \quad (6.4.2)$$

no caso de um vácuo físico, o termo de GB cria uma correção ao s do caso EH (supondo o mesmo $W(\sigma)$): $s \rightarrow s_{fis} = sC_0(\sigma_{fis})$, $C_0(\sigma_{fis}) \neq 1$. Já para o vácuo topológico

$$s_* = s_{top} = -\frac{8\lambda L^2}{(d-2)} (W'(\sigma_{top}))^2 \leq 0, \quad (6.4.3)$$

ele (quando existe) é sempre um ponto fixo IV - $m_{top}^2 \geq 0$ e σ_{top} é um mínimo de $V(\sigma)$.

Se o vácuo físico e topológico coincidem - $W'(\sigma_*) = 0$ e $\frac{W^2(\sigma_*)}{(d-2)^2} = \frac{1}{2\lambda L^2}$ - temos $s_{top} = s_{fis} = 0$, logo $m_*^2 = 0$, um ponto de inflexão do potencial $V(\sigma)$. Pela eq. (6.4.3), essa é a única possibilidade para $s_{top} = 0$, ao contrário do s_{fis} que é nulo quando coincide com o topológico ou se $W''(\sigma_{fis}) = 0$.

A função *beta* holográfica é definida com a ajuda das eqs. (6.2.1) e (6.2.2), como

$$\frac{d\sigma}{dl} = \frac{d\sigma}{d(-A)} \equiv -\beta(\sigma) = 2(d-2) \frac{\partial_\sigma W(\sigma)}{W(\sigma)} C_0(W), \quad (6.4.4)$$

o termo $C_0(W) \neq 1$ é a grande diferença entre as eqs. (6.4.4) e (5.5.9). Agora se $W(\sigma)$ possui um comportamento $W(\sigma) \sim \sigma^n$ ($n > 1/2$) para $\sigma \rightarrow \infty$, *i.e.* nas proximidades de uma singularidade nua^{||}, a função *beta* holográfica com o termo de GB diverge, $|\beta(\sigma)| \sim |\lambda L^2 \sigma^{2n-1}| \rightarrow \infty$, o esperado para uma fase massiva, ao contrário do caso EH onde ela se anulava. Tal comportamento já resolve o problema 2) levantado no início do capítulo que assola a teoria com a gravitação usual, sem o termo de GB. Da eq. (6.4.4)

$$e^{A(\sigma)} = \exp \left(\int^\sigma \frac{d\sigma'}{\beta(\sigma')} \right), \quad (6.4.5)$$

logo a divergência de *beta* no limite $\sigma \rightarrow \infty$, implica em $e^{A(\infty)} < \infty$ - comportamento que será verificado em exemplos - e como na integração de (6.4.4) é criada uma constante, sempre é possível fixar $e^{A(\infty)} = 1$.

Se $\sigma = \sigma_*$ é um vácuo (ponto fixo) físico ou topológico, é fácil verificar que:

$$-\left. \frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=\sigma_*} = s_*, \quad (6.4.6)$$

onde s_* é dado por (6.4.2) para o vácuo físico e (6.4.3) no caso do vácuo topológico. Portanto as eqs. (6.4.2) e (6.4.3) são identificadas como os índices críticos associados aos seus

^{||}quando W diverge o escalar de curvatura diverge, ver eq. (6.2.8)

respectivos tipos de pontos fixos. No caso topológico o ponto fixo é irrelevante ($s_{top} < 0$) ou marginal ($s_{top} = s_{fis} = 0$). Os pontos fixos associados aos vácuos físicos podem ser de qualquer natureza, mas quando é relevante $0 < s_{fis} < \frac{(d-1)}{2}$ de acordo com a discussão apresentada nas seções 5.4 e 5.5. Outra quantidade importante é a constante de estrutura, dada pela segunda derivada da função β num ponto fixo. Seu valor no caso de um vácuo físico é:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \beta(\sigma)}{d\sigma^2} \equiv C_{\Delta\Delta\Delta} = -(d-2) \frac{W'''(\sigma_{fis})}{W(\sigma_{fis})} C_0(\sigma_{fis}) = L_{fis} W'''(\sigma_{fis}) C_0(\sigma_{fis}), \quad (6.4.7)$$

novamente o termo de GB acrescenta a correção $C_0(\sigma_{fis}) \neq 1$ ao compararmos o resultado acima com o do modelo de EH para um mesmo $W(\sigma)$.

A eq. (6.4.4) pode ser reescrita exatamente como (5.5.11)

$$\beta(\sigma) = \frac{1}{g} \frac{da(\sigma)}{d\sigma}, \quad (6.4.8)$$

$$g(\sigma) = \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{d-2}{l_{pl} \kappa |W(\sigma)|} \right)^{d-2} > 0, \quad (6.4.9)$$

a diferença está na forma da função central $a(\sigma)$, agora dada por (6.2.6). Novamente a função central a descrita em termos de $l = -A$ é monotônica decrescente, pois

$$\frac{da}{dl} = -g(\sigma) \beta^2(\sigma) < 0. \quad (6.4.10)$$

A carga central a da CFT_{d-1} dual ao vácuo (ponto fixo) AdS_d , com escala L_* , é (9, 10):

$$a = a_0 \left(\frac{L_*}{l_{pl}} \right)^{d-2} \gg 1, \quad (6.4.11)$$

$$a_0 = 1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_*^2}, \quad (6.4.12)$$

toda a contribuição do termo de GB está em $a_0 \neq 1$.

6.5 Carga central c holográfica

A derivação da carga central c referente a teoria conforme dual a gravitação estendida (6.1.1) segue os mesmos passos adotados na seção 4.3.3.3 - caso EH. O problema consiste em linearizar as eqs. do movimento de (6.1.1), dadas por** (82):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda_* g_{\mu\nu} + \frac{2\lambda L^2}{(d-3)(d-4)} H_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (6.5.1)$$

**repare que no desenvolvimento das soluções de PD esse conjunto de eqs. não foi usado explicitamente. O método da lagrangiana efetiva mostrou-se mais simples.

ao redor do vácuo AdS_d , cuja escala é $L_*^2 = -\frac{(d-1)(d-2)}{\Lambda_*} > 0$ nas coordenadas de Poincaré (ver eq. (4.1.18)). A definição de $H_{\mu\nu}$ é:

$$H_{\mu\nu} \equiv I_{\mu\nu} - 4J_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}, \quad (6.5.2)$$

$$I_{\mu\nu} = R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right), \quad (6.5.3)$$

$$J_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu\sigma} R^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}, \quad (6.5.4)$$

$$K_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\sigma\tau} R_{\nu}^{\rho\sigma\tau} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma\tau\delta} R^{\rho\sigma\tau\delta} - 2R_{\mu}^{\sigma} R_{\nu\sigma} + 2R_{\mu\rho\nu\sigma} R^{\rho\sigma}. \quad (6.5.5)$$

A forma linearizada dos tensores acima são encontradas no fim do apêndice D, permitindo-nos obter as eqs. linearizadas:

$$C_0 \left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} R^{(1)} \bar{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} h_{\mu\nu} \right) = \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (6.5.6)$$

$$C_0 = 1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_*^2} \quad (6.5.7)$$

exatamente (5.5.59), exceto pelo termo $C_0 \neq 1$ (quando $\lambda \neq 0$). Se $C_0 \neq 0$ (não topológico), esse fator pode ser absorvido na constante $\kappa^2 \sim (l_{pl})^{(d-2)} \rightarrow \tilde{l}_{pl}^{(d-2)} = \frac{l_{pl}^{d-2}}{C_0}$ e a linearização torna-se exatamente igual a do caso EH, logo todos os passos feitos na seção 4.3.3.3 são válidos e a carga central c é (9, 10):

$$c = \left(\frac{L}{\tilde{l}_{pl}} \right)^{d-2} = C_0 \left(\frac{L}{l_{pl}} \right)^{d-2} \gg 1. \quad (6.5.8)$$

toda a contribuição do termo de GB para a carga central c está codificada em $C_0 \neq 1$. A definição natural da *função central* $c(\sigma)$ (fora do ponto crítico) é:

$$c(\sigma) = \left(\frac{d-2}{(l_{pl}|W|)} \right)^{d-2} C_0(W), \quad (6.5.9)$$

ver eq. (6.2.3).

Ao comparar as cargas centrais a e c , eqs. (6.4.11) e (6.5.8), e suas respectivas *funções centrais*, o grande ganho devido ao acréscimo do termo de GB fica evidente, as cargas centrais são diferentes para todo $\lambda \neq 0$. Um novo leque de fluxos do GR com $a(\sigma) \neq c(\sigma)$ pode ser explorado pelo princípio holográfico.

6.6 Impondo condições físicas sobre o modelo

Além da condição $V(\sigma_*) < 0$ oriunda puramente da geometria da PD (ver nota de rodapé da seção 6.3.1), outras restrições devem ser impostas sobre as soluções de PD para a teoria $pCFT_{d-1}$ ser fisicamente aceitável. As funções cargas centrais $a(\sigma)$ e $c(\sigma)$ e suas derivadas devem ter comportamentos bem definidos e a positividade da energia das teorias conformes nos pontos críticos também será analisada.

6.6.1 Teorema a & c

Para a teoria $pCFT_{d-1}$ descrever um fenômeno físico, as funções cargas centrais e suas derivadas devem satisfazer certas condições. Elas são:

$$a > 0, \quad c > 0, \quad \frac{da}{dl} < 0, \quad \frac{dc}{dl} < 0. \quad (6.6.1)$$

Uma eq. ainda desconhecida é a derivada da função carga central c

$$\frac{dc}{dl} = -\beta(\sigma) \frac{dc}{d\sigma} = -\frac{2(d-2)^d}{\kappa^2 l_{pl}^{d-2}} \left(\frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)} \right)^2 c(l) \tilde{C}_0(W) \quad (6.6.2)$$

$$\tilde{C}_0(W) = \left(1 - 2\lambda L^2 \left(\frac{d-4}{d-2} \right) \frac{W^2(\sigma)}{(d-2)^2} \right). \quad (6.6.3)$$

Das quatro condições apenas $\frac{da}{dl} < 0$ é automaticamente verdadeira^{††}, todas as outras criam certas restrições aos possíveis modelos. Impor a eq. (6.6.1) é equivalente a considerar $a_0(W) > 0$, $C_0(W) > 0$ e $\tilde{C}_0(W) > 0$, o que leva respectivamente a:

$$\frac{L^2 W^2(\sigma)}{(d-2)^2} < \frac{d-4}{2\lambda(d-2)} \equiv f_{GB}^a, \quad (6.6.4)$$

$$\frac{L^2 W^2(\sigma)}{(d-2)^2} < \frac{1}{2\lambda}, \quad (6.6.5)$$

$$\frac{L^2 W^2(\sigma)}{(d-2)^2} < \frac{d-2}{2\lambda(d-4)}. \quad (6.6.6)$$

$$(6.6.7)$$

No caso de $\lambda < 0$ todas as desigualdades são satisfeitas, já no caso de $\lambda > 0$ a restrição mais forte vem de $a_0 > 0$, portanto sempre que $W(\sigma)$ satisfaz a eq. (6.6.4) ao longo de todo o fluxo (massivo, ou não massivo) todas as condições dadas em (6.6.1) são satisfeitas.

As condições físicas dadas por (6.6.1) excluem completamente o vácuo topológico. Fora o fato de $C_0(\sigma_{top}) = 0$ ($c(\sigma_{top}) = 0$), também temos $a_0(\sigma_{top}) = 1 - \frac{(d-2)}{(d-4)} < 0$, *i.e.* supondo um fluxo

^{††}no caso EH ($\lambda = 0$), as quatro condições são satisfeitas sem restrições.

UV/IV cujo ponto UV seja do tipo físico e o ponto IR topológico, mesmo que $a(\sigma_{UV}) > 0$, a função carga central a sempre se tornará negativa a partir de algum σ_a ao longo do fluxo, $\sigma_{fis}^{UV} < \sigma_a < \sigma_{IR}^{top}$.

Restringindo-nos aos “superpotenciais” $W(\sigma)$ que divergem nas singularidades, a eq. (6.6.4) exclui a possibilidade de fluxos massivos *exatos* quando $\lambda > 0$. Agora supondo um fluxo UV/IV entre dois pontos fixos *físicos*, sabemos que no intervalo $(\sigma_{UV}, \sigma_{IV})$ $|W(\sigma)|$ é monotônica e seu maior valor está em σ_{IV} . Assim se $\lambda > 0$ e a condição (6.6.4) é satisfeita para σ_{IV} , ou seja,

$$\frac{L^2}{L_{fis,IV}^2} < \frac{d-4}{2\lambda(d-2)} \rightarrow L_{fis,IV}^2 > \left(\frac{d-2}{d-4}\right) L_{top}^2, \quad (6.6.8)$$

a mesma é satisfeita ao longo de todo o fluxo.

Os resultados desta seção, originalmente encontrados em nosso *preprint* (65), podem ser compilados no:

Teorema a & c

- caso $\lambda < 0$: Não há vácuo topológico e qualquer solução de PD definida por um “superpotencial” $W(\sigma)$ reproduz um fluxo de um GR holográfico com condições físicas aceitáveis. Tanto para fluxos massivos quanto não massivos.
- caso $\lambda > 0$: A escala do vácuo topológico existe^{‡‡} e não é possível a descrição de fluxos massivos, *i.e.* o acoplamento não pode assumir valores arbitrariamente grandes. Fluxos não massivos só são bem definidos se a eq. (6.6.8) for satisfeita.

6.6.2 Energia positiva nos pontos fixos

Os resultados apresentados nos artigos (8, 13), baseados no estudo das flutuações ao redor de um *background* AdS_d em teorias gravitacionais com o termo de GB, demonstram que nas CFT_{d-1} 's duais

$$t_4 = 0, \quad t_2 = \frac{(d-1)(d-2)}{(d-3)} \left(1 - \frac{a}{c}\right). \quad (6.6.9)$$

As condições necessárias para energia da CFT_{d-1} ser positiva (ver seção 3.4) introduzem restrições sobre a razão a/c das cargas centrais (nos pontos fixos UV ou IV), eq. (3.4.16)

^{‡‡}independente se existe ou não vácuo topológico no modelo.

(com $D = d - 1$), que devem ser impostas às formas explícitas das cargas:

$$a = \left(\frac{L}{l_{pl}}\right)^{d-2} f_{fis}^{-(d-2)/2} \left(1 - \lambda \left(\frac{d-2}{d-4}\right) f_{fis}\right), \quad f = f_{UV/IV} \equiv \frac{L^2}{L_{UV/IV}^2} \quad (6.6.10)$$

$$c = \left(\frac{L}{l_{pl}}\right)^{d-2} f_{fis}^{-(d-2)/2} (1 - 2\lambda f_{fis}), \quad (6.6.11)$$

levando às desigualdades:

$$\bullet \lambda > 0: \quad 0 < f_{fis,UV} < f_{fis,IV} < \frac{(d-3)(d-4)}{2\lambda(d^2 - 5d + 10)} \equiv f_+^{ep} < f_{GB}^a \quad (6.6.12)$$

$$\bullet \lambda < 0: \quad 0 < f_{fis,UV} < f_{fis,IV} < \frac{(d-3)}{2|\lambda|(d+1)} \equiv f_-^{ep}, \quad (6.6.13)$$

onde f_{GB}^a é dado por (6.6.4). Desta forma as condições para uma CFT_{d-1} ter energia positiva limitam as escalas físicas. Para $\lambda > 0$, a eq. (6.6.12) é mais forte que (6.6.8), então a restrição real sobre a escala IV que garante tanto um fluxo não massivo físico quanto a positividade da energia das teorias conformes nos pontos críticos (fixos) é dada por (6.6.12), ou de forma equivalente.

$$L_{IV}^2 > \frac{L^2}{f_+^{ep}}, \quad (6.6.14)$$

no caso em questão ($\lambda > 0$) não são permitos fluxos massivos.

Na outra possibilidade, $\lambda < 0$, o **teorema a & c** não criava nenhuma restrição, mas agora a eq. (6.6.13) deve ser levada em conta. Caso o fluxo seja $UV \rightarrow \text{Sing. nua}$, a desigualdade (6.6.13) deve ser substituída por

$$L_{fis,UV}^2 > \frac{L^2}{f_-^{ep}}, \quad (6.6.15)$$

uma vez que $L_{fis,UV}^2$ é a menor (e única) escala associada a um vácuo físico (ponto fixo).

O mesmo problema pode ser formulado em termos de restrições sobre o parâmetro λ . Reescrevendo a eq. (6.3.7) em termos de $f_{UV/IV}$:

$$f_{UV/IV} = \frac{1}{2\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - 4\lambda h_{UV/IV}}\right), \quad h_{UV/IV} = \frac{L^2}{L_{bare,UV/IV}^2} \quad (6.6.16)$$

e substituindo em (6.6.11), temos:

$$\frac{c_{UV/IV}}{a_{UV/IV}} = \frac{(d-2)\sqrt{1 - 4\lambda h_{UV/IV}}}{2 + (d-4)\sqrt{1 - 4\lambda h_{UV/IV}}}. \quad (6.6.17)$$

A eq. (6.6.17) em (3.4.16) leva à desigualdade:

$$-\frac{(d-3)(3d-1)}{4(d+1)^2} < \lambda h_{UV/IV} < \frac{(d-3)(d-4)(d^2-3d+8)}{4(d^2-5d+10)^2} < \frac{1}{4}, \quad (6.6.18)$$

onde $d > 4$ e h_{IV} deve ser usado no caso de um fluxo não massivo e h_{UV} no caso massivo.

Portanto as condições dadas por (6.6.14) e (6.6.15) são equivalentes a eq. (6.6.18) que transfere as restrições sobre as escalas numa limitação dos possíveis valores do acoplamento λ , dado um modelo (um $W(\sigma)$) e a escala L^2 .

6.7 Sobre a normalização do fator de escala e o hiato de massa

O comprimento de correlação, na região de baixas energias ($\xi \gg 1$), cria uma escala identificada como o inverso da *menor* massa ($m_{min}(\sigma)$) da teoria de campo, ver seção 2.3.5, logo podemos escrever:

$$\xi(\sigma) = \frac{1}{m_{min}(\sigma)}, \quad (6.7.1)$$

por outro lado, o dicionário holográfico fornece a relação $\xi \sim e^{A(\sigma)}$. Supondo um fluxo massivo $UV \rightarrow \text{Sing. nua}$, cujo fator de escala seja normalizado da forma:

$$e^{A(\sigma)} = \mathcal{P}(\sigma), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\sigma) = 1, \quad (6.7.2)$$

algo sempre possível de acordo com a discussão feita na seção 6.4. Pelo fato de $e^{A(\sigma)}$ ser uma função monotônica decrescente nos intervalo (σ_{UV}, ∞) (com $e^{A(\sigma_{UV})} \rightarrow \infty$ e $e^{A(\infty)} = 1$), a constante de proporcionalidade entre $\xi(\sigma)$ e $e^{A(\sigma)}$ é o inverso do *menor* valor possível da *menor* massa da teoria ($m_{min}(\infty)$), *i.e.*

$$\xi(\sigma) = \frac{1}{m_{min}(\infty)} e^{A(\sigma)}, \quad (6.7.3)$$

igualando (6.7.1) e (6.7.3), temos:

$$\frac{m(\sigma)}{m_{min}(\infty)} = e^{A(\sigma)}, \quad (6.7.4)$$

que fornece a menor massa da teoria como função do acoplamento *correndo* no regime IV da teoria - $\xi \gg 1$, ou no caso em questão $\sigma \gg 1$. Repare que para a gravitação de EH, o fator de escala (comprimento de correlação) é nulo na singularidade nua ($\sigma \rightarrow \infty$), portanto a teoria de campo holográfica não possui um valor mínimo em suas possíveis massas.

6.8 Soluções de PD

6.8.1 W - quadrático

O exemplo mais simples com um vácuo físico ainda é o modelo definido pelo “superpotencial”

$$W(\sigma) = -\frac{1}{L_{fis}} \left(d - 2 + \frac{s}{4} \sigma^2 \right), \quad s > 0 \quad (6.8.1)$$

uma vez que $W(\sigma)$ é par só precisamos considerar a semi reta $\sigma > 0$, a outra é encontrada com a reflexão $\sigma \rightarrow -\sigma$. A função *beta* (ver eq. (6.4.4)) é:

$$-\beta(\sigma) = \frac{d\sigma}{d(-A)} = \frac{s\sigma}{\left(1 + \frac{s}{4(d-2)}\sigma^2\right)} \left(\frac{-s^2}{16(d-2)^2} \frac{2\lambda L^2}{L_{fis}^2} \right) \times (\sigma^2 - \sigma_{top,+}^2) (\sigma^2 - \sigma_{top,-}^2), \quad (6.8.2)$$

$$\sigma_{top,\pm}^2 = \frac{4(d-2)}{s} \left(\pm \frac{L_{fis}}{\sqrt{2\lambda L}} - 1 \right). \quad (6.8.3)$$

Ela possui um zero no ponto $\sigma = 0$, vácuo físico AdS_d ($W'(0) = 0$ e $W(0) \neq 0$) com escala L_{fis} . Quando $\lambda > 0$ e $L_{fis} > \sqrt{2\lambda}L = L_{top}$ - condição necessária para $V(0) < 0$ - há um segundo ponto fixo, um vácuo topológico IV em $\sigma_{top,+}$ (pois $s > 0$). De acordo com (6.4.2) e (6.4.3) os índices críticos relacionados aos pontos fixos físico e topológico são, respectivamente:

$$s_{fis} = sC_0(0) = s \left(1 - \frac{2\lambda L^2}{L_{fis}^2} \right), \quad (6.8.4)$$

$$s_{top,\pm} = -\frac{2\lambda L^2}{L_{fis}^2} \frac{\sigma_{top,\pm}^2}{(d-2)}, \quad (6.8.5)$$

mesmo $s_{top,-}$ não sendo um índice crítico em nenhum caso ($\sigma_{top,-}$ nunca é real - $s > 0$), seu registro é importante pois será utilizado na solução do modelo.

Uma propriedade muito interessante e curiosa envolvendo (6.8.4) e (6.8.5) é

$$\frac{1}{s_{fis}} + \frac{1}{s_{top,+}} + \frac{1}{s_{top,-}} = 0, \quad (6.8.6)$$

que pode ser verificada explicitamente. Outra característica do modelo é que por sua simplicidade a constante de estrutura $C_{\Delta\Delta\Delta}$, dada por (7.4.7), é nula ($W'''(\sigma) = 0$).

Como foi assumido $s > 0$ e $L_{fis} > \sqrt{2\lambda}L = L_{top}$ o vácuo físico corresponde a um ponto fixo

relevante ($s_{fis} > 0$). Integrando a eq. (6.8.2) é encontrado

$$e^{A(\sigma)} = \frac{1}{M} |\sigma|^{-1/s_{fis}} |\sigma^2 - \sigma_{top,+}^2|^{-1/s_{top,+}} |\sigma^2 - \sigma_{top,-}^2|^{-1/s_{top,-}}, \quad (6.8.7)$$

onde M é uma constante de integração. Pela eq. (6.8.6), na singularidade nua ($\sigma \rightarrow \infty$)

$$e^{A(\infty)} = \frac{1}{M}, \quad (6.8.8)$$

um valor finito não nulo. Exatamente o comportamento procurado num fluxo massivo. A constante finita (adimensional) M será fixada como a unidade, *i.e.*, $e^{A(\infty)} = 1$ (ver seção 6.7). O “milagre” da eq. (6.8.6) - que se repetirá em todos os nossos exemplos - é o grande ganho devido ao acréscimo de termo de GB, corroborando com a ideia de que nas proximidades de uma singularidade é necessário levar em conta na ação termos de ordens maiores da curvatura. Na figura 6.1 estão os fluxos nos casos $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$. Pelo teorema *a & c*, o caso $\lambda > 0$ não pode reproduzir nenhuma teoria holográfica de interesse - ao longo do fluxo UV_{fis}/IV_{top} a função central $a(\sigma)$ muda de sinal. Já para $\lambda < 0$ o modelo descreve um fluxo massivo quando $L_{fis}^2 > L^2/f_-^{ep}$ - condição para a energia do ponto fixo relevante ser positiva. Em suma, no caso $\lambda < 0$ e $L_{fis}^2 > L^2/f_-^{ep}$, a solução de PD (“falsa”), $AdS_d/Sing.$, do modelo definido por (6.8.1) fornece uma função *beta* holográfica que descreve um fluxo massivo exato com todas as propriedades esperadas.

Ao assumir as formas assintóticas do campo escalar e métrica: $\sigma(y) \approx \sigma_0 e^{-s_{fis} \frac{y}{L_{fis}}}$ e $e^{A(y)} \approx e^{\frac{y}{L_{fis}}}$, para $y \rightarrow \infty$, *i.e.* nas proximidades da borda. O assintótico σ_0 passa a se relacionar com os parâmetros do modelo da seguinte forma (ver eq. (6.8.7)):

$$|\sigma_0| = |\sigma_{top,+}^2|^{-s_{fis}/s_{top,-}} |\sigma_{top,+}^2|^{-s_{fis}/s_{top,-}}, \quad (6.8.9)$$

fixando-o sem arbitrariedades - um reflexo da escolha $M = 1$.

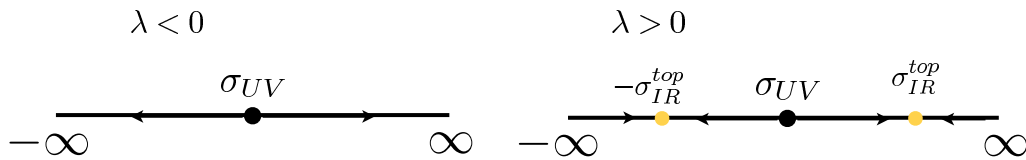


Figura 6.1—Dois possíveis fluxos associados a função *beta* (6.8.2).

A importância do “superpotencial” quadrático (6.8.1) reside no fato dele ser uma boa aproximação de qualquer $W(\sigma)$, com $s_{fis} \neq 0$, nas proximidades de um ponto crítico físico. Se σ_* é um ponto fixo físico com $s_{fis} \neq 0$, estão para valores de σ tais que $|\sigma - \sigma_*| \ll 1$ ($\kappa = 1$) o comportamento do fator de escala sempre é: $e^{A(\sigma)} \sim |\sigma - \sigma_*|^{-\frac{1}{s_{fis}}}$.

6.8.2 $W - \sinh^2$

O “superpotencial”

$$W(\sigma) = -\frac{1}{L_{fis}} \left(d - 2 + \frac{s}{\alpha^2} \sinh^2 \left(\frac{\alpha\sigma}{2} \right) \right), \quad (6.8.10)$$

é uma das inúmeras generalizações do caso quadrático, pois só possui um ponto crítico físico em $\sigma = 0$ e para $\frac{\alpha\sigma}{2} \ll 1$, tem-se: $W(\sigma) \approx -\frac{1}{L_{fis}} \left(d - 2 + \frac{s}{4}\sigma^2 \right)$, a eq. (6.8.1).

Sem nenhuma perda qualitativa podemos fixar $s = 1$ e $\alpha = \frac{1}{\sqrt{d-2}}$, o que simplifica bastante os cálculos. Fixados os parâmetros, os índices críticos associados, respectivamente, ao ponto fixo físico $\sigma = 0$ e os eventuais pontos fixos topológicos são:

$$s_{fis} = C_0(0) \equiv C_0, \quad (6.8.11)$$

$$s_{top}^{\pm} = \mp \frac{2\lambda L^2}{L_{fis}^2} \sinh^2 \left(\frac{\sigma_{top}^{\pm}}{\sqrt{d-2}} \right) = \mp \frac{8\lambda L^2}{L_{fis}^2} X_{top}^{\pm} (1 + X_{top}^{\pm}), \quad (6.8.12)$$

onde σ_{top}^{\pm} são os possíveis pontos fixos topológicos definidos pelos zeros de C_0 e a seguinte notação foi utilizada:

$$X_{top}^{\pm} \equiv \sinh^2 \left(\frac{\sigma_{top}^{\pm}}{2\sqrt{d-2}} \right) = \pm \frac{L_{fis}}{\sqrt{2\lambda}L} - 1. \quad (6.8.13)$$

As quantidades acima só caracterizam um vácuo topológico quando são reais e positivas. A única possibilidade disso ocorrer é para X_{top}^+ quando $\lambda > 0$ e $L_{fis} > \sqrt{2\lambda}L$.

Novamente a constante de estrutura é nula devido a paridade par de W - pelo mesmo motivo só é preciso considerar a semi reta $\sigma \geq 0$.

A função *beta* do modelo (com os parâmetros já fixados) é:

$$\begin{aligned} -\beta(\sigma) = & \frac{d\sigma}{d(-A)} = 2\sqrt{(d-2)} \tanh \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) \\ & \times \left(-2\lambda \frac{L^2}{L_{fis}^2} \right) \left(\sinh^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) - X_{top}^+ \right) \left(\sinh^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) - X_{top}^- \right), \end{aligned} \quad (6.8.14)$$

facilmente resolvida em:

$$\begin{aligned} e^{A(\sigma)} = & \left| \sinh \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) \right|^{-1/C_0} \left| \sinh^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) - X_{top}^+ \right|^{-1/s_{top}^+} \\ & \times \left| \sinh^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) - X_{top}^- \right|^{-1/s_{top}^-}, \end{aligned} \quad (6.8.15)$$

devido a propriedade

$$\frac{1}{s_{fis}} + \frac{1}{s_{top}^+} + \frac{1}{s_{top}^-} = 0, \quad (6.8.16)$$

no limite $\sigma \rightarrow \infty$ (singularidade nua) $e^{A(\infty)} = 1$ (finito e não nulo), caracterizando a fase massiva da teoria.

Ao impor a condição de contorno $\sigma \approx \sigma_0 e^{-s_{fis} \frac{y}{L_{fis}}}$, $y \rightarrow \infty$ nas proximidades do vácuo (ponto fixo) físico - $e^A \approx e^{\frac{y}{L_{fis}}}$ - o parâmetro σ_0 passa a ser completamente definido como:

$$|\sigma_0| = 2\sqrt{d-2} |X_{top}^+|^{-C_0/s_{top}^+} |X_{top}^-|^{-C_0/s_{top}^-}. \quad (6.8.17)$$

No fim não há nenhum ganho qualitativo entre o W -quadrático e qualquer outro “superpotencial” com apenas um ponto fixo físico e uma singularidade nua em $\sigma \rightarrow \infty$. A razão do estudo do W -sinh² com $s = 1$ e $\alpha = \frac{1}{\sqrt{d-2}}$ reside no fato do espectro de suas flutuações lineares terem sido obtidas de forma exata e aproximada no caso EH no capítulo anterior. No fim deste capítulo ele é usado como parâmetro de comparação para o método perturbativo a ser desenvolvido na análise das flutuações lineares no caso GB. Repare que no limite $\lambda \rightarrow 0$, o fator de escala recai em (5.5.75) e $\sigma_0 = 2\sqrt{d-2}$, pois as quantidades (vácuos topológicos) X_{top}^\pm divergem $s_{top}^+ \rightarrow -s_{top}^-$.

A solução da coordenada y como função de σ (encontrada via eq. (6.2.2)) é:

$$e^{\frac{y(\sigma)}{L_{fis}}} = e^{\frac{y_0}{L_{fis}}} \left| \sinh \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) \right|^{-1/C_0} \cosh \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) \quad (6.8.18)$$

$$\times \left| \sinh^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) - X_{top}^+ \right|^{-\sqrt{2\lambda}L/L_{fis}s_{top}^+} \left| \sinh^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right) - X_{top}^- \right|^{-\sqrt{2\lambda}L/L_{fis}s_{top}^-},$$

$$e^{\frac{y_{sing}}{L_{fis}}} = \left| \frac{\sigma_0}{2\sqrt{d-2}} \right|^{1/C_0} |X_{top}^+|^{\sqrt{2\lambda}L/L_{fis}s_{top}^+} |X_{top}^-|^{\sqrt{2\lambda}L/L_{fis}s_{top}^-}. \quad (6.8.19)$$

No limite $\lambda \rightarrow 0$ a eq. (5.5.76) é recuperada com $y_{sing} = 0$ ($\sigma_0 = 2\sqrt{d-2}$). Os dois “superpotenciais” apresentados até aqui só possuem um vácuo físico - os fluxos físicos são massivos. Um exemplo com dois vácuos físicos - o que permite fluxos não massivos - e sem grandes complicações técnicas, ao contrário do exemplo apresentado a seguir, está descrito no apêndice E.

6.8.3 W polinômio de quinta potência

Restringindo-nos ao caso $d = 5$ e $\lambda < 0$ (sem vácuos topológicos), vamos estudar um fluxo holográfico criado por um modelo que se destaca pelas razões: 1) possui um, dois ou

três vácuos físicos; 2) sempre há um vácuo físico degenerado do tipo UV; 3) ao variar os parâmetros a função *beta* passa do regime *andando* para o *correndo* - as duas denominações são explicadas no texto -, o que simula características de uma QCD com N_c "cores" e N_f "sabores" no limite $N_c, N_f \rightarrow \infty$ com $x = \frac{N_c}{N_f}$ finito.

O "superpotencial" é:

$$W(\sigma) = -\frac{1}{L_0} \left(3 + \frac{B_1}{3}\sigma^3 - \frac{B_2}{2}\sigma^4 + \frac{\rho B_2^2}{5 B_1}\sigma^5 \right), \quad \sigma \geq 0, \quad (6.8.20)$$

válido para $B_1 > 0$,^{§§} e $B_2 \neq 0$. Casos particulares serão tratados em separado. Derivando:

$$W'(\sigma) = -\frac{\rho B_2^2}{L_0 B_1} \sigma^2 (\sigma - \sigma_1) (\sigma - \sigma_2), \quad (6.8.21)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{B_1}{\rho B_2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \rho} \right), \quad (6.8.22)$$

na região $\rho > 1$, $\sigma_1 = (\sigma_2)^* \in \mathbb{C}$ e o único ponto crítico físico está em $\sigma = 0$. Já para os outros valores de ρ temos:

$$0 < \rho < 1: \begin{cases} \sigma_2 > \sigma_1 > 0, & \text{para } B_2 > 0, \\ \sigma_2 < \sigma_1 < 0, & \text{para } B_2 < 0, \end{cases} \quad (6.8.23)$$

como só há interesse na semi-reta $\sigma \geq 0$, $\sigma_{1,2}$ são pontos críticos apenas quando $B_2 > 0$. Já para ρ negativo:

$$\rho < 0: \begin{cases} \sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0; & \text{para } B_2 > 0, \\ \sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0; & \text{para } B_2 < 0, \end{cases} \quad (6.8.24)$$

agora sempre temos dois pontos críticos. O da origem e σ_1 ou σ_2 .

No limite $\rho \rightarrow 0$, $|\sigma_2| \rightarrow \infty$ (esse ponto fixo desaparece) e

$$\sigma_1(\rho = 0) = \frac{1}{2} \frac{B_1}{B_2}. \quad (6.8.25)$$

As segundas derivadas de W nos pontos $\sigma_{1,2}$ são:

$$\begin{aligned} L_0 W''(\sigma_1) &= \rho \frac{B_2^2}{B_1} \sigma_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1), \\ L_0 W''(\sigma_2) &= \rho \frac{B_2^2}{B_1} \sigma_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2). \end{aligned} \quad (6.8.26)$$

^{§§} B_1 deve ser positivo para o ponto fixo da origem ser UV.

6.8.3.1 $B_2 > 0$

Se $\rho = 1$ os extremos $\sigma_{1,2}$ coincidem e formam um ponto de inflexão de $W(\sigma)$, para valores maiores de ρ o único ponto crítico é a origem. Na figura 6.2(a) estão apresentadas algumas curvas típicas e W em tal região.

