Silvia Louzada

# Relações entre Cônicas e Funções no Ensino Médio

Vitória

Abril de 2013

Silvia Louzada

# Relações entre Cônicas e Funções no Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso de Mestrado Profissional submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Etereldes Gonçalves Júnior

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Programa de Pós-Graduação em Matemática

em Rede Nacional

Vitória

Abril de 2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

L895r

Louzada, Silvia, 1980-
Relações entre cônicas e funções no ensino médio / Silvia Louzada. – 2013.
56 f. : il.

Orientador: Etereldes Gonçalves Junior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Funções (Matemática). 2. Parábolas. 3. Hipérbole. 4. GeoGebra (Software). 5. Cônicas. I. Gonçalves Junior, Etereldes. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**Centro de Ciências Exatas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT**

# "Relações entre Cônicas e Funções no Ensino Médio"

## Sílvia Louzada

Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 09/04/2013 por:

Etereldes Gonçalves Júnior - UFES

Fabiano Petronetto do Carmo - UFES

Fábio Luiz Borges Simas – UNIRIO/RJ

*Dedico este trabalho aos meus pais: Francisco e Alzira;*
*aos meus irmãos: Gizele, Daniella e Wanderson;*
*e ao Daniel, meu porto seguro.*

# Agradecimentos

A Deus, pelo equilíbrio nos momentos mais difíceis.

Ao meu pai, Francisco, que plantou em mim a vontade de querer mais através do conhecimento e me levou a perceber que este é um bem que jamais se perde. À minha mãe, Alzira, por ter me ensinado a ser perseverante e continuar buscando meu objetivo quando os caminhos foram em direções não planejadas e tudo parecia perdido. Aos dois, por terem me instigado a buscar mais do que tiveram.

Às minhas irmãs Gizele e Daniella e ao meu irmão Wanderson, por estarem sempre presentes em minha vida com tamanha dedicação e amor. Agradeço pelo incentivo constante.

Ao meu noivo Daniel, pela orientação em momentos de desespero. Obrigada por tanto apoio, dedicação, carinho, amor e bom humor. Sua companhia faz com que meus dias sejam mais interessantes e felizes. Palavras não são suficientes para demonstrar minha gratidão.

Ao professor Etereldes Gonçalves Júnior por ter me recebido bem, pelo apoio científico e pelo incentivo na orientação deste trabalho.

Aos outros professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo que atuam no PROFMAT: Fábio Júlio da Silva Valentim, Florêncio Ferreira Guimarães Filho, Moacir Rosado Filho e Valmecir dos Santos Bayer, pelo conhecimento que me proporcionaram.

A todos os colegas e amigos que ingressaram comigo em 2011 nesse programa, pelos dois anos de boa convivência. Especialmente: Adla, Rone e Thiago por tornarem as cansativas viagens de São Mateus a Vitória mais alegres e suportáveis; Fidelis e Rudnei pelas oportunidades de estudarmos juntos tantas vezes e sobretudo pela amizade sempre acolhedora; e muito especialmente ao amigo Edson Santos (*in memoriam*) pelas boas lembranças que deixou nesse mestrado, exemplo de determinação e otimismo que viverá eternamente em pensamento com o sorriso marcante de quem amava viver.

Aos amigos mais próximos, por entenderem minha ausência nesse período e, apesar disso, me proporcionarem o aconchego de suas amizades.

Ao Instituto Federal do Espírito Santo, Campus de Nova Venécia, por ter me possibilitado tempo para concluir esse mestrado. À Capes, pelo apoio financeiro. Por fim, à Sociedade Brasileira de Matemática pela idealização desse programa.

*"Existe uma verdadeira alegria em fazer matemática, em aprender maneiras de pensar que explicam, organizam e simplificam.*
*Pode-se sentir essa alegria descobrindo novos resultados em matemática, redescobrindo resultados antigos, aprendendo um novo modo de pensar com alguém ou um texto, ou encontrando uma nova maneira de explicar ou de olhar para uma estrutura matemática conhecida."*

*(Wilian P. Thurston)*

# Resumo

No ensino médio são estudadas algumas funções cujos gráficos coincidem com certas cônicas. Essa conexão entre esses dois assuntos nem sempre é feita com detalhes nos livros didáticos. Neste trabalho desenvolvemos essa temática num nível compatível com o ensino médio, de modo que um professor possa tratar esse assunto com os alunos ainda no primeiro ano. Propomos que o tema seja apresentado primeiro de forma investigativa, com auxílio do *software* GeoGebra, incentivando o estudante a fazer conjecturas e só então os resultados sejam devidamente justificados.

**Palavras-chaves**: Funções, cônicas, parábola, hipérbole, GeoGebra.

# Lista de ilustrações

# Sumário

# Introdução

A escolha do tema deste trabalho ocorreu após pesquisarmos como os assuntos “Funções” e “Cônicas” são tratados nos livros didáticos distribuídos pelo Programa Nacional de Livros Didáticos (PNLD), um programa do Governo Federal que tem como “principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica”, conforme descrito no sítio do Ministério da Educação (MEC) na internet. O que causou inquietação foi constatar que não é dada muita importância à conexão que existe entre os dois assuntos. Por exemplo, no caso da parábola, se o professor não tiver o devido cuidado, o estudante pode ter a concepção da definição cíclica de que essa curva no plano é o gráfico da função quadrática e que o gráfico da função quadrática é uma parábola. No caso da hipérbole, sequer costuma ser mencionado nos livros que os gráficos de certas funções racionais são hipérboles.

No próprio Guia de Livros Didáticos [16] ressalta-se que “nas obras aprovadas, foram observadas algumas ligações entre os campos da matemática escolar. No entanto, dada a importância dessas articulações, elas deveriam ser mais frequentes” e ainda que

> são importantes as conexões da geometria analítica com outros tópicos como: gráficos de funções; representações geométricas dos sistemas lineares; matrizes de transformações geométricas. Apesar disso, ainda são poucas as coleções que valorizam essa articulação tanto ao tratar dos sistemas lineares, funções e matrizes, quanto no estudo geometria analítica. [16].

Nosso trabalho tem como público alvo professores de Ensino Médio e aborda os conceitos matemáticos: funções, funções quadráticas e cônicas. Temos como objetivo tratar de forma mais ampla algumas conexões entre funções e cônicas, em um nível compatível com o currículo do ensino médio. Apresentaremos uma proposta de aulas e atividades sobre o tema e esperamos que possam ser usadas como material complementar por professores em suas aulas. Com isso em mente, propomos também atividades com o *software* GeoGebra, algumas delas simplesmente para ilustrar os conceitos apresentados e outras para investigar proposições a serem demonstradas. Assim como Borba e Penteado (2010), em [6], entendemos que utilizando a tecnologia de uma forma que estimule a formulação de conjecturas e a coordenação de diversas representações de um conceito, é possível transformar a matemática abordada em sala de aula.

Ao unir conceitos que usualmente são tratados nos livros didáticos de forma independente e fragmentada, mostrar consequências das propriedades matemáticas em aplicações e indicar o uso de recursos tecnológicos para auxiliar no processo de aprendizagem, acreditamos estar inovando nos modelos comuns de ensino do mesmo tema. Esse trabalho procura contribuir, de forma geral, com as seguintes temáticas: exposição sobre as origens históricas do tema, identificação, ainda no primeiro ano do ensino médio, da parábola e da hipérbole como curvas mais amplas do que gráficos de funções, apresentação de argumentos que demonstram que essas cônicas são gráficos de algumas funções e propriedades das cônicas que levam a importantes aplicações do tema. Além disso, acreditamos que o uso do *software* GeoGebra possibilita a construção de conhecimento, seja por meio da formulação de conjecturas, da articulação entre as representações algébricas e gráficas ou, até mesmo, das observações mais detalhadas de algumas propriedades, promovendo assim uma aprendizagem matemática mais sólida.

## Organização do trabalho

No Capítulo 1 é apresentado, de forma sucinta, o desenvolvimento histórico das seções cônicas até o surgimento da definição formal de funções. São destacadas as etapas mais relevantes deste processo, assim como os principais matemáticos e suas contribuições, no assunto em questão, desde a antiguidade até os dias atuais.

No Capítulo 2 descrevemos resumidamente como são abordados os temas funções, funções quadráticas e cônicas em cada obra sugerida pelo Guia de Livros Didáticos [16].

Os Capítulos 3 e 4 são dedicados à apresentação de uma proposta de ensino para fazer conexões da parábola com o gráfico da função quadrática e da hipérbole com o gráfico de algumas funções racionais. Além disso nesses dois capítulos também demonstramos as propriedades refletoras da parábola e da hipérbole e aplicações dessas propriedades.

# 1 Origens históricas

Neste capítulo será apresentada uma breve narrativa a respeito do desenvolvimento histórico do conceito de seções cônicas, passando pelo surgimento da noção de função até a definição formal hoje utilizada.

## 1.1 As seções cônicas

O interesse dos matemáticos pelo estudo das cônicas é antigo, provavelmente iniciado na Grécia antiga em meio à busca incessante de soluções para os três problemas clássicos de trissecção do ângulo, quadratura do círculo e duplicação do cubo. De acordo com Eves,

> a importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora esses instrumentos sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção. A busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas, como as seções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias transcendentes. [9]

O primeiro avanço concreto no problema da duplicação do cubo foi feito por Hipócrates de Chios (c.a. 430 a.C), e reduzia o problema à construção e uso de curvas com as propriedades expressas na proporção aumentada $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$, desde que se pudesse encontrar essas curvas. A partir de então, as tentativas seguintes de duplicação do cubo seguiam as descobertas de Hipócrates. Acredita-se que Menaecmus (c.a. 360 a.C) inventou as seções cônicas para esse propósito ao apresentar suas duas soluções para o problema. As curvas mencionadas eram obtidas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da seção meridiana fosse menor do que, igual a ou maior do que um ângulo reto, seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz. Parece ter sido assim a descoberta das curvas que mais tarde foram chamadas elipse, hipérbole e parábola.

O estudo das cônicas evoluiu no decorrer de aproximadamente cento e cinquenta anos após Menaecmus e na época em que viveu Apolônio de Perga já existiam pelo menos dois tratados sobre o assunto, um de Aristeu (370 – 300 a.C) e outro de Euclides (325 – 265 a.C). Sabe-se da existência desses tratados devido às citações feitas por Papus (290 – 350 d.C), muito tempo depois, em sua obra *Tesouro da Análise*. Essas obras foram perdidas e é bem provável que não tenha sido possível recuperá-las, talvez porque o trabalho de Apolônio as tenha superado. Apesar das exposições gerais que tinham sido escritas anteriormente,

> assim como *Os elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em um nível mais avançado o tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das seções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos. [4]

Não se sabe muito sobre a vida de Apolônio, mas sugere-se que nasceu em Perga, na Panfília, e viveu de 262 a 190 a.C. Era um astrônomo notável e escreveu sobre vários assuntos matemáticos, porém apenas dois de seus tratados foram preservados substancialmente. Um deles é sua obra-prima *As cônicas*, um tratado composto por oito volumes, sendo que somente sete chegaram à atualidade e os quatro primeiros ainda existem em grego. Os três seguintes são conhecidos por traduções, primeiramente para o árabe e depois para o latim, por Edmund Halley, que traduziu os sete primeiros volumes para esse idioma. O oitavo volume se perdeu. Nos primeiros quatro volumes muito do que já havia aparecido em tratados anteriores é reunido e sistematizado, com exceção de alguns teoremas do Livro III, que Apolônio afirma expressamente que são seus. Nos quatro últimos volumes a teoria se expande em direções mais especializadas. [4]

Antes de Apolônio as cônicas eram obtidas pelos gregos como seções de três tipos diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio mostrou sistematicamente que se pode obter a elipse, a parábola e a hipérbole de um único cone, apenas variando a inclinação do plano de seção e que não é preciso tomar seções perpendiculares a um elemento do cone. Outra generalização importante foi possível quando ele provou que o cone pode ser circular reto ou oblíquo. Também substituiu o cone de uma única folha por um duplo, o que fez da hipérbole a curva de dois ramos como é hoje conhecida. Os nomes elipse, parábola e hipérbole, ainda hoje utilizados para as cônicas, foram introduzidos por Apolônio, aplicados num contexto diferente do que era usado até então,

> foram tomados da terminologia pitagórica antiga, referente à aplicação de áreas. Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta (isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento), eles diziam que se tinha um caso de "ellipsis", "parabole" ou "hyperbole", conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia. [9]

Os focos das cônicas, hoje familiares, foram mencionados apenas indiretamente por Apolônio. Supõe-se que ele e outros matemáticos da época conhecessem a propriedade foco-diretriz, mas elas não foram sequer mencionadas em sua extraordinária obra.

"Os sucessores imediatos de Euclides, Arquimedes e Apolônio, prolongaram por algum tempo a tradição geométrica grega; mas esta começou a declinar firmemente, e os novos desenvolvimentos limitaram-se à astronomia, à trigonometria e à álgebra" [9]. Papus, que viveu no final do século III d.C cerca de 500 anos depois de Apolônio, tentou reacender o interesse pela geometria e dentre suas ações para atingir esse propósito compôs uma obra com o título *Coleção* que, segundo Boyer (2010) em [4], é importante por várias razões. Primeiramente porque fornece um registro histórico precioso de partes da matemática grega que de outro modo não conheceríamos. Acrescenta-se a isso o fato de a *Coleção* conter novas provas e lemas suplementares para proposições das obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu. Por fim, o tratado contém descobertas e generalizações novas, não encontradas em obras mais antigas. O Livro VII da *Coleção* deixou várias contribuições sobre cônicas, dentre elas os comentários de Papus sobre as obras anteriores e o primeiro enunciado conhecido da propriedade foco-diretriz.

> A *Coleção* de Papus é o último tratado matemático antigo realmente significativo, pois a tentativa do autor de ressuscitar a geometria não teve sucesso. Obras matemáticas continuaram a ser escritas em grego por mais de mil anos, continuando a influência com início quase um milênio antes, mas os autores que vieram depois de Papus nunca mais chegaram ao seu nível". [4]

A matemática grega passou por novo declínio e demorou para que qualquer progresso significativo na teoria ou aplicações das cônicas ocorresse, até que tiveram influência nos estudos de Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630). Kepler tinha interesse na possibilidade de aplicações das cônicas à astronomia, enquanto Galileu nas aplicações à física. "É um fato notável que as seções cônicas tivessem sido estudadas por mais de dois mil anos antes que duas delas, quase simultaneamente, encontrassem possibilidades de aplicação na ciência – a elipse na astronomia e a parábola na física" [4]. Galileu contribuiu com a dinâmica através de sua análise do movimento dos projéteis numa componente horizontal uniforme e uma componente vertical uniformemente acelerada. Foi o primeiro a mostrar que a trajetória de um projétil, desprezando a resistência do ar, é uma parábola. Kepler teve várias contribuições para o estudo das cônicas. Em sua *Astronomia nova* de 1609 anunciou suas duas primeiras leis de astronomia. A primeira diz que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos. A propósito, o nome foco deve-se a ele e tem origem na palavra *focus*, latim para lareira. Enquanto Apolônio tendia a considerar apenas três tipos de cônicas, Kepler as concebia como sendo cinco, todas pertencentes a uma mesma família. Também resolveu o problema da determinação do tipo de cônica dado por um vértice, o eixo por esse vértice e uma tangente com seu ponto de tangência.

Com a retomada da geometria grega e o aperfeiçoamento da álgebra, a matemática tornou-se cada vez mais fundamental para o progresso das outras ciências. Nos séculos

XVI e XVII, com os avanços da astronomia, as novas questões colocadas pela física e a necessidade de desenvolver a tecnologia empregada na navegação, muitos campos novos e vastos se abriram para a pesquisa matemática, acelerando os estudos sobre o movimento e a localização no espaço. O surgimento da geometria analítica é o marco que abre caminho para as chamadas matemáticas superiores.

