

Universidade Federal do Espírito Santo

Modelo unificado para o setor escuro e a teoria  
de Rastall

Juliano Pereira Campos

Orientador: Dr. Júlio César Fabris

Vitória - Espírito Santo

2013

JULIANO PEREIRA CAMPOS

MODELO UNIFICADO PARA O SETOR ESCURO E A TEORIA  
DE RASTALL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.  
Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

VITÓRIA  
2013

# “MODELO UNIFICADO PARA O SETOR ESCURO E A TEORIA DE RASTALL”

**JULIANO PEREIRA CAMPOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.

## COMISSÃO EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Júlio César Fabris  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Orientador

---

Prof. Dr. Nelson Pinto-Neto  
CBPF

---

Prof. Dr. Humberto Borges  
Universidade Federal da Bahia

---

Prof. Dr. Hermano Velten  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Oliver Piattella  
Universidade Federal do Espírito Santo

Dedico a: Olga, Cristiano, Pablo, Luciene e a  
meu filho que está por chegar.

"... Peço enfaticamente que o que aqui realizei seja lido com indulgência e que meus trabalhos em um assunto tão difícil sejam examinados não tanto com espírito de censura, mas com o de reparar seus defeitos".

*Isaac Newton*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem a força emanada Dele, certamente eu não teria trilhado esse importante caminho.

Agradeço aos meus familiares pois, mesmo sabendo que eu me distanciaria fisicamente, nunca deixaram faltar confiança e incentivo.

Agradeço ao incentivo dos meus amigos Baixagrandenses.

Agradeço ao professor Júlio César Fabris por todas as discussões promovidas, por ter sido paciente e por ser um exemplo de ser humano.

Aos amigos Hermano, Stéphane, Oliver, José André, Adriano, Manuel, Deborah, Ivan, Zui, Érico, Leandro e Alex. A todos os demais colegas de pós-graduação, agradeço por terem proporcionado sentimentos tão nobres, tais como: admiração, respeito e amizade.

Agradeço à CAPES pela bolsa de estudos.

# Resumo

Nesta tese, investigamos o cenário de unificação promovido pelo modelo de gás de Chaplygin generalizado (um fluido perfeito caracterizado por uma equação de estado  $p = -A/\rho^\alpha$ ). Nossas preocupações estão com a possível tensão existente entre testes cinemáticos de base e aqueles relacionados à evolução de pequenas perturbações. Analisamos dados de observação da idade diferencial do Universo, de supernovas Ia, de oscilações acústicas bariônicas e da posição do primeiro pico do espectro angular da radiação cósmica de fundo. Mostramos que esses testes favorecem valores negativos do parâmetro  $\alpha$ : achamos  $\alpha = -0.089_{-0.128}^{+0.161}$  com nível de  $2\sigma$  e  $\alpha < 0$  com 85% de confiança. Estes correspondem a valores negativos do quadrado da velocidade do som, que são inaceitáveis do ponto de vista de formação de estrutura. Discutimos uma possível solução para este problema, quando o gás de Chaplygin generalizado é descrito na teoria modificada da gravidade proposta por Rastall. Mostramos que uma descrição do fluido no âmbito desta teoria não serve ao propósito, mas ela é necessária para a estrutura de gás de Chaplygin generalizado em uma teoria de campo escalar. Finalmente, abordamos a relatividade geral padrão no cenário de unificação fornecido pelo gás de Chaplygin generalizado no caso  $\alpha = 0$ : este é geralmente considerado indistinguível do modelo  $\Lambda$ CDM padrão, mas mostramos que a evolução de pequenas perturbações, governada pela equação de Mészáros, é de fato diferente e a formação de halos de matéria GCG em sub-horizonte deve ser afetada fortemente em comparação com o cenário  $\Lambda$ CDM.

