

Rodrigo Fernando Lugon Cornejo vom Marttens

*Perturbações bariônicas no modelo com
decaimento do vácuo*

Vitória-ES
Agosto, 2013

Rodrigo Fernando Lugon Cornejo vom Marttens

*Perturbações bariônicas no modelo com
decaimento do vácuo*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Winfried Zimdahl Ernst Wilhelm

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES

Vitória-ES

Agosto, 2013

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Winfried Zimdahl (Orientador)
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi
Universidade Federal do Espírito Santo -
CEUNES

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo

Às minhas avós Olga e Luz, que me incentivaram muito na escolha da física e não podem mais estar comigo nesta hora.

É muito importante que o homem tenha ideais. Sem eles, não se vai a parte alguma. No entanto, é irrelevante alcançá-los ou não. É apenas necessário mantê-los vivos e procurar atingi-los.

Sua Santidade, o Dalai-Lama.

Resumo

De acordo com o nosso entendimento do universo a matéria escura e a energia escura são as componentes dominantes na dinâmica do universo atual, enquanto os bárions e a radiação contribuem apenas com uma pequena fração menor que 5% da energia cósmica. Por outro lado, o estudo das inomogeneidades observadas na distribuição de matéria requer o conhecimento da dinâmica da perturbação dessa fração bariônica, uma vez que ela é observada diretamente. Não é claro que as inomogeneidades da matéria bariônica coincidem com as inomogeneidades da matéria escura. Em particular, se a matéria escura interage não-gravitacionalmente com energia escura, enquanto a matéria bariônica está em movimento geodésico, esta questão deve ser esclarecida. Neste trabalho, incorporamos ao modelo com decaimento do vácuo um fluido bariônico conservado separadamente, cuja quadrivelocidade, no nível perturbativo, difere da quadrivelocidade da matéria escura. A inclusão dos bárions parece não afetar o fundo homogêneo e isotrópico, mas no nível perturbativo parece amenizar a contribuição da matéria para o conteúdo total de energia. **Palavras-chaves:** cosmologia, energia escura, matéria bariônica, perturbações cosmológicas.

Abstract

According to our understanding of the universe dark matter and dark energy are the dominant components in the dynamics of the present universe, while the baryons and radiation contribute only a small fraction less than 5% of cosmic energy. On the other hand, the study of the observed inhomogeneities in the matter distribution requires knowledge of the dynamics of this baryonic fraction, since it is the distribution of this fraction which is directly observed. It is not clear that the baryonic matter inhomogeneities coincide with the inhomogeneities of dark matter. In particular, if the dark matter interacts nongravitationally with dark energy while the baryonic matter motion is geodesic, this issue should be clarified. In this work we incorporate into a decaying vacuum model a separately conserved baryon fluid, whose fourvelocity, on the perturbative level, differs from fourvelocity dark matter. The inclusion of baryons does not seem to affect the homogeneous and isotropic background, but on the perturbative level it seems to reduce the contribution of matter to the total energy budget.

Keywords: cosmology, dark energy, baryonic matter, cosmological perturbations.

Conteúdo

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 10
2	O cenário cosmológico padrão	p. 13
2.1	Uma teoria para a gravitação	p. 13
2.1.1	O princípio da equivalência	p. 16
2.1.2	Geometria do espaço-tempo	p. 16
2.1.3	Equações de campo	p. 18
2.2	O princípio cosmológico	p. 19
2.2.1	Lei de Hubble	p. 20
2.3	O conteúdo material do Universo	p. 21
2.3.1	Descrição de um fluido perfeito	p. 22
2.3.2	Matéria	p. 22
2.3.3	Radiação	p. 23
2.3.4	Energia escura	p. 23
2.4	Dinâmica de Friedmann	p. 24
2.5	O big bang e a inflação	p. 26
2.5.1	Motivações para a inflação	p. 26
2.5.2	O período inflacionário	p. 27
2.6	Limitações do modelo Λ CDM	p. 28
2.6.1	O problema da constante cosmológica	p. 29
2.6.2	O problema da coincidência cósmica	p. 29
3	O processo de formação das estruturas no universo	p. 30
3.1	O problema do calibre	p. 30
3.2	Transformações de calibre	p. 31

3.3	Perturbações da métrica e a escolha do calibre	p. 33
3.3.1	O calibre síncrono	p. 36
3.3.2	O calibre longitudinal	p. 36
3.3.3	O calibre comóvel	p. 37
3.4	Teoria das perturbações cosmológicas lineares	p. 38
4	O modelo com decaimento do vácuo	p. 44
4.1	Dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico	p. 45
4.2	Testes geométricos	p. 52
4.2.1	Distância própria	p. 54
4.2.2	Distância de diâmetro angular	p. 55
4.2.3	Distância de luminosidade	p. 55
4.2.4	Oscilações acústicas bariônicas	p. 56
4.2.5	Posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo	p. 58
4.2.6	Supernovas do tipo IA	p. 61
4.2.6.1	SDSS	p. 63
	MLCS2k2:	p. 63
	SALT II:	p. 64
4.2.6.2	Constitution	p. 66
	MLCS2k2:	p. 67
	SALT II:	p. 68
4.2.6.3	Union 2.1	p. 70
4.2.7	Análise conjunta do fundo homogêneo e isotrópico	p. 72
4.2.7.1	BAO+CMB+SNe IA SDSS	p. 73
	MLCS2k2:	p. 73
	SALT II	p. 73
4.2.7.2	BAO+CMB+SNe IA Constitution	p. 75
	MLCS2k2:	p. 75
	SALT II:	p. 77
4.2.7.3	BAO+CMB+SNe IA Union 2.1	p. 78
5	Formação de estruturas bariônicas num universo com decaimento do vácuo	p. 81

5.1	Perturbação da densidade total de energia	p. 83
5.2	Perturbação relativa da densidade de energia	p. 85
5.3	Perturbação da densidade bariônica de energia	p. 88
5.4	Espectro de potência da matéria	p. 89
5.5	Análise Conjunta total	p. 90
5.5.1	BAO+CMB+SNe IA SDSS+LSS	p. 91
	MLCS2k2:	p. 91
	SALT II:	p. 93
5.5.2	BAO+CMB+SNe IA Constitution+LSS	p. 93
	MLCS2k2:	p. 93
	SALT II:	p. 94
5.5.3	BAO+CMB+SNe IA Union 2.1+LSS	p. 96
6	Conclusões	p. 99
	Referências	p. 101

Lista de Tabelas

1	Componentes do tensor métrico escalar.	p. 35
2	Transformação de calibre para as quantidades presentes na perturbação da métrica escalar.	p. 35
3	Resultado da análise estatística com Supernovas do SDSS (MLCS2k2).	p. 65
4	Resultado da análise estatística com Supernovas do SDSS (SALT II). . .	p. 67
5	Resultado da análise estatística com Supernovas do Constitution (MLCS2k2).	p. 69
6	Resultado da análise estatística com Supernovas do Constitution (SALT II).	p. 70
7	Resultado da análise estatística com Supernovas do Union 2.1.	p. 72
8	Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA SDSS (MLCS2k2)	p. 74
9	Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)	p. 74
10	Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)	p. 77
11	Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)	p. 78
12	Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA Union 2.1	p. 80
13	Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2)+LSS	p. 93
14	Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)+LSS	p. 94
15	Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS	p. 94
16	Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS	p. 97
17	Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Union 2.1+LSS . . .	p. 98

Lista de Figuras

1	O cone de luz define a região espacial que pode estar causalmente conectada.	p. 15
2	Geometria do espaço-tempo	p. 25
3	Comparação entre a solução numérica da equação (4.21) com a solução analítica sem a contribuição da radiação (4.23) e com a solução aproximada (4.24) em termos do fator de escala.	p. 49
4	Figura esquerda: Desvios relativos entre a solução numérica da equação (4.21) e a soluções analítica, sem a radiação (4.23), em rosa, e a solução aproximada (4.24) em azul. Figura direita: Desvio relativo entre a solução numérica de (4.21) e a solução aproximada (4.24) em detalhe.	p. 49
5	Comparação entre a solução numérica da equação (4.21) com a solução analítica sem a contribuição da radiação (4.25) e com a solução aproximada (4.26).	p. 50
6	Figura esquerda: Desvios relativos entre a solução numérica da equação (4.21) e a soluções analítica, sem a radiação (4.25), em rosa, e a solução aproximada (4.26) em azul. Figura direita: Desvio relativo entre a solução numérica de (4.21) e a solução aproximada (4.26) em detalhe.	p. 51
7	Evolução da densidade de energia para cada uma das componentes do universo.	p. 52
8	Razão $\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda}$ para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM.	p. 53
9	Distância de diâmetro angular.	p. 55
10	Distância de luminosidade.	p. 55
11	Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para oscilações acústicas bariônicas.	p. 58
12	Espectro de potência da temperatura da radiação cósmica de fundo.	p. 60
13	Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para o desvio do primeiro pico da radiação cósmica de fundo.	p. 61
14	Dados do módulo de distância das Supernovas do SDSS calibradas com o filtro MLCS2k2 confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,429$ e $h = 0,634$	p. 63
15	Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do SDSS (MLCS2k2).	p. 64
16	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra SDSS (MLCS2k2). Figura direita: Valor preferido de h para amostra SDSS (MLCS2k2).	p. 64

17	Dados do módulo de distância das Supernovas do SDSS calibradas com o filtro SALT II confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,306$ e $h = 0,696$	p. 65
18	Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do SDSS (SALT II).	p. 66
19	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra SDSS (SALT II). Figura direita: Valor preferido de h para amostra SDSS (SALT II).	p. 66
20	Dados do módulo de distância das Supernovas do Constitution calibradas com o filtro MLCS2k2 confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,345$ e $h = 0,649$	p. 67
21	Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do Constitution (MLCS2k2).	p. 68
22	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra Constitution (MLCS2k2). Figura direita: Valor preferido de h para amostra Constitution (MLCS2k2).	p. 68
23	Dados do módulo de distância das Supernovas do Constitution calibradas com o filtro SALT II confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,293$ e $h = 0,647$	p. 69
24	Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do Constitution (SALT II).	p. 69
25	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra Constitution (SALT II). Figura direita: Valor preferido de h para amostra Constitution (SALT II).	p. 70
26	Dados do módulo de distância das Supernovas do Union 2.1 confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,265$ e $h = 0,6990$	p. 71
27	Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do Union 2.1.	p. 71
28	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra Union 2.1. Figura direita: Valor preferido de h para amostra Union 2.1.	p. 72
29	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (MLCS2k2)	p. 73
30	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2). Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2).	p. 74
31	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)	p. 75
32	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II). Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II).	p. 75
33	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)	p. 76

34	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2). Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2).	p. 76
35	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)	p. 77
36	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II). Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II).	p. 78
37	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Union 2.1.	p. 79
38	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Union 2.1. Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Union 2.1.	p. 79
39	Espectro de potência da matéria previsto para o modelo com decaimento do vácuo confrontado com os dados observacionais do SDSS DR7. . . .	p. 91
40	Função densidade de probabilidade para o parâmetro de densidade da matéria escura, cujo valor preferido é $\Omega_{M_0} = 0,347$	p. 91
41	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (MLCS2k2)+LSS	p. 92
42	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2)+LSS. Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2)+LSS.	p. 92
43	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)+LSS	p. 93
44	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II)+LSS. Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II)+LSS.	p. 94
45	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS	p. 95
46	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS. Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS.	p. 95
47	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS	p. 96
48	Figura esquerda: Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS. Figura direita: Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS.	p. 96
49	Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Union 2.1.+LSS	p. 97

50 **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe
IA Union 2.1+LSS. **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise
BAO+CMB+SNe IA Union 2.1+LSS. p. 98

1 *Introdução*

O céu sempre foi um objeto de fascínio para o ser humano, e com toda certeza foi um dos responsáveis por impulsionar seu desenvolvimento intelectual e cultural. Quando a própria ciência era algo ainda não estabelecido, pode-se dizer que o pensamento cosmológico, em contrapartida do pensamento cosmogônico vigente, foi a semente da filosofia grega. Neste contexto, várias escolas filosóficas se desenvolveram na tentativa de encontrar explicações baseadas em argumentos teóricos, muitas vezes abstratos, para a transição do caos ao cosmos (palavra grega que designa o "belo", o "ordenado").

Esse talvez tenha sido o gênese do que viria a ser coroado somente no século XVII por Descartes com o Método Científico. A partir daí, o estudo do Universo evoluiu até que a cosmologia, já com o status de ciência independente, pode ser compreendida como uma tentativa de descrevê-lo em grandes escalas, tentando compreender sua origem e especulando sobre o seu futuro.

Não me atrevo a dizer ao certo quanto mais próximo estamos hoje do objetivo inicial dos gregos, mas certamente a nossa compreensão do Universo evoluiu bastante neste período de tempo. Índícios observacionais [1] indicam que o Universo não é composto apenas de matéria ordinária, do tipo que compõe os objetos que podemos ver diretamente (matéria bariônica), mas além desta, que atualmente corresponde a aproximadamente 5% do conteúdo energético do Universo, deve haver uma componente de radiação, que dominou o Universo em seu estágio primordial mas hoje corresponde a uma fração ínfima da densidade de energia cósmica, e uma componente escura dominante, que contribui aproximadamente com 95% do conteúdo energético atual do Universo. Essa componente escura é dividida em matéria escura e energia escura, e a compreensão de sua natureza representa um dos maiores desafios da física na atualidade. Embora nunca tenha sido observada diretamente existem vários indícios de sua existência.

A matéria escura, responsável por 25% da energia total do Universo, é uma componente de matéria exótica que não interage eletromagneticamente, o que faz com que sua detecção só possa ser feita de forma indireta, através, por exemplo, da razão massa-luminosidade de sistemas cosmológicos ou lentes gravitacionais. Sua motivação se deu a partir de estudos de curvas de rotação de aglomerados de galáxias nos anos 30 [2], no qual se verificou que a velocidade de galáxias mais distantes do centro do aglomerado não diminuía conforme a previsão teórica. Este fato induz a ideia de que há mais massa no aglomerado do que se pode ver. Além disso, a matéria escura deve desempenhar um papel importante na formação de estruturas no Universo.

Já a energia escura, que domina o conteúdo energético com aproximadamente 70% da energia cósmica, seria responsável por conferir ao Universo uma expansão acelerada. Embora já se soubesse que o Universo se encontrava em expansão [3], ainda no final do

século XX, acreditava-se que essa expansão deveria ser desacelerada devido à natureza atrativa da gravidade.

A verificação de que o Universo se encontra numa fase de expansão acelerada foi feita em 1998, através de estudos da evolução temporal da luminosidade de supernovas. Estes estudos [4, 5], que renderam o prêmio Nobel de física a Adam Riess, Brian Schmidt e Saul Perlmutter, indicavam uma luminosidade menor do que era de se esperar para um Universo em processo de desaceleração. Tal resultado pode ser explicado pelo fato de que esses objetos se afastariam cada vez mais rápido de nós.

No modelo padrão, a energia escura é descrita pela constante cosmológica, o que é análogo a um fluido com equação de estado do tipo vácuo e densidade de energia constante. Essa associação da energia com o vácuo parece atender bem aos dados observacionais, porém está em profundo desacordo com a previsão teórica. Esta inconsistência é conhecida como o problema da constante cosmológica [6].

Por isso, muitos modelos alternativos de energia escura são propostos na literatura com o intuito de indicar algum caminho rumo à compreensão da natureza da energia escura. No presente trabalho analisamos um modelo de energia escura proposto por *Borges e Carneiro* [7] no qual a energia escura, ainda descrita por uma equação de estado do tipo vácuo, possui densidade de energia que decai linearmente com o parâmetro de Hubble. Esse modelo foi amplamente estudado na literatura, desde o fundo homogêneo e isotrópico [8, 9, 10, 11] até o nível perturbativo [12, 13, 14] e parece reproduzir resultados que estão em acordo entre si [15, 16].

Neste trabalho, o modelo com decaimento do vácuo é revisto com a inclusão de um fluido bariônico. Sabe-se que este modelo induz uma interação que envolve a energia escura já no fundo homogêneo e isotrópico, e então, com um *ansatz* de que essa interação ocorra somente no setor escuro do universo é possível distinguir a matéria escura de uma componente bariônica que se conserva. Neste cenário, a inclusão dos bárions ao modelo é analisada através dos mesmos procedimentos já presentes na literatura. Testes com oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e supernovas do tipo IA indicam que o fundo homogêneo e isotrópico não é drasticamente afetado pela nova componente, porém a análise perturbativa do modelo, alvo principal deste texto, apresenta algumas sutilezas.

Esta dissertação de mestrado está estruturada da seguinte forma: no segundo capítulo será apresentada uma breve descrição da cosmologia atual: a teoria da geral da relatividade e seus principais aspectos observacionais. O terceiro capítulo, tendo em vista o objetivo principal do trabalho, é reservado para apresentar de forma resumida o formalismo das perturbações cosmológicas escalares, que dão origem às estruturas em largas escalas no Universo.

O modelo com decaimento do vácuo, já com a componente bariônica, é então apresentado em detalhes no quarto capítulo. Aproveitando a análise do modelo, os testes com oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e supernovas do tipo IA são utilizados para avaliar sua compatibilidade com os dados observacionais no fundo homogêneo e isotrópico. Visando um paralelo com a literatura os testes com Supernovas são realizados utilizando três amostras diferentes: SDSS, Constitution e Union 2.1, que reproduzem resultados muito próximos ao caso em que a componente bariônica é omitida.

No quinto capítulo o formalismo das perturbações cosmológicas é aplicado ao modelo para a determinação do espectro de potência da matéria bariônica. Embora no nível perturbativo a presença dos bárions parece aliviar a contribuição da matéria, os resultados contidos na literatura são de alguma forma reproduzidos. Neste mesmo capítulo todos os testes são combinados para uma análise final.

Por fim, o último capítulo é reservado para considerações finais.

2 *O cenário cosmológico padrão*

Como já foi mencionado, a cosmologia procura descrever o Universo em largas escalas. Neste limite, observa-se que os sistemas físicos costumam ser eletricamente neutros, e conseqüentemente a interação gravitacional deve preponderar. Dessa forma, a base da cosmologia reside em uma teoria da gravidade satisfatória.

A interação gravitacional foi a primeira das interações fundamentais a possuir uma formulação matematicamente consistente, no entanto ainda não foi encontrado uma forma muito clara de descrever harmonicamente sua transição do nível clássico para o nível quântico. Em largas escalas a teoria da relatividade geral, proposta por Albert Einstein em 1915, consegue reproduzir muito bem os efeitos gravitacionais.

Além da teoria da relatividade, para que demais aspectos observados possam ser explicados, devem ser incorporados alguns elementos para descrever o Universo. Dentre esses aspectos estão uma singularidade inicial, denominada Big Bang, uma fase inicial de inflação e as já citadas matéria escura (descrita por um fluido de poeira) e energia escura (descrita pela constante cosmológica).

Essa reunião compõe o que denomina-se modelo padrão da cosmologia, ou modelo Λ CDM¹. O modelo Λ CDM possui relativo sucesso observacional, porém conceitualmente algumas questões ainda carecem de resposta. Alguns exemplos de questões que o modelo não é capaz de explicar são: a descrição da natureza da componente escura, a descrição da gravidade em tempos próximos à singularidade inicial e o problema da coincidência cósmica.

Neste capítulo abordaremos alguns desses aspectos do modelo Λ CDM que serão importantes no decorrer do trabalho.

2.1 Uma teoria para a gravitação

Na antiguidade, acreditava-se que a dinâmica celeste era algo superior à dinâmica terrena. A cosmologia aristotélica por exemplo, promovia uma hierarquização do cosmos: havia o mundo supralunar, constituído da Lua, dos planetas (só eram conhecidos Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno), do Sol e das estrelas "fixas" na esfera celeste; e o mundo sublunar, que compreende o nosso planeta. O primeiro era constituído da quintessência, o éter, substância transparente, imperecível e imutável, que conferia esse caráter divino ao mundo supralunar. Já a Terra, constituída dos elementos comuns possuía caráter

¹Este nome faz referência à constante cosmológica Λ e à matéria escura fria, em inglês *Cold Dark Matter*

perecível e mutável.

Pode-se dizer que essa visão foi definitivamente descartada a partir de 1687, quando Sir Isaac Newton publicou a sua obra prima "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Em seu livro, além definir o conceito físico de força e formular toda uma dinâmica consistente, Newton introduz a ideia de força gravitacional. Essa força gravitacional seria resultado de uma interação entre todos os corpos que possuem massa. Matematicamente, a força que um objeto 1, de massa M_1 , realiza sobre um objeto 2, de massa M_2 , devido a ação gravitacional é

$$\vec{F}_{12} = \frac{GM_1M_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12}. \quad (2.1)$$

G é uma constante gravitacional, cujo valor só foi obtido experimentalmente quase cem anos depois, em 1789 pelo descobridor do gás hidrogênio Henry Cavendish. Atualmente seu valor é estimado em $6,67384 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. O vetor \vec{r}_{12} deve possuir a direção que une o centro de massa dos objetos e seu sentido leva do objeto 2 para o objeto 1, uma vez que a força gravitacional é estritamente atrativa.

A mecânica newtoniana obteve êxito em quase todos os problemas a que foi submetida, do movimento dos corpos na superfície da Terra até as órbitas dos planetas (com a exceção da órbita de Mercúrio!), e permaneceu até o início do século XX como a descrição correta para a dinâmica dos corpos, sendo utilizada ainda hoje em muitas ocasiões. De fato esse sucesso se deve ao fato de que não há muitas experiências, do ponto de vista prático comum, que atingem os limites em que a teoria não pode ser aplicada (velocidades próximas à velocidade da luz ou ação de campos gravitacionais muito intensos).

A teoria de Newton se baseia em noções de espaço e tempo absolutos e independentes, o que implica na existência de referenciais privilegiados, ditos inerciais, nos quais todo observador experimentaria as leis de Newton. Esses referenciais devem possuir movimento relativo entre si com velocidade constante e são relacionados segundo as transformações de Galileu.

O grande problema da teoria newtoniana é a sua inconsistência com o eletromagnetismo. Segundo a teoria de James Clerk Maxwell, a radiação eletromagnética (a luz, por exemplo) pode ser descrita por uma onda que se propaga com velocidade constante. No entanto a equação da onda não é invariante sob transformações de Galileu, ou seja, dois observadores em referenciais inerciais seriam capazes de experimentar as leis de Newton da mesma forma, porém deveriam observar fenômenos eletromagnéticos distintos.

Dessa forma Einstein propôs uma mecânica alternativa, que mantém invariante o eletromagnetismo em referenciais inerciais: a teoria especial da relatividade. Essa teoria é construída a partir de dois axiomas

(i) As leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial.

(ii) A velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial.

Claramente o segundo axioma faz com que o eletromagnetismo se "adapte" ao primeiro. Essa ideia de que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial provocou mudanças drásticas na noção de espaço e tempo. Basicamente, para que todos observadores em referenciais inerciais observassem a luz com a mesma velocidade seria necessário que eles medissem distâncias e intervalos de tempo de forma diferentes.

Dessa forma a noção de referencial inercial se mantém a mesma, no entanto a relação entre eles agora é dada pelas transformações de Lorentz. Segundo as transformações de Lorentz as noções de espaço e tempo, que agora são conectadas de maneira intrínseca dando origem ao termo espaço-tempo, são de fato diferentes para observadores inerciais distintos. Na prática, um observador em repouso em um referencial inercial vê um relógio em repouso num outro referencial inercial, isto é, em movimento relativo com velocidade constante em relação ao observador, funcionando mais lentamente (dilatação do tempo) e com um menor comprimento (contração do espaço). No entanto, tais efeitos são potencializados quando a velocidade relativa entre eles se aproxima da velocidade da luz, no limite de baixas velocidade a teoria newtoniana é recuperada (as transformações de Lorentz se reduzem às transformações de Galileu).

Além disso, ainda há dois aspectos importantíssimos que decorrem das transformações de Lorentz: O primeiro é a equivalência entre massa e energia, que também devem depender do observador que faz a medição, e da origem à relação

$$E = mc^2. \quad (2.2)$$

E o segundo é a impossibilidade de transmissão de informação com uma velocidade superior à velocidade da luz. Esse fato pode ser expresso através do cone de luz, que fornece a região do espaço-tempo que possui contato causal com um determinado evento. O cone de luz é mostrado na figura 1.



Figura 1: O cone de luz define a região espacial que pode estar causalmente conectada.

Este último aspecto confirma que a teoria do eletromagnetismo já possui uma estrutura relativística, no entanto descarta a descrição newtoniana para a gravitação, uma vez que, segundo a equação (2.1), uma variação na massa de qualquer um dos corpos, ou na distância entre eles deve provocar uma variação na força gravitacional que será sentida instantaneamente. Surge então a necessidade de uma nova teoria para a gravitação, que deu origem a teoria geral da relatividade.

2.1.1 O princípio da equivalência

Macroscopicamente a massa ou a carga elétrica são graus de liberdade intrínsecos a sistemas físicos, no entanto, segundo a mecânica newtoniana, a resposta de determinado objeto a uma força é proporcional somente à sua massa, tal como a força gravitacional. Esse fato já intrigava Newton, que admitia a possibilidade da existência de uma massa gravitacional, responsável pela resposta do objeto às interações gravitacionais, e a massa inercial, responsável pela resposta do objeto à força resultante ao qual está sujeito. Ainda hoje não foi detectada nenhuma diferença entre as duas.

Este fato implica que todos os corpos devem experimentar de forma idêntica a queda livre, e então, um observador sob a ação de um campo gravitacional não seria capaz de distinguir seu referencial de um referencial inercial, pois todos os corpos a sua volta cairiam junto com ele (princípio da equivalência fraco). Esta noção pode ser estendida para qualquer fenômeno físico, de forma que nenhum experimento local é capaz de distinguir um movimento de queda livre sem rotação de um movimento uniforme na ausência de gravidade (princípio da equivalência forte).

O princípio da equivalência abre caminho para uma identificação da gravitação com a geometria do espaço-tempo, na qual sua curvatura seria responsável pela queda livre dos corpos. Dessa forma, todo ponto do espaço-tempo pode ser localmente identificado com o espaço de Minkowski, o que faz com que a teoria seja invariante sob transformações gerais de coordenadas.

2.1.2 Geometria do espaço-tempo

Para descrever a gravitação através da curvatura do espaço-tempo alguns elementos de geometria diferencial devem ser introduzidos. A noção de espaço curvo é abrigada no contexto das variedades diferenciáveis, de forma que o espaço-tempo é descrito por uma variedade diferenciável quadridimensional. De forma geral, uma variedade diferenciável n -dimensional \mathcal{N} é um conjunto que pode ser mapeado em intervalos abertos ao \mathbb{R}^n . A diferenciabilidade da variedade confere a ela a possibilidade de descrever trajetórias parametrizadas através de um campo vetorial tangente

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\eta}, \quad (2.3)$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro da curva. Além disso, a variedade deve conter a noção de distâncias, de forma que a norma de um vetor é definida através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que descreve explicitamente a geometria do espaço-tempo.

$$w^\mu w_\mu = g_{\mu\nu} w^\nu w^\mu. \quad (2.4)$$

Em geral, a curvatura do espaço-tempo faz com que um vetor qualquer ao realizar um transporte paralelo seja modificado, a variação de um vetor arbitrário w^μ é dada por

$$\delta w^\mu = \delta x^\rho \delta x^\sigma \left(\Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\mu - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\gamma \Gamma_{\gamma\rho}^\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\gamma \Gamma_{\gamma\sigma}^\mu \right) w^\mu. \quad (2.5)$$

O termo entre parênteses é definido como tensor de Riemann $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$. Esse tensor descreve

a curvatura da variedade, de modo que se todas as suas componentes forem nulas temos uma variedade plana, onde um vetor é mantido inalterado sob transportes paralelos. Os termos $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ são denominados símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} (g_{\nu\sigma,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}). \quad (2.6)$$

O tensor de Riemann deve ainda satisfazer as identidades de Bianchi

$$R_{\nu\rho\sigma,\gamma}^{\mu} + R_{\nu\sigma\gamma,\rho}^{\mu} + R_{\nu\gamma\rho,\sigma}^{\mu} = 0. \quad (2.7)$$

Existe uma classe de curvas que, mesmo com efeitos de curvatura, preservam a direção do seu vetor tangente sob transportes paralelos. Cada trajetória desta classe é denominada geodésica, elas definem o caminho dos objetos em queda livre no espaço-tempo, e estão relacionadas com a menor distância entre dois pontos. Matematicamente, as geodésicas são definidas como curvas que possuem aceleração nula

$$v^{\mu}v_{;\mu}^{\nu} = 0, \quad (2.8)$$

o ponto e vírgula indicam a derivada covariante, definida como

$$T_{\nu_1 \dots \nu_n; \rho}^{\mu_1 \dots \mu_m} = T_{\nu_1 \dots \nu_n, \rho}^{\mu_1 \dots \mu_m} + \sum_i \Gamma_{\rho\gamma}^{\mu_i} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m \dots \gamma \dots \mu_m} - \sum_i \Gamma_{\rho\nu_i}^{\gamma} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m \dots \gamma \dots \mu_m}. \quad (2.9)$$

Utilizando a relação para o vetor tangente (2.3) e a definição (2.9), a equação (2.8) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} = 0. \quad (2.10)$$

Esse resultado é conhecido como equação da geodésica. Nele fica claro que além da segunda derivada da posição há um termo de curvatura que contribui para a definição da trajetória de uma partícula, dessa forma a trajetória de partículas sem aceleração não é mais necessariamente uma reta.

A partir do tensor de Riemann pode-se definir sua contração do primeiro com o terceiro índice, denominado tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}, \quad (2.11)$$

e o traço deste novo tensor, como o escalar de curvatura de Ricci

$$R = R_{\mu}^{\mu} = -g^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho}^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}) - (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} - g^{\mu\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu})_{;\nu}. \quad (2.12)$$

Esses dois objetos serão importantes na descrição do movimento dos corpos sob ação do campo gravitacional. Este é o arcabouço matemático onde deve ser desenvolvida a teoria geral da relatividade.

2.1.3 Equações de campo

Uma consequência importante da relatividade geral é que a geometria interfere no movimento de queda dos corpos, que por sua vez, devido à sua massa, interferem na geometria do espaço-tempo. As equações de campo devem fornecer exatamente como deve acontecer essa relação. A interação gravitacional é descrita por uma ação do tipo

$$S = \int (\mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_{mat}) d^4x. \quad (2.13)$$

Inicialmente, vamos nos concentrar no primeiro termo da ação. A lagrangiana \mathcal{L}_{grav} descreve a interação gravitacional no vácuo. Esse termo deve conter aspectos puramente geométricos que influenciam na dinâmica dos corpos. A ação do campo gravitacional no vácuo é dada pela ação de Einstein-Hilbert

$$S_{grav} = \int R\sqrt{-g}d^4x. \quad (2.14)$$

As equações do campo gravitacional no vácuo podem ser determinadas através do cálculo das variações [17], que implica em tomar o valor extremo da ação (2.14)

$$\delta S_{grav} = \delta \int R\sqrt{-g}d^4x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (2.15)$$

O segundo termo na lagrangiana (2.13) se refere à distribuição de matéria no espaço-tempo. A distribuição de matéria pode ser descrita pelo tensor de energia momento de um fluido $T_{\mu\nu}$. Em geral, na cosmologia é comum utilizar o tensor de energia momento para um fluido perfeito, que possui a seguinte forma [18]

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} + ph_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Na equação acima ρ e p são respectivamente a densidade e a pressão do fluido perfeito. O tensor $h_{\mu\nu}$ é um tensor de projeção ortogonal à quadrivelocidade, definido como

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu. \quad (2.17)$$

Sabendo que a teoria relativística deve retomar o caso newtoniano para baixas velocidades e campos gravitacionais fracos, as equações de campo são definidas como²

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

A partir desenvolvimento das identidades de Bianchi (2.7) conclui-se que a derivada covariante das equações do campo gravitacional no vácuo é identicamente nula. Isto

²Considera-se a velocidade da luz igual a unidade ($c^2 = 1$).

implica que a distribuição de matéria deve ser conservada³

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)_{;\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\mu\nu;\nu} = 0. \quad (2.19)$$

Dessa forma, é evidente que a inclusão de um termo constante multiplicado pela métrica no termo geométrico não afeta a estrutura das equações de campo, no sentido de que as identidades de Bianchi ainda serão satisfeitas

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Essa constante cosmológica foi introduzida originalmente para descrever um Universo estático e após a constatação de que ele se expandia foi descartada. Atualmente, sabendo que o Universo se encontra numa fase de expansão acelerada, a constante cosmológica foi resgatada e se apresenta como uma das possibilidades de descrever a energia escura.

2.2 O princípio cosmológico

É bastante desejável que teorias físicas não possuam observadores privilegiados. No caso do estudo do Universo isso sempre foi uma premissa, ainda que não houvesse nenhum motivo para tal. Este fato pode ser postulado através do princípio cosmológico: em largas escalas o Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico.

Atualmente existem motivações fortes para se acreditar que ao menos o Universo visível é homogêneo e isotrópico. Os dados da radiação cósmica de fundo, detectada nos anos 60 [19], que fornecem uma "foto" do Universo quando ele tinha apenas 380.000 anos, indicam que nesta época o desvio da isotropia do universo era da ordem de 10^{-5} [20]. Além disso a nucleossíntese primordial e a distribuição de estruturas no universo também corroboram para o princípio cosmológico.

Matematicamente, essa homogeneidade e isotropia do Universo em largas escalas é descrita por um espaço-tempo que possui folheações espaciais a tempo constante com simetria máxima. No cenário da geometria diferencial as simetrias são descritas por vetores de Killing, que são vetores que anulam a derivada de Lie do tensor métrico.

Existe um argumento matemático, baseado na existência do número máximo de vetores de Killing para seção espacial do espaço-tempo, de se obter um tensor métrico compatível com o princípio cosmológico [21]. O resultado dessa análise é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2] \right\}. \quad (2.21)$$

O termo K descreve a curvatura das seções espaciais, e para que a condição de simetria máxima seja satisfeita deve ser constante.

O módulo dessa constante não possui significado físico, uma vez que sempre é possível

³De fato as leis de conservação podem ser obtidas desta condição.

absorver seu valor através de uma redefinição da coordenada radial. O que de fato é importante é se essa constante de curvatura é positiva, negativa ou então se é nula. No primeiro caso (costuma-se utilizar o valor 1) a métrica espacial reproduz uma esfera, no segundo (costuma-se utilizar o valor -1) um hiperbolóide e no último um plano.

2.2.1 Lei de Hubble

Tendo em mãos a geometria do espaço-tempo, resta ainda analisar a sua dinâmica. Durante muito tempo acreditou-se que o Universo era um sistema físico estático (foi essa inclusive a justificativa original para a introdução da constante cosmológica), até que nos anos 20 Edwin Hubble detectou um afastamento de nebulosas [3], que indicavam que o universo estava se expandindo. Ainda nesse tempo, devido a natureza atrativa da gravidade acreditava-se que o universo estava desacelerando, e como já mencionado, essa hipótese foi descartada em 1998 e uma componente exótica de energia escura com pressão negativa foi introduzida para descrever uma expansão acelerada.

