

**Estado Fundamental do Átomo de Hidrogênio via
Equação de Dirac em um Cenário com
Comprimento Mínimo**

Thiago Luiz Antonacci Oakes

Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal do Espírito Santo

2013

Thiago Luiz Antonacci Oakes

Estado Fundamental do Átomo de Hidrogênio via
Equação de Dirac em um Cenário com
Comprimento Mínimo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Físicas do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Alexandre Nogueira.

Coorientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

VITÓRIA

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

O11e Oakes, Thiago Luiz Antonacci, 1983-
Estado fundamental do átomo de hidrogênio via equação de Dirac em um cenário com comprimento mínimo / Thiago Luiz Antonacci Oakes. – 2013.
80 f.

Orientador: José Alexandre Nogueira.

Coorientador: Júlio César Fabris.

Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Átomos. 2. Teoria quântica de campos. 3. Heisenberg, Princípio de incerteza de. 4. Dirac, Equações de. I. Nogueira, José Alexandre, 1964-. II. Fabris, Júlio César. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

“Estado Fundamental do Átomo de Hidrogênio via
Equação de Dirac em um Cenário com
Comprimento Mínimo”

Thiago Luiz Antonacci Oakes

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu
(UFRRJ)

Prof. Dr. Wesley Spalenza
(UFES)

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira
(Orientador/UFES)

Prof. Dr. Júlio César Fabris
(Coorientador/UFES)

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella
(UFES)

Vitória-ES, 23 de agosto de 2013.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar presente na minha vida em todos os momentos. Aos meus pais, José Luiz Oakes (*in memoriam*) e Analia Antonacci Oakes (*in memoriam*), pela educação que me deram e por terem sido meus grandes amigos. A minha família, em especial a minha esposa, pela sua paciência e pelo seu amor. Ao meu orientador, José Alexandre Nogueira, por ter contribuído na minha formação. Aos meus amigos da pós-graduação, pela valiosa ajuda que me prestaram nas minhas dificuldades. Aos membros da banca, pelas sugestões que contribuíram para a melhoria do meu trabalho. A CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho calculamos a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio levando em conta as contribuições advindas da presença de um comprimento mínimo. O cenário de comprimento mínimo é introduzido pela modificação da equação de Dirac através da álgebra de Heisenberg modificada (álgebra de Kempf). Com a introdução do potencial Coulombiano no novo operador de energia de Dirac, calculamos a mudança na energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio em primeira ordem do parâmetro relacionado ao comprimento mínimo via teoria de perturbação.

Abstract

In this work we calculate the correction to the ground state energy of the hydrogen atom due to contributions arising from the presence of a minimal length. The minimal length scenario is introduced by means of modifying the Dirac equation through a deformed Heisenberg algebra (Kempf algebra). With the introduction of the Coulomb potential in the new Dirac energy Operator, we calculate the energy shift of the ground state of the hydrogen atom in first order of the parameter related to the minimal length via perturbation theory.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
1.1 Introdução	2
2 Introdução do Comprimento Mínimo no Modelo Padrão	7
2.1 Introdução	8
2.2 Princípio de Incerteza Generalizado	9
2.3 Relatividade Modificada	10
2.4 Relação de Dispersão Modificada	11
2.5 Correspondência Entre a Relação de Incerteza Generalizada e a relatividade Modificada	12
2.6 Relação entre o Princípio de Incerteza Generalizado a Relatividade Modificada e a Relação de Dispersão Modificada	13
2.7 Considerações Finais	14
3 O Espaço de Hilbert em um Cenário com Comprimento Mínimo	15
3.1 Introdução	16
3.2 Construção do Espaço de Hilbert	17
3.3 Equação de auto-valores do Operador Posição	20

3.4	A Posição no Novo Cenário	21
3.4.1	A Máxima Localização	21
3.4.2	Transformação para Função de Onda de Quase Posição	23
3.5	Operadores no Espaço das Quase Posições	24
3.6	Álgebra de Heisenberg Generalizada para mais Dimensões	25
3.7	Considerações Finais	26
4	Mais Comentários Acerca da escala de Comprimento Mínimo. Relações	
	Momento-Translação Espacial e Energia-Translação Temporal	28
4.1	Introdução	29
4.2	A Relação de Incerteza na Mecânica Quântica	30
4.3	O Comprimento Mínimo	31
4.4	Obtenção de Operadores	32
4.5	Considerações Finais	33
5	A Equação de Dirac	35
5.1	Introdução	36
5.2	Desenvolvimento da Equação de Dirac e Equação de Auto-Valores	37
5.3	Considerações Finais	43
6	Teoria de Dirac de um Elétron Submetido à um Potencial Central.	44
6.1	Introdução	45
6.2	Equação de Auto-Valores	46
6.3	Considerações Finais	50
7	Estado Fundamental do Átomo de Hidrogênio via Equação de Dirac	
	em um Cenário com Comprimento Mínimo	51
7.1	Introdução	52
7.2	Operador de Energia de Dirac em um Cenário com Comprimento Mínimo	54
7.3	Energia do Átomo de Hidrogênio no Estado Fundamental	56

	0
7.3.1 Estado Fundamental	58
7.4 Estimando o Comprimento Mínimo	60
7.5 Considerações Finais	61
8 Conclusão	62
8.1 Introdução	63
Referências bibliográficas	67

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Um dos principais problemas da gravitação quântica é o fato de que a introdução da gravitação na teoria quântica de campos parece fazer com que tenhamos uma teoria não renormalizável. Por outro lado, já foi sugerido que a própria gravitação introduz uma resolução mínima no espaço. Em outras palavras, ela faz com que exista um valor mínimo para a medida de comprimentos. A pergunta natural que se faz é a seguinte: O que faz isso ocorrer? A resposta poderia ser dada pela sequência de raciocínios: primeiro, quando tentamos olhar para distâncias cada vez menores precisamos de uma quantidade cada vez maior de energia para acessarmos uma tal resolução no espaço. Segundo, quando chegamos em um certo patamar energético, começamos a causar distúrbios na própria estrutura do espaço-tempo. Estes distúrbios fazem com que tenhamos uma resolução máxima para a localização da partícula. A maior resolução (localização) no espaço-tempo, experimentalmente falando, é da ordem de 1TeV . Isso sugere que um tal comprimento mínimo estaria na ordem da escala de Planck. A grande ideia por traz disso tudo é que a gravitação age como um "cut-off" natural, sugerindo, assim, uma solução para a não renormabilidade de uma teoria quântica para a gravitação.

Na verdade, todas as tentativas de quantização da gravitação parecem apontar para uma mesma predição: a existência de um comprimento mínimo. No entanto, a ideia do comprimento mínimo existe bem antes de qualquer tentativa de quantização da gravitação. Devido às divergências provenientes da teoria quântica de campos, em 1930, Heisenberg concluiu que deve existir um comprimento fundamental que seria como um "cut-off" natural para as integrais divergentes [1, 2]. Heisenberg tentou, sem sucesso, introduzir um comprimento fundamental impondo uma não comutatividade entre as componentes do operador posição. Mas antes de 1947, Snyder propôs uma álgebra covariante de Lorentz do operador de momento e de posição na qual as componentes

do operador posição não comutam. Esta proposta implica em um espaço-tempo não contínuo e, desta forma, um comprimento mínimo é introduzido na teoria [3]. Em 1994, S. Majid e H. Ruegg propuseram uma modificação nas relações de comutação do espaço-tempo que ficou conhecida como álgebra de κ -Poincaré [4]. No mesmo ano, A. Kempf, G. Mangano e R. B. Mann iniciaram o desenvolvimento das bases matemáticas da mecânica quântica em um cenário com comprimento mínimo. Até onde sabemos, foi M. Bronstein quem concluiu que a quantização induz um limite de precisão para uma certa medição, e conseqüentemente leva à existência de um comprimento mínimo [6]. Para maiores detalhes acerca do comprimento mínimo e suas implicações, indicamos a referência [5].

A ideia da existência de um comprimento mínimo traz grandes conseqüências para a física. Um exemplo inicial seria o caso da mecânica quântica ordinária. Teoricamente a introdução de um comprimento mínimo corresponde à introdução de um valor mínimo na posição, Δx_0 . Veremos, em detalhe, no capítulo seguinte as modificações da teoria quântica ordinária com a introdução do comprimento mínimo. Outros exemplos podem ser encontrados na teoria quântica de campos. A teoria quântica de campos ordinária considera que as interações são locais. Esse fato está dentro do contexto da teoria quântica de campos ordinária ser uma teoria local. Essa localidade da teoria faz com que surjam problemas de divergências de grandezas físicas. A introdução do comprimento mínimo na teoria quântica pode ser estendida para a teoria quântica de campos fazendo com que tenhamos uma teoria não local. Essa nova teoria apresenta uma grande vantagem: O fato de que as divergências não aparecem mais. Um outro campo de investigação dentro da teoria quântica de campos não local seria o comportamento das teorias de gauge.

Com relação à teoria quântica de campos, vale apenas mencionar os trabalhos das referências [7, 8] onde o efeito Casimir é apresentado no contexto de uma teoria com

comprimento mínimo. Nesses trabalhos podemos destacar três importantes fatos: ele aparece como um "cut-off" natural, o seu valor máximo é estimado como sendo da ordem de $15nm$, que é da ordem do tamanho de uma dimensão extra compactificada. Ainda com relação à teoria quântica de campos, temos o trabalho da referência [9], onde é introduzida uma relação de incerteza que induz comprimento mínimo e um valor mínimo na medida do momento¹. Nesse trabalho, o ponto principal mostrado é o fato de que a teoria não é mais divergente. Em outras palavras, o comprimento mínimo atua como um regulador natural da teoria.

A influência do comprimento mínimo também é analisada em outros contextos. Podemos citar: O cálculo da constante cosmológica, a modificação da relatividade especial, o cálculo dos níveis de energia do átomo de hidrogênio, dentre muitos outros. Um caso bem interessante é a modificação da relatividade especial. As transformações de Lorentz ordinárias, dentre outras coisas, fazem com que os comprimentos se tornem menores quando mudamos de um referencial inercial para outro. Se o comprimento em um referencial já for o mínimo, não poderíamos, mediante uma transformação de Lorentz, ter uma redução de comprimento. Portanto, o comprimento mínimo entraria como um invariante de Lorentz e, por isso, as transformações de Lorentz ordinárias sofreriam modificações com a introdução do comprimento mínimo.

Como podemos notar, são muitas implicações do comprimento mínimo nas teorias físicas. E mais, o fato de termos problemas sanados com a sua introdução, como no caso das regularizações na teoria quântica de campos, serve de motivação para cremos em sua existência.

Um grande desafio tem sido a pesquisa de restrições experimentais para obter um valor máximo para o comprimento mínimo. Estas restrições experimentais são parti-

¹A generalização do espaço de Hilbert correspondente é chamada de espaço de Bargmann-Fock.

cularmente relevantes para modelos com dimensões extras que possuem uma escala de Planck efetiva menor que a escala de Planck em 4 dimensões [10]. As correções na energia do espectro do átomo de hidrogênio devido à presença do comprimento mínimo foram calculadas por vários autores. Brau [11], introduzindo o cenário de comprimento mínimo no cálculo da transição $1S - 2S$ estimou o valor máximo para o comprimento mínimo como sendo da ordem de $10^{-17}m$. Usando a equação de Schroedinger em um cenário com comprimento mínimo, Brau estimou que a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio é da ordem de α^4 , onde α é a constante de estrutura fina.

Seria interessante estudarmos os efeitos das contribuições relativísticas devido a presença do comprimento mínimo no átomo de hidrogênio. Significa que teremos que considerar a equação de Dirac para o átomo de hidrogênio em um cenário com comprimento mínimo.

O trabalho está organizado da seguinte forma: No segundo capítulo, discutiremos as formas com as quais podemos introduzir o comprimento mínimo nas teorias físicas. E para mostrar a consistência destas formas, iremos mostrar que elas são na verdade equivalentes. No terceiro capítulo, discutiremos de uma forma bem ampla a introdução do comprimento mínimo na mecânica quântica pela modificação da relação de incerteza de Heisenberg. Essa modificação é marcada pela introdução de um parâmetro pequeno, denotado por β . Um fato marcante decorrente do comprimento mínimo, é que o espaço dos estados quânticos não pode mais ser escrito em uma base de auto-estados do operador posição. No quarto capítulo, além de fazermos mais comentários acerca da escala de comprimento mínimo, estudaremos as relações: operador momento-operador de translação espacial e operador de energia-operador de translação temporal. No quinto capítulo, estudaremos a equação de Dirac e mostraremos como escreve-la na forma de uma equação de auto-valores. No sexto capítulo, apresentaremos a teoria de

Dirac ordinária com a introdução de um potencial central². A fórmula para os níveis de energia obtidos para o elétron são chamados de fórmula de estrutura fina. No sétimo capítulo, vamos estudar a equação de Dirac com um potencial central em um cenário com comprimento mínimo. Em particular, veremos a modificação da energia do estado fundamental e estimaremos um valor máximo para o comprimento mínimo. Após isto, no oitavo capítulo, finalizaremos o trabalho apresentando e discutindo os resultados obtidos.

