UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

FIDELIS ZANETTI DE CASTRO

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA TREINAMENTO OLÍMPICO EM MATEMÁTICA

VITÓRIA
2013

FIDELIS ZANETTI DE CASTRO

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA TREINAMENTO OLÍMPICO EM MATEMÁTICA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

VITÓRIA
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Uma Proposta de Sequência Didática para Treinamento Olímpico em Matemática"

Fidelis Zanetti de Castro

Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 09/04/2013 por:

Moacir Rosado Filho - UFES

Florêncio Ferreira Guimarães Filho - UFES

Miriam del Milagro Abdón – UFF/RJ

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Castro, Fidelis Zanetti, 1980-

C355p Uma proposta de sequência didática para treinamento olímpico em Matemática / Fidelis Zanetti de Castro. – 2013.

f. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2.Matemática (Ensino médio) - Problemas, questões, exercícios.

3. Didática. 4. Olimpíadas de Matemática. I. Rosado Filho, Moacir, 1963-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

AGRADECIMENTOS

A elaboração do presente trabalho envolve muito mais do que a titulação de mestre. Ela faz parte de um projeto de vida, e, se materializa como uma síntese de minha formação profissional e na paixão pelo ensino de Matemática.

Agradeço a Deus, fonte de toda a vida, que me deu a oportunidade de finalizar meu mestrado com êxito.

À minha esposa Mauricina, que me apoiou e me deu forças nos momentos de dificuldade, sempre demonstrando temperança e amor.

À Minha filha Larissa, que com sua inocência e singeleza, me motiva a ser uma pessoa melhor a cada dia.

À minha filha Lilian, que mesmo antes de vir à luz, já me impulsiona a buscar a felicidade sempre mais e mais.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em especial ao corpo docente do PROFMAT: Dr. Etereldes Gonçalves Júnior, Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim, Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho e Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer, que se empenharam e deram o máximo de si para que eu pudesse chegar aqui.

Ao meu orientador Prof. Dr. Moacir Rosado Filho, que com sua docilidade e inteligência me trouxe momentos inesquecíveis de aprendizado.

Aos meus amigos em formação que sempre me deram forças e me motivaram nessa jornada de quase dois anos, especialmente ao saudoso professor Edson Santos.

À Sociedade Brasileira de Matemática, que concebeu o PROFMAT, criando oportunidades para melhoria do ensino de Matemática no Brasil.

“Educar e educar-se, na prática da liberdade, é tarefa daqueles que pouco sabem - por isto sabem que sabem algo e podem assim chegar a saber mais - em diálogo com aqueles que, quase sempre, pensam que nada sabem, para que estes, transformando seu pensar que nada sabem em saber que pouco sabem, possam igualmente saber mais.”

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho consiste numa sequência didática a ser utilizada em treinamentos olímpicos de estudantes de Matemática do Ensino Médio. Os temas abordados são "Problemas", "Números inteiros", "Equações Diofantinas Lineares", "Teorema de Pitágoras" e "Jogos". Cada capítulo contém um desenvolvimento teórico contextualizado, problemas resolvidos e problemas propostos, contendo as devidas respostas e dicas para solução.

ABSTRACT

This work consists of a didactic sequence to be used in Olympic training of students of the School of Mathematics. This work deal with the following issues: "Problems”, "Integers Numbers", "Diophantine Linear Equations", "Pythagorean Theorem" and "Games". Each chapter contains a contextualized theoretical presentation, solved problems and proposed problems, with appropriate answers and tips for resolution.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é fruto da minha experiência como professor de Matemática em projetos relativos a treinamento de alunos para participação em Olimpíadas de Matemática nos quais participei ao longo dos últimos anos. Assim sendo, considero relevante descrever aqui parte desta minha trajetória, no intuito de contextualizar minha experiência docente com as ideias que levaram ao surgimento deste trabalho.

No início de 2002, quando trabalhava como professor de Matemática em uma escola particular do município de Vitória-ES, percebi, ao longo das aulas que ministrava, que uma parte significativa dos alunos sentia-se, de certo modo, desmotivada ao estudar Matemática da forma tradicional como frequentemente tem sido feito em nossas escolas[1]. Além disso, os resultados de aprendizagem na disciplina eram instáveis.

A fim de auxiliar meu trabalho em sala de aula, do ponto de vista de motivar os alunos a estudarem a disciplina, aprimorarem a capacidade de resolver problemas e desenvolverem o pensamento lógico e crítico, criei um projeto, na época intitulado “Olimpíadas de Matemática”, por meio do qual mantinha semanalmente um encontro com alunos voluntários visando a resolução de problemas desafiantes/curiosos, retirados de provas de olimpíadas, que pudessem ser resolvidos de forma prazerosa, explorando a criatividade e o trabalho em grupo e que fossem adequados ao seu potencial cognitivo. No decorrer desses encontros os alunos se interessaram em participar de competições olímpicas de nível regional e nacional, nas quais vários deles foram premiados naquele ano e nos anos seguintes.

Além da motivação dos alunos em participar de competições olímpicas, o referido projeto contribuiu para um melhor desenvolvimento das nossas atividades de sala

[1] Quando escrevo “forma tradicional” me refiro à prática que consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar exercícios manipulativos/repetitivos para avaliar se os alunos são capazes de empregar/repetir o que lhes foi ensinado.

de aula, tanto no que se refere à parte motivacional do professor e dos alunos, como aos resultados de ensino-aprendizagem desses alunos na disciplina. Inclusive introduzi alguns “problemas olímpicos” na dinâmica das minhas aulas, o que também trouxe resultados positivos aos alunos que não eram voluntários do projeto.

De certo modo, acabei seguindo o que afirma DANTE (1991), ao dizer que

> […] um dos objetivos do ensino de Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que lhe apresentar situações problemas que o envolva, desafie e o motive a querer resolvê-las. (p.11)

Além disso, o Ministério da Educação, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, do terceiro e quarto ciclos, incentiva “indiretamente” esse tipo de atividade, ao dizer que

> […] em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (p. 39-40)

e também que

> […] para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades. (p.34)

Eram exatamente esses os ingredientes presentes nos encontros do nosso projeto: criatividade, trabalho em grupo, exposição de ideias, investigação, argumentação e resolução de problemas.

Continuei trabalhando com o referido projeto até 2005, quando me transferi para outra escola. A partir de 2009 retomei esse tipo de atividade e os resultados obtidos continuam similares àqueles de 2002.

Em 2012, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) implantaram os “Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo” (POTI)[2] para a OBM e/ou OBMEP, nos quais foram oferecidos, ao longo de todo o ano, cursos gratuitos de Matemática para os estudantes do Ensino Fundamental e Médio, visando treinamento para participação em olimpíadas de Matemática. Um dos polos criados foi o de Vitória-ES, cujas atividades foram desenvolvidas no Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

Fiz parte do grupo de professores do polo de Vitória-ES, no qual trabalhamos com uma turma de 30 alunos do nível II, estudantes do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas e particulares. Nas aulas utilizamos um material didático exclusivo do POTI, o qual foi elaborado por professores responsáveis nacionais pelas disciplinas do curso[3].

Juntando essa minha experiência mais recente no POTI (refletindo sobre as aulas ministradas, sobre o perfil matemático dos alunos ingressantes e sobre o material didático utilizado[4]) com minhas experiências anteriores, decidi escrever uma sequência didática que pudesse ser utilizada por professores de Matemática para realização de oficinas de treinamento olímpico em suas escolas, supondo um primeiro contato dos alunos com resolução de problemas dessa natureza.

---

[2] Para maiores detalhes sobre o projeto POTI, acesse http://poti.impa.br/

[3] A organização curricular do POTI consta de quatro disciplinas: Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos Números. Os materiais utilizados nessas disciplinas podem ser encontrados em http://poti.impa.br/index/material

[4] Utilizando o material didático do POTI, disponível em http://poti.impa.br/, senti a necessidade de que ele contivesse um desenvolvimento teórico mais amplo, mais exemplos de problemas resolvidos, além de que trouxesse as respostas dos problemas propostos ao final de cada capítulo.

A partir dessa decisão, iniciei uma pesquisa nos materiais didáticos utilizados em algumas disciplinas do PROFMAT[5], disponíveis em http://moodle.profmat-sbm.org.br/, em provas de Olimpíadas de Matemática da OBM e da OBMEP e nos seguintes livros: "100 Jogos Numéricos", de Pierre Berloquin; "Matemática, Magia e Mistério", de Martin Gardner; "Math Problem Book I", de Kin Y. Li; "Olimpíadas de Matemática: uma introdução", de Adán J. Corcho, Fernando E. Echaiz, Krerley Oliveira; "The Pythagorean Proposition", de Elissha Scott Loomis"; "Temas e Problemas" e "A Matemática do Ensino Médio, volumes I, II, III e IV" de Elon Lages Lima, Eduardo Wagner, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto Cezar Morgado; "Mathematical Circles", de Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg; e "A Arte de Resolver Problemas", de George Polya.

A partir da pesquisa feita, selecionei alguns temas que costumam ser abordados em competições olímpicas e, utilizando os materiais selecionados, elaborei uma sequência didática que deu origem a este trabalho. Os temas escolhidos foram: "Problemas", "Números Inteiros", "Equações Diofantinas Lineares", "Teorema de Pitágoras" e "Jogos"[6].

Ao longo do desenvolvimento dos temas supracitados, foram selecionados e resolvidos 42 problemas e foram fornecidas as dicas de solução de outros 75 problemas propostos. As soluções e as dicas da maioria dos problemas foram elaboradas por mim e uma outra parte foi extraída/adaptada de soluções contidas nas fontes citadas nas referências.

De acordo com as orientações para elaboração de trabalho de conclusão de curso do PROFMAT, este enquadra-se na modalidade de *proposta de atividades educacionais*. Consiste numa sequência de 5 encontros sobre os temas apresentados acima, de duração média prevista de 3 horas cada um.

Os objetivos deste trabalho são os de levar os alunos a:

[5] Utilizei, como fonte de pesquisa, os materiais das seguintes disciplinas cursadas no PROFMAT: "Matemática Discreta", "Geometria", "Aritmética" e "Resolução de Problemas".

[6] Evidentemente, não pretendo aqui uma abordagem que cubra todos os conteúdos/temas que aparecem em competições olímpicas. O objetivo é fornecer uma sequência de aulas sobre alguns temas de destaque.

- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, utilizando, para isso, conceitos e procedimentos matemáticos;

- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;

- sentir-se seguro da própria capacidade de construir ideias matemáticas, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;

- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

O público-alvo a que se destina este material é formado por alunos do Ensino Médio regular, os quais necessitam dominar conhecimentos matemáticos prévios para que haja um bom desenvolvimento das atividades aqui propostas. Dentre esses conhecimentos prévios, destacam-se os seguintes: operações aritméticas e propriedades, cálculo de MDC, de MMC, álgebra elementar, resolução de equações lineares e quadráticas, sistemas de equações, trigonometria no triângulo retângulo e geometria plana.

Uma estratégia pedagógica recomendada para o professor que vier a utilizar as atividades aqui propostas é a de variar, durante os encontros, momentos de exposição dialogada, de resolução de problemas em grupo e de apresentações das soluções obtidas por eles.

Evidentemente há possíveis continuações e desdobramentos deste trabalho, possivelmente oriundos das distintas realidades escolares em que essas atividades poderão ser aplicadas e também das diferentes experiências de trabalho dos professores. Por exemplo, outras sequências didáticas podem ser elaboradas, contendo novos temas para treinamento olímpico em Matemática, além de possíveis sugestões/críticas/modificações na sequência didática apresentada aqui e possíveis análises pedagógicas dos resultados decorrentes da aplicação desta sequência didática em diferentes realidades.

A partir deste momento, apresentarei a sequência de aulas.

2 PROBLEMAS

Iniciarei este capítulo apresentando algumas estratégias que podem ser utilizadas para lidar com a tarefa de resolver problemas. O livro “A Arte de Resolver Problemas”, de George Polya, é um dos clássicos da literatura sobre o assunto e nele encontrei algumas orientações que não só podem como devem nos servir de guia. Vejamos:

I) Compreender primeiro, para depois começar!

Quando nos for proposto um problema, a primeira coisa a fazer é compreendermos bem suas regras, os dados que foram fornecidos e as hipóteses com as quais teremos que lidar. Temos que ter uma visão geral sobre o que deve ser resolvido, observando o lugar de cada um dos dados e como eles se complementam mutuamente e se encaixam uns com os outros.

II) Planejar uma estratégia para a resolução!

Uma ótima coisa a fazer é anotar todas as ideias que surgirem para a resolução do problema, até aquelas mais simples e aparentemente inúteis. Algumas vezes aquelas em que menos apostamos podem revelar-se as mais apropriadas e úteis! É dessa *quantidade* de ideias (*brainstorming*) que surgirá a *qualidade* necessária para o alcance do objetivo.

III) Procurar semelhanças com outros problemas conhecidos!

É importante procurar semelhanças do problema a ser resolvido com outros que já conheçamos e que já tenhamos resolvido anteriormente ou cuja solução simplesmente vimos. Pergunte a você mesmo: o que é que esse problema me faz lembrar? Há algum problema parecido com esse que eu tenha feito ou visto? Uma vez um professor meu me disse que quanto mais problemas resolvidos conhecermos maior será o nosso banco de estratégias para resolução de outros e, consequentemente, maior será a probabilidade de os resolvermos. Isto é a mais pura verdade.

IV) Regredir para avançar pode funcionar!

Talvez o problema a ser resolvido seja complicado porque contém muitas variáveis e hipóteses/informações. Muitas vezes se torna interessante simplificarmos esses elementos, construindo um “novo problema”, menos complicado, com menos dados, mas que mantenha a essência do problema original. Talvez essa atitude nos revele algo que facilite aquilo que é mais complexo no problema original.

V) Experimentar, tentar, errar, mas não desanimar!

A história da humanidade mostra que a evolução da Matemática se deu por meio de tentativas, erros, correções, adaptações, aperfeiçoamentos e avanços. Em geral, o caminho para resolver um problema passa por tudo isso. O importante é não desanimar.

VI) Fazer esquemas, diagramas ou desenhos pode ajudar!

Muitos de nós pensamos melhor e de forma mais organizada explorando a nossa visão. Fazer desenhos, diagramas, figuras e esquemas que ilustrem o problema proposto e articulem os elementos fornecidos pode ser uma boa ideia. Como se diz por aí: uma imagem vale mais do que mil palavras.

VII) Explorar a simetria!

Vários problemas, particularmente os de determinação de estratégias vencedoras em jogos, que serão tratados no capítulo intitulado “Jogos”, podem ser resolvidos quando exploramos simetrias existentes em figuras, tanto de forma explícita como implícita. Fique sempre atento a isso.

VIII) Usar o método de “redução ao absurdo” pode ser uma alternativa!

Para demonstrar que uma afirmação é verdadeira podemos iniciar nossos argumentos supondo que ela seja falsa. A partir daí, racionando logicamente, tentamos encontrar uma *contradição* ou *absurdo,* isto é, tentamos chegar a uma conclusão que sabidamente seja falsa. Se conseguirmos isto, concluiremos que a nossa afirmação inicial tem que ser verdadeira!

Vejamos um exemplo clássico disso, feito por Euclides de Alexandria:

Vamos provar que existem infinitos números primos.

Suponha que a sequência dos primos seja finita, que é o contrário do que queremos provar. Seja, pois, $p_1, p_2, ..., p_n$ a lista de todos os primos positivos. Consideremos o número $R = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$, que é o sucessor do produto de todos os primos positivos. É claro que R não divisível por nenhum dos números da nossa lista e que, além disso, R é maior do que qualquer deles. Sabemos que todo inteiro maior do que 1 ou é primo, ou pode ser representado de maneira única (a menos de uma ordem) como um produto de fatores primos. Dessa maneira, ou R é primo ou possui algum fator primo. De qualquer modo isto implica na existência de um primo que não pertence à lista, o que é um absurdo! Portanto, a sequência dos números primos não pode ser finita e assim provamos o que queríamos.

IX) Supor o problema resolvido e partir do fim para o início!

Uma tática especialmente utilizada em resolução de problemas é "supor o problema resolvido". Quando o imaginamos assim, construindo de forma aproximada como tudo deve funcionar, temos a oportunidade de explorar as relações entre os elementos dados e os que procuramos e, daí, pode surgir uma ideia que nos faça ver um caminho para chegar à solução.

Outras orientações:

1) Não teime *excessivamente* com uma ideia. Se as coisas complicarem demais, possivelmente haverá outro caminho, menos árduo.