Toda a análise do Universo feita através de observação (inclusive as descobertas citadas no parágrafo anterior), devem ser feitas através de radiação eletromagnética que chega até a Terra. Neste caso, para analisar a propagação da radiação eletromagnética no meio cósmico deve-se recorrer ao primeiro par das equações de Maxwell no vácuo

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}F_{\nu\rho} = 0, \quad (2.22)$$

onde o tensor eletromagnético é escrito em termos do potencial vetor A^{μ}

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}. \quad (2.23)$$

Para um potencial vetor com uma amplitude \hat{A}^{μ} multiplicada por um termo que oscila espacialmente é possível obter, através de uma aproximação WKB, a condição de transversalidade $\hat{A}^{\mu}k_{\nu} = 0$, onde k^{μ} é o vetor de onda dessa onda eletromagnética, que define sua direção de propagação.

Para o Universo homogêneo e isotrópico, este vetor de onda, que deve satisfazer as operações de levantar e abaixar índices com a métrica de FLRW, deve possuir uma componente temporal que depende do fator de escala

$$k_{\mu} = \left(-\frac{k_0}{a}, \vec{k} \right). \quad (2.24)$$

Este vetor de onda deve gerar uma família de trajetórias geodésicas na seção espacial $k^i = \frac{dx^i}{d\eta}$, e deve ser um vetor do tipo luz ($k^{\mu}k_{\mu} = 0$).

Para uma fonte emissora de radiação com quadrivelocidade u_{μ} , a frequência das ondas eletromagnéticas emitidas é dada por $\nu = k^{\mu}u_{\mu}$. No caso em que essa fonte se encontra em repouso no Universo homogêneo e isotrópico de FLRW, ela não deve observar velocidades espaciais, de forma que sua quadrivelocidade deve ser $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$. Pode-se relacionar a frequência ν de uma radiação emitida por essa fonte com a frequência da mesma onda

que é recebida pelo observador num tempo atual ν_0 ⁴

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}. \quad (2.25)$$

Do ponto de vista observacional, é conveniente definir o parâmetro de desvio para o vermelho

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}, \quad (2.26)$$

que se relaciona com o fator de escala segundo

$$a = \frac{1}{z + 1}. \quad (2.27)$$

Para uma radiação observada no tempo atual t_0 , que foi emitida em um instante de tempo t , próximo o suficiente para permitir uma expansão do fator de escala através de uma série de Taylor com aproximação na primeira ordem

$$\frac{1}{a} \approx 1 + (t - t_0) H_0 \quad \Rightarrow \quad z \approx (t - t_0) H_0, \quad (2.28)$$

onde $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ é denominado parâmetro de Hubble, e H_0 indica seu valor atual.

Para um intervalo de tempo pequeno o termo $(t - t_0)$ coincide com a distância D percorrida pela onda eletromagnética, e então obtemos uma relação de proporcionalidade entre o parâmetro de desvio para o vermelho e a distância entre o observador e a fonte de ondas eletromagnéticas

$$z \approx DH_0. \quad (2.29)$$

Este resultado é conhecido como lei de Hubble, e foi a primeira constatação da expansão do universo.

É conveniente, do ponto de vista prático, descrever o parâmetro de Hubble como $H = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. As observações indicam que o valor atual de h é da ordem de $0,69 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [1].

2.3 O conteúdo material do Universo

O princípio cosmológico permite que o Universo seja descrito como um fluido perfeito, e as identidades de Bianchi garantem que esse fluido seja conservativo, no sentido de que a derivada covariante do seu tensor de energia momento seja nula. No entanto o conteúdo energético do Universo parece não ser oriundo de apenas uma forma de matéria. O modelo padrão descreve o universo composto por três componentes de natureza distintas: radiação, matéria e energia escura. Cada um desses integrantes também é descrito por um fluido perfeito conservativo⁵.

⁴Na cosmologia o índice 0 costuma fazer referência ao tempo atual.

⁵A hipótese de que cada componente seja conservativa é motivada pelo fato de que não se observa nenhuma interação em larga escala que justifique o contrário. No caso do setor escuro essa hipótese pode

Nesta seção será apresentada uma breve descrição da dinâmica de um fluido perfeito tal como sua aplicação para cada componente individual do universo.

2.3.1 Descrição de um fluido perfeito

Já se sabe que um fluido perfeito é caracterizado por um tensor de energia momento do tipo (2.16). No entanto a dinâmica de cada um dos fluidos é individualizada por uma equação de estado que relaciona a pressão do fluido com a sua densidade $p = p(\rho)$. Na análise a seguir será considerada uma equação de estado simples que será suficiente para descrever os fluidos cósmicos de interesse

$$p = \omega\rho. \quad (2.30)$$

onde ω é um parâmetro de estado constante.

Um aspecto importante para descrever a dinâmica de um fluido perfeito são as leis de conservação. O balanço da energia para um fluido perfeito pode ser obtido através da projeção da derivada covariante do tensor de energia momento na quadrivelocidade u_μ

$$\begin{aligned} -u_\mu T_{;\nu}^{\mu\nu} &= 0 \\ \rho_{;\nu} u^\nu + \rho u_{;\nu}^\nu - p_{;\nu} u^\nu + p_{,\nu} u^\nu + p u_{;\nu}^\nu &= 0. \end{aligned}$$

Para o fundo homogêneo e isotrópico é conveniente definir o escalar de expansão $\Theta \equiv u_{;\nu}^\nu = 3\frac{\dot{a}}{a}$, e então

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) = 0. \quad (2.31)$$

onde foi usado que $\dot{\rho} = \rho_{;\nu} u^\nu$.

Outra lei de conservação importante é o balanço do momento, que por sua vez pode ser obtido através da projeção da derivada covariante no tensor (2.17)

$$\begin{aligned} h_{\alpha\mu} T_{;\nu}^{\mu\nu} &= (g_{\alpha\mu} + u_\alpha u_\mu) [\rho u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu)]_{;\nu} = 0 \\ (\rho + p) \dot{u}_\alpha + -h_{\alpha}^\nu p_{,\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Essas leis de conservação podem ser utilizadas para determinar a dinâmica dos fluidos perfeitos com a especificação da equação de estado. Essa análise será feita agora para cada um dos fluidos que compõem o Universo.

2.3.2 Matéria

No contexto do modelo Λ CDM a componente de matéria pode ainda ser dividida em duas: a matéria bariônica e a matéria escura fria (*Cold Dark Matter*). No entanto dinamicamente essas componentes podem ser descritas de forma conjunta, uma vez que possuem mesmo parâmetro de estado $\omega_m = 0^6$.

ser contestada, pois não há observações diretas das componentes. Este fato será utilizado posteriormente para distinguir a matéria escura da matéria bariônica.

⁶A descrição mais precisa para a equação de estado seria $\omega_m \ll 1$.

A matéria bariônica, é matéria ordinária, que constitui os objetos que interagem eletromagneticamente, enquanto a matéria escura é uma matéria de natureza desconhecida que foi introduzida para explicar fenômenos locais. A origem do seu nome reside justamente no fato dela não interagir eletromagneticamente.

Além disso, acredita-se que as perturbações da matéria escura potencializaram as perturbações de matéria bariônica no desacoplamento, o que possibilitou que as estruturas bariônicas se formassem a tempo tal como observamos hoje.

Até a descoberta da expansão acelerada do Universo acreditava-se que ele era dominado por matéria (modelo de Einstein-de Sitter). Neste caso, a evolução temporal para a matéria no universo pode ser obtida através da aplicação de sua equação de estado na equação (2.31)

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_m = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_{m_0}a^{-3}. \quad (2.33)$$

E então, a dependência temporal do fator de escala pode ser determinada com a equação de Friedmann (2.41)

$$a \propto t^{2/3}. \quad (2.34)$$

Pode se verificar que neste caso o Universo se encontraria em uma fase de expansão, uma vez que $\dot{a} \propto t^{-1/3}$ é positivo, porém essa expansão seria desacelerada pois $\ddot{a} \propto -t^{-4/3}$ é negativo.

2.3.3 Radiação

A radiação, ou matéria relativística, é descrita por um fluido cujo parâmetro de estado é $\omega_r = \frac{1}{3}$, Sua evolução temporal também pode ser obtida a partir da aplicação direta da equação de estado na equação (2.31)

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_r = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_{r_0}a^{-4}. \quad (2.35)$$

A partir deste resultado percebe-se que a componente de radiação dominou o Universo em tempos remotos, porém, uma vez que seu decaimento é mais acentuado, hoje corresponde a uma porção pequena do conteúdo cósmico. Para o Universo dominado por radiação, a dependência temporal do fator de escala também pode ser determinada com a equação de Friedmann

$$a \propto t^{1/2}. \quad (2.36)$$

Neste caso é fácil verificar que a expansão também se daria de forma desacelerada.

2.3.4 Energia escura

A energia escura, responsável pela expansão acelerada do universo, é descrita no modelo padrão através da constante cosmológica Λ . Dinamicamente, pode-se absorver a constante cosmológica na equação de Friedmann (2.41) definindo para a energia escura

uma densidade de energia constante igual a

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_{\Lambda_0}. \quad (2.37)$$

com um parâmetro de estado $\omega_\Lambda = -1$. Essa equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ é a equação de estado do vácuo, e por isso há uma tentativa de associar a energia escura ao vácuo. No entanto, no caso da constante cosmológica, a densidade de energia observada destoa muito das previsões da teoria quântica de campos.

Seguindo o procedimento feito nos dois casos anteriores, o balanço da energia para um Universo preenchido apenas por energia escura (modelo de de-Sitter) reproduz um fluido com densidade de energia constante, que está de acordo com (2.37)

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_\Lambda = \text{const.} \quad (2.38)$$

Neste caso, a equação de Friedmann resulta numa dependência exponencial do fator de escala com o tempo

$$3H^2 = \Lambda \frac{\dot{a}}{a} \quad \Rightarrow \quad a(t) \propto e^{Ht}. \quad (2.39)$$

Neste caso a expansão é acelerada, uma vez que \dot{a} e \ddot{a} são todos positivos.

2.4 Dinâmica de Friedmann

Para descrever a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico em expansão deve ser retomada a equação de Einstein com a constante cosmológica (2.20), na qual o tensor energia momento é dado por (2.16) e o tensor métrico é dado pela métrica de FLRW (2.21).

O tensor de energia momento do Universo como um todo é dado pela soma dos tensores de energia momento de cada componente descrita na seção anterior

$$T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_r^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho = \rho_m + \rho_r \\ p = p_r \end{cases}. \quad (2.40)$$

Uma vez que a homogeneidade e isotropia do universo garantem que as quadrivelocidades para cada componente sejam as mesmas, de fato a soma dos tensores de energia momento mantém a forma de um fluido perfeito.

A componente temporal das equações de Einstein resulta na relação que é conhecida como equação de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.41)$$

Já espacialmente as equações de Einstein resultam na equação para a aceleração do Universo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.42)$$

A partir deste resultado fica claro que para a descrição de uma fase de expansão acelerada para o Universo é necessário um fluido com pressão negativa, ou então uma constante

cosmológica diferente de zero.

Combinando a derivada temporal da equação de Friedmann com a equação (2.42) obtém-se o seguinte resultado para a derivada temporal do parâmetro de Hubble

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3H}\dot{\rho} + \frac{K}{a^2}. \quad (2.43)$$

Para cada componente do universo é conveniente definir a quantidade Ω_A , denominado parâmetro de densidade⁷, que é definido como a razão da densidade de energia de uma determinada componente com uma densidade crítica $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_m \quad , \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_r \quad , \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad , \quad \Omega_K = -\frac{K}{H^2}. \quad (2.44)$$

Com essas definições a equação de Friedmann se escreve

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \quad (2.45)$$

Fica claro que o significado físico do parâmetro de densidade de uma determinada componente representa a sua fração na composição do universo. A partir da equação (2.45) pode-se ilustrar como a geometria do espaço-tempo está relacionada com a distribuição de matéria no universo. Reunindo todo o conteúdo material em um único parâmetro de densidade $\Omega_t = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$, é possível relacionar a distribuição da matéria com a curvatura do espaço-tempo

$$\Omega_t - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (2.46)$$

Dessa forma a geometria do espaço-tempo pode assumir três formas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Omega_t > 1 & \Rightarrow \text{Espaço-tempo fechado (esférico)} \\ \Omega_t < 1 & \Rightarrow \text{Espaço-tempo aberto (hiperbólico)} \\ \Omega_t = 1 & \Rightarrow \text{Espaço-tempo plano} \end{array} \right. .$$

A figura 2 ilustra as três possibilidades descritas.

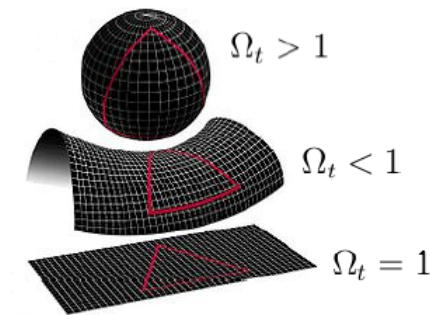


Figura 2: Geometria do espaço-tempo

Recentemente, estudos realizados pela Agência Espacial Europeia, feitos com o teles-

⁷O índice A indica a componente em questão ($A = m, r, \Lambda$ ou K). O índice Λ está relacionado com a constante cosmológica e o índice K está relacionado com a curvatura.

cópio Planck, divulgaram valores para os parâmetro de densidade atual de cada componente [1]. Segundo esse estudo, a componente de matéria Ω_{m_0} corresponde a aproximadamente 31,35% do universo, onde 4,9% corresponde ao percentual de matéria bariônica Ω_{b_0} e o resto corresponde à porção de matéria escura. Já a energia escura é responsável por 68,25% da energia cósmica. Este mesmo trabalho ainda indica que o Universo é espacialmente plano. Além de um parâmetro de densidade pequeno $\Omega_K = 0,001$, com nível de confiança em 1σ não é possível saber se a curvatura é positiva ou negativa.

Uma vez que o modelo Λ CDM não prevê interação entre suas componentes, a evolução de cada uma delas deve se dar de forma independente, satisfazendo as equações (2.33), (2.33) e (2.35). Combinando esse resultado com a equação de Friedmann (2.41) é possível obter uma dependência temporal, em termos do fator de escala, para o parâmetro de Hubble

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{r_0} a^{-4} + \Omega_{m_0} a^{-3} + \Omega_{K_0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda_0}). \quad (2.47)$$

H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble é estimado em $H = 69 \text{ Km/s} \times \text{Mpc}$.

2.5 O big bang e a inflação

Uma das perguntas que ainda permanecem sem resposta é como se deu a origem do Universo. Uma solução das equações de Einstein que está de acordo com a expansão do Universo é que havia uma singularidade inicial⁸ da qual o Universo se expandiu e evoluiu até o seu estágio atual (Big Bang).

Existem razões para se acreditar que a expansão do Universo não se deu sempre da mesma forma. Após essa singularidade primordial deve ter havido um período de expansão acentuada denominado inflação. Este período inflacionário permite que se explique alguns aspectos observacionais importantes do universo: o espectro da radiação cósmica de fundo, a curvatura do universo e a origem das perturbações cosmológicas.

No entanto, a inflação não pode ser descrita com o conteúdo material já citado, pois a única componente capaz de produzir expansão acelerada, a energia escura, não desempenha um papel dinâmico importante nesta época. Além disso, caso a energia escura fosse a responsável pela inflação ela não teria fim, uma vez que no modelo Λ CDM a energia escura é descrita pela constante cosmológica.

Neste cenário, é introduzido um campo escalar auto-interagente denominado inflaton responsável por promover o período inflacionário e que decai com o tempo, de modo que atualmente não fornece nenhuma contribuição. Esta seção se dedica a discutir alguns aspectos importantes da inflação.

2.5.1 Motivações para a inflação

A necessidade de um estágio inflacionário se dá pelas seguintes razões:

⁸A descrição da interação gravitacional nessa singularidade inicial ainda não é clara, pois necessitaria de uma descrição quântica.

(i) Problema do horizonte: Sabe-se que em maior parte de sua história o nosso Universo foi dominado por matéria. Neste caso é possível obter que a distância percorrida por um fóton oriundo do Big Bang até os dias de hoje é aproximadamente $2H_0^{-1}$. Essa distância é denominada o horizonte de partículas, e descreve a região do Universo que pode ser observada.

Já o horizonte de Hubble H_0^{-1} fornece atualmente uma boa aproximação para a região do Universo na qual é possível o contato causal entre duas partículas. Tendo em vista que o horizonte de partículas é maior que o horizonte de Hubble, conclui-se que, ao olharmos para regiões do céu que possuam aberturas angulares relativamente grandes, estaríamos observando partículas que nunca tiveram contato causal.

Porém, como já foi mencionado, os dados da anisotropia da radiação cósmica de fundo indicam que em todo o céu possui um desvio da isotropia da ordem de 10^{-5} . Desta forma, o problema do horizonte consiste no questionamento de como seria possível tamanha isotropia se tais partículas nunca estiveram em contato causal.

(ii) Problema da planaridade: Segundo a equação (2.46), é possível concluir que a contribuição da curvatura para um universo dominado por matéria ou radiação, que são os estágios do universo primordial, deve aumentar com o passar do tempo. Dessa forma, se o valor observado atualmente é muito pequeno, então ele deve ter sido menor ainda num universo primordial.

No cenário padrão, se for assumido que o universo é espacialmente plano ($K = 0$) esse problema é resolvido, no entanto não há nenhuma razão física para isso.

2.5.2 O período inflacionário

Como já foi mencionado, dinamicamente o período inflacionário é descrito pelo campo escalar auto-interagente inflaton ψ . Em geral, a dinâmica de um campo escalar é dada pela seguinte equação de movimento

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + V'(\psi) = 0, \quad (2.48)$$

$V'(\psi)$ denota a derivada do potencial $V(\psi)$, que define a auto-interação do campo escalar, com respeito a ψ .

Deve-se lembrar que o campo escalar pode ser associado a um fluido perfeito, o que faz que as equações (2.41) e (2.43) possam ser aplicadas diretamente à sua dinâmica. Esta associação do campo escalar a um fluido perfeito se dá a partir das seguintes definições para pressão e densidade

$$\rho_\psi = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + V(\psi) \quad \text{e} \quad p_\psi = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - V(\psi). \quad (2.49)$$

Para descrever o período de inflação propriamente dito, o campo escalar deve atingir um estágio de rolamento suave. A partir deste ponto o potencial satisfaz a condição $\dot{V}(\psi) \approx 0 \Rightarrow V(\psi) = \text{constante}$. Nessas condições o fluido descrito pelo inflaton

assume a equação de estado do vácuo $\rho_\psi \approx -p_\psi$, e a equação (2.43) resulta em

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho_\psi + p_\psi) \Rightarrow H \approx \text{const.} \quad (2.50)$$

Este resultado reproduz a seguinte dependência para o fator de escala

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad (2.51)$$

onde, $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}V(\psi)$. De fato, como já foi discutido no caso da energia escura, essa dependência temporal descreve uma fase de expansão acelerada.

O período inflacionário não pode ser eterno, deve haver um período de transição, denominado *reheating*, no qual o inflaton possui uma dinâmica não inflacionária, $V(\psi)$ deixa de satisfazer as condições do rolamento suave, e passa a oscilar. Neste período, a equação (2.48) multiplicada por $\dot{\psi}$, resulta numa equação de conservação para uma componente do tipo matéria não-relativística para a média da densidade (2.49)

$$\langle \dot{\rho}_\psi \rangle + 3H\langle \rho_\psi \rangle = 0. \quad (2.52)$$

O decaimento do inflaton é descrito através da inclusão de um termo Γ_ψ na equação de balanço acima. Este decaimento do campo escalar origina a matéria e radiação do Universo⁹.

Para quantizar a contribuição do período inflacionário é comum a introdução do número de *e-foldings* n , definido como

$$a(t_f) = a(t_i) e^n, \quad (2.53)$$

onde t_i e t_f são os tempos de início e término do período inflacionário.

Pode-se mostrar que para potenciais que reproduzem $60 \leq n \leq 70$ o período inflacionário é capaz de aumentar a região de contato causal entre as partículas, fazendo-a superar o horizonte de partículas. O aumento exponencial do fator de escala faz ainda com que a contribuição da curvatura diminua drasticamente neste período, o que explica seu valor atual [22].

2.6 Limitações do modelo Λ CDM

O modelo Λ CDM consegue reproduzir de forma satisfatória três elementos observacionais importantes: a expansão acelerada do universo, a radiação cósmica de fundo e a nucleossíntese primordial. Além disso, pode-se dizer que ele possui relativo sucesso observacional, sendo em muitas ocasiões denominado modelo de concordância por prever resultados semelhantes para testes no fundo homogêneo e isotrópico e no nível perturbativo.

Em largas escalas é possível que essa carência esteja relacionada com a natureza da energia escura, o que nos motiva à busca de modelos alternativos que sejam também

⁹Esta abordagem simples funciona somente para férmions [22].

capazes de reproduzir os dados observados do Universo. Nesta seção serão brevemente apresentados dois dos problemas do modelo cosmológico padrão que serão de alguma forma revistos com o modelo com decaimento do vácuo: O problema da constante cosmológica e o problema da coincidência cósmica.

2.6.1 O problema da constante cosmológica

O problema da constante cosmológica é dado pela inconsistência entre a previsão teórica para a energia do vácuo e o valor observado para a densidade da energia escura [6]. No modelo padrão, a descrição da energia escura através da constante cosmológica pode ser interpretada como uma identificação da energia escura com o vácuo. No entanto a teoria quântica de campos prevê que a energia do vácuo, para um campo escalar com uma massa m pode ser calculada como¹⁰

$$\langle \rho_\Lambda \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} dk. \quad (2.54)$$

Para o caso em que a massa pode ser negligenciada em relação a escala de energia, essa integral deve divergir. No entanto pode se imaginar ainda um corte em alguma escala de energia fisicamente relevante que forneça algum valor compatível para a energia do vácuo. Uma possibilidade natural para o corte nessa integral seria a escala de Planck, no entanto esse corte resulta numa densidade de energia que supera o valor observado em mais de 100 ordens de grandeza. De fato não existe nenhuma escala de energia com significado físico que resulte num valor sequer próximo ao valor observado.

2.6.2 O problema da coincidência cósmica

O problema da coincidência cósmica está relacionado com o fato de que atualmente a densidade de energia da matéria é da mesma ordem que a densidade de energia da energia escura [23]. Utilizando os resultados (2.33) e (2.37) segue que

$$\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} = \frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{\Lambda_0}} a^{-3}, \quad (2.55)$$

segundo os dados observacionais [1], esta razão é de fato de ordem 1 para o Universo atual. No entanto a dependência do fator de escala indica que este fato só foi alcançado para valores do fator de escala próximos ao atual.

Uma vez que no modelo Λ CDM a evolução das componentes do Universo acontecem de forma completamente independente, não há nenhuma razão para que essa equivalência entre matéria e energia escura se dê somente agora. É possível ainda que este fato seja responsável por permitir a formação das estruturas tal como as vemos, uma vez que a existência de um período de dominação da matéria favoreceu o colapso gravitacional.

Existem argumentos de que a coincidência cósmica não seja exatamente um problema, uma vez que a própria escala temporal é distorcida com o fator de escala, no entanto a

¹⁰É utilizado que $\hbar = 1$.

física não gosta de coincidências e talvez a sua investigação lance alguma luz sobre a natureza da energia escura.

3 *O processo de formação das estruturas no universo*

Como já foi mencionado, o princípio cosmológico estabelece que em largas escalas o universo é homogêneo e isotrópico. Entretanto, inhomogeneidades são evidentes em escalas locais, por exemplo galáxias e aglomerados de galáxias. Acredita-se que essas estruturas se originaram a partir da evolução de flutuações quânticas no universo inflacionário [24].

O modelo Λ CDM é de alguma forma capaz de explicar a origem dessas inhomogeneidades através de perturbações no campo escalar inflaton que decai em matéria no *reheating*. Essas inhomogeneidades são descritas através de desvios do fundo homogêneo e isotrópico, isto é, as quantidades dinamicamente relevantes devem ser escritas como a soma entre um termo de que caracteriza o fundo homogêneo e isotrópico e uma perturbação¹. Os dados da radiação cósmica de fundo para essa época justificam uma teoria perturbativa na primeira ordem.

Neste capítulo será apresentada uma breve descrição do processo de formação de estruturas através da teoria das perturbações cosmológicas escalares.

3.1 O problema do calibre

No âmbito da teoria geral da relatividade, que é invariante sob transformações gerais de coordenadas, a aplicação direta de uma teoria perturbativa esconde algumas sutilezas matemáticas. O próprio espaço-tempo deve ser dividido em duas partes: uma variedade fictícia \mathcal{M} , na qual pode-se definir um sistema de coordenadas fixo \bar{x}^α ; e uma variedade \mathcal{N} inhomogênea, com significado físico real. Essas duas variedades devem se relacionar via um difeomorfismo $\mathfrak{D} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, que induz um sistema de coordenadas x^α na variedade \mathcal{N} .

Dessa forma, quando escrevermos uma quantidade qualquer Q , tomada em um ponto p na variedade \mathcal{N} , como a soma de um termo de fundo (ordem zero, denotado por uma barra) com uma perturbação linear (ordem um, denotado por um chapéu), estes termos pertencem a variedades distintas

$$\hat{Q}(p) = Q(p) - \bar{Q}(\mathfrak{D}^{-1}(p)). \quad (3.1)$$

¹As relações do fundo homogêneo e isotrópico continuam sendo válidas para as quantidades de ordem zero.

No entanto, o difeomorfismo \mathcal{D} não é único, pode haver um segundo difeomorfismo $\tilde{\mathcal{D}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, que induz um outro sistema de coordenadas \tilde{x}^α na variedade \mathcal{N} , caracterizando uma liberdade de calibre. Dessa forma, um termo de fundo não pode ser identificado com uma única perturbação, o que significa que algumas dessas identificações podem conter termos não físicos.

Esse problema da liberdade de calibre pode então ser descrito através de uma transformação de coordenadas entre os sistemas induzidos na variedade \mathcal{N} . Em particular na primeira ordem essa transformação se trata de uma translação infinitesimal

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha. \quad (3.2)$$

Em alguns momentos é conveniente explicitar a parte temporal e espacial do vetor ξ_μ . Em geral a parte espacial de um vetor pode ainda ser escrita como a soma de um termo vetorial transversal, com divergente nulo $\xi_{i\perp}$, e um gradiente de uma função escalar $\zeta_{,i}$. Sabe-se que a formação de estruturas no universo é originada por modos escalares, então neste trabalho o termo transversal será considerado nulo

$$\xi_\mu = (\xi_0, \zeta_{,i}). \quad (3.3)$$

O vetor de translação ξ^μ fornece dois graus de liberdade: sua componente temporal ξ^0 ; e a função escalar ζ que origina suas componentes espaciais. Posteriormente dois vínculos deverão ser estabelecidos para se fixar um calibre.

3.2 Transformações de calibre

Para ilustrar como uma transformação de calibre afeta as grandezas físicas deve-se agora analisar os efeitos de uma translação infinitesimal do tipo (3.2) para quantidades escalares, vetoriais e tensoriais.

(i) Escalares: Por definição, um escalar S é um objeto invariante sob qualquer transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{x}^\alpha) &= S(x^\alpha) \\ \tilde{S}(x^\alpha - \xi^\alpha) &= S(x^\alpha) \\ \tilde{S} &= S + \xi^\mu S_{,\mu}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O resultado acima² pode ser reescrito com a definição de derivada de Lie de um escalar S sobre um campo vetorial ξ^μ

$$\tilde{S} = S + \mathcal{L}_\xi S. \quad (3.5)$$

(ii) Vetores: Um vetor covariante \tilde{w}_μ é um objeto cujas transformações de coordenadas se dão via

$$\tilde{w}_\mu(\tilde{x}^\alpha) = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} w_\nu(x^\alpha), \quad (3.6)$$

²Uma vez que todas as quantidades são tomadas no mesmo ponto ele foi omitido a fim de que a expressão se veja mais simples. Este procedimento será repetido para vetores e tensores.

particularmente para a translação infinitesimal de interesse

$$\begin{aligned}\tilde{w}_\mu(x^\alpha - \xi^\alpha) &= (\delta_\mu^\nu + \xi_{,\mu}^\nu) w_\nu(x^\alpha) \\ \tilde{w}_\mu &= w_\mu + \xi_{,\mu}^\nu w_\nu + \xi^\nu w_{\mu,\nu}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

É conveniente reescrever os últimos dois termos da equação anterior em termos de suas derivadas covariantes (2.9)

$$\begin{aligned}\xi_{,\mu}^\nu w_\nu + \xi^\nu w_{\mu,\nu} &= (\xi_{,\mu}^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu \xi^\rho) w_\nu + \xi^\nu (w_{\mu;\nu} + \Gamma_{\nu\mu}^\rho w_\rho) \\ \xi_{,\mu}^\nu w_\nu + \xi^\nu w_{\mu,\nu} &= \xi_{,\mu}^\nu w_\nu + \xi^\nu w_{\mu;\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^\nu \xi^\rho w_\nu + \xi^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\rho w_\rho.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Os termos que contém símbolos de Christoffel devem se cancelar. A equação (3.7) pode então ser escrita como

$$\tilde{w}_\mu = w_\mu + \xi_{,\mu}^\nu w_\nu + \xi^\nu w_{\mu;\nu}.\quad (3.9)$$

Analogamente à equação (3.5) a equação (3.9) também pode ser escrita em termos da derivada de Lie do vetor w_μ sobre um campo vetorial ξ^ν

$$\tilde{w}_\mu = w_\mu + \mathcal{L}_\xi w_\mu.\quad (3.10)$$

(iii) Tensores: Um tensor covariante de ordem dois é um objeto cujas transformações de coordenadas se dão via

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) = \frac{\partial x^\lambda}{\tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\tilde{x}^\nu} T_{\lambda\rho}(x^\alpha),\quad (3.11)$$

particularmente para a translação infinitesimal de interesse,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mu\nu}(x^\alpha - \xi^\alpha) &= (\delta_\mu^\lambda + \xi_{,\mu}^\lambda) (\delta_\nu^\rho + \xi_{,\nu}^\rho) T_{\lambda\rho}(x^\alpha) \\ \tilde{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + \xi_{,\nu}^\lambda T_{\mu\lambda} + \xi_{,\mu}^\lambda T_{\lambda\nu} + \xi^\lambda T_{\mu\nu,\lambda}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Assim como foi feito anteriormente para os vetores, é conveniente escrever os últimos três termos usando a definição da derivada covariante

$$\begin{aligned}\xi_{,\nu}^\lambda T_{\mu\lambda} + \xi_{,\mu}^\lambda T_{\lambda\nu} + \xi^\lambda T_{\mu\nu,\lambda} &= (\xi_{,\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \xi^\rho) T_{\mu\lambda} + (\xi_{,\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \xi^\rho) T_{\lambda\nu} \\ &\quad + \xi^\lambda (T_{\mu\nu;\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^\rho T_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho T_{\mu\rho}) \\ \xi_{,\nu}^\lambda T_{\mu\lambda} + \xi_{,\mu}^\lambda T_{\lambda\nu} + \xi^\lambda T_{\mu\nu,\lambda} &= \xi_{,\nu}^\lambda T_{\mu\lambda} + \xi_{,\mu}^\lambda T_{\lambda\nu} + \xi^\lambda T_{\mu\nu;\lambda} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \xi^\rho T_{\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \xi^\rho T_{\lambda\nu} \\ &\quad + \xi^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho T_{\rho\nu} + \xi^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho T_{\mu\rho}.\end{aligned}$$

Novamente os termos que contém símbolos de Christoffel se cancelam: o primeiro com o último, e os dois do meio. A equação (3.12) pode então ser escrita como

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \xi_{,\nu}^\lambda T_{\mu\lambda} + \xi_{,\mu}^\lambda T_{\lambda\nu} + \xi^\lambda T_{\mu\nu;\lambda}.\quad (3.13)$$

Exatamente como nas equações (3.5) e (3.10) a equação (3.13) também pode ser escrita em termos da derivada de Lie do tensor $T_{\mu\nu}$ sobre um campo vetorial ξ^α

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}.\quad (3.14)$$

3.3 Perturbações da métrica e a escolha do calibre

Na teoria da relatividade geral a geometria desempenha um papel de fato dinâmico. Por isso, para descrever desvios da homogeneidade e isotropia no Universo essas flutuações também devem estar contidas na própria estrutura geométrica do espaço-tempo [22, 25]. Neste sentido, a métrica deve ser dividida em um termo que descreve o fundo homogêneo e isotrópico $\bar{g}_{\mu\nu}$, (métrica de FLRW), e um termo de perturbação $\hat{g}_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

A princípio não há nenhum vínculo sobre a perturbação da métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$. Por isso ela deve ser considerada a mais genérica possível. Em geral, a perturbação da métrica pode ser decomposta como

$$\begin{cases} \hat{g}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 2\phi \\ \hat{g}_{\mu\nu} u^\mu h_\lambda^\nu = a^2 A_\lambda \\ \hat{g}_{\mu\nu} h_\lambda^\mu h_\rho^\nu = a^2 \varepsilon_{\lambda\rho} \end{cases}. \quad (3.16)$$

Nesta decomposição u_μ é a quadrivelocidade total e $h^{\mu\nu}$ é o tensor de projeção total (que também devem conter um termo de fundo e uma perturbação). Tendo em vista uma análise perturbativa na primeira ordem, a decomposição da perturbação da métrica, que já é de primeira ordem, deverá usar somente os termos de fundo da quadrivelocidade e do tensor de projeção.

$$2\phi = \hat{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu \quad \Rightarrow \quad \hat{g}_{00} = 2\phi, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} a^2 A_\lambda &= \hat{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\mu \bar{h}_\lambda^\nu \\ a^2 A_\lambda &= \hat{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\mu (\bar{u}^\nu \bar{u}_\lambda + \bar{g}_\lambda^\nu) \\ a^2 A_\lambda &= \hat{g}_{0\nu} (\bar{u}^\nu \bar{u}_\lambda + \delta_\lambda^\nu) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_0 = 0 \\ \hat{g}_{0i} = \hat{g}_{i0} = a^2 A_i \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} a^2 \varepsilon_{\lambda\rho} &= \hat{g}_{\mu\nu} \bar{h}_\lambda^\mu \bar{h}_\rho^\nu \\ a^2 \varepsilon_{\lambda\rho} &= \hat{g}_{\mu\nu} (\bar{u}^\mu \bar{u}_\lambda + \bar{g}_\lambda^\mu) (\bar{u}^\nu \bar{u}_\rho + \bar{g}_\rho^\nu) \\ a^2 \varepsilon_{\lambda\rho} &= \hat{g}_{\mu\nu} (\bar{u}^\mu \bar{u}_\lambda + \delta_\lambda^\mu) (\bar{u}^\nu \bar{u}_\rho + \delta_\rho^\nu) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_{0\mu} = \varepsilon_{\mu 0} = 0 \\ \hat{g}_{ij} = \hat{g}_{ji} = a^2 \varepsilon_{ij} = a^2 \varepsilon_{ji} \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A partir dessa decomposição fica claro que a perturbação da métrica é uma matriz quadrada de quarta ordem simétrica, e por tanto possui dez graus de liberdade, que estão expressos em um escalar ϕ , três componentes espaciais do vetor A_i mais seis componentes independentes de uma matriz simétrica quadrada de ordem três ε_{ij} .

