UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

RONDINELI SCHULTHAIS LEITE

O ENSINO DE PARTE DA GEOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL: ANÁLISE DE DIFICULDADES E SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

VITÓRIA
2013

RONDINELI SCHULTHAIS LEITE

O ENSINO DE PARTE DA GEOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL: ANÁLISE DE DIFICULDADES E SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo – Mestrado profissional em Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho.

VITÓRIA

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

L533e

Leite, Rondineli Schulthais, 1980-
O ensino de parte da geometria do ensino fundamental : análise de dificuldades e sugestão de sequência didática / Rondineli Schulthais Leite. – 2013.
147 f. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Sequências (Matemática). 3. Ensino. 4. Aprendizagem. 5. GeoGebra (Software). I. Rosado Filho, Moacir, 1963-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"O Ensino de Parte da Geometria do Ensino Fundamental: Análise de Dificuldades e Sugestão de Sequência Didática"

Rondineli Schulthais Leite

Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 12/04/2013 por:

Moacir Rosado Filho - UFES

Florêncio Ferreira Guimarães Filho - UFES

Orlando dos Santos Pereira – UFRRJ/RJ

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e força na realização deste sonho.

A minha família, pelo incentivo nos momentos de dificuldades e compreensão nos momentos em que não lhes dei a atenção que mereciam.

Ao meu Orientador, Professor Doutor Moacir Rosado Filho, que sempre se mostrou disposto a contribuir e a apoiar tanto nas disciplinas que ministrou quanto na orientação deste trabalho.

Aos demais professores da UFES participantes do corpo docente do PROFMAT: Etereldes, Fábio, Florêncio e Valmecir que compartilharam seus variados conhecimentos nesses dois anos de trabalho conjunto.

Aos amigos de curso da UFES, que compartilharam momentos de alegrias e dificuldades nesta árdua, mas gratificante caminhada.

Aos colegas do blog nacional, que ajudaram a elucidar muitas dúvidas nos momentos de intensa dedicação.

Aos alunos e professores que se prontificaram a participar da pesquisa inserida neste trabalho.

A todos que fizeram acontecer o PROFMAT, possibilitando a realização deste sonho que parecia ser tão distante e utópico.

“Para isto existem as escolas: não para ensinar as respostas, mas para ensinar as perguntas. As respostas nos permitem andar sobre terra firme. Mas somente as perguntas nos permitem andar pelo mar desconhecido”

Rubem Alves.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

GRÁFICOS

QUADROS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo construir um aprendizado sistemático e eficaz de parte dos mais importantes conceitos geométricos do nono ano do ensino fundamental, utilizando o software GeoGebra como instrumento inovador na construção de uma sequência didática que contribua de forma significativa na compreensão dos conteúdos geométricos. São eles: semelhança de triângulos, teorema de Tales, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria. Deseja-se que estes conteúdos sejam trabalhados de forma harmoniosa, diferentemente da prática comum que organiza estes assuntos em tópicos como se não houvesse interligação entre seus conceitos. Realizamos pesquisas investigativas com alunos e professores no intuito de observar as principais dificuldades dos estudantes no aprendizado da geometria do nono ano e de verificar possíveis equívocos realizados no processo de ensino-aprendizagem desses conceitos geométricos. Em posse dos resultados da pesquisa, iniciamos a construção da sequência didática, buscando desobstruir os principais obstáculos observados na condução desses conteúdos, favorecendo o aprendizado organizado com orientação do professor, mas construído pelo próprio aluno. Para isso, produzimos cinco atividades de aspecto exclusivamente introdutório desses assuntos, organizadas em roteiros de trabalho de tal forma a conduzir os alunos ao aprendizado gradual e consistente por meio de manipulações realizadas no software GeoGebra. A avaliação desta sugestão de sequência didática se faz importante, merecendo estudos posteriores que a verifique como instrumento metodológico eficaz na condução do ensino desses conteúdos geométricos.

Palavras-Chave: Ensino-aprendizagem. GeoGebra. Geometria. Nono ano. Sequência didática.

ABSTRACT

This paper aims to build an effective and systematic learning of the most important geometric concepts of the ninth year of elementary school, using the software GeoGebra as an innovative tool in building a didactic sequence that contributes significantly to the understanding of the geometric content. They are: similarity of triangles, Tales theorem, metric relations in the rectangle-triangle, trigonometry and the Pythagorean theorem. It is hoped that these contents are worked harmoniously, unlike the common practice that organizes these issues on topics as if there was no connection between their concepts. We conducted an investigative research with students and teachers in order to observe the main problems students have in learning geometry in ninth grade, and check possible mistakes made in the teaching and learning process of these geometrical concepts. In possession of the search results, we started the didactic sequence construction, seeking to unclog the main obstacles observed in the leading of these contents, favoring organized learning with teacher's guidance, but constructed by the student. For this, we produced five activities in an introductory aspect, exclusively, of these issues, organized in labor routings so to lead students onto a gradual and consistent learning through manipulations performed in the software GeoGebra. The evaluation of this suggestion of didactic sequence becomes important and deserves further studies to verify how effective it is as a tool in the conducting of teaching these geometric contents.

Keywords: Teaching and learning. GeoGebra. Geometry. Ninth year. Didactic sequence.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A insuficiência de políticas educacionais, que fortaleceriam o estudo da matemática através de novos recursos metodológicos e que possibilitariam a formação adequada dos professores, inibe o desenvolvimento efetivo do ensino-aprendizagem dessa disciplina em nossas salas de aula. O professor de matemática precisa, por sua importância como agente indispensável na evolução tecnológica e social de um país, atuar de forma qualificada. É necessário que ele desempenhe suas atribuições adequadamente, favorecendo a disseminação do conhecimento matemático em toda a sociedade. Dessa forma, ele semeia melhorias na qualidade do ensino da matemática, por meio de uma exigência constante do aperfeiçoamento da prática educativa que, consequentemente, refletirá na melhoria do processo ensino-aprendizagem como um todo e para todos.

A matemática ainda é vista por considerável parte dos estudantes como algo obscuro e incompreensível. Assim, é imprescindível rompermos com essa representatividade. Para tal, há estudos acerca das novas metodologias aplicadas em sala, como é o caso da contextualização prática dos conteúdos, da utilização de recursos tecnológicos e do manuseio de material concreto, buscando identificar como esses instrumentos podem ser aplicados de forma útil no aprendizado.

Sabemos da necessidade da busca de novas metodologias e ferramentas no auxílio da aprendizagem, tendo em vista as dificuldades encontradas pelos alunos. Alguns materiais já são usados pelos professores, como vídeos, livros, calculadoras, softwares, que colaboram nesse processo. Motivação é a palavra chave para a aprendizagem, já que a matemática pode ser bem mais prazerosa com a aplicação de atividades diferenciadas e com a utilização de recursos associados ao cotidiano. Para os alunos com maiores dificuldades no aprendizado matemático, a inclusão de ferramentas, como recursos computacionais e material concreto, propicia uma situação favorável ao interesse pela matemática e, consequentemente, sua aprendizagem.

Um dos conteúdos com maiores possibilidades de abordagem diferenciada, devido ao seu caráter prático, já que faz parte do contexto visual do estudante, é o geométrico, mas que contraditoriamente é explorado de forma inadequada, sendo trabalhado com poucos métodos diferentes do quadro e caderno. Aqui nasce o objeto de nosso estudo, que estará diretamente relacionado ao ensino da geometria, mas com especial direcionamento a uma fração dos conteúdos destinados ao nono ano que, tradicionalmente, é a série da educação fundamental em que consta a maior parte dos principais conteúdos geométricos.

É nosso anseio visualizar de que forma ocorre o processo de ensino-aprendizagem da geometria de nono ano, construindo uma discussão sobre as carências de seu ensino, identificando fatores que possam influenciar a sua abordagem restrita ou inadequada. Almejamos assim, verificar os possíveis motivos que limitem professores de matemática a trabalharem este conteúdo com mais naturalidade em sala, analisando as deficiências que existem na condução desses conceitos, no intuito de identificar novas ações que contribuam para a correção de problemas.

Após a análise da situação do ensino da geometria do nono ano, iremos propor uma sequência didática que conduzirá a apresentação de alguns conceitos geométricos importantes e necessários para o conhecimento de alunos finalistas do ensino fundamental. A seguir, relataremos a construção de nosso trabalho distribuído em quatro capítulos.

No capítulo 1, construiremos nosso aporte teórico sobre o ensino da geometria. Abordaremos e justificaremos o nosso problema de estudo, que possui origem por meio da observação de nossa prática educacional diária como professor de matemática, tendo por finalidade favorecer a melhoria do processo ensino-aprendizagem da geometria do nono ano do ensino fundamental. Com esse intuito, faremos uma pré-análise, elaborando questionamentos a fim de propiciar a reflexão sobre o assunto que delinearemos, com objetivo de encontrar respostas que possibilitem redirecionarmos o ensino da geometria do nono ano, para que ocorra de maneira gradativa e articulada, oportunizando o real aprendizado.

No capítulo 2, detalharemos a metodologia de nosso estudo, que será conduzida inicialmente por uma pesquisa quantitativa com alunos e professores sobre suas percepções no processo de ensino-aprendizagem da geometria em geral e de uma parte específica do currículo geométrico destinado ao nono ano do ensino fundamental. A pesquisa contemplará: teorema de Tales, semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria. Paralelamente, exporemos comentários sobre entrevistas rápidas com alguns alunos e professores participantes da investigação, com intuito de observar detalhes específicos sobre seus conhecimentos em geometria. Em seguida, apresentaremos os motivos que nos levaram a utilizar o GeoGebra como instrumento metodológico capaz de contribuir com nossa proposta de trabalho, por meio de uma sequência didática envolvendo os conteúdos observados com o uso desse software.

A elaboração, a aplicação e a análise das pesquisas com professores e alunos serão expostas no capítulo 3. Por intermédio de um estudo com alunos realizaremos observações sobre as condições atuais do ensino da geometria em uma região escolar. Analisaremos como ele ocorre na prática real, verificando se os conteúdos destinados ao fim do ensino fundamental estão realmente sendo ministrados e, se ministrados, de que forma sua condução ocorre. Concomitantemente ao estudo com alunos, apresentaremos os dados e a análise da pesquisa feita com professores de matemática, na qual investigaremos a formação e o método de condução do ensino-aprendizagem da geometria, utilizado por eles, no nono ano do ensino fundamental.

A proposta de sequência didática construída será exposta no capítulo 4, como sugestão de um trabalho que apresenta parte dos conteúdos geométricos de nono ano de forma gradual e interligada, buscando favorecer um estudo dinâmico, em que o aluno se torna agente da construção de seu próprio conhecimento, propiciando um aprendizado sistemático que contempla os conteúdos abordados de forma interativa através do software GeoGebra.

Depois de expostos os procedimentos utilizados em nossa pesquisa, construiremos a conclusão de nossos estudos por intermédio da avaliação sobre a sequência didática apresentada e dos resultados das pesquisas feitas com os sujeitos diretos do estudo, alunos e professores.

CAPÍTULO 1
ORIGEM E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Pensar no aprendizado matemático nas salas de aulas do Brasil é pensar nas diversas limitações que professores enfrentam na tentativa em estimular alunos a romperem dificuldades e a desenvolverem habilidades, mesmo quando o ambiente escolar é rodeado por violência, drogas e famílias problemáticas. Para Nóvoa (1997, p. 27):

> As situações conflitantes que os professores são obrigados a enfrentar (e resolver) apresentam características únicas, exigindo, portanto características únicas: o profissional competente possui capacidades de auto-desenvolvimento reflexivo [...] A lógica da racionalidade técnica opõe-se sempre ao desenvolvimento de uma práxis reflexiva.

Dessa forma, buscar práticas alternativas para a solução dessas situações desafiadoras amadurece, nos profissionais da educação, a necessidade do desenvolvimento de estudos que contribuam significativamente como instrumento eficaz no processo de ensino-aprendizagem, instigando o interesse dos alunos através de novas formas de condução do conteúdo matemático.

Uma prática conveniente é utilizar os saberes sociais dos estudantes nas situações de aprendizado em sala de aula, aproveitando seus conhecimentos prévios para construir novos aprendizados. Convergir conceitos teóricos com o convívio dos estudantes talvez seja um importante caminho na busca de melhores resultados. Quando o aluno visualiza em sua vida social o que estuda, nasce naturalmente a curiosidade em compreender esses fatos que podem e devem ser esclarecidos de forma contextualizada em sala de aula, relacionando-os com as demandas existentes na sociedade atual, como cita os PCN’s (2000, p.78):

> O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca por isso áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas.

Agregado às suas funções de disseminar conhecimento, o ambiente escolar atual deve se apresentar como uma representação do ambiente social, reduzindo a distância entre as necessidades culturais e o aprendizado teórico dos conteúdos, propiciando maior interesse do aluno por esta relação entre teoria e prática. Uma interessante forma de condução desta relação no ensino da matemática é a utilização dos recursos tecnológicos, que a cada dia se tornam mais acessíveis a todas as classes sociais e que podem propiciar uma aprendizagem diferenciada. Segundo os PCN’s (1999, p.186) é necessário:

> Reconhecer o papel da Informática na organização da vida sócio-cultural e na compreensão da realidade, relacionando o manuseio do computador a casos reais, ligados ao cotidiano do estudante, seja no mundo do trabalho, no mundo da educação ou na vida privada [...], bem como reconhecer a Informática como ferramenta para novas estratégias de aprendizagem, capaz de contribuir de forma significativa para o processo de construção do conhecimento, nas diversas áreas.

Desse modo, utilizar ferramentas com recursos computacionais, que já estão incorporados à realidade diária dos estudantes possibilita um elo diferenciado com o aluno de hoje, que já nasce observando, praticando e aprendendo as novas tecnologias em seu dia a dia.

> [...] já que a informática encontra-se presente na nossa vida cotidiana e incluí-la como componente curricular significa preparar o estudante para o mundo tecnológico e científico, aproximando a escola do mundo real e contextualizado (BRASIL, 1999, p.186).

Estamos, assim, em um período de transição, pois os professores atuais são frutos de uma educação escolar descontextualizada e não tecnológica, que precisam transformar a maneira de como aprenderam matemática em uma renovada condução do ensino-aprendizagem desta disciplina. Dessa forma, o professor precisa renovar suas práticas, fazendo uso das tecnologias em suas aulas, objetivando melhores resultados através de sua adaptação ao convívio social tecnológico do aluno, que está, na maioria das vezes, mais familiarizado que o próprio docente.

O ensino da matemática vem sendo universalizado nas últimas décadas. No entanto, é importante lembrar que são poucos os alunos que se tornarão graduandos em cursos de exatas ou áreas afins. Assim, é imprescindível ofertar estes conhecimentos de forma a agregar valor à realidade do aluno, utilizando de forma consistente as ferramentas disponíveis, como material concreto e recursos informatizados, para que possamos atingir a todos, tanto aos amantes da matemática, quanto aos que a ela têm aversão. Dessa maneira, podemos favorecer a evolução do aprendizado matemático para todos os estudantes, mesmo de formas distintas, respeitando assim as individualidades de cada um dos envolvidos.

No caso da geometria, em particular, esta ação pode ser concebida de forma mais natural, já que está presente na realidade de qualquer sujeito, em qualquer lugar do mundo, pois ela faz parte da paisagem que rodeia qualquer de nossos alunos. Porém, de certa forma, parece não ser vista por eles, como aponta Filho (2002, p.16):

> A linguagem geométrica está de tal modo inserida no cotidiano, que a consciência desse fato não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato a fim de mostrar que a Geometria faz parte da vida, pois vivemos num mundo de formas e imagens.

Assim, é necessário possibilitar aos alunos enxergar de forma diferente o ambiente geométrico em que convivem, buscando um novo olhar crítico que o estudo da geometria oferece, criando sentido onde nada se vê. Mas, como facilitar o aprendizado de conceitos geométricos? De quais ferramentas podemos dispor para melhor viabilizar o ensino da geometria?

A priori, é preciso que o professor seja um elo consistente entre o conhecimento e o aluno. Isso possibilita a existência da relação prático-teórica e media a construção do saber através de passos didáticos coerentes que levam o estudante a trilhar um aprendizado gradual e constante, sem interrupções bruscas do conteúdo e entrelaçando os assuntos estudados para que o aluno possa associar os conceitos de forma adequada, pois:

> Tornar o saber matemático acumulado um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. (Brasil, 1998, p.36)

Contudo, para que o professor construa essa condução de estudos de forma satisfatória, é necessária uma boa formação profissional. Segundo Freire (1996, p.77), “Toda prática educativa demanda a existência de sujeitos, um, que ensinando, aprende, outro, que aprendendo ensina”. Isso significa que a educação é determinada pela relação entre professor e aluno. Qualquer ruptura dessa relação, que é mediada pelo professor, potencializa o fracasso do aprendizado. Dessa forma, o papel do professor é estrutural, já que sua possível atuação, inadequada quanto à condução dos conteúdos, gera desconforto e insegurança das partes envolvidas quanto à construção do saber matemático. Atrelado a essas observações, um fator importante na análise de nosso estudo é a percepção de que parte dos professores de matemática pouco trabalha com a geometria em sala de aula, como observa os PCN' s:

> No entanto, **a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática** e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (Brasil, 1998, p.122, grifo nosso).

Atualmente, vários trabalhos permeiam o ensino da geometria, talvez devido ao histórico de renegação deste ramo da matemática durante muitos anos na educação brasileira. Este fato é ratificado por livros didáticos que destinavam os estudos da geometria apenas ao fim das séries e pelos muitos profissionais que insistiam em não trabalhá-la por “medo” devido à formação inadequada ou por conveniência em repetir a mesma sequência de ensino durante anos, sem a preocupação em renovar suas práticas, como aponta Lorenzato (1995, p.03):

> Considerando que o professor que não conhece geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la.

Estas percepções são confirmadas em nossas observações diárias, ao ministrarmos esta disciplina. Vários alunos iniciam a formação de ensino médio sem ter efetuado o cálculo de uma simples área retangular e desconhecendo as principais figuras geométricas. Poucos afirmam ter estudado conteúdos como: relações métricas no triângulo e na circunferência, semelhança de triângulos, trigonometria, teorema de Tales e teorema Pitágoras. Muitos estudantes desconhecem estes assuntos, simplesmente pelo fato de terem sido abandonados por seus professores durante o ensino fundamental. Esta postura certamente é devastadora, pois o precário estudo da geometria desestimula a percepção do mundo geométrico social e impede o avanço de conhecimentos posteriores deste ramo da matemática.

> Aprender significa interiorizar ações e mudar comportamentos por meio de participação ativa dos educandos no processo de ensino-aprendizagem. Um estudo significativo, por exemplo, a respeito da Geometria Espacial, deve partir dos conhecimentos prévios, trazidos pelos alunos, nos anos anteriores, em disciplinas diferentes da Matemática. **No entanto, nem sempre a postura pedagógica dos professores é condizente com esta exigência**, especialmente porque a constatação de que os educandos têm muitas dificuldades, especialmente em relação à visualização da terceira dimensão das formas geométricas espaciais se transforma em certeza e nem sempre é trabalhada como deveria ser. (VIDALETTI, 2009, p.13, grifo nosso)

A situação relatada por Vidaletti (2009), que evidencia o estudo precário dos conceitos geométricos, origina-se em boa parte do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que dificultou o desenvolvimento do estudo da geometria na educação Brasileira, como cita Meneses (2007, p.29):

> [...] Algumas reformas, principalmente a reforma advinda do Movimento da Matemática Moderna, fizeram com que este estudo fosse posto em segundo plano, gerando um grupo de professores e consequentemente de alunos que apresentam pouco conhecimento e enormes dificuldades em abordar questões que envolvam conhecimentos geométricos.

Segundo Pavanello (1993), O MMM concentrou o estudo da matemática na teoria de conjuntos, articulando o ensino da geometria de forma simbólica, o que dificultou a utilização de questões de ordem mais prática. Para a autora citada, o MMM agravou um quadro que já era problemático devido às dificuldades já existentes em trabalhar a geometria com abordagem teórica e axiomática. Segundo Grando (2009), “[...] o MMM de certa forma priorizava a álgebra e o formalismo pela linguagem, em detrimento das experiências, das manipulações, das investigações e das produções em geometria“ (p.201). Para ela, o MMM foi um dos causadores do abandono do ensino de geometria, já que a geometria “desaparecia” dando lugar à álgebra.

Outro fator que influenciou na depreciação do ensino da geometria nas últimas décadas está relacionado à promulgação da Lei 5692/71, publicada em 11 de agosto de 1971. Pavanello (1993) comenta sobre essa lei:

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre programas das diferentes disciplinas **possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação.** Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula, talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão. (p.7, grifo nosso)

Este contexto estimulou os professores a abandonar o ensino da geometria, influenciados ainda por livros didáticos que tratavam os conceitos geométricos de forma abstrata e apenas nos capítulos finais.

> Esse abandono, percebido principalmente durante os anos de 1960 a 1990, também se refletiu nos cursos de graduação de professores e nos cursos de magistério, pois esses cursos não tinham preocupação e nem um currículo voltado ao ensino de geometria, fato esse que foi responsável pela geração de inúmeros professores órfãos dessa formação e, consequentemente, sem a consciência da importância da aprendizagem desse conteúdo (MENESES, 2007, p.3).

O tratamento dado à geometria nas últimas décadas criou uma lacuna que ainda não foi reparada. Os livros didáticos atuais mesclam o ensino da geometria do início ao fim das séries, mas ainda existe a postura, por parte de alguns profissionais, de sempre deixar de lado seus conteúdos. O estudo feito por Gazire (2000) constatou que vários professores de matemática evitam o trabalho com a geometria, admitindo que "o desconhecimento da geometria é uma das causas do abandono dessa matéria" (p.166). A autora verificou que muitos desses profissionais têm o hábito de adiar "o mais possível o início das aulas desse conteúdo" (p.168), impedindo a disseminação do conhecimento geométrico nas escolas.

Nacarato (2002) destaca que: "a não compreensão, por partes dos professores, da importância da formação de conceitos geométricos para o desenvolvimento do pensamento matemático" (p. 85) favorece a resistência desses profissionais em relação ao trabalho com geometria. Segundo o autor, a deficiência da formação geométrica é o principal motivo para o surgimento de profissionais despreparados quanto ao desenvolvimento adequado desse conteúdo em sala de aula.

> “A ausência da geometria na escolarização formal vem formando gerações de profissionais, principalmente professores, que desconhecem os fundamentos desse campo da matemática, pouco discutido no âmbito da prática pedagógica.” (NACARATO, 2002, p.85)

A observação de que o ensino da geometria é insuficiente na educação básica favorece a reprodução das dificuldades. Mais recentemente, Crescenti (2005) cita em seu estudo a formação escolar básica deficitária a qual professores foram submetidos.

> “Quanto à aprendizagem da geometria, a maioria dos professores iniciantes tinham clareza de não a terem aprendido bem [...] a precariedade do conhecimento geométrico que detinham e o pouco que aprenderam de geometria durante todo o processo de escolarização, tanto nos aspectos teóricos como metodológicos.”(Crescenti, 2005, p.218)

Dessa maneira, caso o professor não tenha conhecimento geométrico específico na preparação para docência, será um profissional com limitações graves relacionadas ao ensino da geometria, já que sua formação básica é geralmente precária. Assim, é necessário que o professor de matemática tenha estudado, em sua formação profissional, conteúdos geométricos que corrijam as deficiências trazidas do ensino básico, para que o mesmo seja um agente de transformação da realidade escolar, preparado para promover a mudança da condição atual do ensino da geometria.

Analisando essas informações, percebemos que o ensino-aprendizado da geometria precisa ser reorganizado, pois os professores atuais são em sua maioria frutos daquela educação desprovida da percepção geométrica. Por esses motivos, criou-se o anseio em cooperar com a correção desse problema, que há décadas dificulta o aprendizado geométrico em salas de aula de todo o Brasil. O tema aqui proposto surgiu a partir dessas observações, ou seja, da dificuldade que parte dos professores tem em romper com o tradicionalismo do ensino da geometria e do desafio que é aplicar novas técnicas didáticas para o ensino da matemática e, em especial, dos conceitos geométricos. Para isto, focaremos nossos esforços no trabalho com relevantes conteúdos geométricos do ensino fundamental, que estão organizados na grade curricular do nono ano.

Queremos, a partir deste estudo, encontrar respostas para questionamentos como: Por que ainda se evita trabalhar a geometria? De que forma os professores conduzem o ensino da geometria no nono ano do ensino fundamental? Como podemos contribuir para que o aprendizado de parte da geometria do nono ano ocorra de forma construtiva e organizada? Estes questionamentos finalizam o direcionamento da temática central de realização deste estudo. Assim, o nosso trabalho estará alicerçado sobre dois pilares:

I- Investigação com alunos e professores acerca dos motivos que dificultam a construção do conhecimento geométrico nas turmas de nono ano do ensino fundamental.

II- Construção de uma contribuição em forma de sequência didática, com uso do GeoGebra, que possibilite um aprendizado qualificado e organizado de parte do conteúdo geométrico do nono ano.

Dessa forma, iremos investigar os entraves do ensino-aprendizagem de parte dos conteúdos geométricos de nono ano, identificando suas deficiências. A partir das informações obtidas com a investigação, desejamos utilizá-las como orientação na elaboração de uma sequência didática que conduza os conteúdos abordados de maneira a evitar os problemas observados. Queremos possibilitar um aprendizado sistemático e organizado que coloque o aluno como agente de construção de seu conhecimento, utilizando para isso o software GeoGebra, que se apresenta como ferramenta tecnológica capaz de contribuir como instrumento metodológico na condução deste processo.

CAPÍTULO 2
ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

2.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Buscamos, neste trabalho, encontrar um caminho para que o aprendizado de conceitos geométricos ocorra de forma a produzir melhores resultados. Para isso, iremos realizar uma análise sobre parte do conteúdo de geometria destinado ao fim do ensino fundamental, limitando-nos ao estudo específico desta fração do conteúdo. A princípio, queremos observar os problemas e as dificuldades que ocorrem na evolução deste aprendizado, justificando a necessidade de reconstruirmos o ensino da geometria de nono ano através de novos procedimentos que possibilitem uma nova forma de condução destes conteúdos.

Primeiramente, desejamos Identificar os conhecimentos geométricos apropriados por alunos iniciantes do ensino médio. Queremos observar, em um grupo de estudantes, os conhecimentos que estes alunos possuem, comparando com os pré-requisitos geométricos mínimos que deveriam conter para prosseguir seus estudos ou simplesmente para utilizarem na prática real no convívio social.

Concomitantemente, iremos realizar uma investigação com um grupo de professores. Verificaremos se esses profissionais possuem conhecimentos específicos em geometria e analisaremos a forma de condução dos assuntos geométricos de nono ano. Os conteúdos analisados serão: teorema de Tales, semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria. Desejamos perceber se os métodos de ensino aplicado pelos professores beneficiam um aprendizado sistemático com entrelaçamentos entre os assuntos ou se é simplesmente organizado em tópicos com apresentação de fórmulas a serem aplicadas em atividades diretas.

Por fim, após identificarmos os problemas na construção dos conhecimentos desses conteúdos e apontar possíveis soluções, iremos apresentar uma contribuição em forma de sequência didática como sugestão de trabalho. A sequência sugerida será norteada para uma evolução contínua dos conhecimentos estudados, agregando os conceitos geométricos de forma estruturada e dinâmica. Procuraremos transformar o aluno em agente de investigação do conhecimento, colocando o professor como mediador e não simplesmente como transmissor de afirmações incontestáveis.

> Podemos tentar abandonar o paradigma do exercício para entrar em um ambiente de aprendizagem diferente, que chamamos cenários para investigação. Eles são, por natureza, abertos. Cenários podem substituir exercícios. Os alunos podem formular questões e planejar linhas de investigação de forma diversificada. Eles podem participar do processo de investigação. Num cenário para investigação, a fala "O que acontece se...? deixa de pertencer apenas ao professor e passa a poder ser dita pelo aluno também. E outra fala do professor, "por que é dessa forma ...?", pode desencadear a fala do aluno " Sim, porque é dessa forma...?"(ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 55)

Assim, queremos propiciar um aprendizado construído pelo próprio estudante por meio de suas percepções, através de experimentações práticas, manipuláveis com o auxílio do software GeoGebra, que utilizaremos como ferramenta metodológica na produção de experimentos que agucem o aprendizado dos alunos.

2.2 NATUREZA DA PESQUISA INVESTIGATIVA

Ao passo que avançamos no desenvolvimento do nosso estudo, surgiam questionamentos e com eles o anseio em respondê-los. Assim, buscamos fortalecer nosso trabalho através da incorporação de questionários investigativos, no intuito de retratar a visão do professor e do aluno em relação ao ensino da geometria ao fim do ensino fundamental, buscando verificar os fatores que impedem sua real efetivação.

Para isso, optamos por aderir a uma abordagem quantitativa neste presente estudo, não desmerecendo a qualitativa, tendo em vista que nosso objetivo aqui é analisar de forma direta o comportamento dos envolvidos no processo de aprendizado no que se refere ao ensino da geometria. As pesquisas quantitativas caracterizam-se pela interrogação direta ao público alvo cujo comportamento se deseja conhecer. Através de uma bateria de questionamentos, solicitaremos informações de um grupo de alunos e professores acerca do problema estudado para, em seguida, obtermos conclusões. A partir daí, buscaremos identificar respostas aos questionamentos iniciais, confrontando-os com as hipóteses de nosso estudo.

> A pesquisa quantitativa normalmente se mostra apropriada quando existe a possibilidade de medidas quantificáveis de variáveis e inferências a partir de amostras de uma população. Esse tipo de pesquisa usa medidas numéricas para testar constructos científicos e hipóteses, ou busca padrões numéricos relacionados a conceitos cotidianos. (Dias, 1999, p. 01)

Considerando as vantagens e as limitações na adesão a este tipo de pesquisa, podemos dizer que ela é adequada para nossos estudos sobre opiniões e atitudes espontâneas dos entrevistados. Entretanto, seria inapropriada para o aprofundamento dos aspectos psicológicos e psico-sociais mais complexos.

Nesse trabalho de pesquisa quantitativa, o que fizemos foi, a partir de ideias iniciais, elaborar questionamentos que impediriam qualquer influência de nossas concepções sobre os resultados. Definimos, então, a necessidade de colocar como alvo de pesquisa informações diretas dos sujeitos envolvidos: alunos e professores em seus ambientes de relacionamento, isto é, a escola.

Em nosso processo investigatório realizamos duas pesquisas de diagnóstico do problema. A primeira, com alunos iniciantes do ensino médio, buscou perceber seus conhecimentos mínimos sobre a geometria de ensino fundamental e suas percepções sobre os conhecimentos geométricos anteriormente estudados. A segunda, aplicada a um grupo de professores de matemática, questionou a respeito da formação acadêmica e do processo de condução, por eles realizado, dos conhecimentos de geometria destinados ao nono ano. Utilizamos uma amostragem de uma região escolar específica, mas que representa a realidade de inúmeras outras escolas, devido à constatação, em nosso referencial teórico, quanto às deficiências históricas relacionadas ao ensino-aprendizagem da geometria. Nosso objetivo é mensurar e permitir o teste de nossas hipóteses, já que os resultados são concretos e menos passíveis de erros de interpretação, como ocorrem na abordagem qualitativa. “A investigação quantitativa atua em níveis de realidade e tem como objetivo trazer à luz dados, indicadores e tendências observáveis”. (Minayo & Sanches, 1993).

Após a análise das informações coletadas com alunos e professores, possibilitou-se o desenvolvimento de um trabalho mais sólido e consistente com a realidade escolar. À medida que ajustávamos as informações obtidas na coleta de dados com os nossos objetivos de estudo, confirmávamos as dificuldades na construção do saber geométrico em nossas escolas e a necessidade de se incorporar novas ferramentas e atitudes para sanar tais deficiências.

Em posse dos resultados das pesquisas com professores e alunos, construímos uma sequência didática abordando os conteúdos alvos de nosso estudo. Nosso intuito é reparar os principais problemas que dificultam o aprendizado real desses conceitos geométricos, utilizando o software GeoGebra como recurso metodológico inovador, por meio da produção de atividades diferenciadas e organizadas, capazes de contribuir significativamente com o ensino da geometria de nono ano.

2.3 ESCOLHA DO SOFTWARE GEOGEBRA

A escolha do software GeoGebra como método de aprimoramento das aulas de geometria iniciou-se a partir da disciplina Recursos Computacionais no Ensino de Matemática, do PROFMAT, que ofertou uma série de manejos na condução do aprendizado matemático através de ferramentas tecnológicas como calculadora e softwares computacionais. Paques et al.(2002) cita algumas razões para a utilização de softwares nas aulas de matemática:

> – libertar o ensino e a aprendizagem da Matemática do peso das aulas exclusivamente expositivas;
> – estimular diversas formas de raciocínio;
> – diversificar estratégias de resolução de problemas;
> – estimular a atividade matemática de investigação;
> – permitir que o aluno seja mais autônomo;
> – criticar os resultados que a máquina fornece e de avaliar a sua razoabilidade;
> – trabalhar com dados reais. (p.4)

Ao estudarmos o software GeoGebra e sua gama de possibilidades, despertou-nos o desejo em agregar nosso anseio em contribuir com a melhoria do ensino da geometria a esta ferramenta computacional, que se apresentou como bom recurso a ser explorado para construirmos de forma diferente e adequada o ensino de alguns conceitos geométricos importantes e necessários para o aprendizado de nossos alunos.

Assim, pensamos na possibilidade de utilizarmos o GeoGebra como instrumento diferenciado capaz de estimular a aprendizagem em geometria por meio de experimentações práticas, de forma a conceber o conhecimento através de uma construção realizada pelo próprio estudante. Desse modo, o professor passa a ser um elo de entrosamento entre o conhecimento e o aluno, substituindo a forma tradicional de transmissão dos conteúdos sem a participação direta do estudante, na qual o mesmo é um simples espectador. Conforme afirma OLIVEIRA G. P.(2007, p.103), "a figura do aluno é outra. Surge a possibilidade de o aprendiz engajar-se no processo como elemento ativo, crítico e autônomo. Não mais um assimilador passivo de conteúdos".

Desse modo, desejamos que o aluno possa fazer parte da construção de seu próprio conhecimento, tornando-o responsável pela condução e percepção dos conceitos geométricos estudados, com a utilização de atividades direcionadas, em que será guiado por etapas bem organizadas que possibilitarão o aprendizado através da manipulação no software.

O software de geometria dinâmica propicia uma visualização diferenciada sobre os conceitos estudados, substituindo aquelas imagens estáticas dos livros e dos quadros por inúmeras possíveis manipulações. O caráter dinâmico desses softwares possibilita que o aluno faça parte da evolução de seu aprendizado, passando a interagir de forma dinâmica ao verificar propriedades por meio de suas observações.

> A interface dinâmica, a interatividade que esses programas propiciam e os recursos de manipulação e movimento das figuras geométricas que se apresentam na tela do computados contribuem no desenvolvimento de habilidades em perceber diferentes representações de uma mesma figura, levando desta maneira as descobertas das propriedades das figuras geométricas estudadas. (SILVEIRA; BISOGNIN, 2008, p.2)

Dessa maneira, o GeoGebra se apresenta como um instrumento facilitador na aprendizagem de assuntos geométricos, possibilitando um aprendizado dinâmico, que desperta interesse do público estudantil, já que os alunos de hoje estão imersos no mundo tecnológico, no qual se sentem à vontade, tanto na manipulação de novos softwares, quanto na aquisição de novas informações.

CAPÍTULO 3

PESQUISA INVESTIGATIVA COM ALUNOS E PROFESSORES

3.1 PESQUISA I: ALUNOS DO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

3.1.1 Aspectos gerais

A pesquisa investigativa com alunos foi realizada com 182 estudantes, distribuídos em seis turmas de primeiro ano do ensino médio do turno matutino da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “João Crisóstomo Belesa”, pertencente à região da grande Porto de Santana, município de Cariacica, situado na região metropolitana da Grande Vitória. Esta escola é estratégica, já que é a principal escola de ensino médio da região, recebendo estudantes de outras seis unidades de ensino fundamental, além de seus próprios alunos.

Dessa forma, nosso estudo se torna mais abrangente, pois reunimos em uma mesma escola uma diversidade de alunos provindos de várias outras, onde certamente foram expostos a métodos distintos de aprendizado dos conteúdos geométricos. Este rico material humano a ser explorado fortalece a importância desta pesquisa. O objetivo é investigar os conhecimentos geométricos trazidos por estes alunos, de várias escolas distintas, nos possibilitando a percepção de como o ensino da geometria acontece e quais frutos este estudo está gerando em relação ao conhecimento escolar e social dos estudantes.

Quanto à formulação do questionário aos alunos, decidimos dividi-lo em duas partes. Na primeira parte, questionamos a respeito da visualização do aluno em relação à importância do estudo da matemática e sobre os conteúdos que possivelmente tenha estudado no nono ano do ensino fundamental. A segunda parte refere-se inicialmente a questões simples de conhecimento geométrico geral, seguidas de questões específicas de parte da geometria estudada no último ano do ensino fundamental. Esta segunda parte do questionário se fez em forma de uma avaliação substitutiva com valor de cinco pontos, sendo acordado previamente com a equipe pedagógica da escola e com os professores destas seis turmas de primeiro ano.

