

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

WILLIAM C. ALGONER JORGE

**Paredes de Domínio Curvas em  
Gravitação Quase -Topológica**

VITÓRIA  
2013

---

WILLIAM C. ALGONER JORGE

**PAREDES DE DOMÍNIO CURVAS EM GRAVITAÇÃO QUASE -TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis

VITÓRIA  
2013

---

# PAREDES DE DOMÍNIO CURVAS EM GRAVITAÇÃO QUASE-TOPOLÓGICA

**WILLIAM C. ALGONER JORGE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Aprovada o 28 de Maio de 2013

## COMISSÃO EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis  
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)  
Orientador

---

Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov  
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

---

Prof. Dr. Fernando Pablo Devecchi  
Univerdidade Federal do Paraná (UFPR)

---

---

---

*A meus pais Justiniano e Olivia*



---

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao professor Clisthenis por ter me aceitado como aluno e orientado desde minha chegada a Vitória e por ter me apresentado ao professor Galen, agradeço aos dois pela formação que me deram durante o período de Mestrado, pelos conselhos e amizade durante estes dois anos.

Gostaria de agradecer também a André pela ajuda e amizade, por brindar comigo uma garrafa de vinho. A Ulysses Camarada dS pelos cursos e o que aprendi com os seus legados. A Ivan e Zui pelos conselhos e ajudas desde minha chegada à UFES. Aos meus amigos Cristofher e David pela companhia e por esses momentos inesquecíveis de muita comemoração.

A Isabel Castro, Sinara Dias, Doris Levy, Izabel Weber, Gloria Simões, Thaís Afonso, Selma Machado, aos três sócios da conquista ('Marcy', Deivid, Agripax), Enrique e aos meus amigos de Linhares. Sou grato a todos eles pela companhia, ajuda e compreensão nos momentos difíceis. E um agradecimento especial para uma grande amiga, Leticia Medina de Oliveira 'Causha', pela ajuda nas correções gramaticais do português.

A minha família, especialmente a meu pai, Justiniano Algoner, minha mãe, Olivia Jorge, aos meus irmãos Sara, Lidia, Arturo, aos meus sobrinhos Leonardo e Rodrigo, e aos meus tios Juan e Teofila Palma.

Este trabalho teve o financiamento pela CAPES.

---

“Às vezes a coragem é a pequena voz no final do dia que diz:  
*Eu vou tentar de novo amanhã .”*

*Thomas S. Monson.*

---

# RESUMO

Extensões da Relatividade Geral, com contribuições de termos em ordem mais alta na curvatura, têm sido utilizadas na procura de uma melhor compreensão dos fenômenos, em escalas onde efeitos quânticos tornam-se importantes. No entanto tais extensões podem produzir efeitos indesejáveis, como o surgimento de “fantasmas” e também de equações de ordem mais altas do que dois, complicando assim o problema de Cauchy. Nesta dissertação estudamos uma classe de teorias, conhecida como Gravitação Quase Topológica (GQT) onde esses efeitos, por construção, são evitados. Em particular construímos soluções do tipo paredes de domínio em que os vácuos da teoria são espaços de Anti de Sitter (AdS). Nossa análise é feita para uma dimensão arbitrária  $d$  do espaço-tempo, utilizando um ansatz que considera a folheação desse espaço em hipersuperfícies  $(d - 1)$  dimensionais, com curvatura negativa ou positiva.

---

# ABSTRACT

Extensions of General Relativity, with higher order terms in the curvature, have been used in order to better understand phenomena in scales where quantum effects become important. However, such extensions may produce undesirable effects, as the appearing of “ghosts” and also equations of order greater than two, which complicates the Cauchy problem. In this dissertation we study a class of theories, known as Quasi Topological Gravity (QTG), where these effects, by construction, are circumvented. In particular, we construct exact domain wall type solutions for QTG coupled to a scalar field subject to some potential for the case in which the vacua of the theory are Anti de Sitter (AdS) spaces. Our analysis is performed for an arbitrary dimension  $d$  of the space-time making use of an ansatz which considers the slicing of this space in  $(d - 1)$  hypersurfaces with negative or positive curvature.

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
1.1	Gravitação-Geometria-Escalas . . . . .	12
1.2	Sobre as extensões da Relatividade Geral . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Gravitação de Lovelock Estendida</b>	<b>18</b>
2.1	Teoria da gravidade de Lovelock . . . . .	18
2.1.1	Ação da teoria de Lovelock ate ordem quadrática. $n=2$ . . . . .	20
2.1.2	Combinações Quadráticas . . . . .	22
2.1.3	Lagrangiana com $n=3$ . . . . .	24
2.2	Extensões dimensionais da Gravitação Lovelock . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Vácuo e Paredes de Domínios</b>	<b>27</b>
3.1	Vácuo . . . . .	27
3.2	Paredes de domínio planas (PDP) . . . . .	31
3.2.1	Sistema de primeira ordem . . . . .	33
3.3	Paredes de domínio curvas (PDC) . . . . .	34
3.3.1	Sistema de equações . . . . .	36
3.3.2	Superpotencial e as equações de primeira ordem . . . . .	37
3.3.3	Função Beta e índices críticos . . . . .	39
3.4	PDC's na gravitação de Lovelock de ordem quadrático . . . . .	41
3.4.1	Condição de equações de segunda ordem . . . . .	42
3.4.2	Sistema de equações . . . . .	43
3.4.3	PDC's na gravitação de Gauss-Bonnet . . . . .	44
3.4.4	Descrições das propriedades dos vácuos . . . . .	46
3.4.5	Massa do campo escalar, função Beta e os índices críticos . . . . .	50
3.5	PDC's na gravitação cúbica Quase-Topológica . . . . .	53
3.5.1	Equações de primeira ordem . . . . .	54
3.5.2	Descrições dos vácuos físicos e topológicos . . . . .	55
3.5.3	Massa do campo escalar, função Beta e os índices críticos . . . . .	58

---

<b>4</b>	<b>Soluções exatas de PDC's</b>	<b>60</b>
4.1	Solução do sistema de primeira ordem . . . . .	60
4.2	Paredes Planas: Einstein-Hilbert vs. Gauss-Bonnet . . . . .	61
4.3	Paredes Curvas: Minkowski-Anti-deSitter . . . . .	64
4.4	Paredes Curvas: AdS-AdS . . . . .	66
4.5	Gravidade Quase-Topológica . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>82</b>
<b>A</b>	<b>Princípio variacional da ação Einstein-Gauss-Bonnet</b>	<b>87</b>
A.1	Método variacional . . . . .	87
<b>B</b>	<b>Espaço de Anti-de Sitter</b>	<b>92</b>
B.1	$AdS_d$ obtido a partir de sua imersão em $\mathbb{R}^{d+1}$ . . . . .	93
<b>C</b>	<b>Integrais que se reduzem a hipergeométricas</b>	<b>95</b>
<b>D</b>	<b>Derivação da lagrangiana efetiva nos modelos de Gauss-Bonnet e da Gravidade Quase-Topológica</b>	<b>98</b>
D.1	No modelo Lovelock quadrático . . . . .	98
D.2	No modelo GQT . . . . .	102
D.3	Superpotencial e as equações de primeira ordem . . . . .	108
D.4	Obtenção da função de curvatura $\gamma(K, y)$ . . . . .	110

## LISTA DE FIGURAS

3.1	Curvatura no plano $\mu - \lambda$ , da eq.(3.143) para $\mu_+$ (curva azul) e $\mu_-$ (curva vermelha) . . .	58
4.1	Fator de escala (4.9) para uma parede plana em gravitação EH. . . . .	62
4.2	Fator de escala (4.12c) para uma parede plana em gravitação GB. . . . .	64
4.3	Fator de escala $a^2$ (curva preta), e $\gamma^2$ (curva vermelha) para uma parede curva em GB, com $W = B\sigma^2$ ; (a) $K > 0$ ; (b) $K < 0$ . . . . .	65
4.4	Parede curva com $K > 0$ : Potencial de matéria $V(\sigma)$ (curva azul); Curvatura de Ricci (curva preta); Superpotencial $W(\sigma) = B\sigma^2$ (curva preta, tracejada); $C_0(\sigma)$ (curva preta, ponto-tracejada). . . . .	66
4.5	Fator de escala (4.18) para uma parede plana em gravitação EH. . . . .	68
4.6	Fator de escala (4.28) para uma parede plana em gravitação G-B. . . . .	69
4.7	Fator de escala $a^2$ (curva preta), e $\gamma^2$ (curva vermelha) para uma parede curva em E-H, com $W = B \cosh^2(\delta\sigma)$ ; (a) $K > 0$ ; (b) $K < 0$ . . . . .	71
4.8	Fator de escala para uma parede curva em G-B. (a) $K < 0$ ; (b) $K > 0$ . . . . .	74
4.9	Fator de escala (curva preta) e $\gamma^2$ (curva vermelha), para uma parede curva com $K < 0$ . . . . .	75

---

4.10	Potencial de matéria $V(\sigma)$ (curva azul); Escalar de Ricci $R$ (curva preta); Superpotencial $W(\sigma) = B \cosh^2(\delta\sigma)$ (curva preta tracejada); Função $C_0(W) = 1 - W^2/W_{\text{top}}^2$ (curva preta ponto-tracejada). Aqui, $K < 0$ . . . . .	76
4.11	Fator de escala (4.40) para parede plana em GQT, com superpotencial $W(\sigma) = W_a \cosh(\sqrt{\alpha}\sigma)$ . . . . .	79
4.12	Fator de escala $a^2$ (curva preta); $\gamma^2$ (curva vermelha); e escalar de Ricci $R$ (curva preta, tracejada), para uma parede curva em GQT. (a) $K < 0$ ; (b) $K > 0$ . . . . .	81
B.1	Representação do vínculo (B.5) o eixo principal é dado pelas coordenadas $X^i$ . $X^0$ é o eixo vertical e $X^d$ é o eixo do plano saindo da página . . . . .	93



# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Gravitação-Geometria-Escalas

A descrição contemporânea das quatro forças fundamentais da Natureza, a saber, gravitacional, forte e electromagnética e fraca reúne dois conceitos importantes, porém, de origens aparentemente diferentes. Por um lado temos **a Geometria (pseudo) Riemanniana do espaço-tempo**: contínua, infinita e causal, i.e. com cone de luz e passado-futuro-presente bem definidos; por outro, **a matéria “quântica”**: ocupando e determinando as propriedades de espaço-tempo, representada pelo conjunto de partículas elementares (os campos quânticos) que obedecem certas “leis probabilísticas” e as relações de incerteza.

As semelhanças e as diferenças entre as interações fundamentais refletem as propriedades das: **cargas** (elétricas, leptônicas, bariônicas e massa gravitacional), dos **campos “intermediadores” de cada interação** (fóton, gluons, gravitons) e das **constantes de acoplamento** i.e., a forma específica das lagrangianas destes campos.

Como uma das maiores diferenças, podemos destacar a onipresença do campo gravitacional (e parcialmente dos campos electromagnéticos) em comparação com a natureza intrinsecamente microscópica ( $r_f \leq 10^{-15} \text{cm}$ ) das forças fraca e forte. A explicação das propriedades de longo alcance do potencial gravitacional Newtoniano ( $g_{00} \sim \frac{mM}{r} G_N$ ) se dá pela ausência de massa dos grávitons. Ao contrário, devido às massas  $m_{glu} \neq 0$  dos gluons, os potenciais fortes e fracos são de curto alcance (para hadrons e leptons):  $U_f \sim \alpha_f \frac{e^{-m_{glu} r}}{r}$ .

A relatividade geral (RG), baseada no princípio de equivalência, oferece uma descrição universal em

termos da métrica  $g_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$  (de caráter “dinâmico”)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

de uma infinidade de eventos e fenômenos astrofísicos (de origem gravitacional): do famoso desvio do periélio do Mercúrio até a própria “criação” e evolução de nosso Universo. Em todos estes casos, a principal ferramenta são as diferentes soluções <sup>1</sup> das equações de Einstein-Hilbert (E-H).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

com  $T_{\mu\nu}$  adequadamente escolhido.

Apesar do enorme sucesso da RG (i.e. das equações (1.2)) nas escalas intermediárias (do tamanho do sistema solar até conglomerados de Galáxias) os dados observacionais dos últimos 25 anos, como também os importantes desenvolvimentos teóricos como a unificação das interações (“Supercordas”, AdS/CFT, etc.) e a quantização da gravitação- forneceram fortes indicações de que certas modificações da ação de E-H

$$S_{E-H} = \frac{1}{16\pi^2 G_N} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda + \mathcal{L}_{mat}), \quad (1.3)$$

são necessárias para a descrição dos fenômenos gravitacionais nas micro e mega escalas. Acredita-se que os efeitos de origem quântico são importantes nas regiões e épocas com densidade de matéria extremamente alta - correspondentes a altas curvaturas  $R \sim \frac{6}{L^2}$  do espaço-tempo (i.e. pequenas escalas até  $L \sim 100l_{pl}$ ) poderiam obter uma explicação consistente a partir de uma generalização da ação de E-H da forma

$$S_{mod} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda + F(R, R_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}) + \mathcal{L}_{mat}), \quad (1.4)$$

tendo como novos termos “geométricos” potências de invariantes construídos pelos tensores do Ricci  $R_{\mu\nu}$  e Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ,

$$\begin{aligned} F(R, R_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}) &= a_1 R^{n_1} + a_2 (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})^{n_2} + a_3 (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})^{n_3} \\ &+ a_n R_{k_1} (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})^{k_2} + \dots, \end{aligned} \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup>para  $g_{\mu\nu}(x_g)$  e para os campos de matéria relevantes para o problema específico- representados pelo tensor de energia-momento.

com  $(n_i, k_i \geq 4)$ - certos números inteiros. No entanto, a mesma extensão (com apropriados valores dos  $n_i, k_i$ ) é usada com sucesso na descrição da aceleração tardia do universo inteiro, e de outros eventos específicos para grandes escalas, enormes (pequenas curvaturas  $R \sim \Lambda_{late} \sim 10^{-123}$ ) do tamanho atual do universo. Em ambos casos estas modificações para o potencial gravitacional Newtoniano, que precisam ser, fenomenologicamente compatíveis com as observações nas escalas intermediárias. Um dos maiores desafios da gravitação e cosmologia na atualidade é a dedução da forma exata da função  $F(R, R_{\mu\nu} \dots)$  e da  $\mathcal{L}_{mat}$  a partir de primeiros princípios, i.e. da única ação modificada (1.4) válida para todas as escalas, onde esta descrição espaço-temporal baseada nas geometrias pseudo-Riemannianas ainda tem sentido. A principal fonte dos modestos resultados nesta direção são as diversas tentativas para a unificação das interações. Todos estes modelos representam diferentes realizações da idéia de unir num princípio as condições de invariância sob transformações locais de calibre, das teorias de Yang-Mills, com a invariância sob difeomorfismos da Relatividade Geral. Em todos os casos, uma nova hipótese de existência de novas dimensões espaciais  $x_A, A = 5, 6, \dots, d \leq 10$  torna-se essencial. Esta é uma das razões para considerar problemas das extensões da RG e das soluções destes modelos em “d” dimensões ( $d \geq 4$ ) do espaço-tempo.

## 1.2 Sobre as extensões da Relatividade Geral

A principal condição a ser imposta sobre todas as extensões da RG é que os princípios fundamentais da Relatividade Geral sejam respeitados o máximo possível. Os novos modelos da RG têm que obedecer os princípios de (i) equivalência (ii) causalidade (ausência de táquions) (iii) previsibilidade (problema de Cauchy bem definido) ... entre outros.

Note que por construção todas as extensões que tem envolvido potências dos invariantes de curvatura, começando da mais simples, por exemplo:

$$F_{G-B} = \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1.6)$$

levam à equações para  $g_{\mu\nu}(x)$  de ordem maior que dois. No exemplo (1.6) as correspondentes equações são de quarta ordem. A presença de “altas derivadas” de  $g_{\mu\nu}$  provoca diversos problemas de origem fenomenológica e conceitual como por exemplo complicações na definição do problema de Cauchy das extensões das equações (1.2), exigindo como condições iniciais em  $\partial_t^2 g_{\mu\nu}, \partial_t^3 g_{\mu\nu},$  etc. Mais ainda, eventuais instabilidades e surgimento de “fantasmas”<sup>2</sup> para as flutuações lineares  $h_{\mu\nu}$  ao redor

<sup>2</sup>termos cinéticos com sinal negativo para alguns componentes de  $h_{\mu\nu}$  na ação estendida “linearizada”.

da métrica do vácuo  $\bar{g}_{\mu\nu}^{vac}(x)$

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}^{vac}(x) + \kappa h_{\mu\nu}(x), \quad (1.7)$$

que com uma escolha de Calibre do tipo Newton deve satisfazer uma equação da forma

$$(\square + m_0^2)(\square + m_1^2)h_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Finalmente, problemas podem aparecer quando correções do potencial gravitacional são incompatíveis com dados observacionais nas escalas intermediárias.

Uma possibilidade para remediar, ou ao menos amenizar estes problemas é buscar as condições sobre os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (ou  $a_k$  no caso da equação (1.6)) que levam ao cancelamento de todas as indesejáveis altas derivadas. A resposta no caso “quadrático” (1.6),

$$\alpha = \gamma = -\frac{\beta}{4} \equiv \frac{\lambda L^2}{(d-3)(d-4)}, \quad (1.9)$$

é o bem conhecido invariante de Gauss-Bonnet (G-B). Em quatro dimensões ( $d = 4$ ) ele representa um invariante topológico, logo as equações correspondentes coincidem com as de E-H (1.2).

Para  $d \geq 5$  as equações da extensão de G-B da Relatividade Geral são de segunda ordem e mesmo incluindo novos termos não-lineares são livres de todos os problemas acima, sob a condição específica para os valores de  $\lambda$  [23]:

$$-\frac{(d-3)(3d-1)}{4(d+1)^2} \leq \lambda \leq \frac{(d-3)(d-4)(d^2-3d+8)}{4(d^2-5d+10)} \quad (1.10)$$

Uma generalização destes resultados para extensões envolvendo combinações específicas de invariantes de ordem  $N$  (i.e. derivadas até  $2N$ ) é dada pelo teorema de Lovelock Capítulo (2) que determina invariantes topológicos para  $d = 2N$  (i.e. feitos com os termos “cúbicos”  $N = 3$  para  $d = 6$ ). Para  $d \geq 2N$  eles fornecem extensões não-triviais da RG com equações de segunda ordem.

Podemos mencionar também outro tipo de extensão, envolvendo somente potências do escalar de curvatura  $R$ , i.e.  $F(R)$ . Mesmo mantendo as altas derivadas, ela está livre de todas as inconsistências (exceto o problema de Cauchy) devido à equivalência com o modelo de gravitação escalar-tensorial de Brans-Dicke, com  $\phi = F'(R)$  [28]. Para  $d = 4$  e para escolhas apropriadas da forma do  $F(R)$  (digamos do tipo  $F(R) = \alpha R^2 + \frac{\beta}{R}$ ) esta modificação da RG fornece resultados promissores, para todas as escalas cosmológicas.

Em ambos os casos- G-B/Lovelock e  $F(R)$  - de extensões consistentes, permanece em aberto o pro-

blema da dedução das formas particulares de  $F(R, R_{\mu\nu}, \dots)$  a partir de primeiros princípios. No que diz respeito às modificações da ação de E-H responsáveis pela descrição dos efeitos gravitacionais em pequenas escalas (altas curvaturas e densidades de matéria), a derivação mais simples (e mais antiga [30], [31], [4]) vem das teorias quânticas (digamos de um campo escalar) em um espaço curvo (chamado de “background” clássico). Seguindo o procedimento padrão de teorias quânticas de campo (TQC), a consistência quântica exige, além de renormalização dos campos, das massas e dos acoplamentos de matéria, a renormalização da constante cosmológica, da constante de Newton e, mais importante, a introdução de novos contra-termos puramente gravitacionais, que em “1-loop” reproduzem a forma (1.6) da modificação “quadrática” da ação de E-H. A consideração das próximas ordens de teoria de perturbações resulta na necessidade da introdução de novos contratermos envolvendo todos os invariantes cúbicos (para  $d \geq 4$ )

$$\alpha_1 R^3 + \alpha_2 R R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \alpha_3 R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\rho} R_{\rho}{}^{\mu} + \alpha_4 R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} + \dots,$$

quárticos

$$\beta_1 R^4 + \beta_2 (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})^2 + \beta_3 R^2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \dots \text{etc.}$$

Devemos sublinhar que não existem argumentos físicos que permitiriam determinar os coeficientes relativos  $\alpha_k, \beta_k$ , etc de modo que as correspondentes combinações de contratermos forcem a forma dos invariantes de Lovelock. Desta forma parece quase impossível que as extensões da ação E-H produzidas pelos contra termos, necessários para a consistência quântica de uma TQC em um “background” curvo, definem uma RG modificada livre dos problemas devidos às “altas derivadas”. Porém, antes de tudo, é preciso esclarecer se a condição de que as equações das RG estendidas sejam de segunda ordem é absolutamente necessária ou somente suficiente. Um passo importante nesta direção consiste na investigação da consistência de RG estendidas obedecendo uma forma “enfraquecida” da condição das equações de segunda ordem, requerendo que:

- (a) as equações para Buracos Negros (BN) e as flutuações ao redor deles sejam de segunda ordem.
- (b) as equações para as soluções conforme planas como Paredes de Domínio (planas e estáticas) e do Friedmann-Robertson-Walker e as flutuações lineares ao redor destes são de segunda ordem.

Esta família de modelos conhecidos como Gravitação Quase-Topológica (GQT) foram construídos para os casos de termos cúbicos [25], [23] e quárticos [12] em  $d > 4$ . As propriedades das Paredes de Domínio Planas (PD) e as condições de estabilidade e causalidade destas soluções foram estabelecidas em trabalhos recentes [10], [23].

Esta dissertação é dedicada ao problema da extensão dos requerimentos (a) e (b) impostos sobre mo-

delos de GQT quadráticos e cúbicos, adicionando uma nova condição:

(c) que as equações para Paredes de Domínio Curvas (PDC's),

$$dS_d^2 = dy^2 + e^{2A(y)} \bar{g}_{ik}(x_e) dx^i dx^k \quad (1.11)$$

$$R^{(d-1)}(\bar{g}_{ik}) = K = \text{constante}, \quad (1.12)$$

sejam de segunda ordem. Soluções PDC exatas analíticas são construídas com uma extensão do método do 'superpotencial' e o uso de sistemas de equações de primeira ordem.

A dissertação está dividida da seguinte maneira: no capítulo 2 fazemos uma pequena revisão da teoria de Lovelock e também justificamos a construção da gravitação Quase-Topológica. No capítulo 3 apresentamos o método do 'superpotencial', para os vácuos do potencial, utilizado para construir um sistema de equações de primeira ordem equivalente às equações de segunda ordem. Mostramos como ele deve ser adaptado ao caso onde temos a estrutura (1.12). No capítulo 4 apresentamos exemplos a partir de escolhas de superpotenciais adequados. Finalmente, no capítulo 5 apresentamos nossas considerações finais.

---

# Capítulo 2

## GRAVITAÇÃO DE LOVELOCK ESTENDIDA

### 2.1 Teoria da gravidade de Lovelock

Tem havido interesse considerável na investigação de teorias gravitacionais que consideram termos de ordens mais altas nas curvaturas nas últimas décadas. Entre elas, uma de mais destaque foi a teoria da gravidade de Lovelock, que é a generalização natural da relatividade geral de Einstein em altas dimensões ( $d > 4$ ) [19] [20]. A teoria de Lovelock é caracterizada pela propriedade especial que as equações de campo são de, no máximo, de segunda ordem em derivadas da métrica. No caso  $d = 3, 4$  a gravidade de Lovelock coincide com a ação da relatividade geral de Einstein-Hilbert (E-H), que é um caso particular, mas para dimensões superiores essa teoria é diferente. De fato, para  $d > 4$  a gravidade de Einstein poderia ser considerada como um caso particular da gravidade de Lovelock uma vez que o termo de Einstein-Hilbert é um dos vários termos que constituem a ação de Lovelock. A teoria de Lovelock também admite outros tipos de modelos como casos particulares, poderia ser o caso de teoria da gravidade de Chern-Simons [1], [18] que não será estudada na presente dissertação.

Recentemente, a teoria de Lovelock tem sido considerada em muitos trabalhos para mostrar os efeitos de incluir termos de curvaturas de ordem superior no contexto da correspondência AdS/CFT [21]. Os termos quadráticos da teoria de Lovelock, termos de Gauss-Bonnet, se assemelham também a modelos da gravidade inspirados em teoria de cordas [33]. Para recentes discussões interessantes sobre termos de curvatura de ordem superior ver [22], [3], [17].

A lagrangiana da teoria vai ser dada como a soma da densidade de Euler dimensionalmente estendida,

e pode ser escrita como segue [19], [20].

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \sum_{n=0}^m c_n \mathcal{L}_n, \quad \mathcal{L}_n = \frac{1}{2^n} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \prod_{r=1}^n R^{\alpha_r \beta_r}_{\mu_r \nu_r} \quad (2.1)$$

Onde o  $\delta$  de Kronecker generalizado é definido como um produto antissimétrico,

$$\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} = \frac{1}{n!} \delta_{[\alpha_1}^{\mu_1} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\alpha_n}^{\mu_n} \delta_{\beta_n}^{\nu_n]} \quad (2.2)$$

Cada termo  $\mathcal{L}_n$  em (2.1) corresponde a uma extensão dimensional da densidade de Euler em  $2n$ -dimensões.

As constantes de acoplamento  $c_n$  em (2.1) têm dimensão de  $[\text{comprimento}]^{2n-d}$ , e torna-se conveniente normalizar a densidade da Lagrangiana em unidades da escala de Planck  $c_1 = (16\pi G)^{-1} = l_p^{2-d}$ . Expandindo o produto em (2.1) a Lagrangiana tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [c_0 \mathcal{L}_0 + c_1 \mathcal{L}_1 + c_2 \mathcal{L}_2 + c_3 \mathcal{L}_3 + \dots] \quad (2.3)$$

$\mathcal{L}_0$  representa a identidade, assim a constante  $c_0$  é justamente a constante cosmológica  $\Lambda$ .  $\mathcal{L}_1$  nos dá o habitual termo de curvatura escalar, enquanto  $\mathcal{L}_2$  é justamente o termo de Gauss-Bonnet, que é a forma da densidade para a característica de Euler de uma variedade 4-dimensional,  $\mathcal{L}_3$  é a densidade de Euler 6-dimensional. Uma vez que ação da gravidade de Lovelock é a soma da densidade de Euler dimensionalmente estendida, se encontra que não há mais do que as derivadas de segunda ordem com respeito à métrica na equação de movimento.

Na literatura, a chamada gravidade de Gauss-Bonnet, contém os primeiros três termos de (2.1).

Explicitamente, de (2.1) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= 1, \quad \mathcal{L}_1 = R, \quad \mathcal{L}_{GB} \equiv \mathcal{L}_2 = R_{abcd} R^{abcd} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2 \\ \mathcal{L}_3 &= 4R_{ab}{}^{cd} R_{cd}{}^{ef} R_{ef}{}^{ab} - 8R_a{}^c{}^d R_c{}^e{}^f R_e{}^a{}^b{}_f - 24R_{abcd} R^{abc}{}^e R^{de} + 3R_{abcd} R^{abcd} R \\ &+ 24R_{abcd} R^{ac} R^{bd} + 16R_a{}^b R_b{}^c R_c{}^a - 12R_a{}^b R_b{}^a R + R^3 \end{aligned} \quad (2.4)$$



### 2.1.1 Ação da teoria de Lovelock ate ordem quadrática. $n=2$

Consideremos uma ação geral da gravidade  $\mathcal{R}^2$   $d$ -dimensional com constante cosmológica e matéria.

A ação é dada por:

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} \{ aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\xi\sigma}R^{\mu\nu\xi\sigma} + R - \Lambda \} + S_m . \quad (2.5)$$

Aqui  $S_m$  é a ação para o campo de matéria. Por variação sobre o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , obtemos a seguinte equação,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\xi\sigma}R^{\mu\nu\xi\sigma} + R - \Lambda \right) \\ &+ a \left( -2RR^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R - 2g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho R \right) \\ &+ b \left( -2R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} + \nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} + \nabla_\rho \nabla^\nu R^{\rho\mu} - \square R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\rho\sigma} \right) \\ &+ c \left( -2R^{\mu\rho\sigma\tau} R^\nu{}_{\rho\sigma\tau} - 2\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\mu\rho\nu\sigma} - 2\nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\nu\rho\mu\sigma} \right) \\ &- R^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Aqui  $T^{\mu\nu}$  é o tensor de energia momento do campo de matéria:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g_{\mu\nu}} . \quad (2.7)$$

Usando as seguintes identidades,

$$\begin{aligned} \nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\mu\rho\nu\sigma} &= \square R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} - R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} , \\ \nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} + \nabla_\rho \nabla^\nu R^{\rho\mu} &= \frac{1}{2} (\nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R) - 2R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} + 2R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} , \\ \nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} &= \frac{1}{2} R , \end{aligned} \quad (2.8)$$

podemos reescrever a eq.(2.6) como:

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left( aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\xi\sigma}R^{\mu\nu\xi\sigma} + R - \Lambda \right) \\
& + a \left( -2RR^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R - 2g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho R \right) \\
& + b \left\{ \frac{1}{2} (\nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R) - 2R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} - \square R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \square R \right\} \\
& + c \left( -2R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\nu - 4\square R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu R + \nabla^\nu \nabla^\mu R \right. \\
& \quad \left. - 4R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} + 4R^\mu_\rho R^{\nu\rho} \right) \\
& - R^{\mu\nu} - T_{matter}^{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Nosso principal interesse é o estudo do caso quando a parte de  $\mathcal{R}^2$  da ação (2.5) forma a combinação de Gauss-Bonnet, e isto se consegue simplesmente olhando a eq.(2.9) e percebendo que os termos das derivadas da curvatura, i.e. quarta ordem, desaparecem quando:

$$a = c, \quad b = -4c, \tag{2.10}$$

Desta forma podemos escrever,

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left\{ c \left( R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\xi\sigma}R^{\mu\nu\xi\sigma} \right) + R - \Lambda \right\} \\
& + c \left( -2RR^{\mu\nu} + 4R^\mu_\rho R^{\nu\rho} + 4R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} - 2R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\nu \right) \\
& - R^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{2.11}$$

A eq.(2.11) não contém as derivadas das curvaturas, portanto, os termos com derivadas superiores a dois não aparecem. Vemos que a teoria de Gauss-Bonnet é a única teoria de Lovelock quadrático que cumpre com a condição das equações de movimento de segunda ordem [8].

Daqui para frente denominaremos o termo da combinação de Gauss-Bonnet como:

$$\chi_4 = R_{\mu\nu\xi\sigma}R^{\mu\nu\xi\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2, \tag{2.12}$$

onde  $\chi_4$  corresponde à densidade de Euler 4-dimensional. Isto significa que em quatro dimensões a dinâmica será a mesma que a gravidade de Einstein, pois a gravidade de Lovelock para termos quadráticos é um invariante topológico.

## 2.1.2 Combinações Quadráticas

Consideremos um exemplo prototípico onde analisaremos o termo da lagrangiana quadrática de Lovelock d-dimensional [25] que fica definida como:

$$\mathcal{L}_Q = \alpha R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R^2 \quad (2.13)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes arbitrárias.

Esta lagrangiana  $\mathcal{L}_Q$  para  $d \leq 4$ , o teorema de Gauss-Bonnet permite fixar  $\alpha = 0$  sem perda de generalidade. Em  $d > 4$ , porém, os três invariantes quadráticos são necessários para descrever a lagrangiana mais geral. Para valores genéricos das constantes de acoplamento  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , as equações de movimento <sup>1</sup> serão de quarta ordem.

Não obstante, uma propriedade clara de 2.13 é que existe uma escolha geral das constantes de acoplamento  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , que resulta exatamente no cancelamento das equações diferenciais de quarta ordem, ou seja derivadas da curvatura, gerando uma equação diferencial de segunda ordem. Depois <sup>2</sup> vai ser demonstrado para que as equações da gravitação sejam de segunda ordem, temos que cumprir a seguinte relação dos coeficientes  $\gamma = \frac{\beta d - 4\alpha}{4(d-1)}$ . Como um caso especial podemos escolher valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , sendo 1 e 4 respetivamente, e como resultado podemos ter o  $\gamma$  igual a 1 que é outro passo para obter a relação (2.10).