2) Ao concluir a resolução de um problema, é preciso ter certeza de que ela está coerente e correta. Por isso, *analise-a com cuidado e veja se a resposta tem sentido* e que não entra em conflito com hipóteses e dados do problema.

3) Se você tentou durante muito tempo e não conseguiu resolver um problema, não desanime. Pesquise e olhe a solução de outra pessoa. Muitas vezes aprendemos muito mais, e mais profundamente, com os problemas que tentamos resolver com interesse e persistência, e não conseguimos, do que com aqueles que se resolve à primeira vista.

4) É essencial que você reflita sobre seu próprio processo de pensamento. Cada um tem seu próprio estilo de pensamento. O seu é visual ou analítico? Depende mais de expressões verbais ou da forma escrita? Você tende a se apegar uma ideia única, sem flexibilidade? Tende a pensar em círculos? Como você poderia otimizar o fluxo de ideias novas, variadas e originais?
Essas reflexões ajudam a saber quais tipos de problemas podemos nos ocupar com sucesso e em quais deles nossa probabilidade de êxito é menor.

Vamos, a partir de agora, apresentar e resolver alguns problemas.

2.1 CAMINHANDO NO DODECAEDRO RÔMBICO[7]

Considere o dodecaedro rômbico da Figura 1:

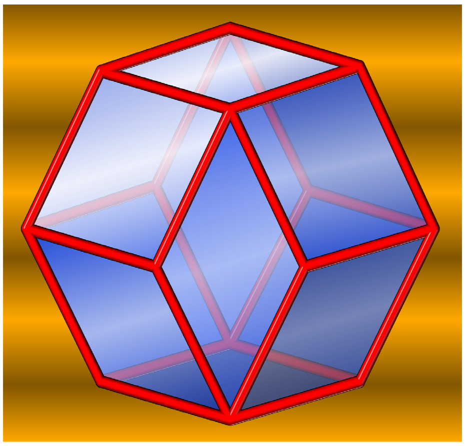

Figura 1: Dodecaedro Rômbico

[7] O dodecaedro rômbico é um sólido geométrico formado por 12 faces em forma de losangos. Ele pertence à classe dos *sólidos de Catalan*.

É possível encontrar um caminho que passe exclusivamente pelas arestas do dodecaedro e por todos os vértices uma única vez?

Solução:

A solução deste problema é atribuída ao geômetra canadense Harold Scott MacDonald Coxeter. Ele mostrou que o caminho procurado não existe. Para isso, denominou *valência* de um vértice o número de arestas que partem dele. Analisando a figura, vemos que cada vértice do dodecaedro tem valência 3 ou 4. Além disso vemos que cada vértice de valência 3 é cercado por vértices de valência 4 e inversamente, cada vértice de valência 4 é cercado por vértices de valência 3. Por causa disto, um caminho que passar pelas arestas (consequentemente ligando vértices) tem que alternar de vértice de valência 3 para vértice de valência 4. Então, como ao todo são 14 vértices, o caminho procurado deveria conter 7 vértices de cada valência. Mas como há somente 6 vértices de valência 4, o caminho que estamos procurando não existe.

2.2 GALINHAS E OVOS

Sabendo que 73 galinhas põem 73 dúzias de ovos em 73 dias e que 37 galinhas comem 37 quilos de milho em 37 dias, quanto milho é necessário para obter uma dúzia de ovos?

Solução:

Dizer que 73 galinhas põem 73 dúzias de ovos em 73 dias é o mesmo que dizer que 73 galinhas juntas põem 1 dúzia de ovos em 1 dia. Do mesmo modo, temos que 37 galinhas juntas comem 1 quilo de milho em 1 dia.

Portanto, para produzir 1 dúzia de ovos temos que alimentar 73 galinhas durante um dia, gastando o total de $\frac{73}{37}$ quilos de milho, ou seja, um pouco menos de 2 quilos.

2.3 PESANDO MOEDAS

Temos 105 moedas, entre as quais sabemos que há três moedas falsas. Cada moeda verdadeira têm o mesmo peso e o seu peso é maior que o das falsas, que também possuem o mesmo peso. Indique de que maneira se pode selecionar 26 moedas autênticas realizando somente duas pesagens numa balança tradicional de dois pratos.

Solução:

Retiramos uma moeda e dividimos as restantes em dois grupos, que vamos chamar B e C, cada um com 52 moedas. Colocamos esses grupos na balança: B num prato e C no outro.

Podem ocorrer duas situações:

a) B e C podem ter o mesmo peso. Neste caso, a moeda que retiramos era falsa e com certeza haverá uma falsa em cada grupo. Pegamos qualquer um dos grupos, o dividimos em dois novos de 26 moedas cada e colocamos um em cada prato da balança. O que pesar mais possui todas as moedas autênticas.

b) B e C podem não ter o mesmo peso. Nesta situação, podemos deduzir que:

b1) ou B tem as três moedas falsas e C nenhuma;

b2) ou B tem duas moedas falsas e C uma;

b3) ou B tem duas falsas, C nenhuma e a moeda inicialmente retirada é falsa.

Se acontecer b1), tomamos o grupo mais pesado (neste caso C) e o dividimos em dois grupos de 26 que ficarão equilibrados nos pratos da balança e qualquer um terá todas as moedas verdadeiras.

Se acontecer b2), pesamos dois grupos de 26 moedas de C. Um lado pesará menos e o que for mais pesado terá as moedas autênticas.

Se acontecer b3), procedemos como em b1).

2.4 UM JOGO DE DIVISÕES SUCESSIVAS

Priscila, Ana e Gabriela, colocadas em uma roda, se divertem com o seguinte jogo: uma delas escolhe um número inteiro e o diz em voz alta; a que está a sua esquerda divide esse número por seu maior divisor primo e fala o resultado em voz alta, e assim sucessivamente. Ganhará aquela que disser em voz alta o número 1, momento em que o jogo termina. Ana escolheu um número inteiro maior do que 50 e menor do que 100 e ganhou. Priscila escolheu o inteiro imediatamente superior ao escolhido por Ana e também ganhou. Sabe-se que o número que Ana escolheu não é um múltiplo de 3. Qual é ele?

Solução:

Para que uma delas diga um número e ganhe, tem de falar um número composto por uma quantidade de fatores primos divisível por três (porque são três pessoas no jogo!). Os números maiores do que 50 e menores do que 100, formados por uma quantidade de fatores primos divisível por três são:

$2 \times 2 \times 13 = 52$

$3 \times 3 \times 7 = 63$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

$2 \times 3 \times 11 = 66$

$2 \times 2 \times 17 = 68$

$2 \times 5 \times 7 = 70$

$3 \times 5 \times 5 = 75$

$2 \times 2 \times 19 = 76$

$2 \times 3 \times 13 = 78$

$2 \times 2 \times 23 = 92$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 96$

$2 \times 7 \times 7 = 98$

$3 \times 3 \times 11 = 99$

Priscila escolheu o número imediatamente superior ao que Ana escolheu e também ganhou. Existem somente três pares de números nessas condições: “63 e 64”, “75 e 76” e “98 e 99”.

Logo, o número que Ana escolheu pertence ao conjunto {63, 75, 98}. Como 63 e 75 são múltiplos de 3, a resposta é 98.

2.5 INSERINDO SINAIS ENTRE NÚMEROS

Os números de 1 a 20 são escritos em linha, numa folha de papel, deixando-se um pequeno espaço entre eles. Dois jogadores iniciam o jogo e jogam alternadamente. Uma jogada consiste em colocar um sinal + ou um sinal – entre cada par de números consecutivos. Quando todos os sinais são colocados o resultado da expressão é calculado. O primeiro jogador ganha se o resultado for par, e o segundo ganha se o resultado for ímpar. Quem ganhará e como?

Solução:

O primeiro jogador sempre vence. Como a quantidade de números ímpares escritos é par, o resultado será sempre par, pois a soma e a diferença de dois números pares é par, a soma e a diferença de dois ímpares é par, e a soma ou diferença de um ímpar com um par é ímpar.

2.6 JOÃO E O CAVALO

João gosta de verificar propriedades do jogo de xadrez em um tabuleiro 5×5. Num de seus experimentos, ele colocou um cavalo na casa inferior esquerda do tabuleiro 5×5. Qual a quantidade mínima de movimentos do cavalo para que ele possa chegar a qualquer casa do tabuleiro 5×5?

Observação: O cavalo movimenta-se em L, isto é, anda duas casas em uma direção e, logo em seguida, uma casa na direção perpendicular, como ilustrado na Figura 2:

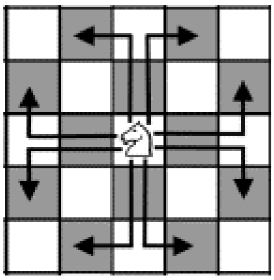

Figura 2: Movimentos do cavalo

Solução:

Na Figura 3, os números representam a quantidade mínima de movimentos que o cavalo deve fazer para chegar na respectiva casa numerada. Portanto, é possível verificar que o número mínimo de movimentos para se chegar em qualquer casa do tabuleiro é 4.

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
	3	2	3	2

Figura 3:
Quantidade mínima
de movimentos

2.7 CAMELO NO JOGO DE XADREZ?

Uma peça especial de xadrez chamada “camelo” se move no tabuleiro num caminho em forma de L de comprimento 4×4 (de forma semelhante ao “cavalo”, cujo caminho é um L de comprimento 1×3). É possível o camelo sair de algum quadrado do tabuleiro e retornar para um dos quadrados adjacentes a esse de onde ele saiu?

Solução:

A resposta é não. Pinte o tabuleiro da seguinte forma: um quadrado branco e o adjacente preto. Observe que o movimento da peça é tal que ela se movimenta de um quadrado para outro ambos de mesma cor. Por isso, depois de inúmeros movimentos, não se pode retornar para um dos quadrados adjacentes, pois eles têm cores distintas do quadrado original.

2.8 O JOGO DOS FEIJÕES

O jogo que vamos considerar agora deve ser disputado por 2 jogadores. Coloque 10 caroços de feijão em círculo, numerados de 1 até 10. Uma jogada consiste em retirar um ou dois caroços de feijão, mas se um jogador retirar dois terão de ser vizinhos, não sendo possível deixar espaços abertos entre eles. Aquele que retirar o último caroço ganha o jogo. Quem ganha? Qual a estratégia para vencer?

Solução:

O segundo jogador sempre ganhará, se ele usar as duas estratégias seguintes:

i) Depois que o primeiro jogador tiver removido um ou dois caroços, existirá um arco sem falha no círculo formado pelos feijões. O segundo jogador deverá retirar um ou dois feijões diametralmente opostos àquele(s) que o primeiro jogador retirou, de maneira que os feijões ficam sempre divididos em dois arcos com a mesma quantidade de caroços.
ii) De agora em diante, se o primeiro jogador retirar caroços de um arco, o segundo jogador retirará da mesma forma, mas do arco oposto, na posição diametralmente oposta. Note que o segundo jogador será o último a jogar, e, por isso, ele vencerá.

2.9 A COR DO CHAPÉU

Três pessoas são colocadas em pé num círculo com os olhos fechados. Um chapéu é colocado sobre cada uma das cabeças. São dois chapéus vermelhos e um azul, e todas as três pessoas sabem disso. Elas abrem os olhos simultaneamente, e cada uma delas que vê um chapéu vermelho levantará uma mão. A primeira pessoa que for capaz de identificar, corretamente, a cor do chapéu colocado em sua cabeça será o vencedor. Como fazer isso?

Solução:

Suponha que os jogadores sejam chamados A, B e C. Seja C aquele que usa um chapéu azul. Como existem dois chapéus vermelhos, todos os três jogadores levantam as mãos. O jogador A vê que C está usando o chapéu azul, pois se C estivesse usando um chapéu vermelho então B não teria uma mão levantada. Então A conclui que ele estaria usando chapéu vermelho. B pode raciocinar de forma semelhante. Então A ou B seriam os ganhadores: o jogador C perde.

2.10 O ANIVERSÁRIO DE JOÃO

No dia do aniversário de João em 2010, uma pessoa perguntou a idade dele. João respondeu: “se eu não contasse os sábados e os domingos da minha vida, eu teria 40 anos de idade”. Em que ano João nasceu?

Solução:

Numa semana há 7 dias, dos quais 2 são fim de semana. Isso significa que aproximadamente $\frac{2}{7}$ dos dias em um ano são fins de semana e $\frac{5}{7}$ não são. João afirmou que se não contasse os fins de semana, ele teria 40 anos.

Se a idade real dele for x anos, então, $40 = \frac{5x}{7}$ e, assim, $x = 56$ anos. Como estamos em 2010, João nasceu no ano 1954.

2.11 PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Tome um monte de feijões (a quantidade que você quiser). Com eles, faça três novos montes, de maneira tal que fiquem enfileirados e que cada um tenha o mesmo número de feijões. Retire três feijões de cada um dos montes laterais e os coloque no monte do meio. Depois, retire do monte do meio tantos feijões quantos ficaram em um monte lateral, colocando-os em qualquer dos montes. Ficaram nove feijões no monte do meio. Por quê?

2) Dispomos de uma folha de papel grande. Cortamos essa folha em cinco pedaços. A seguir, cortamos alguns desses pedaços em 5 pedaços, e assim por diante. Em algum momento teremos 1995 pedaços? E 1996 pedaços?

3) Digite numa calculadora um número qualquer de 3 algarismos. Em seguida, digite o mesmo número, obtendo assim um número de 6 algarismos da forma $abcabc$. Divida esse número por 7, divida o resultado por 11 e, finalmente, divida o número obtido por 13. O que aconteceu? Por que você obteve este resultado?

4) Um triângulo isósceles tem base medindo 10 cm e dois lados iguais a 13 cm. É possível mudar a base do triângulo e obter outro triângulo isósceles de mesma área?

5) Para castigar os alunos de sua turma por indisciplina, o professor Zerus decidiu descontar da nota mensal de cada aluno uma percentagem igual à nota da prova,isto é: quem tirou 60, terá um desconto de 60% na nota, quem tirou 20, um desconto de 20% da nota, e assim por diante. A nota mensal máxima é 100.

a) Quem ficará com a maior nota?

b) E com a menor?

c) Alunos que tiraram boas notas reclamaram que ficarão com a mesma nota dos que tiraram notas baixas. Eles estão certos?

6) Em 1950 um “profeta” anunciou que o fim do mundo ocorreria em 11/08/1 999 (11 de agosto de 1999). Como nada aconteceu nesse dia, ele refez seus cálculos e fez a seguinte previsão: “O fim do mundo ocorrerá na próxima data que se escreve com 8 algarismos diferentes.” Você pode descobrir essa data?

7) Um matemático especialista em lógica foi até a casa de uma senhora e perguntou a idade dos seus 3 filhos. A senhora respondeu: O produto das idades deles é 36 e a soma é o número da casa em frente à minha. O Matemático foi até a rua, verificou o número da casa e disse para a senhora: com essas informações eu ainda não consigo saber. A senhora complementou: “ah, sim, o mais velho toca piano”. Depois disso, o matemático descobriu as idades. Quais são elas?

8) Um sitiante tem que transportar uma galinha, uma raposa e um saco de milho de uma margem à outra de um rio. Apenas o sitiante e um dos "acompanhantes" pode atravessar com o barco em cada viagem. A galinha não pode ser deixada sozinha com o milho (pois a galinha come o milho) nem com a raposa (pois a raposa come a galinha). Como o sitiante pode realizar a travessia sem perder nenhum de seus bens?

9) Num reino em crise, o rei Maximus pretende eliminar os seus três sábios conselheiros. Como ainda sente algum carinho pelos sábios resolve dar-lhes uma última oportunidade de salvarem a vida. Se os sábios forem capazes de resolverem o problema a seguir o rei não os mandará matar. O rei colocou os três sábios em fila indiana e disse-lhes:

"Disponho de cinco chapéus, três brancos e dois pretos. Colocarei na cabeça de cada um de vocês um destes chapéus, de forma que cada um seja capaz de ver o chapéu daqueles que estão à sua frente, mas não seja capaz de ver o seu próprio chapéu, nem o chapéu daqueles que estão atrás (o último sábio da fila vê os chapéus dos outros dois, o do meio só vê o chapéu do primeiro sábio e o primeiro sábio da fila não vê nenhum dos chapéus). Para salvarem a vida, pelo menos um de vocês terá que adivinhar a cor do chapéu que tem na cabeça. Mas, se os três errarem, morrerão os três."