> Antes da geometria poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. [9]

Contemporâneo de Kepler e Galileu, Descartes (1596-1650) provavelmente foi o primeiro de seu tempo em termos de capacidade matemática, mas no fundo não era um matemático de fato. Sua obra famosa nessa área, *La géométrie*, foi apresentada como um apêndice do *Discours de la méthode* e tinha pretensão de dar ilustrações de seu método filosófico geral. Ou seja, sua geometria é apenas um episódio de uma vida dedicada à ciência e filosofia, tanto que não deixou nenhuma outra grande obra no ramo. Não obstante, é indiscutível que mais tarde ele contribuísse com o seu método para o desenvolvimento da matemática. A obra de Descartes não era primordialmente geométrica e em seu *Discours* ele já havia discutido os méritos relativos da álgebra e da geometria. "O objetivo de seu método, portanto, era duplo: 1) por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e 2) dar significados às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas" [4]. Em relação às cônicas, indicou condições sobre os coeficientes sob as quais a cônica é uma reta, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, a análise de certa forma sendo equivalente ao reconhecimento da característica da equação da cônica. Embora soubesse que com uma escolha apropriada da origem e dos eixos poderia obter a forma mais simples da equação, não forneceu nenhuma das formas canônicas. Mas é preciso ter ciência de que há pouco na geometria cartesiana que se assemelha ao que hoje se considera geometria analítica. Mesmo que tenha reunido todas as ferramentas para coordenar gráficos, não há nada de sistemático nos trabalhos de Descartes sobre coordenadas retangulares, pois geralmente assumia ordenadas oblíquas. Devido a essa realização, a ele é dado muitas vezes o crédito por ter inventado o plano de coordenadas.

Enquanto Descartes formulava as bases da geometria analítica moderna, outro gênio matemático francês, Pierre de Fermat (1601?-1665), ocupava sua atenção com o assunto, porém "onde Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente" [9]. Dentre suas muitas contribuições à matemática, a mais importante é a fundação da moderna teoria dos números. Ainda assim, muito fez também no campo das cônicas. Mostrou, na notação de Viéte, que a equação do primeiro grau é satisfeita por pontos que estão em linha reta, lembrando que operava, assim como Descartes, somente com números positivos. Depois estudou as equações de segundo grau e mostrou, para cada caso, que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica. Aplicou a transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2.º grau à sua forma mais simples e ainda construiu a solução da equação cúbica obtida a partir do problema das duas meias proporcionais, ou seja, dados os segmentos $a$ e $b$, encontrar $x$ e $y$ tais que $a : x :: x : y :: y : b$. Em resumo o método consiste em, "dada uma equação cúbica com uma incógnita, obtém-se duas equações quadráticas com duas 'incógnitas' que correspondem a cônicas e resolve-se o problema construindo a interseção destas cônicas" [5].

## 1.2 O Conceito formal de função

No século XVII muitos avanços se tornaram possíveis para a matemática a partir da publicação e aceitação das obras sobre coordenadas gráficas, bem como das novas notações e formas de escrever matemática. "E então, perto do final do século, na esteira preparada por vários matemáticos do próprio século, Newton e Leibniz contribuíram memoravelmente com a criação do cálculo" [9]. Como lembram Carvalho e Roque (2012), em [5], comparando os cálculos de Newton (1642-1727) e de Leibniz (1646-1716) com o que temos atualmente, uma diferença é que o primeiro trabalhava essencialmente com variáveis definidas sobre curvas, enquanto nos dias de hoje o cálculo tem base na noção de funções. O objetivo principal dos estudos do século XVII era o desenvolvimento de métodos para resolver problemas de natureza geométrica ou cinemática com ferramentas do cálculo. Embora a relação entre quantidades tenha sido usada por Newton e Leibniz, e mais tarde esse fato tenha contribuído para a noção de função como relação entre quantidades, a definição de função só foi formulada posteriormente.

Leibniz introduziu os conceitos de *constante*, *variável* e *parâmetro*. Com o desenrolar do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo que representasse quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica, o que parece ter motivado a definição da palavra função que fora usada pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748). "A nova noção de função só foi publicada, todavia, muitos anos mais tarde, em um artigo de Bernoulli apresentado à Academia de Ciências de Paris em 1718". [5]

A ampla aplicabilidade do cálculo apoiado pela geometria analítica do século XVII atraiu inúmeros matemáticos da época, o que resultou em muitos trabalhos baseados apenas na intuição e no argumento de que funcionavam. Isso gerou insinuações de absurdos e contradições na matemática. Assim, no final do século XVIII fez-se necessário fundamentar lógica e rigorosamente as bases da análise, de acordo com a concepção de rigor da época. Um trabalho semelhante acabou por acontecer em todos os ramos da matemática. Nessa necessidade de refinamento de alguns conceitos, a noção de função precisou ser esclarecida. Esse movimento foi levado adiante por muitos matemáticos da época, dentre os quais Euler (1707-1783). A notação $f(x)$ usada ainda hoje foi introduzida por Euler, que também substituiu quantidade por expressão analítica. Mesmo que a noção de função não tenha sido inventada por Euler, foi ele o primeiro a tratar o cálculo como uma teoria das funções.

Com as mudanças provocadas pela Revolução Francesa, novos interesses despertaram na sociedade, dentre eles a necessidade de formação científica. Ocultando grande parte da história da matemática, pode-se dizer que a Teoria dos Conjuntos, no final do século XIX, tornou possível a definição formal do conceito de função por meio dos conjuntos. No decorrer desse extenso caminho muitas pessoas contribuíram de forma significativa. Atualmente, a definição de função é apresentada nos livros didáticos por meio de conjuntos e muitas vezes, ao representá-las graficamente, as cônicas que são representativas de algumas funções não são exploradas, a despeito de terem sido estudadas bem anteriormente. A importância dos dois assuntos na atualidade é indiscutível e não parece razoável debater qual tem prioridade. No entanto, embora se saiba que os dois conceitos podem ser tratados de forma independente, nada impede que se faça a apropriada conexão dos temas ao apresentá-los aos estudantes, em especial os do ensino médio.

# 2 Funções e cônicas nos livros didáticos

Um dos pontos de partida para a realização deste trabalho foi a pesquisa nos livros didáticos aprovados pelo MEC no Guia de Livros Didáticos 2012 [16]. O PNLD é um programa executado em ciclos trienais alternados. Depois que o MEC divulga o guia com as indicações, os professores das escolas públicas analisam as resenhas contidas nele para escolher adequadamente os livros a serem utilizados no triênio. Considerando que o livro didático adotado pelo professor é um importante instrumento de referência sobre o assunto a ser ensinado, atuando muitas vezes como complemento à sua formação acadêmica e apoio à sua prática escolar, torna-se pertinente analisar como os conteúdos são estruturados e relacionados nesses livros. Além disso, o livro didático é também um efetivo mecanismo de pesquisa para o aluno. Por essa razão, selecionamos os livros citados no Guia de Livros Didáticos 2012, [16], para realizar nossa pesquisa e apresentamos nesse capítulo uma descrição de como é feita a abordagem dos temas "funções" e "cônicas" nas referidas obras. Essa análise não tem como objetivo classificar ou apontar falhas nos trabalhos dos autores pesquisados, mas de conduzir nosso trabalho no intuito de produzir um material complementar que acrescente possibilidades de ensino e aprendizagem ao professor e ao aluno do ensino médio.

Foram pesquisados os capítulos relativos à introdução da noção de funções, funções quadráticas e seções cônicas, os dois primeiros abordados no Volume 1 e o último no Volume 3 de cada obra. O objetivo principal da pesquisa foi verificar se na abordagem dos conteúdos supracitados a parábola e a hipérbole são relacionadas aos gráficos de funções e vice-versa. Além disso, observou-se também se as propriedades refletoras das cônicas são justificadas matematicamente.

## 2.1 Análise dos livros didáticos

**Livro 1 - Matemática: ciência e aplicações.**

Autores: Gelson Iezzi *et al.*

Referências: [10, 11].

Os autores optam por deixar o estudo mais detalhado da parábola a ser feito no Volume 3 da coleção. Iniciam o capítulo sobre funções quadráticas, no primeiro volume, com exemplos de aplicação e definição. Afirmam, sem demonstração, que os gráficos dessas funções são parábolas, mencionando que estas serão estudadas mais adiante. Após definir e deduzir fórmulas para raízes, vértice, eixo de simetria e interseção com o eixo $y$, o gráfico passa a ser construído através desses elementos. Em um apêndice, no final do capítulo, apresentam a demonstração de que o gráfico da função quadrática possui um eixo de simetria.

O Capítulo 4, no Volume 3, começa pela apresentação das cônicas como seções do cone. A partir daí cada uma é analisada separadamente, dadas suas definições focais, elementos principais e dedução de suas equações reduzidas. A princípio, as cônicas são consideradas com centros na origem e eixos contidos nos eixos coordenados. Em seguida, através da translação de eixos, são deduzidas as equações das cônicas que possuem eixos paralelos aos eixos coordenados e centro fora da origem. Uma seção é dedicada à hipérbole equilátera com focos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares e é comprovado que esta é o gráfico de uma função $y = \frac{k}{x}$ (com $k \neq 0$), fato que havia sido mencionado no primeiro volume. Também se prova que uma parábola de equação $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ é o gráfico da função quadrática $y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x + \frac{{x_0}^2+2py_0}{2p}$, pelo desenvolvimento da primeira equação. As propriedades refletoras da parábola e da hipérbole não são citadas.

**Livro 2 - Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia.**

Autor: Jackson Ribeiro.

Referências: [17, 18].

No Volume 1, o gráfico da função quadrática é introduzido logo após a definição da função. Um exemplo específico é apresentado e constrói-se o gráfico da curva através de uma tabela de pares ordenados, usando-se cinco valores inteiros para a variável do domínio. Em seguida, o gráfico da função é deduzido. Nas palavras do autor: "como $D(g) = \mathbb{R}$, existem infinitos valores para $x$ e, consequentemente, infinitos pares ordenados. Assim, entre os pontos indicados no plano cartesiano, há infinitos pontos. Unindo esses pontos, obtemos o gráfico de $g$". O autor afirma que a parábola possui um eixo de simetria, sem defini-lo formalmente no caso geral. O vértice da parábola é definido como sendo a interseção da parábola com seu eixo de simetria e posteriormente obtém-se as coordenadas do vértice através da média aritmética de pontos simétricos e também pela forma canônica. Uma observação identifica a curva que representa o gráfico de uma função quadrática como parábola e uma nota, deixada apenas no livro do professor, sugere que se comente com os alunos que curvas como parábola e hipérbole serão estudadas de maneira mais aprofundada no Volume 3 da coleção. A concavidade da parábola não é justificada, apenas mencionada em função do coeficiente $a$ da fórmula que define a função, através de exemplos. Por fim, o gráfico de uma função quadrática geral é descrito como deslocamentos, horizontais e verticais, do gráfico de uma quadrática com vértice na origem. Não há demonstrações dessas descrições. A propriedade refletora da parábola não é apresentada.

As cônicas são apresentadas no Volume 3, onde são deduzidas as equações daquelas cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados, com centro na origem ou fora dela. A relação entre parábola e o gráfico da função quadrática não é feita nesse volume. Uma nota recomenda ao professor que faça essa conexão. A propriedade refletora das cônicas não é abordada matematicamente, apesar do assunto ser comentado no final do capítulo em forma de um texto informativo e ser sugerida a construção de um refletor parabólico. Não é citado em nenhum dos volumes que algumas hipérboles são também gráficos de certas funções.

**Livro 3 - Novo olhar matemática.**

Autor: Joamir Roberto de Souza.

Referências: [21, 22].

O Capítulo 4 do Volume 1, sobre funções quadráticas, começa pela definição e, logo em seguida, traz procedimentos para construção do gráfico dessa função, que é feita pela atribuição de valores (apenas sete números inteiros) à variável do domínio. O gráfico é traçado por esses pontos e é denominado *parábola*. Não é demonstrado que a curva que representa a função quadrática possui um eixo de simetria, apesar de se pontuar que uma parábola possui esse eixo. A partir daquele exemplo inicial assume-se que o gráfico de uma função quadrática qualquer é uma parábola, sem formalismo. Do mesmo modo define-se a concavidade da parábola em termos do coeficiente $a$ da lei da função. A definição da parábola como lugar geométrico não ocorre, assim como não é citada a propriedade refletora.

No Volume 3, as cônicas são tratadas dentro do capítulo de Geometria Analítica. Cada uma, sempre com eixos paralelos aos eixos coordenados, é definida por sua propriedade geométrica e então suas equações são deduzidas. O gráfico da função quadrática não é relacionado à parábola. Não é citado em nenhum dos volumes que algumas hipérboles são também gráficos de certas funções.

**Livro 4 - Conexões com a matemática.**

Autores: Juliane Matsubara Barroso, *et al.*

Referências: [1, 2].

As funções quadráticas são apresentadas no primeiro volume, começando pela definição e exemplos de aplicação. Então inicia a parte do gráfico da função, que é denominado "parábola", sem defini-la como lugar geométrico. Não é demonstrado que o gráfico dessa função é aquela cônica. De forma análoga, a propriedade da concavidade em função do coeficiente $a$ é apresentada sem maiores argumentos. O gráfico é então construído a partir dos seguintes elementos: raízes da função, vértice, ponto de interseção com o eixo $y$ e eixo de simetria, esse último definido como sendo a reta perpendicular ao eixo $x$ que passa pelo vértice da parábola.

O Capítulo 6, no Volume 3, começa com aplicações das cônicas que usam suas propriedades, em especial a de reflexão. Tais propriedades não são matematicamente analisadas no decorrer do capítulo. As cônicas são apresentadas como seções do cone e cada uma é estudada separadamente, pela definição focal e dedução da equação reduzida de cada uma com centro na origem e eixos sobre os eixos coordenados. Nos dois volumes pesquisados não se faz conexão do gráfico da função quadrática com a cônica parábola nem de algumas hipérboles com os gráficos de certas funções.

**Livro 5 - Matemática: ensino médio.**

Autores: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz.

Referências: [19, 20].

O quinto capítulo do Volume 1 é iniciado com um exemplo de aplicação e seguido pela definição de funções quadráticas. Logo depois apresenta-se o gráfico dessas funções no plano cartesiano e o mesmo é denominado "parábola". Em seguida, essa curva é definida como lugar geométrico dos pontos que satisfazem à condição de estarem à mesma distância de uma reta dada e um ponto fora dela e sugere-se um interessante modo de construí-la dados a reta diretriz e o foco. Não é provado, porém, que o gráfico de uma função quadrática qualquer é uma parábola. Através da construção dos gráficos de duas funções quadráticas, pela atribuição de valores à variável do domínio, o eixo de simetria é definido como sendo a reta vertical que passa pelo vértice. Mais à frente ensina-se determinar as raízes da função quadrática, o ponto de interseção do gráfico com o eixo $y$ e as coordenadas do vértice. O gráfico da função é então construído a partir desses pontos. A propriedade refletora da parábola e da hipérbole não é abordada nesse volume.

No Volume 3, inicialmente as cônicas são apresentadas como seções do cone e depois cada uma é estudada separadamente dadas as definições focais, seus elementos principais e as equações reduzidas. A elipse e hipérbole são consideradas com eixos contidos nos eixos coordenados e centro na origem e no caso da parábola supõe-se eixos paralelos aos coordenados e centro possivelmente fora do ponto $(0, 0)$. A conexão entre o gráfico da função quadrática e a parábola não é explorada nesse capítulo. No entanto, em um tópico denominado "Uma hipérbole especial" demonstra-se que uma hipérbole representa o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$. As propriedades de reflexão da parábola e da hipérbole não são analisadas.

**Livro 6 - Matemática: contexto e aplicações.**

Autor: Luiz Roberto Dante.

Referências: [7, 8].