É possível representar a lagrangiana (2.13) como uma combinação linear de invariantes, sendo  $W_{\mu\nu\rho\sigma}$  o tensor de Weyl,

$$\tilde{\alpha} W_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\mu\nu\rho\sigma} + \tilde{\beta} \chi_4 + \tilde{\gamma} [\dots] \quad (2.14)$$

Onde o invariante quadrático do tensor de curvatura de Weyl,  $W_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{4}{(d-2)} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{2}{(d-1)(d-2)} R^2$  e o  $\chi_4 \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2$  é a combinação de Gauss-Bonnet. Quer dizer que  $\tilde{\gamma} [\dots]$  vai ser também um invariante.

<sup>1</sup> maior detalhe sobre as equações de movimento e as condições para que seja de segunda ordem sera visto no capitulo 4

<sup>2</sup>No capitulo 4

Esse ultimo termo da eq.2.14  $\tilde{\gamma}$  [...] deve ser representado como  $\tilde{\gamma}_1 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \tilde{\gamma}_2 R^2$ .

$$\tilde{\alpha} \left( R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{4}{(d-2)} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{2}{(d-1)(d-2)} R^2 \right) + \tilde{\beta} \left( R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \right) + \tilde{\gamma}_1 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \tilde{\gamma}_2 R^2 \quad (2.15)$$

Agrupando todos os termos semelhantes teremos:

$$(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \left( -\frac{4\tilde{\alpha}}{(d-2)} - 4\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}_1 \right) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \left( \frac{2\tilde{\alpha}}{(d-1)(d-2)} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}_2 \right) R^2$$

Comparando com a equação (2.13) estabelecemos as seguintes igualdades:

$$\alpha = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \quad (2.16)$$

$$\beta = \frac{4\tilde{\alpha}}{(d-2)} + 4\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}_1 \quad (2.17)$$

$$\gamma = \frac{2\tilde{\alpha}}{(d-1)(d-2)} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}_2 \quad (2.18)$$

Do capítulo 4 usaremos a eq.(D.10) que dá uma relação dos coeficientes de (2.13), garantindo assim que na lagrangiana não exista altas derivadas, e dessa maneira poder resolver o sistema de equações.

Levando a eq. 2.16 e 2.17 na eq.(D.10) e depois igualando na eq. 2.18

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{(d-1)(d-2)} + \frac{d\tilde{\beta}}{(d-1)} - \frac{\tilde{\alpha}}{(d-1)} - \frac{\tilde{\beta}}{(d-1)} - \frac{d\tilde{\gamma}_1}{4(d-1)} = \frac{2\tilde{\alpha}}{(d-1)(d-2)} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}_2$$

obtemos,

$$\frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1} = -\frac{d}{4(d-1)} \quad (2.19)$$

Se colocamos a eq. acima nas duas ultimas expressões da eq.(2.16) chegamos a uma relação, que é mais conhecida como a ação da “nova gravitação massiva” o NMG, ou seja, os coeficientes dos  $\gamma_{1,2}$ , vão ser:

Substituindo a eq.2.19, obtemos o modelo NMG;

$$\tilde{\gamma}_1 \left( R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{d}{4(d-1)} R^2 \right) \quad (2.20)$$

Assim concluímos que para uma combinação quadrática mais geral no invariante de curvatura, o qual é de segunda ordem com as condições já mostradas, pode ser colocado como uma combinação linear do invariante de curvatura do tensor de Weyl, da densidade de Euler em quatro dimensões e o modelo NMG, como acabamos de demonstrar.

### 2.1.3 Lagrangiana com n=3

Aqui a Lagrangiana possui grau de diferenciação seis em d-dimensões arbitrárias. começemos por considerar a combinação genérica das oito lagrangianas linearmente independentes [26] [25]. Consideramos oito pelo já visto nos casos anteriores para que equação diferencial da gravitação seja de segunda ordem, i.e. excluimos os termos da derivada da curvatura. Observe que neste caso se fixamos  $d = 6$ , a combinação cúbica será um invariante topológico mantendo assim a dinâmica do movimento feita para o caso E-H. Os oito termos mencionados são:

$$\begin{aligned} L_1 &= R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} R_{\sigma\rho}^{\mu\nu}, \quad L_2 = R_{\mu}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta} R_{\alpha}^{\sigma}{}_{\beta}{}^{\rho} R_{\sigma}^{\mu}{}_{\rho}{}^{\nu}, \quad L_3 = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha}{}_{\sigma} R^{\beta\sigma}, \quad L_4 = R R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \\ L_5 &= R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta}, \quad L_6 = R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\alpha} R_{\alpha}{}^{\mu}, \quad L_7 = R R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\mu}, \quad L_8 = R^3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Primeiramente, a densidade de Euler 6-dimensional é dada por:

$$\chi_6 := 4L_1 - 8L_2 - 24L_3 + 3L_4 + 24L_5 + 16L_6 - 12L_7 + L_8, \quad (2.22)$$

Obviamente a equação de movimento será de segunda ordem.

Segundo, há dois invariantes algébricos independentes construídos a partir de três tensores de Weyl<sup>3</sup>, chamados de  $W_1 = W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^{\sigma\rho} W_{\sigma\rho}^{\mu\nu}$  e  $W_2 = W_{\mu}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta} W_{\alpha}^{\sigma}{}_{\beta}{}^{\rho} W_{\sigma}^{\mu}{}_{\rho}{}^{\nu}$ , que poderão ser adicionados à ação gerando equações de segunda ordem. Eles se escrevem como:

$$\begin{aligned} W_1 &= L_1 - \frac{12}{(d-2)} L_3 + \frac{6}{(d-1)(d-2)} L_4 + \frac{24}{(d-2)^2} L_5 \\ &+ \frac{16(d-1)}{(d-2)^2} L_6 - \frac{24(2d-3)}{(d-1)(d-2)^3} L_7 + \frac{8(2d-3)}{(d-1)^2(d-2)^3} L_8 \end{aligned} \quad (2.23)$$

<sup>3</sup>Lembrar a definição do tensor de Weyl em d-dimensões é  $W_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{(d-2)} \{g_{\mu\alpha} R_{\beta\nu} - g_{\mu\beta} R_{\alpha\nu} + g_{\nu\beta} R_{\alpha\mu} - g_{\nu\alpha} R_{\beta\mu}\} + \frac{R}{(d-1)(d-2)} \{g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} - g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}\}$

e

$$\begin{aligned}
W_2 = & L_2 + \frac{3}{(d-2)}L_3 - \frac{3}{2(d-1)(d-2)}L_4 - \frac{3d}{(d-2)^2}L_5 \\
& - \frac{2(3d-4)}{(d-2)^3}L_6 + \frac{3(d^2+d-4)}{(d-1)(d-2)^3}L_7 - \frac{(d^2+d-4)}{(d-1)^2(d-2)^3}L_8
\end{aligned} \tag{2.24}$$

## 2.2 Extensões dimensionais da Gravitação Lovelock

Além de produzirem equações de segunda ordem, as teorias de Lovelock apresentam outras características importantes. Elas possuem soluções de buracos negros, o que é de extrema importância para uma teoria de gravitação inclusive satisfazem o teorema de Birkhoff o que implica uma isometria local entre soluções com simetria esférica planares ou hiperbólica e a solução de buraco negro (estática) correspondente.

No entanto outras teorias gravitacionais têm recebido atenção especial, mesmo violando a condição de fornecer equações de segunda ordem, mas adquirindo soluções de buracos negros e também admitindo o teorema de Birkhoff. Construções deste tipo de teorias foram obtidas por [23] e independentemente por [26] [25].

A motivação inicial de Myers [23] introduzir tais modelos surgira no contexto da correspondência AdS/CFT. Além do termo de Gauss-Bonnet, existe a necessidade de introduzir novos acoplamentos (parâmetros), e uma extensão natural seria a introdução do termo  $\mathcal{L}_3$  de Lovelock. No entanto devido à origem topológica desse termo, tais contribuições só seriam relevantes em dimensões maiores ou iguais a sete. Estas construções recebem então o nome de gravitação Quase-Topológica.

Cabe ressaltar, que num background geral, as equações de movimento desta teoria são de quarta ordem. No entanto, Myers demonstra que tais equações, quando linearizadas, descrevem gravitons se propagando no vácuo AdS e são exatamente de Einstein de segunda ordem.

Em [23], [24], [27] é apresentada uma nova interação de curvatura cúbica  $\mathcal{Z}_d$ , dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_d = & R_{\mu}^{\alpha} R_{\nu}^{\beta} R_{\alpha}^{\sigma} R_{\beta}^{\rho} R_{\sigma}^{\mu} R_{\rho}^{\nu} + \frac{1}{(2d-3)(d-4)} \left( \frac{3(3d-8)}{8} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} R \right. \\
& - 3(d-2) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha}{}_{\sigma} R^{\beta\sigma} + 3d R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} \\
& \left. + 6(d-2) R_{\mu}^{\nu} R_{\nu}^{\alpha} R_{\alpha}^{\mu} - \frac{3(3d-4)}{2} R_{\mu}^{\nu} R_{\nu}^{\mu} R + \frac{3d}{8} R^3 \right).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Pode-se obter de uma forma alternativa  $\mathcal{Z}_d$  [24]

$$\mathcal{Z}_d = W_1 + \frac{3d^2 - 15d + 16}{8(2d - 3)(d - 4)(d - 5)} (\chi_6 + 8W_1 - 4W_2).$$

Para  $d = 6$ ,  $\mathcal{Z}_6$  não produz uma interação não trivial que é a curvatura cúbica, quer dizer que  $\mathcal{Z}_6$  produz um novo invariante topológico em 6-dimensões.

Agora podemos generalizar a interação de curvatura cúbica para o caso quando  $d > 6$  através da adição de outra componente proporcional à densidade de Euler 6-dimensional (2.22), usando a formula geral para altas dimensões:  $\mathcal{Z}'_d = 2\mathcal{Z}_d + \frac{1}{4}\chi_6$ . A expressão final pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}'_d = & R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} R_{\sigma\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{(2d - 3)(d - 4)} \left( -12(d^2 - 5d + 5) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha}{}_{\sigma} R^{\beta\sigma} \right. \\ & + \frac{3}{2} (d^2 - 4d + 2) R R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + 12(d - 2)(d - 3) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\alpha} R^{\mu\beta} \\ & \left. + 8(d - 1)(d - 3) R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\alpha} R_{\alpha}{}^{\mu} - 6(d - 2)^2 R R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\mu} + \frac{1}{2} (d^2 - 4d + 6) R^3 \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nosso estudo nesta dissertação busca elucidar o seguinte ponto. Existem outras soluções que, a partir de uma simetria que reduza a teoria, possam apresentar equações de segunda ordem. como ficará claro nesta dissertação, tais construções podem ser obtidas a partir das ações apresentadas acima, e as soluções de paredes de domínio ilustram este fato.

# Capítulo 3

## VÁCUO E PAREDES DE DOMÍNIOS

### 3.1 Vácuo

A natureza do potencial (3.59) nos garante que para os mínimos dele a derivada covariante do ‘superpotencial’ nesse extremos dos vácuos tem que sumir, i.e. aqueles com  $\partial_\sigma W(\sigma) = W' = 0$ , os valores do potencial será  $V \leq 0$ . Esses extremos das paredes interpolam entre dois vácuos anti-de Sitter ou vácuos anti- de Sitter e um vácuo Minkowski [9].

Vácuos são caracterizados por soluções do tipo  $\sigma = \sigma^* = \text{constante}$  (que são os extremos do potencial), sabendo disso e de acordo com a eq.(3.49) nós temos:

$$\frac{dV(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma^*} = 0, \quad (3.1)$$

ou seja, temos solução do tipo vácuo nos extremos do potencial. Da eq. (3.51) no vácuo o  $\dot{\sigma} = 0$ , podemos obter a seguinte equação:

$$\dot{A}^2 = Ke^{-2A} - \frac{\kappa^2 V(\sigma_*)}{(d-1)(d-2)}. \quad (3.2)$$

Para poder resolver este tipo de equação diferencial temos que considerar o tipo de curvatura constante,  $K$ , que está associada a uma escala do espaço que fatia o espaço total. Primeiramente tratamos as folheações do tipo  $AdS_{d-1}$  que tem como constante de curvatura igual a  $K = \frac{-1}{L_{d-1}^2}$ , sendo que



$-\frac{\kappa^2 V(\sigma_*)}{(d-1)(d-2)} = \frac{1}{L_*^2}$  induz uma escala no vácuo  $L_*$ :

$$\begin{aligned} \dot{A}^2 &= -\frac{1}{L_{d-1}^2} e^{-2A} + \frac{1}{L_*^2} \\ &= \frac{1}{L_*^2} \left( 1 - \frac{L^2}{L_{d-1}^2} e^{2A} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

para resolvê-lo, consideramos:  $x = \frac{L_{d-1}}{L_*} e^A$  e  $\dot{x} = \frac{L_{d-1}}{L_*} e^A \dot{A}$  temos que  $\dot{A} = \frac{\dot{x}}{x}$ . Consideramos  $K = \pm \frac{1}{L_{d-1}^2}$  onde  $L_{d-1}$  representa tal escala. Observemos que para  $K$  pequeno teremos  $L_{d-1}$  grande, o que faz com que os resultados do caso plano sejam reproduzidos.

A solução do fator de escala é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}^2}{x^2} &= \frac{1}{L_*^2} \frac{1}{x^2} (x^2 - 1) \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \pm \frac{1}{L_*} \\ \Rightarrow \text{arc ch}(x) &= \pm \frac{y}{L_*} \Rightarrow x = \cosh\left(\pm \frac{y}{L_*}\right) \Rightarrow \frac{L_{d-1}}{L_*} e^A = \cosh\left(\frac{y}{L_*}\right) \\ \Rightarrow e^A &= \frac{L_*}{L_{d-1}} \cosh\left(\frac{y}{L_*}\right) \end{aligned}$$

Da mesma maneira podemos obter uma solução para folheações dS, ou seja,  $K = \frac{1}{L_{d-1}^2}$ . De maneira análoga verificamos que o fator de escala é  $e^A = \frac{L_*}{L_{d-1}} \sinh\left(\frac{y}{L_*}\right)$ . Resumindo teremos:

$$e^A = \begin{cases} \frac{L_*}{L_{d-1}} \sinh \frac{1}{L_*} y & K = \frac{1}{L_{d-1}^2} \\ \frac{L_*}{L_{d-1}} e^{-\frac{1}{L_*} y} & K = 0 \\ \frac{L_*}{L_{d-1}} \cosh \frac{1}{L_*} y & K = -\frac{1}{L_{d-1}^2} \end{cases}$$

O caso  $K = 0$  reproduz a solução para parede de domínio plana.

As soluções acima são portanto a forma encontrada para os vácuos, e o espaço de AdS [2], [13],[14] em d-dimensões, nas coordenadas de Poincaré após a fixação de calibre toma a forma:

$$ds^2 = dy^2 + \left[ \frac{L_*}{L_{d-1}} \cosh\left(\frac{y}{L_*}\right) \right]^2 ds^2(AdS)_{d-1}, \quad (3.4)$$

com

$$ds^2(AdS)_{d-1} = e^{-2\frac{y}{L_{d-1}}} \left( -dt^2 + \sum_{a=1}^{d-3} dx_a^2 \right) + dx_{d-2}^2, \quad (3.5)$$

no caso do espaço fatiado ser  $AdS_{d-1}$  e

$$ds^2 = dy^2 + \left[ \frac{L_*}{L_{d-1}} \sinh\left(\frac{y}{L_*}\right) \right]^2 ds^2(dS)_{d-1}, \quad (3.6)$$

com

$$ds^2(dS)_{d-1} = -dt^2 + e^{2\frac{t}{L_{d-1}}} \left( \sum_{a=1}^{d-2} dx_a^2 \right), \quad (3.7)$$

no caso  $(dS)_{d-1}$

Notamos, no entanto, que em ambos os casos perde-se a forma da parametrização geralmente utilizada quando se trabalha com as coordenadas de Poincaré, que deve ser escrita da forma

$$ds^2 = d\tilde{y}^2 + e^{-2\frac{\tilde{y}}{L_*}} \left( -dt^2 + \sum_{a=1}^{d-2} dx_a^2 \right) \quad (3.8)$$

Devemos então encontrar uma maneira de transformar nossas coordenadas iniciais de forma a obter a forma (3.8) em cada caso.

Iniciando com as folheações em  $(dS)_{d-1}$ , podemos escrever o elemento de linha como:

$$ds^2 = dy^2 + \frac{L_*^2}{L_{d-1}} \sinh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) e^{2\frac{t}{L_{d-1}}} \left( -e^{-2\frac{t}{L_{d-1}}} dt^2 + d\vec{x}^2 \right), \quad (3.9)$$

onde  $d\vec{x}^2$  representa a soma nas demais  $(d-2)$ -coordenadas, que não serão alteradas.

Comparando (3.8) e (3.9) identificamos imediatamente uma relação entre os fatores de escala:

$$e^{-\frac{\tilde{y}}{L_*}} = \frac{L_*}{L_{d-1}} \sinh\left(\frac{y}{L_*}\right) e^{\frac{t}{L_{d-1}}}, \quad (3.10)$$

o que nos leva à primeira transformação desejada:

$$\tilde{y} = -\frac{L_*}{L_{d-1}} t - \ln\left( \frac{L_*}{L_{d-1}} \sinh\left(\frac{y}{L_*}\right) \right), \quad (3.11)$$

de onde podemos escrever

$$d\tilde{y} = -\frac{L_*}{L_{d-1}} dt - \operatorname{cth}\left(\frac{y}{L_*}\right) dy, \quad (3.12)$$

Por outro lado, devemos ter ainda

$$d\tilde{t} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} dy, \quad (3.13)$$

onde  $\tilde{t}(t, y)$  deve ser encontrada a fim de termos a identificação completa.

Igualando os elementos de linha, temos

$$dy^2 - \frac{L_*^2}{L_{d-1}^2} \sinh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) dt^2 = d\tilde{y}^2 - e^{-2\frac{\tilde{t}}{L_*}} d\tilde{t}^2, \quad (3.14)$$

e substituindo (3.10), (3.12) e (3.13) nesta equação obtemos as seguintes equações:

$$\sinh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) = -1 + \sinh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) e^{2\frac{\tilde{t}}{L_{d-1}}} \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\right)^2 \quad (3.15)$$

$$1 = \operatorname{cth}^2\left(\frac{y}{L_*}\right) - \frac{L_*^2}{L_{d-1}^2} \sinh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) e^{2\frac{\tilde{t}}{L_{d-1}}} \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\right)^2 \quad (3.16)$$

Integrando (3.15) e (3.16) obtemos a relação desejada que nos dá a função  $\tilde{t}(t, y)$ :

$$\tilde{t}(t, y) = -L_{d-1} \operatorname{cth}\left(\frac{y}{L_*}\right) e^{-\frac{\tilde{t}}{L_{d-1}}} \quad (3.17)$$

As equações (3.11) e (3.17) nos dão as transformações desejadas.

Deve-se observar que os sistemas  $(y, t)$  ou  $(\tilde{y}, \tilde{t})$  não cobrem toda a variedade descrita pelas coordenadas de Poincaré. Existe uma singularidade em  $y = 0$  inerente a estes sistemas de coordenadas que os torna geodesicamente incompletos. Para um estudo mais detalhado, deve-se, portanto implementar uma continuação a fim de que este problema seja contornado.

Procedemos de maneira análoga no caso das folheações  $AdS_{d-1}$ .

Partimos da seguinte identificação:

$$\begin{aligned} dy^2 + \left(\frac{L_*}{L_{d-1}} \cosh\left(\frac{y}{L_*}\right)\right)^2 [e^{-2x_{d-2}}(-dt^2 + d\tilde{x}^2) + dx_{d-2}^2] = \\ = d\tilde{y}^2 + e^{-2\frac{\tilde{y}}{L_*}} (-d\tilde{t}^2 + d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}_{d-2}^2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Mantemos inalteradas as variáveis  $\tilde{t} = t$ ,  $x_a = \tilde{x}_a$   $a = 1, 2, \dots, d-3$ . Teremos assim:

$$e^{-\frac{\tilde{y}}{L_*}} = \frac{L_*}{L_{d-1}} \cosh\left(\frac{y}{L_*}\right) e^{-\frac{x_{d-2}}{L_{d-1}}}, \quad (3.19)$$

ou de forma mais explícita

$$\tilde{y} = \frac{L_*}{L_{d-1}} x_{d-2} - L_* \ln\left(\frac{L_*}{L_{d-1}} \cosh\left(\frac{y}{L_*}\right)\right). \quad (3.20)$$

A partir desta equação escrevemos

$$d\tilde{y} = \frac{L_*}{L_{d-1}} dx_{d-2} - \tanh\left(\frac{y}{L_*}\right) dy \quad (3.21)$$

Podemos ainda escrever

$$d\tilde{x}_{d-2} = \frac{\partial\tilde{x}_{d-2}}{\partial y} dy + \frac{\partial\tilde{x}_{d-2}}{\partial x_{d-2}} dx_{d-2} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.19), (3.21) e (3.22) em (3.18) obtemos as seguintes equações:

$$\cosh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) = 1 + \cosh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) e^{-2\frac{x_{d-2}}{L_{d-1}}} \left(\frac{\partial\tilde{x}_{d-2}}{\partial x_{d-2}}\right)^2 \quad (3.23)$$

$$1 = \tanh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) + \left(\frac{L_*}{L_{d-1}}\right)^2 \cosh^2\left(\frac{y}{L_*}\right) e^{-2\frac{x_{d-2}}{L_{d-1}}} \left(\frac{\partial\tilde{x}_{d-2}}{\partial y}\right)^2 \quad (3.24)$$

Finalmente, integrando (3.23) e (3.24) obtemos

$$\tilde{x}_{d-2}(y, x_{d-2}) = L_{d-1} e^{\frac{x_{d-2}}{L_{d-1}}} \tanh\left(\frac{y}{L_*}\right) \quad (3.25)$$

As equações (3.20) e (3.25) fornecem as transformações de coordenadas para as variáveis de Poincaré.

Observe que neste caso não temos problemas de singularidade.

## 3.2 Paredes de domínio planas (PDP)

O modelo mais simples para o estudo dessas soluções é dado pela ação de Einstein-Hilbert acoplada ao campo escalar  $\sigma$  e com a auto-interação dada pelo potencial  $V(\sigma)$ . Este modelo já foi estudado [10] [7], e a ação é escrita como:

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{\kappa^2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, d-1. \quad (3.26)$$

Onde  $\kappa^2 = \frac{8\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} G_d$  define a escala de Planck em  $d$ -dimensões. A assinatura da métrica é  $(-, +, +, \dots, +)$ .

As equações de movimento para o modelo acima são:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \frac{\kappa^2}{2} \left[ \partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2}\partial_\rho\sigma\partial^\rho\sigma \right) + V(\sigma) \right] \\ g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\partial_\nu\sigma) &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu\sigma) = \partial_\sigma V(\sigma) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como já mencionado anteriormente, procuramos soluções para as equações de acima que tenham métrica do tipo “Parede de Domínio”, com o campo escalar dependendo somente da coordenada axial  $y$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dy^2 + e^{2A(y)}\eta_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j = 0, 1, \dots, d-2, \\ g_{ij} &= \text{diag}(-1, 1, 1, \dots), \quad \sigma = \sigma(y). \end{aligned} \quad (3.28)$$

O grupo de simetria no espaço-tempo plano  $M_{d-1}$  é o grupo de Poincaré  $(d-1)$ -dimensional. No estudo de parede de domínio plana exigimos que as soluções da eq. (3.27), assintoticamente satisfaçam:

$$e^{A(y)}(y = \pm\infty) \approx e^{\frac{y}{L_\pm}}, \quad \sigma(\pm\infty) = \sigma_\pm^*, \quad (3.29)$$

o que define os vácuos do sistema.

Para a métrica (3.28) os símbolos de Christoffel não nulos são dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &\equiv \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_\nu g_{\rho\alpha} + \partial_\rho g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\nu\rho}), \\ \Gamma_{ij}^y &= -e^{2A}g_{ij}\dot{A}, \\ \Gamma_{yj}^i &= \delta_j^i\dot{A}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde denotamos que o “ponto” representa a derivada com relação à coordenada axial  $y$ . As componentes do tensor de Ricci são:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\equiv \partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho\Gamma_{\rho\tau}^\tau - \Gamma_{\mu\rho}^\tau\Gamma_{\nu\tau}^\rho, \\ R_{yy} &= -(d-1)(\ddot{A} + \dot{A}^2), \\ R_{ij} &= -e^{2A}g_{ij}(\ddot{A} + (d-1)\dot{A}^2), \\ R_{yj} &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

e o escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -2(d-1)\left(\ddot{A} + \frac{d}{2}\dot{A}^2\right). \quad (3.32)$$

Calculando as equações de movimento, quando  $(\mu = \nu = y)$ , temos:

$$(d-1)(d-2)\dot{A}^2 - \frac{\kappa^2}{2}\dot{\sigma}^2 = -\kappa^2 V(\sigma). \quad (3.33)$$

Agora no caso quando  $(\mu = i, \nu = j)$

$$2d - 2\ddot{A} + (d-1)(d-2)\dot{A}^2 = -\kappa^2\left(\frac{\dot{\sigma}^2}{2} + V(\sigma)\right) \quad (3.34)$$

Subtraindo a eq. (3.33) e (3.34) ficamos com:

$$(d-2)\ddot{A} = -\frac{\kappa^2}{2}\dot{\sigma}^2. \quad (3.35)$$

Aqui encontramos a outra equação de movimento mediante a variação do campo escalar  $\sigma$ ,

$$\ddot{\sigma} + (d-1)\dot{A}\dot{\sigma} = \partial_\sigma V(\sigma). \quad (3.36)$$

Vemos que a eq.(3.33) funciona como vínculo automático.

### 3.2.1 Sistema de primeira ordem

É possível mostrar [13] que as equações acima são equivalentes a um sistema de primeira ordem, definido a partir de um ‘superpotencial’  $W(\sigma)$ .

Mostramos abaixo tal equivalência. O ‘superpotencial’ é dado por:

$$\dot{A} = -\frac{1}{(d-2)}W(\sigma), \quad (3.37)$$

e portanto

$$\ddot{A} = -\frac{1}{(d-2)}\dot{\sigma}\partial_\sigma W(\sigma), \quad (3.38)$$

Agora substituimos a eq.(3.38) na eq(3.35), obtendo

$$\dot{\sigma}^2 = \dot{\sigma} \frac{2}{\kappa^2} \partial_\sigma W(\sigma), \quad (3.39)$$

que é simplificada como:

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\kappa^2} \partial_\sigma W(\sigma). \quad (3.40)$$

Substituindo (3.37) e (3.40) em (3.33) obtemos uma relação entre ‘superpotencial’  $W(\sigma)$  e o potencial  $V(\sigma)$  dada por<sup>1</sup>

$$\kappa^2 V(\sigma) = 2 \frac{1}{\kappa^2} (\partial_\sigma W)^2 - \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2. \quad (3.41)$$

A introdução do ‘superpotencial’ e do sistema de primeira ordem faz com que um problema de equações não lineares de relativa complexidade possa ser transformado num sistema onde é possível encontrar soluções analíticas para dados superpotenciais .

Por outro lado, a equação (3.41) permite a obtenção direta do potencial também a partir do ‘superpotencial’.

Observemos que o escalar de Ricci dado em (3.32) também pode ser escrito em termos do ‘superpotencial’ a partir de (3.37) e (3.38):

$$R(\sigma) = -2(d-1) \left\{ -\frac{2}{(d-2)\kappa^2} (W'(\sigma))^2 + \frac{d}{2(d-2)^2} W^2(\sigma) \right\} \quad (3.42)$$

Esta relação é muito importante, pois nos permite, a partir do ‘superpotencial’ calculado na configuração de vácuo, ( $W'(\sigma_*) = 0$ ) inferir sobre a geometria do mesmo.

### 3.3 Paredes de domínio curvas (PDC)

Em paredes de domínio com grupo de simetria do tipo  $SO(d-1, 2)$  do espaço-tempo  $AdS_{d-1}$  ou com grupo de simetria do tipo  $SO(d, 1)$  do espaço-tempo  $dS$ , cada um deles possui uma constante de curvatura  $K < 0$  ou  $K > 0$ , respectivamente. Consideramos novamente a ação (3.26), com a métrica

<sup>1</sup>A linha em  $W'$  denota a derivada com respeito a  $\sigma$ , agora o ‘ponto’ que ataca aos campos  $\sigma$  e  $A$  denota a derivada com respeito à coordenada axial  $y$

dada por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^2(y)e^{2(d-1)A(y)}dy^2 + e^{2A(y)}\bar{g}_{ij}dx^i dx^j, \\ \sigma &= \sigma(y), \quad \sqrt{-g} = fe^{2(d-1)A}\sqrt{-\bar{g}}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde  $\bar{g}_{ij}$  é uma métrica sobre  $AdS$  ou  $dS$  segundo foi dito anteriormente. Usando as novas condições definidas acima, encontraremos relações com a função auxiliar  $f(y)$  e a métrica:

$$\begin{aligned} g_{yy} &= f^2(y)e^{2(d-1)A}; & g_{ij} &= e^{2A}\bar{g}_{ij} \\ g^{yy} &= f^2(y)e^{2(d-1)A}; & g^{ij} &= e^{2A}\bar{g}^{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \equiv \det(g_{\mu\nu}) &= f^2 e^{4(d-1)A} \det\bar{g}_{ij} = f^2 e^{4(d-1)A} \bar{g} \\ \sqrt{-g} &= f^{2(d-1)A} \sqrt{-\bar{g}}. \end{aligned}$$

Fazendo os mesmos cálculos feitos em na seção anterior para paredes planas, nós vamos obter conexões não nulas, como segue:

$$\Gamma_{yy}^y = \frac{\dot{f}}{f} + (d-1)\dot{A}; \quad \Gamma_{ij}^y = -\frac{\dot{A}}{f^2}e^{-2(d-1)A}\bar{g}_{ij}; \quad \Gamma_{yj}^i = \dot{A}\delta_j^i; \quad \Gamma_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{jk}^i, \quad (3.44)$$

Calculamos agora as componentes do tensor de Ricci. O cálculo de  $R_{yy}$  só depende de  $\Gamma_{yy}^y$  e  $\Gamma_{yj}^i$ , e não depende de  $\bar{g}_{jk}$  e são portanto, os mesmos das paredes planas. Usando os resultados obtidos para paredes planas e depois de alguns cálculos, temos:

$$\begin{aligned} R_{yy} &= (d-1) \left\{ -\ddot{A} + \frac{\dot{f}}{f}\dot{A} + (d-2)\dot{A}^2 \right\} \\ R_{ij} &= -\frac{1}{f^2}e^{-2(d-2)A} \left\{ \ddot{A} - \frac{\dot{f}}{f}\dot{A} \right\} \bar{g}_{ij} + \bar{R}_{ij} \end{aligned} \quad (3.45)$$

O escalar de Ricci é dado por:

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{yy}R_{yy} + g^{ij}R_{ij} \\ &= (d-1) \left\{ -\ddot{A} + \frac{\dot{f}}{f}\dot{A} + (d-2)\dot{A}^2 \right\} - e^{-2A}\bar{g}^{ij} \left\{ \ddot{A} - \frac{\dot{f}}{f}\dot{A} \right\} \frac{1}{f^2}e^{-2(d-2)A}\bar{g}_{ij} + e^{-2A}\bar{R}_{(d-1)} \\ R &= \frac{e^{-2(d-1)A}}{f} \left\{ (d-1)(d-2)\frac{\dot{A}^2}{f} - 2(d-1)\frac{d}{dy} \left( \frac{\dot{A}}{f} \right) \right\} + (d-1)(d-2)Ke^{-2A} \end{aligned} \quad (3.46)$$



Além disso, aqui nós estamos colocando uma barra sobre as conexões, na métrica, no tensor de Ricci e no escalar de Ricci, para diferenciá-los em relação aos outros, calculados para o caso plano. Utilizando (3.46) e as seguintes identidades, válidas para espaços com curvatura constante:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ijkl} &= K(\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl} - \bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}), \\ \bar{R}_{ij} &= (d-2)K\bar{g}_{ij}, \\ \bar{R} &= (d-1)(d-2)K,\end{aligned}$$

diretamente na ação (3.26) obtemos a seguinte ação efetiva:

$$S^{eff} = \int d^{d-1}x dy \mathcal{L}_{eff} - 2(d-1) \int d^{(d-1)}x dy \frac{d}{dy} \left( \frac{\dot{A}}{f} \right) \quad (3.47)$$

$$\mathcal{L}_{eff} = (d-1)(d-2) \frac{\dot{A}^2}{f} + (d-1)(d-2)Kf e^{2(d-2)A} - \frac{\dot{\sigma}^2}{2f} - V(\sigma) f e^{2(d-1)A} \quad (3.48)$$

Observamos que as equações serão de segunda ordem, já que a dependência da  $\mathcal{L}_{eff}$  é só de  $\sigma$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $A$ ,  $\dot{A}$  e  $f$ . Como  $\mathcal{L}_{eff}$  não depende de  $\dot{f}(y)$ , concluímos que a equação de  $f(y)$  não possui dinâmica, sendo portanto um vínculo.