# Abstract

In this thesis, we investigate the unification scenario provided by the generalised Chaplygin gas model (a perfect fluid characterized by an equation of state  $p = -A/\rho^\alpha$ ). Our concerns lie with a possible tension existing between background kinematic tests and those related to the evolution of small perturbations. We analyse data from the observation of the differential age of the universe, type Ia supernovae, baryon acoustic oscillations and the position of the first peak of the angular spectrum of the cosmic background radiation. We show that these tests favour negative values of the parameter  $\alpha$ : we find  $\alpha = -0.089_{-0.128}^{+0.161}$  at the  $2\sigma$  level and that  $\alpha < 0$  with 85% confidence. These would correspond to negative values of the square speed of sound which are unacceptable from the point of view of structure formation. We discuss a possible solution to this problem, when the generalised Chaplygin gas is framed in the modified theory of gravity proposed by Rastall. We show that a fluid description within this theory does not serve the purpose, but it is necessary to frame the generalised Chaplygin gas in a scalar field theory. Finally, we address the standard general relativistic unification picture provided by the generalised Chaplygin gas in the case  $\alpha = 0$ : this is usually considered to be undistinguishable from the standard  $\Lambda$ CDM model, but we show that the evolution of small perturbations, governed by the Mészáros equation, is indeed different and the formation of sub-horizon GCG matter halos may be importantly affected in comparison with the  $\Lambda$ CDM scenario.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão sobre Relatividade Geral</b>	<b>4</b>
2.1	Princípio de Equivalência . . . . .	5
2.1.1	Gravitação de Newton . . . . .	6
2.2	Teoria da Relatividade Geral . . . . .	8
2.2.1	Equações de Campo de Einstein . . . . .	9
2.3	A Métrica do Espaço-tempo . . . . .	12
2.4	Conteúdo Material . . . . .	15
2.5	Cenários Cosmológicos . . . . .	18
2.5.1	Evolução da Densidade de Energia . . . . .	19
2.6	O Modelo Cosmológico Padrão . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Modelos de Matéria e Energia Escuras</b>	<b>26</b>
3.1	Evidência da Expansão Acelerada do Universo . . . . .	26
3.2	Distribuição de Matéria Escura em Algumas Escalas de Distância 29	
3.2.1	Matéria Escura em Escala Galáctica . . . . .	29
3.2.2	Matéria Escura em Escala de Aglomerado de Galáxias . . . . .	30
3.2.3	Matéria Escura em Escala Cosmológica . . . . .	32
3.3	Candidatos à Matéria Escura . . . . .	34
3.3.1	Matéria Escura Bariônica . . . . .	34

3.3.2	Matéria Escura Não Bariônica . . . . .	35
3.4	Energia Escura . . . . .	37
<b>4</b>	<b>O modelo de gás de Chaplygin e as restrições em parâmetros cosmológicos</b>	<b>42</b>
4.1	Introdução . . . . .	42
4.2	Gás de Chaplygin . . . . .	44
4.3	Testes de Base . . . . .	46
4.4	Ferramentas da Análise Estatística . . . . .	51
4.4.1	Probabilidade . . . . .	51
4.4.2	Marginalização . . . . .	53
4.4.3	Estimativa de parâmetros . . . . .	54
4.5	Conclusão . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Uma Descrição do gás de Chaplygin na Teoria de Rastall</b>	<b>63</b>
5.1	Introdução . . . . .	63
5.2	Determinação do parâmetro da equação de estado e da velocidade do som . . . . .	64
5.3	Perturbações na métrica e a evolução de pequenas perturbações	69
5.4	Evolução das perturbações em sub-horizonte . . . . .	76
5.5	Conclusão . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>80</b>
6.1	Considerações e Perspectivas . . . . .	80
	<b>Apêndice A</b>	<b>82</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Desde os tempos mais remotos o homem tem demonstrado enorme fascínio pelos céus e seus objetos, além de tentar compreender os fenômenos referentes a estes e os eventos que os envolvem em seu cotidiano a nível terrestre. Todavia, para sair do plano da contemplação dos objetos celestes e chegar a uma compreensão mais fidedigna do Universo, exigiu-se da humanidade um grande aprofundamento, tanto no campo teórico como no campo observacional. Um dos modelos de Universo mais difundidos, e que vem da antiguidade, é o modelo de Aristóteles. Nele, o Universo era dividido em duas partes, o mundo imperfeito, sub-lunar, e o mundo perfeito, supralunar. Entre outras, duas características são marcantes no modelo apresentado por Aristóteles: a primeira refere-se ao fato da Terra está no centro do Universo, o *geocentrismo*, a segunda, ao fato do movimento dos corpos celestes ser regido por um motor primário Divino. Essa concepção de Universo permaneceu por um longo período, cerca de 2000 anos, até que fosse colocado em xeque pelo modelo de Copérnico, por volta do século XVI. Neste modelo, o Sol encontrava-se no centro do universo, o *heliocentrismo*, e os planetas giravam em torno dele. Algumas décadas depois, o modelo Copernicano é ratificado pelas observações realizadas por Galileu que usou um telescópio de sua própria autoria e derrubou o modelo Aristotélico. Entre várias descobertas, foram a do relevo lunar, a de satélites em Júpiter e a das fases de Vênus que colocaram por terra a definição de um mundo supra-lunar perfeito, e com ela o modelo Aristotélico. Com Galileu, a ciência entra em uma nova era, uma era de implementação de estruturação metodológica nos procedimentos científicos e da experimentação, inclusive