No intervalo $0 < \rho < 1$, σ_1 é um mínimo e σ_2 um máximo. Curvas de W neste caso são encontradas na figura 6.2(b). Pela figura fica claro que dependendo dos valores dos parâmetros, W pode ser negativo para todo $\sigma > 0$ ou ter uma região em que $W > 0$. Quem determina tal comportamento é o valor máximo de W , *i.e.* $W(\sigma_2)$. Caso $W(\sigma_2) < 0$, W é sempre negativa, caso contrário existe uma região positiva. O sinal de $W(\sigma_2)$ pode ser determinado uma vez dados os parâmetros ρ , B_1 e B_2 via eq.:

$$L_0 W(\sigma_2) = \frac{1}{30B_2^3\rho^4} \left(-90B_2^3\rho^4 + 24B_1^4(1 + \sqrt{1-\rho}) - \rho(40 + 28\sqrt{1-\rho} - 15\rho - 4\rho\sqrt{1-\rho}) \right),$$

Existe uma particularidade no “valor crítico” $\sigma_2 = \sigma_2^{crit}$, onde $W(\sigma_2^{crit}) = 0$, pois este ponto é um vácuo, uma vez que $W'(\sigma_2^{crit}) = 0$, entretanto como ele também é um zero de W o vácuo é M_5 e não AdS_5 . Como já foi explicado no capítulo anterior, caso W troque de sinal, em seus zeros existe um *salto singular* na função *beta*.

Na outra situação possível, $\rho < 0$, σ_1 é um mínimo e $W \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$, logo sempre há um zero de W , a PD é do tipo *Janus* e a função *beta* irá ter um *salto singular*. Na figura 6.3(a) está a forma típica de $W(\sigma)$.

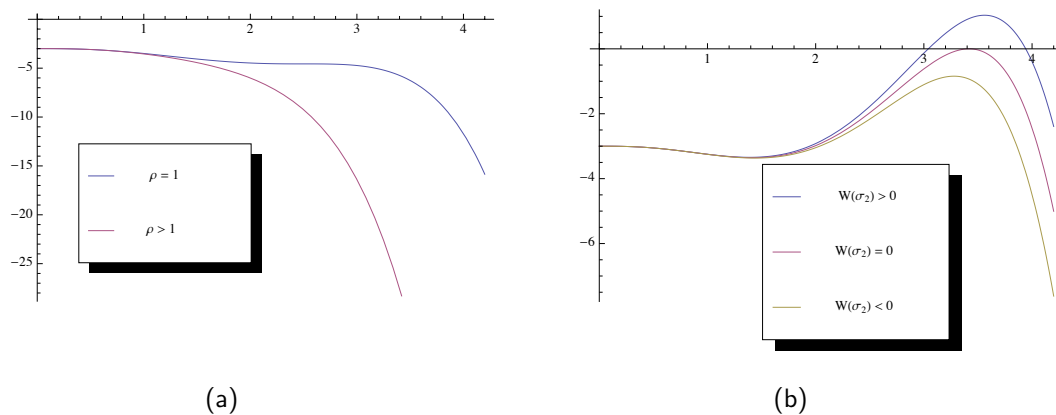


Figura 6.2—Curvas de $W(\sigma)$ para $B_2 > 0$: (a) $\rho \geq 1$; (b) $0 < \rho < 1$.

6.8.3.2 $B_2 < 0$

Para valores positivos de ρ só temos o ponto fixo da origem e $W(\sigma) < 0$, $\forall \sigma \geq 0$. Já nos valores negativos de ρ , surge um novo ponto fixo IV em σ_2 (mínimo de $W(\sigma)$) e W troca

de sinal no valor σ_0 , onde $\sigma_2 < \sigma_0 < \infty$. Curvas de W são encontradas na figura 6.3(b).

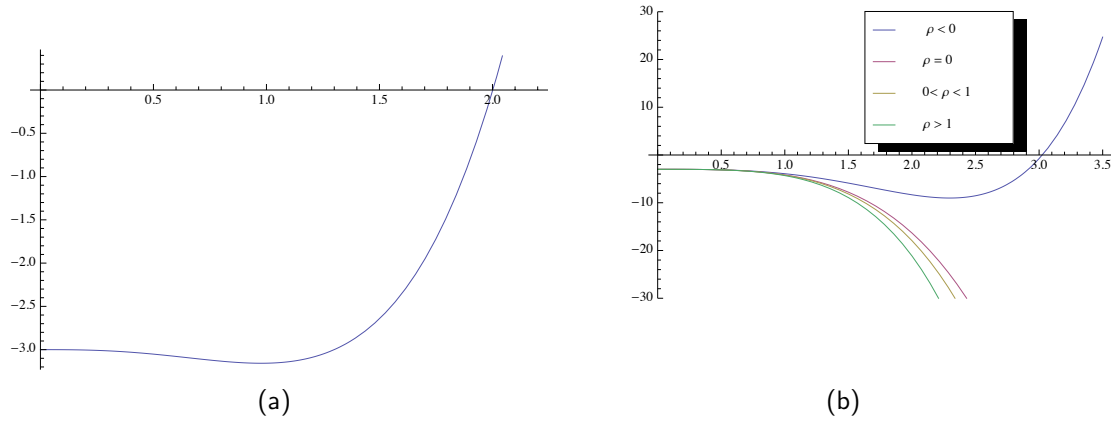


Figura 6.3—(a) $W(\sigma)$ para $B_2 > 0$ e $\rho < 0$; (b) possíveis $W(\sigma)$ para o caso $B_2 < 0$.

6.8.3.3 Casos particulares

$B_1 = 0$: Neste caso

$$L_0 W(\sigma) = -3 - \frac{B}{4} \sigma^4 + \frac{B}{5} \frac{\sigma^5}{\sigma_{IV}}, \quad B > 0 \quad (6.8.27)$$

o parâmetro B deve ser positivo para o ponto fixo na origem ser UV. Derivando:

$$L_0 W'(\sigma) = -B \sigma^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{IV}} \right), \quad (6.8.28)$$

quando $\sigma_{IV} > 0$ existe um ponto fixo neste valor. Supondo que seja o caso, a segunda derivada de W em σ_{IV} é:

$$L_0 W''(\sigma) = B \sigma_{IV}^2 > 0, \quad (6.8.29)$$

portanto é um mínimo - $\sigma_{IV} > 0$ é um ponto fixo IV. Na figura 6.4(a) estão curvas de $W(\sigma)$ para $\sigma_{IV} > 0$ - W troca de sinal em algum σ entre $\sigma_{IV} < \sigma < \infty$. Na figura 6.4(b) está uma curva típica de W para $\sigma_{IV} < 0$, aqui W não troca de sinal e a fase é massiva.

$B_2 = 0$: Agora W é:

$$L_0 W(\sigma) = -3 - \frac{B}{3} \sigma^3 + \frac{B}{5} \frac{\sigma^5}{\sigma_{IV}^2}, \quad B > 0, \text{ derivando,} \quad (6.8.30)$$

$$L_0 W'(\sigma) = B \sigma^2 \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_{IV}^2} - 1 \right), \quad (6.8.31)$$

caso $\sigma_{IV}^2 > 0$ existe um ponto IV em $|\sigma_{IV}|$, se o parâmetro for negativo só temos o ponto UV da origem. Na figura 6.5 é encontrado a forma de W para ambos os casos.

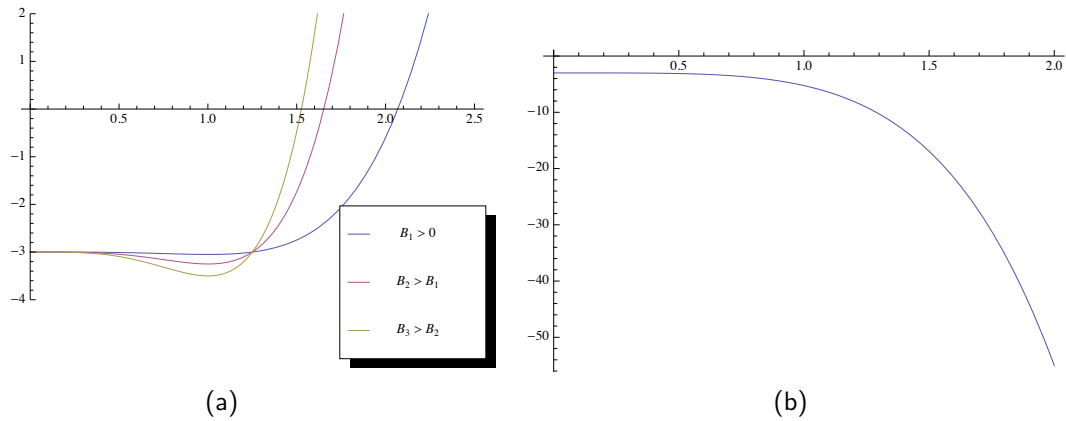


Figura 6.4—Curvas de W para $B_1 = 0$: (a) $\sigma_{IV} > 0$; (b) $\sigma_{IV} < 0$.

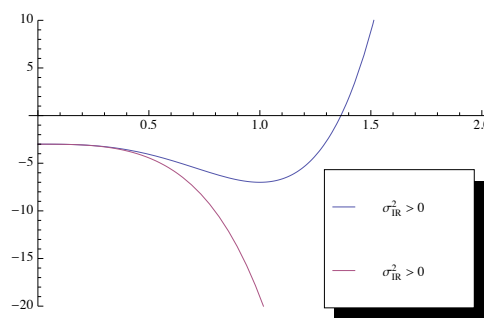


Figura 6.5—Curvas de $W(\sigma)$ dadas pela eq. (6.8.30).

6.8.3.4 Função beta

Até agora a análise foi limitada as possíveis formas de W , logo independe se o modelo é EH ou GB. Ao inserir a função *beta* na análise a história muda, pois o termo de GB modifica bruscamente a forma assintótica de *beta*.

Nas figuras 6.6(a), 6.6(b) e 6.7(a) estão as funções *beta*'s associadas, respectivamente aos W das figuras 6.2(a), 6.2(a) e 6.3(a). Na figura 6.6(a) vemos que numa certa região $1 < \rho < \rho_{walk}$ a função *beta* não possui mais o ponto IV, porém ela tem um mínimo e um máximo que “retardam” o fluxo - regime do acoplamento *andando*^{¶¶}. No valor ρ_{walk} os dois extremos se fundem num ponto de inflexão e para $\rho > \rho_{walk}$ encontramos o regime do acoplamento *correndo*^{***}. Na figura 6.6(b), se $W(\sigma_2) < 0$ não há *salto*; no limite $W(\sigma_2) = 0$, há um pólo exatamente no ponto σ_2 - logo ele não é ponto crítico (o vácuo é Minkowski e não *AdS*); caso $W(\sigma_2) > 0$ existem duas singularidades na função *beta* em σ_{sing}^1 e σ_{sing}^2 , onde $\sigma_1 < \sigma_{sing}^1 < \sigma_2 < \sigma_{sing}^2$.

¶¶do inglês *walking*.

***do inglês *running*

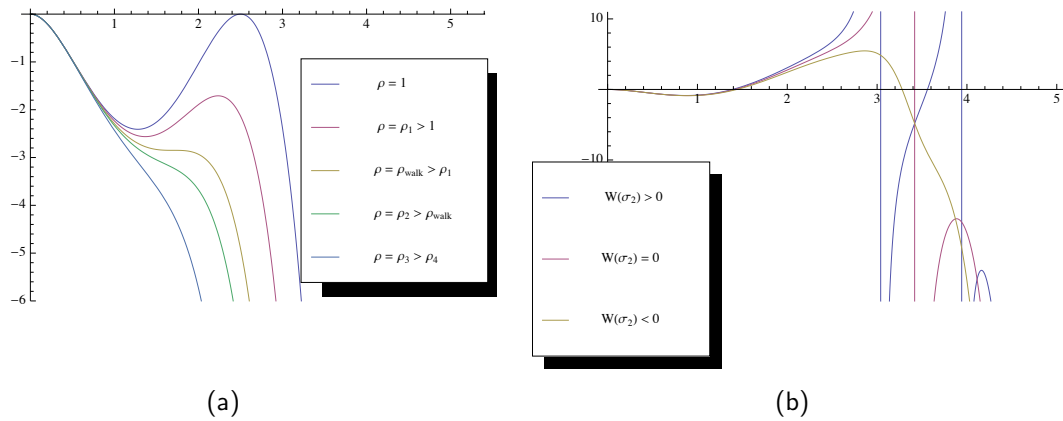


Figura 6.6 – (a) curvas de $\beta(\sigma)$ para $\rho > 1$; (b) curvas de $\beta(\sigma)$ para $0 < \rho < 1$. Em todos os casos $B_2 > 0$.

Já a função *beta* correspondente aos W 's da figura 6.3(b) ($B_2 < 0$) encontram-se na figura 6.7(b). Vemos que ocorre uma mudança súbita quando o sinal de ρ troca - o ponto IV e o *salto* desaparecem.

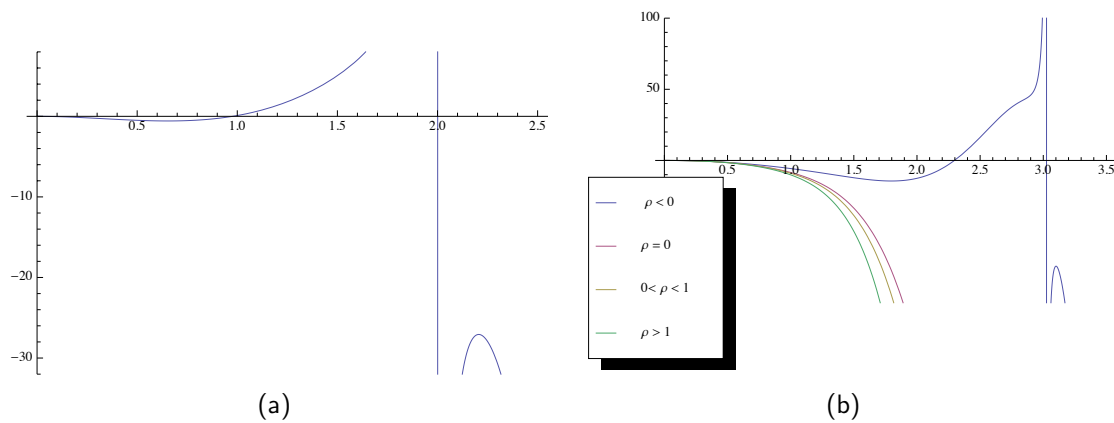


Figura 6.7–(a) $\beta(\sigma)$ para $B_2 > 0$ e $\rho < 0$; (b) *beta* para $B_2 < 0$.

Casos particulares: No caso sem o termo cúbico, as curvas de *beta* correspondentes as figuras 6.4(a) e 6.4(b) são, respectivamente, 6.8(a) e 6.8(b). Por fim, na figura 6.9 temos curvas de *beta* no caso sem o termo quártico, eq. (6.8.30).

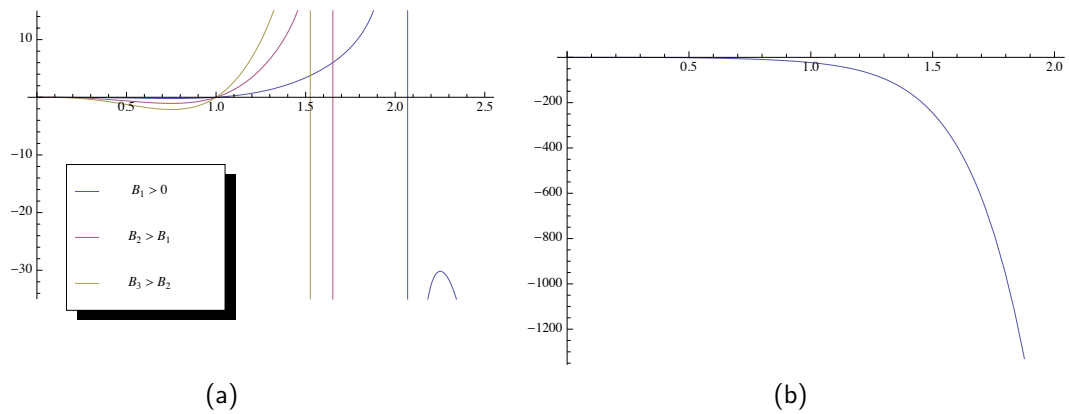


Figura 6.8—(a) curvas de β para $\sigma_{IV} > 0$; (b) curva típica de β para $\sigma_{IV} < 0$.

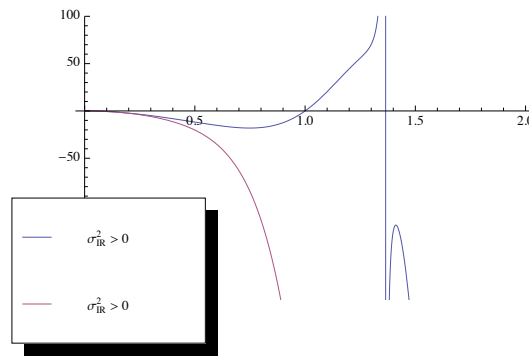


Figura 6.9—Curvas de β para o W dado por (6.8.30).

6.8.3.5 Solução do modelo

Nas proximidades dos possíveis pontos críticos físicos a função β é aproximadamente:

$$-\beta(\sigma) \stackrel{\sigma \approx 0}{\approx} -C_{\Delta\Delta\Delta}\sigma^2 \left(1 - 2\frac{B_2}{B_1}\sigma\right) + \mathcal{O}(\sigma^4), \quad (6.8.32)$$

$$-\beta(\sigma) \stackrel{\sigma \approx \sigma_1}{\approx} s_1(\sigma - \sigma_1) + \mathcal{O}((\sigma - \sigma_*)^2) \quad (6.8.33)$$

$$-\beta(\sigma) \stackrel{\sigma \approx \sigma_2}{\approx} s_2(\sigma - \sigma_1) + \mathcal{O}((\sigma - \sigma_*)^2) \quad (6.8.34)$$

onde

$$C_{\Delta\Delta\Delta} = -2B_1C_0(0) < 0, \quad (6.8.35)$$

$$s_{1,2} = 2\frac{B_2^2}{B_1}\sigma_{1,2}^2(\sigma_{1,2} - \sigma_{2,1})\frac{L_{1,2}}{L_0}C_0(\sigma_{1,2}), \quad L_{1,2} \equiv \frac{-3}{W(\sigma_{1,2})} \quad (6.8.36)$$

de acordo com as eqs. (6.4.2) e (7.4.7). O índice crítico associado ao ponto fixo em $\sigma = 0$ é nulo ($\beta'(0) = 0$), ele é um vácuo *degenerado* (ver definição apresentada no capítulo anterior).

As formas assintóticas da função *beta* garantem o comportamento:

$$e^{A(\sigma)} \sim e^{-\frac{1}{C_{\Delta\Delta\Delta}\sigma} \sigma^{\frac{2B_2}{C_{\Delta\Delta\Delta}B_1}}}, \quad \sigma \rightarrow 0 \quad (6.8.37)$$

$$e^{A(\sigma)} \sim |\sigma - \sigma_{1,2}|^{-\frac{1}{s_{1,2}}}, \quad \sigma \rightarrow \sigma_{1,2}, \quad (6.8.38)$$

o vácuo degenerado (sempre do tipo UV, pois $C_{\Delta\Delta\Delta} < 0$), além do comportamento usual $e^{-\frac{1}{C_{\Delta\Delta\Delta}\sigma}}$ possui um termo não trivial $\sigma^{\frac{2B_2}{C_{\Delta\Delta\Delta}B_1}}$, que só surge quando *beta* é expandida até $\mathcal{O}(\sigma^3)$ em (6.8.32). A solução exata do fator de escala como função do campo σ é:

$$e^{A(\sigma)} = e^{-\frac{1}{C_{\Delta\Delta\Delta}\sigma} \sigma^{\frac{2B_2}{C_{\Delta\Delta\Delta}B_1}}} (\sigma - \sigma_1)^{-\frac{1}{s_1}} (\sigma - \sigma_2)^{-\frac{1}{s_2}} \prod_{i=1}^{10} (\sigma - \sigma_{top,i})^{-\frac{1}{s_{top,i}}}, \quad (6.8.39)$$

onde $\sigma_{top,i}$, $i = 1, \dots, 10$ são as raízes (todas imaginárias) de $C_0(W) = 0$ e $s_{top,i}$ é dado formalmente pela eq. (6.4.3). A propriedade fantástica

$$\frac{2B_2}{C_{\Delta\Delta\Delta}B_1} - \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} - \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{s_{top,i}} = 0,$$

é válida, assim $e^{A(\infty)} = 1$ (finito e não nulo) permitindo fases massivas - basta satisfazerem as condições físicas.

6.8.3.6 Comparação com QCD

No limite $N_c, N_f \rightarrow \infty$ com $\frac{N_c}{N_f} = x$ finito, onde N_f é o número de sabores e N_c o número “cores” (associado ao grupo de calibre $SU(N_c)$), a função *beta* da QCD é, nas redondezas do ponto crítico UV, aproximadamente (51):

$$-\beta(\sigma) \approx b_0\sigma^2 - b_1\sigma^3, \quad (6.8.40)$$

$$b_0 = \frac{2(11-2x)}{3(4\pi)^2}, \quad \frac{b_1}{b_0^2} = \frac{3(13x-34)}{2(11-2x)^2}, \quad (6.8.41)$$

ao comparar com (6.8.32)

$$x = \frac{11}{2} + \frac{3}{4}(4\pi)^2 C_{\Delta\Delta\Delta} = \frac{\frac{11}{2} + \frac{B_1}{(4\pi)^2 2B_2} 17}{1 + \frac{B_1}{(4\pi)^2 2B_2} 13}, \quad (6.8.42)$$

o que cria um vínculo entre $C_{\Delta\Delta\Delta}$ e $\frac{B_1}{B_2}$. O parâmetro ρ permanece arbitrário - só contribui na próxima ordem, mas ele é necessário para a transição *andando-correndo* na função *beta* ser possível (ver figura 6.6(a)), um comportamento conhecido e importante da QCD. O terceiro ponto fixo físico (σ_2) não possui identificação na QCD - na literatura (52) ele é chamado de Banks-Zaks - mesmo assim ele é importante na moldagem das várias formas possíveis de *beta*.

O acréscimo do termo de GB permite, mesmo num W simples em forma de polinômio, uma cadeia de PD que criam uma variedade interessante de fluxos^{†††}. Até o efeito da transição *andando-correndo* foi emulado sem grande esforço, algo inimaginável sem o termo GB.

6.9 Flutuações lineares

O estudo das flutuações lineares do campo σ e métrica $g_{\mu\nu}$ para soluções de PD com o termo de GB ainda é um problema em aberto. Nem tudo está perdido, ainda é possível estudar as flutuações e tirar alguma informação delas (com respeito a teoria holográfica) limitando-nos aos casos em que $s \neq 0$ e as flutuações da parte gravitacional (métrica) são muito menores do que as do campo escalar. Portanto, apenas sob estas condições, é possível considerar as flutuações do campo escalar ao redor do *background* de PD fixo, a chamada *aproximação exploratória*^{†††}. Substituindo $\sigma \rightarrow \bar{\sigma} + \phi$, onde $\bar{\sigma}$ é solução do modelo de PD, na ação (6.1.1) e expandindo até segunda ordem em ϕ

$$\begin{aligned}
S[\phi] &= \bar{S} - \int d^d x \sqrt{|g|} \left(g_{\mu\nu} \partial^\mu \bar{\sigma} \partial^\nu \phi + V'(\bar{\sigma}) \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \frac{V''(\bar{\sigma})}{2} \phi^2 \right), \\
&= \bar{S} + \int d^d x \sqrt{|g|} \underbrace{(\square \bar{\sigma} - V'(\bar{\sigma}))}_{=0} \phi - \int d^d x \nabla^\mu (\bar{\sigma} \partial_\mu \phi) \\
&\quad - \int d^d x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \frac{V''(\bar{\sigma})}{2} \phi^2 \right), \\
&= - \int d^d x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \frac{V''(\bar{\sigma})}{2} \phi^2 \right) + \bar{S} - \int d^d x \nabla^\mu (\bar{\sigma} \partial_\mu \phi), \quad (6.9.1)
\end{aligned}$$

onde na segunda linha eq. do movimento (6.1.4) foi usada. Os dois últimos termos da última eq. são derivadas totais, \bar{S} é simplesmente a ação (6.1.1) *on-shell*, *i.e.* a eq. (6.2.5). Variando (6.9.1) com relação ao campo ϕ temos

$$(\square - V''(\bar{\sigma})) \phi = 0, \quad (6.9.2)$$

a eq. da flutuação de um campo escalar num *background* fixo. No caso uma solução de PD ela toma a forma:

$$\left(\partial_y^2 + (d-1) \dot{A}(y) \partial_y + e^{-2A(y)} \eta_{ij} \partial^i \partial^j \right) \phi(y, x^i) = V''(\bar{\sigma}) \phi(y, x^i), \quad (6.9.3)$$

que é simplesmente a eq. (5.5.67) ao ser tomado $B = 0$ - desprezar a flutuação da métrica. Mesmo aparentando uma forma simples, resolver a eq. (6.9.3) de forma exata, uma vez dado

^{†††}massivos, não massivos, com e sem vácuos degenerados.

^{†††}uma tradução livre do inglês *probe approximation*.

$W(\bar{\sigma})$, é um trabalho hercúleo em praticamente todos os casos, pelo simples fato de ser muito difícil conhecer \dot{A} e $\bar{\sigma}$ como funções da coordenada y , em geral temos $A(\bar{\sigma})$ (ver a seção 6.8). Uma solução é realizar a troca de coordenadas $y \rightarrow \bar{\sigma}$, via eq. (6.2.2), porém a eq. resultante, nos exemplos conhecidos, não pode ser resolvida analiticamente.

Será mais prático trabalharmos nas coordenadas z ao invés de y ($z = -\int e^{-A(y)} dy$). A eq. (6.9.3) fica

$$(\partial_z^2 + (d-2)(\partial_z A(z))\partial_z + \eta_{ij}\partial^i\partial^j)\phi(z, x) = e^{2A(z)}V''(\bar{\sigma})\phi(z, x), \quad (6.9.4)$$

ao realizar a troca $\phi(z, x) = e^{-\frac{(d-2)}{2}A(z)}\Psi(z, x)$ é encontrada a forma final

$$(-\partial_z^2 + \mathcal{V}(z))\Psi(z, x) = \eta_{ij}\partial^i\partial^j\Psi(z, x), \quad (6.9.5)$$

$$\mathcal{V}(z) = \frac{(d-2)}{2}\partial_z^2 A(z) + \left(\frac{d-2}{2}\right)^2 (\partial_z A(z))^2 + e^{2A(z)}V''(\bar{\sigma}), \quad (6.9.6)$$

muito parecida com a flutuação tensorial da métrica encontrada no capítulo anterior^{§§§}, exceto pelo termo “massivo” - proporcional à $V''(\bar{\sigma})$ - que destrói a *supersimetria* dessa eq. de Schrödinger.

6.9.1 Caso $C_{\Delta\Delta\Delta} \neq 0$

A abordagem adotada aqui é a seguinte: um estudo limitado aos arredores de um ponto crítico ($s, C_{\Delta\Delta\Delta} \neq 0$), aproximando $W(\bar{\sigma})$ por (5.5.90), *i.e.*

$$W(\bar{\sigma}) \approx -\frac{1}{L_{fis}} \left((d-2) + \frac{s}{4}\bar{\sigma}^2 + \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}}{6}\bar{\sigma}^3 + \dots \right), \quad (6.9.7)$$

e nesta aproximação a eq. (6.9.3) será reescrita. Ao contrário de (5.5.90), em (6.9.7) a série foi truncada no termo cúbico.

Todo o esforço realizado na seção 5.5.4.4 nos será útil. Já foi demonstrado que ao acrescentar o termo de *GB* ao modelo, a única diferença nas proximidades de um ponto crítico é a troca formal: $s \rightarrow s_{fis} = sC_0$ e $C_{\Delta\Delta\Delta} \rightarrow C_{\Delta\Delta\Delta}^{fis} = C_{\Delta\Delta\Delta}C_0$ ($C_0 = C_0(\sigma_*)$ - σ_* é o ponto fixo). Portanto basta realizar as trocas supracitadas em (5.5.104) para obter as aproximações

^{§§§}elas são parecidas pois a flutuação tensorial da métrica não se acopla a flutuação do campo, ou seja o *graviton* - de massa nula - evolui num *background* fixo, exatamente como ϕ na aproximação adotada.

corretas^{¶¶¶} de $\bar{\sigma}(z)$ e $A(z)$, que são:

$$\bar{\sigma}(z) = \bar{\sigma}_0 \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{s_{fis}} \left(1 + \bar{\sigma}_0 \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}^{fis}}{s_{fis}} \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{s_{fis}} + \mathcal{O} \left(\bar{\sigma}_0^2 \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{2s_{fis}} \right) \right) \quad (6.9.8)$$

$$e^{A(z)} = \frac{L_{fis}}{z} \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_0^2 s_{fis}}{4(d-2)(1+2s_{fis})} \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{2s_{fis}} - \frac{2\bar{\sigma}_0^3 C_{\Delta\Delta\Delta}^{fis}}{3(d-2)(1+3s_{fis})} \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{3s_{fis}} + \mathcal{O} \left(\bar{\sigma}_0^4 \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{4s_{fis}} \right) \right), \quad (6.9.9)$$

onde $\bar{\sigma}_0$ é uma constante. Para calcular os próximos termos da expansão é necessário levar em conta termos de ordens maiores em (6.9.7). Na aproximação cúbica de $W(\bar{\sigma})$, é simples derivar duas vezes a eq. (6.2.4) para encontrar:

$$V''(\bar{\sigma}) = \frac{1}{L_{fis}^2} s_{fis}(s_{fis} - (d-1)) - \frac{2}{L_{fis}^2} C_{\Delta\Delta\Delta}^{fis} (d-1-3s_{fis}) \bar{\sigma} + \mathcal{O}(\bar{\sigma}^2). \quad (6.9.10)$$

Ao reescrever (6.9.5) para o Fourier de $\Psi(z, x)$ nas coordenadas x , *i.e.* $\Psi_k(z)$, onde

$$\Psi(z, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(d-1)}{2}}} \int d^{d-1} k e^{ik_i x^i} \Psi_k(z), \quad (6.9.11)$$

pode-se substituir (6.9.8), (6.9.9) e (6.9.10) nos lugares apropriados e após uma longa álgebra encontrar

$$\begin{aligned} (-\partial_z^2 + \mathcal{V}(z)) \Psi_k(z) &= m_\phi^2 \Psi_k(z), \quad m_\phi^2 = -k_i k^i = (k^0)^2 - \vec{k}^2, \quad (6.9.12) \\ \mathcal{V}(z) &= \frac{(d-2s_{fis})(d-2-2s_{fis})}{4z^2} - 2 \frac{C_{\Delta\Delta\Delta}(d-1-3s_{fis})}{L_{fis}^2} \bar{\sigma}_0 \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{s_{fis}-2} \\ &+ \left(\frac{3s_{fis}^2(d-1-2s_{fis})}{4L_{fis}^2(1+2s_{fis})} - \frac{2C_{\Delta\Delta\Delta}^2(d-1-3s_{fis})}{s_{fis}L_{fis}^2} \right) \bar{\sigma}_0^2 \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{2s_{fis}-2} \\ &+ \mathcal{O} \left(\bar{\sigma}_0^3 \left(\frac{z}{L_{fis}} \right)^{3s_{fis}-2} \right), \quad (6.9.13) \end{aligned}$$

uma eq. com a mesma estrutura da encontrada no capítulo anterior (eq. (5.5.106)), mas com coeficientes diferentes. Não é possível determinar o próximo termo na expansão sem conhecer a próxima ordem em (6.9.7). No apêndice F é apresentado a solução de (6.9.12) para $d = 5$ e $s = 1$.

^{¶¶¶}esse é o motivo de pararmos a série na aproximação cúbica em $\bar{\sigma}$, a partir da próxima ordem (supondo s e $C_{\Delta\Delta\Delta}$ não nulos) a contribuição do termo de GB não é mais trivial. Não basta fazer $\gamma \rightarrow \gamma C_0$ (veja a eq. (5.5.90)) para obter a correção correta.

6.9.2 Exemplo de aproximação com $C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$: W -sinh²

Quando $C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$ os resultados obtidos na seção 6.9.1 não são mais válidos. Ao invés de desenvolver um método geral para a *aproximação exploratória* neste caso, aqui são apresentados os resultados para o exemplo particular da seção 6.8.2 - W -sinh². O motivo da escolha do exemplo é para além de expor os resultados compararmos a *aproximação exploratória* com o método desenvolvido na seção 5.5.4.5, além de analisar as correções criadas pelo termo de GB.

Definindo $\epsilon = \frac{2\lambda L^2}{L_{fis}^2}$ ($C_0 = 1 - \epsilon$), comecemos expandindo a eq. (6.8.18) em potências de σ , com $\sigma_0 = 2\sqrt{d-2}$ (eq. (6.8.17) para $\epsilon \ll 1$):

$$e^{\frac{y}{L_{fis}}} = \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right)^{-1/C_0} \left(1 + \frac{(1-4\epsilon)\sigma^2}{12(d-2)C_0} + \mathcal{O}(\sigma^4) \right), \quad (6.9.14)$$

invertendo ordem a ordem

$$\sigma(y) = 2\sqrt{d-2} e^{-C_0 y/L_{fis}} \left(1 + \frac{1-4\epsilon}{3C_0} e^{-2C_0 y/L_{fis}} + \mathcal{O}(e^{-4C_0 y/L_{fis}}) \right), \quad (6.9.15)$$

ao substituir em (6.8.15) tem-se

$$e^{A(y)} = e^{\frac{y}{L_{fis}}} \left(1 - \frac{(3C_0 - 2\epsilon^2)}{C_0(1 + \sqrt{\epsilon})} e^{-2C_0 y/L_{fis}} + \mathcal{O}(e^{-4C_0 y/L_{fis}}) \right). \quad (6.9.16)$$

Com o resultado acima é possível, na aproximação, a passagem para a coordenada z

$$\frac{z}{L_{fis}} \equiv x = - \int e^{-A(y)} \frac{dy}{L_{fis}} = e^{-y/L_{fis}} \left(1 + \frac{(-2\sqrt{\epsilon} + 3C_0)}{6C_0(1 + \sqrt{\epsilon})(1 + 2C_0)} e^{-2C_0 y/L_{fis}} + \mathcal{O}(e^{-4C_0 y/L_{fis}}) \right),$$

a inversa é:

$$e^{\frac{y}{L_{fis}}} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{(-2\sqrt{\epsilon} + 3C_0)}{6C_0(1 + \sqrt{\epsilon})(1 + 2C_0)} x^{2C_0} + \mathcal{O}(x^{4C_0}) \right). \quad (6.9.17)$$

Com os resultados prévios as quantidades de interesse - $\sigma(x)$ e $e^{A(x)}$ - podem ser determinadas respectivamente como:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 2\sqrt{d-2} x^{C_0} \left(1 + \left(\frac{1-4\epsilon}{3C_0} + \frac{(2\sqrt{\epsilon} - 3C_0)}{6(1 + \sqrt{\epsilon})(1 + 2C_0)} \right) x^{2C_0} + \mathcal{O}(x^{4C_0}) \right), \\ e^{A(x)} &= \frac{1}{x} \left(1 + \left(\frac{(-2\sqrt{\epsilon} + 3C_0)}{6C_0(1 + \sqrt{\epsilon})(1 + 2C_0)} - \frac{(3C_0 - 2\epsilon^2)}{C_0(1 + \sqrt{\epsilon})} \right) x^{2C_0} + \mathcal{O}(x^{4C_0}) \right). \end{aligned}$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow 0$) a eq. (5.5.104) é recuperada com $C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$, $\sigma_0 = 2\sqrt{d-2}$, $s = 1$ e $\gamma = \frac{1}{6(d-2)}$.