O rei colocou três dos chapéus na cabeça dos sábios e escondeu os outros dois. Em seguida, perguntou ao último da fila de que cor era o seu chapéu e ele nada respondeu; perguntou ao do meio a cor do seu chapéu e este nada respondeu; quando perguntou ao primeiro a cor do seu chapéu (e pra piorar ele era cego!) ele respondeu acertadamente e sem qualquer sombra de dúvidas, ficando os três sábios livres. De que cor era o chapéu do primeiro sábio? Porquê?

10) Há 5 pessoas que pretendem atravessar uma ponte. Elas têm que atravessar a ponte em um prazo de 30 segundos, no máximo, sendo que as cinco levam, respectivamente, 1, 3, 6, 8 e 12 segundos na travessia. No máximo duas pessoas podem atravessar a ponte de cada vez, mas deverão fazê-lo na velocidade do mais lento. Em cada travessia, uma das pessoas tem que transportar um lampião (que fica aceso por apenas 30 segundos, e todos têm que atravessar com o lampião aceso). Nessas condições é possível atravessar todos?

11) Três missionários e três canibais têm que atravessar um rio. No barco, cabem apenas duas pessoas por travessia. Em nenhum momento pode-se ter menos missionários que canibais nas margens, pois, senão, os missionários serão devorados pelos canibais. Como se pode realizar a travessia?

12) Em uma sala temos 3 lâmpadas incandescentes e fora dela 3 interruptores (um que acende cada lâmpada). Você pode entrar na sala apenas uma vez. Como descobrir qual interruptor acende cada lâmpada?

13) Imagine-se fechado numa sala, onde existem apenas duas portas. Uma conduz à vida e outra à morte. Contigo estão duas pessoas. Uma só diz a verdade e a outra a mentira, e você não sabe qual é qual. Tens direito apenas a uma pergunta. Que pergunta você faria a qual pessoa para descobrir qual é a porta da vida e sair sem problemas?

14) Temos cinco casas de cinco cores diferentes lado a lado. Em cada casa mora uma pessoa de diferente nacionalidade. Cada uma dessas pessoas bebe uma bebida, torce por um clube de futebol, e tem certo animal de estimação. Nenhuma delas tem o mesmo animal, nem torce pelo mesmo time ou bebe a mesma bebida. Sabendo que:

1. O Argentino vive na casa rosada;
2. O Brasileiro tem cachorros como animais de estimação;
3. O Uruguaio vive na primeira casa;
4. O Francês torce pelo Flamengo;
5. O Inglês bebe chá;
6. O Uruguaio vive ao lado da casa marrom;
7. O dono da casa amarela torce para o São Paulo;
8. O dono da casa verde bebe café;
9. O homem que vive na casa do centro bebe leite;
10. O homem que torce pelo Corinthians vive ao lado do que tem gatos;
11. O homem que cria hamsters vive ao lado do que torce para o São Paulo;
12. O homem que torce pelo Vasco bebe guaraná;
13. O homem que torce pelo Corinthians é vizinho do que bebe água;
14. O homem que torce pelo Palmeiras cria pássaros;
15. A casa verde é vizinha e fica à esquerda da casa branca;

Quem tem um peixe como animal de estimação?

15) A lei pirata estabelece que para repartir as moedas de um tesouro o capitão deve escolher um grupo de piratas e repartir igualmente as moedas entre eles até que não possua moedas suficientes para dar uma a mais a cada pirata. As moedas que sobram são a parte do capitão.

O capitão Morgan deve repartir um tesouro que contém menos de 1000 moedas de ouro. Ele sabe que se escolher 99 piratas ficará com 51 moedas e se escolher 77 piratas caberão a ele apenas 29 moedas.

Determine quantos piratas Morgan deve escolher para ficar com a maior quantidade possível de moedas. Para essa quantidade de piratas, quantas moedas ele ganhará? Observação: cada pirata escolhido deve receber pelo menos uma moeda.

2.12 DICAS E RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Seja n a quantidade de caroços de feijão em cada monte. Deduza que $n+3+3-(n-3)=n+3+3-n+3=9$.

2) Cada vez que cortamos uma folha de papel em cinco pedaços, juntamos 4 pedaços aos já existentes. Assim, a quantidade de pedaços de papel em cada etapa sempre aumenta de um múltiplo de 4. Como o processo se inicia com 1 pedaço, a quantidade de pedaços, a cada etapa, sempre será um número da forma $4k+1$, k natural. Os números 1995 e 1996 não são dessa forma.

3) O resultado é o mesmo número inicial de 3 algarismos abc. Escreva $abcabc$ como $1000 \cdot abc + abc = 1001 \cdot abc$. Note que $1001 = 7 \times 11 \times 13$.

4) Calculando a altura em relação à base de medida 10 cm, podemos obter a área do triângulo. “Cole” dois triângulos retângulos iguais. A nova base medirá 24 cm.

5) Se um aluno tirar a nota x, a sua nova nota, depois dos descontos, será igual a $N = x - \frac{x^2}{100}$. O valor máximo de N ocorre para $x = 50$. Tanto faz tirar $50 + r$ ou $50 - r$.

6) A resposta é dia 17/06/2345. “Minimize” primeiro o ano, depois o mês e, por último, o dia. Perceba que os números 0 e 1 não podem fazer parte do ano.

7) Escreva todas as possibilidades de três números naturais que multiplicados dão 36. Obtenha a soma desses números, em cada uma das possibilidades, obtendo os possíveis números da “casa em frente”. Deduza que o número da casa é 13 e que as idades dos filhos são 2, 2 e 9 anos (única possibilidade na qual existe um filho mais velho).

8) Leve a galinha para o outro lado e deixe lá. Na 2ª viagem, leve a raposa e traga de volta a galinha. Na 3ª, leve o milho. Na última, leve a galinha.

9) O sábio que deu a resposta (o primeiro da fila) raciocinou da seguinte forma: há 3 chapéus brancos e 2 pretos. Se o 3º sábio tivesse visto em cada um de nós chapéus pretos teria dito prontamente "majestade, o meu chapéu é branco". Como não respondeu significa que tem dúvidas. Portanto, há duas possibilidades: viu 2 chapéus brancos ou viu um chapéu branco e outro preto.
Seguindo a primeira hipótese, o meu chapéu é branco.
Seguindo a segunda hipótese, quem terá o chapéu preto? Se eu tivesse o chapéu preto, o segundo sábio teria respondido "vejo que o primeiro sábio tem um chapéu preto. Se o meu fosse também fosse preto o terceiro sábio teria respondido que o dele era branco. Como ele não respondeu, o meu é branco". Isto é, se o meu chapéu fosse preto, o segundo sábio teria respondido, como não respondeu significa que o meu chapéu é branco.

10) A pessoa que gasta 1 segundo leva a que gasta 3 segundos e volta. Depois a pessoa que gasta 1 segundo leva a que gasta 6 segundos e volta. Em seguida, a pessoa que gasta 8 segundos vai com a que gasta 12 segundos e volta com a que gasta 3 segundos. Finalmente, a que gasta 1 segundo vai com a que gasta 3 segundos. Isso dá 29 segundos no total.

11)

1º - Vão dois Canibais e volta um;

2°- Vão dois Canibais e volta um;

3°- Vão dois Missionários e voltam um Canibal e um Missionário;

4°- Vão dois Missionários e volta um Canibal;

5°- Vão dois Canibais e volta um;

6°- Vão dois Canibais e está concluída a travessia.

12) Acenda o 1º interruptor e espere 10 minutos. Em seguida, desligue o interruptor aceso, acenda o 2º e entre imediatamente na sala. A lâmpada acesa corresponde ao 2º interruptor, a lâmpada quente corresponde ao 1º e a lâmpada apagada, ao 3º.

13) Pergunte a uma pessoa qualquer: “Se eu perguntar à pessoa que mente qual a porta que leva à morte, qual ela me indicará?” Depois, é só entrar pela porta apontada.

14) Comece pelas dicas simples como, por exemplo, "O uruguaio vive na primeira casa". A partir das dicas óbvias, é possível ir deduzindo as outras logicamente. Tenha calma. Quem tem um peixe é o flamenguista.

15) Represente por x e y, respectivamente, as quantidades de moedas recebidas por cada pirata na 1ª e 2ª divisões. Conclua que $7y - 9x = 2$. A única solução compatível com o problema é $x = 6$ e $y = 8$. Deduza que o capitão possui 645 moedas. Escolhendo 323 piratas, o capitão dá 1 moeda para um e fica com 322 para ele.

3 NÚMEROS INTEIROS

Uma das características mais importantes dos números inteiros é a possibilidade de dividir um número por outro obtendo um resto único. É a chamada divisão euclidiana!

O teorema abaixo, de enunciado bem simples, e aparentemente sem muitas consequências, é um dos mais importantes e ricos teoremas da Aritmética e possui inúmeras aplicações.

3.1 TEOREMA (DIVISÃO EUCLIDIANA)

Se a e b são dois números inteiros com $a > 0$, então existem dois únicos números naturais q e r tais que $b = a \cdot q + r$, com $0 \leq r < a$.

Na igualdade apresentada acima os números *b*, *a*, *q* e *r* são chamados, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto da divisão euclidiana de *b* por *a*. Note que o resto da divisão de *b* por *a* é zero se, e somente se, *a divide b*. Caso isso ocorra, dizemos que *b é múltiplo de a,* ou ainda, que *b é divisível por a.*

Vamos resolver dois problemas (3.2 e 3.3) que envolvem divisão entre números inteiros.

3.2 DIVIDINDO POR SUBTRAÇÕES

Determine o quociente e o resto da divisão de 19 por 5 utilizando subtrações sucessivas.

Solução:

Basta partir de 19 e subtrair 5 sucessivamente até obter um resultado menor que 5. Veja:

$$19 - 5 = 14\,,\ 19 - 2 \times 5 = 9\,,\ 19 - 3 \times 5 = 4 < 5$$

O número de subtrações fornece o quociente e o resultado da última subtração nos dá o resto. Portanto, $q = 3$ e $r = 4$.

3.3 EM TODO ANO HÁ UMA SEXTA-FEIRA TREZE?

Prove que em todo ano há, obrigatoriamente, pelo menos uma sexta-feira 13.

Solução:

Vamos inicialmente enumerar os dias "13" de um determinado ano. Para isso imaginemos um ano de 365 dias (se o ano tiver 366 dias, o mesmo método funciona!). Lembre-se que, num ano de 365 dias, os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro têm 31 dias, enquanto abril, junho, setembro e novembro têm 30 dias e fevereiro tem 28 dias. Assim, temos que:

1 de janeiro $\rightarrow$ dia 1
2 de janeiro $\rightarrow$ dia 2
3 de janeiro $\rightarrow$ dia 3
…...............................
13 de janeiro $\rightarrow$ dia 13
13 de fevereiro $\rightarrow$ dia 44
13 de março $\rightarrow$ dia 72
13 de abril $\rightarrow$ dia 103
13 de maio $\rightarrow$ dia 133
13 de junho $\rightarrow$ dia 164
13 de julho $\rightarrow$ dia 194
13 de agosto $\rightarrow$ dia 225
13 de setembro $\rightarrow$ dia 256
13 de outubro $\rightarrow$ dia 286
13 de novembro $\rightarrow$ dia 317
13 de dezembro $\rightarrow$ dia 347

Note que os dias "13" de um determinado ano de 365 dias são representados pelos números 13, 44, 72, 103, 133, 164, 194, 225, 256, 286, 317 e 347, que ao serem divididos por 7 (uma semana tem sete dias!), deixam restos 6, 2, 2, 5, 0, 3, 5, 1, 4, 6, 2 e 4, respectivamente. Veja que todos os restos possíveis numa divisão por 7 aparecem, isto é, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Se a primeira sexta-feira do ano for dia 7 de janeiro, então todas as sextas-feiras do ano cairão nos dias 7, 14, 21, 28, 35, 42,... do referido ano. Como entre os dias 13 há um que é múltiplo de 7 (o dia 133), segue que esse dia será uma sexta-feira 13 (isso ocorreu em 2005, por exemplo). Seguindo o mesmo raciocínio, se a primeira sexta-feira do ano fosse dia 6 de janeiro, então as sextas-feiras seriam os dias 6, 13, 20, 27, 34, 41,... Como entre os dias 13 há um cujo resto da divisão por 7 é 6 (o dia 13), segue que, nesse ano, 13 de janeiro seria uma sexta- feira 13.

Esse raciocínio mostra que em qualquer ano existe pelo menos uma sexta-feira 13. Perceba que pode haver mais de uma sexta-feira 13. Se, por exemplo, o dia 2 de janeiro for uma sexta-feira, então as demais sextas-feiras desse ano serão os dias 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44,..., ou seja, os dias que deixam resto 2 quando divididos por 7.

Logo, em um ano de 365 dias em que 2 de janeiro é uma sexta-feira, os dias 44, 72 e 317 (que divididos por 7 deixam resto 2) serão sextas-feiras 13. Noutras palavras, 13 de fevereiro, 13 de março e 13 de novembro serão sextas-feiras 13.

3.4 PARES E ÍMPARES

Dado um número inteiro qualquer, temos duas possibilidades:

i) o resto da divisão de n por 2 é 0, isto é, existe $q \in Z$ tal que $n = 2q$;

ii) o resto da divisão de n por 2 é 1, isto é, existe $q \in Z$ tal que $n = 2q + 1$;

Desse modo, os números naturais dividem-se naturalmente em duas classes: a dos números da forma $2q$ para algum $q \in Z$, chamados números pares, e a dos números da forma $2q + 1$, chamados números ímpares.

Fácil demais, não é? Veremos que a afirmação acima, que é uma das mais simples e óbvias da Matemática, é também uma ferramenta de grande utilidade na resolução de muitos problemas envolvendo números inteiros. Vejamos:

3.5 OS SOLDADOS NO QUARTEL

Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

Solução:

Escolha um soldado. Em cada noite em que trabalha, ele está em companhia de dois outros. Como 99 é um número ímpar, não podemos formar pares de soldados sempre diferentes para trabalhar com o escolhido.

3.6 RESULTADO ZERO?

Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 10.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Colocando antes de cada um deles sinais “+” ou “–”, é possível obtermos resultado zero?

Solução:

Não é possível fazer isto. Imaginando que fosse possível, deveríamos separar os números dados em dois grupos com a mesma soma. Então colocaríamos sinais negativos nos números de um dos grupos e sinais positivos nos números do outro.

Teríamos então uma soma igual a zero. Acontece que a soma dos números naturais de 1 a 10 é igual a 55. Como este número é ímpar, não podemos separar os números dados em dois grupos que tenham a mesma soma.

3.7 BOTÕES QUE TROCAM DE COR

Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos da forma que indica a Figura 4:

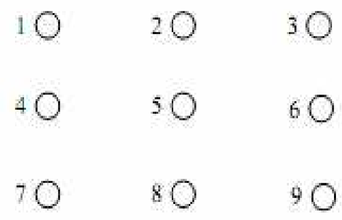

Figura 4: Painel de botões

Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus 8 vizinhos porém ele não.

Assim:

Apertando 1, trocam de cor 1, 2, 4 e 5.

Apertando 2, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Apertando 5, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

Solução:

Observe que apertando um botão do vértice do retângulo, trocam de cor 4 botões. Apertando um botão do meio de um lado, trocam de cor 6 botões e apertando um botão do centro trocam de cor 8 botões. Assim, cada vez que apertamos um botão trocam de cor um número par de botões. Como existem 9 botões, não é possível que todos troquem de cor.

3.8 COBRINDO UM TABULEIRO

Um tabuleiro 6×6 está coberto com dominós 2×1. Mostre que existe uma reta que separa as peças do tabuleiro sem cortar nenhum dominó.

Solução:

Cada dominó é formado por dois quadrados e, portanto, se o tabuleiro está inteiramente coberto, 18 dominós foram utilizados. Imagine agora uma reta (horizontal, por exemplo) que separe o tabuleiro em duas partes. Se ela não corta nenhum dominó, está resolvido o problema. Suponha então que ela corte ao meio um dominó. Neste caso, acima desta reta teremos n dominós inteiros mais meio dominó, ou seja, teremos acima desta reta $2n+1$ quadrados, que é um número ímpar. Mas isto é impossível porque se o tabuleiro tem 6 unidades de largura, qualquer reta o dividirá em partes que contém números pares de quadrados acima e abaixo dela. Assim, se uma reta corta um dominó, deverá cortar, também, outro dominó.

Para a divisão do tabuleiro, existem 10 retas possíveis e, se cada uma delas cortar dois dominós, deveríamos ter 20 dominós no tabuleiro.