O vetor espacial A_i pode ser decomposto na soma do gradiente de um escalar com um termo puramente vetorial com divergente nulo

$$A_i = F_{,i} + S_i \quad , \quad (S^i_{,i} = 0). \quad (3.20)$$

Já o tensor espacial ε_{ij} pode ser decomposto em um tensor com traço nulo somado a um

tensor diagonal cujo cada termo é um terço do seu traço

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon_a^a\delta_{ij} + W_{ij} \quad , \quad (W_i^i = 0). \quad (3.21)$$

Este tensor com traço nulo pode ainda ser escrito como

$$\begin{aligned} W_{ij} &= B_{,ij} - \delta_{ij}C_{,a}^a + D_{i,j} + D_{j,i} + T_{ij} \\ W_{ij} &= B_{,ij} - \delta_{ij}C_{,a}^a + (U_{,ij} + V_{i,j}) + (U_{,ji} + V_{j,i}) + T_{ij} \\ W_{ij} &= B_{,ij} + 2U_{,ij} - \delta_{ij}C_{,a}^a + V_{i,j} + V_{j,i} + T_{ij}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

com os seguintes vínculos

$$\begin{cases} V_i^i = 0 \\ T_i^i = 0 \\ T^{ij} = 0 \end{cases} . \quad (3.23)$$

Agrupando as constantes com as identificações $2E_{,ij} \equiv B_{,ij} + 2U_{,ij}$ e $2\psi \equiv C_{,a}^a - \frac{1}{3}\varepsilon_a^a$, o tensor ε_{ij} resulta em

$$\varepsilon_{ij} = 2(-\psi\delta_{ij} + E_{,ij}) + V_{i,j} + V_{j,i} + T_{ij}. \quad (3.24)$$

O elemento de linha que resulta da perturbação da métrica $\hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ é dado por

$$d\hat{s}^2 = -2\phi dt^2 + 2a^2(F_{,i} + S_i) dt dx^i + a^2[2(-\psi\delta_{ij} + E_{,ij}) + V_{i,j} + V_{j,i} + T_{ij}] dx^i dx^j. \quad (3.25)$$

Note que essa forma de escrever a métrica mantém os dez graus de liberdade de $\hat{g}_{\mu\nu}$: quatro graus de liberdade nos escalares ϕ , F , E e ψ ; os vetores espaciais S_i e V_i representariam seis graus de liberdade, no entanto o vínculo de divergência nula que ambos devem satisfazer eliminam dois graus de liberdade, restando apenas quatro; e por fim, o tensor espacial simétrico T_{ij} fornece somente mais dois graus de liberdade dos seis possíveis, uma vez que são impostos quatro vínculos devido às condições de traço nulo e divergência nula.

Utilizando esta decomposição é conveniente separar os graus de liberdade em modos escalares, vetoriais e tensoriais, pois cada um desses modos reproduzirão efeitos distintos:

Modos escalares: As perturbações escalares são responsáveis por dar origem às estruturas no Universo

$$\hat{g}_{\mu\nu}^{(e)} = \begin{pmatrix} -2\phi & a^2 F_{,i} \\ a^2 F_{,i} & 2a^2(-\psi\delta_{ij} + E_{,ij}) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Modos vetoriais: As perturbações vetoriais são responsáveis por produzir campos magnéticos, e costumam decair rapidamente

$$\hat{g}_{\mu\nu}^{(v)} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & S_i \\ S_i & V_{i,j} + V_{j,i} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Modos tensoriais: As perturbações tensoriais são responsáveis pela produção de ondas

gravitacionais

$$\hat{g}_{\mu\nu}^{(t)} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Deve-se agora analisar o efeito de uma transformação de calibre na métrica. Uma vez que neste trabalho estamos interessados na formação de estruturas no Universo, a métrica total será dada pela soma da métrica de FLRW com a métrica escalar (3.26)

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu}^{(e)} = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & a^2 F_{,i} \\ a^2 F_{,i} & a^2 [(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

A tabela 1 contém os elementos do tensor métrico escalar, divididos segundo sua ordem.

Tabela 1: Componentes do tensor métrico escalar.

Tensor métrico escalar	
$\bar{g}_{00} = -1$	\hat{g}_{00}
$\bar{g}_{0i} = \bar{g}_{i0} = 0$	$\hat{g}_{0i} = \hat{g}_{i0} = a^2 F_{,i}$
$\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ji} = a^2 \delta_{ij}$	$\hat{g}_{ij} = \hat{g}_{ji} = 2a^2 (-\psi \delta_{ij} + E_{,ij})$

O tensor métrico deve satisfazer a transformação (3.12), que na primeira ordem resulta em

$$\tilde{\tilde{g}}_{\mu\nu} + \tilde{\hat{g}}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu} + \xi_{,\nu}^{\lambda} \bar{g}_{\mu\lambda} + \xi_{,\mu}^{\lambda} \bar{g}_{\lambda\nu} + \xi^{\lambda} \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}. \quad (3.30)$$

A aplicação de cada componente da perturbação da métrica na equação (3.30) explicita o efeito da transformação de calibre para cada uma das quantidades da métrica. Os resultados destas transformações de calibre constam na tabela 2.

Tabela 2: Transformação de calibre para as quantidades presentes na perturbação da métrica escalar.

Transformação de calibre
$\tilde{\phi} = \phi + \xi_{,0}^0$
$\tilde{F} = F + (\zeta a^{-2})_{,0} - \xi^0 a^{-2}$
$\tilde{E} = E + \zeta a^{-2}$
$\tilde{\psi} = \psi - \xi^0 H$

Um calibre pode então ser fixado através da determinação explícita da translação infinitesimal (3.2), que é descrita por ξ^0 e ζ . Seguem os casos mais comuns na literatura [25, 26].

3.3.1 O calibre síncrono

O calibre síncrono consiste em considerar os termos de perturbação da métrica $\tilde{g}_{\mu 0} = 0$ o que implica que $\tilde{\phi} = \phi^{(s)} = 0$ e $\tilde{F} = F^{(s)} = 0$. Deve-se aplicar esses vínculos às transformações de calibre para os parâmetros ϕ e F contidas na tabela 1, e então determinar ξ^0 e ζ explicitamente

$$\phi = -\xi_{,0}^0 \quad (3.31)$$

$$(\zeta a^{-2})_{,0} = \xi^0 a^{-2} - F. \quad (3.32)$$

Neste caso, a solução deste sistema para ξ^0 e ζ não os determina unicamente, o que significa que neste calibre a transformação infinitesimal (3.2) ainda deve conter termos não físicos. Além disso neste calibre não é possível definir nenhuma quantidade dinâmica invariante de calibre.

3.3.2 O calibre longitudinal

O calibre longitudinal é definido a partir dos vínculos $\tilde{E} = E^{(l)} = 0$ e $\tilde{F} = F^{(l)} = 0$. O primeiro vínculo faz com que a função escalar ζ seja univocamente fixada através da condição imposta ao parâmetro E da tabela 1

$$\zeta = E a^2. \quad (3.33)$$

Enquanto a componente temporal ξ^0 é fixada através da transformação de calibre do parâmetro $\tilde{F} = 0$

$$\begin{aligned} F &= \xi^0 a^{-2} - (\zeta a^{-2})_{,0} \\ \xi^0 &= a^2 (F + \dot{E}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

A partir destes resultados, os termos $\phi^{(l)}$ e $\psi^{(l)}$, no calibre longitudinal podem ser determinados

$$\begin{aligned} \phi^{(l)} &= \phi + \xi_{,0}^0 \\ \phi^{(l)} &= \phi + a^2 \left[2H (F + \dot{E}) + \dot{F} + \ddot{E} \right], \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(l)} &= \psi - \xi^0 H \\ \psi^{(l)} &= \psi - a^2 H (F + \dot{E}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Os termos escalares (3.35) e (3.36) no calibre longitudinal coincidem com os potenciais invariantes de calibre propostos por Bardeen [27].

3.3.3 O calibre comóvel

Antes de fixar de fato o calibre comóvel deve-se olhar para a quadrivelocidade u^μ . Analogamente ao que foi feito com a métrica pode-se pensar que desvios da homogeneidade e isotropia do universo provocam flutuações também na quadrivelocidade, de modo que ela pode ser escrita como a soma de um termo de fundo $\bar{u}^\mu = (1, 0, 0, 0)$, com uma perturbação de ordem um \hat{u}^μ

$$u^\mu = \bar{u}^\mu + \hat{u}^\mu. \quad (3.37)$$

Em geral, a quadrivelocidade é um vetor ortonormal $u_\mu u^\mu = -1$. Utilizando a equação anterior, desprezando termos com ordem superior à primeira ordem obtém-se

$$\begin{aligned} u_\mu u^\mu &= -1 \\ (\bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu) (\bar{u}^\mu + \hat{u}^\mu) &= -1 \\ \hat{u}^0 &= \hat{u}_0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Além disso, a relação para levantar ou abaixar os índices também pode ser expressa em termos da métrica total

$$\begin{aligned} u_\mu &= g_{\mu\nu} u^\nu \\ \bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu &= (\bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu}) (\bar{u}^\nu + \hat{u}^\nu) \\ \hat{u}_\mu &= \bar{g}_{\mu\nu} \hat{u}^\nu + \hat{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\nu. \end{aligned} \quad (3.39)$$

A equação anterior fornece os seguintes vínculos para as componentes da perturbação da quadrivelocidade

$$\begin{cases} \hat{u}_0 = -\hat{u}^0 + \hat{g}_{00} & \Rightarrow \hat{u}_0 = \hat{u}^0 = \frac{1}{2} \hat{g}_{00} = -\phi \\ \hat{u}_m = a^2 \delta_{m\nu} \hat{u}^\nu + \hat{g}_{m0} & \Rightarrow \hat{u}_m = a^2 \hat{u}^m + a^2 F_{,m} \end{cases} \quad (3.40)$$

Sob uma transformação de calibre, a quadrivelocidade deve satisfazer a equação (3.7)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\mu &= u_\mu + \xi_{,\mu}^\nu u_\nu + \xi^\nu u_{\mu,\nu} \\ \tilde{u}_\mu + \tilde{\hat{u}}_\mu &= \bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu + \xi_{,\mu}^\nu (\bar{u}_\nu + \hat{u}_\nu) + \xi^\nu (\bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu)_{,\nu}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Na primeira ordem, a componente temporal da equação acima corresponde à transformação de calibre do parâmetro ϕ , enquanto a componente espacial resulta em

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{u}}_i + \tilde{\hat{u}}_i &= \bar{u}_i + \hat{u}_i + \xi_{,i}^\nu (\bar{u}_\nu + \hat{u}_\nu) + \xi^\nu (\bar{u}_i + \hat{u}_i)_{,\nu} \\ \tilde{\hat{u}}_i &= \hat{u}_i - \xi_{,i}^0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

É conveniente ainda escrever as componentes espaciais da perturbação da quadrivelocidade como o gradiente tridimensional de uma função escalar³ $\hat{u}_i \equiv v_{,i}$, então

$$\tilde{v}_{,i} = v_{,i} - \xi_{,i}^0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v} = v - \xi^0. \quad (3.43)$$

³Novamente o termo puramente vetorial é desprezado com a justificativa de que estamos interessados apenas em modos escalares.

Dessa forma, o calibre comóvel é fixado através das escolhas $\tilde{v} = v^{(c)} = 0$ e $\tilde{F} = F^{(c)} = 0$. O termo ξ^0 fica determinado através da equação anterior

$$\xi^0 = v, \quad (3.44)$$

enquanto ζ pode ser determinado pela equação da condição imposta pela transformação de calibre do parâmetro F

$$(\zeta a^{-2})_{,0} = va^{-2} - F. \quad (3.45)$$

Aplicando a equação (3.44) na transformação (3.42) conclui-se que um observador neste referencial não será capaz de ver as perturbações das componentes espaciais da quadri-velocidade. Então, os termos $\phi^{(c)}$, $E^{(c)}$, $\psi^{(c)}$ no calibre comóvel podem ser determinados a partir das informações expressas na tabela 1

$$\begin{aligned} \phi^{(c)} &= \phi + \xi_{,0}^0 \\ \phi^{(c)} &= \phi + v_{,0}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} E^{(c)} &= E + \zeta a^{-2} \\ E_{,0}^{(c)} &= E_{,0} + (\zeta a^{-2})_{,0} \\ E_{,0}^{(c)} &= E_{,0} + va^{-2} - F, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(c)} &= \psi - \xi^0 H \\ \psi^{(c)} &= \psi - vH. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para a perturbação de uma quantidade escalar cujo termo associado ao fundo homogêneo e isotrópico só depende do tempo $s(t, x^i) = \bar{s}(t) + \hat{s}(t, x^i)$, é possível definir uma quantidade invariante de calibre

$$\hat{s}^{(c)} = \hat{s} + \xi^0 \bar{s}_{,0}. \quad (3.49)$$

A formulação de uma teoria perturbativa em termos desta quantidade invariante de calibre é justificada no calibre comóvel ($\xi^0 = v = 0$), pois neste caso a quantidade acima adquire significado físico.

3.4 Teoria das perturbações cosmológicas lineares

O formalismo padrão na literatura da teoria das perturbações no cenário relativístico consiste em inserir perturbações nas grandezas dinamicamente importantes e então resolver as equações de Einstein para determinar a sua evolução [21, 22, 25]. Neste trabalho será utilizada uma forma alternativa, porém análoga do ponto de vista físico, na qual as perturbações serão inseridas na equação do balanço de energia, na equação do balanço do momento e na equação de Raychaudhuri.

Para a investigação da formação de estruturas na componente bariônica do modelo é será desenvolvida uma análise perturbativa para um fluido conservativo, que será pos-

teriormente aplicada ao Universo como um todo. Neste ponto, além da métrica(3.15) e da quadrivelocidade (3.40) a densidade de energia ρ , a pressão p e o escalar de expansão também deverão ser divididos em um termo que descreve o fundo homogêneo e isotrópico (denotados por uma barra superior) e um termo perturbativo de primeira ordem (denotado por um chapéu).

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu} \\ u_{\mu} = \bar{u}_{\mu} + \hat{u}_{\mu} \\ \rho = \bar{\rho} + \hat{\rho} \\ p = \bar{p} + \hat{p} \\ \Theta = \bar{\Theta} + \hat{\Theta} \end{cases} . \quad (3.50)$$

O princípio cosmológico permite estabelecer que no fundo homogêneo e isotrópico $\bar{g}_{\mu\nu}$ seja dada pela métrica de FLRW, a quadrivelocidade seja $\bar{u}^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ e que a densidade $\bar{\rho}$, pressão \bar{p} e o escalar de expansão $\bar{\Theta}$ não possuam dependência espacial. Em particular, a densidade e a pressão devem satisfazer

$$\begin{cases} \rho = \sum_A \rho_A \\ p = \sum_A p_A \end{cases} , \quad (3.51)$$

na qual o índice A representa as possíveis componentes do universo.

A quantidade de interesse que vai descrever as estruturas no Universo é denominada contraste de densidade, é definida como a razão entre a perturbação de densidade de energia e seu valor no fundo homogêneo e isotrópico.

$$\delta \equiv \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta} = \frac{\dot{\hat{\rho}}}{\bar{\rho}} - \delta \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}. \quad (3.52)$$

O balanço de energia de um fluido perfeito pode ser pensado no nível perturbativo, onde cada uma das quantidades dinâmicas (2.31) deve ser escrita como em (3.50)

$$\dot{\hat{\rho}}\hat{u}^0 + \dot{\hat{p}} + \bar{\Theta}(\hat{\rho} + \hat{p}) + \hat{\Theta}(\bar{\rho} + \bar{p}) = 0. \quad (3.53)$$

Dividindo a equação anterior por $\bar{\rho}$ é possível introduzir o contraste de densidade definido na equação (3.52)

$$\dot{\delta} + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}\delta + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}\hat{u}^0 + \bar{\Theta}\left(\delta + \frac{\hat{p}}{\bar{\rho}}\right) + \hat{\Theta}\left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right) = 0 \quad (3.54)$$

Neste ponto pode ser introduzida para a densidade, pressão e escalar de expansão uma descrição invariante de calibre da forma (3.49)

$$\begin{cases} \hat{\rho}^{(c)} = \hat{\rho} + v\dot{\hat{\rho}} \\ \hat{p}^{(c)} = \hat{p} + v\dot{\hat{p}} \\ \hat{\Theta}^{(c)} = \hat{\Theta} + v\dot{\hat{\Theta}} \end{cases} . \quad (3.55)$$

Ainda que esse desenvolvimento não utilize explicitamente a métrica as quantidades di-

nâmicas $\hat{\rho}^{(c)}$, $\hat{p}^{(c)}$, e $\hat{\Theta}^{(c)}$, cujos termos de fundo possuem apenas dependência temporal, devem ser escritas no calibre comóvel, onde assumem de fato o papel de densidade, pressão e escalar de expansão.

Em particular, dividindo a relação para $\hat{\rho}^{(c)}$ por $\bar{\rho}$, obtém-se uma relação invariante de calibre para o contraste de densidade

$$\delta^{(c)} = \delta + v \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}^{(c)} = \dot{\delta} + \left(\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \right) \cdot v + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \dot{v}, \quad (3.56)$$

dessa forma, utilizando a equação (3.40), a equação (3.54) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\delta}^{(c)} - \left(\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \right) \cdot v - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \dot{v} + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \left(\delta^{(c)} - v \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \right) - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \phi + \hat{\Theta}^{(c)} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) - \dot{\Theta} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) v \\ + \bar{\Theta} \left(\delta^{(c)} - v \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \right) + \bar{\Theta} \left(\frac{\hat{p}^{(c)} - v \dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Segundo a equação (2.31), o termo $\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}$ pode ser escrito em termos do balanço de energia no fundo homogêneo e isotrópico $\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = -\bar{\Theta} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)$, de modo que o balanço de energia no nível perturbativo assuma a seguinte forma

$$\dot{\delta}^{(c)} - \bar{\Theta} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \delta + \hat{\Theta}^{(c)} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) + \bar{\Theta} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) (\dot{v} + \phi) + \bar{\Theta} \frac{\hat{p}^{(c)}}{\bar{\rho}} = 0. \quad (3.58)$$

O próximo passo é olhar para as componentes espaciais da equação do balanço do momento (2.32) no nível perturbativo, com limite na primeira ordem

$$[(\bar{\rho} + \hat{\rho}) + (\bar{p} + \hat{p})] (\bar{u}_i + \hat{u}_i)_{;\nu} (\bar{u}^\nu + \hat{u}^\nu) = - [\delta_i^\nu + (\bar{u}^\nu + \hat{u}^\nu) (\bar{u}_i + \hat{u}_i)] (\bar{p} + \hat{p})_{;\nu} \quad (3.59)$$

Para uma análise mais cuidadosa vamos analisar separadamente a derivada total da quadrivelocidade

$$\begin{aligned} (\bar{u}_i + \hat{u}_i)_{;\nu} (\bar{u}^\nu + \hat{u}^\nu) &= \left[(\bar{u}_i + \hat{u}_i)_{;\nu} - \left(\bar{\Gamma}_{i\nu}^\beta + \hat{\Gamma}_{i\nu}^\beta \right) (\bar{u}_\beta + \hat{u}_\beta) \right] (\bar{u}^\nu + \hat{u}^\nu) \\ (\bar{u}_i + \hat{u}_i)_{;\nu} (\bar{u}^\nu + \hat{u}^\nu) &= \left(\hat{u}_{i,0} + \frac{\dot{a}}{a} \bar{g}_{ij} \hat{u}^j - \frac{\dot{a}}{a} \hat{u}_i + \hat{\Gamma}_{i0}^0 \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

A operação para abaixar o índice da quadrivelocidade \hat{u}_A^j pode ser obtida de forma análoga ao feito em (3.40), enquanto a determinação da perturbação do símbolo de Christoffel é feita a partir de sua definição

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{i0}^0 + \hat{\Gamma}_{i0}^0 &= \frac{1}{2} (\bar{g}^{0\alpha} + \hat{g}^{0\alpha}) [(\bar{g}_{\alpha i,0} + \hat{g}_{\alpha i,0}) + (\bar{g}_{\alpha 0,i} + \hat{g}_{\alpha 0,i}) - (\bar{g}_{i0,\alpha} + \hat{g}_{i0,\alpha})] \\ \hat{\Gamma}_{i0}^0 &= \frac{\dot{a}}{a} \bar{g}_{ij} \hat{g}^{j0} + \phi_{,i}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dessa forma, utilizando os resultados anteriores, obtém-se, com o limite na primeira

ordem, o balanço do momento no nível perturbativo

$$\dot{v} + \phi = -\frac{\hat{p}^{(c)}}{\bar{\rho} + \bar{p}}. \quad (3.62)$$

A conservação da energia e do momento no nível perturbativo podem ser descritas pela combinação das equações (3.58) e (3.62)

$$\dot{\delta}^{(c)} - \bar{\Theta} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \delta^{(c)} + \hat{\Theta}^{(c)} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right) = 0. \quad (3.63)$$

Para determinar a perturbação do escalar de expansão deve-se utilizar a equação de Raychaudhuri, que no caso sem cisalhamento e vorticidade á dada por

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - \dot{u}^\mu_{;\mu} + 4\pi G(\rho + p) = 0 \quad (3.64)$$

No entanto, antes de inserir perturbações na equação (3.64) é conveniente reescrevê-la segundo o balanço do momento (2.32)

$$\begin{aligned} \dot{u}^\mu &= g^{\mu\nu} \dot{u}_\nu = -g^{\mu\nu} \left(\frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right) \\ \dot{u}^\mu_{;\mu} &= \left[-g^{\mu\nu} \left(\frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right) \right]_{;\mu} = -g^{\mu\nu} \left[\left(\frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right)_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right], \end{aligned} \quad (3.65)$$

de forma que a equação de Raychaudhuri (3.64) possa então ser reescrita como

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + g^{\mu\nu} \left[\left(\frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right)_{,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right] + 4\pi G(\rho + 3p) = 0. \quad (3.66)$$

No nível perturbativo a equação anterior assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} - \dot{\Theta}\phi + \frac{2}{3}\bar{\Theta}\hat{\Theta} + \bar{g}^{\mu\nu} &\left[\left(\frac{\hat{p}_{,\nu} + \hat{u}_\nu \dot{\hat{p}} + \delta_\nu^0 \phi \dot{\hat{p}} - \delta_\nu^0 \hat{p}_{,0}}{\rho + p} \right)_{,\mu} \right. \\ &\left. - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma \left(\frac{\hat{p}_{,\gamma} + \hat{u}_\gamma \dot{\hat{p}} + \delta_\gamma^0 \phi \dot{\hat{p}} - \delta_\gamma^0 \hat{p}_{,0}}{\rho + p} \right) \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma \left(\frac{\delta_\gamma^\lambda \bar{p}_{,\lambda} + \bar{u}^\lambda \bar{u}_\gamma \bar{p}_{,\lambda}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right) \right] \\ &+ \hat{g}^{\mu\nu} \left[\left(\frac{\delta_\nu^\lambda \bar{p}_{,\lambda} + \bar{u}^\lambda \bar{u}_\nu \bar{p}_{,\lambda}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right)_{,\mu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma \left(\frac{\delta_\gamma^\lambda \bar{p}_{,\lambda} + \bar{u}^\lambda \bar{u}_\gamma \bar{p}_{,\lambda}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right) \right] + 4\pi G(\hat{\rho} + 3\hat{p}) = 0. \end{aligned}$$

Os últimos três termos que multiplicam a métrica $\bar{g}^{\mu\nu}$ contém o balanço do momento no fundo homogêneo e isotrópico, que deve se anular. Além disso, uma vez que a métrica de FLRW é diagonal, podemos escrever

$$\dot{\Theta} - \dot{\Theta}\phi + \frac{2}{3}\bar{\Theta}\hat{\Theta} + \frac{\Delta \hat{p}^{(c)}}{a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} + 4\pi G(\bar{\rho}\delta + 3\hat{p}) = 0. \quad (3.67)$$

Neste ponto introduz-se as variáveis dinâmicas invariantes de calibre (3.55)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Theta}}^{(c)} + \frac{2}{3}\bar{\Theta}\hat{\Theta}^{(c)} + 4\pi G(\bar{\rho}\delta^{(c)} + 3\hat{p}^{(c)}) + \frac{\Delta\hat{p}^{(c)}}{a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} - \ddot{\Theta}v - \dot{\Theta}(v + \phi) \\ - \frac{2}{3}\bar{\Theta}\dot{\Theta}v - 4\pi G(\dot{\bar{\rho}} + 3\dot{\bar{p}})v = 0. \end{aligned}$$

O escalar de expansão no fundo homogêneo e isotrópico pode ser obtido através do balanço da energia (2.31), enquanto suas derivadas temporais são obtidas da equação (2.43)

$$\dot{\hat{\Theta}}^{(c)} + \frac{2}{3}\bar{\Theta}\hat{\Theta}^{(c)} + 4\pi G\bar{\rho}\delta^{(c)} + \frac{\Delta\hat{p}^{(c)}}{a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} = 0. \quad (3.68)$$

Isolando a perturbação do escalar de expansão $\hat{\Theta}^{(c)}$ na equação da conservação da energia e do momento (3.63) pode-se obter sua derivada temporal a partir da equação anterior

$$\hat{\Theta}^{(c)} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)} \left(\delta^{(c)} - \bar{\Theta}\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\delta^{(c)}\right) \quad (3.69)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}^{(c)} = \frac{2}{3}\bar{\Theta}\frac{1}{\left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)} \left(\dot{\delta}^{(c)} - \bar{\Theta}\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\dot{\delta}^{(c)}\right) - 4\pi G\bar{\rho}\delta^{(c)} - \frac{\Delta\hat{p}^{(c)}}{a^2(\bar{\rho} + \bar{p})}. \quad (3.70)$$

Por fim, deve-se diferenciar a equação da conservação da energia e do momento (3.63) com respeito ao tempo e então inserir os resultados anteriores junto às equações (2.31), (2.41) e (2.43)

$$\ddot{\delta}^{(c)} + \dot{\delta}^{(c)}H \left(2 - 6\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{\bar{p}}}{\dot{\bar{\rho}}}\right) + \delta^{(c)}H^2 \left(-\frac{3}{2} - 12\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{9\bar{p}^2}{2\bar{\rho}^2} + 9\frac{\dot{\bar{p}}}{\dot{\bar{\rho}}}\right) = \frac{\Delta\hat{p}^c}{\bar{\rho}a^2}. \quad (3.71)$$

Nos problemas da cosmologia é comum representar a escala temporal em função do fator de escala $a(t)$. Mudando a variável

$$\dot{\delta}^{(c)} = \delta^{(c)'} aH \quad (3.72)$$

$$\ddot{\delta}^{(c)} = (\delta^{(c)'} aH)' aH = a^2 H^2 \left[\delta^{(c)''} + \frac{\delta^{(c)'}}{a} \left(1 + \frac{aH'}{H}\right) \right], \quad (3.73)$$

onde a linha indica derivação com respeito ao fator de escala. A derivada do parâmetro de Hubble H' pode ser determinada a partir de \dot{H}

$$\dot{H} = H' aH = -4\pi G(\bar{\rho} + \bar{p})$$

$$1 + \frac{aH'}{H} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\bar{p}}{\bar{\rho}}\right). \quad (3.74)$$

Além disso, por estarmos interessados na evolução temporal do contraste de densidade, é conveniente escrevê-lo no espaço de Fourier

$$\delta^{(c)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\vec{k}}^{(c)}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}. \quad (3.75)$$

de forma que a equação final, já no espaço dos momentos, para as perturbações cosmológicas é

$$\delta_{\vec{k}}^{(c)''} + \frac{\delta_{\vec{k}}^{(c)'}}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{15\bar{p}}{2\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\delta_{\vec{k}}^{(c)}}{a^2} \left(-\frac{3}{2} - 12\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{9\bar{p}^2}{2\bar{\rho}^2} - 9\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) = -\frac{\hat{p}^c |\vec{k}|^2}{\rho a^4 H^2}. \quad (3.76)$$

4 *O modelo com decaimento do vácuo*

Em busca de evitar, ou ao menos amenizar, os problemas do modelo Λ CDM em largas escalas, algumas classes de modelos alternativos de energia escura foram e continuam sendo propostas na literatura [28, 29]. Cada uma dessas classes deve de alguma forma sugerir uma mudança na formulação da cosmologia padrão (em aspectos dinâmicos ou estruturais). Alguns desses modelos mais difundidos na literatura são:

(i) x CDM: Nesta classe de modelos a energia escura não é identificada com o vácuo, mas com um fluido dinâmico x com equação de estado $p_x = \omega\rho_x$, na qual o parâmetro ω pode assumir qualquer valor negativo diferente de -1 , que corresponderia ao caso da constante cosmológica[30, 31]. Normalmente, quando se faz referência ao fluido x , o parâmetro ω é constante e deve se limitar ao intervalo $-1 < \omega < 0$, no entanto existe uma extensão do modelo em que é considerado o caso em que $\omega < -1$ denominada energia escura fantasma, onde o universo tende a uma singularidade futura em um tempo finito [32, 33, 34]. Há ainda o caso em que ω varia com o tempo, descrita explicitamente por uma dependência do fator de escala $\omega \equiv \omega(a)$. Neste sentido, um exemplo importante é a parametrização CPL [35, 36].

(ii) Quartessência: São modelos nos quais o setor escuro como um todo é descrito por um único fluido dinâmico. Neste caso, a equação de estado do fluido unificado deve tender para $p = 0$ no limite $z \rightarrow \infty$ (que corresponde ao universo dominado por matéria), e deve tender para $p = -\rho$ no limite $z \rightarrow -1$ (que corresponde ao universo dominado por energia escura). Dois exemplos de quartessência são o gás de Chaplygin generalizado[37, 38, 39] e o fluido viscoso[40].

(iii) Quintessência: A energia escura é descrita através de um campo escalar ϕ . Este campo escalar deve possuir o termo cinético canônico e ser autointeragente via um potencial $V(\phi)$ [41]. A análise da dinâmica deste campo escalar, supondo-o minimamente acoplado à gravitação, resulta que $p = \omega_\phi\rho$ com o vínculo $-1 < \omega_\phi < 1$, no entanto, o cenário atual de expansão acelerada do universo favorece que $\omega_\phi < 0$. Modelos de k -essência [42] são uma generalização dos modelos de quintessência nos quais o termo cinético não é canônico. Neste caso, ainda que o campo escalar seja minimamente acoplado com a gravitação, pode-se obter um vínculo diferente sobre ω_ϕ , fazendo-o por exemplo atingir a região fantasma.

(iv) Modificações da teoria da gravidade: Uma alternativa mais radical é a proposta de uma modificação da teoria da relatividade geral. Essas alterações seriam dadas pela

inclusão de termos de curvatura (através do escalar de Ricci, tensor de Ricci ou tensor de Riemann) na ação de Einstein-Hilbert. O efeito dinâmico desses termos poderia desempenhar o papel da energia escura. Devido a problemas com a estabilidade em teorias que envolvem os tensores de Riemann e Ricci¹, as teorias mais comuns são dadas em termos do escalar de Ricci, e são denominadas teorias $f(R)$ [44, 45].

O modelo com o decaimento do vácuo representa uma classe de modelos alternativos ao Λ CDM mais simples, na qual tanto a natureza da energia escura relacionada ao vácuo quanto a estrutura da relatividade geral são mantidas, mas é proposta uma dependência temporal para a densidade de energia do vácuo em contrapartida ao cenário da constante cosmológica². Assume-se para essa dependência a proposta de Schützhold em [46]

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \sigma H. \quad (4.1)$$

Embora existam motivações físicas com base na anomalia de traço da QCD para essa dependência [47], este trabalho se limitará a uma motivação fenomenológica, uma vez que a única escala temporal relevante no universo é a escala de Hubble.

De alguma forma essa dependência temporal justifica a divergência da densidade de energia da energia escura num Universo primordial, enquanto seu valor atual é muito pequeno, evitando assim o problema da constante cosmológica. Além disso, ela deve afetar o balanço de energia do vácuo induzindo uma interação, que é escolhida de modo a afetar somente o setor escuro do Universo. Essa escolha de que a interação afete somente o setor escuro é justificada tendo em vista que a experiência mostra que a matéria ordinária e a radiação seguem geodésicas, enquanto a natureza do setor escuro não é completamente conhecida atualmente. A motivação fenomenológica do modelo não permite uma investigação sobre a natureza desta interação.

Um estudo detalhado deste modelo tem sido feito atualmente [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], no entanto nessas análises, a componente de matéria não distingue a matéria escura da matéria bariônica. A proposta deste trabalho é estender esta análise introduzindo uma componente bariônica e reproduzir o estudo contido na literatura.

Neste capítulo o fundo homogêneo e isotrópico do modelo com decaimento do vácuo é introduzido matematicamente, culminando com os testes observacionais com oscilações acústicas bariônicas, desvio do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e supernovas do tipo IA.

4.1 Dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico

Da mesma forma como no modelo Λ CDM, o universo é plano e modelado através de um fluido perfeito, porém neste caso o fluido é dividido em quatro componentes: energia escura (denotada pelo índice Λ); matéria escura (denotada pelo índice M); matéria bariônica (denotada pelo índice B); e radiação (denotada pelo índice R). Cada uma dessas componentes também podem ser modeladas por um fluido perfeito, de forma que o tensor

¹Há a exceção da cosmologia de Gauss-Bonnet [43].

²Esta classe de modelos costuma ser denominada na literatura como $\Lambda(t)$ CDM.

energia-momento para o sistema seja dado por³

$$T^{\mu\nu} = T_{\Lambda}^{\mu\nu} + T_M^{\mu\nu} + T_B^{\mu\nu} + T_R^{\mu\nu} \quad , \quad \begin{cases} T_{\Lambda}^{\mu\nu} = u^{\mu}u^{\nu}\rho_{\Lambda} + h^{\mu\nu}p_{\Lambda} \\ T_M^{\mu\nu} = u^{\mu}u^{\nu}\rho_M + h^{\mu\nu}p_M \\ T_B^{\mu\nu} = u^{\mu}u^{\nu}\rho_B + h^{\mu\nu}p_B \\ T_R^{\mu\nu} = u^{\mu}u^{\nu}\rho_R + h^{\mu\nu}p_R \end{cases} . \quad (4.2)$$

Como já foi mencionado, a energia escura mantém a equação de estado do tipo vácuo $\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda}$, que neste caso deve possuir a dependência temporal introduzida em (4.1). Uma vez que essa relação deve valer em qualquer época, deve valer particularmente na época atual, o que nos permite escrever a constante σ em termos dos parâmetros de densidade atuais

$$\sigma = \frac{\rho_{\Lambda_0}}{H_0} \\ \sigma = \frac{3H_0}{8\pi G} (1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} - \Omega_{R_0}) . \quad (4.3)$$

Um detalhe importante é que, embora o modelo seja proposto como uma variação simples do modelo Λ CDM, não há caso limite que retome o modelo padrão. No caso limite $\sigma = 0$ o Universo não contém energia escura.