Por fim, na aproximação em questão $V''(\sigma)$ é:

$$V''(\sigma) = \frac{C_0(C_0 - (d-1))}{L_{fis}^2} - \frac{1}{4(d-2)L_{fis}^2} (5(d-2) - 3 - (11(d-5) + 4)\epsilon - 128\epsilon^2) \sigma^2 + \mathcal{O}(\sigma^4),$$

Terminado todos os cálculos intermediários, finalmente a eq. da flutuação do campo escalar, (6.9.5), fornece uma eq. de Schrödinger para o seguinte potencial (aproximativo):

$$\begin{aligned} L_{fis}^2 \mathcal{V}(x) = & \frac{(d-2C_0)(d-2(C_0+1))}{4x^2} + \left(- \frac{(d-2)(2+C_0+2C_0^2-d-C_0d)(15C_0+36C_0^2+2\sqrt{\epsilon}-12\epsilon^2-24C_0\epsilon^2)}{6C_0(1+2C_0)(1+\sqrt{\epsilon})} \right. \\ & \left. +15 - 5d - 51\epsilon + 11d\epsilon + 128\epsilon^2 + \frac{C_0(C_0-(d-1))(-15C_0-36C_0^2-2\sqrt{\epsilon}+12\epsilon^2+24C_0\epsilon^2)}{3C_0(1+2C_0)(1+\sqrt{\epsilon})} \right) x^{2C_0-2} \\ & + \mathcal{O}(x^{4C_0-2}). \end{aligned} \quad (6.9.18)$$

Para facilitar os cálculos e a comparação com o método perturbativo feito no capítulo anterior o potencial acima será expandido ao redor de $\epsilon = 0$ e só vamos levar em conta a primeira correção devido ao termo GB. Assim:

$$\mathcal{V}(x) = \frac{(d-2)(d-4)}{4x^2} + 30 - \frac{149}{6}d + \frac{17}{3}d^2 - \sqrt{\epsilon} \frac{49}{18} (6 - 7d + 2d^2) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (6.9.19)$$

a primeira correção do termo de GB apenas fornece uma constante aditiva ao potencial, cuja solução regular em $x = 0$ do Fourier de Ψ (eq. (6.9.5)) é:

$$\begin{aligned} \Psi_E(z) & \propto J_{\frac{(d-3)}{2}} \left(\frac{\sqrt{E}}{L_{fis}} z \right), \\ E & = m_\phi^2 - \left(30 - \frac{149}{6}d + \frac{17}{3}d^2 - \sqrt{\epsilon} \frac{49}{18} (6 - 7d + 2d^2) \right). \end{aligned} \quad (6.9.20)$$

onde $J_\nu(x)$ é a função de Bessel (ver apêndice A). A coordenada z possui um valor máximo z_{max} , devido a singularidade nua do espaço-tempo $(a)AdS_d$. Tal valor é dado pela integral

$$\begin{aligned} \frac{z_{max}}{L_{fis}} & = - \int_\infty^{y_s} e^{-A(y)} dy = - \int_0^\infty e^{-A(\sigma)} \frac{d\sigma}{2W'(\sigma)} \\ & = \frac{M}{2} \int_0^\infty \frac{X^{1/2C_0} |X - X_{top}^+|^{1/s_{top}^+} |X - X_{top}^-|^{1/s_{top}^-}}{X(1+X)} dX, \quad X = \sinh^2 \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{d-2}} \right), \end{aligned}$$

cuja solução é não trivial. Sendo o nosso interesse apenas nas razões das massas, o valor z_{max} não é importante. Ao tomar $d = 5$ o espectro de massa passa a ser definido pelas soluções da

eq.

$$\begin{aligned}
 J_1(\sqrt{E}z_{max}) &= 0, \text{ ou} \\
 \frac{m_\phi(n)}{m_\phi(1)} &= \sqrt{\frac{x_n^2 + \frac{95}{2} - \frac{343}{6} \frac{\sqrt{2\lambda}L}{L_{fis}}}{14.682 + \frac{95}{2} - \frac{343}{6} \frac{\sqrt{2\lambda}L}{L_{fis}}}} \\
 &\approx 0.0160818x_n^2 + 0.763887 + (0.0147847x_n^2 - 0.217069) \frac{\sqrt{2\lambda}L}{L_{fis}}, \quad (6.9.21)
 \end{aligned}$$

onde x_n é o n -ésimo zero de $J_1(x)$, excluindo o zero em $x = 0$. Todo o esforço realizado nesta seção serve para colocar a prova a *aproximação exploratória*. A eq. (6.9.21) prevê $\frac{m_\phi(2)}{m_\phi(1)} = 1.25 + 0.20 \frac{\sqrt{2\lambda}L}{L_{fis}}$, por outro lado no limite $\lambda = 0$ o resultado exato é conhecido (ver tabela 5.1) e igual a 1.73. Cometemos um erro relativo de 27.9%, já a previsão feita pela aproximação adotada no capítulo anterior teve, para a mesma massa, um erro relativo de apenas 1.73%. Ao desprezarmos totalmente as flutuações da geometria são gerados resultados com pouca precisão no espectro das flutuações do campo escalar. Algo mais confiável só pode ser obtido se ambas as flutuações (geometria e matéria) forem levadas em conta, um problema ainda em aberto.

Paredes de domínio na gravitação quase-topológica e seu uso em *AdS/CFT*

A introdução do termo de GB gerou teorias holográficas com as funções cargas centrais diferentes ($a \neq c$) e os fluxos massivos funcionam como o esperado - ao fim do fluxo o comprimento de correlação possui um valor finito não nulo, ao contrário do caso EH em que ele se anulava. O termo de GB acrescenta apenas um parâmetro (escala) a teoria, o $L_{top}^2 = 2\lambda L^2$, não há muita liberdade nos resultados e $t_4 = 0$, ver seções 3.4 e 6.6.2. Para construir teorias mais gerais vamos acrescentar mais um parâmetro (que refletirá numa segunda escala topológica) associado a termos de ordem cúbica na ação do modelo, culminando na famosa *Gravitação Quase Topológica** (GQT) (17, 18). Na primeira parte do capítulo são apresentadas as modificações criadas pelo novo termo - sistema de primeira ordem, vácuos, índices críticos, etc. Como a análise é muito semelhante a feita no capítulo anterior, não são apresentados muitos detalhes. Na segunda parte as condições físicas da teoria holográfica - teorema $a \& c$ e positividade da energia nos pontos fixos - são discutidas em detalhes. Os resultados não são triviais e inúmeras restrições aos parâmetros surgem.

*do inglês *Quasi Topological Gravity*, termo criado em (17).

7.1 Definição e equações de primeira ordem no modelo da GQT

O modelo da GQT (17) generaliza a ação com o termo de GB ao acrescentar \mathcal{Z}_d , t.q. ($\kappa = 1$)

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[R + \frac{\lambda L^2}{(d-3)(d-4)} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) - \frac{8\mu(2d-3)L^4}{(d-6)(d-3)(3d^2-15d+16)} \mathcal{Z}_d - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right], \quad (7.1.1)$$

$$\mathcal{Z}_d = R_\mu{}^\rho{}_\nu{}^\sigma R_\rho{}^\gamma{}_\sigma{}^\tau R_\gamma{}^\mu{}_\tau{}^\nu + \frac{1}{(2d-3)(d-4)} \left[\frac{3(3d-8)}{8} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} R - 3(d-2) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho}{}_\gamma R^{\sigma\gamma} + 3d R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} + 6(d-2) R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\rho R_\rho{}^\mu - \frac{3(3d-4)}{2} R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu R + \frac{3d}{8} R^3 \right]. \quad (7.1.2)$$

A escolha dos termos que compõem \mathcal{Z}_d não é arbitrária, como mostrado no apêndice G. Eles são a combinação mais geral (equivalente ao modelo da NMG) que produz eqs. de segunda ordem para a métrica de PD. No mesmo apêndice é mostrado que a ação 7.1.1, para a métrica

$$ds^2 = f^2(y) e^{2(d-1)A(y)} dy^2 + e^{2A(y)} \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (7.1.3)$$

é equivalente a (5)

$$S = \int d^{d-1} x \int dy \mathcal{L}_{ef}, \quad (7.1.4)$$

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{2f(y)} \left[2(d-1)(d-2) \dot{A}^2(y) - \dot{\sigma}^2(y) \right] - f(y) e^{2(d-1)A(y)} V(\sigma) - \lambda \frac{(d-1)(d-2)L^2 e^{-2(d-1)A(y)}}{3} \frac{\dot{A}^4(y)}{f^3(y)} - \mu \frac{(d-1)(d-2)L^4 e^{-4(d-1)A(y)}}{5} \frac{\dot{A}^6}{f^5(y)}.$$

Ao seguir os mesmos passos adotados no capítulo anterior não é complicado chegar ao sistema de primeira ordem em termos do “superpotencial” $W(\sigma)$

$$\dot{\sigma} = 2W' C_0(W), \quad \dot{A} = -\frac{1}{d-2} W(\sigma), \quad C_0(W) = 1 - 2\lambda \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2} - 3\mu \frac{L^4 W^4}{(d-2)^4}, \quad (7.1.5)$$

solução das eqs. do movimento derivadas de (7.1.4). A relação entre $V(\sigma)$ e $W(\sigma)$ é dada por:

$$V(\sigma) = 2(W')^2 C_0^2(W) - \left(\frac{d-1}{d-2} \right) W^2 \left(1 - \lambda \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2} - \mu \frac{L^4 W^4}{(d-2)^4} \right). \quad (7.1.6)$$

O escalar de curvatura ainda é dado por (6.2.8) - singularidades de W são singularidades do espaço-tempo. Basta apenas usar a nova definição de $C_0(W)$.

Ao substituir as eqs. de (7.1.5) em (7.1.4) tem-se a seguinte derivada total

$$S = -\frac{2}{l_{pl}(d-2)^{d-1}} \int d^{d-1}x \int dy \frac{d}{dy} [e^{(d-1)A(y)} (l_{pl}|W|)^{d-1} a(\sigma)], \quad W < 0 \quad (7.1.7)$$

$$a(\sigma) = \frac{(d-2)^{d-2}}{(l_{pl}|W|)^{d-2}} \left(1 - 2\lambda \left(\frac{d-2}{d-4} \right) \frac{L^2 W^2(\sigma)}{(d-2)^2} - 3\mu \left(\frac{d-2}{d-6} \right) \frac{L^4 W^4(\sigma)}{(d-2)^4} \right), \quad (7.1.8)$$

$$= \frac{(d-2)^{d-2}}{(l_{pl}|W|)^{d-2}} \left(1 - \frac{1}{f_+^a} \frac{L^2 \kappa^2 W^2}{(d-2)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{f_-^a} \frac{L^2 \kappa^2 W^2}{(d-2)^2} \right), \quad (7.1.9)$$

$$f_{\pm}^a \equiv -\frac{1}{3\mu} \left(\frac{d-6}{d-4} \right) \left(\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 + 3\mu \frac{(d-4)^2}{(d-6)(d-2)}} \right), \quad (7.1.10)$$

exatamente (6.2.5) com apenas uma modificação ($\mathcal{O}(\mu L^4)$) na função $a(\sigma)$. Um indício de que essa é a função carga central do modelo.

7.2 Vácuos físicos e topológicos

Não há nenhum conceito novo aqui, os vácuos são os zeros da primeira derivada do potencial $V(\sigma)$:

$$V'(\sigma) = 0 = 2W'(\sigma)C_0(W(\sigma))\mathcal{F}(\sigma), \quad (7.2.1)$$

$$\mathcal{F}(\sigma) = 2W''(\sigma)C_0(W(\sigma)) - \frac{8L^2}{(d-2)^2} W(\sigma)(W'(\sigma))^2 \left(\lambda + 3\mu L^2 \frac{W(\sigma)^2}{(d-2)^2} \right) - \left(\frac{d-1}{d-2} \right) W(\sigma),$$

novamente o método do “superpotencial” não descreve os vácuos (não físicos) associados aos zeros da função $\mathcal{F}(\sigma)$. As definições dos vácuos físicos (AdS_d) e topológicos não são alteradas, dadas respectivamente por:

$$W'(\sigma_{fis}) = 0, \quad W(\sigma_{fis}) \neq 0, \quad (7.2.2)$$

$$C_0(W) = 0. \quad (7.2.3)$$

Qualquer um dos tipos de vácuos representam espaços-tempo AdS_d descritos nas coordenadas de Poincaré

$$ds^2 = dy^2 + e^{\frac{y}{L_*}} \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (7.2.4)$$

cuja escala L_* é definida através de

$$\dot{A} = -\frac{W(\sigma_*)}{(d-2)} = \pm \frac{1}{L_*},$$

onde o sinal deve ser escolhido t.q. L_* seja positivo.

Supondo um modelo com n vácuos (físicos e topológicos), então há uma escala L_k as-

sociada ao k -ésimo vácuo ($k \leq n$). Ao definir a quantidade adimensional $f_k = \frac{L^2}{L_{fis,k}}$, a eq. (7.1.6) fornece a relação:

$$h_k = f_k(1 - \lambda f_k - \mu f_k^2) = f_k \left(1 - \frac{f_k}{f_+^h}\right) \left(1 - \frac{f_k}{f_-^h}\right), \quad h_k = \frac{L^2}{L_{bare}^2} \quad (7.2.5)$$

$$L_{bare}^2 \equiv -\frac{(d-2)}{(d-1)}V(\sigma_{fis,k}), \quad (7.2.6)$$

$$f_{\pm}^h = -\frac{1}{2\mu} \left(\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 + 4\mu}\right), \quad (7.2.7)$$

onde f_{\pm}^h são os zeros de h_k . Inverter a eq. cúbica (7.2.5) é uma tarefa complicada e desnecessária para os nossos propósitos. O interessante da eq. é que assumindo h_k como uma função de f_k , tem-se

$$\partial_{f_k} h_k = 1 - 2\lambda f_k - 3\mu f_k^2 = C_0(f_k), \quad (7.2.8)$$

logo os possíveis valores de f_k nos vácuos topológicos, *i.e.* os zeros de $C_0(f_k)$

$$f_{\pm}^{top} \equiv \frac{L^2}{L_{top,\pm}^2} = -\frac{1}{3\mu} \left(\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 + 3\mu}\right), \quad (7.2.9)$$

são extremos de h_k (quando forem quantidades reais e positivas) - f_+^{top} é um máximo local e f_-^{top} um mínimo local - $L_{top,\pm}^2$ são as escalas dos espaços AdS_d associadas aos dois possíveis vácuos topológicos. Elas dependem exclusivamente dos parâmetros (L, λ, μ) , sem referência à $W(\sigma)$. No limite $\mu \rightarrow 0$: $L_{top,+} \rightarrow \sqrt{2\lambda}L$ e $|L_{top,-}| \rightarrow 0$, *i.e.* o caso GB é recuperado com apenas um vácuo topológico. O outro vácuo topológico (ligado à $L_{top,-}$) torna-se uma singularidade da geometria ($L^2 R \sim -|f_-^{top}| \rightarrow -\infty$), o mesmo ocorre com o vácuo topológico de GB no limite $\lambda \rightarrow 0$. Os vácuos topológicos são correções criadas pelos termos da GQT (ou de apenas GB) que *blindam* as singularidades nuas das geometrias de PD. Se no modelo do EH há uma singularidade nua, ao introduzir os termos da GQT (os apenas GB) é possível (dependendo de W e dos valores dos parâmetros λ e μ) que antes de chegar à singularidade exista um vácuo topológico de grande, mas finita, curvatura ($|L^2 R_{top}| \sim |f^{top}| \gg 1$).

A eq. (7.2.9) cria três classes distintas de modelos:

1. $f_{\pm}^{top} \in \mathbb{C}$ ou $f_{\pm}^{top} < 0$: não há vácuos topológicos.
2. $f_{\pm}^{top} > 0$, $f_{\mp}^{top} < 0$: há apenas um vácuo topológico.
3. $f_{\pm}^{top} > 0$: há dois vácuos topológicos.

Da eq. (7.2.9) a quantidade $C_0(W)$ pode ser fatorizada como

$$C_0(W) = \left(1 - \frac{1}{f_+^{top}} \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{f_-^{top}} \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2}\right), \quad (7.2.10)$$

o primeiro indício de que o modelo da GQT, de certa forma, pode ser encarado como o “produto” de dois modelos de GB.

7.3 Dois modelos pelo preço de um

Substituindo (7.2.9) em (7.2.5) temos

$$h_{\pm} = h(f_{\pm}^{top}) = \frac{1}{27\mu^2} [-\lambda(2\lambda^2 + 9\mu) \pm 2(\lambda^2 + 3\mu)^{3/2}]. \quad (7.3.1)$$

Ao manipular a eq. acima ela pode ser reescrita como uma eq. quadrática para μ , cujas soluções para h_+ são

$$\mu_{1,+}(\lambda; h_+) = \frac{1}{27h_+^2} (2 - 9\lambda + 2(1 - 3\lambda h_+)^{3/2}), \quad \text{para } -\infty < \lambda < 1/3h_+ \quad (7.3.2)$$

$$\mu_{2,+}(\lambda; h_+) = \frac{1}{27h_+^2} (2 - 9\lambda - 2(1 - 3\lambda h_+)^{3/2}), \quad \text{para } -\infty < \lambda < 0, \quad (7.3.3)$$

e para h_- temos apenas:

$$\mu_{2,-}(\lambda; h_-) = \frac{1}{27h_-^2} (2 - 9\lambda - 2(1 - 3\lambda h_-)^{3/2}), \quad \text{se } 0 < \lambda < 1/3h_-, \quad (7.3.4)$$

não há $\mu(\lambda; h_-)$ quando $\lambda < 0$.

É fácil verificar que $h_{\pm}(\mu_{(1,2)}; \lambda) > 0$ para todo λ possível, o que sugere a escolha da escala fundamental L^2 (introduzida na ação) como $L^2 = L_{bare}^2(h_+) = L_{bare}^2(h_-)$, normalizando o vácuo topológico “vestido” (*bare*) como $h_+(\mu_{(1,2)}; \lambda) = h_-(\mu_2; \lambda) = 1$, *i.e.* L^2 é a menor escala topológica “vestida” quando tratamos de h_+ e L^2 é a maior escala topológica “vestida” para h_- , pois f_+^{top} é um máximo de h_k e f_-^{top} é um mínimo. Assim, as raízes $\mu_{(1,2)}$ tornam-me

$$\mu_1(\lambda) = \frac{1}{27} (2 - 9\lambda + 2(1 - 3\lambda)^{3/2}), \quad (7.3.5)$$

$$\mu_2(\lambda) = \frac{1}{27} (2 - 9\lambda - 2(1 - 3\lambda)^{3/2}), \quad (7.3.6)$$

e dado $0 < \lambda < 1/3$ existem dois modelos gravitacionais distintos, ambos com o mesmo λ , mesma escala L^2 , mas diferentes μ 's. Num caso (μ_1) L^2 é a menor (se houver as duas) escala topológica “vestida” ($L_{bare}^2(h_+)$) e no outro (μ_2) L^2 é a maior (se houver as duas) escala

topológica “vestida” ($L_{bare}^2(h_-)$).

No intervalo $-\infty < \lambda < 0$, o modelo μ_1 está associado a identificação $L^2 = L_{bare}^2(h_+)$. Já o outro modelo, μ_2 , também está ligado a h_+ , porém não há vácuo topológico, pois como $\mu_2 < 0$ e $\lambda < 0$ e é evidente que não há nenhuma raiz real positiva da eq. (7.2.5) (ambas são negativas). Por outro lado, isso não nos impede de fixar a escala L^2 impondo $h_+ \equiv h(f_+^{top}) = 1$, a questão é que a escala escolhida não tem nenhuma relação com um vácuo topológico (não temos vácuos topológicos), não existe significado físico profundo na escolha da escala. Mesmo assim será mantida esta fixação neste caso - ela simplifica o estudo apresentado na seção 7.5.

As curvas $\mu_{(1,2)}$ estão mostradas na figura 7.1. Na mesma é possível observar que: ambas coincidem no ponto final $\lambda = 1/3$, $\mu_{(1,2)}(1/3) = -1/27$; apenas o modelo μ_1 possui o limite GB (com vácuo topológico) em $\lambda = 1/4$; apenas o modelo μ_2 reproduz a gravitação de EH em $\lambda = 0$; $\mu_1(0) = 4/27$ - modelo (com vácuo topológico) sem o termo de GB; $\mu_2 < 0$ sempre; $\mu_1 < 0$ para $1/4 < \lambda < 1/3$; e $\mu_1 > 0$ para $\lambda < 1/4$.

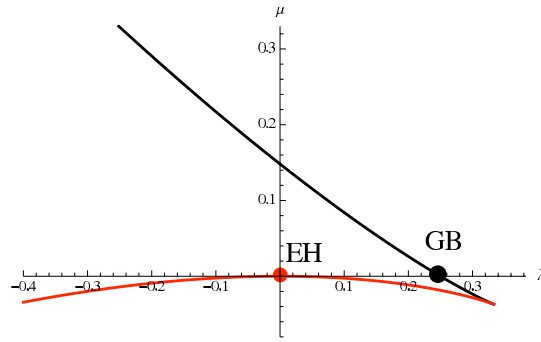


Figura 7.1 – Curvas de $\mu_1(\lambda)$ (em preto) e $\mu_2(\lambda)$ (em vermelho). Os pontos $\mu_1(1/4) = 0$ e $\mu_2(0) = 0$, estão destacados, pois, respectivamente, representam os modelos de GB e EH.

Ao substituir as quantidades $\mu_{(1,2)}$ (eqs. (7.5.29) e (7.3.6)) em (7.2.9) temos:

$$f_+^{top}(\lambda; \mu_1) = \frac{1}{3\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - 3\lambda} \right), \quad (7.3.7)$$

$$f_-^{top}(\lambda; \mu_1) = \frac{1 - 6\lambda - \sqrt{1 - 3\lambda}}{3\lambda(1 - 4\lambda)}, \quad (7.3.8)$$

$$f_+^{top}(\lambda; \mu_2) = \frac{1}{\lambda + \frac{1}{3}\sqrt{1 - 3\lambda}|1 - \sqrt{1 - 3\lambda}|} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 - 3\lambda}}{\lambda}, & \text{se } \lambda < 0 \\ \frac{1 - 6\lambda + \sqrt{1 - 3\lambda}}{\lambda(1 - 4\lambda)}, & \text{se } 0 < \lambda < 1/3 \end{cases} \quad (7.3.9)$$

$$f_-^{top}(\lambda; \mu_2) = \frac{1}{\lambda - \frac{1}{3}\sqrt{1 - 3\lambda}|1 - \sqrt{1 - 3\lambda}|} = \begin{cases} \frac{1 - 6\lambda + \sqrt{1 - 3\lambda}}{\lambda(1 - 4\lambda)}, & \text{se } \lambda < 0 \\ \frac{1 + \sqrt{1 - 3\lambda}}{\lambda}, & \text{se } 0 < \lambda < 1/3 \end{cases} \quad (7.3.10)$$

na figura 7.2 é mostrado as curvas para as quantidades acima. Dela temos que para $-\infty < \lambda < 0$

$$f_+^{top}(\lambda; \mu_2) < f_-^{top}(\lambda; \mu_2) < f_-^{top}(\lambda; \mu_1) < 0 < f_+^{top}(\lambda; \mu_1),$$

e o único vácuo topológico real nesta região é $L_{top,+}^2$ (apenas $f_+^{top}(\lambda; \mu_1)$ é positivo) e pertence ao modelo μ_1 . Já para $0 < \lambda < 1/4$

$$f_-^{top}(\lambda; \mu_1) < 0 < f_+^{top}(\lambda; \mu_1) < f_+^{top}(\lambda; \mu_2) < f_-^{top}(\lambda; \mu_2),$$

o modelo μ_1 possui apenas um vácuo topológico ($L_{top,+}^2$) e o modelo μ_2 tem os dois com $0 < L_{top,-}^2 < L_{top,+}^2$. A última região consiste em $1/4 < \lambda < 1/3$ e nela

$$0 < f_+^{top}(\lambda; \mu_1) < f_+^{top}(\lambda; \mu_2) < f_-^{top}(\lambda; \mu_2) < f_-^{top}(\lambda; \mu_1),$$

ambos os modelos possuem seus dois vácuos topológicos com: $0 < L_{top,-}^2 < L_{top,+}^2$.

O mesmo processo de utilizar gráficos para determinar o ordenamento dos f 's será usado para provar os teoremas da seção 7.5.

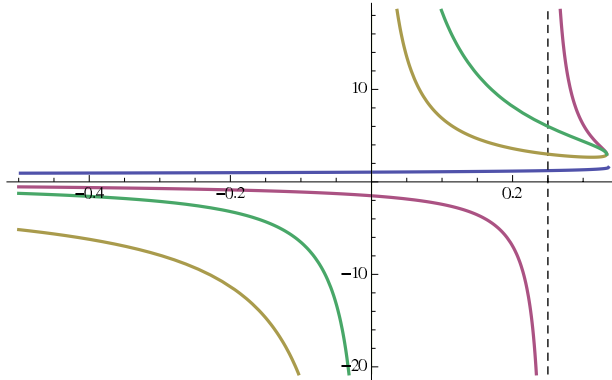


Figura 7.2 – Curvas das eqs. (7.3.7)-(7.3.10) como função de λ - a reta vertical pontilhada corresponde à $\lambda = 1/4$ -; $f_+^{top}(\mu_1; \lambda)$ é a curva azul, $f_-^{top}(\mu_1; \lambda)$ é a roxa, $f_+^{top}(\mu_2; \lambda)$ é a bege e $f_-^{top}(\mu_2; \lambda)$ é a verde.

7.4 Massa do campo escalar, função Beta e as funções centrais a e c

A inserção do novo termo não modifica a estrutura da massa do campo escalar com relação a um vácuo físico ou topológico, ela permanece

$$m_*^2 = \frac{d^2 V(\sigma)}{d\sigma^2} \Big|_{\sigma=\sigma_*} = \frac{s_*}{L_*^2} (s_* - (d-1)) \geq -\frac{(d-1)^2}{4L_*^2}, \quad (7.4.1)$$

logo a desigualdade BF é sempre satisfeita. No caso físico até a forma de s_* se mantém inalterada[†]

$$\begin{aligned} s_* = s_{fis} &= 2(d-2) \frac{W''(\sigma_{fis})}{W(\sigma_{fis})} C_0(\sigma_{fis}) \\ &= 2(d-2) \frac{W''(\sigma_{fis})}{W(\sigma_{fis})} \left(1 - \frac{f_{fis}}{f_+^{top}}\right) \left(1 - \frac{f_{fis}}{f_-^{top}}\right), \quad f_{fis} = \frac{L^2}{L_{fis}^2}, \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

sua relação (para um mesmo W) com o caso EH permanece: $s \rightarrow s_{fis} = sC_0(\sigma_{fis})$.

Já o vácuo topológico passa a ter duas classes distintas - uma associada a escala $L_{top,+}$ e a outra a escala $L_{top,-}$ (assumindo que sejam reais e positivas). Cada uma possui seu próprio s_* dado por:

$$\begin{aligned} s_{top}^{\pm} &= -\frac{8}{(d-2)} (W'(\sigma_{\pm}^{top}))^2 \left[\lambda L^2 + \frac{3\mu L^4}{(d-2)^2} (W(\sigma_{\pm}^{top}))^2 \right] \\ &= -\frac{4L_{top,\pm}^2}{(d-2)} W_{\pm}^{\prime 2} \left[1 - \frac{L_{top,\mp}^2}{L_{top,\pm}^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

No caso GB um vácuo topológico só podia ser degenerado ($s_* = 0$) quando coincidia com um vácuo físico - $W'(\sigma_*) = 0$, $C_0(\sigma_*) = 0$. Agora há uma nova possibilidade, quando $L_{top,+}^2 = L_{top,-}^2 = L^2/\lambda$, $\lambda > 0$, *i.e.* para $3\mu = -\lambda^2 < 0$. Repare que neste caso $C_0(W) \geq 0$ para qualquer $W(\sigma)$.

A função *beta* holográfica também não sofre alteração em sua estrutura

$$\frac{d\sigma}{dl} = \frac{d\sigma}{d(-A)} \equiv -\beta(\sigma) = 2(d-2) \frac{\partial_{\sigma} W(\sigma)}{W(\sigma)} C_0(W) = -\frac{1}{g} \frac{da(\sigma)}{d\sigma}, \quad (7.4.4)$$

$$g(\sigma) = \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{d-2}{l_{pl}\kappa|W(\sigma)|} \right)^{d-2} > 0, \quad (7.4.5)$$

onde $a(\sigma)$ é dado por (7.1.8). Se $W(\sigma)$ possui um comportamento $W(\sigma) \sim \sigma^n$ ($n > 1/4$) para $\sigma \rightarrow \infty$, *i.e.* nas proximidades de uma singularidade nua, a função *beta* holográfica com o termo de GQT diverge, $|\beta(\sigma)| \sim |\mu L^4 \sigma^{4n-1}| \rightarrow \infty$. Tal comportamento assegura uma interpretação correta para a fase massiva, análoga a discussão apresentada no capítulo anterior. A diferença para o caso GB é que agora o comportamento $W(\sigma) \sim \sigma^n$, $n > 1/4$ é suficiente, em GB era necessário $n > 1/2$.

A primeira derivada da função *beta* holográfica num vácuo físico ou topológico é

$$-\left. \frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=\sigma_*} = s_*, \quad (7.4.6)$$

onde s_* é dado por (7.4.2) para o vácuo físico e (7.4.3) no caso de um dos vácuos topológicos. Todas as ponderações feitas na seção 6.3 se aplicam aqui.

[†]o que muda é C_0 .

O valor da constante de estrutura, dada pela segunda derivada da função β num ponto fixo, num vácuo físico é:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \beta(\sigma)}{d\sigma^2} \equiv C_{\Delta\Delta\Delta} = -(d-2) \frac{W'''(\sigma_{fis})}{W(\sigma_{fis})} C_0(\sigma_{fis}) = L_{fis} W'''(\sigma_{fis}) C_0(\sigma_{fis}), \quad (7.4.7)$$

i.e. ele apenas acrescenta o termo C_0 ao resultado de EH (para um mesmo $W(\sigma)$).

A eq. (7.4.4) garante o comportamento monotônico decrescente de a como uma função de $l = -A$

$$\frac{da}{dl} = -g(\sigma) \beta^2(\sigma) < 0, \quad (7.4.8)$$

portanto é muito razoável interpretá-la como a função carga central a . Num ponto fixo σ_* - espaço AdS_d com escala L_* , a função central $a(\sigma)$ determina a carga central a (10, 17):

$$a = a_0 \left(\frac{L}{l_{pl}} \right)^{d-2} \gg 1, \quad (7.4.9)$$

$$a_0 = 1 - 2\lambda \left(\frac{d-2}{d-4} \right) \frac{L^2}{L_*^2} - 3\mu \left(\frac{d-2}{d-6} \right) \frac{L^4}{L_*^4}. \quad (7.4.10)$$

A carga central c associada a um ponto fixo σ_* é definida exatamente como a do capítulo anterior[‡], o que muda é a forma de C_0 :

$$c = C_0(\sigma_*) \left(\frac{L}{l_{pl}} \right)^{d-2} \gg 1, \quad (7.4.11)$$

e sua correspondente função central c é:

$$c(\sigma) = \frac{(d-2)^{d-2}}{(l_{pl}|W|)^{d-2}} C_0(W(\sigma)). \quad (7.4.12)$$

7.5 Impondo condições físicas sobre o modelo

Da mesma forma que a gravitação com o termo de GB, a GQT tem o potencial de gerar uma infinidade de fluxos holográficos e pontos fixos numa $pCFT_{d-1}$, depende apenas da escolha do "superpotencial" $W(\sigma)$. Sua grande vantagem, em relação ao caso GB, é que além de $a \neq c$, na GQT também temos $t_4 \neq 0$, ver seções 3.4 e 6.6.2 e 7.5.2, ou seja, a supersimetria é completamente quebrada. T tamanha riqueza deve ser encarada com cuidado, uma vez que nem toda teoria holográfica criada possui sentido físico. Esta seção é dedicada a criar restrições sobre a gravitação - seus parâmetros e $W(\sigma)$ - t.q. ela gere teorias holográficas fisicamente aceitáveis - com energias e cargas centrais positivas, etc. Em toda a

[‡]podendo ser derivada pelos mesmos argumento apresentados na seção 6.5.

seção é assumido $W(\sigma) < 0$ e $d \neq 4, 6$.

7.5.1 Teoremas a & c

Já sabemos (ver capítulo anterior) que as condições necessárias para a teoria de gravitação ser estável e criar fluxos holográficos físicos são:

$$h_{UV/IR} > 0, a_{UV} > a_{IV} > 0, c_{UV} > c_{IV} > 0, \frac{da}{dl} < 0, \frac{dc}{dl} < 0. \quad (7.5.1)$$

De todas apenas $\frac{da}{dl} < 0$ é sempre verdadeira. Novamente chamaremos de Teorema a & c o conjunto de restrições sobre os possíveis modelos para que todas as condições listadas em (7.5.1) sejam válidas.

A quantidade $\frac{dc}{dl}$ ainda não foi apresentada, seu valor é:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dl} &= -\frac{(d-2)^{d-2}}{(l_{pl})^{d-2}} (d-2)(-\sigma) \frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)} \frac{(d-2)^{d-2}}{(l_{pl}|W|)^{d-2}} \\ &\times \left(1 - 2\lambda \left(\frac{d-4}{d-2} \right) \frac{L^2 \kappa^2 W^2(\sigma)}{(d-2)^2} - 3\mu \left(\frac{d-6}{d-2} \right) \frac{L^4 \kappa^4 W^4(\sigma)}{(d-2)^4} \right) \\ &= -\frac{(d-2)^{d-2}}{(l_{pl})^{d-2}} \frac{2(d-2)^2}{\kappa^2} \left(\frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)} \right)^2 C_0 \frac{(d-2)^{d-2}}{(l_{pl}|W|)^{d-2}} \left(1 - \frac{1}{f_+^{c'}} \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{f_-^{c'}} \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2} \right), \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

com

$$f_{\pm}^{c'} = -\frac{1}{3\mu} \left(\frac{d-4}{d-6} \right) \left(\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 + 3\mu \frac{(d-6)(d-2)}{(d-4)^2}} \right), \quad (7.5.3)$$

os zeros da função β sempre são zeros de $\frac{dc(\sigma)}{dl}$, mas o inverso não é verdadeiro.

É fácil perceber que todas as condições procuradas são satisfeitas se ($f_k = f_{IV}$ ou f_{UV}):

$$H(f_k; l) \equiv \left(1 - \frac{f_k}{f_+^h} \right) \left(1 - \frac{f_k}{f_-^h} \right) > 0, \quad (7.5.4)$$

$$C_0(f_k; \lambda) = \left(1 - \frac{f_k}{f_+^{top}} \right) \left(1 - \frac{f_k}{f_-^{top}} \right) > 0, \quad (7.5.5)$$

$$a_0(f_k; \lambda) = \left(1 - \frac{f_k}{f_+^a} \right) \left(1 - \frac{f_k}{f_-^a} \right) > 0 \quad (7.5.6)$$

$$\bar{C}'(f_k; \lambda) \equiv \left(1 - \frac{f_k}{f_+^{c'}} \right) \left(1 - \frac{f_k}{f_-^{c'}} \right) > 0, \quad (7.5.7)$$

pois garantem respectivamente $h_k > 0$, $c_k > 0$, $a_k > 0$ e $\frac{dc}{dl} < 0$,[§].

Os números f_{\pm}^{η} , $\eta = h, top, a, c'$ (ver eqs. (7.1.10), (7.2.5), (7.2.9) e (7.5.3)) nem sempre são

[§]ver mais detalhes do porquê das restrições aplicadas aos pontos fixos garantirem as mesmas ao longo de todo o fluxo no capítulo anterior.

reais, quando complexos sempre são da forma: $(f_+^\eta)^* = f_-^\eta$.

A fotorização das eqs. (7.5.4)-(7.5.7) em termos das quantidades f_\pm^η serve para ajudar na análise de seus sinais. Em todos os casos temos

$$\left(1 - \frac{f_k}{f_+^\eta}\right) \left(1 - \frac{f_k}{f_-^\eta}\right), \quad (7.5.8)$$

portanto quando o produto acima é positivo para todos os η 's o teorema é satisfeito. Existem quatro situações distintas (para cada η): (i) $f_+^\eta > 0$, $f_-^\eta < 0$; (ii) $0 < f_+^\eta < f_-^\eta$; (iii) $f_\pm^\eta < 0$; (iv) $f_\pm^\eta \in \mathbb{C}$, $(f_+^\eta)^* = f_-^\eta$.