Como eles são apenas 18 então existe uma reta (pelo menos) que não corta nenhum dominó.

Observação 1: A *paridade* de um número natural é o caráter do número ser par ou ímpar.

Observação 2: Se fixarmos um número natural $m \geq 2$, podemos sempre escrever um número inteiro qualquer n, de modo único, na forma $n = mk + r$, onde $k, r \in N$ e $r < m$. Por exemplo, todo número inteiro n pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas: $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$. Ou ainda, todo número natural n pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas: $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$. E assim por diante.

3.9 UM PROBLEMA DE PARIDADE

Dados $a, n \in N^*$, com $a > 2$ e ímpar, determine a paridade de $\frac{a^n - 1}{2}$.

Solução:

Como a é ímpar, temos que $a^n - 1$ é par, e, portanto $\frac{a^n - 1}{2}$ é um número natural. Logo, faz sentido querer determinar a sua paridade.

Observe que $\frac{a^n - 1}{2} = \frac{a-1}{2}\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\right)$.

Sendo a ímpar, temos que $a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1$ é par ou ímpar, conforme n é par ou ímpar, respectivamente. Portanto, a nossa análise se reduz à procura da paridade de $\frac{a-1}{2}$.

Como a é ímpar, ele é da forma $4k+1$ ou da forma $4k+3$.

Se $a = 4k+1$, então $\frac{a-1}{2}$ é par, enquanto que, se $a = 4k+3$, então $\frac{a-1}{2}$ é ímpar.

Resumindo, temos que $\frac{a^n - 1}{2}$ é par se, e somente se, n é par ou a é da forma $4k+1$.

3.10 DIVIDINDO UM QUADRADO PERFEITO POR TRÊS

Seja m um inteiro. Mostre que o resto da divisão de m^2 por 3 é 0 ou 1.

Solução:

Temos três possibilidades para m: $m = 3q$, $m = 3q+1$ ou $m = 3q+2$.

Se $m = 3q$, então $m^2 = (3q)^2 = 9q^2 = 3 \cdot (3q^2)$ é um múltiplo de 3. Neste caso o resto da divisão de m^2 por 3 é 0.

Se $m = 3q+1$, então $m^2 = (3q+1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3 \cdot (3q^2 + 2q) + 1 = 3k+1$ (com $k = 3q^2 + 2q$) é um múltiplo de 3 somado com 1. Neste caso o resto da divisão de m^2 por 3 é 1.

Se $m = 3q+2$, então $m^2 = (3q+2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3 \cdot (3q^2 + 4q + 1) + 1 = 3k+1$ (com $k = 3q^2 + 4q + 1$) é um múltiplo de 3 somado com 1. Neste caso o resto da divisão de m^2 por 3 é 1.

3.11 PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Ache o quociente e o resto da divisão

a) de 27 por 5

b) de 38 por 7

2) Mostre como, usando uma calculadora que só realiza as quatro operações, pode-se efetuar a divisão euclidiana de dois números naturais em apenas três passos. Aplique o seu método para calcular o quociente e o resto da divisão de 3721056 por 18735.

3) Discuta a paridade

a) da soma de dois números.

b) da diferença de dois números.

c) do produto de dois números.

d) da potência de um número.

e) da soma de n números ímpares.

4) Joãozinho coleciona números naturais cujo algarismo das unidades é a soma dos outros algarismos. Por exemplo, ele colecionou 10023, pois 1 + 0 + 0 + 2 = 3.

a) Na coleção de Joãozinho há um número que tem 4 algarismos e cujo algarismo das unidades é 1. Que número é esse?

b) Qual é o maior número sem o algarismo 0 que pode aparecer na coleção?

c) Qual é o maior número sem algarismos repetidos que pode aparecer na coleção?

5) Quais são os números que, quando divididos por 5, deixam resto igual

a) à metade do quociente?

b) ao quociente?

c) ao dobro do quociente?

d) ao triplo do quociente?

6) Seja n um número natural. Mostre que um, e apenas um, número de cada terna abaixo é divisível por 3.

a) n, $n+1$ e $n+2$

b) n, $n+2$ e $n+4$

c) n, $n+10$ e $n+23$

d) n, $n+1$ e $2n+1$

7) Mostre que

a) se n é ímpar, então n^2-1 é divisível por 8.

b) se n não é divisível por 2 nem por 3, então n^2-1 é divisível por 24.

8) Colocando sinais de adição entre alguns dos algarismos do número 123456789 podemos obter várias somas. Por exemplo, podemos obter 279 com quatro sinais de adição: $123+4+56+7+89=279$. Quantos sinais de adição são necessários para que se obtenha assim o número 54?

9) Mostre que, se um inteiro é, ao mesmo tempo, um cubo e um quadrado, então ele é da forma $5n$, $5n+1$ ou $5n+4$.

10)

a) Mostre que, se um número a não é divisível por 3, então a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

b) A partir desse fato, prove que, se a e b são inteiros tais que 3 divide a^2+b^2, então a e b são divisíveis por 3.

11) Seja n um número natural; prove que a divisão de n^2 por 6 nunca deixa resto 2.

12) Para obter o *resumo* de um número de até 9 algarismos, deve-se escrever quantos são seus algarismos, depois quantos são seus algarismos ímpares e, finalmente, quantos são seus algarismos pares. Por exemplo, o número 9103405 tem 7 algarismos, sendo 4 ímpares e 3 pares, logo seu resumo é 743.

a) Encontre um número cujo resumo seja 523.

b) Encontre um número que seja igual ao seu próprio resumo.

c) Para qualquer número de até 9 algarismos, podemos calcular o resumo do resumo de seu resumo. Mostre que esse procedimento leva sempre a um mesmo resultado, qualquer que seja o número inicial.

13) Mostre que, se n é ímpar, então a soma de n termos consecutivos de uma PA (progressão aritmética) é sempre divisível por n.

14) Ache o menor múltiplo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4.

15) Como completar o quadrado abaixo com números primos todos diferentes e inferiores a 100 de modo que ele se torne mágico, isto é, para que a soma das linhas, das colunas e das duas diagonais sejam todas iguais?

		7
1		
	13	

Figura 5: Quadro mágico

3.12 DICAS E RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

1)

a) $q = 5$, $r = 2$

b) $q = 5$, $r = 3$

2)

1º passo: Divida a por b usando a calculadora e pegue a parte inteira do quociente.

2º passo: Multiplique a parte inteira do quociente por b.

3º passo: Subtraia de a o resultado obtido no 2º passo.

3)

a) números de mesma paridade têm soma par e números de paridades distintas têm soma ímpar.

b) números de mesma paridade têm diferença par e números de paridades distintas têm diferença ímpar.

c) se pelo menos um dos números multiplicados for par, o produto será par.

d) bases pares elevadas a qualquer expoente natural não nulo geram resultado par, ao passo que bases ímpares elevadas a qualquer expoente natural geram resultado ímpar.

e) a soma de n números ímpares só dá par quando n for par.

4)

a) Note que há apenas três maneiras de escrever 1 como soma de três números naturais: $1=1+0+0$, $1=0+1+0$ e $1=0+0+1$. Além disso, nenhum número de quatro algarismos pode começar com zero. Resposta: 1001.

b) Perceba que se um número com algarismos não nulos está na coleção, então ele tem no máximo 10 algarismos. Além disso, se um número sem o algarismo 0 está na coleção de João e tem algum algarismo (sem ser o das unidades) diferente de 1, podemos "espichar" o número, trocando esse algarismo por uma sequência de 1's e obtendo um novo número, maior que o primeiro. Finalmente, use o fato de que o maior algarismo das unidades possível é 9. Resposta: 1111111119.

c) Um número da coleção não pode ter seis algarismos distintos. Resposta: 62109.

5)

a) Múltiplos de 11.

b) Múltiplos de 6.

c) Múltiplos de 7.

d) Múltiplos de 8.

6) Em todos os itens deve-se considerar três casos: n ser da forma $3k$ ou da forma $3k+1$ ou da forma $3k+2$. Em qualquer caso, em cada item sempre haverá exatamente um múltiplo de 3.

7)

a) Escreva $n = 2k+1$ e conclua que $n^2 - 1 = 4k(k+1)$. Note que $k(k+1)$ é sempre par.

b) Podemos ter $= 6k+1$ ou $n = 6k+5$. Em qualquer caso, lembre-se que $k(k+1)$ é sempre par.

8) Como queremos obter a soma 54, devemos colocar sinais de adição entre todos os algarismos a partir do 3. Resposta: 7 sinais.

9) Considere os números m^2 e n^3. Existem 5 possibilidades para m: $m = 5k + r$, $r \in \{0,1,2,3,4\}$. Também existem 5 possibilidades para n. Compare os resultados de m^2 e de n^3 buscando tipos de números comuns aos dois.

10)

a) Divida em dois casos: $n = 3k+1$ e $n = 3k+2$.

b) Se pelo menos um dos números entre a e b não for múltiplo de 3, decorre, imediatamente do item anterior, que pelo menos um dos números a^2 ou b^2 terá a forma $3k+1$. Logo, $a^2 + b^2$ nunca será múltiplo de 3.

11) Existem 5 possibilidades para n: $n = 6k + r$, $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Calcule n^2 em cada um dos casos. Conclua que não existe q tal que $n^2 = 6q + 2$.

12)

a) Existem vários exemplos: 11222, 23456, 36854, ...

b) Para um número ser igual ao seu resumo, ele tem que ter três algarismos. Resposta: 321

c) Existem quatro possibilidades para o resumo de um número de três algarismos: 303, 312, 321 ou 330; os resumos de 303, 312, 321 ou 330 são todos iguais a 321. Note que 321 tem, como resumo, ele mesmo.

13) Tomando a fórmula da soma de n termos consecutivos de uma PA, faça a substituição de a_n por $a_1 + (n-1)r$. No resultado encontrado, ponha $n = 2k + 1$.

14) O número procurado, além de ser múltiplo de 5, possui as formas $3a + 2$ e $4b + 2$, simultaneamente. Daí, concluímos que $3a = 4b$, isto é, que a deve ser um múltiplo de 4 e b, um múltiplo de 3. As menores possibilidades são $a = 16$ e $b = 12$. Portanto, o número é 50.

15)

43	61	7
1	37	73
67	13	31

Figura 6: Solução do quadrado mágico

4 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Toda equação que puder ser escrita na forma $ax + by = c$, onde *a*, *b* e *c* são números inteiros, com *a* e *b* não simultaneamente nulos, é chamada *equação diofantina linear em duas variáveis x e y*. Por exemplo, as equações $2x + 4y = 10$, $3x - 5y = 1$ e $-31x + 5y = 340$ são diofantinas lineares.

É importante frisar que numa equação do tipo acima buscamos sempre *soluções inteiras,* isto é, procuramos *dois números inteiros* x_0 e y_0 que satisfaçam a equação $ax + by = c$, ou ainda, que cumprem a condição $ax_0 + by_0 = c$. Neste caso, dizemos que (x_0, y_0) é uma solução da equação diofantina.

Sabemos que todos os pontos do plano com coordenadas reais (x, y) que satisfazem a igualdade $ax + by = c$ representam, geometricamente, uma reta. Logo, as soluções de uma equação diofantina linear são os pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano, que estão dispostos sobre a reta que ela representa.

Por exemplo, os pares $(1,2)$ e $(1,1)$ são soluções da equação diofantina $3x - 2y = 1$, conforme ilustrado na Figura 6.

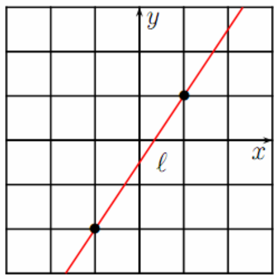

Figura 7: Soluções de uma equação diofantina

Será que sempre é possível obter soluções para uma equação diofantina linear?

O teorema 4.1 nos diz que nem sempre é possível e estabelece condições para que o seja. Além disso, veremos que só há duas opções para uma equação diofantina linear: ou ela não tem soluções ou tem infinitas.

4.1 TEOREMA

A equação diofantina linear $ax + by = c$, onde a, b e c são números inteiros (com a e b não simultaneamente nulos) possui solução se, e somente se o máximo divisor comum de a e b for um divisor de c. Além disso, se (x_0, y_0) for uma solução particular da equação, então o conjunto de soluções da equação será constituído por todos os pares de inteiros (x, y) dados pelas expressões $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, com $t \in Z$.

Demonstração:

Vamos provar a ida do teorema, ou seja, supondo que a equação $ax + by = c$ tenha uma solução (x_0, y_0) mostraremos que $d = mdc(a,b) | c$.

Se (x_0, y_0) for uma solução da equação teremos $ax_0 + by_0 = c$. Por outro lado, como d é divisor de a e de b, existem números inteiros ξ_1 e ξ_2 tais que $a = d\xi_1$ e $b = d\xi_2$. Daí,

$$ax_0 + by_0 = c \Rightarrow d\xi_1 x_0 + d\xi_2 y_0 = c \Rightarrow d(\xi_1 x_0 + \xi_2 y_0) = c \Rightarrow d \mid c .$$

Agora, vamos provar a volta do teorema, isto é, supondo que $d = mdc(a,b) | c$, mostraremos que a equação $ax + by = c$ possui uma solução.

Sempre que tivemos $d = mdc(a,b)$, o Teorema de Bézout[8] garante que existem dois inteiros, x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = d$. Por outro lado, como, por hipótese, $d \mid c$, existe um inteiro q tal que $c = qd$. Daí,

$$ax_0 + by_0 = d \Rightarrow q(ax_0 + by_0) = qd \Rightarrow qx_0a + qy_0b = c.$$

Isso mostra que o par (qx_0, qy_0) é uma solução da equação.

Resta agora mostrar que o conjunto de soluções da equação é constituído por todos os pares de inteiros (x,y) nos quais $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, $t \in Z$.

Se (x,y) e (x_0, y_0) são soluções da equação, temos que $ax + by = ax_0 + by_0 = c$.

Dessa igualdade obtemos que $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$.

Dividindo por d e observando que $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, vemos que $\frac{a}{d} \mid (y_0 - y)$ e que $\frac{b}{d} \mid (x - x_0)$.

Isso significa que existe $t \in Z$, tal que $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$.

Finalizando, basta fazer $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ na equação original a fim de verificar que para qualquer inteiro t as expressões achadas acima para x e y resolvem a equação diofantina. Isto é fácil.

Vamos resolver algumas equações:

4.2 RESOLVENDO UMA EQUAÇÃO DIOFANTINA

Obtenha todas as soluções inteiras da equação $12x + 33y = 27$.

[8] O teorema de Bézout afirma que se *a* e *b* forem números inteiros não nulos e *d* o seu mdc, então sempre existem inteiros *x* e *y* tais que $d = ax + by$

Solução:

Observemos que $mdc(12{,}33) = 3$ e que $3 \mid 27$, logo a equação tem infinitas soluções. Como vimos no teorema 4.1, basta obter uma solução particular e teremos todas as restantes. Para achar esta solução particular podemos trabalhar de duas maneiras, que descrevemos a seguir:

Alternativa 1:

Dividindo por 3, reduzimos a equação dada à forma equivalente $4x + 11y = 9$ e por tentativa (inspeção) vemos que $(x_0, y_0) = (5,-1)$ é uma solução. Assim, temos que as soluções são da forma $x = 5 + 11t$ e $y = -4t - 1$; $t \in Z$.

Alternativa 2

Aplicamos o algoritmo de Euclides e calculamos $mdc(12{,}33)$:

	2	1	3
33	12	9	3
	9	3	0

Depois, obtemos os resultados $33 = 12 \times 2 + 9$ e $12 = 9 \times 1 + 3$.

Daí, temos que $3 = 12 - 9 \times 1$ e $9 = 33 - 12 \times 2$, de onde tiramos

$$\begin{aligned} 3 &= 12 - (33 - 12 \times 2) \times 1 \\ &= 12 - 33 + 12 \times 2 \\ &= 3 \times 12 - 1 \times 33. \end{aligned}$$

Multiplicamos por 9 a igualdade $3 = 3 \times 12 - 1 \times 33$ e encontramos $27 = 12 \times (27) + 33 \times (-9)$.

Isso mostra que $x_0 = 27$ e $y_0 = -9$ resolvem, particularmente, a equação diofantina.

Como na alternativa anterior, podemos escrever a solução geral da forma $x = 27 + 11t$ e $y = -4t - 9$; $t \in Z$.