### 3.3.1 Sistema de equações

As equações de Euler-Lagrange para  $\mathcal{L}_{eff}$  são equações de movimento para  $\sigma$ ,  $A$  e  $f$ . Somente no final dos cálculos fixamos  $f = e^{-(d-1)A}$  chegando às equações:

$$\ddot{\sigma} + (d-1)\dot{\sigma}\dot{A} = V'(\sigma) \quad (3.49)$$

$$2\ddot{A} + 2(d-1)\dot{A}^2 - 2(d-2)Ke^{-2A} + \frac{2k^2V(\sigma)}{d-2} = 0 \quad (3.50)$$

e o vínculo é dado por:

$$- (d-1)(d-2)\dot{A}^2 + K(d-1)(d-2)e^{-2A} + \kappa^2 \frac{\dot{\sigma}^2}{2} - k^2V(\sigma) = 0 \quad (3.51)$$

Tendo esses resultados das equações acima multiplicamos (3.50) por  $(d-2)$  e (3.51) por 2. Somando, obtemos:

$$\kappa^2 \dot{\sigma}^2 = -2(d-2)\ddot{A} - 2K(d-2)e^{-2A}. \quad (3.52)$$

Nosso próximo passo é encontrar, analogamente ao que foi feito para o caso plano, um sistema de primeira ordem, a partir de um ‘superpotencial’ equivalente a esse sistema de equações.

Veremos que para os casos  $K \neq 0$  é possível fazê-lo, mas a complexidade em relação ao caso plano aumenta consideravelmente.

### 3.3.2 Superpotencial e as equações de primeira ordem

Partindo de (3.51) no vácuo,  $\dot{\sigma}_* \equiv 0$  a equação (3.51) é dada por:

$$\dot{A}^2 - Ke^{-2A} = -\kappa^2 \frac{V_*}{(d-1)(d-2)}, \quad (3.53)$$

como o potencial depende somente de  $\sigma$ , percebemos que a estrutura do vácuo da teoria independe se estamos estudando o caso plano ou as folheações curvas. Portanto, a presença de  $K$  nas equações produz um efeito na geometria.

A condição de vácuo,  $\dot{\sigma}_* = 0$ , implica  $W'(\sigma_*) = 0$  e a partir de (3.41) obtemos

$$\kappa^2 V(\sigma_*) = -\frac{(d-1)}{(d-2)} W^2(\sigma_*) \quad (3.54)$$

Depois substituímos em (3.53) para obtermos,

$$\dot{A} = -\frac{W(\sigma_*)}{(d-2)} \sqrt{1 + \frac{K(d-2)^2}{W^2(\sigma_*)} e^{-2A}} \quad (3.55)$$

Aqui nós escolhemos o sinal negativo para fazer semelhança com (3.37) e o termo de raiz quadrada será uma função  $\gamma$ , como segue:

$$\dot{A} = -\frac{\gamma}{(d-2)} W(\sigma), \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{K(d-2)^2}{W^2(\sigma)} e^{-2A}} \quad (3.56)$$

Então

$$\ddot{A} = -\frac{\dot{\sigma}W'}{(d-2)\gamma} - Ke^{-2A}, \quad (3.57)$$

e substituindo na eq. (3.52),

$$\begin{aligned} \kappa^2 \dot{\sigma}^2 &= 2 \frac{W'(\sigma)}{\gamma} \\ \kappa^2 \dot{\sigma} &= 2 \frac{W'(\sigma)}{\gamma} \end{aligned} \quad (3.58)$$

No caso  $\dot{\sigma} \neq 0$ , substituindo as eqs. (3.56) e (3.58) em (3.51) nos leva ao seguinte potencial:

$$\kappa^2 V(W) = 2 \frac{W'^2}{\kappa^2 \gamma^2} - \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2 \quad (3.59)$$

A expressão acima fornece então uma relação entre  $V(\sigma)$  e  $W(\sigma)$ . Observemos, no entanto, que a presença de  $\gamma$  não permite uma relação imediata entre o potencial e o ‘superpotencial’, existente no caso plano. É possível obtermos uma relação análoga à (3.42) que fornece uma relação entre o escalar de curvatura e o ‘superpotencial’. Para o caso curvo, a partir de (3.56), (3.57) e (3.58) obtemos,

$$R(\sigma) = -2(d-1) \left\{ -\frac{2}{\kappa^2 \gamma^2} \frac{(W'(\sigma))^2}{(d-2)} + \frac{d}{2(d-2)^2} W^2(\sigma) \right\} \quad (3.60)$$

Da eq. (3.60) podemos ver que para os estudos dos vácuos a curvatura escalar não depende explicitamente da geometria do espaço-tempo das hiper-superfícies, quer dizer não depende da curvatura constante  $K$  uma vez que esta dependência está associada ao termo  $W'$ , que se anula no vácuo. O estudo dos vácuos será detalhado na próxima seção.

De (3.56) vemos que o ‘superpotencial’  $W(\sigma^*)$  esta definido por um sinal. O sinal para  $A(y)$  no contorno deve de ser sempre positivo para que em nosso extremo (vácuo) o espaço seja do tipo  $AdS_d$ , com isto  $W(\sigma^*) < 0$  sempre será negativo. Neste vácuo o escalar de curvatura definido em (3.60) é constante e negativo, i.e.

$$R_* = -d(d-1) \frac{W^2(\sigma^*)}{(d-2)^2} = -\frac{d(d-1)}{L_*^2} \frac{2d}{(d-2)} \Lambda_* < 0, \quad (3.61)$$

Com esta equação vemos claramente as condições dos vácuos definidas como  $W'(\sigma^*) = 0$ , e  $W(\sigma^*) < 0$  e que deve de ser diferente de zero, para assim ficar garantido nosso espaço tipo  $AdS_d$ .

Uma outra possibilidade a ser considerada é o caso de um muro levar uma solução do tipo  $AdS_d$  a uma outra do tipo Minkowski ( $M_d$ ). Neste último caso, a solução para o fator de escala é  $A(y) = 0$ ,

ou seja  $ds^2 = dy^2 + \eta_{ij}dx^i dx^j$ .

### 3.3.3 Função Beta e índices críticos

Apesar de não pretendermos nesta dissertação discutir as eventuais aplicações de nossos resultados a métodos holográficos, mostramos nesta seção alguns elementos que futuramente poderão ser úteis para essa abordagem. As soluções de paredes de domínio poderão nos fornecer elementos essenciais para o comportamento crítico de teorias de campo na borda. Uma análise mais profunda desses resultados foge ao escopo desta dissertação.

Para obter a função beta e os índices críticos, nós precisaremos o uso da massa do campo escalar, sendo ela definida em relação ao potencial; como a massa ao quadrado do campo no extremo do potencial será, igual ao potencial de um campo escalar também nesse extremo [29], ou seja:

$$m_*^2 = \left. \frac{d^2 V}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=\sigma_*}, \quad (3.62)$$

Nesses extremos o potencial pode ser positivo, negativo ou nulo; caracterizando um mínimo do potencial, um máximo ou um ponto de inflexão, respetivamente. Aqui nós temos que exigir que  $m_* \geq 0$ , pois  $m_*^2$  é interpretado como a massa de uma partícula associada a esse campo (como fóton - de massa zero- está associado ao campo eletromagnético). Se  $m_*^2 < 0$  a partícula quântica é uma *tquion* e não possui interpretação física clara. O fato de  $m_*^2 < 0$ , no espaço-tempo de Minkowski ( $M_d$ ), ser evitado é porque o *tquion* se move fora do cone da luz (de Minkowski) levando a problemas de causalidade, ou seja, é um problema particular da estrutura causal de  $M_d$  [29]. Para o espaço-tempo de  $AdS_d$  algo similar acontece, mas agora o limite mínimo de  $m_*^2$  não é zero e sim,

$$m_*^2 \geq -\frac{(d-1)^2}{4L_*^2}, \quad (3.63)$$

Com isto podemos ver que só são *tquions* se as partículas não satisfizerem a desigualdade acima. Agora temos que mostrar que nosso vácuo satisfaz a desigualdade (3.63). Para obter esse resultado primeiro temos que definir a função beta,  $\beta = \frac{d\sigma}{d(-A)}$  e introduzir o índice crítico  $s$ .

Primeiro a função beta podemos obter dividindo a eq. (3.56) e (3.58), assim:

$$\frac{d\sigma}{d(-A)} \equiv \beta(\sigma) = \frac{d\sigma}{d(-A)} = \frac{2(d-2)W'}{\kappa^2 \gamma^2 W} \quad (3.64)$$

Essa equação será muito útil para poder encontrar uma relação entre  $A(y)$  e  $\sigma(y)$ .

Da eq. (3.64) vemos que para os vácuos a função  $\beta(\sigma)$  é zero, i.e.

$$\beta(\sigma_*) = 0 \quad (3.65)$$

Agora podemos introduzir o índice crítico  $s$ , definido como:  $s = \frac{d\beta}{d\sigma}|_{\sigma^*} \mathcal{V}\mathcal{R}$ .

Do potencial (3.59) onde procuramos a função  $\beta(\sigma)$  na primeira equação da direita, temos:

$$\kappa^2 V = \frac{\kappa^2 \gamma^2 W^2 \beta^2}{2(d-2)^2} - \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2$$

a derivada deste potencial <sup>2</sup> com respeito a  $\sigma$  é:

$$V' = \frac{\gamma^2 \beta W (W\beta)'}{(d-2)^2} + \frac{W^2 \beta^2 \gamma \gamma'}{(d-2)^2} - \frac{(d-1) \gamma^2 \beta W^2}{(d-2)^2} \quad (3.66)$$

Onde a derivada de  $\gamma$  é:

$$\gamma' = \frac{(d-2)K\gamma e^{-2A}}{2WW'} \left\{ 1 - 2 \frac{(d-2)W'^2}{W^2 \gamma^2} \right\} \quad (3.67)$$

Agora substituindo na eq. 3.66 a derivada do potencial fica assim:

$$V' = \frac{\gamma^2}{(d-2)^2} \left\{ \beta W (W\beta)' - (d-1) \beta W^2 \right\} + 2K\beta e^{-2A} \left\{ 1 - \frac{\beta^2 \gamma^2}{2(d-2)} \right\} \quad (3.68)$$

Fazendo os mesmos procedimentos de derivar o potencial novamente para obter  $V''$  e logo supor um ponto fixo  $\sigma = \sigma^*$ , ou seja o vácuo, onde  $V''_{(\beta=0)}|_{\sigma^*}$  pode ser calculada como:

$$V''_{(\beta=0)}|_{\sigma^*} = \frac{\gamma^2 W^2}{(d-2)^2} \left\{ \beta'^2 - (d-1)\beta' \right\} + 2Ke^{-2A}(\beta' + 2) \quad (3.69)$$

Seja  $s_* = \beta'$ , então temos a segunda derivada do potencial em função do  $s_*$

$$\begin{aligned} V''|_{\sigma^*} &= \frac{\gamma^2 W_*^2}{(d-2)^2} s_*(s_* - (d-1)) + 2Ke^{-2A}(s_* + 2) \\ V''|_{\sigma^*} &= \frac{s_*(s_* - (d-1))}{L_*^2} + Ke^{-2A} [s_*^2 - (d-3)s_* + 4] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Aqui estamos usando  $L_* = \frac{(d-2)}{W_*}$  que é no caso do vácuo físico para uma parede de domínio plana (ver 3.2), onde  $L_* > 0$  é sempre considerada em nossa análise.

Como o coeficiente de  $V''$  está associado a uma massa, podemos definir  $\mu_*^2 \equiv L_*^2 m_*^2$ , então o  $V''|_{\sigma^*}$  fica

<sup>2</sup>Daqui para frente (para esta seção)vamos a usar  $\kappa^2 = 1$

assim:

$$\mu_*^2(s) \equiv L_*^2 m_*^2 = s_*(s_* - (d-1)) + KL_*^2 e^{-2A} [s_*^2 - (d-3)s_* + 4] \quad (3.71)$$

A função  $\mu_*^2(s)$  é uma parábola que tem uma concavidade para cima

De (3.69) temos a derivada de  $\beta$  sendo ele o índice crítico, é escrito como segue,

$$\frac{d\beta}{d\sigma} \equiv s = \frac{2(d-2)}{\gamma^2 W} \left\{ W'' - \frac{W'^2}{W} \right\} - \frac{2(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} \left\{ 1 - \frac{2(d-2)W'^2}{W^2 \gamma^2} \right\} \quad (3.72)$$

Para o caso do vácuo, ou seja  $\frac{d\beta}{d\sigma} \equiv s_{fis}$  (para  $W(\sigma_{fis}) \neq 0$ ), neste caso físico ( $W' = 0$ ), nós teremos o índice crítico nesse vácuo,  $s_{fis}$  será:

$$s_{fis} = \frac{2}{\gamma^2} \left\{ L_* W'' - \gamma^2 + 1 \right\} \quad (3.73)$$

No caso quando o escalar de Ricci é zero (do tipo  $M_d$ ), é claro, pela eq. (3.72) que o índice crítico diverge, com isto podemos dizer que no vácuo o limite de  $s_*$  é muito grande.

Com essa análise mostramos que a partir do ‘superpotencial’ podemos obter informações a respeito do comportamento crítico de uma teoria de campos dual, definida na borda do espaço  $AdS_{d-1}$ .

Para o caso de paredes planas tal relação é atualmente comparecida [10], [29]. Para o caso de paredes curvas este estudo ainda deve ser realizado.

### 3.4 PDC's na gravitação de Lovelock de ordem quadrático

Pretendemos, nesta seção estudar soluções de paredes de domínio em uma teoria que agrega correções na parte gravitacional. Adicionalmente à lagrangiana de Einstein-Hilbert a seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L}_Q = \alpha R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R^2, \quad (3.74)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes ajustadas de tal forma que possamos ter equações de movimento de segunda ordem.  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  e  $R_{\mu\nu}$  são respectivamente os tensores de Riemann e Ricci. A ação a ser estudada é escrita como:

$$S^{eff} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ R + \alpha_{\mathcal{L}} \mathcal{L}_Q - \frac{\kappa^2}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - \kappa^2 V(\sigma) \right\} \quad (3.75)$$

onde  $\alpha_L = \frac{\lambda L^2}{(d-3)(d-4)}$  é uma constante de acoplamento com dimensão  $L^2$ .

Com  $\kappa^2 = \frac{8\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} G_d$  é a constante de acoplamento gravitacional e o sinal da métrica de dimensionalidade  $d - 1$  é definida como  $(-1, 1, \dots, 1)$ .

Nossa discussão vai estar focada na fase estática das paredes curvas e vamos a redefinir nosso *ansatz* para as quais a métrica é dada por (3.43):

### 3.4.1 Condição de equações de segunda ordem

No apêndice (D) mostramos uma relação muito importante dos coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , para que as altas derivadas sejam canceladas e obter uma equação gravitacional de segunda ordem,

$$4\alpha - \beta d + 4\gamma d - 4\gamma = 0$$

Assim,

$$\gamma = \frac{\beta d - 4\alpha}{4(d-1)} \quad (3.76)$$

Agora a ação tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} S^{eff} &= \int d^{d-1} x dy \mathcal{L}_{eff} \\ &- 2(d-1) \int d^{d-1} x dy \frac{d}{dy} \left\{ \frac{\dot{A}}{f} + \frac{1}{6} \alpha_{\mathcal{L}}(d-2) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \dot{A}^3 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} K \alpha_{\mathcal{L}}(d-2) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \frac{e^{-2A}}{f} \dot{A} \right\} \end{aligned} \quad (3.77)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= (d-1)(d-2) \left( \frac{\dot{A}^2}{f} - \frac{\alpha_{\mathcal{L}}}{12} (d-4) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \dot{A}^4 \right) \\ &+ (d-1)(d-2) K \left( f e^{2(d-2)A} + (d-4) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \frac{\alpha_{\mathcal{L}}}{2} \left[ \frac{1}{2} K f e^{2(d-3)A} + \frac{e^{-2A}}{f} \dot{A}^2 \right] \right) \\ &- \frac{\dot{\sigma}^2}{2f} - V(\sigma) f e^{2(d-1)A} \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde a lagrangeana efetiva ( $\mathcal{L}_{eff}$ ) depende de  $\sigma$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $A$ ,  $\dot{A}$  e  $f$ , que vai garantir equações de segunda ordem.

### 3.4.2 Sistema de equações

Repetindo o procedimento da seção anterior obtemos:

$$\ddot{\sigma} + (d-1)\dot{\sigma}\dot{A} = V'(\sigma) \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \left( 2 - \alpha_{\mathcal{L}}(d-4) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \dot{A}^2 \right) + 2(d-1)\dot{A}^2 \left( 1 - \frac{1}{4}\alpha_{\mathcal{L}}(d-4) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \dot{A}^2 \right) \\ & + K\alpha_{\mathcal{L}} [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] (d-4) \left( \ddot{A} + (d-2)\dot{A}^2 \right) e^{-2A} \\ & - \frac{1}{2}(d-3)(d-4) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] K^2 \alpha_{\mathcal{L}} e^{-4A} - 2(d-2)K e^{-2A} + \frac{2\kappa^2 V(\sigma)}{d-2} = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

e o vínculo é:

$$\begin{aligned} & - (d-1)(d-2)\dot{A}^2 \left( 1 - \frac{1}{4}\alpha_{\mathcal{L}}(d-4) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \dot{A}^2 \right) + \frac{\kappa^2 \dot{\sigma}^2}{2} - \kappa^2 V(\sigma) \\ & + K(d-1)(d-2)e^{-2A} \left( 1 + \frac{\alpha_{\mathcal{L}}}{2}(d-4) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \left[ \frac{1}{2}K e^{-2A} - \dot{A}^2 \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

As equações (3.79), (3.80) e (3.81) são as eqs. de movimento para a ação (3.75) com a métrica:

$$ds^2 = dy^2 + e^{2A(y)} \bar{g}_{ij} dx^i dx^j.$$

Agora multiplicando por  $(d-2)$  à eq.(3.80) e por 2 à eq.(3.81), e somando, temos:

$$\begin{aligned} \kappa^2 \dot{\sigma}^2 &= -(d-2)\ddot{A} \left\{ 2 - \alpha_{\mathcal{L}}(d-4)M\dot{A}^2 + \alpha_{\mathcal{L}}(d-4)KMe^{-2A} \right\} \\ &+ \alpha_{\mathcal{L}}(d-2)(d-4)KMe^{-2A}\dot{A}^2 - \alpha_{\mathcal{L}}(d-2)(d-4)K^2Me^{-4A} - 2K(d-2)e^{-2A} \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde definimos  $M = [\beta d - 2(2\alpha + \beta)]$  como o caso geral para representar a relação que existe entre os coeficientes da lagrangiana quadrática, para assim levar num caso aparentemente particular que é o mais estudado e o mais importante, e tem maior relevância nos estudos das teorias sobre a gravidade modificada [16], [32], [5], [11], [8].

Usando o método do ‘superpotencial’ e com ajuda das equações (3.56) (3.57) (as contas podem ser verificadas no Apêndice (D)) e eq.(3.83) torna-se para,  $\dot{\sigma} \neq 0$

$$\kappa^2 \dot{\sigma} = \frac{W'}{\gamma} \left\{ 2 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{(d-2)^2} MW^2 \right\} \quad (3.83)$$



E o potencial é:

$$\kappa^2 V(W) = 2 \frac{W'^2}{\kappa^2 \gamma^2} \left( 1 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{(d-2)^2} MW^2 \right)^2 - \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2 \left( 1 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{2(d-2)^2} MW^2 \right) \quad (3.84)$$

As equações (D.27), (D.29) e (3.80) formam nosso sistema de primeira ordem. Com  $\alpha_{\mathcal{L}} = 0$  reproduzimos o caso Einstein-Hilbert.

### 3.4.3 PDC's na gravitação de Gauss-Bonnet

Nesta seção particularizaremos os resultados da seção (3.4) para o caso G-B fixando,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 4$  e  $\gamma = 1$  (demostrada em (D.10)). Teremos a ação [24].

$$S^{eff} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ R + \frac{\lambda L^2}{(d-3)(d-4)} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) - \frac{\kappa^2}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - \kappa^2 V(\sigma) \right\} \quad (3.85)$$

Esta ação é semelhante a (3.75), onde temos o mesmo caso da constante de acoplamento  $\alpha_{\mathcal{L}} = \frac{\lambda L^2}{(d-3)(d-4)}$ , mas agora com as condições impostas dos coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . A correção quadrática é o termo de 'Gauss-Bonnet'  $\chi_4$  que corresponde à densidade de Euler em quatro dimensões:

$$\chi_4 = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R^2 \quad (3.86)$$

Esta ação é escrita para qualquer dimensão  $d \geq 4$ . Seguindo os mesmos passos feitos anteriormente, temos os seguintes resultados particularizados para o presente caso.

$$S^{eff} = \int d^{d-1} x dy \mathcal{L}_{eff} - 2(d-1) \int d^{(d-1)} x dy \frac{d}{dy} \left\{ \frac{\dot{A}}{f} + \frac{2}{3} \lambda L^2 \frac{(d-2)}{(d-4)} \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \dot{A}^3 + 2K \lambda L^2 \frac{(d-2)}{(d-4)} \frac{e^{-2A}}{f} \dot{A} \right\}, \quad (3.87)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} = & (d-1)(d-2) \left( \frac{\dot{A}^2}{f} - \frac{\lambda L^2 e^{-2(d-1)A}}{3 f^3} \dot{A}^4 \right) \\
& + (d-1)(d-2) K \left( f e^{2(d-2)A} + 2\lambda L^2 \left[ \frac{1}{2} K f e^{2(d-3)A} + \frac{e^{-2A}}{f} \dot{A}^2 \right] \right) \\
& - \kappa^2 \frac{\dot{\sigma}^2}{2f} - \kappa^2 V(\sigma) f e^{2(d-1)A}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

As equações de movimento serão:

$$\ddot{\sigma} + (d-1)\dot{\sigma}\dot{A} = V'(\sigma)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{A} \left( 2 - 4\lambda L^2 \dot{A}^2 \right) + 2(d-1)\dot{A}^2 \left( 1 - \lambda L^2 \dot{A}^2 \right) + 4K\lambda L^2 \left( \ddot{A} + (d-2)\dot{A}^2 \right) e^{-2A} \\
- & 2(d-3)K^2 \lambda L^2 e^{-4A} - 2(d-2)K e^{-2A} + \frac{2\kappa^2 V(\sigma)}{d-2} = 0
\end{aligned} \tag{3.89}$$

e o vínculo é:

$$\begin{aligned}
- & (d-1)(d-2)\dot{A}^2 \left( 1 - \lambda L^2 \dot{A}^2 \right) + \frac{\kappa^2 \dot{\sigma}^2}{2} - \kappa^2 V(\sigma) \\
+ & K(d-1)(d-2)e^{-2A} \left( 1 + 2\lambda L^2 \left[ \frac{1}{2} K e^{-2A} - \dot{A}^2 \right] \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Das duas equações de cima podemos obter:

$$\kappa^2 \dot{\sigma}^2 = -2(d-2) \left[ \ddot{A} + K e^{-2A} \right] \left[ 1 - 2\lambda L^2 \dot{A}^2 + 2\lambda L^2 K e^{-2A} \right], \tag{3.91}$$

e seguindo os mesmos passos feitos na seção anterior chegamos ao sistema de primeira ordem em termos do ‘superpotencial’  $W(\sigma)$ ,

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\kappa^2} \frac{W'}{\gamma} C_0, \quad \dot{A} = -\frac{\gamma}{(d-2)} W, \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 - 2\lambda \frac{L^2}{(d-2)^2} W^2, \\
\gamma &= \sqrt{1 + \frac{(d-2)^2 K}{W^2} e^{-2A}}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Da equação do movimento dada em (3.89) e levada à relação do potencial  $V(\sigma)$  e o ‘superpotencial’  $W(\sigma)$  é dada por:

$$\kappa^2 V(W) = 2 \frac{W'^2}{\kappa^2 \gamma^2} C_0^2 - \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2 \left( 1 - \lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2} \right) \quad (3.94)$$

**Nota:** Observamos que quando  $\gamma = 0$  o sistema acima se torna, em geral, singular, uma vez que  $|\dot{\sigma}| \rightarrow \infty$  e  $|V| \rightarrow \infty$ . Isto implica em uma singularidade física, onde a curvatura diverge. E, de fato, temos

$$R(\sigma) = -2(d-1) \left\{ -\frac{2}{\kappa^2 \gamma^2} \frac{(W'(\sigma))^2}{(d-2)} C_0(W) + \frac{d}{2(d-2)^2} W^2(\sigma) \right\} \quad (3.95)$$

que diverge se  $\gamma \rightarrow 0$ . Não obstante, existe uma possibilidade de ter  $\gamma \rightarrow 0$  *sem que exista uma singularidade*. Este caso vai acontecer quando  $\gamma(\sigma)$  se anula exatamente sobre um vácuo. Neste caso, pode-se ter  $\dot{\sigma}$  e  $V$  finitos, assim como  $R$ . Esta situação ocorrerá nos exemplos do capítulo (4).

### 3.4.4 Descrições das propriedades dos vácuos

Para definirmos os vácuos nos guiaremos pela seção (3.1). A derivada do potencial pode ser escrita como:

$$V'(\sigma_k^*) = 0 = 2W' C_0(W(\sigma)) \mathcal{F}(\sigma)|_{\sigma_k^*} \quad (3.96)$$

Os dois primeiros fatores da direita tem as mesmas condições do vácuo definidas para  $\dot{\sigma}$ , e onde o  $\mathcal{F}(\sigma)$  é

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sigma) = & 2 \frac{W''(\sigma) C_0(W(\sigma))}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \left[ \frac{K(d-2)e^{2A}}{2W(\sigma)} \left( 1 - 2 \frac{(d-2)W'^2(\sigma) C_0(W(\sigma))}{W^2(\sigma) \gamma^2} \right) \right] \\ & - 8 \frac{\bar{\lambda} W'^2(\sigma) W(\sigma)}{\gamma^2} - \frac{(d-1)W(\sigma)}{(d-2)}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

que é um extremo do potencial ( $V$ ) para o sistema de primeira ordem. Portanto temos que distinguir os seguintes três tipos de vácuos ( $\sigma_k^*, C_0(\sigma_k^*)$ ), provenientes de três fatores distintos  $W'(\sigma)$ ,  $C_0(\sigma)$  e  $\mathcal{F}(\sigma)$  que estão presentes em  $V'(\sigma)$ . O *primeiro* é dado pelo extremo do ‘superpotencial’  $W'(\sigma_k^* = 0)$  com  $W(\sigma_k^*) \neq 0$ , que em nosso caso já foi estudado na seção §(3.1) que é o vácuo estável ou vácuo físico. Neste caso aparece um *segundo* tipo, conhecido como *topológico*, que são dados pelos zeros da função  $C_0(W(\sigma_k^*)) = 0$ ; o *terceiro* tipo de vácuo é dada pelos zeros da função  $\mathcal{F}(\sigma_k^*)$  pois conduzem a

configurações de vácuos instáveis ou não físicos, pelo qual serão descartados já que não conhecemos método analíticos para descrever este tipo de vácuo.

### Vácuo físico

Os vácuos físicos são o caso já conhecido, definido pelos extremos do ‘superpotencial’:

$$W'(\sigma)|_{\sigma=\sigma_{fis}} = 0 \quad W(\sigma_{fis}) \neq 0. \quad (3.98)$$

Aqui nós estamos evitando o caso  $W(\sigma_{fis}) = 0$  que é o vácuo de Minkowski ( $M_d$ )<sup>3</sup>, e assim garantir somente vácuos do tipo  $AdS_d$ .

Como foi dito na seção §(3.1), estamos supondo que o  $V(\sigma_{fis}) < 0$ , e para este extremo do potencial esta associado uma constante cosmológica nua (“bare”), que é definida por:

$$V(\sigma_{fis}) = 2\Lambda_{bare} = -\frac{(d-1)(d-2)}{L_{bare}^2} \quad (3.99)$$

Multiplicando a cada lado por  $L^2$ , e definimos uma função de escala

$$h_k \equiv \frac{L^2}{L_{bare}^2} = -\frac{V(\sigma_{fis})L^2}{(d-1)(d-2)} \quad (3.100)$$

Agora de (3.94) para o caso do vácuo físico o potencial nesse extremo fica,

$$V(\sigma_{fis}) = -\frac{(d-1)}{(d-2)}W^2 \left( 1 - \lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2} \right)$$

e assim

$$-\frac{V(\sigma_{fis})L^2}{(d-1)(d-2)} = \frac{W^2L^2}{(d-2)^2} \left\{ 1 - \frac{L^2}{(d-2)^2} \lambda W^2 \right\} \quad (3.101)$$

Desse modo somos levados a uma equação quadrática dos vácuos.

$$h_k \equiv f_k \{1 - \lambda f_k\} \quad (3.102)$$

Onde introduzimos como em [23],  $h_k$ , e a escala efetiva  $f_k \equiv \frac{L^2}{L_{fis}^2} = \frac{L^2W^2(\sigma_{fis})}{(d-2)^2}$  ( $f_k > 0$ ). Para o caso de paredes planas temos que o  $f_k \equiv \frac{L^2}{L_{fis}^2} = L^2\dot{A}^2(\sigma_{fis}) = \frac{L^2W^2(\sigma_{fis})}{(d-2)^2}$ . Os vácuos não dependem da

<sup>3</sup>Depois nós mostraremos a valides deste tipo de vácuo com um exemplo, que vá de um extremo  $M_d$  ate outro extremo  $AdS_d$

geometria das paredes de domínio, ou seja, não há uma dependência explícita em  $K$ , nessas relações.

A eq.(3.102) tem solução,

$$f_k^\pm = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda h_k} \right) \quad (3.103)$$

Sabemos que  $f_k > 0$  tem que ser real e positivo, para isto o termo da direita que esta numa raiz quadrada tem que ser maior a zero, i.e.  $1 - 4\lambda h_k > 0$  ou  $\lambda < \frac{1}{4h_k}$ .

Feito de outro jeito, podemos escrever (3.103) assim

$$\frac{1}{L_{fis}^2} = \frac{1}{2\lambda L^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda \frac{L^2}{L_{bare}^2}} \right) \quad (3.104)$$

Aqui e em (3.103) vemos que só existe uma solução, só  $f_k^-$  será um vácuo físico. Isto é fácil notar, quando o  $\lambda \mapsto 0$  tem que recuperar o caso de E-H, mas não o recupera e por isto que descartamos  $f_k^+$  já que com esta solução temos  $L_{bare} \neq L_{fis}$ . De (3.104) vemos que a diferença deles é pela adição do termo G-B, desse modo temos que:

$$\frac{1}{L_{fis}^2} = \frac{1}{2\lambda L^2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\lambda \frac{L^2}{L_{bare}^2}} \right) \quad (3.105)$$

Aqui sim vemos que  $L_{fis}^2$  é real e positivo, e assim teremos  $\lambda < \frac{1}{4} \frac{L_{bare}^2}{L^2}$ .