Para (i) a eq. (7.5.8) será positiva somente se a primeiro termo do produto for positivo, ou seja

$$\frac{f_k}{f_+^\eta} < 1 \Rightarrow L_{IV}^2 > L_{\eta,+}^2, \quad (7.5.9)$$

pois $f_{IV} > f_{UV}$. O resultado determina uma escala mínima ao modelo. Toda nossa análise assume um fluxo $UV \rightarrow IR$, porém o resultado acima pode ser estendido para um fluxo $UV \rightarrow \text{Sing. nua}$, basta tomar o limite $L_{IV}^2 \rightarrow 0$, *i.e.* $f_{IV} \rightarrow \infty$. Neste caso a desigualdade encontrada no caso (i) nunca será satisfeita, ela invalida fluxos massivos. De certa forma a condição (i) funciona como um sensor cósmico ao descartar singularidades *nuas*.

No caso (ii) a eq. (7.5.8) é positiva quando os dois termos do produto possuem o mesmo sinal - ou ambos positivos ou ambos negativos. Os dois são positivos somente se:

$$f_{IV} < f_+^\eta \Rightarrow L_{IV}^2 > L_{\eta,+}^2, \quad (7.5.10)$$

novamente tem-se uma escala mínima. E ambos são negativos se:

$$f_{UV} > f_-^\eta \Rightarrow L_{UV}^2 < L_{\eta,-}^2, \quad (7.5.11)$$

criando uma escala máximo ao modelo ($L_{UV}^2 > L_{IV}^2$). Agora é permitido um fluxo massivo $UV \rightarrow \text{Sing. nua}$ - $f_-^\eta < f_{UV} < f_{IV} \rightarrow \infty$.

Nos casos (iii) e (iv) a eq. (7.5.8) é automaticamente positiva não criando nenhum tipo de restrição. No fim uma interseção entre os quatro valores possíveis de η deve ser feita para determinar as condições de validade do teorema.

Devido a alguns números f_\pm^η dependerem explicitamente de d , a análise será dividida em duas partes: (i) $d = 5$ e (ii) $d \geq 7$. Também é necessário separar o estudo dos dois modelos $\mu_{(1,2)}$.

7.5.1.1 (i) caso $d = 5$

1. Modelo μ_1 : Pelas figuras 7.8(a)-7.8(c) vemos que no intervalo $-\infty < l < \frac{5}{27}$ apenas f_+^{top} e f_+^h são positivos, f^{top} e f^h são exemplos do caso (i) e sem nenhuma restrição $a(\sigma) > 0$ e $\frac{dc(\sigma)}{dl} < 0$. Já entre $\frac{5}{27} < l < -9 + \frac{16}{\sqrt{3}}$,

$$f_-^h < f_-^{top} < 0 < f_+^a < f_-^{top} \dots < f_+^h, \text{ ou} \quad (7.5.12)$$

$$f_-^h < f_-^{top} < 0 < f_+^a < \dots < f_-^a, \quad (7.5.13)$$

entre $-9 + \frac{16}{\sqrt{3}} < l < \frac{1}{4}$

$$f_-^h < f_-^{top} < 0 < f_+^a < \dots < f_-^a, \quad (7.5.14)$$

entre $\frac{1}{4} < l < \frac{8}{27}$

$$f_-^{c'} < f_-^a < 0 < f_+^a < \dots < f_-^h. \quad (7.5.15)$$

e em $\frac{8}{27} < l < \frac{1}{3}$

$$f_-^{c'} < f_-^a < 0 < f_+^a < \dots < f_-^{top}. \quad (7.5.16)$$

Os ... representam valores intermediários de f_{\pm}^{η} não importantes para os nossos resultados[¶]. Abastecidos com esses dados podemos formular:

Teorema a & c: As desigualdades (7.5.4)-(7.5.7) são todas satisfeitas se e somente se:

$$\bullet \quad -\infty < \lambda < \frac{5}{27} : f_{IV} < f_+^{top}(\lambda; \mu_1), \quad (7.5.17)$$

$$\bullet \quad \frac{5}{27} < \lambda < \frac{1}{3} : f_{IV} < f_+^a(\lambda; \mu_1). \quad (7.5.18)$$

As condições do teorema definem escalas mínimas para o modelo, excluindo a possibilidade de singularidades nuas - fluxos massivos. Esta é uma particularidade da dimensão $d = 5$, para $d \geq 7$, como será visto, sempre há intervalos em que os fluxos massivos satisfazem todas as condições físicas.

2. Modelo μ_2 : Nas figuras 7.4(a) e 7.4(b) são encontradas as curvas de todos os $f_{\pm}^{\eta}(\mu_2; \lambda)$.

[¶]eles podem até mudar de ordem para diferentes valores de l

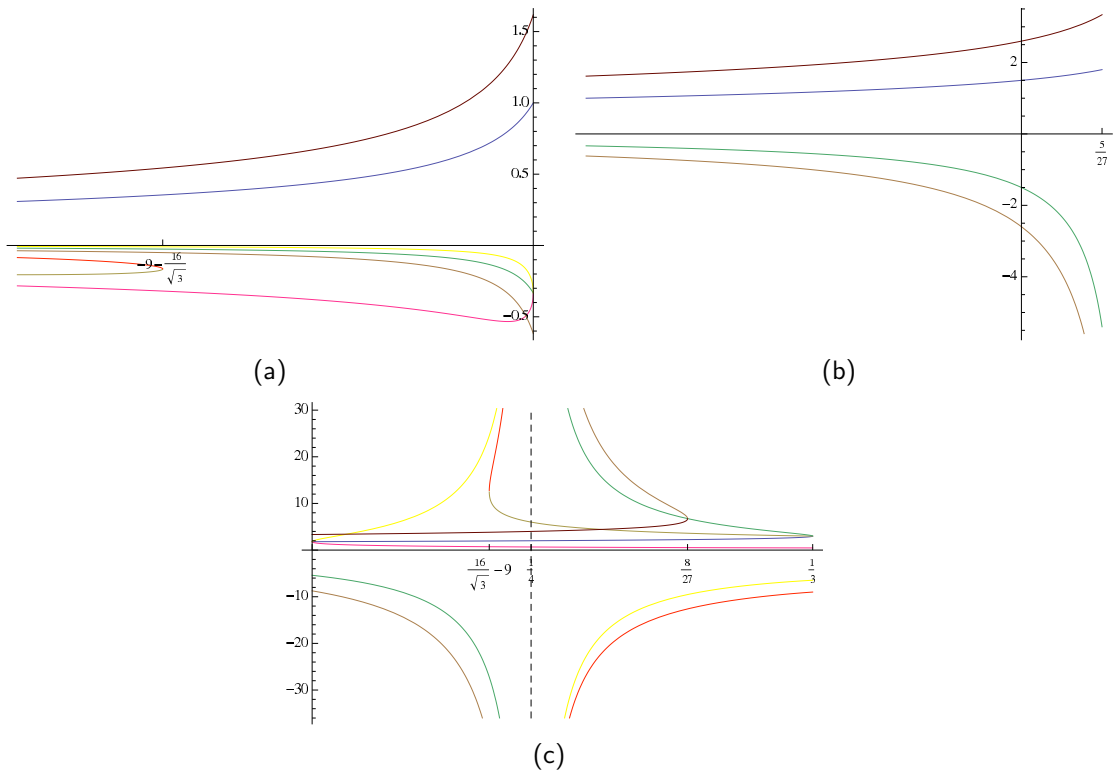


Figura 7.3 – Nas figuras acima encontram-se as curvas $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_1)$ para $d = 5$. A curva azul corresponde a f_+^{top} , a rosa a f_+^a , a bege a $f_+^{c'}$, a marrom escuro a f_+^h , a verde a f_-^{top} , a amarela a f_-^a , a vermelha a $f_-^{c'}$ e a marrom clara a f_-^h . Na figura (a) tem-se $\lambda < -1$ e a origem dos eixos é o ponto $(-1, 0)$, na figura (b) tem-se o intervalo $-1 < \lambda < 5/27$ e a origem dos eixos é o ponto $(0, 0)$ e na figura (c), cuja origem dos eixos está no ponto $(5/27, 0)$ estão as curvas no intervalo $5/27 < \lambda < 1/3$.

Quando $\lambda < 0$ - ver figura 7.4(a)

$$f_+^h < f_+^{top} < \dots < 0 < f_+^a < f_+^{c'}, \tag{7.5.19}$$

$$\tag{7.5.20}$$

já para $0 < \lambda < \frac{1}{3}$ - ver figura 7.4(b)

$$f_-^{c'} < f_-^a < 0 < f_+^a < \dots < f_-^{top}. \tag{7.5.21}$$

O Teorema a & c agora é:

- $-\infty < \lambda < \frac{1}{3} : f_{IV} < f_+^a(\lambda; \mu_2).$ (7.5.22)

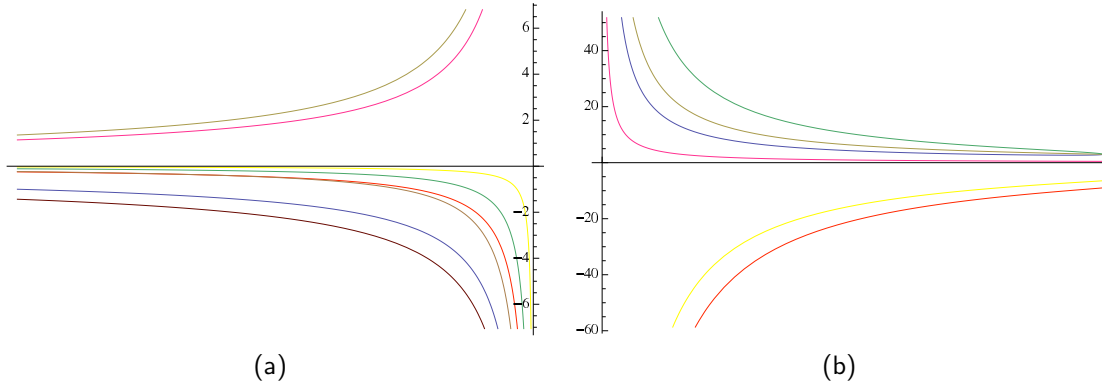


Figura 7.4 – Nas figuras acima encontram-se as curvas $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_2)$ para $d = 5$. A curva azul corresponde a f_+^{top} , a rosa a f_+^a , a bege a $f_+^{c'}$, a marrom escuro a f_+^h , a verde a f_-^{top} , a amarela a f_-^a , a vermelha a $f_-^{c'}$ e a marrom clara a f_-^h . Na figura (a) tem-se $\lambda < 0$ e na (b) $\lambda > 0$.

7.5.1.2 (ii) Caso $d \geq 7$

Neste caso, ao contrário de $d = 5$, o fator $\left(\frac{d-2}{d-6}\right)$ (aparece multiplicando ou dividindo μ em $a(\sigma)$ e $\frac{dc(\sigma)}{d\sigma}$) é positivo. Uma conclusão imediata é que para λ e μ negativos - modelo μ_2 com $\lambda < 0$ - as funções $c(\sigma)$, $a(\sigma)$ e $-\frac{dc(\sigma)}{d\sigma}$ são positivas para qualquer $W(\sigma)$ facilitando o estudo.

1. Modelo μ_1 : As funções $f_{\pm}^{c'}$ são sempre reais ($\lambda < 1/3$) e as f_{\pm}^a são reais apenas para $\lambda < \frac{d(d-4)}{3(d-2)^2} < \frac{1}{3}$. Nas figuras 7.5(a) e 7.5(b) temos todas as curvas $f_{\pm}^{\eta}(\lambda, \mu_1)$ como função de λ (foi escolhido $d = 7$, mas as conclusões são gerais). Analisando as figuras tem-se:

$$\bullet \quad -\infty < \lambda < \frac{1}{4} : f_{\eta}^{-} < 0 \text{ e } 0 < f_+^a < f_+^{top} < \dots, \quad (7.5.23)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{4} < \lambda < \frac{d(d-4)}{3(d-2)^2} : 0 < f_+^a < f_+^{top} < \dots < f_-^{c'}; \quad (7.5.24)$$

$$\bullet \quad \frac{d(d-4)}{3(d-2)^2} < \lambda < \frac{1}{3} : 0 < f_+^{top} < f_+^{c'} < \dots < f_-^{c'}. \quad (7.5.25)$$

E o teorema *a & c* é formulado como:

$$\bullet \quad -\infty < \lambda < \frac{1}{4} : f_{IV} < f_+^a(\lambda; \mu_1), \quad (7.5.26)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{4} < \lambda < \frac{d(d-4)}{3(d-2)^2} : f_{IV} < f_+^a(\lambda; \mu_1) \text{ ou } f_{UV} > f_-^{c'}(\lambda; \mu_1), \quad (7.5.27)$$

$$\bullet \quad \frac{d(d-4)}{3(d-2)^2} < \lambda < \frac{1}{3} : f_{IV}^2 < f_+^{top}(\lambda; \mu_1) \text{ ou } f_{UV} > f_-^{c'}(\lambda; \mu_1). \quad (7.5.28)$$

2. Modelo μ_2 : Como já foi mencionado, se $\lambda < 0$ o teorema é satisfeito. Na região

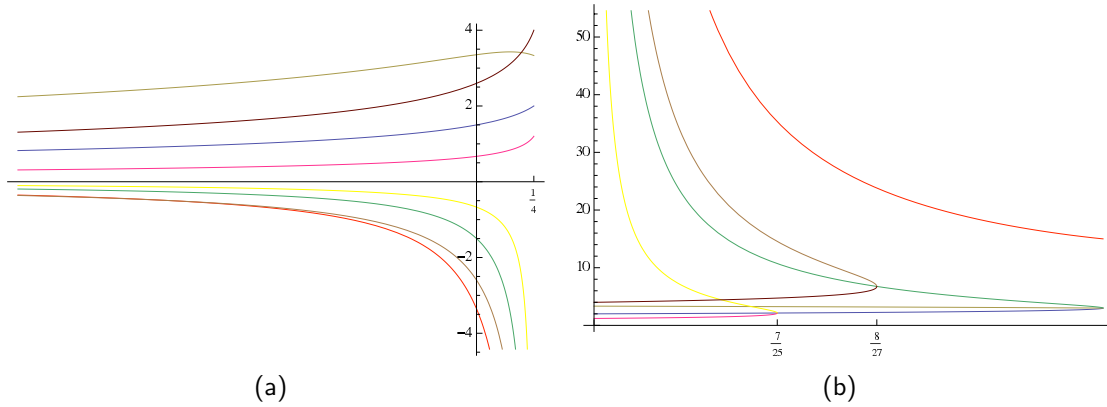


Figura 7.5 – Nas figuras acima encontram-se as curvas $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_1)$ para $d = 7$ (qualitativamente a escolha de d não afeta os resultados finais). A curva azul corresponde a f_+^{top} , a rosa a f_+^a , a bege a $f_+^{c'}$, a marrom escuro a f_+^h , a verde a f_-^{top} , a amarela a f_-^a , a vermelha a $f_-^{c'}$ e a marrom clara a f_-^h . Na figura (a) tem-se $\lambda < \frac{1}{4}$ e na (b) $\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{3}$ (origem dos eixos está no ponto $(1/4, 0)$). O ponto $\lambda = \frac{7}{25} = \frac{d(d-4)}{3(d-2)^2}$, marcado no gráfico, determina o fim das curvas f_{\pm}^a .

$0 < \lambda < \frac{1}{3}$ f_{\pm}^h são imaginários. Outro fato digno de nota é que mais uma subdivisão dos casos é necessária em termos dos valores de d .

Caso $d = 7, 8$: Para $d = 7$ os f_{\pm}^a são imaginários em todo o intervalo, logo $a(\sigma) > 0$. Já para $d = 8$ eles são negativos para $\lambda < 0$ e imaginários na região $0 < \lambda < 1/3$ - novamente $a(\sigma) > 0$ sempre. Como os outros f_{\pm}^{η} são negativos para $\lambda < 0$ - o teorema é automaticamente satisfeito, só falta analisar $0 < \lambda < \frac{1}{3}$. Pela figura 7.6, feita sem perda de generalidade para $d = 7$, tem-se:

$$0 < f_+^{top} < f_+^{c'} < f_-^{top} < f_-^{c'}. \quad (7.5.29)$$

O teorema $a \& c$ fica:

$$\bullet f_{IV} < f_+^{top}(\lambda; \mu_2) \text{ ou } f_{UV}^2 > f_-^{c'}(\lambda; \mu_2). \quad (7.5.30)$$

Caso $d \geq 9$: Aqui f_{\pm}^a são negativos quando $\lambda < 0$ e imaginários na região $0 < \frac{1}{3} - \frac{d}{d(d-6)^2} \equiv \lambda_*^a < \lambda < \frac{1}{3}$, logo $a(\sigma) > 0$ nesses dois casos. Porém existe a janela $0 < \lambda < \lambda_*^a$ em que $0 < f_+^a < f_-^a$ e a positividade de $a(\sigma)$ não é mais trivial - caso (ii). Na figura 7.7 estão as curvas de f_{\pm}^{η} no intervalo $0 < \lambda < 1/3$ - a figura foi feita para $d = 9$, mas não há perda de generalidade. No intervalo $\lambda_*^a < \lambda < 1/3$ o ordenamento dos f_{\pm}^{η} são os mesmos da eq.

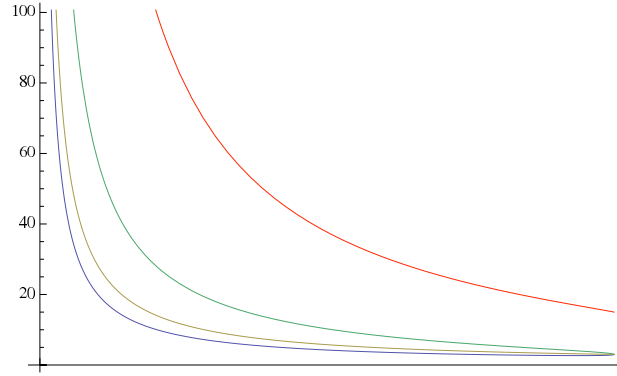


Figura 7.6 – Na figura encontram-se as curvas $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_2)$ para $d = 7$ no intervalo $0 < \lambda < \frac{1}{3}$. A curva azul corresponde a f_+^{top} , a bege a $f_+^{c'}$, a verde a f_-^{top} e a vermelha a $f_-^{c'}$.

(7.5.29) (f_{\pm}^a são imaginários) e como consequência as condições para o teorema ser satisfeito são as mesmas dadas pela eq. (7.5.30). Por outro lado, na região $0 < \lambda < \lambda_*^a$ o ordenamento se torna (ver a figura 7.7):

$$0 < f_+^a < \dots < f_-^{c'}, \quad (7.5.31)$$

e o **teorema a & c** é:

$$\bullet f_{IV} < f_+^a(\lambda; \mu_2) \text{ ou } f_{UV} > f_-^{c'}(\lambda; \mu_2), \quad (7.5.32)$$

i.e. uma restrição (a de escala mínima) não permite fluxos massivos, enquanto a outra (a de escala máxima) permite.

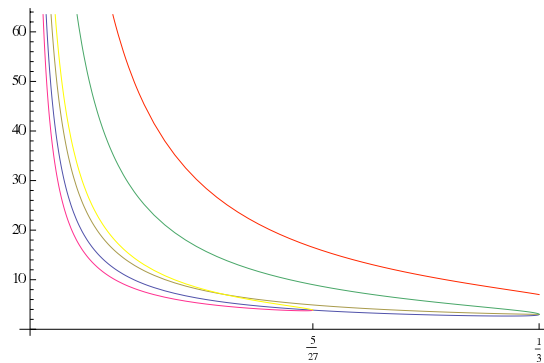


Figura 7.7 – Na figura acima encontram-se as curvas $f_{\pm}^{\eta}(\lambda; \mu_2)$ para $d = 9$ (qualitativamente a escolha de d não afeta os resultados) $\rightarrow \lambda_*^a(d = 9) = \frac{5}{27}$ - ponto destacado na figura. A curva azul corresponde a f_+^{top} , a rosa a f_+^a , a bege a $f_+^{c'}$, a verde a f_-^{top} , a amarela a f_-^a e a vermelha a $f_-^{c'}$.

7.5.2 Positividade da energia nos pontos fixos

Os estudos acerca de teorias holográficas utilizando a GQT em $d = 5$ dimensões (7) demonstram que as CFT_4 's duais^{||} têm $t_4 \neq 0$:

$$\begin{aligned} t_4(f) &= \frac{3780\mu f^2}{1 - 2\lambda - 3\mu f^2}, \quad f = f_{UV/IV}, \\ t_2(f) &= \frac{24f(\lambda - 87\mu f)}{1 - 2\lambda f - 3\mu f^2}. \end{aligned} \quad (7.5.33)$$

Ao serem aplicadas as condições de FEP, eqs. (3.4.8)-(3.4.10), torna-se fácil verificar que elas só serão verdadeiras se as três desigualdades

$$1 - 10\lambda f + 189\mu f^2 \geq 0, \quad (7.5.34)$$

$$1 + 2\lambda f - 855\mu f^2 \geq 0, \quad (7.5.35)$$

$$1 + 6\lambda f + 1317\mu f^2 \geq 0, \quad (7.5.36)$$

forem satisfeitas simultaneamente.

Primeiro vamos reescrevê-las da seguinte forma:

$$\left(1 - \frac{f}{f_+^{ep,1}}\right) \left(1 - \frac{f}{f_-^{ep,1}}\right) \geq 0, \quad (7.5.37)$$

$$\left(1 - \frac{f}{f_+^{ep,2}}\right) \left(1 - \frac{f}{f_-^{ep,2}}\right) \geq 0, \quad (7.5.38)$$

$$\left(1 - \frac{f}{f_+^{ep,3}}\right) \left(1 - \frac{f}{f_-^{ep,3}}\right) \geq 0, \quad (7.5.39)$$

onde

$$f_{\pm}^{ep,1} = \frac{5}{189\mu} \left(\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - \frac{189}{25}\mu} \right), \quad (7.5.40)$$

$$f_{\pm}^{ep,2} = \frac{1}{855\mu} \left(\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 + 855\mu} \right), \quad (7.5.41)$$

$$f_{\pm}^{ep,3} = -\frac{3}{439\mu} \left(\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - \frac{439}{3}\mu} \right). \quad (7.5.42)$$

Agora devemos olhar separadamente os dois modelos.

7.5.2.1 Modelo μ_1

Nas figuras 7.8(a)-7.9(c) estão as curvas de $f_{\pm}^{ep,i}$, $i = 1, 2, 3$, como funções de λ no modelo μ_1 . Como pode ser visto nas mesmas, os números $f_{\pm}^{ep,i}$ são muito sensíveis ao valor de λ . Por

^{||}i.e. os pontos críticos

intervalo de λ	ordenamento dos f 's
$-\infty < \lambda < -3520.09$	$f_+^{ep,1} < f_+^{ep,2} < f_-^{ep,1} < 0 < f_-^{ep,3} < f_-^{ep,2} < f_+^{ep,3}$
$-3520.09 < \lambda < -3270.17$	$f_+^{ep,1} < f_+^{ep,2} < f_-^{ep,1} < 0 < f_-^{ep,2} < f_-^{ep,3} < f_+^{ep,3}$
$-3270.17 < \lambda < -25.9505$	$f_+^{ep,1} < f_+^{ep,2} < f_-^{ep,1} < 0 < f_-^{ep,2}$
$-25.9505 < \lambda < -13.7427$	$f_+^{ep,1} < f_-^{ep,1} < f_+^{ep,2} < 0 < f_-^{ep,2}$
$-13.7427 < \lambda < 0.235528$	$f_+^{ep,2} < 0 < f_-^{ep,2}$
$0.239759 < \lambda < 0.249152$	$f_+^{ep,2} < 0 < f_+^{ep,1} < f_-^{ep,2} < f_-^{ep,1}$
$0.249152 < \lambda < 1/4$	$f_-^{ep,3} < f_+^{ep,2} < f_+^{ep,3} < 0 < f_+^{ep,1} < f_-^{ep,2} < f_-^{ep,1}$
$1/4 < \lambda < 0.250146$	$f_-^{ep,1} < f_-^{ep,2} < f_+^{ep,2} < f_+^{ep,3} < 0 < f_+^{ep,1} < f_-^{ep,3}$
$0.250146 < \lambda < 0.278864$	$f_-^{ep,1} < f_+^{ep,3} < 0 < f_+^{ep,1} < f_-^{ep,3}$
$0.278864 < \lambda < 1/3$	$f_-^{ep,1} < f_+^{ep,3} < 0 < f_-^{ep,3} < f_+^{ep,1}$

Tabela 7.1—Ordenamento dos f 's dado o intervalo de λ .

exemplo, $f_{\pm}^{ep,1} \in \mathbb{R}$ apenas nos intervalos $-\infty < \lambda < -13.7427$ e $0.235528 < \lambda < 1/3$; o mesmo ocorre para $f_{\pm}^{ep,2}$ no intervalo $-\infty < \lambda < 0.250146$; já $f_{\pm}^{ep,3}$ são reais em $-\infty < \lambda < -3270, 17$ e $0.249152 < \lambda < 1/3$. Ainda de acordo com as figuras, os ordenamentos dos $f_{\pm}^{ep,i}$ são os mostrados na tabela 7.1.

Um ponto importante a ser ressaltado (que não ocorre no teorema *a & c*) é o das curvas se cruzarem em certos pontos (todos indicados nas figuras 7.8(a)-7.9(c)). Na verdade são esses os pontos “críticos” que determinam as diferentes restrições a serem impostas sobre f_{IV} para (7.5.34)-(7.5.36) serem verdadeiras.

Através dos dados fornecidos pela tabela 7.1, as restrições procuradas são:

$$\bullet \quad -\infty < \lambda < -3520.09 : \quad f_{IV} < f_-^{ep,3}, \quad (7.5.43)$$

$$\bullet \quad -3520.09 < \lambda < 0.239759 : \quad f_{IV} < f_-^{ep,2}, \quad (7.5.44)$$

$$\bullet \quad 0.239759 < \lambda < 0.278864 : \quad f_{IV} < f_+^{ep,1}, \quad (7.5.45)$$

$$\bullet \quad 0.278864 < \lambda < 1/3 : \quad f_{IV} < f_-^{ep,3}. \quad (7.5.46)$$

Pode ser visto que as novas restrições são sempre mais “fortes” do que as encontradas pelos teoremas *a & c*, impondo sempre uma escala mínima ao vácuo AdS_{IV} nos fluxos não massivos. Caso o fluxo seja massivo $UV \rightarrow Sing.$ nua, f_{IV} em (7.5.43)-(7.5.46) deve ser trocado por f_{UV} - há um valor mínimo para a escala do vácuo AdS_{UV} .

7.5.2.2 Modelo μ_2

Ao olhar a figura 7.10 podemos perceber a ausência das curvas $f_{\pm}^{ep,2}$ (uma vez que são números complexos) e também o seguinte ordenamento $\forall \lambda < 1/3$:

$$f_-^{ep,1} < f_+^{ep,3} < 0 < f_-^{ep,3} < f_+^{ep,1}, \quad (7.5.47)$$

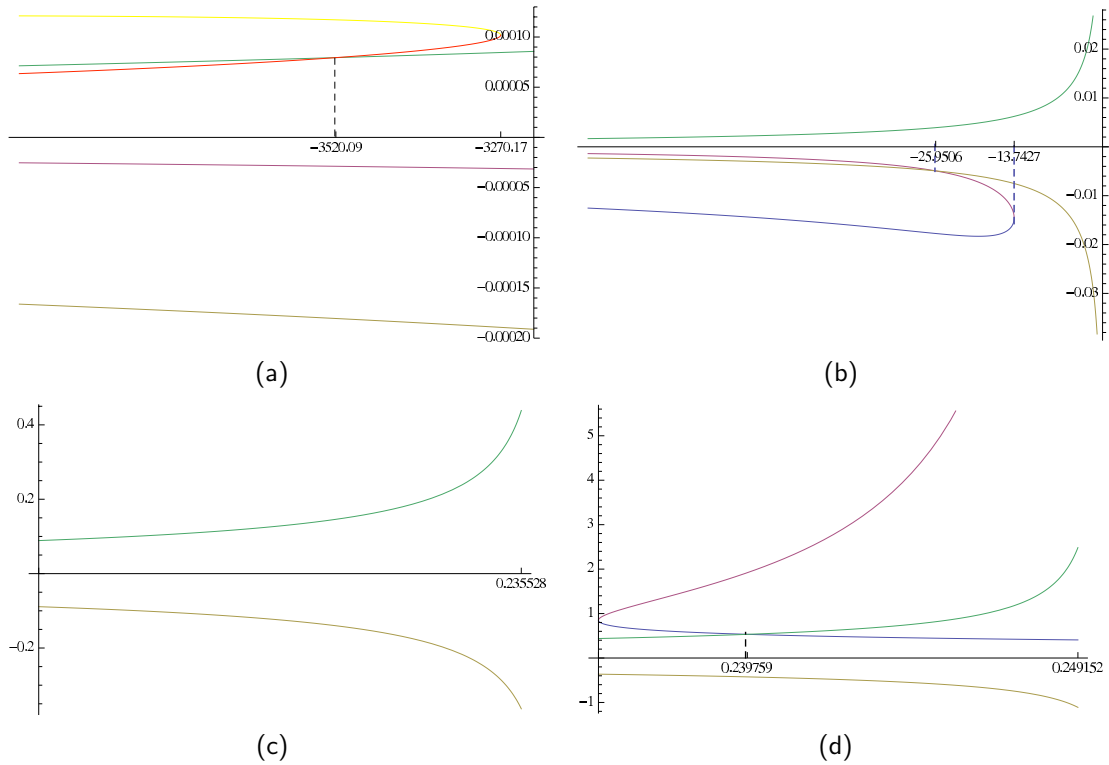


Figura 7.8 – Nas figuras acima temos as curvas de $f_{\pm}^{ep,i}(\lambda; \mu_1)$. As em azul correspondem à $f_+^{ep,1}$, as roxas à $f_-^{ep,1}$, as beges à $f_+^{ep,2}$, as verdes à $f_-^{ep,2}$, as amarelas à $f_+^{ep,3}$ e as vermelhas à $f_-^{ep,3}$. O intervalo de λ em cada figura é: (a) $-\infty < \lambda < -3270.17$ (a curva $f_+^{ep,1}$ não aparece, pois é muito negativa, *i.e.* $f_+^{ep,1} < f_+^{ep,2} < 0$); (b) $-3270.17 < \lambda < 0$; (c) $0 < \lambda < 0.235528$; (d) $0.235528 < \lambda < 0.249152$.

as três desigualdades são satisfeitas quando:

$$f < f_-^{ep,3}, \quad \forall \lambda < 1/3. \quad (7.5.48)$$

Pode ser visto que $f_-^{ep,3} < f_+^a$, assim a nova condição (mais restritiva) garante o teorema *a & c*. Os $f_{\pm}^{pe,i}$ não são bem definidos em $\lambda = 0 \rightarrow \mu_2 = 0$. Logo esse valor corresponde ao caso EH e as eqs. (7.5.34)-(7.5.36) são trivialmente satisfeitas.

7.6 Resultados no modelo da GQT através de GB

Calcular o fator de escala como função do campo escalar em exemplos explícitos não é uma tarefa fácil no caso GB, ver capítulo anterior, assim é de se esperar que no caso da GQT as dificuldades aumentem. Não é isso que ocorre, na verdade, em termos de cálculo de $e^{A(\sigma)}$, o modelo da GQT pode ser encarado como dois modelos de GB com diferentes escalas topológicas ($L_{top,\pm}^2$). Por trás desta propriedade marcante está o fato da função $C_0(W)$ se

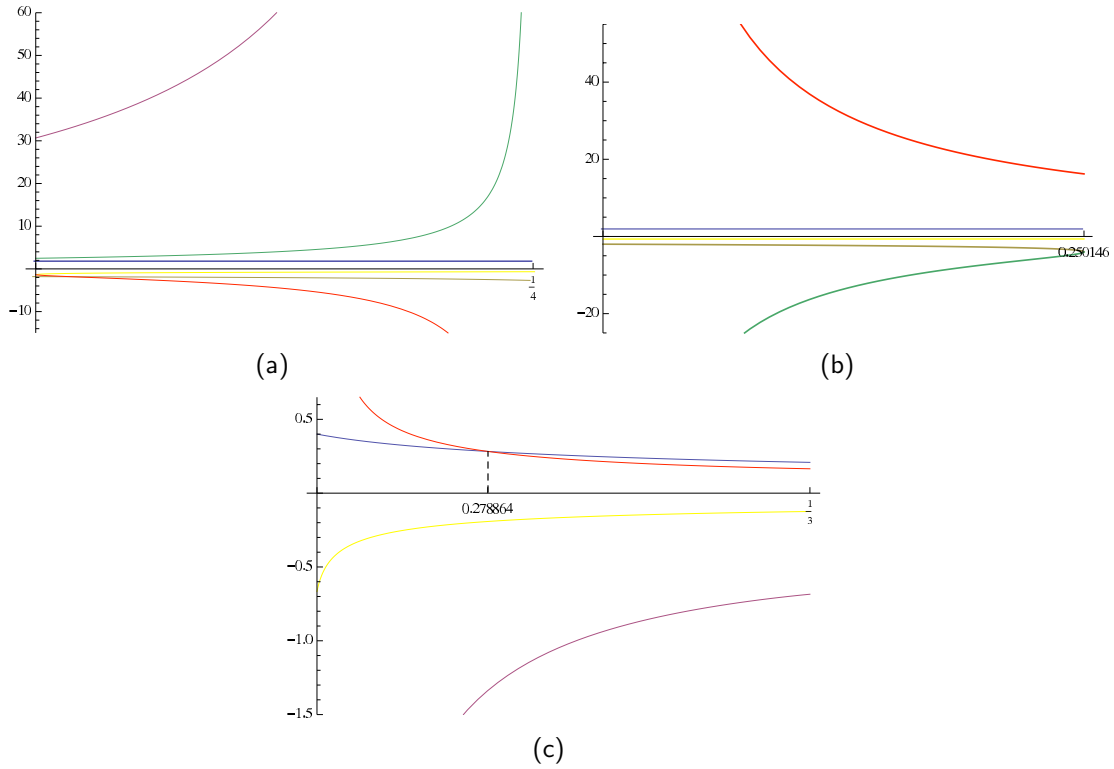


Figura 7.9 – Nas figuras acima temos as curvas de $f_{\pm}^{ep,i}(\lambda; \mu_1)$. As em azul correspondem à $f_{+}^{ep,1}$, as roxas à $f_{-}^{ep,1}$, as beges à $f_{+}^{ep,2}$, as verdes à $f_{-}^{ep,2}$, as amarelas à $f_{+}^{ep,3}$ e as vermelhas à $f_{-}^{ep,3}$. O intervalo de λ em cada figura é: (a) $0.249152 < \lambda < 1/4$; (b) $1/4 < \lambda < 0.250146$ (a curva $f_{-}^{ep,1}$ não aparece na figura, mas ela existe no intervalo e possui os valores mais negativos); (c) $0.250146 < \lambda < 1/3$.

fatorizar (ver eq. (7.2.10)).