Ao realizar esta avaliação, oferecendo pontuação aos alunos, objetivou-se incentivá-los a mostrar seus conhecimentos e suas dificuldades. Antes da aplicação do questionário e da avaliação, visitamos todas as turmas, conversando e explicando sobre os objetivos do estudo. Recebendo resposta positiva das turmas, dos professores e da administração escolar, aplicamos a pesquisa.

3.1.2 Visão dos alunos

A princípio, realizaremos a exposição da primeira parte do questionário aplicado aos alunos, que oferece a observação da visão dos estudantes em relação à matemática, apontando suas percepções quanto aos conteúdos estudados. A primeira tabela apresenta a distribuição referente à origem dos alunos que, no momento da pesquisa, cursavam o primeiro ano do ensino médio.

Tabela 1 – Distribuição das escolas de origem dos alunos participantes da pesquisa

Em qual escola você cursou o nono ano (oitava série)?	
EMEF Padre Gabriel Roger Maire	12,6%
EMEF Stellita Ramos	11,5%
EEEF Presidente Castelo Branco	28,6%
EMEF Presidente Médice	5,3%
EMEF João Pedro da Silva	15,5%
EMEF Presidente Arthur Costa e Silva.	8,4%
EEEFM João Crisóstomo Belesa	11,0%
Outras Escolas	7,1%

Fonte: Dados da pesquisa.

Confirmamos que os alunos provêm de várias escolas distintas, possibilitando uma observação mais ampla sobre a condução do ensino de geometria nas escolas de ensino fundamental da região. Além das escolas mencionadas, constam nos dados, citações de outras seis unidades escolares, sendo entre elas, uma particular com três alunos, localizada na mesma região da escola fonte de pesquisa.

Na próxima tabela, verificaremos a percepção dos estudantes sobre a importância do conhecimento matemático na vida das pessoas e na sociedade, buscando visualizar se os mesmos identificam a matemática como conhecimento essencial para o convívio social e profissional.

Tabela 2 - Percepção dos alunos sobre a importância do ensino da matemática

Você considera importante aprender Matemática?			
Não.	Sim, mas apenas para a vida social.	Sim, mas apenas para a vida profissional.	Sim, para a vida social e profissional.
0%	3,3%	11%	85,7%

Fonte: Dados da pesquisa.

É relevante destacar que todos os alunos consideraram importante estudar matemática, o que remete maturidade dos estudantes sobre a necessidade do estudo desta disciplina nas escolas. Outra observação interessante é a confirmação de mais de 85% dos alunos acerca da importância do estudo da matemática como preparação social e profissional. Percebemos, assim, que os estudantes visualizam a matemática como ferramenta indispensável nas relações em sociedade e não só como instrumento para o trabalho.

Os questionamentos da próxima tabela estão relacionados diretamente à percepção dos alunos quanto aos conteúdos específicos de geometria que deveriam ter estudado no nono ano do ensino fundamental. Queremos perceber se está ocorrendo a oportunidade do aprendizado de alguns relevantes conceitos geométricos em sala de aula.

Tabela 3 - Percepção dos alunos acerca dos conteúdos geométricos estudados no nono ano do ensino fundamental

Você estudou os conteúdos abaixo no nono ano?			
CONTEÚDO	Não.	Sim, mas não compreendi.	Sim, compreendi.

Teorema de Tales	66,5%	25,8%	7,7%
Semelhança de Triângulos	78%	14,8%	7,1%
Relações Métricas no Triângulo Retângulo	80,7%	14,3%	4,9%
Teorema de Pitágoras	41,7%	32,4%	25,8%
Trigonometria	55,5%	34%	10,5%

Fonte: Dados da pesquisa.

Em posse dos dados, podemos verificar que o conteúdo teorema de Pitágoras é o assunto geométrico mais trabalhado nas turmas de nono ano, já que quase 60% dos alunos confirmaram seu estudo. Segundo as informações dos alunos, trigonometria e teorema de Tales são assuntos pouco trabalhados, pois respectivamente 55,5% e 65,5% deles afirmaram não conhecer esses conteúdos. A percepção mais grave é constatar que cerca de 80% dos estudantes desconhecem semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo.

Outra observação evidenciada nestes dados, além do fato de que alguns conteúdos geométricos não estão sendo trabalhados, é que os assuntos estão sendo apresentados de forma isolada, sem qualquer interação com as ideias primárias, necessárias para uma real compreensão sequenciada dos estudos realizados, como sugere os PCN's:

> [...] O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano. [...] O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles

> não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos. (BRASIL, 1998, p.35)

Dessa forma, como podemos estudar, por exemplo, trigonometria e relações métricas no triângulo retângulo sem apoiarmo-nos sobre a semelhança de triângulos? Como utilizar o teorema de Pitágoras sem esclarecer ao estudante a sua validade? Esses questionamentos "tocam as feridas" do ensino da geometria, pois realçam com clareza as severas deficiências do processo de condução de seus estudos. Agregado ao já exposto, percebemos que em todos os conteúdos o percentual de alunos que declararam não ter compreendido o assunto ministrado é superior ao percentual de alunos que afirmaram ter compreendido. Este fato é possivelmente uma consequência da prática baseada em fórmulas decoradas, em detrimento da construção gradual e interligada dos assuntos estudados.

3.1.3 Questões gerais de geometria

Realizaremos agora a exposição do início da segunda parte da pesquisa. Esta seção refere-se a oito questões de uma avaliação com quatorze questões de geometria. As questões iniciais, de um a oito, referem-se a conceitos simples e básicos, com o objetivo de perceber alguns conhecimentos mínimos gerais que os alunos deveriam trazer do ensino fundamental. Serão expostos alguns registros feitos pelos alunos, representados por numeração romana, preservando suas identidades.

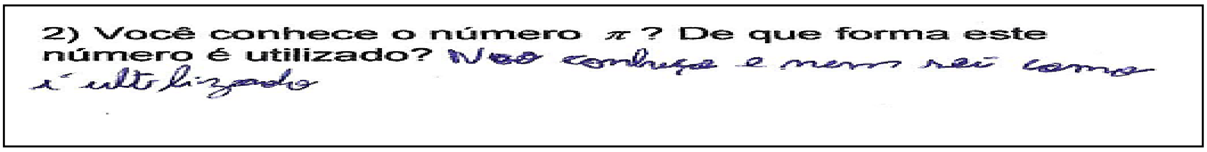
Tabela 4 - O reconhecimento do ângulo reto e do número π

Questões 1 e 2.	Respostas adequadas
1) Quantos graus mede um ângulo reto?	30,2%
2.a) Você conhece o número π?	12,6%
2.b) De que forma este número é utilizado?	1,1%

Fonte: Dados da pesquisa.

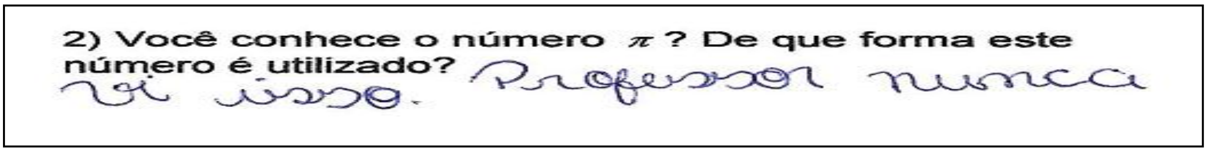
Analisando os dados expostos, percebemos que a simples identificação direta de ideias relacionadas à geometria não ocorre devidamente, pois os alunos iniciantes do ensino médio não reconhecem essas noções primárias. É preocupante constatar que 70% dos estudantes não identificam o ângulo reto ou que 87% deles nunca foram apresentados ao número π , como mostram os registros seguintes:

Figura 1- Registro da resposta da questão 2 do aluno I


2) Você conhece o número π ? De que forma este número é utilizado? Não conheço e nem sei como é ultilizado

Fonte: Dado da pesquisa.

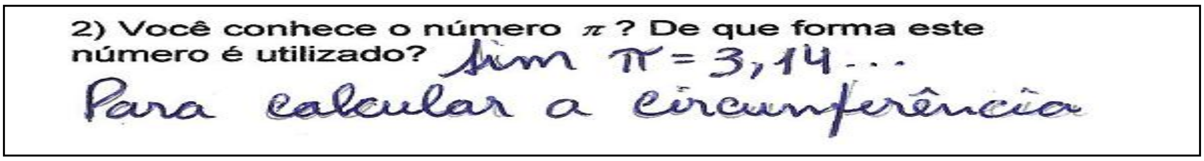
Figura 2 - Registro da resposta da questão 2 do aluno II


2) Você conhece o número π ? De que forma este número é utilizado? Professor nunca vi isso.

Fonte: Dado da pesquisa.

Entre os alunos participantes, apenas 1,1% sabem que este número está associado à área de um círculo ou ao comprimento de uma circunferência. Abaixo, o registro mais adequado desta questão feito pelo aluno III.

Figura 3 - Registro da resposta da questão 2 do aluno III


2) Você conhece o número π ? De que forma este número é utilizado? Sim $\pi = 3,14...$
Para calcular a circunferência

Fonte: Dado da pesquisa.

Na próxima questão, buscamos observar a compreensão dos alunos em relação à definição de uma figura plana. Utilizamos o quadrado para esta análise, por ser uma figura comum ao cotidiano escolar e social dos alunos.

Tabela 5 - A compreensão da definição de quadrado

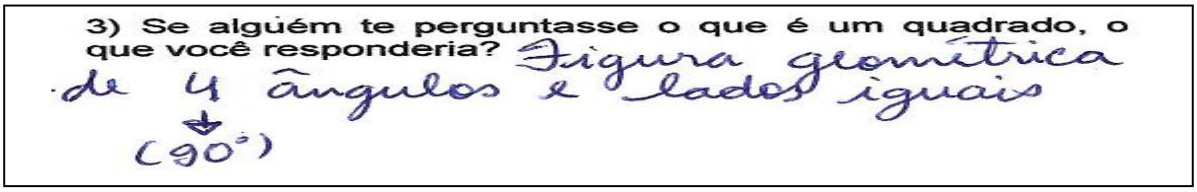
Questão 3: Se alguém te perguntasse o que é um quadrado, o que você responderia?

Quadrilátero de lados e ângulos côngruos	1,6%
Quadrilátero de quatro lados côngruos	35,7%
Respostas totalmente inadequada	62,7%

Fonte: Dados da pesquisa.

Percebemos que o reconhecimento das características das figuras planas está comprometido, pois somente 1,6% dos alunos identificaram um quadrado adequadamente, sendo que quase 63% deles não interiorizaram sequer que se trata de uma figura de lados côngruos. Abaixo, o registro mais interessante também feito pelo aluno III.

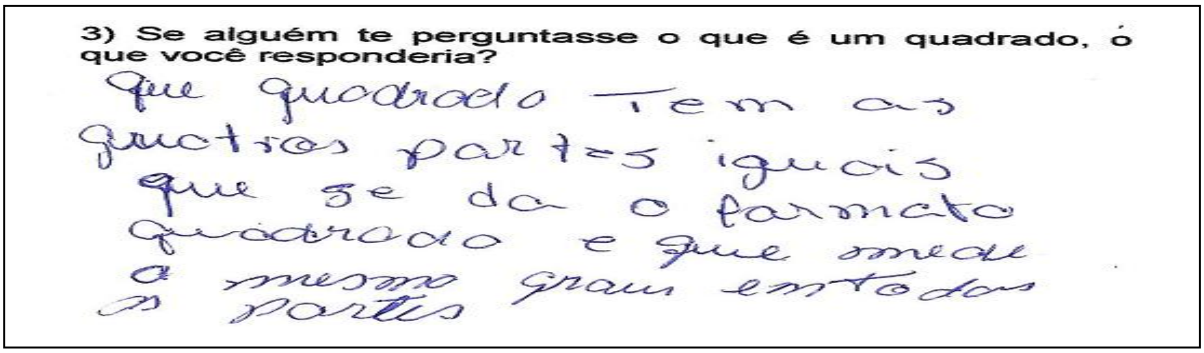
Figura 4 - Registro da resposta da questão 3 do aluno III


3) Se alguém te perguntasse o que é um quadrado, o que você responderia? Figura geométrica de 4 ângulos e lados iguais (90°)

Fonte: Dado da pesquisa.

Outra resposta que merece destaque é do aluno IV, que apesar de utilizar palavras confusas, demonstrou compreensão da ideia de quadrado.

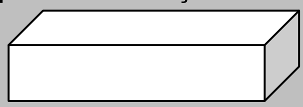
Figura 5 - Registro da resposta da questão 3 do aluno IV


3) Se alguém te perguntasse o que é um quadrado, o que você responderia?
Que quadrado Tem as quatros partes iguais que se da o formato quadrado e que mede o mesmo grau em todas as partes

Fonte: Dado da pesquisa.

Objetivamos verificar o reconhecimento de figuras tridimensionais por parte dos alunos, utilizando a mais comum delas, o paralelepípedo. Nesta questão, também procuramos observar se o aluno associa a figura geométrica com as formas de seu convívio social. Expomos o resultado na tabela a seguir:

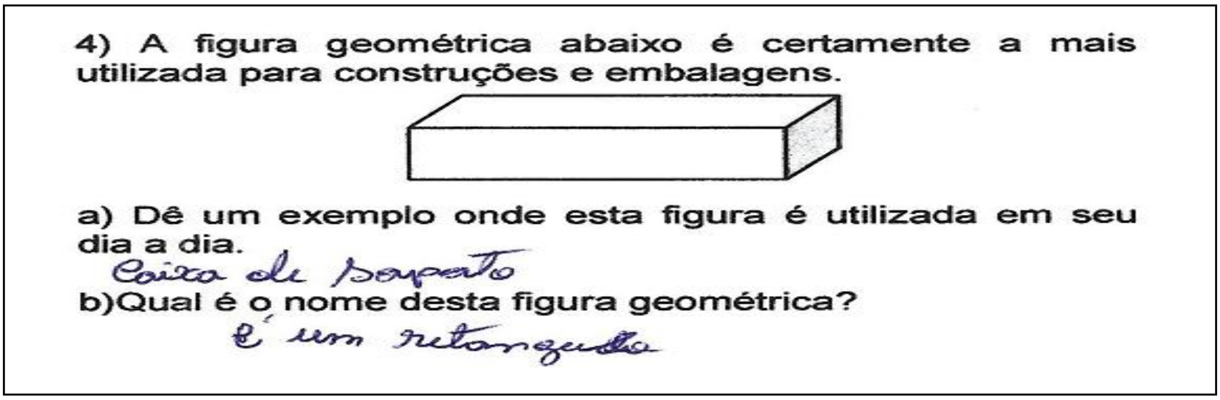
Tabela 6 - A utilização prática do paralelepípedo e sua forma tridimensional

Questão 4: A figura geométrica abaixo é certamente a mais utilizada para construções e embalagens. 	Respostas adequadas
Dê um exemplo onde esta figura é utilizada em seu dia a dia.	60,4%
Qual é o nome desta figura geométrica?	0,5%

Fonte: Dados da pesquisa.

Notamos que ao associarmos a geometria à realidade do aluno, obtemos melhores resultados, pois 60% dos estudantes conseguiram relacionar o paralelepípedo às formas de seu convívio social. No entanto, percebe-se nitidamente que os alunos não tiveram contato com a identificação de figuras geométricas, já que apenas 0,5% (1 aluno) soube nomear corretamente o paralelepípedo. A maioria dos alunos possui dificuldade em distinguir figuras planas de figuras espaciais, já que mais de 50% deles identificaram o paralelepípedo como um retângulo. A maior parte das respostas segue o modelo do protocolo abaixo:

Figura 6 - Registro da resposta da questão 4 do aluno V


4) A figura geométrica abaixo é certamente a mais utilizada para construções e embalagens.

a) Dê um exemplo onde esta figura é utilizada em seu dia a dia.
Caixa de sapato
b)Qual é o nome desta figura geométrica?
é um retangulo

Fonte: Dados da pesquisa.

Na tabela a seguir, expomos o conhecimento dos alunos relacionado ao conceito de área, através de um questionamento direto a cerca do cálculo de uma área retangular.

Tabela 7 - O cálculo da área de uma região retangular

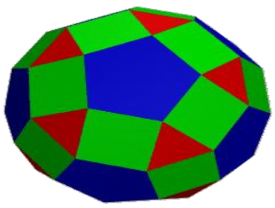
Questão 5	Respostas adequadas
Qual é a área de uma sala de aula em formato retangular que tem 8 m de comprimento por 6 m de largura?	25,3%

Fonte: Dado da pesquisa.

Percebemos que a noção básica do cálculo de áreas, que permeiam estudos de quinto e sexto ano do ensino fundamental, não foi assimilada pela maioria dos alunos iniciantes do ensino médio, dado que praticamente 75% deles não conseguem determinar a área de uma simples região retangular.

Em nosso estudo, também desejamos observar o mero reconhecimento visual dos alunos em relação às principais figuras geométricas planas, que já deve ser abordado do primeiro ao quinto ano do ensino fundamental. O resultado, expomos a seguir:

Tabela 8 - A identificação de polígonos

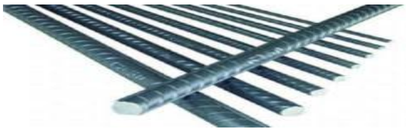
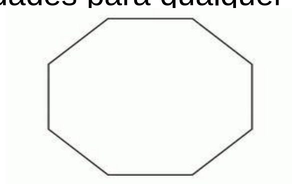
Questão 6	Respostas adequadas
As faces do poliedro abaixo são formadas por três figuras planas distintas e regulares. São elas: a) Triângulo, quadrado e pentágono. b) Triângulo, quadrado e hexágono. c) Quadrado, pentágono e hexágono. d) Triângulo, pentágono e hexágono. e) Quadrado, retângulo e pentágono. 	50%

Fonte: Dado da pesquisa.

Solicitamos a identificação de três figuras planas regulares que compõem as faces de um poliedro formado por: quadrados, triângulos e pentágonos, fornecendo as opções de resposta. Nesta atividade, os alunos alcançaram apenas 50% de acerto, mesmo sendo uma questão objetiva com assunto destinado aos primeiros ciclos do ensino fundamental, evidenciando novamente resultado insuficiente em uma questão de identificação direta das figuras planas mais comuns.

Nas questões sete e oito, propusemos aos estudantes relacionar o conceito geométrico com cálculos básicos, sendo, portanto, questões que exigem um pouco mais de raciocínio do aluno, mas que não se apresentam como difíceis.

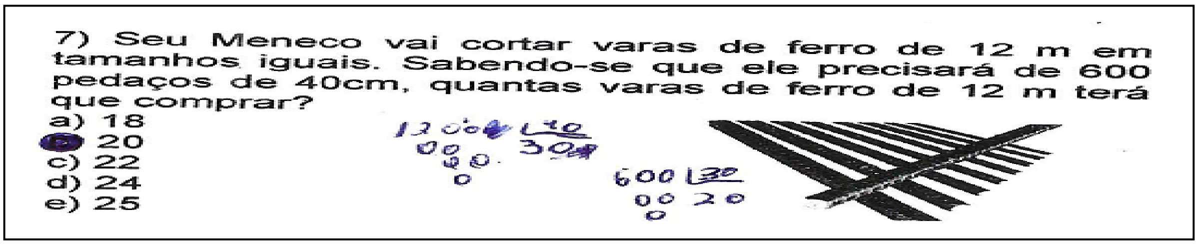
Tabela 9 - Resultados sobre o cálculo com conversão de unidade de comprimento e com número de diagonais de um polígono

Questionamentos	Respostas adequadas
Questão 7 : Seu Meneco vai cortar varas de ferro de 12 m em tamanhos iguais. Sabendo-se que ele precisará de 600 pedaços de 40cm, quantas varas de ferro de 12m terá que comprar? 	1,1%
Questão 8 : Imagine que os vértices do octógono abaixo sejam aeroportos de cidades diferentes, ou seja, oito aeroportos. Supondo que fossem criadas linhas aéreas diretas de cada uma das cidades para qualquer outra, quantas linhas teríamos? 	0%

Fonte: Dados da pesquisa.

Nestas questões, evidenciaram-se sérias dificuldades dos estudantes em compreender e utilizar os conceitos geométricos com cálculos aritméticos, apresentando pouco preparo na tentativa de resolução deste tipo de problema, já que na questão sete houve apenas 1,1% de acerto, e na questão oito, nenhum dos alunos chegou adequadamente a resposta. A seguir, uma das poucas respostas adequadas da questão sete, entre os alunos participantes da investigação.

Figura 7 - Registro da resposta da questão 7 do aluno VI



Fonte: Dado da pesquisa.

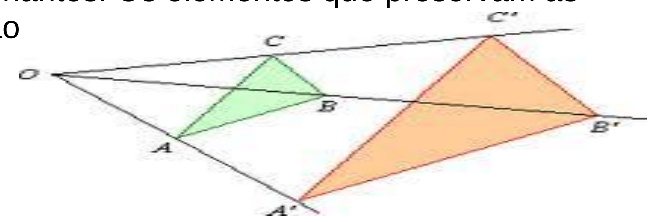
Outra percepção relevante é o fato dos alunos não dominarem as relações entre unidades de medida de comprimento. Muitos estudantes, ao tentarem resolver o problema sete, realizaram cálculos confusos sem relacionar adequadamente a conversão metro e centímetro, que é de extrema importância para vida social ou profissional de qualquer cidadão.

3.1.4 Questões geométricas específicas de nono ano

As questões finais, de 9 a 14, são relacionadas diretamente aos conteúdos geométricos pertinentes ao nono ano do ensino fundamental como: semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria. Queremos, aqui, perceber os conhecimentos geométricos mínimos efetivamente absorvidos pelos alunos. Para isso, elaboramos questões simples que exploram de forma direta esses assuntos.

Na questão nove, a seguir, podemos identificar a noção básica dos alunos em relação a semelhança de triângulos, onde deveriam observar que somente os ângulos conservam suas medidas, dados triângulos semelhantes não congruentes.

Tabela 10 - A percepção da semelhança de triângulos

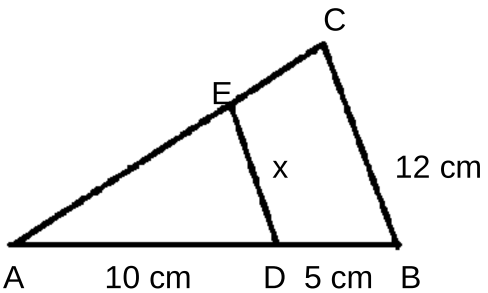
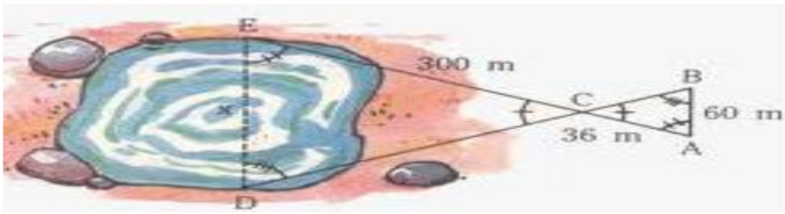
Questão 9	Respostas adequadas
O triângulo A'B'C' é uma ampliação do triângulo ABC, ou seja, são triângulos semelhantes. Os elementos que preservam as mesmas medidas são a) Os lados b) As áreas c) Os perímetros d) Os ângulos e) Nenhum deles  	34,6%

Fonte: Dado da pesquisa.

Nessa questão, apresentada com imagens e alternativas de resposta, mais de 65% dos alunos responderam de forma inadequada, o que constata a pouca compreensão sobre o conceito primário da semelhança de triângulos.

Apresentaremos em seguida a tabela 15, que se refere a problemas relacionados a triângulos semelhantes.

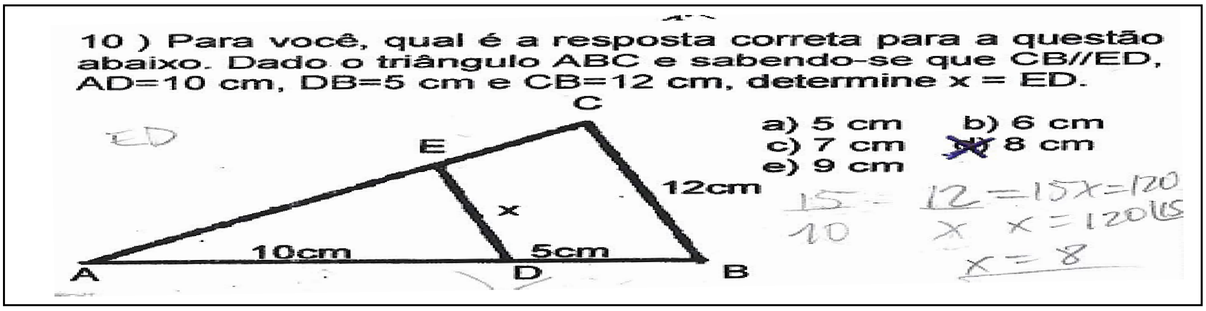
Tabela 11 - Resultado sobre o cálculo utilizando semelhança de triângulos

Questões	Respostas adequadas
Questão 10: Para você, qual é a resposta correta para a questão abaixo. Dado o triângulo ABC e sabendo-se que CB//ED, AD=10 cm, DB=5 cm e CB=12 cm, determine x = ED.  a) 5 cm b) 6 cm c) 7 cm d) 8 cm e) 9 cm	0,5%
Questão 11: Para medir a largura x de um lago, foi utilizado o esquema do desenho abaixo. Nessas condições, determine x, sendo: DE=x; EC=300 m; CA=36 m e AB=60 m. 	0,5%

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas questões 10 e 11, de semelhança de triângulos, apenas um aluno conseguiu obter sucesso. Abaixo, o registro da única resposta correta da questão 10:

Figura 8 - Registro da resposta da questão 10 do aluno III



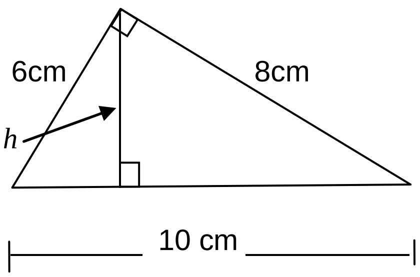
Fonte: Dado da pesquisa.

Percebemos que os conhecimentos menos estudados também foram os que menos produziram retorno, como semelhança de triângulos e relações métricas no triangulo retângulo. Observamos que poucos estudantes apresentaram a percepção relacionada à proporcionalidade, princípio básico destes conteúdos, evidenciando enormes dificuldades na resolução de problemas com triângulos semelhantes.

A tabela seguinte retrata o baixo rendimento dos alunos na resolução da questão envolvendo as relações métricas no triângulo retângulo. Este resultado não é surpresa, já que o assunto depende do conhecimento prévio da semelhança de triângulos.

Tabela 12 - Resultado sobre o cálculo utilizando relações métricas no triângulo retângulo

<table>
<tr><th>Questão 12</th><th>Respostas adequadas</th></tr>
<tr><td>Calcule no triângulo retângulo abaixo a altura *h*.



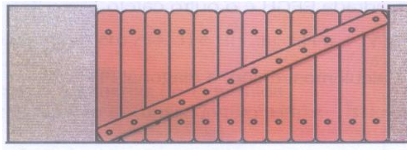
</td><td>1,6%</td></tr>
</table>

Fonte: Dado da pesquisa.

É importante salientar que em nenhuma das poucas respostas corretas foi construída a proporcionalidade entre os lados dos triângulos semelhantes, ou seja, foram utilizadas fórmulas em sua resolução. Verificamos assim, dois problemas crônicos: um está relacionado ao precário conhecimento da grande maioria dos alunos em relação à semelhança de figura planas e o outro referente ao aprendizado de fórmulas em detrimento da construção da proporcionalidade inerente aos triângulos semelhantes.

Apresentamos a seguir, o desempenho dos alunos em relação à questão abordando o teorema de Pitágoras.

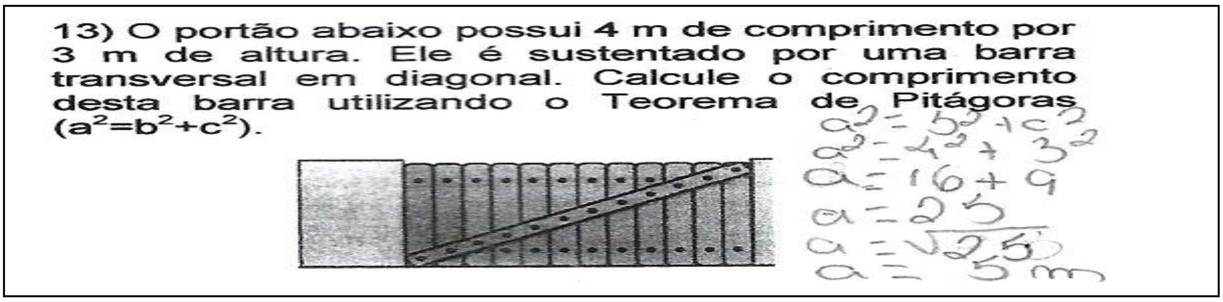
Tabela 13 - Resultado sobre o cálculo utilizando o Teorema de Pitágoras

Questão 13	Respostas adequadas
O portão abaixo possui 4 m de comprimento por 3 m de altura. Ele é sustentado por uma barra transversal em diagonal. Calcule o comprimento desta barra utilizando o Teorema de Pitágoras ($a^2=b^2+c^2$). 	5,5%

Fonte: Dado da pesquisa.

Apesar do resultado insatisfatório, a questão envolvendo teorema de Pitágoras obteve maior índice de tentativa de resolução e maior índice de acerto com 5,5% (10 alunos), o que já era esperado, por ter sido o conteúdo geométrico mais trabalhado em sala, segundo as afirmações dos próprios estudantes. Este resultado comprova que existe algum retorno quando o conteúdo é ministrado, mesmo que não seja da forma que se espera. Portanto, é extremamente necessário que o professor oportunize este aprendizado para todos os alunos, em especial, para aqueles que se dedicam, possibilitando que o conhecimento geométrico seja difundido com mais eficiência. Abaixo, uma das respostas corretas desta questão.

Figura 9 - Registro da resposta da questão 13 do aluno VII

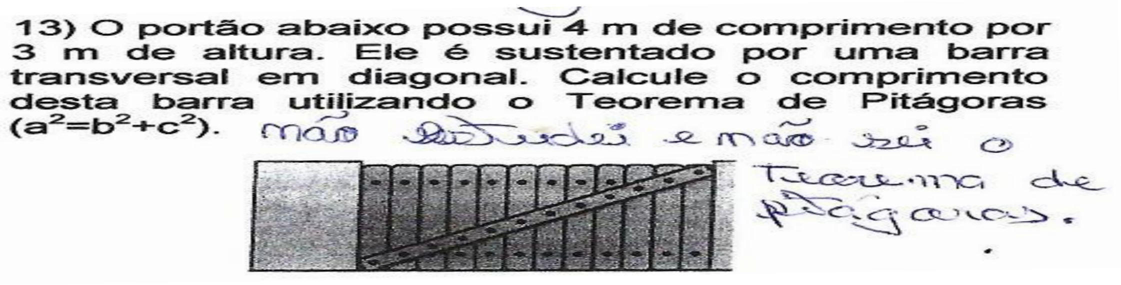

13) O portão abaixo possui 4 m de comprimento por 3 m de altura. Ele é sustentado por uma barra transversal em diagonal. Calcule o comprimento desta barra utilizando o Teorema de Pitágoras ($a^2=b^2+c^2$).

$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = 4^2 + 3^2$
$a = 16 + 9$
$a = 25$
$a = \sqrt{25}$
$a = 5m$

Fonte: Dado da pesquisa.

A seguir o comentário de um aluno sobre sua impossibilidade em resolver o problema proposto:

Figura 10 - Registro da resposta da questão 13 do aluno VIII


13) O portão abaixo possui 4 m de comprimento por 3 m de altura. Ele é sustentado por uma barra transversal em diagonal. Calcule o comprimento desta barra utilizando o Teorema de Pitágoras ($a^2=b^2+c^2$). não estudei e não sei o Teorema de Pitágoras.

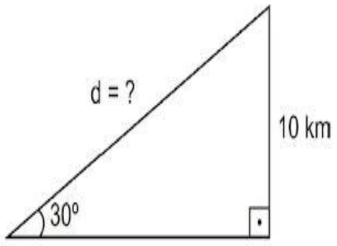
Fonte: Dado da pesquisa.

Verificamos, também, o conhecimento dos alunos acerca das relações trigonométricas, utilizando uma questão simples e fornecendo todas as informações necessárias para a resolução do problema, como exposto na tabela abaixo:

Tabela 14 - Resultado sobre o cálculo utilizando Trigonometria

<table>
<tr><th>Questão 14</th><th>Respostas adequadas</th></tr>
<tr><td>

A região triangular abaixo representa a área de uma reserva florestal. Determine a distância d desta reserva.



$Seno = \frac{\text{cateto oposto}}{hipotenusa}$

$Cosseno = \frac{\text{cateto adjacente}}{hipotenusa}$

$Tangente = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

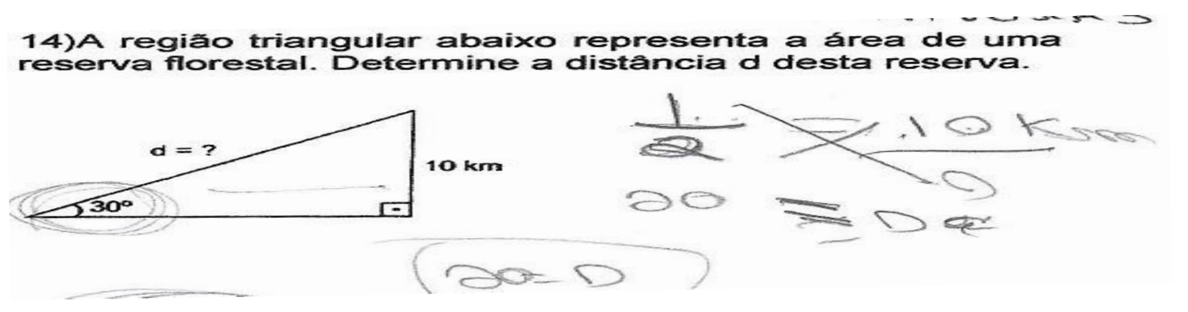
	30°	45°	60°
SEN	½	√2/2	√3/2
COS	√3/2	√2/2	½
TG	√3/3	1	√3

</td><td>2,2%</td></tr>
</table>

Fonte: Dado da pesquisa.

Confirmando os dados iniciais sobre os conteúdos estudados, o rendimento relacionado à trigonometria manteve-se abaixo do obtido no teorema de Pitágoras e superior aos relacionados à semelhança de triângulos, ratificando a ligação direta entre conteúdo ministrado e aprendizado. A seguir, uma das poucas resoluções desta questão.

Figura 11 - Registro da resposta da questão 14 do aluno IX



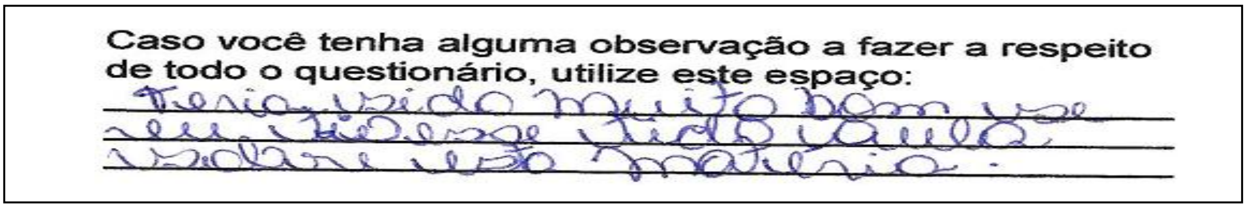
Fonte: Dado da pesquisa.

Nas questões de dez a quatorze, observamos um desastroso resultado, pois obtivemos, em todas elas, índice de mais de 94% de respostas inadequadas. Visualizando esses dados sobre as questões relacionadas, a semelhança de triângulo, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria, destaca-se claramente que esses conteúdos estão possivelmente sendo ministrados inadequadamente ou até mesmo sendo abandonados na educação fundamental, já que até mesmo alunos com bom rendimento informaram não conhecer considerável parte dos assuntos abordados.