Aparentemente, os resultados obtidos nas alternativas 1 e 2 são diferentes, mas as fórmulas $x = 5 + 11t$, $y = -4t - 1$, $t \in Z$; e $x = 27 + 11t$, $y = -4t - 9$, $t \in Z$, fornecem as mesmas soluções, mas para diferentes valores de t.

Veja algumas soluções da equação $4x + 11y = 9$:

Valor de *x*	Valor de *y*
-17	7
-6	3
5	- 1
16	- 5
27	- 9

Perceba que os valores de *x* variam de 11 em 11 (que é o coeficiente de *y* em $4x + 11y = 9$) ao passo que os valores de *y* variam de 4 em 4 (que é o coeficiente de *x* em $4x + 11y = 9$). Além disso, conforme os valores de *x* aumentam, os de *y* diminuem.

Nota: Quando os coeficientes de x e y numa equação diofantina linear não são ambos positivos, sua resolução pode ser feita mais facilmente observando que: se (x_0, y_0) é solução de $ax + by = c$ (com a e b naturais), então $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$ e $(-x_0, -y_0)$ são soluções respectivamente de $-ax + by = c$, $ax - by = c$ e $-ax - by = c$.

4.3 RESOLVENDO OUTRA EQUAÇÃO DIOFANTINA

Obtenha todas as soluções inteiras da equação $11x - 7y = 58$.

Solução:

Observemos que $mdc(11,7)=1$ e que 1|58, logo a equação tem infinitas soluções. Basta obter uma solução particular e teremos as restantes. Aplicamos o algoritmo de Euclides para calcular $mdc(11,7)$:

	1	1	1	1
11	7	4	3	1
	4	3	1	0

Depois obtemos os resultados $11=7\times 1+4$; $7=4\times 1+3$; e $4=3\times 1+1$.

Logo,

$$\begin{aligned}1&=4-3\\&=4-(7-4)\\&=2\times 4-7\\&=2\times(11-7)-7\\&=2\times 11-3\times 7\\&=11\times(2)+7\times(-3)\end{aligned}$$

Multiplicando por 58 obtemos:

$$11\times(116)-7\times(174)=58.$$

Logo, $x_1=116$ e $y_1=174$ resolvem, particularmente, a equação diofantina $11x-7y=58$.

Portanto, a solução geral pode ser escrita do seguinte modo:

$$x=4-7t \text{ e } y=-2-11t;\ t\in Z.$$

Agora vamos resolver alguns problemas cujas resoluções envolvem equações diofantinas.

4.4 QUADRAS DE VÔLEI E DE BASQUETE

Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que 390 pessoas joguem ao mesmo tempo?

Solução:

Representemos por *x* a quantidade de quadras de basquete e por *y* a quantidade de quadras de vôlei necessárias. Além disso, vamos supor que em cada quadra de basquete tenhamos 10 pessoas jogando (5 contra 5) e em cada quadra de vôlei tenhamos 12 pessoas (6 contra 6). Montamos, então, a equação $10x+12y=390$, que é equivalente a $5x+6y=195$. Resolvendo essa equação (conforme feito em 4.2 e 4.3) obtemos $x=6t+3$ e $y=-5t+30$, *t* inteiro.

Observando que *x* e *y* são números positivos, limitamos as possibilidades para *t*, escrevendo $6t+3>0$ e $-5t+30>0$ e obtendo que $-1<t<6$. Para $t=0$ obtemos $x=3$ e $y=30$; para $t=1$ obtemos $x=9$ e $y=25$; para $t=2$ temos $x=15$ e $y=20$, etc.

O problema possui 6 respostas distintas.

4.5 O PROBLEMA DO CHEQUE

Uma pessoa foi ao banco para descontar um cheque no valor de x reais e y centavos. O caixa do banco errou na leitura do valor do cheque e pagou y reais e x centavos. A pessoa guardou o dinheiro no bolso sem verificar a quantia. No caminho de casa, ela gastou cinco centavos e quando chegou em casa verificou que tinha exatamente o dobro do valor do cheque. Sabendo-se que essa pessoa não levou dinheiro nenhum consigo quando foi ao banco, pergunta-se qual era o valor do cheque.

Solução:

O valor correto do cheque é $x+\frac{y}{100}$ reais, $0 \le y < 100$. Só que o valor recebido foi $y+\frac{x}{100}$ reais, $0 \le x < 100$.

Com os dados do problema, montamos a seguinte equação:

$$y + \frac{x}{100} - \frac{5}{100} = 2\left(x + \frac{y}{100}\right)$$

Simplificando obtemos:

$$98y - 199x = 5$$

Observemos que $mdc(98,199) = 1$ e que 1|5, logo a equação tem infinitas soluções.

Aplicamos o algoritmo de Euclides para calcular $mdc(98,199)$:

	2	32	1
199	98	3	3
	3	3	0

Depois escrevemos $199 = 98 \times 2 + 3$; $98 = 32 \times 3 + 2$; e $3 = 2 \times 1 + 1$.

Logo,

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 1 \times 2 \\
&= 3 - 1 \times (98 - 32 \times 3) \\
&= 33 \times 3 - 1 \times 98 \\
&= 33 \times (199 - 2 \times 98) - 1 \times 98 \\
&= 33 \times 199 - 67 \times 98 \\
&= 98 \times (-67) - 199 \times (-33)
\end{aligned}$$

Multiplicando por 5 encontramos:

$$98 \times (-335) - 199 \times (-165) = 5 .$$

Portanto, $y_1 = -335$ e $x_1 = -165$ resolvem, particularmente, a equação diofantina $98y - 199x = 5$ e a solução geral pode ser escrita do seguinte modo:

$$x = -165 - 98t \text{ e } y = -335 - 199t \,;\; t \in Z .$$

Obviamente, a solução particular encontrada não satisfaz as exigências do problema. Porém, outra solução ocorre quando $y_0 = -335 + 2.199 = 63$ e $x_0 = -165 + 2.98 = 31$ (tomando $t = -2$).

Além disso, é fácil ver que $y_0 = 63$ e $x_0 = 31$ formam a única solução que satisfaz $0 \leq y < 100$ e $0 \leq x < 100$, fornecendo a resposta do nosso problema.

Assim, o valor original do cheque é R$31,63.

4.6 PREENCHENDO UM TABULEIRO

(Olimpíada de Maio) Um tabuleiro quadrado 7×7 deve ser preenchido por peças com as três formas dadas na Figura 8.

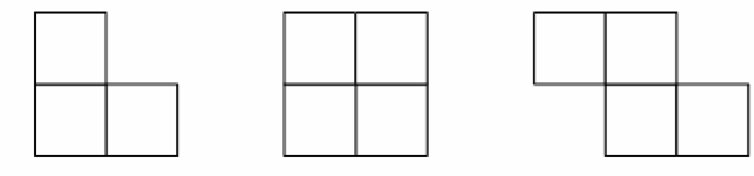

Figura 8: Peças

As peças podem ser giradas ou viradas e dispõe-se de uma quantidade suficiente de cada uma delas. Como fazê-lo?

Solução:

Se x, y, z são as quantidades dessas peças, respectivamente, que devem ser utilizadas, então $3x + 4(y + z) = 49$.

Recaímos numa equação diofantina cujas soluções positivas são $(x, y+z) = (15,1),(11,4),(7,7)$. (verifique!)

Façamos uma análise geométrica de como as peças podem formar um quadrado. Observe que, pelo seu formato, nenhuma peça preenche 3 casas consecutivas de uma linha ou coluna. Logo as casas indicadas no tabuleiro abaixo são ocupadas por 16 peças diferentes.

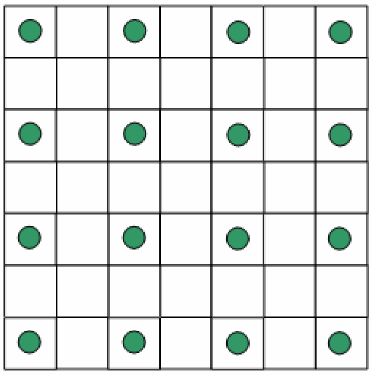

Figura 9: Casas ocupadas

A única solução que soma 16 peças é (15,1), isto é, se for possível preencher o tabuleiro, então necessariamente deve-se usar 15 peças do primeiro tipo (L) e uma só peça do segundo ou do terceiro tipo. Agora basta exibir um preenchimento do tabuleiro.

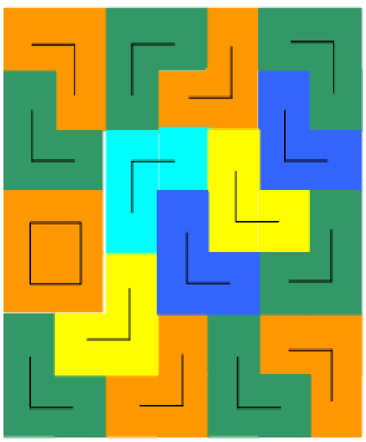

Figura 10: Um preenchimento possível

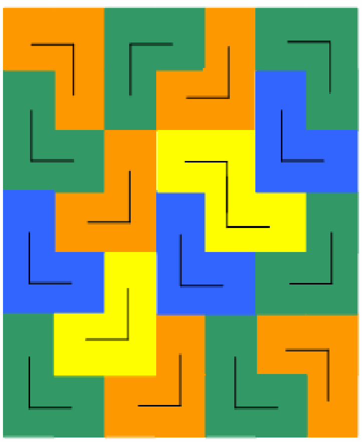

Figura 11: Outro preenchimento

4.7 PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Determine, se existirem, todas as soluções inteiras das seguintes equações diofantinas lineares:

a) $56x + 72y = 40$ b) $24x + 138y = 18$

c) $221x + 91y = 117$ d) $84x - 438y = 156$

e) $48x + 7y = 5$ f) $57x - 99y = 77$

2) Determine todas soluções inteiras e positivas das seguintes equações diofantinas lineares:

a) $5x - 11y = 29$ b) $32x + 55y = 771$

c) $58x - 87y = 290$ d) $62x + 11y = 788$

3) Determine o menor inteiro positivo que dividido por 8 e por 15 deixa os restos 6 e 13, respectivamente.

4) Exprima 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo seja divisível por 11.

5) Determine as duas menores frações positivas que tenham 13 e 17 como denominadores e cuja soma seja igual a $\frac{305}{221}$.

6) Demonstre que, se *a* e *b* são inteiros positivos primos entre si, então a equação diofantina $ax - by = c$ tem um número infinito de soluções inteiras e positivas.

7) Um rapaz recebeu R$100,00 da sua mãe para comprar alguns itens do tipo A, ao preço de R$13,00 cada um; alguns do tipo B, ao preço R$7,00 cada; e outros do tipo C, ao preço R$18,00, cada. Chegando ao supermercado, ele esqueceu a quantidade exata de cada item que tinha de comprar. Mas lembrou que não haveria troco e que ele tinha que comprar uma mesma quantidade de dois dos produtos. Ajude o rapaz a lembrar as quantidades sem precisar voltar em casa para perguntar.

8) Se x e y são inteiros positivos, determine o número de soluções de $2x+3y=100$.

9) Um caixa automática de banco só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário deseja fazer um saque de 100 reais. De quantas maneiras distintas o caixa eletrônico poderá fazer o pagamento?

10) Existem inteiros positivos x, y e z satisfazendo $28x+30y+31z=365$. Determine os possíveis valores de x, y e z.

11) Os números a, b, c são dígitos de um número n de três dígitos que satisfazem $49a+7b+c=286$. Qual é o número n?

12) Sejam os pontos $P=(-4{,}11)$ e $Q=(16{,}-1)$. Determine todos os pontos cujas coordenadas são números inteiros positivos e pertencem ao segmento $\overline{PQ}$.

13) Um pescador tenta pescar um cardume jogando diversas redes na água. Se cair exatamente um peixe em cada rede, salvam-se ainda n peixes. Se caírem n peixes em cada rede, sobram n redes vazias. Quantas são as redes? Quantos são os peixes?

14) Uma certa tinta pode ser comprada em galões de 18 litros ou em latas de 3 litros. Precisa-se de 250 litros dessa tinta. De quantas maneiras se pode comprar latas e galões para que a quantidade de sobra seja mínima?

15) Um hospital deseja adquirir medicamentos A e B de modo a distribuí-los entre alguns pacientes, que são menos de 500. Cada paciente receberá 20 vidros de cada medicamento devendo ainda sobrar 84 vidros de cada medicamento.

Sabendo que A é vendido em caixas de 132 vidros e B, em caixas de 242 vidros, determine:

a) o número mínimo de caixas de cada medicamento que o hospital deve comprar;

b) o número de pacientes que receberão os medicamentos.

4.8 DICAS E RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

1)

a) $x = 9t + 2$ e $y = -7t - 1$

b) $x = 23t + 18$ e $y = -4t - 3$

c) $x = 7t + 3$ e $y = -17t - 6$

d) $x = 73t + 54$ e $y = 14t + 10$

e) $x = 7t + 2$ e $y = -48t - 13$

f) Não possui soluções inteiras.

2)

a) $x = 11t + 18$ e $y = 5t + 1$

b) $x = 55t + 43$ e $y = -32t - 11$

c) $x = 3t + 2$ e $y = 2t - 2$

d) $x = 11t + 1$ e $y = -62t + 66$

3) Temos $n = 8x + 6$ n e $n = 15y + 13$. Logo, $8x - 15y = 7$. Resolva a equação diofantina e depois use inequações para concluir que $n = 188$.

4) Sejam $7x$ e $11y$ os dois inteiros positivos. Temos então $7x+11y=100$. Os números são 56 e 44.

5) Sejam $\frac{x}{13}$ e $\frac{y}{17}$ as frações. Temos $\frac{x}{13}+\frac{y}{17}=\frac{17x+13y}{221}=\frac{305}{221}$. As frações são $\frac{8}{13}$ e $\frac{13}{17}$. Lembre-se que *x* e *y* são positivos!

6) Como $mdc(a,b)=1$, a equação tem infinitas soluções. Note que ocorre $x>0$ e $y>0$, se, e somente se, $\frac{b}{d}t<x_0$ e que $t<y_0\frac{d}{a}$, onde (x_0,y_0) é uma solução particular da equação. Perceba que existem infinitos valores de *t* que satisfazem as inequações acima.

7) Sejam *a*, *b* e *c* as quantidades que o rapaz tem que comprar dos produtos A, B e C, respectivamente. Note que $13a+7b+18c=100$. Além disso, *a*, *b* e *c* são números positivos. Conclua que há inicialmente duas possibilidades: $a=2$, $b=8$ e $c=1$ ou $a=3$, $b=1$ e $c=3$. Mas como ele tinha que comprar uma mesma quantidade de dois dos produtos, a resposta é $a=3$, $b=1$ e $c=3$.

8) Resolva a equação $2x+3y=100$, obtendo $x=3t+2$ e $y=32-2t$, *t* inteiro. Como *x* e *y* são ambos positivos, temos $3t+2>0$ e $32-2t>0$, o que fornece 15 valores diferentes para *t*.

9) De 11 maneiras. A resolução é análoga à do exercício anterior.

10) Há duas respostas: $x=1$, $y=4$ e $z=7$ ou $x=2$, $y=1$ e $z=9$.

11) O número procurado é 556. Não esqueça que *a*, *b*, *c* pertencem ao conjunto $\{0,1,2,...,9\}$.

12) Se o ponto (x,y) pertence à reta, então $3x+5y=43$ (determine a equação da reta!). Resolva a equação diofantina $3x+5y=43$ obtendo $x=5t+11$ e $y=8-3t$, *t* inteiro. Como *x* e *y* são positivos, surgirão duas inequações que limitarão as possibilidades de t. Há 5 possibilidades para t , portanto, há 5 pontos que atendem o problema.

13) Há duas respostas: 6 redes e 9 peixes ou 6 redes e 8 peixes.

14) Seja x a quantidade de galões e y a quantidade de latas. A equação $18x + 3y = 250$ não possui soluções inteiras. Desse modo, sempre haverá sobra de tinta. A menor sobra possível é de 2 litros. Nesse caso temos $18x + 3y = 252$, que é uma equação diofantina que possui 15 soluções positivas. Portanto, a compra pode ser feita de 15 maneiras diferentes.