observacional, como possibilidade de verificação de teorias.

Apesar dos vários modelos de Universo apresentados, somente no final do século XVII foi apresentada uma lei matemática que rege os movimentos e as interações dos objetos celestes, conhecida como lei da Gravitação Universal e descoberta por Newton<sup>1</sup>. A teoria de Newton é bem sucedida quando levamos em conta eventos e fenômenos celestes no âmbito interplanetário, todavia, mesmo a nível do sistema solar, ela apresenta limitações como por exemplo no problema referente ao periélio de Mercúrio. Para escalas de distâncias mais extensas, como as galácticas e extragalácticas, a referida teoria se mostra ineficaz, como no caso da estimativa de massa de galáxias espirais através de curvas de rotação, dando origem assim, ao problema conhecido hoje como matéria faltante, ou matéria escura. Aproximadamente dois séculos depois, em 1915, uma nova teoria da gravidade é proposta por Albert Einstein, como uma generalização da Gravitação Universal, a conhecida Relatividade Geral. Ela traz robusto arcabouço teórico, sendo uma ferramenta bem sucedida no que se refere à descrição do Universo e servindo como base para a Cosmologia Moderna. Na Relatividade Geral nem a Terra, nem o Sistema Solar, nem a Galáxia estão em um ponto especial do Universo, ou seja, não existe ponto algum no Universo que tenha posição privilegiada, essa concepção está intimamente ligada ao Princípio Cosmológico, segundo o qual o Universo apresenta as propriedades de homogeneidade e isotropia em larga escala ( $\approx 200\text{Mpc}$ ).

A partir dos anos 90, com a descoberta de que o Universo está em expansão acelerada, o entendimento sobre a evolução do Universo foi radicalmente mudado e várias propostas sugeriram com o intuito de descrevê-lo. Muitas alternativas são estabelecidas sobre as bases da teoria da Relatividade Geral, como por exemplo, a Quintessência e a Constante Cosmológica, e outras assumem uma modificação na gravidade, como a teoria  $f(R)$ . Todas as propostas, até o momento, apresentam problemas e sucessos no que diz respeito aos testes experimentais e teóricos, de maneira que não se tem uma teoria que resolva completamente as questões fundamentais da Cosmologia.

Nesta tese, buscamos entender um pouco mais os problemas que estão ligados a tentativa de fazer uma descrição do nosso Universo e, a partir do entendimento adquirido,

---

<sup>1</sup>Publicada por Newton em 1687 em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

apresentar alguma contribuição ao escopo teórico no âmbito da Cosmologia. Para representar um determinado Universo, tomamos como suposição que o Universo seja preenchido com um tipo de fluido denominado de gás de Chaplygin generalizado (GCG), caracterizado por uma equação de estado dada por  $p = -A/\rho^\alpha$ . Uma consequência bem interessante advinda ao considerar esse gás é a possibilidade de unificação da matéria e energia escuras, que juntas representam hoje mais de 95% do conteúdo total do Universo. No entanto, apesar desse modelo ser bem sucedido no que tange aos testes a nível de base, ele apresenta sérios problemas a nível perturbativo. Neste trabalho, consideramos a possibilidade de uma modificação na teoria da Relatividade Geral através da teoria de Rastall com o intuito de contornar, principalmente, o problema de valor negativo para parâmetro  $\alpha$  do GCG.