²Em outras palavras, faremos a descrição do elétron em um átomo de hidrogênio

Capítulo 2

Introdução do Comprimento

Mínimo no Modelo Padrão

2.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar boa parte do trabalho de Hossenfelder [12]. É um fato notável que a gravitação é inconsistente com a física em escalas muito pequenas. Tal fato sugere que a própria gravidade faz com que tenhamos um "cut-off" na escala ultra violeta, ou seja um comprimento mínimo. Com relação ao valor do comprimento mínimo, acreditamos que está em torno, ou igual ao comprimento de Planck. Para compreendermos melhor isso, consideremos a seguinte situação: Suponhamos que queiramos localizar uma partícula com uma certa precisão. Para isso, precisamos fazer incidir sobre a mesma uma certa quantidade de energia. Digamos que queiramos aumentar a precisão de sua localização. Para isso precisamos de mais energia incidente e tanto mais quanto maior for a precisão requerida. Chegará um ponto que a estrutura do espaço-tempo ficará distorcida de tal forma que não poderemos mais enxergar além de um limite máximo de precisão, ou seja, o comprimento mínimo.

Como exemplos de motivações para a existência de um comprimento mínimo temos: A teoria de cordas [13, 14], a gravitação quântica de laços [15], as geometrias não comutativas [16, 17]. Estimativas para valores máximos do comprimento mínimo são feitas em várias situações: a física de buracos negros [18, 19], a dualidade T da integral de caminhos e etc.

As formas com as quais o comprimento mínimo tem sido introduzido no modelo padrão são: O princípio de incerteza generalizado, a relatividade especial modificada e a relação de dispersão modificada. Essas teorias constituem um aparato útil para estudarmos a física além do modelo padrão.

Apresentaremos a seguir as formas citadas acima de introdução do comprimento mínimo no modelo padrão e em seguida as relações entre as mesmas. Por fim, finalizaremos o

capítulo.

2.2 Princípio de Incerteza Generalizado

Partículas com um patamar energético suficientemente alto para acessar distâncias pequenas da ordem da escala de planck irão causar distúrbios na estrutura do espaço-tempo. Esses distúrbios podem ser caracterizados impondo uma limitação para o vetor da onda associada à partícula. Na mecânica quântica ordinária o momento linear é diretamente proporcional ao vetor de onda. Para que haja uma limitação do vetor de onda, vamos supor que o vetor de onda $K = (\omega, \vec{k})$, em altas energias, não é mais linear a $P = (E, \vec{p})$. O que de fato queremos é que o comprimento de onda tenha um valor mínimo L_m .

Consideremos, por simplificação, o caso unidimensional. Seja $K = (\omega, k)$ o vetor de onda e $P = (E, p)$ o momento. Seja $f = (f_0, f_1)$ funções tais que

$$f_0(P) = \omega \quad (2.1)$$

e

$$f_1(P) = k. \quad (2.2)$$

Suponhamos que essas funções sejam bem definidas, diferenciáveis e com inversa tal que

$$(f^{-1})_0(K) = E \quad (2.3)$$

e

$$(f^{-1})_1(K) = p. \quad (2.4)$$

Na mecânica quântica ordinária o vetor de onda é diretamente proporcional ao momento linear pela constante \hbar . Tomando o sistema natural de unidades, onde $\hbar = c = 1$, teremos para baixas energias

$$f = f^{-1} = \textit{Identidade} \quad (2.5)$$

e

$$\omega, k \ll \frac{1}{L_m}. \quad (2.6)$$

Considerando a relação de comutação entre x e k da forma usual,

$$[\hat{x}, \hat{k}] = i, \quad (2.7)$$

obtemos

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \frac{\partial}{\partial k} (f^{-1})_1(K). \quad (2.8)$$

A partir da relação de comutação, podemos derivar a relação de incerteza. Sejam \hat{A} e \hat{B} dois observáveis quaisquer. Da mecânica quântica, podemos escrever

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|. \quad (2.9)$$

Da relação acima, concluímos que

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2} |\langle \partial_k (f^{-1})_1(K) \rangle|. \quad (2.10)$$

Em [20, 21] encontramos muitos exemplos da função f .

2.3 Relatividade Modificada

Uma das consequências da relatividade restrita é a contração do comprimento. No contexto de uma teoria com comprimento mínimo, o comprimento não poderá se contrair indefinidamente, mas somente até o valor do comprimento mínimo. Sendo assim, as transformações de Lorentz devem sofrer uma modificação de tal forma que não só a velocidade da luz, mas também o comprimento mínimo são invariantes de Lorentz. Essas transformações são descritas pela álgebra de Poincare-Hopf [22, 23].

Nesse contexto, o 4 vetor momento P se transforma de acordo com as transformações de Lorentz usuais, denotadas genericamente pela matriz Λ pertencente ao grupo $SO(3, 1)$. Ao efetuarmos uma transformação de referencial inercial, temos, portanto, $P' = \Lambda P$.

Vimos que a resolução do espaço esta relacionada ao vetor de onda. Portanto, para manter o comprimento mínimo invariante, o 4 vetor de onda K deve se transformar de acordo com uma nova transformação Λ^{nova} . Ou seja, efetuando uma transformação de referencial inercial, temos $K' = \Lambda^{nova} K$.

Existe um interesse em utilizar o grupo de Lorentz modificado para explicar a física de raios cósmicos de energia ultra alta [24, 25]

2.4 Relação de Dispersão Modificada

A relatividade restrita nos fornece a seguinte relação

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4. \quad (2.11)$$

Utilizando o conceito de onda associada a uma partícula da mecânica quântica, a relação acima torna-se uma relação entre o vetor de onda e a frequência angular, dada por

$$c^2 \hbar^2 k^2 - \hbar^2 \omega^2 + m^2 c^4 = 0. \quad (2.12)$$

Uma forma alternativa de escrever a relação acima é utilizando o sistema de unidades naturais, $\hbar = c = 1$, que fornece

$$k^2 - \omega^2 + m^2 = 0. \quad (2.13)$$

A relação acima nos mostra que o vetor de onda k pode assumir valores arbitrariamente grandes, desde que ω assumam também valores arbitrariamente grandes. Sabemos, porém, que no contexto de uma teoria com comprimento mínimo, k não pode assumir valores arbitrariamente grandes. Uma forma impor um limite máximo para k , é modificando a relação de dispersão acima, fazendo o membro direito ser uma função de K , $F(K)$. Ou seja,

$$k^2 - \omega^2 + m^2 = F(K). \quad (2.14)$$

Se a partícula em questão for o fóton, a equação (2.13) torna-se

$$k^2 - \omega^2 = 0. \quad (2.15)$$

Restituindo \hbar e c , obtemos que a velocidade $\frac{d\omega}{dk}$ de propagação da onda eletromagnética é a velocidade da luz c . Ou seja,

$$\frac{d\omega}{dk} = c.$$

Por outro lado, se usarmos a relação (2.14), a velocidade da luz não será mais necessariamente c . Pois,

$$\frac{d\omega}{dk} = \pm \frac{d}{dk} \sqrt{F(k) + c^2\omega^2} \quad (2.18)$$

2.5 Correspondência Entre a Relação de Incerteza Generalizada e a relatividade Modificada

Seja f uma relação conhecida entre P e K . Para que haja equivalência entre a relação de incerteza generalizada e a relatividade modificada, dada uma f deve haver uma transformação Λ^{nova} relacionada a transformação de K quando mudamos de referencial inercial. Também, dada uma transformação Λ^{nova} entre K e K' deve haver uma transformação f entre P e K . Sabemos que

$$f^{-1}(K) = P \quad (2.19)$$

e

$$f(P) = K. \quad (2.20)$$

Das equações acima, concluímos

$$f(\Lambda f^{-1}(K)) = K'. \quad (2.21)$$

Então, temos

$$\Lambda^{nova}(K) = f(\Lambda f^{-1}(K)) = K'. \quad (2.22)$$

Mostrando, assim, que conhecida a transformação f podemos obter Λ^{nova} . A situação inversa também pode ser demonstrada.

2.6 Relação entre o Princípio de Incerteza Generalizado a Relatividade Modificada e a Relação de Dispersão Modificada

Uma vez que a relatividade modificada e o princípio de incerteza generalizado são equivalentes, fica suficiente mostrar a equivalência entre a relação de dispersão modificada e o princípio de incerteza generalizado. A relação relativística entre a energia e o momento linear é, como já mencionado, $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$ que pode ser escrita como (tomando o sistema natural de unidades, $\hbar = c = 1$)

$$\left[(f^{-1})_0(K) \right]^2 - \left[(f^{-1})_1(K) \right]^2 - m^2 = 0. \quad (2.23)$$

Definindo

$$(f^{-1})'_0 K = \omega + (f^{-1})'_0 K \quad (2.24)$$

e

$$(f^{-1})'_1 K = k + (f^{-1})'_1 K, \quad (2.25)$$

tal que no limite de baixas energias as funções $(f^{-1})'_0$ e $(f^{-1})'_1$ tendem a zero fazendo com que obtenhamos a relação de incerteza ordinária. Substituindo as definições acima na equação 2.23 obtemos

$$\omega^2 - k^2 + m^2 = -2\omega (f^{-1})'_0 K - (f^{-1})_0'^2 K + 2k (f^{-1})'_1 K + (f^{-1})_1'^2 K \quad (2.26)$$

Da relação acima identificamos $F(K)$ como

$$F(K) = -2\omega (f^{-1})'_0 - (f^{-1})_0'^2 K + 2k (f^{-1})'_1 + (f^{-1})_1'^2 K. \quad (2.27)$$

Mostramos, então, que dada uma f que relaciona P e K , obtemos uma função $F(K)$ e , assim, obtemos a relação de dispersão generalizada. A situação contrária pode ser também mostrada.

2.7 Considerações Finais

Mencionamos, no começo do capítulo, as motivações para a existência de um comprimento mínimo e como foi mencionado elas são diversas: gravitação, teoria de cordas, física de buracos negros e muitas outras. Referente à motiovação oriunda da gravitação, fizemos um breve comentário. Um entendimento mais claro das demais motivações requer um entendimento mais claro a respeito de cada uma das teorias.

Apresentamos as três diferentes formas de construirmos uma teoria com comprimento mínimo. Mencionamos, em seguida, que essas formas são equivalentes e demonstramos algumas equivalências. Com isso, fica claro que as três diferentes formas apontam para uma teoria com escala de comprimento mínimo.

Capítulo 3

O Espaço de Hilbert em um Cenário com Comprimento Mínimo

3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos expor boa parte do trabalho do Kempf [26]. Com vimos, uma das formas de introduzirmos o comprimento mínimo é por uma modificação na relação de incerteza. Esta modificação deve ser tal que o valor da incerteza na posição (considerando o caso unidimensional) tenha um valor mínimo diferente de zero, Δx_0 . Vamos propor a seguinte modificação

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma], \quad (3.1)$$

onde β e γ são constantes positivas que em geral dependem de $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$. Na relação acima, podemos notar que, se fizermos Δp crescer arbitrariamente, Δx não pode se aproximar de zero arbitrariamente, pois o membro esquerdo cresce quadraticamente com Δp , enquanto que o membro esquerdo cresce linearmente. Ou seja, para que o membro esquerdo seja maior, ou igual ao segundo, Δx deve possuir um valor mínimo diferente de zero.

Se quisermos que a posição e o momento assumam valores mínimos não nulos na incerteza, devemos impor a relação mais geral

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(\Delta p)^2 + \alpha(\Delta x)^2 + \gamma]. \quad (3.2)$$

Dados dois observáveis \hat{A} e \hat{B} , temos

$$\Delta A \Delta B \leq \frac{\hbar}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|. \quad (3.3)$$

Usando a relação acima, podemos concluir que (3.2) decorre da seguinte relação de incerteza

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \alpha\hat{x}^2 + \beta\hat{p}^2 + \gamma), \quad (3.4)$$

com $\gamma = \alpha\langle x \rangle^2 + \beta\langle p \rangle^2$.

3.2 Construção do Espaço de Hilbert

Na mecânica quântica ordinária, a atuação dos operadores \hat{x} e \hat{p} nos vetores de estado podem ser representadas por multiplicações e derivações nas funções de onda de quadrado integrável: $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ ou $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$, onde $|x\rangle$ e $|p\rangle$ são auto-estados, respectivamente dos operadores posição e momento. O produto interno desses estados é

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \quad (3.5)$$

e

$$\langle p|p'\rangle = \delta(x - x'). \quad (3.6)$$

Ou seja, estritamente falando, $|x\rangle$ e $|p\rangle$ não pertencem ao espaço de Hilbert, pois não são normalizáveis. No entanto \hat{x} e \hat{p} são auto-adjuntos e seus auto-estados são estados cuja incerteza podem ser tomadas arbitrariamente próximas de zero. Em outras palavras, falar que existe um auto-estado do operador \hat{x} é dizer que o pacote de onda em torno da posição medida pode reduzir sua largura sem restrições e podemos nos aproximar da tal medida o tanto que queiramos. Nesse caso, não teremos um patamar positivo mínimo para a incerteza na posição e para a incerteza no momento, ou seja, $\Delta x > 0$ e $\Delta p > 0$.