O autor introduz a função quadrática com uma situação-problema e, em seguida, traz a definição desse tipo de função. Depois estuda a forma canônica e como determinar as raízes da função e o valor máximo ou mínimo a partir dela. Ao construir o gráfico da função quadrática, começa pela definição da curva como lugar geométrico. Na sequência, prova que são parábolas os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = ax^2$ (com $a \neq 0$), a primeira de foco $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e reta diretriz $y = -\frac{1}{4}$ e a segunda com reta diretriz $y = -c$ e foco no ponto $(0, c)$, onde $ca = \frac{1}{4}$. O autor ilustra ainda o caso geral, o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ como sendo deslocamentos, horizontal e vertical, do gráfico da função $f(x) = ax^2$, mas deixa a demonstração em aberto. No final do capítulo, do Volume 1, um texto intitulado "Uma propriedade notável da parábola" cita a propriedade de reflexão da parábola, mas não a analisa matematicamente.

O capítulo sobre seções cônicas, no terceiro volume, inicia relacionando as curvas com as seções do cone, para então dar a definição focal, os elementos principais e deduzir suas equações reduzidas. Em seguida considera as cônicas no plano com eixos paralelos aos eixos coordenados, primeiro com centro na origem e depois num ponto qualquer do plano. Quando trata da parábola, o texto faz uma observação associando os gráficos das funções quadráticas, estudadas no Volume 1, com a cônica. Também faz uma observação quando define hipérbole equilátera, destacando ser famosa uma dessas curvas por descrever a relação entre a pressão e o volume de um gás perfeito à temperatura constante, conhecida como lei de Boyle e relacionada por uma equação da forma $xy = k$, onde $k$ é uma constante não nula. Dessa forma, ilustra o gráfico da lei de Boyle como uma hipérbole equilátera, cujos eixos estão sobre as retas $y = x$ e $y = -x$ e ressalta que se trata de uma das curvas estudadas no capítulo, com a diferença de ter um sistema de coordenadas rotacionado de 45º em relação ao sistema usado até então. Mais uma vez, aplicações das cônicas decorrentes da propriedade refletora são citadas no fechamento do assunto, mas não são analisadas matematicamente.

**Livro 7 - Matemática - Paiva.**

Autor: Manoel Paiva.

Referências: [14, 15].

O estudo da função quadrática, no Volume 1, tem como ponto de partida exemplos de aplicação e em seguida é dada a definição. Posteriormente, é construído o gráfico da função $f(x) = x^2$ e a curva é denominada "parábola", destacando os elementos eixo de simetria e vértice. A parábola não é definida como lugar geométrico. O autor ressalta: "demonstra-se que o gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b$ e $c$ números reais e $a \neq 0$, é uma parábola", mas não o faz. Também destaca ser demonstrável que essa parábola tem o eixo de simetria perpendicular ao eixo $x$ e que a concavidade é vinculada ao coeficiente $a$. A partir de então os gráficos são construídos por meio dos pontos notáveis, ou seja, raízes da função, interseção com o eixo $y$ e vértice da parábola. Ao término do capítulo um texto relata, sem argumentos matemáticos, algumas aplicações da propriedade refletora nos paraboloides.

As cônicas são apresentadas no terceiro volume como seções do cone. Depois de dadas definições focais e seus elementos principais, suas equações reduzidas são deduzidas. Estuda-se os casos em que os eixos da cônica são paralelos aos eixos coordenados do sistema cartesiano, centro na origem ou fora dela. Quando define a parábola o autor relembra que no primeiro volume da obra a curva foi estudada como gráfico da função quadrática e que agora será feito um estudo mais amplo dessa cônica. Essa é a única conexão sugerida. Não é citado em nenhum dos volumes que algumas hipérboles são também gráficos de certas funções.

## 2.2 Síntese geral

Através da pesquisa realizada sobre funções, funções quadráticas e cônicas nos vários livros citados, observa-se que na maioria deles a parábola não é apresentada no Volume 1 como uma curva de existência mais geral, mas apenas como o gráfico da função quadrática. Além disso, somente em um caso é provado, ou são dadas condições para isso no primeiro volume, que o gráfico da função quadrática é de fato uma parábola. As propriedades refletoras, que produzem várias aplicações no cotidiano, são predominantemente mencionadas, mas não são apresentados os argumentos matemáticos que as sustentam. No terceiro volume, quando se estuda as cônicas, em poucos casos se faz a conexão da parábola com o gráfico da função quadrática e a hipérbole quase nunca é associada aos gráficos de algumas funções. A tabela abaixo mostra de forma resumida a análise feita.

| | **Livros PNLD 2012** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Definição de parábola por propriedade geométrica | | | | | ✓ | ✓ | |
| Prova que o gráfico de função quadrática é uma parábola | ✓ | | | | | ✓ | |
| Associa parábola com gráfico de função quadrática[1] | ✓ | ✓ | | | | ✓ | ✓ |
| Propriedades refletoras das cônicas e aplicações[2] | | ✓ | | | | ✓ | ✓ |
| Associação de gráficos de funções com hipérboles | ✓ | | | | ✓ | | |

[1]Essa questão foi analisada no Volume 3 de cada obra. Todas as associações com a parábola são feitas de forma bem superficial.

[2]As propriedades refletoras são citadas, mas não são argumentadas matematicamente.

Levando-se em consideração que o conteúdo sobre cônicas não é incluído em alguns currículos de ensino médio, pode-se perder a oportunidade de levar ao conhecimento dos alunos esses objetos matemáticos estudados há tanto tempo e com tantas aplicações.

Por isso, nos dois próximos capítulos são apresentadas propostas de aulas e atividades que visam permitir a associação de duas cônicas aos gráficos de funções ainda na primeira série do ensino médio.

# 3 O gráfico da função quadrática

Neste capítulo identificamos o gráfico de uma função quadrática qualquer como sendo uma parábola. Para isso, primeiramente utilizamos uma propriedade geométrica para definir precisamente o que é uma parábola no plano. Em seguida analisamos os gráficos das funções quadráticas, começando com um caso mais simples até chegarmos ao caso geral. Ao final do capítulo argumentamos matematicamente as propriedades refletoras da parábola. É interessante citar aqui os trabalhos de Bonomi, em [3], e de Lopes, em [13], que tratam também de alguns assuntos explorados nesse capítulo e no próximo.

Neste trabalho sugerimos que, quando esse assunto for apresentado ao estudante, seja feita uma prévia investigação antes de apresentar as afirmações a demonstrar. Partimos da "suspeita" de que o gráfico é uma parábola e, então, começando com observações simples, tentamos identificar, analiticamente e com auxílio do GeoGebra, os candidatos a foco e reta diretriz dessa provável parábola. Assim fazemos uma conjectura e finalmente partimos para a demonstração. Essa abordagem difere da forma como esse assunto usualmente é tratado nos livros. Por exemplo, até mesmo na obra dos autores Lima et al [12], onde o assunto é tratado com bastante atenção, a afirmação "*o gráfico da função quadrática* $f(x) = x^2$ *é a parábola cujo foco é* $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ *e cuja reta diretriz é a reta horizontal* $y = -\frac{1}{4}$" é feita sem nenhuma indicação de como foram obtidos esses números, sendo apenas feita a demonstração de que essa afirmação é verdadeira.

Nos momentos em que consideramos oportuno desenvolver com o aluno alguma atividade com o GeoGebra, utilizamos o símbolo e remetemos para a Seção 3.5, onde as atividades estão descritas. Esse símbolo não deve ser entendido como um complemento à leitura do texto e sim como uma sugestão ao professor de um momento aproximado de quando essas atividades podem ser desenvolvidas no decorrer da aula.

## 3.1 A parábola

É importante que fique sempre claro aos estudantes que as parábolas são objetos geométricos mais gerais do que os gráficos das funções quadráticas. A definição geral de parábola é bastante simples e pode ser dada desde a primeira vez que esse termo é usado. Ela depende apenas da noção de distância entre dois pontos e de distância entre ponto e reta.

A distância entre um ponto e uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto à reta. Usando a notação $d(P, Q)$ para indicar a distância entre dois pontos $P$ e $Q$ e a notação $d(P, r)$ para indicar a distância entre um ponto $P$ e uma reta $r$, definimos:

*Dados uma reta $d$ e um ponto $F$ fora de $d$, a parábola de foco $F$ e diretriz $d$ é o conjunto dos pontos $P$ tais que $d(P, F) = d(P, d)$.*

Ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos que estão a uma mesma distância do foco e da reta diretriz. A Figura 1 ilustra essa definição.

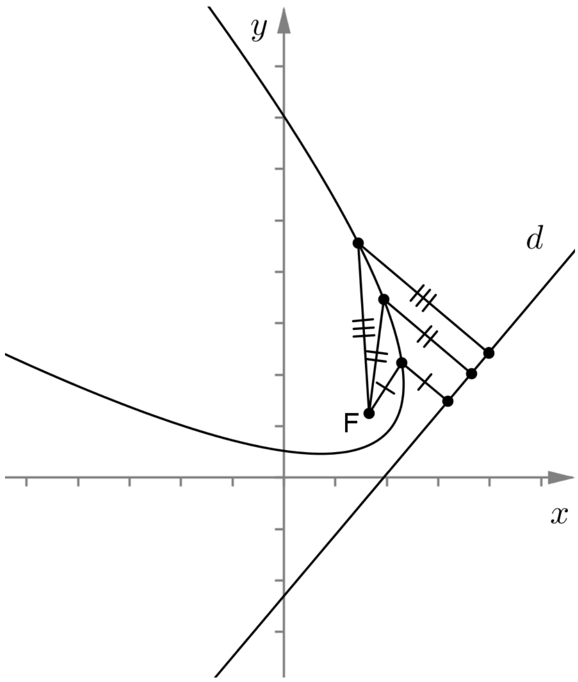


Figura 1 – Parábola de foco $F$ e reta diretriz $d$. Note que essa parábola em particular não pode ser o gráfico de uma função.

Veja a Atividade 1.

Além da definição acima, precisaremos adiante de dois objetos associados à uma parábola: o *eixo de simetria* e o *vértice*, que definimos a seguir.

Dizemos que os pontos $A$ e $B$ são simétricos em relação a uma reta $r$ dada quando a reta $s$ que passa por eles for perpendicular a $r$ e $d(A, r) = d(B, r)$. A reta perpendicular à reta diretriz que passa pelo foco é chamada de *eixo de simetria* da parábola. Essa reta leva esse nome pois se dois pontos $P$ e $Q$ são simétricos em relação ao eixo de simetria e um deles pertence à parábola, então o segundo também pertence. De fato, considere uma parábola de foco $F$, reta diretriz $d$ e eixo de simetria $l$ (Figura 2). Tome o ponto $P$ sobre a parábola, ou seja, com $d(P, F) = d(P, d)$. Sendo $Q$ o simétrico de $P$ com relação a $l$, o segmento $PQ$ e a reta $d$ são paralelos, pois ambos são perpendiculares ao eixo de simetria. Assim, $d(P, d) = d(Q, d)$. Além disso, os triângulos $PMF$ e $QMF$ são congruentes pelo caso $LAL$ de congruência. Por isso $d(P, F) = d(Q, F)$. Conclui-se então que $d(Q, F) = d(Q, d)$, isto é, $Q$ também é um ponto da parábola.

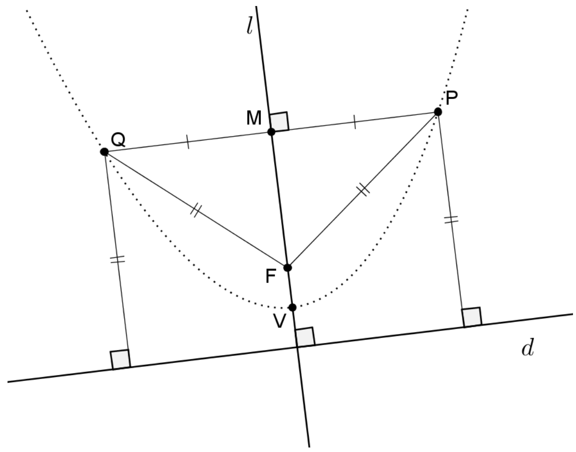


Figura 2 – Pontos $P$ e $Q$ simétricos com relação ao eixo $l$ de simetria. Se $P$ pertence à parábola então $Q$ também pertencerá.

Veja Atividade 2.

O ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria é chamado de *vértice* da parábola. De todos os pontos da parábola, o vértice é o que está mais próximo do foco e da reta diretriz.

Isso é tudo que precisamos definir para chegar ao nosso objetivo. Salientamos que nos livros didáticos e em outras obras de referência a parábola é estudada com mais detalhe. Como nosso objetivo é mais específico, passamos agora ao estudo do gráfico das funções quadráticas.

## 3.2 Gráficos de funções

Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$, definimos o gráfico de $f$ como o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ do plano tais que $x \in D$ e $y = f(x)$. Muitas vezes é útil falar do gráfico de uma função conhecendo apenas sua fórmula, sem dar um nome a ela. Com isso em mente, neste trabalho, quando escrevemos

(1) "o gráfico de $\frac{1}{x}$",

queremos dizer na verdade

(2) "o gráfico de uma função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{x}$".

Optamos por fazer assim, pois muitas vezes (1) é muito mais claro e rápido de ler e escrever do que (2).

## 3.3 A função quadrática

Uma função quadrática é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{3.1}$$

onde $a$, $b$ e $c$ são constantes reais e $a \neq 0$. Analisaremos a seguir os gráficos das funções quadráticas partindo de um caso mais simples até chegar na forma geral, na seguinte ordem:

1. O gráfico de $x^2$;
2. O gráfico de $ax^2$;
3. O gráfico de $a(x-m)^2$, que corresponde a um deslocamento horizontal do gráfico anterior;
4. O gráfico de $a(x-m)^2 + k$, que corresponde a um deslocamento vertical do gráfico anterior;
5. O gráfico de $ax^2+bx+c$, na verdade apenas é uma outra forma de escrever a fórmula da função anterior.

Vale aqui, da mesma forma que na Seção 3.1, ressaltar que não é nossa intenção estudar a função quadrática com detalhes, seguimos então com nosso propósito específico que é demonstrar que o gráfico dessa função é uma parábola.

### O gráfico de $x^2$

Para demonstrar que o gráfico da função definida por $f(x) = x^2$ é uma parábola vamos em primeiro lugar identificar uma parábola candidata a coincidir com esse gráfico. Como queremos usar a definição, precisamos identificar o foco $F$ e a diretriz $d$. Busquemos então candidatos plausíveis para $F$ e $d$.

Para começar, podemos tentar identificar o eixo de simetria do gráfico. Observando a Figura 3, é bastante claro visualmente a simetria em relação ao eixo $y$. Ora, $f$ é uma função par (de fato, $f(-x) = f(x)$), assim, se um ponto $(x, y)$ está em seu gráfico então seu simétrico em relação ao eixo $y$, ou seja, o ponto $(-x, y)$, também está. Assim, se esse gráfico for mesmo uma parábola, seu eixo de simetria deve ser o eixo $y$. Consequentemente, o foco deve estar sobre esse eixo, sendo então da forma $F = (0, p)$ e a reta diretriz, sendo perpendicular ao eixo de simetria, deve ser horizontal, com equação do tipo $d : y = k$.

Veja Atividade 3.