A tese encontra-se dividida da seguinte forma: No capítulo 2, apresentamos uma curta revisão das noções fundamentais da Relatividade Geral e da Cosmologia. No capítulo 3, abordamos alguns modelos tanto de matérias quanto de energia escuras. No capítulo 4, descrevemos os modelos de gás de Chaplygin simples e generalizado e uma análise Bayesiana para determinar as restrições de parâmetros cosmológicos. No capítulo 5, mostramos uma representação do GCG na teoria de Rastall e no capítulo 6 expomos a conclusão do nosso trabalho. A contribuição original da tese está nos capítulos 4 e 5 [17].

# Capítulo 2

## Revisão sobre Relatividade Geral

Em escalas cosmológicas, a força dominante que determina a evolução do universo é a gravidade. As forças nucleares fortes e fracas têm curto alcance,  $l_{for} \approx 10^{-15}\text{m}$  e  $l_{fra} \approx 10^{-18}\text{m}$ , respectivamente. Além da força gravitacional, a força eletromagnética poderia contribuir também para a força efetiva, pois a repulsão eletrostática entre dois prótons é maior que a força gravitacional entre eles por um fator de  $\approx 10^{36}$ . Todavia, em largas escalas, o Universo é eletricamente neutro, por isso não há contribuição de forças eletrostáticas em largas escalas. No entanto, campos magnéticos podem desempenhar um papel importante em Cosmologia. Apesar dos campos magnéticos intergaláticos serem hoje muitos fracos, eles são importantes, tanto na Astrofísica quanto na Cosmologia, quando estudamos o Universo muito jovem. Nessa época, a presença de campos magnéticos afeta a Nucleossíntese do Big Bang (em inglês, BBN<sup>1</sup>) [21].

Do que foi dito até agora, consideramos a gravidade como uma força. Essa visão da gravidade é adotada por Isaac Newton. Na concepção Newtoniana a gravidade é a força que causa a aceleração dos corpos "massivos". Uma outra interpretação para a gravidade é dada por Albert Einstein, em que a gravidade é uma manifestação da curvatura espaço-tempo.

---

<sup>1</sup>A época da recombinação deve ser precedida de uma época de fusão nuclear, comumente chamada de BBN. [86]

## 2.1 Princípio de Equivalência

No formalismo de Newton o Universo é espacialmente Euclideano. Se a resultante de força que age sobre a partícula for nula, a partícula se move em linha reta em velocidade constante. Todavia, para os corpos celestes Sol, Lua, planetas, cometas, etc., se observa variação do movimento, de modo que existe uma força atuando sobre esses corpos, a força gravitacional. Todos os objetos no Universo, segundo Newton, têm uma propriedade chamada "massa gravitacional". Assim, para dois objetos de massa  $M_g$  e  $m_g$ , e separados por uma distância entre seus centros de  $r$ , a intensidade da força gravitacional entre os dois objetos é dada por:

$$\vec{F} = -\frac{GM_g m_g}{r^2} \hat{r}. \quad (2.1)$$

Considerando, na equação acima, o primeiro objeto na origem do sistema de referência, temos que o vetor unitário,  $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ , fornece a direção e o sentido do vetor posição que liga o primeiro objeto ao segundo, e o sinal negativo indica que a força da gravidade, na visão Newtoniana, é sempre uma força atrativa. Newton propõe também que todos os corpos do Universo possuem uma propriedade chamada "massa inercial". Da segunda lei de Newton, tem-se que a força e aceleração são relacionadas pela equação abaixo

$$\vec{F} = m_i \vec{a}. \quad (2.2)$$

Nas equações (2.1) e (2.2) as massas gravitacional e inercial são diferenciadas através de índices,  $m_g$  e  $m_i$ , contudo, um importante resultado experimental da física indica que as massas gravitacional e inercial de um objeto são idênticas, no limite da precisão experimental. Se o princípio de equivalência não fosse verdadeiro, a aceleração gravitacional para um determinado objeto de massa  $m_i$  sobre a influência de um corpo de massa  $M_g$  seria

$$a = -\frac{GM_g}{r^2} \left( \frac{m_g}{m_i} \right), \quad (2.3)$$

onde a razão  $m_g/m_{m_i}$  variaria de objeto para objeto. Todavia a experiência mostra que na ausência de forças resistivas, as acelerações de diferentes corpos em queda livre na superfície da Terra são iguais e de intensidade  $g = GM_T/r_T^2 = 9,8ms^{-2}$ , onde  $M_T$  e  $r_T$  são a massa e o raio da Terra, respectivamente.