### Vácuo topológico

Os tipos de vácuos que estudamos na seção anterior foram os físicos, agora nós vamos estudar o segundo tipo de vácuos, que são os topológicos e será descrito quando nós fazemos  $C_0 = 0$ , ou seja:

$$C_0(W(\sigma_{top})) = 1 - \frac{2\lambda L^2}{(d-2)^2} W^2(\sigma_{top}) = 0 \quad (3.106)$$

Este vácuo topológico pode ser verificado se escrevemos o ‘superpotencial’  $W(\sigma_{top})$  em termos de  $f_{top}$ .

$$f_{top} = \frac{1}{2\lambda} \quad (3.107)$$

E para  $\lambda > 0$ , teremos sempre uma solução da eq.(3.106) dada por  $W^2(\sigma_{top})$  e teremos um espaço  $AdS_d$  com uma escala  $L_{top}$ :

$$\frac{W_{top}^2}{(d-2)^2} = \frac{1}{2\lambda L^2} \equiv \frac{1}{L_{top}^2} \mapsto L_{top} = \sqrt{2\lambda}L \quad (3.108)$$

Observamos que os vácuos topológicos possuem sempre uma relação com  $\lambda$  e  $L$ . Substituímos (3.108) na eq.(3.105) e assim encontramos uma desigualdade entre  $L_{top}$  e  $L_{fis}$ ,

$$\frac{L_{top}^2}{L_{fis}^2} = 1 - \sqrt{1 - 2\frac{L_{top}^2}{L_{bare}^2}} \quad (3.109)$$

Vemos que a relação  $\frac{L_{top}^2}{L_{fis}^2} < 1$  ou seja  $L_{top}^2 < L_{fis}^2$ , com estas condições podemos dizer que a escala do vácuo topológico sempre será menor que o vácuo físico

Agora da eq.(3.94) vamos analisar o caso para o vácuo topológico, como foi feito de maneira semelhante para o caso do vácuo físico, mas neste caso tipo topológico  $C_0(f_{top}) = 0$ . Sendo aqui o  $h_{top} = \frac{L^2}{L_{bar}^2}$  e  $f_{top} = \frac{L^2}{L_{top}^2}$ . Assim teremos

$$h_{top} \equiv f_{top}(1 - \lambda f_{top}), \quad (3.110)$$

cuja solução é

$$f_{top}^{\pm} = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda h_{top}} \right), \quad (3.111)$$

que possui um máximo para  $\lambda > 0$ . Verifiquemos isto:

$$\frac{dh_{top}}{df_{top}} = 1 - 2\lambda f_{top} = 0 \quad (3.112)$$

Aqui vemos que o valor máximo é para  $f_{top} = \frac{1}{2\lambda}$ <sup>4</sup>, que consiste basicamente no vácuo topológico. O feito aqui nos ajudara na procura dos vácuos topológicos na seção (3.5), mediante máximos ou mínimos da função (acima foi feita para a função (3.110)).

Estes dois tipos de vácuos (físicos e topológicos) foram obtidas a partir dos extremos do potencial  $V(\sigma)$  dado em (3.94), na qual não são geralmente todos os tipos de vácuos dados para esses extremos. No entanto, apesar de não ter estudado e analisado todos os vácuos de nossa teoria, a descrição feita em termos do ‘superpotencial’  $W$  são validas para se obter as equações de movimento e posterior-

<sup>4</sup>Se verificamos isto na eq. (3.111) vemos que isto acontece no ponto critico  $\lambda = \frac{1}{4h_{top}}$ , se nós escolhermos como uma escala fundamental feita para  $L^2 = L_{bar}^2$  e por normalização do “bare” do vácuo topológico:  $h_{top}$  possui um conjunto igual à unidade, i.e.,  $|h_{top}| = 1$

mente os paredes de domínio.

### Vácuo físico - topológico

Este caso particular acontecerá quando os dois tipos de vácuos estudados anteriormente coincidirem, i.e.  $\sigma_{fis} = \sigma_{top} = \sigma_{fis}^{top}$ ,

$$W'(\sigma_{fis}^{top}) = 0, \quad \frac{W(\sigma_{fis}^{top})}{(d-2)^2} = \frac{1}{2\lambda L^2} \equiv \frac{1}{L_{fis}^{top}} \quad (3.113)$$

Com este tipo de vácuo ainda temos uma geometria do tipo  $AdS_d$  e com uma escala do tipo  $L_{fis} = L_{top} = \sqrt{2\lambda}L$ .

No estudo dos vácuos vemos que não faz diferença nenhuma com respeito aos vácuos do caso de paredes de domínio plana [10]. Isto porque se nós olhamos a eq.(3.94) vemos que a curvatura que esta dentro de  $\gamma$  fica na parte do denominador de  $W'$  e  $C_0$  e nos vácuos dessa igualdade, obtemos os denominados vácuos físicos e topológicos, matando assim a contribuição da curvatura.

### 3.4.5 Massa do campo escalar, função Beta e os índices críticos

A definição da massa ao quadrado do campo escalar, em relação a um extremo (vácuo<sup>5</sup>), foi estudada na seção (3.3) e é definida novamente como:

$$m_*^2 = \left. \frac{d^2 V}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=\sigma_*}, \quad (3.114)$$

Vai ser necessário calcular a segunda derivada de  $V$  via a eq. (3.94), para depois introduzir, novamente, a função *beta* e os índices críticos  $s$ . A função *beta* é definida a partir da eq. (3.92), como:

$$\frac{d\sigma}{d(-A)} \equiv \beta(\sigma) = \frac{2(d-2)W'(\sigma)C_0(W(\sigma))}{\gamma^2 W(\sigma)}, \quad (3.115)$$

Onde sabemos que  $C_0 = 1 - 2\lambda \frac{L^2}{(d-2)^2} W^2(\sigma)$ . Da eq. acima novamente vemos que para os dois tipos de vácuos conhecidos no G-B, ou seja físico e topológico, a função *beta* é zero. Da eq. (3.94) podemos

<sup>5</sup>pode ser vácuo físico ou topológico

escrever

$$V(W) = \frac{\gamma^2 W^2 \beta^2}{2(d-2)^2} - \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2 \left( 1 - \lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2} \right) \quad (3.116)$$

Derivando o potencial obtemos

$$V' = \frac{\gamma^2 \beta W (W\beta)'}{(d-2)^2} + \frac{W^2 \beta^2 \gamma \gamma'}{(d-2)^2} - \frac{(d-1) \gamma^2 \beta W^2}{(d-2)^2} \quad (3.117)$$

Sendo a derivada de  $\gamma$  igual a:

$$\gamma' = \frac{(d-2) K \gamma e^{-2A}}{2 W W' C_0} \left\{ 1 - 2 \frac{(d-2) W'^2 C_0}{W^2 \gamma^2} \right\} \quad (3.118)$$

Agora substituindo na eq. (3.116) vamos obter a derivada do potencial,

$$V' = \frac{\gamma^2}{(d-2)^2} \left\{ \beta W (W\beta)' - (d-1) \beta W^2 \right\} + 2 K \beta e^{-2A} \left\{ 1 - \frac{\beta^2 \gamma^2}{2(d-2) C_0} \right\} \quad (3.119)$$

Derivando novamente o potencial teremos

$$\begin{aligned} V'' &= \frac{2\gamma\gamma'}{(d-2)^2} \{ \dots \} + \frac{\gamma^2}{(d-2)^2} \left\{ W' \beta (W\beta)' + W \beta' (W\beta)' + W \beta (W\beta)'' - (d-1) (\beta' W^2 + 2 W W' \beta) \right\} \\ &+ 2 K \beta' e^{-2A} \left\{ 1 - \frac{\beta^2 \gamma^2}{2(d-2) C_0} \right\} + 4 K e^{-2A} \left\{ 1 - \frac{\beta^2 \gamma^2}{2(d-2) C_0} \right\} + 2 K \beta e^{-2A} \frac{d}{d\sigma} \left\{ 1 - \frac{\beta^2 \gamma^2}{2(d-2) C_0} \right\}, \end{aligned}$$

onde todas as configurações de vácuo são zeros da função  $beta(\sigma)$ . Agora suponhamos um ponto fixo qualquer  $\sigma = \sigma^*$ , ou seja o vácuo, neste vácuo do potencial a segunda derivada  $V''_{(\beta=0)|\sigma^*}$  pode ser calculada como:

$$V''_{(\beta=0)|\sigma^*} = \frac{\gamma^2 W^2}{(d-2)^2} \left\{ \beta'^2 - (d-1) \beta' \right\} + 2 K e^{-2A} (\beta' + 2) \quad (3.120)$$

Seja  $s_* = \beta'$  o índice crítico no vácuo, então temos a segunda derivada do potencial em função de  $s_*$

$$\mu_*^2(s) \equiv L_*^2 m_*^2 = s_*(s_* - (d-1)) + K L_*^2 e^{-2A} \left[ s_*^2 - (d-3) s_* + 4 \right] \quad (3.121)$$

Agora para obtermos os índices críticos é necessário derivar a função  $beta$  com respeito ao campo escalar  $\sigma$ , i.e.

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{2(d-2)}{\gamma^2 W} \left\{ W'' C_0 + W' C_0' - \frac{W'^2 C_0}{W} \right\} - \frac{2(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} \left\{ 1 - \frac{2(d-2) W'^2 C_0}{W^2 \gamma^2} \right\} \quad (3.122)$$



No vácuo temos que  $\frac{d\beta}{d\sigma} |_{\sigma=\sigma^*} \equiv s_*$  (para  $W(\sigma^*) \neq 0$ ), com isto nós podemos classificar os dois tipos de vácuos, como segue:

### Índices críticos para vácuos físicos ( $W' = 0$ )

$$\begin{aligned}
 s_{fis} &= \frac{2(d-2)W''C_0}{\gamma^2 W} - \frac{2(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} = \frac{2}{\gamma^2} \left\{ \frac{(d-2)W''C_0}{W} - \gamma^2 + 1 \right\} |_{\sigma=\sigma_{fis}} \\
 &= \frac{2}{\gamma^2} \left\{ \frac{(d-2)W''}{W} \left( 1 - 2\lambda \frac{L^2}{(d-2)^2} W^2 \right) - \gamma^2 + 1 \right\} |_{\sigma=\sigma_{fis}} \\
 s_{fis} &= \frac{2}{\gamma^2} \left\{ L_{fis} W'' \left( 1 - \frac{L_{top}^2}{L_{fis}^2} \right) - \gamma^2 + 1 \right\} |_{\sigma=\sigma_{fis}} \tag{3.123}
 \end{aligned}$$

Neste caso do vácuo físico, o G-B cria uma correção índice crítico  $s$  do caso E-H, para o mesmo ‘superpotencial’  $W(\sigma)$ , comparando os dois tipos de vácuos de (3.73) e (3.123) vemos que a diferença esta no  $C_0(\sigma_{fis})$ , com  $C_0(\sigma_{fis}) \neq 1$ .

### Índices críticos para vácuos topológicos ( $C_0 = 0$ )

$$s_{top} = \frac{2(d-2)W'C'_0}{\gamma^2 W} - \frac{2(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} = -\frac{2}{\gamma^2} \left\{ 4\lambda \frac{L^2}{(d-2)} W'^2 - \gamma^2 + 1 \right\} |_{\sigma=\sigma_{top}} \tag{3.124}$$

### Índices críticos quando os vácuos físicos e topológicos coincidem

Se os vácuos físicos e topológicos coincidem, vemos que das eqs. (3.123) e (3.124) uma diferença com respeito ao caso de paredes planas <sup>6</sup> vamos obter que  $s_{fis=top} = s_{fis} = s_{top} \neq 0$  porque depende estritamente da função  $\gamma$ , sendo este no vácuo igual a  $\gamma^2 = 1 + KL_{fis=top}^2 e^{-2A}$ , quer dizer ambos índices críticos vão ser iguais, mas vai depender do tipo de geometria local.

No caso quando o escalar de Ricci é zero (do tipo  $M_d$ ), é claro, pela eq. (3.122) que o índice crítico diverge, com isto podemos dizer que no vácuo o limite de  $s_*$  é muito grande.

<sup>6</sup>Nesse caso  $s_{fis=top} = s_{fis} = s_{top} = 0$ , pois  $W' = 1 - \frac{L_{top}^2}{(d-2)^2} W^2 = 0$  ver [29], [10] onde não somente cumpre esta condição, se não também que o  $s_{fis}$  pode ser zero quando  $W''(\sigma_{fis}) = 0$ .

### 3.5 PDC's na gravitação cúbica Quase-Topológica

Consideremos as correções da curvatura cúbica para a ação seguindo os mesmos passos feitos em capítulos anteriores, com o objetivo de construir o sistema linear associado. A construção do modelo cúbico em dimensões arbitrárias será feita pela adição à ação (3.86). Portanto, o modelo GQT generaliza a ação com o termo de G-B ao acrescentar o termo  $Z'_d$ ,  $W_1$  e  $W_2$ , que é a combinação cúbica não arbitrária mostrada em [23] onde  $W_1$  e  $W_2$  são combinações cúbicas do tensor de Weyl [25]. Vamos mostrar o modelo definido como o feito na ação embaixo (3.125), isto para um espaço geométrico curvo.

$$S_{qtop} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ R + \frac{\lambda_0}{m^2} L_Q + \frac{\mu_0}{m^4} \mathcal{Z}'_d + \mu_1 W_1 + \mu_2 W_2 - \frac{1}{2} \kappa^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - \kappa^2 V(\sigma) \right\} \quad (3.125)$$

O ansatz para a métrica será o mesmo, dado em (3.43) e  $W_1$ ,  $W_2$  e  $\mathcal{Z}'_d$  são dados em (2.23), (2.24) e (2.26).

Os dois invariantes  $W_1$  e  $W_2$  definidos acima, são proporcionais para o caso  $d = 4$  e  $d = 5$  ver [25]. Observe que se nós temos um espaço conforme plana (não aparece  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ), estes termos não contribuem para a equação de movimento [7], [10].

No entanto, foi observado que ao substituímos nossas métricas já considerando o ansatz em que a curvatura é levada em conta, tais termos se anulam identicamente e portanto não há a necessidade de incluí-los numa ação geral com contribuições de termos cúbicos na curvatura. Sendo assim, a ação mais geral para se estudar paredes curvas nessa ordem contará apenas com a contribuição de  $\mathcal{Z}'_d$ .

A ação efetiva será escrita como:

$$S_{qtop} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ R + \frac{\lambda_0}{m^2} L_Q + \frac{\mu_0}{m^4} \mathcal{Z}'_d - \frac{1}{2} \kappa^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - \kappa^2 V(\sigma) \right\} \quad (3.126)$$

A escolha de  $\mathcal{Z}'_d$  se deve à generalização da interação da curvatura cúbica (2.25) para  $d > 6$  ver (2). Aqui, referirnos à teoria da gravidade estendida Quase-Topológica [23], [24] e que produz equações de segunda ordem para nossa métrica de paredes curvas. Para a escolha de  $\mathcal{Z}'_d$  usamos o ansatz (3.43), e dá também uma lagrangeana efetiva de segunda ordem, ver o apêndice (D).

Sendo a lagrangiana efetiva equivalente à seção (3.4), a  $\mathcal{L}_{eff}$  é:

$$\begin{aligned}
S &= \int d^{d-1}x \int dy \mathcal{L}_{eff}, \\
\mathcal{L}_{eff} &= (d-1)(d-2) \left( \frac{\dot{A}^2}{f} - \frac{1}{12}(d-4)M \frac{\lambda_0}{m^2} \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \dot{A}^4 \right) + (d-1)(d-2)K \left( f e^{2(d-2)A} \right. \\
&+ (d-4)M \frac{\lambda_0}{4m^2} \left[ K f e^{2(d-3)A} + 2 \frac{e^{-2A}}{f} \dot{A}^2 \right] \left. \right) - \frac{\epsilon}{2f} \dot{\sigma}^2 - V(\sigma) f e^{2(d-1)A} \\
&+ \frac{1}{10} M_1 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \dot{A}^6 - \frac{1}{2} K M_1 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} \frac{e^{-2dA}}{f^3} \dot{A}^4 + \frac{3}{2} K^2 M_1 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} \frac{e^{-4A}}{f} \dot{A}^2 \\
&+ \frac{1}{2} K^3 M_1 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} f e^{2(d-4)A}
\end{aligned} \tag{3.127}$$

### 3.5.1 Equações de primeira ordem

Vamos seguir os mesmos passos adotados na seção (3.4.3) para assim chegar aos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem do ‘superpotencial’  $W(\sigma)$ .

$$\dot{A} = -\frac{1}{(d-2)} \gamma W; \tag{3.128a}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{2}{\kappa^2} W' \frac{C_0}{\gamma}; \tag{3.128b}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + K \frac{(d-2)^2}{W^2 e^{2A}}}, \tag{3.128c}$$

onde

$$C_0 = 1 - 2\lambda \frac{L^2}{(d-2)^2} W^2(\sigma) - 3\mu \frac{L^4}{(d-2)^4} W^4(\sigma). \tag{3.129}$$

$\gamma$  é o mesmo das seções anteriores que foram demonstrados por definição das propriedades dos vácuos. Das equações de movimento obtidas em (D.24) e usando a eq. (3.128), podemos obter a relação do potencial  $V(\sigma)$  com o ‘superpotencial’  $W(\sigma)$  que é dada por:

$$\kappa^2 V(W) = 2 \frac{W'^2}{\kappa^2 \gamma^2} C_0^2 - \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2 \left( 1 - \lambda \frac{L^2}{(d-2)^2} W^2 - \mu \frac{L^4}{(d-2)^4} W^4 \right) \tag{3.130}$$

Tudo o que vem daqui para frente são os mesmos passos adotados na seção anterior, no caso do estudo para os conceitos dos vácuos, e mesmo para o escalar de curvatura  $R$  que vai ser igual a (3.95) sendo assim a única diferença o  $C_0(W)$ , cuja definição para o caso da GQT é dada em (3.128).

### 3.5.2 Descrições dos vácuos físicos e topológicos

Novamente os vácuos são definidos por <sup>7</sup>

$$W'(\sigma_{fis}) = 0, \quad W(\sigma_{fis}) \neq 0, \quad (3.131)$$

$$C_0(W(\sigma_{top})) = 0. \quad (3.132)$$

Vamos lembrar a propriedade comum de todas as “curvatura superiores” das generalizações da gravidade de E-H, ou seja, que as constantes cosmológicas efetivas relacionadas com os valores do vácuo  $\sigma_*$  ( $V'(\sigma_{fis}) = 0$ ) do ‘superpotencial’:

$$f_k \equiv \frac{L^2}{L_{fis}^2} = \frac{L^2}{(d-2)^2} W^2(\sigma_{fis})$$

Que são diferentes da constante cosmológica nua:

$$h_k \equiv \frac{L^2}{L_{bare}^2} = -\frac{V(\sigma_{fis})L^2}{(d-1)(d-2)}$$

Como uma consequência da eq. (3.130) e usando as duas equações de cima vão satisfazer a seguinte equação cúbica:

$$h_k \equiv f_k \{1 - \lambda f_k - \mu f_k^2\}. \quad (3.133)$$

Calculemos os zeros de  $h_k$  da eq.(3.133), que será chamado de  $f_{\pm}^h$ ,

$$f_{\pm}^h = -\frac{1}{2\mu} \left( \lambda \mp \sqrt{\lambda^2 + 4\mu} \right), \quad (3.134)$$

A eq. (3.133) que pode ser levada para uma forma mais simplificada

$$h_k \equiv f_k \{1 - \lambda f_k - \mu f_k^2\} = f_k \left( 1 - \frac{f_k}{f_+^h} \right) \left( 1 - \frac{f_k}{f_-^h} \right) \quad (3.135)$$

<sup>7</sup>Da eq.(3.96) temos uma diferença para esta seção, aqui  $\mathcal{F}$  será:

$$\mathcal{F}(\sigma) = 2 \frac{W'''(\sigma)C_0(W(\sigma))}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma^2} \left[ \frac{K(d-2)e^{2\lambda}}{2W(\sigma)} \left( 1 - 2 \frac{(d-2)W^2(\sigma)C_0(W(\sigma))}{W^2(\sigma)\gamma^2} \right) \right] - 8\lambda \frac{L^2 W^2(\sigma)W(\sigma)}{(d-2)^2 \gamma^2} \left( 1 + 3 \frac{\mu L^2 W^2(\sigma)}{\lambda(d-2)^2} \right) - \frac{(d-1)}{(d-2)} W(\sigma)$$

Esses  $f_k$  pode ser representados como os tipos de vácuos físicos ou topológicos. Agora que temos  $h_k$  como função de  $f_k$ , vamos calcular os máximos e mínimos desse funcional  $h[\lambda, \mu; f_k]$ :

$$\partial_{f_k} h_k = 1 - 2\lambda f_k - 3\mu f_k^2 = C_0(f_k), \quad (3.136)$$

Vemos que esses possíveis máximos e mínimos são os valores de  $f_k$  nos vácuos topológicos, ou seja, os zeros de  $C_0(f_k)$ . Então os extremos de  $h_k$  são soluções da equação quadrática, e são dados por:

$$f_{\pm}^{top} \equiv \frac{L^2}{L_{top,\pm}^2} = -\frac{1}{3\mu} \left( \lambda \mp \sqrt{\lambda^2 + 3\mu} \right) = -\frac{\lambda}{3\mu} \left( 1 \mp \sqrt{1 + \frac{3\mu}{\lambda^2}} \right) \quad (3.137)$$

Como no caso de G-B, devemos ter um  $f_k > 0$ , que no nosso caso é o topológico, i.e. devemos também ter  $f_{\pm}^{top} > 0$  e tem que ser real e positivo. Aqui temos que  $f_{\pm}^{top}$  é um máximo e é o mínimo, mas depende do sinal de  $\mu$  e  $\lambda$ . As análises podem ser divididas em quatro casos, como segue:

- ◆ Se  $\mu < 0$  e  $\lambda < 0$ , de (3.137) vemos que ambas  $f_{\pm}^{top}$  são negativos, i.e.  $f_{\pm}^{top} \in \mathbb{C}$ , não há vácuos topológicos.
- ◆ Se  $\mu < 0$  e  $\lambda > 0$ , vemos de (3.137) que  $\lambda^2 > 3|\mu|$ , então temos ambos  $f_{\pm}^{top}$  são vácuos topológicos. Onde podemos verificar que  $f_+^{top}$  é o valor mínimo e  $f_-^{top}$  é o valor máximo.
- ◆ Se  $\mu > 0$  e  $\lambda < 0$ , vemos que apenas há um vácuo topológico, que é só para o  $f_-^{top}$ .
- ◆ Se  $\mu > 0$  e  $\lambda > 0$ , vemos que apenas há um vácuo topológico, que é só para o  $f_+^{top}$ .

Da eq. (3.137) levamos para o  $C_0(W)$  que pode ser fatorizada como o “produto” de dois modelos de G-B, da eq. (3.129), temos o seguinte:

$$C_0(W) = \left( 1 - \frac{1}{f_+^{top}} \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{f_-^{top}} \frac{L^2 W^2}{(d-2)^2} \right) \quad (3.138)$$

Da equação dos vácuos topológicos  $C_0(f_{\pm}^{top}) = 0$  vemos que a eq. (3.137) determina os seguintes valores particulares dos  $h'_k$ s e da escala  $L_{top,\pm}^2$  de  $AdS_d$ . Substituindo (3.137) em (3.135) temos:

$$h_{\pm}(f_{\pm}^{top}) = \frac{1}{27\mu^2} \left[ -\lambda(2\lambda^2 + 9\mu) \pm (\lambda^2 + 3\mu)^{3/2} \right]. \quad (3.139)$$

Vemos que esta é uma solução da equação quadrática para  $h_{top}$  (tendo  $\mu$  e  $\lambda$  fixados), apresenta duas soluções que são devidas ao fato de haver duas soluções para os vácuos topológicos  $f_{\pm}^{top}$ .  $h_{\pm}$  representa os valores extremos de  $h_{top}$ , onde:  $f_+^{top}$  é um máximo local e  $f_-^{top}$  é um mínimo local. Agora manipulemos a eq. (3.139) como uma equação quadrática para  $\mu$ , dão os dois valores reais  $\mu_{\pm}(\lambda, h_{\pm})$ ,

sendo assim:

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{27h_{\pm}^2} \left[ 2 - 9\lambda h_{\pm} \pm 2(1 - 3\lambda h_{\pm})^{3/2} \right]. \quad (3.140)$$

Da equação acima podemos ver claramente para garantir a existência de vácuos topológicos  $\lambda$  sempre tem que estar limitada por  $h_{\pm}$  que no caso é o mesmo que  $h_{\pm}^{top}$ , através de:

$$\lambda < \frac{1}{3 |h_{\pm}^{top}|}, \quad (3.141)$$

Esta desigualdade é a mesma que garante a existência dos  $\mu_{\pm}$  o que nos dá dois tipos de curvas diferentes. Vimos que devemos considerar quatro casos diferentes, que dependem dos sinais de  $\mu$  e  $\lambda$ , que é o mesmo considerar os quatro quadrantes do espaço. Sabemos que dos quatro casos vistos, somente três deles tinham soluções, ou seja, existe somente uma das curvas em três dos quatro quadrantes. Para essas três soluções vimos que existia a positividade dos  $f_{\pm}^{top}$ , agora da eq. (3.139) podemos verificar que nesses três quadrantes o  $h_{top}$  é sempre um máximo. Agora, como no caso de Gauss-Bonnet, podemos ver novamente  $h_{top}$  como uma escala fundamental e que é normalizada à unidade:

$$|h_{top}| = 1 \quad (3.142)$$

com esta restrição nós temos o  $\mu_{\pm}(\lambda)$

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{27} \left[ 2 - 9\lambda \pm 2(1 - 3\lambda)^{3/2} \right]. \quad (3.143)$$

A eq. (3.143) gera dois tipos de curvatura no plano  $\mu - \lambda$  e verificamos que para cada valor de  $\lambda$  há dois modelos gravitacionais distintos, que corresponde as duas formas diferentes da “Gravidade Quase-Topológica” acoplado com  $\mu$  como uma função de  $\lambda$ , como pode-se ver a eq. (3.143) e que tem a mesma escala fundamental  $L^2$ <sup>8</sup>, sendo o  $L^2 = L_{bare}^{2top}(h_{\pm})$ .

Da figura (3.1) vemos que no quarto quadrante onde  $\mu < 0$  e  $\lambda > 0$  ambas figuras existem, então esses modelos existirão somente no intervalo de  $0 < \lambda < 1/3$  onde possui diferentes valores de  $\mu_{\pm}$ , desde que exista vácuos topológicos. Da figura (5.1) também verificamos no intervalo  $-\infty < \lambda < 0$ , existem os dois  $\mu_{\pm}$ , onde no segundo quadrante  $\mu_{+} > 0$ , ou seja, segundo o estudado vai existir um vácuo topológico; mas no outro modelo que esta no terceiro quadrante,  $\mu_{-} < 0$  não há vácuo topológico porque  $\mu_{-} < 0$  e  $\lambda < 0$  e é claro que não tem nenhuma raiz real positiva da eq. (3.135). No primeiro

<sup>8</sup>Que é escala que esta na ação (3.125)

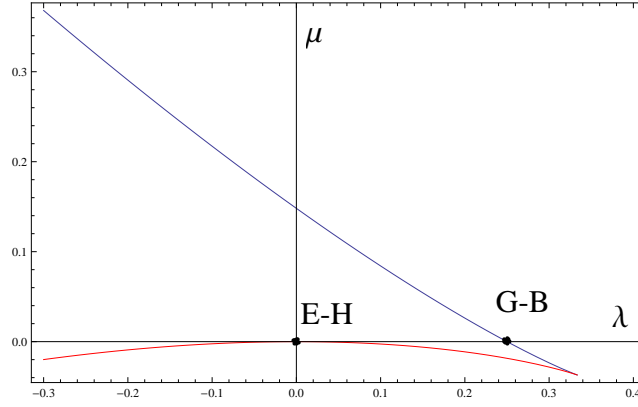


Figura 3.1: Curvatura no plano  $\mu - \lambda$ , da eq.(3.143) para  $\mu_+$  (curva azul) e  $\mu_-$  (curva vermelha)

quadrante temos que  $\mu_+ > 0$  e  $\lambda > 0$  e existe um vácuo topológico.

Na figura (3.1) podemos observar que ambas curvas  $\mu_+$ <sup>9</sup> e  $\mu_-$  coincidem no ponto  $\lambda = 1/3$ , quer dizer que da eq. (3.133) vamos ter duas raízes da equação cubica [23], [10].

Notar que a linha azul positiva  $\mu_+$  atravessa o eixo- $\lambda$  em  $\lambda = 1/4$ , que é precisamente o acoplamento crítico na gravidade de Gauss-Bonnet e que nesse ponto temos  $\mu_+ = 0$  (ver o capítulo (4)), em outras palavras o modelo  $\mu_+$  reproduz o limite G-B. Temos também que  $\mu_+ > 0$  para  $\lambda < 1/4$ , e  $\mu_+ < 0$  para  $1/4 < \lambda < 1/3$ . No ponto  $\lambda = 1/3$  nós temos o  $\mu_{\pm} = -1/27$  como dizemos acima, ambas curvas coincidem, mostrando assim o caso degenerado da eq. (3.133) onde as duas raízes são iguais.

Outro ponto a ver na mesma figura é que apenas o modelo  $\mu_-$  reproduz a gravitação de Einstein-Hilbert feito na seção (3.3), onde temos que  $\lambda = 0$  e  $\mu_-(0) = 0$ ; na figura (3.1) podemos ver que na verdade que o modelo  $\mu_{\pm}$  pertence a uma família diferente de modelos, i.e., quando  $\lambda = 0$  podemos ter  $\mu_+(0) = 4/27$  - este modelo possui um vácuo topológico sem ter o termo de G-B.

### 3.5.3 Massa do campo escalar, função Beta e os índices críticos

A Adição do novo termo de acoplamento na ação não modifica o estudado ate agora para a construção da massa do campo escalar, em relação aos vácuos físicos ou topológicos. Então teremos:

$$m_*^2 = \frac{d^2 V(\sigma)}{d\sigma^2} \Big|_{\sigma=\sigma_*} = \frac{s_*}{L_*^2} (s_* - (d-1)) + K e^{-2A} [s_*^2 - (d-3)s_* + 4] \quad (3.144)$$

<sup>9</sup> $\mu_-$  é sempre negativo em qualquer intervalo de  $\lambda$

Os chamados índices críticos no vácuo é  $s_* = -\frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} |_{\sigma=\sigma_*}$ . No caso de vácuo físico a forma do índice crítico se mantém inalterada, mas o que muda é a forma de  $C_0$ .

$$s_{fis} = \frac{2}{\gamma^2} \left\{ \frac{(d-2)W''}{W} \left( 1 - 2\lambda \frac{L^2}{(d-2)^2} W^2 - 3\mu \frac{L^4}{(d-2)^4} W^4 \right) - \gamma^2 + 1 \right\} |_{\sigma=\sigma_{fis}} \quad (3.145)$$

Aqui vemos que a diferença com respeito à seção anterior é a adição da constante de acoplamento  $\mu$  em  $C_0$ . Nós podemos simplificar a equação de cima, do mesmo jeito que foi feito na eq. (3.138) para o caso de vácuo físico, onde nós representamos a equação do  $C_0$  como o produto de dois G-B, ou seja:

$$s_{fis} = \frac{2}{\gamma^2} \left\{ \frac{(d-2)W''}{W} \left( 1 - \frac{f_{fis}}{f_+^{top}} \right) \left( 1 - \frac{f_{fis}}{f_-^{top}} \right) - \gamma^2 + 1 \right\} |_{\sigma=\sigma_{fis}}, \quad f_{fis} = \frac{L^2}{L_{fis}^2}. \quad (3.146)$$

Novamente vemos que para o mesmo ‘superpotencial’  $W$ , como no caso E-H e G-B a diferença permanece, que é pelo produto do termo  $C_0$  ou a modificação dela, segundo seja o caso.

Para os índices críticos dos vácuos topológicos,

$$\begin{aligned} s_{top} &= \frac{2(d-2)W'C'_0}{\gamma^2 W} - \frac{2(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} \\ &= -\frac{2}{\gamma^2} \left\{ \frac{4}{(d-2)} W'^2 \left[ \lambda L^2 + \frac{3\mu L^4}{(d-2)^2} W^2 \right] - \gamma^2 + 1 \right\} |_{\sigma=\sigma_{top}} \end{aligned} \quad (3.147)$$

A equação acima podemos substituir pelas soluções dos vácuos, (3.147) passa a ter dois tipos de escalas  $L_{top,\pm}^2$  que temos que assumir a que seja real e positiva, então com isto teremos também dois tipos de índices críticos para estes vácuos e será dado por:

$$s_{top}^\pm = -\frac{2}{\gamma^2} \left\{ \frac{2L_{top,\pm}^2}{(d-2)} W'^2 \left[ 1 - \frac{L_{top,\mp}^2}{L_{top,\pm}^2} \right] - \gamma^2 + 1 \right\}. \quad (3.148)$$



# Capítulo 4

## SOLUÇÕES EXATAS DE PDC'S

### 4.1 Solução do sistema de primeira ordem

A solução do sistema (3.128) pode ser obtida notando que a equação diferencial

$$\frac{dA}{d\sigma} = -\frac{k^2}{2(d-2)} \frac{\gamma^2 W}{W' C_0}, \quad (4.1)$$

obtida diretamente de (3.128a) e (3.128b), que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} de^{2A}/d\sigma &= f(\sigma) e^{2A} + g(\sigma), \\ f(\sigma) &= -\frac{k^2}{(d-2)} W/W' C_0, \quad g(\sigma) = -K(d-2)/W W' C_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Esta é uma equação de primeira ordem cuja solução é imediata:

$$e^{2A} = \text{Exp} \left[ \int f(\sigma') d\sigma' \right] \left\{ \int g(\sigma') \text{Exp} \left[ - \int f(\sigma'') d\sigma'' \right] d\sigma' + J \right\}, \quad (4.3)$$

Onde  $J$  é a constante de integração, e que corresponde à solução da equação diferencial homogênea, quando o termo de “fonte”  $g(\sigma)$  se anula. Neste caso, isto implica a solução de uma parede de domínio plana, i.e. com  $K = 0$ ; a contribuição da curvatura para o fator de escala  $a^2(\sigma) = e^{2A(\sigma)}$  se encontra na integral

$$G(\sigma) = \text{Exp} \left[ \int f(\sigma') d\sigma' \right] \int g(\sigma') \text{Exp} \left[ - \int f(\sigma'') d\sigma'' \right] d\sigma'. \quad (4.4)$$

Esta função é responsável pelas propriedades geométricas das paredes de domínio curvas, em contra-posição às propriedades das geometrias planas, nas quais, como já dissemos,  $G \equiv 0$ .