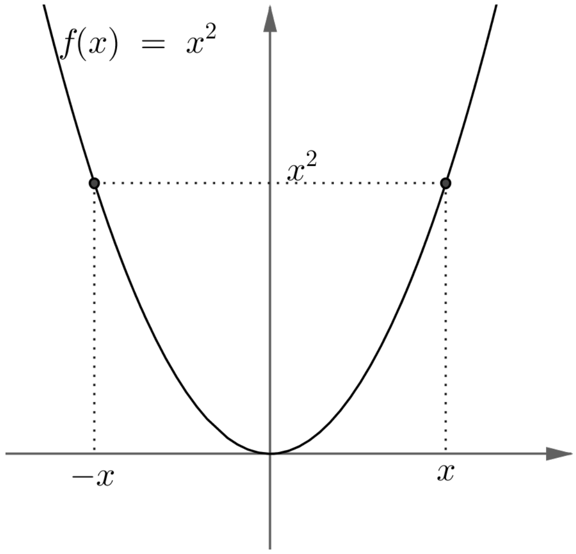


Figura 3 – Gráfico da função $f(x) = x^2$

O problema agora é inferir valores para $p$ e $k$. Para isso podemos testar alguns pontos do gráfico da função, de preferência pontos fáceis de trabalhar, na equação da parábola. Por exemplo, os pontos $O = (0, 0)$ e $P = (1, 1)$ estão no gráfico, então devem estar também na parábola que estamos procurando. Pela definição de parábola, as equações

$$d(O, F) = d(O, d) \tag{3.2}$$

e

$$d(P, F) = d(P, d) \tag{3.3}$$

devem ser satisfeitas. Da primeira equação e observado que $d(O, d) = |k|$ e $d(O, F) = |p|$, obtemos $|k| = |p|$. Como $F$ não pode ser um ponto de $d$, só pode que $k = -p$. Um valor plausível de $p$ deve ser positivo pois, caso contrário, o gráfico de $f$ intersectaria a reta diretriz, e isso nunca ocorre com uma parábola. Então, substituindo $d(P, F) = \sqrt{1 + (1 - p)^2}$ e $d(P, d) = 1 + p$ na Equação 3.3, obtemos

$$\sqrt{1 + (1 - p)^2} = 1 + p. \tag{3.4}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e simplificando, pode-se verificar que $p = \frac{1}{4}$ é solução da Equação 3.4. Logo, são "candidatos" a foco e reta diretriz o ponto $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e a reta $d : y = -\frac{1}{4}$ . Chegamos assim à seguinte conjectura:

*O gráfico da função $f(x) = x^2$ é uma parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e reta diretriz $d : y = -\frac{1}{4}$.*

Passamos agora a demonstrar que essa conjectura é uma afirmação verdadeira. Faremos isso em duas partes:

1. Todo ponto do gráfico é um ponto da parábola.

2. Todo ponto da parábola é um ponto do gráfico.

Fazer essa demonstração dessa forma não é usual em muitas referências voltadas para o ensino médio. É importante que o aluno perceba a necessidade de se fazer as duas partes da demonstração. Um exemplo que deve convencê-lo é o gráfico da função $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por $y = \sqrt{x}$. Mostre a ele que todo ponto do gráfico de $g$ satisfaz a primeira parte da demonstração, sem contudo que seja uma parábola.

No caso da função $x^2$, para a primeira parte basta mostrar que para todo ponto $P$ da forma $(x, x^2)$, vale a igualdade $d(P,F) = d(P,d)$. De fato,

$$\begin{aligned} d(P,F) &= \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}} \\ &= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \left|x^2 + \frac{1}{4}\right| \\ &= x^2 + \frac{1}{4} \\ &= d(P,d). \end{aligned}$$

Ou seja, o gráfico da função $y = x^2$ está contido em uma parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e reta diretriz $d : y = -\frac{1}{4}$.

Por outro lado, se $(x, y)$ é um ponto tal que $d\left((x,y), \left(0, \frac{1}{4}\right)\right) = d((x,y), d)$ então

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = y + \frac{1}{4} \implies x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} \implies y = x^2.$$

Isso conclui a demonstração da segunda parte e mostra que o gráfico de $x^2$ é uma parábola.

## O gráfico de $ax^2$

Passemos a estudar um caso um pouco mais geral: o gráfico da função $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como essa função também é par, podemos esperar novamente que o eixo de simetria da parábola seja o eixo $y$. Usando raciocínio análogo ao usado no caso anterior, testamos agora os pontos $O = (0,0)$ e $P = (1, a)$. Da equação $d(O,F) = d(O,d)$ obtemos novamente

$$k = -p. \tag{3.5}$$

Já a equação $d(P,F) = d(P,d)$ precisa ser analisada com mais cuidado. Quando $a > 0$, teremos $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o valor de $p$ deve ser positivo, pois o gráfico de $f$ não intersecta $d$. Se $a < 0$ a situação se inverte: $f(x) \leq 0$, o que implica que o valor de $p$ deve ser negativo. Analisando separadamente, se $a > 0$ teremos

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,d) \\ \sqrt{1+(a-p)^2} &= a+p. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por outro lado, se $a < 0$ então:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,d) \\ \sqrt{1+(a-p)^2} &= |a|+|p| \\ \sqrt{1+(a-p)^2} &= -a-p. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Elevando-se ambos os lados das Equações 3.6 e 3.7 ao quadrado e simplificando verificamos que $p = \frac{1}{4a}$ é solução de ambas. Então, em qualquer dos dois casos, os candidatos a foco e diretriz são o ponto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e a reta $d : y = -\frac{1}{4a}$. Surge então um novo resultado a se provar:

*O gráfico da função $f(x) = ax^2$ é uma parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e reta diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$.*

Considere um ponto $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f$. Temos:

$$\begin{aligned} d(P,F)^2 &= x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= x^2 + a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2} \\ &= \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= d(P,d)^2. \end{aligned}$$

Logo $d(P,F) = d(P,d)$, ou seja, o ponto $P$ pertence à parábola, mostrando que o gráfico de $ax^2$ está contido na parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e reta diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$.

Em contrapartida, se um ponto $P = (x, y)$ está sobre a parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e reta diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$ então $d(P,F) = d(P,d)$. Logo, os quadrados dessas distâncias também são iguais, ou seja, $x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2$. Desenvolvendo essa expressão, vamos obter:

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2} = y^2 + \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2} \implies y = ax^2. \tag{3.8}$$

Consequentemente $P$ está também no gráfico da função.

Concluímos assim que o gráfico de $ax^2$ é uma parábola, de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e reta diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$ e cujo vértice é o ponto $(0,0)$. Quando o foco dessa parábola está acima da reta diretriz dizemos que a *concavidade* da parábola é voltada para cima. Se o foco estiver abaixo da reta diretriz então a *concavidade* é dita para baixo. Fica claro assim que o valor do coeficiente $a$ determina a concavidade da parábola. Outro fato a se observar é que quanto maior o valor de $a$, em módulo, mais perto fica o foco da reta diretriz ($\frac{1}{4a}$ tende para zero quando $|a|$ tende para infinito). Essa característica influencia na abertura da parábola. Para comprovar essa propriedade basta considerar, sem perda de generalidade, as funções $g(x) = a'x^2$ e $f(x) = ax^2$, com $0 < a' < a$. Então, $a'x^2 \leq ax^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ocorrendo a igualdade somente em $x = 0$. A Figura 4 deixa claro que dado $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ o ponto correspondente na parábola que representa $ax^2$ estará acima do ponto correspondente ao mesmo valor de $x$ na parábola que representa $a'x^2$, ou seja, a primeira parábola é mais fechada que a segunda.

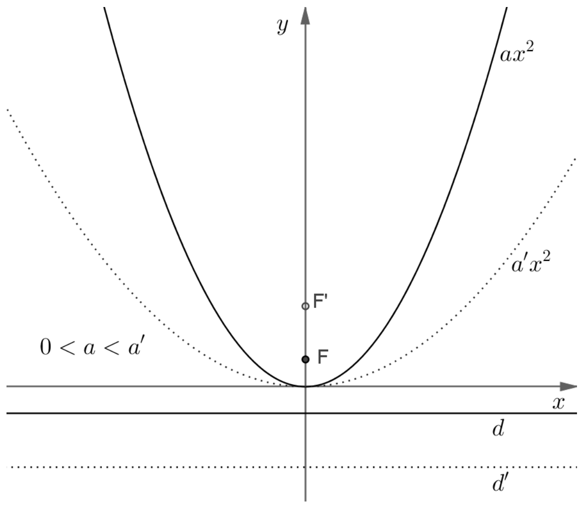


Figura 4 – Gráficos das funções $ax^2$ e $a'x^2$, com $0 < a' < a$.

Veja Atividade 4.

## O gráfico de $a(x-m)^2$

Observando os gráficos de $a(x-m)^2$ para vários valores de $m$ notamos que, pelo menos visualmente, esses gráficos são idênticos ao gráfico de $ax^2$, deslocado horizontalmente uma distância $m$. Assim, deslocando da mesma forma o foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e a reta diretriz $d : y = -\frac{1}{4a}$ da parábola correspondente a $ax^2$, obtemos candidatos $F'$ e $d'$ a foco e reta diretriz para $a(x-m)^2$.

Veja Atividade 5.

Uma reta horizontal deslocada horizontalmente continua sendo a mesma reta, logo temos $d' = d$. Já para o foco temos $F' = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$. Segue que, dado um ponto $P$ do gráfico de $a(x-m)^2$:

$$\begin{aligned} d(P,F')^2 &= (x-m)^2 + \left(a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= (x-m)^2 + \left[a(x-m)^2\right]^2 - \frac{2a(x-m)^2}{4a} + \frac{1}{16a^2} \\ &= (x-m)^2 - \frac{(x-m)^2}{2} + \left[a(x-m)^2\right]^2 + \frac{1}{16a^2} \\ &= \left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$d(P,d')^2 = \left|y + \frac{1}{4a}\right|^2 = \left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2, \tag{3.10}$$

ou seja, $d(P,F') = d(P,d')$. Consequentemente, o gráfico de $a(x-m)^2$ está contido em uma parábola, de foco $F'$ e reta diretriz $d' = d$. O vértice dessa parábola é o ponto $(m,0)$.

Deveríamos ainda demonstrar que todo ponto $(x,y)$ da parábola de foco $F'$ e reta diretriz $d'$ é um ponto do gráfico de $a(x-m)^2$. No entanto, como os cálculos são análogos aos que foram feitos anteriormente nesse capítulo e para evitar repetições, essa parte será omitida. Depois de feita essa segunda parte da demonstração podemos afirmar que o gráfico de $a(x-m)^2$ é uma parábola.

## O gráfico de $a(x-m)^2 + k$

Considere agora um deslocamento vertical, de uma distância $k$, do gráfico de $a(x-m)^2$. Nesse caso, o ponto $F'$ é deslocado para o ponto $F'' = \left(m, \frac{1}{4a} + k\right)$. Sofrendo o mesmo deslocamento vertical, a reta $d'$ agora passa a ter equação $d'' : y = -\frac{1}{4a} + k$. O conjunto de pontos $P = (x,y)$ que obedecem à relação dada por $y = a(x-m)^2 + k$ descreve uma parábola de foco $F''$ e reta diretriz $d''$.

Veja Atividade 6.

A fim de se convencer dessa afirmação, basta observar que:

$$d(P,F'')^2 = (x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 + k - \frac{1}{4a} - k\right]^2 \tag{3.11}$$

e

$$d(P,d'')^2 = \left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2. \tag{3.12}$$

As equações 3.11 e 3.12 recaem nos resultados obtidos em 3.9, donde concluímos que $d(P,F'') = d(P,d'')$, o que significa que o gráfico de $a(x-m)^2 + k$ é de fato uma parábola, cujo vértice é o ponto $(m,k)$.

Analogamente, será omitida a demonstração de que todo ponto $(x,y)$ da parábola de foco $F''$ e reta diretriz $d''$ é um ponto do gráfico de $a(x-m)^2 + k$.

## O caso geral $f(x) = ax^2 + bx + c$

Estenderemos agora para o caso geral. Veremos que o gráfico de uma função quadrática qualquer $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o gráfico da função $ax^2$, que já sabemos ser uma parábola, deslocado simultaneamente $m$ unidades na horizontal e $k$ unidades na vertical. Começaremos por lembrar a forma canônica do trinômio de 2º grau e depois passaremos ao gráfico da função $f$.

Considere o trinômio $ax^2 + bx + c$. Usando propriedades e operações elementares podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{3.13}$$

Esta forma de se escrever o trinômio do segundo grau chama-se *forma canônica.* Uma consequência interessante da forma canônica é que a função quadrática $f$ sempre pode ser escrita na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$, bastando para isto fazer $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Portanto, pelo que foi feito na Subseção 3.3, o gráfico da função real $f$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola cujo foco é o ponto

$$F = \left(m, \frac{1}{4a} + k\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right), \tag{3.14}$$

cuja reta diretriz é a reta horizontal

$$d : y = -\frac{1}{4a} + k = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} \tag{3.15}$$

e o vértice é o ponto $(m, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

O que acabamos de ver permite mais do que comprovar que o gráfico da função quadrática é uma parábola. Alguns gráficos de funções não quadráticas são curvas que lembram parábolas, mas não são. Muitos estudantes, baseados apenas na visualização do gráfico, afirmam erroneamente que essas curvas são parábolas. Experiências vivenciadas por nós mostram isso, onde um professor de matemática apresentou à alunos, de pós graduação na área, o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4$ e questionou sobre qual curva se tratava. Alguns prontamente responderam se tratar de uma parábola. Os argumentos apresentados neste capítulo possibilitam dirimir essas dúvidas. Vejamos a seguir o caso do gráfico da função $x^4$. Observando puramente o gráfico da Figura 5 podemos ser levados a concluir que se trata dessa cônica. Veremos que essa suposição é equivocada. De fato, se o gráfico de $x^4$ for uma parábola, seu eixo de simetria deve ser o eixo $y$. Nesse caso, como na Seção 3.3, vamos buscar possíveis candidatos a foco e reta diretriz. Sendo o ponto $F = (0, p)$ o foco da suposta parábola e a reta horizontal $d : y = -p$ sua diretriz, o ponto $P = (1, 1)$, que está sobre o gráfico de $f$, deve verificar a igualdade

$$d(P, F) = d(P, d). \tag{3.16}$$

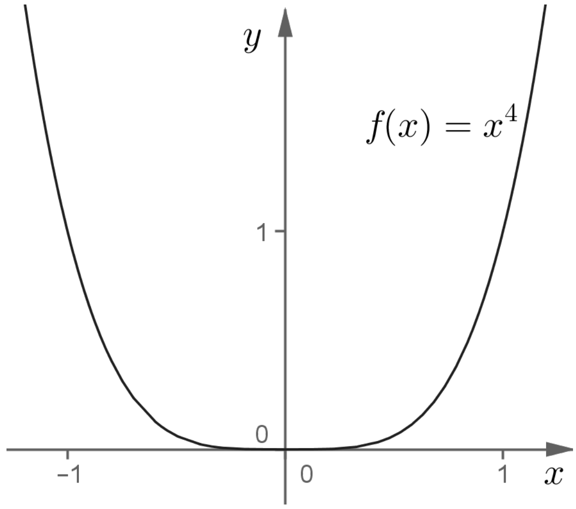


Figura 5 – Gráfico da função $x^4$.

Ao desenvolver a Equação (3.16) encontramos o ponto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ para foco e a reta $d : y = -\frac{1}{4}$ como diretriz. No entanto, nem todo ponto do gráfico dista igualmente de $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e de $d : y = -\frac{1}{4}$, como, por exemplo, o ponto $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$. Assim, concluímos que o gráfico de $x^4$ não pode ser uma parábola.

## 3.4 Aplicações

### A propriedade refletora da parábola

A superfície gerada pela revolução de uma parábola em torno de seu eixo apresenta propriedades interessantes de reflexão que podem ser observadas em diversas aplicações tecnológicas. Se tivermos um refletor parabólico com uma fonte de luz localizada no seu foco, os raios que saem dessa fonte e incidem sobre a superfície do refletor são refletidos segundo retas paralelas ao eixo de simetria. Outros instrumentos, igualmente úteis e interessantes, funcionam num processo inverso: se os raios chegarem à superfície parabólica paralelamente ao eixo de simetria serão refletidos para o foco.

Vamos analisar os fundamentos matemáticos dessas propriedades.