3.1.5 Observações finais

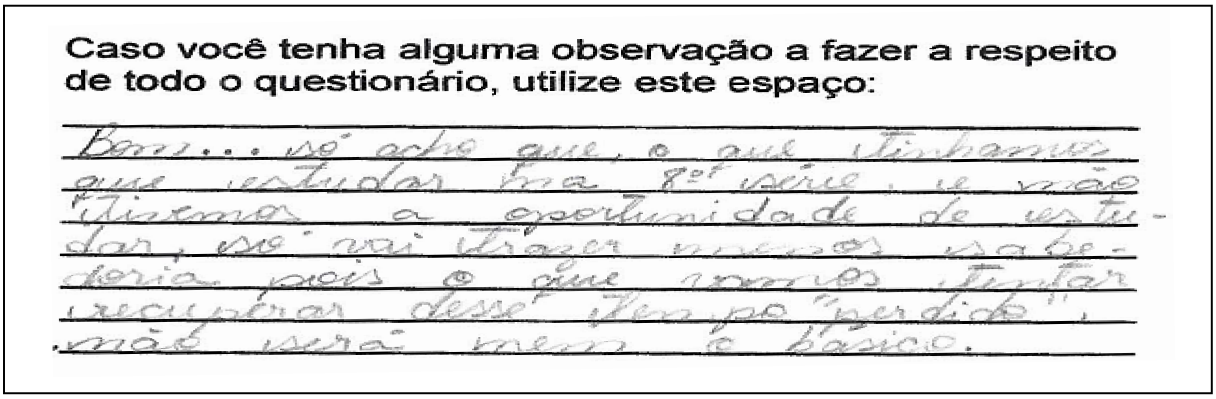
Apresentaremos ao fim desta investigação com alunos, alguns registros feitos por esses, nos quais deixamos a critério do estudante a possibilidade de realizar qualquer comentário sobre o estudo feito, sem qualquer tipo de interferência de nossa parte.

Figura 12 - Registro do comentário do aluno X


Caso você tenha alguma observação a fazer a respeito de todo o questionário, utilize este espaço:

Fonte: Dado da pesquisa.

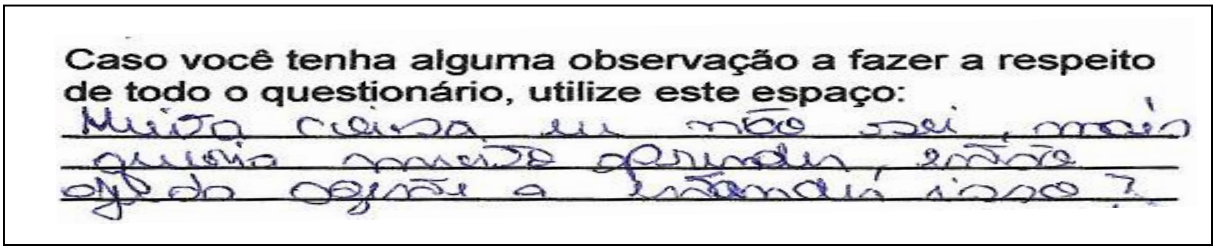
Figura 13 - Registro do comentário do aluno XI


Caso você tenha alguma observação a fazer a respeito de todo o questionário, utilize este espaço:

Bom... só acho que, o que tinhamos que estudar na 8ª série, e não tivemos a oportunidade de estudar, só vai trazer menos sabedoria pois o que vamos tentar recuperar desse tempo "perdido", não será nem o básico.

Fonte: Dado da pesquisa.

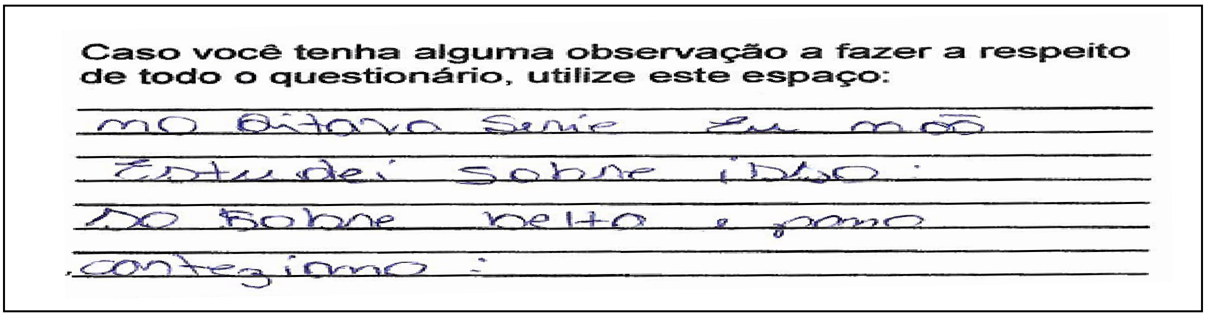
Figura 14 - Registro do comentário do aluno XII


Caso você tenha alguma observação a fazer a respeito de todo o questionário, utilize este espaço:

Muita coisa eu não sei, mais queria muito aprender, então ajuda da gente a ensinar isso?

Fonte: Dado da pesquisa.

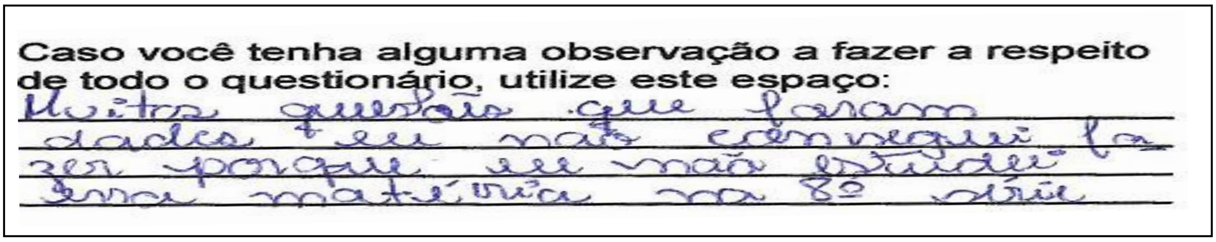
Figura 15 - Registro do comentário do aluno XIII


Caso você tenha alguma observação a fazer a respeito de todo o questionário, utilize este espaço:

no oitava serie eu não estudei sobre isso: do sobre belto e como contezimo :

Fonte: Dado da pesquisa.

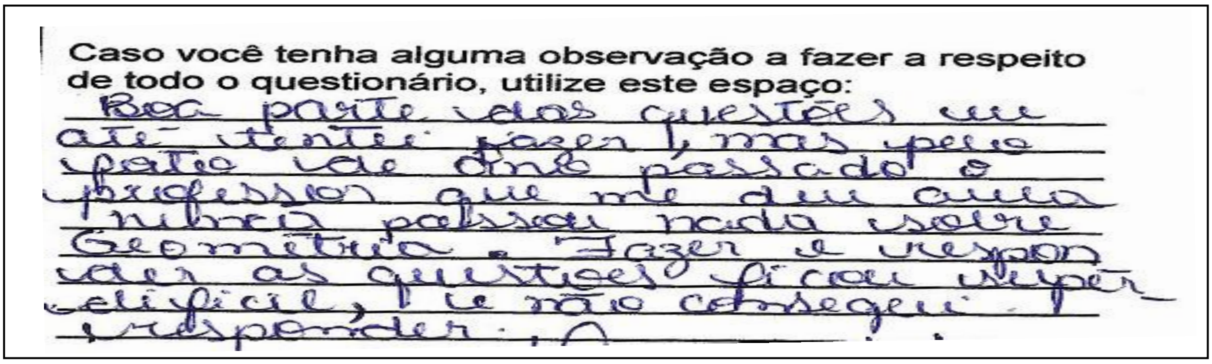
Figura 16 - Registro do comentário do aluno XIV


Caso você tenha alguma observação a fazer a respeito de todo o questionário, utilize este espaço:

Muitas questões que foram dados e eu não consegui fazer porque eu não estudei essa matéria na 8ª série

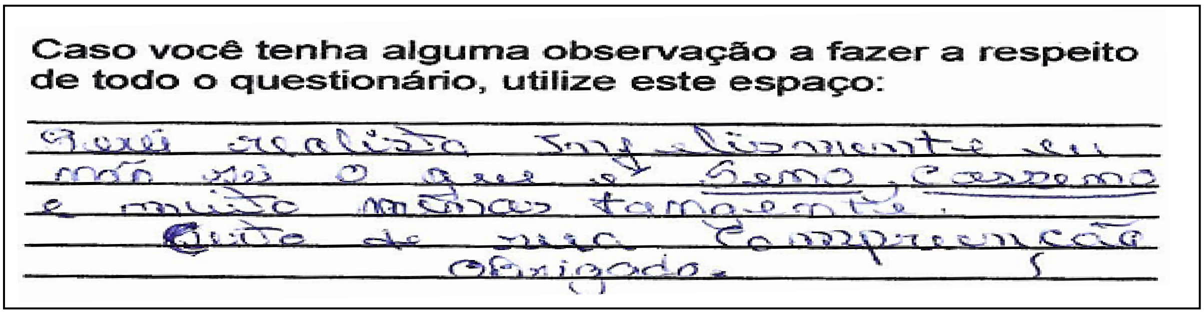
Fonte: Dado da pesquisa.

Figura 17 - Registro do comentário do aluno XV


Caso você tenha alguma observação a fazer a respeito de todo o questionário, utilize este espaço:
Boa parte das questões eu até tentei fazer, mas pela parte de onde passado o professor que me deu aula nunca passou nada sobre Geometria. Fazer e responder as questões ficou mais difícil, e não consegui responder.

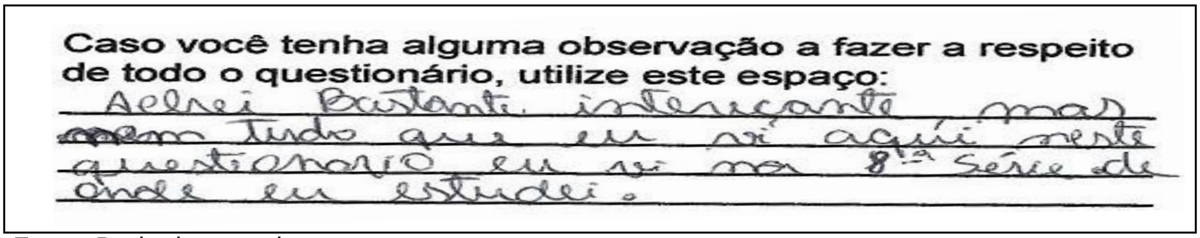
Fonte: Dado da pesquisa.

Figura 18 - Registro do comentário do aluno XVI


Caso você tenha alguma observação a fazer a respeito de todo o questionário, utilize este espaço:
Você realizou infelizmente eu não sei o que é Seno, Cosseno e muito menos tangente. Gosto de sua compreensão obrigado.

Fonte: Dado da pesquisa.

Figura 19 - Registro do comentário do aluno XVII


Caso você tenha alguma observação a fazer a respeito de todo o questionário, utilize este espaço:
Achei bastante interessante mas nem tudo que eu vi aqui neste questionário eu vi na 8ª Série de onde eu estudei.

Fonte: Dado da pesquisa.

Analisando esses registros, que soam como um pedido por mudança, feito por alunos, principalmente aqueles mais dedicados e que só têm a educação como oportunidade de uma vida mais digna, reforça-se a importância do estudo sugerido neste trabalho, que foca a necessidade de reestruturarmos o estudo da geometria no ensino fundamental. Observando os comentários dos alunos, destacamos parte do registro do aluno XV e o registro do aluno XIII.

"[...] *o professor que me deu aula nunca passou nada sobre geometria*" (Aluno XV) *“na oitava série eu não estudei sobre isso. Só sobre delta e plano cartesiano*” (Aluno XIII)

Esses relatos refletem a permanência de um ensino inexistente ou organizado de forma inconsistente em relação aos conteúdos geométricos, como retratamos no registro do aluno XIII, que afirma a predileção do professor em trabalhar com equações e funções ao invés de desenvolver a geometria do nono ano. Esses poucos comentários representam relatos de muitos outros alunos participantes da pesquisa, na qual pudemos constatar a fragilidade do ensino da geometria e o desejo de parte dos alunos em conhecer esses assuntos, como consta no registro do aluno XIV a seguir:

“*muita coisa eu não sei, mas queria muito aprender. Ajuda a gente a entender isso?*” (Aluno XIV)

Buscando encontrar um caminho diferente e que traga a possibilidade de mudança real deste grande problema no ensino da matemática, se faz necessário repensar a formação profissional dos professores, as atitudes em sala e as ferramentas de ensino, para que possamos propiciar o início da correção desta frustrante situação que ainda ocorre com o ensino da geometria.

3.2 PESQUISA II: PROFESSORES DO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

3.2.1 Aspectos gerais

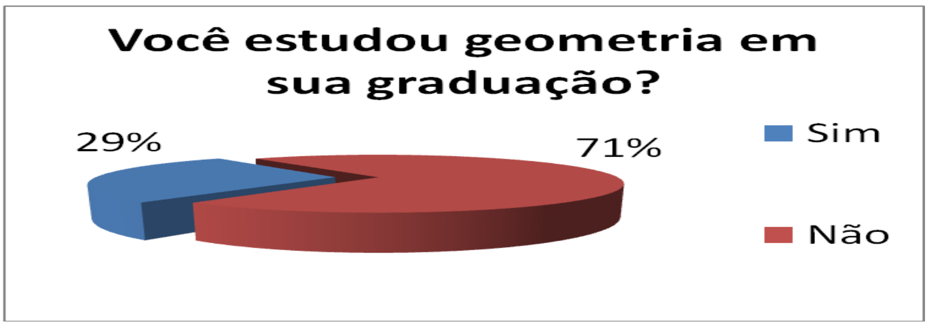
A pesquisa investigativa com professores foi realizada com 21 profissionais que ministraram aulas para alguma turma de nono ano do ensino fundamental nos últimos quatro anos. Ao analisar os resultados obtidos, citaremos algumas características particulares pertinentes ao perfil do professor de matemática participante da pesquisa. Constatamos que apenas 23,8% dos profissionais são formados em licenciatura plena em matemática, isto é, frequentaram um curso de matemática na universidade, sendo a maioria habilitada por licenciatura curta, geralmente formada em algum curso da área de exatas, com complementação em pedagogia. Entre os professores participantes, um é estudante, que mostra o quanto esta área de ensino ainda é carente de profissionais. 57% dos entrevistados cursaram uma complementação pedagógica para habilitar-se como professor de matemática e 76% possuem especialização na área de educação. O tempo de trabalho em sala dos profissionais entrevistados atingiu a média de 10,5 anos, sendo que 81% deles possuem mais de cinco anos de experiência como professores de matemática.

Dividimos o questionário em duas partes, sendo a primeira caracterizada pela identificação do perfil do professor quanto a sua experiência, formação profissional e percepção sobre o ensino da geometria em geral, enquanto a segunda parte refere-se à análise dos procedimentos realizados pelos professores na condução dos conteúdos geométricos do nono ano do ensino fundamental, alvo de nosso estudo.

3.2.2 Formação e visão dos professores

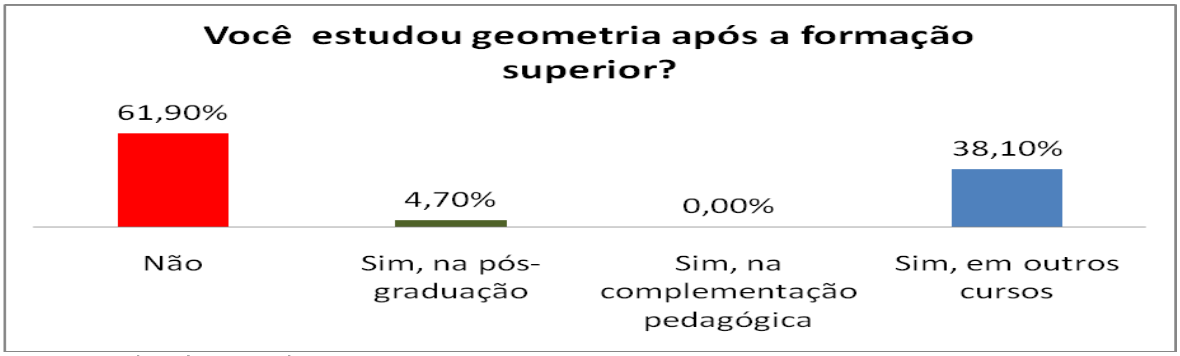
As informações desta seção fornecerão dados sobre a formação geométrica dos docentes participantes da pesquisa e alguns aspectos pertinentes a visualização do professor em relação à realidade do ensino da geometria em sala de aula. Serão expostos alguns registros feitos por professores, representados por letras maiúsculas do alfabeto, a fim de preservar suas identidades.

Gráfico 1 - Formação geométrica do professor em nível superior



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 2 - Formação geométrica do professor após curso superior

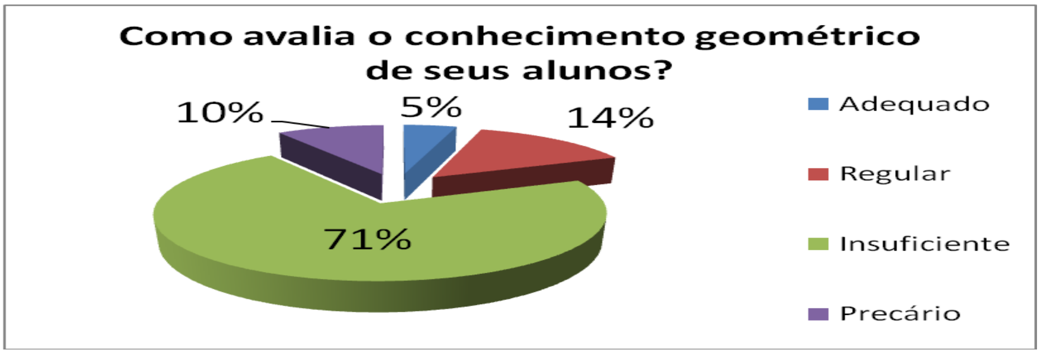


Fonte: Dados da pesquisa.

As informações dos gráficos 1 e 2 referem-se à formação geométrica dos professores de matemática. Percebemos que a maioria dos professores não estudou geometria em disciplinas de curso superior, pois apenas 29% deles afirmam a existência deste estudo. Outra observação é que os professores habilitados por complementação pedagógica não recebem formação geométrica. Notamos também que apesar de muitos professores possuírem especializações, poucos estudaram geometria nestes cursos. Verificamos que o conhecimento geométrico da maior parte dos profissionais é aquele adquirido em nível fundamental e médio, quando alunos, e através de alguns cursos rápidos de formação, que geralmente exploram aspectos didáticos e não o conteúdo específico de geometria. Essas informações evidenciam a formação geométrica insuficiente dos profissionais, que têm a responsabilidade de disseminar conhecimento geométrico nas salas de aulas.

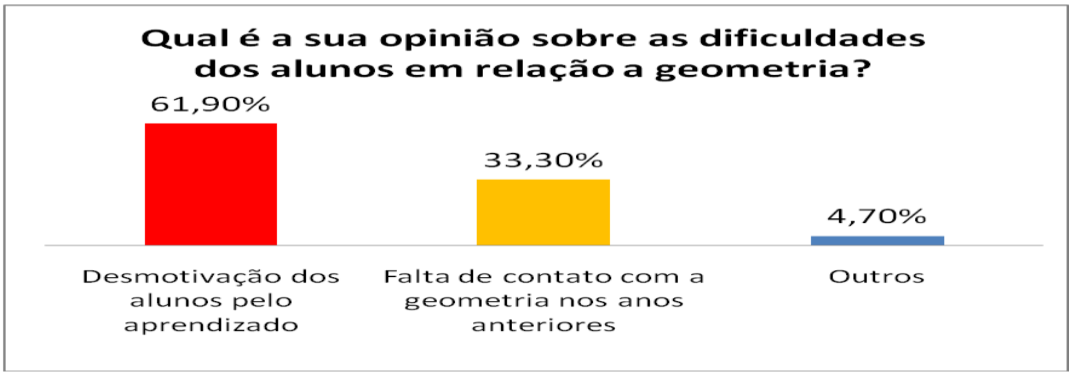
Nos gráficos expostos abaixo, indagamos ao professor sobre sua visualização acerca do conhecimento geométrico geral dos alunos e sobre os motivos que dificultam a aprendizagem dos estudantes.

Gráfico 3 - Visão do professor sobre o conhecimento geométrico dos alunos



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 4 - Visão do professor sobre as dificuldades dos alunos no aprendizado da geometria



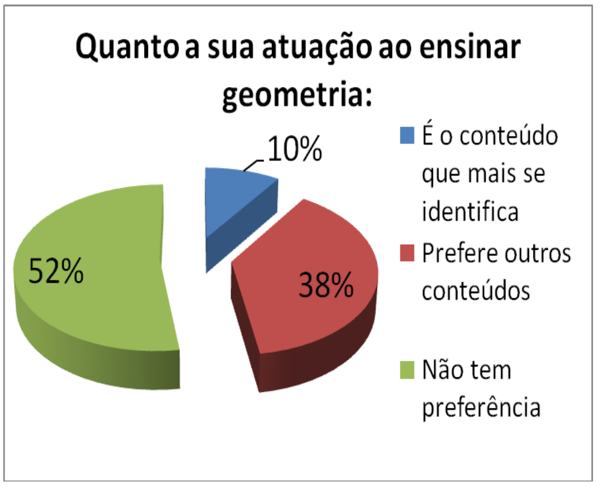
Fonte: Dados da pesquisa.

Os questionamentos dos gráficos 3 e 4, retratam a percepção dos professores quanto ao aprendizado escolar dos alunos em relação à geometria. Dentre os pesquisados, 81% visualizam que é insuficiente ou precário. Muitos fatores influenciam está afirmação; contudo, os mais apontados são: a desmotivação do aluno e as deficiências existentes no ensino da geometria nos anos anteriores. Destaca-se aqui a necessidade da construção do conhecimento geométrico desde as séries iniciais, em que as crianças podem se habituar a perceber as formas geométricas desde a infância, possibilitando o desenvolvimento desta percepção, como sugere Lorenzato (1995, p.8)

> As crianças devem realizar inúmeras experiências ora com o próprio corpo, ora com objetos e ora com imagens; para favorecer o desenvolvimento do senso espacial é preciso oferecer situações onde elas visualizem, comparem e desenhem formas [...] é uma etapa que parece mero passatempo, porém é de fundamental importância.

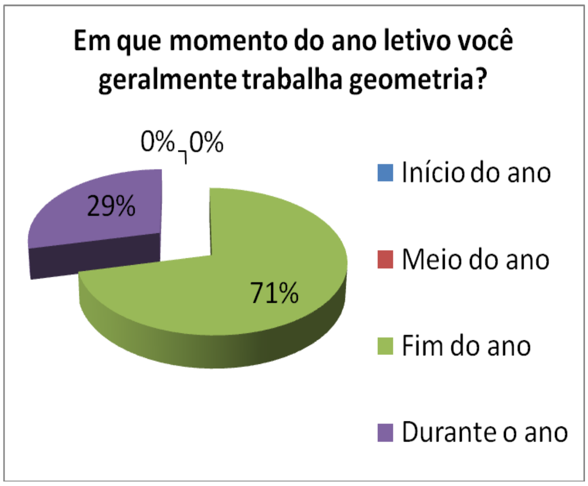
Em nosso estudo, questionamos aos professores sobre a predileção dos conteúdos ministrados, verificando a identificação dos profissionais com a geometria. Também perguntamos sobre o momento do ano letivo em que o professor trabalha os conteúdos geométricos. Os resultados estão apresentados a seguir:

Gráfico 5 - A atuação do professor ao ensinar geometria



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 6 - Momento do ano letivo que o professor trabalhar geometria



Fonte: Dados da pesquisa.

Nos questionamentos acima, percebemos que o ensino da geometria não é preferência entre os professores, apesar de 52% não terem preferência de trabalho, poucos o colocam como tal, enquanto 38% sentem-se mais à vontade em trabalhar com outros conteúdos diferentes da geometria.

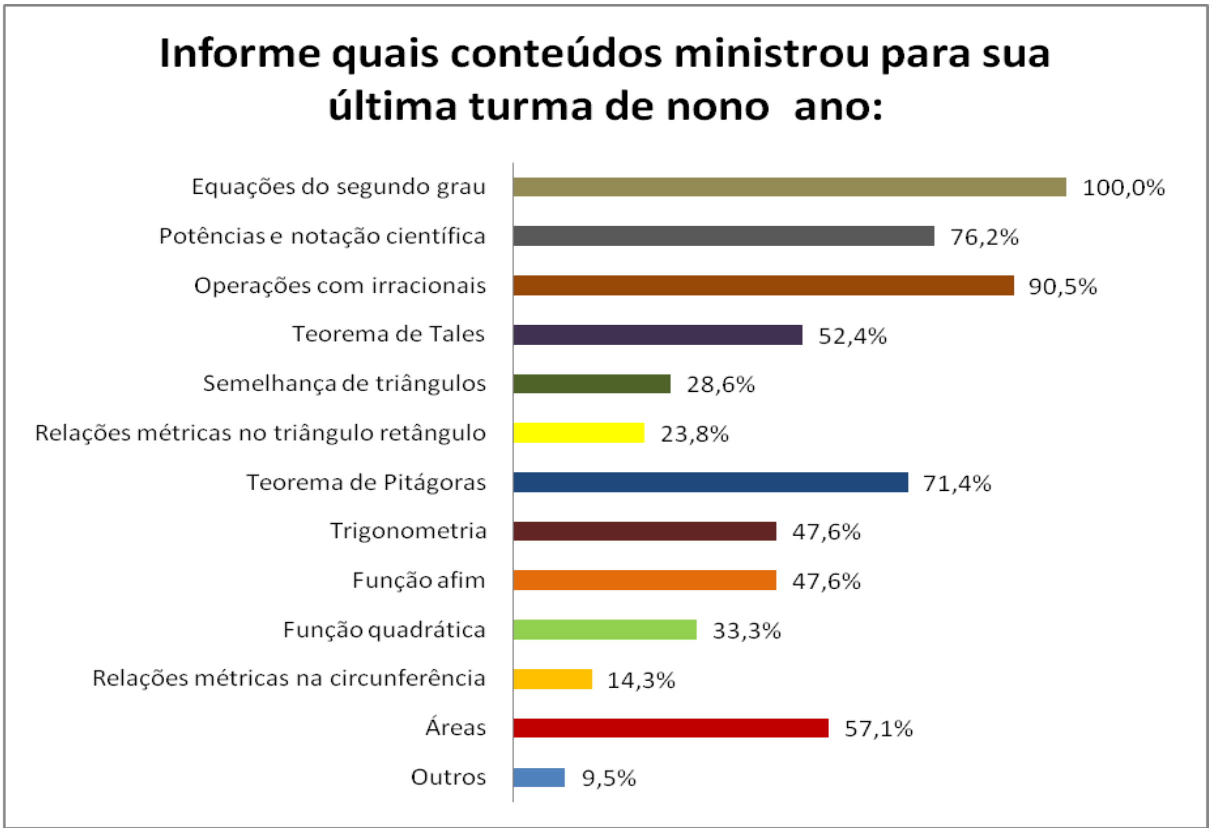
Quanto à execução do trabalho com geometria, mais de 70% dos profissionais relatam realizá-la ao fim do ano letivo. Esta postura favorece o não cumprimento de seus conteúdos, acarretando no contínuo fracasso do aprendizado geométrico, dado que é hábito, em boa parte das escolas, o descumprimento dos conteúdos matemáticos destinados às séries, ocorrendo com isso à predileção de assuntos aritméticos e algébricos em detrimento dos assuntos geométricos.

3.2.3 Condução dos conhecimentos geométricos do nono ano

Nessa seção, iremos verificar de que forma os professores desenvolvem o ensino-aprendizagem dos seguintes conteúdos: teorema de Tales, semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria no triângulo retângulo. Observaremos a visão dos professores quanto à necessidade de articulação destes conteúdos, de forma a favorecer um aprendizado gradativo e consistente, além de investigar suas práticas quanto a utilização de recursos diferenciados na construção do conhecimento. Por fim, buscaremos verificar a prática docente quanto à validação de conceitos através de algumas demonstrações geométricas adequadas à percepção dos alunos concluintes do ensino fundamental.

No gráfico a seguir, detalhamos os conteúdos ministrados pelos professores em relação à última turma de trabalho de cada um dos entrevistados, verificando a frequência de abordagem desses assuntos.

Gráfico 7 - Conteúdos ministrados para a última turma de nono ano



Fonte: Dados da pesquisa.

É evidente a predileção pelos assuntos aritméticos e algébricos. Esta percepção é afirmada ao constatarmos que o conteúdo geométrico mais trabalhado é o teorema de Pitágoras, que foi apenas o quarto conteúdo mais citado entre os conteúdos tradicionalmente abordados no nono ano.

Outra observação a destacar é que muitos profissionais preferem desenvolver os estudos de funções afim e quadrática, que são assuntos também estudados no ensino médio, ao invés de aprimorarem os conceitos geométricos, que provavelmente não serão estudados novamente, dado o currículo atual dos sistemas educacionais brasileiros. Não estamos desmerecendo o trabalho específico em relação às funções, que é importante e que deve ser iniciado no ensino fundamental sempre que possível. No entanto, discordamos da prática comum em renegar o estudo adequado da geometria, utilizando o estudo das funções como pretexto para que os conceitos geométricos continuem sendo abandonados.

A tabela a seguir refere-se à conduta dos professores frente a alguns conteúdos geométricos que fazem parte do currículo e que deveriam ser trabalhados no nono ano do ensino fundamental.

Tabela 15 - Conteúdos geométricos de nono ano trabalhados pelos professores

Você trabalha os conteúdos abaixo com seus alunos?				
CONTEÚDO	Não, pois há conteúdos prioritários.	Raramente, pois não há tempo.	Ás vezes, depende do tempo.	Sempre.
Teorema de Tales	0%	23,8%	28,6%	47,6%
Semelhança de Triângulos	28,6%	19%	19%	33,3%
Relações Métricas no Triângulo Retângulo	19%	28,6%	23,8%	28,6%
Teorema de Pitágoras	0%	4,8%	42,9%	52,4%
Trigonometria	4,8%	19%	47,6%	28,6%

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a tabela anterior, notamos que os conteúdos de semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo são os assuntos que sofrem maior rejeição, já que 47,6% dos professores confirmam a prática de não trabalhá-los ou trabalhá-los raramente. Confirmamos, também, que entre os conteúdos observados, o teorema de Pitágoras é o assunto geométrico mais ensinado, pois 52,4% dos professores relatam sempre desenvolvê-lo em sala. Estas informações ratificam as já coletadas na pesquisa com alunos, que mostraram maior conhecimento em relação ao teorema de Pitágoras e menor em relação à semelhança e relações métricas no triângulo retângulo.

Exporemos agora a forma de condução, realizada pelos professores, acerca dos conteúdos abordados em nosso estudo. Investigaremos os procedimentos utilizados na articulação do ensino-aprendizagem, verificando a existência de um processo gradativo e interligado dos conteúdos trabalhados.

- Teorema de Tales

Tabela 16 - A condução do professor ao ensinar o Teorema de Tales

Como você trabalha o Teorema de Tales com seus alunos?	
Apresento o teorema exemplificando e sugerindo atividades.	80,9%
Cito uma situação, peço sugestões, depois apresento o teorema para solucionar a situação inicial seguido de outros exemplos e atividades.	14,3%
Demonstro o teorema, apresento exemplos e sugiro atividades.	0%
Outros. (Experimentação)	4,8%

Fonte: Dados da pesquisa.

Poucos professores afirmam demonstrar o teorema de Tales em sala; no entanto, em entrevistas com os mesmos, percebemos que aqueles que citaram demonstrar o teorema não o fazem na realidade, pois ao questionarmos sobre sua demonstração, notamos que simplesmente apresentam o teorema e não o demonstram. Apenas dois professores mostraram conhecer a demonstração do teorema de Tales, citando as dificuldades da demonstração para alunos do ensino fundamental, especialmente quanto às razões incomensuráveis. A maior parte dos profissionais trabalha de forma tradicional, apresentando o teorema, exemplificando e listando exercícios, sem qualquer metodologia construtiva do conhecimento. Apenas um único professor citou de forma interessante seu método de condução do aprendizado deste assunto, fazendo uso de um recurso simples, mas que oportuniza a exploração e a construção do aprendizado pelo próprio aluno. Abaixo a citação do professor.

"Começo pedindo aos alunos para medirem os segmentos formados por retas paralelas cortadas por transversais, e depois calcularem as razões desses segmentos, para perceberem a proporcionalidade." (Prof. A).

Essa forma de apresentação do conteúdo, utilizada pelo professor A, possibilita ao aluno a percepção do princípio básico do teorema de Tales, através da verificação das proporcionalidades existentes, evitando que ele receba esta informação por transmissão direta do professor, contribuindo com um aprendizado mais consistente.

- Semelhança de triângulos

Tabela 17 - A condução do professor ao ensinar a semelhança de triângulos

Como você trabalha Semelhança de triângulos com seus alunos?	
Apresento os casos de semelhança, seguido de exemplos e atividades.	28,6%
Não apresento os casos de semelhança, mas trabalho com lados proporcionais nos triângulos através de exemplos e atividades.	9,5%
Relaciono com o Teorema de Tales, apresento os casos de semelhança, seguido de exemplos e atividades.	33,3%

Outros. (Não trabalho)	28,6%

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar da relação estreita entre teorema de Tales e semelhança de triângulos, mais de 65% dos professores não constroem esta importante interligação com os alunos. É relevante destacar que 28,6% dos profissionais sequer utilizam a semelhança em sua prática docente, favorecendo a apresentação de conteúdos posteriores, sem qualquer associação aos seus conceitos prévios.

- Relações métricas no triângulo retângulo

Tabela 18 - A condução do professor ao ensinar as relações métricas no triângulo retângulo

Como você trabalha as relações métricas no triângulo retângulo com seus alunos?	
Apresento as relações, sugiro exemplos e atividades utilizando as relações dadas.	52,4%
Demonstro as relações, depois as utilizo em exemplos e atividades.	19%
Demonstro as relações, mas as atividades são resolvidas por Semelhança.	9,5%
Outros. (Não trabalho)	19%

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar que 88,3% dos professores que trabalham este conteúdo admitem utilizar fórmulas na resolução de atividades envolvendo relações métricas no triângulo retângulo. Esta prática de simples memorização não beneficia o real aprendizado da semelhança de triângulos, sendo na verdade um fator de impedimento na compreensão dos conteúdos abordados, porque impossibilita a utilização da semelhança na resolução das atividades. Outra percepção é o fato de poucos professores validarem as próprias fórmulas que utilizam na resolução de problemas, não agregando ao aprendizado do aluno noções de demonstrações geométricas.

- <u>Teorema de Pitágoras</u>

Tabela 19 - A condução do professor ao ensinar o Teorema de Pitágoras

Como você trabalha o Teorema de Pitágoras com seus alunos?	
Apresento o teorema e sugiro exemplos e atividades utilizando a fórmula.	66,7%
Demonstro o teorema seguido por aplicações em exemplos e atividades.	28,6%
Outros (Experimentação)	4,8%

Fonte: Dados da pesquisa.

Visualizamos novamente a prática da apresentação de fórmulas, sem qualquer justificativa ou interligação com os conteúdos anteriormente ministrados. Menos de 30% dos profissionais afirmam demonstrar o teorema de Pitágoras com seus alunos. Um único professor relatou introduzir o conteúdo de forma diferenciada, utilizando material concreto por meio do uso de cartolina, como consta em seu relato abaixo:

"Utilizo cartolina, formando áreas para que percebam que a soma das áreas sobre os catetos é igual à que está sobre a hipotenusa." (Prof. B)

- <u>Trigonometria</u>

Tabela 20 - A condução do professor ao ensinar trigonometria

Como você trabalha trigonometria no triângulo retângulo com seus alunos?	
Apresento as relações trigonométricas, em seguida sugiro aplicações em exemplos e atividades.	66,7%

Utilizo semelhança de triângulos para apresentar as relações trigonométricas, seguido por aplicações.	28,6%
Outros. Não trabalho.	4,8%

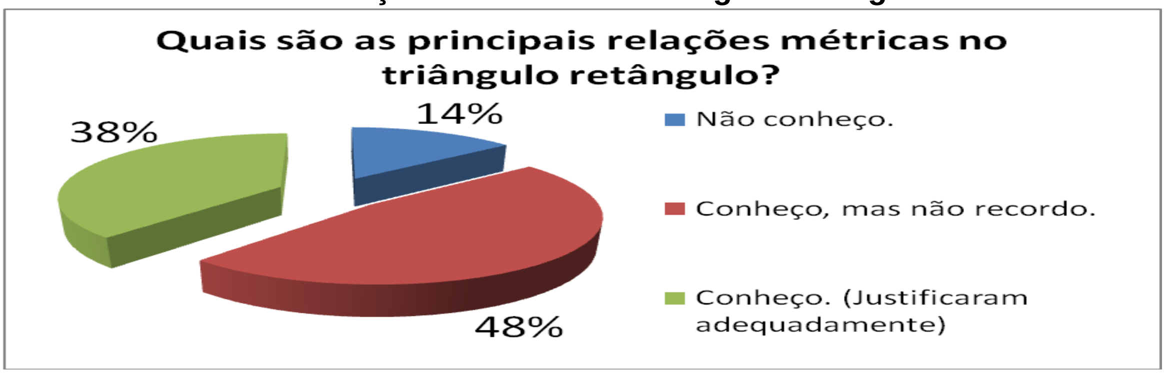
Fonte: Dados da pesquisa.

Constatamos mais uma vez que é habito entre a maioria dos professores a apresentação de fórmulas sem justificativa prévia ou correlação com os conteúdos já estudados, deixando de oportunizar aos alunos o desenvolvimento de um olhar mais crítico sobre a construção do conhecimento geométrico. No caso do aprendizado da trigonometria, é fundamental articular o conhecimento estudado de semelhança de triângulos de tal forma que justifique as relações trigonométricas, possibilitando ao aluno a construção de pontes de conexões entre os assuntos estudados, para que possa compreender a matemática de forma interligada.