### 2.1.1 Gravitação de Newton

De maneira mais precisa, no caso em que o conteúdo material é visto como um fluido, a gravitação Newtoniana conduz a um conjunto de equações que podem ser aplicadas à descrição de um modelo cosmológico. A primeira é a conservação da massa. Considere um volume  $V$  definido por uma superfície fechada  $S$ . A variação da massa no interior do volume é igual ao fluxo de massa através da superfície:

$$\frac{dM}{dt} = - \int_s \vec{j} \cdot d\vec{S} \longrightarrow \frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \nabla \cdot \vec{j} dV \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.4)$$

onde  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . Considerando agora a segunda lei de Newton para um volume desse fluido de densidade  $\rho$ . Sobre esse elemento, age o gradiente da pressão e a força gravitacional:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \phi \longrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \quad (2.5)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional.

E por fim, temos que o potencial gravitacional devido a uma distribuição de massa é dado por:

$$\phi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (2.6)$$

Todavia,

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.7)$$



e, assim, obtemos

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (2.8)$$

Temos abaixo, o seguinte sistema de equações que descreve uma cosmologia newtoniana:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\phi, \quad (2.10)$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (2.11)$$

A primeira equação é a equação da continuidade, a segunda é a equação de Euler e a terceira é a equação de Poisson, onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $\vec{v}$  é o campo de velocidade do fluido,  $p$  é a pressão e  $\phi$  é o potencial gravitacional.

Na configuração Newtoniana temos que:

*A massa diz à gravidade como exercer uma força ( $F = -GMm/r^2$ ),*

*A força diz à massa como acelerar ( $F = ma$ )<sup>2</sup>.*

Já na teoria gravitacional proposta por Einstein, a gravitação é vista não como uma força, porém como a estrutura do espaço-tempo quadri-dimensional. Assim, os princípios relativísticos são incluídos, pois têm-se um espaço-tempo, e também o princípio de equivalência, visto que todos os corpos se movem da mesma maneira numa dada geometria. A ideia fundamental da teoria de Einstein é que a geometria do espaço-tempo não é um dado *a priori*, porém ela é determinada pela distribuição de matéria. Ou seja,

*A massa-energia diz ao espaço-tempo como se curvar,*

*O espaço-tempo curvado diz à massa-energia como se mover<sup>3</sup>.*

---

<sup>2</sup>Esse resumo da gravitação Newtoniana foi feito pelo físico John Wheeler.

<sup>3</sup>Esse resumo da relatividade geral, também foi feito pelo físico John Wheeler.

## 2.2 Teoria da Relatividade Geral

Matematicamente, a geometria é dada pelos coeficientes da métrica  $g_{\mu\nu}$  do intervalo espaço-tempo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.12)$$

A curvatura de uma variedade<sup>4</sup> é caracterizada pelo tensor de Riemann

$$R_{\mu\gamma\nu}^\lambda = \partial_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\gamma\rho}^\lambda - \Gamma_{\mu\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \quad (2.13)$$

onde os símbolos de Christoffel se escrevem como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (2.14)$$

O tensor de Riemann é conectado à não comutatividade das derivadas covariantes,

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\lambda = R_{\gamma\mu\nu}^\lambda V^\lambda \quad (2.15)$$

onde  $\nabla$  é a *conexão* e indica a derivada covariante num espaço-tempo curvo. Quando a conexão está associada à métrica, temos a condição de metricidade

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.16)$$

A partir do tensor de Riemann podemos obter o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  definido como

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda. \quad (2.17)$$

---

<sup>4</sup>De maneira simplificada, variedade é um espaço topológico no qual cada ponto possui uma vizinhança aberta na qual cada elemento pode ser identificado por um sistema de coordenadas não-singulares contínuo (e, eventualmente, diferenciável). [5]

e por sua vez, do tensor de Ricci podemos encontrar o escalar de Ricci, que é dado por:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Os coeficientes métricos serão soluções das equações dinâmicas que ligam a geometria à distribuição de matéria:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia. O tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  é definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.20)$$

Para caracterizarmos o lado direito da equação (2.19), especificaremos o conteúdo material. Em geral, quando não existe cisalhamento nem transferência de calor no fluido, o tensor momento-energia se escreve como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

onde  $u^\mu$  é a quadri-velocidade do fluido de densidade  $\rho$  e pressão  $p$ .