Para o caso de uma incerteza mínima na posição e no momento, Δx_0 e Δp_0 , diferentes de zero, a situação será bem diferente. A incerteza na posição, para um estado qualquer $|\psi\rangle$, é dada por ,

$$(\Delta x)_{|\psi\rangle} = \langle \psi | (\hat{x} - \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle)^2 | \psi \rangle. \quad (3.7)$$

No caso de um valor mínimo pra a incerteza, a relação acima deve ser maior ou igual a Δx_0 . Dessa forma, não haverá um estado físico que será auto-estado do operador \hat{x} . Isso não significa que não existem auto-estados do operador \hat{x} . Eles existem, mas não são todos estados físicos, como veremos adiante. Esses estados não pertencem ao

domínio de $D_{\hat{x}, \hat{p}, \hat{x}^2, \hat{p}^2}$ ¹. Esses estados, como veremos, possuem energia infinita e não são auto-adjuntos. Como veremos tais estados são apenas simétricos.

Um fato marcante é que não podemos mais representar os estados físicos em uma base de auto-vetores do operador posição. Não teremos mais funções de onda da posição, $\langle x|\psi\rangle$. A álgebra de Heisenberg não possuirá mais representação no espaço das funções de onda da posição. Se considerarmos o caso onde ocorre valor mínimo de incerteza também no momento, não poderemos mais ter funções de onda no espaço dos momentos, ou seja, não teremos mais $\langle \psi|p\rangle$. A álgebra de Heisenberg não possuirá mais representação no espaço das funções de onda do momento. No caso mais geral, com incerteza mínima na posição e no momento, a álgebra de Heisenberg terá uma representação mais geral, a chamada representação de Bargmann Fock.

Vamos considerar o caso onde temos incerteza mínima apenas na posição. Para isso, tomamos $\alpha = 0$ e a álgebra de Heisenberg torna-se

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2). \quad (3.8)$$

A relação de incerteza correspondente será

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}[1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta\langle \hat{p}^2 \rangle]. \quad (3.9)$$

O conjunto de valores de Δx e Δp cujo produto assume o menor valor possível forma a chamada região de fronteira e é obtida tomando o sinal de igualdade na relação acima.

Feito assim, obtemos

$$\Delta p = \frac{\Delta x}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta} - \langle \hat{p}^2 \rangle}. \quad (3.10)$$

Calculando o valor mínimo para Δx na equação acima obtemos

$$\Delta x_{min}(\langle \hat{p} \rangle) = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1 + \beta\langle \hat{p}^2 \rangle}. \quad (3.11)$$

¹Essa notação representa o domínio dos estados com valores médios bem definidos de posição, momento e de incertezas também bem definidos

O valor de Δx_0 é obtido fazendo $\langle \hat{p}^2 \rangle = 0$,

$$\Delta x_0 = \hbar \sqrt{\beta}. \quad (3.12)$$

No espaço das funções de onda do momento, os operadores \hat{p} e \hat{x} atuam como

$$\hat{p}\psi(p) = p\psi(p) \quad (3.13)$$

e

$$\hat{x}\psi(p) = i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi(p). \quad (3.14)$$

Como mencionado, os operadores \hat{x} e \hat{p} devem ser simétricos:

$$(\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle) = \langle \psi | (\hat{p} | \psi \rangle) \quad (3.15)$$

e

$$(\langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle) = \langle \psi | (\hat{x} | \psi \rangle). \quad (3.16)$$

Para termos essas simetrias, devemos definir o produto escalar como

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \phi(p). \quad (3.17)$$

A simetria de \hat{p} , com a definição acima, é fácil de verificar. A simetria de \hat{x} é mostrada ao mostrarmos, pela integração por partes, que

$$\int \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \phi(p) = \int 1 + \beta p^2 \phi(p) [i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p)]^* \quad (3.18)$$

A completeza é dada por

$$\int \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p| = \textit{identidade}. \quad (3.19)$$

O operador \hat{p} continua auto-adjunto, enquanto que o mesmo, como será visto, não ocorre para \hat{x} .

3.3 Equação de auto-valores do Operador Posição

Vamos analisar a equação de auto-valores do operador \hat{x} no espaço dos momentos. Essa equação é obtida de

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = \lambda\langle p|\psi\rangle, \quad (3.20)$$

onde λ são os auto-valores do operador \hat{x} . A relação acima torna-se

$$i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi_\lambda(p) = \lambda\psi_\lambda(p). \quad (3.21)$$

A solução da equação acima é

$$\psi_\lambda(p) = c \exp\left(-i\frac{\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan(\sqrt{\beta}p)\right), \quad (3.22)$$

onde c é uma constante qualquer. Impondo a condição de normalização, obtemos o valor de c e a função acima fica

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp\left(-i\frac{\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \quad (3.23)$$

Os estados acima são auto-vetores formais do operador \hat{x} .

O produto escalar do estado acima, $\langle\psi_\lambda|\psi_{\lambda'}\rangle$ é calculado por

$$\langle\psi_\lambda|\psi_{\lambda'}\rangle = \int \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi_{\lambda'}^*(p)\psi_\lambda(p) \quad (3.24)$$

o que fornece

$$\langle\psi_\lambda|\psi_{\lambda'}\rangle = \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda - \lambda')} \text{sen}\left(\frac{\pi(\lambda - \lambda')}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right). \quad (3.25)$$

Podemos verificar pela relação acima que os estados $|\psi_\lambda\rangle$ são normalizados, pois, $\langle\psi_{\lambda'}|\psi_\lambda\rangle = 1$ para $\lambda' = \lambda$. Para $\lambda \neq \lambda'$, os auto-vetores não são todos ortogonais, mas apenas o conjunto

$$|\psi_{(2n+\lambda)\hbar\sqrt{\beta}}\rangle, \quad (3.26)$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $\lambda \in [-1, 1]$. No entanto, nem mesmo esse conjunto pode ser considerado como estado físico, pois o valor de incerteza do momento linear correspondente é infinito. O mesmo ocorre com a energia,

$$\langle\psi_\lambda|\hat{p}^2/2m|\psi_\lambda\rangle = \text{divergência}. \quad (3.27)$$

Em outras palavras, $|\psi_\lambda\rangle$ não pertence ao domínio $D_{\hat{x},\hat{p},\hat{x}^2,\hat{p}^2}$. Uma vez que esse fato também ocorre na mecânica quântica ordinária, podemos concluir que: Vetores de estado $|\psi\rangle$ com valor de incerteza $\Delta x_{|\psi\rangle}$ dentro da região proibida $0 \leq \Delta x_{|\psi\rangle} < \Delta x_0$ não possuem um valor finito de energia.

Concluimos que os auto-vetores formais de \hat{x} com incerteza nula na posição não podem ser aproximados por estados cuja incerteza na posição se tornão arbitrariamente próxima de zero de energia finita. Temos um limite para a localizabilidade.

3.4 A Posição no Novo Cenário

Pelo que foi exposto, não podemos mais expandir um estado físico qualquer em uma base de auto-vetores do operador \hat{x} . Na mecânica quântica ordinária, informações sobre a posição são dadas por $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Em um cenário com comprimento mínimo, o mesmo não poderá mais ser feito. Ainda assim, informações acerca da posição ainda são acessíveis. Para isso, introduzimos o conceito de estados de máxima localização.

3.4.1 A Máxima Localização

Seja $|\psi_\xi\rangle$ o estado de uma partícula cuja posição está em torno de $x = \xi$ e valor de incerteza é o mínimo, Δx_0 . Ou seja,

$$\langle \psi_\xi^{ML} | \hat{x} | \psi_\xi^{ML} \rangle = \xi \quad (3.28)$$

e

$$(\Delta x)_{|\psi_\xi^{ML}\rangle} = \Delta x_0. \quad (3.29)$$

O fato de que os estados devem possuir norma positiva definida ou nula, faz com que possamos escrever

$$\left\| \left(\hat{x} - \langle x \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} (p - \langle p \rangle) \right) \right\| \geq 0, \quad (3.30)$$

ou, equivalentemente,

$$\langle \psi | (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 - \left(\frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} \right)^2 (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 | \psi \rangle \geq 0. \quad (3.31)$$

Da relação acima obtemos

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|}{2}. \quad (3.32)$$

Tomando na relação acima o sinal de igualdade, fica claro que o estado $|\psi\rangle$ correspondente é dado por

$$\left(\hat{x} - \langle x \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} (p - \langle p \rangle) \right) |\psi\rangle = 0. \quad (3.33)$$

Escrevendo os operadores no espaço dos momentos, obtemos

$$\left(i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p - \langle x \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{2(\Delta p)^2} (p - \langle \hat{p} \rangle) \right) |\psi\rangle = 0. \quad (3.34)$$

A solução, no espaço das funções de onda do momento, da equação acima é

$$\psi(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{4\beta(\Delta p)^2}} \exp \left[\left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} - \frac{[1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2]}{2(\Delta p)^2\sqrt{\beta}} \langle \hat{p} \rangle \right) \arctan(\sqrt{\beta}) \right]. \quad (3.35)$$

O estado de máxima localização é obtido tomando $\langle \hat{p} \rangle = 0$ e o valor de incerteza do momento que corresponde ao valor mínimo da incerteza da posição, $\Delta p = 1/\sqrt{\beta}$, o que fornece

$$\psi_\xi^{ML}(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-i \frac{\langle x \rangle \arctan(\sqrt{\beta} p)}{\hbar\sqrt{\beta}} \right), \quad (3.36)$$

onde N é a constante de normalização. Aplicando a condição de normalização, obtemos

$$\psi_\xi^{ML}(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-i \frac{\langle x \rangle \arctan(\sqrt{\beta} p)}{\hbar\sqrt{\beta}} \right). \quad (3.37)$$

A função acima é a função de onda plana generalizada no espaço dos momentos. A incerteza no momento associada a essa função de onda não é divergente, pois o fator $(1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}}$ vai a zero a medida que p cresce, limitando assim a gama de estados possíveis. Contrariamente ao caso anterior os estados de máxima localização são propriamente estados físicos com valor esperado de energia finito:

$$\langle \psi_\xi^{ML} | \hat{p}^2/2m | \psi_\xi^{ML} \rangle = \frac{1}{2m\beta}. \quad (3.38)$$

Os estados de máxima localização são normalizados, mas não são todos ortogonais, ou seja

$$\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\xi - \xi'}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{\xi - \xi'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \quad (3.39)$$

A normalização é verificada fazendo $\xi = \xi'$ na equação acima. Fazendo assim obtemos $\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = 1$. Isso reflete o fato dos estados serem normalizados, apesar de não serem todos ortogonais.

3.4.2 Transformação para Função de Onda de Quase Posição

Como mostrado anteriormente, não podemos mais expandir um estado $|\psi\rangle$ em uma base de auto-vetores do operador posição, $|\psi\rangle$. Ainda assim, podemos projetar um estado arbitrário $|\phi\rangle$ sobre um estado de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$. O resultado que iremos obter é a amplitude de probabilidade de encontrarmos a partícula em torno de uma posição $x = \xi$. Denotamos o conjunto de todas as projeções $\langle \psi_{\xi}^{ML} | \phi \rangle$ por funções de onda de quase-posição:

$$\phi(\xi) = \langle \psi_{\xi}^{ML} | \phi \rangle. \quad (3.40)$$

A transformação da função de onda no espaço dos momentos para a função de onda no espaço das quase-posição é:

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{i\xi \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \psi(p). \quad (3.41)$$

Essa equação, que é uma generalização da transformada de Fourier, mapeia a função de onda no espaço dos momentos na função de onda das quase-posições. Vamos analisar a função de onda de quase posição relacionada com um estado cujo momento é definido por um valor único p . Ou seja, um estado que é um auto-vetor do operador \hat{p} . Para obtermos essa função, devemos tomar $\psi(p)$ como uma delta de Dirac em torno de p na equação acima², o que fornece

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{3/2} \exp\left(\frac{i\xi \arctan(\sqrt{\beta}2mE)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right). \quad (3.42)$$

²Esse estado é caracterizado por um valor definido de energia $E = p^2/2m$

Comparando na exponencial acima $2\pi/\lambda$ com $\arctan(\sqrt{\beta 2mE})/\hbar\sqrt{\beta}$, obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar\sqrt{\beta}}{\arctan(\sqrt{\beta mE})}. \quad (3.43)$$

Se tomarmos valores de energia arbitrariamente grandes na equação acima ($E \rightarrow \infty$) obtemos

$$\lambda_0 = 4\hbar\sqrt{\beta}. \quad (3.44)$$

Ou seja, em um cenário com comprimento mínimo, o comprimento de onda da onda associada à partícula possui um valor mínimo positivo diferente de zero. Notemos que no caso $\beta \rightarrow 0$ recuperamos o caso da mecânica quântica ordinária, onde não há um limite mínimo positivo para o comprimento de onda.

Podemos inverter (3.41) e obter

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int d\xi (1 + \beta p^2)^{1/2} \exp\left(\frac{-i\xi \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \psi(\xi). \quad (3.45)$$

Essa é a função de onda no espaço dos momentos que fornece a amplitude de probabilidade de medirmos um momento p , como no caso da mecânica quântica ordinária.