Para demonstrar a afirmação feita comecemos integrando a eq. (7.4.4) (usando (7.2.10))

$$A(\sigma) - A_0 = -\frac{1}{2(d-2)} \int d\sigma \frac{W(\sigma)}{W'(\sigma) \left(1 - L_{top,+}^2 \frac{W(\sigma)^2}{(d-2)^2}\right) \left(1 - L_{top,-}^2 \frac{W(\sigma)^2}{(d-2)^2}\right)}, \quad (7.6.1)$$

$$\equiv \mathcal{T}(\sigma)_{GQT}$$

onde A_0 é a constante de integração. Repare que:

$$\frac{1}{\left(1 - L_{top,+}^2 \frac{W(\sigma)^2}{(d-2)^2}\right) \left(1 - L_{top,-}^2 \frac{W(\sigma)^2}{(d-2)^2}\right)} = \frac{L_{top,+}^2}{L_{top,+}^2 - L_{top,-}^2} \frac{1}{\left(1 - L_{top,+}^2 \frac{W(\sigma)^2}{(d-2)^2}\right)} + \frac{L_{top,-}^2}{L_{top,-}^2 - L_{top,+}^2} \frac{1}{\left(1 - L_{top,-}^2 \frac{W(\sigma)^2}{(d-2)^2}\right)}, \quad (7.6.2)$$

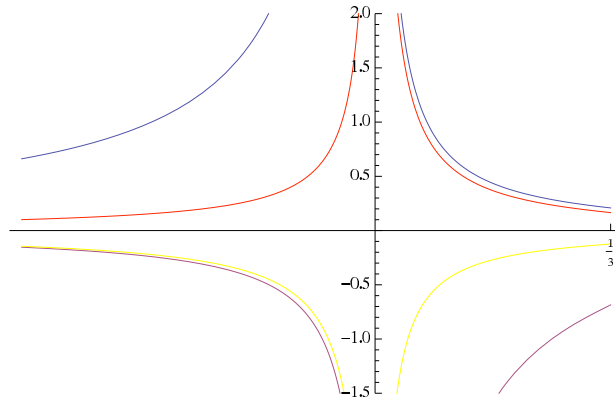


Figura 7.10 – Na figura acima temos as curvas de $f_{\pm}^{ep,i}(\lambda; \mu_2)$. A curva em azul corresponde à $f_{+}^{ep,1}$, a roxa à $f_{-}^{ep,1}$, a amarela à $f_{+}^{ep,3}$ e a vermelha à $f_{-}^{ep,3}$.

portanto:

$$A(\sigma) - A_0 = \frac{L_{top,+}^2}{L_{top,+}^2 - L_{top,-}^2} \mathcal{T}_{GB,+}(\sigma) + \frac{L_{top,-}^2}{L_{top,-}^2 - L_{top,+}^2} \mathcal{T}_{GB,-}(\sigma). \quad (7.6.3)$$

Ao resolver $A(\sigma)$ no caso GB ($\mathcal{T}_{L_{top,\pm}^2}$), automaticamente $A(\sigma)$ para QTG é conhecido através da relação acima. Todos os exemplos apresentados no capítulo anterior podem ser, através deste procedimento, transferidos para a GQT.

7.6.1 Mais relações

Os índices críticos - topológicos e físicos - da GQT também são obtidos diretamente dos resultados de GB - para um mesmo $W(\sigma)$. Basta a seguinte observação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_{fis}(GQT)} &= \frac{W_{fis}}{2(d-2)W_{fis}''} \frac{1}{\left(1 - \frac{L_{top,+}^2}{L_a^2}\right) \left(1 - \frac{L_{top,-}^2}{L_{fis}^2}\right)} \\ &= \frac{W_{fis}}{2(d-2)W_{fis}''} \left(\frac{L_{top,+}^2}{L_{top,+}^2 - L_{top,-}^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{L_{top,+}^2}{L_{fis}^2}\right)} + \frac{L_{top,-}^2}{L_{top,-}^2 - L_{top,+}^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{L_{top,-}^2}{L_{fis}^2}\right)} \right), \\ &= \frac{L_{top,+}^2}{L_{top,+}^2 - L_{top,-}^2} \frac{1}{s_{fis}(GB; L_{top,+}^2)} + \frac{L_{top,-}^2}{L_{top,-}^2 - L_{top,+}^2} \frac{1}{s_{fis}(GB; L_{top,-}^2)}, \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

devido a eq. (6.4.2). A notação adotada é: $s_{fis}(GQT)$ refere-se ao índice crítico do modelo da GQT; $s_{fis}(GB; L_{top,\pm}^2)$ refere-se ao índice crítico do modelo de GB com a escala topológica

dada por $L_{top,\pm}^2$. Para o índice crítico topológico:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_{top}^{\pm}(GQT)} &= -\frac{d-2}{4(W'_{top,\pm})^2 L_{top,\pm}^2} \frac{L_{top,\pm}^2}{(L_{top,\pm}^2 - L_{top,\mp}^2)} \\ &= \frac{L_{top,\pm}^2}{(L_{top,\pm}^2 - L_{top,\mp}^2)} \frac{1}{s_{top}(GB; L_{top,\pm}^2)}. \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

A importância desses resultados aparece quando a eq. (7.6.3) é usada. Por exemplo, ao calcular $\mathcal{T}_{L_{top,\pm}^2}$ no modelo GB para um $W(\sigma)$ com um vácuo físico em σ_{fis} , quando $\sigma \approx \sigma_{fis}$:

$$e^{\mathcal{T}_{GB,\pm}} \sim |\sigma - \sigma_{fis}|^{-\frac{1}{s_{fis}(GB; L_{top,\pm}^2)}}, \quad (7.6.6)$$

como consequência no modelo da GQT, para o mesmo $W(\sigma)$, via eq. (7.6.3) tem-se:

$$e^{\mathcal{T}_{GQT}(\sigma)} \sim |\sigma - \sigma_{fis}|^{-\frac{1}{s_{fis}(GB; L_{top,+}^2)} \frac{L_{top,+}^2}{L_{top,+}^2 - L_{top,-}^2} + \frac{1}{s_{fis}(GB; L_{top,-}^2)} \frac{L_{top,-}^2}{L_{top,-}^2 - L_{top,+}^2}} \quad (7.6.7)$$

$$= |\sigma - \sigma_{fis}|^{-\frac{1}{s_{fis}(GQT)}}, \quad (7.6.8)$$

devido a eq. (7.6.4). As duas partes contribuem para formar o índice crítico final. Algo semelhante ocorre nas proximidades de um vácuo topológico, entretanto toda a contribuição vem de apenas um dos termos (o que possui o vácuo topológico em questão). Por exemplo nas proximidades de $\sigma = \sigma_{top,+}$, a eq. (7.6.5) fornece

$$e^{\mathcal{T}_{GQT}} \sim |\sigma - \sigma_{top,+}|^{-\frac{L_{top,+}^2}{L_{top,+}^2 - L_{top,-}^2} \frac{1}{s_{top}(GB; L_{top,+}^2)}} = |\sigma - \sigma_{top,+}|^{-\frac{1}{s_{top}^+(GQT)}}. \quad (7.6.9)$$

Uma vez conhecido o fator de escala como função de σ no caso GB, os resultados na GQT (para um mesmo $W(\sigma)$) são obtidos através do raciocínio apresentado ao longo desta seção. É claro que no âmbito das flutuações lineares essa transferência de resultados não é trivial, mas o processo de separar os cálculos da GQT como dois modelos de GB parece fornecer o caminho para os cálculos em uma eventual generalização da GQT que comporte mais termos na ação.

7.6.2 Uma generalização hipotética

Motivados pelos resultados das últimas seções podemos conjecturar que ao acrescentar termos de ordem maior na curvatura, por exemplo até a $n + 1$ -ésima ordem com o critério de termos eqs. de segunda ordem para a métrica de PD, então talvez tenhamos o seguinte

sistema de primeira ordem junto com a função *beta* holográfica:

$$\dot{A} = -\frac{W}{d-2}, \quad \dot{\sigma} = 2W'(\sigma)C_0(W) \quad (7.6.10)$$

$$-\beta(\sigma) = \frac{d\sigma}{d(-A)} = 2(d-2)\frac{W'(\sigma)}{W(\sigma)}C_0(W), \quad (7.6.11)$$

$$C_0(W) = \prod_{i=1}^n \left(1 - L_{top,i}^2 \frac{W^2}{(d-2)^2}\right), \quad (7.6.12)$$

sendo a conjectura verdadeira, o procedimento de separar a integração da função *beta* em n modelos de GB pode ser feito.

Um caso interessante é o limite $n \rightarrow \infty$ junto com a relação $L_{top,i}^2 = \frac{L^2}{(i-1/2)^2}$. A função $C_0(W)$ fica:

$$C_0(W) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(i-1/2)^2\pi^2} \frac{\pi^2 L^2 W^2}{(d-2)^2}\right) = \cos\left(\frac{\pi LW}{d-2}\right). \quad (7.6.13)$$

O exemplo acima é apenas para ilustrar que o modelo da GQT pode ser parte de uma série de infinitos termos na ação e mesmo assim a soma de todos eles (com bastante sorte) pode resultar em algo simples.

Extensão dos resultados para N campos escalares

Os resultados apresentados até agora para um campo escalar podem ser facilmente generalizados para um conjunto $\{\sigma^I; I = 1, \dots, N\}$, basta a troca formal na parte da ação referente a matéria:

$$S_\sigma = - \int d^d x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \sigma \partial^\nu \sigma + V(\sigma) \right) \rightarrow - \int d^d x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} \mathcal{G}_{IJ} g_{\mu\nu} \partial^\mu \sigma^I \partial^\nu \sigma^J + V(\sigma^I) \right),$$

onde $\mathcal{G}_{IJ} = \mathcal{G}_{JI}(\sigma^K)$ são elementos da matriz \mathcal{G} com $\det \mathcal{G} > 0$. A única eq. que sofre uma mudança não trivial - mesmo não sendo importante para a construção do "superpotencial" - é a da variação de σ

$$\ddot{\sigma}^I + (d-1)\dot{A}\dot{\sigma}^I + \mathcal{G}^{IL}\partial_K \mathcal{G}_{LJ}\dot{\sigma}^K\dot{\sigma}^J - \mathcal{G}^{IL}\partial_L \mathcal{G}_{JK}\dot{\sigma}^J\dot{\sigma}^K = \mathcal{G}^{IL}\partial_L V, \quad (8.0.1)$$

$$\mathcal{G}^{IJ} = \mathcal{G}_{IJ}^{-1}. \quad (8.0.2)$$

Nas outras eqs. basta trocar $\dot{\sigma}^2 \rightarrow \mathcal{G}_{IJ}(\sigma)\dot{\sigma}^I\dot{\sigma}^J$. No fim, ao repetir os mesmos passos feitos no caso de um campo surge*:

$$\mathcal{G}_{IJ}(\sigma^P)\dot{\sigma}^I\dot{\sigma}^J = -2(d-2)\ddot{A} \left(1 + \frac{(d-2)(d-4)}{2m^2} \dot{A}^2 + \mu \frac{3(d-2)(d-6)}{m^4} \dot{A}^4 \right), \quad (8.0.3)$$

definindo

$$\dot{A} = -\frac{1}{(d-2)} W(\sigma^P), \quad (8.0.4)$$

$$\Rightarrow \ddot{A} = -\frac{1}{(d-2)} \dot{\sigma}^L \partial_L W(\sigma^P), \quad (8.0.5)$$

e substituindo em (8.0.3):

$$\dot{\sigma}^I (\mathcal{G}_{IJ}(\sigma^P)\dot{\sigma}^J - 2\partial_I W(\sigma^P)C_0(W)) = 0. \quad (8.0.6)$$

*para ver mais detalhes acerca do caso EH, ver (4)

O conjunto $\{\sigma^I, I = 1, \dots, N\}$ forma uma base de um espaço vetorial N -dimensional, ou seja, eles são vetores *l.i.* É natural assumir o mesmo para o conjunto de suas primeiras derivadas (“momentos”), com isso a última eq. pode ser encarada como a representação de um vetor nulo em termos de uma combinação linear de vetores *l.i.* Cada termo da soma dentro dos parênteses deve ser nulo o que implica em:

$$\dot{\sigma}^I = 2\mathcal{G}^{IJ}(\sigma^P)\partial_J W(\sigma^P)C_0(W). \quad (8.0.7)$$

Por fim, a relação entre o potencial V e o superpotencial W é:

$$V(\sigma^P) = 2\mathcal{G}^{IJ}(\partial_I W)(\partial_J W)C_0^2(W) - \left(\frac{d-1}{d-2}\right)W^2 \left(1 - \lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2} - \mu L^4 \frac{W^4}{(d-2)^4}\right) \quad (8.0.8)$$

$$C_0(W) = 1 - 2\lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2} - 3\mu L^4 \frac{W^4}{(d-2)^4}, \quad (8.0.9)$$

repare que C_0 não muda, logo a função carga central c também não é alterada. O mesmo ocorre com a função carga central a .

8.1 Função beta e vácuos

Há N funções β^I , dadas por:

$$\frac{d\sigma^I}{dl} = -\beta^I(\sigma^P) = 2(d-2)\mathcal{G}^{IJ}(\sigma^P)\frac{\partial_J W(\sigma^P)}{W(\sigma^P)}C_0(W). \quad (8.1.1)$$

Um ponto crítico é determinado pelos zeros simultâneos de todas as funções β^I 's, *i.e.* $\beta^I(\sigma_*) = 0$, $I = 1, \dots, N$. Nas proximidades da criticalidade, qualquer função β^I é bem aproximada por:

$$\begin{aligned} -\beta^I &\approx -\partial_J \beta^I(\sigma_*)(\sigma^J - \sigma_*^J) - \frac{1}{2}\partial_J \partial_K \beta^I(\sigma_*)(\sigma^J - \sigma_*^J)(\sigma^K - \sigma_*^K) \\ &\equiv s_J^I(\sigma^J - \sigma_*^J) + \mathcal{C}_{JK}^I(\sigma^J - \sigma_*^J)(\sigma^K - \sigma_*^K), \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

A forma já apresentada no capítulo 2. Um dos principais objetivos deste estudo é relacionar s_J^I com as massas dos campos escalares para a conexão *gravitação-teoria de campo* ser possível.

8.2 Acerca do novo vácuo

No caso de $\mathcal{G}^{IJ} = 0$ para certos valores de σ^P (pontos onde \mathcal{G}_{IJ} não é bem definida), surge uma classe de vácuos *exóticos*. Eles são perigosos e devem ser excluídos da análise. A

razão é a seguinte: do caso de um campo sabemos que os zeros da função *beta* são extremos da função carga central *a*. O mesmo ocorre aqui, pois

$$\frac{da}{dl} = -\frac{\xi}{2(-W)^{d-2}} \beta^I \mathcal{G}_{IJ} \beta^J < 0, \quad (8.2.1)$$

uma vez que a matriz \mathcal{G} é simétrica e $\det \mathcal{G} \neq 0$, ela pode ser diagonalizada em cada ponto e sua assinatura é positiva por definição. O problema surge num eventual ponto crítico (zero de *beta*) da forma $\mathcal{G}^{IJ} = 0$, este ponto crítico não é extremo da “*a*” e invalida a construção do GR.

8.3 Estudo nas proximidades de um ponto crítico

Próximo a um ponto crítico (extremo do potencial), por construção o espaço-tempo torna-se *AdS*, *i.e.* $\dot{A} \approx \frac{1}{L}$ e o potencial possui a forma

$$V(\sigma^I) \approx -\frac{(d-1)(d-2)}{L^2} + \frac{1}{2} m_{IJ}^2 \sigma^I \sigma^J, \quad (8.3.1)$$

uma vez excluída a possibilidade de vácuos exóticos, é seguro aproximar a eq. (8.0.1) por:

$$\ddot{\sigma}^I + \frac{(d-1)}{L} \dot{\sigma}^I \approx \mathcal{G}_{*}^{IL} m_{LJ}^2 \sigma^J, \quad (8.3.2)$$

para interpretar a quantidade $\mathcal{G}_{*}^{IL} m_{LJ}^2$ como a massa do campo σ^I é necessário diagonalizá-la. A eq. (8.3.2) é derivada da parte da ação efetiva relacionada aos campos escalares (perto do ponto crítico)

$$S_{\sigma} \approx -\frac{1}{2} \int dy e^{(d-1)\frac{y}{L}} (\mathcal{G}_{IJ}^{*} \dot{\sigma}^I \dot{\sigma}^J + m_{IJ} \sigma^I \sigma^J), \quad (8.3.3)$$

a mesma de N osciladores amortecidos acoplados. A procedimento de diagonalização[†] pode ser encontrado em livros textos de mecânica clássica, por exemplo (83). Defina um novo conjunto de campos “coordenadas” u_I relacionados com σ^I :

$$\sigma^I = S^{IJ} u_J \rightarrow u_I = S_{IJ} \sigma^J, \quad (8.3.4)$$

onde $(S^{-1})^{IJ} = S_{IJ}$. Na referência supracitada é demonstrado que se S for escolhido t.q. a matriz que multiplica o termo cinético de (8.3.3) torne-se a matriz unidade, então o termo de

[†]ele independe se os osciladores são amortecidos ou não.

interação também se diagonaliza, *i.e.* se

$$(S^T)^{IL} \mathcal{G}_{LM}^* S^{MJ} = \delta^{IJ}, \text{ então} \quad (8.3.5)$$

$$(S^T)^{IL} m_{LM}^2 S^{MJ} = \delta^{IL} S_{LM} (\mathcal{G}_*^{MN} m_{NO}^2) S^{OJ} = (M^2)^{IJ} \equiv (M^2)^I \delta^{IJ}, \quad (8.3.6)$$

sem soma em I e na primeira igualdade da segunda linha a eq. (8.3.5) foi usada. A quantidade $(M^2)^I$ é a massa do campo (já diagonalizado) u_I . De (8.3.5) fica claro que $S^T \mathcal{G}_*^{-1} = S^{-1}$.

A ação e eqs. do movimento para o conjunto de campos diagonalizados são:

$$S_u = -\frac{1}{2} \int dy e^{(d-1)\frac{y}{L}} (\delta^{IJ} \dot{u}_I \dot{u}_J + (M^2)^I \delta^{IJ} u_I u_J), \quad (8.3.7)$$

$$\ddot{u}_I + \frac{(d-1)}{L} \dot{u}_I \approx (M^2)_I^J u_J = (M^2)^I u_I, \quad (8.3.8)$$

sem soma em I . A passagem $\sigma^I \rightarrow u_I$ deve ser estendida a parte holográfica, *i.e.* a função *beta*, ao menos nas redondezas dos ponto críticos

$$\frac{du_I}{dl} = -S_{IJ} \beta^J(\sigma^P) \equiv -\beta_I^{ef} \quad (8.3.9)$$

$$\begin{aligned} &\approx (S_{IK} s_L^K S^{LJ}) (u_J - u_J^*) + (S_{IL} \mathcal{C}_{QR}^L S^{QJ} S^{RK}) (u_J - u_J^*) (u_K - u_K^*) \\ &\equiv (s^{ef})_I^J (u_J - u_J^*) + (\mathcal{C}^{ef})_I^{JK} (u_J - u_J^*) (u_K - u_K^*), \end{aligned} \quad (8.3.10)$$

$$(s^{ef})_I^J \equiv S_{IK} s_P^K S^{PJ}, \quad (8.3.11)$$

$$(\mathcal{C}^{ef})_I^{JK} \equiv S_{IL} \mathcal{C}_{QR}^L S^{QJ} S^{RK}. \quad (8.3.12)$$

Na sequência é mostrado que (8.3.11) é diagonal tanto para vácuos físicos quanto topológicos.

8.4 Vácuo físico

É o conjunto de pontos (vetor) $\{\sigma^I = \sigma_{*,fis}^I, I = 1, \dots, N\}$, definido pelas eqs:

$$\vec{\nabla} W(\sigma^I) \Big|_{\sigma_{fis}^I = \sigma_{*,fis}^I} = 0, \quad (8.4.1)$$

$$W(\sigma_{*,fis}^I) \text{ e } C_0(W(\sigma_{*,fis}^I)) \neq 0. \quad (8.4.2)$$

8.4.1 Índices críticos e constantes de estrutura

A eq. (8.1.2) aplicada ao vácuo físico leva a:

$$(s_{fis})_I^J = 2(d-2) \mathcal{G}^{IP} \frac{\partial_J \partial_P W}{W} C_0(W) \Big|_{\sigma^P = \sigma_{*}^P}, \quad (8.4.3)$$

$$(\mathcal{C}_{fis})_{JK}^I = \frac{(d-2)}{W} C_0(W) \left((\partial_J \mathcal{G}^{IM}) \partial_K \partial_M W + (\partial_K \mathcal{G}^{IM}) \partial_J \partial_M W + \mathcal{G}^{IM} (\partial_K \partial_J \partial_M W) \right) \Big|_{\sigma^P = \sigma_{*}^P}.$$

Na mesma aproximação, o sistema de eqs. $\sigma^I = \sigma^I(y)$ (ver 8.0.7) é:

$$\frac{d\sigma^I}{dy} \approx -\frac{1}{L_{fis}} \left[(s_{fis})^I_J (\sigma^J - \sigma_*^J) + (C_{fis})^I_{JK} (\sigma^J - \sigma_*^J) (\sigma^K - \sigma_*^K) \right], \quad (8.4.4)$$

exatamente igual ao do GR após a identificação $A(y) = \frac{y}{L_{fis}}$. Ou seja, a aproximação adotada, mesmo gerando um fluxo no GR, não é suficiente para alterar a geometria AdS_d - os campos σ^I “vivem” num *background* AdS_d e não numa geometria dinâmica. Outro fato digno de nota é que $C_0(W) \approx C_0(\sigma_*^I)$ surge apenas como uma constante multiplicativa. As duas observação não são mais válidas a partir da próxima ordem perturbativa.

8.4.2 Forma do potencial

Suponha um vácuo físico em $\sigma^I = \sigma_*^I$, $I = 1, \dots, N$. A forma mais geral de W nas vizinhanças desse vácuo é:

$$W(\sigma^I) \approx -\frac{(d-2)}{L_{fis}} \left(1 + x_{IJ} (\sigma^I - \sigma_*^I) (\sigma^J - \sigma_*^J) + x_{IJK} (\sigma^I - \sigma_*^I) (\sigma^J - \sigma_*^J) (\sigma^K - \sigma_*^K) \right), \quad (8.4.5)$$

x_{IJ} e x_{IJK} são quantidades adimensionais e simétricas em todos os índices. A eq. (8.4.3) fica:

$$(s_{fis})^I_J = 4(d-2)C_0 \mathcal{G}^{IP}(\sigma_*) x_{PJ}, \quad (8.4.6)$$

$$(C_{fis})^I_{JK} = 2(d-2)C_0 \left((\partial_J \mathcal{G}_*^{IM}) x_{MK} + (\partial_K \mathcal{G}_*^{IM}) x_{MJ} + 3\mathcal{G}_*^{IM} x_{MJK} \right) \Big|_{\sigma^P = \sigma_*^P} \quad (8.4.7)$$

$$C_0 = 1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_{fis}^2} - 3\mu \frac{L^4}{L_{fis}^4}, \quad (8.4.8)$$

$$\mathcal{G}_*^{IJ} = \mathcal{G}^{IJ} \Big|_{\sigma^P = \sigma_*^P}. \quad (8.4.9)$$

Substituindo (8.4.5) em (8.0.8), (8.3.1) é encontrada com:

$$(m_{fis}^2)_{IJ} = 4(d-2) \frac{C_0}{L_{fis}^2} \left[4(d-2)C_0 x_{IL} \mathcal{G}^{LM}(\sigma_*) x_{MJ} - (d-1)x_{IJ} \right], \quad (8.4.10)$$

ao multiplicar os dois lados por \mathcal{G}^{PI} e tomar o “sanduíche” com S , levando em conta (8.3.6), temos

$$\begin{aligned} L_{fis}^2 S_{IK} \mathcal{G}^{KL}(\sigma_*) (m_{fis}^2)_{LM} S^{MJ} &= L_{fis}^2 (M_{fis}^2)_I^J \\ &= S_{IK} (s_{fis})_L^K S^{LP} S_{PQ} (s_{fis})_R^Q S^{RJ} - (d-1) S_{IK} (s_{fis})_M^K S^{MJ} \\ &= (s_{fis}^{ef})_I^K (s_{fis}^{ef})_K^J - (d-1) (s_{fis}^{ef})_I^J, \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

na última igualdade foi feito uso da eq. (8.3.11) portanto como $(M_{fis}^2)_I^J = (M_{fis}^2)_I \delta_I^J$ é diagonal, necessariamente $(s_{fis}^{ef})_I^J \equiv s_I^{fis} \delta_I^J$ também o é. Assim:

$$L_{fis}^2 (M_{fis}^2)_I = s_I^{fis} \left(s_I^{fis} - (d-1) \right), \text{ sem somas,} \quad (8.4.12)$$

o resultado desejado. Cada campo u_I pode ser interpretado como um acoplamento, numa teoria conforme em $(d-1)$ dimensões, multiplicando operadores \mathcal{O}_I , cuja dimensão conforme é $\Delta_I = d-1 - s_I^{fis}$.

8.5 Vácuo topológico, índices críticos e constantes de estrutura

Caracterizado por $C_0(W) = 0$, seus índices críticos e constantes de estrutura são os elementos das matrizes:

$$(s_{top})_J^I = -\partial_J \beta^I \Big|_{\sigma=\sigma_{top}^*} = -\frac{8L^2}{(d-2)} \mathcal{G}^{IP} \partial_P W \partial_J W \left(\lambda + 3\mu \frac{L^2}{L_{top}^2} \right) \Big|_{\sigma=\sigma_{top}^*}, \quad (8.5.1)$$

$$(C^{top})_{JK}^I = -\frac{4L^2}{(d-2)} \left\{ \left((\partial_J \mathcal{G}_*^{IP}) (\partial_P W) (\partial_K W) + \mathcal{G}_*^{IP} (\partial_J \partial_P W) (\partial_K W) \right) \right. \\ \left. + L_{top} \frac{\mathcal{G}_*^{IP}}{(d-2)} (\partial_P W) (\partial_J W) (\partial_K W) + \mathcal{G}_*^{IP} (\partial_P W) (\partial_J \partial_K W) \right\} \left(\lambda + \frac{3\mu L^2}{L_{top}^2} \right) \\ - 6 \frac{\mu L^2}{(d-2) L_{top}} \mathcal{G}_*^{IP} (\partial_P W) (\partial_J W) (\partial_K W) \Big|_{\sigma=\sigma_{top}^*} \quad (8.5.2)$$

com L_{top} sendo a escala do espaço-tempo AdS_d "topológico" (um dos dois valores possíveis). Foi usada a seguinte notação:

$$A_1 \dots A_{(J \dots A_K) \dots A_N} \equiv A_1 \dots A_J \dots A_K \dots A_N + A_1 \dots A_K \dots A_J \dots A_N. \quad (8.5.3)$$

Comparando as duas eqs. de (8.4.3) com (8.5.1) e (8.5.2), percebe-se que caso os vácuos físico e topológico coincidam, *i.e.* $C(\sigma^*) = 0$ com $\partial_I W(\sigma^*) = 0, \forall I$, então $s_J^I = C_{JK}^I = 0$.

8.5.1 Forma do potencial

Pela definição do vácuo topológico, a forma mais geral de W nas proximidades do ponto crítico é:

$$W(\sigma^I) \approx -\frac{(d-2)}{L_{top}} \left(1 + x_I (\sigma^I - \sigma_*^I) + x_{IJ} (\sigma^I - \sigma_*^I) (\sigma^J - \sigma_*^J) \right), \quad (8.5.4)$$

$x_I \neq 0$ são quantidades dimensionais. Nessa notação as eqs. (8.5.1) e (8.5.2) tomam a formam:

$$(s_{top})^I_J = -8L^2(d-2)\mathcal{G}_*^{IM}x_Mx_J \left(\lambda + 3\mu \frac{L^2}{L_{top}^2} \right), \quad (8.5.5)$$

$$(C_{top})^I_{JK} = -\frac{4L^2(d-2)}{L_{top}^2} \left\{ \left[(\partial_{(J}\mathcal{G}_*^{IP)} x_{P}x_{K)} + \mathcal{G}_*^{IP} x_{P(J}x_{K)} - \mathcal{G}_*^{IP} x_Px_Jx_K + \mathcal{G}_*^{IP} x_Px_{JK} \right] \left(\lambda + \frac{3\mu L^2}{L_{top}^2} \right) + 6\frac{\mu L^2}{L_{top}^2} \mathcal{G}_*^{IP} x_Px_Jx_K \right\} \Big|_{\sigma=\sigma_{top}^*}. \quad (8.5.6)$$

A versão “efetiva” (diagonal) de (8.5.5) (via (8.3.11)) é:

$$(s_{top}^{ef})^J_I = -8L^2(d-2)S_{IK}\mathcal{G}_*^{KM}x_Mx_R S^{RJ} \left(\lambda + 3\mu \frac{L^2}{L_{top}^2} \right). \quad (8.5.7)$$

Calculando o potencial, via W , na aproximação desejada, a matriz m_{IJ} (ver eq. (8.3.1)) é determinada como:

$$(m_{top}^2)_{IJ} = -\frac{8(d-2)}{L_{top}^2} \frac{L^2}{L_{top}^2} \left(\lambda + 3\mu \frac{L^2}{L_{top}^2} \right) x_Ix_J \times \left(-\frac{8(d-2)}{L_{top}^2} \frac{L^2}{L_{top}^2} \left(\lambda + 3\mu \frac{L^2}{L_{top}^2} \right) \mathcal{G}_*^{LM}x_Lx_M - (d-1) \right), \quad (8.5.8)$$

$$= \frac{1}{L_{top}^2} \mathcal{G}_{IK}^*(s_{top})^K_J ((s_{top})^Q_Q - (d-1)). \quad (8.5.9)$$

devido a eq. (8.5.5), e de acordo com (8.3.6)

$$\begin{aligned} L_{top}^2 S_{IK} \mathcal{G}_*^{KL} (m_{top}^2)_{LM} S^{MJ} &= \\ L_{top}^2 (M_{top}^2)^J_I &= S_{IK} \mathcal{G}_*^{KL} \mathcal{G}_{LR}^* (s_{top})^R_M S^{MJ} ((s_{top})^K_K - (d-1)), \\ &= (s_{top}^{ef})^J_I \left((s_{top}^{ef})^K_K - (d-1) \right), \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

onde foi usada a invariância do traço com respeito a atuação de S ($(s_{top}^{ef})^K_K = (s_{top})^K_K$). O fato da matriz $(M_{top}^2)^J_I = (M_{top}^2)_I \delta_I^J$ ser diagonal garante $(s_{top}^{ef})^J_I$ diagonal, por outro lado, a forma final não é: $L_{top}^2 (M^2)_I = s_I (s_I - (d-1))$, como ocorre no vácuo físico, indispensável para a descrição holográfica. Não existe um problema real devido a forma peculiar da matriz s_{top} , é fácil verificar que $\det|s_{top}| = 0$, uma vez que suas submatrizes 2×2 possuem determinante nulo. Desse fato pode-se calcular a eq. dos autovalores da matriz s_{top} :

$$\det|s_{top} - \xi 1| = (-1)^N \xi^{N-1} (\xi - (s_{top})^K_K), \quad (8.5.11)$$

i.e. $N - 1$ autovalores são nulos, conseqüentemente $N - 1$ campos possuem massa nula e apenas um tem massa

$$L_{top}^2 M_{top}^2 = s_{top}(s_{top} - (d - 1)), \quad s_{top} = (s_{top})_K^K. \quad (8.5.12)$$

A eq. (8.5.12) descreve a massa do campo u_1 (escolhido sem perda de generalidade) em termos do índice crítico s_{top} e (8.3.8) torna-se:

$$\ddot{u}_1 + \frac{(d - 1)}{L_{top}^2} u_1 = M_{top}^2 u_1, \quad (8.5.13)$$

$$\ddot{u}_I + \frac{(d - 1)}{L_{top}^2} u_I = 0, \quad I = 2, \dots, N. \quad (8.5.14)$$

Dos N acoplamentos, $N - 1$ multiplicam operadores com dimensão conforme $\Delta = d - 1$ e um multiplica um operador com um $\Delta = d - 1 - s_{top}$.

As conclusões obtidas nesta seção (ainda não publicadas) são conseqüências do fato do vácuo topológico para N campos não ser definido por um ponto no espaço dos campos, mas sim pela hipersuperfície de dimensão $N - 1$ definida pelo “vínculo” $C_0(W(\sigma^I)) = 0$. Dos N vetores u_I , que formam uma base deste espaço vetorial, $N - 1$ encontram-se na hipersuperfície fixa $C_0 = 0$, onde não há fluxo, logo seus índices críticos são nulos. Apenas o vetor ortogonal a $C_0 = 0$ (chamado de u_1) possui um índice crítico (ou massa) diferente de zero - o único que gera fluxos. Uma figura ilustrativa do descrito pode ser encontrada em 8.1.

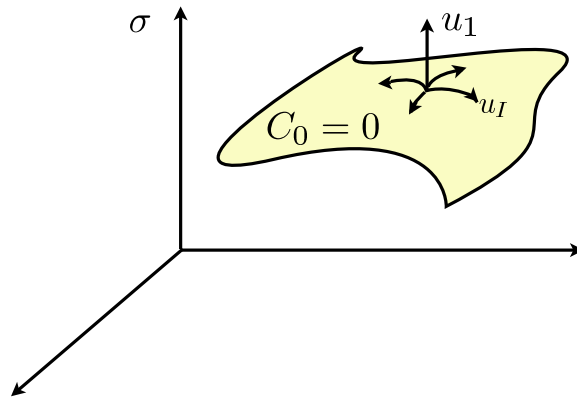


Figura 8.1 – Representação do espaço dos campos σ^I . Num ponto da hipersuperfície $C_0 = 0$, de dimensão $N - 1$, está centrada a base $\{u_I, I = 1, \dots, N\}$, t.q. $N - 1$ vetores são paralelos a C_0 e o vetor u_1 é o único ortogonal.

8.6 Condições físicas

As condições derivadas na seção 7.5 podem ser adaptadas ao caso de N campos escalares sem grandes dificuldades, uma vez que as quantidades de interesse (cargas a e c , h_k , etc.) permanecem inalteradas.

As condições de energia positiva nos pontos fixos (seção 7.5.2) não mudam, são exatamente as mesmas. Já os teoremas a & c sofrem modificações, o argumento de restringir a análise aos pontos críticos devido ao fato de ao longo de um fluxo o “superpotencial” ser monotônico não se aplica quando há mais de um campo - o fluxo não é mais unidimensional. Mesmo assim nenhuma análise extra é necessária, basta fazer as trocas formais nos resultados da seção 7.5.1

$$f_{IV} < f_{\pm}^{\eta} \longrightarrow \frac{L^2 W^2(\sigma^I)}{(d-2)^2} < f_{\pm}^{\eta}, \quad (8.6.1)$$

$$f_{UV} > f_{\pm}^{\eta} \longrightarrow \frac{L^2 W^2(\sigma^I)}{(d-2)^2} > f_{\pm}^{\eta}, \quad (8.6.2)$$

i.e., a condição de escala mínima no caso de um campo ($f_{IV} < f_{\pm}^{\eta} \leftrightarrow L_{IV}^2 > L_{\eta, \pm}^2$) torna-se um valor máximo para $W(\sigma^I)$ e o caso de escala máxima ($f_{UV} > f_{\pm}^{\eta} \leftrightarrow L_{UV}^2 < L_{\eta, \pm}^2$) passa a fornecer um valor mínimo ao “superpotencial” W . Em geral W é singular nas singularidades da geometria, logo a condição de um valor máximo para W exclui fluxos massivos enquanto a de um valor mínimo não.

8.7 Exemplo: $W - BKT$

Vamos nos ater ao caso GB por simplicidade. O “superpotencial” é:

$$W(\sigma, T) = -\frac{1}{L_0} (d-2 + B\sigma T^2), \quad T > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (8.7.1)$$

onde σ e T são os campos escalares e B é um parâmetro adimensional positivo (trocar $B \rightarrow -B \Leftrightarrow \sigma \rightarrow -\sigma$). Também temos $\mathcal{G}^{TT} = 1/2$ e $\mathcal{G}^{\sigma\sigma} = 1$. O sistema de primeira ordem fica:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dA} &= -\frac{2(d-2)B}{d-2+B\sigma T^2} \sigma T \left(1 - \frac{2\lambda L^2}{(d-2)^2 L_0^2} (d-2+B\sigma T^2)^2 \right), \\ \frac{d\sigma}{dA} &= -\frac{2(d-2)B}{d-2+B\sigma T^2} T^2 \left(1 - \frac{2\lambda L^2}{(d-2)^2 L_0^2} (d-2+B\sigma T^2)^2 \right), \end{aligned} \quad (8.7.2)$$

cujo invariante é:

$$T^2 - \sigma^2 = -R^2, \quad R^2 \in \mathbb{R}. \quad (8.7.3)$$

Existem dois pontos cruciais na análise do fluxo no plano $TX\sigma$. Um é a curva $W(T, \sigma) = 0$, *i.e.*

$$T_{W=0}(\sigma) = \sqrt{\frac{d-2}{-B\sigma}}, \quad (8.7.4)$$

como $B > 0$, a curva só existe na região $\sigma < 0$. Nela $\dot{\sigma}$ e \dot{T} divergem e o fluxo é interrompido (ocorre um *salto* singular), os muros são do tipo *Janus*. O outro ponto é quando existem vácuos topológicos, $\lambda > 0$. Eles são definidos pela eq. $1 - \frac{L_{top}^2}{(d-2)^2}W^2 = 0$, $L_{top}^2 = 2\lambda L^2$, resolvendo-a para T , duas curvas são encontradas:

$$T_{top}^{\pm}(\sigma) = \sqrt{\frac{d-2}{-B\sigma} \left(1 \pm \frac{L_0}{L_{top}} \right)}, \quad (8.7.5)$$

numa situação física, $L_0 > L_{top}$, portanto a curva T_{top}^+ está definida para $\sigma < 0$ (lembre que $B > 0$) e T_{top}^- é real para $\sigma > 0$.