Inicialmente devemos ter em mente as leis de reflexão da Física, segundo a qual, quando um raio incide sobre uma superfície refletora, os ângulos de incidência e de reflexão são iguais. Para interpretar os ângulos de incidência e de reflexão no caso dos paraboloides, substituímos a superfície parabólica pela interseção dessa superfície com o plano que contém o raio de incidência, o raio de reflexão e o eixo de rotação, nesse caso igual ao eixo da parábola. Note que, na verdade, substituímos o paraboloide pela parábola, conforme nos diz Lima et al, em [12]. Além disso, precisamos da seguinte definição: o ângulo entre uma reta e uma curva é o ângulo entre essa reta e a tangente à curva no ponto de interseção. Essa definição é motivada pela observação de que, quanto mais de perto observarmos uma curva nas proximidades de um dado ponto, mais ela se confunde com sua reta tangente naquele ponto. Quando o espelho é plano e a luz é refletida por ele, o ângulo entre o raio incidente e o espelho é igual ao ângulo entre o raio refletido e o espelho. No caso dos paraboloides o espelho é curvo e a reta tangente no ponto de incidência determina como o raio é refletido.

O complementar de uma parábola no plano consiste em duas regiões: a focal e a não focal. A primeira contém o foco e cada ponto $P$ daquela região tem distância até o foco menor que sua distância até a diretriz, satisfazendo $d(P, F) < d(P, d)$. A segunda contém a reta diretriz e cada ponto $P$ dessa região tem distância até o foco maior que a distância até a diretriz, ou seja, $d(P, F) > d(P, d)$.

Vamos definir a tangente a uma parábola no ponto $P$ como a reta que contém o ponto $P$ e tal que todos os demais pontos dessa reta pertencem à região não focal da parábola. Tomando um ponto $P$ sobre a parábola, seja $Q$ o pé da perpendicular à diretriz baixada do ponto $P$.

*A reta $r$, mediatriz do segmento $FQ$, é tangente à parábola no ponto $P$.*

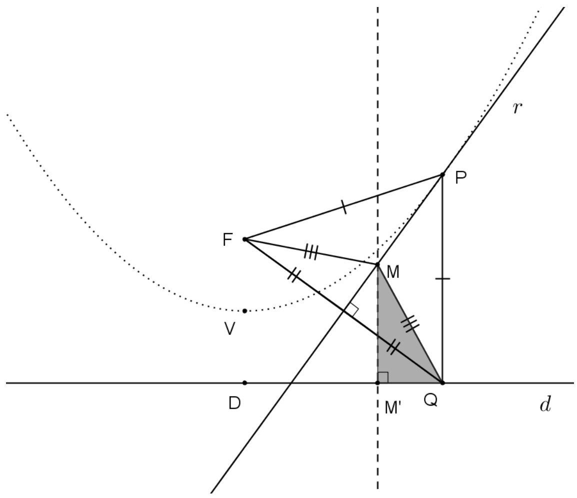


Figura 6 – Ponto $M$ qualquer da reta $r$ distinto de $P$.

$P$ é um ponto da reta $r$, pois $d(P, F) = d(P, Q)$. Tome um ponto $M$, distinto de $P$, sobre a reta $r$. Como $r$ é mediatriz do segmento $FQ$, então $d(M, F) = d(M, Q)$. Por $M$, trace a perpendicular à reta diretriz $d$ e seja $M'$ o pé da perpendicular. Então, $d(M, M') = d(M, d)$. O triângulo $MM'Q$, é retângulo em $M'$ e o lado $MQ$ é oposto ao ângulo $M\widehat{M'}Q$. Então $MQ > MM'$ para qualquer ponto $M$, distinto de $P$, escolhido sobre a reta $r$. Como $d(M, F) = d(M, Q)$ e $d(M, Q) > d(M, M')$, conclui-se que a distância do ponto $M$ ao foco é maior do que a distância do mesmo em relação à diretriz $d$. Assim, $M$ pertence à região não focal da parábola. Portanto, $r$ é tangente à parábola em $P$.

Podemos então enunciar a propriedade geométrica da parábola na qual se baseiam as aplicações da superfície parabólica.

*A reta $r$, tangente à parábola em um ponto $P$ qualquer, forma ângulos iguais com o segmento $PF$ e com a reta $l$ que passa por $P$ e é paralela ao eixo de simetria da parábola.*

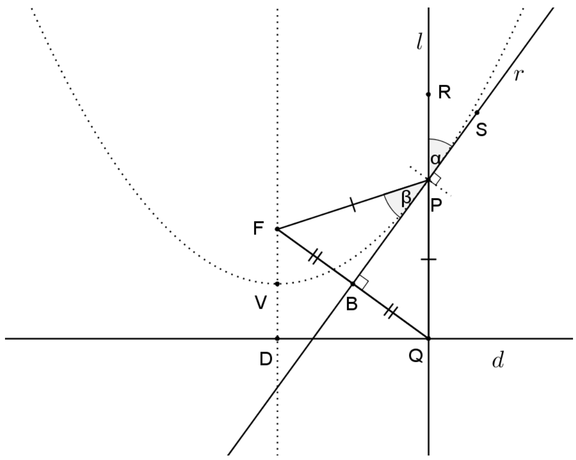


Figura 7 – Propriedade da reta $r$ tangente à parábola em $P$.

Sejam $r$ a reta tangente à parábola no ponto $P$, $l$ a reta que passa por $P$ paralela ao eixo da parábola, $Q$ o ponto de interseção da reta $l$ com a diretriz $d$ da parábola e $B$ a interseção da reta $r$ com o segmento $FQ$. Sejam os pontos $R$ e $S$ sobre as retas $l$ e $r$, respectivamente, conforme a Figura 7. Considere $\alpha$ a medida do ângulo $R\widehat{P}S$ e $\beta$ a medida do ângulo $F\widehat{P}B$. Pretendemos mostrar que $\alpha = \beta$. De fato, $P$ é um ponto da parábola. Então, $d(F, P) = d(P, Q)$ e o triângulo $FPQ$ é isósceles. Acabamos de ver que $r$ é mediatriz do segmento $FQ$. Assim, a altura $PB$ do triângulo $FPQ$ em relação ao vértice $P$ é também bissetriz do ângulo $F\widehat{P}Q$. Segue que o ângulo $F\widehat{P}B$ é congruente ao ângulo $B\widehat{P}Q$, isto é, $B\widehat{P}Q$ tem medida igual a $\beta$. Como os ângulos $B\widehat{P}Q$ e $R\widehat{P}S$ são opostos pelo vértice, conclui-se que $\alpha = \beta$.

## Aplicações da propriedade de reflexão da parábola

Atualmente, muitas instituições de ensino, especialmente escolas técnicas, fazem uso das feiras de ciências, onde são divulgados vários experimentos realizados pelos alunos. Não é raro encontrar exposições de objetos que retratam justamente aplicações da propriedade refletora da parábola. De fato, os exemplos de aplicações dessa propriedade no cotidiano, como os espelhos parabólicos presentes em telescópios, antenas parabólicas, fornos solares e faróis de automóveis, dentre outros, legitimam o estudo do tema. Vejamos algumas dessas aplicações.

Pelas propriedades refletoras, observa-se que raios de luz ao encontrarem um espelho parabólico, paralelamente ao seu eixo de simetria, convergirão para o foco deste

Figura 8 – Forno solar em Odeillo, que atinge até 3800 °C. Autor: Björn Appel. Licença de uso: `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/`

espelho. Essa propriedade é aplicada nos fornos solares, onde a temperatura no ponto focal é muito elevada. Nesse ponto se coloca o dispositivo que coletará a energia, que poderá ser usada para gerar eletricidade, derretimento de aço ou outras atividades. De modo parecido é o comportamento de ondas de rádio quando encontram uma antena parabólica na direção do seu eixo de simetria. Isto é, serão refletidas na direção do foco, onde fica o instrumento para captá-las. Lembramos ainda que os espelhos parabólicos também são usados nos telescópios. Assim como no caso da antena parabólica, precisa captar sinais que são muito fracos e "por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena (ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão" [24]. Falaremos mais dos telescópios na Seção 4.3.

Esse princípio pode ser usado ao contrário no refletor parabólico, onde uma fonte de luz é colocada no foco e cada raio de luz que deixa o foco é refletido pela parábola de tal modo que forme ângulos iguais com a reta tangente. Essa propriedade é usada na construção de holofotes e alguns tipos de faróis de automóveis.

## 3.5 Atividades com o GeoGebra

Nesta seção sugerimos uma série de atividades (algumas bem simples e diretas), orientadas aos estudantes, a serem desenvolvidas com o *software* GeoGebra. O objetivo é auxiliar na visualização das definições e propriedades apresentadas neste capítulo, bem como estimular o aluno a usar o *software* como ferramenta de investigação e formulação de conjecturas. Sugerimos que o professor acompanhe a turma no desenvolvimento dessas atividades, mas cada uma foi pensada para ser desenvolvida pelo aluno, com liberdade para manusear livremente o *software*. No entanto, eles devem ser provocados pelo professor a procurar entender os aspectos adquiridos em cada estágio do exercício, para que possam fazer conjecturas e indicar caminhos para a solução dos problemas propostos. Lembramos que deve ser sempre salientado que a validade ou não de cada conjectura deve ser verificada com base apenas em critérios de argumentação matemática.

### 3.5.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Foi desenvolvido em 2002, pelo professor e pesquisador Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo, na Áustria, e foi objeto de sua tese de doutorado. O GeoGebra é um *software* gratuito e de código aberto, seu download pode ser feito através do site `http://www.geogebra.org/cms/`. A versão 4.2.21.0 foi a utilizada neste trabalho. O leitor que não conhecer suficientemente o *software*, encontrará no site referido acima as informações necessárias para instalação e uso do mesmo.

Cada atividade abaixo começa expondo o objetivo, os passos da construção no GeoGebra e, por fim, sugere questionamentos que pretendem levar os alunos a alcançar o objetivo da atividade. É importante ressaltar que para desenvolvê-las é necessário conhecimento prévio de como utilizar o *software* nas suas funções mais básicas.

### 3.5.2 Atividades

**Atividade 1**

*Objetivos:*

Familiarizar o estudante com a forma das parábolas, movendo livremente o foco e a reta diretriz e vendo a parábola resultante. Verificar visualmente a propriedade que usamos para definir uma parábola, ou seja, que um ponto $P$ qualquer da parábola dista igualmente do foco e da reta diretriz.

*Construção:*

1. Trace uma reta $d$ e marque um ponto $F$, não pertencente a $d$, na janela de visualização.

2. Trace a parábola, com foco $F$ e diretriz $d$.

3. Marque um ponto $P$ sobre a parábola.

4. Trace por $P$ a perpendicular $t$ à reta $d$ e determine o ponto $Q$ de interseção entre $t$ e $d$. Para isso use a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**.

5. Clique sobre a reta $t$ com o botão direito do mouse e depois em **Exibir Objeto**.

6. Trace os segmentos $PF$ e $PQ$. Exiba a medida dos segmentos $PF$ e $PQ$ clicando com o botão direito do mouse sobre os segmentos e acessando as opções **Propriedades, Exibir** e **Valor**.

7. Arraste o ponto $P$ sobre a parábola.

8. Mova o ponto $F$ e a reta $d$ e repita o passo 7 com o ponto $P$.

*Questões para os alunos:*

a) O que a medida do segmento $PQ$ representa?

b) O que se observa em relação às medidas dos segmentos $PF$ e $PQ$?

**Atividade 2**

*Objetivos:*

Verificar que, dado um ponto $P$ sobre a parábola, o simétrico de $P$ em relação ao eixo de simetria da parábola também é um ponto da mesma.

*Construção:*

1. Repita os passos 1 a 3 da construção **Atividade 1**.

2. Pelo ponto $F$, trace a perpendicular $l$ à reta $d$. Use a ferramenta **Reta Perpendicular**.

3. Determine o ponto $Q$, simétrico de $P$ em relação à reta $l$ com a ferramenta **Reflexão em Relação a uma Reta**.

4. Habilite rastro do ponto $Q$. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto e marque a opção **Habilitar Rastro**.

5. Mova o ponto $P$ sobre a parábola e observe o rastro do ponto $Q$.

6. Mova o ponto $F$ e a reta $d$ e repita o passo 5 com o ponto $P$.

Obs.: A cada vez que executar o passo 6, use o comando CTRL+F antes de repetir o passo 5. Esse comando limpa o rastro.

*Questões para os alunos:*

a) O que se observa com relação à localização do ponto $Q$?

b) O que se pode conjecturar a respeito dessa constatação?

**Atividade 3**

*Objetivos:*

Conjecturar que o gráfico da função $x^2$ tem a forma de uma parábola e a partir dessa conjectura tentar encontrar as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz.

*Construção:*

1. Construa o gráfico da função $f(x) = x^2$. Para isso insira no campo de entrada a expressão: `f(x)= x^2`.
2. Marque os pontos $F$ e $A$ sobre o eixo $y$.
3. Exiba as coordenadas dos pontos $F$ e $A$ clicando com o botão direito do mouse sobre os pontos e acessando as opções **Propriedades, Exibir** e **Nome & Valor**.
4. Pelo ponto $A$ trace uma reta $d$ perpendicular ao eixo $y$.
5. Trace a parábola de foco $F$ e reta diretriz $d$.
6. Arraste o ponto $F$ e o ponto $A$ convenientemente até sobrepor a parábola ao gráfico de $f$.

*Questões para os alunos:*

a) O que se pode conjecturar sobre o gráfico de $f$?

b) Sendo o gráfico de $f$ uma parábola, quais seriam bons candidatos a foco e reta diretriz?

**Atividade 4**

*Objetivos:*

Conjecturar sobre a concavidade e a abertura da parábola em relação ao coeficiente $a$ da função $f(x) = ax^2$.

*Construção:*

1. Insira na janela de visualização um parâmetro $a$. Para isso use a ferramenta **Controle Deslizante**, escolhendo o intervalo com valor mínimo $-10$, máximo 10 e incremento 0.1.

2. Insira no campo de entrada a expressão: `y=a*(x^2)` para construir a parábola que é gráfico da função $f(x) = ax^2$. Ao clicar em **Enter** surgirá na janela de visualização uma parábola nomeada por $c$.

3. Determine o foco da parábola, inserindo no campo de entrada o comando **Foco**[**c**]. Renomeie chamando-o por $F$ e exiba as coordenadas de $F$.

4. Determine a reta diretriz da parábola, inserindo no campo de entrada o comando **Diretriz**[**c**]. Renomeie chamando-a por $d$ e exiba sua equação $d$ clicando sobre a reta e acessando **Propriedades, Exibir** e **Nome & Valor**.

5. Altere manualmente o valor do parâmetro $a$ arrastando o ponto do parâmetro e observe a parábola.

*Questões para os alunos:*

a) Existe relação entre o valor de $a$ e o lado para o qual a parábola está "aberta"? Qual?

b) Existe relação entre o valor de $a$ e a parábola ser mais ou menos "fechada"? O que podemos conjecturar sobre isso?

**Atividade 5**

*Objetivos:*

Conjecturar que o gráfico de $a(x - m)^2$ é uma parábola igual à parábola que representa a função $ax^2$, deslocada $m$ unidades horizontalmente.

*Construção:*

1. Repita os passos 1 a 4 da construção da **Atividade 4**.

2. Insira o parâmetro $m$ na janela de visualização.

3. Insira no campo de entrada a expressão: `y=a*((x-m)^2)`. Ao clicar **Enter** aparecerá um gráfico denominado $e$.

4. Determine o foco e a reta diretriz da parábola $e$. Renomeie o foco de $F'$ e a reta diretriz de $d'$, como em 3 e 4, da **Atividade 4**.

5. Altere manualmente o valor do parâmetro $m$ e observe o que ocorre com o gráfico $e$ em relação à parábola $c$.

6. Altere o valor do parâmetro $a$ e repita o passo 5.

*Questões para os alunos:*

a) O gráfico de $a(x - m)^2$ parece uma parábola? Qual? Que diferenças se observa entre elas?

b) Conjecture os candidatos a foco e reta diretriz do gráfico deslocado.

**Atividade 6**

*Objetivos:*

Conjecturar que o gráfico de $a(x - m)^2 + k$ é uma parábola, resultado do deslocamento da parábola da **Atividade 5**, $k$ unidades verticalmente.