### 2.2.1 Equações de Campo de Einstein

A teoria da gravitação de Einstein fornece um conjunto de equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia no espaço. Portanto, o campo gravitacional pode ser interpretado como a curvatura do espaço tempo.

As equações estabelecidas por Einstein são conhecidas como equações de campo, pois elas descrevem o comportamento e as propriedades do campo gravitacional.

Para acharmos as equações de campo, lançaremos mão do cálculo variacional. Pelo

princípio de mínima ação temos,

$$\delta S_T = 0, \quad (2.22)$$

onde  $S_T$  é a soma da ação do campo de matéria  $S_m$  mais a ação do campo gravitacional  $S_g$ . Podemos escrever que

$$S_m = \int \mathcal{L}_m d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.23)$$

e

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int \mathcal{L}_g d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.24)$$

sendo que  $G$  é a constante gravitacional de Newton,  $g$  é o determinante da métrica,  $\mathcal{L}_m$  e  $\mathcal{L}_g$  são as densidades das Lagrangianas dos campos de matéria e gravitacional, respectivamente.

Aplicando o princípio de mínima ação à equação (2.23), temos

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \delta \int \mathcal{L}_m d^4x \sqrt{-g} = \int \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \delta g_{,\alpha}^{\mu\nu} \right] d^4x \\ &\Rightarrow \delta S_m = \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \end{aligned} \quad (2.25)$$

com base na equação (2.25) é definido o tensor momento-energia, sendo escrito como [19]:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right] \right\}. \quad (2.26)$$

Aplicando o princípio de mínima ação, da mesma forma, para a ação do campo gravitacional, encontra-se que

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.27)$$

que é conhecida como a ação de Einstein-Hilbert. A ação total é dada então por,

$$S_T = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int \mathcal{L}_m d^4x \sqrt{-g}. \quad (2.28)$$

Podemos mostrar que o cálculo variacional da equação (2.28) resultam em

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \delta \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Assim, das equações (2.25) e (2.29), vemos que o cálculo variacional da ação total leva à

$$\delta S_T = \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 8\pi G T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.30)$$

o que conduz às equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Quando tratamos de um espaço-tempo cuja a variedade quadri-dimensional  $V^4$  pode ser escrita na forma  $V^4 = T \times S^3$ , onde  $S^3$  é uma hiper-superfície do tipo espaço e  $T$  a linha temporal, podemos escolher um sistema de coordenadas co-móvel, tal que a quadri-velocidade toma a forma

$$u^\mu = (1, \vec{0}). \quad (2.32)$$

Com este sistema de coordenadas co-móvel, as componentes do tensor momento-energia podem ser escritas como

$$T^{00} = \rho, \quad T^{ij} = -p g^{ij}, \quad T^{0i} = 0. \quad (2.33)$$

O tensor de Riemann satisfaz as identidades,

$$R_{\mu\nu\lambda\gamma;\rho} + R_{\mu\nu\rho\lambda;\gamma} + R_{\mu\nu\gamma\rho;\lambda} = 0, \quad (2.34)$$

conhecidas como identidades de Bianchi. Fazendo a contração, obtemos a identidade

$$\left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right)_{;\mu} = 0, \quad (2.35)$$

que implica, devido à equação de Einstein, que

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (2.36)$$

Esta última relação exprime a conservação do tensor momento-energia.