## 4.2 Paredes Planas: Einstein-Hilbert vs. Gauss-Bonnet

Como vimos no Capítulo (3), soluções de paredes de domínio em gravitação E-H e G-B apresentam propriedades absolutamente distintas. O motivo principal foi a introdução de novos vácuos, os vácuos topológicos. As diferenças entre as soluções analíticas em ambos os casos já pode ser vista claramente nas soluções de paredes planas, ver ([6]).

Consideremos, por exemplo, o ‘superpotencial’ mais simples a apresentar um (único) vácuo físico:

$$W(\sigma) = B \sigma^2 . \quad (4.5)$$

Uma vez que no vácuo, devemos ter  $W'(\sigma_0) = 0$  o que leva a  $\sigma_0 = 0$ , temos  $W(\sigma_*) = 0$ , substituimos na eq. (3.42) e notamos claramente que este é um espaço-tempo com curvatura nula, ou seja: um espaço de Minkowski  $M_d$ .

Note que  $W'(\sigma) = 2B \sigma$ , e portanto

$$\{W'\}^2 = 4BW. \quad (4.6)$$

A solução do fator de escala para paredes planas é dada pela fórmula (4.3), com  $K = 0$ , o que dá

$$a^2(\sigma) = J \text{Exp} \left[ \int^{\sigma} f(\sigma') d\sigma' \right].$$

Aqui, escrevemos  $e^{A(\sigma)} = a(\sigma)$ . Temos

$$\int^{\sigma} f(\sigma') d\sigma' = -\frac{\kappa^2}{(d-2)} \int \frac{W}{W' C_0(W)} d\sigma = -\frac{\kappa^2}{(d-2)} \int \frac{W}{(W')^2 C_0(W)} dW,$$

e com (4.6),

$$\int^{\sigma} f(\sigma') d\sigma' = -\frac{\kappa^2}{4(d-2)B} \int \frac{dW}{C_0(W)}. \quad (4.7)$$

**A. Einstein-Hilbert.** No caso da gravitação EH,  $\sigma_0$  é o único vácuo presente, e portanto a “parede de domínio” leva de um espaço  $M_d$  até uma singularidade nua em  $\sigma \rightarrow \infty$  e portanto não é uma parede verdadeira. Tomando  $C_0 = 1$ , a Eq.(4.7) é trivial:

$$\int^{\sigma} f(\sigma') d\sigma' = -\frac{\kappa^2}{4(d-2)B} \int dW,$$

ou

$$\int^{\sigma} f(\sigma') d\sigma' = -\frac{\kappa^2}{4(d-2)B} W = -\frac{\kappa^2}{4(d-2)} \sigma^2. \quad (4.8)$$

Assim, o fator de escala é dado por uma Guassiana:

$$a^2(\sigma) = J \text{Exp}(s\sigma^2); \quad (4.9)$$

$$s = -\frac{\kappa^2}{4(d-2)}.$$

Como  $s < 0$ , temos

$$a^2(\sigma) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \sigma \rightarrow \sigma_0, \quad \text{i.e. uma borda;}$$

$$a^2(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \text{i.e. um horizonte.}$$

Note que o fator de escala tende a zero muito rapidamente à medida que  $\sigma$  cresce em direção à singularidade. O comportamento de (4.9) está representado na Fig.4.1.

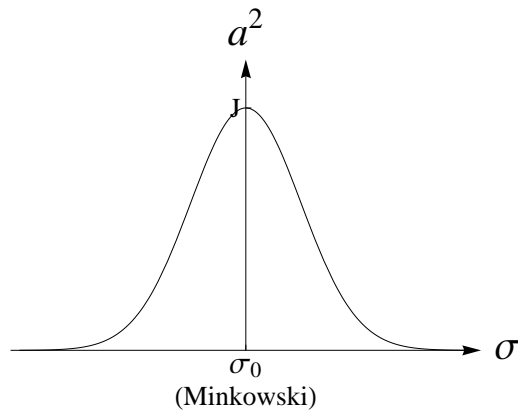


Figura 4.1: Fator de escala (4.9) para uma parede plana em gravitação EH.

## B. Gauss-Bonnet.

No caso em que  $\lambda \neq 0$ , teremos  $C_0 \neq 0$ , pode-se obter um vácuo AdS topológico se  $\lambda > 0$ . Da eq.

(3.108) definindo  $W_{\text{top}}^2 = \frac{(d-2)^2}{2\lambda L^2}$ , substituimos em (3.93) e temos

$$C_0(W) = 1 - W^2/W_{\text{top}}^2, \quad (4.10)$$

e a Eq.(4.7) fica

$$\begin{aligned} \int^{\sigma} f(\sigma') d\sigma' &= -\frac{\kappa^2}{4(d-2)B} \int \frac{dW}{1 - W^2/W_{\text{top}}^2} \\ &= \frac{\kappa^2 W_{\text{top}}^2}{4(d-2)B} \int \frac{dW}{W^2 - W_{\text{top}}^2} \\ &= \frac{\kappa^2 W_{\text{top}}^2}{4(d-2)B} \int \frac{dW}{(W - W_{\text{top}})(W + W_{\text{top}})} \\ &= \frac{\kappa^2 W_{\text{top}}^2}{4(d-2)B} \int (1/2W_{\text{top}}) \left[ \frac{1}{W - W_{\text{top}}} - \frac{1}{W + W_{\text{top}}} \right] dW. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int^{\sigma} f(\sigma') d\sigma' = \frac{\kappa^2 W_{\text{top}}}{8(d-2)B} \text{Log} \left[ \frac{|W - W_{\text{top}}|}{|W + W_{\text{top}}|} \right], \quad (4.11)$$

e

$$\text{Exp} \left[ \int f d\sigma \right] = |W - W_{\text{top}}|^s |W + W_{\text{top}}|^{-s}; \quad (4.12a)$$

$$s = \frac{\kappa^2 W_{\text{top}}}{8(d-2)B}. \quad (4.12b)$$

Em termos de  $\sigma$ ,

$$a^2(\sigma) = J |\sigma^2 - \sigma_{\text{top}}^2|^s |\sigma^2 + \sigma_{\text{top}}^2|^{-s}, \quad (4.12c)$$

onde  $\sigma_{\text{top}}^2 = W_{\text{top}}/B$ . Para que exista vácuo topológico, portanto,  $B$  e  $W_{\text{top}}$  devem ter o mesmo sinal; logo  $s > 0$ .

Fica então clara a diferença entre as geometrias dadas por (4.9), em E-H, e por (??) em G-B. Em primeiro lugar, existe o novo vácuo, topológico, que é um espaço  $\text{AdS}_d$ . À medida que nos aproximamos deste vácuo,  $\sigma \rightarrow \sigma_{\text{top}}$ , o fator de escala *se anula*, em um horizonte de Killing. Sobre o vácuo físico Minkowski, em  $\sigma_0 = 0$ , o comportamento é o mesmo que no caso E-H, quer dizer, o fator de escala tende à constante de normalização  $J$ . Em segundo lugar, vemos que agora na singularidade nua, quando  $\sigma \rightarrow \infty$ , o fator de escala deixa de ser nulo: ao contrário,  $a^2 \rightarrow J$ . Tal comportamento se encontra representado na Fig.4.2.

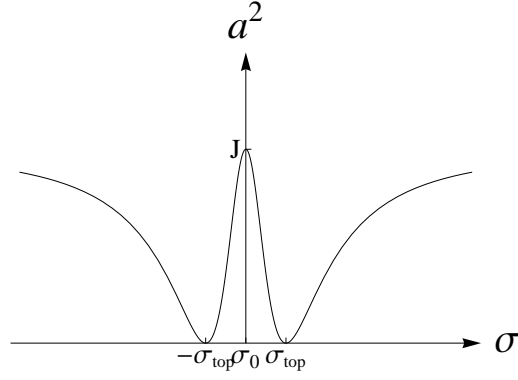


Figura 4.2: Fator de escala (4.12c) para uma parede plana em gravitação GB.

### 4.3 Paredes Curvas: Minkowski-Anti-deSitter

Como foi discutido, em gravitação E-H o superpotencial (4.5) não fornece uma parede de domínio razoável, uma vez que liga o vácuo Minkowski a uma singularidade nua. Entretanto em gravitação G-B temos uma solução ligando dois vácuos, apesar de ser somente um deles um espaço  $\text{AdS}_d$ . É interessante considerar esta “parede de domínio” no caso em que  $K \neq 0$ .

Como visto na seção §4.1, a solução curva é composta da solução plana (4.12c) mais uma contribuição de  $K$  dada pela integral

$$\int g \equiv \int g(\sigma') \text{Exp} \left[ - \int^{\sigma'} f(\sigma'') d\sigma'' \right] d\sigma'.$$

Usando o resultado (4.12a),

$$\begin{aligned} \int g &= -\frac{K(d-2)W_{\text{top}}^2}{4B} \int W^{-2} |W - W_{\text{top}}|^s |W + W_{\text{top}}|^{-s} (W_{\text{top}}^2 - W^2)^{-1} dW \\ &= -\frac{K(d-2)W_{\text{top}}^2}{4B} \int W^{-2} |W_{\text{top}} - W|^{s-1} |W + W_{\text{top}}|^{-s-1} dW. \end{aligned}$$

A solução geral para esta integral pode ser escrita como uma soma de Hipergeométricas, e está dada no Apêndice §C. Vamos considerar apenas um caso mais simples, em que  $s = n$ , com  $n \in \mathbf{N}$ ; a integral então se reduz a uma razão de polinômios, e a solução fica dada pela Eq.(C.11) como uma soma de uma razão entre polinômios e logaritmos provenientes dos pólos da integral:

$$\int g = -\frac{K(d-2)W_{\text{top}}^2}{4B} \int \frac{(W_{\text{top}} - W)^{n-1}}{W^2(W + W_{\text{top}})^{n+1}} dW,$$

e

$$\int \frac{(W_{\text{top}} - W)^{n-1}}{W^2(W + W_{\text{top}})^{n+1}} dW = \alpha_{0,1} \text{Log } W + \alpha_{\text{top},1} \text{Log } (W + W_{\text{top}}) + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\alpha_{\text{top},j}}{j-1} (W + W_{\text{top}})^{1-j},$$

onde  $\alpha_{k,j}$  são constantes. Vê-se assim que  $\int g$  é finita no vácuo topológico, em que  $W(\sigma_{\text{top}}) = W_{\text{top}}$ . Assim, o fator de escala

$$a^2 = |W - W_{\text{top}}|^n |W + W_{\text{top}}|^{-n} (J + \int g)$$

é evidentemente *nulo* no vácuo topológico, que tem portanto a geometria de um horizonte de Killing de  $\text{AdS}_d$ .

Já no vácuo físico,  $\int g$  possui uma singularidade logarítmica à medida que  $W(\sigma_0) = 0$ . Pode-se verificar que  $\alpha_{0,1} < 0$ . Portanto, temos

$$a^2 \rightarrow +\infty, \quad \text{quando } \sigma \rightarrow \sigma_0, \quad \text{se } K > 0.$$

A descrição do espaço-tempo é então a seguinte, representada na Fig.4.3(a): Temos uma parede de domínio folheada em seções  $dS_d$ , que para  $\sigma \rightarrow \sigma_0$  tem como limite assintótico a borda do espaço plano  $M_d$ , e para  $\sigma \rightarrow \sigma_{\text{top}}$  tende ao horizonte de Killing de um espaço  $\text{AdS}_d$ .

Para  $K < 0$ , a descrição do espaço é problemática. Em primeiro lugar, é evidente que agora  $a^2 \rightarrow -\infty$  para  $\sigma \rightarrow \sigma_0$ ; logo o fator de escala não é bem definido nas proximidades do vácuo físico. Mais do que isso, como  $a^2 \rightarrow 0$  em  $\sigma \rightarrow \sigma_{\text{top}}$ , temos que  $\gamma^2 \rightarrow -\infty$ . Portanto, como se pode ver na Fig.4.3(b), o sistema de primeira ordem se torna mal definido antes que se chegue a qualquer um dos vácuos.

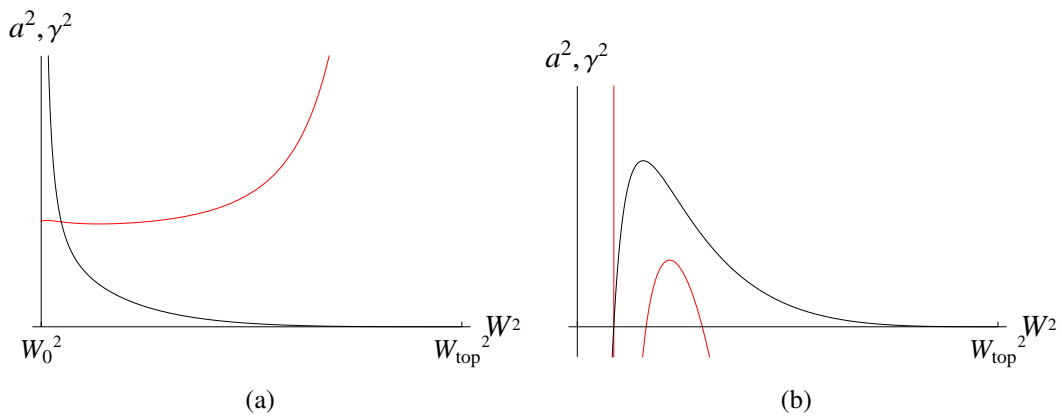


Figura 4.3: Fator de escala  $a^2$  (curva preta), e  $\gamma^2$  (curva vermelha) para uma parede curva em GB, com  $W = B\sigma^2$ ; (a)  $K > 0$ ; (b)  $K < 0$ .

Com a obtenção do fator de escala, fica determinado o potencial de matéria  $V(\sigma)$ , dado por (3.94), e a curvatura, dada por (3.95). Para a solução bem definida ( $K > 0$ ), estas grandezas se encontram representadas simultaneamente na Fig.4.4. Note que, como esperado por construção, o escalar de Ricci se anula no vácuo físico — correspondendo ao espaço plano —, e possui um valor negativo no vácuo topológico — correspondendo à curvatura negativa de  $\text{AdS}_d$ . O potencial de matéria concorda com este comportamento; repare que ambos os vácuos são extremos de  $V(\sigma)$ . Também pode-se ver um gráfico da função  $C_0 = 1 - W^2/W_{\text{top}}^2$ , que por construção é positiva ao longo da parede de domínio. À direita do vácuo topológico, temos uma solução que liga o espaço AdS à singularidade nua em  $\sigma \rightarrow \infty$ , mas esta solução possui  $C_0 < 0$  e é, portanto, não-física.

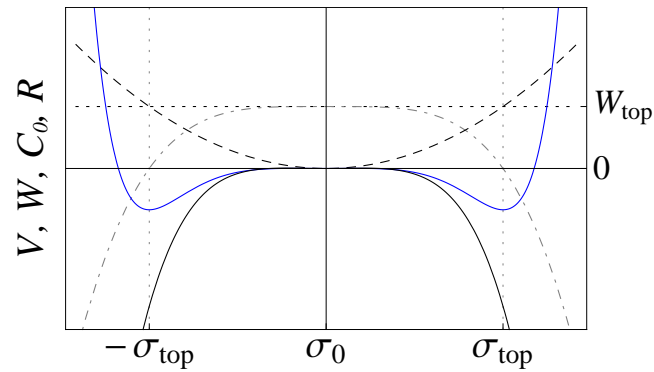


Figura 4.4: Parede curva com  $K > 0$ : Potencial de matéria  $V(\sigma)$  (curva azul); Curvatura de Ricci (curva preta); Superpotencial  $W(\sigma) = B\sigma^2$  (curva preta, tracejada);  $C_0(\sigma)$  (curva preta, ponto-tracejada).

## 4.4 Paredes Curvas: AdS-AdS

Para descrever paredes curvas que liguem dois vácuos AdS, vamos considerar uma classe de superpotenciais definidos pela condição

$$\{W'(\sigma)\}^2 = \alpha(W^2 - W_a^2). \quad (4.13)$$

Se  $W_a \in \mathbf{R}$  existe um vácuo físico em  $\sigma = \sigma_a$ , com  $W(\sigma_a) = W_a$ . Um exemplo de função com estas propriedades é  $W(\sigma) = A \cos(\delta\sigma)$ , onde temos  $W_a^2 = A^2$  e  $\alpha = -\delta^2$ . Entre dois vácuos físicos consecutivos, digamos  $\sigma_+ = 0$  e  $\sigma_- = \pi$ , no trajeto da ligação dos dois vácuos o ‘superpotencial’ se anula e muda de sinal. Em um muro plano, isto caracteriza uma geometria do tipo Janus, em que ambos os vácuos são bordas de um espaço AdS. Vamos evitar este tipo de estrutura.

Um segundo exemplo do tipo (4.13) é dado por

$$W(\sigma) = A \cosh(\delta\sigma). \quad (4.14)$$

Aqui, temos

$$W_a^2 = A^2, \quad \text{e} \quad \alpha = \delta^2 > 0. \quad (4.15)$$

Existe um único vácuo físico AdS em  $\sigma_0 = 0$ . Portanto, no caso E-H a única geometria possível é uma “parede” ligando  $\sigma_0$  à singularidade nua em  $\sigma \rightarrow \infty$ . Todavia, em gravitação G-B (ou em GQT) podemos posicionar um vácuo topológico  $\sigma_{\text{top}}$  tal que  $W_{\text{top}} > W_a$ , criando assim a possibilidade de uma parede ligando  $\sigma_0$  a um segundo vácuo AdS em  $\sigma_{\text{top}}$ . Vamos examinar este exemplo com mais cuidado, separando a análise em duas partes: Primeiro, a construção das soluções com  $K = 0$ , que será em seguida utilizada para a construção das soluções curvas.

### A. Paredes Planas.

Escrevendo, abreviadamente,  $\int^\sigma f(\sigma') d\sigma' \equiv \int f$ , temos

$$\int f = -\frac{1}{(d-2)} \int \frac{W dW}{\{W'\}^2 C_0(W)} = -\frac{1}{(d-2)} \int \frac{W dW}{\{W'\}^2 C_0(W)},$$

ou

$$\int f = -\frac{1}{2\alpha(d-2)} \int \frac{dW^2}{(W^2 - W_a^2) C_0(W^2)}. \quad (4.16)$$

#### A1. Einstein-Hilbert.

No caso E-H, com  $C_0 = 1$  a integral (4.16) se resume a

$$\int f = -\frac{1}{2\alpha(d-2)} \int \frac{dW^2}{(W^2 - W_a^2)} = -\frac{1}{2\alpha(d-2)} \text{Log}(|W^2 - W_a^2|)$$

Portanto,

$$\text{Exp} [\int f] = |W^2 - W_a^2|^s; \quad s = \frac{-1}{2\alpha(d-2)}, \quad (4.17)$$



e o fator de escala para uma parede plana em E-H fica

$$a^2(\sigma) = J |\cosh^2(\delta\sigma) - 1|^s. \quad (4.18)$$

Uma vez que  $\alpha > 0$ , temos  $s < 0$  e portanto  $\sigma_0$  é a borda de um espaço AdS. O comportamento do fator de escala se encontra representado na Fig.4.5.

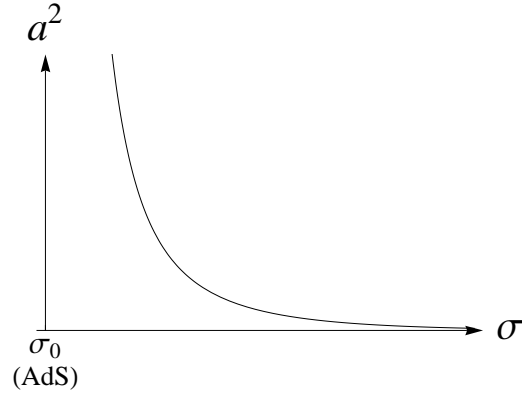


Figura 4.5: Fator de escala (4.18) para uma parede plana em gravitação EH.

## A2. Gauss-Bonnet.

Escrevendo mais uma vez  $C_0(W)$  como na Eq.(4.10), temos

$$\begin{aligned} \int f &= \frac{W_{\text{top}}^2}{2(d-2)\alpha} \int \frac{dW^2}{(W^2 - W_a^2)(W^2 - W_{\text{top}}^2)} \\ &= \frac{W_{\text{top}}^2}{2(d-2)\alpha(W_{\text{top}}^2 - W_a^2)} \int \left\{ -\frac{1}{W^2 - W_a^2} + \frac{1}{W^2 - W_{\text{top}}^2} \right\} dW^2 \\ &= \frac{W_{\text{top}}^2}{2(d-2)\alpha(W_{\text{top}}^2 - W_a^2)} \text{Log} \left( \frac{|W^2 - W_{\text{top}}^2|}{|W^2 - W_a^2|} \right) \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\int f) &= |W^2 - W_a^2|^s |W^2 - W_{\text{top}}^2|^{-s}; \\ s &= -\frac{W_{\text{top}}^2}{2(d-2)(W_{\text{top}}^2 - W_a^2)\alpha}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Assim, em termos de  $\sigma$ , temos

$$a^2(\sigma) = J |\cosh^2(\delta\sigma) - 1|^s |\cosh^2(\delta\sigma) - \cosh^2(\delta\sigma_{\text{top}})|^{-s}. \quad (4.20)$$

Como  $\alpha > 0$ , e  $\sigma_0$  se encontra no mínimo global de  $W(\sigma)$ , temos  $s < 0$ . Portanto o vácuo topológico corresponde a um horizonte de Killing de um espaço  $\text{AdS}_d$ , enquanto o vácuo físico corresponde à borda de outro espaço  $\text{AdS}_d$ , com constante cosmológica diferente. Além desta parede de domínio legítima, existe uma outra ligando  $\sigma_{\text{top}}$  à singularidade nua em  $\sigma \rightarrow \infty$  — além disso, note que, por conta da simetria par de  $W(\sigma)$ , existem objetos correspondentes “espelhados” em  $\sigma < 0$ . A estrutura se encontra representada na Fig.4.6.

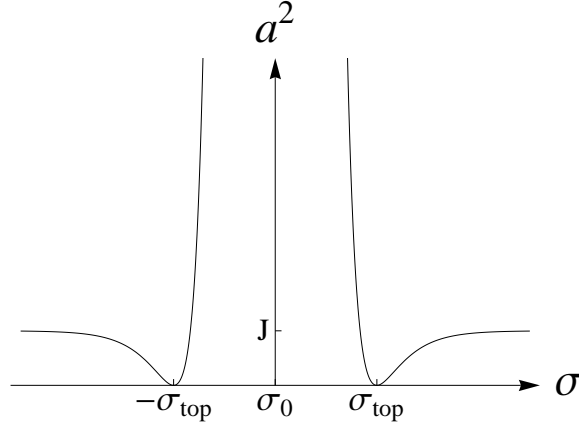


Figura 4.6: Fator de escala (4.28) para uma parede plana em gravitação G-B.

## B. Paredes Curvas.

A contribuição de curvatura não nula vem da integral

$$\int g \equiv -\frac{K(d-2)}{\alpha} \int \frac{\text{Exp}(-\int f)}{(W^2 - W_a^2)W C_0} dW. \quad (4.21)$$

### B1. Einstein-Hilbert.

No caso EH, temos o resultado (4.17), que dá

$$-\frac{1}{K(d-2)} \int g \equiv -\frac{1}{\alpha} \int \frac{|W^2 - W_a^2|^{-s}}{(W^2 - W_a^2)W} dW.$$

Uma vez que  $W_a \leq W$  para todo  $\sigma$ , podemos remover os módulos da expressão acima, ficando com

$$-\frac{1}{K(d-2)} \int g \equiv -\frac{W_a^{-2(s+1)}}{2\alpha} \int (W^2/W_a^2 - 1)^{-s-1} (W^2/W_a^2)^{-1} d(W^2/W_a^2).$$

A integral acima pode ser escrita, para  $x = W^2/W_a^2$ , como

$$\int x^{-1}(x-1)^{-s-1} dx,$$

que é da forma (C.1), mas com  $a = 0$ . Para evitar este polo da função Beta de Euler, fazemos a troca  $x \rightarrow 1/x$ , o que leva a

$$\begin{aligned} \int x^{-1}(x-1)^{-s-1} dx &= \int (1-1/x)^{-s-1} (1/x)^s d(1/x) \\ &= -\frac{1}{s} (1-1/x)^{-s} x^{-s} - \int (1-1/x)^{-s} (1/x)^{s-1} d(1/x) \\ &= -\frac{1}{s} (1-1/x)^{-s} x^{-s} - B(1/x | s, 1-s). \end{aligned}$$

Usando a relação (C.2) temos então um função hipergeométrica:

$$\int x^{-1}(1-x)^{-s-1} dx = -\frac{1}{s} \{(x-1)^{-s} + x^{-s} F(s, s; 1+s; 1/x)\}. \quad (4.22)$$

Em suma,

$$-\frac{1}{K(d-2)} \int g = -\frac{W_a^{-2}}{2\alpha s} \left\{ (W^2 - W_a^2)^{-s} + W^{-2s} F\left(s, s; 1+s; \frac{W_a^2}{W^2}\right) \right\}, \quad (4.23)$$

e o fator de escala para uma parede com seções curvas em E-H fica

$$\begin{aligned} a^2(\sigma) &= J |W^2 - W_a^2|^s + \frac{K(d-2)}{2\alpha s W_a^2} \left\{ 1 + |1 - W_a^2/W^2|^s F\left(s, s; 1+s; \frac{W_a^2}{W^2}\right) \right\}; \\ s &= -1/2\alpha(d-2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

No caso em que  $s = -n$ , com  $n \in \mathbf{N}$ , a expressão acima inclui uma Hipergeométrica  $F(a, b; c; z)$  onde  $c$  é um número inteiro negativo. Nestes casos a série Hipergeométrica não é bem definida e para dar sentido a  $F(a, b; c; z)$  é preciso tomar certos limites (cf. [15]). O mais fácil a se fazer nesta situação é voltar à integral

$$\int x^{-1}(x-1)^{-s-1} dx = \int \frac{(x-1)^{n-1}}{x} dx,$$

que pode ser resolvida trivialmente expandindo o polinômio do numerador:

$$\int \frac{(x-1)^{n-1}}{x} dx = (-)^{n+1} \text{Log } x + \frac{1}{n-1} x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k x^k$$

Assim,  $\int g$  é finita para todo  $\sigma$  finito. Na singularidade nua, quando  $x \rightarrow \infty$ , a expressão acima é dominada pelo termo  $x^{n-1} \rightarrow +\infty$  para  $n > 1$ , e por  $+\text{Log } x \rightarrow +\infty$  para  $n = 1$ . Portanto, no limite da singularidade, o sinal de  $\int g$  é determinado pelo sinal de  $K$ , quer dizer.

$$\int g > 0 \quad \text{se } K < 0, \quad \text{e} \quad \int g < 0 \quad \text{se } K > 0.$$

De qualquer forma, a contribuição da curvatura para o fator de escala é dada por  $\text{Exp}[\int f] \times \int g$ , e tem portanto a seguinte estrutura (ver a diferença com a eq.(4.17))

$$|x - 1|^{-n} \left[ (-)^{n+1} \text{Log } x + \frac{1}{n-1} x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k x^k \right] \quad (4.25)$$

Quando  $x \rightarrow \infty$ , (4.25) tende a zero por valores positivos se  $K < 0$  e negativos se  $K > 0$ . No fator de escala,  $|x - 1|^{-n}$ , é este o termo dominante no limite da singularidade nua. Portanto, se  $K > 0$  *existe um horizonte, onde o fator de escala se anula (e em seguida fica negativo) em algum ponto entre o vácuo AdS e a singularidade nua*; isto se pode ver na Fig.4.7(a).

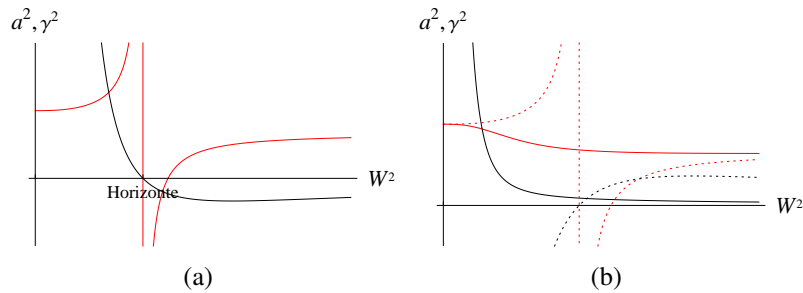


Figura 4.7: Fator de escala  $a^2$  (curva preta), e  $\gamma^2$  (curva vermelha) para uma parede curva em E-H, com  $W = B \cosh^2(\delta\sigma)$ ; (a)  $K > 0$  ; (b)  $K < 0$ .

No vácuo físico, em  $x = 1$ , a expressão (4.25) diverge. Existe a possibilidade de que o termo entre colchetes seja negativo; neste caso, devemos escolher a constante arbitrária da solução,  $J > 0$ , grande o suficiente para que a soma  $(J + [\dots])$  seja positiva e tenhamos  $a^2 \rightarrow +\infty$ . Na Fig.4.7(b), mostramos o fator de escala para  $K < 0$ , e  $\gamma^2$ : as linhas pontilhadas correspondem a uma escolha de  $J$  pequena demais, de forma que  $a^2 \rightarrow -\infty$  no vácuo físico, como acabamos de discutir. As linhas contínuas correspondem a uma escolha adequada de  $J$ . O fator de escala é então sempre positivo, e tende a zero na singularidade nua; no vácuo físico,  $a^2$  diverge e temos a borda de um espaço  $\text{AdS}_d$ .