*Construção:*

1. Considere a construção da **Atividade 5** e continue com os passos a seguir.
2. Insira o parâmetro $k$ na janela de visualização.
3. Insira no campo de entrada a expressão: `y=a*((x-m)^2)+k`.
4. Determine o foco e a reta diretriz da parábola $f$. Renomeie o foco de $F''$ e a reta diretriz de $d''$.
5. Altere manualmente o valor do parâmetro $k$ e observe o que ocorre com o gráfico $f$ em relação ao gráfico $e$ (que nesse ponto já foi demonstrado ser uma parábola).
6. Altere o valor do parâmetro $a$ e do parâmetro $m$ e repita o passo 5.

*Questões para os alunos:*

a) O gráfico de $a(x - m)^2 + k$ parece uma parábola? Qual? Que diferenças se observa entre elas?

b) Conjecture os candidatos a foco e reta diretriz do gráfico $f$.

# 4 Gráficos de funções que são hipérboles

Neste capítulo identificamos o gráfico de algumas funções como sendo uma hipérbole. Como foi feito no Capítulo 3, primeiramente utilizamos uma propriedade geométrica para definir precisamente o que é uma hipérbole no plano. Em seguida, analisamos os gráficos de algumas funções específicas, começando com um caso mais simples até chegarmos no caso geral.

Como no capítulo anterior, no final deste dedicamos uma seção à propostas de atividades com o GeoGebra.

## 4.1 A hipérbole

A definição de hipérbole depende apenas da noção de distância entre dois pontos:

*Dados dois pontos $F_1$ e $F_2$ e um número real $a$ positivo, tal que $2a < d(F_1, F_2)$, definimos a hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$ como sendo o conjunto dos pontos $P$ tais que*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \tag{4.1}$$

A Figura 9 ilustra essa definição.

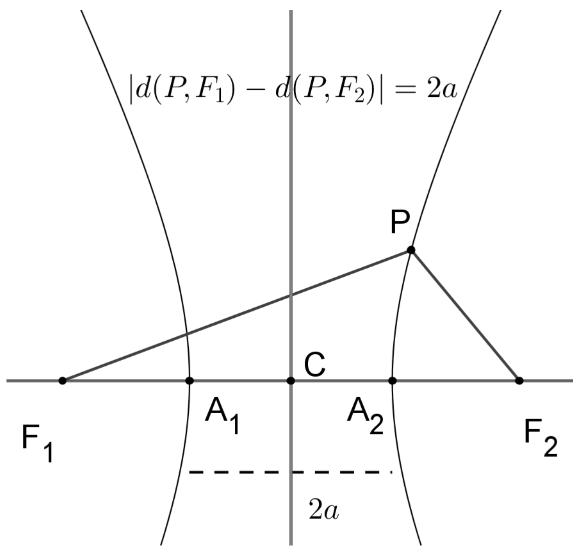


Figura 9 – Hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$ e distância focal medindo $2a$.

Veja Atividade 7.

A reta que contém os focos da hipérbole é chamada *reta focal* e a interseção da hipérbole com a reta focal consiste de exatamente dois pontos, $A_1$ e $A_2$, chamados *vértices*. O segmento $A_1A_2$ é denominado *eixo focal* da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$ (Figura 9). O centro $C$ da hipérbole é o ponto médio do segmento $A_1A_2$ e também do segmento $F_1F_2$ e a reta que passa por $C$ e é perpendicular à reta focal é chamada *reta não focal*.

A hipérbole é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro. Neste trabalho usaremos somente consequências da simetria da hipérbole em relação à reta focal. Analogamente ao que foi feito no caso da parábola, tentaremos localizar uma candidata a reta focal usando a seguinte propriedade da hipérbole: *se dois pontos são simétricos em relação à reta focal e um deles pertence à hipérbole, o segundo também pertence.*

Veja Atividade 8.

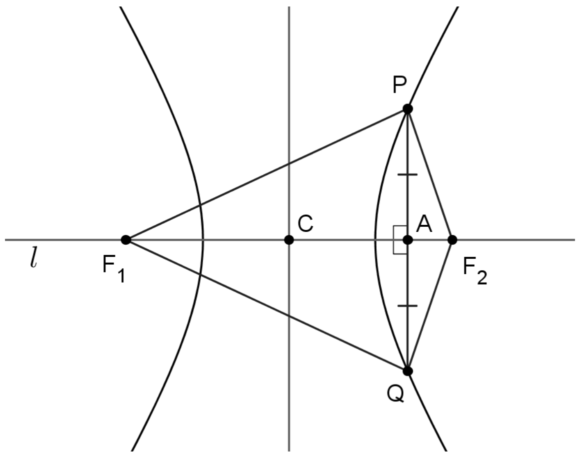


Figura 10 – Ponto $P$ sobre a hipérbole. Consequentemente seu simétrico $Q$, em relação à reta focal $l$, também está sobre a mesma.

De fato, considere a hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$ e reta focal $l$ (Figura 10). Tome o ponto $P$ sobre a hipérbole, ou seja, com $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$. Sendo $Q$ o simétrico de $P$ em relação a $l$, são congruentes, pelo caso $LAL$ de congruência, os triângulos $PAF_2$ e $QAF_2$, bem como $PAF_1$ e $QAF_1$ . Logo, $d(P, F_2) = d(Q, F_2)$ e $d(P, F_1) = d(Q, F_1)$. Consequentemente,

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(Q, F_1) - d(Q, F_2)|. \tag{4.2}$$

Portanto $Q$ também é um ponto sobre a hipérbole considerada.

O estudo da hipérbole é mais abrangente, mas o que definimos acima é suficiente para nosso objetivo que é mostrar que algumas hipérboles são gráficos de funções específicas. Passamos agora ao estudo dos gráficos dessas funções.

## 4.2 Funções estudadas

Nesta seção provaremos que os gráficos das funções $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{4.3}$$

com $a$, $b$, $c$ e $d$ reais, salvo poucas exceções, são hipérboles. Iniciaremos com o caso mais simples até chegarmos no caso geral, na seguinte ordem:

1. O gráfico de $\dfrac{1}{x}$;
2. O gráfico de $\dfrac{k}{x}$;
3. O gráfico de $\dfrac{k}{x-m}$, que corresponde a um deslocamento horizontal do gráfico anterior;
4. O gráfico de $\dfrac{k}{x-m} + h$, que corresponde a um deslocamento vertical do gráfico anterior;
5. O gráfico de $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ que, nos casos em que são hipérboles, podem ser colocadas na forma anterior.

### O gráfico de $\frac{1}{x}$

Analogamente ao que fizemos no caso da parábola, vamos inicialmente conjecturar a localização dos vértices e dos focos . Uma vez feita essa conjectura passaremos a provar que ela está correta. Observe os gráficos de $y = \frac{1}{x}$ e $y = x$ (Figura 11). A reta $r$, de equação $y = x$, é um eixo de simetria do gráfico de $f$. De fato, considere os pontos $P = (x, \frac{1}{x})$ e $Q = (\frac{1}{x}, x)$, como na Figura 12. O ponto $B = (x, x)$ está sobre a reta $r$ e o ângulo $P\hat{B}Q$ é reto. Sendo $A$ o ponto de interseção entre o segmento $PQ$ e a reta $r$, pela congruência dos triângulos $PBA$ e $QBA$, pelo caso LAL de congruência, verificamos que os ângulos $P\hat{A}B$ e $Q\hat{A}B$ são retos e que $d(P, r) = d(Q, r)$. Logo, os pontos $P$ e $Q$ são simétricos com relação à reta $r$. Como o gráfico de $f$ possui interseção com a reta $r$, além daquela reta ser um dos eixos de simetria do gráfico é provável que os vértices sejam os pontos de interseção $A_1 = (1, 1)$ e $A_2 = (-1, -1)$. Calculando a distância entre eles teremos:

Veja Atividade 9.

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2} \tag{4.4}$$

Passemos então à busca dos possíveis candidatos a focos. Lembrando que os focos de uma hipérbole estão sobre a reta que passa pelos seus vértices e são simétricos em relação ao ponto médio do segmento determinado pelos mesmos vértices, procuramos pontos da forma $F_1 = (p, p)$ e $F_2 = (-p, -p)$.

Veja Atividade 10.

Sabemos que o ponto $Q = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ está sobre o gráfico de $f$. Assim, sendo este gráfico uma hipérbole, devemos ter

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow |d(Q, F_1) - d(Q, F_2)|^2 = 8.$$

Considerando $F_1 = (p, p)$ e $F_2 = (-p, -p)$, teremos

$$8 = \left| d\left(\left(\frac{1}{2}, 2\right), (p, p)\right) - d\left(\left(\frac{1}{2}, 2\right), (-p, -p)\right)\right|^2.$$

Os cálculos desenvolvidos a seguir são trabalhosos, mas envolvem apenas operações elementares.

$$\begin{aligned} 8 &= \left|\sqrt{\left(\frac{1}{2} - p\right)^2 + (2-p)^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} + p\right)^2 + (2+p)^2}\right|^2 \\ &= \left|\sqrt{\frac{8p^2 - 20p + 17}{4}} - \sqrt{\frac{8p^2 + 20p + 17}{4}}\right|^2 \\ &= \frac{8p^2 - 20p + 17}{4} - 2\sqrt{\left(\frac{8p^2 - 20p + 17}{4}\right)\left(\frac{8p^2 + 20p + 17}{4}\right)} + \frac{8p^2 + 20p + 17}{4} \\ &= \frac{16p^2 + 34}{4} - 2\sqrt{\frac{64p^4 - 128p^2 + 289}{16}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

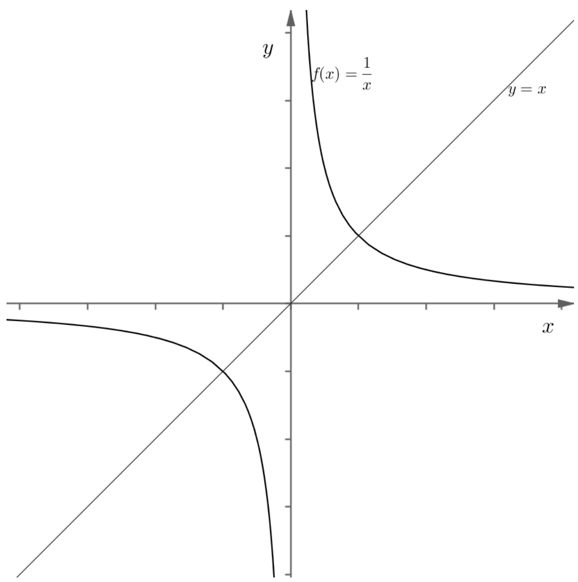


Figura 11 – Gráficos de $y = \frac{1}{x}$ e $y = x$.

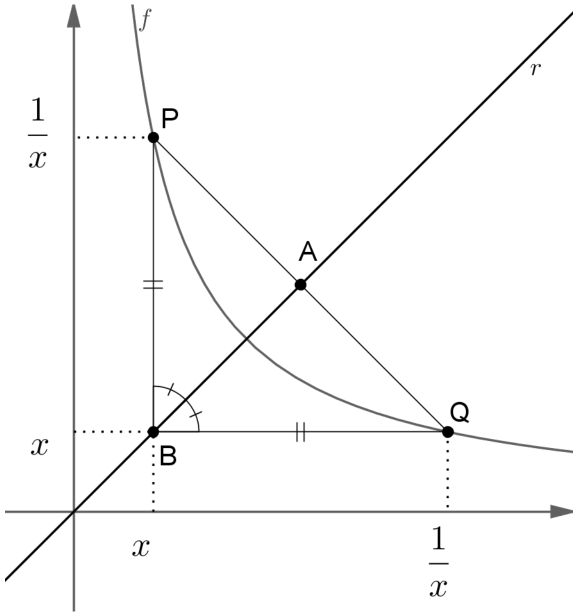


Figura 12 – Um dos eixos de simetria do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{256p^4 + 64p^2 + 4}{64} &= \frac{64p^4 - 128p^2 + 289}{16} \\ 576p^2 &= 1152 \\ p &= \pm\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

ou seja, os pontos $F_1 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $F_2 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ são os candidatos a focos que procuramos. Vamos então provar o seguinte resultado.

*O gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma hipérbole de focos $F_1 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $F_2 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e distância entre os vértices igual a $2\sqrt{2}$.*

Devemos mostrar que:

1. Todo ponto do gráfico é um ponto da hipérbole;

2. Todo ponto da hipérbole é um ponto do gráfico.

Inicialmente, vamos mostrar o primeiro item. De fato, seja $P = \left(x, \frac{1}{x}\right)$ um ponto do gráfico de $f$ e $D = |d(P, F_1) - d(P, F_2)|$. Substituindo as coordenadas de $P, F_1$ e $F_2$ em

$D$ teremos:

$$\begin{aligned} D^2 &= \left| \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2} \right|^2 \\ &= 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 8 - 2\sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2} \\ &= 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 8 - 2\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como $x^2 + \frac{1}{x^2} > 0$ para todo $x$ no domínio de $f$, segue que

$$D^2 = 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 8 - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 8.$$

Portanto $D = 2\sqrt{2}$. Logo $P = \left(x, \frac{1}{x}\right)$ pertence à hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$.

Agora, considere um ponto $(x, y)$ do plano tal que

$$\left| d\left((x,y),(\sqrt{2},\sqrt{2})\right) - d\left((x,y),(-\sqrt{2},-\sqrt{2})\right) \right| = 2\sqrt{2}. \tag{4.8}$$

Então, desenvolvendo as expressões da Equação 4.8 teremos:

$$\begin{aligned} \left| d\left((x,y),(\sqrt{2},\sqrt{2})\right) - d\left((x,y),(-\sqrt{2},-\sqrt{2})\right) \right|^2 &= 8 \\ \left| \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} \right|^2 &= 8 \\ 2x^2 + 2y^2 + 8 - 2\sqrt{\left[(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2\right]\left[(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2\right]} &= 8 \\ \sqrt{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 16xy + 16} &= x^2 + y^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como ambos os membros da Equação 4.9 são positivos, seus quadrados continuam tendo os mesmos valores. Segue que:

$$\begin{aligned} (x^2+y^2)^2 &= \left(\sqrt{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 16xy + 16}\right)^2 \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 16xy + 16 \\ 16xy &= 16 \\ y &= \frac{1}{x}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

de onde concluímos que se um ponto $(x, y)$ pertence à hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$, então $y = \frac{1}{x}$. Portanto o gráfico da função $\frac{1}{x}$ é a hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$ e distância entre vértices igual a $2\sqrt{2}$.