3.5 Operadores no Espaço das Quase Posições

É desejável obtermos a expressão para o produto escalar em termos das funções de onda de quase posição. O produto escalar, como vimos anteriormente, no espaço das funções de onda do momento é dado por

$$\int \frac{1}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \psi(p). \quad (3.46)$$

Usando a relação acima e (3.45) obtemos a seguinte expressão para o produto escalar

$$(8\pi\hbar^2\sqrt{\beta})^{-1} \int \int \int dp d\xi d\xi' \exp\left(i(\xi - \xi') \frac{\arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \psi^*(\xi) \psi(\xi'). \quad (3.47)$$

Usando a equação (3.45), obtemos a representação do operador momento no espaço das funções de onda de quase-posição:

$$\hat{p}\psi(\xi) = \frac{\tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi)}{\sqrt{\beta}}\psi(\xi). \quad (3.48)$$

Obtemos também a representação de \hat{x} no espaço das funções de onda de quase-posição:

$$\hat{x}\psi(\xi) = \left(\xi + \beta \frac{\tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi)}{\sqrt{\beta}} \right) \psi(\xi). \quad (3.49)$$

A partir dos resultados acima, podemos concluir que os operadores \hat{x} e \hat{p} podem ser escritos em termo de multiplicação por ξ e diferenciação $-i\hbar\partial_\xi$. Notemos ainda que (3.48) e (3.49) no limite $\beta \rightarrow 0$, faz com que os operadores \hat{x} e \hat{p} assumam a mesma forma que na mecânica quântica ordinária.

A vantagem da representação das funções de onda de quase-posição é sua interpretação direta. Lembremos que $\psi(\xi)$ é a amplitude de probabilidade de encontrarmos a partícula em torno de $x = \xi$ com incerteza Δx_0 .

3.6 Álgebra de Heisenberg Generalizada para mais Dimensões

Vimos até aqui a construção do espaço de Hilbert considerando apenas uma dimensão. Vamos agora abordar o caso de um espaço com mais dimensões. Uma generalização possível para n dimensões é ³

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar \left[\delta_{ij}(1 + \beta \hat{p}^2) + \beta' \hat{p}_i \hat{p}_j \right], \quad (3.50)$$

³Esta relação irá fornecer um valor mínimo de incerteza em cada coordenada

onde β' é outro parâmetro liga ao comprimento mínimo. Fazendo, por simplificação, $\beta' = 0$ obtemos

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar \left[\delta_{ij}(1 + \beta \hat{p}^2) \right]. \quad (3.51)$$

Considerando que as componentes do operador momento comutem,

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (3.52)$$

a identidade de Jacob fornece a seguinte relação de comutação para as componentes do operador posição

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 2i\hbar\beta(\hat{p}_i\hat{x}_j - \hat{p}_j\hat{x}_i). \quad (3.53)$$

A relação acima liga a ideia do comprimento mínimo com uma geometria comutativa [27]. A atuação das componentes do operador posição e do operador momento são dadas por

$$\hat{p}_i\psi(p) = p_i\psi(p) \quad (3.54)$$

e

$$\hat{x}_i\psi(p) = i\hbar(1 + \beta \hat{p}^2)\partial_{p_i}\psi(p) \quad (3.55)$$

3.7 Considerações Finais

Como foi mostrado o cenário da mecânica quântica com a introdução do comprimento mínimo é drasticamente alterado. Em um cenário desse tipo não podemos localizar uma partícula com uma incerteza tão pequena quanto queiramos. O menor valor de incerteza não nula que podemos atingir é $\Delta x_0 = \hbar\sqrt{\beta}$. O Estado que corresponde à esse valor de incerteza é chamado de estado de máxima localização. Sendo assim, não podemos mais decompor estados quânticos em termos de uma base formada pelos auto-vetores do operador posição, mas podemos decompor em uma base de auto-vetores do operador momento. Isso implica em não termos mais funções de onda das posições. No entanto, referente aos estados de máxima localização, podemos construir as funções

de onda de quase posição que, contrariamente as funções de onda, fornecem a amplitude de probabilidade de encontrarmos a partícula em torno de um valor médio. De posse disso, escrevemos a atuação do operador de posição e de momento nas funções de onda de quase posição.

Em seguida generalizamos para mais de uma dimensão, o que nos mostrou o importante fato de passarmos a ter uma geometria não comutativa no espaço das posições. Isso atenta para o fato de que o aparecimento do comprimento mínimo também surge quando tratamos de espaços com geometria não comutativa. Os modelos integráveis e os grupos de simetria generalizados para o estudo da estrutura algébrica do setor de Higgs [27] são os elementos motivadores para a introdução da geometria não comutativa em uma teoria. Em algumas situações a geometria não comutativa induz valor mínimo de incerteza na posição e no momento.

Capítulo 4

Mais Comentários Acerca da escala
de Comprimento Mínimo. Relações
Momento-Translação Espacial e
Energia-Translação Temporal

4.1 Introdução

Nesse capítulo apresentaremos o que foi exposto no trabalho de Hossenfelder [28]. A ideia da existência de um comprimento mínimo e a necessidade de um espaço tempo com mais dimensões são fatores que apontam para a necessidade da existência de uma teoria quântica para a gravidade. Um dos fatos que sugerem a ligação do comprimento mínimo com a gravitação quântica é que os efeitos da gravidade quântica se tornam relevantes na escala de Planck. Quando estudamos a física de colisões em um cenário com dimensões extras, torna-se necessário supor a existência de um comprimento mínimo. O modelo de dimensões extras [29, 30] nos fornece base para estudarmos, em experimentos futuros de colisão, interações com energias Planckianas. Na perspectiva desse modelo, os gravitons estão restritos a se moverem nessas dimensões extras. A escala de Planck, na descrição desse modelo, sofre uma redução para uma nova escala L_f com escala de massa correspondente M_f . A relação entre a massa de Planck em 4 dimensões e a massa de Planck em dimensões maiores é

$$m_p^2 = R^d M_f^{d+2}, \quad (4.1)$$

onde d é o número de dimensões extras e R o raio de compactificação.

A relação entre a massa de Planck e o Comprimento de Planck é $\hbar = M_f L_f$. Como já mencionado, acreditamos que o comprimento mínimo é da ordem do comprimento de Planck L_f . Ao fazermos menção do comprimento mínimo, nesse capítulo, faremos uso de L_f . No capítulo anterior, o comprimento mínimo é dado em termos de um parâmetro β por $\hbar\sqrt{\beta}$. Portanto, uma vez que usamos L_f para identificar o comprimento mínimo, temos

$$\beta = \frac{1}{M_f^2}. \quad (4.2)$$

Nas seções posteriores, iremos exibir a relação funcional do vetor de onda k e o operador \hat{p} . Em seguida a relação funcional entre a frequência angular ω e do operador energia

\hat{E} .

4.2 A Relação de Incerteza na Mecânica Quântica

Na mecânica quântica ordinária, a energia (que gera as translações temporais), E é dada por

$$E = \hbar\omega, \quad (4.3)$$

onde ω é a frequência angular, que é o que gera a translação temporal efetivamente. Já o momento linear (que gera as translações espaciais) p_i é dado por

$$p_i = \hbar k_i, \quad (4.4)$$

onde k_i são as componentes do vetor de onda, que é o que gera efetivamente as translações espaciais. Fazendo a primeira quantização, obtemos

$$[\hat{x}_i, \hat{k}_j] = i\delta_{ij}. \quad (4.5)$$

Para os operadores de momento linear e de energia, temos respectivamente

$$\hat{p}_i = -i\hbar\partial_i \quad (4.6)$$

e

$$\hat{E} = i\hbar\partial_t. \quad (4.7)$$

Sabemos que a relação de incerteza entre dois operadores \hat{A} e \hat{B} é dada por

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|. \quad (4.8)$$

Usando a relação acima, temos que relação de incerteza entre \hat{x}_i e \hat{p}_i fica

$$\Delta p_i \Delta x_i \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (4.9)$$

Dado um estado quântico inicial $|\psi(t_0)\rangle$, o estado quântico em um instante posterior é dado pela aplicação do operador evolução temporal

$$\hat{U}(t - t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{E}(t - t_0)\right). \quad (4.10)$$

Portanto,

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{E}|\psi\rangle. \quad (4.11)$$

4.3 O Comprimento Mínimo

Vamos considerar o caso unidimensional, onde o momento linear da partícula é dado por p e o vetor de onda por k . A introdução do comprimento mínimo é feita admitindo que o momento p pode crescer arbitrariamente, mas o vetor de onda k possui um valor limite. A resolução na localização da partícula está relacionada ao comprimento de onda λ da onda associada à partícula. Sabendo que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, um valor mínimo de λ irá corresponder à um valor máximo pra k .

Temos que construir uma nova relação entre k e p , $k(p)$. Uma escolha possível é

$$L_f k(p) = \tanh^{1/a} \left[\left(\frac{p}{M_f} \right)^{1/a} \right]. \quad (4.12)$$

Semelhantemente, atribuímos a mesma relação entre ω e E :

$$L_f \omega(E) = \tanh^{1/a} \left[\left(\frac{E}{M_f} \right)^{1/a} \right], \quad (4.13)$$

com a sendo uma constante real e positiva. Na equação anterior o parâmetro L_f possui, por questão de dimensionalidade, dimensão de tempo. Por simplicidade, tomamos $a = 1$. Vamos expandir as funções acima para duas situações: baixas energias, contribuições até ordem $(p/M_f)^3$ e altas energias, onde assumimos $p \gg M_f$.

No caso de baixas energias, temos:

$$L_f k(p) \approx \frac{p}{M_f} - \frac{1}{3} \left(\frac{p}{M_f} \right)^3, \quad (4.14)$$

$$L_f \omega(E) \approx \frac{E}{M_f} - \frac{1}{3} \left(\frac{E}{M_f} \right)^3, \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{M_f} p(k) \approx k L_f + \frac{1}{3} (k L_f)^3 \quad (4.16)$$

e

$$\frac{1}{M_f} E(\omega) \approx \omega L_f + \frac{1}{3} (\omega L_f)^3. \quad (4.17)$$

No caso de altas energias, usamos a aproximação $\tanh(x) \approx \pm 1 \mp 2\exp(\mp 2x)$ para $|x| \gg 1$, o que fornece

$$L_f k(p) \approx \pm 1 \mp 2\exp(\mp \frac{p}{M_f}), \quad (4.18)$$

$$L_f \omega(E) \approx \pm 1 \mp 2\exp(\mp \frac{E}{M_f}), \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{M_f} p(k) \approx \mp \ln\left(\frac{1 \mp k L_f}{2}\right) \quad (4.20)$$

e

$$\frac{1}{M_f} E(\omega) \approx \mp \ln\left(\frac{1 \mp \omega L_f}{2}\right). \quad (4.21)$$

As relações acima fornecem as relações momento-translação espacial e energia-translação temporal em um cenário com comprimento mínimo. Podemos notar que tais relações não são mais lineares como no caso da mecânica quântica ordinária. Assim, não podemos mais associar o momento linear com a translação espacial e nem a energia com a translação temporal.

4.4 Obtenção de Operadores

De posse das relações acima, podemos obter uma nova relação de comutação para o momento. Iremos notar que é a mesma que a relação mostrada no capítulo 3. Obteremos também o operador energia nesse cenário.

Seja \hat{A} um operador qualquer. Da mecânica quântica ordinária, temos

$$[\hat{x}, \hat{A}(k)] = i \frac{\partial \hat{A}}{\partial k}. \quad (4.22)$$

Tomando $\hat{A} = \hat{p}$, temos

$$[\hat{x}, \hat{p}] \approx i\hbar \left(1 + \frac{\hat{p}^2}{M_f^2}\right), \quad (4.23)$$

ou, equivalentemente,

$$[\hat{x}, \hat{p}] \approx i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2). \quad (4.24)$$

Notemos que essa relação é a mesma da algebra de Kempf, mencionada no capítulo 3. Usando a aproximação de baixas energias, mencionada anteriormente, podemos obter o operador momento p como

$$\hat{p} \approx -i\hbar\vec{\nabla} \left(1 - \hbar^2 \frac{\beta}{3} \nabla^2 \right). \quad (4.25)$$

Com relação ao operador energia, temos

$$i\hbar\partial_t \approx \left(\hat{E} - \hat{E}^3/3M_F^2 \right), \quad (4.26)$$

ou, equivalentemente,

$$i\hbar\partial_t \approx \left(1 - \beta\hat{E}^2/3 \right) \hat{E}. \quad (4.27)$$

Temos, então, que o operador energia não é mais diretamente proporcional ao operador translação temporal.

4.5 Considerações Finais

Mencionamos que a ideia do comprimento mínimo e necessidade da existência de dimensões extras apotam para a necessidade de uma teoria quântica para a gravitação. Também foi mencionado o fato de que a existência do comprimento mínimo surge de modelos com dimensões extras. A ideia inicial do comprimento mínimo é que ele seja da ordem do comprimento de Planck, mas, quando olhamos para teorias onda temos a incorporação de dimensões extras, o valor esperado para a escala do comprimento mínimo é reduzida para valores da ordem de $1TeV$.

Nesse capítulo, além de mencionarmos esses fatos, introduzimos uma relação funcional entre o momento e o vetor de onda com a presença de uma escala de comprimento mínimo, L_F e deduzimos também a forma desse operador em termos do operador de

translação espacial no espaço de posição. Também deduzimos a relação entre o operador energia e o de translação temporal.