3.2.4 Conhecimento geométrico do professor

Apresentaremos a seguir informações de nossa investigação no que se refere ao conhecimento geométrico dos professores. Realizamos alguns questionamentos referentes a ideias fundamentais e necessárias para que o professor tenha condição profissional mínima para conduzir de forma adequada e segura o ensino-aprendizagem da geometria do nono ano do ensino fundamental.

Gráfico 8 - Compreensão do professor sobre as relações métricas no triângulo retângulo

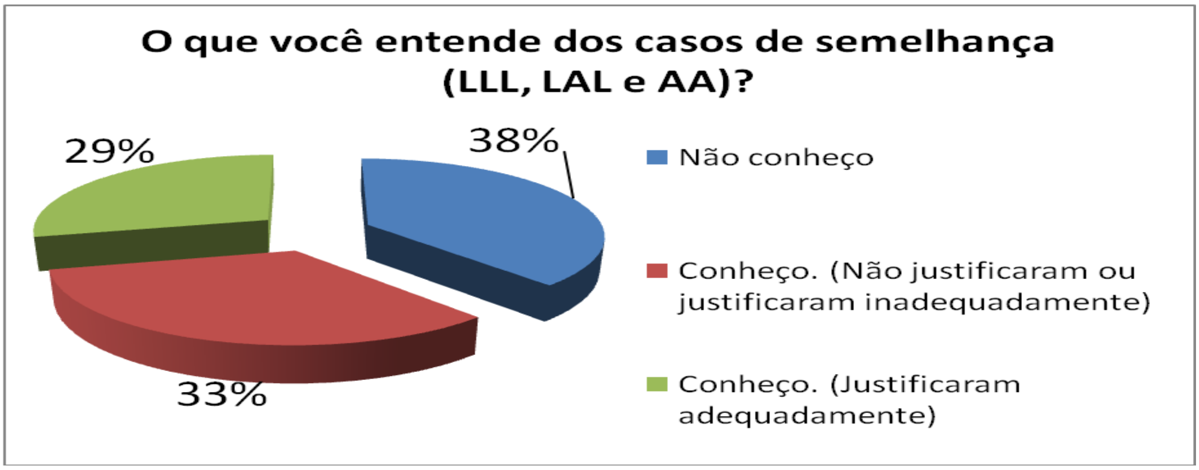


Fonte: Dados da pesquisa.

Somente 38% dos profissionais apresentaram corretamente as relações métricas no triângulo retângulo, enquanto quase metade dos entrevistados citou não recordá-las. Como todos os profissionais entrevistados lecionaram para turmas de nono ano nos últimos quatro anos, é preocupante o fato de poucos se recordarem das relações métricas no triângulo retângulo, já que são relações simples, derivadas das semelhanças em um triângulo retângulo qualquer. Mais preocupante ainda é constatar que 14% dos profissionais sequer conhecem as relações métricas, confirmando a frágil formação geométrica de parte dos professores de matemática atuantes em nossas escolas.

No próximo gráfico, apresentaremos os dados referentes ao questionamento feito aos professores sobre a compreensão dos casos de semelhança de triângulos.

Gráfico 9 - Compreensão do professor sobre os casos de semelhança de triângulos

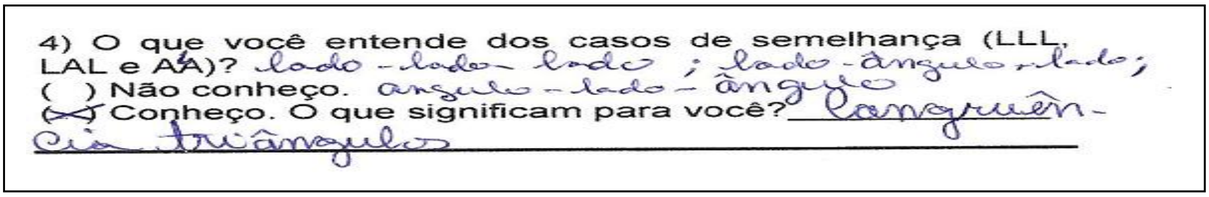


Fonte: Dados da pesquisa.

Dos professores entrevistados, 38% admitiram não conhecer os casos de semelhança de triângulos e apenas 29% mostraram que realmente conhecem esses casos, enquanto outros afirmaram conhecer, mas não apresentaram registros corretos ao justificarem suas respostas.

A imagem a seguir é a resposta de um dos professores que demonstrou contradição, visto que relacionou inconsistentemente a semelhança com a congruência de triângulos.

Figura 20 - Registro da resposta do professor C sobre a questão 4



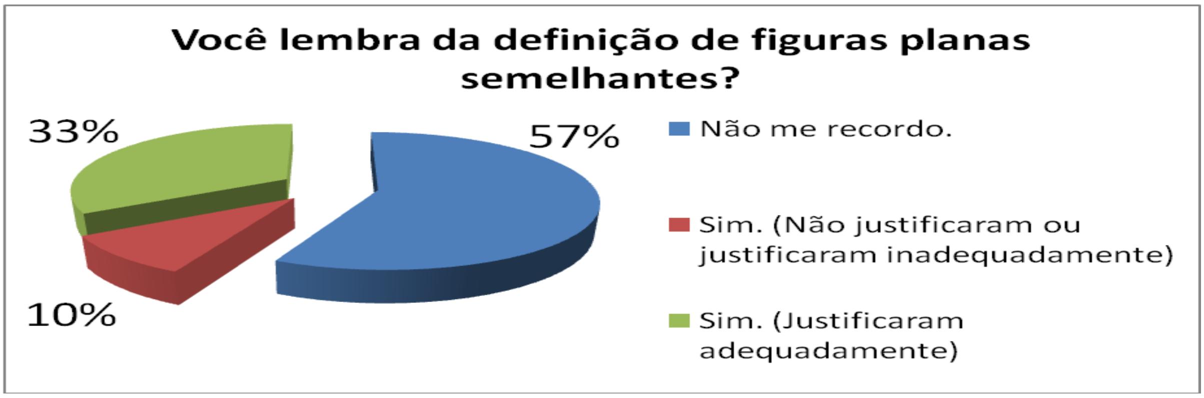
4) O que você entende dos casos de semelhança (LLL, LAL e AA)? lado - lado - lado ; lado - ângulo - lado ;
( ) Não conheço. ângulo - lado - ângulo
(x) Conheço. O que significam para você? Congruência triângulos

Fonte: Dado da pesquisa.

O professor C tem noção dos casos de semelhança, mas mostrou que esse conhecimento não está totalmente desenvolvido. Ao observarmos que mais 70% dos professores não conseguem relatar o significado dos casos de semelhança, podemos afirmar que a formação geométrica profissional destes docentes precisa ser discutida, para que estas deficiências não continuem impedindo a aprendizagem dos alunos.

Questionamos, também, sobre o entendimento dos professores acerca da definição de duas figuras planas semelhantes. As informações estão apresentadas a seguir:

Gráfico 10 - Compreensão do professor sobre a definição de semelhança de triângulos



Fonte: Próprio autor.

Quanto à simples definição de semelhança entre duas figuras planas, apenas 33% dos professores definiram corretamente, sendo que quase 60% deles declararam não se recordar, apesar de todos lecionarem para turmas de nono ano nos últimos anos. Abaixo, duas respostas adequadas e outras duas inadequadas em relação à definição de semelhança, que mostra as disparidades entre as formações geométricas dos professores:

- Respostas adequadas:

Figura 21 - Registro da resposta do professor D sobre a questão 5

> 5) Você lembra da definição de duas figuras planas semelhantes?
> ( ) Não me recordo. (x)Sim. A definição é: lados, respectivamente proporcionais; ângulos internos iguais.

Fonte: Dado da pesquisa.

Figura 22 - Registro da resposta do professor E sobre a questão 5

> 5) Você lembra da definição de duas figuras planas semelhantes?
> ( ) Não me recordo. (X)Sim. A definição é:
> Figuras que possui a mesma forma
> Ex: Todos os círculos são semelhantes

Fonte: Dado da pesquisa.

- Respostas Inadequadas:

Figura 23 - Registro da resposta do professor F sobre a questão 5

> 5) Você lembra da definição de duas figuras planas semelhantes?
> ( ) Não me recordo. ( )Sim. A definição é:
> SÃO FIGURAS BIDIMENSIONAIS COM AS MESMAS MEDIDAS.

Fonte: Dado da pesquisa.

Figura 24 - Registro da resposta do professor G sobre a questão 5

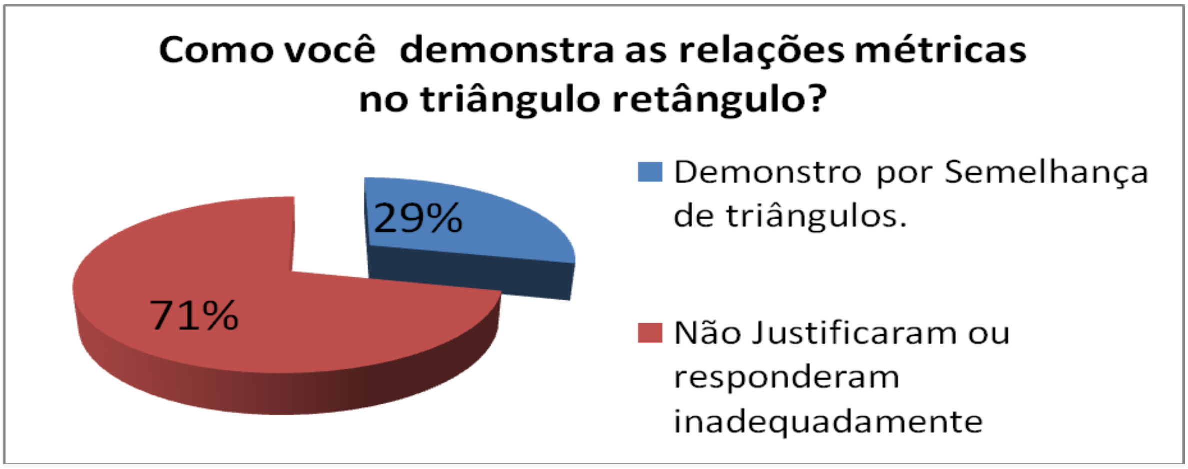
> 5) Você lembra da definição de duas figuras planas semelhantes?
> ( ) Não me recordo. (X)Sim. A definição é:
> Área e perímetro

Fonte: Dado da pesquisa.

Os dois últimos registros retratam fielmente as limitações existentes na formação geométrica de parte dos professores de matemática. Estas percepções nos remetem ao fato de que muitos alunos não têm a oportunidade de estudar adequadamente a semelhança de triângulos, já que considerável parte dos docentes mostra conhecimento insuficiente sobre os assuntos que deveriam lecionar.

No gráfico abaixo, verificamos a compreensão do professor em relação à demonstração das relações métricas no triângulo retângulo, observando se os profissionais estão preparados para tal condução.

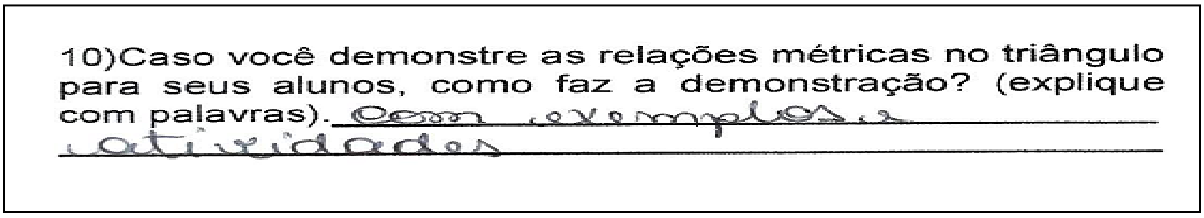
Gráfico 11 - Conhecimento do professor quanto à demonstração das relações métricas no triângulo retângulo.



Fonte: Dados da pesquisa.

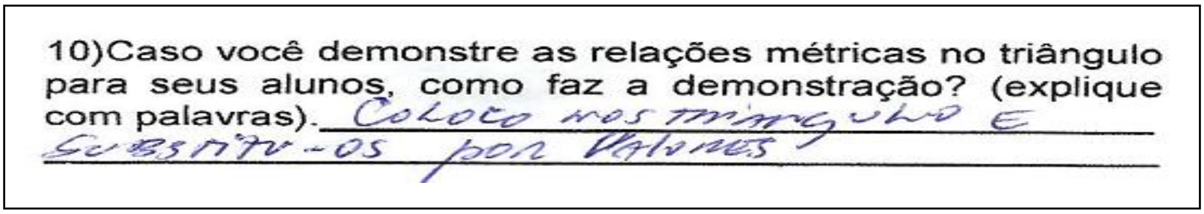
O gráfico aponta que apenas 29% dos professores mostraram conhecimento quanto à demonstração das relações métricas, enquanto outros afirmaram realizar as demonstrações através de exemplos e substituição de valores, como nas respostas expostas abaixo, onde evidenciamos que vários profissionais têm a noção equivocada do que é uma demonstração.

Figura 25 - Registro da resposta do professor G sobre a questão 10


10)Caso você demonstre as relações métricas no triângulo para seus alunos, como faz a demonstração? (explique com palavras). Com exemplos e atividades

Fonte: Dado da pesquisa.

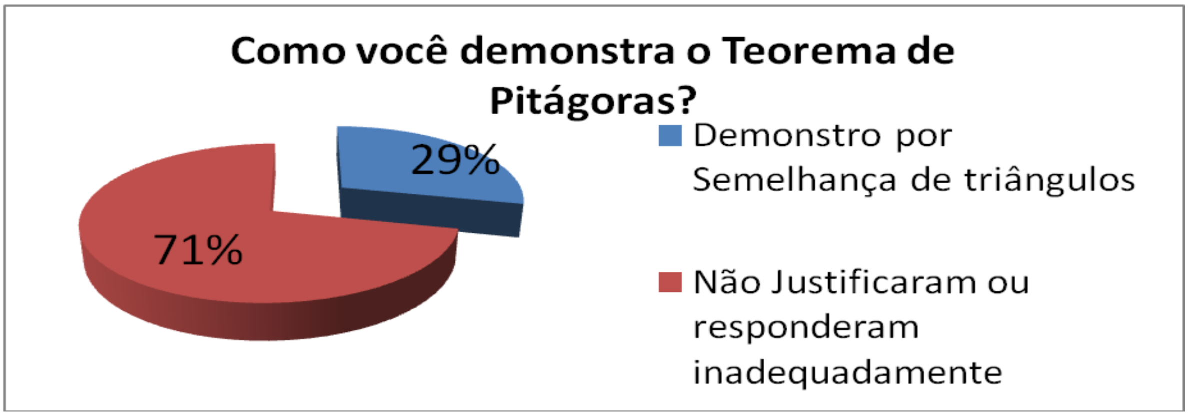
Figura 26 - Registro da resposta do professor F sobre a questão 10


10)Caso você demonstre as relações métricas no triângulo para seus alunos, como faz a demonstração? (explique com palavras). Coloco nos triangulo e substitui-os por valores

Fonte: Dado da pesquisa.

No gráfico abaixo verificamos o conhecimento dos professores em relação à demonstração do teorema de Pitágoras.

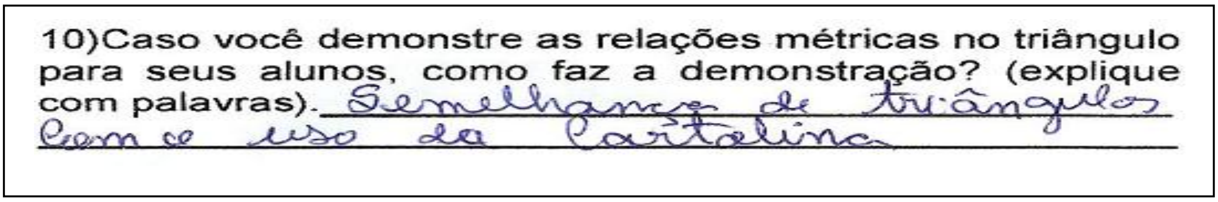
Gráfico 12 - Conhecimento do professor quanto à demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Dados da pesquisa.

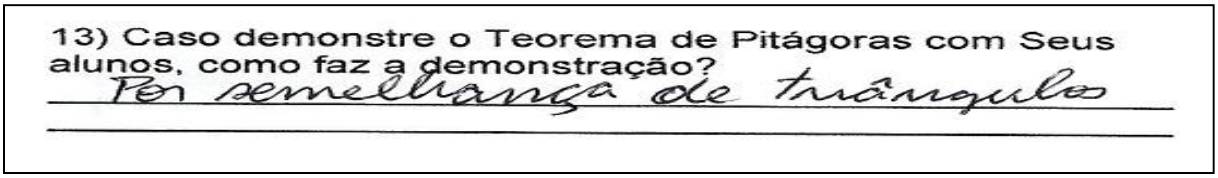
Como ocorreu nas relações métricas no triângulo, apenas 29% dos professores justificaram a demonstração do teorema de Pitágoras, sendo que a conduzem por semelhança de triângulos, como exposto nos relatos abaixo:

Figura 27 - Registro da resposta do professor H sobre a questão 10


10)Caso você demonstre as relações métricas no triângulo para seus alunos, como faz a demonstração? (explique com palavras). Semelhança de triângulos com o uso da cartolina

Fonte: Dado da pesquisa.

Figura 28 - Registro da resposta do professor I sobre a questão 13

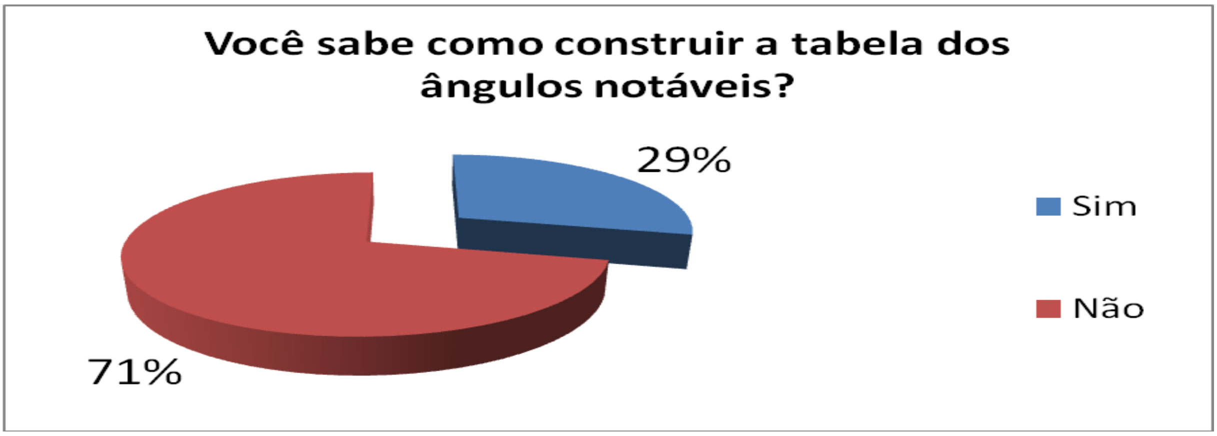

13) Caso demonstre o Teorema de Pitágoras com Seus alunos, como faz a demonstração?
Por semelhança de triângulos

Fonte: Dado da pesquisa.

Alguns professores afirmaram realizar a demonstração do teorema de Pitágoras por áreas, mas constatamos que se tratava de experimentações por comparação em relação à área quadrada sobre a hipotenusa e a soma das áreas quadradas sobre os catetos, que indica novamente o desconhecimento sobre o sentido de uma demonstração.

Outro fato preocupante em relação à sequência do aprendizado da geometria de nono ano é a constatação de que poucos profissionais conhecem de que forma poderiam justificar a tabela dos ângulos notáveis, como nos mostra o gráfico abaixo:

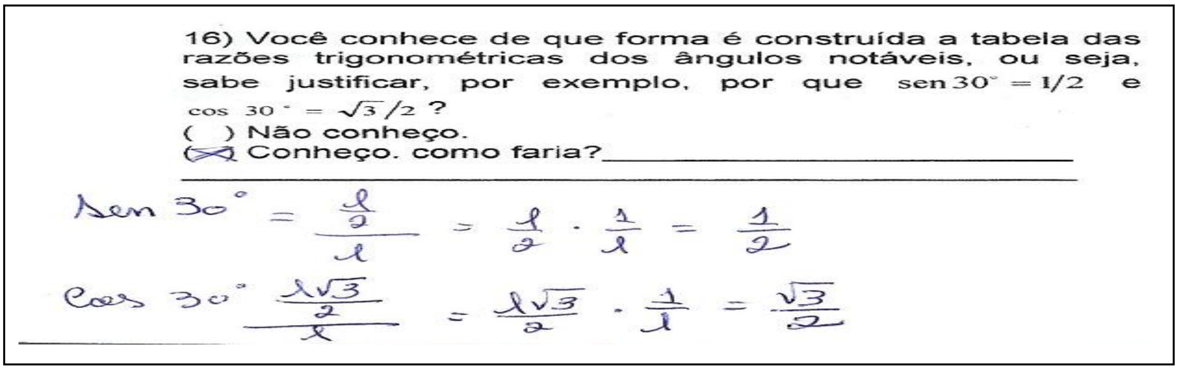
Gráfico 13 - Conhecimento do professor quanto à construção da tabela dos ângulos notáveis



Fonte: Próprio autor.

Apenas 29% dos professores declararam utilizar o quadrado e o triângulo equilátero para a formação da tabela. A maior parte dos professores apresenta esta tabela aos alunos sem a preocupação em justificar a sua utilização, impossibilitando mais uma vez o desenvolvimento de um aprendizado crítico e efetivo. A seguir, a exposição de parte de uma das poucas respostas adequadas feita pelo prof. I.

Figura 29 - Registro da resposta do professor I sobre a questão 16


16) Você conhece de que forma é construída a tabela das razões trigonométricas dos ângulos notáveis, ou seja, sabe justificar, por exemplo, por que $\operatorname{sen} 30^\circ = 1/2$ e $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$?

( ) Não conheço.

(X) Conheço. como faria?

$$\operatorname{Sen} 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

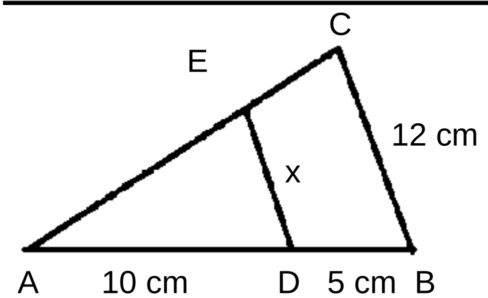
$$\operatorname{Cos} 30^\circ \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Fonte: Dado da pesquisa.

Propomos aos professores a questão a seguir, que se refere à última análise a respeito dos seus conhecimentos geométricos. Trata-se de uma questão simples de semelhança de triângulo, que pode estar em qualquer material didático de nono ano e que propositalmente também aplicamos na pesquisa com alunos.

Tabela 21 - Resultado sobre questão de semelhança respondida por professores de matemática

Dado o triângulo ABC abaixo e sabendo-se que CB//ED, AD=10 cm, DB=5 cm, CB=12 cm e x = ED, determine x.



a) 5 cm b) 6 cm
c) 7 cm d) 8 cm
e) 9 cm

Respostas adequadas	76,2%
Respostas inadequadas	19%
Não responderam	4,8%

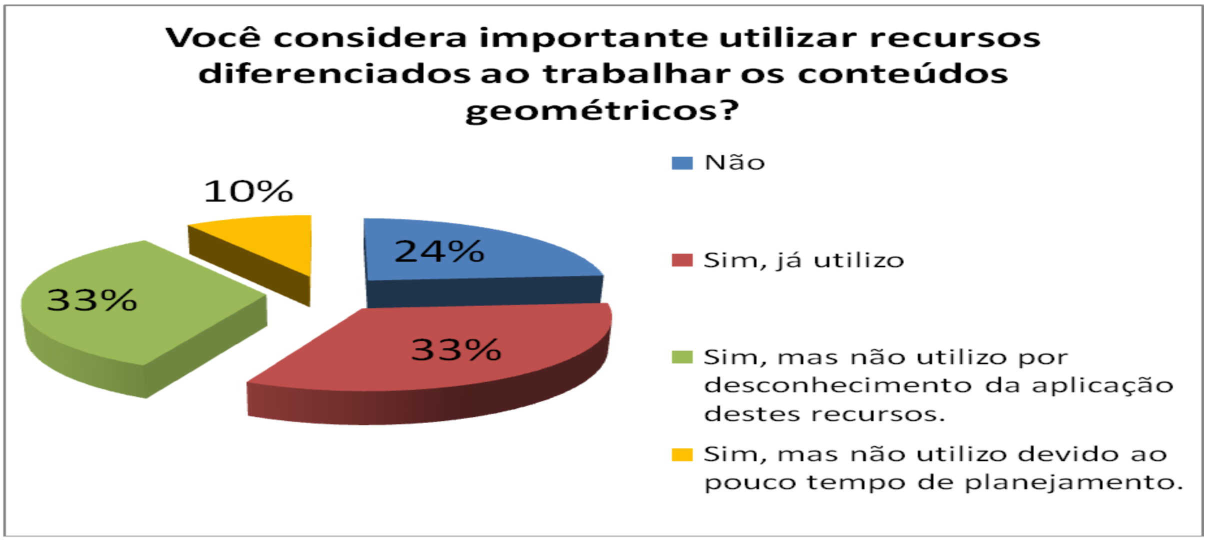
Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria dos docentes respondeu adequadamente a questão proposta. Todos os professores que responderam inadequadamente marcaram a opção b (6 cm), confirmando que parte dos profissionais não possui conhecimento mínimo para trabalhar com semelhança de triângulos, realçando a necessidade de readequarmos a preparação destes professores para que realizem com melhor desempenho suas atribuições em sala de aula.

3.2.5 Opiniões e atitudes do professor de matemática sobre o trabalho em sala de aula

Desejamos agora perceber como pensa o professor a respeito de sua abordagem na condução dos assuntos geométricos. Realizamos, para isto, questionamentos sobre a prática da utilização de recursos diferenciados que facilitem o aprendizado dos conceitos da geometria.

Gráfico 14 - Compreensão sobre a utilização de recursos diferenciados nas aulas de geometria

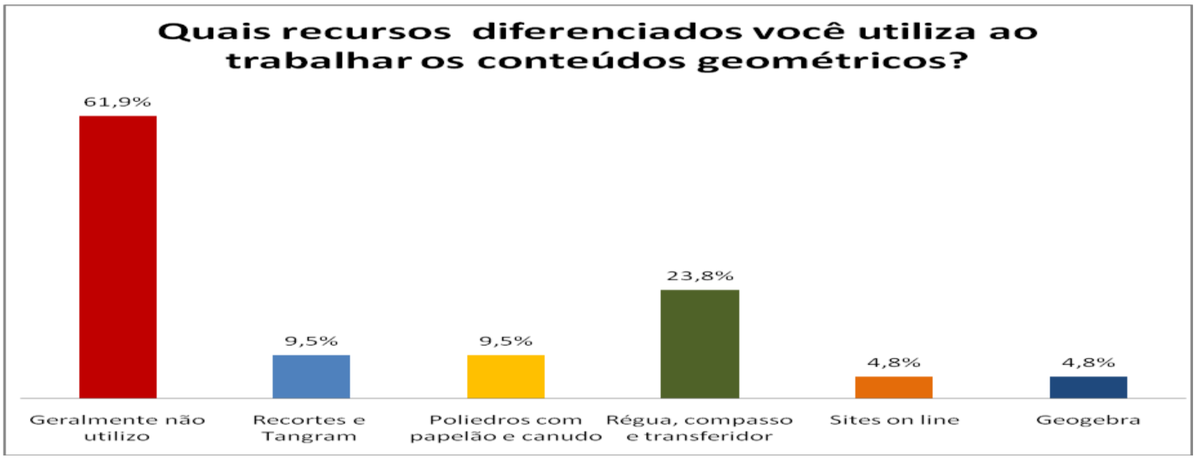


Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria dos profissionais considerou importante a utilização de recursos diferenciados na condução dos conteúdos. No entanto, o desconhecimento da aplicação desses novos métodos e o pouco tempo de planejamento fornecido são fatores que impedem o uso dessas ferramentas.

No gráfico seguinte, buscamos identificar os recursos diferenciados que os professores utilizam em suas aulas.

Gráfico 15 - Recursos diferenciados utilizados pelos professores nas aulas de geometria



Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar do exaustivo discurso acerca da necessidade da incorporação de recursos diferenciados nas aulas de matemática, notamos que a metodologia tradicional de apresentação ainda é rotina generalizada nas aulas, mesmo em assuntos de fácil associação com a realidade cotidiana, como é o caso da geometria.

Os dados indicam que cerca de 60% dos professores não utilizam qualquer recurso para dinamizar as aulas de geometria, e que pouquíssimos fazem uso dos recursos computacionais como instrumentos facilitadores no processo de ensino-aprendizagem. De encontro ao nosso estudo, que pretende propor uma abordagem diferente quanto à apresentação de alguns conteúdos geométricos utilizando o GeoGebra, podemos perceber que este software é pouco utilizado e até mesmo pouco conhecido pelos professores participantes da investigação. Deste modo, é necessário disseminar o conhecimento deste importante recurso entre os professores de matemática, por meio de cursos de formação e da inclusão destes métodos na formação básica dos futuros professores.

3.3 ANÁLISE GERAL DAS PESQUISAS

A pesquisa investigativa deste estudo verificou problemas que podem ser generalizados para muitas outras escolas ou regiões escolares do país, como mostra o resultado da última Prova Brasil, aplicada em 2011, na qual podemos comprovar que os principais conteúdos geométricos do nono ano são pouco assimilados pela população estudantil em geral, conforme os dados dos quadros seguintes apresentadas pelo SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica).

Quadro 1 - Níveis de competências geométricas de alunos de nono ano

Níveis de Desempenho dos alunos em Matemática.	O que os alunos conseguem fazer nesse nível e exemplos de competências relacionadas aos conteúdos geométricos.
Nível 9	Resolve problemas utilizando as relações métricas do triângulo retângulo; Reconhecem que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram. Reconhecem a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.
Nível 10	Estimam a medida de grandezas utilizando unidades de medida convencional ou não; Identificam as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (perímetro, lados e área) em transformações (ampliações ou reduções) de figuras poligonais usando malhas quadriculadas; Resolve problemas com: O cálculo de área e perímetro de figuras planas; ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales e utilizando o Teorema de Pitágoras.
Nível 11	Resolve problemas utilizando relações métricas do triângulo retângulo; Reconhecem figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade; Reconhecem propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos e figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

Fonte: Editada pelo autor com dados do INEP(Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas educacionais).

O quadro acima informa os conhecimentos geométricos que alunos de nono ano possuem conforme o nível de competência, enquanto o quadro seguinte apresenta a distribuição percentual dos alunos por competência em nível nacional.

Quadro 2 - Porcentagem de alunos por nível de Proficiência em Matemática dos alunos de 8ªsérie / 9º ano do ensino fundamental em todo Brasil – (Prova Brasil 2011)

UF	Nível de Proficiência											
	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9	Nível 10	Nível 11
BRASIL	0,19	1,61	4,96	9,81	15,18	18,72	18,06	14,53	9,09	4,86	2,27	0,72

Fonte: INEP

A escala de proficiência utilizada pelo SAEB varia de nível 0 a nível 12, progredindo conforme o nível de conhecimento avaliado. No quadro 2, o nível 12 de proficiência não foi contemplado pelo SAEB, pois os registros de alunos com proficiência neste nível foram desprezíveis. Estão destacados no quadro 1 os níveis de proficiência 9, 10 e 11, por apresentarem as competências relacionadas aos conteúdos geométricos de nono ano que este estudo aborda, sendo que cada nível contempla as competências dos níveis anteriores. Percebemos que apenas 7,85% dos alunos de nono ano apresentaram proficiência em relação aos conceitos geométricos apresentados a partir do nível 9, onde estão contemplados assuntos alvos deste trabalho, como: teorema de Pitágoras, relações métricas no triângulo retângulo, conceitos de semelhança e proporcionalidade. Verifica-se, portanto, que as deficiências apresentadas em nossa pesquisa investigativa representam de forma apropriada as dificuldades encontradas por alunos de todo o país, já que os resultados nacionais observados demonstram que os estudantes apresentam índices gerais insatisfatórios.

A investigação foi realizada por meio de pesquisas com alunos e professores sobre a condução dos assuntos geométricos em turmas de nono ano do ensino fundamental. Ela tornou evidente que o conhecimento precário ou o desconhecimento de parte significativa dos conteúdos geométricos analisados, mesmo por alunos de bom rendimento, são frutos de um ensino que renega a prática do aprendizado geométrico. Apresentaremos a seguir alguns problemas identificados em nosso estudo que dificultam o aprendizado da geometria nas salas de aula:

1- Prática tradicional de apresentação dos conteúdos geométricos através de exposições e exemplificações, seguidos de exercícios similares. Isto evidencia a pouca utilização de recursos diferenciados como material concreto e instrumentos tecnológicos na construção dos conhecimentos geométricos, favorecendo a desmotivação do aluno quanto ao aprendizado da matemática.

2- Conhecimento insuficiente da maioria dos alunos em relação aos conteúdos mínimos de geometria das séries anteriores, devido à prática comum entre os professores em privilegiar os assuntos aritméticos e algébricos.

3- Capitulação dos conteúdos. Condução inapropriada ao ensinar os assuntos geométricos, sendo trabalhados na maioria das vezes em tópicos sem interligação entre os conceitos, impossibilitando que o aluno faça conexões entre os assuntos estudados.

4- Memorização de fórmulas e procedimentos. Considerável parte dos professores de matemática afirmou apresentar fórmulas sem qualquer justificativa ou sem a realização de atividades que cooperem na percepção do aluno quanto ao conhecimento que está começando a adquirir, dificultando a observação da essência do conteúdo estudado.

5- Postura discriminatória em relação às demonstrações geométrica em geral. Boa parte dos profissionais admite considerar os alunos imaturos para as demonstrações, subestimando-os mesmo naquelas provas mais simples, dificultando, assim, a familiarização com a generalização de ideias e com o rigor matemático.

6- Fuga dos assuntos geométricos. Vários profissionais restringem o trabalho com os conteúdos geométricos, colocando-os ao fim do ano letivo, quando geralmente o tempo é mais restrito, favorecendo o abandono destes conceitos. Além disso, observamos que é prática, entre os profissionais, antecipar conhecimentos do ensino médio em substituição da execução do trabalho com os conhecimentos geométricos específicos de nono ano.

Todos estes problemas expostos na aprendizagem da geometria do nono ano ficam mais evidentes devido ao que percebemos como principal fator que desencadeia as maiores deficiências deste processo de aprendizagem, que é a formação geométrica insuficiente do professor, como apontado em nosso referencial teórico.

Verificamos em nossa pesquisa que a maioria dos profissionais é formada em cursos afins da área de exatas, nos quais não são contempladas disciplinas específicas de geometria. Sua formação geométrica foi adquirida exclusivamente quando alunos de ensino fundamental e médio, reproduzindo como professores as mesmas deficiências a que foram expostos durante a sua formação básica. Outro fato observado na pesquisa com docentes é que, apesar de vários profissionais possuírem formação superior com especializações e com complementações pedagógicas em matemática, a maioria esmagadora afirma não ter estudado conceitos geométricos específicos em qualquer destes cursos.

Essa análise é assustadora, pois os problemas com o ensino da geometria já não são novidade, já que ocorrem há décadas e estão se reproduzindo a cada geração, visto que não há uma ruptura que modifique este “ciclo vicioso”, no qual alunos com formação geométrica insuficiente tornam-se professores com formação geométrica inadequada. A reprodução deste processo tortuoso foi fomentada pela própria atuação governamental que, devido à deficiência de profissionais da educação, possibilitou a formação de licenciados em cursos rápidos através da resolução nº 2, de 26 de junho de 1997 do Conselho Nacional de Educação, que dispõe sobre os programas especiais de formação pedagógica de docentes para as disciplinas do currículo do ensino fundamental, do ensino médio e da educação profissional em nível médio, como exposto abaixo:

> Art. 1º A formação de docentes no nível superior para as disciplinas que integram as quatro séries finais do ensino fundamental, o ensino médio e a educação profissional em nível médio, será feita em cursos regulares de licenciatura, em cursos regulares para portadores de diplomas de educação superior e, bem assim, em programas especiais de formação pedagógica estabelecidos por esta Resolução. Parágrafo único: Estes programas destinam-se a suprir a falta nas escolas de professores habilitados, em determinadas disciplinas e localidades, em caráter especial. (CNE- resolução nº2, 1997, p.1)

Assim, o poder público “cria” mais professores de matemática para atender à demanda existente, bastando para isso que o candidato a professor tenha curso superior na área de exatas ou em áreas afins e faça uma complementação de estudos de cunho pedagógico. Dessa forma, inúmeros administradores, contadores, economistas e outros passaram a professores de matemática, mesmo tendo em seu currículo de curso superior, poucas horas efetivas de conteúdo matemático e, principalmente, nenhum conteúdo de geometria euclidiana que fundamentasse o trabalho com geometria plana e espacial em sala de aula de ensino fundamental e médio. Podemos constatar este fato ao visualizar o quadro a seguir, referente à grade curricular do curso de Administração de uma conceituada instituição capixaba. O currículo deste curso possui cinco disciplinas que exploram assuntos matemáticos de forma mais específica. Contudo, é uma formação insuficiente para o trabalho docente em sala de aula, já que o professor de matemática deve possuir conhecimento específico dos conteúdos que irá trabalhar, como é o caso dos assuntos geométricos.