15)

a) Sejam P a quantidade de pacientes, a a quantidade de caixas do medicamento A e b a quantidade de caixas do medicamento B. Perceba que $132a = 20P + 84$ e que $242b = 20P + 84$. Logo, $132a = 242b$, isto é, $\frac{a}{b} = \frac{11}{6}$. Se tomarmos $a = 11$ e $b = 6$, P não pertencerá aos inteiros. Mas se tomarmos $a = 22$ e $b = 12$ obtemos $P = 141$. Portanto, a quantidade mínima de caixas de cada medicamento que o hospital deve comprar é 22 caixas de A e 12 caixas de B.

b) Tomando $a = 22$ e $b = 12$, obtemos $P = 141$. Quaisquer outros valores de a e b que satisfaçam as equações acima tornam $P > 500$, o que não é permitido. Portanto, são 141 pacientes.

5 TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema de Pitágoras é um dos mais belos e importantes teoremas de todos os tempos e ocupa uma posição especial na história Matemática. Desde o século 5 a.C. até o século 21 d.C. inúmeras demonstrações dele foram feitas. Para se ter uma ideia, em 1940, o matemático americano E. S. Loomis publicou 370 demonstrações, mas ainda há outras.

5.1 O ENUNCIADO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

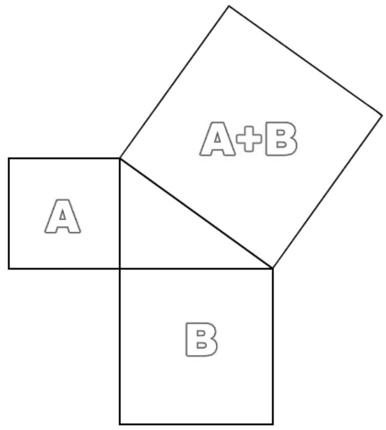

Figura 12: Teorema de Pitágoras

Se a é a medida da hipotenusa e b e c as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que $a^2 = b^2 + c^2$.

5.2 UMA DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, considere o quadrado cujo lado é $b + c$.

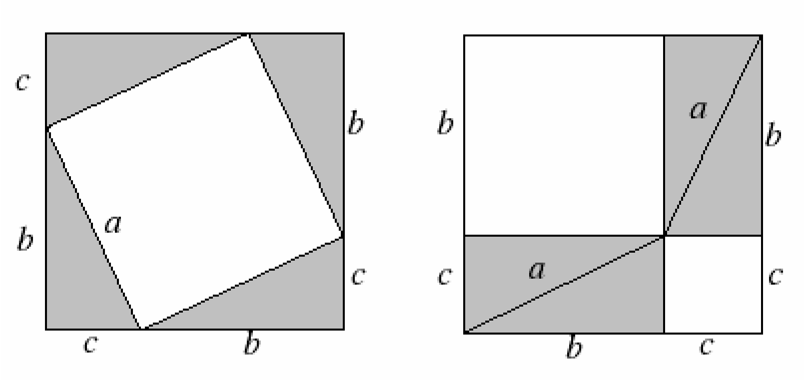

Figura 13: Uma demonstração do Teorema de Pitágoras

Na figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado $b+c$ quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado inicialmente, restando um quadrado de lado *a*. Na figura da direita, retiramos também do quadrado de lado $b+c$ os quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado *b* e um quadrado de lado *c*. Concluímos a partir da comparação entre as construções feitas nas duas figuras que a área do quadrado de lado *a* é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem *b* e *c*.

5.3 A DEMONSTRAÇÃO QUE USA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

A partir de um triângulo ABC, retângulo em A, traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC.

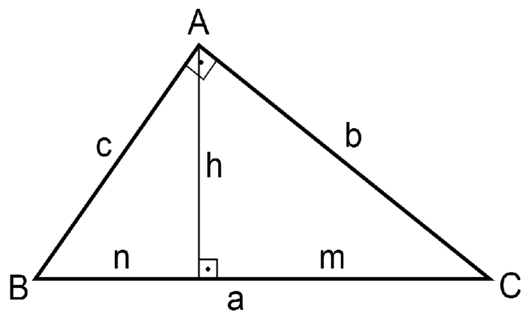

Figura 14: Elementos de um triângulo retângulo

Da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos $b^2 = am$ e da semelhança dos triângulos AHB e ABC temos $c^2 = an$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= am + an \\ &= a(m+n) \\ &= a \cdot a \\ &= a^2 \end{aligned}$$

5.4 A DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL

Henry Perigal, um livreiro de Londres, publicou, em 1873, a demonstração que se pode apreciar na figura abaixo. Trata-se de uma forma de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa.

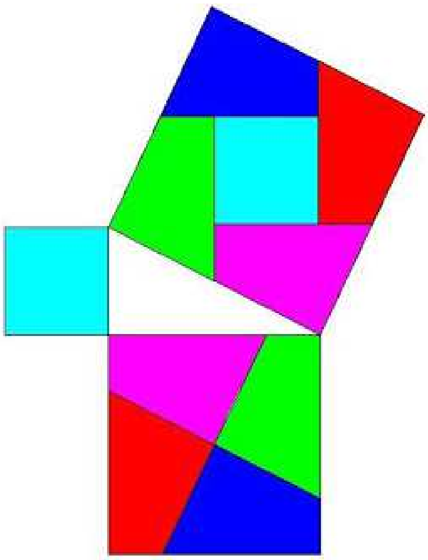

Figura 15: Demonstração de Perigal

Perigal cortou o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes, juntamente com o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

NOTA: Para visualizar um modelo dinâmico para a demonstração de Perigal construído com o software de geometria CABRI, visite o site http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ23/CabriJava/pitau.htm

5.5 UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Agora, imaginemos figuras *semelhantes* quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

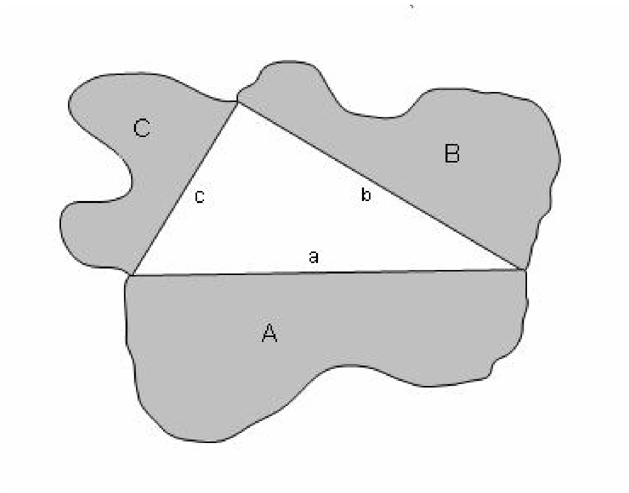

Figura 16: Uma generalização do Teorema de Pitágoras

Sejam então A, B e C as áreas dessas figuras, construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura acima. Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então,

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2} \text{ e } \frac{A}{C}=\left(\frac{a}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{A}{a^2}=\frac{C}{c^2}.$$

Daí, $\frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}$. Como sabemos que $a^2=b^2+c^2$, basta utilizar uma propriedade das proporções para concluir que $A=B+C$.

Concluímos então que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, *a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos*.

5.6 O PROBLEMA DE HIPÓCRATES

A Figura 17 mostra um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados desse triângulo como diâmetros. Mostre que a soma das áreas hachuradas é igual à área do triângulo.

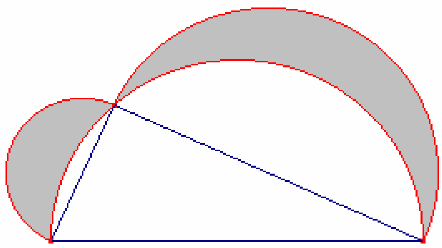

Figura 17: Problema de Hipócrates

Solução:

Sejam X e Y as áreas hachuradas, T a área do Triângulo e A e B as áreas das regiões indicadas na Figura 18.

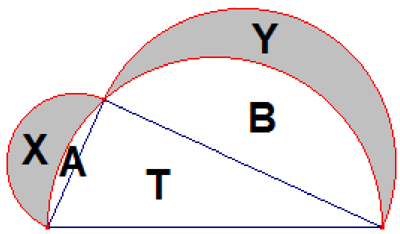

Figura 18: Resolução do problema de Hipócrates

Segue da generalização do teorema de Pitágoras feita em 5.5 que $(X+A)+(Y+B)=T+A+B$.

Portanto, $X+Y=T$.

5.7 CONSTRUÇÃO ENVOLVENDO QUADRADOS

Na Figura 19, o quadrado *ABCD* tem área de 30 cm^2 e o quadrado *FHIJ* tem área de 20 cm^2. Os vértices *D*, *A*, *E*, *H* e *I* desses quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado *BEFG*.

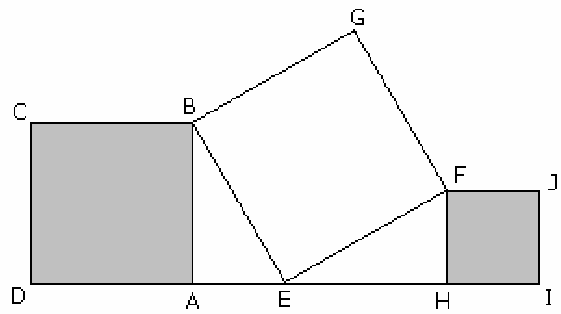

Figura 19: Construção envolvendo quadrados

Solução:

Note que os triângulos *BAE* e *EHF* são triângulos retângulos semelhantes, pois os ângulos de vértices *A* e *H* são retos e os ângulos $A\hat{B}E$ e $F\hat{E}H$ têm mesma medida. Temos então

$$\frac{BE}{EF}=\frac{AB}{EH}=\frac{AE}{FH}.$$

Como $BE = EF$, concluímos que $AB = EH$ e $AE = FH$.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos *BAE* e *EHF* obtemos, respectivamente, $AB^2 + AE^2 = BE^2$ e $FH^2 + EH^2 = EF^2$.

Somando essas duas expressões e observando que $AB^2 = 30$ e $FH^2 = 20$, obtemos $30 + 20 + AE^2 + EH^2 = BE^2 + EF^2$.

Logo, $30 + 20 + AE^2 + AB^2 = BE^2 + BE^2$ e, portanto, $BE^2 = 50$ cm².

5.8 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DE UM CUBO

A Figura 20 apresenta um cubo de aresta 10. Sabendo que $AP = QC = 4$, calcule a distância de *P* a *Q*.

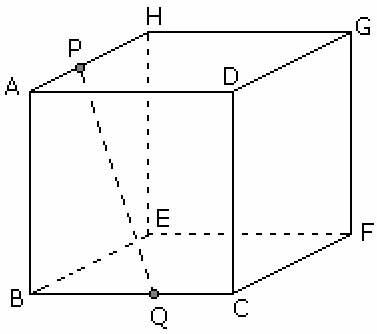

Figura 20: Distância entre dois pontos de um cubo

Solução:

Seja *J* o pé da perpendicular baixada de *P* sobre *BE* e considere o triângulo retângulo *QBJ*. Repare que em *QBJ* temos $BJ = AP = 4$ e $BQ = 6$. Além disso, aplicando o teorema de Pitágoras em *QBJ* obtemos $QJ^2 = BQ^2 + BJ^2 = 36 + 16 = 52$.

Considere agora o triângulo retângulo *PJQ*, no qual $AB^2 = PJ^2 = 10^2$ e $QJ^2 = 52$. Aplicando o teorema de Pitágoras em *PJQ*, vemos que $PQ^2 = PJ^2 + QJ^2 = 152$. Portanto, $PQ = \sqrt{52}$.

5.9 PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Seja *AB* um segmento de comprimento 26, e sejam *C* e *D* pontos sobre o segmento *AB* tais que *AC* = 1 e *AD* = 8. Sejam *E* e *F* pontos sobre uma semicircunferência de diâmetro *AB*, sendo *EC* e *FD* perpendiculares a *AB*. Quanto mede o segmento *EF*?

a) 5

b) $5\sqrt{2}$

c) 7

d) $7\sqrt{2}$

e) 12

2) A figura abaixo mostra o logotipo de uma empresa, formado por dois círculos concêntricos e por quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo interno mede 1 cm. Então o raio do círculo externo deverá medir, em cm:

a) $2\sqrt{2}+3$

b) $\sqrt{2}+2$

c) $4\sqrt{2}+314$

d) $3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2}+1$

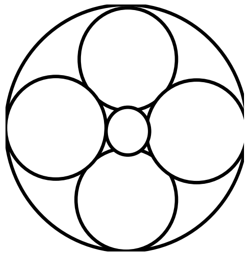

Figura 21: Logotipo de uma empresa

3) Determine todos os triângulos retângulos cujos lados são inteiros e estão em progressão aritmética.

4) Em um quadrado *ABCD* de lado *a*, desenha-se a circunferência que passa pelos pontos *A* e *B* e é tangente ao lado *CD*. Quanto mede o raio dessa circunferência em função de *a*?

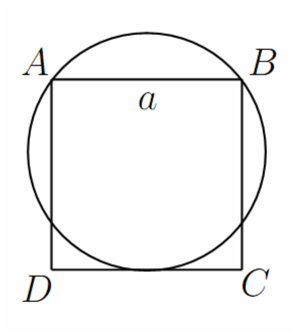

Figura 22: Quadrado de lado a

5) Se $b = 2k + 1$, $c = 2k^2 + 2k$, e $a = 2k^2 + 2k + 1$, onde k é um inteiro positivo, mostre que (b, c, a) é um terno pitagórico.

6) Sendo b, c os catetos e h a altura (relativa à hipotenusa) de um triângulo retângulo, mostre que $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

7) Em um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, trace a altura *AH*. Mostre que a soma das áreas dos círculos inscritos nos triângulos *AHB* e *AHC* é igual a área do círculo inscrito no triângulo *ABC*.

8) O ponto *P* é interior ao retângulo *ABCD* e é tal que $PA = 3$, $PB = 4$ e $PC = 5$. Calcule *PD*.

9) Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo cujos lados medem 6 cm, 6 cm e 4 cm.

10) Em um triângulo *ABC*, as medianas que partem de *A* e de *B* são perpendiculares. Se $BC = 8$ e $AC = 6$, calcule AB.

11) Na figura a seguir, *ABCD* é um retângulo 5 cm por 2 cm e *D* é ponto médio do segmento *BE*. Determine o comprimento do segmento *EC*.

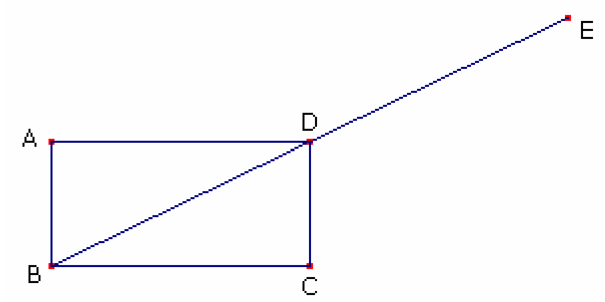

Figura 23: Retângulo 5x2

12. Na Figura 24 os dois círculos são tangentes entre si e tangentes aos lados do retângulo *ABCD*.

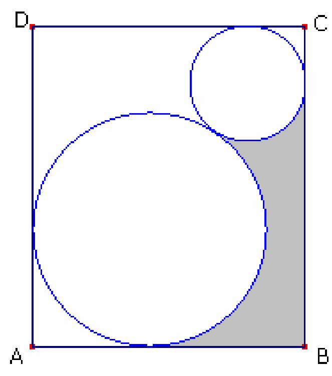

Figura 24: Dois círculos tangentes entre si

Sabe-se que os raios dos círculos medem 2 cm e 4 cm, e que o lado *AB* do retângulo mede 9 cm.

a) Calcule o comprimento do lado *AD* do retângulo.

b) Calcule a área da região sombreada na figura.

13) Um quadrado *PQRS* tem lados medindo *x*. *T* é o ponto médio de *QR* e *U* é o pé da perpendicular a *QS* que passa por *T*. Qual é a medida de *TU*?

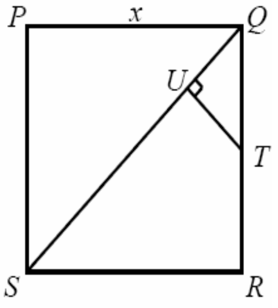

Figura 25: Pé de uma perpendicular em um quadrado

A) $\frac{x}{2}$ B) $\frac{x}{3}$ C) $\frac{x}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ E) $\frac{x}{4}$

14) No triângulo *ABC*, seja *AD* a altura relativa a *BC*. Quantos triângulos não congruentes satisfazem $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AD^2}$ com $AD=2012$ e *BD* e *CD* ambos inteiros? Note que *AB* e *AC* não precisam ser inteiros.