Capítulo 5

A Equação de Dirac

5.1 Introdução

A descrição quântica não relativística de uma partícula é dada pela equação de Schrodinger,

$$-i\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t), \quad (5.1)$$

onde m é a massa da partícula, $V(\vec{r},t)$ é o potencial que ela pode estar submetida e $\psi(\vec{r},t)$ é a chamada função de onda que está associada com a densidade de probabilidade de encontrar a partícula. A primeira tentativa de descrever o comportamento quântico-relativístico de uma partícula foi feito substituindo E e \vec{p} , na relação relativística da energia e do momento,

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \quad (5.2)$$

pelos operadores correspondentes da mecânica quântica, $E \rightarrow \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Assim, temos

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -c^2\hbar^2\vec{\nabla}^2\phi + m^2c^4\phi, \quad (5.3)$$

onde ϕ é a nova função sobre a qual os novos operadores atuam. É evidente que ϕ é uma função das coordenadas do espaço e do tempo, $\phi = \phi(\vec{r},t)$. Usando o chamado sistema natural de unidades, $\hbar = c = 1$, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \vec{\nabla}^2\phi + m^2\phi = 0. \quad (5.4)$$

a equação acima é chamada de equação de Klein-Gordon. Usando a notação covariante da relatividade, temos

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0, \quad (5.5)$$

que é a forma covariante da equação de Klein Gordon.

Sabemos da mecânica quântica que a densidade de probabilidade é dada por $\rho = \phi^*\phi$ e a corrente de probabilidade por

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*). \quad (5.6)$$

A densidade de probabilidade e a densidade de corrente respeitam a equação de continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (5.7)$$

Analisando relativisticamente, devemos considerar ρ como a componente temporal de um 4-vetor, cujas componentes vetoriais são dadas por (5.6). Portanto,

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right). \quad (5.8)$$

Se analisarmos a expressão acima, concluímos que a densidade de probabilidade não é positiva definida. Isso constitui um problema que é o fato de não podermos mais interpretar ρ como densidade de probabilidade. Outro problema que encontramos na equação de Klein-Gordon é com relação as soluções de energia,

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}. \quad (5.9)$$

Ou seja, temos solução de energia positiva e de energia negativa.

As dificuldades acima fez com que a equação de Klein-Gordon fosse abandonada por algum tempo. Posteriormente, Pauli e Weisskopf reestabeleceram sua validade, interpretando-a como equação de campo.

5.2 Desenvolvimento da Equação de Dirac e Equação de Auto-Valores

Para sanar os problemas citados acima, Dirac propôs que a equação a ser satisfeita deve ser de primeira ordem. Vamos supor a seguinte equação¹

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (5.10)$$

¹Lembremos que estamos usando o sistema de unidade natural

Nosso problema é determinar os coeficientes γ^μ . Esses coeficientes devem ser tais que a relação relativística da energia e do momento deve ser satisfeita. Multiplicando a equação acima por $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$, obtemos

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (5.11)$$

Equivalentemente,

$$\left[\left(\frac{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} \right) + m^2 \right] \psi = 0. \quad (5.12)$$

Para retornarmos à equação de Klein-Gordon é necessário que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (5.13)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico da relatividade,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Devemos encontrar os γ^μ que satisfazem a relação de anticomutação acima. A conclusão a qual chegamos é que as γ^μ devem ser matrizes 4×4 não singular anticomutante. Na chamada representação Padrão as γ^μ são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

e

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

onde $1_{2 \times 2}$ representa uma matriz identidade 2×2 e $0_{2 \times 2}$ uma matriz nula 2×2 . Os σ^i representam as três chamadas matrizes de Pauli [31]. Posteriormente, iremos omitir esses subíndices 2×2 . Nesse contexto ψ é um vetor coluna de 4 componentes,

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Após alguns cálculos, restituindo as constantes \hbar e c , iremos obter as seguintes soluções de onda plana para os espinores

$$\psi^\alpha(\vec{r}, t) = u^\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}[\vec{p} \cdot \vec{r} - Et]} \quad (5.14)$$

para as energias positivas e

$$\psi^\alpha(\vec{r}, t) = v^\alpha e^{\frac{i}{\hbar}[\vec{p}\cdot\vec{r} - Et]} \quad (5.15)$$

para energias negativas. O índice α assume os valores 1 e 2. As matrizes u^α e v^α são

$$u^1 = \left(\frac{E + mc^2}{2mc^2} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix},$$

$$u^2 = \left(\frac{E + mc^2}{2mc^2} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix},$$

$$v^1 = \left(\frac{E + mc^2}{2mc^2} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{-cp_z}{-E+mc^2} \\ \frac{c(-p_x - ip_y)}{-E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v^2 = \left(\frac{E + mc^2}{2mc^2} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{c(-p_x + ip_y)}{-E+mc^2} \\ \frac{cp_z}{-E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz u^1 , associada a solução de energia positiva, representa uma partícula de spin 1/2 com componente z positiva. Por outro lado u^2 descreve uma partícula com componente z de spin negativa. O mesmo raciocínio é aplicado para v^1 e v^2 .

A solução de energia negativa nos faz concluir que um elétron com energia positiva poderia decair indefinidamente e emitir radiação eletromagnética indefinidamente. Ou seja, não haveria um estado de mínima energia para esse elétron. Esse problema foi sanado por Dirac pela seguinte explicação: Os estados de energia negativa estão todos preenchidos de forma a constituir uma espécie de "parede" da estrutura do vácuo. Assim, não podemos perceber a presença de um elétron de energia negativa. Essa estrutura é o que chamamos de "mar" de Dirac. Quando um elétron ganha energia e sai do mar de Dirac para um estado de energia positiva, o mesmo deixa um "buraco" nesse mar. Esse "buraco" é a ausência de um elétron. Assim um elétron com energia positiva poderá cair para preencher o "buraco" liberando a energia que possuía. Esse acontecimento é similar a aniquilação elétron pósitron. Por isso, interpretamos o "buraco" como

sendo a antipartícula do elétron. Em outras palavras trata-se do pósitron.

Podemos escrever a equação de Dirac em uma forma covariante. Vamos tomar o transposto conjugado da equação (5.10). Fazendo assim, temos

$$-i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = 0. \quad (5.16)$$

Multiplicando a equação acima por γ^0 pela direita obtemos

$$-i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - m\psi^\dagger\gamma^0 = 0. \quad (5.17)$$

Definindo o espinor adjunto como $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, temos

$$\psi^\dagger = \bar{\psi}\gamma^0. \quad (5.18)$$

Fazendo uso da definição acima e da equação (5.18) na equação (5.17), temos

$$-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - m\bar{\psi} = 0.$$

Usando o fato de que $\bar{\gamma}^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ na equação acima, temos

$$-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0. \quad (5.21)$$

Multiplicando a equação (5.10) por $\bar{\psi}$ pela esquerda, (5.21) por ψ pela direita e subtraindo as equações resultantes, temos

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0. \quad (5.22)$$

Restituindo as constantes \hbar e c , temos que a 4 corrente é dada por

$$j^\mu = c(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi). \quad (5.23)$$

Assim a densidade de probabilidade fica dada por $\psi^\dagger\psi$, que é positiva definida. Ou seja, a proposta de Dirac sanou outro problema, o da densidade não ser positiva definida.

A equação de Dirac deve ser invariante de Lorentz. Quando mudamos de um referencial inercial para outro, o 4-vetor é alterado pela atuação de matrizes que são usualmente denotadas por Λ . Sabemos que o espinor de Dirac é uma função das coordenadas do espaço e do tempo, $\psi = \psi(\vec{r}, t)$. Na notação relativística, as coordenadas do espaço-tempo são denotadas por $x^\mu = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$. Em uma notação mais abreviada chamamos os x^μ simplesmente de x . Assim, podemos escrever $\psi = \psi(x)$. Ao mudarmos de um referencial inercial para outro, temos

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \quad (5.24)$$

Ou seja, não só as coordenadas se transformam, mas também a dependência funcional de ψ .

É claro que $S(\Lambda)$ deve constituir uma representação do grupo de Lorentz. Isso significa que existe uma correspondência associada a cada transformação de Lorentz uma matriz que atua no espaço dos espinores. A correspondência é tal que a transformação identidade é associada a matriz identidade e, também, se $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_3$, então $S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_3)$.

Em um referencial inercial O' a equação de Dirac é escrita como

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0, \quad (5.25)$$

onde $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$. Substituindo (5.24) em (5.25), obteremos, após alguns cálculos a representação infinitesimal de $S(\Lambda)$,

$$S = I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}, \quad (5.26)$$

onde

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (5.27)$$

e $\omega^{\mu\nu}$ são elementos da matriz infinitesimal que caracteriza as transformações de Lorentz.

Vamos agora reescrever a equação de Dirac $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ da seguinte forma²

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi = 0. \quad (5.28)$$

Isolando a parte temporal no membro esquerdo obtemos

$$i\gamma^0\partial_0\psi = (-i\gamma^i\partial_i + m)\psi. \quad (5.29)$$

Multiplicando pela esquerda ambos os membros pela matriz γ_0 e rsetituindo as constantes \hbar e c , temos

$$i\hbar\partial_0\psi = (-i\hbar\gamma^i\partial_i + \gamma^0 mc^2)\psi. \quad (5.30)$$

Na mecânica quântica, o operador energia é identificado como $\hat{E} = i\hbar\partial_0$. Portanto, o hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = (-i\hbar\gamma^i\partial_i + \gamma^0 mc^2). \quad (5.31)$$

De posse do hamiltoniano, podemos escrever a equação de auto-valores,

$$\hat{H}\psi = E\psi. \quad (5.32)$$

escrevendo as matrizes γ^i em termos das matrizes de Pauli e escrevendo ψ como

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

onde ϕ e χ são, respectivamente, as duas primeiras e as duas últimas componentes do espinor de Dirac, temos

$$\begin{pmatrix} -E + mc^2 & c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) \\ c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) & -E - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

Para que tenhamos soluções não triviais para ψ , a matriz acima deve ter determinante nulo o que fornece

$$E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \quad (5.33)$$

que são os auto-valores de energia da equação de Dirac.

²Separamos a componente temporal, denotada pelo subíndice $\mu = 0$ das componentes espaciais, denotadas pelos subíndices $\mu = i = 1, 2, 3$

5.3 Considerações Finais

Fizemos uma recapitulação da primeira tentativa de se descrever quanticamente uma partícula relativística, o que nos levou a chamada equação de Klein-Gordon. Contudo, como mostramos, essa equação possui alguns problemas de interpretação. Isso fez com que a mesma fosse abandonada por um certo período de tempo. Durante esse tempo, Dirac, como mencionamos no início do capítulo, propôs que a equação a ser satisfeita pela função de onda fosse de primeira ordem, a chamada equação de Dirac.

Mencionamos também que esta equação deve ser invariante de Lorentz, ou seja, existe uma forma com a qual os espinores e as coordenadas devem se transformar quando passamos de um referencial inercial para outro. Para finalizar, escrevemos a equação de Dirac na forma de uma equação de auto-valores, onde o operador é identificado como sendo o hamiltoniano. Obviamente, podemos concluir que os auto-valores correspondentes são energias relativísticas que a partícula livre pode assumir.

Essa equação será útil para, posteriormente, o hamiltoniano de um elétron relativístico submetido a um potencial central.

Capítulo 6

Teoria de Dirac de um Elétron

Submetido à um Potencial Central.

6.1 Introdução

Neste capítulo, tomamos como base uma parte do capítulo 24 do livro *Quantum Mechanics* do Merzbacher[32]. De acordo com a teoria desenvolvida por Dirac, o hamiltoniano de um elétron livre é dado por

$$\hat{H}_{livre} = c \frac{\hbar}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \hat{\beta} m c^2, \quad (6.1)$$

onde $\vec{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ é uma notação vetorial para representar as 4 matrizes de Dirac. Podemos verificar que¹ $\gamma_0 = \hat{\beta}$ e $\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{\alpha}$. Caso o elétron esteja submetido à um potencial central $V(r) = -e\phi(r)$, o hamiltoniano passa a ser o hamiltoniano do elétron livre mais o termo $V(r)$, ou seja,

$$\hat{H} = c \frac{\hbar}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \hat{\beta} m c^2 - e\phi(r). \quad (6.2)$$

Uma vez que o operador momento angular orbital \hat{L} e o operador de spin, \hat{S} não comutam separadamente com a parte livre do hamiltoniano, eles não comutam com o hamiltoniano como um todo. Portanto, os auto-vetores dos operadores \hat{H} , \hat{L} e \hat{S} não formam uma base comum de auto-vetores. Entretanto, as componentes do operador momento angular total, $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$, onde

$$\hat{L} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (6.3)$$

e $\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ comutam com \hat{H} . Em consequência, como podemos verificar, \hat{H} , \hat{J}^2 e \hat{J}_z comutam entre si e, portanto, concluímos que existe uma base de auto-spinores comum aos operadores \hat{H} , \hat{J}^2 e \hat{J}_z . Vamos agora procurar os auto-spinores simultâneos de \hat{H} , \hat{J}^2 e \hat{J}_z .

¹Não confundir o parâmetro de comprimento mínimo β com a matriz $\hat{\beta}$.

6.2 Equação de Auto-Valores

Vamos escrever os auto-espinores, ψ , com auto-valores de energia representados por E como

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

onde ϕ e χ são, respectivamente as duas primeiras e as duas últimas componentes do auto-espinor, também chamados de biespinores. A equação de auto-valores é escrita como

$$\hat{H}\psi = E\psi. \quad (6.4)$$

Expondo as componentes matriciais da equação acima, obtemos

$$(E - mc^2 + e\phi)\varphi - \frac{\hbar}{i}c\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\chi = 0 \quad (6.5)$$

e

$$(E + mc^2 + e\phi)\chi - \frac{\hbar}{i}c\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi = 0. \quad (6.6)$$

Ecrevendo a equação de auto-valores para \vec{J}_z e $\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{L}\hat{S} + \hat{S}^2$,

$$(\hat{L}^2 + \hat{L} \cdot \vec{\sigma} + 3/4\hbar^2)I_{4 \times 4} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = j(j+1)\hbar^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

e

$$(\hat{L}_z + \frac{\hbar}{2}\sigma_z)I_{4 \times 4} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = m\hbar \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

onde $I_{4 \times 4}$ é a matriz identidade 4×4 para a atuação no spinor que possui 4 componentes.