A componente de radiação é descrita pela equação de estado $p_R = \frac{1}{3}\rho_R$, enquanto a matéria escura e a matéria bariônica são descritas pela mesma equação de estado $p_M = p_B = 0$. No entanto, diferente do que ocorre no modelo Λ CDM, pode-se diferenciar essas duas componentes através de uma interação no setor escuro do Universo, enquanto as componentes de radiação e de matéria bariônica se conservam⁴.

$$T_{\Lambda;\nu}^{\mu\nu} = -Q^{\mu} \quad (4.4)$$

$$T_{M;\nu}^{\mu\nu} = Q^{\mu} \quad (4.5)$$

$$T_{B;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.6)$$

$$T_{R;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

O termo de fonte Q^{μ} pode ser dividido em um termo paralelo à quadrivelocidade e outro termo perpendicular à quadrivelocidade $Q^{\mu} = Q_{\parallel}^{\mu} + Q_{\perp}^{\mu}$

$$Q_{\parallel}^{\mu} = u^{\mu}Q \quad (4.8)$$

$$Q_{\perp}^{\mu} = h_{\nu}^{\mu}Q^{\nu}. \quad (4.9)$$

Q é um escalar.

Segue dessa definição que Q_{\parallel}^{μ} possui apenas a componente temporal não nula, enquanto Q_{\perp}^{μ} possui apenas as componentes espaciais não nulas, ou seja $Q^{\mu} = (Q_{\parallel}^0, Q_{\perp}^i)$. No entanto, a partir do tensor de energia momento da componente de energia escura (ou de matéria escura), pode-se mostrar que as componentes espaciais do termo de interação

³A homogeneidade do universo permite que não haja distinção entre as quadrivelocidades de cada componente.

⁴Note que o universo como um todo é de fato um sistema conservativo.

também devem ser nulas

$$Q_{\perp}^i = T_{\Lambda, \nu}^{i\nu} \quad \Rightarrow \quad Q_{\perp}^i = 0, \quad (4.10)$$

e então, o termo de interação é dado por $Q^{\mu} = (Q, \vec{0})$.

Tendo em mãos o resultado anterior, e seguindo o mesmo procedimento realizado para se obter a equação (2.31), pode-se determinar as equações para os balanços de energia individuais

$$\dot{\rho}_{\Lambda} = -Q \quad (4.11)$$

$$\dot{\rho}_M + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_M = Q \quad (4.12)$$

$$\dot{\rho}_B + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_B = 0 \quad (4.13)$$

$$\dot{\rho}_R + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_R = 0. \quad (4.14)$$

Num universo homogêneo e isotrópico sem curvatura, sua dinâmica ainda deve satisfazer as equações (2.41) e (2.43), que aplicadas ao modelo resultam

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\sigma H + \rho_M + \rho_B + \rho_R) \quad (4.15)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \left(\rho_M + \rho_B + \frac{4}{3}\rho_R \right). \quad (4.16)$$

Repare que a combinação direta das equações (4.1), (4.11) e (4.16) determina o termo de interação $Q = 4\pi G\sigma \left(\rho_M + \rho_B + \frac{4}{3}\rho_R \right)$, e sua aplicação nas equações de balanço da energia mostra que de fato esta interação promove o decaimento do vácuo em matéria escura

$$\dot{\rho}_{\Lambda} = -4\pi G\sigma \left(\rho_M + \rho_B + \frac{4}{3}\rho_R \right) \quad (4.17)$$

$$\dot{\rho}_M + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_M = 4\pi G\sigma \left(\rho_M + \rho_B + \frac{4}{3}\rho_R \right). \quad (4.18)$$

A partir dessa descrição do fundo homogêneo e isotrópico, pode-se determinar a dependência temporal explícita dos parâmetros cosmológicos de interesse⁵. É conveniente olhar primeiro para as densidades de energia dos bárions e da radiação, uma vez que sua evolução temporal é obtida simplesmente pela resolução das equações (4.13) e (4.14). Para a componente bariônica,

$$\rho_B = \rho_{B_0} a^{-3}$$

$$\rho_B = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{B_0} a^{-3} \quad (4.19)$$

⁵Neste caso essa dependência temporal será dada em termos do fator de escala.

e já para a radiação

$$\begin{aligned}\rho_R &= \rho_{R_0} a^{-4} \\ \rho_R &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{R_0} a^{-4}\end{aligned}\quad (4.20)$$

No caso do parâmetro de Hubble, sua evolução deve ser determinada através da análise conjunta das equações (4.15) e (4.16)

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}H^2 + 4\pi G\sigma H - \frac{4\pi G}{3}\rho_R.$$

Neste ponto é conveniente escrever o parâmetro de Hubble como $H(a) \equiv H_0 E(a)$, de modo que sua derivada total com respeito ao tempo é dada por $\dot{H} = H_0^2 \frac{dE}{da} E a$. Dessa forma a equação diferencial a ser resolvida é

$$2\frac{dE}{da} E a = -3E^2 + 3E(1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} - \Omega_{R_0}) - \Omega_{R_0} a^{-4}. \quad (4.21)$$

No entanto, essa equação acima não possui solução analítica. Por isso, a determinação do parâmetro de Hubble será feita de acordo com o procedimento indicado em [16], no qual deve se obter primeiramente a solução analítica do parâmetro de Hubble no caso em que a contribuição da radiação pode ser negligenciada ($\Omega_{R_0} \approx 0$)

$$\begin{aligned}2\frac{dE}{da} a &= -3E + 3(1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0}) \\ E &= 1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{-3/2}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

consequentemente,

$$H = H_0 [1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{-3/2}]. \quad (4.23)$$

Uma aproximação para contabilizar a contribuição da radiação é obtida a partir da equação (4.15). Nesta equação deve-se supor que o resultado anterior equivale à contribuição das componentes de energia escura, matéria escura e matéria bariônica, e então o termo da radiação é inserido via equação (4.20)

$$H = H_0 \sqrt{[1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{-3/2}]^2 + \Omega_{R_0} a^{-4}}. \quad (4.24)$$

De fato os resultados anteriores não são soluções da equação diferencial (4.21), entretanto pode-se avaliar as suas utilizações comparando-os graficamente com a solução numérica. Para ilustrar esta avaliação será assumido os valores padrões para o modelo Λ CDM⁶.

Na figura 3 é feita a comparação entre os parâmetros de Hubble (4.23) e (4.24) com sua solução numérica. O detalhe da figura mostra que, como era de se esperar, o parâmetro de

⁶Uma análise similar também é feita em [16].

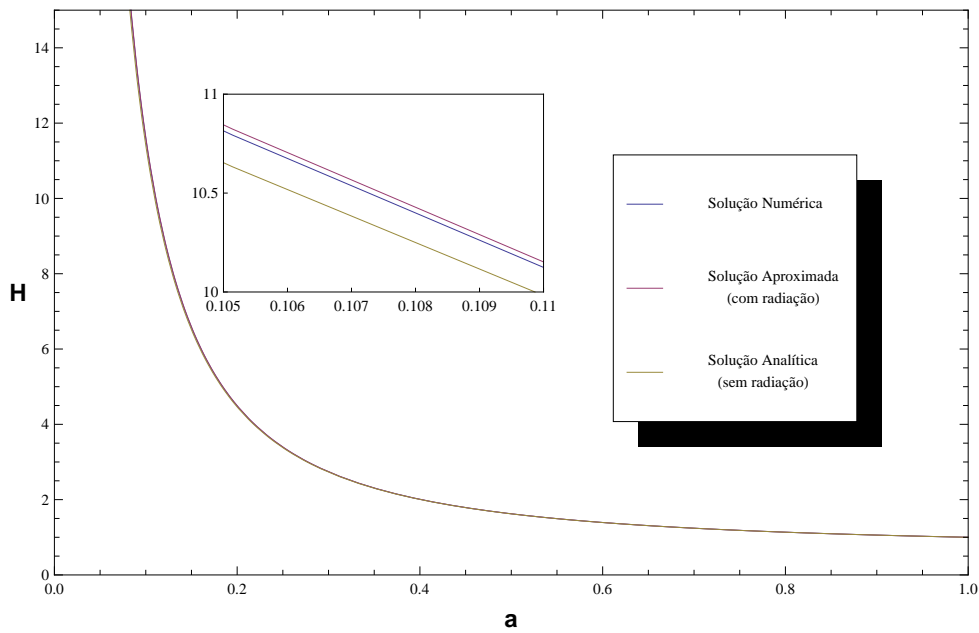


Figura 3: Comparação entre a solução numérica da equação (4.21) com a solução analítica sem a contribuição da radiação (4.23) e com a solução aproximada (4.24) em termos do fator de escala.

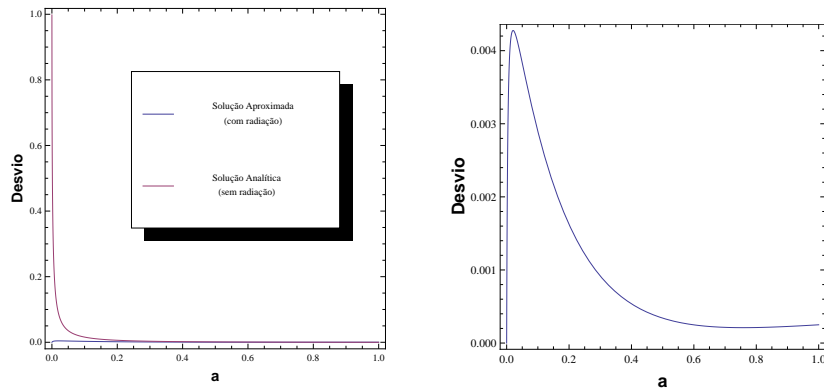


Figura 4: **Figura esquerda:** Desvios relativos entre a solução numérica da equação (4.21) e a soluções analítica, sem a radiação (4.23), em rosa, e a solução aproximada (4.24) em azul. **Figura direita:** Desvio relativo entre a solução numérica de (4.21) e a solução aproximada (4.24) em detalhe.

Hubble que negligencia a radiação difere de forma mais significativa da solução numérica para valores pequenos do fator de escala (quando o universo é dominado por radiação).

Já a figura 4, na imagem da esquerda, mostra que de fato o erro do parâmetro de Hubble que despreza a componente de radiação tende a divergir para épocas remotas, enquanto o caso aproximado mantém um erro pequeno mesmo nessa época. A imagem da direita mostra o desvio da solução aproximada (4.24) com relação à solução numérica da equação (4.21). Nota-se que há um pico neste desvio de pouco mais de 4%. O desvio encontrado é de fato pequeno, o que já justifica a utilização da equação da aproximação proposta. Para detalhar a escala temporal é conveniente reescrever as equações (4.23) e

(4.24) em termos do parâmetro de desvio para o vermelho através da equação (2.27)

$$H = H_0 \left[1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) (z + 1)^{3/2} \right] \quad (4.25)$$

$$H = H_0 \sqrt{\left[1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) (z + 1)^{3/2} \right]^2 + \Omega_{R_0} (z + 1)^4}. \quad (4.26)$$

O mesmo procedimento gráfico é feito utilizando os resultados (4.25) e (4.26), neste caso fica evidente na figura 5 a discrepância entre a solução analítica para o parâmetro de Hubble (4.25) com o comportamento da solução numérica para um estágio inicial do Universo, enquanto a solução aproximada (4.26) ainda mantém uma ótima precisão.

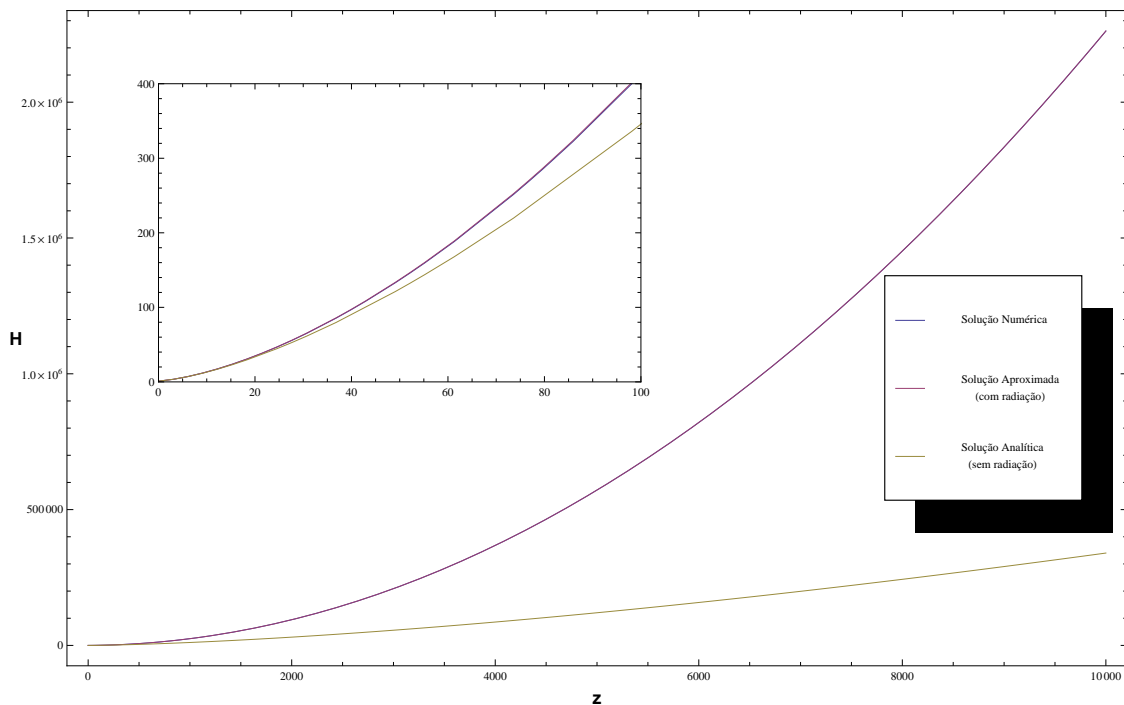


Figura 5: Comparação entre a solução numérica da equação (4.21) com a solução analítica sem a contribuição da radiação (4.25) e com a solução aproximada (4.26).

Da mesma forma que a figura 4, a figura 6, na imagem esquerda, mostra o desvio relativo entre a solução numérica de (4.21) e os soluções aproximadas (4.25) e (4.26), mostrando que o erro no caso que negligencia a radiação diverge para o Universo primordial. Já a imagem da direita, mostra que o percentual de erro entre a solução aproximada (4.26) e a solução numérica é mantida, no entanto, diferente do que ocorre na figura 4, o maior percentual de erro ocorre para o universo atual, onde a contribuição da radiação não é muito significativa.

Tendo em mãos o parâmetro de Hubble, deve-se olhar agora para a evolução temporal da densidade de energia das componentes restantes. No caso da energia escura, sua densidade de energia pode ser obtida através da combinação direta das equações (4.3) e

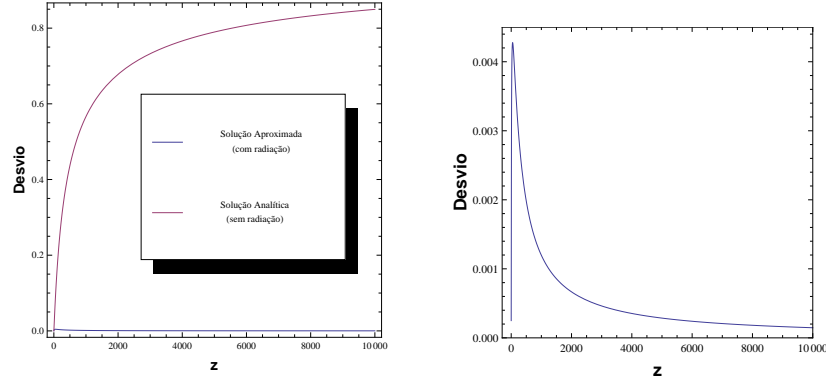


Figura 6: **Figura esquerda:** Desvios relativos entre a solução numérica da equação (4.21) e a soluções analítica, sem a radiação (4.25), em rosa, e a solução aproximada (4.26) em azul. **Figura direita:** Desvio relativo entre a solução numérica de (4.21) e a solução aproximada (4.26) em detalhe.

(4.24)

$$\rho_\Lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G} (1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} - \Omega_{R_0}) \sqrt{[1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{-3/2}]^2 + \Omega_{R_0} a^{-4}} \quad (4.27)$$

Já a densidade de energia da matéria escura pode ser obtida através da aplicação dos resultados anteriores na equação (4.15)

$$\begin{aligned} \rho_M &= \frac{3H^2}{8\pi G} - \sigma H - \rho_B - \rho_R \\ \rho_M &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left\{ [1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{-3/2}]^2 - \Omega_{B_0} a^{-3} \right. \\ &\quad \left. - (1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} - \Omega_{R_0}) \sqrt{[1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{-3/2}]^2 + \Omega_{R_0} a^{-4}} \right\} \quad (4.28) \end{aligned}$$

A figura 7 mostra explicitamente a evolução das densidades de energia para todas as componentes do universo (4.19), (4.20), (4.27) e (4.28). Analisando a figura fica claro que o modelo com decaimento do vácuo reproduz uma fase dominada por radiação no início do universo, uma fase intermediária dominada por matéria escura e uma fase atual dominada por energia escura [7, 16].

Com todos esses resultados em mãos é possível analisar a resposta do modelo com decaimento do vácuo ao problema da coincidência cósmica. Identificando uma componente de matéria total com o índice m , como a soma da componente bariônica com a componente da matéria escura, sua densidade pode ser obtida pela soma das equações (4.19) e (4.28)

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[(1 - \Omega_{m_0} + \Omega_{m_0} a^{-3/2})^2 \right. \\ &\quad \left. - (1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{R_0}) \sqrt{(1 - \Omega_{m_0} + \Omega_{m_0} a^{-3/2})^2 + \Omega_{R_0} a^{-4}} \right]. \quad (4.29) \end{aligned}$$

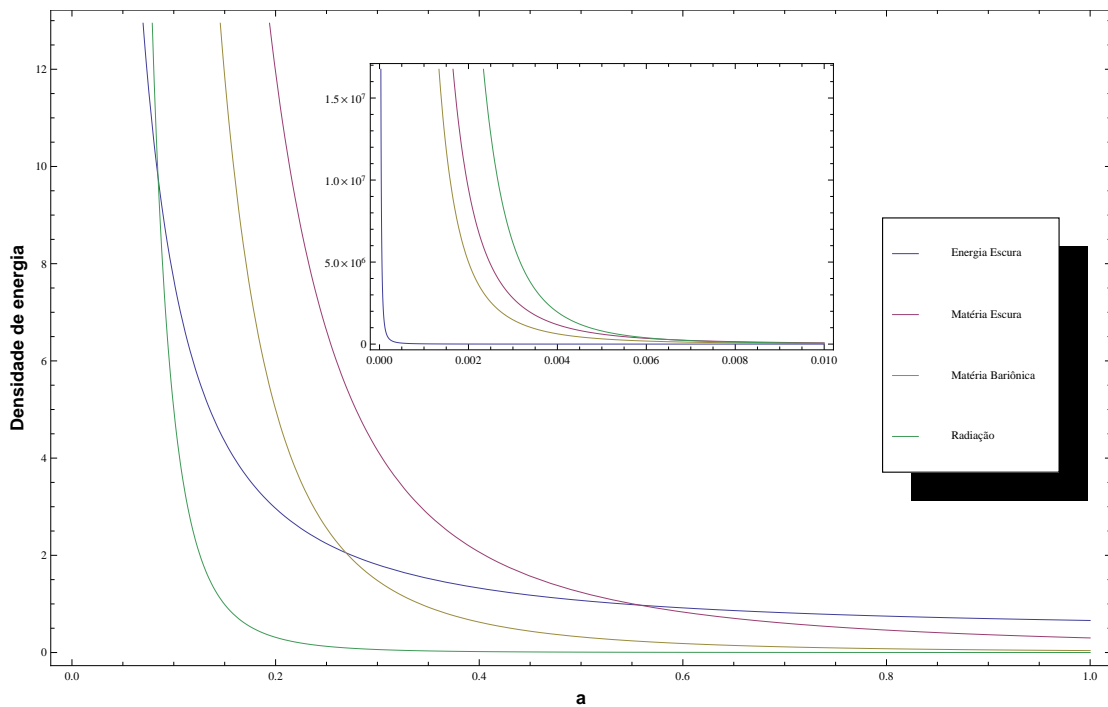


Figura 7: Evolução da densidade de energia para cada uma das componentes do universo.

Dividindo a equação anterior pela equação (4.27), obtém-se

$$\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} = \frac{(1 - \Omega_{m_0} + \Omega_{m_0} a^{-3/2})^2 - (1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{R_0}) \sqrt{(1 - \Omega_{m_0} + \Omega_{m_0} a^{-3/2})^2 + \Omega_{R_0} a^{-4}}}{(1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{R_0}) \sqrt{[1 - \Omega_{m_0} + \Omega_{m_0} a^{-3/2}]^2 + \Omega_{R_0} a^{-4}}}. \quad (4.30)$$

Para ilustrar o comportamento da razão entre a densidade de energia da matéria e a densidade de energia da energia escura, a figura 8 mostra as curvas obtidas para as equações (2.55) e (4.30) utilizando os valores padrão para os parâmetros de densidade.

Verifica-se que no modelo com decaimento do vácuo esta razão atinge a unidade em um tempo anterior ao modelo cosmológico padrão, e por isso, de alguma forma é possível afirmar que o problema da coincidência cósmica é aliviado.

Este fato fica mais claro no caso presente na literatura, em que a radiação é negligenciada e não há uma componente bariônica conservada isoladamente. Neste caso, a razão entre a densidade de energia da matéria e a densidade de energia da energia escura é

$$\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} = \frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{\Lambda_0}} a^{-3/2}. \quad (4.31)$$

4.2 Testes geométricos

Para avaliar os resultados obtidos para o fundo homogêneo e isotrópico do modelo com decaimento do vácuo serão realizados os testes com as oscilações acústicas bariônicas, com a posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e com Supernovas do tipo IA.

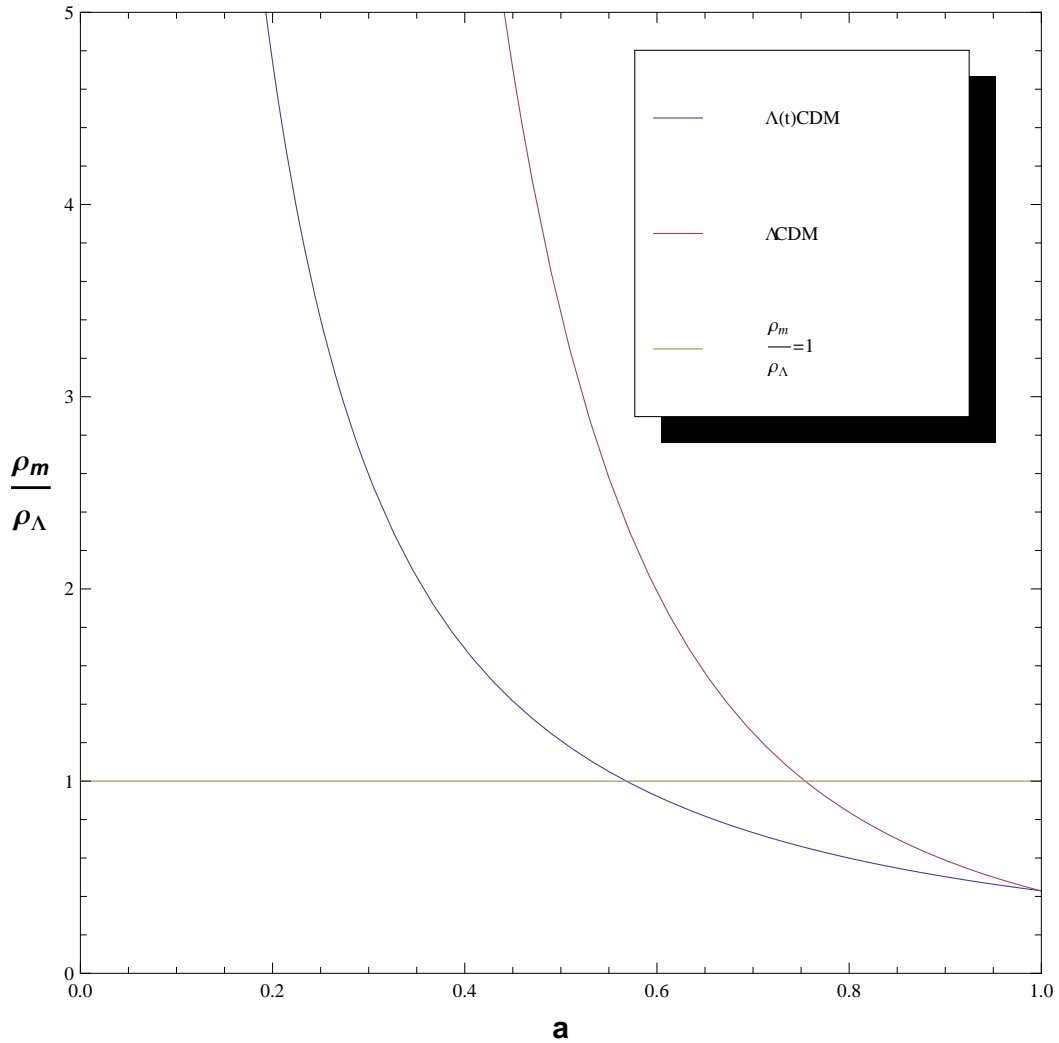


Figura 8: Razão $\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda}$ para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM.

Essa mesma análise, para o caso em que a componente bariônica é negligenciada, pode ser encontrada em [8, 9, 10, 16] e favorecem uma concordância para valores de matéria superiores aos do modelo padrão.

Todos estes testes do fundo homogêneo e isotrópico estão relacionados com formas diferentes de medir distâncias no Universo em expansão. A fonte de dados da cosmologia é toda proveniente da radiação que chega até nós, e por isso a aplicação cosmológica de medidas de distâncias no Universo consiste em medir a distância que um raio de luz percorre a partir de sua emissão em um tempo passado t , que está associado a um parâmetro de desvio para o vermelho $z = z(t)$, até chegar até nós no tempo atual t_0 , que por sua vez também está associado a um $z_0 = z(t_0) = 0$.

Neste contexto o parâmetro de Hubble desempenha um papel importante, caracterizando a expansão do universo. No entanto, note que segundo os resultados obtidos em (4.25) e (4.26), o parâmetro de Hubble não distingue a componente de matéria escura da componente de matéria bariônica, o que produz resultados degenerados para análises individuais dessas componentes. Para uma comparação mais clara com a literatura,

escolhe-se fixar a componente bariônica conforme [1] em $\Omega_{B_0} \times h^{-2} = 0,022242^7$. Dessa forma, assim como o modelo Λ CDM plano, restam os parâmetros Ω_{M_0} e h para serem avaliados.

A análise do modelo segundo os testes do fundo homogêneo e isotrópico é feita seguindo exatamente os passos de [16]. No que diz respeito a seleção de parâmetros, esta análise será feita com base na estatística bayesiana [49]. Neste caso, sua aplicação consiste em construir uma função χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.32)$$

na qual y_i são dados observacionais que serão comparados à sua previsão teórica $y(x_i|\theta)$, construída a partir de outros dados observacionais x_i e de um conjunto de parâmetros θ .

Então, a probabilidade de que determinado parâmetro assuma algum valor é definida através da função de verossimilhança⁸

$$\mathcal{P} \propto \exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right). \quad (4.33)$$

Fica claro então que o estado mais provável é aquele que minimiza a função χ^2 .

Neste trabalho serão encontrados quais parâmetros minimizam a função (4.32) em cada teste e, através do processo de marginalização [49], será estabelecido individualmente qual valor preferido para cada parâmetro através de (4.33).

4.2.1 Distância própria

A distância própria é definida como o comprimento espacial da geodésica percorrida. Considerando um universo espacialmente plano, a geodésica não deve possuir variação angular, e para um deslocamento infinitesimal assume a seguinte forma

$$d\Sigma = a(t) dr. \quad (4.34)$$

Sendo assim, a distância própria até o tempo atual é obtida através da sua integração radial

$$d_p(t_0) = \int_0^r dr' = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (4.35)$$

Para escrever a distância própria em termos do parâmetro de Hubble, é conveniente escreve-la como uma função do parâmetro de desvio para o vermelho

$$dt' = -\frac{dz'}{(1+z')H(z')} \Rightarrow d_p(t_0) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (4.36)$$

⁷Este resultado também concorda com a previsão da nucleossíntese primordial [48].

⁸A verossimilhança é uma função de densidade de probabilidade, em inglês *Probability Density Function*, ou simplesmente PDF.

4.2.2 Distância de diâmetro angular

A distância de diâmetro angular pode ser definida para objetos cujos comprimentos transversais são conhecidos, como mostra a figura 8. Tais objetos são denominados régua padrão.

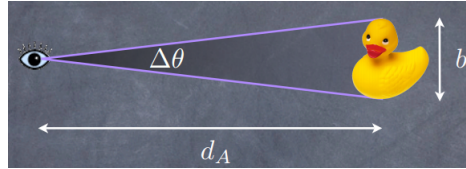


Figura 9: Distância de diâmetro angular.

Uma vez que as distâncias transversais são muito menores que a distância que a luz percorre até o observador, define-se a distância de diâmetro angular como a razão entre o tamanho transversal b^9 pelo ângulo definido em relação ao observador $\Delta\theta$

$$d_A = \frac{b}{\Delta\theta}, \quad (4.37)$$

Para um universo espacialmente plano, a razão entre um deslocamento transversal infinitesimal e o respectivo deslocamento angular pode ser obtido a partir da métrica de FLRW (2.21), na qual não há mudança na variável radial r e na variável angular ϕ

$$d_A = \frac{ds}{d\theta} = a(t) r. \quad (4.38)$$

A variável r corresponde a distância percorrida pela luz até chegar ao observador. Num Universo plano, essa distância coincide com a distância própria (4.35)

$$d_A = \frac{1}{(z+1)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (4.39)$$

4.2.3 Distância de luminosidade

Uma forma indireta de medir distâncias pode ser obtidas para fontes de luz cujas luminosidades são conhecidas, como mostra a figura 9. Tais objetos são denominados velas padrão.

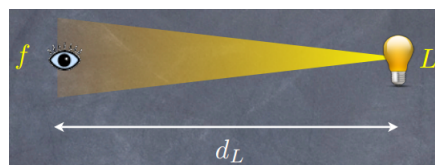


Figura 10: Distância de luminosidade.

⁹Esse tamanho transversal b se refere à distância própria entre as extremidades da régua padrão no tempo t , medida por um observador em t_0 .

A distância de luminosidade é definida em termos da luminosidade do objeto ao qual deseja-se medir a distância, e do fluxo de luz emitida por esse objeto que atinge o observador

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}. \quad (4.40)$$

onde a luminosidade é definida como a razão da energia transmitida por intervalo de tempo.

Em geral, as dimensões das fontes luminosas no Universo são desprezíveis em relação à distância percorrida pela luz emitida, o que significa que essas fontes de luz podem ser descritas como um ponto. Neste caso, para um Universo plano, a luz deve se propagar com simetria esférica, de modo que o fluxo de luz que atinge o observador é

$$f = \frac{E_0}{4\pi r^2 \Delta t_0}, \quad (4.41)$$

onde E_0 é a energia do fóton que chega ao observador, e Δt_0 é o intervalo de tempo entre o recebimento de dois fótons.

Sabe-se que a energia de um fóton é proporcional à frequência da onda eletromagnética, enquanto o intervalo de tempo entre a emissão de dois fótons é inversamente proporcional à mesma frequência. Então, utilizando a equação (2.25) as razões entre a energia que chega ao observador e a energia emitida originalmente pela fonte, bem como entre o intervalo de tempo entre a emissão de dois fótons consecutivos pela fonte e o intervalo de tempo entre dois fótons recebidos pelo observador são

$$\frac{E_0}{E} = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{1+z}. \quad (4.42)$$

Utilizando a definição da luminosidade da fonte de radiação eletromagnética, o fluxo que chega ao observador (4.41) pode ser escrito utilizando o resultado anterior

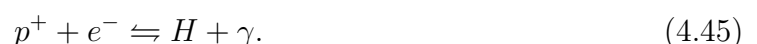
$$f = \frac{L}{4\pi r^2 (z+1)^2} \quad (4.43)$$

Identificando novamente a variável r com a distância própria percorrida pela luz emitida por uma fonte até chegar ao observador num Universo plano, obtém-se que a distância de luminosidade (4.40) pode ser escrita em termos do parâmetro de Hubble como

$$d_L = (z+1) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (4.44)$$

4.2.4 Oscilações acústicas bariônicas

Alguns minutos após a singularidade inicial, os primeiros prótons do Universo podiam interagir com os elétrons através da seguinte reação



Inicialmente, a escala de energia dos fótons favorecia a reação no sentido esquerdo, fazendo do Universo um sistema ionizado. Além disso, fótons podiam ainda interagir com os elétrons livres no Universo via espalhamento Thomson [50].

Nesta época, a taxa de espalhamento era tão alta que o livre caminho médio dos fótons espalhados era menor que o raio de Hubble, aprisionando os fótons e tornando o universo opaco. Esse acoplamento dos fótons com os elétrons implica que essas componentes deveriam estar em equilíbrio térmico, caracterizando um único fluido de plasma ionizado.

Enquanto isso, flutuações no potencial gravitacional da componente de matéria escura, que por não interagir eletromagneticamente já é desacoplada, produzem gradientes de pressão e geram ondas de som nesse plasma. Essa influência, devido à instabilidade gravitacional da matéria escura, no fluido formado pela componente bariônicas e pela componente de radiação é denominada efeito Sachs-Wolfe.

A evolução do Universo prevê sua expansão e resfriamento, até que, quando a escala de energia dos fótons se torna menor que $13,6eV^{10}$ eles passam a ser incapazes de realizar a reação de fotoionização, e a equação (4.45) passa a ser favorecida no sentido direito. Dessa forma, os prótons passam a se combinar com os elétrons formando átomos de hidrogênio. Este período, no qual o Universo passa a ser eletricamente neutro, é denominado recombinação.

A partir da recombinação, os fótons passam a interagir com elétrons dos átomos de hidrogênio, o que reduz drasticamente a taxa de espalhamento Thomson, uma vez que essa interação passa a ser possível somente para valores quantizados de frequência. Começa então o período de desacoplamento entre a componente bariônica e a componente de radiação¹¹, que passam a evoluir independentemente segundo (2.33) e (2.37). É nesta época que as ondas sonoras deixam de existir.