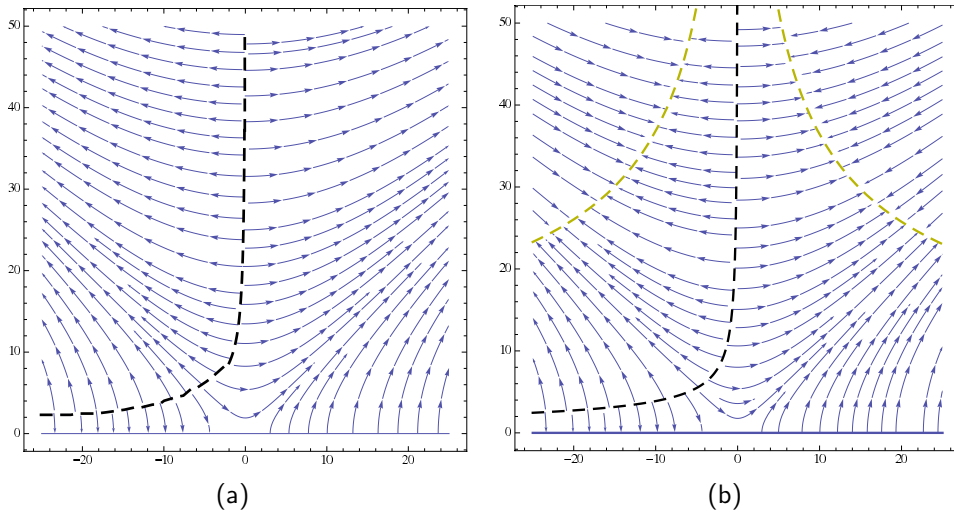


Figura 8.2 – Fluxos para o sistema definido pela eq. (8.7.2). (a) fluxo $TX\sigma$ para $\lambda < 0$, a linha negra tracejada é a eq. (8.7.4); (b) fluxo $TX\sigma$ para $\lambda > 0$, a curva negra tracejada é a eq. (8.7.4) e as linhas beges tracejadas são as curvas T_{top}^{\pm} (ver eq. (8.7.5)).

Nas figuras 8.2(a)-8.2(b) estão os fluxos planares nos casos $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$, respectivamente. Repare que os fluxos planares seriam basicamente os mesmos se ao invés de usarmos

a forma exata (8.7.2), a análise fosse limitada ao redor da linha crítica $T = 0$ ($\sigma \ll 1$)

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dA} &\approx -2B\sigma T, \\ \frac{d\sigma}{dA} &= -2BT^2, \end{aligned} \quad (8.7.6)$$

pois ambos os sistemas de primeira ordem possuem o mesmo invariante (eq. (8.7.3))[‡]. O sistema (8.7.6) é o famoso modelo BKT (85)[§]. A diferença entre os fluxos de (8.7.2) e (8.7.6) é que no último as figuras 8.2(a) e 8.2(b) não têm os efeitos não perturbativos gerados pelas linhas “críticas” dos zeros de W (*saltos* singulares) e C_0 (vácuos topológicos).

O campo/acoplamento T pode ser eliminado da segunda eq. de (8.7.2) via (8.7.3), levando a função beta “efetiva”:

$$\begin{aligned} -\beta_{ef}(\sigma) \equiv \frac{d\sigma}{dA} &= -2(d-2)B \frac{(\sigma^2 - R^2)}{d-2 + B\sigma(\sigma^2 - R^2)} \\ &\times \left(1 - \frac{2\lambda L^2}{(d-2)^2 L_0^2} (d-2 + B\sigma(\sigma^2 - R^2))^2 \right), \end{aligned} \quad (8.7.7)$$

nas figuras 8.3(a)-8.3(b) são mostradas curvas de $-\beta_{ef}(\sigma)$ para $R^2 > 0$, $R^2 = 0$ e $R^2 < 0$, respectivamente, nos casos $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$. A situação $R^2 > 0$ é delicada e exige cuidado, uma vez que devido a (8.7.3), $\sigma^2 > R^2$, por isso a parte $\sigma^2 < R^2$ da curva de $\beta_{ef}(\sigma)$ deve ser excluída (é considerada como identicamente nula). Para resolver a eq. (8.7.7), as seguintes

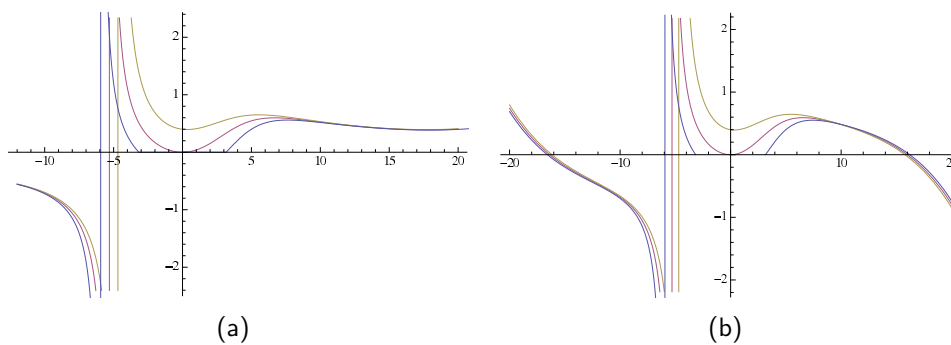


Figura 8.3 – Curvas da eq. (8.7.7). A curva azul é para $R^2 > 0$, a roxa para $R^2 = 0$ e na bege $R^2 < 0$. A curva para $R^2 > 0$ é nula na região $\sigma^2 < R^2$. (a) $\lambda < 0$, sem vácuo topológico; (b) $\lambda > 0$, com vácuos topológicos.

[‡]no cálculo do invariante é tomado a razão entre as duas eqs. de (8.7.2) e o termo C_0/W é cancelado

[§]veja detalhes nos capítulos nove e dez do livro (84) para teorias bidimensionais. E no contexto de transições de fase conformes (chamadas Miransky) em teorias de *calibre*, como “techcolor”, ver os artigos originais (47–49).

definições serão usadas:

$$\frac{W(\sigma)}{B} = \sigma^3 - R^2\sigma + \frac{d-2}{B} \equiv \prod_{i=1}^3 (\sigma - \sigma_i^W), \quad (8.7.8)$$

$$\frac{W(\sigma)}{B} \pm \frac{(d-2)L_0}{\sqrt{2\lambda}LB} = \sigma^3 - R^2\sigma + \frac{d-2}{B} \pm \frac{(d-2)L_0}{\sqrt{2\lambda}LB} \equiv \prod_{i=1}^3 (\sigma - \sigma_i^{top,\pm}), \quad (8.7.9)$$

onde σ_i^W e $\sigma_i^{top,\pm}$ ($i=1,2,3$) são, respectivamente, os zeros de $W(\sigma; R^2)$ e $C_0(\sigma; R^2)$. Esses zeros não são necessariamente reais, por exemplo se $\lambda < 0$ obviamente $C_0(\sigma; R^2) \neq 0 \forall \sigma$.

A integração de (8.7.7) fornece:

$$\begin{aligned} e^{A(\sigma; R^2)} &= |\sigma - R|^{-1/s_R} |\sigma + R|^{-1/s_{-R}} \prod_{i=1}^3 |\sigma - \sigma_i^{top,+}|^{-1/s_i^{top,+}} |\sigma - \sigma_i^{top,-}|^{-1/s_i^{top,-}} \\ \frac{1}{s_R} &\equiv \frac{L_0}{4\sqrt{2\lambda}LB} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{(R - \sigma_i^W)}{2R(R - \sigma_i^{top,+})} + \frac{(R - \sigma_i^W)}{2R(R - \sigma_i^{top,-})} \right) \\ \frac{1}{s_{-R}} &= \frac{L_0}{4\sqrt{2\lambda}LB} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{(R + \sigma_i^W)}{2R(R + \sigma_i^{top,+})} + \frac{(R + \sigma_i^W)}{2R(R + \sigma_i^{top,-})} \right) \\ \frac{1}{s_i^{top,\pm}} &= \frac{L_0}{4\sqrt{2\lambda}LB} \frac{\prod_{j=1}^3 (\sigma_i^{top,\pm} - \sigma_j^W)}{((\sigma_i^{top,\pm})^2 - R^2) \prod_{l \neq i}^3 (\sigma_i^{top,\pm} - \sigma_l^{top,\pm})}. \end{aligned} \quad (8.7.10)$$

Uma propriedade que pode ser verificada através de um cálculo explícito é:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^3 \frac{\prod_{j=1}^3 (\sigma_i^{top,\pm} - \sigma_j^W)}{((\sigma_i^{top,\pm})^2 - R^2) \prod_{l \neq i}^3 (\sigma_i^{top,\pm} - \sigma_l^{top,\pm})} + \\ &+ \frac{\prod_{i=1}^3 (R - \sigma_i^W)}{2R \prod_{i=1}^3 (R - \sigma_i^{top,\pm})} - \frac{\prod_{i=1}^3 (R + \sigma_i^W)}{2R \prod_{i=1}^3 (R + \sigma_i^{top,\pm})}, \end{aligned} \quad (8.7.11)$$

independente da forma das raízes σ_i^W e $\sigma_i^{top,\pm}$. Assim, a constante de integração foi escolhida para o fator de escala tender a unidade na singularidade nua ($\sigma \rightarrow \infty$) - ver seção 6.7.

Pelas figuras 8.2(a) e 8.2(b), fica claro que não há nenhum *salto* nos fluxos no semi-eixo $\sigma > 0$ e apenas um no semi-eixo $\sigma < 0$. As figuras 8.3(a) e 8.3(b) corroboram com essa conclusão. Por outro lado, estudando a eq. (8.7.8), é possível que o polinômio cúbico possua uma, duas ou até três raízes reais, porém não é difícil demonstrar que as eventuais raízes “extras” (uma ou duas) sempre se encontram na região *proibida* $-R < \sigma < R$ - nela $T^2 < 0$. Esse é o motivo da rica estrutura desse polinômio cúbico não ser refletido nas figuras.

Definindo σ_0 , t.q. nas proximidades da linha crítica $\sigma(y) \approx R + \sigma_0 e^{-s_M y/L_0}$, então:

$$|\sigma_0| = |2R|^{-s_R/s_{-R}} \prod_{i=1}^3 |R - \sigma_i^{top,+}|^{-s_R/s_i^{top,+}} |R - \sigma_i^{top,-}|^{-s_R/s_i^{top,-}}, \quad (8.7.12)$$

completamente determinado pelos parâmetros do modelo.

O exemplo apresentado serve para ilustrar dois pontos: 1) um fluxo com mais de um campo apresenta uma gama muito maior de possibilidades, no caso aqui há uma linha crítica (com N campos poderíamos ter hipersuperfícies críticas com n dimensões: $n = 1, \dots, N-1$); 2) a estrutura dos fluxos pode ser mais rica, porém as condições físicas são mais restritivas também. De todos os possíveis fluxos apresentados, o único que atende a todas as restrições físicas é o fluxo massivo que sai da linha crítica $T = 0$ ($R^2 > 0$) no caso $\lambda < 0$ (semi-reta $\sigma < 0$ na figura 8.2(a)) quando $L_0^2 > L^2/f_-^{ep}$ (eq. (6.6.15)).

Resumo da terceira parte

Na última parte da tese apresentamos nossos resultados originais na tentativa de descrever fluxos holográficos com funções cargas centrais $a \neq c$ e fluxos massivos consistentes. A abordagem foi a de modificar a gravitação incluindo termos de $\mathcal{O}(R^2, R^3, R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \dots)$. Os termos adicionais escolhidos formam a chamada *Gravitação Quase Topológica* (GQT) - se $\mu = 0$ ela é a gravitação usual com o termo de Gauss-Bonnet (GB). Eles criam uma correção na escala (ou constante cosmológica) dos vácuos AdS_d , mas a principal característica que justifica uma escolha tão particular é que apenas essa combinação gera eqs. do movimento de segunda ordem para geometrias de PD (ver apêndice G). As eqs. do movimento, de segunda ordem, da mesma forma que na gravitação usual, de EH, ainda permitem uma formulação em termos de um sistema de primeira ordem (5) quando o "supertpotencial" W é definido. Além dos chamados *vácuos físicos* AdS_d , extremos de W , que já existiam no caso EH (mesmo que modificados pelo termo de QTG), a forma do sistema de primeira ordem introduz uma nova classe de vácuos AdS_d , chamados de *topológicos*, definidos pelos zeros da função $C_0(W)$ (ver eq. (7.2.10)). O nome vem do fato deste vácuo, no caso $\mu = 0$, coincidir com o modelo de Chern-Simons em $d = 5$ e como $C_0 = 0$ não é possível estudar suas flutuações lineares através do formalismo métrico.

Na parte holográfica os ganhos são ainda maiores. As funções cargas centrais são diferentes - a supersimetria é quebrada - e a função *beta*, que permanece descrevendo corretamente as redondezas do ponto crítico, consegue reproduzir fluxos massivos, *i.e.* ela diverge no limite $\sigma \rightarrow \infty$ e o comprimento de correlação é finito. Os resultados são promissores, uma grande gama de fluxos podem ser gerados através do método, vários exemplos são mostrados ao longo de texto e no apêndice E. Porém nem tudo está resolvido, é preciso selecionar quais fluxos representam sistemas físicos reais, *i.e.* com funções cargas centrais positivas e monotônicas decrescentes. Os **teoremas a & c** (65), formulados em 6.6 para GB e 7.5.1 para a GQT, fornecem exatamente as restrições para necessárias para o fluxo holográfico satisfazer as condições físicas. Esta é a maior contribuição desta tese.

Os teoremas *a & c* fornecem informação apenas sobre o fluxo holográfico, eles não são suficientes para garantir a positividade da energia das teorias de campos (CFT_{d-1}) nos pontos fixos (13). As exigências adicionais criam restrições mais severas dos que as já feitas pelo teorema *a & c* aos modelos - ver seções 6.6.2 e 7.5.2.

O último passo na descrição holográfica de uma $pCFT_{d-1}$ através de uma geometria $(a)AdS_d$ é o estudo das flutuações lineares da métrica e do campo escalar ao redor da solução de PD. Com os termos de GB ou QTG a tarefa torna-se um problema ainda em aberto. O melhor que podemos fazer foi analisar apenas as flutuações do campo escalar supondo a geometria fixa,

a *aproximação exploratória*. Este estudo, no caso de GB, é apresentado na seção 7.5.2 junto com dois exemplos, no último o limite EH é tomado e o espectro de massa obtido através da aproximação pôde ser comparado com o caso exato calculado em 5.5.4.3. Um erro relativo em torno de 30% foi encontrado, o que mostra uma ineficácia significativa na aproximação.

Por fim, neste capítulo os resultados obtidos são generalizados para o caso de N campos escalares, um trabalho original desta tese ainda não publicado, permitindo a descrição holagáfica de uma função *beta* com N acoplamentos. Os vácuos topológicos passam a ser hipersuperfícies de dimensão $N - 1$. As adaptações necessárias aos teoremas *a & c* e condições de positividade da energia nos pontos fixos são discutidas. Um exemplo de fluxo planar, semelhante ao modelo BKT, onde há uma linha crítica, é apresentado.

Comentários finais

Nesta tese uma classe particular de espaços conforme planos foi estudada em detalhes, as PD, soluções dinâmicas de um campo escalar numa gravitação de EH em d dimensões. Diversas geometrias de PD assintoticamente AdS_d são descritas pelo método do *superpotencial* que reduz as eqs. do movimento de segunda ordem a um sistema de primeira ordem. Elas são usadas na construção da função *beta* holográfica através da extensão da correspondência AdS_d/CFT_{d-1} para $(a)AdS_d/pCFT_{d-1}$, capazes de descrever, *a priori*, fluxos de um GR de forma não perturbativa quando o campo escalar da teoria em d dimensões é identificado como o acoplamento da $pCFT_{d-1}$. As *cadeias de PD* ligadas por vácuos AdS_d são mapeadas num diagrama de fluxos massivos e não massivos do GR. Uma característica inerente ao formalismo é que as funções cargas centrais $a(\sigma)$ e $c(\sigma)$ são iguais - teorias conformes com $a = c$ em supersimetria $\mathcal{N} = 4$. Um reflexo da supersimetria atrelada ao modelo gravitacional. Um outro ponto importante é que o método holográfico falha na descrição de fases massivas, ao invés da função *beta* divergir em $\sigma \rightarrow \infty$, onde há uma singularidade nua na gravitação, ela torna-se nula.

O último elemento do dicionário holográfico é o estudo das flutuações lineares da geometria e campo escalar ao redor da solução de PD e como elas fornecem informação acerca da $pCFT_{d-1}$ dual. Por exemplo, as massas e tensor energia-momento da $pCFT_{d-1}$ estão relacionados, respectivamente, com as flutuações do campo escalar e modo tensorial, o *graviton*, da flutuação da métrica.

Uma tentativa de gerar teorias holográficas com cargas centrais $a \neq c$ é modificar a gravitação EH inserindo termos de “altas ordens” nas curvaturas, por exemplo o termo “quadrático” de GB ou a gravitação “cúbica” da GQT (17, 18). Mas para descrever fluxos de um GR holográfico são necessárias soluções de PD nesta gravitação modificada. O problema abordado e resolvido nesta tese consiste na descrição holográfica de transições de fase massivas e não massivas que ocorrem numa família de $pCFT_{d-1}$ com $a(\sigma) \neq c(\sigma)$ (temperatura nula), utilizando a GQT. Para isso foi, de forma análoga ao caso EH, introduzido um

“superpotencial” tornando as eqs. do movimento um sistema de primeira ordem. As principais características na descrição holográfica via a GQT são:

- a GQT é a combinação mais geral com até “termos cúbicos” nas curvaturas que fornecem eqs. do movimento de segunda ordem. A prova é encontrada no apêndice G;
- surgem vácuos AdS_d topológicos, definidos como os zeros reais da função $C_0(W)$.
- além das eqs. serem de segunda ordem é possível reduzi-las a um sistema de primeira ordem ao ser introduzido o “superpotencial”;
- fluxos massivos, incoerentes na gravitação usual de EH, possuem todas as características corretas, *i.e.* a função *beta* e acoplamento divergem simultaneamente (na singularidade nua da gravitação) e é fornecida uma massa (escala) finita*, como pode ser visto nos exemplos em 6.8 e E;
- para $d = 5$ e com o “superpotencial” (6.8.20), a $pCFT_4$ dual acabar por ter uma estrutura que descreve transições de fase esperadas em certas aproximações da QCD_4 , como a passagem entre os regimes *andando* e *correndo*.

Compilação dos principais resultados:

- o estudo completo da geometria e flutuações no calibre de Newton da solução de uma “PD” - do tipo $AdS_d/Sing.$ nua - na gravitação de EH e seu uso na correspondência holográfica;
- formulação das eqs. das PD em termos de um “superpotencial” no caso da GQT (ou GB);
- soluções exatas de cadeias de PD no modelo de GB, que podem ser diretamente transferidos para a GQT, gerando fluxos holográficos realísticos com funções cargas centrais diferentes;
- formulação dos teoremas *a & c*. Conjunto de restrições sobre os parâmetros da GQT e de GB t.q. as funções cargas centrais $a(l)$ e $c(l)$ sejam positivas e monotônicas decrescentes ao longo de todo o fluxo. Também são obtidas restrições extras para garantir que as energias das CFT_{d-1} 's nos pontos fixos sejam positivas;

* pois o fator de escala e^A da PD é, de forma não intuitiva, finito e não nulo na singularidade, ver detalhes na seção 6.7.

- um pequeno ensaio, utilizando a *aproximação exploratória*, do estudo das flutuações lineares apenas do campo escalar ao redor de uma geometria de PD na gravitação com o termo de GB.
- generalização de todos os resultados para o caso de N campos escalares. A título de ilustração foi apresentado um modelo, no caso de GB, com dois campos levando a um fluxo planar do tipo BKT.

Teoremas a & c e CFT_{d-1} 's com energia positiva:

O principal resultado da tese são as restrições derivadas nas seções 6.6 para GB e 7.5 para a GQT. Segue uma listagem com algumas consequências decorrentes desta análise:

- excluem o uso dos vácuos topológicos na descrição holográfica;
- para certos valores de λ e μ há uma escala mínima na gravitação impossibilitando fluxos holográficos massivos;
- para certos valores de λ e μ há uma escala máxima na gravitação e fluxos holográficos massivos e não massivos são bem definidos;
- apenas para $d = 5$, na GQT há sempre uma escala mínima, *i.e.* fluxos massivos nunca obedecem as condições físicas. No modelo de GB o mesmo não ocorre, para $\lambda < 0$ todos os tipos de fluxos podem ser contruídos.

Os resultados listados encontram-se publicados nos artigos (5, 6, 30, 33, 34, 65), exceto os correspondentes ao capítulo 8 - generalização para N campos escalares - cujo artigo está em fase final de desenvolvimento.

Problemas em aberto:

Devemos mencionar que as investigações feitas acerca de fenômenos críticos associados a $pCFT_{d-1}$'s duais a GQT (ou de GB) em d dimensões com campo escalar deixaram algumas questões importantes sem respostas

- estabilidade e causalidade das soluções de PD e suas eventuais consequências na descrição holográfica;
- cálculos fora do ponto crítico do espectro e massa e funções de correlação do operador relevante responsável pelo fluxo do GR;
- extensão das condições de energia positiva sobre as CFT 's para fora do ponto crítico;

A solução dos dois primeiros pontos requer um estudo das flutuações lineares da métrica e do campo escalar. A *aproximação exploratória* realizada na tese, que desconsidera as flutuações da métrica, não é suficiente para elucidar as questões.

Perspectivas futuras:

Um dos resultados da tese é a impossibilidade, devido as condições físicas, de descrevermos fluxos massivos numa $pCFT_4$ associados a GQT_5 . Apenas no caso GB eles são possíveis, porém mesmo com $a \neq c$ as cargas centrais são relacionadas apenas por um parâmetro (λ), a liberdade é muito pequena e $t_4 = 0$. Isso é resultados de uma supersimetria $\mathcal{N} = 1$ residual que ainda persiste no modelo. Dois caminhos se abrem na tentativa de gerar modelos mais realísticos - próximos a QCD_4

- manter a GQT, mas alterar a matéria com outros tipos de campos ou campos escalares exóticos - dilaton, etc.
- modificar a gravitação, algumas opções são: ir para a próxima ordem com termos “quarticos” nas curvaturas (45), modelos de Born-Infeld (54) ou *bi-metric massive gravity* (55).

Uma outra linha de nossa pesquisa alternativa é explorar mais as novas possibilidades criadas a partir da recente generalização dos resultados para N campos escalares e tentar reproduzir fluxos já conhecidos, ao menos de forma perturbativa, afim de dar um respaldo maior ao princípio holográfico.

REFERÊNCIAS

- 1 J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity”, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, 231 (1998) [arXiv:hep-th/9711200]; E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography”, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150]; S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Gauge theory correlators from non-critical string theory, *Phys. Lett. B* 428, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].

- 2 O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].

- 3 J. de Boer, “The Holographic Renormalization Group, *Fortsch*”. *Phys.* 49:339-358(2001), hep-th/0101026; E. Verlinde, H. Verlinde and J. de’Boer, “On the holographic renormalization group,” *JHEP* 0008:003(2000) ,hep-th/9912012.

- 4 D. Z. Freedman, S. S. Gubser, K. Pilch and N. P. Warner, “Renormalization group flows from holography supersymmetry and a c theorem.” *Adv.Theor.Math.Phys.*3(1999),363-417, e-Print: hep-th/9904017; L. Girardello, M. Petrini, M. Porrati and A. Zaffaroni, “Novel Local CFT and Exact Results on Perturbations of $N = 4$ Super YangMills from AdS Dynamics,” *JHEP* 12 (1998) 022, hep-th/9810126; M. Bianchi, D. Z. Freedman, K. Skenderis, “How to go with an RG flow,” *JHEP* 0108 (2001) 041, e-Print: hep-th/0105276; J. Distler and F. Zamora, “Nonsupersymmetric Conformal Field Theories from Stable Anti-de Sitter Spaces,” hep-th/9810206; M. Bianchi, D. Z. Freedman, K. Skenderis, “Holographic renormalization,” *Nucl.Phys.B*631:159-194,2002, e-Print: hep-th/0112119.

- 5 U. Camara dS, C. P. Constantinidis, A. L. Alves Lima and G. M. Sotkov, “Domain Walls in Extended Lovelock Gravity,” *JHEP* 1204 (2012) 109, arXiv:1202.4682 [hep-th].

- 6 U. Camara dS and G. M. Sotkov, “New Massive Gravity Domain Walls,” *Phys.Lett. B*694 (2010) 94-99, e-Print: arXiv:1008.2553 [hep-th].

- 7 R. C. Myers, M. F. Paulos and A. Sinha, “Holographic studies of quasi-topological gravity,” *JHEP* 1008, 035 (2010) arXiv:1004.2055 [hep-th].

- 8 A. Buchel, J. Escobedo, R. C. Myers, M. F. Paulos, A. Sinha and M. Smolkin, “Holographic GB gravity in arbitrary dimensions,” *JHEP* 1003 (2010) 111,[arXiv:0911.4257];

- 9 R. C. Myers and A. Sinha, "Holographic c-theorems in arbitrary dimensions," JHEP 1101, 125 (2011) [arXiv:1011.5819]; R. C. Myers and A. Sinha, "Seeing a c-theorem with holography," Phys. Rev. D 82, 046006 (2010) arXiv:1006.1263.
- 10 X. O. Camanho and J. D. Edelstein, "Causality in AdS/CFT and Lovelock theory," JHEP 1006, 099 (2010) [arXiv:0912.1944]; X. O. Camanho, J. D. Edelstein and M. F. Paulos, "Lovelock theories, holography and the fate of the viscosity bound," arXiv:1010.1682.
- 11 A.B.Zamolodchikov, Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory, Sov. Phys. JETP Lett. **43**(1986)1731;A.B.Zamolodchikov, Renormalization Group And Perturbation Theory Near Fixed Points In Two-Dimensional Field Theory, Sov. J. Nucl. Phys. 46, 1090 (1987) [Yad. Fiz. 46, 1819 (1987)].
- 12 J.L.Cardy, Is There a c Theorem in Four-Dimensions?, Phys.Lett. B215 (1988) 749.
- 13 D. M. Hofman and J. Maldacena, "Conformal collider physics: Energy and charge correlations," JHEP 0805, 012 (2008) [arXiv:0803.1467 [hep-th]].
- 14 D. M. Hofman, "Higher Derivative Gravity, Causality and Positivity of Energy in a UV complete QFT," Nucl. Phys. B 823, 174 (2009), arXiv:0907.1625 [hep-th]].
- 15 J. Polchinski and M. J. Strassler, "Hard scattering and gauge / string duality," Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 031601 [hep-th/0109174].
- 16 D. E. Berenstein, J. M. Maldacena and H. S. Nastase, "Strings in flat space and pp waves from N=4 superYang-Mills," JHEP **0204** (2002) 013 [hep-th/0202021].
- 17 R. C. Myers and B. Robinson, "Black Holes in Quasi-topological Gravity," JHEP 1008, 067 (2010) [arXiv:1003.5357 [gr-qc]].
- 18 J. Oliva and S. Ray, "A new cubic theory of gravity in five dimensions: Black hole, Birkhoffs theorem and C-function," Class. Quant. Grav. 27, 225002 (2010) ,[arXiv:1003.4773 [gr-qc]]; J. Oliva and S. Ray, "Classification of Six Derivative Lagrangians of Gravity and Static Spherically Symmetric Solutions," Phys.Rev.D82:124030,2010, arXiv:1004.0737.
- 19 M. Cvetič and H. H. Soleng, Phys. Rep. 282(1997) 159 and references therein.
- 20 D. Z. Friedman, C. Nunez, M. Schnabl, K. Skenderis, Phys.Rev.**D69**,104 027(2004); M.Cvetič,S.Griffies,S.J.Rey, Nucl. Phys **B381**1992301.
- 21 K. Skenderis and P. K. Townsend, "Gravitational stability and Renormalization group flow," PLB{468}{1999}{46},e-Print: hep-th/9909070.

- 22 E. T. Akhmedov, "A Remark on the AdS / CFT correspondence and the renormalization group flow," *Phys.Lett. B* 442 (1998) 152-158 hep-th/9806217 [hep-th]; E. T. Akhmedov, "Notes on multitrace operators and holographic renormalization group," hep-th/0202055 [hep-th].
- 23 P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics, *Phys. Rev. Lett.* 94, 111601 (2005), [arXiv:hep-th/0405231]; P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, Holography and hydrodynamics: Diffusion on stretched horizons, *JHEP* 0310, 064 (2003), [arXiv:hep-th/0309213]; A. Buchel and J. T. Liu, Universality of the shear viscosity in supergravity, *Phys. Rev.Lett.* 93, 090602 (2004), [arXiv:hep-th/0311175]; A. Buchel, On universality of stress-energy tensor correlation functions in supergravity, *Phys. Lett. B* 609, 392 (2005), [arXiv:hep-th/0408095]; A. Buchel, J. T. Liu and A. O. Starinets, Coupling constant dependence of the shear viscosity in N=4 supersymmetric Yang-Mills theory, *Nucl. Phys. B* 707, 56 (2005), [arXiv:hep-th/0406264].
- 24 Y. Kats and P. Petrov, Effect of curvature squared corrections in AdS on the viscosity of the dual gauge theory, *JHEP* 0901, 044 (2009) [arXiv:0712.0743 [hep-th]]; R. C. Myers, M. F. Paulos and A. Sinha, Holographic Hydrodynamics with a Chemical Potential, *JHEP* 0906, 006 (2009) [arXiv:0903.2834 [hep-th]]; X.-H. Ge and S.-J. Sin, Shear viscosity, instability and the upper bound of the Gauss-Bonnet coupling constant, *JHEP* 05 (2009) 051 [arXiv:0903.2527]; X.-H. Ge, S. J. Sin, et al, Shear viscosity and instability from third order Lovelock gravity, *Phys. Rev. D*, 80,104019 (2009).
- 25 J. T. Liu, W. Sabra and Z. Zhao, Holographic c-theorems and higher derivative gravity, arXiv:1012.3382 [hep-th]; A. Sinha, On higher derivative gravity, c-theorems and cosmology, *Class. Quant.Grav.* 28, 085002 (2011) [arXiv:1008.4315 [hep-th]]; M. F. Paulos, Holographic phase space: c-functions and black holes as renormalization group flows, *JHEP* 1105, 043 (2011) [arXiv:1101.5993 [hep-th]]; Mohamed M. Anber and David Kastor, C-Functions in Lovelock Gravity, *JHEP* 0805:061,2008, arXiv:0802.1290 [hep-th].
- 26 P. Breitenlohner and D. Z. Freedman, *PLB* {115}{1982}{197}; *Ann.Phys.* 144(1982)249.
- 27 A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Chur, Switzerland: Harwood (1987), *Contemporary Concepts in Physics* 3.
- 28 A. M. Polyakov, Conformal symmetry of critical fluctuations, *JETP Lett.* 12 (1970) 381.
- 29 J. L. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*, Cambridge Lecture notes in Physics 5, Cambridge University Press 1996; J. L. Cardy, *Conformal Invariance And Statistical Mechanics*, 1988 Les Houches lectures.
- 30 U. Camara dS, C. P. Constantinidis and G. M. Sotkov, *New Massive Gravity Holography*; arXiv:1009.2665.
- 31 G. Mussardo, *Statistical Field Theory*, Oxford University Press Inc., New York, 2010.

- 32 A. Sinha, "On the new massive gravity and AdS/CFT," JHEP **1006** (2010) 061 [arXiv:1003.0683 [hep-th]].
- 33 H.L.C. Louzada, U. Camara dS and G.M. Sotkov, Massive 3D Gravity Big-Bounce, Phys. Lett. B **686** (2010) 268,[arXiv:1001.3622 [hep-th]].
- 34 U. Camara dS and G.Sotkov; Geometry of the new massive gravity domain walls; PoS ICF2010(2010)026.
- 35 V. K. Dobrev, G. Mack, V. B. Petkova, S. G. Petrova and I. T. Todorov, "Harmonic Analysis On The N-Dimensional Lorentz Group And Its Application To Conformal Quantum Field Theory," Lecture Notes in Physics 63 (Berlin 1977, 280 pg); I. T. Todorov, M. C. Mintchev and V. B. Petkova, "Conformal Invariance In Quantum Field Theory," Pisa, Italy: Sc. Norm. Sup. 1978, 273p.
- 36 D.Anselmi, "Anomalies, unitarity and quantum irreversibility," Annals Phys. 276, 361 (1999), [hep-th/9903059].
- 37 I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, "F-Theorem without Supersymmetry," JHEP 1110 (2011) 038, arXiv:1105.4598 [hep-th].
- 38 A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, "Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory," NPB{241}{1984}{333}.
- 39 D.Anselmi, Exact results on quantum field theories interpolating between pairs of conformal field theories, Talk given at Conference: C99-05-27, p.551-559, e-Print: hep-th/9910255 [hep-th];D.Anselmi, Towards the classification of conformal field theories in arbitrary dimension, Phys.Lett. B476 (2000) 182-187, hep-th/9908014 [hep-th]; D.Anselmi, Quantum irreversibility in arbitrary dimension, Nucl.Phys. B567 (2000) 331-359, hep-th/9905005 [hep-th].
- 40 D.Anselmi, Quantum conformal algebras and closed conformal field theory, Nucl.Phys. B554 (1999) 415-436, hep-th/9811149 [hep-th]
- 41 H.Osborn, Derivation of a Four-Dimensional c-theorem, Phys. Lett. B 222, 97 (1989).
- 42 G.M.Sotkov and R.P.Zaikov, Conformal Invariant Two Point and Three Point Functions for Fields with Arbitrary Spin, Rept.Math.Phys. 12 (1977) 375; G.M.Sotkov and R.P.Zaikov, On The Structure Of The Conformal Covariant N Point Functions, Rept.Math.Phys. 19 (1984) 335.
- 43 Z.Komargodski and A.Schwimmer, On Renormalization Group Flows in Four Dimensions, arXiv:1107.3987[hep-th]; Z.Komargodski, The Constraints of Conformal Symmetry on RG Flows, arXiv:1112.4538 [hep-th].