Quadro 3 - Grade curricular de um curso de Administração

1º Período Filosofia Introdução à Administração Língua Portuguesa Matemática I Organização do Trabalho Intelectual	**2º Período** Estatística I Matemática II Psicologia Sociologia Teorias da Administração I
3º Período Comportamento Organizacional Direito Empresarial Estatística II Matemática Financeira Teorias da Administração II	**4º Período** Administração de Recursos Humanos I Contabilidade Economia Organização, Sistemas e Métodos Pesquisa Operacional
5º Período Administração da Produção I Administração de Recursos Humanos II Administração de Sistemas de Informação Administração e Análise de Custos Análise de Demonstrativos Financeiros Conjuntura Econômica	**6º Período** Administração Da Produção II Administração de Marketing I Administração de Recursos Patrimoniais e Materiais Administração Financeira e Orçamentária I Estratégia de Gestão
7º Período Administração de Marketing II Administração Financeira e Orçamentária II Empreendedorismo Logística Pesquisa Aplicada	**8º Período** Comércio Exterior Jogos De Empresa Tópicos Especiais I Tópicos Especiais II

Fonte: Faesa

Podemos observar que na grade curricular apresentada não há nenhuma disciplina de cunho geométrico. Desse modo, verificamos que parte dos professores advindos de cursos afins da área de exatas não possuem formação adequada em relação à geometria. A complementação pedagógica também se mostra insuficiente para tornar um profissional de área afim em um professor de matemática, já que desenvolve assuntos exclusivamente pedagógicos e não matemáticos, como exposto na grade curricular abaixo:

Quadro 4 - Grade curricular de um curso de complementação pedagógica em matemática

DISCIPLINAS	CH
Interfaces do Relacionamento Humano – O papel da comunicação dentro da escola.	**60**
Metodologia do Relatório de Estágio	**40**
Avaliação no Processo Ensino-Aprendizagem	**60**
Didática e Técnicas de Ensino	**60**
Panorama Histórico, Filosófico e Sociológico da Educação	**40**
Políticas da Educação Nacional para Ensino Fundamental e Médio	**120**
Estágio e Orientação	**330**

Fonte: IASES - Instituto de Educação do Espírito Santo.

Dessa maneira, o professor de matemática formado em áreas afins da área de exatas não estuda geometria em seu curso superior e nem no curso de habilitação pedagógica em matemática, gerando profissionais inacabados quanto ao conhecimento geométrico. A necessidade desesperada de docentes na área de educação, especialmente em matemática, cooperou com o surgimento de profissionais que ocupassem muitos dos cargos docentes disponíveis nas escolas de todo o país; entretanto, também favoreceu a renegação da geometria devido à formação geométrica deficiente de muitos desses novos professores.

CAPÍTULO 4
PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1 OBJETIVOS

Verificamos, através de nossa pesquisa com alunos e professores, que o ensino-aprendizagem da geometria ainda é deficiente em parte de nossas escolas, principalmente aquele destinado ao nono ano do ensino fundamental. A partir desta constatação, propomos uma sequência didática que contribua com a melhoria desse panorama, por meio da utilização do GeoGebra como ferramenta metodológica na exploração de importantes conceitos geométricos pertencentes ao currículo dessa série.

Percebemos, em nossa investigação, que é prática de muitos docentes conduzirem os conteúdos relacionados à geometria do nono ano de forma capitulada e não interligada a conceitos previamente estudados. A mera exposição dos assuntos, seguida por exemplos e exercícios, impossibilitando a construção mais ampla do aprendizado pelo aluno, inspirou-nos a construir de forma articulada a evolução de parte desses conceitos. Os conteúdos abordados em nossa sequência serão: teorema de Tales, semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria. Ainda que sejam assuntos inter-relacionados, na prática de sala de aula são apresentados inúmeras vezes de forma isolada, sem qualquer conexão entre seus conceitos.

Nossa proposta será conduzida por cinco atividades seriadas, relacionadas à introdução dos cinco assuntos que desejamos trabalhar. Desejamos que as atividades sejam iniciadas através de procedimentos básicos e de simples observação das características do objeto de estudo, sendo seguidas por ideias que possibilitem ao aluno formular concepções, validar resultados e institucionalizar o conhecimento por meio de demonstrações e aplicações. Nesse contexto, as afinidades diferenciadas de cada aluno devem ser respeitadas e o professor deverá posicionar-se como mediador, intervindo na construção do aluno apenas quando necessário.

É importante destacar que as atividades propostas por este estudo estão relacionadas exclusivamente à introdução dos conteúdos que, em nossa análise, apresentou-se deficitária quanto à forma de condução existente em boa parte das aulas relacionadas a estes conceitos. Lembramos que após esta abordagem introdutória é necessário que os assuntos sejam desenvolvidos adequadamente, pois os recursos diferenciados como o que estamos propondo não surtirão efeito se trabalhados isoladamente, já que são importantes para que o aluno perceba a essência do conhecimento que esta prestes a adquirir. Dessa forma, o raciocínio deve ser estimulado continuamente após as atividades iniciais, possibilitando a real construção do saber através de passos significativos e coerentes, do início ao fim do conteúdo estudado, para em seguida reiniciarmos o processo com o próximo assunto a ser discutido.

4.2 PÚBLICO ALVO

O público alvo, que norteará nosso trabalho, é composto principalmente por alunos do último ano do ensino fundamental, mas também pode ser direcionado como revisão para alunos do ensino médio.

4.3 PRÉ-REQUISITO

Antes de iniciar qualquer trabalho relacionado à sugestão da sequência que apresentaremos, é necessário verificar o conhecimento prévio dos alunos relacionado aos segmentos proporcionais, já que os assuntos de trabalho necessitam da noção adequada de proporcionalidade. Caso os alunos tenham conhecimento limitado em relação a este assunto, é importante realizar um trabalho preliminar, visto que a inexistência deste poderá inutilizar ou dificultar todo o esforço realizado na condução da sequência.

Quanto aos elementos geométricos, é necessário que o aluno esteja ciente do significado de ponto, reta, retas paralelas e transversais e noção de ângulos em geral. Os alunos utilizarão a calculadora para agilizar os experimentos; portanto, é necessário alertá-los sobre sua utilização em relação às aproximações e à interpretação do ponto como vírgula. Por fim, é importante que os estudantes tenham em mente as ideias relacionadas ao conhecimento de números reais, áreas retangulares e equações. Todos esses conteúdos estarão expostos individualmente em cada atividade da proposta.

4.4 MATERIAIS E TECNOLOGIAS

Para construirmos nossa proposta de sequência didática dos conteúdos citados, acionaremos a utilização de instrumentos tecnológicos por meio do software GeoGebra, aproveitando o interesse e a interação que os alunos atuais possuem em relação às tecnologias. Como já exposto, a escolha do GeoGebra como instrumento de aprendizado resulta de seu caráter dinâmico em relação a recursos geométricos, facilitando a manipulação de experimentos que possam favorecer a percepção do aluno na construção do conhecimento.

Proporemos atividades no GeoGebra, através de roteiros por nós elaborados, direcionando-as por meio de procedimentos que os alunos deverão realizar ao manipular o software. Ao manusear, clicando e arrastando, o aluno poderá observar propriedades com o seu próprio controle, para que, em seguida, possa concluir ideias através de suas percepções. Lauro (2007) afirma que um software de geometria dinâmica:

> [...] permite construir e explorar objetos interativamente e, uma vez construídos, as figuras podem ser movimentadas conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a diferentes casos, constituindo-se numa ferramenta muito rica para a validação experimental de fatos geométricos (LAURO, 2007, p.18) .

4.5 RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS

Em nossa proposta, o professor terá um papel importante, mas secundário no que se trata do momento de realização da atividade. Aqui, o conteúdo não será transmitido como em uma aula tradicional, na qual os alunos olham para o professor e para o quadro tentando compreender aquela informação que, muitas vezes, é apresentada como uma verdade sem qualquer justificativa. Em contraposição a essa metodologia tradicional, o trabalho com o GeoGebra favorece a construção do conhecimento pelo próprio aluno, que passará a ser um agente de condução do aprendizado, dividindo esta responsabilidade, que antes era exclusiva do professor. Dessa forma, o aluno poderá aprender interagindo com o programa, utilizando suas próprias percepções e criando uma possibilidade maior de aprendizado.

Para que a sequência produza seus objetivos é necessário que o estudante manipule o software, verifique propriedades e registre em roteiro suas observações. Assim, poderá, ao fim de cada atividade experimental, perceber os fenômenos matemáticos e estabelecer conclusões próprias. Essas conclusões podem ser adequadas ou inadequadas e deverão ser mediadas pelo professor, possibilitando que o estudante caminhe sozinho aprendendo com suas próprias observações. Desse modo, acreditando que os estudantes estarão mais envolvidos com o novo conceito de estudo, o avanço do conteúdo poderá ser desenvolvido com alunos mais instigados em relação ao aprendizado do novo assunto.

A proposta apresentada refere-se à introdução de alguns conteúdos geométricos, não tendo por finalidade sequenciar de início a fim um único conteúdo, pois consideramos que o trabalho bem estruturado na apresentação introdutória dos conceitos é de fundamental importância para que o assunto possa ser desenvolvido com melhores resultados. Outra observação está relacionada à importância da utilização de algumas demonstrações geométricas durante ou após a introdução de alguns conteúdos, acostumando o aluno com o rigor matemático. Contudo, as demonstrações devem ser utilizadas com bom senso, já que seu uso indiscriminado, sem a preparação de uma base adequada, poderá desestimular ao invés de motivar o aprendizado.

4.6 DIFICULDADES PREVISTAS

Inicialmente, alertamos sobre o primeiro impacto da primeira atividade no GeoGebra. Apesar dos alunos de hoje estarem habituados com os recursos tecnológicos, possivelmente muitos não conheçam o programa; portanto, devemos ter calma, pois o aluno será apresentado a uma metodologia diferente com um diferente software. Para que a atividade não se perca, é preciso preparar os alunos previamente, levando-os ao laboratório antes do início efetivo da primeira situação didática, apresentando-os ao GeoGebra, para que tenham um primeiro contato suave com o novo instrumento de aprendizado.

Devido à prática tradicional que criou a acomodação dos alunos em receber informações diretas, ou seja, “sem pensar”, apenas reproduzindo as afirmações dos professores, provavelmente vários deles afirmarão que não sabem realizar a atividade proposta, pois nunca estudaram aquilo anteriormente. Logo, é importante sensibilizar os estudantes antes do início da atividade, esclarecendo que a mesma é um método diferente do que estão acostumados, uma vez que se trata de uma experiência utilizando recursos tecnológicos e que introduzirá um novo conteúdo. Sendo assim, aconselhamos o professor a incentivar a independência do aluno na realização da atividade, evitando informá-los acerca de possíveis resultados, possibilitando que as dificuldades iniciais sejam um aprendizado para que as atividades posteriores ocorram de forma mais desenvolta.

Outra observação a ser feita é a prática muito usual entre os alunos em reproduzir respostas idênticas. Nela, os estudantes simplesmente copiam a resposta do colega sem qualquer reflexão. Para coibir este comportamento, podemos utilizar a atividade como avaliativa, na qual se analisa a tentativa de compreensão e não a resposta final, mesmo porque poucas respostas serão idênticas, visto que cada aluno manipulará de forma diferente o seu software, obtendo assim resultados distintos.

Algumas escolas não possuem laboratórios de informática adequados para individualizar a atividade, fazendo com que a mesma seja trabalhada em dupla ou mais alunos. Nestas situações, podemos distribuir os estudantes com afinidade matemática, formando pares com outros que apresentam limitações, lembrando que todos devem manipular a atividade individualmente, mas podem colaborar entre si.

4.7 DESCRIÇÃO GERAL DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

4.7.1 Atividade 1: Teorema de Tales

- <u>Conceitos Prévios necessários</u>

Noções de ponto, reta, segmento, retas paralelas, retas transversais, segmentos proporcionais e ângulos. É importante trabalhar essas ideias antes da atividade, especialmente sobre as proporcionalidades. Na atividade de demonstração do teorema de Tales também é necessário que o aluno tenha bom conhecimento do conjunto dos números reais.

- <u>Tempo de aula</u>

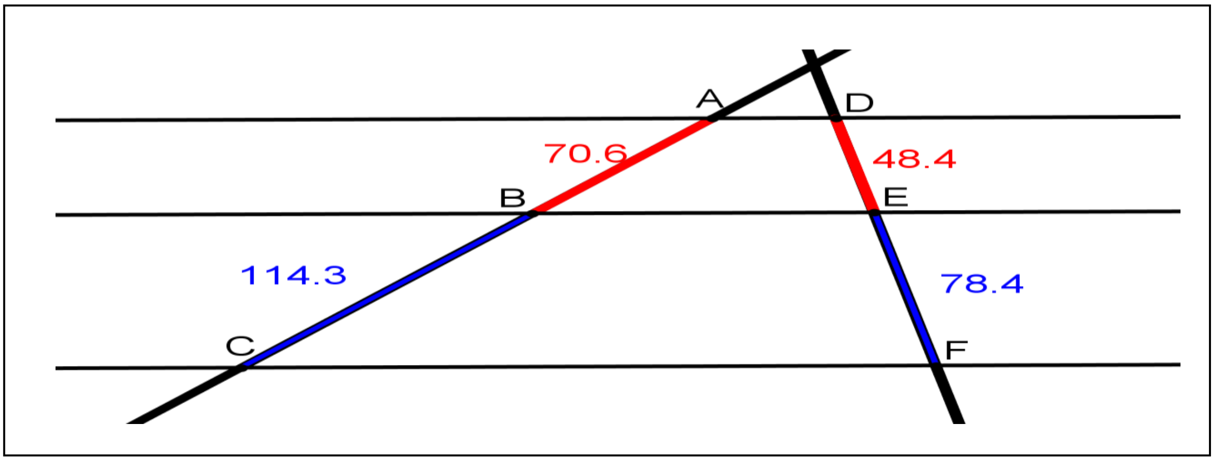
Uma aula é suficiente para desenvolver a primeira parte da atividade no laboratório. O fechamento da atividade poderá ocorrer ao fim da mesma ou na aula seguinte em sala comum. Na segunda parte desta atividade trabalharemos a demonstração do teorema de Tales. Caso o professor deseje utilizá-la, necessitará de outra aula.

- <u>Descrição da Atividade:</u>

<u>Parte 1</u>

Almejamos que o aluno seja capaz de compreender o significado geométrico do teorema de Tales, verificando através de experimentos, a proporcionalidade entre segmentos. O estudante será conduzido a determinar razões entre segmentos proporcionais formados a partir de duas transversais que intersectam um feixe de retas paralelas, como na figura seguinte:

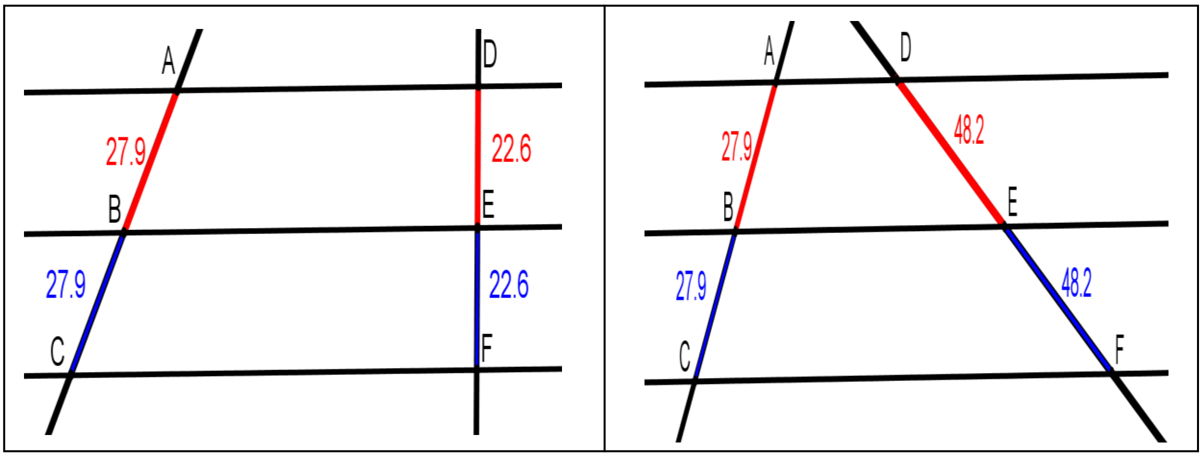
Figura 30 - Arquivo Teorema de Tales



Fonte: Próprio autor.

Inicialmente, queremos que o aluno perceba que a congruência entre segmentos de uma transversal implica na congruência dos segmentos de outra transversal qualquer, quando determinados por retas paralelas, como nas imagens abaixo:

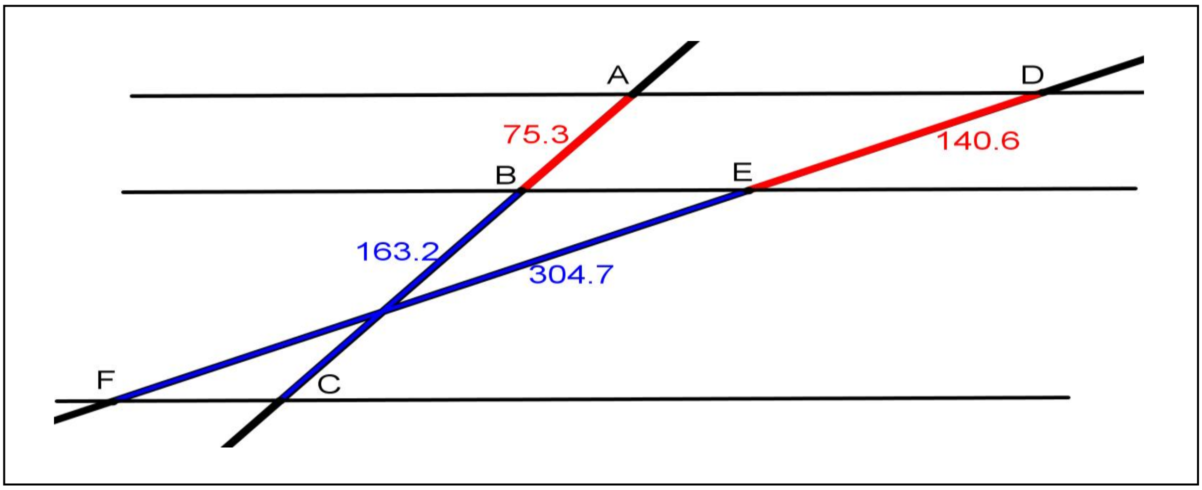
Figura 31 - Arquivo Teorema de Tales (Congruência de segmentos)



Fonte: Próprio autor.

Seguindo algumas orientações, o aluno manipulará o GeoGebra por meio de movimentos dos pontos de interseções sobre as transversais e sobre as paralelas, determinando novos segmentos e obtendo novos registros, que conduzirão o estudante a perceber que a proporcionalidade entre os segmentos ocorrem independentemente da posição dos pontos de interseções das transversais com as paralelas, como exposto na imagem a seguir:

Figura 32 - Arquivo Teorema de Tales, após manipulação



Fonte: Próprio autor.

O último item da atividade refere-se ao primeiro exercício em que o aluno poderá utilizar os conceitos estudados, sendo importante uma boa condução por parte do professor ao realizar inferências que cooperem no esclarecimento de eventuais dúvidas. Expomos abaixo o roteiro de trabalho desta primeira atividade.

ATIVIDADE 1 – TEOREMA DE TALES

<u>Parte 1</u>

1) Abra a calculadora e o arquivo Teorema de Tales. Você visualizará três retas paralelas e duas retas transversais. Observe que os pontos: A, B, C, D, E e F são interseções entre as retas e que $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{DE}, e\ \overline{EF}$ são segmentos.

a) Clique e arraste o ponto C, de tal forma a determinar que o segmento $\overline{BC}$ seja congruente (mesma medida) ao segmento $\overline{AB}$. O que ocorreu com os segmentos $\overline{DE}\ e\ \overline{EF}$?

- Clique no ponto D e arraste várias vezes. O que ocorreu com os segmentos $\overline{DE}\ e\ \overline{EF}$?

- O que você percebeu que ocorre com os segmentos de uma transversal quando os segmentos de outra são congruentes?

b) Clique no ponto C e arraste sobre a transversal. Observe as medidas dos segmentos, anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ e $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

- O que você percebeu que ocorreu com as duas razões?

c) Clique no ícone ▷ e pause em seguida. Observe as medidas, anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ e $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

- O que você percebeu que ocorreu com as duas razões?

d) Clique nos pontos de interseção modificando sua figura como desejar. Em seguida, observe as medidas, anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ e $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

- O que você percebeu que ocorreu com as duas razões?

e) Clique no ícone ▷ e pause em seguida. Observe as medidas, anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ e $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DF}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

- O que você percebeu que ocorreu com as duas razões?

f) Modifique a imagem como desejar. Observe as medidas, anote-as e determine as razões encontradas.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$ e $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$

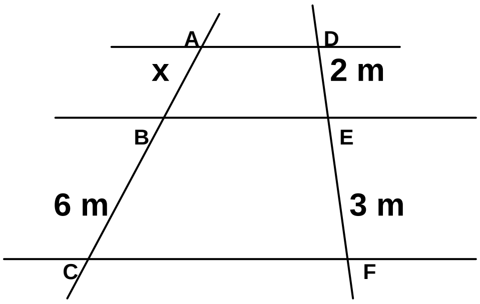
$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$ e $\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$ e $\frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$

- Os pares de razões encontradas são iguais?

g) O que você pode concluir observando todas as suas respostas nos itens anteriores?

h) Utilizando o que você aprendeu, qual seria a medida do segmento x=AB abaixo? Justifique sua resposta.



Roteiro de trabalho - Teorema de Tales(Parte 1).

Após o fim da atividade, é relevante discutir com os alunos alguns aspectos pertinentes aos registros que observaram, deixando que os mesmos exponham suas ideias e suas conclusões, sendo o professor um mediador neste importante momento, conduzindo e construindo com os alunos as principais características e propriedades pertinentes ao teorema de Tales.

Dependendo do público de trabalho, é interessante que o professor faça uma análise sobre a possível formalização do teorema, pelo menos em relação às razões comensuráveis, já que as demonstrações com segmentos incomensuráveis são de difícil compreensão por parte dos alunos. No entanto, entendemos que o maior objetivo a ser alcançado está na compreensão dos alunos em relação à essência da ideia do teorema de Tales, que pode se tornar mais evidente com a utilização da parte 1 desta atividade. Na parte 2, propomos uma forma de trabalhar a demonstração do teorema de Tales com os alunos em relação aos segmentos comensuráveis, deixando a critério do professor a sua utilização.

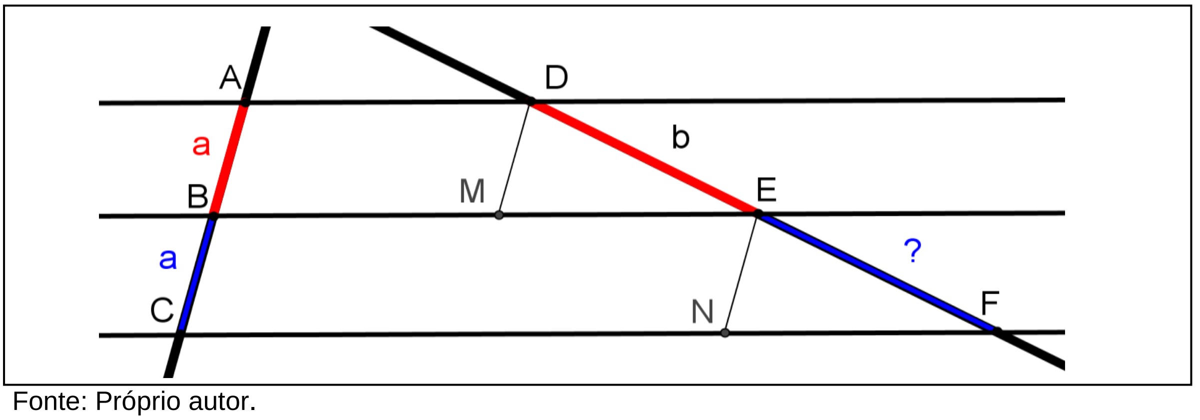
Parte 2

A demonstração do teorema de Tales necessita do conhecimento de congruência de triângulos e de ângulos formados por interseções entre transversais e paralelas. Através da experimentação na parte 1 da atividade, o aluno tem a oportunidade de perceber que segmentos congruentes em uma transversal determinam segmentos congruentes em outra transversal qualquer, quando determinados por retas paralelas. Podemos demonstrar esta observação por meio da congruência de triângulos, como exposto abaixo:

- Demonstração

Dados os segmentos $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = a$, $\overline{DE} = b$ e $\overline{EF}$ sobre transversais e determinados por retas paralelas, queremos mostrar que $\overline{EF} = b$. Tracemos à reta $\overline{AC}$, paralelas pelos pontos D e E, determinando as interseções M e N sobre $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, respectivamente, como ilustramos a seguir:

Figura 33 - Arquivo Demonstração do teorema de Tales (passo 1)

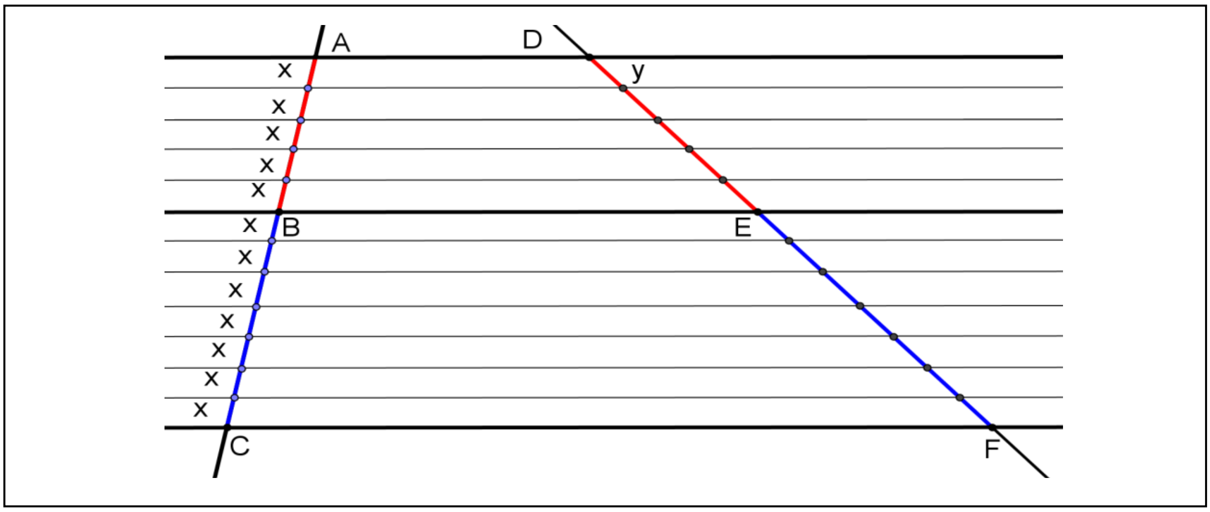


Fonte: Próprio autor.

Como os quadriláteros $ABMD$ e $BCNE$ são paralelogramos, temos que $\overline{DM} = \overline{AB} = a$ e $\overline{EN} = \overline{BC} = a$. Pela correspondência angular entre retas paralelas, temos que $D\hat{M}E = E\hat{N}F$ e $D\hat{E}M = E\hat{F}N$. Logo $M\hat{D}E = N\hat{E}F$. Pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos que DME e ENF são triângulos congruentes. Logo $\overline{EF} = \overline{DE} = b$.

Agora, podemos demonstrar o teorema de Tales em relação aos segmentos comensuráveis. Apresentaremos, aos alunos, retas transversais, cortadas por paralelas, determinando segmentos côngruos como na imagem abaixo:

Figura 34 - Arquivo Demonstração do teorema de Tales (passo 2)



Fonte: Próprio autor.

Existe uma unidade de medida x que divide os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em partes iguais. Da atividade anterior o aluno provavelmente percebeu que quando as retas paralelas formam segmentos congruentes em uma transversal, determinam segmentos congruentes em outra transversal qualquer. Assim, encontraremos nos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ o mesmo número de partes iguais com uma unidade de medida y, como exposto a seguir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7} \quad e \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{5y}{7y} = \frac{5}{7} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \qquad \text{e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5x}{12x} = \frac{5}{12} \quad e \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{5y}{12y} = \frac{5}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$$

O roteiro dessa atividade segui abaixo:

<u>Parte 2</u>

1) Nesta atividade, você irá demonstrar o teorema de Tales para segmentos com medidas racionais.

a) Abra o arquivo Demonstração do Teorema de Tales (passo 2). Você visualizará duas transversais cortadas por um feixe de retas paralelas formando segmentos congruentes de medida x com a primeira transversal.

- Se um dos segmentos formados pelas interseções das paralelas com a outra transversal tem medida y, quais serão as medidas dos outros segmentos? Justifique.

b) Determine as medidas dos segmentos:

$\overline{AB}$ =______; $\overline{BC}$ =______; $\overline{DE}$ =______; $\overline{EF}$ =______; $\overline{AC}$ =______ e $\overline{DF}$ =______

c) Determine as razões abaixo:

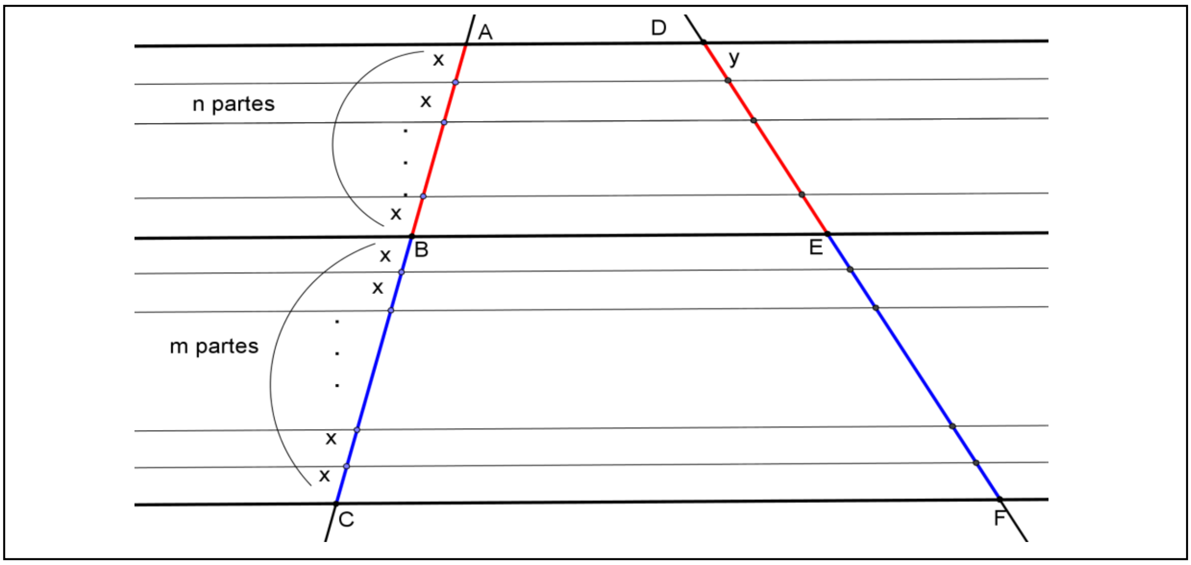
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad}$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d) O que você pode concluir a respeito das razões encontradas? São iguais?

Roteiro de trabalho - Teorema de Tales (Parte 2).

Da mesma forma, podemos dividir os segmentos $\overline{AB}$ em n partes congruentes e $\overline{BC}$ em m partes congruentes, todos com medida x, obtendo n partes congruentes em $\overline{DE}$ e m partes congruentes em $\overline{EF}$, todos com medida y. O aluno será instruído a generalizar através da seguinte ilustração:

Figura 35 - Arquivo Demonstração do teorema de Tales (passo 3)



Fonte: Próprio autor.

Assim, o professor poderá auxiliar o aluno a concluir o teorema de Tales no caso de segmentos comensuráveis, obtendo as razões abaixo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{nx}{mx} = \frac{n}{m} \quad e \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{ny}{my} = \frac{n}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \quad \text{e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{nx}{(n+m)x} = \frac{n}{n+m} \quad e \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{ny}{(n+m)y} = \frac{n}{n+m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$$

Considerável parte dos alunos certamente apresentará dificuldade na compreensão da demonstração, cabendo ao professor visualizar o nível de aprendizado de seus alunos, adaptando a atividade conforme as necessidades do público envolvido. Segue abaixo o roteiro complementar desta atividade.

2) Abra o arquivo Demonstração do Teorema de Tales (passo 3). Você visualizará a mesma situação do item anterior, generalizando a quantidade de segmentos de medidas x sobre uma das transversais, determinados pelas paralelas.

a) Determine as medidas dos segmentos:

$\overline{AB}$ =______; $\overline{BC}$ =______; $\overline{DE}$ =______; $\overline{EF}$ =______; $\overline{AC}$ =______ e $\overline{DF}$ =______

- Determine as razões abaixo:

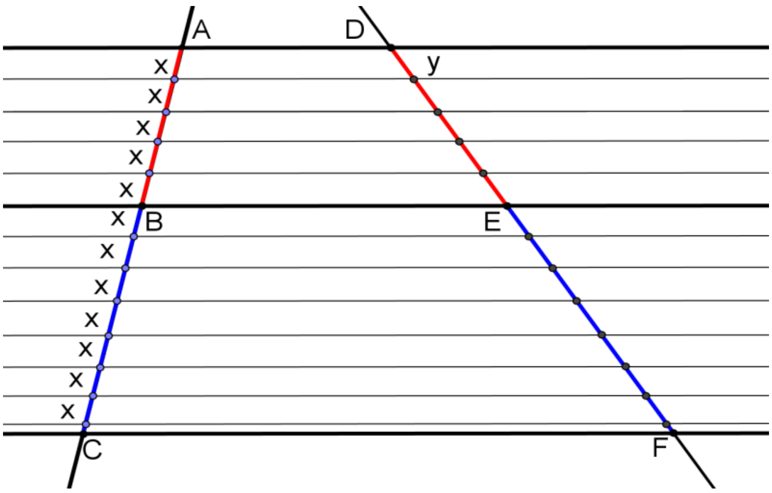
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \_\_\_\_ \quad \_\_\_\_$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

b) O que você pode concluir a respeito das razões encontradas? São iguais?

Complemento do roteiro de trabalho - Teorema de Tales (Parte 2).

Ao fim da demonstração o professor pode ainda estender para os casos dos segmentos incomensuráveis, citando aos alunos a possibilidade das medidas dos segmentos serem números irracionais, informando que a demonstração desse caso foge aos objetivos de estudo no nível fundamental. A ilustração seguinte pode facilitar a visualização do aluno na compreensão de que um segmento $\overline{BC}$ de medida irracional não pode ser decomposto em um número inteiro de partes com medidas racionais.

Figura 36 - Arquivo Demonstração do teorema de Tales (passo 4)



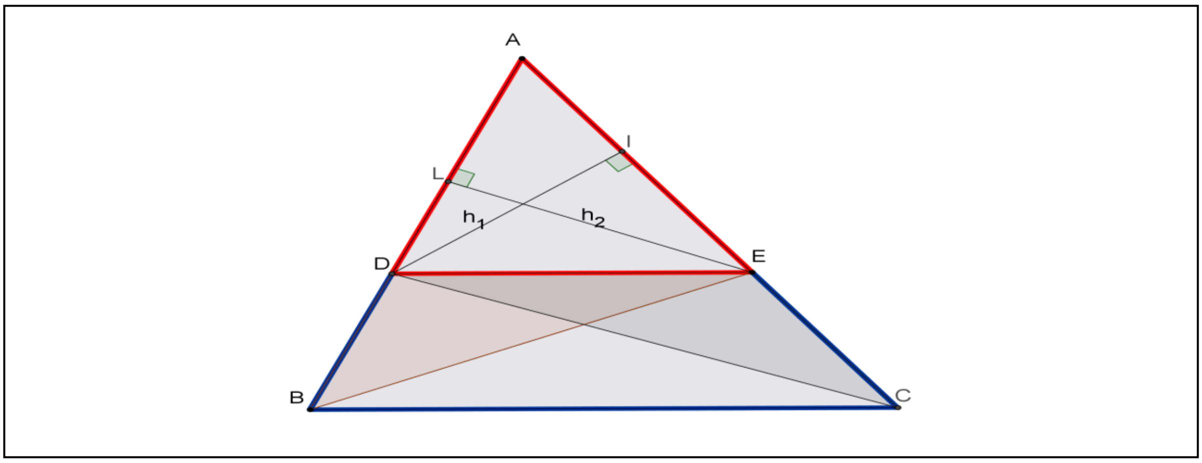
Fonte: Próprio autor.