## B2. Gauss-Bonnet.

No caso G-B, a Eq.(4.22) fica

$$\int g = -\frac{K(d-2)}{\alpha} \int \frac{|W^2 - W_a^2|^{-s} |W^2 - W_{\text{top}}^2|^s}{W(W^2 - W_a^2)(1 - W^2/W_{\text{top}}^2)} dW.$$

Entre  $\sigma_a$  e  $\sigma_{\text{top}}$ , quando  $W_a \leq W \leq W_{\text{top}}$ , ficamos então com

$$\int g = -\frac{K(d-2)W_{\text{top}}^2}{2\alpha} \int |W^2 - W_a^2|^{-s-1} |W_{\text{top}}^2 - W^2|^{s-1} W^{-2} dW^2. \quad (4.26)$$

Com  $x = W^2$ ,  $a = W_a^2$  e  $b = W_{\text{top}}^2$ , a integral acima tem a forma

$$\mathcal{I} = \int (x-a)^{-s-1} (b-x)^{s-1} x^{-1} dx$$

que se encontra discutida no Apêndice §C-A, Eq.(C.6). Portanto, em geral,

$$\int g = \frac{K(d-2)W_{\text{top}}^2}{2\alpha} \left\{ \frac{(b-a)^{s-1}}{a^{s+1}} (x-a)^{-s} x^s \left[ \frac{1}{s} F \left[ -s, 1-s; 1-s; \frac{b}{b-a}(x-a)/x \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(1-s)} (x-a) x^{-1} F \left[ 1-s, 1-s; 2-s; \frac{b}{b-a}(x-a)/x \right] \right\},$$

ou seja:

$$\int g = \frac{K(d-2)W_{\text{top}}^2(W_{\text{top}}^2 - W_a^2)^{s-1}}{2\alpha W_a^{2(s+1)}} (W^2 - W_a^2)^{-s} W^{2s} \left\{ \frac{1}{s} F \left[ -s, 1-s; 1-s; \frac{W_{\text{top}}^2}{W_{\text{top}}^2 - W_a^2} (W^2 - W_a^2)/W^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1-s)} (W^2 - W_a^2) W^{-2} F \left[ 1-s, 1-s; 2-s; \frac{W_{\text{top}}^2}{W_{\text{top}}^2 - W_a^2} (W^2 - W_a^2)/W^2 \right] \right\}. \quad (4.27)$$

Com isto, podemos enfim escrever o fator de escala para as paredes curvas:

$$a^2(\sigma) = J |W^2 - W_a^2|^s |W^2 - W_{\text{top}}^2|^{-s} + K \frac{(d-2)W_{\text{top}}^2(W_{\text{top}}^2 - W_a^2)^{s-1}}{2\alpha W_a^{2(s+1)}} W^{2s} |W^2 - W_{\text{top}}^2|^{-s} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{s} F \left[ -s, 1-s; 1-s; \frac{W_{\text{top}}^2}{W_{\text{top}}^2 - W_a^2} (W^2 - W_a^2)/W^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1-s)} (W^2 - W_a^2) W^{-2} F \left[ 1-s, 1-s; 2-s; \frac{W_{\text{top}}^2}{W_{\text{top}}^2 - W_a^2} (W^2 - W_a^2)/W^2 \right] \right\}; \\ s = -\frac{W_{\text{top}}^2}{2(d-2)(W_{\text{top}}^2 - W_a^2)\alpha} < 0. \quad (4.28)$$

A função Hipergeométrica  $F(a, b; c; z)$  assume diferentes comportamentos analíticos, dependendo dos

parâmetros  $a, b, c$ . Nosso interesse se concentra principalmente no caso em que  $s < 0$  é um número racional (negativo). Consideremos, em primeiro lugar,

$$s = -n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (4.29)$$

Neste caso, as Hipergeométricas em (4.28) podem ser reduzidas, utilizando certas relações conhecidas, a uma combinação de polinômios e logaritmos. É mais fácil, entretanto, calcular a integral  $\int g$  desde o início, utilizando o método do Apêndice §C.<sup>1</sup> Assim, temos

$$\mathcal{I} = \int \frac{(x-a)^{n-1}}{(b-x)^{n+1} x} dx = \alpha_0 \text{Log}(x) + \alpha_{\text{top},1} \text{Log}(b-x) + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\alpha_{\text{top},j}}{(j-1)} \frac{1}{(x-b)^{j-1}}, \quad (4.30)$$

e a contribuição da curvatura tem como estrutura analítica  $\{\text{Exp} \int f\} \times \int g$ , i.e.

$$\alpha_0 (x-a)^{-n} (b-x)^n \text{Log}(x) + \alpha_{\text{top},1} (x-a)^{-n} (b-x)^n \text{Log}(b-x) + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\alpha_{\text{top},j}}{(j-1)} \frac{(x-a)^{-n} (b-x)^n}{(b-x)^{j-1}} \quad (4.31)$$

É imediato ver que a expressão (4.31) acima diverge no limite em que  $x \rightarrow a$ , i.e. no vácuo físico. Por outro lado, fica evidente que em  $x \rightarrow b$ , i.e. no vácuo topológico, os termos da expressão acima todos se anulam, com exceção do último termo do somatório, que tende a uma constante *finita*:

$$a_{\text{top}}^2 = -K(d-2)W_{\text{top}}^2(W_{\text{top}}^2 - W_a^2)^{-n} \alpha_{b,n+1}/2\alpha n, \quad (4.32)$$

onde usamos (4.26) para resgatar os fatores multiplicativos de  $\mathcal{I}$ . Diminuindo o valor absoluto de  $K$ , podemos fazer esta constante arbitrariamente pequena; entretanto, ela só será *nula* para  $K = 0$ .

Enfatizamos que a constante (4.32) *não é arbitrária!* Ela não pode ser ajustada de acordo com as condições iniciais — como é o caso de  $J$  — e se torna assim de suma importância a determinação exata de seu valor. Para tanto, precisamos apenas calcular  $\alpha_{\text{top},n+1}$ .

Considere o integrando de  $\mathcal{I}$ , na Eq.(4.30). Temos

$$\frac{1}{x(b-x)^{n+1}} = \frac{h_0}{x} + \frac{h_1}{b-x} + \frac{h_2}{(b-x)^2} + \cdots + \frac{h_{n+1}}{(b-x)^{n+1}},$$

<sup>1</sup>Para  $n = 1$ , a Eq.(4.28) é de fato indeterminada, e se faz *necessário* utilizar o método do Apêndice §C.

para constantes  $h_k$ . As constantes  $h_0$  e  $h_{n+1}$  são facilmente determinadas ao se multiplicar ambos os lados da equação por, respectivamente,  $x$  e  $(b-x)^{n+1}$ , e depois tomar, respectivamente,  $x=0$  e  $x=b$ . O resultado é

$$h_0 = b^{-n-1}; \quad h_{n+1} = 1/b.$$

Assim, o integrando de  $\mathcal{I}$  se divide em  $n+2$  frações, como e.g.  $h_k(x-a)^{n-1}/(b-x)^k$ . A contribuição do último termo de (4.31), evidentemente, vem da fração cuja denominador possui maior grau, i.e.  $(x-a)^{n-1}h_{n+1}/(b-x)^{n+1}$ . Esta razão de polinômios pode mais uma vez ser expandida da mesma forma que acima:

$$\frac{h_{n+1}(x-a)^{n-1}}{(b-x)^{n+1}} = \frac{l_0}{x} + \frac{l_1}{b-x} + \frac{l_2}{(b-x)^2} + \cdots + \frac{l_{n+1}}{(b-x)^{n+1}},$$

para constantes  $l_k$ . E da mesma forma é fácil calcular  $l_{n+1}$  multiplicando ambos os lados por  $(b-x)^{n+1}$  e avaliando o resultado em  $x=b$ . Temos

$$l_{n+1} = h_{n+1}(b-a)^{n-1} = (b-a)^{n-1}/b.$$

É fácil ver, todavia, que o termo  $l_{n+1}/(b-x)^{n+1}$  acima é precisamente o termo que, integrado, contribui para o último termo da somatória em (4.30). Ou seja:

$$l_{n+1} = \alpha_{\text{top},n+1} = (b-a)^{n-1}/b. \quad (4.33)$$

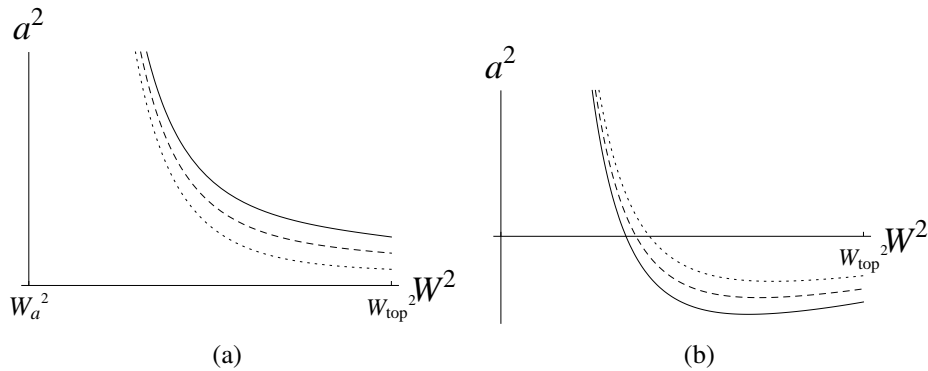


Figura 4.8: Fator de escala para uma parede curva em G-B. (a)  $K < 0$ ; (b)  $K > 0$ .

Tendo  $\alpha_{\text{top},n+1}$ , podemos determinar  $a_{\text{top}}^2$ , lembrando que  $n = -s$  e que  $\alpha$  é dada pela Eq.(4.28) em

termos de  $s$ . Substituição destes objetos em (4.32) dá, por fim,

$$a_{\text{top}}^2 = -(d-2)^2 W_{\text{top}}^{-2} K. \quad (4.34)$$

Portanto, para  $K < 0$ , por menor que seja  $|a_{\text{top}}^2|$ , temos sempre  $a_{\text{top}}^2 > 0$ ; já para  $K > 0$ , temos  $a_{\text{top}}^2 < 0$ . Isto pode ser visto na Fig.4.8, onde mostramos  $a^2$  para valores decrescentes de  $|K|$  (em ordem decrescente: linhas contínuas, tracejadas, pontilhadas).

A característica mais notável de  $a_{\text{top}}^2$ , no entanto, não é o fato de ser finita, nem de não ser arbitrária. O mais importante a seu respeito é que temos

$$\gamma(\sigma) = \sqrt{1 + \frac{K(d-2)^2}{W^2(\sigma)a^2(\sigma)}},$$

e portanto *no vácuo topológico, para qualquer valor de  $K \neq 0$ , temos  $\gamma = 0$ !* Isto pode ser visto na Fig.4.9.

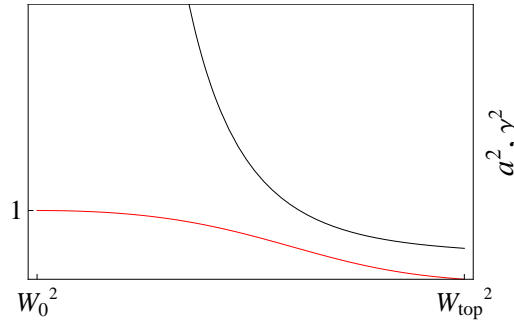


Figura 4.9: Fator de escala (curva preta) e  $\gamma^2$  (curva vermelha), para uma parede curva com  $K < 0$ .

O fato de se ter  $\gamma = 0$  é, a primeira vista, problemático; pois é então possível que haja uma singularidade em  $V(\sigma)$ ,  $\dot{\sigma}$  e consequentemente em  $R(\sigma)$  — logo uma singularidade física. Felizmente, aqui o zero de  $\gamma(\sigma)$  ocorre justamente no vácuo topológico, onde  $C_0(\sigma) = 0$ , o que *pode* cancelar as divergências citadas (cf. Eqs.(3.94), (3.128b), (3.95)). Para verificar se realmente  $C_0/\gamma^2 \rightarrow 0$ , notemos que para  $W^2 \rightarrow W_{\text{top}}^2$ , ou seja: para  $x \rightarrow b$ , o termo dominante no fator de escala é o penúltimo termo da soma em (4.31), e podemos escrever

$$a^2 \approx a_{\text{top}}^2 \{1 + u(b-x)\},$$

onde  $u$  é um coeficiente constante. Denotando  $\epsilon = b - x$ , temos então

$$1/xa^2 \approx \frac{1}{a_{\text{top}}^2} \frac{1-u\epsilon}{b-\epsilon} \approx \frac{1}{ba_{\text{top}}^2} (1-u\epsilon)(1+\epsilon/b) \approx \frac{1}{ba_{\text{top}}^2} \{1 - (u-1/b)\epsilon\}.$$



Com isso, temos

$$\gamma^2 = 1 + (d-2)^2 K/x a^2 \approx \gamma_{\text{top}}^2 + \xi \epsilon = \xi \epsilon.$$

onde  $\xi = -(d-2)^2 K(u-1/b)/b a_{\text{top}}^2$ . Por sua vez, temos

$$C_0 = 1 - x/b = (b-x)/b = \epsilon/b.$$

e portanto as razões  $C_0/\gamma$ ,  $C_0^2/\gamma$  ambas tendem a zero, enquanto  $C_0/\gamma^2$  é finita e portanto não há singularidade física no vácuo topológico. Mais ainda, mostramos ser verdade que  $\dot{\sigma} = 0$ , assegurando que  $\sigma_{\text{top}}$  é de fato um vácuo, por definição, e que nossa construção é consistente. Pode-se então fazer os gráficos de  $V(\sigma)$  e  $R(\sigma)$ . Vemos na Fig.4.10 que as grandezas consideradas são de fato finitas e bem comportadas. Note que, apesar da forma complicada do fator de escala, que entra explicitamente na fórmula de  $V(\sigma)$ , este possui a forma simples de um potencial do tipo Higgs, com extremos apenas no vácuo físico e nos vácuos topológicos (simétricos em relação à origem), onde  $C_0 = 0$ .

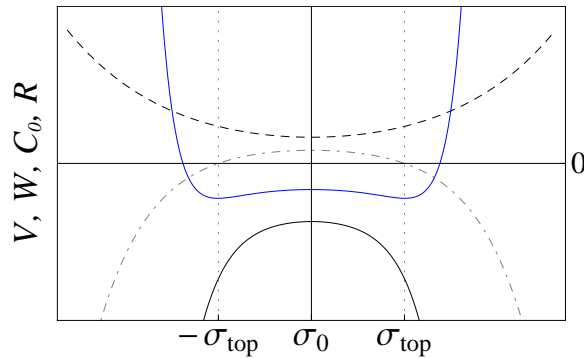


Figura 4.10: Potencial de matéria  $V(\sigma)$  (curva azul); Escalar de Ricci  $R$  (curva preta); Superpotencial  $W(\sigma) = B \cosh^2(\delta\sigma)$  (curva preta tracejada); Função  $C_0(W) = 1 - W^2/W_{\text{top}}^2$  (curva preta ponto-tracejada). Aqui,  $K < 0$ .

Assim, temos um exemplo de parede de domínio ligando dois vácuos. O vácuo físico, onde  $a^2 \rightarrow \infty$ , corresponde a um espaço  $\text{AdS}_d$ , como de costume. Mas no vácuo topológico, temos  $a^2 \rightarrow a_{\text{top}}^2 = \text{constante}$ , e portanto a métrica assintótica,

$$ds^2 = dy^2 + a_{\text{top}}^2 ds_{\text{AdS}_{d-1}}^2,$$

*não possui* todas as isometrias de um espaço  $\text{AdS}_d$ ; este espaço apresenta apenas, como característica principal, uma topologia  $\mathbf{R} \times \text{AdS}_{d-1}$ .

## 4.5 Gravidade Quase-Topológica

De (3.129), para dados valores de  $\lambda$  e  $\mu$ , a equação  $C_0 = 0$  é quadrática em  $W^2$ . Resolvendo-a, obtemos os dois valores possíveis para o vácuo topológico:

$$W_{\pm}^2 = -\frac{\lambda}{3\mu} \left( 1 \mp \sqrt{1 + 3\mu/\lambda^2} \right). \quad (4.35)$$

Repare que existem evidentemente *quatro* soluções para  $W_{\text{top}}$ , a saber  $\pm W_{\pm}$ . Vamos assumir que  $W(\sigma)$  nunca muda de sinal, e portanto apenas duas delas nos interessam. Escrevemos, então

$$C_0 = (W^2 - W_+^2)(W^2 - W_-^2)/W_+^2 W_-^2. \quad (4.36)$$

OBS:

Notando que  $W_+^2 + W_-^2 = -2\lambda/3\mu$ , e elevando ao quadrado uma das Eqs.(4.35), obtemos

$$\begin{aligned} 2\lambda/3\mu &= -(W_+^2 + W_-^2); \\ (W_+^2)^2 + \frac{2\lambda}{3\mu} W_+^2 &= 1/3\mu, \end{aligned}$$

que fornecem uma descrição explícita de  $\lambda$  e  $\mu$  em termos de  $W_{\pm}^2$ :

$$-3\mu = 1/W_+^2 W_-^2; \quad 2\lambda = (W_+^2 + W_-^2)/W_+^2 W_-^2. \quad (4.37)$$

Podemos, assim, separar  $1/C_0$  em duas frações:

$$1/C_0 = -\frac{W_+^2 W_-^2}{(W_+^2 - W_-^2)} \left[ \frac{1}{W_+^2 - W^2} - \frac{1}{W_-^2 - W^2} \right] \quad (4.38)$$

A fórmula acima é verdadeira sejam ou não reais as raízes de  $C_0 = 0$ , i.e. existam ou não todos os vácuos topológicos. Escrevendo  $\Delta = W_+^2 W_-^2 / (W_-^2 - W_+^2)$ , temos

$$\begin{aligned} \int f &\equiv -\frac{\kappa^2}{(d-2)} \int \frac{W}{W' C_0} d\sigma \\ &= \Delta \left[ -\frac{\kappa^2}{(d-2)} \int \frac{W d\sigma}{W'(W_+^2 - W^2)} + \frac{\kappa^2}{(d-2)} \int \frac{W d\sigma}{W'(W_-^2 - W^2)} \right]. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\int f_{\text{GQT}} = \frac{\Delta}{W_+^2} \int f_{\text{GB}}^+ - \frac{\Delta}{W_-^2} \int f_{\text{GB}}^- \quad (4.39)$$

onde  $f_{\text{GB}}^\pm$  correspondem a integrandos do mesmo tipo já resolvido para GB, com vácuos topológicos dados por  $W_\pm$

A solução de paredes planas, dada por  $\text{Exp} \int f$ , pode ser então escrita como

$$a_{\text{GQT}}^2 = \{a_{\text{GB}+}^2\}^{\Delta/W_+^2} \{a_{\text{GB}-}^2\}^{-\Delta/W_-^2} ; \quad K = 0. \quad (4.40)$$

Assim, quando  $K = 0$ , o problema de se construir paredes de domínio em GQT se resume a resolver duas paredes distintas em GB.

A contirbuição da curvatura seccional vem da integral

$$\int g = -K(d-2) \int \frac{\{\text{Exp} f_{\text{GB}}^+\}^{-\Delta/W_+^2} \{\text{Exp} f_{\text{GB}}^-\}^{\Delta/W_-^2}}{W W' (W_+^2 - W^2)(W_-^2 - W^2)} d\sigma \quad (4.41)$$

e portanto não se separa de forma trivial em problemas do tipo GB como no caso plano.

— *Exemplos.*

Escolhendo

$$\mu < 0, \quad |\mu| \leq \lambda^2/3 ; \quad \lambda > 0, \quad \text{temos} \quad W_+^2 \geq W_-^2 > 0, \quad \Delta < 0.$$

Consideremos o caso da seção §4.4, com  $W(\sigma) = W_a \cosh(\sqrt{\alpha} \sigma)$ . Usando a Eq.(4.19), temos

$$\{\text{Exp} f_{\text{GB}}^+\}^{-\Delta/W_+^2} \{\text{Exp} f_{\text{GB}}^-\}^{\Delta/W_-^2} = |W^2 - W_a^2|^{-s_+} |W^2 - W_+^2|^{s_+} |W^2 - W_a^2|^{-s_-} |W^2 - W_-^2|^{s_-} \quad (4.42a)$$

com

$$s_+ = -\frac{\Delta}{2(d-2)(W_+^2 - W_a^2)\alpha} > 0 ; \quad s_- = \frac{\Delta}{2(d-2)(W_-^2 - W_a^2)\alpha} < 0, \quad (4.42b)$$

e

$$|s_+| < |s_-|. \quad (4.42c)$$

O fator de escala plano (dado pelo inverso da expressão (4.42a)) tem portanto um horizonte em  $\sigma_-$  e bordas em  $\sigma_0$  e  $\sigma_+$ , como se pode ver na Fig.4.11 abaixo.

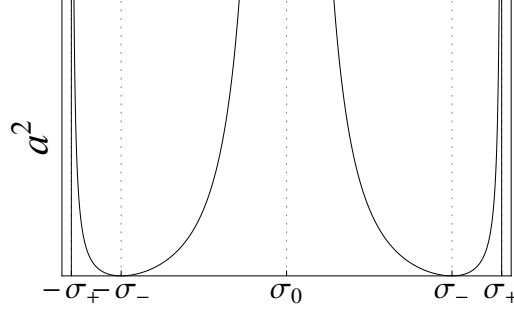


Figura 4.11: Fator de escala (4.40) para parede plana em GQT, com superpotencial  $W(\sigma) = W_a \cosh(\sqrt{\alpha} \sigma)$ .

Existem quatro parâmetros livres: a) O valor de  $\lambda$ ; b) o valor de  $\mu$ ; c) o valor de  $W_a$ ; d) o valor de  $\alpha$ . Alternativamente, podemos escolher a)  $W_+$ ; b)  $W_-$ ; c)  $s_+$ ; d)  $s_-$ . Mais especificamente, notando que

$$s_+/s_- = -(W_-^2 - W_a^2)/(W_+^2 - W_a^2),$$

se escolhermos  $s_{\pm}$  e  $W_{\pm}$ , o valor de  $W_a$  fica determinado por

$$W_a^2 = \frac{W_-^2 + (s_+/s_-)W_+^2}{1 + s_+/s_-},$$

e conseqüentemente o valor de  $\alpha$  fica fixo por (4.42b); e.g.

$$\alpha = -\frac{\Delta}{2(d-2)(W_+^2 - W_a^2)s_+}.$$

Sabendo (4.42), a integral (4.43) fica

$$\int g = -\frac{K(d-2)W_+^2 W_-^2}{2\alpha} \int W^{-2} (W^2 - W_a^2)^{-s_+ - s_- - 1} (W_+^2 - W^2)^{s_+ - 1} (W_-^2 - W^2)^{s_- - 1} dW^2. \quad (4.43)$$

Assim, temos que resolver uma integral do tipo

$$\mathcal{K} = \int x^{-1} (x - a)^{-s_+ - s_- - 1} (b_+ - x)^{s_+ - 1} (b_- - x)^{s_- - 1} dx. \quad (4.44)$$

Em geral,  $\mathcal{K}$  é de difícil resolução. Entretanto existem algumas situações em que seu cálculo recai nos que já foram feitos na seção §4.4 e no Apêndice C:

1. Se ambos  $s_{\pm} \in \mathbf{Z}$ , o integrando se reduz a uma razão de polinômios, e podemos utilizar o método do Apêndice §C. O resultado é a já conhecida combinação de potências e logaritmos das singularidades do integrando.
2. Sendo  $s_+ > 0$ , podemos tomar o caso especial em que  $s_+ = 1$ , cancelando o termo  $(x - a)$  no integrando e não restringindo a natureza de  $s_-$  (a não ser pelo fato de que  $s_- < 0$ ). Ficamos então com a mesma integral geral que encontramos no caso GB, cuja solução se encontra no Apêndice §C, e cujo resultado inclui funções Hipergeométricas.

Na Fig.4.12(a), mostramos uma parede de domínio curva com  $K < 0$  entre o vácuo físico  $\sigma_0$  e o primeiro vácuo topológico, em  $\sigma_-$ ; escolhemos  $\sigma_{\pm} \in \mathbf{Z}$ . Assim como no caso GB — por consequência das mesmas propriedades analíticas da integral de uma razão de polinômios — o fator de escala  $a^2$  tende a uma constante finita em  $\sigma_-$ , onde  $\gamma(\sigma_-) = 0$ . A curvatura é finita e negativa em ambos os vácuos, caracterizando espaços  $\text{AdS}_d$ . Entre os dois vácuos topológicos, i.e. para  $\sigma \in (\sigma_-, \sigma_+)$ , a possível segunda parede de domínio é defeituosa, uma vez que se tem uma região onde  $\gamma^2 < 0$ . Além disso, por construção, todo o intervalo  $(\sigma_-, \sigma_+)$  possui  $C_0(\sigma) < 0$ , e portanto não é fisicamente interessante.

Para  $K > 0$ , como de costume, o fator de escala se anula em um ponto entre os vácuos, formando um horizonte, implicando na existência de uma região (onde  $a^2 < 0$ ) que não é coberta pelo sistema de coordenadas.

Assim como no caso GB, o comportamento das funções descritas acima *não depende* de forma crucial, da escolha específica de  $s_{\pm}$  como números inteiros. Se  $s_{\pm}$  s ao números semi-inteiros, por exemplo, obtemos exatamente o mesmo comportamento qualitativo. Por outro lado, vale lembrar que as soluções descritas acima são específicas para a nossa escolha — bastante particular — da forma de  $W(\sigma)$ ; além disso, é válido se fazer ainda uma análise das propriedades das paredes de domínio no caso em que um dos ou ambos os  $W_{\pm}^2$  sejam negativos.

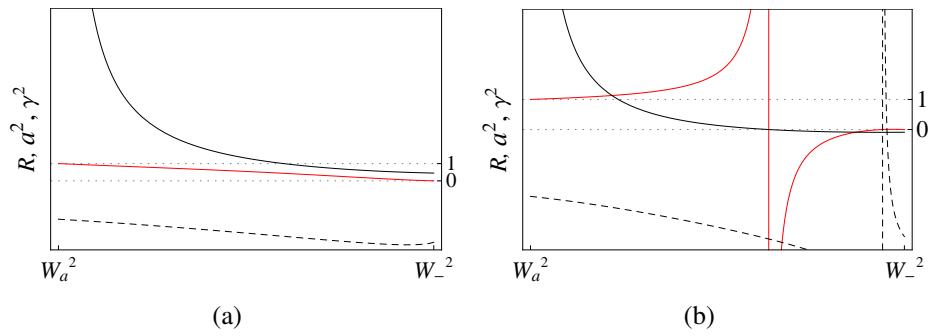


Figura 4.12: Fator de escala  $a^2$  (curva preta);  $\gamma^2$  (curva vermelha); e escalar de Ricci  $R$  (curva preta, tracejada), para uma parede curva em GQT. (a)  $K < 0$ ; (b)  $K > 0$ .

Em suma, o que foi feito aqui foi a construção explícita de *uma* parede de domínio, mostrando que é possível tal construção analítica. A análise geral de mais exemplos e suas propriedades exige um estudo mais detalhado.

# Capítulo 5

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existem duas famílias das extensões da Relatividade Geral em  $d \geq 4$  (parcialmente) compatíveis com a condição de que as equações modificadas de Einstein para a métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  sejam de segunda ordem:

*i)* RG de Lovelock, *ii)* Gravitação Quase-Topológica.

A família das extensões de Lovelock é buscada nas combinações lineares dos certos invariantes topológicos  $L_N$  em  $d = 2N$  ( $N=3, 4$ ) envolvendo potências (e traços) de  $R$ ,  $R_{\mu\nu}$  e  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  até ordem  $N$ . Por este motivo, em  $d = 4$  (i.e.  $N=2$ ) o único invariante de Lovelock disponível é o de Gauss-Bonnet,

$$L_2^{(d)} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Sendo topológico em  $d = 4$  ele não contribui para as equações de Einstein. Logo, em quatro dimensões não temos extensões não-triviais do tipo Lovelock. Em  $d = 5, 6$  as modificações das equações de Einstein são produzidas do termo GB- $L_2(d)$ . Em  $d = 7, 8$  contribuem também os termos cúbicos:  $L_{love}(d) = \lambda_1 L_2(d) + \lambda_2(d)$ ; em  $d = 9, 10$  podemos incluir termos até quárticos etc.

Os modelos de Gravitação Quase-Topológica obedecem uma condição fraca de “equações de segunda ordem”: equações para certas famílias de soluções fisicamente importantes como Buracos Negros, Friedmann-Robertson-Walker (FRW), Paredes de Domínio Plano (e todas as soluções conforme planas) como também as flutuações lineares  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{GQT} + \kappa h_{\mu\nu}$  ao redor destas soluções  $g_{\mu\nu}^{(GQT)}$  são todas de segunda ordem. Porém as equações modificadas para estas GQT’s são de ordem  $2N - 2$  para uma métrica arbitrária, quando invariantes até “ordem  $N$ ” são envolvidos. Desta forma começando de  $d = 4$  (i.e.  $d \geq 4$ ) eles oferecem extensões não-triviais da RG com invariantes de ordem arbitrária  $N \geq 2$  ( $\forall d \geq 4$ ).

A importância de soluções FRW com  $K \neq 0$  (i.e.  $\bar{R}_{(d-1)} = K$ ) como também das Paredes de Domínio

---

Curvas ambas com tensor de Weyl  $W_{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$ , levanta a questão se uma “extensão” da família de modelos GQT que envolvam também estas soluções é possível. As investigações apresentados nesta dissertação demonstraram que as equações para PDC’s nos modelos GQT -quadrática e cúbica- são também de segunda ordem (bastante complicadas e não lineares em primeiras derivadas).

Finalmente, gostaríamos de concluir esta dissertação mencionando o fato de que as soluções aqui obtidas para PDC’s possuem uma motivação extra. Pretendemos investigar como estas soluções podem ser aplicadas no contexto de Teorias de Campos Holográficas.



---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S. Alexander and N. Yunes. Chern–simons modified general relativity. *Physics Reports*, 480(1):1–55, 2009.
- [2] D. Bak, M. Gutperle, and S. Hirano. A dilatonic deformation of ads5 and its field theory dual. *Journal of High Energy Physics*, 2003(05):072, 2003.
- [3] Y. Bardoux. Black hole solutions of modified gravity theories. *arXiv preprint arXiv:1211.0038*, 2012.
- [4] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum fields in curved space*. Number 7. Cambridge university press, 1984.
- [5] R. Brustein and A. Medved. Lovelock gravity is equivalent to einstein gravity coupled to form fields. *arXiv preprint arXiv:1212.0625*, 2012.
- [6] U. Camara dS and G. Sotkov. Geometry of the new massive gravity domain walls. *PoS ICF2010*, 26, 2010.
- [7] U. Camara dS and G. Sotkov. New massive gravity domain walls. *Physics Letters B*, 694(1):94–99, 2010.
- [8] M. Cvetič, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. Black hole thermodynamics and negative entropy in de sitter and anti-de sitter einstein–gauss–bonnet gravity. *Nuclear Physics B*, 628(1):295–330, 2002.
- [9] M. Cvetič and H. H. Soleng. Supergravity domain walls. *Physics Reports*, 282(4):159–223, 1997.
- [10] U. C. da Silva, C. Constantinidis, A. A. Lima, and G. Sotkov. Domain walls in extended lovelock gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2012(4):1–33, 2012.

- 
- [11] N. Dadhich. On the gauss-bonnet gravity. *arXiv preprint hep-th/0509126*, 2005.
- [12] M. Dehghani, A. Bazrafshan, R. Mann, M. Mehdizadeh, M. Ghanaatian, and M. Vahidinia. Black holes in (quartic) quasitopological gravity. *Physical Review D*, 85(10):104009, 2012.
- [13] O. DeWolfe, D. Freedman, S. Gubser, and A. Karch. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *arXiv preprint hep-th/9909134*.
- [14] D. Freedman, C. Nunez, M. Schnabl, and K. Skenderis. Fake supergravity and domain wall stability. *Physical Review D*, 69(10):104027, 2004.
- [15] H. T. Functions. The bateman manuscript project, 1953.
- [16] C. Garraffo and G. Giribet. The lovelock black holes. *Modern Physics Letters A*, 23(22):1801–1818, 2008.
- [17] A. Gruzinov and M. Kleban. A note on causality constraining higher curvature corrections to gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 24(13):3521, 2007.
- [18] R. Jackiw and S.-Y. Pi. Chern-simons modification of general relativity. *Physical Review D*, 68(10):104012, 2003.
- [19] D. Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12:498, 1971.
- [20] D. Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13:874, 1972.
- [21] J. Maldacena. The large- $n$  limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, 38(4):1113–1133, 1999.
- [22] K. A. Meissner and M. Olechowski. Domain walls without cosmological constant in higher order gravity. *Physical review letters*, 86(17):3708–3711, 2001.
- [23] R. C. Myers and B. Robinson. Black holes in quasi-topological gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2010(8):1–35, 2010.
- [24] R. C. Myers and A. Sinha. Holographic c-theorems in arbitrary dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2011(1):1–53, 2011.
- [25] J. Oliva and S. Ray. Classification of six derivative lagrangians of gravity and static spherically symmetric solutions. *Physical Review D*, 82(12):124030, 2010.

- 
- [26] J. Oliva and S. Ray. A new cubic theory of gravity in five dimensions: black hole, birkhoff's theorem and c-function. *Classical and Quantum Gravity*, 27(22):225002, 2010.
- [27] A. Sinha. On higher derivative gravity, c-theorems and cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 28(8):085002, 2011.
- [28] T. P. Sotiriou and V. Faraoni.  $f(r)$  theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):451, 2010.
- [29] G. Sotkov and U. C. dS. Holographic rg flows from quasi-topological gravity. *arXiv preprint arXiv:1207.0778*, 2012.
- [30] K. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Physical Review D*, 16(4):953, 1977.
- [31] M. Veltman et al. One loop divergencies in the theory of gravitation. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré: Section A, Physique théorique*, volume 20, pages 69–94. Institut Henri Poincar, 1974.
- [32] A. W. Wong and R. B. Mann. A soliton and a black hole are in gauss-bonnet gravity: Who wins? *Physical Review D*, 86(12):124002, 2012.
- [33] B. Zwiebach. Curvature squared terms and string theories. *Physics Letters B*, 156(5):315–317, 1985.