No entanto essas ondas deixam marcas que podem ser medidas atualmente. No caso da componente bariônica há impressões em largas escalas, denominadas oscilações acústicas bariônicas¹², que podem ser quantificadas utilizando a função de correlação [51], através de uma quantidade denominada média geométrica, definida por

$$D_V(z) = \left\{ [1+z]^2 d_A^2 \frac{z}{H(z)} \right\}^{1/3}, \quad (4.46)$$

na qual d_A é a distância de diâmetro angular, definida em (4.39).

Observacionalmente, o *survey* SDSS¹³, através de uma análise de distribuição de galáxias [52], mediu um máximo para essas oscilações acústicas bariônicas em uma época descrita por $z \approx 0,35$, resultando em uma média geométrica $D_V(0,35) = (1,300 \pm 0,088)\text{Gpc}$. Além disso, um outro valor para a média geométrica foi obtido indiretamente para $z \approx 0,2$ [53], resultando no valor $D_V(0,2) = (0,748 \pm 0,057)\text{Gpc}$.

¹⁰Energia de ionização do hidrogênio.

¹¹Rigorosamente o termo desacoplamento é associado ao instante em que o livre caminho médio dos fótons supera o raio de Hubble.

¹²Em inglês, *Baryonic Acoustic Oscillations*, ou simplesmente BAO.

¹³Mais informações sobre o *survey* disponíveis no sítio <http://www.sdss.org/>.

A aplicação da estatística bayesiana resulta numa função χ_{BAO}^2 dada por

$$\chi_{BAO}^2 = \frac{[D_V(0, 35) - 1,300]^2}{0,088^2} + \frac{[D_V(0, 2) - 0,748]^2}{0,057^2}. \quad (4.47)$$

A análise isolada das oscilações acústicas bariônicas não possui um valor de fato estatístico devido ao número de dados, e por isso seu valor preferido para os parâmetros cosmológicos não é relevante. No entanto, esse resultado pode fornecer informações de regiões descartáveis em futuras análises combinadas com outros testes. A figura 10 mostra, com níveis de segurança de 1σ , 2σ e 3σ os valores de parâmetros Ω_{M_0} e h que melhores se ajustam aos dados das oscilações acústicas bariônicas.

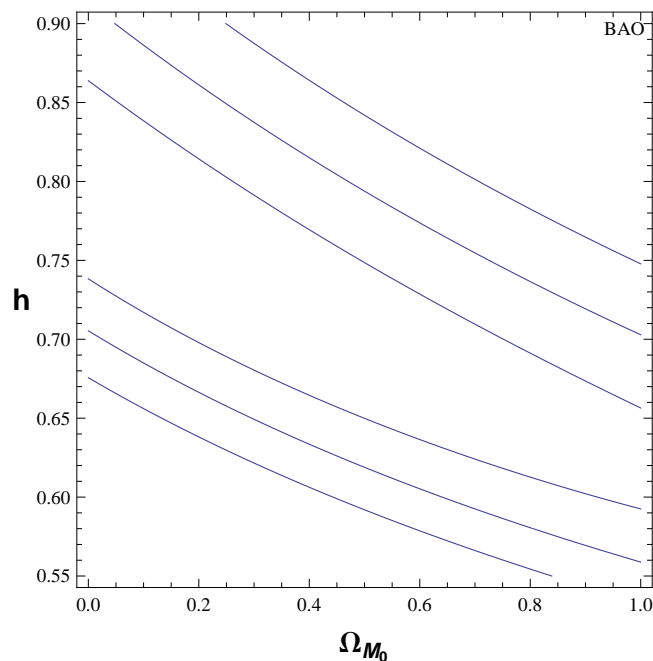


Figura 11: Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para oscilações acústicas bariônicas.

De fato, percebe-se que as oscilações acústicas bariônicas não são muito restritivas para esses parâmetros, e além disso, não difere muito da análise no modelo padrão [16].

4.2.5 Posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo

Uma evidência de que de fato havia um acoplamento da radiação com a componente bariônica é que o efeito Sachs-Wolfe também produz assinaturas na componente de radiação, que pode ser observado através da análise do espectro de temperatura da radiação cósmica de fundo.

A radiação cósmica de fundo é constituída dos fótons que sofreram o último espalhamento no Universo, imediatamente antes das componentes de matéria bariônica e de radiação se tornarem completamente independentes. O momento em que ocorreu o último espalhamento no Universo pode ser obtido para o modelo padrão de acordo com [54, 55],

e segundo [16] não difere muito para o modelo estudado

$$z_{ls} = 0,986z_{ls}^* \quad (4.48)$$

z_{ls} é o valor do parâmetro de desvio para o vermelho em que ocorreu o último espalhamento no modelo com decaimento do vácuo, e z_{ls}^* é o valor obtido para o modelo padrão.

Na componente de radiação o efeito Sachs-Wolfe produz desvios de temperatura que podem ser observados através de medidas da radiação cósmica de fundo provenientes de todos os pontos do céu. Como já foi mencionado, esse desvio é muito pequeno, o que leva a crer que o Universo era bastante isotrópico na época do último espalhamento. Matematicamente, a distribuição da temperatura no céu pode ser descrita por uma série de harmônicos esféricos [22]. Uma outra forma de descrever essas flutuações é utilizar uma função de correlação para descrever variações correspondentes a dois pontos separados por uma abertura cuja escala angular é

$$\theta = \frac{\pi}{l}, \quad (4.49)$$

na qual l é um momento multipolar.

O modelo padrão, aliado a dados observacionais [56, 57], indicam que essa anisotropia no espectro de potências da temperatura da radiação cósmica de fundo possui picos para alguns valores de momentos de multipolo, com o primeiro pico em $l_1 = 220,8 \pm 0,7$ (com 1σ de nível de confiança). A figura 11 mostra os dados observacionais confrontados com a previsão teórica do modelo padrão.

Uma análise completa para o modelo com decaimento do vácuo poderia ser feita obtendo todo o espectro de potência da temperatura da radiação cósmica de fundo, porém se trata de uma análise bastante complexa. Por isso, tendo em vista que o modelo padrão reproduz com uma boa precisão o primeiro pico observado, será analisado somente para quais valores os parâmetros cosmológicos reproduzem esse mesmo máximo no modelo estudado.

Para o modelo padrão, a posição do primeiro pico pode ser calculada utilizando a abertura angular definida pela trajetória de uma onda acústica no plasma primordial até o desacoplamento. A velocidade de propagação de uma onda sonora pode ser calculada como [18]

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (4.50)$$

onde, p e ρ são a pressão e a densidade do fluido total.

Para o plasma como um todo a pressão e a densidade deve ser a soma das pressões e densidades das pressões e densidades dos bárions e da radiação. Neste caso, a velocidade de uma onda sonora para altos valores do parâmetro de desvio para o vermelho pode ser obtida usando as equações de estado de cada uma das componentes

$$c_s \approx \sqrt{3 + \frac{9\Omega_{b0}}{4\Omega_{r0}} z^{-1}}. \quad (4.51)$$

Então, seguindo o mesmo procedimento utilizado na definição (4.39), a abertura angular descrita por um fóton em movimento transversal em relação a um observador é

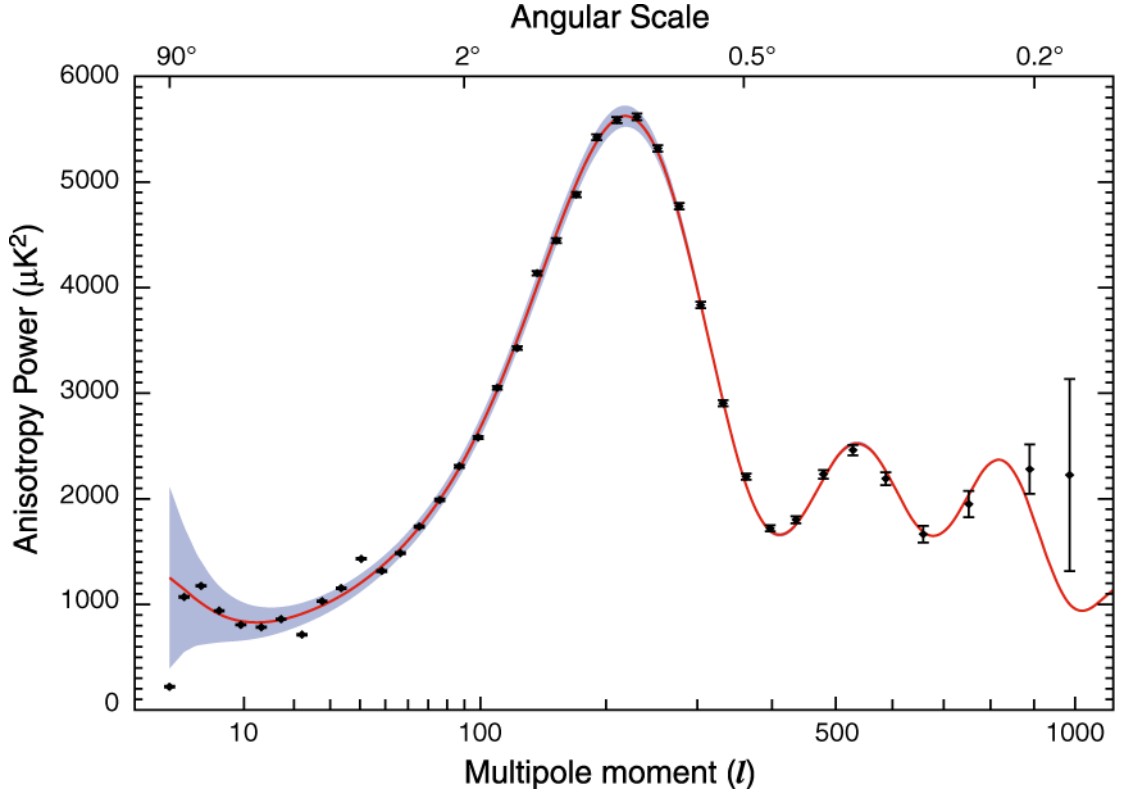


Figura 12: Espectro de potência da temperatura da radiação cósmica de fundo.

dada pela razão entre a distância própria descrita pelo fóton até o último espalhamento¹⁴ e sua distância de diâmetro angular

$$\theta_A = \left[\int_{z_{ls}}^{\infty} c_S \frac{dz}{H(z)} \right] \times \left[\int_{z_{ls}}^{\infty} \frac{dz}{H(z)} \right]^{-1}. \quad (4.52)$$

Por fim, a posição do primeiro pico da anisotropia da radiação cósmica de fundo pode ser obtido como em [58, 59]

$$l_1 = l_A (1 + \delta_1), \quad (4.53)$$

onde, $l_A = \frac{\pi}{\theta_A}$ é a escala acústica, e $\delta_1 \approx 0,267 \left(\frac{10\Omega_{r0}}{3\Omega_{m0}} z_{ls} \right)^{1/10}$ é um termo de correção, já aplicado ao modelo com decaimento do vácuo.

Assim como no caso das oscilações acústicas bariônicas, este teste cosmológico sozinho também não possui relevante valor estatístico. A aplicação da estatística bayesiana resulta numa função χ_{CMB}^2 ¹⁵ dada por

$$\chi_{CMB}^2 = \frac{(l_1 - 220, 8)^2}{(0, 7)^2}. \quad (4.54)$$

A figura 12 mostra, com níveis de segurança de 1σ , 2σ e 3σ os valores de parâmetros Ω_{M0} e h que melhores se ajustam ao primeiro pico da radiação cósmica de fundo.

¹⁴Neste caso deve ser usada a velocidade sonora (4.51).

¹⁵CMB faz referência à radiação cósmica de fundo, em inglês *Cosmic Microwave Background*.

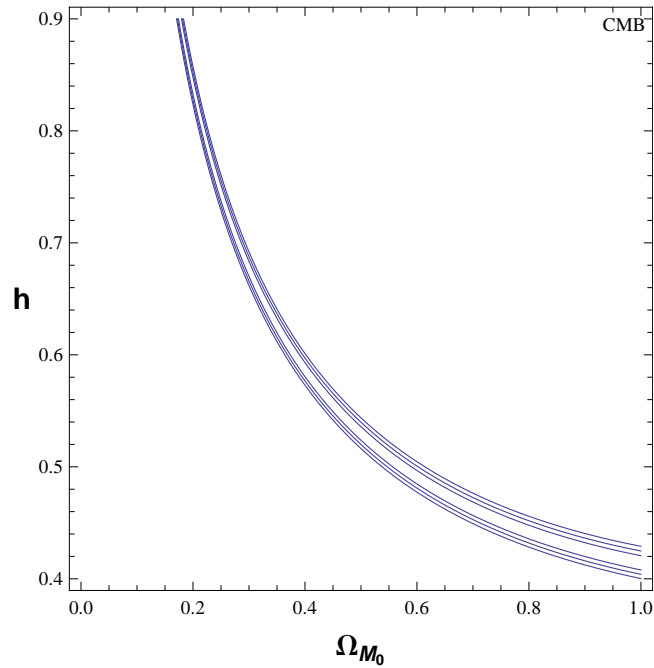


Figura 13: Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para o desvio do primeiro pico da radiação cósmica de fundo.

4.2.6 Supernovas do tipo IA

As supernovas do tipo IA são objetos luminosos com um brilho extremamente intenso e uniforme, o que permite que sejam usadas como velas padrão. Atualmente, sua importância para a cosmologia é de grande valor [60], podendo ser utilizada para a seleção de parâmetros e modelos cosmológicos [8, 61, 62, 63, 64, 65, 66].

Em geral, para um objeto luminoso, cujo fluxo de radiação emitida f é conhecido, define-se a magnitude bolométrica aparente¹⁶ da seguinte forma

$$m = -2,5 \log(f) + C, \quad (4.55)$$

C é uma constante que determina a escala de medida da magnitude aparente¹⁷. A relação anterior pode ser reescrita lançando mão da definição da distância de luminosidade (4.40)

$$m = -2,5 \log\left(\frac{L}{4\pi d_L^2}\right) + C. \quad (4.56)$$

Dessa forma, utilizando o desenvolvimento anterior define-se como a magnitude bolométrica absoluta o valor da magnitude aparente caso a distância do objeto até o observador fosse de 10pc

$$M = -2,5 \log\left[\frac{L}{4\pi (10\text{pc})^2}\right] + C. \quad (4.57)$$

¹⁶Magnitude relativa a soma da contribuição de todo o espectro eletromagnético.

¹⁷Inicialmente o valor padrão para a magnitude aparente era determinado pela estrela Vega, o que definia $C = 2,5 \log(f_{\text{Vega}})$, no entanto atualmente a constante C é determinada instrumentalmente.

Observacionalmente é conveniente introduzir o módulo de distância, dado pela diferença entre as magnitudes bolométricas aparente e absoluta. Explicitando a diferença entre as equações (4.56) e (4.57), já incluindo a distância de luminosidade via (4.44), obtém-se

$$\mu = 5 \log \left[(z + 1) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] - 5 \log(h) + 42,384, \quad (4.58)$$

onde está implícita uma troca da escala de distância de 10pc para 1Mpc

No entanto, as medidas reais de luminosidade não contemplam todo o espectro eletromagnético, o que faz com que seja necessário uma calibração dos dados observacionais. Neste trabalho serão utilizados dados calibrados com dois filtros comuns na literatura: *Multicolor Light Curve Shapes* (MLCS2k2)[67] e *Spectral Adaptive Lightcurve Template* (SALT II)[68, 69].

O teste com Supernovas será feito utilizando dados de módulos de distância das amostras do SDSS, Constitution e Union 2.1. A partir dos dados observacionais será aplicada a estatística bayesiana para a seleção de parâmetros a partir de uma função χ_{SN}^2

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_i^{obs} - \mu^{teo}(z_i)]^2}{\sigma_{SNi}^2}. \quad (4.59)$$

Em cada amostra deve estar contido, para cada uma de suas N Supernovas, os seguintes dados: seu módulo de distância μ^{obs} , o erro em sua medida σ_{SNi} e seu parâmetro de desvio para o vermelho z_i . Desta forma, com os valores de z_i o módulo de distância previsto teoricamente pode ser obtido através de (4.58).

Neste caso, uma vez que o número de dados é extenso, a análise estatística permite que seja inferido quais são os valores preferidos para os parâmetros cosmológicos através da minimização da função χ_{SN}^2 [49]. Após um processo de marginalização, será feita ainda uma análise a função de verossimilhança para encontrar o valor individual de melhor ajuste para cada parâmetro.

Com o intuito de comparar o modelo com decaimento do vácuo com o modelo Λ CDM, a partir desta análise, será utilizada a função χ_ν^2 , denominada χ^2 reduzido, definida como a razão entre o valor mínimo da função χ_{min}^2 pelo número de graus de liberdade ν

$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi_{min}^2}{\nu}. \quad (4.60)$$

O número de graus de liberdade do modelo é definido como a diferença entre o número de dados observacionais utilizados e o número de parâmetros livres do modelo. Na cosmologia é comum o paradigma de que análise estatística adequada deve possuir o valor de $\chi_\nu^2 \approx 1$ [70].

4.2.6.1 SDSS

A primeira amostra de Supernovas a ser considerada é resultado do projeto *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) que catalogou 288 dados até o ano de 2008. A análise desta amostra será feita utilizando os filtros MLCS2k2 e SALT II para a calibração dos dados.

Como consta em [16], os dados desta amostra, em ambas calibrações, podem ser encontrados no endereço das.sdss.org/va/SNcosmology/sncosm09_fits.tar.gz.

MLCS2k2: A figura 14 ilustra os dados da amostra SDSS calibrados com o filtro MLCS2k2 confrontados com a previsão teórica do módulo de distância obtido através da equação (4.58) com os valores de melhor ajuste para os parâmetros Ω_{M_0} e h .

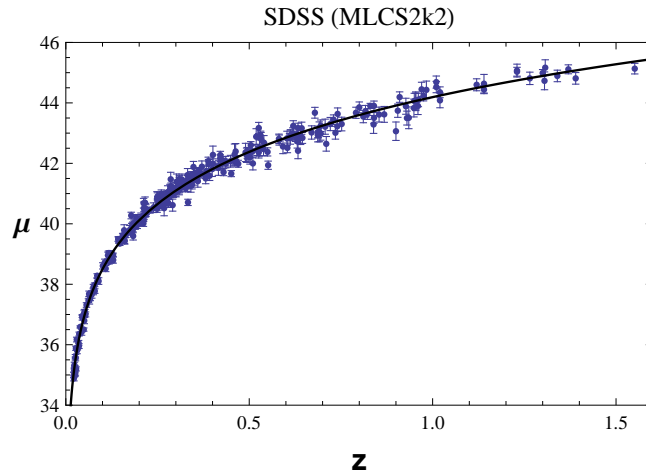


Figura 14: Dados do módulo de distância das Supernovas do SDSS calibradas com o filtro MLCS2k2 confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,429$ e $h = 0,634$.

Seguindo a referência [71], a análise estatística para a seleção de parâmetros deve incluir um erro sistemático $\sigma_{sist} = 0,16$ para os dados de módulos de distância da amostra. A minimização da equação (4.59) com os dados da amostra SDSS (MLCS2k2), com um intervalo de confiança de 1σ , indicam que $0,383 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,476$ enquanto $0,624 \leq h \leq 0,643$.

A figura 15 mostra, com níveis de segurança de 1σ , 2σ e 3σ os valores para os parâmetros Ω_{M_0} e h que melhores se ajustam aos dados de Supernovas do SDSS com o filtro MLCS2k2. De fato os valores de melhor ajuste para esses parâmetros no modelo com decaimento do vácuo destoam do valor presente na literatura para o modelo padrão [1], no entanto concordam com o resultado encontrado para o modelo com decaimento do vácuo testado com a mesma amostra de Supernovas [15, 16].

Utilizando o processo de marginalização aliado à equação (4.33), pode-se ainda inferir qual é o valor preferido para cada um dos parâmetros Ω_{M_0} e h individualmente. Os valores preferidos encontrados para o modelo são $\Omega_{M_0} = 0,431$ e $h = 0,634$, e estão ilustrados graficamente na figura 16.

Neste caso analisamos apenas a componente de matéria escura, no entanto para uma comparação com o modelo Λ CDM é conveniente obter o parâmetro de densidade para a matéria total. Para isso basta somar a contribuição da matéria escura com a componente bariônica fixada $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,485$. A tabela 3 resume os resultados desta análise e estabelece uma comparação com o modelo Λ CDM.

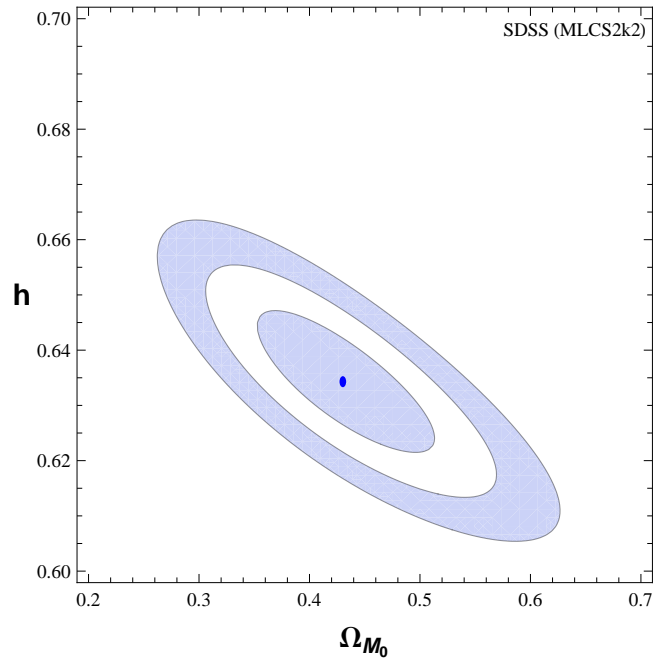


Figura 15: Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do SDSS (MLCS2k2).

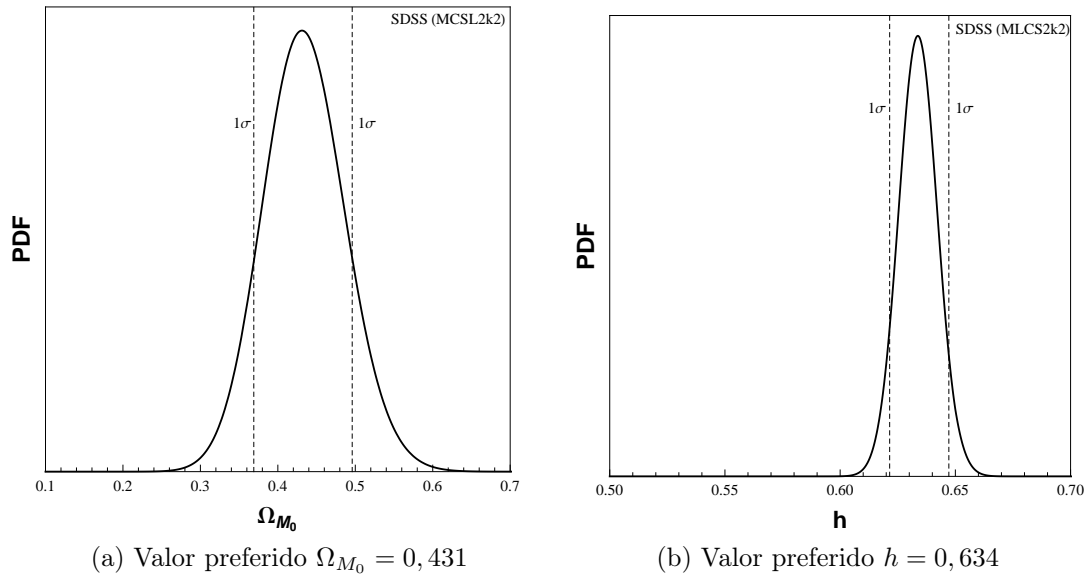


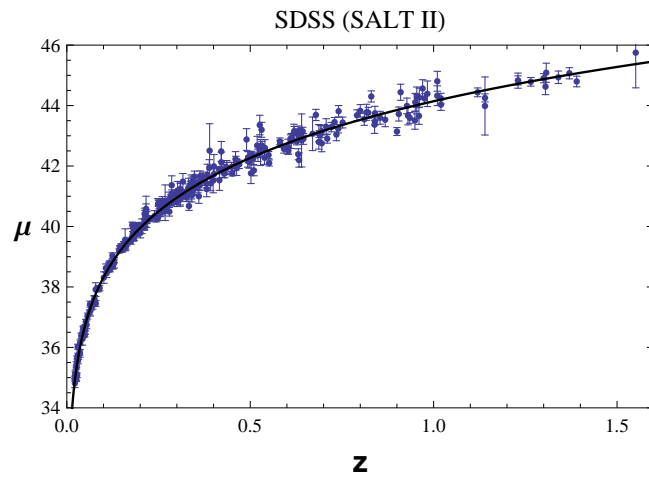
Figura 16: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra SDSS (MLCS2k2). **Figura direita:** Valor preferido de h para amostra SDSS (MLCS2k2).

SALT II: A seguir, continua-se com a mesma amostra de Supernovas, porém calibrados com o filtro SALT II. A figura 17 mostra os dados desta amostra confrontados com o módulo de distância calculado através da equação (4.58), utilizando os valores de melhor ajuste aos dados da amostra.

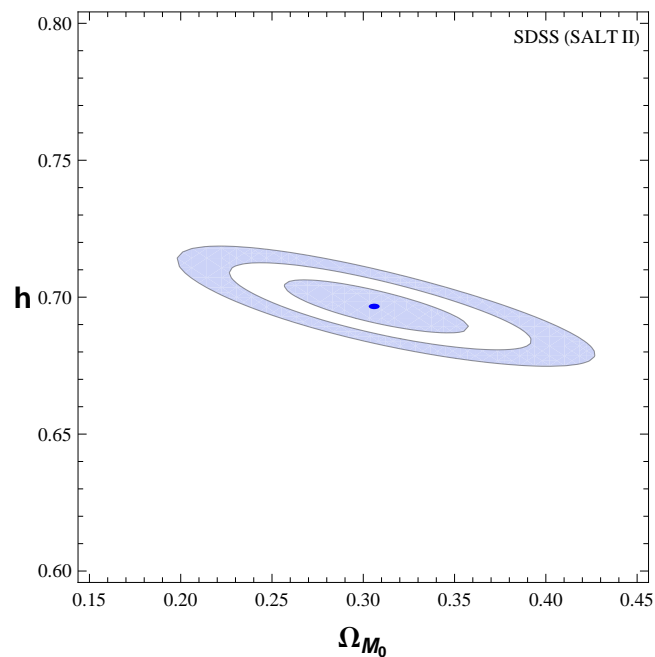
Ainda seguindo a referência [71], um erro sistemático total $\sigma_{sis} = 0,14$ deve ser inserido à análise estatística. Utilizando os dados da amostra SDSS calibrada com o filtro SALT II o resultado da minimização da equação (4.59) indica que $0,267 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,347$ e $0,687 \leq h \leq 0,706$. A figura 18 ilustra este resultado através das curvas de contorno,

Tabela 3: Resultado da análise estatística com Supernovas do SDSS (MLCS2k2).

SNe IA SDSS (MLCS2k2)			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,839	$0,400^{+0,051}_{-0,047}$	$0,639^{+0,010}_{-0,010}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,841	$0,485^{+0,067}_{-0,060}$	$0,634^{+0,013}_{-0,013}$

Figura 17: Dados do módulo de distância das Supernovas do SDSS calibradas com o filtro SALT II confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,306$ e $h = 0,696$.

com níveis de segurança de 1σ , 2σ e 3σ , para os parâmetros Ω_{M_0} e h .

Figura 18: Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do SDSS (SALT II).

Note que a simples mudança de calibração da amostra de Supernovas afeta consideravelmente os valores de melhor ajuste para os parâmetros Ω_{M_0} e h , que agora possuem valores que estão em melhor concordância com o modelo padrão. Este efeito da calibração também concorda com a análise presente na literatura [16].

A análise individual dos parâmetros do modelo através do processo de marginalização resulta nos valores preferidos $\Omega_{M_0} = 0,307$ e $h = 0,696$, que são ilustrados na figura 19.

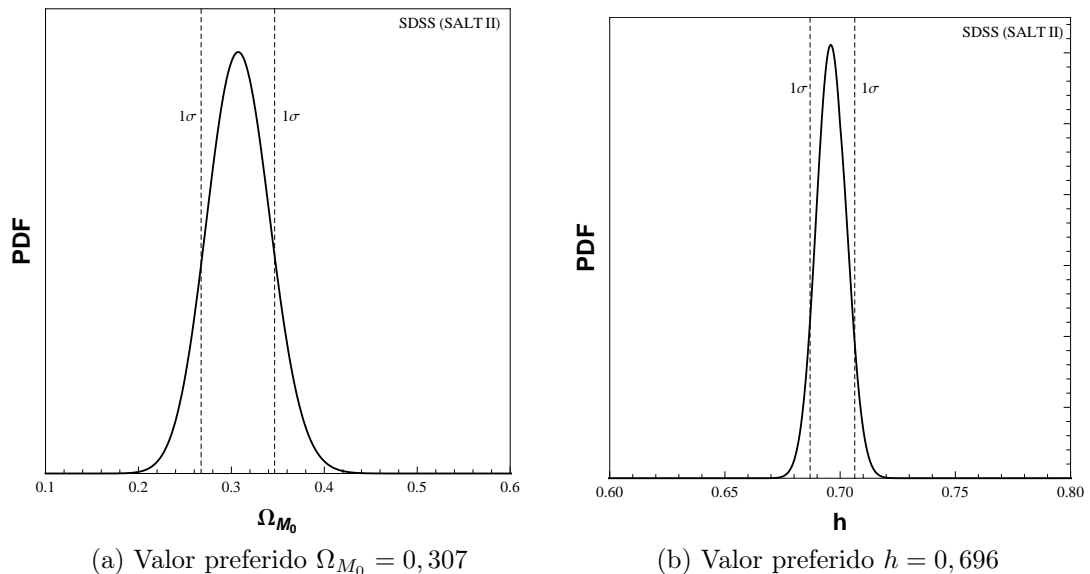


Figura 19: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra SDSS (SALT II). **Figura direita:** Valor preferido de h para amostra SDSS (SALT II).

Para efeito de comparação com o modelo Λ CDM deve-se somar a contribuição da matéria escura à contribuição da matéria bariônica previamente fixada, o que resulta em $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,352$. A tabela 4 sumariza os resultados da análise com Supernovas do SDSS (SALT II) para o modelo estudado junto aos resultados do modelo Λ CDM.

Tabela 4: Resultado da análise estatística com Supernovas do SDSS (SALT II).

SNe IA SDSS (SALT II)			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,862	$0,273^{+0,039}_{-0,036}$	$0,702^{+0,009}_{-0,010}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,866	$0,352^{+0,041}_{-0,039}$	$0,697^{+0,009}_{-0,010}$

4.2.6.2 Constitution

Continuando com os testes envolvendo dados de Supernovas, a segunda amostra utilizada é a Constitution, cujos dados se encontram na referência [72]. Para estabelecer um

paralelo com a análise anterior serão utilizados os dados desta amostra também calibrados com os filtros MLCS2k2 e SALT II.

MLCS2k2: Neste caso, os dados da amostra Constitution calibrados com o filtro MLCS2k2 fazem referência aos dados contidos na tabela MLCS17 da referência [72]. A figura 20 mostra seus 372 dados confrontados com a previsão teórica do módulo de distância obtido através da equação (4.58) com os valores de melhor ajuste para os parâmetros Ω_{M_0} e h .

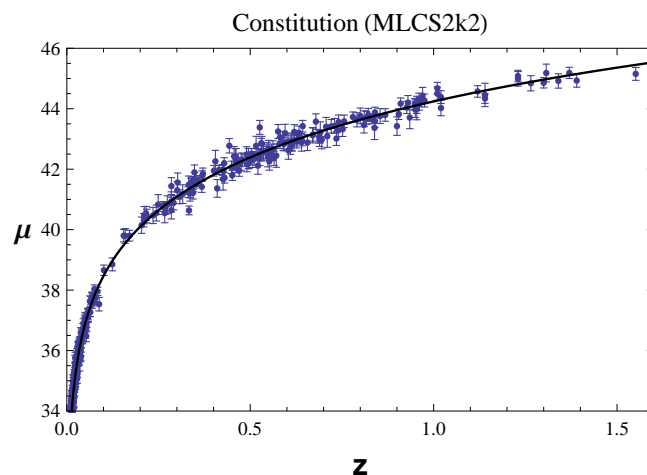


Figura 20: Dados do módulo de distância das Supernovas do Constitution calibradas com o filtro MLCS2k2 confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,345$ e $h = 0,649$.

De acordo com [72], para a análise estatística utilizando esta amostra deve ser inserido um erro sistemático $\sigma_{sis} = 0,078$ aos dados de módulos de distância. O resultado desta análise mostra que $0,320 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,371$ e $0,642 \leq h \leq 0,655$ com 1σ de nível de confiança. Este resultado é ilustrado através da curva de contorno na figura 21.

Ainda que calibrada com o mesmo filtro, percebe-se que essa amostra reduz a contribuição da matéria escura no Universo em relação à amostra SDSS. A análise individual de cada um dos parâmetros indica que os valores de melhor ajuste para o modelo com decaimento do vácuo são $\Omega_{M_0} = 0.346$ e $h = 0,648$, como mostrado na figura 22.

Já a contribuição total da matéria pode então ser calculada para este caso $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,398$. Os resultados da análise do modelo com decaimento do vácuo com a amostra Constitution, calibrada com o filtro MLCS2k2, estão sumarizados na tabela 5, junto aos dados da mesma amostra para o modelo Λ CDM.

SALT II: A figura 23 mostra os 351 dados de Supernovas da amostra Constitution calibrados com o filtro SALT II de [72], confrontados com a previsão teórica do módulo de distância (4.58) para os valores de melhor ajuste para os parâmetros Ω_{M_0} e h .

Para esta amostra deve ser inserido um erro sistemático aos dados de módulos de distância de $\sigma_{sis} = 158$. Neste caso, a minimização da função (4.59) indica que o melhor ajuste aos dados, com um nível de confiança de 1σ , são obtidos para $0,260 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,327$

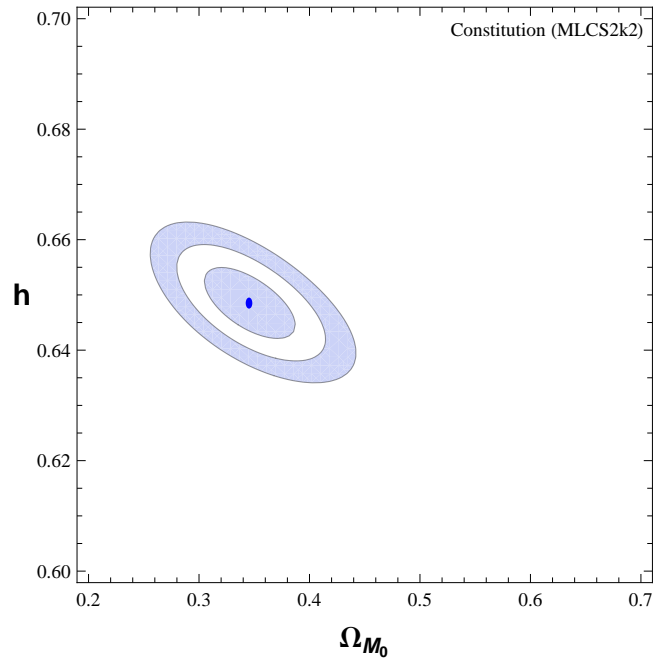


Figura 21: Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do Constitution (MLCS2k2).