As equações de auto-valores acima sugerem que ϕ e χ sejam proporcionais aos auto-estados [32] dos operadores \hat{J}^2 e \hat{J}_z^2 ,

$$y_l^{jm} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}} Y_l^{m-1/2} \\ \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}} Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix},$$

²Esses auto-estados são chamados de espinores de Pauling

onde $j = l \pm 1/2$. As funções $Y_l^{m-1/2}(\theta, \varphi)$ e $Y_l^{m+1/2}(\theta, \varphi)$ são as auto-funções de \hat{L}_z e \hat{L}^2 . Podemos verificar que os espinores y_l^{jm} são ortormais e possuem as seguintes propriedades (onde tomamos o índice $l = j \pm 1/2$ em y_l^{jm}):

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{r}_u y_{j \mp (1/2)}^{jm} = -y_{j \pm (1/2)}^{jm}, \quad (6.7)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{L} y_{j-(1/2)}^{jm} = (j - 1/2) y_{j-(1/2)}^{jm} \quad (6.8)$$

e

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{L} y_{j+(1/2)}^{jm} = (-j - 3/2) y_{j+(1/2)}^{jm}. \quad (6.9)$$

Uma vez que os biespinores são funções das coordenadas polares θ e φ , as constantes de proporcionalidades são funções da coordenada radial r . Portanto, em termos das coordenadas esféricas, as soluções ψ podem ser escritas como:

$$\psi = \begin{pmatrix} F(r) y_{j-(1/2)}^{jm} \\ -i f(r) y_{j+(1/2)}^{jm} \end{pmatrix}$$

e

$$\psi = \begin{pmatrix} G(r) y_{j+(1/2)}^{jm} \\ -i g(r) y_{j-(1/2)}^{jm} \end{pmatrix}.$$

Podemos notar que para obtermos as soluções, precisamos obter as equações radiais e através das equações obtemos os auto-valores de energia. Para obtermos as equações radiais, iremos fazer uso da seguinte identidade³

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}). \quad (6.10)$$

Podemos ainda expressar a relação acima em termos do operador momento angular orbital \hat{L} . Fazendo assim, temos

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \vec{\sigma} \cdot \vec{r}_u \left(\vec{r}_u \cdot \hat{p} + i \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{L}}{r} \right), \quad (6.11)$$

³Usamos o fato de que $\frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) = 1$

onde $\vec{r}_u \cdot \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r}$. Substituindo a relação acima e $\vec{r}_u \cdot \hat{p}$ nas equações anteriores obtemos o seguinte conjunto de equações para as funções radiais:

$$(E - mc^2 + e\phi)F - \hbar c \left(\frac{d}{dr} + \frac{j + 3/2}{r} \right) f = 0, \quad (6.12)$$

$$(E + mc^2 + e\phi)f + \hbar c \left(\frac{d}{dr} - \frac{j - 1/2}{r} \right) F = 0 \quad (6.13)$$

e

$$(E - mc^2 + e\phi)G - \hbar c \left(\frac{d}{dr} + \frac{j + 3/2}{r} \right) g = 0, \quad (6.14)$$

$$(E + mc^2 + e\phi)g - \hbar c \left(\frac{d}{dr} + \frac{j + 3/2}{r} \right) G = 0. \quad (6.15)$$

Vamos explicitar o potencial que o elétron está submetido (um campo Coulombiano de um núcleo pontual de carga Ze):

$$\phi(r) = \frac{Ze}{r}. \quad (6.16)$$

Por conveniência algébrica, façamos as seguintes substituições: $\lambda = j + 1/2$, $\epsilon = E/mc^2$, $x = r/(\hbar/mc)$ e $\alpha = e^2/\hbar c$ (que chamamos de constante de estrutura fina).

Com elas e a forma explícita do potencial eletrostático, as equações radiais ficam

$$\left(\epsilon - 1 + \frac{Z\alpha}{x} \right) F - \left(\frac{d}{dx} + \frac{\lambda + 1}{x} \right) f = 0, \quad (6.17)$$

$$\left(\epsilon + 1 + \frac{Z\alpha}{x} \right) f + \left(\frac{d}{dx} - \frac{\lambda - 1}{x} \right) F = 0 \quad (6.18)$$

e

$$\left(\epsilon - 1 + \frac{Z\alpha}{x} \right) G - \left(\frac{d}{dx} - \frac{\lambda - 1}{x} \right) g = 0, \quad (6.19)$$

$$\left(\epsilon + 1 + \frac{Z\alpha}{x} \right) g + \left(\frac{d}{dx} + \frac{\lambda + 1}{x} \right) G = 0. \quad (6.20)$$

Podemos observar a seguinte similaridade das equações para G e g com as equações para F e f : Obtemos as equações para G e g a partir das equações para f e F substituindo f por g , F por G e λ por $-\lambda$. A situação contrária também é válida.

A partir das equações radiais, podemos verificar que para $x \rightarrow 0$ obtemos o seguinte comportamento para F e f : $F \approx f \approx e^{\pm\sqrt{1-\epsilon^2}x}$. Uma vez que estamos lidando com estados ligados do elétron, temos que impor $|\epsilon| \leq 1$. Sabendo que a probabilidade de acharmos o elétron para x muito grande deve convergir, devemos escolher o sinal negativo na expressão acima. De posse disso, vamos propor que a solução para $F(r)$ e $f(r)$ posuam a seguinte forma

$$F = e^{-\sqrt{1-\epsilon^2}x} x^\gamma \sum_{\nu=0} a_\nu x^\nu, \quad (6.21)$$

$$f = e^{-\sqrt{1-\epsilon^2}x} x^\gamma \sum_{\rho=0} b_\rho x^\rho. \quad (6.22)$$

Por substituição, obtemos

$$(\epsilon - 1)a_{\nu-1} + Z\alpha a_\nu + \sqrt{1-\epsilon^2}b_{\nu-1} - (\lambda + 1 + \gamma + \nu)b_\nu = 0 \quad (6.23)$$

e

$$(\epsilon + 1)b_{\nu-1} + Z\alpha b_\nu + \sqrt{1-\epsilon^2}a_{\nu-1} - (\lambda + 1 + \gamma + \nu)a_\nu = 0, \quad (6.24)$$

onde $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $a_{-1} = 0$ e $b_{-1} = 0$. Fazendo $\nu = 0$, obtemos $Z\alpha a_0 - (\lambda + 1 + \gamma)b_0 = 0$ e $Z\alpha b_0 + (-\lambda + 1 + \gamma)a_0 = 0$. Uma possível solução para o conjunto de equações acima é a solução trivial $a_0 = b_0 = 0$, porém tais soluções não são desejáveis para a situação que estamos tratando. Para que não tenhamos soluções triviais, a constante γ deve ser dada por

$$\gamma = -1 \pm \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}. \quad (6.25)$$

Pelas relações de recorrência (6.23) e (6.24), obtemos para $\nu = n' + 1$ (com $n' + 1$ sendo tal que $a_{\nu'+1} = b_{\nu'+1} = 0$)

$$b_{n'} = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} a_{n'}. \quad (6.26)$$

Fazendo $\nu = n'$ nas equações 6.23 e 6.24, eliminamos $a_{\nu-1}$ e $b_{\nu-1}$ e obtemos a seguinte relação

$$\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} = \frac{Z\alpha\sqrt{1+\epsilon} + (\lambda - 1 - \gamma - n')\sqrt{1-\epsilon}}{Z\alpha\sqrt{1-\epsilon} + (\lambda - 1 - \gamma + n')\sqrt{1+\epsilon}}. \quad (6.27)$$

Substituindo os valores definidos para ϵ e λ , temos

$$\frac{E}{mc^2} = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{[\sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2} + n']^2} \right]^{-1} \quad (6.28)$$

Essa é a fórmula de estrutura fina do átomo de hidrogênio. Os números quânticos j e n' assumem os seguintes valores $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ e $n' = 0, 1, 2, 3, \dots$. O número quântico n da teoria não relativística está relacionado a n' e j por

$$n = j + 1/2 + n'. \quad (6.29)$$

6.3 Considerações Finais

Neste capítulo, inicialmente, apresentamos o hamiltoniano (oriundo da teoria de Dirac) de um elétron relativístico livre. Com a introdução de um potencial coulombiano central, característico de um átomo de hidrogênio, vimos a modificação que o hamiltoniano sofre. Em seguida, de posse desse hamiltoniano, discutimos pormenorizadamente a teoria quântica-relativística de um elétron submetido a um potencial central, através do estudo das equações de auto-valores do hamiltoniano e do operador momento angular total, que é a soma do momento angular orbital com o momento angular de spin, intrínseco do elétron. Nessas equações, o estado é especificado pelo spinor de Dirac e os auto-valores são as energias e os valores de momento angular.

A resolução das equações de auto-valores nos fornece uma equação de recorrência que nos permite obter todos os auto-espinores e a fórmula de estrutura fina para o átomo de hidrogênio, o que é na verdade os níveis de energia do átomo (os auto-valores da equação de Dirac com potencial central) de hidrogênio. No capítulo seguinte, vamos obter a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio em um cenário com comprimento mínimo.

Capítulo 7

Estado Fundamental do Átomo de Hidrogênio via Equação de Dirac em um Cenário com Comprimento Mínimo

7.1 Introdução

Na teoria quântica, como vimos anteriormente, a existência do comprimento mínimo pode ser descrita como uma incerteza Δx_{min} não nula na medida da variável posição. Também vimos, em capítulos anteriores, Kempf, baseado na teoria das cordas, mostrou que o comprimento mínimo em uma dimensão pode ser introduzido da relação de incerteza modificada,

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2), \quad (7.1)$$

onde β é o parâmetro relacionado ao comprimento mínimo. Em mais de uma dimensão, a relação de comutação é dada por

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \left[(1 + \beta\hat{P}^2)\delta_{ij} + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j \right], \quad (7.2)$$

onde β' é outro parâmetro relacionado ao comprimento mínimo. Se supusermos que as componentes do operador momento linear comutam,

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \quad (7.3)$$

então, pela identidade de Jacobi

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = -i\hbar \left[2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta\hat{P}^2 \right] \epsilon_{ijk} \hat{L}_k, \quad (7.4)$$

onde

$$\hat{L}_i = \frac{1}{1 + \beta\hat{P}^2} \epsilon_{ijk} \hat{X}_j \hat{P}_k, \quad (7.5)$$

são as componentes do operador momento angular orbital satisfazendo as relações de comutação

$$[\hat{L}_i, \hat{X}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{X}_k \quad (7.6)$$

e

$$[\hat{L}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{P}_k. \quad (7.7)$$

Essa álgebra fornece um valor (isotrópico) mínimo não nulo para as coordenadas¹ $\Delta X_i^{min} = \hbar\sqrt{3\beta + \beta'}$, como era esperado.

Um grande desafio tem sido a procura de restrições advindas de resultados experimentais para obter um limite superior para o comprimento mínimo. Essas restrições são particularmente relevantes em modelos com dimensões extras da ordem da escala de Planck [33, 34]. A correção do espectro de energia do átomo de hidrogênio devido ao comprimento mínimo foi calculada por muitos autores [35, 36, 37, 38, 39]. Brau, por exemplo, considerando a transição $1S - 2S$, estimou o valor do comprimento mínimo como sendo da ordem de $10^{-17}m$. Uma vez que essa estimativa, proveniente da transição $1S - 2S$, é um valor muito pequeno, é interessante fazermos o mesmo para o caso da estrutura fina.

Esperamos que a estrutura fina do átomo de hidrogênio na presença do comprimento mínimo seja uma restrição mais forte para a obtenção de um valor máximo para o comprimento mínimo. No entanto, assim como o resultado obtido por Brau, a presença do comprimento mínimo faz com que a correção da energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio seja da ordem de α^2 , a constante de estrutura fina.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na próxima seção, considerando a álgebra de Kempf, obteremos o operador de energia de Dirac. Na seção 3, obtemos a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio em um cenário com comprimento mínimo e estimamos um valor máximo para o comprimento mínimo. Por fim, na seção 4, apresentaremos nossas conclusões.

¹Podemos verificar que, no caso especial $\beta' = 2\beta$, as componentes do operador posição comutam para a primeira ordem em β .

7.2 Operador de Energia de Dirac em um Cenário com Comprimento Mínimo

É fácil ver da na equação (7.4) que no caso especial $\beta' = 2\beta$ as componentes do operador posição comutam para primeira ordem do parâmetro de comprimento mínimo. Portanto, consideremos o caso $\beta' = 2\beta$. Então, as equações (7.2), (7.3) e (7.4), para a primeira ordem em β ficam

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \left[(1 + \beta \hat{P}^2) \delta_{ij} + 2\beta \hat{P}_i \hat{P}_j \right], \quad (7.8)$$

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \quad (7.9)$$

e

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0. \quad (7.10)$$

As relações acima fornecem $\Delta X_i^{min} = \hbar \sqrt{5\hbar}$.