# Apêndice A

## PRINCIPIO VARIACIONAL DA AÇÃO

### EINSTEIN-GAUSS-BONNET

#### A.1 Método variacional

Consideremos a seguinte ação quadrática

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left[ R + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right], \quad (\text{A.1})$$

e a variação com respeito à métrica  $g^{\mu\nu}$ , através do princípio de mínima ação  $\delta S = 0$ . Mas, antes vamos considerar os seguintes resultados,

$$\delta g_{\mu\tau} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\tau} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.2})$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\delta R$  terá uma contribuição adicional, conformado por uma derivada total que no contorno, pelo teorema de Stokes será zero.

Começemos pela variação do escalar ao quadrado

$$\int d^d x \sqrt{-g} \delta(c_1 R^2) = \int d^d x \sqrt{-g} c_1 \frac{\partial R^2}{\partial R} \delta R = \int d^d x \sqrt{-g} 2c_1 R \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \quad (\text{A.6})$$

e

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial_\rho\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho - g^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho. \quad (\text{A.7})$$

Teremos, por tanto

$$2c_1 \int d^d x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 2c_1 \int d^d x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - 2c_1 \int d^d x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \partial_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho \quad (\text{A.8})$$

e integrando por partes:

$$2c_1 \int d^d x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho = -2c_1 \int d^d x \partial(\sqrt{-g} R g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho, \quad (\text{A.9})$$

$$-2c_1 \int d^d x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \partial_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho = 2c_1 \int d^d x \partial_\nu(\sqrt{-g} R g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho \quad (\text{A.10})$$

a variação das conexões fica

$$\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\tau} (\partial_\nu \delta g_{\mu\tau} + \partial_\mu \delta g_{\nu\tau} - \partial_\rho \delta g_{\nu\mu}), \quad (\text{A.11a})$$

$$\delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\tau} \partial_\mu \delta g_{\rho\tau} \quad (\text{A.11b})$$

Levando estas duas expressões em (A.10) e integrando por partes novamente obtemos

$$2c_1 \int d^d x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 2c_1 \int d^d x \partial^\mu \partial^\tau (\sqrt{-g} R) \delta g_{\mu\tau} - 2c_1 \int d^d x \partial_\rho \partial^\rho (\sqrt{-g} R g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu}.$$

considerando ainda a seguinte relação

$$\partial_\alpha \partial_\beta = \frac{\nabla_\alpha \nabla_\beta + \nabla_\beta \nabla_\alpha}{2}, \quad (\text{A.12})$$

a eq. (A.5) ficará:

$$c_1 \int d^d x \sqrt{-g} \delta R^2 = c_1 \int d^d x \sqrt{-g} \{ 2RR_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu R - \nabla_\nu \nabla_\mu R + 2g_{\mu\nu} \square R \} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.13})$$

Na procura da variação da terceira parte de (A.1), obtemos

$$c_2 \int d^d x \sqrt{-g} \delta(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) = c_2 \int d^d x \sqrt{-g} (2R_{\mu\alpha} R^\alpha{}_\nu \delta g^{\mu\nu} + 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}), \quad (\text{A.14})$$

onde o segundo termo da direita da integral (A.14) é quase semelhante ao caso anterior. Levando em consideração a eq.(A.7),

$$\delta S_2 = 2c_2 \int d^d x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 2c_2 \int d^d x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - 2c_2 \int d^d x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \partial_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho \quad (\text{A.15})$$

e integrando por partes

$$\delta S = -2c_2 \int d^d x \partial_\rho (\sqrt{-g} R^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho + 2c_2 \int d^d x \partial_\nu (\sqrt{-g} R^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho. \quad (\text{A.16})$$

Usando (A.11) em (A.16) e depois usando mais uma vez integrais por partes

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= 2c_2 \int d^d x \partial_\nu \partial^\tau (\sqrt{-g} R^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\tau} - c_2 \int d^d x \partial_\tau \partial^\tau (\sqrt{-g} R^{\mu\nu}) \delta g_{\nu\mu} \\ &\quad - c_2 \int d^d x \partial_\mu \partial_\nu (\sqrt{-g} R^{\mu\nu} g^{\rho\tau}) \delta g_{\rho\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

e agora usamos (A.2) na eq. acima:

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= -2c_2 \int d^d x \partial_\nu \partial^\tau (\sqrt{-g} R^{\mu\nu}) g_{\mu\alpha} g_{\tau\beta} \delta g^{\alpha\beta} + c_2 \int d^d x \partial_\tau \partial^\tau (\sqrt{-g} R^{\mu\nu}) g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\ &\quad + c_2 \int d^d x \partial_\mu \partial_\nu (\sqrt{-g} R^{\mu\nu} g \alpha \beta) \delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Cada uma das integrais fica:

$$\rightarrow \partial_\nu \partial^\tau (\sqrt{-g} R^{\mu\nu}) g_{\mu\alpha} g_{\tau\beta} \delta g^{\alpha\beta} = \frac{(\nabla^\gamma \nabla_\beta + \nabla^\beta \nabla_\gamma)}{2} (\sqrt{-g} R_{\gamma\alpha}) \delta g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.19a})$$

$$\rightarrow \partial_\tau \partial^\tau (\sqrt{-g} R^{\mu\nu}) g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} \delta g^{\alpha\beta} = \square (\sqrt{-g} R_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.19b})$$

$$\rightarrow \partial_\mu \partial_\nu (\sqrt{-g} R^{\mu\nu} g \alpha \beta) \delta g^{\alpha\beta} = \nabla^\rho \nabla^\sigma (\sqrt{-g} R_{\rho\sigma}) g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.19c})$$

somando (A.19) e substituímos em (A.18) temos finalmente a terceira parte da variação

$$\delta S_2 = c_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ 2R_{\mu\rho} R_\nu{}^\rho - \nabla^\rho \nabla_\nu R_{\rho\mu} - \nabla^\rho \nabla_\mu R_{\rho\nu} + \square R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\rho\sigma} \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.20})$$

Finalmente a quarta e última parte da variação é escrita da seguinte forma

$$\delta S_3 = c_3 \int d^d x \sqrt{-g} \delta(R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}) = 2R_{\mu\rho\sigma\tau} R_\nu{}^{\rho\sigma\tau} \delta g^{\mu\nu} + 2g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma} \delta R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma}. \quad (\text{A.21})$$

Devemos calcular  $\delta R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma}$ . A definição do tensor de Riemann é

$$R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\tau} \Gamma^\tau{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\tau} \Gamma^\tau{}_{\rho\nu} \quad (\text{A.22})$$

Mas para facilitar os cálculos podemos utilizar o sistema de coordenadas locais tal que  $\Gamma^\lambda{}_{\rho\tau} = 0$ . Nas contrações do tensor de Riemann consideramos novamente, o termo:

$$R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}. \quad (\text{A.23})$$

Pelas propriedades de anti-simetria do tensor de Riemann  $R^{\mu\nu\rho\sigma} = -R^{\mu\nu\sigma\rho}$

$$\begin{aligned} 2g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma} \delta R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma} &= 2g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \delta \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - 2g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\rho \delta \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} \\ &= 4g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \delta \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

que será a integral  $4 \int d^d x \sqrt{-g} g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \delta \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}$ . Integrando por partes, obtemos

$$4 \int d^d x \sqrt{-g} g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \delta \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} = -4 \int d^d x \partial_\rho (\sqrt{-g} g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma}) \delta \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}. \quad (\text{A.25})$$

Substituindo (A.11) na equação acima temos

$$\begin{aligned} &= -2 \int d^d x \partial_\rho (\sqrt{-g} g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma}) g^{\lambda\tau} \partial_\sigma \delta g_{\tau\nu} - 2 \int d^d x \partial_\rho (\sqrt{-g} g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma}) g^{\lambda\tau} \partial_\nu \delta g_{\tau\sigma} \\ &+ 2 \int d^d x \partial_\rho (\sqrt{-g} g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma}) g^{\lambda\tau} \partial_\tau \delta g_{\sigma\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Lembrando que a contração de um tensor anti-simétrico e um simétrico é sempre nula, observemos que o termo da equação acima não contribui. Integrando o restante por partes obtemos

$$-4 \int d^d x \partial_\rho (\sqrt{-g} g_{\mu\lambda} R^{\mu\nu\rho\sigma}) \delta \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} = \int d^d x \sqrt{-g} (2\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} + 2\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\nu\rho\mu\sigma}) \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.27})$$

Finalmente em (A.21)

$$\delta S_3 = c_3 \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ 2R_{\mu\rho\sigma\tau} R_\nu{}^{\rho\sigma\tau} + 2\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} + 2\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\nu\rho\mu\sigma} \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.28})$$

Somando as contribuições (A.13), (A.20) e (A.28), a variação da ação (A.1) fica

$$\begin{aligned}
0 &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[ R + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \\
&+ c_1 \left( 2RR_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu R - \nabla_\nu \nabla_\mu R + 2g_{\mu\nu} \square R \right) \\
&+ c_2 \left( 2R_{\mu\rho} R_\nu{}^\rho - \nabla^\rho \nabla_\nu R_{\rho\mu} - \nabla^\rho \nabla_\mu R_{\rho\nu} + \square R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\rho\sigma} \right) \\
&+ c_3 \left( 2R_{\mu\rho\sigma\tau} R_\nu{}^{\rho\sigma\tau} + 2\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} + 2\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\nu\rho\mu\sigma} \right)
\end{aligned} \tag{A.29}$$



# Apêndice B

## ESPAÇO DE ANTI-DE SITTER

Apresentamos neste apêndice noções básicas sobre o espaço de anti-de Sitter, que abreviamos como  $AdS_d$  para o caso d-dimensional.

Começemos com o estudo rápido da ação gravitacional

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} (R - \Lambda). \quad (\text{B.1})$$

O segundo termo é a constante cosmológica, que é negativo para o espaço AdS. Ela pode ser escrita como  $\Lambda = -\frac{(d-1)(d-2)}{2L^2}$  onde  $L^2$  tem dimensão de comprimento.

Agora determinemos que a equação de movimento de (B.1) é equivalente à equação abaixo

$$R_{\mu\nu} = -\frac{(d-1)}{L^2} g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.2})$$

O espaço-tempo AdS é um exemplo de máxima simetria. Isto significa que o tensor de curvatura de Riemann pode ser escrito em termos do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  como

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = K(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}), \quad (\text{B.3})$$

onde  $K$  é a constante de dimensão  $\frac{1}{(\text{comprimento})^2}$ . Para AdS, esta constante é negativa e dada por  $K = -\frac{1}{L^2}$  onde  $L$  define a escala global do espaço-tempo. Segue imediatamente de (B.3) que o tensor de Ricci e a curvatura escalar de máxima simetria espaço-tempo são

$$\begin{aligned} R &= K(d-1)g_{\mu\nu}, \\ R &= Kd(d-1). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

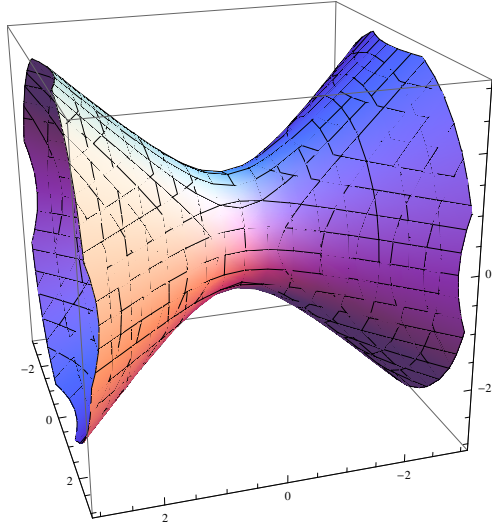


Figura B.1: Representação do vínculo (B.5) o eixo principal é dado pelas coordenadas  $X^i$ .  $X^0$  é o eixo vertical e  $X^d$  é o eixo do plano saindo da página

A métrica que satisfaz (B.4) é chamada métrica de Einstein.

Um espaço-tempo com simetria máxima de dimensão  $d$  pode ser embebido como um hiperbolóide em um espaço-tempo plano de dimensão  $d + 1$ . A métrica  $g_{\mu\nu}$  é, em seguida, a métrica induzida, o que significa que o elemento de linha é obtido avaliando a métrica plana embebida sob a hiperboloide.

## B.1 $AdS_d$ obtido a partir de sua imersão em $\mathbb{R}^{d+1}$

Para  $AdS_d$  o espaço embebido é o espaço pseudo-Euclidiano com métrica  $\eta_{AB} = \text{diag}(- + + \dots + -)$  com coordenadas cartesianas  $X^A$ ,  $A = 0, \dots, d$ . O hiperbolóide que define  $AdS_d$  é a superfície

$$X^A \eta_{AB} X^B = -(X^0)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (X^i)^2 - (X^d)^2 = -L^2, \quad (\text{B.5})$$

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^{d-1})^2 - (dX^d)^2 \quad (\text{B.6})$$

Este espaço pseudo-Euclidiano  $(d+1)$ -dimensional com o vínculo (B.5) é ilustrado na figura (B.1). (B.5) diz que o grupo de simetria é  $SO(d-1, 2)$  com  $\frac{d(d+1)}{2}$  parâmetros arbitrários. Logo o espaço  $AdS_d$  é o espaço-tempo homogêneo e isotrópico com curvatura constante.

(B.5) e (B.6) podem ser parametrizados de várias formas, o que mais nos interessa é o exemplo de “patch” de coordenadas de Poincaré. Esses “patch” cobrem a região de  $AdS$  em que a métrica é conformada pela metade plana do espaço-tempo de Minkowski. Para introduzir essas coordenadas

voltemos às Cartesianas  $X^A$  de (B.5) e definimos

$$\begin{aligned}
 X^0 &= Lux^0, \\
 X^i &= Lux^i, \quad i = 1, \dots, d-2, \\
 X^{d-1} &= \frac{1}{2u} \left( -1 + u^2(L^2 - x^2) \right), \\
 X^d &= \frac{1}{2u} \left( 1 + u^2(L^2 + x^2) \right), \\
 x^2 &= -(x^0)^2 + \sum_i (x^i)^2.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

A coordenada temporal  $x^0 = t$  e espacial  $x^i$  esta no intervalo  $-\infty$  até  $\infty$ , e  $0 < u < \infty$ . A restrição sob o intervalo de  $u$  é necessária para manter um mapa de valor único das coordenadas hiperbólicas  $X^d$  ou  $X^i$ .

É simples mostrar que (B.5) é satisfeita por esta parametrização, e que a métrica induzida é

$$ds^2 = L^2 \left[ \frac{du^2}{u^2} + u^2 \left( -(dx^0)^2 + \sum_i (dx^i)^2 \right) \right]. \tag{B.8}$$

Aqui facilmente podemos ver que com uma troca  $u = e^y$ , temos a expressão conhecida para esta métrica em coordenadas de Poincaré. Agora se definimos  $z = \frac{1}{u}$ , reescrevemos o elemento de linha como

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[ dz^2 - (dx^0)^2 + \sum_i (dx^i)^2 \right]. \tag{B.9}$$

Esta métrica é de fato conformada para a região positiva  $z$  de um espaço-tempo de Minkowski  $d$ -dimensional com as coordenadas habituais  $(x^0, x^i, z)$ .

## INTEGRAIS QUE SE REDUZEM A HIPERGEOMÉTRICAS

Neste apêndice, será necessária a seguinte representação integral da função Beta de Euler incompleta:

$$B(x|a; b) = \int_0^x z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz, \quad (\text{C.1})$$

que se relaciona com a função hipergeométrica através da fórmula:

$$B(x|a; b) = \frac{1}{a} x^a F[a, 1-b; 1+a; x]. \quad (\text{C.2})$$

### A.

Considere a integral (anti-derivada)

$$\mathcal{I} = \int (x-a)^{-s-1}(b-x)^{s-1}x^{-1} dx. \quad (\text{C.3})$$

Onde  $b, a > 0$  são constantes. Integrandos deste tipo estão relacionados, em geral, com funções hipergeométricas de duas variáveis conhecidas como ‘Funções de Appell’ (cf. The Bateman Manuscript Project). É todavia possível resolver  $\mathcal{I}$  como uma combinação de hipergeométricas usuais.

Para tanto, façamos a substituição

$$\xi = \frac{(x-a)}{(b-a)x}; \quad x = \frac{a}{1-(b-a)\xi}. \quad (\text{C.4})$$

Temos

$$x - a = \frac{a(b-a)\xi}{1 - (b-a)\xi}; \quad b - x = \frac{(b-a)(1-b\xi)}{1 - (b-a)\xi}; \quad dx/x = \frac{(b-a)}{1 - (b-a)\xi} d\xi,$$

e com isso

$$\mathcal{I} = \frac{a^{-s-1}}{b-a} \int \{1 - (b-a)\xi\} \xi^{-s-1} (1-b\xi)^{s-1} d\xi \quad (\text{C.5})$$

Esta integral pode agora ser dividida em duas funções Beta Incompletas, e transformadas em seguida em funções Hipergeométricas:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{a^{-s-1}}{b-a} \left\{ b^s \int (b\xi)^{-s-1} (1-b\xi)^{s-1} d(b\xi) - b^{s-1}(b-a) \int (b\xi)^{-s} (1-b\xi)^{s-1} d(b\xi) \right\} \\ &= \frac{a^{-s-1} b^s}{b-a} \left\{ \mathbf{B}(b\xi | -s; s) - b^{-1}(b-a) \mathbf{B}(b\xi | 1-s; s) \right\} \\ &= -\frac{a^{-s-1}}{b-a} \xi^{-s} \left\{ \frac{1}{s} F[-s, 1-s; 1-s; b\xi] + \frac{(b-a)}{(1-s)} \xi F[1-s, 1-s; 2-s; b\xi] \right\}. \end{aligned}$$

Deve-se ressaltar que estamos ignorando as constantes de integração, uma vez que nos exemplos do texto principal elas podem ser absorvidas na constante de integração arbitrária da equação diferencial.

Retornando à variável original,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= -\frac{(b-a)^{s-1}}{a^{s+1}} (x-a)^{-s} x^s \left\{ \frac{1}{s} F\left[-s, 1-s; 1-s; \frac{b}{b-a}(x-a)/x\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1-s)} (x-a) x^{-1} F\left[1-s, 1-s; 2-s; \frac{b}{b-a}(x-a)/x\right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

**B.**

Considere a integral (anti-derivada)

$$\mathcal{J} = \int x^{-2} (b-x)^{s-1} (x+b)^{-s-1} dx \quad (\text{C.7})$$

Onde  $b > 0$  é uma constante. Faça

$$\xi = (x-b)/x; \quad x = b/(1-\xi). \quad (\text{C.8})$$

Temos

$$dx = b(1 - \xi)^{-2} d\xi; \quad b - x = -b(1 - \xi)^{-1} \xi; \quad x + b = b(1 - \xi)^{-1} (2 - \xi),$$

e portanto

$$\mathcal{J} = (-)^{s-1} b^{-3} \int \xi^{s-1} (1 - \xi)^2 (2 - \xi)^{-s-1} d\xi. \quad (\text{C.9})$$

Fica agora fácil separar o integrando em três fatores:

$$(-)^{s-1} b^3 \mathcal{J} = \int \xi^{s-1} (2 - \xi)^{-s-1} d\xi + \int \xi^{s+2} (2 - \xi)^{-s-1} d\xi - 2 \int \xi^s (2 - \xi)^{-s-1} d\xi,$$

cada um correspondendo a uma função Beta incompleta:

$$(-)^{s-1} b^3 \mathcal{J} = \frac{1}{2} \text{B}(\xi | s; -s) + 4 \text{B}(\xi | s + 3; -s) - 2 \text{B}(\xi | s + 1; -s),$$

ou, com a Eq.(C.2),

$$\begin{aligned} (-)^{s-1} b^3 \mathcal{J} &= \frac{1}{2s} \xi^s F(s, 1 + s; 1 + s; \xi) + \\ &+ \frac{4}{s+3} \xi^{s+3} F(s + 3, 1 + s; s + 4; \xi) - \frac{2}{s+1} \xi^{s+1} F(s + 1, 1 + s; 2 + s; \xi). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

## C.

No caso em que  $s = -n$ , com  $n \in \mathbf{N}$  e  $n > 1$ , as integrais  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{J}$  se tornam uma integral de uma razão de polinômios. Dividindo o integrando em uma soma de frações parciais, pode-se mostrar que temos

$$\mathcal{L} = \sum_k \alpha_{k,1} \text{Log} |x - z_k| + \sum_k \sum_{j=2}^{m_k} \frac{\alpha_{j,k}}{(j-1)} (x - z_k)^{1-j} \quad (\text{C.11})$$

onde  $z_k$  são os zeros de ordem  $m_k$  do denominador do integrando de  $\mathcal{L} = \mathcal{I}, \mathcal{J}$ ; aqui  $\alpha_{j,k}$  são os coeficientes da série de Laurent do integrando. Temos assim uma expressão alternativa — mais explícita — para as fórmulas (C.6) e (C.10) neste caso específico.

# Apêndice D

## DERIVAÇÃO DA LAGRANGIANA EFETIVA NOS MODELOS DE GAUSS-BONNET E DA GRAVIDADE QUASE-TOPOLÓGICA

### D.1 No modelo Lovelock quadrático

Consideramos o seguinte ansatz para a métrica, a partir do qual obtemos as equações de movimento:

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^2(y)e^{2(d-1)A(y)}dy^2 + e^{2A(y)}\bar{g}_{ij}dx^i dx^j, \\ \sigma &= \sigma(y), \sqrt{-g} = f e^{2(d-1)A} \sqrt{-\bar{g}}, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

A coordenada  $y = x^d$  é uma dimensão extra, o campo escalar  $\sigma = \sigma(y)$  é independente das coordenadas da hiper-superfície.  $\bar{g}_{ij}$  possui uma curvatura constante.

Aqui vai existir uma arbitrariedade com respeito à definição da coordenada  $y$  por causa da função  $f(y)$ , esta função aparecerá na lagrangiana efetiva e a variação dela gerará um vínculo. Ao final das contas, quando precisamos das equações do movimento do vínculo, vamos fixar esta função arbitrária  $f(y)$  como  $e^{-(d-1)A(y)}$ , a fim eliminar o grau de liberdade não físico.

Nossa ação mais geral possível que podemos escrever é:

$$S_{qtop} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ R + \frac{\lambda_0}{m^2} L_Q + \frac{\mu_0}{m^4} \mathcal{Z}'_d + \mu_1 W_1 + \mu_2 W_2 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right\} \quad (\text{D.2})$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_0, \mu_0, \mu_1$  e  $\mu_2$  são parâmetros adimensionais e  $m^2$  possui dimensão do inverso do comprimento ao quadrado.

O procedimento consiste em substituir o ansatz (D.1) na equação acima e impor condições sobre  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_0, \mu_0, \mu_1$  e  $\mu_2$ , para que a ação efetiva gere equações diferenciais de segunda ordem. Repare que na ação acima os parâmetros adimensionais  $\mu_1$  e  $\mu_2$  não contribui na ação, porque o tensor de Weyl para o nosso ansatz será zero.

Comecemos em calcular as conexões não nulas dos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{yy}^y = \frac{\dot{f}}{f} + (d-1)\dot{A}; \quad \Gamma_{ij}^y = -\frac{\dot{A}}{f^2}e^{-2(d-1)A}\bar{g}_{ij}; \quad \Gamma_{yj}^i = \dot{A}\delta_j^i; \quad \Gamma_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{jk}^i, \quad (\text{D.3})$$

Calculamos as componentes do tensor de Ricci, o cálculo de  $R_{yy}$  só depende de  $\Gamma_{yy}^y$  e  $\Gamma_{yj}^i$ , e não depende de  $\bar{g}_{jk}$  que serão os mesmos dos muros planos:

$$\begin{aligned} R_{yy} &= (d-1) \left\{ -\ddot{A} + \frac{\dot{f}}{f}\dot{A} + (d-2)\dot{A}^2 \right\} \\ R_{ij} &= -\frac{1}{f^2}e^{-2(d-2)A} \left\{ \ddot{A} - \frac{\dot{f}}{f}\dot{A} \right\} \bar{g}_{ij} + \bar{R}_{ij} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Para o cálculo do escalar de Ricci, vamos supor que  $\bar{R}_{ij}$  seja um espaço de curvatura constante. Primeiramente vamos usar as seguintes identidades, que são validas para espaços com curvatura constante:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijkl} &= K(\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl} - \bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}), \\ \bar{R}_{ij} &= (d-2)K\bar{g}_{ij}, \\ \bar{R} &= (d-1)(d-2)K, \end{aligned}$$

Com  $K = 0, \pm 1/L^2$ . Como se trata de um espaço  $(d-1)$ -dimensional, o escalar de Ricci é dado por

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{yy}R_{yy} + g^{ij}R_{ij} \\ &= (d-1) \left\{ -\ddot{A} + \frac{\dot{f}}{f}\dot{A} + (d-2)\dot{A}^2 \right\} - e^{-2A}\bar{g}^{ij} \left\{ \ddot{A} - \frac{\dot{f}}{f}\dot{A} \right\} \frac{1}{f^2}e^{-2(d-2)A}\bar{g}_{ij} + e^{-2A}\bar{R}_{(d-1)} \quad (\text{D.5}) \\ &= \frac{e^{-2(d-1)A}}{f} \left\{ (d-1)(d-2)\frac{\dot{A}^2}{f} - 2(d-1)\frac{d}{dy}\left(\frac{\dot{A}}{f}\right) \right\} + (d-1)(d-2)Ke^{-2A} \end{aligned}$$



A partir desses resultados podemos escrever os termos da ação como:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}R^2 &= \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \left\{ 4(d-1)^2\dot{A}^2 + 4(d-1)^2 \left( \frac{\dot{A}\dot{f}}{f} \right)^2 + (d-1)^2(d-2)^2\dot{A}^4 - 8(d-1)^2\frac{\dot{f}}{f}\dot{A}\ddot{A} \right. \\
&\quad \left. - 4(d-1)^2(d-2)\dot{A}^2\ddot{A} + 4(d-1)^2(d-2)\frac{\dot{f}}{f}\dot{A}^3 \right\} \sqrt{-\bar{g}} + (d-1)^2(d-2)^2K^2f e^{2(d-3)A} \sqrt{-\bar{g}} \\
&\quad + 2(d-1)^2(d-2)^2K\frac{\dot{A}^2}{f}e^{-2A}\sqrt{-\bar{g}} - 4(d-1)^2(d-2)Ke^{-2A}\frac{d}{dy}\left(\frac{\dot{A}}{f}\right)\sqrt{-\bar{g}} \quad (D.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= \sqrt{-g}(R_{yy}R^{yy} + R_{ij}R^{ij}) = \sqrt{-g}(R_{yy}R^{yy} + g^{ai}g^{bj}R_{ab}R_{ij}) \\
&= \sqrt{-g}R_{yy}R^{yy} + \sqrt{-g}\left\{ (R_{ij}R^{ij})^* + e^{-4A}\bar{R}_{ij}\bar{R}^{ij} + 2\left[\frac{\dot{f}\dot{A}}{f} - \ddot{A}\right]\frac{e^{-2dA}}{f}\bar{R} \right\} \\
&= \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \left\{ d(d-1)\dot{A}^2 + d(d-1)\left(\frac{\dot{A}\dot{f}}{f}\right)^2 - 2d(d-1)\dot{A}\ddot{A}\frac{f}{f} - 2(d-1)^2(d-2)\dot{A}\ddot{A}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(d-1)^2(d-2)\frac{\dot{A}^3\dot{f}}{f} + (d-1)^2(d-2)^2\dot{A}^4 \right\} \sqrt{-\bar{g}} + K^2(d-1)(d-2)^2f e^{2(d-3)A} \sqrt{-\bar{g}} \\
&\quad + 2K(d-1)(d-2)\left[\frac{\dot{f}\dot{A}}{f} - \ddot{A}\right]\frac{e^{-2A}}{f}\sqrt{-\bar{g}} \quad (D.7)
\end{aligned}$$

Falta ainda determinar os termos não nulos do tensor de Riemann. Para facilitar os cálculos, calculamos primeiramente o Riemann ao quadrado, para depois encontrar os termos não nulos, ou seja

$$\sqrt{-g}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = (4R_{ybyd}R^{ybyd} + R_{abcd}R^{abcd})\sqrt{-g}, \quad (D.8)$$

onde temos que,

$$\begin{aligned}
R_{ybyd}R^{ybyd} &= (d-1)\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^4} \left\{ \left( \frac{\dot{A}\dot{f}}{f} \right)^2 + 2(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} - 2\frac{\dot{f}}{f}\dot{A}\ddot{A} - 2(d-2)\dot{A}^2\ddot{A} + (d-2)^2\dot{A}^4 + \dot{A}^2 \right\} \\
R_{abcd}R^{abcd} &= 2(d-1)(d-2)\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^4}\dot{A}^4 + e^{-4A}\bar{R}_{abcd}\bar{R}^{abcd} - \frac{e^{-2dA}}{f^2}\dot{A}^2\bar{g}^{ac}\bar{g}^{bd}\bar{R}_{abcd} \\
&\quad + \frac{e^{-2dA}}{f^2}\dot{A}^2\bar{g}^{ad}\bar{g}^{bc}\bar{R}_{abcd} - \frac{e^{-2dA}}{f^2}\dot{A}^2\bar{g}_{ac}\bar{g}_{bd}\bar{R}^{abcd} + \frac{e^{-2dA}}{f^2}\dot{A}^2\bar{g}_{ad}\bar{g}_{bc}\bar{R}^{abcd}
\end{aligned}$$

Devemos substituir as equações acima na equação (D.8), mas, observemos que a primeira delas não tem contribuição de curvatura  $K$  e também que o primeiro termo na direita da segunda equação possui uma contribuição sem curvatura no tensor de Riemann ao quadrado. O termo  $\bar{R}_{abcd}$  se refere a um espaço com curvatura constante  $K$ , e sua expressão, em termos da métrica é dada em (D.5). Teremos,

portanto,

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \left\{ 4(d-1) \left( \frac{\dot{A}\dot{f}}{f} \right)^2 - 8(d-1)(d-2)\dot{A}^2\ddot{A} - 8(d-1)\frac{\dot{f}}{f}\dot{A}\ddot{A} + 4(d-1)\dot{A}^2 \right. \\
&+ 8(d-1)(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} + 2(d-1)(d-2)(2d-3)\dot{A}^4 \left. \right\} \sqrt{-g} \\
&+ 2K^2(d-1)(d-2)fe^{2(d-3)A} \sqrt{-g} - 4K(d-1)(d-2)\frac{e^{-2A}}{f}\dot{A}^2 \sqrt{-g} \quad (\text{D.9})
\end{aligned}$$

Substituindo as eqs. (D.6), (D.7) e (D.9) na (eq.3.74) obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_Q)^* &= (d-1)[4\alpha - \beta d + 4\gamma(d-1)] \frac{1}{f^3} e^{-2(d-1)A} \left( \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right)^2 - 2\frac{\dot{A}\ddot{A}\dot{f}}{f} + (\dot{A})^2 \right) \\
&+ (d-1)(d-2) \{ 2\alpha(2d-3) - \beta(d-1)(d-2) + \gamma(d-1)(d-2) \} \frac{1}{f^3} e^{-2(d-1)A} \dot{A}^4 \\
&+ 2(d-1)(d-2)[4\alpha - \beta(d-1) + 2\gamma(d-1)] \underbrace{\frac{1}{f^3} e^{-2(d-1)A} \left( \frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} - \dot{A}^2\ddot{A} \right)}_{-\frac{1}{3}\frac{d}{dy}\left(e^{-2(d-1)A}\frac{\dot{A}^3}{f^3}\right) - \frac{2}{3}(d-1)e^{-2(d-1)A}\frac{\dot{A}^4}{f^3}}.
\end{aligned}$$

Utilizamos o símbolo (\*) para destacar o fato da ausência de contribuições de termos associados a  $K$ . Isso é feito com o objetivo de simplificar expressões, pois o que nos interessa neste momento é eliminar termos de altas derivadas.