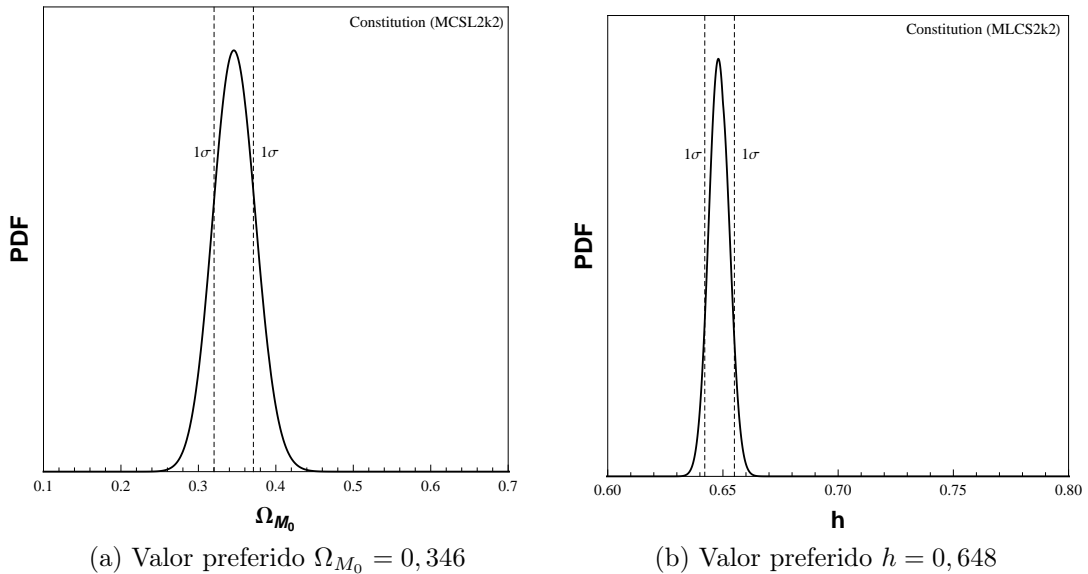


Figura 22: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra Constitution (MLCS2k2). **Figura direita:** Valor preferido de h para amostra Constitution (MLCS2k2).

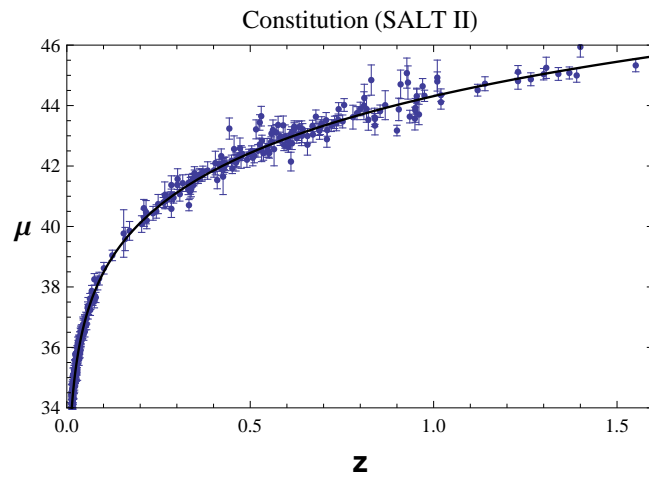
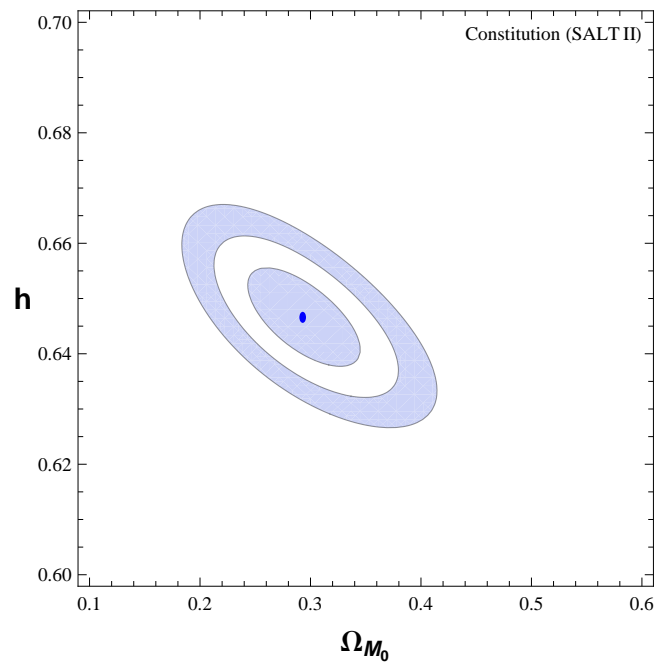
e $0,638 \leq h \leq 0,656$. Este resultado é mostrado na figura 24 através da curva de contorno.

Da mesma forma que foi observado na análise com a amostra SDSS, a mudança de filtro de calibração produz o efeito de amenizar a porção de matéria escura. Individualmente, como mostrado na figura 25, a amostra Constitution (SALT II) prediz que os valores de melhor ajuste para o modelo são $\Omega_{M_0} = 0,294$ e $h = 0,646$.

A comparação com o modelo Λ CDM pode então ser feita através da obtenção da

Tabela 5: Resultado da análise estatística com Supernovas do Constitution (MLCS2k2).

SNe IA Constitution (MLCS2k2)			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,924	$0,324^{+0,026}_{-0,026}$	$0,649^{+0,006}_{-0,006}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,925	$0,398^{+0,026}_{-0,025}$	$0,648^{+0,007}_{-0,006}$

Figura 23: Dados do módulo de distância das Supernovas do Constitution calibradas com o filtro SALT II confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,293$ e $h = 0,647$.Figura 24: Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do Constitution (SALT II).

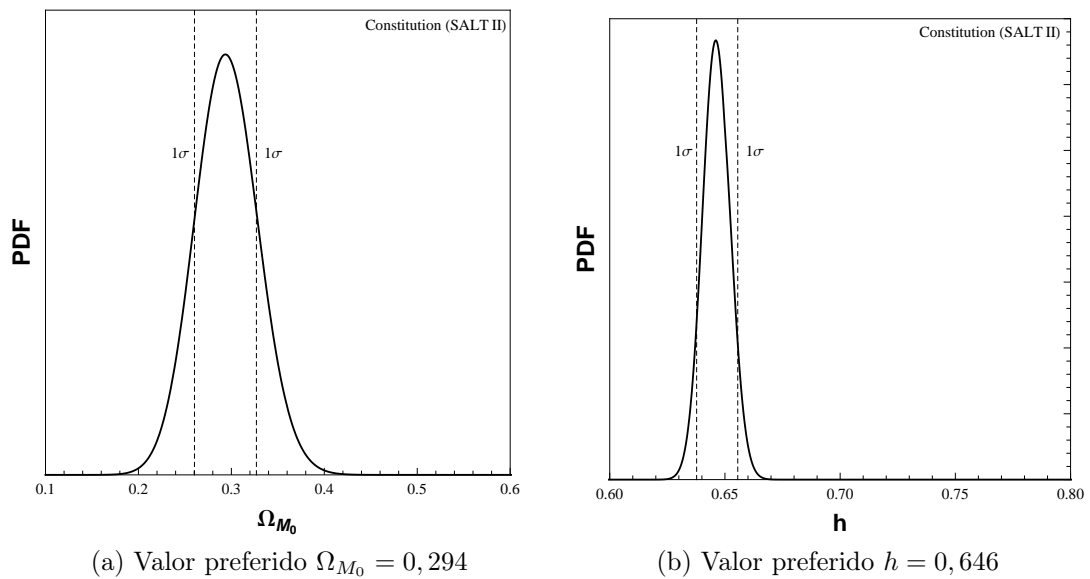


Figura 25: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra Constitution (SALT II). **Figura direita:** Valor preferido de h para amostra Constitution (SALT II).

contribuição total da matéria, dada por $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,347$. A tabela 6 mostra o resultado da análise estatística com Supernovas da amostra Constitution (SALT II) para o modelo com decaimento do vácuo e para o modelo Λ CDM.

Tabela 6: Resultado da análise estatística com Supernovas do Constitution (SALT II).

SNe IA Constitution (SALT II)			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,979	$0,282^{+0,027}_{-0,025}$	$0,649^{+0,007}_{-0,007}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,984	$0,347^{+0,033}_{-0,034}$	$0,646^{+0,010}_{-0,008}$

4.2.6.3 Union 2.1

A última amostra de Supernovas considerada é resultado do *Supernova Cosmology Project* obtido em 2011, e é uma atualização das amostras Union [73] e Union 2 [74], agora com 580 dados [75], calibrados com o filtro SALT II.

Na própria página do projeto, <http://supernova.lbl.gov/>, pode ser encontrado todos os seus dados, e já contém o erro sistemático de cada uma de suas medidas. A figura 26 ilustra esses dados em contraste com a o módulo de distância (4.58) para os valores preferidos do modelo de acordo com a própria amostra Union 2.1.

O resultado da minimização da equação (4.59), com um nível de confiança de 1σ , utilizando os dados da amostra Union 2.1 indicam que $0,230 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,299$ e $0,692 \leq$

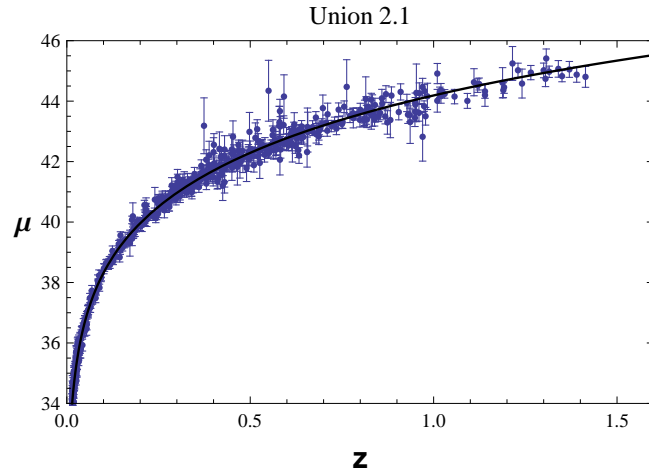


Figura 26: Dados do módulo de distância das Supernovas do Union 2.1 confrontados com sua previsão teórica para $\Omega_{M_0} = 0,265$ e $h = 0,6990$.

$h \leq 0,706$. A figura 27 mostra, com níveis de segurança de 1σ , 2σ e 3σ os valores para os parâmetros Ω_{M_0} e h que melhores se ajustam aos dados da amostra.

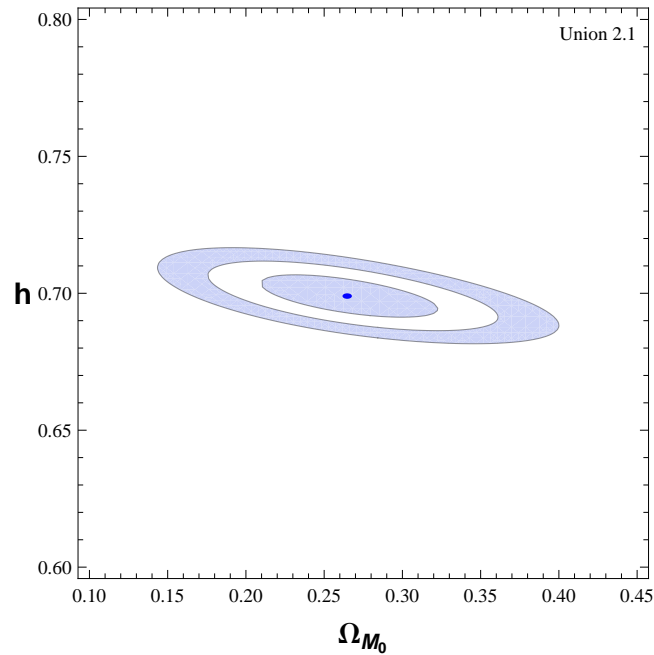


Figura 27: Curva de contorno (Ω_{M_0}, h) para Supernovas do Union 2.1.

A amostra Union 2.1, assim como as outras amostras calibradas com o filtro SALT II, produz resultados mais próximos ao cenário padrão [1]. A análise individual dos parâmetros do modelo através da função de densidade de probabilidade resulta nos seguintes valores preferidos: $\Omega_{M_0} = 0,265$ e $h = 0,698$. Este resultado é ilustrado na figura 28.

Neste caso a componente de matéria total possui parâmetro de densidade $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,311$. A tabela 7 confronta o resultado da análise estatística com as Supernovas da amostra Union 2.1 para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM.

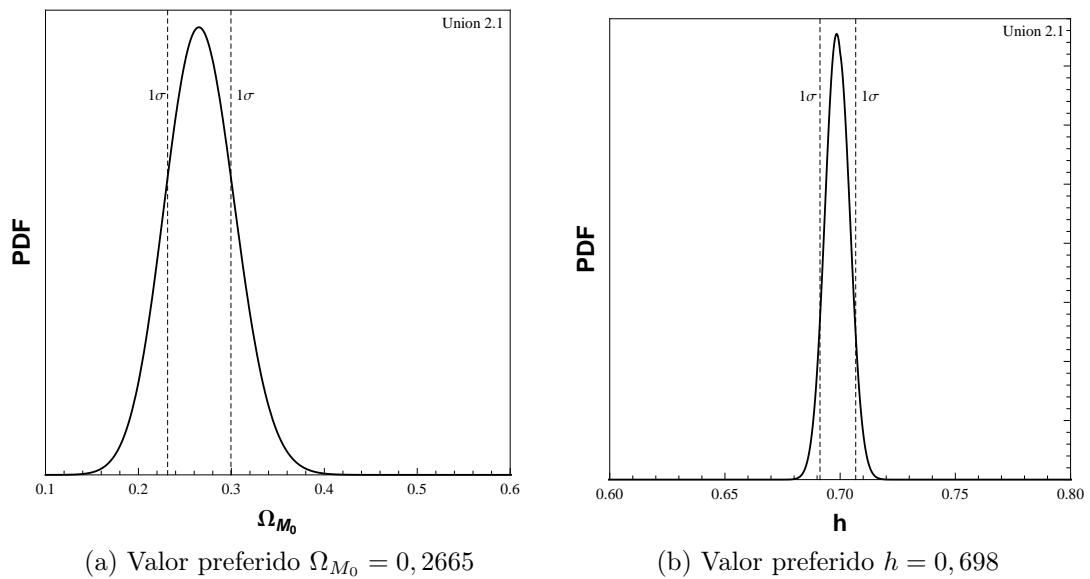


Figura 28: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para amostra Union 2.1. **Figura direita:** Valor preferido de h para amostra Union 2.1.

Tabela 7: Resultado da análise estatística com Supernovas do Union 2.1.

SNe IA Union 2.1			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,973	$0,278^{+0,022}_{-0,022}$	$0,700^{+0,005}_{-0,005}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,975	$0,311^{+0,035}_{-0,034}$	$0,699^{+0,007}_{-0,007}$

4.2.7 Análise conjunta do fundo homogêneo e isotrópico

Os resultados dos testes anteriores podem ser combinados afim de uma análise estatística mais completa do fundo homogêneo e isotrópico. Para isso define-se uma função χ^2_{total} dada pela soma

$$\chi^2_{\text{total}} = \chi^2_{BAO} + \chi^2_{CMB} + \chi^2_{SN}. \quad (4.61)$$

Então, o mesmo procedimento realizado anteriormente deve ser repetido para essa nova função χ^2_{total} . A seguir seguem as análises combinadas utilizando as três amostras de Supernovas usadas anteriormente.

4.2.7.1 BAO+CMB+SNe IA SDSS

MLCS2k2: O resultado da análise estatística da combinação das equações (4.47), (4.54) e (4.59) aplicada à amostra SDSS (MLCS2k2) aponta para $0,317 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,337$ e $0,637 \leq h \leq 0,658$. Este resultado está expresso em destaque, com níveis de confiança de 1σ e 2σ , na figura 29. Além disso, a figura ainda mostra a superposição das curvas de

contorno resultantes das análises das oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e das Supernovas.

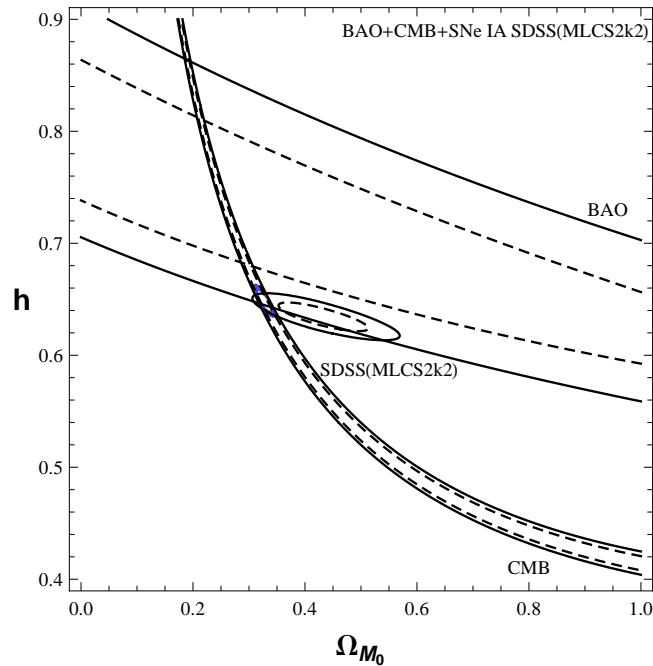


Figura 29: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (MLCS2k2)

Nota-se que os testes possuem concordância com um nível de confiabilidade de 2σ , que está de acordo com a análise presente na literatura. Através do processo de marginalização, esta análise resulta, individualmente, nos valores $\Omega_{M_0} = 0,326$ e $h = 0,648$ como preferidos para o fundo homogêneo e isotrópico. Esse resultado é ilustrado na figura 30 através das funções de densidade de probabilidade.

A comparação com o modelo Λ CDM é mostrada na tabela 8. A contribuição da matéria total no conteúdo energético do Universo segundo esta análise é $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,382$.

Tabela 8: Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA SDSS (MLCS2k2)

BAO+CMB+SNe IA SDSS (MLCS2k2)			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,851	$0,380^{+0,011}_{-0,012}$	$0,642^{+0,005}_{-0,005}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,852	$0,382^{+0,010}_{-0,010}$	$0,648^{+0,010}_{-0,009}$

SALT II Para a mesma amostra SDSS, porém calibrada com o filtro SALT II, o resultado de sua análise estatística indica que $0,274 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,288$ e $0,687 \leq h \leq 0,716$.

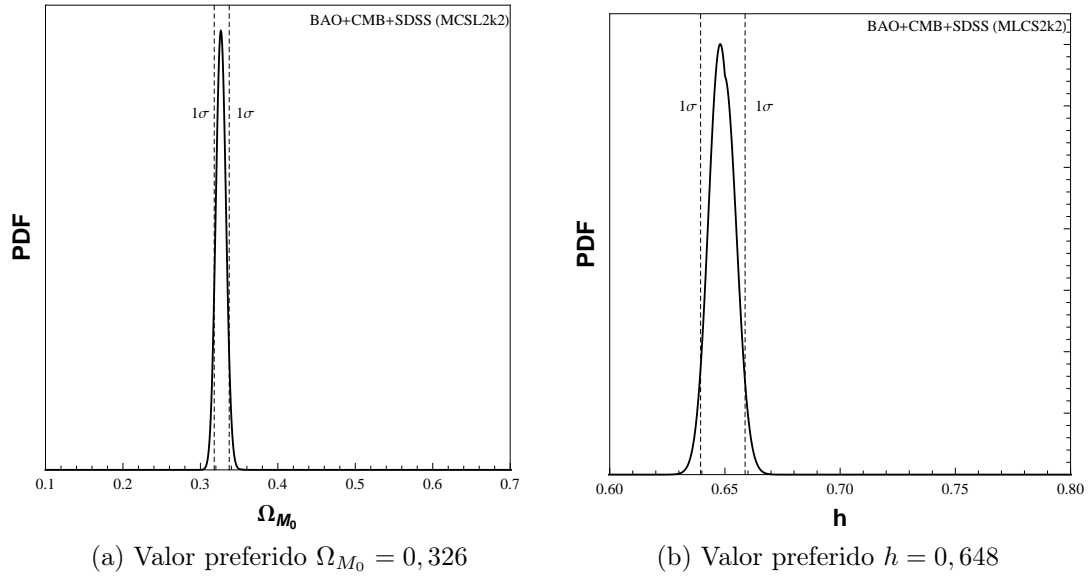


Figura 30: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2). **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2).

A figura 31 mostra a combinação das curvas de contorno individuais para as oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e Supernovas, com destaque para a análise estatística conjunta em azul. Neste caso, a inclusão dos bárions à análise confere uma concordância entre os testes do fundo homogêneo e isotrópico na região de 1σ .

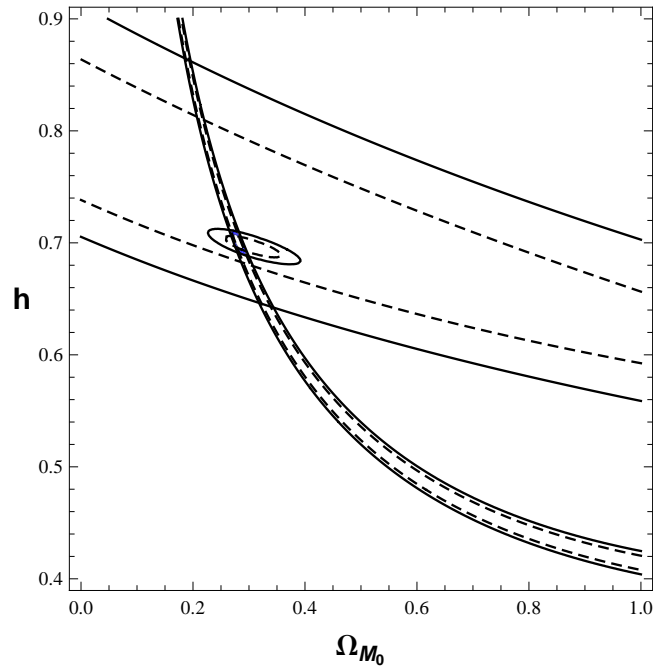


Figura 31: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)

Já na figura 32 é ilustrada a análise individual dos parâmetros, que indicam um valor

preferido para $\Omega_{M_0} = 0,278$ e $h = 0,702$.

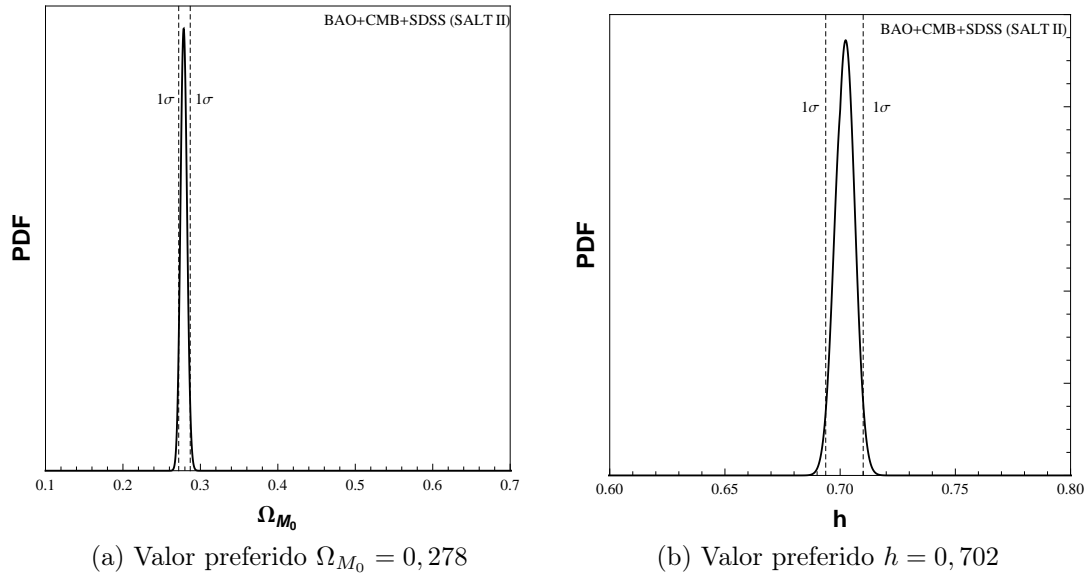


Figura 32: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II). **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II).

Neste caso, a componente total de matéria possui um parâmetro de densidade de $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,326$. Um resumo dos resultados obtidos por essa análise, tal como sua comparação com o modelo Λ CDM se encontra na tabela 9.

Tabela 9: Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)

BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,858	$0,268^{+0,010}_{-0,008}$	$0,694^{+0,005}_{-0,005}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,863	$0,326^{+0,005}_{-0,007}$	$0,701^{+0,015}_{-0,014}$

4.2.7.2 BAO+CMB+SNe IA Constitution

MLCS2k2: Para a amostra de Supernovas Constitution, calibrada com o filtro MLCS2k2, a análise estatística conjunta para o fundo homogêneo e isotrópico resulta nos valores de melhor ajuste $0,318 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,331$ e $0,645 \leq h \leq 0,657$. Este resultado está expresso em destaque, com níveis de confiança de 1σ e 2σ , na figura 33 junto com a superposição das curvas de contorno resultantes das análises das oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e das Supernovas.

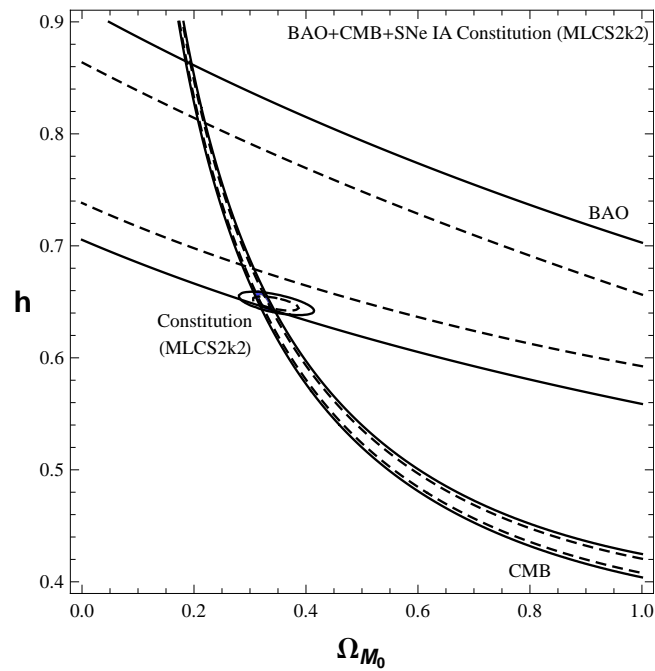


Figura 33: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)

Assim como o caso do SDSS(MLCS2k2) percebe-se uma concordância com um nível de confiabilidade de 2σ . Individualmente, a função de densidade de probabilidade indica que os valores de melhor ajuste para o modelo são $\Omega_{M_0} = 0,324$ e $h = 0,651$. A figura 34 mostra graficamente as respectivas funções de densidade de probabilidade.

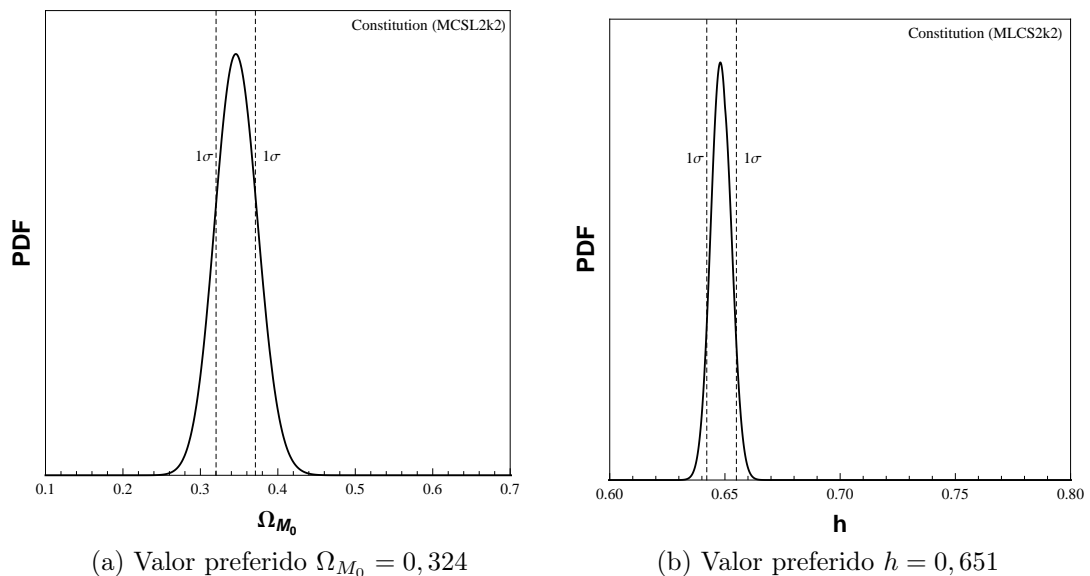


Figura 34: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2). **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2).

O conteúdo total de matéria é dado então por $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,383$. Os resultados da análise estão sumarizados na tabela 10.

Tabela 10: Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)

BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,935	$0,381^{+0,009}_{-0,008}$	$0,650^{+0,005}_{-0,005}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,933	$0,383^{+0,006}_{-0,006}$	$0,651^{+0,005}_{-0,006}$

SALT II: No caso da amostra Constitution calibrada com o filtro SALT II, o resultado de sua análise estatística indica que $0,319 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,338$ e $0,687 \leq h \leq 0,716$. A figura 34 mostra a combinação das curvas de contorno individuais para as oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e Supernovas, com destaque para a análise estatística conjunta em azul. Neste caso, a amostra confere concordância na região de 2σ .

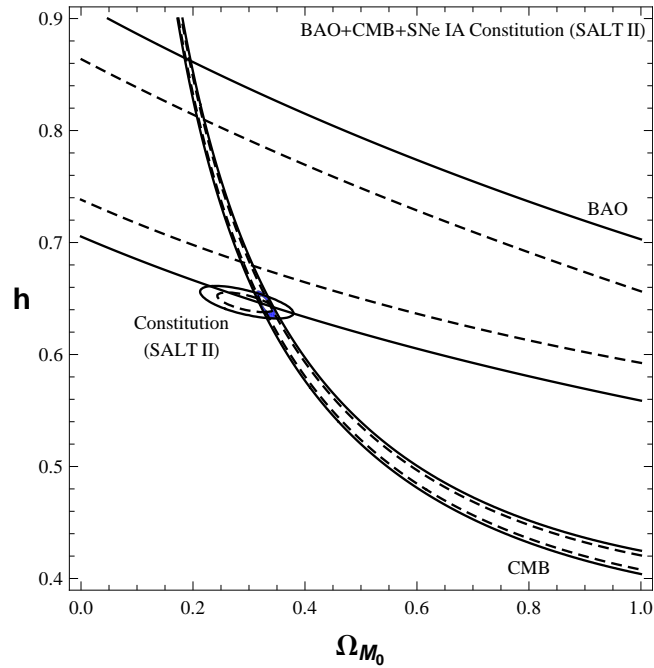


Figura 35: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)

A figura 35 é ilustrada a análise individual dos parâmetros, que indicam um valor preferido para $\Omega_{M_0} = 0,329$ e $h = 0,645$.

Neste caso, a componente total de matéria possui um parâmetro de densidade de $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,382$. Os resultados obtidos nesta análise para o modelo com decaimento do vácuo e para o modelo Λ CDM são confrontados na tabela 11.

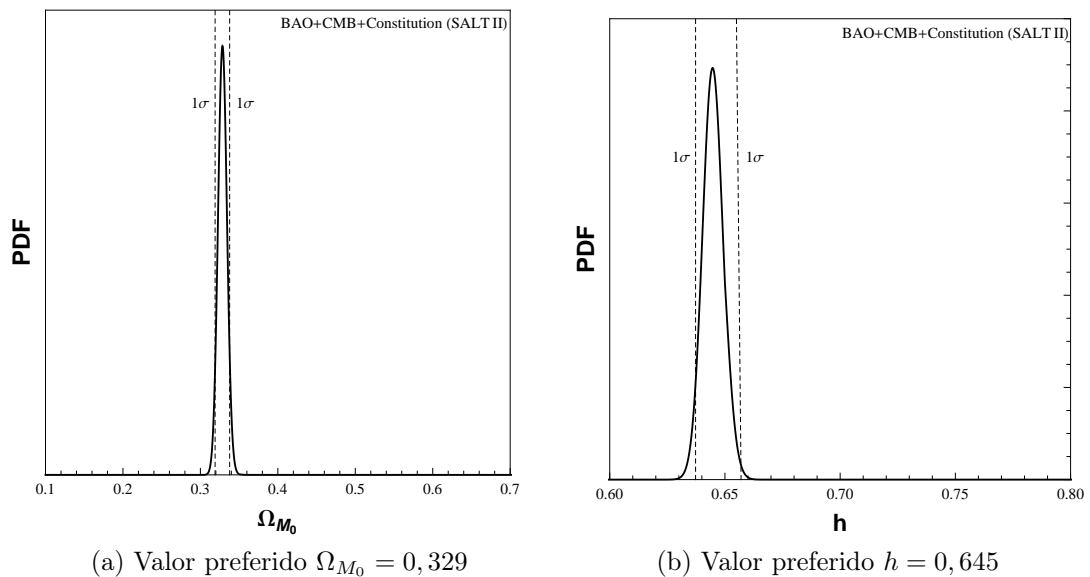


Figura 36: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II). **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II).

Tabela 11: Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)

BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	1,226	$0,268^{+0,007}_{-0,008}$	$0,694^{+0,005}_{-0,005}$
$\Lambda(t)$ CDM	1,224	$0,382^{+0,005}_{-0,007}$	$0,701^{+0,015}_{-0,014}$

4.2.7.3 BAO+CMB+SNe IA Union 2.1

Já para a amostra Union 2.1, o resultado da análise estatística conjunta do fundo homogêneo e isotrópico resulta em $0,271 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,291$ e $0,683 \leq h \leq 0,714$. A figura 33 mostra, com um nível de confiança de 1σ e 2σ , a superposição das curvas de contorno resultantes das análises das oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo e das Supernovas do Union 2.1. Em destaque está a curva de contorno para a análise combinada dos testes. Neste caso também há uma concordância na região de 1σ nos testes do fundo homogêneo e isotrópico.