15) Na figura 26 os segmentos AB e CD são perpendiculares ao segmento BC. Sabendo que o ponto *M* pertence ao segmento AD e que o triângulo *BMC* é retângulo não isósceles, qual é a área do triângulo *ABM* ?

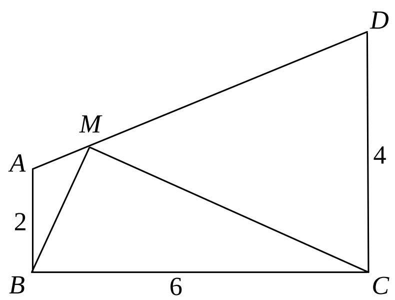

Figura 26: Triângulo retângulo não isósceles

5.10 DICAS E RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

1) A resposta é a letra *D*. Crie os triângulos *AEB* e *AFB*. Note que eles são triângulos retângulos pois *AB* é diâmetro de uma circunferência. Obtenha as medidas de *EC* e *FD*. Trace por *E* uma paralela a *AB* que intersecta *DF* em *G*. O triângulo retângulo *EGF* é a chave da solução.

2) A resposta é a letra *A*. Ligue os centros dos quatro círculos internos. Temos um quadrado. Ligue o centro do círculo menor a dois vértices consecutivos do quadrado. Surgirá um triângulo retângulo que possui todos os lados em função de *r*. O teorema de Pitágoras aplicado nele resolve praticamente tudo.

3) Os triângulos procurados possuem lados de medidas $3r$, $4r$ e $5r$, com $r \in N^*$. Nomeie os catetos do triângulo de $x-r$ e x, e a hipotenusa de $x+r$. Aplique o teorema de Pitágoras.

4) A resposta é $\frac{5a}{8}$. Seja *C* o centro da circunferência e *M* o ponto médio de *AB*. O triângulo retângulo *OMB* é a chave para obtenção da solução.

5) Mostre que $b^2 + c^2 = a^2$.

6) Desenvolva apenas o lado direito da expressão dada. Use que $b^2 + c^2 = a^2$ e depois que $bc = ah$.

7) Sejam r_1, r_2 e r os raios dos círculos inscritos nos triângulos *AHB*, *AHC* e *ABC*, respectivamente. Esses três triângulos são semelhantes e, portanto $\frac{r_1}{c} = \frac{r_2}{b} = \frac{r}{a}$. Eleve ao quadrado. O que falta para obter o resultado desejado?

8) A resposta é $3\sqrt{2}$. Sejam *R*, *S*, *T* e *U* os pés das perpendiculares baixadas de *P* sobre os lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, respectivamente. Sejam $PD = x$, $PR = m$, $PS = n$, $PT = p$ e $PU = q$. Aplique o teorema de Pitágoras quatro vezes: nos triângulos *PRB*, *PSC*, *PTD* e *PUA*, obtendo $m^2 + n^2 = 4^2$, $n^2 + p^2 = 5^2$, $m^2 + q^2 = 3^2$ e $p^2 + q^2 = x^2$. Conclua que $x^2 + 4^2 = 3^2 + 5^2$.

9) Trace a altura *AM* que passa pelo centro *O* da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*. No triângulo retângulo *AMB* calcule *AM*. O triângulo *OMB* resolve o problema.

10) A resposta é $2\sqrt{5}$. Sejam *M* e *N* os pontos médios dos lados *BC* e *AC*, respectivamente. As medianas *AM* e *BN* cortam-se no baricentro, que divide cada mediana na razão $2:1$. Sendo *G* o baricentro do triângulo, aplique o teorema de Pitágoras nos triângulos *AGN* e *BGM*.

11) A resposta é $\sqrt{41}$. Seja *F* o pé da perpendicular baixada de *E* sobre a reta suporte do lado *BC* e *G* o ponto de interseção das retas *AD* e *EF*. Prove que os triângulos *BCD* e *DGE* são congruentes. Aplique o teorema de Pitágoras no triângulo *CFE*.

12)

a) A resposta é $3(2+\sqrt{3})$. Seja *M* o centro do círculo maior e *N* o do círculo menor. Note $MN = 6$. Trace uma paralela a *BC* por *N* e uma paralela a *AB* por *M*. Essas retas se cruzam num ponto *P*. No triângulo retângulo *NPM*, calcule *NP*. Note que $AD = 6 + NP$.

b) A resposta é $\dfrac{21\sqrt{3}}{2} + 8\pi + 20$. Seja *R* o pé da perpendicular baixada de *M* sobre *AB* e *S* o pé da perpendicular baixada de *N* sobre *BC*. Calcule a área do polígono *NMRBS* e dela subtraia as áreas de dois setores circulares. Para encontrar as áreas dos setores você vai precisar dos seus ângulos centrais. Os ângulos do triângulo *MPN* ajudarão. Calcular o seno do ângulo *M* pode ajudar.

13) A resposta é a letra *D*. O triângulo *QUT* é semelhante ao triângulo *QRS*.

14) Temos $AB^2 = BD^2 + AD^2$ e $AC^2 = CD^2 + AD^2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $BD \le CD$. Substituindo na equação dada, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{BD^2 + AD^2} = \frac{1}{AD^2} - \frac{1}{CD^2 + AD^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{BD^2 + AD^2} = \frac{CD^2}{AD^2(CD^2 + AD^2)} \\
&\Leftrightarrow AD^2(CD^2 + AD^2) = CD^2(BD^2 + AD^2) \\
&\Leftrightarrow AD^2 = BD \cdot CD
\end{aligned}$$

Ou seja, $BD \cdot CD = 2012^2$. Como $BD \le CD$ e $2012^2 = 2^4 \cdot 503^2$ tem 15 divisores positivos, *BD* tem 8 possíveis valores, sendo que em um deles, $BD = CD = 2012$.

Com exceção desse caso, há dois triângulos que satisfazem essa condição, um com $BC = BD + CD$ e ângulo $A\hat{B}C$ agudo (de fato, nesse caso ABC é retângulo em A) e outro com $BC = CD - BD$ e $A\hat{B}C$ obtuso. Com isso, o total de triângulos pedido é $7 \times 2 + 1 = 15$.

15) Sejam $MN = h$ e $BN = x$. Usando relações métricas no triângulo retângulo BMN, concluímos que $MN^2 = BN \cdot NC \Leftrightarrow h^2 = x(6 - x)$ (I)

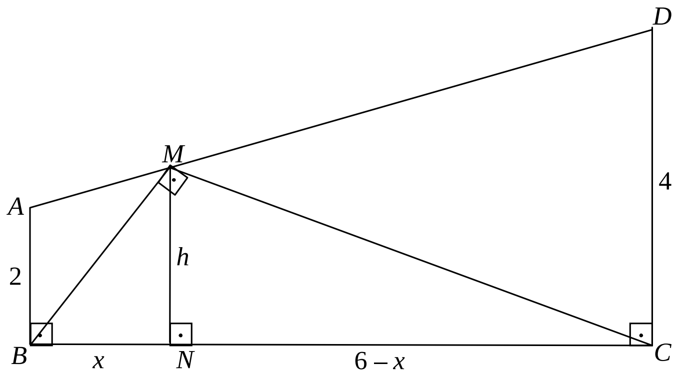

Figura 27: Área do triângulo ABM

Além disso, na Figura 28, os triângulos AMF e ADE são semelhantes, logo

$$\frac{AF}{AE} = \frac{MF}{DE} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{h-2}{2} \Leftrightarrow h = \frac{x}{3} + 2$$

Substituindo em (I), obtemos

$$\left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 = x(6 - x) \Leftrightarrow 5x^2 - 21x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{6}{5}.$$

Como o triângulo BMC não é isósceles, $x = \frac{6}{5}$. Assim, considerando que a altura relativa ao lado AB do triângulo ABM mede x, a área desse triângulo é $\frac{AB \cdot x}{2} = \frac{2 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{6}{5}$.

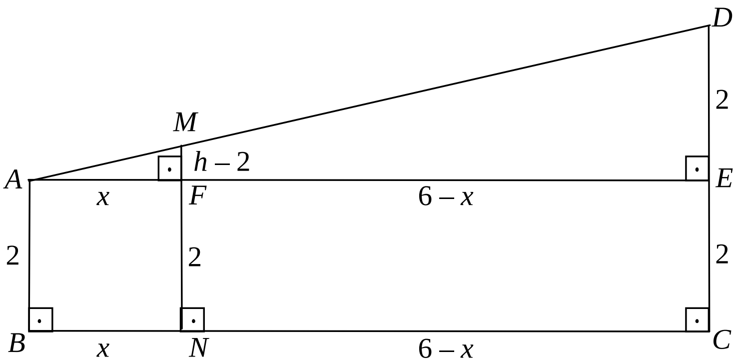

Figura 28: Área do triângulo ABM: parte II

6 JOGOS

Em provas de olimpíadas encontramos frequentemente problemas que abordam uma situação (jogo/brincadeira) na qual duas pessoas se revezam fazendo jogadas (a partir de uma regra bem definida), sendo que, em cada uma delas não é permitido passar a vez, ou seja, cada jogador é obrigado a de fato realizar sua jogada. Em geral, procura-se, nesses problemas, determinar qual dos jogadores (o primeiro ou o segundo a jogar) possui uma estratégia vencedora, isto é, uma estratégia que, se adotada, garante sua vitória, independente das jogadas do seu adversário.

Um dos tipos mais elementar desses jogos são os chamados “pseudo-jogos”, que são aqueles em que ou o primeiro ou o segundo jogador sempre vence, independente da estratégia adotada por qualquer um deles. Vejamos alguns exemplos.

6.1 MONTES DE PEDRAS

Temos três montes de pedras: um com 10 pedras, outro com 15 e o último com 20. Em cada jogada, o jogador da vez escolhe um dos montes e o divide em dois montes menores. O jogador que em sua vez não puder fazer mais isso perde. Quem ganha e como?

Solução:

Depois de cada jogada, o número de montes aumenta de 1. Por exemplo, depois que o 1º jogador jogar, o número de montes passará de 3 para 4. Em seguida, quando o 2º jogador jogar, passará de 4 para 5, e assim por diante. Como temos 45 pedras no total, ao final do jogo teremos 45 montes formados por uma pedra. Isso significa que serão realizadas $45 - 3 = 42$ jogadas ao todo. Portanto, o 2º jogador será o último a jogar, já que ele joga sempre nas “jogadas pares”, garantindo a sua vitória, independente do que faça o 1º jogador.

6.2 SINAIS DE NOVO!

Os números de 1 a 20 são escritos em uma linha. Dois jogadores se revezam colocando sinais de mais e/ou de menos entre os números. Depois de colocados todos os sinais, a expressão resultante é calculada (isto é, são efetuadas as somas e subtrações). O primeiro jogador vence se o resultado for par e o segundo vence se for ímpar. Quem vencerá e como?

Solução:

Quando temos uma expressão numérica envolvendo adições e/ou subtrações de números inteiros, o resultado (obviamente) só pode ser par ou ímpar! Note que um resultado ímpar ocorre somente se a quantidade de números ímpares presentes na expressão for ímpar. Caso contrário, o resultado sempre será par. E o curioso é que isso não depende da quantidade e disposição dos sinais + e – presentes na expressão! Veja alguns exemplos:

- Na expressão $1-2+3+4-5+6=7$ o resultado é ímpar porque a quantidade de ímpares é três, que é ímpar.
- Já na expressão $5642+17+23+4+12-21-2+7-2=5680$ o resultado é par pois a quantidade de ímpares é quatro, que é par.

Assim, voltando ao nosso problema, como de 1 a 20 há dez números ímpares (quantidade par), isso significa que o resultado da expressão sempre será par, de modo que o primeiro a jogar sempre vencerá.

Abordaremos agora tipos de problemas nos quais tanto o primeiro como o segundo jogador pode vencer desde que adote uma estratégia especial, denominada *estratégia vencedora*. Veremos duas formas de montar uma estratégia vencedora: explorar a *simetria* e descobrir uma *posição vencedora*.

Comecemos explorando a simetria:

6.3 JOÃO E MARIA

João e Maria jogam o seguinte jogo em um tabuleiro 1×11: cada um, em sua vez, pode pintar um dos quadrados ou pintar dois quadrados consecutivos. Cada quadrado só pode ser pintado uma vez. Quem não puder mais jogar, perde. Sabe-se que João será o primeiro a jogar. Quem pode sempre garantir a vitória? Usando que estratégia?

Solução:

João poderá ganhar se fizer o seguinte:

Na primeira jogada, ele deverá pintar o quadradinho central do tabuleiro:

Figura 29: Jogada inicial de João

Em seguida será a vez de Maria, que pintará um ou dois quadradinhos consecutivos, conforme sua preferência. Suponhamos, sem perda de generalidade, que ela pinte apenas um:

	Maria				João					

Figura 30: Primeira jogada de Maria

Então basta João jogar simetricamente à jogada de Maria em relação ao centro do tabuleiro:

	Maria				João				João	

Figura 31: Primeira jogada simétrica de João

E cada vez que Maria fizer uma jogada, João deverá fazer a jogada simétrica. Por exemplo:

	Maria		Maria	Maria	João	João	João		João	

Figura 32: Jogadas simétricas

Prosseguindo assim, quando João finalizar cada jogada, o tabuleiro ficará simétrico e, em seguida, Maria “quebrará” a simetria. Como após a última jogada o tabuleiro fica simétrico, a última jogada será de João e ele vencerá.

6.4 MOEDAS SOBRE A MESA

Dois jogadores se revezam colocando moedas idênticas sobre uma mesa redonda, sem haver sobreposição de moedas. O jogador que em algum momento não tiver mais espaço para colocar uma moeda perde o jogo. Qual dos dois vence e como?

Solução:

O primeiro jogador poderá vencer se fizer o seguinte:

Na primeira jogada, ele deverá colocar a moeda exatamente no centro da mesa:

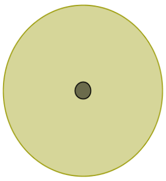

Figura 33: Moeda no centro da mesa

A partir daí, cada vez que o seu adversário colocar uma moeda, ele deverá, em seguida, colocar uma nova moeda em posição diametralmente oposta à do seu adversário. As moedas de número ímpar representam as jogadas do primeiro jogador e os números pares, as do segundo.

Com esta estratégia, a cada vez que o seu adversário jogar, ainda haverá uma jogada simétrica para o primeiro jogador. Portanto, quando ocorrer a última jogada, ela será do primeiro jogador, e o segundo perde.

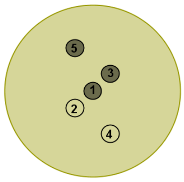

Figura 34: Moedas
simétricas

6.5 RETIRANDO PEDRAS

Temos duas pilhas, cada uma delas com 7 pedras. Em cada jogada, o jogador da vez pode retirar quantas pedras quiser, mas só de uma das pilhas. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada. Quem pode vencer? Como?

Solução:

O segundo jogador poderá vencer, bastando, para isso, adotar a seguinte estratégia:

Em cada jogada ele deverá retirar a mesma quantidade de pedras que o primeiro jogador retirou, só que da outra pilha. Se sempre fizer assim, o segundo jogador garantirá uma jogada após cada jogada do primeiro. Portanto, a última jogada será do segundo jogador e ele vencerá. A simetria aqui consiste em manter a igualdade de pedras das duas pilhas.

6.6 TOM E JERRY DISPUTAM UM JOGO

Tom e Jerry disputam o seguinte jogo: eles colocam alternadamente pinos idênticos em casas vazias de um tabuleiro 20×20 (um pino de cada vez). Tom é o primeiro a jogar. Vence quem, em sua jogada, formar um bloco de quatro pinos vizinhos. Dois pinos são vizinhos se estiverem em casas com um lado em comum. Quem pode vencer? Como?

Solução:

Jerry pode ganhar se adotar a seguinte a estratégia: nas jogadas iniciais ele deve jogar simetricamente à jogada de Tom (em relação ao centro do tabuleiro), mas quando Tom montar um bloco de três pinos vizinhos (e portanto estiver iminência de ganhar 1 ponto), Jerry deve abandonar a estratégia simétrica e colocar seu pino junto aos três de Tom, fechando assim um bloco de quatro “na frente” de Tom. Depois o jogo continua e Jerry deve ir mesclando esses dois tipos de jogadas, conforme a disposição dos pinos de Tom. A figura abaixo mostra algumas possíveis jogadas. T_i significa a i-ésima jogada de Tom e J_i a i-ésima jogada de Jerry.