## O gráfico de $\frac{k}{x}$

Vamos agora estudar um caso mais geral: o da função $f(x) = \frac{k}{x}$, inicialmente considerando apenas $k > 0$. Supondo que o gráfico de $f$ também seja uma hipérbole, vamos procurar candidatos a focos e vértices da mesma. De modo análogo ao que foi feito na seção anterior concluímos que, quando $k > 0$, a reta $r$ de equação $y = x$ é um eixo de simetria do gráfico de $f$ e conjecturamos que os pontos $A_1 = (\sqrt{k}, \sqrt{k})$ e $A_2 = (-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$ são os possíveis vértices do gráfico. Calculando a distância entre esses

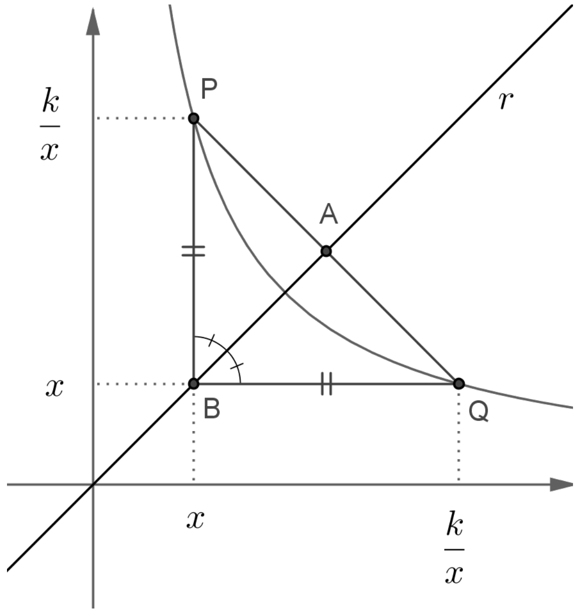


Figura 13 – Eixo de simetria de $y = \frac{k}{x}$.

pontos teremos:

$$\begin{aligned} d(A_1, A_2) &= \sqrt{(\sqrt{k} + \sqrt{k})^2 + (\sqrt{k} + \sqrt{k})^2} \\ &= \sqrt{4k + 4k} \\ &= \sqrt{8k} \\ &= 2\sqrt{2k} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Tendo $d(A_1, A_2)$, o ponto $Q = (1, k)$ do gráfico de $f$ possibilita encontrar $F_1 = (\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$ e $F_2 = (-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$ e podemos então provar que:

*O gráfico de $f(x) = \frac{k}{x}$, onde $k$ é uma constante real positiva, é uma hipérbole cujos focos são os pontos $F_1 = (\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$ e $F_2 = (-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$ e a distância entre os vértices é igual a $2\sqrt{2k}$.*

De fato, dado um ponto $P = \left(x, \frac{k}{x}\right)$ do gráfico de $f$, sendo $D = |d(P, F_1) - d(P, F_2)|$, teremos:

$$D^2 = \left| \sqrt{\left(x - \sqrt{2k}\right)^2 + \left(\frac{k}{x} - \sqrt{2k}\right)^2} - \sqrt{\left(x + \sqrt{2k}\right)^2 + \left(\frac{k}{x} + \sqrt{2k}\right)^2} \right|^2 \tag{4.12}$$

$$= 2x^2 + 8k + 2\frac{k^2}{x^2} - 2\sqrt{\frac{k^4 + 2k^2x^4 + x^8}{x^4}} \tag{4.13}$$

$$= 2x^2 + 8k + 2\frac{k^2}{x^2} - 2\left(\frac{k^2 + x^4}{x^2}\right) \tag{4.14}$$

$$= 8k, \tag{4.15}$$

isto é, $D = 2\sqrt{2k}$. Logo o ponto $P$ está sobre a hipérbole e gráfico de $f$ está contido nela.

Por outro lado, se $(x, y)$ é tal que

$$|d\left((x,y),(\sqrt{2k},\sqrt{2k})\right) - d\left((x,y),(-\sqrt{2k},-\sqrt{2k})\right)| = 2\sqrt{2k},$$

então:

$$\begin{aligned}
\left(2\sqrt{2k}\right)^2 &= \left|\sqrt{(x-\sqrt{2k})^2 + (y-\sqrt{2k})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2k})^2 + (y+\sqrt{2k})^2}\right|^2 \\
8k &= 8k + 2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 16k^2 - 16kxy} \qquad (4.16) \\
x^2 + y^2 &= \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 16k^2 - 16kxy}.
\end{aligned}$$

Elevando-se novamente os dois membros ao quadrado obtemos

$$\begin{aligned}
(x^2 + y^2)^2 &= \left(\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 16k^2 - 16kxy}\right)^2 \\
x^4 + 2x^2y^2 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 16k^2 - 16kxy \qquad (4.17) \\
16kxy &= 16k^2,
\end{aligned}$$

o que implica em $xy = k$, ou seja, $x$ e $y$ satisfazem a condição dada por $y = \frac{k}{x}$. Concluímos assim a prova de que o ponto $(x, y)$ da hipérbole está no gráfico de $f$. Portanto, o gráfico de $f$ é a hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$.

Quando $k < 0$, a demonstração é feita de maneira similar. Neste caso, porém, o eixo de simetria que contém os vértices do gráfico de $f$ é a reta $r'$ de equação $y = -x$ e o gráfico é uma hipérbole cujos vértices são os pontos $A_1 = \left(-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|}\right)$ e $A_2 = \left(\sqrt{|k|}, -\sqrt{|k|}\right)$, a distância entre eles é $2\sqrt{2|k|}$ e os focos são os pontos $F_1 = \left(-\sqrt{2|k|}, \sqrt{2|k|}\right)$ e $F_2 = \left(\sqrt{2|k|}, -\sqrt{2|k|}\right)$.

## O gráfico de $\frac{k}{x-m}$

Veja Atividade 11.

Inicialmente considerando $k > 0$ e observando os gráficos de $\frac{k}{x-m}$ para vários valores de $m$ notamos que esses gráficos são idênticos ao gráfico de $\frac{k}{x}$ deslocado horizontalmente uma distância $m$. Assim, deslocando da mesma forma os focos $F_1 = (\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$ e $F_2 = (-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$, obtemos candidatos $F_1'$ e $F_2'$ a focos do gráfico de $\frac{k}{x-m}$. Pelo deslocamento realizado a todos os pontos do gráfico de $\frac{k}{x-m}$, a distância entre os vértices continuará sendo a mesma no gráfico deslocado, enquanto os focos novos serão $F_1' = (\sqrt{2k} + m, \sqrt{2k})$ e $F_2' = (-\sqrt{2k} + m, -\sqrt{2k})$. Então dado um ponto $P$ do gráfico de $\frac{k}{x-m}$, sendo $D = |d(P, F_1') - d(P, F_2')|$, segue que:

$$D = \left|\sqrt{\left(x - m - \sqrt{2k}\right)^2 + \left(\frac{k}{x-m} - \sqrt{2k}\right)^2} - \sqrt{\left(x - m + \sqrt{2k}\right)^2 + \left(\frac{k}{x-m} + \sqrt{2k}\right)^2}\right|. \tag{4.18}$$

Observe que se elevarmos ambos os membros da Equação (4.18) ao quadrado o resultado obtido é muito parecido com a Equação (4.12), a única diferença é que agora temos $x - m$ no lugar de $x$. Por isso pode ser simplificada como as Equações (4.13) e (4.14) donde obtemos, por fim, $D^2 = 8k$. Pelo que acabamos de ver, o gráfico de $\frac{k}{x-m}$ está contido na hipérbole de focos $F_1'$ e $F_2'$ e distância entre vértices igual a $2\sqrt{2k}$.

Assim como fizemos na Seção 3.3 do Capítulo 3, vamos omitir a prova de que todo ponto da hipérbole de focos $F_1'$ e $F_2'$ e distância entre vértices igual a $2\sqrt{2k}$ é um ponto do gráfico de $\frac{k}{x-m}$, para que o texto não fique repetitivo sem necessidade. Feita essa segunda parte da demonstração fica demonstrado que o gráfico de $\frac{k}{x-m}$ é a hipérbole de focos $F_1'$ e $F_2'$ e distância entre vértices igual a $2\sqrt{2k}$.

O caso $k < 0$ é analisado de forma análoga.

## O gráfico de $\frac{k}{x-m} + h$

Veja Atividade 12.

Considere agora, novamente com $k > 0$, um deslocamento vertical do gráfico de $\frac{k}{x-m}$, de uma distância $h$. Nesse caso, o ponto $F_1'$ é deslocado para o ponto $F_1'' = (\sqrt{2k} + m, \sqrt{2k} + h)$, enquanto o ponto $F_2'$ para o ponto $F_2'' = (-\sqrt{2k} + m, -\sqrt{2k} + h)$. Como o deslocamento preserva distâncias, os vértices do gráfico deslocado distam $2\sqrt{2k}$ um do outro. Dessa forma, podemos afirmar que o conjunto de pontos $P = (x, y)$ que obedecem à relação dada por $\frac{k}{x-m} + h$ descreve uma hipérbole de focos $F_1''$ e $F_2''$ e distância entre vértices medindo $2\sqrt{2k}$. De fato,

$$\begin{aligned} d(P, F_1'') &= \sqrt{\left(x - (\sqrt{2k} + m)\right)^2 + \left(\frac{k}{x-m} + h - \sqrt{2k} - h\right)^2} \\ &= \sqrt{\left((x - m) - \sqrt{2k}\right)^2 + \left(\frac{k}{x-m} - \sqrt{2k}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.19}$$

e

$$d(P,F_2'') = \sqrt{\left(x+(\sqrt{2k}-m)\right)^2 + \left(\frac{k}{x-m} + h\sqrt{2k} - h\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left((x-m)+\sqrt{2k}\right)^2 + \left(\frac{k}{x-m}+\sqrt{2k}\right)^2}. \qquad (4.20)$$

Considerando $D = |d(P,F_1'') - d(P,F_2'')|$, então

$$D = \left|\sqrt{\left(x-m-\sqrt{2k}\right)^2 + \left(\frac{k}{x-m}-\sqrt{2k}\right)^2} - \sqrt{\left(x-m+\sqrt{2k}\right)^2 + \left(\frac{k}{x-m}+\sqrt{2k}\right)^2}\right|. \qquad (4.21)$$

Mas a Equação (4.21) recai na Equação (4.18). Logo $D^2 = 8k$ e o gráfico de $\frac{k}{x-m} + h$ está contido na hipérbole que conjecturamos. De forma análoga aos casos anteriores podemos mostrar que todo ponto da hipérbole de focos $F_1''$ e $F_2''$ e distância entre vértices medindo $2\sqrt{2k}$ pertence ao gráfico de $\frac{k}{x-m} + h$. Consequentemente, o gráfico $\frac{k}{x-m} + h$ é uma hipérbole. O caso $k < 0$ é analisado de forma similar.

## O caso geral $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Finalmente, vamos considerar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad (4.22)$$

com $a$, $b$, $c$ e $d$ reais. Queremos mostrar que, salvo algumas exceções, o gráfico dessa função é uma hipérbole. Primeiramente precisamos entender que uma condição necessária e essencial para isso é que $c$ não seja zero. Mas somente essa condição não é suficiente, pois

$$\begin{aligned}
\frac{ax+b}{cx+d} &= \frac{1}{c}\left[\frac{ax+b}{x+\frac{d}{c}}\right] \\
&= \frac{1}{c}\left[\frac{ax+b+\frac{ad}{c}-\frac{ad}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right] \\
&= \frac{1}{c}\left[\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right] \\
&= \frac{1}{c}\left[a+\frac{b-\frac{ad}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right] \\
&= \frac{1}{c}\left[a+\frac{bc-ad}{cx+d}\right].
\end{aligned} \qquad (4.23)$$

Escrevendo dessa forma fica claro que é necessário ter $bc - ad \neq 0$ para que o gráfico de $f$ possa ser uma hipérbole. Feitas essas ressalvas e tomando $k = \frac{bc-ad}{c^2}$, $m = -\frac{d}{c}$ e $h = \frac{a}{c}$, o gráfico de $f$ é uma hipérbole obtida a partir do gráfico de $\frac{k}{x}$ através de um deslocamento horizontal de $m$ unidades e depois um deslocamento vertical de $h$ unidades. Além disso, de acordo com a Subseção 4.2, os focos dessa hipérbole são os pontos $\left(-\frac{d}{c}+\sqrt{2\frac{bc-ad}{c^2}}, \frac{a}{c}+\sqrt{2\frac{bc-ad}{c^2}}\right)$ e $\left(-\frac{d}{c}-\sqrt{2\frac{bc-ad}{c^2}}, \frac{a}{c}-\sqrt{2\frac{bc-ad}{c^2}}\right)$ e a distância entre seus vértices é igual a $2\sqrt{2\frac{bc-ad}{c^2}}$.

## 4.3 Aplicações

### A propriedade refletora da hipérbole

A superfície gerada pela revolução de uma hipérbole em torno de seu eixo também apresenta propriedades de reflexão com aplicações tecnológicas. Se uma fonte de luz for dirigida a um dos focos de um espelho hiperbólico então será refletida em direção ao outro foco. Veremos como justificar matematicamente essa propriedade.

Os dois ramos da hipérbole dividem o plano em três regiões. A *região não focal* que se situa entre os dois ramos da hipérbole e cada ponto $D$ satisfaz a desigualdade $|d(D, F_1) - d(D, F_2)| < 2a$. A *região focal que contém* $F_1$ é a região onde cada ponto $D$ verifica $d(D, F_2) - (D, F_1) > 2a$ e a *região focal que contém* $F_2$ é aquela em que cada ponto $D$ satisfaz $d(D, F_1) - d(D, F_2) > 2a$.

A reta tangente à hipérbole num ponto é a reta que melhor se aproxima dessa curva numa vizinhança do ponto de tangência. Pode se verificar que a reta tangente à uma hipérbole no ponto $P$ é a reta que tem em comum com a hipérbole esse único ponto $P$ e todos os demais pontos dessa reta pertencem à região não focal da hipérbole.

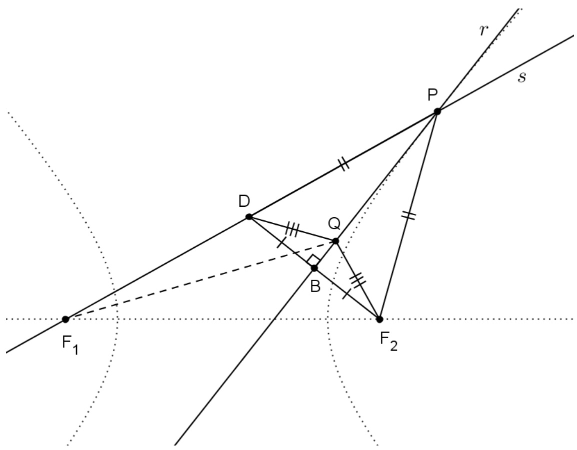


Figura 14 – Ponto $Q$ qualquer da reta $r$ distinto de $P$.

Tome um ponto $P$ sobre a hipérbole, de focos $F_1$ e $F_2$ e distância entre vértices igual a $2a$, e trace a reta $s$ que passa por $F_1$ e $P$. Sem perda de generalidade, considere o ponto $P$ sobre o ramo direito da hipérbole como na Figura 14. Sobre a reta $s$ marque o ponto $D$, na região não focal, de modo que $d(P, D) = d(P, F_2)$. Note que dessa forma

$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a = d(F_1, D)$. A reta $r$ é a mediatriz do segmento $F_2D$. Vamos provar que $r$ é também tangente à hipérbole no ponto $P$.

*A reta $r$, mediatriz do segmento $F_2D$ é tangente à hipérbole no ponto $P$.*

Seja $Q$ um ponto de $r$, distinto de $P$. Como a reta $r$ é a mediatriz do segmento $F_2D$, então $d(Q, D) = d(Q, F_2)$. Observando o triângulo $QDF_1$, segue da desigualdade triangular que

$$d(Q, D) < d(Q, F_1) + d(F_1, D) \Leftrightarrow d(Q, D) - d(F_1, D) < d(Q, F_1), \tag{4.24}$$

e

$$d(Q, F_1) < d(Q, D) + d(F_1, D). \tag{4.25}$$

Das Equações 4.24 e 4.25, tem-se

$$d(Q, D) - d(F_1, D) < d(Q, F_1) < d(Q, D) + d(F_1, D).$$

Subtraindo $d(Q, D)$ membro a membro segue que

$$-d(F_1, D) < d(Q, F_1) - d(Q, D) < d(F_1, D),$$

ou seja,

$$|d(Q, F_1) - d(Q, D)| < d(F_1, D).$$

Lembrando que $d(Q, D) = d(Q, F_2)$ e $d(F_1, D) = 2a$, então

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| < 2a,$$

para todo ponto $Q$ da reta $r$, distinto de $P$. Consequentemente $Q$ pertence à região não focal da hipérbole e a reta $r$ é tangente à essa curva em $P$.

Enunciamos agora outra propriedade geométrica da hipérbole:

*A reta $r$ tangente à hipérbole no ponto $P$ é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$.*

Por construção da Figura 15 temos $d(P, D) = d(P, F_2)$. Como $r$ é mediatriz do segmento $DF_2$, então $d(D, B) = d(B, F_2)$ e os ângulos $D\hat{B}P$ e $P\hat{B}F_2$ são retos. Logo, o segmento $PB$ é altura do triângulo isósceles $DPF_2$ e bissetriz do ângulo $D\hat{P}F_2 = F_1\hat{P}F_2$. Como a reta $r$ contém o segmento $PB$, implica que $r$ é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$.