Os valores preferidos para o modelo individualmente, determinados através da análise da função verossimilhança, são $\Omega_{M_0} = 0,280$ e $h = 0,699$. A figura 34 ilustra este resultado.

Por fim, a análise conjunta dos testes indica que o parâmetro de densidade da matéria total do Universo é $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,328$. Os resultados das análises para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ são confrontados na tabela 10.

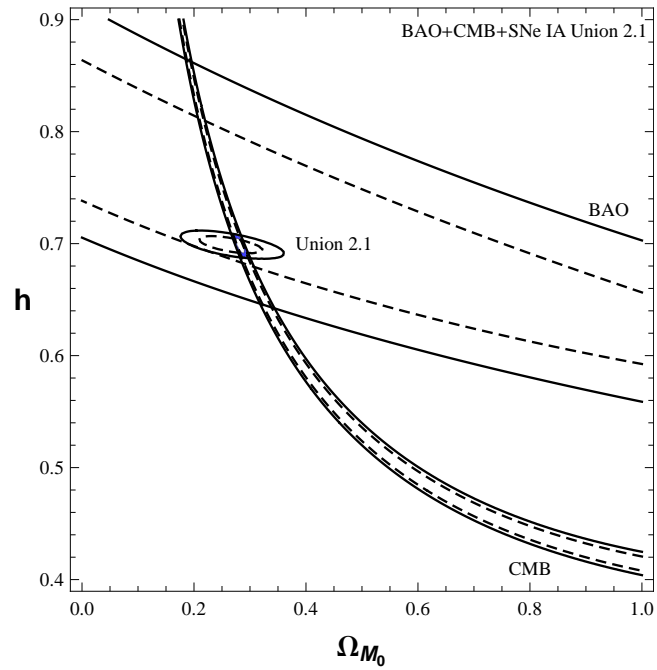


Figura 37: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Union 2.1.

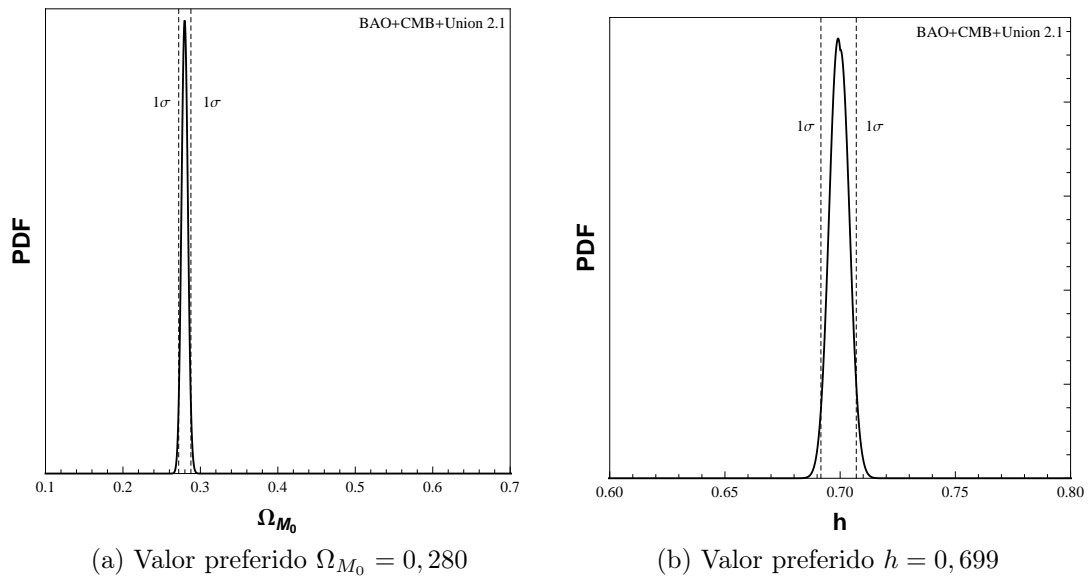


Figura 38: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Union 2.1. **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Union 2.1.

Tabela 12: Resultado da análise estatística BAO+CMB+SNe IA Union 2.1

BAO+CMB+SNe IA Union 2.1			
Modelo	χ^2_ν	Ω_{m_0}	h
Λ CDM	0,975	$0,273^{+0,010}_{-0,010}$	$0,701^{+0,005}_{-0,005}$
$\Lambda(t)$ CDM	0,974	$0,328^{+0,009}_{-0,011}$	$0,698^{+0,016}_{-0,015}$

5 *Formação de estruturas bariônicas num universo com decaimento do vácuo*

Agora resta analisar como o modelo com decaimento do vácuo prevê a formação de estruturas na componente bariônica do universo. Como já foi mencionado, as estruturas em larga escala do universo se formam devido a evolução temporal de inhomogeneidades que são geradas a partir de flutuações primordiais.

A análise perturbativa desenvolvida anteriormente considera somente um fluido dinâmico conservativo. De fato essa análise será útil ao considerarmos o universo como um todo, mas antes deve-se incorporar detalhes da análise de multicomponentes.

Uma vez que estamos interessados na formação de estruturas no universo, deve-se usar a métrica escalar (3.26), que resulta no elemento de linha

$$ds^2 = - (1 + 2\phi) dt^2 + a^2 \{ 2F_{,i} dt dx^i + [(1 - 2\psi) \delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j \}. \quad (5.1)$$

Como já foi mencionado, no fundo homogêneo e isotrópico não há a necessidade de diferenciar as quadrivelocidades de cada uma das componentes do universo, entretanto no nível perturbativo essa diferenciação se faz necessária¹. Em geral, as perturbações das quadrivelocidades de cada uma das componentes devem satisfazer as relações expressas em (3.40)

$$\hat{u}_A^0 = \hat{u}_{A0} = \frac{1}{2} \hat{g}_{00} = -\phi, \quad (5.2)$$

$$v_{A,i} \equiv \hat{u}_{Ai} = a^2 (\hat{u}_A^i + F_{,i}). \quad (5.3)$$

Da mesma forma, a perturbação da derivada total das componentes espaciais da quadrivelocidade com respeito ao tempo pode ser obtida seguindo os mesmos procedimentos feitos em (3.60) e (3.61)

$$\hat{u}_{Ai} = \dot{\hat{u}}_{iA} - \frac{1}{2} \dot{\hat{g}}_{00,i}. \quad (5.4)$$

Um resultado importante que pode ser obtido é a perturbação do escalar de expansão,

¹Será usado o índice A para, quando necessário, distinguir as componentes do universo ($A = \Lambda, M, B, R$). O caso em que esse índice é omitido se trata do universo como um todo.

introduzido na equação $\Theta_A \equiv u_{A;\mu}^\mu$

$$\begin{aligned}\Theta_A &= u_{A;\mu}^\mu \\ \bar{\Theta}_A + \hat{\Theta}_A &= (\bar{u}_A^\mu + \hat{u}_A^\mu)_{,\mu} + \left(\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu + \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \right) (\bar{u}_A^\lambda + \hat{u}_A^\lambda) \\ \hat{\Theta}_A &= \frac{1}{a^2} (\Delta v_A + \Delta \chi) - 3H\dot{\phi} - 3\dot{\psi},\end{aligned}\tag{5.5}$$

onde v_A é definido para cada componente de forma análoga à equação (3.43), e $\chi \equiv a^2 (\dot{E} - F)$.

Sabendo que a estrutura do tensor de energia momento do universo todo deve ser preservada no nível perturbativo, é possível estabelecer uma relação entre as quadrivelocidades das componentes do universo através da relação $T_i^0 = T_{\Lambda i}^0 + T_{M i}^0 + T_{B i}^0 + T_{R i}^0$

$$\begin{aligned}\bar{T}_i^0 + \hat{T}_i^0 &= \bar{T}_{\Lambda i}^0 + \hat{T}_{\Lambda i}^0 + \bar{T}_{M i}^0 + \hat{T}_{M i}^0 + \bar{T}_{B i}^0 + \hat{T}_{B i}^0 + \bar{T}_{R i}^0 + \hat{T}_{R i}^0 \\ (\rho + p) \hat{u}_i &= \rho_M \hat{u}_{M i} + \rho_B \hat{u}_{B i} + \frac{4}{3} \rho_R \hat{u}_{R i},\end{aligned}\tag{5.6}$$

$$\rho + p = \rho_M + \rho_B + \frac{4}{3} \rho_R.$$

Para o universo como um todo a perturbação do balanço de energia é dado pela equação (3.53), e da mesma forma pode se obter o balanço da energia no nível perturbativo para cada uma das componentes do universo²

$$\dot{\hat{\rho}}_\Lambda - \dot{\bar{\rho}}_\Lambda \phi + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\hat{\rho}_\Lambda + \hat{p}_\Lambda) = -\hat{Q} - \bar{Q} \phi\tag{5.7}$$

$$\dot{\hat{\rho}}_M - \dot{\bar{\rho}}_M \phi + 3 \frac{\dot{a}}{a} \hat{\rho}_M + \hat{\Theta}_M \bar{\rho}_M = \hat{Q} + \bar{Q} \phi\tag{5.8}$$

$$\dot{\hat{\rho}}_B - \dot{\bar{\rho}}_B \phi + 3 \frac{\dot{a}}{a} \hat{\rho}_B + \hat{\Theta}_B \bar{\rho}_B = 0\tag{5.9}$$

$$\dot{\hat{\rho}}_R - \dot{\bar{\rho}}_R \phi + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\hat{\rho}_R + \hat{p}_R) + \hat{\Theta}_R (\bar{\rho}_R + \bar{p}_R) = 0.\tag{5.10}$$

Os últimos termos das equações da energia escura e da matéria escura representam o termo de primeira ordem da projeção do termo Q^μ nas respectivas quadrivelocidades. De fato essa projeção não deve implicar nenhum novo vínculo entre as perturbações das quadrivelocidades, pois o termo de interação possui apenas componente temporal não nula

$$\bar{u}_{\Lambda\mu} \hat{Q}^\mu + \hat{u}_{\Lambda\mu} \bar{Q}^\mu = \bar{u}_{M\mu} \hat{Q}^\mu + \hat{u}_{M\mu} \bar{Q}^\mu \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_{\Lambda 0} = \hat{u}_{M 0}.\tag{5.11}$$

A soma das equações acima pode então ser igualada com o balanço total da energia, de forma a reproduzir o resultado obtido na equação (5.6)

$$\hat{\Theta} (\bar{\rho} + \bar{p}) = \hat{\Theta}_M \bar{\rho}_M + \hat{\Theta}_B \bar{\rho}_B + \frac{4}{3} \hat{\Theta}_R \bar{\rho}_R.\tag{5.12}$$

²Para as componentes de matéria escura e matéria bariônica a perturbação da pressão deve ser negligenciada, uma vez que deve ser muito menor que a pressão no fundo homogêneo e isotrópico ($\hat{p}_M = \hat{p}_B = 0$). No entanto para as outras componentes a equação de estado não deve ser necessariamente satisfeita no nível perturbativo.

Para cada uma das componentes do universo é conveniente introduzir o contraste de densidade da mesma forma que foi definido em (3.52)

$$\delta = \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \quad , \quad \delta_\Lambda = \frac{\hat{\rho}_\Lambda}{\bar{\rho}_\Lambda} \quad , \quad \delta_M = \frac{\hat{\rho}_M}{\bar{\rho}_M} \quad , \quad \delta_B = \frac{\hat{\rho}_B}{\bar{\rho}_B} \quad \text{e} \quad \delta_R = \frac{\hat{\rho}_R}{\bar{\rho}_R}. \quad (5.13)$$

De maneira análoga ao que foi feito para obter a equação (3.58) pode-se escrever as equações de balanço de energia para cada componente em termos do seu contraste de densidade

$$\dot{\delta}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\delta_\Lambda + \frac{\hat{p}_\Lambda}{\bar{\rho}_\Lambda} \right) = -\frac{1}{\bar{\rho}_\Lambda} \left[\hat{Q} - \bar{Q} (\delta_\Lambda - 2\phi) \right] \quad (5.14)$$

$$\dot{\delta}_M + 3\frac{\dot{a}}{a} \phi + \hat{\Theta}_M = \frac{1}{\bar{\rho}_M} \left[\hat{Q} - \bar{Q} (\delta_M - 2\phi) \right] \quad (5.15)$$

$$\dot{\delta}_B + 3\frac{\dot{a}}{a} \phi + \hat{\Theta}_B = 0 \quad (5.16)$$

$$\dot{\delta}_R - \frac{\dot{a}}{a} \left(\delta - 4\phi - 3\frac{\hat{p}_R}{\bar{\rho}_R} \right) + \frac{4}{3} \hat{\Theta}_R = 0 \quad (5.17)$$

Agora, que toda a estrutura do modelo no nível perturbativo foi descrita, pode-se investigar a evolução temporal das perturbações da densidade de energia. Como já foi mencionado, o objetivo deste trabalho é determinar a evolução de perturbações na densidade de energia da componente bariônica, que de fato pode ser observada diretamente, no entanto, tendo em vista que o universo é um sistema acoplado, a sua análise isolada é impossível.

Sendo assim, para se obter uma equação para a componente bariônica, é necessário encontrar inicialmente uma equação para as perturbações da densidade total de energia, e posteriormente consideramos a perturbação relativa, ou seja, a diferença de frações totais e fracionárias perturbações bariônica. Obteremos duas equações de segunda ordem acopladas cujas soluções podem ser combinadas para obter as perturbações desejados do fluido bariônico.

5.1 Perturbação da densidade total de energia

O universo como um todo é um sistema isolado, e por isso toda a análise desenvolvida no capítulo 4 para a evolução de perturbações na densidade de energia deve ser válida para o fluido total. Dessa forma pode-se usar a equação (3.76) para descrever perturbações no universo como um todo³

$$\delta^{(c)''} + \frac{\delta^{(c)'}}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{15\bar{p}}{2\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\delta^{(c)}}{a^2} \left(-\frac{3}{2} - 12\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{9\bar{p}^2}{2\bar{\rho}^2} + 9\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) = -\frac{\hat{p}^{(c)}|\vec{k}|^2}{\bar{\rho}a^4H^2}. \quad (5.18)$$

³A partir de agora os índices \vec{k} serão omitidos.

Para descrever uma relação entre a pressão e a densidade do fluido total do universo é conveniente introduzir um parâmetro de estado $\bar{p} = \omega \bar{\rho}$

$$\omega = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{p}_\Lambda + \bar{p}_R}{\bar{\rho}}$$

$$\omega = \frac{-3\Omega_{\Lambda_0} \sqrt{[1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{-3/2}]^2 + \Omega_{R_0} a^{-4}} + \Omega_{R_0} a^{-4}}{3[1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{-3/2}]^2 + \Omega_{R_0} a^{-4}} \quad (5.19)$$

onde $\Omega_{\Lambda_0} = 1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} - \Omega_{R_0}$.

Ainda utilizando o parâmetro de estado é possível determinar a relação entre as derivadas temporais totais da pressão e densidade de energia

$$\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} = \dot{\omega} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} + \omega$$

$$\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} = -\frac{\omega' a}{3(1 + \omega)} + \omega. \quad (5.20)$$

Dessa forma, o lado esquerdo da equação (5.18) fica completamente determinado, restando apenas o termo $\hat{p}^{(c)}$, à direita.

No limite em que a contribuição da radiação é negligenciada⁴ este parâmetro de estado assume a seguinte forma

$$\omega = \frac{1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0}}{1 - \Omega_{M_0} - \Omega_{B_0} + (\Omega_{M_0} + \Omega_{B_0}) a^{3/2}}. \quad (5.21)$$

Neste caso ainda, a razão entre as derivadas temporais da pressão e densidade total do Universo se reduz a

$$\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2} \omega \quad (5.22)$$

Para o modelo com decaimento do vácuo, será imposto que o *ansatz* (4.1) também seja satisfeito mesmo no nível perturbativo $\hat{p}^{(c)} = -\frac{\sigma}{3} \hat{\Theta}^{(c)}$, e então, usando a equação (3.63)

$$\hat{p}^{(c)} = -\frac{\bar{p}}{3(1 + \omega)} \left(a \delta^{(c)'} - 3\omega \delta^{(c)} \right). \quad (5.23)$$

Dessa forma a equação a ser resolvida é

$$\delta^{(c)''} + \frac{\delta^{(c)'}}{a} \left[\frac{3}{2} - \frac{9}{2} \omega - \frac{\omega' a}{(1 + \omega)} - \frac{\omega}{3(1 + \omega)} \frac{|\vec{k}|^2}{a^2 H^2} \right]$$

$$+ \frac{\delta^{(c)}}{a^2} \left[-\frac{3}{2} - 3\omega + \frac{9}{2} \omega^2 - \frac{3\omega' a}{(1 + \omega)} + \frac{\omega^2}{(1 + \omega)} \frac{|\vec{k}|^2}{a^2 H^2} \right] = 0. \quad (5.24)$$

⁴Embora já tenha sido discutido que a contribuição da radiação para o parâmetro de Hubble é importante para épocas remotas, essa análise será usada para justificar a utilização de condições iniciais do modelo Λ CDM.

No limite em que a contribuição da radiação possa ser negligenciada, o parâmetro de estado se torna nulo para valores pequenos do fator de escala, e então a equação anterior se reduz ao caso do Universo de Einstein-de Sitter, assim como o modelo Λ CDM.

$$\delta^{(c)''} + \frac{3}{2a}\delta^{(c)'} - \frac{3}{2a^2}\delta^{(c)} = 0 \quad (5.25)$$

Esta condição será explorada futuramente na determinação das condições iniciais do espectro de potência.

5.2 Perturbação relativa da densidade de energia

Como passo intermediário para a perturbação da matéria bariônica, deve-se obter a perturbação relativa da densidade de energia, definida por $S_B \equiv D - \delta_B$, no qual

$$D \equiv \left(\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right) \Rightarrow \delta = D \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \quad (5.26)$$

Utilizando o resultado anterior, o balanço de energia total no nível perturbativo (3.54) pode ser escrito como

$$\dot{D} + \bar{\Theta} \left(\frac{\hat{p}}{\bar{\rho} + \bar{p}} - D \frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) + \hat{\Theta} - \hat{u}^0 \bar{\Theta} = 0 \quad (5.27)$$

A partir da definição anterior de S_B e do balanço da energia bariônica no nível perturbativo (5.16), conclui-se a seguinte equação para a derivada temporal da densidade relativa

$$\dot{S}_B + \left(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_B \right) + \bar{\Theta} \left(\frac{\hat{p}}{\bar{\rho} + \bar{p}} - D \frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) = 0 \quad (5.28)$$

A quantidade que está nos parênteses do último termo da equação acima pode ser identificado com uma perturbação da pressão não adiabática, que também é uma quantidade invariante de calibre $\hat{p}_{nad}^{(c)}$.

$$\frac{\hat{p}}{\bar{\rho} + \bar{p}} - D \frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} = \frac{\hat{p}^{(c)}}{\bar{\rho} + \bar{p}} - D^{(c)} \frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} = \frac{\hat{p}_{nad}^{(c)}}{\bar{\rho} + \bar{p}}, \quad (5.29)$$

de onde segue que

$$\hat{p}_{nad}^{(c)} = \hat{p}^{(c)} - \frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \bar{\rho} \delta^{(c)}. \quad (5.30)$$

Em termos do parâmetro de estado e de sua derivada, a perturbação da pressão adiabática pode então ser expressa como

$$\hat{p}_{nad}^{(c)} = -\frac{\bar{p}}{3(1+\omega)} \left[a \delta^{(c)'} + \left(3 - \frac{\omega' a}{\omega} \right) \delta^{(c)} \right]. \quad (5.31)$$

e então,

$$\frac{\hat{p}}{\bar{\rho} + \bar{p}} - D \frac{\dot{\hat{p}}}{\dot{\bar{p}}} = -\frac{\omega}{3(1+\omega)^2} \left[a\delta^{(c)'} + \left(3 - \frac{\omega' a}{\omega} \right) \delta^{(c)} \right]. \quad (5.32)$$

Ainda na equação (5.28), o termo que envolve as perturbações dos escalares de expansão podem ser determinados através da equação (5.5)

$$\left(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_B \right) = \frac{1}{a^2} \Delta (v - v_B) \quad (5.33)$$

A derivada temporal do termo v já foi obtida através do balanço do momento no nível perturbativo (3.62)

$$\dot{v} + \phi = -\frac{\hat{p}^{(c)}}{\bar{\rho} + \bar{p}}. \quad (5.34)$$

Tendo em vista que a análise para obter o resultado acima foi feita para um fluido conservativo geral, ela também deve ser válida para o fluido bariônico, que no entanto deve ter a perturbação da pressão nula

$$\dot{v}_B + \phi = 0, \quad (5.35)$$

conclui-se

$$(v - v_B)' = -\frac{\hat{p}^{(c)}}{\bar{\rho} + \bar{p}} = \frac{\omega}{3(1+\omega)^2} \left(a\delta^{(c)'} - 3\omega\delta^{(c)} \right) \quad (5.36)$$

Deve-se então olhar para a derivada temporal da diferença das perturbações dos escalares de expansão $\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_B$. Diferenciando a equação (5.33), já no espaço dos momentos

$$\begin{aligned} \left(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_B \right)' &= -2H \left(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_B \right) + \frac{1}{a^2} \Delta (v - v_B)' \\ \left(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_B \right)' &= 2H\dot{S}_B - \frac{2H^2\omega}{(1+\omega)^2} \left[a\delta^{(c)'} + \left(3 - \frac{\omega' a}{\omega} \right) \delta^{(c)} \right] \\ &\quad + \frac{\omega|\vec{k}|^2}{3a^2(1+\omega)^2} \left(a\delta^{(c)'} - 3\omega\delta^{(c)} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Diferenciando a equação (5.28), encontra-se uma equação diferencial de segunda ordem para a perturbação relativa da densidade de energia

$$\begin{aligned} &\ddot{S}_B + 2H\dot{S}_B - \frac{2H^2\omega}{(1+\omega)^2} \left[a\delta^{(c)'} + \left(3 - \frac{\omega' a}{\omega} \right) \delta^{(c)} \right] \\ &+ \frac{\omega|\vec{k}|^2}{3a^2(1+\omega)^2} \left(a\delta^{(c)'} - 3\omega\delta^{(c)} \right) - \left[\frac{H\omega}{(\omega+1)^2} \right]' \left[a\delta^{(c)'} + \left(3 - \frac{\omega' a}{\omega} \right) \delta^{(c)} \right] \\ &- \frac{H\omega}{(\omega+1)^2} \left[a\delta^{(c)'} + \left(3 - \frac{\omega' a}{\omega} \right) \delta^{(c)} \right]' H a = 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Neste ponto é conveniente colocar toda a dependência temporal da equação acima em termos do fator de escala. Prezando pela clareza do desenvolvimento, esta mudança de

variável será feito em partes. Para a soma dos dois primeiros termos

$$\ddot{S}_B + 2H\dot{S}_B = H^2 a^2 S_B'' + 3H^2 a S_B' + \dot{H} a S'. \quad (5.39)$$

A derivada total com respeito ao tempo do parâmetro de Hubble pode ser determinado com as equações (2.41) e (2.43)

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -4\pi G\rho(1+\omega) \\ \dot{H} &= -\frac{3H^2}{2}(1+\omega) \end{aligned} \quad (5.40)$$

e portanto,

$$\ddot{S}_B + 2H\dot{S}_B = a^2 H^2 \left[S_B'' + \frac{3}{2}(1-\omega) \frac{S_B'}{a} \right]. \quad (5.41)$$

Para o outro termo da equação (5.38) com derivada temporal temos

$$\left[\frac{H\omega}{(\omega+1)^2} \right]' = \frac{H^2\omega}{(1+\omega)^2} \left[-\frac{3}{2}(1+\omega) + \frac{\omega'a}{\omega} - \frac{2\omega'a}{(1+\omega)} \right]. \quad (5.42)$$

E por fim,

$$\begin{aligned} \left[a\delta^{(c)'} + \left(3 - \frac{\omega'a}{\omega} \right) \delta^{(c)} \right]' &= a \left[\delta^{(c)''} + \left(4 - \frac{\omega'a}{\omega} \right) \frac{\delta^{(c)'}}{a} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\omega'^2 a^2}{\omega^2} - \frac{\omega'' a^2}{\omega} - \frac{\omega'a}{\omega} \right) \frac{\delta^{(c)}}{a^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

A equação (5.38) pode então ser reescrita combinando as equações (5.41), (5.42) e (5.43)

$$\begin{aligned} S_B'' + \frac{3}{2}(1-\omega) \frac{S_B'}{a} &= \frac{\omega}{(1+\omega)^2} \left\{ \delta^{(c)''} + \left[6 - \frac{3(1+\omega)}{2} - \frac{2\omega'a}{(1+\omega)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{|\vec{k}|^2}{3H^2 a^2} \right] \frac{\delta^{(c)'}}{a} + \left[6 - \frac{9(1+\omega)}{2} - \frac{6\omega'a}{(1+\omega)} + \frac{3(1+\omega)\omega'a}{2\omega} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\omega'^2 a^2}{\omega(1+\omega)} - \frac{\omega'' a^2}{\omega} + \frac{\omega|\vec{k}|^2}{H^2 a^2} \right] \frac{\delta^{(c)}}{a^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

O termo $\delta^{(c)''}$ deve ser substituído segundo a equação (5.24)

$$\begin{aligned} S_B'' + \frac{3}{2}(1-\omega) \frac{S_B'}{a} &= \frac{\omega}{(1+\omega)^2} \left\{ \left[\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\omega - \frac{3(1+\omega)}{2} - \frac{\omega'a}{(1+\omega)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{|\vec{k}|^2}{3H^2 a^2 (1+\omega)} \right] \frac{\delta^{(c)'}}{a} + \left[\frac{15}{2} + 3\omega - \frac{9(1+\omega)}{2} - \frac{9}{2}\omega^2 - \frac{3\omega'a}{(1+\omega)} + \frac{3(1+\omega)\omega'a}{2\omega} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\omega'^2 a^2}{\omega(1+\omega)} - \frac{\omega'' a^2}{\omega} + \frac{\omega|\vec{k}|^2}{H^2 a^2 (1+\omega)} \right] \frac{\delta^{(c)}}{a^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

O contraste de densidade total $\delta^{(c)}$ e sua primeira derivada $\delta^{(c)'}$ aparecem como ino-

mogeneidades na equação para S_B . Como já foi discutido, no limite onde a contribuição da radiação é negligenciada, o parâmetro de estado é nulo para épocas remotas do Universo (o meio cósmica total comporta-se como pó). Sob estas condições, o lado direito da equação (5.45) desaparece e podemos usar $S_B = \text{const.} \approx 0$ como condição inicial para a análise numérica. Esta condição é equivalente ao comportamento adiabático.

5.3 Perturbação da densidade bariônica de energia

Como estamos interessados na formação de estruturas na componente bariônica do Universo deve ser obtida uma equação para o seu contraste de densidade. A partir das quantidades D e S_B o contraste de densidade para a componente bariônica pode ser calculado como

$$\delta_B = D - S_B. \quad (5.46)$$

Embora não tenha sido mencionado, a própria quantidade S_B é invariante de calibre, e pode ser escrita como

$$S_B = D - \frac{\hat{\rho}_B}{\rho_B} = \frac{\delta^{(c)}}{(1 + \omega)} - \delta_B^{(c)}, \quad (5.47)$$

onde $\delta_B^{(c)}$ é uma definida comóvel em relação ao fluido cósmico total

$$\delta_B^{(c)} = \delta_B + \frac{\dot{\bar{\rho}}_B}{\bar{\rho}_B} v = \delta_B - \bar{\Theta} v. \quad (5.48)$$

Combinando os resultados anteriores obtém-se

$$\delta_B^{(c)} = \frac{\delta^{(c)}}{(1 + \omega)} - S_B. \quad (5.49)$$

É possível definir ainda o contraste de densidade como uma quantidade invariante de calibre que é comóvel em relação ao fluido bariônico

$$\delta_B^{(c_B)} \equiv \delta_B - \bar{\Theta} v_B = \delta_B^{(c)} + \bar{\Theta} (v - v_B). \quad (5.50)$$

Usando as equações (5.28), (5.31) e (5.33) segue que

$$\frac{|\vec{k}|^2}{a^2} (v - v_B) = \dot{S}_B + 3H \frac{\hat{p}_{nad}}{\bar{\rho} + \bar{p}}, \quad (5.51)$$

e então,

$$\delta_B^{(c_B)} = \delta_B^{(c)} + 3 \frac{a^2 H^2}{|\vec{k}|^2} \left(a S'_B + \frac{\hat{p}_{nad}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right). \quad (5.52)$$

Explicitamente, $\delta_B^{(c_B)}$ pode ser escrito em termos de $\delta^{(c)}$, S_B e suas derivadas

$$\delta^{(c_B)} = \frac{\delta^{(c)}}{(1 + \omega)} - S_B + 3 \frac{H^2 a^2}{|\vec{k}|^2} \left\{ a S'_B - \frac{\omega}{3(1 + \omega)^2} \left[a \delta^{(c)'} + \left(3 - \frac{\omega' a}{\omega} \right) \delta^{(c)} \right] \right\}. \quad (5.53)$$

A partir desta equação fica evidente que a determinação das perturbações na componente bariônica está condicionada à resolução da equação (5.24) para obter $\delta^{(c)}$, e posteriormente à resolução da equação (5.45), onde $\delta^{(c)}$ já aparece como uma inhomogeneidade.

5.4 Espectro de potência da matéria

Ainda resta estabelecer uma forma de relacionar o contraste de densidade com os dados observacionais. Para isso, é conveniente introduzir uma probabilidade δP de encontrar um objeto num volume δV do céu

$$\delta P = \eta \delta V, \quad (5.54)$$

η é uma densidade de probabilidade que independe da posição do céu observada ou sua vizinhança.

Tendo em vista que a interação gravitacional possui caráter atrativo, a aglomeração de matéria em um determinado volume pode ser afetada pela sua vizinhança. Neste sentido acrescenta-se à probabilidade (5.54) um termo com dependência espacial denominado função correlação de dois pontos $\xi(r)$

$$\delta P = \eta \delta V [1 + \xi(r)]. \quad (5.55)$$

Explicitamente, essa função de correlação está relacionada com os modos de Fourier introduzidos na análise perturbativa via (3.75)

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k \quad (5.56)$$

A partir desses modos de Fourier é então possível, através de uma transformação inversa obter a dependência espacial do contraste de densidade $\delta(x)$. Estatisticamente, a quantidade que carrega informações relevantes é a variância σ do contraste de densidade, uma vez que seu valor médio é nulo [76]

$$\sigma = \langle \delta \rangle^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_k^2 dk^3 \quad (5.57)$$

Essa integral pode ser rearranjada para um volume esférico no espaço dos momentos, de forma a incorporar a definição do espectro de potência da matéria $P(k)$

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi |\vec{k}|^2 \delta_k^2 dk = \int_0^\infty \left(\frac{|k|^3}{2\pi^2} \right) P(k) d[\ln(k)]. \quad (5.58)$$

É essa a grandeza que será utilizada para mensurar a formação de estruturas no modelo estudado. Através da resolução das equações e obtenção de via , pode-se obter numericamente o espectro de potência. No entanto para resolver essas equações é necessário identificar condições iniciais.

Sabe-se que o modelo com decaimento do vácuo, assim como o modelo padrão, prevê a existência de uma fase dominada por radiação, seguida de uma fase dominada por

matéria até a fase atual dominada pela energia escura. Em uma aproximação que exclui a componente de radiação, o Universo deve se comportar como Einstein-de Sitter para $a \ll 1$ da mesma forma que o modelo Λ CDM.

Por isso, para a resolução da equação (5.24) será usada condições iniciais obtidas através da função de transferência BBKS para o modelo Λ CDM [77, 78]. Já para a equação (5.45) será utilizada a condição adiabática $S_B \approx 0$ para $a \ll 1$.

O resultado da previsão teórica para o espectro de potência será confrontado com os dados do SDSS DR7⁵, amostra que contém $N = 41$ dados, para uma análise estatística similar ao que foi feito anteriormente para o fundo homogêneo e isotrópico. Constrói-se então uma função χ_{LSS}^2 ⁶

$$\chi_{LSS}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[P(k)_i^{obs.} - P(k)^{teo}]^2}{\sigma_i^2} \quad (5.59)$$

Analogamente à análise do fundo homogêneo e isotrópico a componente bariônica deve ser fixada, uma vez que o parâmetro de estado ω e suas derivadas, assim como o parâmetro de Hubble, não distingue a componente de matéria bariônica da componente de matéria escura.

A minimização da equação (5.59) não é conclusivo para o parâmetro de Hubble, assim como no caso [15, 16], porém resulta valor preferencial para o parâmetro de densidade da matéria escura $\Omega_{M_0} = 0,347_{-0,40}^{+0,41}$, com nível 1σ de confiabilidade. Este resultado, somado à componente bariônica fixada, prediz uma contribuição de matéria $\Omega_{m_0} = \Omega_{M_0} + \Omega_{B_0} = 0,392$, o que significa que a inclusão dos bárions alivia a contribuição da matéria no conteúdo energético do Universo [15, 16].

A figura 39 ilustra o espectro de potência da matéria para valores próximos ao valor preferido para essa análise, enquanto a figura 40 mostra a função de densidade de probabilidade para o Ω_{M_0}

5.5 Análise Conjunta total

Para uma análise final do modelo serão combinados os testes do fundo homogêneo e isotrópico com a análise do espectro de potência definindo através da função χ_{TOTAL}^2

$$\chi_{TOTAL}^2 = \chi_{BAO}^2 + \chi_{CMB}^2 + \chi_{SN}^2 + \chi_{LSS}^2. \quad (5.60)$$

O resultado obtido através da combinação das equações (4.47), (4.54), (4.59) e (5.59) para cada uma das amostras de Supernovas é apresentado nas seções seguintes.

⁵<http://www.sdss.org/dr7/>

⁶O índice LSS faz referência ou termo estruturas de larga escala, em inglês *Large Scale Structure*.

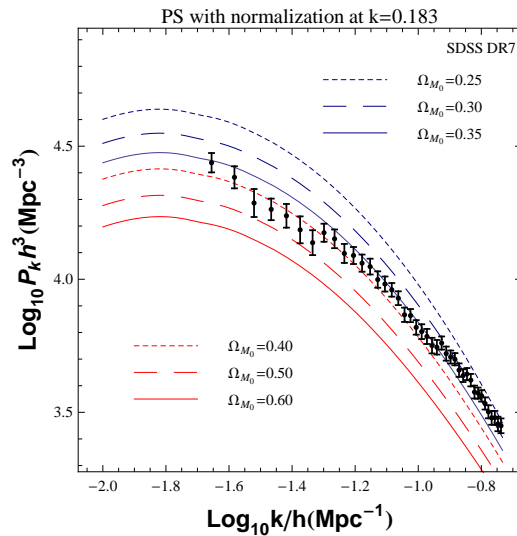


Figura 39: Espectro de potência da matéria previsto para o modelo com decaimento do vácuo confrontado com os dados observacionais do SDSS DR7.