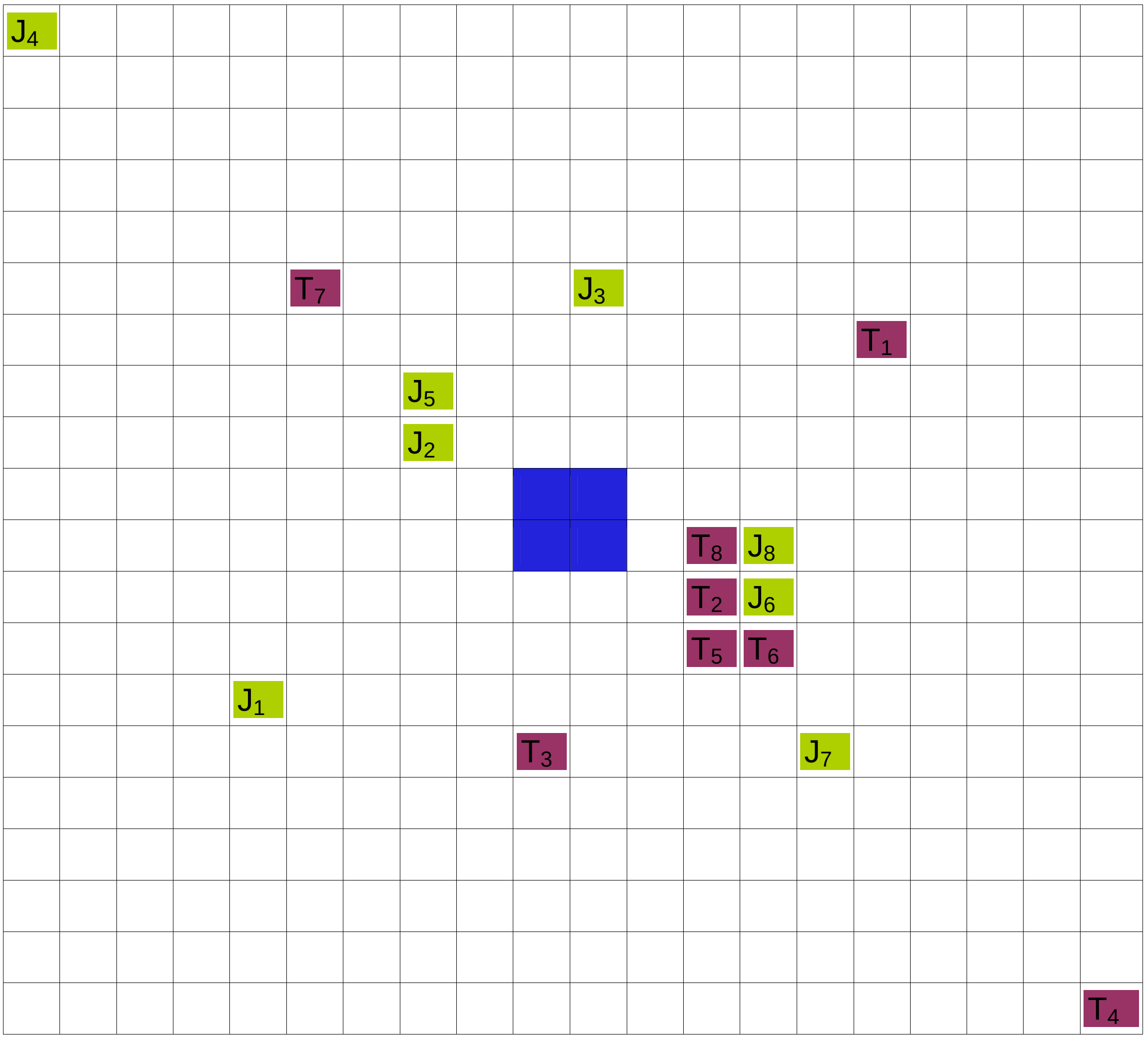

Figura 35: Estratégia vencedora de Jerry

Alguns tipos de jogos possuem certas configurações que sempre levam um jogador à vitória. Essas configurações são chamadas *posições vencedoras.* Vejamos alguns problemas que abordam este tema.

6.7 CAIXA DE FÓSFOROS

Uma caixa contém 300 fósforos. Dois jogadores se revezam removendo não mais que a metade dos fósforos da caixa. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez. Quem pode vencer o jogo? Qual a estratégia?

Solução :

O primeiro a jogar vence usando a seguinte estratégia: inicialmente ele tira 45 palitos, deixando 255 na caixa (1 unidade a menos que uma potência de 2). Depois, seu adversário poderá tirar no máximo 127 palitos, de modo que no mínimo ficarão 128 palitos na caixa. Em sua próxima jogada, o primeiro jogador deve tirar uma quantidade de palitos tal que fiquem na caixa 127 palitos (1 unidade a menos que uma potência de 2 novamente!). Seu adversário tirará então mais alguns palitos (no máximo 63) de modo que fiquem, no mínimo, 64 palitos na caixa. Em sua próxima jogada, o primeiro jogador deve tirar uma quantidade de palitos tal que fiquem na caixa 63 palitos (mais uma vez 1 unidade a menos que uma potência de 2). Continuando com essa estratégia, o primeiro jogador deixará na caixa, ao longo das “rodadas”, as seguintes quantidades de palitos: 31, 15, 7, 3, 1 (potências de 2 diminuídas de 1 unidade). Quando restar 1 palito na caixa, o segundo jogador não poderá retirá-lo, ficando impossibilitado de jogar, o que garantirá a vitória ao primeiro jogador.

No problema acima a estratégia vitoriosa foi “controlar” a quantidade de palitos remanescentes na caixa, deixando sempre $2^n - 1$ palitos. A classe de números da forma $2^n - 1$ constitui o que chamamos conjunto de *posições vencedoras*. Todos as outras quantidades de palitos correspondem ao que denominamos conjunto de *posições perdedoras.*

Uma classe de posições vencedoras goza das seguintes propriedades:

- A posição final do jogo é uma posição vencedora;
- Um jogador nunca pode sair de uma posição vencedora para outra vencedora em uma única jogada;

• Um jogador sempre pode sair de uma posição não vencedora para uma vencedora em uma única jogada.

Em outras palavras, uma posição é vencedora quando podemos, a partir dela, escolher um movimento e repassar uma posição perdedora ao adversário. Já a partir de um posição perdedora é impossível escolher um movimento e repassar uma posição perdedora ao adversário. Desse modo é possível, de modo inteligente, que um dos jogadores mantenha as posições vencedoras em seu poder, vencendo o jogo.

6.8 O NÚMERO 60

O número 60 está escrito em um quadro negro. Dois jogadores se revezam subtraindo do número no quadro qualquer de seus divisores e substituindo número original pelo resultado dessa subtração. Perde o jogador que escrever o número 0.

Solução :

Neste jogo, o jogador que obtiver 1 vencerá, pois assim, forçará o seu adversário a obter 0. O primeiro jogador conseguirá fazer isto se transferir resultados ímpares ao seu adversário em todas as rodadas. E ele consegue, pois como o jogo começa com 60, que é par, basta ele subtrair 1 e transferir 59 ao seu adversário. O adversário transferirá inevitavelmente o número 58 ao primeiro jogador. Note que o segundo jogador sempre transferirá um número par ao primeiro jogador, pois números ímpares possuem apenas divisores ímpares e a subtração de ímpares é par. Como 1 é divisor de qualquer número, basta o primeiro jogador ir subtraindo 1 do número par recebido e ir transferindo ímpares ao seu adversário.

6.9 PROBLEMAS PROPOSTOS

Em cada um dos problemas abaixo indique qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora e apresente tal estratégia.

1) Dois jogadores se revezam colocando torres em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se capturar mutuamente. Perde o jogador que não consegue colocar uma torre.

2) Sobre uma mesa existem duas pilhas (uma com 15 e outra com 16 pedras). Em um jogo cada jogador pode, em sua vez, retirar qualquer quantidade de pedras de apenas uma pilha. Quem não puder mais jogar perde.

3) Dois jogadores colocam alternadamente bispos (da mesma cor) em um tabuleiro 8×8, de forma que nenhum bispo ataque outro. Quem não puder mais jogar perde.

4) Dois jogadores colocam alternadamente reis (da mesma cor) em um tabuleiro 9×9, de forma que nenhum rei ataque outro. Quem não puder mais jogar perde.

5) São dados vinte pontos ao redor de um círculo. Cada jogador em sua vez pode ligar dois desses pontos se esse novo segmento não cortar os feitos anteriormente. Quem não puder mais traçar nenhum segmento perde.

6) Uma margarida possui 12 pétalas. Dois jogadores se revezam retirando uma única pétala ou duas que estejam uma do lado da outra. Perde o jogador que não puder mais jogar na sua vez.

7) Coloca-se um rei na posição A1 de um tabuleiro de xadrez. Dois jogadores se revezam movendo o rei para cima, para a direita ou ao longo de uma diagonal indo para cima ou para a direita. Vence o jogador que colocar o rei em H8.

8) Este jogo começa com o número 0. Em cada jogada, um jogador pode somar o número atual a qualquer número natural de 1 a 9. Vence o jogador que chegar ao número 100.

9) Sobre uma mesa existem duas pilhas de moedas com 11 moedas cada. Em cada turno, um jogador pode retirar duas moedas de uma das pilhas ou retirar uma moeda de cada pilha. O jogador que não puder mais fazer movimentos perde.

10) Os números $1,2,3,...,1000$ estão escritos num quadro. Dois jogadores apagam alternadamente um dos números da lista até que restem apenas dois números. Se a soma desses números for divisível por 3, o primeiro jogador vence, caso contrário vence o segundo.

11) Uma pilha de 500 pedras é dada. Dois jogadores jogam o seguinte jogo: Em cada turno, o jogador pode retirar $1,2,4,8,...$ (qualquer potência de 2) pedras da pilha. O jogador que não puder mais jogar perde.

12) Sobre uma mesa existem duas pilhas (uma com 7 e outra com 15 pedras).
Em um jogo cada jogador pode, em sua vez, retirar qualquer quantidade de pedras de apenas uma pilha ou a mesma quantidade de ambas as pinhas. Quem não puder mais jogar perde.

13) Um jogo consiste em quebrar um tabuleiro 5×10 ao longo de suas linhas. Ganha o primeiro jogador que obter um quadrado 1×1. Quem tem a estratégia vencedora?

14) Este jogo começa com o número 1. Em cada jogada, um jogador pode multiplicar o número atual por qualquer número natural de 2 a 9. Vence o jogador que chegar primeiro a um número maior que 1000.

15) Uma peça é colocada em cada uma das extremidades de uma tira de quadrados 1×20. Dois jogadores se revezam movendo as peças uma na direção da outra por um ou dois quadrados. Uma peça não pode pular sobre outra. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

6.10 DICAS E RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

1) O segundo jogador vence. Inevitavelmente, após cada jogada, o número de linhas nas quais é possível colocar uma torre diminui de uma unidade. O mesmo ocorre com o número de colunas. Portanto, serão feitas 8 jogadas no total e consequentemente o segundo jogador fará a última jogada.

2) O primeiro jogador vence. Para isso, ele deve retirar uma pedra da pilha com 16 e, nas jogadas seguintes, deve jogar simetricamente em relação ao segundo jogador.

3) O primeiro jogador vence. Basta dividir o tabuleiro exatamente em duas partes, cada uma formada por 4 linhas e jogar simetricamente em relação a essa linha.

4) O primeiro jogador vence. Ele deve colocar um rei no centro do tabuleiro e depois jogar simetricamente em relação ao centro.

5) O primeiro jogador vence. Basta imaginar uma corda que separa os pontos em dois grupos de 9 e jogar simetricamente (a essa corda) em relação à jogada do segundo jogador.

6) O segundo jogador vence. Depois que o primeiro jogador fizer a sua jogada inicial, restarão 11 pétalas. Então o segundo jogador faz uma jogada dividindo as 11 pétalas em dois grupos com a mesma quantidade de pétalas. Em seguida, o primeiro jogador quebra a simetria deixada pelo segundo jogador. Na próxima jogada, o segundo jogador joga recuperando a simetria. E assim ele continua até a última jogada.

7) O primeiro jogador vence. Enumeremos as casas do tabuleiro do seguinte modo: cada casa será associada ao par (i, j) onde i representa o número da linha da casa, e j, o da coluna. Por exemplo, a casa A1 será associada ao par (1,1) e a casa H8 ao par (8,8). Em sua primeira jogada, o primeiro jogador deverá mover o rei para a casa (2,2) e em suas próximas jogadas sempre voltar para as casas que têm ambas as coordenadas pares. Como a última casa possui ambas as coordenadas pares, ele vencerá.

8) O segundo a jogar vence. Suponha que o primeiro a jogar jogue x ($x < 10$). O segundo jogador deverá somar $10 - x$ a x, obtendo resultado 10. Aí, o primeiro jogador soma y, obtendo $10 + y$. Em seguida o segundo jogador soma $10 - y$, obtendo 20. Se continuar desse modo, o segundo jogador "tomará posse" das dezenas exatas. Essas dezenas exatas são as posições vencedoras.

9) Construa um tabuleiro 11×11, enumere as suas colunas de 1 a 11 da esquerda para a direita e as suas linhas de 1 a 11 de baixo para cima. Desse modo, cada casa poderá ser associada ao par (i, j), no qual i representa o número de pedras da primeira pilha, e j, o da segunda. Observe que o movimento do jogo original é equivalente ao movimento do cavalo no tabuleiro. Termine o problema descobrindo as posições vencedoras. Pense de trás para frente.

10) O segundo jogador vence. Repare que pode-se dividir os 1000 números em 500 duplas de soma 1001. Após cada jogada do primeiro jogador, o segundo jogador deve retirar o número que somado ao retirado pelo primeiro jogador dê 1001. Fazendo sempre assim, no final restarão dois números de soma 1001, que não é um múltiplo de 3.

11) Pense nos múltiplos de 3. Nenhuma potência de 2 é múltipla de 3.

12) Use a ideia do tabuleiro que foi usada para resolver o problema 9.

13) O primeiro a jogar vence. Ele deve quebrar o tabuleiro ao meio em dois quadrados 5×5. A partir daí, a cada quebra do segundo jogador, o primeiro deverá fazer uma quebra idêntica (simétrica), porém no quadrado oposto. Fazendo sempre assim, o primeiro jogador será o último a jogar antes do surgimento do quadradinho unitário.

14) As posições vencedoras são os números de 56 a 111, ou de 4 a 6. Logo o primeiro jogador vence se obter qualquer dos números 4, 5 ou 6.

15) O segundo jogador vence. As posições vencedoras são aquelas nas quais o número de quadrados desocupados entre as peças é divisível por 3.

REFERÊNCIAS

BERLOQUIN, Pierre. **100 jogos numéricos.** Lisboa, Portugal: Gradiva, 1991.

BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEMTEC, 1998.

CORCHO, Adán J. & ECHAIZ, Fernando E. & OLIVEIRA, Krerley. **Olimpíadas de Matemática: uma introdução.** Disponível em: <http://www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/professores/krerley/livros/Livro_Olimpiada_Oficial.pdf>. Acesso em 12.08.2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 2.ed. São Paulo: Ática, 1991.

FOMIN, Dimitri & GENKIN, Sergei & ITENBERG, Ilia. **Mathematical Circles (Russian Experience)**. American Mathematical Society. Mathematical World, Volume 7, 1996.

FREIRE, Benedito Tadeu V. **Minicurso: Problema, Jogos e Quebra-cabeças.** Disponível em: <http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/treinamento_2004/notas_aula/nota_aula_02.pdf>. Acesso em 25.07.2012.

GARDNER, Martin. **Matemática, magia e mistério.** Lisboa, Portugal: Gradiva, 1991.

LI, Kin Y. **Math Problem Book I**. Hong Kong: Mathematical Society IMO Committee, 2001.

LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio, vol 1.** Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2004.

LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio, vol 2.** Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2004.

LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio, vol 3.** Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2004.

LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio, vol 4.** Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2004.

LIMA, Elon L. & PINTO, Paulo C. & WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. **Temas e Problemas.** Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2001.

LINHARES, Albino. **Problemas e Desafios.** Disponível em: <http://matematica.com.sapo.pt>. Acesso em 30.08.2012.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean proposition.** Michigan, USA: NCTM, 1940.

OBM: **Olimpíada Brasileira de Matemática.** <www.obm.org.br>

OBMEP: **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.** <www.obmep.org.br>

POLYA, George. **A arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 2006.

WAGNER, Eduardo. **Paridade.** Rio de Janeiro, RJ: Revista Eureka, v. 1, p. 8-10, 1998.