## Aplicações da propriedade de reflexão da hipérbole

Essa propriedade é importante na tecnologia dos telescópios. Os primeiros desses objetos, os chamados *telescópios refratores*, foram construídos com lentes e funcionavam com base na refração da luz. Porém, esse tipo de lente gerava vários inconvenientes, como a deformação da imagem. A solução para parte dos problema vem com os chamados *telescópios refletores*, que consiste no uso de um espelho parabólico no fundo de um tubo.

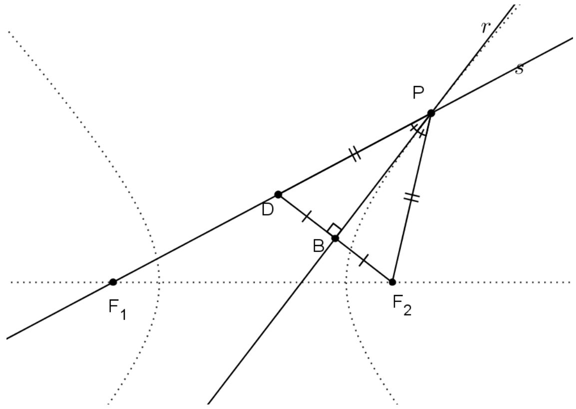


Figura 15 – Propriedade da reta $r$ tangente à hipérbole em $P$.

Mas, esse novo modelo também tinha seus obstáculos, como a necessidade do observador se posicionar no foco, o que é impossível na prática. Newton tentou solucionar o problema colocando um espelho plano entre o espelho parabólico e o foco. Em 1672, o astrônomo francês Cassegrain propôs a utilização de um espelho hiperbólico em lugar do espelho plano de Newton. Um dos focos da hipérbole coincide com o foco da parábola. Essas montagens de Cassegrain só começaram a ser utilizadas nos telescópios cerca de um século após terem sido propostas. Atualmente estão presentes não apenas nos telescópios óticos, mas também nos radiotelescópios [23].

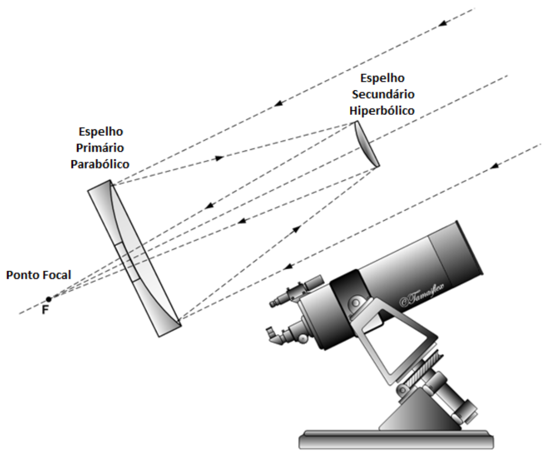


Figura 16 – Telescópio de Cassegrain. Autor: Szőcs Tamás. Licença de uso: `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/`

O espelho hiperbólico é usado nos telescópios como um espelho secundário, além do primário que é o parabólico. Ao direcionar a luz do foco principal para um ponto mais conveniente, faz com que a imagem, após ser refletida, seja formada na posição do foco do outro ramo da hipérbole (Figura 16). Muitos telescópios famosos mundialmente utilizam montagens de Cassegrain, como o telescópio Hale e o telescópio Huble.

## 4.4 Atividades com o Geogebra

Assim como na Seção 3.5, sugerimos algumas atividades a serem desenvolvidas com o *software* GeoGebra, cujo objetivo é auxiliar na visualização das definições e propriedades apresentadas neste capítulo, bem como, instigar o estudante a presumi-las.

**Atividade 7**

*Objetivos:*

Fazer com que o aluno se familiarize com a hipérbole movendo livremente os focos e vendo a hipérbole resultante. Verificar visualmente a propriedade que usamos para definir uma hipérbole.

*Construção:*

1. Insira três pontos $F_1, F_2$ e $A$ na janela de visualização.
2. Trace a hipérbole $c$ que contém $F_1$ e $F_2$ como focos e passa por $A$. Para isso clique na ferramenta **Hipérbole**, em $F_1$, em $F_2$ e, por fim, em $A$.
3. Marque um ponto $P$, a princípio distinto de $A$, sobre a hipérbole.
4. Usando a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos**, trace os segmentos $a = PF_1$ e $b = PF_2$. Exiba o valor de cada um.
5. Insira na barra de comando a expressão: `d=abs(a-b)`. Esse comando irá criar um número $d$ que representa o módulo da diferença entre os valores de $a$ e de $b$.
6. Trace a reta $l$ que passa por $F_1$ e $F_2$.
7. Determine a interseção entre $l$ e a hipérbole. Renomeie os pontos de interseção por $V_1$ e $V_2$.
8. Trace o segmento $f = V_1V_2$.
9. Marque o ponto $C$, médio do segmento $V_1V_2$. Para isso use a ferramenta **Ponto Médio ou Centro**.
10. Mova o ponto $P$ e observe os valores de $d$ e $f$.
11. Mova os pontos $F_1, F_2$ e $A$ e repita o passo 10.

*Questões para os alunos:*

a) O que se observa em relação ao valor de $d$? Qual a relação entre $d$ e $f$?

b) O ponto $C$ é ponto médio de algum outro segmento? Qual?

**Atividade 8**

*Objetivos:*

Conjecturar a simetria da hipérbole em relação à sua reta focal.

*Construção:*

1. Repita os passos de 1 a 3 da construção da **Atividade 7**.
2. Determine o ponto $Q$, simétrico de $P$ em relação à reta focal $l$.
3. Habilite rastro do ponto $Q$.
4. Mova o ponto $P$ sobre a hipérbole e observe o rastro do ponto $Q$.
5. Mova os pontos $F_1, F_2$ e $A$ e repita o passo 4 com o ponto $P$.

Obs.: A atividade pode ser repetida tomando o ponto $Q$ como simétrico de $P$ em relação à reta não focal e em relação ao centro para verificar outras simetrias da hipérbole.

*Questões para os alunos:*

a) O que se observa com relação à localização do ponto $Q$?

b) O que se pode conjecturar a respeito dessa constatação?

**Atividade 9**

*Objetivos:*

Conjecturar a simetria de um ponto do gráfico de $\frac{1}{x}$ e seu simétrico em relação à reta $y = x$.

*Construção:*

1. Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Para isso insira no campo de entrada a expressão: `f(x)= 1/x`.
2. Insira no campo de entrada a expressão: `y=x`.
3. Marque um ponto $P$ sobre o gráfico de $f$.
4. Determine o ponto $Q$, simétrico de $P$ em relação à reta $y = x$. Habilite o rastro do ponto $Q$.

5. Mova o ponto $P$ e observe o rastro do ponto $Q$.

*Questões para os alunos:*

a) O que se observa com relação à localização do ponto $Q$?

b) O que se pode conjecturar a respeito dessa constatação?

**Atividade 10**

*Objetivos:*

Conjecturar que o gráfico da função $\frac{1}{x}$ tem a forma de uma hipérbole e a partir dessa conjectura tentar encontrar as coordenadas dos focos e dos vértices.

*Construção:*

1. Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Insira no campo de entrada a expressão: `y=x`.
3. Marque o ponto $C = (0, 0)$.
4. Marque o ponto $F_1$ sobre a reta $y = x$.
5. Determine o ponto $F_2$, simétrico de $F_1$ em relação ao ponto $C$. Use a ferramenta **Reflexão em Relação a um Ponto**.
6. Exiba as coordenadas dos pontos $F_1$ e $F_2$.
7. Marque um ponto $A$ na janela de visualização.
8. Trace a hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$, que passa por $A$.
9. Arraste os pontos$F_1, F_2$ e $A$ convenientemente até sobrepor a hipérbole ao gráfico de $f$.

*Questões para os alunos:*

a) O que se pode conjecturar sobre o gráfico de $f$?

b) Como encontrar os vértices do gráfico, supondo que seja uma hipérbole?

c) Encontre bons candidatos a focos?

**Atividade 11**

*Objetivos:*

Conjecturar que o gráfico de $\frac{k}{x-m}$ é uma hipérbole, igual a que representa a função $\frac{k}{x}$, deslocada $m$ unidades horizontalmente.

*Construção:*

1. Insira o parâmetro $k$, selecionando o intervalo $0 < k < 10$.
2. Insira no campo de entrada a expressão: `f(x)=k/x`.
3. Insira o parâmetro $m$, selecionando o intervalo $-10 < m < 10$.
4. Insira no campo de entrada a expressão: `g(x)=k/(x-m)`.
5. Altere manualmente o valor do parâmetro $m$ e observe o que ocorre com a gráfico deslocado em relação ao gráfico de $\frac{k}{x}$.
6. Altere o valor do parâmetro $k$ e repita o passo 5.

*Questões para os alunos:*

a) O gráfico de $\frac{k}{x-m}$ parece uma hipérbole? Qual? Que diferenças se observa entre elas?

b) Conjecture os candidatos a focos do gráfico deslocado.

**Atividade 12**

*Objetivos:*

Conjecturar que o gráfico de $\frac{k}{x-m} + h$ é uma hipérbole, resultado do deslocamento da hipérbole da **Atividade 11**, $h$ unidades verticalmente.

*Construção:*

1. Considere a construção da **Atividade 11** e continue com os passos a seguir.
2. Insira o parâmetro $h$ na janela de visualização.
3. Insira no campo de entrada a expressão: `(y=k/(x-m))+h`.
4. Altere manualmente o valor do parâmetro $h$ e observe o que ocorre com o gráfico obtido no passo 3 em relação ao gráfico obtido na **Atividade 11**.
5. Altere o valor dos parâmetros $k$ e $m$ e repita o passo 4.

*Questões para os alunos:*

a) O gráfico de $\frac{k}{x-m} + h$ parece uma hipérbole? Qual? Que diferenças se observa entre elas?

b) Conjecture os candidatos a focos do gráfico obtido no passo 3.

# Conclusão

Através da pesquisa nos livros de História da Matemática citados nesse trabalho foi possível perceber que o interesse dos matemáticos pelas cônicas surgiu antes da definição formal de função. Após analisar alguns livros didáticos destinados ao Ensino Médio, observamos que é dada maior ênfase ao ensino das funções, enquanto a conexão do gráfico de algumas delas com as cônicas não é explorado amplamente. Assim, tanto o levantamento histórico sobre cônicas e funções quanto a análise dos livros didáticos indicaram que há espaço para realizar um estudo motivador e qualitativo do tema, voltado para os estudantes do ensino médio. Desta forma percebemos, depois de pesquisas em artigos e livros de matemática citados nas referências bibliográficas, que é possível tratar mais detalhadamente as conexões entre certas funções e algumas cônicas, usando apenas fundamentos da matemática básica tornando as argumentações acessíveis a um aluno do ensino médio, até mesmo os da primeira série.

Esse trabalho procura contribuir, de forma geral, com as seguintes temáticas: exposição sobre as origens históricas do tema, identificação, ainda no primeiro ano do ensino médio, da parábola e da hipérbole como curvas mais amplas do que gráficos de funções, apresentação de argumentos que demonstram que essas cônicas são gráficos de algumas funções e propriedades das cônicas que levam a importantes aplicações do tema. Esperamos que as sugestões e atividades propostas possam ser usadas como material complementar por professores em suas aulas e por alunos que buscam ampliar seu conhecimento. Além disso, acreditamos que o uso do *software* GeoGebra possibilita a construção de conhecimento, seja por meio da formulação de conjecturas, da articulação entre as representações algébricas e gráficas ou, até mesmo, das observações mais detalhadas de algumas propriedades, promovendo assim uma aprendizagem matemática mais sólida.

## Trabalhos futuros

É importante salientar que ao iniciar esse trabalho os objetivos e desdobramentos ainda não eram claros. Por isso, em seu desenvolvimento, muitos pontos foram sendo esclarecidos e outras questões foram surgindo. Alguns fatores importantes como adequação da proposta ao currículo do ensino médio, tempo de aplicação dessa proposta e avaliação dos resultados na aprendizagem necessitam de uma investigação mais aprofundada. Nesse sentido, sugerimos como continuação desse trabalho:

- Aplicação das nossas propostas e avaliação dos resultados em turmas de primeiro ano do ensino médio.

- Elaboração de um trabalho completo sobre o tema "funções quadráticas", reunindo o melhor de cada material indicado pelo MEC, no guia [16], bem como de outras referências usualmente utilizadas nas escolas de ensino médio.

# Referências


[1] Barroso, Juliane Matsubara *et al.*: *Conexões com a matemática*, volume 1. Moderna, São Paulo, 1ª edição, 2010.

[2] Barroso, Juliane Matsubara *et al.*: *Conexões com a matemática*, volume 3. Moderna, São Paulo, 1ª edição, 2010.

[3] Bonomi, Maria Cristina: *O gráfico de f(x)=1/x é uma hipérbole?* RPM, (45):10–16, 2001.

[4] Boyer, Carl B.: *História da Matemática.* Blucher, São Paulo, 3ª edição, 2010.

[5] Carvalho, João Bosco Pitombeira de e Tatiana Marins Roque: *Tópicos de História da Matemática.* SBM, Rio de Janeiro, 1ª edição, 2012.

[6] Carvalho Borba, Marcelo de e Miriam Godoy Penteado: *Informática e Educação Matemática.* Autêntica Editora, Belo Horizonte, 4ª edição, 2010.

[7] Dante, Luiz Roberto: *Matemática: contexto e aplicações*, volume 1. Ática, São Paulo, 1ª edição, 2010.

[8] Dante, Luiz Roberto: *Matemática: contexto e aplicações*, volume 3. Ática, São Paulo, 1ª edição, 2010.

[9] Eves, Howard: *Introdução à história da matemática.* Editora da UNICAMP, São Paulo, 2004.

[10] Iezzi, Gelson *et al.*: *Matemática: ciência e aplicações*, volume 1. Saraiva, São Paulo, 6ª edição, 2010.

[11] Iezzi, Gelson *et al.*: *Matemática: ciência e aplicações*, volume 3. Saraiva, São Paulo, 6ª edição, 2010.

[12] Lima, Elon Lages *et al.*: *A matemática do ensino médio*, volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 9ª edição, 2006.

[13] Lopes, Juracélio Ferreira: *Cônicas e Aplicações.* Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 2011.

[14] Paiva, Manoel: *Matemática - Paiva*, volume 1. Moderna, São Paulo, 1ª edição, 2009.

[15] Paiva, Manoel: *Matemática - Paiva*, volume 3. Moderna, São Paulo, 1ª edição, 2009.

[16] PNLD: *Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012: Matemática*. Ministério da educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2011.

[17] Ribeiro, Jackson: *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*, volume 1. Scipione, São Paulo, 1ª edição, 2010.

[18] Ribeiro, Jackson: *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*, volume 3. Scipione, São Paulo, 1ª edição, 2010.

[19] Smole, Kátia Stocco e Maria Ignez Diniz: *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*, volume 1. Saraiva, São Paulo, 6ª edição, 2010.

[20] Smole, Kátia Stocco e Maria Ignez Diniz: *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*, volume 3. Saraiva, São Paulo, 6ª edição, 2010.

[21] Souza, Joamir Roberto de: *Novo olhar matemática*, volume 1. FTD, São Paulo, 1ª edição, 2010.

[22] Souza, Joamir Roberto de: *Novo olhar matemática*, volume 3. FTD, São Paulo, 1ª edição, 2010.

[23] Ávila, Geraldo: *A hipérbole e os telescópios*. RPM, (34):22–27, 1997.

[24] Wagner, Eduardo: *Porque as antenas são parabólicas*. RPM, (33):10–15, 1997.