É fácil verificar que as representações abaixo stisfazem as relações acima para a primeira ordem em β . São elas:

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i \quad (7.11)$$

e

$$\hat{P}_i = (1 + \beta \hat{p}^2) \hat{p}_i. \quad (7.12)$$

Note que $\hat{x}_i = x_i$ e $\hat{p}_i = -i\hbar \vec{\nabla}$ são os operadores posição e momento da mecânica quântica ordinária, isto é, \hat{x}_i e \hat{p}_i satisfazem

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad (7.13)$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (7.14)$$

e

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (7.15)$$

A equação de Dirac na mecânica quântica ordinária é

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = [c(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}) + \hat{\beta} mc^2] |\psi\rangle. \quad (7.16)$$

Então, o operador de energia é dado por²

$$\hat{E} = c(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}) + \hat{\beta} mc^2. \quad (7.17)$$

Para obtermos o operador energia em um cenário com comprimento mínimo, substituímos \hat{p}_i por \hat{P}_i na equação acima. Fazendo isso, obtemos

$$\hat{E}_{ML} = c(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{P}}) + \hat{\beta} mc^2. \quad (7.18)$$

Usando (7.12), obtemos

$$\hat{E}_{ML} = c(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}) + \hat{\beta} mc^2 + \beta c(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}})^3, \quad (7.19)$$

onde usamos a relação $\hat{\vec{p}}^2 = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}})^2$.

Notemos que o novo operador $\hat{\vec{P}}$ não coincide mais com o gerador de translações espaciais, assim como o novo operador de energia \hat{E}_{ML} não coincide com o gerador das translações temporais $\hat{\omega} = i \frac{\partial}{\partial t}$. Eles estão relacionados por

$$\hat{E}_{ML} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \beta \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \quad (7.20)$$

ou

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \hat{E}_{ML} \left(1 - \frac{\beta}{c^2} \hat{E}_{ML}^2 \right). \quad (7.21)$$

Usando a relação (7.20) em (7.19), obtemos

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\beta \hbar^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) |\psi_{ML}\rangle = [-i\hbar c(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) + \hat{\beta} mc^2 + i\beta \hbar^3 c(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla})^3] |\psi_{ML}\rangle, \quad (7.22)$$

que trata o espaço e o tempo de modo simétrico. Entretanto, podemos escrever a equação de Dirac para a primeira ordem no tempo, usando (7.18) e a condição de camada de massa $\hat{E}_{ML}^2 = c^2 \hat{\vec{P}}^2 + mc^2$ na equação (7.21),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \left[c \left(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{P}} \right) + \hat{\beta} mc^2 \right] \left[1 - \beta \left(c^2 \hat{\vec{P}}^2 + \hat{m}^2 c^4 \right) \right] |\psi\rangle, \quad (7.23)$$

²Devemos lembrar que essa é a energia da partícula livre

onde \hat{P} é dado pela equação (7.12).

Fica claro que nos casos em que estamos interessados no espectro de energia é mais conveniente usarmos (7.19).

7.3 Energia do Átomo de Hidrogênio no Estado Fundamental

Para determinarmos a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio em um cenário com comprimento mínimo, introduzimos o potencial eletrostático do próton na equação (7.19) e escrevemos a equação de auto-valores. Devido à equação (7.11), a representação do potencial eletrostático³ não é modificada na ordem que estamos considerando. Então a equação para a energia fica,

$$E_{ML}|\psi\rangle = \left[c(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}) + \hat{\beta}mc^2 - \frac{\hbar c\alpha}{r} + \beta c(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}})^3 \right] |\psi\rangle. \quad (7.24)$$

Se considerarmos que a escala de massa do comprimento mínimo é muito maior que a escala de massa do elétron ($\beta = \frac{c^2}{M_{ML}c^4}$, portanto, $\beta m^2 c^2 \ll 1$), podemos considerar o terceiro termo da equação acima como uma perturbação. Então o auto-valor de energia para a primeira ordem em β é

$$E_{ML} = E + \beta m^2 c^2 E^1, \quad (7.25)$$

onde E é a energia do estado $|\psi\rangle$ do átomo de hidrogênio obtida da equação de Dirac ordinária e E^1 é dado por

$$E^1 = \langle \psi | \frac{1}{m^2 c} (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}})^3 | \psi \rangle. \quad (7.26)$$

O valor médio de $(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}})^3$ pode ser calculado de

$$\int \begin{pmatrix} \phi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})^3 \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} d^3 \vec{r},$$

³O operador potencial é uma função do operador posição, $\hat{V}(\hat{\vec{r}})$. Teremos, então, $\hat{V}(\hat{\vec{r}}) = V(\vec{r})$.

onde ϕ e χ são as componentes do auto-espinor de estado,

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(r)y_{j-1/2}^{j,m}(\theta, \phi) \\ -if(r)y_{j+1/2}^{j,m}(\theta, \phi) \end{pmatrix},$$

onde, como vimos no capítulo anterior, $y_{j\pm 1/2}^{j,m}$ são os auto-espinores comuns dos operadores \hat{J}_z e \hat{J}^2 . Empregando a identidade (veja a equação (6.17))

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}} = \vec{\sigma} \cdot \vec{r}_u \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{L}}}{r} \right) \quad (7.27)$$

e

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{r}_u y_{j\pm 1/2}^{j,m} = -y_{j\pm 1/2}^{j,m} \quad (7.28)$$

obtemos

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})\phi = i\hbar \left[\frac{dF}{dr} - \left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{F}{r} \right] y_{j+1/2}^{j,m}, \quad (7.29)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})\chi = \hbar \left[\frac{df}{dr} + \left(j + \frac{3}{2} \right) \frac{f}{r} \right] y_{j-1/2}^{j,m}, \quad (7.30)$$

e

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})^2 \phi = -\hbar^2 \left[\frac{d^2 F}{dr^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \left(j - \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{F}{r^2} \right] y_{j-1/2}^{j,m}, \quad (7.31)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})^2 \chi = i\hbar^2 \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) \frac{f}{r^2} \right] y_{j+1/2}^{j,m}. \quad (7.32)$$

e

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})^3 \phi &= -i\hbar^3 \left[\frac{d^3 F}{dr^3} - \left(j - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} \right] y_{j+1/2}^{j,m} + i\hbar^3 y_{j+1/2}^{j,m} \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dr} \\ &- i\hbar^3 \left(j - \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) \frac{F}{r^3} y_{j+1/2}^{j,m}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}})^3 \chi &= -\hbar^3 \left[\frac{d^3 f}{dr^3} + \left(j + \frac{7}{2} \right) \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \right] y_{j-1/2}^{j,m} + \hbar^3 \left(j - \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} y_{j-1/2}^{j,m} \\ &+ \hbar^3 \left(j - \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) \frac{f}{r^3} y_{j-1/2}^{j,m}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Finalmente, com o uso de (7.27), podemos calcular $\langle \psi | (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}})^3 | \psi \rangle$, o que fornece⁴

$$\begin{aligned} \langle \psi | (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}})^3 | \psi \rangle &= -\hbar^3 \int \left(F^* \frac{d^3 f}{dr^3} - f^* \frac{d^3 F}{dr^3} \right) r^2 dr \\ &\quad - \hbar^3 \left(j + \frac{7}{2} \right) \int F^* \frac{d^2 f}{dr^2} r dr - \hbar^3 \left(j - \frac{5}{2} \right) \int f^* \frac{d^2 F}{dr^2} r dr \\ &\quad \hbar^3 \left(j - \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \int F^* \frac{df}{dr} dr - \hbar^3 \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) \int f^* \frac{dF}{dr} dr \\ &\quad + \hbar^3 \left(j - \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) \int (F^* f + f F^*) \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

De posse de toda a expressão acima, podemos calcular a energia do átomo de hidrogênio em um cenário com comprimento mínimo para qualquer nível. Para isso, devemos escolher os valores adequados de j e de n' .

7.3.1 Estado Fundamental

Para o estado fundamental, temos $j = 1/2$ e $n' = 0$. Então, a parte radial fica

$$F_0(r) = a_0 x^\gamma e^{-ax} \quad (7.36)$$

e

$$f_0(r) = b_0 x^\gamma e^{-ax}, \quad (7.37)$$

onde

$$\gamma = \epsilon - 1, \quad (7.38)$$

$$a = \left(\frac{mc}{\hbar} \right) \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (7.39)$$

e

$$b_0 = \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} a_0. \quad (7.40)$$

Pra encontrarmos a_0 e, conseqüentemente b_0 , devemos impor a condição de normalização $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$, ou seja,

$$\int_0^\infty b^2 a_0^* a_0 e^{-2ar} r^{2r+2} dr + \int_0^\infty b^2 b_0^* b_0 e^{-2ar} r^{2r+2} dr = 1 \quad (7.41)$$

⁴Usamos o fato da ortonormalidade das funções $y_{j\pm 1/2}^{j,m}$

Equivalentemente,

$$b^2 \left[a_0^* a_0 + \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} a_0^* a_0 \right] \int_0^\infty e^{-2ar} r^{2r+2} dr = 1. \quad (7.42)$$

Sabendo que a função gama [39], $\Gamma(s)$, pode ser representada por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx, \quad (7.43)$$

podemos escrever a equação acima como

$$\frac{2b^2}{(1+\epsilon)} a_0^* a_0 \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{2a} \right)^{2\gamma+2} \frac{dx}{2a} = 1, \quad (7.44)$$

ou

$$\frac{2b^2}{(1+\epsilon)} a_0^* a_0 \left(\frac{1}{2a} \right)^{2\gamma+3} \int_0^\infty e^{-x} x^{2\gamma+2} dx = 1, \quad (7.45)$$

para obtermos

$$\frac{b^2}{2^{2\gamma+2}(1+\epsilon)} a^{-2-3} a_0^* a_0 \Gamma(2\gamma+3) = 1. \quad (7.46)$$

Resolvendo para a_0 , temos

$$a_0 = \frac{(2a)^{\gamma+1}}{b} \sqrt{\frac{a(1+\epsilon)}{\Gamma(2\gamma+3)}}. \quad (7.47)$$

Explicitando a e b na equação acima, obtemos

$$a_0 = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^{3/2} (2\sqrt{1-\epsilon^2})^{\gamma+1} \sqrt{\frac{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}}{\Gamma(2\gamma+3)}}. \quad (7.48)$$

Fazendo $j = 1/2$ em (7.37), teremos para o estado fundamental

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^3 | \psi_0 \rangle &= -\hbar^3 \int \left(F^* \frac{d^3 f}{dr^3} - f^* \frac{d^3 F}{dr^3} \right) r^2 dr \\ &- 4\hbar^3 \int F^* \frac{d^2 f}{dr^2} r dr + 2\hbar^3 \int f^* \frac{d^2 F}{dr^2} r dr \\ &- 2\hbar^3 \int f^* \frac{dF}{dr} r dr. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Para calcularmos as integrais acima, devemos efetuar o cálculo das derivadas que aparecem nos integrandos. Calculando as derivadas e efetuando as integrais acima iremos obter

$$\langle \psi_0 | (\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^3 | \psi_0 \rangle = m^3 c^3 \frac{(1-\epsilon^2)^2}{\epsilon(2\epsilon-1)}. \quad (7.50)$$

Substituindo essa expressão em (7.25), obtemos

$$E_0^{ML} = mc^2\epsilon + \beta m^3 c^4 \frac{(1 - \epsilon^2)^2}{\epsilon(2\epsilon - 1)}. \quad (7.51)$$

Podemos expandir a expressão acima em termos da constante de estrutura fina α , dado que $\epsilon = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Desejando considerar até termos da ordem α^4 , temos

$$E_0^{ML} = mc^2\sqrt{1 - \alpha^2} + \beta m^3 c^4 (1 - \alpha^2)^{-1/2} [2(1 - \alpha^2) - 1]^{-1} \alpha^4. \quad (7.52)$$

Usando $\epsilon \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ na expressão acima, obtemos

$$E_0^{ML} \approx mc^2 - \frac{\alpha^2}{2} mc^2 + \beta m^3 c^4 \left(1 + 2\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} + \alpha^4\right) \alpha^4, \quad (7.53)$$

ou

$$E_0^{ML} \approx mc^2 - \frac{\alpha^2}{2} mc^2 + \beta m^3 c^4 \alpha^4. \quad (7.54)$$

Subtraindo a energia de repouso mc^2 , obtemos

$$\Delta E_0^{ML} \approx -\frac{\alpha^2}{2} mc^2 + \beta m^3 c^4 \alpha^4. \quad (7.55)$$

O resultado acima mostra que a correção na energia do estado fundamental devido à presença de um comprimento mínimo, em termos da constante de estrutura fina, é da mesma ordem que o resultado obtido por Brau.

7.4 Estimando o Comprimento Mínimo

Podemos fazer uma estimativa para o comprimento mínimo comparando o nosso modelo teórico com resultados de medições experimentais. Até onde sabemos, a melhor precisão na medição de energia entre os níveis $1S$ e $2S$ foi obtido por Parthey [?]. Ele obteve uma precisão de $4,2 \times 10^{-14} eV$, isto é, 4 partes em 10^{15} . O cálculo da energia para o nível $2S$ é um trabalho bem maior. No entanto, grosseiramente falando, não precisamos saber exatamente a energia do estado $2S$, uma vez que a contribuição de mais baixa ordem para correção advinda do comprimento mínimo para a energia do estado

$2S$ deve ser da ordem de α^4 , pois os estados ordinários $1S$ e $2S$ tem a mesma simetria. Portanto, a diferença de energia entre os estados $1S$ e $2S$ deve conduzir a um resultado da ordem de α^4 , visto que os níveis $1S$ e $2S$ diferem apenas no número quântico n .