Caso tenhamos alunos curiosos sobre a demonstração do teorema, sugerimos a demonstração por áreas. Essa demonstração é bem mais simples, pois evita a incomensurabilidade de uma forma direta, bastando que o aluno tenha uma boa noção sobre áreas de triângulos. Contudo, é importante destacar que a demonstração da fórmula da área do triângulo como metade do produto da medida da base pela medida da altura, no caso em que a base ou a altura é incomensurável com o segmento unitário, normalmente não é apresentada aos alunos.

- Demonstração:

Dados o triângulo ABC e o segmento $\overline{DE}$, paralelo a $\overline{BC}$, onde D e E são pontos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, como ilustramos na figura a seguir:

Figura 37 - Arquivo Demonstração do teorema de Tales por áreas



Fonte: Próprio autor.

Os triângulos BDE e CED têm a mesma área, já que possuem a mesma base $\overline{DE}$ e mesma altura, pois $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$.

Tracemos a altura h_1 em relação à base $\overline{AE}$ do triângulo ADE e a altura h_2 em relação à base $\overline{AD}$ do mesmo triângulo ADE. Obtemos que:

$$A(\Delta ADE) = \frac{\overline{AD}.h_2}{2} \qquad \text{e} \qquad A(\Delta ADE) = \frac{\overline{AE}.h_1}{2}$$

Observemos que h_1 também é altura do triângulo CED e que h_2 também é altura do triângulo BDE. Assim, podemos determinar razões entre áreas como:

$$\frac{A(\Delta ADE)}{A(\Delta BDE)}=\frac{\overline{AD}.h_2}{\overline{DB}.h_2} \quad \text{e} \quad \frac{A(\Delta ADE)}{A(\Delta CED)}=\frac{\overline{AE}.h_1}{\overline{EC}.h_1}$$

Como os triângulos BDE e CED têm mesma área, temos que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

Da mesma forma:

$$\frac{A(\Delta ABE)}{A(\Delta BDE)}=\frac{\overline{AB}.h_2}{\overline{DB}.h_2} \quad \text{e} \quad \frac{A(\Delta ACD)}{A(\Delta CED)}=\frac{\overline{AC}.h_1}{\overline{EC}.h_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}.$$

4.7.2 Atividade 2: Semelhança de triângulos

- Conceitos Prévios necessários

Identificação de ângulos e noções proporcionalidade. Caso os alunos tenham realizado a atividade 1, do teorema de Tales, já estarão com boa noção em relação aos segmentos proporcionais.

- Tempo de aula

São necessárias três aulas para o desenvolvimento da atividade no laboratório. Dividimos esta atividade em três partes e sugerimos que em cada aula seja desenvolvida uma delas, flexibilizando conforme o rendimento da turma.

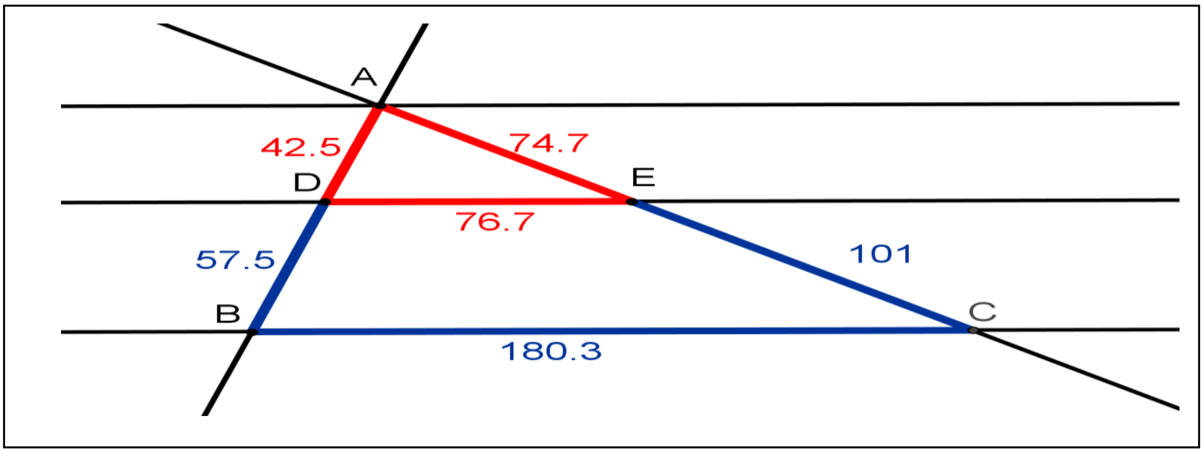
- Descrição da Atividade

Esta atividade tem por objetivo introduzir o conceito de semelhança de triângulos, utilizando segmentos proporcionais aproveitando as ideias trabalhadas no teorema de Tales. Devido às observações realizadas no desenvolvimento deste estudo, constatamos que a semelhança de triângulos sofre grande rejeição, o que é consequência das dificuldades encontradas por professores na condução deste conceito e dos alunos em compreendê-lo. Por esse motivo, é necessário que a introdução deste conteúdo seja ministrada de forma gradativa e organizada, para possibilitar uma melhor compreensão do aluno. Assim, dividimos esta atividade em três partes, que podem ser organizadas em duas, três ou quatro aulas, conforme a evolução particular de cada turma. Desejamos que o aluno perceba passo a passo a construção do conceito de semelhança por meio de suas próprias manipulações e observações, direcionados pelos roteiros que apresentaremos a seguir. Descreveremos agora o desenvolvimento da proposta para cada aula.

Parte 1

Nosso objetivo inicial é utilizar o conhecimento estudado no teorema de Tales e relacioná-lo à semelhança de triângulos. Para isso, trabalharemos a princípio com o teorema de Tales, através de transversais que formam triângulos semelhantes. Ao abrir o arquivo indicado no GeoGebra, o aluno visualizará a imagem a seguir:

Figura 38 - Arquivo Semelhança de triângulos (Parte 1)



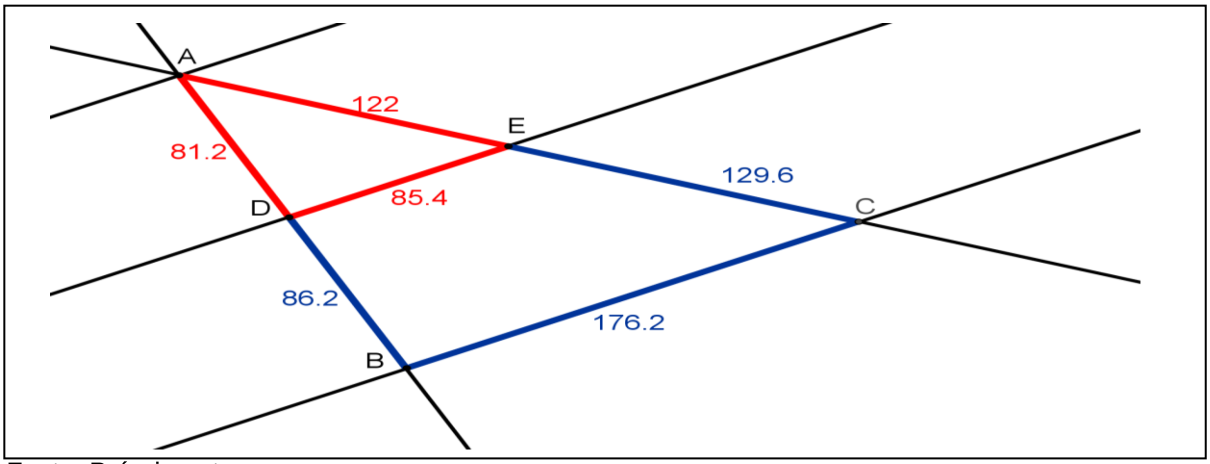
Fonte: Próprio autor.

Por intermédio do roteiro, queremos que o estudante observe as proporcionalidades entre os lados dos triângulos a partir das proporções estudadas no teorema de Tales. Incluímos no roteiro o estudo segmentos não proporcionais que geram muitos erros na resolução de problemas de semelhança de triângulos, visto que é muito comum os alunos utilizarem as razões abaixo como iguais:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \neq \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad e \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \neq \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

Desejamos que o aluno perceba a falsa proporção entre os segmentos que determinam a razão $\overline{DE}/\overline{BC}$ e reflita sobre os motivos que justifiquem essa observação. Convidaremos o aluno a manipular os triângulos, conduzindo-o a verificar razões iguais, introduzindo a ideia de semelhança de triângulos, como mostra a imagem abaixo, após uma possível manipulação.

Figura 39 - Arquivo Semelhança de triângulos (Parte 1), após manipulação



Fonte: Próprio autor.

Após o término da primeira parte da atividade é muito importante que o professor realize uma discussão, incentivando os alunos a comentarem suas respostas, de forma a esclarecer eventuais dúvidas e ratificando a proporcionalidade observada na semelhança de triângulos. Segue o roteiro da parte 1 dessa atividade.

ATIVIDADE 2 – SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Parte 1

1) Abra a calculadora e o arquivo Semelhança de Triângulos (Parte 1). Você visualizará duas retas paralelas cortadas por transversais, formando dois triângulos.

a) Clique no ponto A e modifique os triângulos como desejar. Observe as medidas dos segmentos abaixo indicados. Anote-as e determine as razões encontradas.

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$; $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$ e $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$

- Quais das razões que você encontrou são iguais?

- Todos os segmentos utilizados são lados de triângulos? Justifique.

b) Clique no ponto B e modifique os triângulos como desejar. Observe as medidas dos segmentos abaixo indicados. Anote-as e determine as razões encontradas.

$\dfrac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$; $\dfrac{\overline{EC}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$ e $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$

- Quais das razões que você encontrou são iguais?

- Todos os segmentos utilizados são lados de triângulos? Justifique.

c) Observando suas respostas anteriores, certamente houve razão distintas das demais. Qual foi a razão? Pense e tente justificar por que apenas essa razão não manteve a igualdade.

d) Clique no ponto E e modifique os triângulos como desejar. Observe as medidas dos segmentos abaixo indicados. Anote-as e determine as razões encontradas.

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$; $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$ e $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$

- Quais das razões que você encontrou são iguais?

- Todos os segmentos utilizados são lados de triângulos? Justifique.

e) Quando os três pares de lados de dois triângulos são proporcionais, dizemos que estes triângulos são **semelhantes**. Observe novamente o item d. Os três pares de lados dos triângulos ABC e ADE são proporcionais?

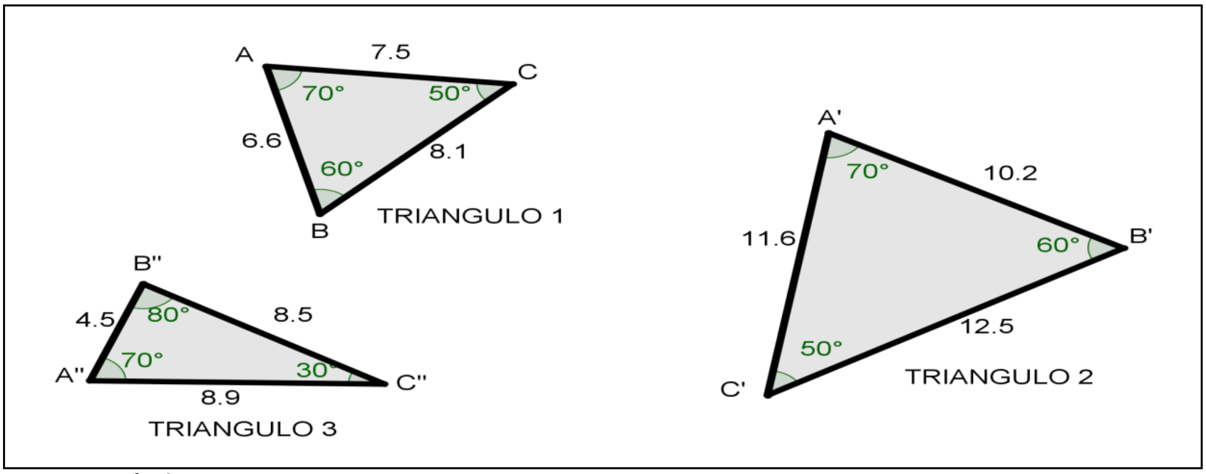
- Os triângulos ABC e ADE são semelhantes? Justifique.

Roteiro de trabalho - Semelhança de triângulos (Parte 1).

Parte 2

Nesta aula, desejamos que o aluno compreenda a congruência dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes, conduzindo-o a observar, através de experimentação, que as razões iguais entre lados de um triângulo estão diretamente associadas à correspondência entre seus ângulos. Para isso, utilizaremos três triângulos, sendo dois deles semelhantes, que deverão ser identificados pelos próprios alunos, conforme a imagem a seguir:

Figura 40 - Arquivo Semelhança de triângulos (Parte 2)



Fonte: Próprio autor.

Trata-se de uma atividade com mais visualização e menos manipulação. Utilizaremos triângulos semelhantes obtendo razões iguais e razões distintas entre seus lados com o propósito de motivar o aluno a concluir que dois triângulos semelhantes possuem lados homólogos proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. Utilizando o roteiro abaixo, é nosso intuito levar o aluno a perceber que as razões iguais são obtidas de lados opostos a ângulos congruentes, o que fundamentará a resolução de qualquer problema de semelhança de triângulos.

Parte 2

2) Abra o arquivo Semelhança de Triângulos(Parte 2). Você visualizará três triângulos (*ABC*, *A'B'C'* e *A''B''C''*) com ângulos e lados dados.

a) Observe os triângulos e Informe o ângulo oposto de cada segmento dado.

Segmento	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\overline{A'B'}$	$\overline{B'C'}$	$\overline{A'C'}$	$\overline{A''B''}$	$\overline{B''C''}$	$\overline{A''C''}$
Ângulo									

b) Observe as medidas dos lados dos triângulos 1 e 2. Anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

- O que você percebeu que ocorreu com as três razões? Todas são iguais? justifique.

c) Observando ainda os mesmos lados dos triângulos 1 e 2, anote-os abaixo e determine as razões encontradas.

$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'B'}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{B'C'}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{A'C'}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

- O que você percebeu que ocorreu com as três razões? São iguais? Justifique.

d) Observando suas respostas anteriores, justifique com suas palavras por que nos mesmos triângulos encontramos razões iguais e razões distintas. (Dica: observe os ângulos)

e) Aprendemos, na parte 1 da atividade, que duas figuras são semelhantes quando seus três pares de lados são proporcionais. Os triângulos 1 e 2 são semelhantes? Justifique.

f) O que você pode afirmar sobre a semelhança e os ângulos dos triângulos 1 e 2?

g) Observe as medidas dos lados dos triângulos 1 e 3. Anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\frac{\overline{AB}}{A''B''} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; $\frac{\overline{BC}}{B''C''} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ e $\frac{\overline{AC}}{A''C''} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

- Os triângulos 1 e 3 são semelhantes? Justifique.

- O que você pode afirmar sobre os ângulos dos triângulos 1 e 3?

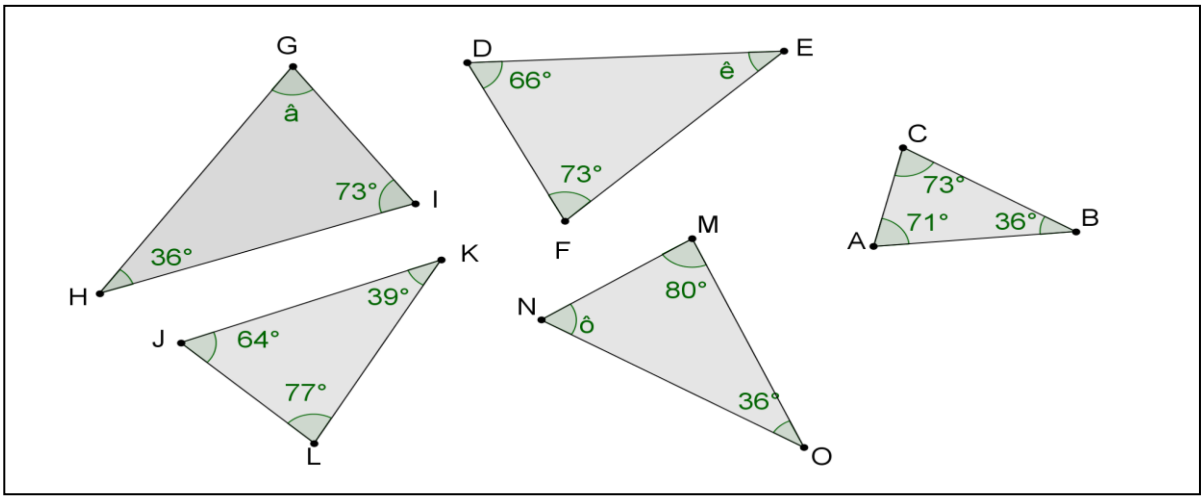
h) O que você percebeu que ocorre com os ângulos, quando os triângulos são semelhantes?

i) Observe os ângulos dos triângulos 2 e 3. Esses triângulos são semelhantes? Justifique.

Roteiro de trabalho - Semelhança de triângulos (Parte 2).

Ao fim da parte dois, sugerimos um exercício simples de visualização no próprio GeoGebra, como exposto na imagem a seguir, com o objetivo de finalizar a aula com a verificação da compreensão da semelhança a partir da observação dos ângulos nos triângulos.

Figura 41 - Arquivo Exercício 1 (Semelhança de triângulos)



Fonte: Próprio autor.

Neste exercício possibilitamos também uma revisão sobre o estudo de ângulos em triângulos e uma primeira percepção sobre o caso AA de semelhança. Em seguida, expomos o roteiro de trabalho deste exercício.

j) Abra o arquivo Exercício 1 – Semelhança de triângulos. Observe os ângulos dos triângulos.

- Determine as medidas dos ângulos desconhecidos: â, ê e ô.

- Quais triângulos são semelhantes? Justifique.

k) Podemos afirmar que dois triângulos são semelhantes, caso identifiquemos uma de duas condições, sendo uma em relação aos lados e outra em relação aos ângulos. Quais são essas condições?

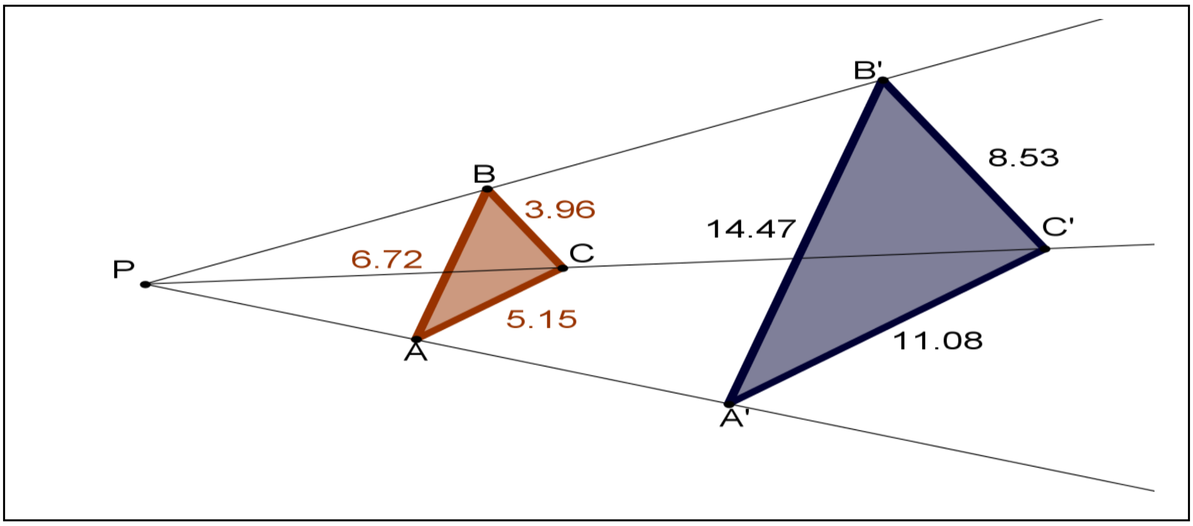
L) Quando não são informados os lados dos triângulos, quantos ângulos devem ser dados para você verificar a semelhança entre eles? Justifique.

Complemento do roteiro de trabalho - Semelhança de triângulos (Parte 2).

Parte 3

Após definirmos a semelhança de triângulos nas aulas 1 e 2, iremos trabalhar com razões de semelhança relacionando-as a reduções e ampliações, encaminhando a percepção sobre a constante de proporcionalidade, relacionando o valor da constante com uma redução ou uma ampliação. Nesta atividade, o aluno visualizará triângulos semelhantes formados por mesmas semirretas a partir de um único ponto, como exposto na figura a seguir:

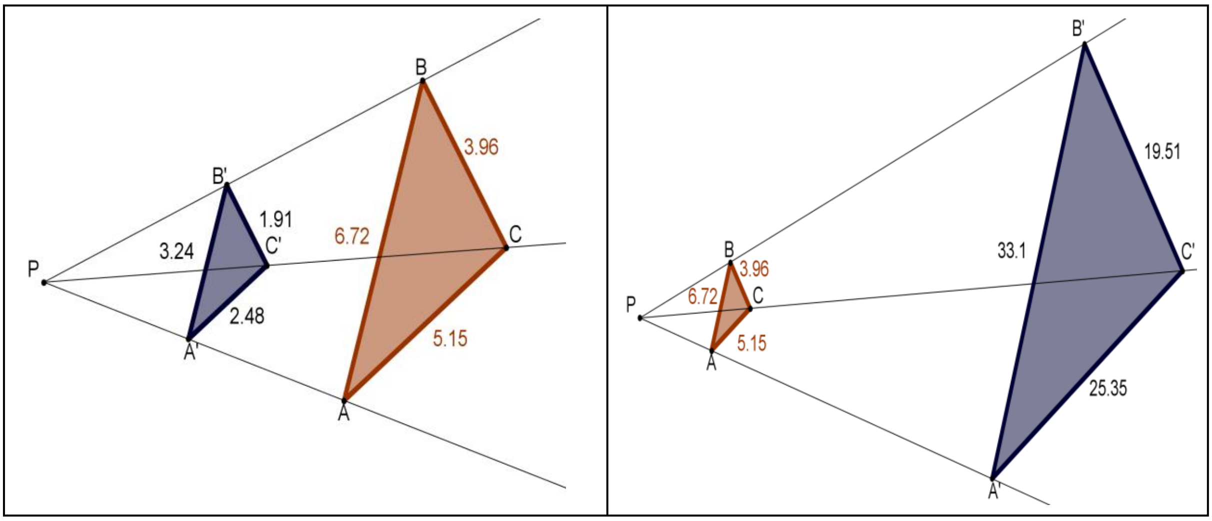
Figura 42 - Arquivo Semelhança de triângulos (Parte 3)



Fonte: Próprio autor.

A atividade é iniciada com o reforço da compreensão de segmentos proporcionais da semelhança de triângulos, sendo articulada a partir daí a razão de semelhança (constante de proporcionalidade) para a construção de reduções e ampliações, conforme as imagens a seguir:

Figura 43 - Redução e ampliação no arquivo Semelhança de triângulos(Parte 3)



Fonte: Próprio autor.

As instruções de condução desta parte da atividade estão detalhadas conforme o roteiro exposto abaixo:

Parte 3

3) Abra o arquivo Semelhança de Triângulos(Parte 3). Você visualizará dois triângulos (ABC e $A'B'C'$) com lados dados.

a) Observe as medidas dos lados dos dois triângulos. Anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\quad}{\quad} = \underline{\qquad}$; $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\quad}{\quad} = \underline{\qquad}$ e $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\quad}{\quad} = \underline{\qquad}$

- Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes? Justifique.

- Caso os triângulos sejam semelhantes, todas as razões entre os lados correspondentes são iguais, gerando o que chamamos de **razão de semelhança** ou **constante de proporcionalidade**. Se os triângulos são semelhantes, informe qual é a razão de semelhança encontrada.

- O triângulo $A'B'C'$ é uma redução ou uma ampliação do triângulo ABC? Justifique.

b) Clique no ponto *B'* do triângulo *A'B'C'* e arraste, de forma a realizar uma redução em relação ao triângulo *ABC*. Observe as medidas dos lados dos dois triângulos. Anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$; $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$ e $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

- Os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são Semelhantes? Caso afirmativo, determine a razão de semelhança.

- A razão de semelhança é maior ou menor que 1?

c) Clique no ponto *B'* do triângulo *A'B'C'* e arraste, de forma a realizar uma ampliação em relação ao triângulo *ABC*. Observe as medidas dos lados dos dois triângulos. Anote-as abaixo e determine as razões encontradas.

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$; $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$ e $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

- Os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são Semelhantes? Caso afirmativo, determine a razão de semelhança.

- A razão de semelhança é maior ou menor que 1?

d) De acordo com suas respostas, qual a relação existente entre redução, ampliação e as razões de semelhança (constante de proporcionalidade)?

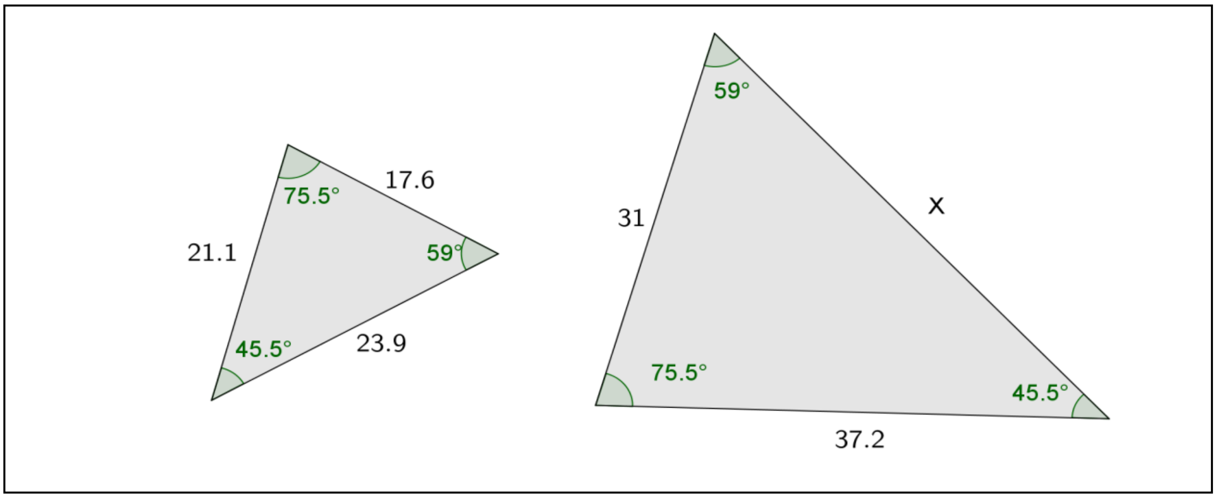
- Caso você queira obter uma figura qualquer reduzida e semelhante a uma figura original, você deverá multiplicar por uma constante positiva menor ou maior que 1?

- E se você desejar ampliar a figura original. Como deverá proceder?

Roteiro de trabalho - Semelhança de triângulos (Parte 3).

Finalizando nossa atividade, apresentamos ao fim da parte 3, um exercício comum de semelhança de triângulos, para que o aluno comece a utilizar os conceitos aprendidos na resolução de problemas desse conteúdo. Abaixo, a imagem do exercício proposto:

Figura 44 - Arquivo Exercício 2 (Semelhança de triângulos)



Fonte: Próprio autor.

Segue o roteiro desse último exercício:

e) Abra o arquivo Exercício 2 – Semelhança de triângulos. Os triângulos apresentados são duas peças de madeira. Esses triângulos são semelhantes? Justifique.

- Caso sejam semelhantes, qual é a constante de proporcionalidade?

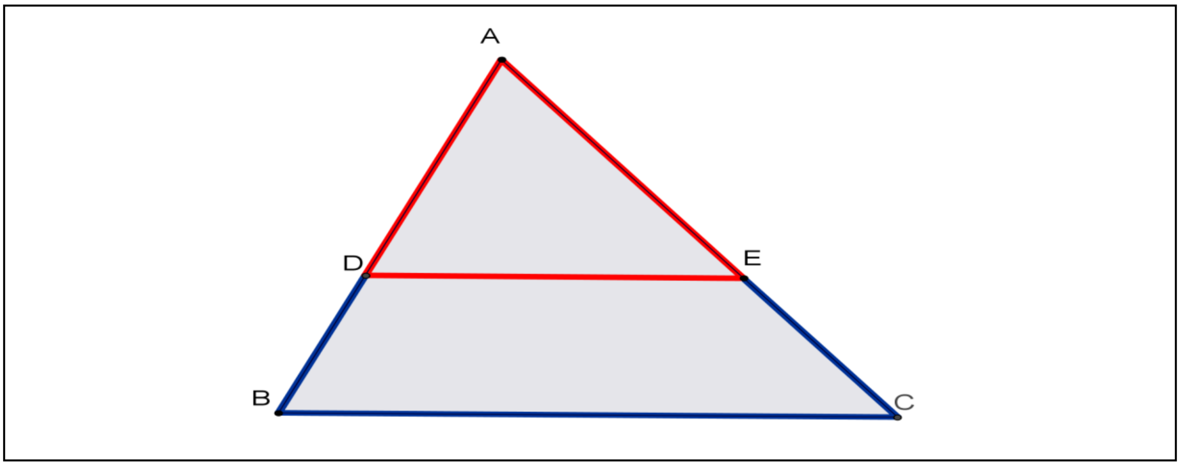
- Utilizando o que você aprendeu, tente descobrir a medida do lado x.

Complemento do roteiro de trabalho - Semelhança de triângulos (Parte 3).

Acreditamos que, a partir dessa atividade introdutória, o desenrolar do conteúdo possa ser construído de forma satisfatória. Depois de realizado o trabalho aqui sugerido, é interessante que a definição da semelhança de triângulos seja generalizada para as demais figuras geométricas planas. Outra observação pertinente é que não tratamos dos casos específicos de semelhança de triângulo, pois nossa abordagem refere-se à compreensão da essência do significado deste conceito como fundamentação necessária para que, em seguida, o professor possa apresentar os casos de semelhança.

Para familiarizar o aluno com o rigor matemático, sugerimos a seguinte demonstração: Provar que os triângulos ABC e ADE (formados por paralelas e transversais conforme figura 38, pág. 97) são dois triângulos com ângulos congruentes e lados proporcionais. Assim, pela definição de semelhança obtida na experimentação, os triângulos são semelhantes.

Figura 45 - Demonstrando a semelhança de triângulos (I).



Fonte: Próprio autor.

- Demonstração

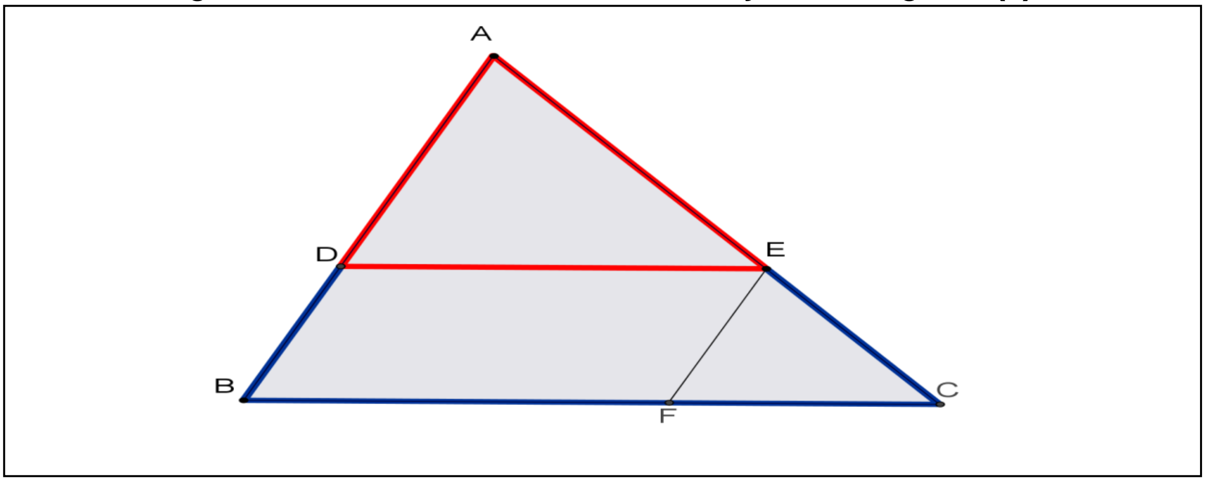
Do paralelismo entre $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$, temos que:

$A\hat{B}C = A\hat{D}E$; $A\hat{C}B = A\hat{E}D$ e $B\hat{A}C = D\hat{A}C$. Logo ABC e ADE são triângulos semelhantes, já que temos ângulos congruentes.

Por Tales, também podemos demonstrar a semelhança entre os dois triângulos. temos que: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ (I)

Tracemos uma paralela a $\overline{AB}$, passando pelo ponto E e interceptando $\overline{BC}$ em F, como ilustra a imagem seguinte:

Figura 46 - Demonstrando a semelhança de triângulos (II).



Fonte: Próprio autor.

Novamente por Tales, obtemos: $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$ (II). Como $BDEF$ é um paralelogramo, $\overline{DE} = \overline{BF}$.

Desta forma, podemos concluir por (I) e (II) que: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

Provamos assim, que os triângulos possuem ângulos homólogos congruentes e lados correspondentes proporcionais. Logo são semelhantes.

4.7.3 Atividade 3: Relações métricas no triângulo retângulo

- Conceitos Prévios necessários

Identificação de ângulos, noções de proporcionalidade e equações.

- Tempo De aula

São necessárias três aulas de atividade no laboratório, variando conforme o ritmo da turma. Dividimos esta atividade em três partes, sendo que a parte 3 pode ser trabalhada em sala comum, caso não seja possível finalizá-la no laboratório.

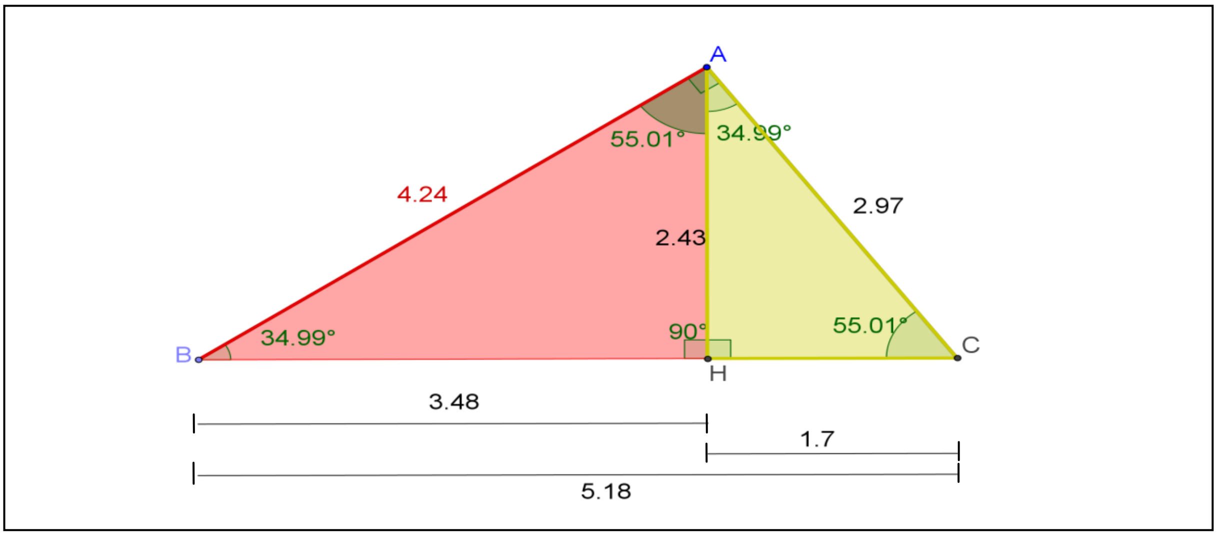
- Descrição da Atividade

Inicialmente não utilizaremos as relações métricas diretamente, pois não queremos que o aluno memorize fórmulas sem compreender que resultam da semelhança de triângulos, sendo até mesmo desnecessárias. Subdividimos essa atividade em três partes, com o objetivo de incrementar o conhecimento em cada uma delas, através de um início de observação levando o aluno à demonstração das principais relações métricas no triângulo retângulo.