- 44 H.Osborn and A.C.Petkou, Implications of Conformal Invariance in Field Theories for General Dimensions, *Annals Phys.* 231, 311 (1994) [arXiv:hep-th/9307010]; J.Erdmenger and H.Osborn, Conserved currents and the energy-momentum tensor in conformally invariant theories for general dimensions, *Nucl. Phys. B* 483, 431 (1997) [arXiv:hep-th/9605009]; J.I.Latorre, H.Osborn, Positivity and the energy momentum tensor in quantum field theory, *Nucl.Phys. B* 511 (1998) 737, hep-th/9703196 [hep-th]
- 45 M.H. Dehghani, A. Bazrafshan, R.B. Mann, M.R. Mehdizadeh, M. Ghanaatian, Black Holes in Quartic Quasitopological Gravity , e-Print: arXiv:1109.4708 [hep-th].
- 46 S.Ryu and T.Takayanagi, Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT, *Phys. Rev. Lett.* 96, 181602 (2006) [arXiv:hep-th/0603001]; S.Ryu and T.Takayanagi, Aspects of holographic entanglement entropy, *JHEP* 0608, 045 (2006) [arXiv:hep-th/0605073].
- 47 V.A.Miransky and K.Yamawaki, Conformal phase transition in gauge theories, *Phys. Rev. D* 55 (1997) 5051, Erratum-ibid. *D* 56 (1997) 3768, arXiv:hep-th/9611142.
- 48 D.B.Kaplan, J.-W.Lee, D.T.Son and M.A.Stephanov, Conformality Lost, *Phys. Rev. D* 80, 125005 (2009), arXiv:0905.4752[hep-th].
- 49 D.Kutasov, J.Lin and A.Parnachev, Conformal Phase Transitions at Weak and Strong Coupling, *Nucl.Phys. B* 858 (2012) 155-195, arXiv:1107.2324 [hep-th].
- 50 N.Seiberg, Exact results on the space of vacua of four-dimensional SUSY gauge theories, *Phys. Rev. D* 49 (1994) 6857, arXiv:hep-th/9402044; N.Seiberg, Electric - magnetic duality in supersymmetric nonAbelian gauge theories, *Nucl. Phys. B* 435 (1995) 129, arXiv:hep-th/9411149.
- 51 Matti Jarvinen and Elias Kiritsis, Holographic Models for QCD in the Veneziano Limit, *JHEP* 1203 (2012) 002, arXiv:1112.1261 [hep-ph]; E.Kiritsis, Dissecting the string theory dual of QCD, *Fortsch. Phys.* 57 (2009) 396 arXiv:0901.1772[hep-th]; U. Gursoy, E.Kiritsis, L.Mazzanti and F. Nitti, Holography and Thermodynamics of 5D Dilaton-gravity, *JHEP* 0905 (2009) 033, arXiv:0812.0792[hep-th].
- 52 G. Veneziano, U(1) Without Instantons, *Nucl. Phys. B* 159 (1979) 213; T. Banks and A. Zaks, On the Phase Structure of Vector-Like Gauge Theories with Massless Fermions, *Nucl. Phys. B* 196 (1982) 189.
- 53 Robert C. Myers and Ajay Singh; Comments on Holography Entanglement Entropic and RG Flows; arXiv:1202.2068.
- 54 Sang-Heon Yi, Born-Infeld Type Extension of (Non-)Critical Gravity, arXiv:1203.3383 [hep-th].

- 55 Miguel F. Paulos and Andrew J. Tolley, Massive Gravity Theories and limits of Ghost-free Bigravity models, arXiv:1203.4268 [hep-th].
- 56 Jorge Zanelli ,Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008) 82 pp.,hep-th/0502193; P. Mora , R. Olea , R. Troncoso and J. Zanelli ,Finite action principle for Chern-Simons AdS gravity, JHEP 0406 (2004) 036, e-Print: hep-th/0405267.
- 57 H. Boschi-Filho and N. R. F. Braga, "Gauge / string duality and scalar glueball mass ratios," JHEP **0305** (2003) 009 [hep-th/0212207].
H. Boschi-Filho and N. R. F. Braga, "QCD / string holographic mapping and glueball mass spectrum," Eur. Phys. J. C **32** (2004) 529 [hep-th/0209080].
- 58 C. Csaki, H. Ooguri, Y. Oz and J. Terning, "Glueball mass spectrum from supergravity," JHEP **9901** (1999) 017 [hep-th/9806021].
- 59 L. Susskind, "The World as a hologram," J. Math. Phys. **36** (1995) 6377 [hep-th/9409089].
G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity," gr-qc/9310026.
- 60 J. McGreevy, "Holographic duality with a view toward many-body physics," Adv. High Energy Phys. **2010** (2010) 723105 [arXiv:0909.0518 [hep-th]].
- 61 S. A. Hartnoll, "Lectures on holographic methods for condensed matter physics," Class. Quant. Grav. **26** (2009) 224002 [arXiv:0903.3246 [hep-th]].
- 62 M. Eto, N. Maru and N. Sakai, "Stability and fluctuations on walls in N=1 supergravity," Nucl. Phys. B **673** (2003) 98 [hep-th/0307206].
- 63 M. Berg, M. Haack and W. Mueck, "Glueballs vs. Gluinoballs: Fluctuation Spectra in Non-AdS/Non-CFT," Nucl. Phys. B **789** (2008) 1 [hep-th/0612224].
- 64 W. Mueck and M. Prisco, "Glueball scattering amplitudes from holography," JHEP **0404** (2004) 037 [hep-th/0402068].
- 65 G. M. Sotkov and U. Camara dS, "Holographic RG Flows from Quasi-Topological Gravity," arXiv:1207.0778 [hep-th].
- 66 H.E. Stanley, "Introduction to phase transitions and critical phenomena," Oxford University press, 1971.
- 67 Kadanoff, L.P. "Physics 2", 268; "Physics 2", 270 (1968)
- 68 Feynman e Hibbs, "Quantum Mechanics and Integrals," 1965 by McGraw-Hill.

- 69 Kerson Huang, "Quantum Field Theory from operators to path integrals, Second, Revised and Enlarged Edition," 2010 Wiley-VCH.
- 70 A. Cappelli and A. Coste, "On The Stress Tensor Of Conformal Field Theories In Higher Dimensions," Nucl. Phys. B **314** (1989) 707.
- 71 A. Cappelli and A. Coste, "Properties Of The Stress Tensor In More Than Two-dimensions," IN *ANNECY 1988, PROCEEDINGS, CONFORMAL FIELD THEORIES AND RELATED TOPICS* 57-64.
- 72 I. Bengtsson, "Anti-de Sitter space", lecture notes, <http://www.physto.se/ingemar/>.
- 73 G.T. Fleming, "SU(3) lattice gauge theory for two, six, and ten flavors", PoS, LATTICE2010:049, 2010.
- 74 L. Del Debbio, "The conformal window on the lattice," PoS LATTICE **2010** (2010) 004.
- 75 Y. Iwasaki, K. Kanaya, S. Kaya, S. Sakai and T. Yoshie, "Phase structure of lattice QCD for general number of flavors," Phys. Rev. D **69** (2004) 014507 [hep-lat/0309159].
- 76 McGreevy, John. 8.821 String Theory, Fall 2008. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare), <http://ocw.mit.edu> (Accessed 29 Jan, 2013). License: Creative Commons BY-NC-SA.
- 77 Birrel, N.D. e Davies, P.C.W., "Quantum fields in curved space," Cambridge University Press 1982.
- 78 H. Liu and A. A. Tseytlin, "D = 4 superYang-Mills, D = 5 gauged supergravity, and D = 4 conformal supergravity," Nucl. Phys. B **533** (1998) 88 [hep-th/9804083].
- 79 J. Sonner and P. K. Townsend, "Dilaton domain walls and dynamical systems," Class. Quant. Grav. **23** (2006) 441 [hep-th/0510115]; J. Sonner and P. K. Townsend, "Axion-Dilaton Domain Walls and Fake Supergravity," Class. Quant. Grav. **24** (2007) 3479 [hep-th/0703276].
- 80 L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1975), "The Classical Theory of Fields. Vol. 2", (4th ed.). Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-7506-2768-9.
- 81 Fred Cooper, Avinash Khare, Uday Sukhatme, "Supersymmetry in Quantum Mechanics," World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2001.
- 82 I. P. Neupane, "Effective Lagrangian from higher curvature terms: Absence of vDVZ discontinuity in AdS space," Class. Quant. Grav. **19** (2002) 1167; Y. M. Cho and I. P. Neupane, "Warped brane-world compactification with Gauss-Bonnet term," Int. J. Mod. Phys. A **18** (2003) 2703 [hep-th/0112227]. [hep-th/0108194].

- 83 Nivaldo A. Lemos, "Mecânica Analítica," 2 ed., São Paulo: Editora Livraria da Física: 2007.
- 84 A. O. Gogolin, A. A. Nersesyan, A. M. Tselik "Bosonization and Strongly Correlated Systems," Cambridge University Press-1998.
- 85 V. L. Beresinskii, *Sov. Phy. JEPT* **32**, 493 (1971); J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C***6**, 1181 (1973).
- 86 L. D. Landau, E. M. Lifshitz, "Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Vol. 3," (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-020940-1. (1977).
- 87 Steven Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity," by John Wiley & Sons, Inc. (1972).
- 88 Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, David Sénéchal, "Conformal Field Theory," Springer 1997.
- 89 L. F. Abbott and S. Deser, *Nucl. Phys. B*195, 76 (1982); D. G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* 55, 2656 (1985); S. Deser and B. Tekin *Phys. Rev. D* 67, 084009 (2003); C. Charmousis and A. Padilla, "The Instability of Vacua in Gauss-Bonnet Gravity," *JHEP* **0812** (2008) 038 [arXiv:0807.2864 [hep-th]].

Funções especiais

Neste apêndice são apresentadas as definições e algumas propriedades básicas das funções *gamma*, de Bessel, hipergeométrica e hipergeométrica confluyente.

A.1 Função Gamma

Sua definição mais geral é:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} n^z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (\text{A.1.1})$$

a função possui infinitos pólos simples localizados em $z = 0, -1, -2, \dots$. A principal característica da função *gamma* é a propriedade

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.1.2})$$

e como $\Gamma(1) = 1$, então $\Gamma(1+n) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. Por isso é dito que a função *gamma* generaliza o fatorial.

Uma representação integral da função *gamma* é

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (\text{A.1.3})$$

válida apenas para $\Re(z) > 0$. Uma simples integração por partes de (A.1.3) é suficiente para demonstrar (A.1.2).

A.2 Funções de Bessel

A.2.1 Funções de Bessel de primeiro e segundo tipo

As funções de Bessel de primeiro e segundo tipo podem ser definidas, respectivamente como:

$$J_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}, \quad (\text{A.2.1})$$

$$N_\nu(x) = \frac{\cos(\nu x) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu x)}, \quad (\text{A.2.2})$$

e elas são as duas soluções *l.i.*, dado ν , da seguinte eq. diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \quad (\text{A.2.3})$$

que possui singularidades nos pontos $x = 0, \infty$. As formas assintóticas das duas funções ($\nu \notin \mathbb{N}$) para $x \ll 1$ são

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \dots, \quad (\text{A.2.4})$$

$$N_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \dots \quad (\text{A.2.5})$$

e para $x \gg 1$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2} \right] + \dots \quad (\text{A.2.6})$$

$$N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2} \right] + \dots \quad (\text{A.2.7})$$

A.2.2 Funções de Bessel modificadas

As funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo são definidas respectivamente como:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n+\nu-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}, \quad (\text{A.2.8})$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \sin \nu\pi}, \quad (\text{A.2.9})$$

soluções da EDO de segunda ordem

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + \nu^2)y(x) = 0. \quad (\text{A.2.10})$$

singular em $x = 0, \infty$. As formas assintóticas das funções são ($\nu \notin \mathbb{N}$):

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \dots, \quad (\text{A.2.11})$$

$$K_\nu(x) \approx \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \dots, \quad (\text{A.2.12})$$

se $x \ll 1$. Já para $x \gg 1$

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x + \dots, \quad (\text{A.2.13})$$

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + \dots. \quad (\text{A.2.14})$$

A.3 Função hipergeométrica

A representação em série de potências da função hipergeométrica é:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \Gamma(c+n) \frac{x^n}{n!}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{A.3.1})$$

Ela é uma das soluções da seguinte EDO de segunda ordem

$$x(1-x)y''(x) + (c - (a+b+1)x)y'(x) - aby(x) = 0, \quad (\text{A.3.2})$$

repare na simetria $a \leftrightarrow b$. A EDO acima é singular em três pontos $x = 0, 1, \infty$. As formas assintóticas da função hipergeométrica nas proximidades de $x = 1$ e $|x| \rightarrow \infty$ são, respectivamente:

$${}_2F_1(a, b; c; x) \stackrel{x \rightarrow 1}{\approx} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-x)^{c-a-b}, \quad (\text{A.3.3})$$

$${}_2F_1(a, b; c; x) \stackrel{|x| \gg 1}{\approx} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-x)^{-a} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} (-x)^{-b}. \quad (\text{A.3.4})$$

A.4 Função hipergeométrica confluyente

Sua definição é dada pelo seguinte limite da função hipergeométrica

$${}_1F_1(a; c; x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} {}_2F_1(a, 1/\epsilon; c; \epsilon x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!}, \quad (\text{A.4.1})$$

ao tomar o mesmo limite em (A.3.2) vê-se que a função hipergeométrica confluyente é uma das soluções da EDO

$$xy''(x) + (c - x)y'(x) - ay(x) = 0, \quad (\text{A.4.2})$$

que possui singularidades em $x = 0, \infty$ - a singularidade em $x = 1$ da hipergeométrica flui para o infinito no limite $\epsilon \rightarrow 0$, por isso o nome *confluyente*. A forma assintótica da função hipergeométrica confluyente para grandes valores de x é:

$${}_1F_1(a; c; x) \stackrel{|x| \gg 1}{\approx} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c}. \quad (\text{A.4.3})$$

APÊNDICE B

Funções de três pontos

A construção da função de três pontos do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ segue o mesmo raciocínio utilizado na seção 3.2.2 para a dedução da função de dois pontos (eq. (3.2.22)). Precisamos encontrar todas as estruturas tensoriais independentes com seis índices covariantes sob as transformações conformes e que respeitem as simetrias do $T_{\mu\nu}$ de uma CFT_D , *i.e.* $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ e $T^\mu{}_\mu = 0$. Existem três termos compatíveis com todas as condições, logo há três constantes arbitrárias, chamadas de \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} , responsáveis pela descrição da dinâmica da CFT_D em questão (41, 42):

$$\begin{aligned} & \langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(y)T_{\alpha\beta}(z) \rangle = \\ & ((x-z)^2(y-z)^2)^{-D} \mathcal{J}_{\mu\nu,\mu'\nu'}(x-y)\mathcal{J}_{\sigma\rho,\sigma'\rho'}(y-z)t_{\alpha\beta}^{\mu'\nu',\rho'\sigma'}(\mathcal{Z}), \end{aligned} \quad (\text{B.0.1})$$

onde:

$$\mathcal{Z}_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu^2 \ln \left(\frac{(z-y)^2}{(z-x)^2} \right), \quad (\text{B.0.2})$$

$$\mathcal{Z}^\mu \mathcal{Z}_\mu \equiv \mathcal{Z}^2 = \frac{(x-y)^2}{(z-y)^2(z-x)^2}, \quad (\text{B.0.3})$$

$\mathcal{J}_{\mu\nu,\rho\sigma}$ é o mesmo definido na eq. (3.2.22) e*:

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu,\sigma\rho}(\mathcal{Z}) &= \mathcal{A}\epsilon_{\mu\nu,\tau\eta}\epsilon_{\sigma\rho,\eta\lambda}\epsilon_{\alpha\beta,\lambda\tau}(\mathcal{Z}^2)^{-D/2} + \\
&(\mathcal{B} - 2\mathcal{A})\epsilon_{\alpha\beta,\tau\eta}\epsilon_{\sigma\rho,\eta\kappa}\epsilon_{\mu\nu,\lambda\tau}\mathcal{Z}_\kappa\mathcal{Z}_\lambda(\mathcal{Z}^2)^{-1-D/2} - \\
&\mathcal{B}\frac{\mathcal{Z}_\kappa\mathcal{Z}_\lambda}{(\mathcal{Z}^2)^{1+D/2}}(\epsilon_{\mu\nu,\tau\eta}\epsilon_{\sigma\rho,\eta\kappa}\epsilon_{\alpha\beta,\lambda\tau} + \text{perm. } (\mu,\nu) \leftrightarrow (\sigma,\rho)) + \\
\mathcal{C} &\left[\epsilon_{\mu\nu,\sigma\rho}\left(\frac{\mathcal{Z}_\alpha\mathcal{Z}_\beta}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{D}\right) + \epsilon_{\sigma\rho,\alpha\beta}\left(\frac{\mathcal{Z}_\mu\mathcal{Z}_\nu}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D}\right) + \epsilon_{\alpha\beta,\mu\nu}\left(\frac{\mathcal{Z}_\sigma\mathcal{Z}_\rho}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\eta_{\sigma\rho}}{D}\right) \right] (\mathcal{Z}^2)^{-D/2} + \\
(\mathcal{D} - 4\mathcal{C}) &\epsilon_{\mu\nu,\tau\kappa}\epsilon_{\sigma\rho,\tau\lambda}\left(\frac{\mathcal{Z}_\alpha\mathcal{Z}_\beta}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{D}\right)\frac{\mathcal{Z}_\kappa\mathcal{Z}_\lambda}{(\mathcal{Z}^2)^{1+D/2}} - \\
(\mathcal{D} - 2\mathcal{B}) &\left[\epsilon_{\sigma\rho,\tau\kappa}\epsilon_{\alpha\beta,\tau\lambda}\left(\frac{\mathcal{Z}_\mu\mathcal{Z}_\nu}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D}\right) + \text{perm. } (\mu\nu) \leftrightarrow (\rho,\sigma) \right] \frac{\mathcal{Z}_\kappa\mathcal{Z}_\lambda}{(\mathcal{Z}^2)^{1+D/2}} + \\
(\mathcal{E} + 4\mathcal{C} - 2\mathcal{D}) &(\mathcal{Z}^2)^{-1-D/2}\left(\frac{\mathcal{Z}_\mu\mathcal{Z}_\nu}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D}\right)\left(\frac{\mathcal{Z}_\sigma\mathcal{Z}_\rho}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\eta_{\sigma\rho}}{D}\right)\left(\frac{\mathcal{Z}_\alpha\mathcal{Z}_\beta}{\mathcal{Z}^2} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{D}\right), \quad (\text{B.0.4})
\end{aligned}$$

com

$$\epsilon_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) - \frac{1}{D}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}, \quad (\text{B.0.5})$$

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{2}[(D^2 - 4)\mathcal{A} + (D + 2)\mathcal{B} - 4\mathcal{D}\mathcal{C}], \quad (\text{B.0.6})$$

$$\mathcal{E} \equiv [D(D + 6)\mathcal{B} + 4(D^2 - 4)\mathcal{A} - 2D(D + 10)\mathcal{C}]. \quad (\text{B.0.7})$$

A forma explícita da versão euclidiana de (B.0.1) para $D = 4$ foi deduzida originalmente na referência (42). O resultado em D dimensões foi feito no artigo (44) de Osborn e Petkou.

*neste apêndice é usada a mesma notação das seções 3.3 e 3.4, a dimensão da teoria conforme (holográfica) é $D = d - 1$.

Funções de três pontos como distribuições

Devido a complexidade da forma explícita da função do produto de três $T_{\mu\nu}$'s (eq. (B.0.1)), na seção 3.3 foram apresentados apenas alguns argumentos a respeito da natureza dos termos “anômalos” e os resultados originais obtidos nos artigos (41, 44) foram declarados sem detalhes. Aqui é considerado um exemplo mais simples que permite uma descrição completa do método usados na regularização. Tenha a seguinte quantidade*:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x_1)S_{\Delta}(x_2)S_{\Delta}(x_3) \rangle = & \frac{g_{TSS}}{(x_{12}^2 x_{13}^2)^{(D-2)/2}} (x_{23}^2)^{(D-2-\Delta)/2} \\ & \times \left[\partial_{\mu}^{(1)} \ln \frac{x_{13}^2}{x_{12}^2} \partial^{(1)} \ln \frac{x_{13}^2}{x_{12}^2} - \frac{4}{D} \eta_{\mu\nu} \frac{x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{13}^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.0.1})$$

Para $\Delta = \frac{D}{2} + k$ ($k = 0, 1, \dots, D$ par) a função de dois pontos

$$\langle S_{\Delta}(x)S_{\Delta}(0) \rangle = \frac{C_2(\Delta, D)}{(x^2)^{\Delta}}, \quad (\text{C.0.2})$$

possui um pólo em $x = 0$. A forma de regularização adotada é dada por:

$$(x^2)^{-\Delta} \sim (x^{-2\Delta})_{sing} = \lim_{\Delta \rightarrow \frac{D}{2} + k} \left(\frac{2\Omega_{D-1}}{\frac{D}{2} + k - \Delta} \right) \frac{\Gamma(D/2)}{4^k k! \Gamma(\frac{D}{2} + k)} \square^k \Delta^D(x). \quad (\text{C.0.3})$$

Devido a identidade

$$(x^2)^{-(\frac{D}{2}+k)} = \frac{\Gamma(D/2)}{4^k k! \Gamma(\frac{D}{2} + k)} \square^k ((x^2)^{-D/2}), \quad (\text{C.0.4})$$

*neste apêndice é usada a mesma notação das seções 3.3 e 3.4, a dimensão da teoria conforme (holográfica) é $D = d - 1$.

é suficiente considerar somente o caso $k = 0$. Introduzindo a renormalização:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m \left(\frac{1}{(x^2)^{D/2}} \right) &= \lim_{\Delta \rightarrow D/2} \left[\frac{1}{(x^2)^\Delta} - \frac{m^{2\Delta-D}}{D-2\Delta} \Omega_{D-1} \delta^D(x) \right] \\ &= -\frac{1}{2(D-2)} \square \left[\frac{1}{(x^2)^{(D-2)/2}} \left(\frac{2}{D-2} + \ln(m^2 x^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.0.5})$$

o pólo em $x = 0$ é eliminado e $(x^2)^{-D/2}$ deve ser encadado como a distribuição $\mathcal{R}_m((x^2)^{-D/2})$. O mesmo procedimento é aplicado à renormalização da função de três pontos (C.0.1) ($\Delta = D/2 + k$, D é par)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m \langle T_{\mu\nu}(x_1) S(x_2) S(x_3) \rangle &= g_{TSS} \left\{ \frac{1}{(D-2)^2} \left(\partial_\mu^{(1)} \partial_\nu^{(1)} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D} \square^{(1)} \right) \left(\frac{(x_{23}^2)^{\frac{D-2}{2}-\Delta}}{(x_{12}^2 x_{13}^2)^{(D-2)/2}} \right) - \right. \\ &\frac{2(x_{23}^2)^{-\Delta-(D-2)/2}}{(D-2)^2} \left[(x_{13}^2)^{-(D-2)/2} \left(\partial_\mu^{(1)} \partial_\nu^{(1)} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D} \square^{(1)} \right) (x_{12}^2)^{-(D-2)/2} + (x_{13}^2 \leftrightarrow x_{12}^2) \right] + \\ &\frac{(D-\Delta)(D-1)}{D^2 \Delta} \Omega_{D-1} \eta_{\mu\nu} (\delta^D(x_{12}) + \delta^D(x_{13})) \mathcal{R}((x_{23}^2)^{-\Delta}) + \\ &\left. \frac{\pi^D (D-1) \eta_{\mu\nu}}{D^2 4^{k-1} k! \Gamma(D/2) \Gamma(\Delta+1+D/2)} (\square^{(1)})^{\Delta-D/2} (\delta^D(x_{12}) \delta^D(x_{13})) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.6})$$

Uma consequência desta eq. são as IW conformes:

$$\partial^\mu [\mathcal{R}_m \langle T_{\mu\nu}(x_1) S_\Delta(x_2) S_\Delta(x_3) \rangle] = C_2(\Delta, D) [\partial_\nu \delta^D(x_{12}) + \partial_\nu \delta^D(x_{13})] \mathcal{R}((x_{23}^2)^{-\Delta}),$$

que determinam a constante g_{TSS} da função de três pontos como:

$$g_{TSS} = \frac{D\Delta}{(D-1)\Omega_{D-1}} C_2(\Delta, D). \quad (\text{C.0.7})$$

Por fim a expressão das anomalias conformes toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \mathcal{R}_m \langle T_{\mu\nu}(x_1) S(x_2) S(x_3) \rangle &= (d-\Delta) C_2(\Delta, D) (\delta^D(x_{12}) + \delta^D(x_{13})) (\mathcal{R}_m(x_{23}^2)^{-\Delta}) + \\ &\frac{\pi^{D/2}}{k! \Gamma(k+D/2)} (\square^{(1)})^k \delta^D(x_{12}) \delta^D(x_{13}), \end{aligned} \quad (\text{C.0.8})$$

lembrando que $\Delta = k + D/2$ e D é par.

Cálculos das flutuações lineares

D.1 Flutuações no calibre de Newton

Uma vez escolhido o calibre (eq. (5.5.62)), já é possível calcular as quantidades do lado direito de (5.5.60). Os resultados são (62):

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{T}_{\mu\nu} = -\frac{(d-2)}{2}\dot{\bar{\sigma}}^2 - dV(\bar{\sigma}), \\ T^{(1)} &= -(d-2)\dot{\bar{\sigma}}\partial_y\phi - (d-2)(d-3)\dot{\bar{\sigma}}^2 B - d\partial_{\bar{\sigma}}V(\bar{\sigma})\phi \\ T_{yi}^{(1)} &= \dot{\bar{\sigma}}\partial_i\phi \\ T_{ij}^{(1)} &= -e^{2A}\eta_{ij}(\dot{\bar{\sigma}}\partial_y\phi + (d-3)\dot{\bar{\sigma}}^2 B + \partial_{\bar{\sigma}}V(\bar{\sigma})\phi) - e^{2A}(h_{ij}^{TT} + 2\eta_{ij}B)\left(\frac{\dot{\bar{\sigma}}^2}{2} + V(\bar{\sigma})\right) \\ T_{yy}^{(1)} &= \dot{\bar{\sigma}}\partial_y\phi + 2(d-3)V(\bar{\sigma})B - \partial_{\bar{\sigma}}V(\bar{\sigma})\phi,\end{aligned}$$

juntando-os temos

$$\left(T_{yi} - \frac{g_{yi}}{d-2}T\right)^{(1)} = T_{yi}^{(1)} = \dot{\bar{\sigma}}\partial_i\phi \quad (\text{D.1.1})$$

$$\left(T_{ij} - \frac{g_{ij}}{d-2}T\right)^{(1)} = \frac{2e^{2A}}{(d-2)}[V(\bar{\sigma})h_{ij}^{TT} + (2V(\bar{\sigma})B + \partial_{\bar{\sigma}}V(\bar{\sigma})\phi)\eta_{ij}] \quad (\text{D.1.2})$$

$$\left(T_{yy} - \frac{g_{yy}}{d-2}T\right)^{(1)} = 2\dot{\bar{\sigma}}\partial_y\phi + \frac{2\partial_{\bar{\sigma}}V(\bar{\sigma})}{(d-2)}\phi - \frac{4(d-3)}{(d-2)}V(\bar{\sigma})B. \quad (\text{D.1.3})$$

A próxima etapa é calcular as componentes de $R_{\mu\nu}^{(1)}$ através de sua definição mais a eq. (5.5.62). Alguns dos resultados intermediários obtidos através das eqs. gerais

$$\bar{\nabla}_{\mu}h_{\alpha\beta} = \partial_{\mu}h_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\rho}h_{\rho\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^{\rho}h_{\alpha\rho} \quad (\text{D.1.4})$$

$$\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}h_{\alpha\beta} = \partial_{\mu}(\bar{\nabla}_{\nu}h_{\alpha\beta}) - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}\bar{\nabla}_{\rho}h_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\rho}\bar{\nabla}_{\nu}h_{\rho\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^{\rho}\bar{\nabla}_{\nu}h_{\alpha\rho}, \quad (\text{D.1.5})$$

são

$$\bar{\nabla}_y h_{yy} = \partial_y h_{yy} = -2(d-3)\partial_y B,$$

$$\bar{\nabla}_i h_{jk} = e^{2A} (\partial_i h_{jk}^{TT} + 2\eta_{jk}\partial_i B),$$

$$\bar{\nabla}_i h_{yy} = -2(d-3)\partial_i B,$$

$$\bar{\nabla}_i h_{yj} = -\dot{A}e^{2A} (h_{ij}^{TT} + 2(d-2)B\eta_{ij}),$$

$$\bar{\nabla}_y h_{jk} = e^{2A}\partial_y (h_{jk}^{TT} + 2B\eta_{jk}),$$

$$\bar{\nabla}_y h_{yi} = 0,$$

$$\bar{\nabla}^2 h_{yk} = -4(d-2)\dot{A}\partial_k B,$$

$$\bar{\nabla}_y \bar{\nabla}_k h = 4 (\partial_y \partial_k B - \dot{A}\partial_k B), \quad h = \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu},$$

$$\bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_y h_{\alpha k} = 2\partial_y \partial_k B - 2\dot{A}\partial_k B,$$

$$\bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_k h_{\alpha y} = -2(d-3)\partial_y \partial_k B - 2(d(d-3) + 3)\dot{A}\partial_k B,$$

$$\bar{\nabla}^2 h = 4 (\partial_y^2 B + e^{-2A}\square_{d-1}B + (d-1)\dot{A}\partial_y B), \quad \square_{d-1} \equiv \eta^{ij}\partial_i\partial_j,$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h^{\mu\nu} &= 2e^{-2A}\square_{d-1}B - 2(d-3)\partial_y^2 B - 2(d-2)(d-1)\ddot{A}B \\ &\quad - 2(d-1)(2d-5)\dot{A}\partial_y B - 2(d-1)^2(d-2)\dot{A}^2 B, \end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j h = 4 (\partial_i\partial_j B + \dot{A}e^{2A}\eta_{ij}\partial_y B),$$

$$\bar{\nabla}^\rho (\bar{\nabla}_j h_{\rho i}) = \bar{\nabla}^\rho (\bar{\nabla}_i h_{\rho j}) = -\ddot{A}e^{2A}(h_{ij}^{TT} + 2(d-2)\eta_{ij}B)$$

$$- 2(d-3)\dot{A}e^{2A}\eta_{ij}\partial_y B + 2\partial_i\partial_j B - d\dot{A}^2e^{2A}(h_{ij}^{TT} + 2(d-2)\eta_{ij}B),$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 h_{ij} &= e^{2A}\partial_y^2 (h_{ij}^{TT} + 2B\eta_{ij}) + \square_{d-1}h_{ij}^{TT} + 2\eta_{ij}\square_{d-1}B + (d-1)\dot{A}e^{2A}\partial_y (h_{ij}^{TT} + 2B\eta_{ij}) \\ &\quad - 2\dot{A}^2e^{2A}(h_{ij}^{TT} + 2(d-2)B\eta_{ij}), \end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_y \bar{\nabla}_y h = 4\partial_y^2 B,$$

$$\bar{\nabla}^2 h_{yy} = -2(d-3)\partial_y^2 B - 2(d-3)e^{-2A}\square_{d-1}B - 2(d-1)(d-3)\dot{A}\partial_y B + 4(d-1)(d-2)\dot{A}^2 B,$$

$$\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_y h_{\rho y} = -2(d-3)\partial_y^2 B - 2(d-1)(d-2)\dot{A}\partial_y B + 2(d-1)(d-2)\dot{A}^2 B.$$

As componentes de $R_{\mu\nu}^{(1)}$ ficam

$$R_{yi}^{(1)} = -(d-2)\partial_i (\partial_y B + (d-3)\dot{A}B) \quad (\text{D.1.6})$$

$$R_{ij}^{(1)} = -\frac{e^{2A}}{2} \left(e^{-2A}\square_{d-1} + \partial_y^2 + (d-1)\dot{A}\partial_y + 2(d-1)\dot{A}^2 + 2\ddot{A} \right) h_{ij}^{TT} \quad (\text{D.1.7})$$

$$- \eta_{ij}e^{2A} \left(e^{-2A}\square_{d-1} + \partial_y^2 + (3d-5)\dot{A}\partial_y + 2(d-2)\ddot{A} + 2(d-1)(d-2)\dot{A}^2 \right) B$$

$$R_{yy}^{(1)} = \left[(d-3)e^{2A}\square_{d-1} - (d-1)^2\dot{A}\partial_y - (d-1)\partial_y^2 \right] B. \quad (\text{D.1.8})$$

Com os resultados acima em (5.5.60), as eqs. (5.5.63)-(5.5.66) são obtidas.

D.2 Resultados da linearização dos termos quadráticos na gravitação com termo de GB

Segue uma compilação dos termos linearizados usados na seção 6.5 (82):

$$I_{\mu\nu}^{(1)} = \left(\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} \right) R^{(1)} - \frac{1}{4}h_{\mu\nu} (\bar{R})^2 + \bar{R}R_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (\text{D.2.1})$$

$$J_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{\bar{R}}{d}\bar{g}_{\rho\sigma}R^{(1)}{}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} + \bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma}R^{(1)\rho\sigma} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(1)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\bar{R}_{\rho\sigma}\bar{R}^{\rho\sigma} - \left(\bar{R}_{\mu\alpha\nu\sigma}\bar{R}_{\beta}{}^{\sigma} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R}_{\alpha\rho}\bar{R}^{\rho}{}_{\beta} \right) h^{\alpha\beta}, \quad (\text{D.2.2})$$

$$K_{\mu\nu}^{(1)} = \bar{R}_{\mu\rho\alpha\beta}\bar{R}^{(1)}{}_{\nu}{}^{\rho\alpha\beta} + R_{\mu\rho\alpha\beta}^{(1)}\bar{R}_{\nu}{}^{\rho\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R}^{\rho\sigma\alpha\beta}R^{(1)}{}_{\rho\sigma\alpha\beta} - 2\bar{R}_{\mu\rho}R^{(1)}{}_{\nu}{}^{\rho} + 2\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}R^{(1)\alpha\beta} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(1)}\bar{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\bar{R}_{\rho\sigma\alpha\beta}\bar{R}^{\rho\sigma\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \left(\bar{R}_{\mu\alpha\rho\sigma}\bar{R}_{\nu\beta}{}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R}_{\alpha\rho\sigma\delta}\bar{R}_{\beta}{}^{\rho\sigma\delta} + 2\bar{R}_{\mu\alpha\nu\sigma}\bar{R}_{\beta}{}^{\sigma} - 2\bar{R}_{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\beta} \right). \quad (\text{D.2.3})$$

Fluxo holográfico UV→IR no caso GB

Um exemplo de “superpotencial” em forma de um polinômio em σ que permite um fluxo não massivo é dado pelo “ W - Higgs”:

$$W(\sigma) = -\frac{1}{L_1} \left(d - 2 - \frac{|s_1|}{4} \sigma^2 + \frac{\omega}{8} \sigma^4 \right); |s_1|, \omega \geq 0 \quad (\text{E.0.1})$$

a escolha de um polinômio cúbico, ao invés de quártico, aparentemente seria mais propícia, porém a eq. (E.0.1) mostrou resultados analíticos muito mais simples. Pelo fato do “superpotencial” ser par só é preciso considerar o semi-eixo positivo em σ , o que será assumido a partir de agora. Derivando (E.0.1)

$$W'(\sigma) = -\frac{\omega}{2L_1} \sigma \left(\sigma^2 - \frac{|s_1|}{\omega} \right), \quad (\text{E.0.2})$$

é nula nos pontos $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 = \sqrt{\frac{|s_1|}{\omega}}$. O parâmetro L_1 é claramente a escala do vácuo AdS_d associado ao ponto σ_1 . A escala associada ao outro vácuo, σ_2 , será definida como L_2 , portanto $W(\sigma_2) = -\frac{(d-2)}{L_2}$. Pela eq. (E.0.1), L_2 pode ser escrito como:

$$L_2 = \frac{L_1}{1 - \frac{1}{8(d-2)} \frac{|s_1|^2}{\omega}} > L_1. \quad (\text{E.0.3})$$

As hipóteses $|s_1|, \omega > 0$ e $W(\sigma_2) = -\frac{(d-2)}{L_2} < 0$ restringem a forma de $W(\sigma)$. No limite $\sigma \rightarrow \infty$, tem-se $W \rightarrow -\infty$, portanto o extremo $\sigma_1 = 0$ é um mínimo local de $W(\sigma)$ ($W''(0) = \frac{|s_1|}{2L_1} > 0$) e $\sigma_2 = \sqrt{\frac{|s_1|}{\omega}}$ é o máximo global ($W''(\sigma_2) = -\frac{|s_1|}{L_1} < 0$). Como já impomos $W(\sigma_2) = -\frac{(d-2)}{L_2} < 0$, a função $W(\sigma)$ é negativa para todo σ , ver figura (E.1). Os índices

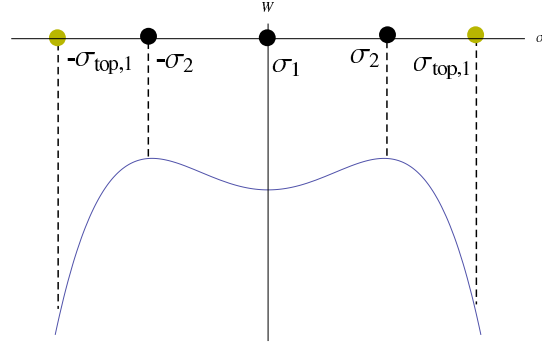


Figura E.1 – Curva típica da eq. (E.0.1). Os pontos fixos físicos, extremos de $W(\sigma)$, estão marcados com pontos pretos. Os vácuos topológicos, quando existem, são os pontos em bege.

críticos e constantes de estrutura associados aos pontos fixos σ_1 e σ_2 são respectivamente:

$$s_{fis,1} = -|s_1|C_0(\sigma_1) = -|s_1| \left(1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_1^2} \right) < 0, \quad (\text{E.0.4})$$

$$C_{\Delta\Delta\Delta,1} = 0, \quad (\text{E.0.5})$$

$$s_{fis,2} = 2 \frac{L_2}{L_1} |s_1| C_0(\sigma_2) = 2 \frac{L_2}{L_1} |s_1| \left(1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_2^2} \right) > 0, \quad (\text{E.0.6})$$

$$C_{\Delta\Delta\Delta,2} = -3 \frac{L_2}{L_1} \sqrt{|s_1| \omega} C_0(\sigma_2) = -3 \frac{L_2}{L_1} \sqrt{|s_1| \omega} \left(1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_2^2} \right) < 0, \quad (\text{E.0.7})$$

pelos resultados acima, se $L_1^2 > 2\lambda L^2 = L_{top}^2$ (condição para $V(\sigma_1) < 0$), o ponto σ_1 é IV e σ_2 é o UV. No caso de um fluxo UV/IV todas as condições físicas discutidas na seção 6.6 são satisfeitas se $L_1^2 > 10\lambda L^2 = 5L_{top}^2$, mesmo no caso $\lambda > 0$, quando há vácuos topológicos.