O primeiro termo do lado direito da eq. contribui com altas derivadas nas eqs. de movimento. Para que as eqs. da gravitação sejam de segunda ordem, então os coeficientes que estão na frente do parêntesis (...) no primeiro termo da direita deve ser cancelado e assim garantir uma equação de segunda ordem, ou seja

$$4\alpha - \beta d + 4\gamma d - 4\gamma = 0$$

Assim,

$$\gamma = \frac{\beta d - 4\alpha}{4(d-1)} \quad (\text{D.10})$$

Substituindo a expressão de (D.10) em  $(L_Q)^*$  obtemos,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_Q)^* &= -\frac{1}{12}(d-1)(d-2)(d-4)[\beta d - 2(2\alpha + \beta)]\dot{A}^4 \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \\
&+ \frac{1}{3}(d-1)(d-2)[\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \frac{d}{dy} \left( e^{-2(d-1)A} \frac{\dot{A}^3}{f^3} \right)
\end{aligned}$$

O termo completo  $(\mathcal{L}_Q)^K$  que é dependente da curvatura será escrito como:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_Q)^k &= \frac{1}{4}(d-1)(d-2)(d-4)K^2 [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] f e^{2(d-3)A} \\
&- (d-1)(d-2)K \frac{d}{dy} \left\{ e^{-2A} \frac{\dot{A}}{f} [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] \right\} \\
&+ \frac{1}{2}(d-1)(d-2)(d-4) [\beta d - 2(2\alpha + \beta)] K \frac{e^{-2A}}{f} \dot{A}^2
\end{aligned}$$

## D.2 No modelo GQT

Para repetir todo esse procedimento no caso da GQT observamos que os cálculos tornam-se bem mais complexos. Para obtermos resultados confiáveis utilizamos o *Mathematica 8* como ferramenta auxiliar. Fizemos todas as contrações tensoriais para dimensão arbitrária ( $d$ ), e o *Mathematica 8* foi utilizado para conferir nossos cálculos em dimensões específicas.

Listamos abaixo os termos importantes para a ação da GQT:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} R_{\sigma\rho}{}^{\mu\nu} &= 8(d-1) \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \left[ \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right)^3 + (d-2)^3 \dot{A}^6 - \ddot{A}^3 + 3(d-2)^2 \frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f} \right. \\
&+ 3(d-2) \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right)^2 \dot{A}^2 - 3 \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right)^2 \ddot{A} - 6(d-2) \frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} \ddot{A} + 3(d-2) \dot{A}^2 \ddot{A}^2 \\
&- \left. 3(d-2)^2 \dot{A}^4 \ddot{A} - \frac{1}{2}(d-2) \dot{A}^6 \right] + 4K^3 (d-1)(d-2) f e^{2(d-4)A} \quad (D.11) \\
&- 12K^2 (d-1)(d-2) \frac{e^{-4A}}{f} \dot{A}^2 + 12K (d-1)(d-2) \frac{e^{-2dA}}{f^3} \dot{A}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\bar{g}}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha}{}_{\sigma}R^{\beta\sigma} &= 2(d-1)\frac{e^{-4(d-1)}}{f^5}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^3 + (d-2)^2\frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f} + 3\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}^2 + 2(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\dot{A}^2\right. \\
&\quad \left. - 4(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}\ddot{A} - 3\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\ddot{A} - (d-2)^2\ddot{A}\dot{A}^4 - \ddot{A}^3 + 2(d-2)\dot{A}^2\dot{A}^2\right] \quad (\text{D.12}) \\
&\quad + 2(d-2)^2\frac{e^{-4(d-1)}}{f^5}\left[-\ddot{A}^3 + (d-2)^3\dot{A}^6 + 3(d-2)\dot{A}^2\ddot{A}^2 + 3(d-2)^2\frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f} + 3\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}^2\right. \\
&\quad \left. + 3(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\dot{A}^2 - 3\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\ddot{A} - 6(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}\ddot{A} + \left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^3 - 3(d-2)^2\ddot{A}\dot{A}^4\right] \\
&\quad + 2(d-1)(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f} - \ddot{A}\dot{A}^4\right)\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} + 2K^2(d-1)(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f} - \ddot{A}\right)\frac{e^{-4A}}{f} \\
&\quad + K(d-1)(d-2)\frac{e^{-2dA}}{f^3}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2 + (d-2)^2\dot{A}^4 + \ddot{A}^2 + 4(d-3)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} - 4(d-3)\ddot{A}\dot{A}^2\right. \\
&\quad \left. - 2\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A} + 2(d-2)\dot{A}^4\right] - 4K^2(d-1)(d-2)^2\frac{e^{-4A}}{f} + 2K^3(d-1)(d-2)^2fe^{2(d-4)A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\bar{g}}RR_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} &= 4(d-1)^2\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}\left[5(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\dot{A}^2 + 2\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^3 - 6\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\ddot{A} + 4(d-2)^2\frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f}\right. \\
&\quad \left. - 10(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}\ddot{A} + 6\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}^2 + (d-2)^3\dot{A}^6 - 4(d-2)^2\ddot{A}\dot{A}^4 + 5(d-2)\dot{A}^2\ddot{A}^2 - 2\ddot{A}^3\right] \quad (\text{D.13}) \\
&\quad + 2(d-1)^2(d-2)\frac{e^{-4(d-1)}}{f^5}\left[(d-2)\dot{A}^6 + 2\frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f} - 2\ddot{A}\dot{A}^4\right] \\
&\quad + 4K(d-1)^2(d-2)\frac{e^{-2dA}}{f^3}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2 + 2(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} - 2\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A} - 2(d-2)\dot{A}^2\ddot{A}\right. \\
&\quad \left. + (d-2)^2\dot{A}^4 + \ddot{A}^2\right] - 2K(d-1)^2(d-2)\frac{e^{-2dA}}{f^3}\left[(d-2)\dot{A}^4 + 4\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} - 4\ddot{A}\dot{A}^2\right] \\
&\quad + 2K^3(d-1)^2(d-2)^2fe^{2(d-4)A} + 2K^2(d-1)^2(d-2)\frac{e^{-4A}}{f}\left[-(d-2)\dot{A}^2 - 2\ddot{A} + 2\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{g}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\alpha}R^{\nu\beta} &= 2(d-1)^2\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^3+(d-2)^2\frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f}+3\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}^2+2(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\dot{A}^2-\ddot{A}^3\right. \\
&\quad \left.-4(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}\ddot{A}-3\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\ddot{A}-(d-2)^2\ddot{A}\dot{A}^4+2(d-2)\ddot{A}^2\dot{A}^2\right] \\
&\quad - (d-1)(d-2)\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\dot{A}^2-2\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}\ddot{A}+\dot{A}^2\ddot{A}^2\right]+K^3(d-1)(d-2)^3fe^{2(d-4)A} \\
&\quad + 2K(d-1)^2(d-2)\frac{e^{-2dA}}{f^3}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2+(d-2)^2\dot{A}^4+2(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}-2(d-2)\ddot{A}\dot{A}^2-2\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}\right] \\
&\quad + K(d-1)(d-2)\frac{e^{-2dA}}{f^3}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2-2\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}+\ddot{A}^2-2(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}+2(d-2)\ddot{A}\dot{A}^2\right] \\
&\quad + K^2(d-1)(d-2)^2\frac{e^{-4A}}{f}\left[2\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}-2\ddot{A}-(d-2)\dot{A}^2\right]
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{g}R_{\mu}{}^{\nu}R_{\nu}{}^{\alpha}R_{\alpha}{}^{\mu} &= (d-1)^3\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^3+(d-2)^3\dot{A}^6-\ddot{A}^3+3(d-2)^2\frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f}+3\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}^2-3\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\ddot{A}\right. \\
&\quad \left.+3(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\dot{A}^2-6(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}\ddot{A}+3(d-2)\dot{A}^2\ddot{A}^2-3(d-2)^2\ddot{A}\dot{A}^4\right] \\
&\quad + (d-1)\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^3-\ddot{A}^3-3\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\ddot{A}+3\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)\ddot{A}^2\right]+K^3(d-1)(d-2)^3fe^{2(d-4)A} \\
&\quad + 3K(d-1)(d-2)\frac{e^{-2dA}}{f^3}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2+\ddot{A}^2-2\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)\ddot{A}\right]+3K^2(d-1)(d-2)^2\frac{e^{-4A}}{f}\left[\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}-\ddot{A}\right]
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{g}RR_{\mu}{}^{\nu}R_{\nu}{}^{\mu} &= (d-1)^3\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}\left[5(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\dot{A}^2-6\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\ddot{A}+2\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^3+(d-2)^3\dot{A}^6-2\ddot{A}^3\right. \\
&\quad \left.-4(d-2)^2\ddot{A}\dot{A}^4+4(d-2)^2\frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f}+5(d-2)\dot{A}^2\ddot{A}^2+6\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)\ddot{A}^2-10(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}\ddot{A}\right] \\
&\quad + (d-1)^2\frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}\left[(d-2)\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\dot{A}^2-6\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\ddot{A}+2\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^3+(d-2)\dot{A}^2\ddot{A}^2-2\ddot{A}^3\right. \\
&\quad \left.+6\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)\ddot{A}^2-2(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}\ddot{A}\right]+K^2(d-1)^2(d-2)^2\frac{e^{-4A}}{f}\left[(d-2)\dot{A}^2-4\ddot{A}+4\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right] \\
&\quad + K(d-1)^3(d-2)\frac{e^{-2dA}}{f^3}\left[\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2+(d-2)^2\dot{A}^4+2(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}-2(d-2)\dot{A}^2\ddot{A}-2\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}\right] \\
&\quad + K(d-1)^2(d-2)\frac{e^{-2dA}}{f^3}\left[2(d-2)\frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f}-2(d-2)\ddot{A}\dot{A}^2-10\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\ddot{A}+5\ddot{A}^2+5\left(\frac{\dot{f}\dot{A}}{f}\right)^2\right] \\
&\quad + K^3(d-1)^2(d-2)^3fe^{2(d-4)A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{g}R^3 &= (d-1)^3 \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \left[ (d-2)^3 \dot{A}^6 - 24 \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right)^2 \ddot{A} + 8 \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right)^3 + 12(d-2) \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right)^2 \dot{A}^2 - 8\dot{A}^3 \ddot{A} \right. \\
&\quad \left. - 6(d-2)^2 \ddot{A} \dot{A}^4 + 6(d-2)^2 \frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f} + 24 \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right) \ddot{A}^2 + 12(d-2) \dot{A}^2 \ddot{A}^2 - 24(d-2) \frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} \ddot{A} \right] \\
&\quad + 3K(d-1)^3 (d-2) \frac{e^{-2dA}}{f^3} \left[ (d-2)^2 \dot{A}^4 + 4\ddot{A}^2 + 4 \left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right)^2 - 4(d-2) \dot{A}^2 \ddot{A} + 4(d-2) \frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} - 8 \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \ddot{A} \right] \\
&\quad + 3K^2(d-1)^3 (d-2)^2 \frac{e^{-4A}}{f} \left[ (d-2) \dot{A}^2 - 2\ddot{A} + 2 \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} \right] + K^3(d-1)^3 (d-2)^3 f e^{2(d-4)A}
\end{aligned}$$

Agrupando todos os termos, primeiro sem curvatura  $K$ , onde  $(\mathcal{Z}'_d)^*$  :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} R_{\sigma\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{(2d-3)(d-4)} \left[ -12(d^2 - 5d + 5) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha}{}_{\sigma} R^{\beta\sigma} + \frac{3}{2}(d^2 - 4d + 2) RR_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 12(d-2)(d-3) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} + 8(d-1)(d-3) R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\alpha} R_{\alpha}{}^{\mu} - 6(d-2)^2 RR_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\mu} + \frac{1}{2}(d^2 - 4d + 6) R^3 \right] \right\}^* \\
&= \frac{1}{2} \frac{(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(5d-6)(d^3 - 9d^2 + 26d - 22)}{(2d-3)(d-4)} \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \dot{A}^6 \\
&\quad + 3 \frac{(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d^3 - 9d^2 + 26d - 22)}{(2d-3)(d-4)} \underbrace{\left( \frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f} - \ddot{A} \dot{A}^4 \right) \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}}_{-\frac{f^5}{5} \frac{d}{dy} \left( \frac{\dot{A}^5}{f^5} \right)} \\
&\hspace{15em} \underbrace{-\frac{1}{5} \frac{d}{dy} \left( e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^5}{f^5} \right) - \frac{4}{5} (d-1) e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^6}{f^5}}_{\hspace{15em}}
\end{aligned} \tag{D.16}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Z}'_d)^* &= \frac{1}{10} \frac{(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d-6)(d^3 - 9d^2 + 26d - 22)}{(2d-3)(d-4)} \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \dot{A}^6 \\
&\quad - \frac{3}{5} \frac{(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d^3 - 9d^2 + 26d - 22)}{(2d-3)(d-4)} \frac{d}{dy} \left\{ e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^5}{f^5} \right\}
\end{aligned} \tag{D.17}$$

Definimos a quantidade

$$M_1 = \frac{(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d^3 - 9d^2 + 26d - 22)}{(2d-3)(d-4)}$$

Vemos que as altas derivadas desaparecem.

Adicionando agora as contribuições de termos com curvatura  $K$ , onde  $(\mathcal{Z}'_d)^K$  :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho} R_{\sigma\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{(2d-3)(d-4)} \left[ -12(d^2 - 5d + 5) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha}{}_{\sigma} R^{\beta\sigma} + \frac{3}{2}(d^2 - 4d + 2) RR_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \right. \right. \\
& + \left. \left. 12(d-2)(d-3) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} + 8(d-1)(d-3) R_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\alpha} R_{\alpha}{}^{\mu} - 6(d-2)^2 RR_{\mu}{}^{\nu} R_{\nu}{}^{\mu} + \frac{1}{2}(d^2 - 4d + 6) R^3 \right] \right\}^K \\
& = \frac{1}{2} M_1 (5d-6) \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \dot{A}^6 + 3M_1 \underbrace{\left( \frac{\dot{f}\dot{A}^5}{f} - \ddot{A}\dot{A}^4 \right) \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5}}_{-\frac{f^5}{5} \frac{d}{dy} \left( \frac{\dot{A}^5}{f^5} \right)} - \frac{3}{2} K (3d-2) M_1 \frac{e^{-2dA}}{f^3} \dot{A}^4 \\
& - 6KM_1 \underbrace{\left( \frac{\dot{f}\dot{A}^3}{f} - \ddot{A}\dot{A}^2 \right) \frac{e^{-2dA}}{f^3}}_{-\frac{f^3}{3} \frac{d}{dy} \left( \frac{\dot{A}^3}{f^3} \right)} + \frac{3}{2} K^2 M_1 (d+2) \frac{e^{-4A}}{f} \dot{A}^2 + 3K^2 M_1 \underbrace{\left( \frac{\dot{f}\dot{A}}{f} - \ddot{A} \right) \frac{e^{-4A}}{f}}_{-f \frac{d}{dy} \left( \frac{\dot{A}}{f} \right)} \\
& + \frac{1}{2} K^3 M_1 (d-6) f e^{2(d-4)A} \\
& \quad \underbrace{-\frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left( e^{-2dA} \frac{\dot{A}^3}{f^3} \right) - \frac{2}{3} d e^{-2dA} \frac{\dot{A}^4}{f^3}}_{-\frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left( e^{-2dA} \frac{\dot{A}^3}{f^3} \right) - \frac{2}{3} d e^{-2dA} \frac{\dot{A}^4}{f^3}} \quad \underbrace{-\frac{1}{5} \frac{d}{dy} \left( e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^5}{f^5} \right) - \frac{4}{5} (d-1) e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^6}{f^5}}_{-\frac{1}{5} \frac{d}{dy} \left( e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^5}{f^5} \right) - \frac{4}{5} (d-1) e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^6}{f^5}} \quad \text{(D.18)}
\end{aligned}$$

Igual que o caso anterior, este fica também sem altas derivadas

Somando a eq. (D.17) e (D.19), e por uma pequena simplificação matemática, obtemos a seguinte ação:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} \mathcal{Z}'_d & = \frac{1}{10} (d-6) M_1 \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \dot{A}^6 - \frac{1}{2} K (d-6) M_1 \frac{e^{-2dA}}{f^3} \dot{A}^4 + \frac{3}{2} K^2 (d-6) M_1 \frac{e^{-4A}}{f} \dot{A}^2 \quad \text{(D.19)} \\
& + \frac{1}{2} K^3 (d-6) M_1 f e^{2(d-4)A} + \frac{d}{dy} \left\{ -\frac{3}{5} M_1 e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^5}{f^5} + 2KM_1 e^{-2dA} \frac{\dot{A}^3}{f^3} - 3K^2 M_1 e^{-4A} \frac{\dot{A}}{f} \right\}
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na eq. (3.74), a ação fica

$$\begin{aligned}
S & = \int d^{d-1} x dy \mathcal{L}_{eff} - \\
& - 2(d-1) \int d^{d-1} x dy \frac{d}{dy} \left\{ \frac{\dot{A}}{f} - \frac{1}{6} \frac{\lambda_0}{m^2} (d-2) M e^{-2(d-1)A} \frac{\dot{A}^3}{f^3} + K \frac{\lambda_0}{2m^2} (d-2) M e^{-2A} \frac{\dot{A}}{f} \right. \\
& + \left. \frac{3L_1}{10} \frac{\mu_0}{m^4} e^{-4(d-1)A} \frac{\dot{A}^5}{f^5} - KL_1 \frac{\mu_0}{m^4} e^{-2dA} \frac{\dot{A}^3}{f^3} + \frac{3}{2} K^2 L_1 \frac{\mu_0}{m^4} e^{-4A} \frac{\dot{A}}{f} \right\} \quad \text{(D.20)}
\end{aligned}$$

$$\text{(D.21)}$$

$$\text{Onde : } L_1 = \frac{(d-2)(d-3)(d-4)(d^3 - 9d^2 + 26d - 22)}{(2d-3)(d-4)}$$

Aqui mantemos  $M = \beta d - 2(2\alpha + \beta)$ , para não perder a generalidade do caso Lovelock quadrático.

e a Lagrangiana efetiva  $\mathcal{L}_{eff}$  é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} = & (d-1)(d-2) \left( \frac{\dot{A}^2}{f} - \frac{1}{12}(d-4)M \frac{\lambda_0}{m^2} \frac{e^{-2(d-1)A}}{f^3} \dot{A}^4 \right) + (d-1)(d-2)K (f e^{2(d-2)A} \\
& + (d-4)M \frac{\lambda_0}{4m^2} \left[ K f e^{2(d-3)A} + 2 \frac{e^{-2A}}{f} \dot{A}^2 \right]) - \frac{\kappa^2}{2f} \dot{\sigma}^2 - \kappa^2 V(\sigma) f e^{2(d-1)A} \\
& + \frac{1}{10} M_1 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} \frac{e^{-4(d-1)A}}{f^5} \dot{A}^6 - \frac{1}{2} K M_1 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} \frac{e^{-2dA}}{f^3} \dot{A}^4 + \frac{3}{2} K^2 M_1 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} \frac{e^{-4A}}{f} \dot{A}^2 \\
& + \frac{1}{2} K^3 M_1 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} f e^{2(d-4)A}
\end{aligned} \tag{D.22}$$

As eqs. de movimento de  $A$  e  $f$  são alteradas em relação à eq. (3.80)

$$\begin{aligned}
& 2\ddot{A} \left( 1 - \frac{\lambda_0}{2m^2} (d-4)M \dot{A}^2 \right) + 2(d-1)\dot{A}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_0}{4m^2} (d-4)M \dot{A}^2 \right) \\
& + K \frac{\lambda_0}{m^2} (d-4)M (\ddot{A} + (d-2)\dot{A}^2) e^{-2A} - (d-3)(d-4)MK^2 \frac{\lambda_0}{2m^2} e^{-4A} - 2(d-2)K e^{-2A} + \frac{2\kappa^2 V(\sigma)}{d-2} \\
& + \frac{(d-6)\mu_0}{(d-2)m^4} M_1 \dot{A}^6 + 3 \frac{(d-6)\mu_0}{(d-1)(d-2)m^4} M_1 \ddot{A} \dot{A}^4 - 3K \frac{(d-6)\mu_0}{(d-1)m^4} M_1 e^{-2A} \dot{A}^4 \\
& - 6K \frac{(d-6)\mu_0}{(d-1)(d-2)m^4} M_1 e^{-2A} \ddot{A} \dot{A}^2 + 3K^2 \frac{(d-3)(d-6)\mu_0}{(d-1)m^4} M_1 e^{-4A} \dot{A}^2 + 3K^2 \frac{(d-6)\mu_0}{(d-1)(d-2)m^4} M_1 e^{-4A} \ddot{A} \\
& - K^3 \frac{(d-4)(d-6)\mu_0}{(d-1)(d-2)m^4} M_1 e^{-6A} = 0
\end{aligned} \tag{D.23}$$

A equação de vínculo é, neste caso:

$$\begin{aligned}
& - (d-1)(d-2)\dot{A}^2 \left( 1 - \frac{\lambda_0}{4m^2} (d-4)M \dot{A}^2 \right) + K(d-1)(d-2)e^{-2A} \left( 1 + \frac{\lambda_0}{4m^2} (d-4)M [K e^{-2A} - 2\dot{A}^2] \right) \\
& - \frac{1}{2}(d-6) \frac{\mu_0}{m^4} M_1 \dot{A}^6 + \frac{3}{2} K (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} M_1 e^{-2A} \dot{A}^4 - \frac{3}{2} K^2 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} M_1 e^{-4A} \dot{A}^2 + \frac{1}{2} K^3 (d-6) \frac{\mu_0}{m^4} M_1 e^{-6A} \\
& + \kappa^2 \frac{\dot{\sigma}^2}{2} - \kappa^2 V(\sigma).
\end{aligned} \tag{D.24}$$



Multiplicamos a eq.(D.23) por  $(d - 2)$  e a eq.(D.24) por 2 e somando-as, temos

$$\begin{aligned}
\kappa^2 \dot{\sigma}^2 &= -(d-2)\ddot{A} \left\{ 2 - \frac{\lambda_0}{m^2}(d-4)M\dot{A}^2 + K\frac{\lambda_0}{m^2}(d-4)Me^{-2A} + 3\frac{\mu_0}{m^4}M_1\frac{(d-6)}{(d-1)(d-2)}\dot{A}^4 \right. \\
&- \left. 6K\frac{\mu_0}{m^4}M_1\frac{(d-6)}{(d-1)(d-2)}e^{-2A}\dot{A}^2 + 3K^2\frac{\mu_0}{m^4}M_1\frac{(d-6)}{(d-1)(d-2)}e^{-4A} \right\} \\
&+ 2(d-1)(d-2)\dot{A}^2 \left\{ K\frac{\lambda_0}{2m^2}M\frac{(d-4)}{(d-1)}e^{-2A} - 3K\frac{\mu_0}{2m^4}M_1\frac{(d-6)}{(d-1)^2(d-2)}e^{-2A}\dot{A}^2 \right. \\
&+ \left. 3K^2\frac{\mu_0}{m^4}M_1\frac{(d-6)}{(d-1)^2(d-2)}e^{-4A} \right\} - 2K(d-2)e^{-2A} - \frac{\lambda_0}{m^2}K^2(d-2)(d-4)Me^{-4A} \\
&- 3K^3\frac{\mu_0}{m^4}M_1\frac{(d-6)}{(d-1)}e^{-6A}
\end{aligned} \quad (D.25)$$

Então torna-se claro que para uma métrica conformemente curva (ou plana)nossa ação (3.125) coincide com o feito por Myers-Robinson [23], na qual se identifica da seguinte maneira a dimensionalidade feita na ação para o acoplamento da teoria de Lovelock:

$$\frac{\lambda_0}{m^2} = \frac{4\lambda L^2}{M(d-4)}, \quad \frac{\mu_0}{m^4} = -\frac{2(2d-3)\mu L^4}{(d-3)(d-6)(d^3-9d^2+26d-22)} \quad (D.26)$$

### D.3 Superpotencial e as equações de primeira ordem

Agora vamos definir  $\dot{A}$  como uma função de  $\sigma$  e de  $\gamma$  que não é outra coisa que uma função que depende da curvatura  $K$ , principalmente, então:

$$\dot{A} = -\frac{\gamma}{(d-2)}W, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{(d-2)^2 K}{W^2}e^{-2A}}. \quad (D.27)$$

Derivando a eq. (3.56) obtemos,

$$\begin{aligned}
\ddot{A} &= -\frac{1}{(d-2)}\dot{\gamma}W - \frac{\gamma}{(d-2)}\dot{W} \\
\Rightarrow \dot{\gamma} &= \frac{1}{2} \left( -2\frac{(d-2)^2 K}{W^2}\dot{A}e^{-2A} - 2\frac{(d-2)^2 K}{W^3}\dot{\sigma}W'(\sigma) \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(d-2)^2}{W^2}e^{-2A}}} \\
&= -\frac{(d-2)^2 K}{\gamma W^2}e^{-2A} \left( \dot{A} + \frac{\dot{\sigma}W'}{W} \right)
\end{aligned}$$

Então  $\ddot{A}$  é:

$$\begin{aligned}
\ddot{A} &= \frac{(d-2)K}{\gamma W} e^{-2A} \left( \dot{A} + \frac{\dot{\sigma} W'}{W} \right) - \frac{\gamma}{(d-2)} \dot{W} \\
&= -\frac{(d-2)K}{\gamma W} e^{-2A} \frac{\gamma W}{(d-2)} + \frac{(d-2)K}{\gamma W^2} e^{-2A} \dot{\sigma} W' - \frac{1}{(d-2)} \gamma \dot{\sigma} W' \\
&= -K e^{-2A} + \frac{\dot{\sigma} W'}{(d-2)\gamma} \underbrace{\left\{ \frac{(d-2)^2 K}{W^2} e^{-2A} - \gamma^2 \right\}}_{-1} \\
\Rightarrow \ddot{A} &= -\frac{\dot{\sigma} W'}{(d-2)\gamma} - K e^{-2A} \tag{D.28}
\end{aligned}$$

Com esses resultados a eq.(3.83) tem que ser calculado

$$\begin{aligned}
\kappa^2 \dot{\sigma}^2 &= -(d-2) \left\{ -\frac{\dot{\sigma} W'}{(d-2)\gamma} - K e^{-2A} \right\} \left\{ 2 - \alpha_{\mathcal{L}}(d-4) M \dot{A}^2 + \alpha_{\mathcal{L}}(d-4) K M e^{-4A} \right\} \\
&+ \alpha_{\mathcal{L}}(d-2)(d-4) K M e^{-2A} \dot{A}^2 - \alpha_{\mathcal{L}}(d-2)(d-4) K^2 M e^{-4A} - 2K(d-2) e^{-2A} \\
&= \frac{\dot{\sigma} W'}{\gamma} \{ \dots \} + 2(d-2) K e^{-4A} - \alpha_{\mathcal{L}}(d-2)(d-4) K M e^{-2A} \dot{A}^2 + \alpha_{\mathcal{L}}(d-2)(d-4) K^2 M e^{-4A} \\
&+ \alpha_{\mathcal{L}}(d-2)(d-4) K M e^{-2A} \dot{A}^2 - \alpha_{\mathcal{L}}(d-2)(d-4) K^2 M e^{-4A} - 2K(d-2) e^{-2A}
\end{aligned}$$

Aqui todos os termos são *cancelados* menos os que estão fechados com chaves ( $\{ \dots \}$ ) mas dentro deles também vão ser cancelados dois termos,

$$\begin{aligned}
\kappa^2 \dot{\sigma}^2 &= \frac{\dot{\sigma} W'}{\gamma} \left\{ 2 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{(d-2)^2} M W^2 \gamma^2 + \alpha_{\mathcal{L}}(d-4) K M e^{-2A} \right\} \\
&= \frac{\dot{\sigma} W'}{\gamma} \left\{ 2 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{(d-2)^2} M \left[ W^2 + (d-2)^2 K e^{-2A} \right] + \alpha_{\mathcal{L}}(d-4) K M e^{-2A} \right\} \\
\dot{\sigma}^2 &= \frac{\dot{\sigma} W'}{\gamma} \left\{ 2 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{(d-2)^2} M W^2 \right\} \tag{D.29}
\end{aligned}$$

Esta última eq. se torna para,  $\dot{\sigma} \neq 0$

$$\kappa^2 \dot{\sigma} = \frac{W'}{\gamma} \left\{ 2 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{(d-2)^2} M W^2 \right\} \tag{D.30}$$

E o potencial é:

$$\kappa^2 V(W) = 2 \frac{W'^2}{\kappa^2 \gamma^2} \left( 1 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{(d-2)^2} M W^2 \right)^2 - \frac{(d-1)}{(d-2)} W^2 \left( 1 - \alpha_{\mathcal{L}} \frac{(d-4)}{2(d-2)^2} M W^2 \right) \tag{D.31}$$

## D.4 Obtenção da função de curvatura $\gamma(K, y)$

Demonstraremos a forma da função de curvatura,  $\gamma(K, y)$ , mediante a equação obtida em (3.83), na qual vamos encontrar uma relação que dependa principalmente da curvatura constante  $K$ , e de qualquer coordenada conhecida que tenha uma dependência na coordenada axial  $y$ , como as coordenadas da ação,  $\sigma(y)$  e  $A(y)$ , bem como ‘superpotencial’; e depois vamos usar a mesma definição de  $\dot{A}$  em função do ‘superpotencial’ que foi dita em (3.56). Partimos de

$$\dot{A} = -\frac{\gamma}{(d-2)}W(\sigma), \quad \gamma = \gamma(K)$$

Para G-B temos:

$$\begin{aligned} \kappa^2 \dot{\sigma}^2 &= -2(d-2) \left[ 1 - 2\lambda L^2 \dot{A}^2 + 2\lambda L^2 K e^{-2A} \right] + 4\lambda L^2 K (d-2) \dot{A}^2 e^{-2A} \\ &\quad - 4\lambda L^2 (d-2) K^2 e^{-4A} - 2K(d-2) e^{-2A} \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Teremos, portanto,

$$\ddot{A} = -\frac{\dot{\gamma}}{(d-2)}W - \frac{\gamma}{(d-2)}\dot{W}; \quad \dot{W} = \frac{d}{dy}W = \dot{\sigma}W' \quad (\text{D.33})$$

Substituindo em (D.32), podemos escrever

$$\begin{aligned} \kappa^2 \dot{\sigma}^2 &= 2(d-2) \frac{\dot{\gamma}W}{(d-2)} \left\{ 1 - 2\lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2} \right\} + 4\lambda L^2 \dot{\gamma}W \left\{ -\frac{\gamma^2}{(d-2)^2} + \frac{W^2}{(d-2)^2} + K e^{-2A} \right\} \\ &\quad - 4\lambda L^2 (d-2) K e^{-2A} \left\{ -\frac{\gamma^2}{(d-2)^2} + K e^{-2A} \right\} + 2(d-2) \gamma \dot{\sigma} \frac{W'}{(d-2)} \left\{ 1 - 2\lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2} \right\} \\ &\quad + 4\lambda L^2 (d-2) \frac{\gamma \dot{\sigma} W'}{(d-2)} \left\{ -\frac{\gamma^2}{(d-2)^2} + \frac{W^2}{(d-2)^2} + K e^{-2A} \right\} - 2K(d-2) e^{-2A} \end{aligned}$$

Lembrando que  $C_0 = 1 - 2\lambda L^2 \frac{W^2}{(d-2)^2}$ , a relação acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \kappa^2 \dot{\sigma}^2 &= 2\dot{\gamma}C_0 + 4\lambda L^2 \dot{\gamma}W \left\{ -\frac{\gamma^2}{(d-2)^2} + \frac{W^2}{(d-2)^2} + K e^{-2A} \right\} \\ &\quad - 4\lambda L^2 (d-2) K e^{-2A} \left\{ -\frac{\gamma^2}{(d-2)^2} + \frac{W^2}{(d-2)^2} + K e^{-2A} \right\} - 2K(d-2) e^{-2A} C_0 \\ &\quad + 2\gamma \dot{\sigma} W' C_0 + 4\lambda L^2 \gamma \dot{\sigma} W' \left\{ -\frac{\gamma^2}{(d-2)^2} + \frac{W^2}{(d-2)^2} + K e^{-2A} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Da definição dos vácuos topológicos temos que  $C_0 = 0$ , i.e.  $\sigma_{top} = \text{constante}$ ,  $A = \frac{y}{L_{top}}$  e  $W = W(\sigma_{top})$ . Então temos que do lado direito de (D.34) é zero, isso quer dizer que do lado esquerdo também deve

ser zero, para a primeira, quarta e quinta expressão da direita obviamente é zero, porém os outros termos que contem adicionado na direita deve de ser zero, ou seja os que estão em {...} também serão zero para este vácuo topológico.

$$\gamma^2 = 1 + \frac{K(d-2)^2}{W^2(\sigma_{top})} e^{-\frac{2\gamma}{L_{top}}}$$

Então, identificamos a relação para acima com os vácuos e podemos perceber para o caso geral que:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{K(d-2)^2}{W^2}} e^{-2A} \quad (\text{D.35})$$

O resultado acima é válido também para GQT, onde a única diferença está na expressão de  $C_0$  em termos de  $W$ .