Parte 1

Na primeira parte da atividade o aluno visualizará um triângulo retângulo com ângulos e lados dados, incluindo as projeções dos catetos e a altura em relação à hipotenusa, como exposto a seguir:

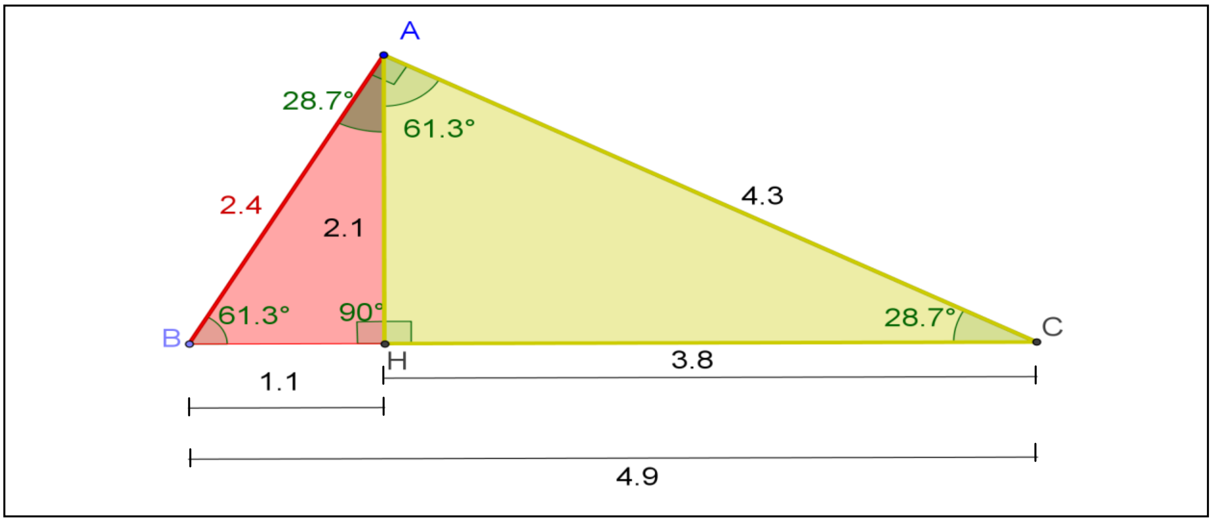
Figura 47 - Arquivo Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 1).



Fonte: Próprio autor.

A manipulação consta de uma experimentação, na qual o aluno será convidado a observar a existência de três triângulos retângulos e a modificar a figura dada, verificando que em um triângulo retângulo a semelhança se mantém independentemente da manipulação feita, como indica a figura abaixo, que representa uma imagem depois de suposta manipulação:

Figura 48 - Arquivo Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 1), após manipulação.



Fonte: Próprio autor.

Ao fim da primeira parte, apresentamos aos alunos os elementos do triângulo retângulo: catetos, hipotenusa, altura e projeções, realizando uma simples atividade de reconhecimento desses elementos e instigando-os a perceber a relação entre projeções e hipotenusa. O roteiro desta atividade segue abaixo:

ATIVIDADE 3 - RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Parte 1

1) Abra a calculadora e o arquivo Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 1). Temos três triângulos retângulos na figura: ΔABC, ΔHBA e ΔHAC.

a) Você consegue enxergá-los? Faça um desenho de cada um deles separadamente.

Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3

b) Informe os ângulos dos triângulos:

∆ABC:_____ ;_____ e _____	∆HBA:_____ ; _____ e _____	∆HAC: _____ ; _____ e ____

- Esses triângulos são semelhantes? Por quê?

c) Clique no ponto B e modifique o triângulo. Informe os novos ângulos encontrados.

∆ABC:_____ ;_____ e _____	∆HBA:_____ ; _____ e _____	∆HAC: _____ ; _____ e ____

- Esses triângulos são semelhantes? Por quê?

d) Clique no ponto A e modifique o triângulo. Informe os novos ângulos encontrados.

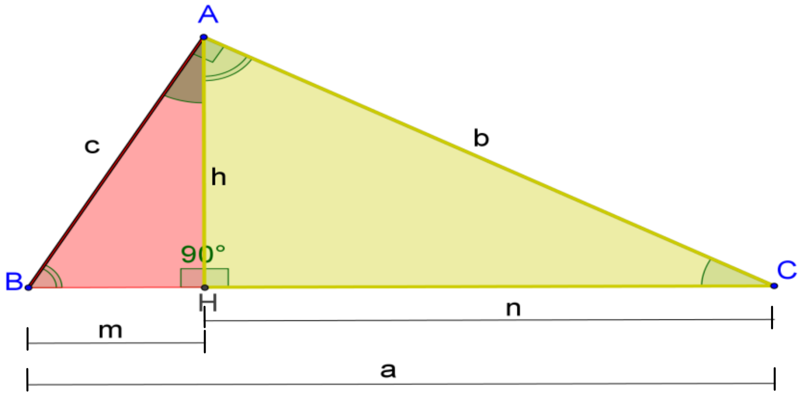
∆ABC:______;______e_____	∆HBA:_____;______e_____	∆HAC:_____; ______e_____

- Esses triângulos são semelhantes? Por quê?

e) Observe os resultados anteriores. O que você percebeu que ocorre com os ângulos quando você modifica o triângulo? Os triângulos sempre serão semelhantes?

f) Observe a figura abaixo. Trata-se de um triângulo retângulo e seus principais elementos.

a - Hipotenusa
b - Cateto
c - Cateto
h - Altura
m - Projeção do cateto c
n - Projeção do cateto b



g) Modifique como quiser o seu triângulo no GeoGebra e informe os valores de cada elemento:

a=________ ; b=________; c=________; h=________; m=_________; n=________

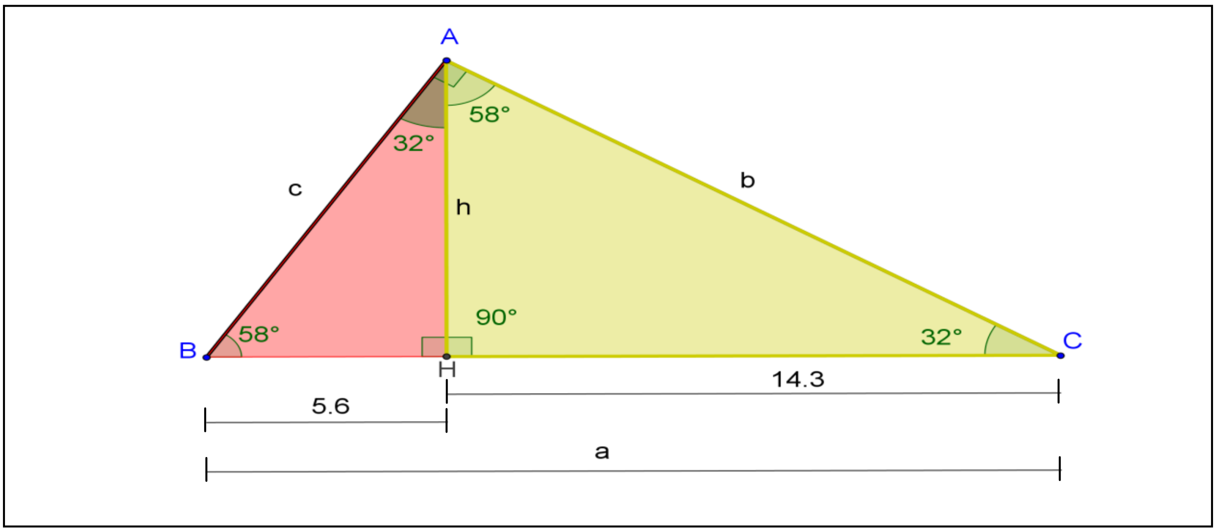
- Existe uma relação entre os segmentos a, m e n. Que relação é esta?

Roteiro de trabalho - Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 1).

Parte 2

Após o aluno perceber a semelhança existente nos três triângulos retângulos, desejamos que ele construa razões determinadas por lados proporcionais. Para isso, apresentamos outro triângulo, sendo informadas apenas as medidas das projeções, como na imagem abaixo.

Figura 49 - Arquivo Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 2)



Fonte: Próprio autor.

Convidaremos o aluno a determinar, por meio de semelhança de triângulos, as medidas desconhecidas. Para que organize melhor as suas possíveis razões nos três triângulos, iremos propor a utilização de um quadro com o objetivo de facilitar a percepção das possíveis proporcionalidades existentes.

Cada aluno será induzido a modificar o triângulo inicial para que não fique preso a resultados de colegas. Por intermédio do roteiro de trabalho solicitaremos que o aluno faça um esboço de cada um dos triângulos separadamente para melhor visualização dos dados específicos de cada um deles. Em seguida, proporemos que preencham o quadro abaixo, observando os ângulos correspondentes e as medidas dos lados opostos a cada ângulo:

Quadro 5 - Construção das proporcionalidades em triângulos retângulos.

	Ângulo reto (90º)	Ângulo 1 (_____)	Ângulo 2 (______)
Lados do triângulo 1			
Lados do triângulo 2			
Lados do triângulo 3			

Fonte: Próprio autor.

Utilizando os dados do triângulo da figura 49 e completando o quadro proposto, teremos o seguinte quadro de lados proporcionais.

Quadro 6 - Construção das proporcionalidades com dados do triângulo da figura 49.

	Ângulo reto (90º)	Ângulo 1 (32º)	Ângulo 2 (58º)
Lados do triângulo 1	19,9	c	b
Lados do triângulo 2	c	5,6	h
Lados do triângulo 3	b	h	14,3

Fonte: Próprio autor.

Montado o quadro, o aluno poderá visualizar, de forma bem organizada, as várias proporcionalidades existentes entre os lados dos triângulos, podendo, a partir dele, escolher a proporção que deverá utilizar para encontrar as medidas desconhecidas. Nesse momento o professor poderá intervir, motivando o aluno a determinar as razões e o orientando no cálculo da primeira medida. Destacamos nos quadros seguintes as possíveis proporções utilizadas pelos alunos.

Quadro 7 - Destaque da proporcionalidade que determina a altura *h*.

	Ângulo reto (90º)	Ângulo 1 (32º)	Ângulo 2 (58º)
Lados do triângulo 1	19,9	*c*	*b*
Lados do triângulo 2	*c*	5,6	*h*
Lados do triângulo 3	*b*	*h*	14,3

Fonte: Próprio autor.

Quadro 8 - Destaque da proporcionalidade que determina o cateto *c*.

	Ângulo reto (90º)	Ângulo 1 (32º)	Ângulo 2 (58º)
Lados do triângulo 1	19,9	*c*	*b*
Lados do triângulo 2	*c*	5,6	*h*
Lados do triângulo 3	*b*	*h*	14,3

Fonte: Próprio autor.

Quadro 9 - Destaque da proporcionalidade que determina o cateto *b*.

	Ângulo reto (90º)	Ângulo 1 (32º)	Ângulo 2 (58º)
Lados do triângulo 1	19,9	*c*	*b*
Lados do triângulo 2	*c*	4,12	*h*
Lados do triângulo 3	*b*	*h*	14,3

Fonte: Próprio autor.

A seguir, expomos o roteiro de trabalho da segunda parte da atividade, que acabamos de relatar acima.

Parte 2

2) Abra o arquivo Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 2). Você visualizará um triângulo retângulo com valores de dois elementos dados. Iremos descobrir os valores dos outros elementos.

a) Modifique a figura como desejar e faça um desenho com todas as medidas de lados e ângulos de cada um dos três triângulos separadamente.

Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3

- Os três triângulos são semelhantes? Por quê?

- Qual é a medida da hipotenusa do seu maior triângulo?

b) Caso os três triângulos sejam semelhantes, podemos obter várias proporcionalidades entre seus lados. Vamos selecionar as medidas dos lados dos triângulos de acordo com os ângulos opostos, observando os três triângulos que você desenhou na letra a. Iremos chamar os dois ângulos desconhecidos de ângulo 1 e ângulo 2.

-Observe seu triângulo e informe as medidas dos ângulos 1 e 2 entre parênteses no quadro abaixo.

	Ângulo reto (90º)	Ângulo 1 (_______)	Ângulo 2 (______)
Lados do Triângulo 1			
Lados do Triângulo 2			
Lados do Triângulo 3			

- Observe e coloque no quadro as medidas dos lados do triângulo 1. Lembre-se que os lados informados devem estar opostos aos ângulos dados.

- Faça o mesmo para os triângulos 2 e 3.

c) Após construído o quadro, podemos obter várias proporcionalidades. Monte uma proporção adequada para determinar a medida do cateto b.

d) Utilizando o quadro acima, monte uma proporção adequada para determinar a medida do cateto c.

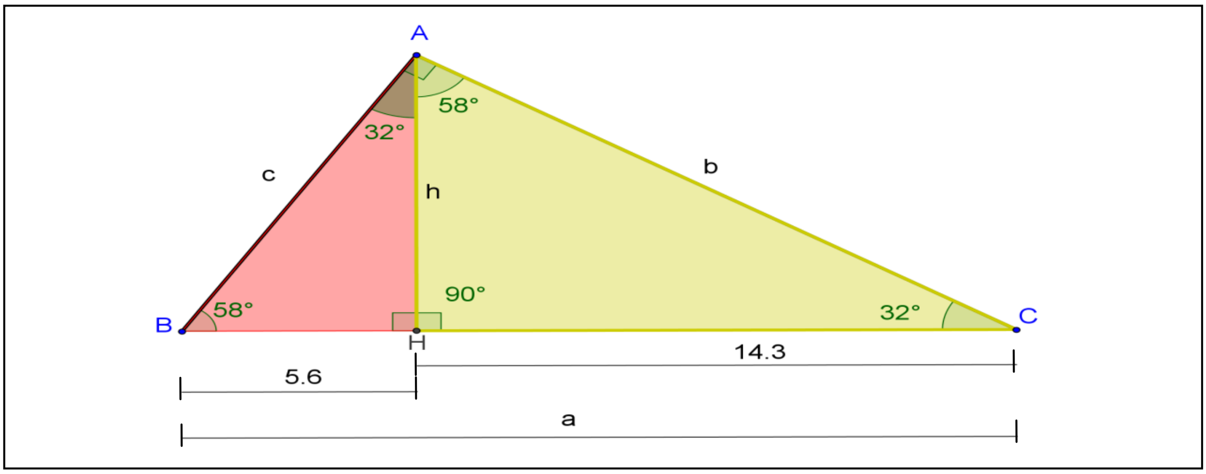
e) Utilizando o quadro acima, monte uma proporção adequada para determinar a medida da altura h.

Roteiro de trabalho - Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 2).

Parte 3

Nesta seção iremos conduzir os alunos a construírem razões para demonstrar as principais relações métricas no triângulo retângulo, utilizando os mesmos procedimentos da parte 2, mas com medidas exclusivamente algébricas, como na figura a seguir:

Figura 50 - Arquivo Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 3)

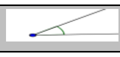
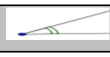


Fonte: Próprio autor.

Trabalharemos com valores algébricos, oportunizando ao aluno a construção do conhecimento geométrico utilizando também o rigor da demonstração matemática. Desejamos que o estudante perceba que as fórmulas das relações métricas, que muitas vezes são apresentadas e utilizadas sem justificativas, não passam de resultados específicos da semelhança de triângulos e que sua memorização é desnecessária.

Através do roteiro de trabalho, o aluno será conduzido a construir os três triângulos retângulos separadamente, assim como fez na parte 2 da atividade. Utilizando o quadro a seguir, iremos solicitar que ele o preencha, observando a correspondência entre ângulos e lados.

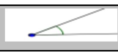
Quadro 10 - Construção das proporcionalidades em triângulos retângulos

	Ângulo reto (90º)	Ângulo ()	Ângulo ()
Lados do triângulo 1			
Lados do triângulo 2			
Lados do triângulo 3			

Fonte: Próprio autor.

Coletando os dados do triângulo da figura 50, teremos o seguinte quadro construído:

Quadro 11 - Construção das proporcionalidades com dados do triângulo da figura 50.

	Ângulo reto (90º)	Ângulo ()	Ângulo ()
Lados do triângulo 1	a	c	b
Lados do triângulo 2	c	m	h
Lados do triângulo 3	b	h	n

Fonte: Próprio autor.

Utilizando o quadro de razões montado, iremos propor aos alunos que busquem construir proporções que determinem as principais relações métricas a seguir:

Quadro 12 - Principais relações métricas no triângulo retângulo

$a\ .\ h = b\ .\ c$	$h^2 = m\ .\ n$	$c^2 = a\ .\ m$	$b^2 = a\ .\ n$

Fonte: Próprio autor.

Como a maioria dos alunos não tem prática com a demonstração matemática, é importante que o professor os oriente, principalmente na primeira prova, com a menor interferência possível. Detalharemos nos quadros a seguir as possíveis proporções utilizadas pelos alunos:

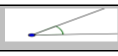
Quadro 13 – Destaque da proporção que determina a relação $a\ .\ h = b\ .\ c$

	Ângulo reto (90º)	Ângulo ()	Ângulo ()
Lados do triângulo 1	a	c	b
Lados do triângulo 2	c	m	h
Lados do triângulo 3	b	h	n

Fonte: Próprio autor.

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h} \quad \Rightarrow \quad a.h = b.c$

Quadro 14 – Destaque da proporção que determina a relação $h^2 = m\ .\ n$

	Ângulo reto (90º)	Ângulo ()	Ângulo ()
Lados do triângulo 1	a	c	b
Lados do triângulo 2	c	m	h
Lados do triângulo 3	b	h	n

Fonte: Próprio autor.

- $\dfrac{m}{h} = \dfrac{h}{n} \quad \Rightarrow \quad h^2 = m.n$

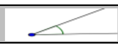
Quadro 15 - Destaque da proporção que determina a relação $c^2 = a\ .\ m$

	Ângulo reto (90º)	Ângulo ()	Ângulo ()
Lados do triângulo 1	a	c	b
Lados do triângulo 2	c	m	h
Lados do triângulo 3	b	h	n

Fonte: Próprio autor.

- $\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad c^2 = a.m$

Quadro 16 - Destaque da proporção que determina a relação $b^2 = a\ .\ n$

	Ângulo reto (90º)	Ângulo ()	Ângulo ()
Lados do triângulo 1	a	c	b
Lados do triângulo 2	c	m	h
Lados do triângulo 3	b	h	n

Fonte: Próprio autor.

- $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a.n$

É muito importante que o professor realize, ao fim de cada parte da atividade, uma discussão com os alunos a respeito dos conhecimentos adquiridos, verificando se todos estão atentos aos conceitos estudados, para que a atividade possa prosseguir com compreensão mais homogênea possível. Relatamos abaixo o roteiro de trabalho da parte 3:

Parte 3

3) Abra o arquivo Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 3). Você visualizará um triângulo retângulo com valores algébricos. Iremos demonstrar algumas relações métricas no triângulo retângulo através do que você estudou até agora.

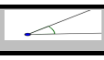
a) Modifique a figura como desejar e faça um desenho de cada um dos três triângulos, separadamente.

Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3

- Os três triângulos são semelhantes? Por quê?

b) Caso os três triângulos sejam semelhantes, podemos obter várias proporcionalidades entre seus segmentos. Vamos selecionar as medidas dos lados dos triângulos de acordo com os ângulos opostos, observando os três triângulos que você desenhou na letra a.

- Observe e coloque no quadro as medidas dos lados do triângulo 1. Lembre-se que os lados informados devem estar opostos aos ângulos dados.

	Ângulo reto(90º)	Ângulo ()	Ângulo ()
Lados do triângulo 1			
Lados do triângulo 2			
Lados do triângulo 3			

- Faça o mesmo para os triângulos 2 e 3.

c) Após construído o quadro, podemos obter várias razões. Monte uma proporção adequada para provar a relação $a.h=b.c$.

d) Utilizando o quadro, monte uma proporção adequada para provar a relação $c^2 = a.m$.

e) Utilizando o quadro, monte uma proporção adequada para provar a relação $b^2 = a.n$.

f) Utilizando o quadro, monte uma proporção adequada para provar a relação $h^2 = m.n.$

Roteiro de trabalho - Relações métricas no triângulo retângulo (Parte 3).

Acreditamos que esse roteiro de trabalho levará o aluno a compreender a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo, agregando valor ao aprendizado. Algumas demonstrações podem e devem ser trabalhadas em sala familiarizando o aluno com o rigor matemático. Entretanto, é preciso termos bom senso, já que são alunos com pouca experiência, sendo alguns extremamente limitados, para que a demonstração seja uma oportunidade de se enxergar mais além e não um “monstro” desencorajador do estudo. Assim, o professor credita o seu trabalho ao instigar a curiosidade de alguns e até mesmo a induzir a semente do interesse pelas demonstrações a outros com talentos escondidos e que estão à espera de uma simples oportunidade para mostrar o potencial encubado.

4.7.4 Atividade 4: Teorema de Pitágoras.

- Conceitos Prévios necessários

É importante trabalhar a noção básica de área retangular antes do início da atividade. Também é necessário que o aluno tenha estudado equações de segundo grau. Para motivar os alunos, é interessante comentar sobre a história do matemático Pitágoras.

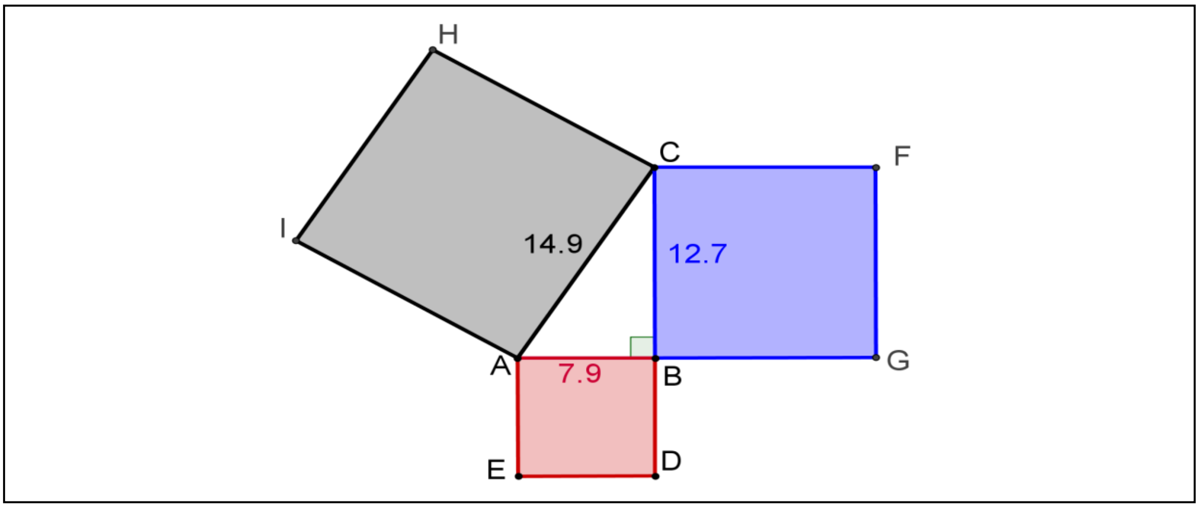
- <u>Tempo de aula</u>

São necessárias duas aulas de atividades no laboratório. Incluímos nesta aula um quebra-cabeça que confirma o teorema de Pitágoras, no intuito de motivar, os alunos, ainda mais no estudo do novo conteúdo. A utilização da atividade lúdica, tão rara nas aulas de matemática, favorece a curiosidade pelo aprendizado.

- <u>Descrição da Atividade</u>

Inicialmente, o aluno visualizará no GeoGebra um triângulo retângulo com quadrados formados sobre seus lados, para que possa realizar experimentos, através das áreas dos quadrados, verificando a validade do teorema, conforme ilustra a imagem abaixo:

Figura 51 - Arquivo Teorema de Pitágoras



Fonte: Próprio autor.

Após a verificação do teorema, sugerimos aos alunos um problema simples de determinação da hipotenusa através dos catetos dados. Neste momento é importante o direcionamento do professor, para que a atividade prossiga adequadamente, já que provavelmente haverá dúvidas, pois o aluno precisará usar as percepções estudadas com cálculos na resolução de problemas. A seguir, consta em detalhes o roteiro de trabalho desta atividade:

ATIVIDADE 4 – TEOREMA DE PITÁGORAS.

1) Abra a calculadora e o arquivo Teorema de Pitágoras. Você visualizará um triângulo retângulo com quadrados formados a partir de seus lados.

a) Calcule as áreas dos quadrados, utilizando os lados do triângulo. Considere: $a=\overline{AC}$; $b=\overline{AB}$ e $c=\overline{BC}$.

a^2=__________=_________ ; b^2 =__________=__________ ; c^2=_________= _______

- Some o resultado de b^2 com o de c^2.

- Compare o resultado do item anterior com o valor de a^2. O que aconteceu?

b) Clique nos pontos B e C movendo a figura como desejar. Você formará um novo triângulo com novas medidas.

- Calcule as áreas dos quadrados, utilizando os lados do triângulo. Considere: $a=\overline{AC}$; $b=\overline{AB}$ e $c=\overline{BC}$

a^2=__________ = _________ ; b^2=_________=_________ ; c^2=__________= ________

- Some o resultado de b^2 com o de c^2.

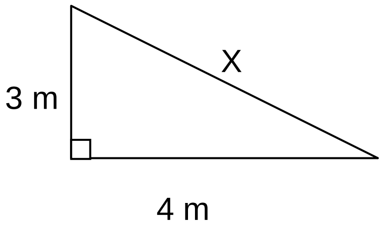
- Compare o resultado do item anterior com o valor de a^2. O que aconteceu?

c) Observe os resultados obtidos nos itens anteriores.

- Pelos testes realizados, a relação **$a^2=b^2+c^2$ (Teorema de Pitágoras)** verificou-se verdadeira?Justifique.

- Caso altere as medidas novamente, você acredita que a igualdade $a^2=b^2+c^2$ continuará válida? Justifique.

d) Sem utilizar o GeoGebra, tente descobrir a medida do lado x da figura abaixo, que representa uma rampa de 3 m de altura e 4 m de base. Utilize o teorema de Pitágoras.



Roteiro de trabalho - Teorema de Pitágoras (Parte 1).

No exercício 2 desta atividade, propomos que os alunos tentem demonstrar o teorema de Pitágoras a partir das relações métricas estudadas.

- Demonstração

$$b^2 = a.n \qquad e \qquad c^2 = a.m \qquad \Rightarrow \qquad b^2 + c^2 = a.(m+n) = a.a = a^2$$

O papel de orientação do professor se faz novamente necessário, julgando de que forma deverá intervir para cada turma, evitando fornecer resultados aos alunos, mas orientando a demonstração. O desenrolar da atividade está explicitada abaixo:

2) É possível demonstrar o teorema de Pitágoras a partir de duas relações métricas no triângulo retângulo: $\boldsymbol{b^2 = a.n}$ **e** $\boldsymbol{c^2 = a.m}$. A partir dessas relações dadas, tente chegar ao Teorema de Pitágoras ($\boldsymbol{a^2=b^2+c^2}$).

3) Para comprovar o teorema de Pitágoras de uma forma diferente, iremos te desafiar a montar um quebra–cabeça com partes dos dois quadrados sobre os catetos que devem se ajustar no quadrado sobre a hipotenusa. Abra o arquivo Teorema de Pitágoras (quebra-cabeça) e divirta-se.

a) Quando conseguir montar, faça um desenho de seu esquema.

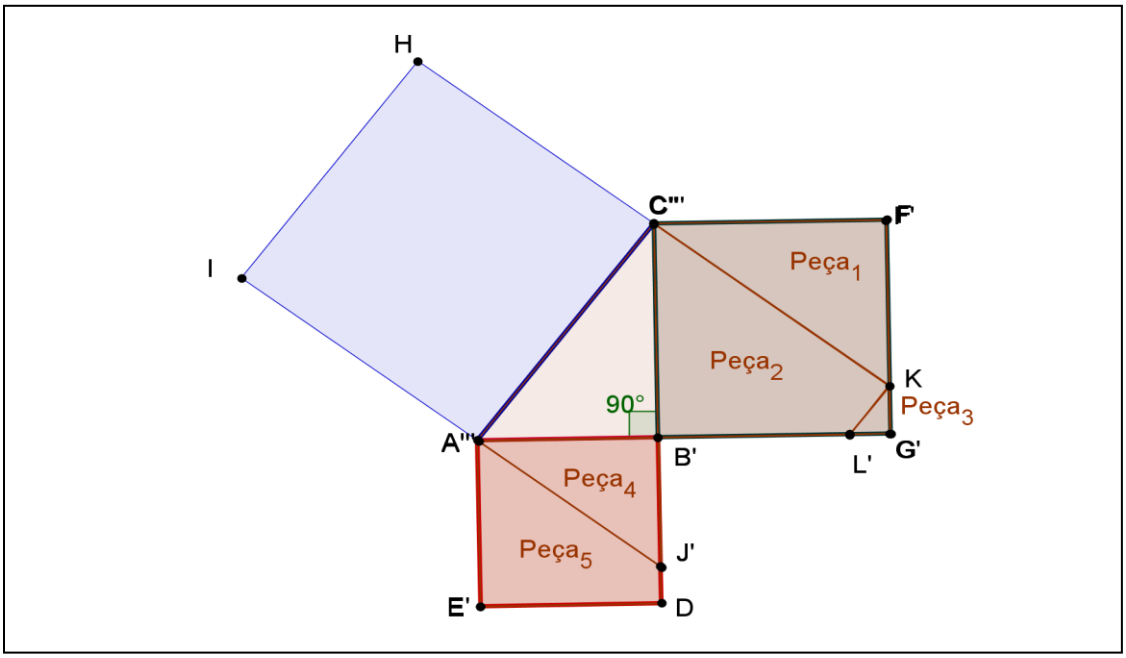
b) Que conclusão você chega em relação às áreas dos quadrados após montar o quebra-cabeça?

Complemento do roteiro de trabalho - Teorema de Pitágoras(Parte 1).

O fim da atividade consta de um quebra-cabeça lúdico, através da decomposição das áreas dos quadrados sobre os catetos, que devem se ajustar sobre o quadrado sobre a hipotenusa. Essa decomposição na qual nos deteremos a seguir é sugerida no livro de Madsen (1993, p.10), proposta pelo francês Jacques Ozanan (1640-1717), sendo conhecida como “Tangram Pitagórico” ou “quebra-cabeça Pitagórico”. O exercício tem duas finalidades: a primeira está relacionada ao seu caráter lúdico, que possibilita um aprender descontraído, enquanto a segunda está relacionada a mais uma forma de verificação do teorema de Pitágoras.

Essa atividade é pouco utilizada como recurso em sala de aula. O que fizemos foi adaptá-la ao GeoGebra, onde o aluno poderá movê-lo, através de rotações e translações feitas com as cinco peças formadas a partir da decomposição dos quadrados sobre os catetos, como expomos na imagem a seguir:

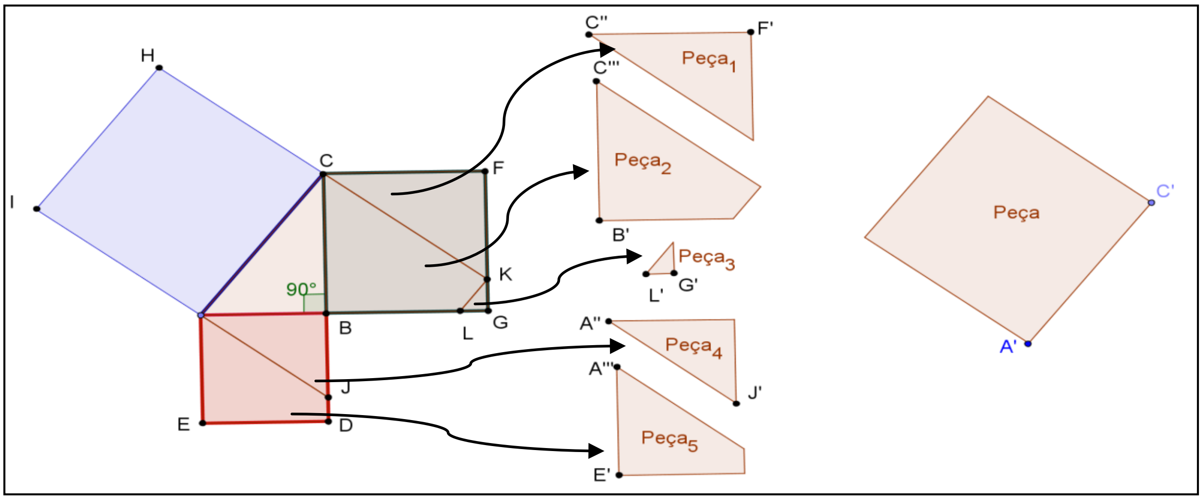
Figura 52 - Arquivo Teorema de Pitágoras (Quebra-cabeça)



Fonte: Próprio autor.

A partir da decomposição, o aluno poderá testar o teorema de Pitágoras por meio da movimentação das cinco peças obtidas.

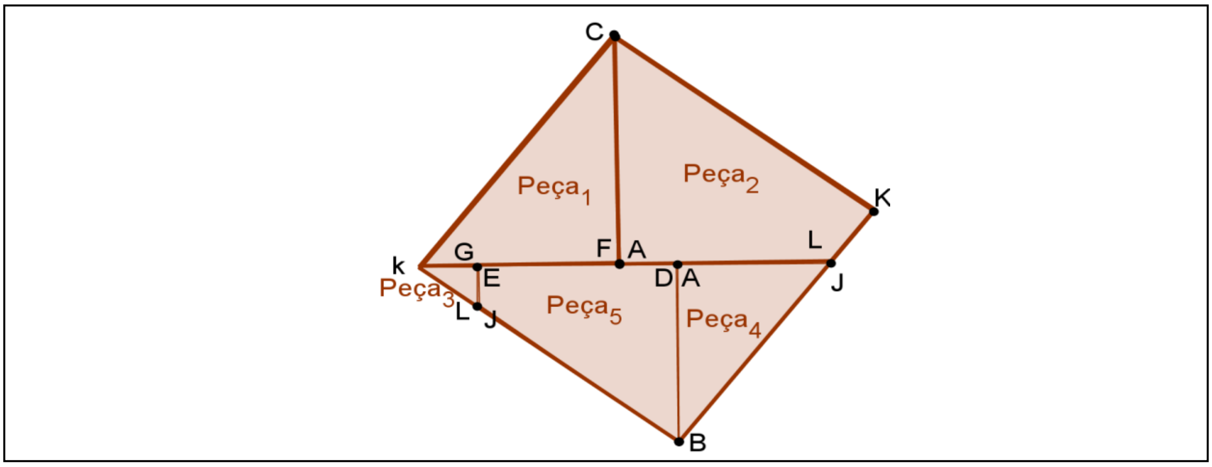
Figura 53 - Deslocamento das peças no arquivo Teorema de Pitágoras (Quebra-cabeça)



Fonte: Próprio autor.

Para realização desta atividade, reproduzimos no GeoGebra a área do quadrado sobre a hipotenusa e todas as cinco áreas decompostas dos quadrados sobre os catetos. Feito isso, o aluno poderá manipular as peças na tentativa de ajustá-las à área do quadrado sobre a hipotenusa, comprovando o teorema de Pitágoras de uma forma divertida. Apresentamos na figura abaixo a atividade já concluída.

Figura 54 - Atividade concluída do arquivo Teorema de Pitágoras (Quebra-cabeça)



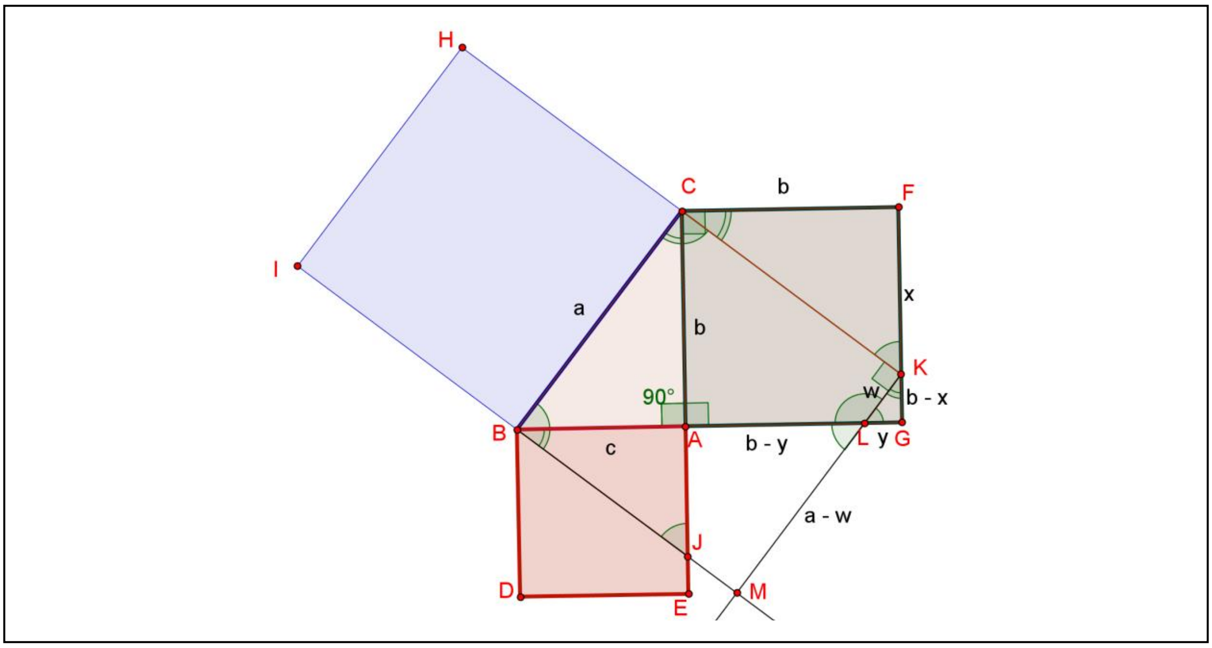
Fonte: Próprio autor.