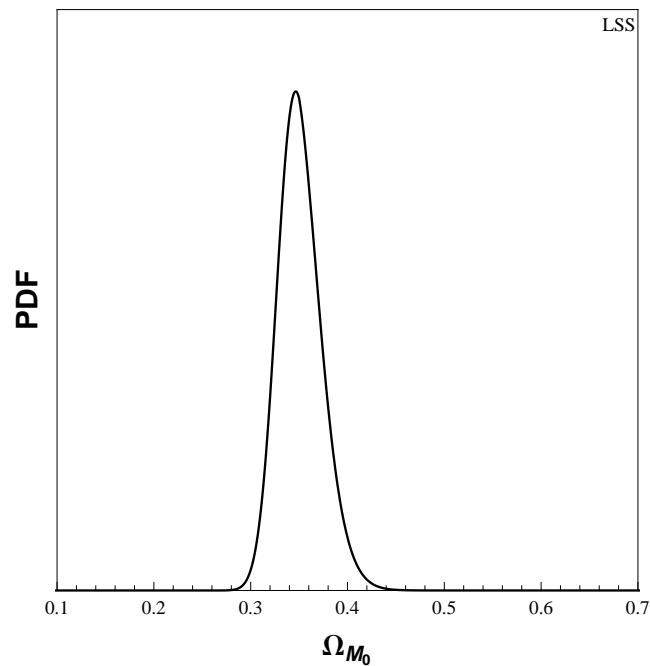


Figura 40: Função densidade de probabilidade para o parâmetro de densidade da matéria escura, cujo valor preferido é $\Omega_{M_0} = 0,347$.

5.5.1 BAO+CMB+SNe IA SDSS+LSS

MLCS2k2: Com a amostra SDSS (MLCS2k2) a análise estatística final aponta para $0,321 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,339$ e $0,638 \leq h \leq 0,655$. Estes dados são mostrados graficamente na figura 41, onde há a superposição das curvas de contorno de todos os testes com destaque em azul para a análise conjunta.

Ainda há uma concordância no nível de confiabilidade de 2σ , exatamente como ocorre na literatura [12]. Através do processo de marginalização, esta análise resulta individualmente nos valores $\Omega_{M_0} = 0,329$ e $h = 0,647$ como preferidos para o fundo homogêneo e

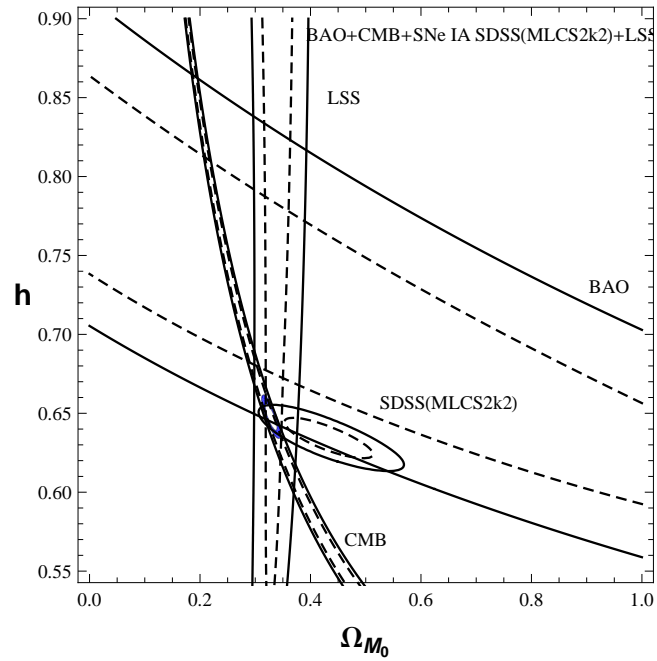


Figura 41: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (MLCS2k2)+LSS

isotrópico. Esse resultado é ilustrado na figura 42.

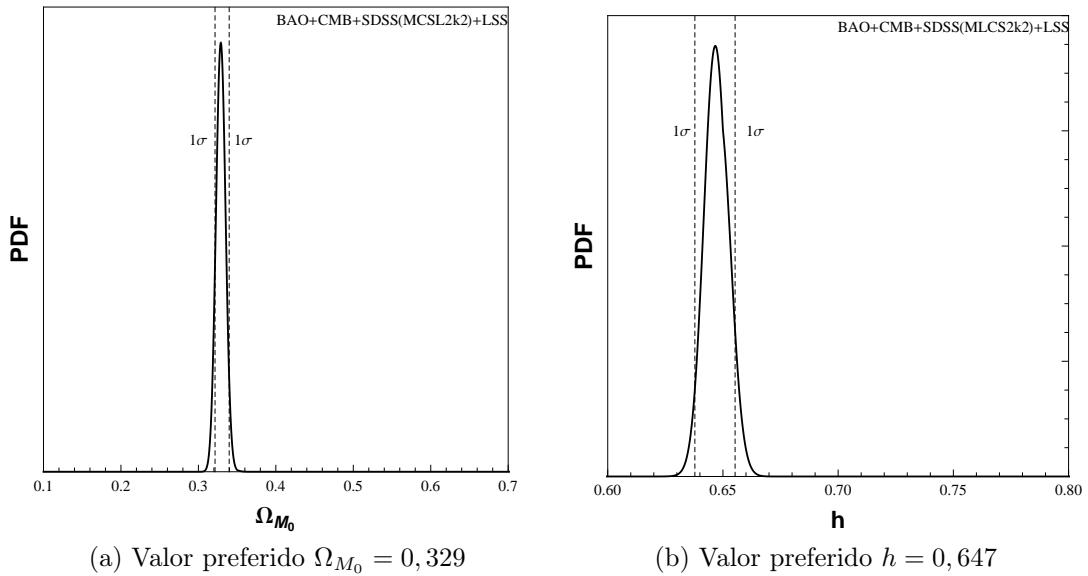


Figura 42: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2)+LSS. **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2)+LSS.

O resultado da combinação de todos os testes, utilizando a amostra de Supernovas SDSS (MLCS2k2), para o modelo com decaimento do vácuo é sumariizado na tabela 13

Tabela 13: Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS(MLCS2k2)+LSS

BAO+CMB+SNe IA SDSS (MLCS2k2)+LSS		
χ_{min}^2	Ω_{M_0}	h
142,066	$0,330^{+0,009}_{-0,009}$	$0,647^{+0,009}_{-0,008}$

SALT II: No caso da amostra SDSS(SALT II), a análise estatística combinada indica que $0,280 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,286$ e $0,691 \leq h \leq 0,704$. A figura 43 mostra a intersecção das curvas de contorno para todos os testes aplicados com nível de confiança de 2σ com destaque para a análise total.

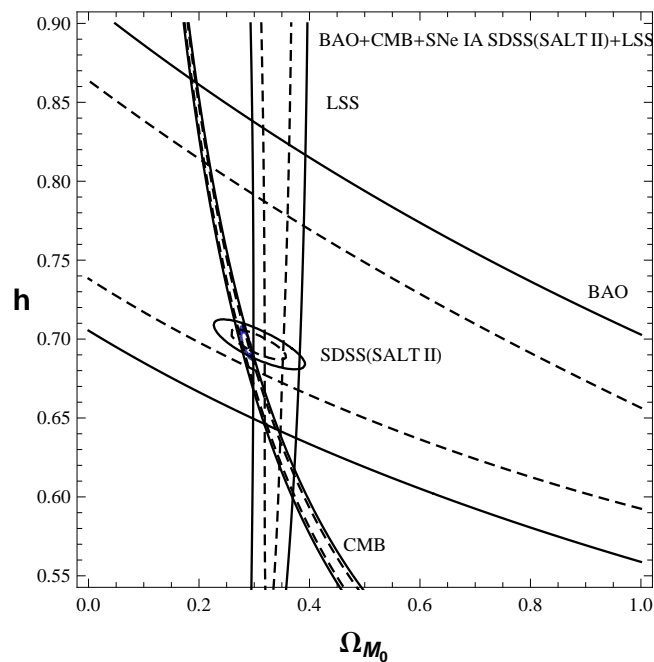


Figura 43: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)+LSS

Neste caso, há uma pequena tensão entre o resultado da análise da formação de estruturas com relação ao fundo homogêneo e isotrópico. No entanto é sabido que essa tensão também existe no modelo Λ CDM e, em comparação com o resultado presente na literatura [12, 16], esta tensão é aliviada. Já na figura 44 é ilustrada a análise individual dos parâmetros, que indicam um valor preferido para $\Omega_{M_0} = 0,281$ e $h = 0,701$.

A tabela 14 contém os resultados da análise estatística envolvendo todos os testes com a amostra SDSS (SALT II).

5.5.2 BAO+CMB+SNe IA Constitution+LSS

MLCS2k2: A amostra Constitution (MLCS2k2), com nível de confiança de 1σ , resulta em $0,319 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,331$ e $0,645 \leq h \leq 0,657$ para o melhor ajuste do modelo. Estes

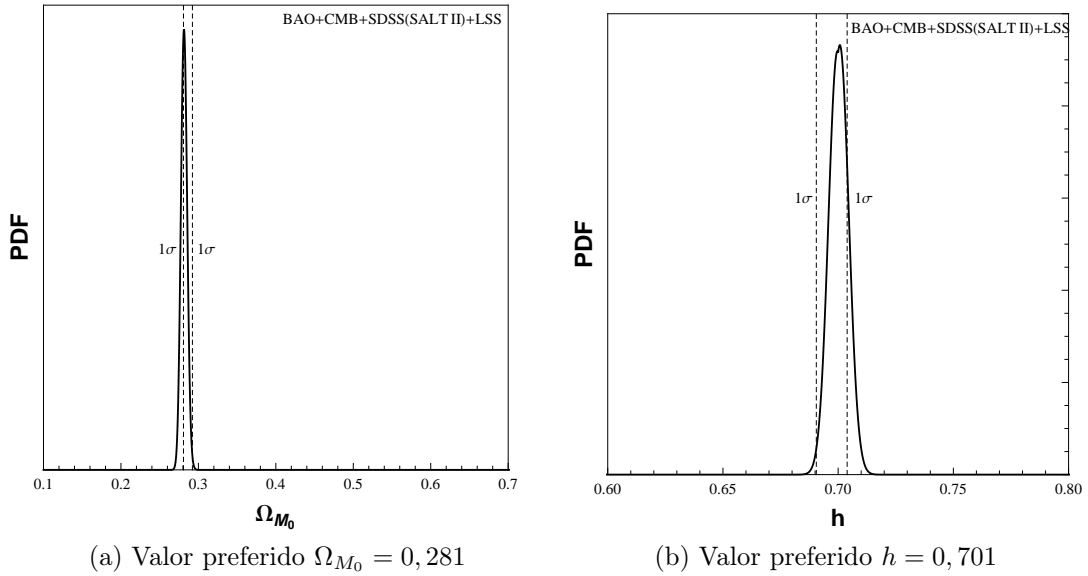


Figura 44: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II)+LSS. **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II)+LSS.

Tabela 14: Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA SDSS (SALT II)+LSS

BAO+CMB+SNe IA SDSS(SALT II)+LSS		
χ^2_{min}	Ω_{M_0}	h
265,471	$0,286^{+0,006}_{-0,002}$	$0,697^{+0,006}_{-0,013}$

dados são mostrados graficamente na figura 45, onde há a superposição das curvas de contorno de todos os testes com destaque em azul para a análise conjunta.

Esta análise também reproduz uma concordância entre todos os testes, que está de acordo com a literatura. A análise individual dos parâmetros do modelo é mostrada na figura 46, que indicam um valor preferido para $\Omega_{M_0} = 0,325$ e $h = 0,650$.

O resultado desta análise estatística se encontra na tabela 15.

Tabela 15: Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS

BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS		
χ^2_{min}	Ω_{M_0}	h
352,855	$0,325^{+0,006}_{-0,005}$	$0,650^{+0,002}_{-0,006}$

SALT II: Já para a amostra SDSS(SALT II), a análise estatística total indica que $0,319 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,337$ e $0,637 \leq h \leq 0,657$. A figura 47 mostra a intersecção das curvas

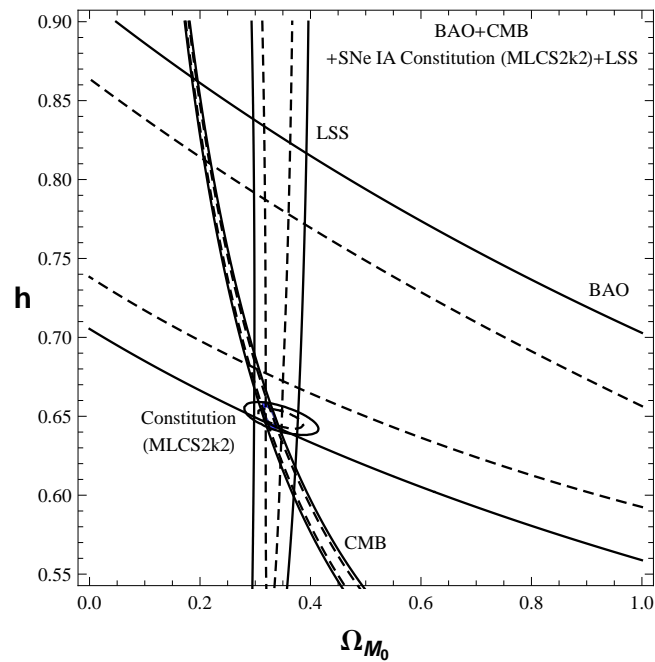


Figura 45: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS

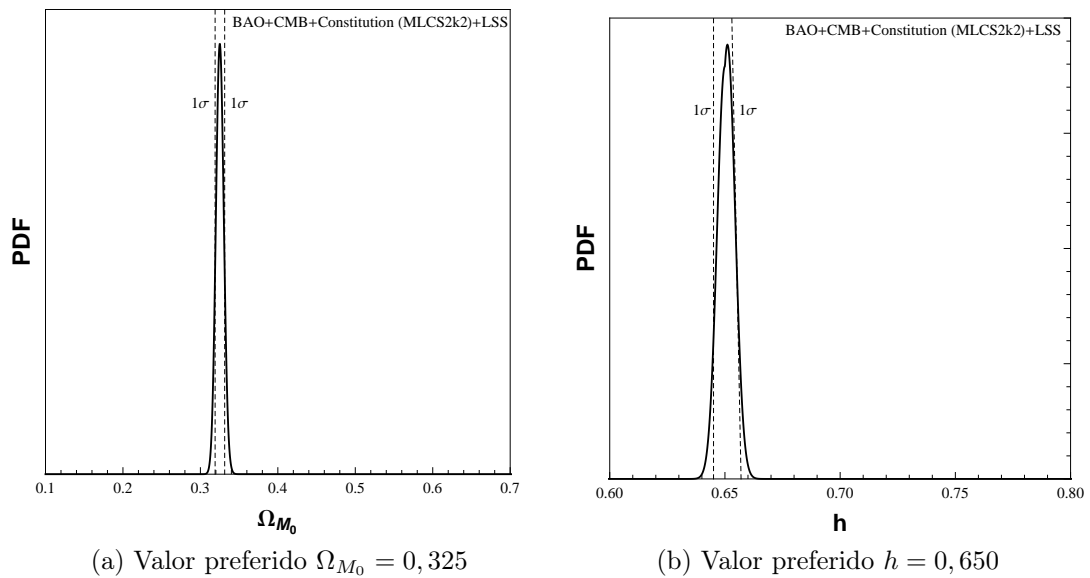


Figura 46: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS. **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (MLCS2k2)+LSS.

de contorno para todos os testes aplicados com nível de confiança de 2σ com destaque para a análise total.

Neste caso, a amostra, mesmo calibrada com o filtro SALT II, reproduz uma concordância na região de 2σ . Individualmente, os valores de melhor ajuste encontrados foram $\Omega_{M_0} = 0,329$ e $h = 0,644$ e estão mostrados graficamente na figura 48.

Os resultados da análise estatística que combina todos os testes aplicados se encontra

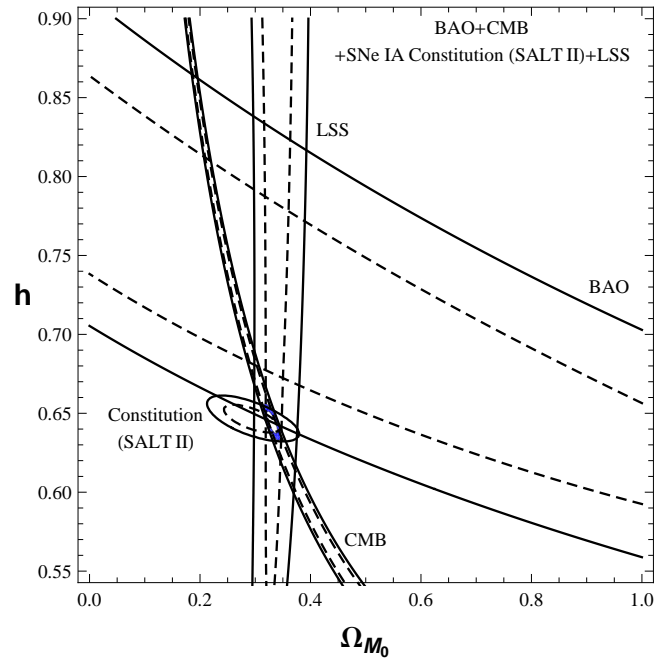


Figura 47: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS

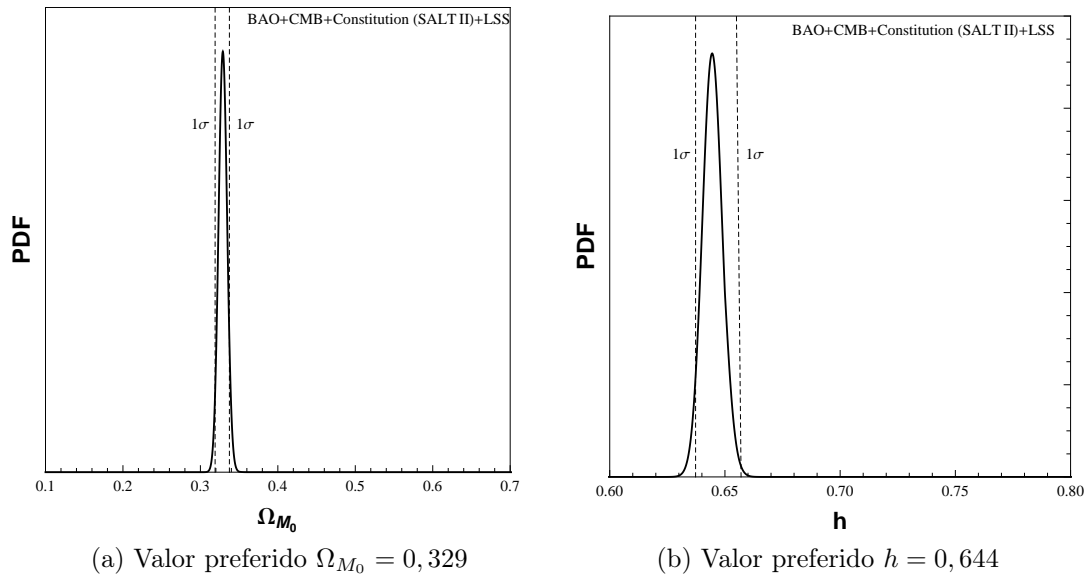


Figura 48: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS. **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS.

na tabela .

5.5.3 BAO+CMB+SNe IA Union 2.1+LSS

Por fim, a análise conjunta utilizando a amostra do Union 2.1 resulta em $0,271 \leq \Omega_{M_0} \leq 0,291$ e $0,683 \leq h \leq 0,714$. A figura 49 mostra, com um níveis de confiança de 1σ e

Tabela 16: Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS

BAO+CMB+SNe IA Constitution (SALT II)+LSS		
χ^2_{min}	Ω_{M_0}	h
245,595	$0,330^{+0,004}_{-0,005}$	$0,644^{+0,008}_{-0,005}$

2σ , a superposição das curvas de contorno resultantes das análises das oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo, das Supernovas do Union 2.1 e da formação de estruturas de larga escala. Em destaque está a curva de contorno para a análise combinada dos testes. Neste caso, assim como o anterior, há uma pequena tensão entre o fundo homogêneo e isotrópico e o nível perturbativo.

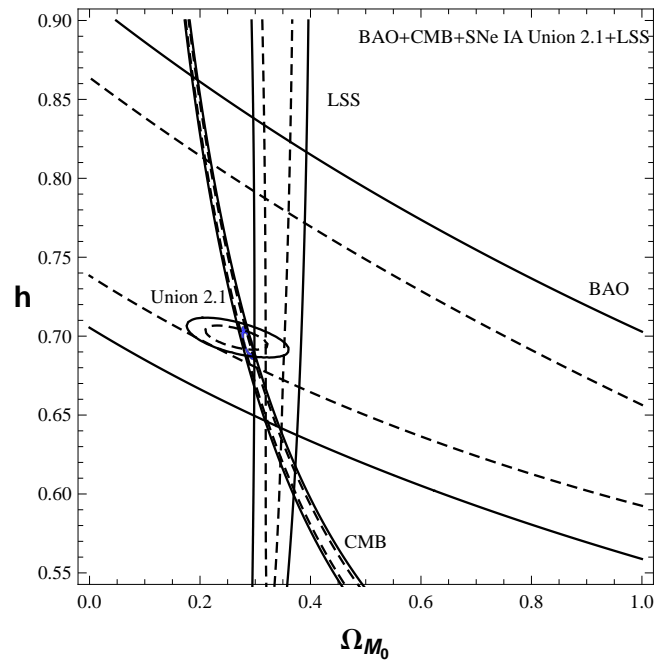


Figura 49: Curvas de contorno para a análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Union 2.1.+LSS

Individualmente, os valores preferidos pela análise estatística são $\Omega_{M_0} = 0,282$ e $h = 0,698$. A figura 50 ilustra este resultado.

A tabela 16 mostra o resultado da análise estatística total com a amostra de Supernovas do Union 2.1.

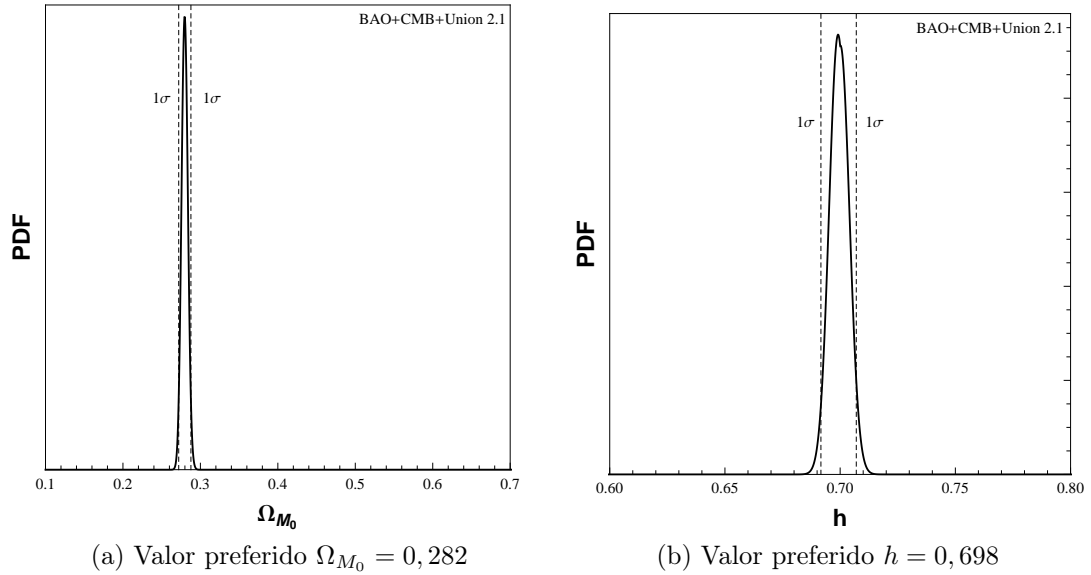


Figura 50: **Figura esquerda:** Valor preferido de Ω_{M_0} para a análise BAO+CMB+SNe IA Union 2.1+LSS. **Figura direita:** Valor preferido de h para a análise BAO+CMB+SNe IA Union 2.1+LSS.

Tabela 17: Resultado da análise conjunta BAO+CMB+SNe IA Union 2.1+LSS

BAO+CMB+SNe IA Union 2.1+LSS		
χ^2_{min}	Ω_{M_0}	h
231,367	$0,287^{+0,005}_{-0,005}$	$0,695^{+0,002}_{-0,006}$

6 Conclusões

Este trabalho foi dedicado ao estudo do modelo com decaimento do vácuo, no qual este decaimento é provocado pelo *ansatz* de que a energia escura possui uma dependência temporal com o parâmetro de Hubble. Na prática, essa dependência temporal da energia escura atua como uma interação, que foi suposta afetar apenas o setor escuro do Universo.

Este modelo já vem sendo largamente estudado na literatura, no entanto considerando o Universo cuja componente de matéria não distingue a matéria escura e a matéria bariônica. Essa abordagem implica que os bárions também participariam da interação com a energia escura, então, motivados pelo fato de que não se observa nenhuma interação deste tipo, foi considerado neste trabalho um fluido bariônico que se conserva separadamente da matéria escura.

Após estabelecer as bases matemáticas da inserção dos bárions, o modelo foi então submetido a testes cosmológicos seguindo os moldes na literatura para o caso sem bárions. Embora o modelo admita essa distinção entre a matéria ordinária e a matéria escura os parâmetros cosmológicos observacionais utilizados na análise não os distinguem, o que força a fixação de um dos parâmetros. Foi escolhido fixar a componente bariônica afim de estabelecer um paralelo mais claro com a literatura.

A análise do modelo foi então dividida em duas partes: a análise do fundo homogêneo e isotrópico; e a análise da formação de estruturas na componente bariônica. A primeira é constituída dos testes realizados com oscilações acústicas bariônicas, posição do primeiro pico e com Supernovas do tipo IA.

Um aspecto interessante do modelo é que, ainda com a interação no setor escuro do Universo, a inserção dos bárions não altera em nada a dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico, somente divide a componente de matéria em duas partes: matéria escura e matéria bariônica. Por isso, esses primeiros testes são simplesmente uma reprodução da análise encontrada na literatura.

O foco do trabalho foi a aplicação da dinâmica perturbativa para investigar a formação de estruturas de larga escala na componente bariônica, que podem ser medidas diretamente. O espectro de potência da matéria bariônica resultante desta análise parece aliviar a contribuição da matéria escura em comparação com o espectro de potência da matéria total presente na literatura.

Combinando as análises encontra-se que, exatamente como o caso sem bárions, a amostra de Supernovas do tipo IA do SDSS(MLCS2k2) ainda reproduz uma concordância do fundo homogêneo e isotrópico com o nível perturbativo como caso sem os bárions. Para as outras amostras analisadas, embora não haja uma superposição perfeita dos testes, os resultados estão em melhor concordância devido a diminuição da contribuição da matéria

escura previsto pelo espectro de potência da matéria bariônica. De qualquer forma esta tensão, que já existe no modelo Λ CDM, é aliviada.

Além de representar uma melhor descrição do Universo conclui-se que a inserção dos bárions não afeta drasticamente a análise já presente na literatura, no sentido que todos os seus resultados são de alguma forma mantidos, corroborando para a sua utilização. Neste cenário, o modelo com decaimento do vácuo se apresenta como uma alternativa bastante interessante para futuros estudos.

Referências

- [1] N. Aghanim et al. [Planck Collaboration: P. A. R. Ade], **arXiv:1303.5076** (2013).
- [2] Zwicky F., *Helv. Phys. Acta*, **6**, 110, (1933).
- [3] E. Hubble, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **15**, 168 (1929).
- [4] A. G. Riess et al. [High-z Supernova Search], *Astron. J.*, **116**, 1009, (1998).
- [5] S. Perlmutter et al. [Supernova cosmology project], *Astrophysic. J.*, **517**, 565, (1999).
- [6] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1 (1989).
- [7] H. A. Borges, S. Carneiro. *Gen. Rel. Grav.*, **37**, 1385 (2005).
- [8] S. Carneiro, C. Pigozzo, H. A. Borges e J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D*, **74**, 023532 (2006).
- [9] S. Carneiro, M. A. Dantas, C. Pigozzo, J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D*, **77**, 083504 (2008).
- [10] C. Pigozzo, M. A. Dantas, S. Carneiro, J. S. Alcaniz, *JCAP* **1108**, 022 (2011).
- [11] H. Velten, A. Montiel, S. Carneiro, *MNRAS*, **431**, 3301 (2013).
- [12] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris e C. Pigozzo, *Phys. Rev. D*, **77**, 043513 (2008).
- [13] H. A. Borges, S. Carneiro e J. C. Fabris, *Phys. Rev. D*, **78**, 123522 (2008).
- [14] W. Zimdahl, H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris e W. S. Hipólito-Ricardi, *JCAP* **04**, 028 (2011).
- [15] J. S. Alcaniz, H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, C. Pigozzo e W. Zimdahl, *Phys. Lett. B*, **716**, 165 (2012).
- [16] C. Pigozzo, *Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro*, Tese de Doutorado, IF-UFBA, (2010).
- [17] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press (1971).
- [18] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1987).
- [19] A. A. Penzias and R. R. Wilson, *Astrophys. J.*, **142**, 419, (1965).
- [20] J.C. Mather et al, *Astrophys. J.*, **512**, 511 (1999).
- [21] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, São Francisco (1972).

- [22] S. Weinberg. *Cosmology*, Oxford, UK (2008).
- [23] M. Sami, *Current Science*, **97**, 887 (2009).
- [24] M. S. Turner, [arXiv:astro-ph/9808149](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9808149) (1998).
- [25] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman e R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* 215,203 (1992)
- [26] Jai-chan Hwang e Hyerim Noh, *Gen. Rel. Grav.*, **31**, 8 (1999)
- [27] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882(1990)
- [28] J. A. S. Lima, *Brazilian Journal of Physics*, **34**, 1A, 2004.
- [29] W. Zimdahl, [arXiv:1204.5892](https://arxiv.org/abs/1204.5892), 2011.
- [30] M. S. Turner e M. White, *PRD* **56**, R4439, 1997.
- [31] M. S. Turner, [arXiv:astro-ph/0108103](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0108103), 2001.
- [32] R. R. Caldwell, R. Dave e P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [33] R. R. Caldwell e P. J. Steinhardt, *PRD* **57**, 6057 (1998)
- [34] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski e N. N. Weinberg, *PRL* **91**, 071301 (2003).
- [35] Eric V. Linder, *Phys. Rev. Lett. D* **68**, 083503 (2003).
- [36] M. Chevallier e D. Polarski, *Int. J. Mod. Phys. D* **10**, 213 (2001).
- [37] Kamenshchik, A. Moschella, U. and Pasquier, V., *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001)
- [38] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **75**, 067302 (2007).
- [39] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, W. Zimdahl, [arXiv:1306.0917](https://arxiv.org/abs/1306.0917) (2013).
- [40] R. Colistete Jr, J. C. Fabris, J. Tossa e W. Zimdahl, *Phys. Rev. D* **76**, 103516 (2007).
- [41] Steinhardt, P.J., Wang, L. and Zlatev, I., *Phys. Rev. D* 59, 123504 (1999).
- [42] C. Armendariz-Picón, V. Mukhanov e P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438 (2000).
- [43] B. Li, J. D. Barrow, D. F. Mota, *Phys. Rev. D*, **76**, 044027 (2007).
- [44] S. M. Carroll et al., *Phys. Rev. D*, **71**, 063513 (2005).
- [45] G. Dvali, M. S. Turner, [arXiv:astro-ph/0301510](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0301510) (2003)
- [46] R. Schützhold, *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 4359 (2002).
- [47] R. Schützhold, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 081302 (2002).
- [48] M. Fukugita, C.J. Hogan e P.J.E. Peebles, *Astrophys J.*, **503**, 518 (1998).
- [49] P. C. Gregory, *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Science*, Cambridge (2005).

- [50] G. B. Rybicki e A. P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* (1985).
- [51] Eisenstein, D.J. et al., *ApJ*, **633**, 560 (2005).
- [52] M. Tegmark et al., *Phys. Rev. D*, **74**, 123507 (2006).
- [53] W. Percival et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **401**, 2148 (2010).
- [54] W. Hu e N. Sugiyama, *Astrophys.J.*, **471**, 542 (1996).
- [55] O. Elgaroy e T. Multamaki, *arXiv:astro-ph/0702343v1*.
- [56] G. Hinshaw et al., *Astrophys.J.Suppl.*, **170**, 288 (2007).
- [57] D. N. Spergel et al., *Astrophys.J.Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [58] W. Hu, M. Fukugita, M. Zaldarriaga and M. Tegmark, *Astrophys. J.*, **549**, 669 (2001).
- [59] G. Sethi, S. K. Singh, P. Kumar, D. Jain and A. Dev, *Int. J. Mod. Phys. D*, **15**, 1089 (2006).
- [60] A. V. Filippenko, *arXiv:astro-ph/0410609*.
- [61] F. Arévalo, A. P. R. Bacalhau, W. Zimdahl, *arXiv:1112.5095v2*.
- [62] D. R. Castro, H. Velten, W. Zimdahl, *JCAP*, **6**, 24 (2012).
- [63] C. Z. Vargas, W. S. Hipólito-Ricaldi, W. Zimdahl, *JCAP*, **4**, 32 (2012).
- [64] Y. Gong, *JCAP*, **0503**, 007 (2005).
- [65] E. Majerotto, D. Sapone, L. Amendola, *arXiv:astro-ph/0410543v2*.
- [66] M. Demianski, E. Piedipalumbo, C. Rubano, C. Tortora, *Astron. Astrophys.*, **431**, 27 (2005).
- [67] A.G. Riess, W.H. Press e R.P. Kirshner, *The Astrophysical Journal*, **473**, 88 (1996).
- [68] J. Guy et al., *Astron. Astrophys.*, **443**, 781 (2005).
- [69] J. Guy et al., *Astron. Astrophys.*, **466**, 11 (2007).
- [70] W. H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (2007).
- [71] J. Sollerman et al., *Astrophys. J.*, **703**, 1374 (2009).
- [72] M. Hicken et. al., *Astrophys. J.*, **700**, 1097 (2009).
- [73] M. Kowalski et al., *Astrophys. J.*, **686**, 749 (2008).
- [74] R. Amanullah et al., *Astrophys. J.*, **716**, 712 (2010).
- [75] N. Suzuki et al., *Astrophys. J.*, **746**, 85 (2012).

- [76] P. J. E. Peebles, *The Large Scale Structure of Universe*, Princeton (1980).
- [77] J.M. Bardeen, J.R. Bond, N. Kaiser e A.S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).
- [78] J. Martin, A. Riazuelo and M. Sakellariadou, *Phys. Rev. D*, **61**, 083518 (2000).