Uma vez que com a máxima precisão possível não percebemos o efeito do termo advindo do comprimento mínimo, temos

$$\beta m^3 c^4 \alpha^4 \leq 4,2 \times 10^{-14} eV. \quad (7.56)$$

Em termos da unidade eV , $c = 1$, $\hbar = 1$, a inequação acima conduz à

$$\Delta X_i^{ML} \leq 10^{-17} m. \quad (7.57)$$

Esse resultado é idêntico ao obtido por Brau.

7.5 Considerações Finais

Nesse capítulo calculamos a energia de estado fundamental de estrutura fina para o átomo de hidrogênio em um cenário com comprimento mínimo. Introduzimos o comprimento mínimo na teoria através da álgebra de Heisenberg modificada apresentada anteriormente, para o caso especial em que $\beta' = 2\beta$. Para evitar o problema de substituir \hat{X}_i por derivadas de \hat{P}_i no potencial coulombiano (função de $\frac{1}{r}$), usamos a representação da posição. Com a intenção de manter a equação de Dirac simétrica, assumimos que o operador de energia assume a mesma forma que \hat{P}_i . Com a introdução do potencial coulombiano no novo operador de energia de Dirac, calculamos a mudança na energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio via teoria de perturbação. Pela comparação dos resultados obtidos teoricamente com os resultados experimentais, estimamos um valor máximo para o comprimento mínimo como sendo da ordem de $10^{-17} m$.

Capítulo 8

Conclusão

8.1 Introdução

As teorias físicas ordinárias consideram que a resolução utilizada para se localizar partículas no espaço-tempo pode ser tão grande quanto queiramos. Nesse contexto, ao fazermos a medida da localização de uma partícula elementar qualquer no espaço com um aumento indefinido da resolução, vamos encarceirando a partícula cada vez mais a um ponto do espaço. No entanto, como vimos nos capítulos anteriores deste trabalho, temos motivações para crermos em um limite máximo para a resolução, ou um comprimento mínimo. Os trabalhos referentes ao assunto colocam a gravitação como um dos motivos para a existência do comprimento mínimo. O que é interessante é ressaltarmos o fato de que a própria gravitação (contemplada, obviamente, pela relatividade geral) fornece possivelmente uma solução para um dos problemas de sua quantização. Como mencionamos nesse trabalho, um dos problemas da gravitação quântica é o fato de que a teoria não é renormalizável, mas a própria gravitação, sugerindo um comprimento mínimo, gera um "cut-off" natural, tornando a teoria renormalizável. Como dissemos, a teoria de cordas e espaços com geometria não comutativa são outros exemplos de motivações para a existência do comprimento mínimo.

Um outro ponto mencionado no trabalho é a análise das consequências da existência do comprimento mínimo nas teorias físicas. Um exemplo bem típico, que não é analisado nesse trabalho, mas que comentamos a respeito, está na teoria quântica de campos. A aplicação da ideia do comprimento mínimo na teoria quântica de campos fornece uma consequência marcante o bastante para crermos ainda mais na ideia do comprimento mínimo. A teoria quântica de campos ordinária é divergente. Sua divergência é sanada através da introdução da ideia que os parâmetros que inicialmente são introduzidos na teoria não representam as verdadeiras grandezas físicas observadas, sendo necessário uma renormalização de forma a ajustá-los às verdadeiras grandezas físicas (o que constitui a teoria da renormalização). Entretanto essas ideias não aparecem naturalmente

na construção da teoria, mas são elementos adicionados paralelamente. Isso é algo que parece ser um tanto estranho. A teoria quântica com comprimento mínimo já aparece com um "cut-off" natural.

Muitos trabalhos, como mencionamos anteriormente, analisam algum tipo de situação física em um cenário com comprimento mínimo e faz comparações com os resultados experimentais. Estas comparações resultam em uma estimativa para o comprimento mínimo, caso exista, pode ter. Dentro deste contexto, podemos citar o caso bem interessante de um trabalho que trata de uma teoria de um campo espinorial em um cenário com comprimento mínimo, o do Quesne. Nesse trabalho, é verificado que o comprimento mínimo deve estar em um intervalo entre $10^{-17}m$ e $10^{-15}m$.

O ponto principal deste trabalho foi o cálculo, em uma abordagem relativística, da energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio em um cenário com comprimento mínimo. O comprimento mínimo foi introduzido na teoria através da generalização da álgebra de Heisenberg feita por Kempf (no caso $\beta' = 2\beta$). Para evitarmos o problemas de escrevermos o operador das componentes das coordenadas, \hat{X}_i , em termos de derivadas de p_i no potencial Coulombiano (proporcional a $\frac{1}{r}$), usamos a representação da "posição". Com a introdução do potencial Coulombiano no novo operador de energia de Dirac (obtido através da substituição de \hat{p}_i por \hat{P}_i no hamiltoniano ordinário de Dirac), encontramos uma expressão para a mudança na energia no átomo de hidrogênio via teoria de perturbação, uma vez que assumimos que a massa do elétron é muito menor que a escala de massa do comprimento mínimo. Calculamos explicitamente a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio e vimos que o resultado obtido é da ordem de α^4 . Comparando o nosso modelo teórico com a experiência, estimamos grosseiramente que o valor máximo para o comprimento mínimo é da ordem de $10^{-17}m$, que é exatamente, como esperavamos, igual ao obtido por Brau.

No segundo capítulo deste trabalho, foi analisada a ideia geral sobre teorias com comprimento mínimo e como que o comprimento mínimo pode ser introduzido nelas. Vimos que podemos fazer isso modificando a relação de incerteza de Heisenberg, modificando a relatividade restrita e a relação de dispersão. A modificação da relação de incerteza fica dada em termos de um parâmetro β , que no limite $\beta \rightarrow 0$ recupera a relação de incerteza ordinária. Acredita-se que β deve ser pequeno, visto que seus efeitos não foram notados em medições experimentais feitas com aparatos técnicos atuais. Um outro ponto focado naquele capítulo é o de que as três diferentes formas de introduzirmos o comprimento mínimo são equivalentes.

No terceiro capítulo, tratamos pormenorizadamente da introdução do comprimento mínimo pela modificação da relação de incerteza de Heisenberg. A modificação é feita de modo tal que a incerteza na medição da posição possui um valor mínimo. Em outras palavras, vimos que não podemos mais localizar a partícula com uma resolução tão grande quanto queiramos. desse modo, fica impossível escrever um estado quântico em uma base de auto-vetores do operador posição. No entanto, foi mostrado que os estados quânticos podem ser escritos em uma base de auto-vetores do operador momento. E mais, no lugar dos auto-estados de posição, temos os estados de máxima localização e, correspondentemente, as funções de onda de quase posição. Mostramos também que os operadores de posição e de momento podem ser escritos como operadores que atuam nas funções de onda de momento, ou nas funções de onda de quase posição. Fizemos isso, inicialmente, para uma dimensão. Posteriormente, generalizamos para mais de uma dimensão.

No quarto capítulo, dissemos que o comprimento mínimo, da ordem da escala de Planck, pode advir de uma teoria com dimensões extras (que também vem da teoria de cordas). Mencionamos também que a escala de Planck sofre uma diminuição em seu valor neste modelo e a massa de Planck sofre um aumento (da ordem de $1TeV$). Simbolizamos a

escala de Planck por L_f e a massa de planck por M_f . Em seguida, escrevemos uma relação entre vetor de onda-momento linear e outra entre frequência angular-energia de forma a induzir um comprimento mínimo. Destas relações, deduzimos como o gerador de translações espaciais está relacionado com o operador de momento e como o gerador de translações temporais está relacionado com o operador de energia. Fizemos isso no regime de baixa energia $p \ll M_f$ e para o regime de altas energias $p \gg M_f$.

No quinto capítulo, mostramos que a extensão relativística da equação de Schroedinger leva na chamada equação de Klein-Gordon. Mostramos também que essa equação possui problemas de interpretação e até que esses problemas fossem sanados, Dirac fez uma proposta alternativa, que culminou na equação de Dirac. Mostramos a forma da solução em ondas planas e, em seguida, fizemos algumas abordagens acerca da necessidade desta equação ser invariante sob transformações de Lorentz. Por fim, escrevemos a equação de Dirac na forma de equação de auto-valores, que nos permitiu identificar o hamiltoniano de uma partícula livre relativística.

No sexto capítulo, estudamos a equação de Dirac ordinária com a introdução de um potencial central, ou seja, estudamos a equação que rege o comportamento de um elétron quântico-relativístico submetido a um potencial elétrico central. Fizemos isso, através do estudo da equação de Dirac no formato de uma equação de auto-valores.

No sétimo capítulo, estudamos a equação de Dirac com potencial central em um cenário com comprimento mínimo. Com a representação utilizada no sexto capítulo, a equação de auto-valores fica modificada pela introdução de um termo proporcional à $\frac{1}{r}$. Utilizamos o método perturbativo para resolver a equação de auto-valores resultante. Obtivemos a energia do estado fundamental nesse cenário e estimamos um valor máximo para o comprimento mínimo.

Referências bibliográficas

Referências Bibliográficas

- [1] Kharg, H.; J. Phys. **63** 595 (1995).
- [2] Heisenberg, W.; Ann. Phys. **424**, 20 (1938).
- [3] Snyder, H. S.; Phys. Rev. **424** 20 (1938).
- [4] Majid, S., Ruegg, H.; Phys. Lett. B **334**, 348 (1994).
- [5] Mead, C. A.; Phys. Rev. **135**, B849 (1964).
- [6] Bronstein, M.; Gen. Relativ. Gravit. **44**, 267 (2012).
- [7] Hossenfelder, S.; Physics Letters B **582** 1 (2004).
- [8] Noucier, Kh.; J. Phys. A **38** 10027 (2005).
- [9] Kempf, A.; J. Math. Phys. **38** 1347-1372 (1997).
- [10] Hossenfelder, S., Bleicher, M., Hofmann, S., Ruppert, J., Scherer, S. and Stocker, H.; Phys. Lett. B **575**, 85 (2003).
- [11] Brau, F.; J. Phys. A **32** 7691 (1999).
- [12] Hossenfelder, S.; Class. Quant. Grav. **23** 1815-1821 (2006).
- [13] Gross, D. J. and Mende P. F.; Nucl. Phys. B *303* 407 (1998).
- [14] Yoneya, T.; Mod. Phys. Lett. A **4** 1587 (1989).

- [15] Douglas, M. R. and Nekrasov, N. A.; Rev. Mod. Phys. **73** 977 (2001).
- [16] Padmanabhan, T., Seshadri, T. R. and Singh, T. P.; Int. J. Mod. Phys. A **1** 491 (1986).
- [17] Scardigli, F.; Phys. Lett. B **452** 39 (1999).
- [18] Fontanini M., Spalluci E and Padmanabha T (2005).
- [19] Padmanabhan, T.; Phys. Rev. Lett. **78** 1854 (1997).
- [20] Unruh, W.G; Phys. Rev. D **51** 2827(1995).
- [21] Magueijo, J. and Smolin, L.; Phys. Rev. D **67** 044017 (2003).
- [22] Bruno, N. R., Amelino-Camelia, G. and Kowalski-Glikman; J. Phys. Lett. B **522** 133 (2001).
- [23] Lukierski, J., Ruegg, H., Nowicki, A. and Tolstoi, V. N.; Phys. Lett. B **264** 331 (1991).
- [24] Jacobson, T., Liberati, S. and Mattingly, D.; Phys. Rev. D **67** 124011 (2003).
- [25] Amelino-Camelia, G. and Piran, T.; Phys. Rev. D **64** 036005 (2001).
- [26] Kempf A., Mangano, G. and Mann, R. B.; Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995).
- [27] Connes, A.; AIP Conf.Proc. 861 47 (2006)
- [28] Hossenfelder, S., Bleicher, M., Hofmann, S., Ruppert, J., Scherer, S. and Stocker, H.
Phys. Lett. B. **575**, 85 (2003).
- [29] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., Dvali, G.; Phys. Lett. B **429** 263 (1998).
- [30] Randall, L. and Sundrum, R.; Phys. Rev. Lett. **83** 3370 (1999).

- [31] Arfken, G. B. and Weber, H. J.; *Mathematical Methods for Physicist* (Academic Press, San Diego, 1995).
- [32] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 2nd Ed., John Wiley and sons, New York (1970).
- [33] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., Dvali, G.; Phys. Lett. B **429** 263 (1998).
- [34] Appelquist, T., Cheng, H. C. and Dobrescu, B. S.; Phys. Rev. D **64** 035002 (2001).
- [35] Hossenfelder, S., Bleicher, M., Hofmann, J., Ruppert, J., Scherer, S., Stocker, H.; Phys. Lett. B **429**, 263 (2003).
- [36] Akhoury, Y. P.; Phys. Lett. B **572**, 37 (2003)
- [37] Benczick, S., Chang, L. N., Minic, D., Takeuchi, T.; Phys. Rev. A **72**, 012104 (2005).
- [38] Bouaziz, D., Ferkous, N,; Phys. Rev. A **82**, 022105 (2010).
- [39] Samar, M. J.; J. Phys. Stud. **15**(1), 1007 (2011).