Para conhecimento do professor, apresentaremos a seguir a demonstração do teorema de Pitágoras através da decomposição realizada nesta atividade.

- <u>Demonstração</u>

Dados os quadrados $ABDE$, $ACFG$ e $BCHI$ construídos sobre os lados do triângulo retângulo ABC abaixo.

Figura 55 - Demonstração do teorema de Pitágoras I



Fonte: Próprio autor.

Consideremos $a = \overline{BC};\ b = \overline{AC};\ c = \overline{AB}.$ e $A\hat{B}C > 45^{\circ}$.

Prolongando os segmentos $\overline{IB}\ e\ \overline{HC}$ perpendiculares a $\overline{BC}$, obtemos os pontos J e K, sobre os lados $\overline{AE}\ e\ \overline{FG}$ respectivamente.

Traçando a paralela a $\overline{BC}$ passando por K, obtemos os pontos L e M. Assim obtemos o retângulo $BCKM$.

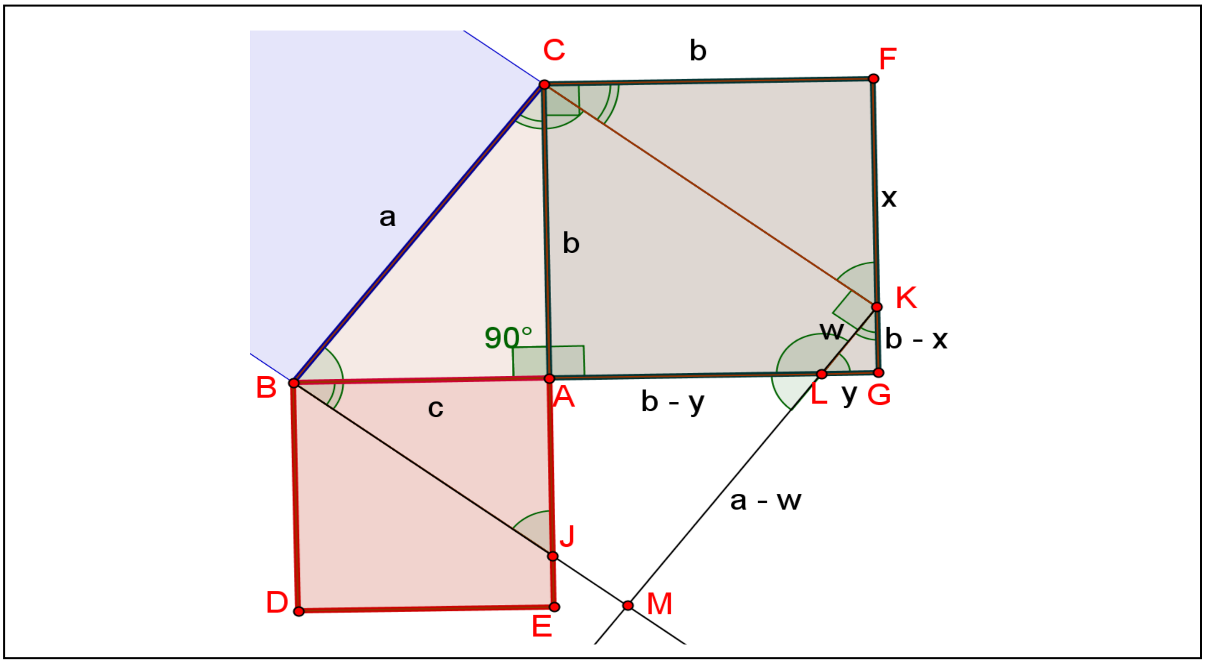
Consideremos agora $\overline{FK} = x,\ \overline{GL} = y\ e\ \overline{KL} = w$.

Obtemos que: $\overline{GK} = b - x,\ \overline{AL} = b - y\ e\ \overline{LM} = a - w.$

Observa-se que os triângulos ABC, FKC, GLK e MLB são semelhantes. Dos três primeiros triângulos, obtemos as razões: $\frac{b}{c} = \frac{b-x}{y} = \frac{b}{x}$.

Assim, temos: $x = c \; e \; y = \frac{(b-c).c}{b} \; (I)$.

Figura 56 - Demonstração do Teorema de Pitágoras II



Fonte: Próprio autor.

Dos triângulos ABC, GLK e MLB, obtemos a proporção: $\frac{a}{c} = \frac{w}{y} = \frac{c+b-y}{a-w}.(II)$

Daí, encontramos que: $w = \frac{ay}{c}(III)$

Por (I) e (III), encontramos:

$$w = \frac{ay}{c} = \frac{a}{c} . \frac{(b-c).c}{b} = \frac{a(b-c)}{b}.$$

Logo: $\quad w = \frac{a(b-c)}{b}(IV) \; e \; y = \frac{c(b-c)}{b}(I)$

De (II) temos: $\frac{a}{c} = \frac{c+b-y}{a-w}$. Donde tiramos que: $c^2 + bc - cy = a^2 - aw.$

Utilizando (IV): $w = \frac{a(b-c)}{b}$, obtemos: $c^2 + cb - cy = a^2 - a.\left(\frac{a(b-c)}{b}\right) = \frac{a^2.c}{b}$.

Dividindo a equação anterior por c, temos: $c + b - y = \frac{a^2}{b}$.

Logo, $cb + b^2 - by = a^2$. Como, $y = \frac{(b-c).c}{b}(I)$, temos:

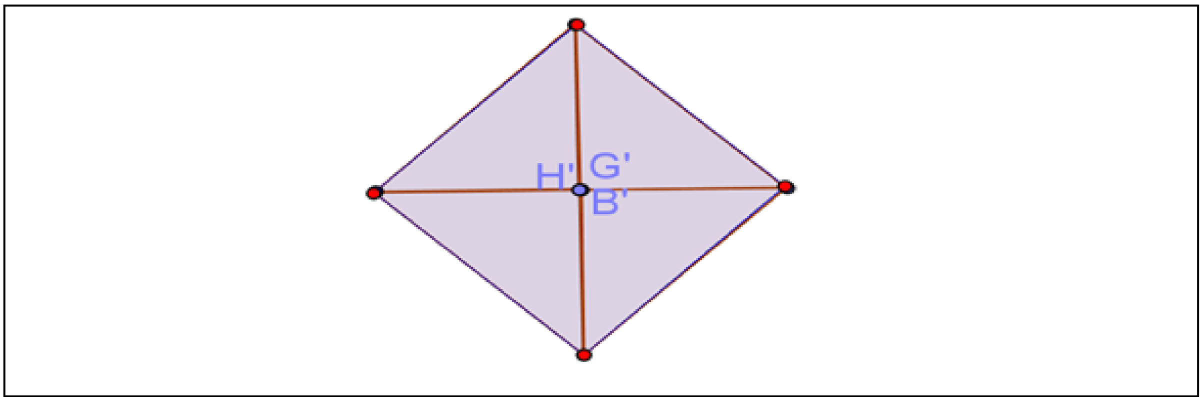
$$a^2 = b^2 + cb - b.\frac{(b-c).c}{b}$$

$$a^2 = b^2 + cb - bc + c^2.$$

Logo, concluímos que: $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstramos o teorema de Pitágoras através da decomposição de áreas proposta na atividade do quebra-cabeça, mostrando que as áreas das cinco peças equivalem à área do quadrado sobre a hipotenusa. Lembramos que, caso $A\hat{B}C < 45^{\circ}$, ao prolongarmos os segmentos $\overline{IB}$ e $\overline{HC}$, as interseções ocorrerão nos lados $\overline{AG}$ e $\overline{DE}$. Neste caso, a demonstração é análoga. No caso em que $A\hat{B}C = 45^{\circ}$, temos dois quadrados idênticos sobre os catetos, também de demonstração análoga, formando quatro triângulos retângulos congruentes, como na figura seguinte:

Figura 57 - Demonstração do Teorema de Pitágoras (caso particular)



Fonte: Próprio autor.

Após esta introdução do conteúdo, na qual colocamos o aluno como o principal construtor do conhecimento, acreditamos que os estudantes estarão mais interessados em resolver problemas e atividades propostas de aprofundamento desse novo assunto.

4.7.5 Atividade 5: Trigonometria no triângulo retângulo

- <u>Conceitos Prévios necessários</u>

Após todo o caminho trilhado até o momento, já não precisamos de conceitos prévios, caso os alunos tenham feito as atividades anteriores. Para dinamizar esta atividade é interessante explicar-lhes as noções sobre as principais medidas necessárias em um triângulo retângulo para o trabalho com trigonometria, especificando a diferenciação entre cateto oposto e cateto adjacente, conforme posição em relação ao “ângulo de trabalho”.

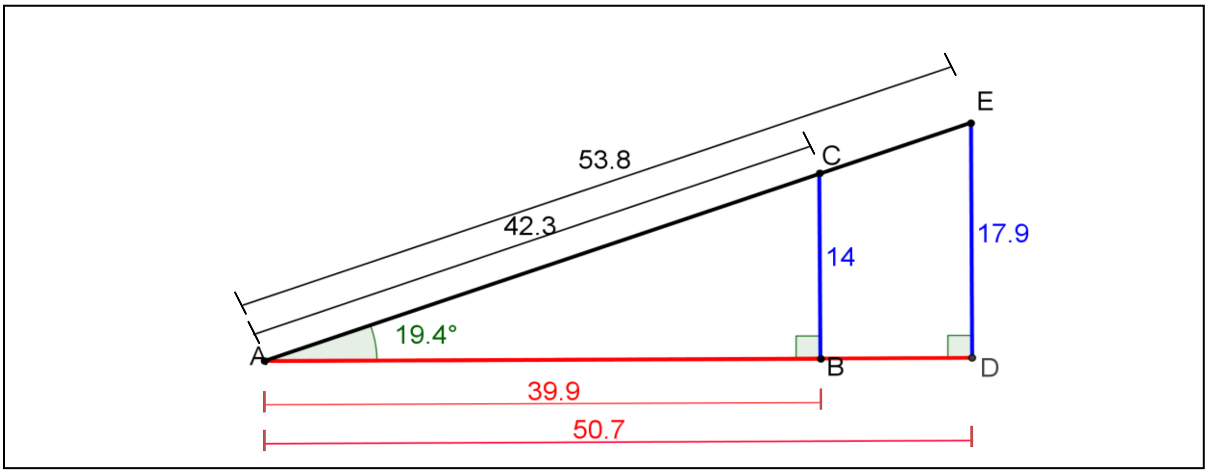
- <u>Tempo de aula</u>

São necessárias duas aulas de atividades no laboratório, variando conforme o ritmo da turma.

- <u>Descrição da Atividade</u>

Nosso objetivo é conduzir a introdução do conteúdo de trigonometria de tal forma que o aluno perceba sua íntima conexão com a semelhança de triângulos, para que o estudante visualize a trigonometria como fruto da semelhança, evitando a ideia generalizada que coloca esses assuntos como desassociados. Inicialmente, o aluno observará no GeoGebra dois triângulos retângulos semelhantes e com vértices sobre mesmas semirretas, como ilustrado na figura seguinte:

Figura 58 - Arquivo Trigonometria no triângulo

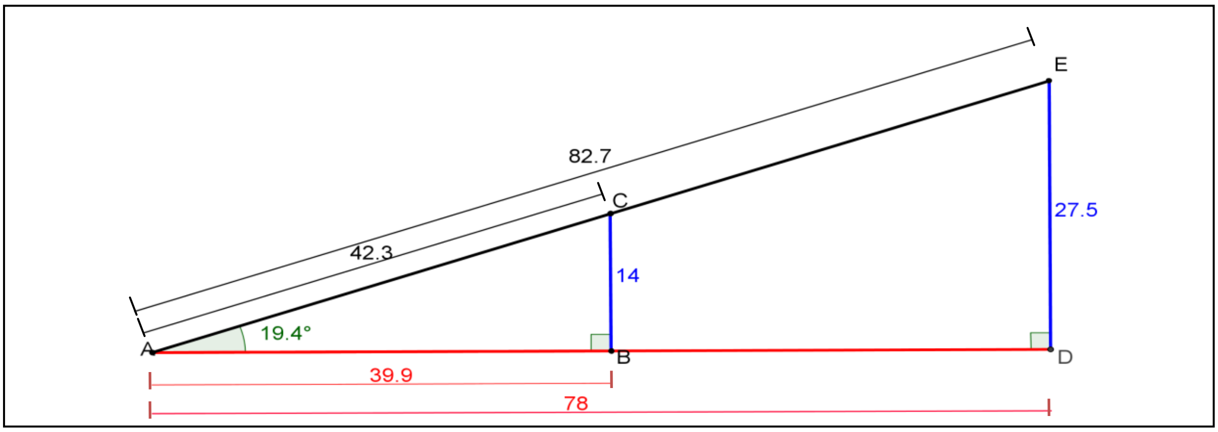


Fonte: Próprio autor.

Por intermédio da questão 1 do roteiro de trabalho, iremos solicitar que os alunos verifiquem a semelhança de triângulos, observando as proporcionalidades existentes entre os lados correspondentes. Acreditamos que os estudantes não terão dificuldades, já que realizaram o mesmo procedimento quando estudaram semelhança de triângulos. Após a verificação inicial, apresentaremos aos alunos as relações trigonométricas que derivam das razões encontradas, com especial atenção aos catetos e ao "ângulo de trabalho".

Em seguida, guiaremos os estudantes a construir novas proporcionalidades, através da manipulação no GeoGebra, como na figura a seguir, instruídos agora a relacioná-las às relações trigonométricas. Na imagem, indicamos uma suposta manipulação do ponto E, feita por alunos.

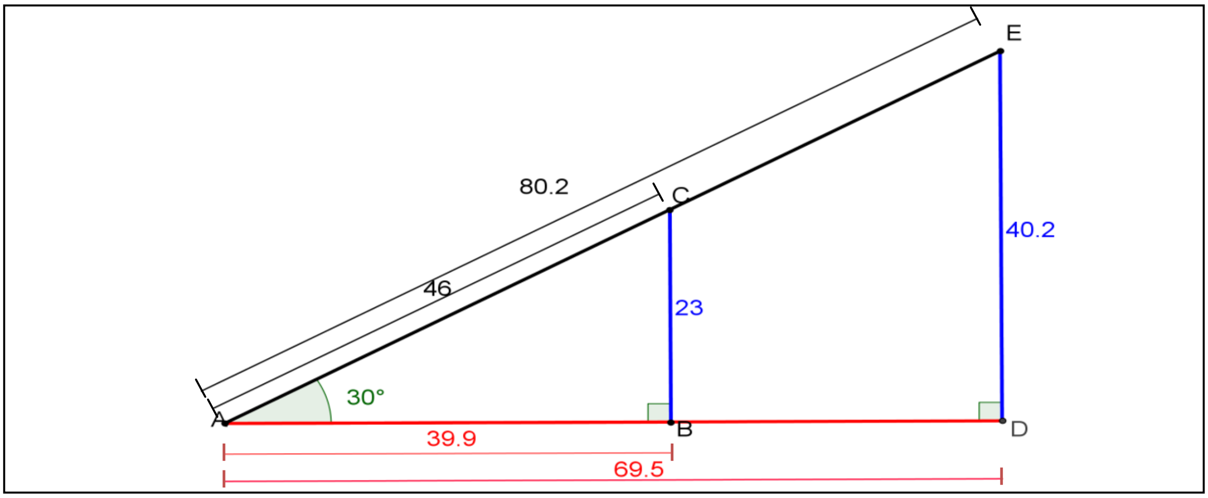
Figura 59: Manipulação do ponto E no arquivo Trigonometria



Fonte: Próprio autor.

Desejamos que o aluno seja capaz de perceber a manutenção da proporcionalidade quando não mudamos o ângulo, independentemente das medidas dos lados, isto é, que verifique a semelhança. Logo depois, solicitamos que ele modifique o “ângulo de trabalho” percebendo a mudança das proporcionalidades em relação às atividades anteriores e a manutenção da proporção entre os lados dos dois novos triângulos, como exposto a seguir:

Figura 60 - Manipulação do ponto C no arquivo trigonometria



Fonte: Próprio autor.

O detalhamento da parte inicial do roteiro está exposto a seguir:

ATIVIDADE 5 – TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULO RETÂNGULO

1) Abra a calculadora e o arquivo Trigonometria no triângulo. Você visualizará dois triângulos com ângulos e lados dados.

a) Os triângulos são semelhantes? Justifique.

b) Observe os lados dos triângulos ABC e ADE. Anote-os abaixo, determine as razões encontradas e informe se as razões são iguais.

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$;	$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$	R:
$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$;	$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$	R:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ R:

OBS.: Essas razões entre os lados dos triângulos são chamadas de relações trigonométricas e são nomeadas de seno, cosseno e tangente. Os catetos são diferenciados conforme sua posição em relação ao ângulo de trabalho, sendo chamados de cateto oposto e cateto adjacente. (Intervenção do professor com maiores detalhes).

c) Clique no ponto E e arraste-o, obtendo novas medidas e mantendo o ângulo. Qual é o ângulo de trabalho?_________.

- Observe os lados do novo triângulo ADE. Anote-os abaixo, determine as razões encontradas e informe se elas são iguais às do item b:

Seno: Cateto oposto /Hipotenusa

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; R:

Cosseno: Cateto adjacente /Hipotenusa

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; R:

Tangente: Cateto oposto /cateto adjacente

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; R:

d) Se você clicar novamente no ponto E e arrastar, o que imagina que ocorrerá? As razões continuaram iguais? Por quê?

- Se você clicar novamente no ponto E e arrastar até obter medidas gigantescas e mantendo o mesmo ângulo, o que imagina que ocorrerá? As razões para os triângulos ABC e ADE continuarão iguais? Justifique.

e) Vamos alterar o ângulo de trabalho agora. Clique no ponto C e arraste formando outro ângulo entre 0º a 90º. Observe os lados dos triângulos ABC e ADE. Anote-os, determine as razões encontradas e informe se são iguais.

Seno: Cateto oposto /Hipotenusa.

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad}$;	$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad}$	R:

Cosseno: Cateto adjacente /Hipotenusa.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad}$;	$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad}$	R:

Tangente: Cateto oposto /cateto adjacente

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad}$;	$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad}$	R:

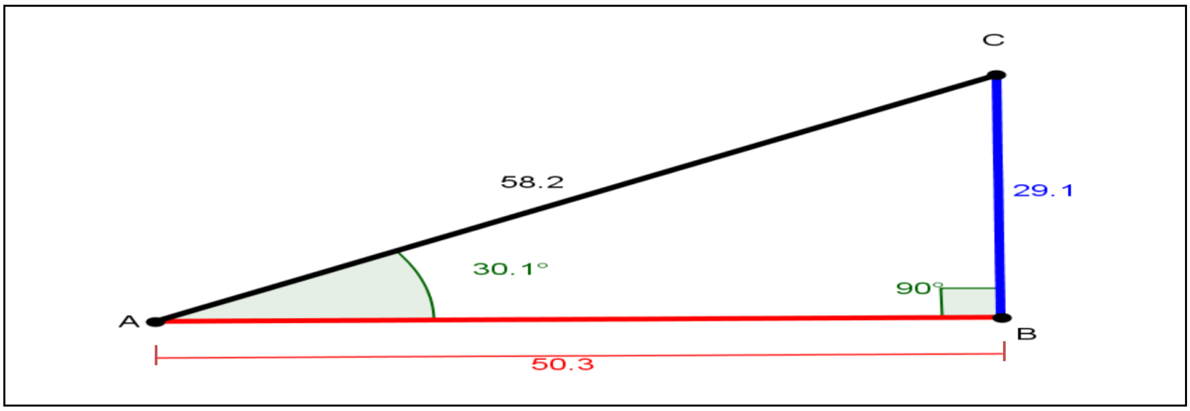
- As razões que você obteve agora são as mesmas que obteve no item c? Por quê?

- Podemos afirmar que as relações trigonométricas (Seno, Cosseno e tangente) provêm de semelhança de triângulos? Justifique.

Roteiro de trabalho – Trigonometria (Questão 1)

Após relacionarmos a semelhança de triângulos à trigonometria e construirmos as razões trigonométricas, utilizaremos a questão 2, no intuito de moldar melhor o que aprenderam até o momento. O aluno abrirá o arquivo no GeoGebra Exercício 1 – Trigonometria e visualizará um triângulo retângulo com ângulo de trabalho e lados dados, como na figura seguinte:

Figura 61 - Arquivo Exercício 1 (Trigonometria)



Fonte: Próprio autor.

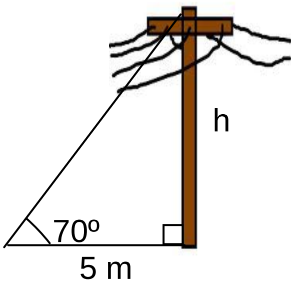
Através do roteiro abaixo proporemos ao aluno, utilizando manipulação no GeoGebra, determinar seno, cosseno e tangente de alguns ângulos dados.

2) Para criar uma tabela trigonométrica você precisa construir triângulos retângulos com ângulos que desejar. Abra o Arquivo Exercício 1 (Trigonometria).

a) Clique no ponto *C* até obter o ângulo pedido e utilize as medidas para determinar seno, cosseno e tangente dos ângulos dados.

ÂNGULO	**15º**	**30º**	**45º**	**70º**
SENO	________ =	________ =	________ =	________ =
COSSENO	________ =	________ =	________ =	________ =
TANGENTE	________ =	________ =	________ =	________ =

b) Com a utilização da trigonometria é possível determinar medidas inacessíveis, bastando termos um ângulo e uma medida em um triângulo retângulo. Na figura abaixo, desejamos calcular a altura de um poste, sob um ângulo de 70º do solo e distante 5 m de seu pé.



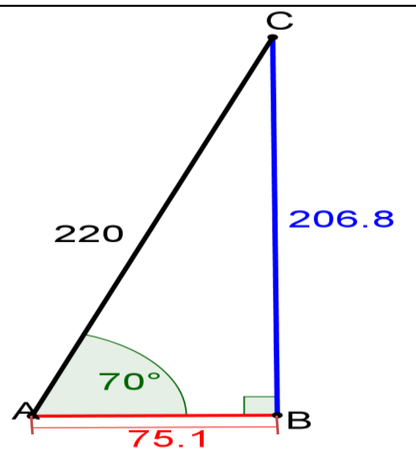
- Qual é a relação trigonométrica apropriada para a situação?

c) Utilizando os valores da atividade anterior, tente calcular a altura desse poste.

Roteiro de trabalho – Exercício 1 (Trigonometria).

Dessa forma, o estudante poderá determinar as razões trigonométricas no GeoGebra, manipulando ângulos e lados, construindo o aprendizado da trigonometria de forma mais concreta. A figura seguinte mostra uma possível manipulação feita por alunos no exercício citado.

Figura 62 - Manipulação do arquivo Exercício 1 (Trigonometria)



Fonte: Próprio autor.

Ao fim da atividade, propomos um exercício no qual o aluno é instigado a determinar a altura de um poste, utilizando as informações encontradas. Esse exercício é importante por seu caráter prático e que entrelaça o conhecimento estudado com a resolução de problemas. Portanto, o professor deve intervir de forma sutil, orientando, mas jamais realizando a atividade pelo aluno. Após esta atividade de introdução da trigonometria, podemos aprofundar o conhecimento, através de resolução de problemas, já que o aluno possui agora a ideia consistente do que é e de que forma foi construída a trigonometria no triângulo retângulo.

4.8 POSSÍVEIS CONTINUAÇÕES E DESDOBRAMENTOS

Como relatado anteriormente, este trabalho tem por finalidade propiciar uma introdução consistente e adequada de parte dos principais conteúdos geométricos do nono ano do ensino fundamental, ou seja, está relacionado exclusivamente ao início dos conteúdos abordados. Então, podemos sugerir como estudo em futuros trabalhos, a construção de sequências didáticas com atividades no GeoGebra que possibilitem o desenvolvimento e o aprofundamento de cada um desses assuntos: teorema de Tales, semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria. Sugerimos também a construção de uma proposta diferenciada, com utilização do GeoGebra em relação aos casos de congruência de triângulos, aos casos de semelhança de triângulos e acerca das relações métricas na circunferência, que são conteúdos pouco explorados no nono ano. Por fim, e de forma mais enfática, propomos a utilização e a avaliação deste trabalho em sala de aula, aplicando-o organizadamente durante um ano letivo como recurso introdutório dos conteúdos aqui trabalhados. É importante verificar sua validade, renegando-o ou confirmando-o como recurso metodológico e também observar as possíveis vantagens e desvantagens de sua utilização, apontando melhorias ou mudanças necessárias para que esta proposta possa ser confirmada como método eficaz na condução desses relevantes conteúdos do nono ano do ensino fundamental.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste estudo originou-se da observação das inúmeras deficiências existentes na condução e na construção do conhecimento geométrico em sala de aula, com especial atenção ao último ano do ensino fundamental, em que se concentram importantes assuntos relacionados à geometria. A percepção desse fato, agregada ao conhecimento sobre as possíveis manipulações geométricas no ambiente de geometria dinâmica, através do software GeoGebra, fomentou a possibilidade em organizar de forma diferenciada a condução do ensino-aprendizagem de alguns dos conteúdos geométricos de nono ano do ensino fundamental. Assim, este trabalho teve por objetivo realizar investigações com alunos e professores acerca dos maiores problemas que impossibilitam o aprendizado consistente de parte destes importantes conteúdos geométricos para, a partir das dificuldades encontradas, propor uma sequência didática inovadora que contribua para a condução de um aprendizado organizado e construtivo com auxílio do GeoGebra.

A investigação com professores de matemática possibilitou-nos perceber que muitos profissionais não têm formação geométrica apropriada que fundamente o trabalho em sala de aula, já que possuem em sua maioria, conhecimento geométrico formado quando alunos do ensino básico. A constatação de que muitos professores não estudaram disciplinas específicas de geometria euclidiana em seus cursos de nível superior, de especialização e de habilitação pedagógica em matemática, evidenciou os motivos que favorecem o abandono do estudo da geometria nas escolas. Verificamos que os cursos que habilitam profissionais de áreas afins a tornarem-se professores de matemática não oferecem disciplinas específicas de conteúdo geométrico em seus currículos, contribuindo com o surgimento de docentes despreparados em relação à geometria.

A investigação feita com professores e alunos na construção deste trabalho requer que alguma providência seja tomada, para que nosso país não continue renegando o conhecimento geométrico aos seus jovens. A sugestão para que esse panorama seja mudado é repensar a formação geométrica dos novos candidatos a professores para que as carências trazidas, do ensino básico, por esses futuros docentes sejam, no mínimo, reduzidas, favorecendo a reestruturação do aprendizado geométrico nas salas de aula, o que permitiria melhor desempenho de nossos alunos em relação ao aprendizado da geometria.

Verificamos também que os resultados dos alunos na pesquisa realizada neste trabalho são similares aos resultados da última Prova Brasil (2011), validando nosso estudo quanto às observações feitas na investigação. Em nosso estudo, constatamos que alunos recém-formados no ensino fundamental apresentam severas dificuldades relacionadas a conceitos básicos da geometria como: reconhecimento insatisfatório de ângulos e figuras geométricas planas, assim como suas propriedades; desconhecimento da distinção entre figuras planas e espaciais; pouca compreensão do conceito de área; conversão inadequada entre unidades de medidas; associações raras entre ideias geométricas e aritméticas; entre outras.

Essas dificuldades geométricas básicas apresentadas tornaram-se ainda mais evidentes ao analisarmos os resultados relacionados aos conteúdos específicos de nono ano. Os alunos apresentaram extremas dificuldades em resolver problemas simples, com mais de 94% de respostas inadequadas em todas as questões vinculadas aos assuntos que demandavam a utilização de segmentos proporcionais da semelhança de triângulos ou conteúdos derivados. Percebemos que o pouco conhecimento apresentado pelos alunos está associado ao treinamento exaustivo na utilização de fórmulas decoradas, como é feito com o teorema de Pitágoras, com as relações métricas no triângulo retângulo e com a trigonometria. Tal forma de condução do aprendizado, sem a devida apresentação dos conteúdos por meio de justificativas lógicas, impede que o aluno construa a essência do significado do conhecimento que está aprendendo, como relata Oliveira F. K. (2010, p.63):

> Além disso, a própria maneira de trabalhar o assunto sem apresentar aos alunos o porquê do acontecimento dos fatos também distancia um pouco da realidade da geometria. A partir do instante em que o conteúdo é trabalhado apenas com a aplicação de fórmulas, deixa-se de entender a sequência lógica, que poderia facilitar bastante o entendimento do conteúdo sem necessidade de decorar várias fórmulas.

A realização da investigação sobre os problemas do aprendizado geométrico de parte do conteúdo do nono ano possibilitou a observação sobre as principais limitações dos alunos na compreensão desses conceitos e as maiores dificuldades dos professores na sua condução. Buscamos visualizar este processo de forma geral para construir uma proposta de sequência didática que direcionasse adequadamente o ensino-aprendizagem, em substituição da prática meramente expositiva de transmissão de conceitos matemáticos, como colocam os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Tradicionalmente, a prática mais freqüente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem. (BRASIL, 1998, p.37)

O estudo proposto procurou abandonar esse formato tradicional, no qual o professor fala e o aluno escuta e reproduz, em que o aprendizado é simplesmente transmitido por afirmações repassadas sem qualquer diálogo de construção conjunta do conhecimento.

As atividades aqui expostas buscam estabelecer uma nova forma de aprendizado de alguns importantes conteúdos geométricos do nono ano, por intermédio de sequências de estudo organizadas em roteiros de trabalho bem planejados. Elas foram elaboradas de forma a direcionar o estudante a refletir, a compreender e a formular conclusões, através de observações em experiências manipulativas no ambiente dinâmico do software GeoGebra. Ao realizar experimentações investigativas, o aluno passa a estabelecer relações através de suas próprias percepções, promovendo o real aprendizado, que pouco ocorre quando as informações são apenas transmitidas, como em uma aula expositiva tradicional.

Por meio das análises feitas em nossa pesquisa, buscamos construir atividades que eliminassem os principais problemas da condução dos conhecimentos geométricos abordados. Os benefícios da proposta de sequência didática sugerida estão relacionados a alguns aspectos concernentes a uma boa prática de condução do ensino-aprendizagem da matemática. Desta maneira, buscamos produzir atividades que possuam as características abaixo:

1- Estimular o aluno a aprender utilizando experimentações práticas através de recursos diferenciados como os tecnológicos, que hoje fazem parte do mundo social da grande maioria dos estudantes, vinculando conhecimento teórico da escola ao conhecimento de mundo trazido pelo aluno.

2- Organizar a atividade por meio de roteiros de trabalho previamente planejados, em que o aluno é direcionado a estabelecer relações através de passos coerentes e articulados.

3- Conduzir o aluno a perceber os fenômenos matemáticos através de suas observações práticas com o uso de experimentações manipulativas realizadas pelo próprio estudante, propondo atividades que favoreçam o raciocínio investigativo, a percepção das novas propriedades e a compreensão do conhecimento estudado.

4- Nortear o estudante a formular conclusões por meio de observações feitas, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio indutivo com generalizações a partir de estudos específicos.

5- Utilizar, sempre que possível, a demonstração, para que o aluno se habitue ao rigor matemático, através de passos gradativos, conduzindo-os da observação inicial até a demonstração formal.

6- Promover discussões após cada etapa de construção do conhecimento, favorecendo as trocas de ideias, evidenciando propriedades importantes e corrigindo de forma apropriada os possíveis desvios de percepção.

No desenvolvimento da proposta de sequência didática com a utilização do software GeoGebra, buscou-se respeitar essas relevantes características, possibilitando a construção de uma condução satisfatória e diferenciada dos conteúdos geométricos contemplados por este trabalho.

Considerando que os objetivos foram alcançados, tanto na investigação sobre os problemas do ensino-aprendizagem da geometria, quanto na elaboração da proposta de sequência didática dos conteúdos geométricos de nono ano, pode-se concluir, a partir das muitas observações e cuidados metodológicos na elaboração das atividades, que a sequência didática proposta é capaz de contribuir de forma significativa para a melhoria do aprendizado geométrico em turmas do nono ano do ensino fundamental.

Destaca-se, por fim, que a utilização desta proposta de sequência didática, como recurso de ensino, merece ser aplicada e avaliada por novos estudos. Também é de extrema importância a verificação no que se refere a sua relevância como instrumento eficaz no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de nono ano aqui abordados.

REFERÊNCIAS

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Tradução de *Orlando Fonseca*. 2º Ed. Belo Horizonte. Autêntica, 2010.

BRASIL, Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Prova Brasil/Saeb - Resultado 2011**, Disponível em http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/resultados/2012/Saeb_2011_primeiros_resultados_site_Inep.pdf. Acesso em 08 de janeiro de 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais***: Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. v.1: Bases legais. Brasília: MEC, 2000.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO/CP. **Resolução nº 2, de 26 de junho de 1997**. Disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13212%3Aresolucao-cp-1997&catid=323%3Aorgaos-vinculados&Itemid=866. Acesso em 27 de Dezembro de 2012.

DIAS, Cláudia Augusto**. Grupo focal:** técnica de coleta de dados em pesquisas qualitativas. Nov. 1999. 16p.

CRESCENTI, Eliane Portalone. **Os professores de matemática e a geometria**: Opiniões sobre a área e seu ensino. Dissertação de mestrado. UFSC. São Carlos, 2005.

FAESA, Curso de Administração. **Grade curricular**. Disponível em http://site.faesa.br/curso-administracao.aspx. Acesso em 12 de janeiro de 2013.

FILHO, Durval Martins Teixeira. **O aprendizado da geometria no ensino médio** – origens de dificuldades e propostas alternativas: [s.n], 2002.

FREIRE, Paulo. **A educação na cidade**. São Paulo: Cortez, 1991.

GAZIRE. Eliane S. **O não resgate das geometrias**. Tese de doutorado em educação - UNICAMP. Campinas, SP, 2000.

GRANDO, Regina Célia. **Investigações Geométricas na Formação de Professores que ensinam Matemática**. In: Educação Matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidades. Celi Espasandin Lopes, Adair Mendes Nacarato(org.). Campinas: Mercado de Letras, 2009.

IASES. Complementação pedagógica. **Grade curricular**. Disponível em: http://ieses.com/complement.html. Acesso em 12 de janeiro de 2013.

LAURO, M. M. **Percepção – construção – Representação – concepção**: Os quatro processos do ensino da geometria: uma proposta de articulação. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Faculdade de educação. SP, 2007.

LORENZATO, Sérgio. **Porque não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4, 1995.

MENESES, Ricardo Soares. **Uma História da Geometria Escolar no Brasil:** de disciplina a conteúdo. 2007. 172 f. (Mestrado acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia universidade católica, São Paulo: [s.n], 2007.

MADSEN, Rui**. Descobrindo padrões pitagóricos**: geométricos e numéricos. São Paulo: Atual.1993.

MINAYO, M. C. de; SANCHES, O. **Quantitativo-qualitativo:** Oposição ou complementaridade? Cad. Saúde Pública, Rio de Janeiro, v.9, n.3, p.239-262, 1993.

NACARATO, Adair Mendes. **A Geometria no Ensino Fundamental**. In: SISTO, Fermino Fernandes, DOBRANSZKY, Enid Abreu, MONTEIRO, Alexandrina (Orgs.). Matemática e Aprendizagem. Petrópolis: Vozes, 2002.

NÓVOA, Antonio. (coord). **Os professores e sua formação**. Lisboa-Portugal: Dom Quixote, 1997.

OLIVEIRA, Francisco Kelsen. O **vídeo pela internet como ferramenta educacional no ensino de Geometria.** Dissertação de Mestrado profissional em Computação Aplicada. Fortaleza. UFCE, 2010. Disponível em: www.uece.br/mpcomp/index.php/ arquivos/doc.../ 220-dissertacao-58. Acesso 22 de outubro de 2012.

OLIVEIRA, G. P. **Avaliação em cursos on-line colaborativos**: uma abordagem multidimensional. Tese de doutorado em Educação. USP. São Paulo, 2007.

PAQUES, O. T. W., SOARES, M. Z. M. C., MACHADO, R. M., QUEIROZ, M. L. B. **Exploração e análise de softwares educacionais de domínio público no ensino de matemática.** In: Bienal da SBM. 2002. Belo Horizonte. Disponível em: http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/softwares_publicos.pdf. Acesso em 18/12/ 2013.

PAVANELLO, Regina M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil**: causas e conseqüências. Zetetiké, Ano 1, número 1, CEMPEM/F.E. UNICAMP, SP. 1993.

SILVEIRA, Angélica Menegassi da; BISOGNIN, E. **O uso de programas computacionais como recurso auxiliar para o ensino de geometria espacial**. IN:

IV COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA, 2008, Rio de janeiro: [s.n].

VIDALETTI, Vangiza Bartoleti Berbigier. **O ensino e aprendizagem da geometria espacial a partir da manipulação de sólidos**. Lajeado: UNIVATES, 2009.