A função *beta* do modelo é:

$$-\beta(\sigma) = \frac{d\sigma}{d(-A)} = \left(\frac{-2\lambda L^2}{L_1^2} \right) \frac{\omega^2}{8(d-2)} \frac{\sigma(\sigma^2 - \sigma_2^2)}{(\sigma^2 - \sigma_{0,1}^2)(\sigma^2 - \sigma_{0,2}^2)} \times \prod_{i=1}^4 (\sigma^2 - \sigma_{top,i}^2), \quad (\text{E.0.8})$$

$$\sigma_{0,1}^2 = (\sigma_{0,2}^2)^* = \sigma_2^2 \left(1 + i \sqrt{\frac{L_1}{L_2 - L_1}} \right), \quad (\text{E.0.9})$$

$$\sigma_{top,(1,2)}^2 = \sigma_2^2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{L_1}{L_2 - L_1} \left(\frac{L_2}{\sqrt{2\lambda}L} - 1 \right)} \right), \quad (\text{E.0.10})$$

$$\sigma_{top,3}^2 = (\sigma_{top,4}^2)^* = \sigma_2^2 \left(1 + i \sqrt{\frac{L_1}{L_2 - L_1} \left(\frac{L_2}{\sqrt{2\lambda}L} + 1 \right)} \right), \quad (\text{E.0.11})$$

os pontos $\sigma_{0,(1,2)}^2$ são os zeros (complexos) de $W(\sigma)$. Os pontos $\sigma_{top,i}^2$, $i = 1, \dots, 4$, são os zeros da função $C_0(W)$. Pelas nossas escolhas o único vácuo topológico real é $\sigma_{top,1}$ quando $\lambda > 0$.

Por (E.0.10) é possível verificar que $\sigma_{top,1}^2 > \sigma_2^2$ ($L_2 > L_1 > \sqrt{2\lambda}L = L_{top}$), *i.e.* o vácuo topológico, quando existe, está fora do fluxo UV/IR (ver figura E.1). Esse raciocínio é apenas uma constatação do teorema *a & c* demonstrado na seção 6.6.1. Independente de existir ou não vácuos topológicos, é útil definir os “índices críticos” deles utilizando formalmente a eq. (6.4.3), pois eles simplificam o resultado final. Assim

$$s_{top,i} = -\frac{2\lambda L^2}{L_1^2} \frac{\sigma_{top,i}^2}{(d-2)} (\sigma_{top,i}^2 - \sigma_2^2)^2. \quad (\text{E.0.12})$$

As possíveis curvas da função *beta* - nos casos $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$ - estão apresentadas nas figuras E.2(a) e E.2(b) juntamente com os fluxos do GR holográfico. Ao integrar (E.0.8) o fator de

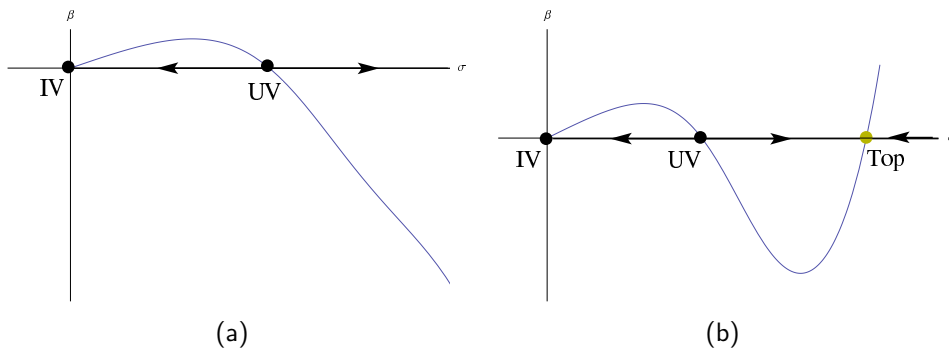


Figura E.2 – Forma típica da função *beta* junto com o fluxo do GR holográfico para o modelo definido por (E.0.1): (a) quando não há vácuo topológico ($\lambda < 0$); (b) quando há vácuo topológico ($\lambda > 0$).

escala é determinado em termos de σ :

$$e^{A(\sigma)} = |\sigma|^{-\frac{1}{s_{fis,1}}} |\sigma^2 - \sigma_2^2|^{-\frac{1}{s_{fis,2}}} \prod_{i=1}^4 |\sigma^2 - \sigma_{top,i}^2|^{-\frac{1}{s_{top,i}}}. \quad (\text{E.0.13})$$

A relação “mágica”*

$$\frac{1}{s_{fis,1}} + \frac{2}{s_{fis,2}} + \sum_{i=1}^4 \frac{2}{s_{top,i}} = 0, \quad (\text{E.0.14})$$

também ocorre aqui, o que implica em $e^{A(\infty)} = 1,^\dagger$ um valor finito. Portanto a solução de “PD” que interpola entre o vácuo AdS_d e a singularidade nua pode ser interpretado como um fluxo massivo UV/Sing., descrito na figura E.2(a), com todas as propriedades esperadas.

Se nas proximidades do ponto UV ($y \rightarrow \infty$) o campo escalar e fator de escala possuem,

*verificada através de uma inspeção direta

[†]esta normalização, *a priori* arbitrária, foi escolhida de acordo com a discussão apresentada na seção 6.7.

respectivamente, as formas $\sigma(y) \approx \sigma_2 + \sigma_0 e^{-s_{fis,2} \frac{y}{L_2}}$ e $e^{A(z)} \approx e^{\frac{y}{L_2}}$ (AdS_d), então:

$$|\sigma_0| = |\sigma_2|^{-\frac{s_{fis,2}}{s_{fis,1}}} \prod_{i=1}^4 |\sigma_2^2 - \sigma_{top,i}^2|^{-\frac{s_{fis,2}}{s_{top,i}}}, \quad (E.0.15)$$

completamente determinado pelos parâmetros do modelo.

O exemplo cria cadeias de PD que geram fluxos físicos não massivos e não massivos. Os não massivos exigem que L_{IV} satisfaça as condições discutidas na seção 6.6 com ou sem vácuo topológico. Já a fase massiva só existe quando além das condições físicas serem satisfeitas não houver vácuo topológico, ver a figura E.2(a).

• **Vácuo degenerado - limite $|s_1| \rightarrow 0$**

Ao tomar $|\sigma_1| \rightarrow 0$ o ponto $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1 = 0$, e agora há apenas um vácuo físico (degenerado) correspondendo a um espaço AdS_d com escala $L_1 = L_2$ (ver eq. (E.0.3)). Pelas eqs. (E.0.4)-(E.0.7) o modelo resultante possui $s_{fis} = C_{\Delta\Delta\Delta} = 0$.

Tomar o limite $|s_1| \rightarrow 0$ nas eqs. (E.0.9)-(E.0.11), conseqüentemente na função *beta* (E.0.8) e fator de escala (E.0.13), não é trivial. Vamos desenvolver um método consistente para encontrar a função *beta* e o fator de escala sem precisar refazer os cálculos.

Primeiro chame $|s_1| = \epsilon \ll 1$, assim a eq. (E.0.3) torna-se

$$L_2 - L_1 = \frac{L_1}{8(d-2)\omega} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (E.0.16)$$

substituindo o resultado acima em (E.0.9)-(E.0.11) e apenas no fim tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, as seguintes eqs. são encontradas:

$$\sigma_{0,1}^2 = (\sigma_{0,2})^* = i \sqrt{\frac{8(d-2)}{\omega}}, \quad (E.0.17)$$

$$\sigma_{top,(1,2)}^2 = \pm \sqrt{\frac{8(d-2)}{\omega}} \sqrt{\frac{L_1}{\sqrt{2\lambda}L} - 1}, \quad (E.0.18)$$

$$\sigma_{top,3}^2 = (\sigma_{top,4}^2)^* = i \sqrt{\frac{8(d-2)}{\omega}} \sqrt{\frac{L_1}{\sqrt{2\lambda}L} + 1}, \quad (E.0.19)$$

e os índices críticos ficam:

$$s_{fis,1} = -\epsilon C_0(0) = \epsilon \left(1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_1^2} \right), \quad (E.0.20)$$

$$s_{fis,2} = 2\epsilon C_0(0) = 2\epsilon \left(1 - 2\lambda \frac{L^2}{L_1^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = -2s_{fis,1} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (E.0.21)$$

$$s_{top,i} = -\frac{2\lambda L^2}{L_1^2} \frac{\sigma_{top,i}^6}{(d-2)}. \quad (E.0.22)$$

A função *beta* ainda é dada por (E.0.8) apenas trocando (E.0.9)-(E.0.11) por (E.0.17)-(E.0.19) e fazendo $\sigma_2 = 0$. Já no fator de escala o termo não trivial é o produto

$$|\sigma|^{-\frac{1}{s_{fis,1}}} |\sigma^2 - \sigma_2^2|^{-\frac{1}{s_{fis,2}}} = |\sigma|^{\frac{1}{\epsilon C_0(0)}} \left| \sigma^2 - \frac{\epsilon}{\omega} \right|^{-\frac{1}{2\epsilon C_0(0)}} = \left(1 - \frac{\epsilon}{\omega \sigma^2} \right)^{-\frac{1}{2\epsilon C_0(0)}} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} e^{\frac{1}{2C_0(0)\omega\sigma^2}},$$

devido ao limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (1 + \delta x)^{1/\delta} = e^x.$$

Tendo todos os resultados prévios em mãos, o fator de escala pode ser obtido, seu valor é:

$$e^{A(\sigma)} = e^{\frac{1}{2C_0(0)\omega\sigma^2}} \prod_{i=1}^4 |\sigma^2 - \sigma_{top,i}^2|^{-\frac{1}{s_{top,i}}}, \quad (\text{E.0.23})$$

a “propriedade mágica” se mantém, *i.e.* $e^{A(\infty)} = 1$, pois

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{s_{top,i}} = 0. \quad (\text{E.0.24})$$

O vácuo degenerado do tipo UV, fruto do “colapso” de “três” vácuos físicos[‡], representa um fluxo massivo descrito de forma exata e fisicamente aceitável após serem impostas as condições discutidas na seção 6.6, que sai do ponto fixo (onde $e^A \sim e^{const./\sigma^2}$) em direção ao infinito.

[‡] σ_1, σ_2 e $-\sigma_2$.

Flutuações em um fluxo massivo para $d = 5$ e $s = 1$ na aproximação exploratória

Neste apêndice o objetivo é resolver a eq. (6.9.12) para um caso simples de fluxo massivo, onde o espectro de m_ϕ^2 pode ser completamente determinado no caso EH ($\lambda = 0$) e depois encontrar a primeira correção no espectro de m_ϕ^2 devido ao termo de GB. A escolha é $d = 5$ e $s = 1$ (não o índice crítico real $s_{fis} = sC_0$). Substituindo esses valores em (6.9.12) e denotando $\epsilon = 2\lambda \frac{L^2}{L_{fis}^2}$ e $x = \frac{z}{L_{fis}}$, temos:

$$(-\partial_x^2 + L_{fis}^2 \mathcal{V}_0(x) + \epsilon L_{fis}^2 \mathcal{V}_\epsilon(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \Psi_k(x) = E \Psi_k(z), \quad x = \frac{z}{L_{fis}}, \quad (\text{F.0.1})$$

$$E = - \left(\frac{\bar{\sigma}_0^2}{2} (1 - 4C_{\Delta\Delta\Delta}^2) - L_{fis}^2 m_\phi^2 \right) \quad (\text{F.0.2})$$

$$L_{fis}^2 \mathcal{V}_0(x) = \frac{3}{4x^2} - \frac{2C_{\Delta\Delta\Delta} \bar{\sigma}_0}{x}, \quad (\text{F.0.3})$$

$$L_{fis}^2 \mathcal{V}_\epsilon(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{4\bar{\sigma}_0 C_{\Delta\Delta\Delta}}{x} - \frac{\bar{\sigma}_0^2}{6} - 4\bar{\sigma}_0^2 C_{\Delta\Delta\Delta}^2 + 2\bar{\sigma}_0 C_{\Delta\Delta\Delta} \frac{\ln(x)}{x} - \bar{\sigma}_0^2 \ln(x) + 4\bar{\sigma}_0^2 C_{\Delta\Delta\Delta}^2 \ln(x). \quad (\text{F.0.4})$$

Assumindo $E < 0$, *i.e.* $0 < m^2 L_{fis}^2 < \frac{\bar{\sigma}_0^2}{2} (1 - 4C_{\Delta\Delta\Delta}^2)$ ($|C_{\Delta\Delta\Delta}| < \frac{1}{2}$)* a eq. para $\epsilon = 0$ (EH) é simplesmente do tipo de Schrödinger para um potencial radial do tipo Coulombiano, cujo o espectro discreto de “energia” e autofunções (não normalizadas) são facilmente obtidos (86).

*a condição $m^2 > 0$ é necessária para a estabilidade da solução para a assinatura lorentziana, já no caso euclidiano $m^2 \rightarrow -|m^2| < 0$, automaticamente e sem problemas de estabilidade.

O resultado é:

$$E_n = -\frac{4\bar{\sigma}_0^2 C_{\Delta\Delta\Delta}^2}{(2n+3)^2}, \text{ ou} \quad (\text{F.0.5})$$

$$m_\phi^2 L_{fis}^2(n) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(1 - 4C_{\Delta\Delta\Delta}^2 \left(1 + \frac{2}{(2n+3)^2} \right) \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{F.0.6})$$

$$\Psi_k(x; n) \propto x^{3/2} e^{-\sqrt{|E_n|x}} {}_1F_1(a; 3; 2\sqrt{|E_n|x}), \quad (\text{F.0.7})$$

$$a = \frac{3}{2} - \frac{\bar{\sigma}_0 C_{\Delta\Delta\Delta}}{\sqrt{|E_n|}}, \quad (\text{F.0.8})$$

onde ${}_1F_1(a; c; x)$ é a função hipergeométrica confluyente[†]. O espectro é discreto, pois Ψ_k só atende as condições de contorno se $a = -n$, $n = 0, 1, \dots$, o que determina a eq. (F.0.5). Como pode ser visto pela eq. (F.0.6) a quantidade m_ϕ^2 só é positiva para todos os estados ligados se

$$|C_{\Delta\Delta\Delta}| < \frac{3}{\sqrt{44}} \approx 0.452, \quad (\text{F.0.9})$$

condição mais forte que a *básica* $|C_{\Delta\Delta\Delta}| < \frac{1}{2}$. Quando $\frac{3}{\sqrt{44}} < |C_{\Delta\Delta\Delta}| < \frac{1}{2}$, m_ϕ^2 só é positivo a partir de um certo valor $n_{min} > 0$ - a menor massa no caso. Para evitar esse problema será assumida a condição (F.0.9). É interessante notar que um resultado obtido na teoria gravitacional cria uma forte restrição na constante de estrutura da $pCFT_{d-1}$ dual.

Os resultados obtidos são os da teoria de EH na *aproximação exploratória*, lembramos que ela é diferente - mais simples - do que a aproximação feita no capítulo 5 (ver seção 5.5.4.4), pois não leva em conta o *backreaction* da geometria do espaço-tempo.

Uma vez conhecida a solução *base* (em EH), a primeira correção do espectro de energia devido ao termo $\mathcal{O}(\epsilon)$ (GB) é dada pelo valor médio de $\epsilon L_{fis}^2 V_\epsilon(x)$ com relação aos auto-estados não perturbados (86), *i.e.*

$$m_\phi^2(n) \rightarrow m_{\phi,\epsilon}^2(n) = m_\phi^2(n) + \epsilon \Delta m_\phi^2(n), \quad (\text{F.0.10})$$

$$\Delta m_\phi^2(n) = \frac{\int_0^\infty \Psi_k^2(x)_n L_{fis}^2 \mathcal{V}_{pert}(x) dx}{\int_0^\infty \Psi_k^2(x)_n dx}, \quad (\text{F.0.11})$$

as correções para o estado fundamental e os dois primeiros estados excitados são, respectiva-

[†]sua definição e algumas propriedades estão listadas no apêndice A.

mente:

$$\begin{aligned} \Delta m_{phi}^2(0) = & \frac{1}{6} \left(8|E_0| - 4C_{\Delta\Delta\Delta} \sqrt{|E_0|} \bar{\sigma}_0 (1 + 2\gamma + \ln 4) \right. \\ & + \bar{\sigma}_0^2 (-12 + 6\gamma + \ln 64 - 4C_{\Delta\Delta\Delta}^2 (-5 + 6\gamma + \ln 64)) + \\ & \left. + \bar{\sigma}_0 \left(3\bar{\sigma}_0 - 4C_{\Delta\Delta\Delta} \left(\sqrt{|E_0|} + 3\bar{\sigma}_0 C_{\Delta\Delta\Delta} \right) \right) \ln |E_0| \right), \end{aligned} \quad (\text{F.0.12})$$

$$\begin{aligned} \Delta m_{\phi}^2(1) = & \frac{1}{90} \left(-6 (-12|E_1| + \bar{\sigma}_0^2 (C_{\Delta\Delta\Delta}^2 (-86 + 60\gamma + 60 \ln 2) - 3 (-13 + 5\gamma + \ln 32))) \right. \\ & \left. - 9\bar{\sigma}_0 \left(-5\bar{\sigma}_0 + 4C_{\Delta\Delta\Delta} \left(\sqrt{|E_1|} + 5\bar{\sigma}_0 C_{\Delta\Delta\Delta} \right) \right) \ln |E| \right), \end{aligned} \quad (\text{F.0.13})$$

$$\begin{aligned} \Delta m_{\phi}^2(1) = & \frac{1}{84} \left(48|E_2| + \bar{\sigma}_0 (-249 + 84\gamma + 84 \ln 2 - 4C_{\Delta\Delta\Delta}^2 (-151 + 84\gamma + 84 \ln 2)) \right. \\ & \left. - 4C_{\Delta\Delta\Delta} \sqrt{|E_2|} \bar{\sigma}_0 (-1 + 12\gamma + \ln 4096) - 6\bar{\sigma}_0 \left(-7\bar{\sigma}_0 + 4C_{\Delta\Delta\Delta} \left(\sqrt{|E_2|} + 7\bar{\sigma}_0 C_{\Delta\Delta\Delta} \right) \right) \ln |E_2| \right), \end{aligned} \quad (\text{F.0.14})$$

onde $\gamma \approx 0.577216$ é a famosa constante de Euler. As correções obtidas podem ser comparadas com casos físicos conhecidos para uma estimativa de λ ser feita.

Derivação da Lagrangeana efetiva nos modelos de GB e da GQT

Este apêndice é dedicado a derivação da ação efetiva (7.1.4) ((6.1.3) para $\mu = 0$), porém nossa abordagem não será aplicada diretamente ao modelo da GQT ou GB. Vamos supor a ação mais geral possível com termos até ordem cúbica nas curvaturas (Riemann, Ricci e escalar de Ricci), sem derivadas das mesmas, junto com um campo escalar auto-interagente que forneça eqs. do movimento de segunda ordem para a métrica

$$ds^2 = f^2(y)e^{2(d-1)A(y)}dy^2 + e^{2A(y)}\eta_{ij}dx^i dx^j. \quad (\text{G.0.1})$$

Com trocas de coordenadas (G.0.1) pode ser reescrita como

$$ds^2 = e^{2A(z)}(dz^2 + \eta_{ij}dx^i dx^j),$$

i.e. nosso interesse é num espaço *conforme plano*.

Em geral, o tensor de Riemann ($R_{\mu\nu\rho\sigma}$) pode ser escrito em termos do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$), escalar de Ricci (R) e tensor de Weyl ($C_{\mu\nu\rho\sigma}$) como (87):

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{d-2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) - \frac{R}{(d-1)(d-2)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + C_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{G.0.2})$$

a eq. acima funciona como a definição do tensor de Weyl. Quando a métrica é *conforme plana* (o caso de interesse) o tensor de Weyl é nulo (80, 87), logo todos os termos envolvendo $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ na ação podem ser eliminados em favor de combinações de $R_{\mu\nu}$ e R . Com isso em

mente a ação mais geral possível que podemos escrever é:

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{\kappa^2} + \frac{\lambda_0}{m^2} (R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \gamma_d R^2) + \right. \quad (\text{G.0.3}) \\ \left. + \frac{d(d+4) - 4}{(d-1)^2(d-2)^2} \frac{\mu_0}{(m^2)^2} (R^3 + \alpha_d R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \beta_d R^\mu_\nu R^\nu_\rho R^\rho_\mu) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right],$$

onde γ_d , α_d , β_d , λ_0 e μ_0 são parâmetros adimensionais e m^2 possui dimensão do inverso do comprimento ao quadrado.

O procedimento adotado é substituir o *ansatz* (G.0.1) na ação acima e impor condições sobre γ_d , α_d e β_d t.q. a ação efetiva gere eqs. diferenciais de segunda ordem. Começemos os cálculos.

As conexões não nulas são:

$$\Gamma^i_{yy} = \dot{A} \delta^i_j; \quad \Gamma^y_{ij} = -\frac{1}{f^2} \dot{A} e^{-2(d-2)A} \eta_{ij}; \quad \Gamma^y_{yy} = \frac{\dot{f}}{f} + (d-1)\dot{A}, \quad (\text{G.0.4})$$

com as quais calcula-se as componentes do tensor de Ricci e seu escalar

$$R_{yy} = (d-1) \left(-\ddot{A} + \frac{\dot{f}}{f} \dot{A} + (d-2)\dot{A}^2 \right), \\ R_{ij} = -\frac{1}{f^2} e^{-2(d-2)A} \left(\ddot{A} - \frac{\dot{f}}{f} \dot{A} \right) \eta_{ij}, \quad (\text{G.0.5})$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2(d-1)(d-2) \frac{e^{-2(d-1)A}}{f} \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{A}^2}{f} - \frac{1}{(d-2)} \frac{\ddot{A}}{f} + \frac{1}{(d-2)} \frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{A}}{f} \right) \\ = 2(d-1)(d-2) \frac{e^{-2(d-1)A}}{f} \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{A}^2}{f} - \frac{1}{(d-2)} \frac{d}{dy} \left(\frac{\dot{A}}{f} \right) \right). \quad (\text{G.0.6})$$

Desses resultados intermediários é possível calcular:

$$\sqrt{-g} R = (d-1)(d-2) \frac{\dot{A}^2}{f} - 2(d-1) \frac{d}{dy} \left(\frac{\dot{A}}{f} \right), \\ \sqrt{-g} R^2 = \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \left(4(d-1)^2 \ddot{A}^2 + 4(d-1)^2 \left(\frac{\dot{A}\dot{f}}{f} \right)^2 + (d-1)^2 (d-2)^2 \dot{A}^4 \right. \\ \left. - 8(d-1)^2 \frac{\dot{f}}{f} \dot{A} \ddot{A} - 4(d-1)^2 (d-2) \dot{A}^2 \ddot{A} + 4(d-1)^2 (d-2) \frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^3 \right), \\ \sqrt{-g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \left(d(d-1) \ddot{A}^2 + d(d-1) \left(\frac{\dot{A}\dot{f}}{f} \right)^2 - 2d(d-1) \dot{A} \ddot{A} \frac{\dot{f}}{f} \right. \\ \left. - 2(d-1)^2 (d-2) \ddot{A} \dot{A}^2 + 2(d-1)^2 (d-2) \frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^3 + (d-1)^2 (d-2)^2 \dot{A}^4 \right),$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{|g|}R^3 = & (d-1)^3 \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \left[(d-2)^3 \dot{A}^6 - 8\ddot{A}^3 + 8 \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^3 \dot{A}^3 - 6(d-2)^2 \dot{A}^4 \ddot{A} + \right. \\
 & + 12(d-2) \dot{A}^2 \ddot{A}^2 + 6(d-2)^2 \frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^5 + 24 \frac{\dot{f}}{f} \dot{A} \ddot{A}^2 - 24 \left(\frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{A}^2 \ddot{A} + \\
 & \left. + 12(d-2) \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 \dot{A}^4 - 24(d-2) \frac{\dot{f}}{f} \ddot{A} \dot{A}^3 \right], \tag{G.0.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{|g|}RR^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = & (d-1) \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \left((d-2) \dot{A}^2 - 2\ddot{A} + 2 \frac{\dot{f}}{f} \dot{A} \right) \left(d(d-1) \ddot{A}^2 + d(d-1) \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 \dot{A}^2 \right. \\
 & - 2d(d-1) \frac{\dot{f}}{f} \dot{A} \ddot{A} - 2(d-1)^2 (d-2) \ddot{A} \dot{A}^2 + 2(d-1)^2 (d-2) \frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^3 + \\
 & \left. + (d-1)^2 (d-2)^2 \dot{A}^4 \right), \tag{G.0.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{|g|}R_{\nu}^{\mu}R_{\rho}^{\nu}R_{\mu}^{\rho} = & (d-1) \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \left[[(d-1)^2 + 1] \left(-\ddot{A}^3 + \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^3 \dot{A}^3 - 3 \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 \dot{A}^2 \ddot{A} + 3 \frac{\dot{f}}{f} \dot{A} \ddot{A}^2 \right) + \right. \\
 & + (d-1)^2 (d-2)^3 \dot{A}^6 + 3(d-1)^2 (d-2) \dot{A}^2 \ddot{A}^2 + 3(d-1)^2 (d-2) \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 \dot{A}^4 + \\
 & \left. + 3(d-1)^2 (d-2)^2 \frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^5 - 3(d-1)^2 (d-2)^2 \ddot{A} \dot{A}^4 - 6(d-1)^2 (d-2) \frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^3 \ddot{A} \right]. \tag{G.0.9}
 \end{aligned}$$

Vamos olhar para os termos “quadráticos” na curvatura.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g} (R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \gamma_d R^2) = & (d-1) \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} (d-4(d-1)\gamma_d) \left(\ddot{A}^2 + \left(\frac{\dot{A}\dot{f}}{f} \right)^2 - 2 \frac{\dot{f}}{f} \dot{A} \ddot{A} \right) \\
 & + (d-1)^2 (d-2)^2 (1-\gamma_d) \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \dot{A}^4 + \\
 & 2(d-1)^2 (d-2) (1-2\gamma_d) \underbrace{\frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \left(-\ddot{A} \dot{A}^2 + \frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^3 \right)}_{-\frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left(e^{-2(d-1)A} \frac{\dot{A}^3}{f^3} \right) - \frac{2}{3} (d-1) e^{-2(d-1)A} \frac{\dot{A}^4}{f^3}}.
 \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado esquerdo da eq. contribui com altas derivadas (maior do que dois) nas eqs. do movimento, isso é claro olhando para o termo \ddot{A}^2 . Assim, para as eqs. da gravitação serem de segunda ordem temos que fixar γ_d t.q. esse termo seja cancelado, *i.e.*

$$\gamma_d = \frac{d}{4(d-1)}, \tag{G.0.10}$$

determinando de forma única γ_d . Por fim os termos “quadráticos” agrupam-se em:

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} \left(R + \frac{1}{m^2} \left(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{d}{4(d-2)} R^2 \right) \right) &= (d-1)(d-2) \frac{\dot{A}^2}{f} - 2(d-1) \frac{d}{dy} \left(\frac{\dot{A}}{f} \right) \\ &+ \frac{(d-1)(d-2)^2(d-4)}{12m^2} \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \dot{A}^4 - \frac{2(d-1)(d-2)^2}{3m^2} \frac{d}{dy} \left(e^{-2(d-1)A} \frac{\dot{A}^3}{f^3} \right). \end{aligned}$$

Agora nossos esforços são direcionados aos termos “cúbicos”:

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} (R^3 + \alpha_d R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \beta_d R_\nu^\mu R_\rho^\nu R_\mu^\rho) &= \\ \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \left\{ (d-1) (8(d-1)^2 + 2d(d-1)\alpha_d + (d-1)^2\beta_d + \beta_d) \left(-\ddot{A}^3 + \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^3 \dot{A}^3 + 3\frac{\dot{f}}{f} \dot{A} \ddot{A}^2 \right. \right. \\ - 3 \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 \dot{A}^2 \ddot{A} \left. \right) &+ (d-1)^2(d-2) (12(d-1) + (5d-4)\alpha_d + 3(d-1)\beta_d) \left(\dot{A}^2 \ddot{A}^2 + \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 \dot{A}^4 \right. \\ - 2\frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^3 \ddot{A} \left. \right) &+ (d-1)^3(d-2)^3 (1 + \alpha_d + \beta_d) \dot{A}^6 \\ - (d-1)^3(d-2)^2 (6 + 4\alpha_d + 3\beta_d) &\left. \left(\underbrace{\dot{A}^4 \ddot{A} - \frac{\dot{f}}{f} \dot{A}^5}_{= \frac{f^5}{5} \frac{d}{dy} \left(\frac{\dot{A}^5}{f^5} \right)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{G.0.11})$$

Fica bem claro que os dois primeiros termos irão gerar altas derivadas nas eqs. do movimento. A única solução é fixar α_d e β_d t.q. sejam as soluções do sistema:

$$8(d-1)^2 + 2d(d-1)\alpha_d + (d-1)^2\beta_d + \beta_d = 0 \quad (\text{G.0.12})$$

$$12(d-1) + (5d-4)\alpha_d + 3(d-1)\beta_d = 0 \quad (\text{G.0.13})$$

i.e.

$$\alpha_d = -\frac{12d(d-1)}{d(d+4)-4}, \quad \beta_d = \frac{16(d-1)^2}{d(d+4)-4}, \quad (\text{G.0.14})$$

e os termos cúbicos agrupam-se em:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{|g|} (R^3 + \alpha_d R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \beta_d R_\nu^\mu R_\rho^\nu R_\mu^\rho) &= \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} (d-1)^3 (d-2)^3 (1 + \alpha_d + \beta_d) \dot{A}^6 \\
 &- (d-1)^3 (d-2)^2 (6 + 4\alpha_d + 3\beta_d) \underbrace{e^{-4(d-1)A} \frac{1}{5} \frac{d}{dy} \left(\frac{\dot{A}^5}{f^5} \right)}_{= \frac{1}{5} \frac{d}{dy} \left(e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^5}{f^5} \right) + \frac{4}{5} (d-1) e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^6}{f^5}} \\
 = & (d-1)^3 (d-2)^2 \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \left((d-2)(1 + \alpha_d + \beta_d) - \frac{4}{5} (d-1)(6 + 4\alpha_d + 3\beta_d) \right) \dot{A}^4 \\
 &- \frac{(d-1)^3 (d-2)^2}{5} (6 + 4\alpha_d + 3\beta_d) \frac{d}{dy} \left(\frac{e^{-4(d-1)A} \dot{A}^5}{f^5} \right),
 \end{aligned}$$

após algumas simplificações

$$\begin{aligned}
 \sqrt{|g|} (R^3 + \alpha_d R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \beta_d R_\nu^\mu R_\rho^\nu R_\mu^\rho) &= \frac{(d-1)^3 (d-2)^4 (d-6) e^{-4(d-1)A}}{5[d(d+4) - 4]} \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \dot{A}^6 - \\
 & \frac{6(d-1)^3 (d-2)^4}{5[d(d+4) - 4]} \frac{d}{dy} \left(\frac{e^{-4(d-1)A} \dot{A}^5}{f^5} \right)
 \end{aligned}$$

Finalmente a ação efetiva que atende as condições impostas (eqs. do movimento de segunda ordem) é encontrada:

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^{d-1} x dy \mathcal{L}_{ef} \\
 &- 2(d-1) \int d^{d-1} x dy \frac{d}{dy} \left[\frac{\dot{A}}{f} \left(1 + \lambda_0 \frac{(d-2)^2 e^{-2(d-1)A}}{6m^2} \frac{\dot{A}^2}{f^2} + \mu_0 \frac{3(d-2)^2 e^{-4(d-1)A}}{5m^4} \frac{\dot{A}^4}{f^4} \right) \right], \text{ com} \\
 \mathcal{L}_{ef} &= \frac{1}{2f(y)} \left(2(d-1)(d-2) \dot{A}^2(y) - \dot{\sigma}^2(y) \right) \\
 &+ \lambda_0 \frac{(d-1)(d-2)^2 (d-4) e^{-2(d-1)A(y)}}{12} \frac{\dot{A}^4(z)}{m^2 f^3(y)} + \mu_0 \frac{(d-1)(d-2)^2 (d-6) e^{-4(d-1)A}}{5m^4} \frac{\dot{A}^6}{f^5} \\
 &- f(z) e^{2(d-1)A(y)} V(\sigma).
 \end{aligned} \tag{G.0.15}$$

Em particular para $d = 3$: $\gamma_3 = \frac{3}{8}$, $\alpha_3 = -\frac{72}{17}$ e $\beta_3 = \frac{64}{17}$ - exatamente o modelo da *nova gravitação massiva** (NGM) encontrada em (32). Portanto o modelo pode ser encarado como uma *nova gravitação massiva* em d dimensões.

A questão a ser respondida é qual a relação entre a NGM, desenvolvida aqui, com os modelos da GQT (ou GB)?

Eles são equivalentes devido a forma particular do *ansatz* (G.0.1) que leva a (G.0.2) com

*do inglês *new massive gravity*.

$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. Ao substituir (G.0.2) ($C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$) em (7.1.1), a ação (G.0.3) é encontrada, com γ_d , α_d e β_d dados por (G.0.10) e (G.0.14), ao identificarmos:

$$\frac{\lambda_0}{m^2} = -\frac{4\lambda L^2}{(d-2)(d-4)}, \quad \frac{\mu_0}{m^4} = -\frac{\mu L^4}{(d-6)(d-2)}. \quad (\text{G.0.16})$$

Uma observação importante é que ambos os modelos geram as mesmas soluções de PD, porém as flutuações, onde a métrica não é mais *conforme plana*, não são iguais. Outra é que a NGM é bem definida para qualquer $d \geq 3$ enquanto a GQT os parâmetros da GQT divergem em $d = 4$ e $d = 6$ - se $\lambda, \mu \neq 0$.