A equação diferencial da curva tendo um comprimento extremo é chamada de *equação geodésica*. Essa equação descreve como uma partícula se move num dado espaço-tempo. A equação das geodésicas é da forma,

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = 0. \quad (2.37)$$

No limite de um campo fraco, a equação de Einstein (2.19) se reduz à equação de Poisson (2.11), a equação de conservação do tensor momento-energia (2.36) se reduz às equações de continuidade (2.9) e a de Euler (2.10). Nesse mesmo limite de campo fraco, a equação das geodésicas (2.37) se reduz à equação de Newton

$$\ddot{\vec{x}} = -\nabla\phi. \quad (2.38)$$

## 2.3 A Métrica do Espaço-tempo

Na teoria da relatividade geral, a gravitação é expressa como a geometria do espaço-tempo a quatro dimensões. Como, em grandes escalas ( $\geq 100\text{Mpc}$ ), o Universo é homogêneo e isotrópico, procuramos uma métrica que seja globalmente homogênea e isotrópica

e que evolua com o tempo. A construção da matéria que descreve um Universo homogêneo e isotrópico segue um esquema mais simples. Em relatividade temos que o espaço e o tempo juntos compõem um espaço-tempo quadri-dimensional. Assim, para medirmos distância entre dois eventos nesses espaço-tempo, vamos considerar dois eventos, um que ocorre no espaço-tempo localizado em  $(t, r, \theta, \phi)$ , e um outro que ocorre no espaço-tempo localizado em  $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ . De acordo com as leis da relatividade especial, a separação espaço-temporal entre esses dois eventos é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (2.39)$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . A métrica dada pela equação (2.39) é chamada de métrica de Minkowski, e o espaço-tempo que ela descreve é chamado espaço-tempo de Minkowski. Esse espaço-tempo é aplicado apenas no contexto da relatividade especial, chamado assim por ser um caso especial em que o espaço-tempo não é curvado pela presença de massa ou de energia. Sem qualquer efeito gravitacional, o espaço-tempo de Minkowski é plano e estático. Quando a gravidade é adicionada, contudo, espaço-tempos mais interessantes se tornam possíveis. Sendo assim, qual a forma da métrica do espaço-tempo assumindo que o Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico em todo momento, e se as distâncias podem expandir ou contrair como função do tempo? Lançamos mão assim, da métrica<sup>5</sup> conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Ela é geralmente escrita na forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.40)$$

onde a função  $a(t)$  é denominada de **fator de escala**. O fator de escala descreve como distâncias em um Universo homogêneo e isotrópico expande ou contrai com o tempo. A métrica de FLRW também pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2], \quad (2.41)$$

---

<sup>5</sup>A métrica tem sua assinatura dada por  $(+, -, -, -)$ .

onde a função  $S_k(\chi)$ , para os três diferentes tipos de curvatura, é dada por

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \text{sen}(\chi) & (k = +1) \\ \chi & (k = 0) \\ \text{senh}(\chi) & (k = -1) \end{cases}$$

onde  $k$  é chamada **constante de curvatura**. Para  $k = +1$ , a curvatura é positiva e a métrica é a generalização tri-dimensional da superfície bi-dimensional de uma esfera. Esta métrica tem um volume finito, e é chamado modelo fechado. Se  $k = -1$ , a curvatura é negativa, e a métrica é a generalização da geometria hiperbólica. O volume é infinito e o modelo é chamado de aberto. Por fim, para  $k = 0$ , conduz à uma geometria plana, que deixa o sistema euclidiano de coordenadas co-móvel para qualquer  $r$ .

Com a métrica do chamado espaço-tempo de FLRW, podemos calcular o lado esquerdo das equações de Einstein. Para tanto, primeiro calcularemos os coeficientes de Christoffel e em seguida o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e o escalar de Ricci  $R$ . Assim, a métrica é dada por

$$g_{00} = 1, \quad g_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.42)$$

onde  $\gamma_{ij}$  é a métrica com curvatura constante sobre a seção espacial. Comparando as equações (2.12) e (2.40), determina-se o tensor métrico na forma matricial, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t)/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix},$$

de onde podemos obter os termos não nulos da seção espacial  $\gamma_{ij}$ ,

$$\gamma_{11} = -1/(1 - kr^2) \quad \gamma_{22} = -r^2 \quad \gamma_{33} = -r^2\text{sen}^2\theta. \quad (2.43)$$



Da equação da métrica  $g_{\mu\nu}$ , podemos escrever a matriz momento-energia como

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pa^2(t)/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2(t)r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}.$$

Os coeficientes de Christoffel tomam as seguintes formas:

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad \Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i, \quad (2.44)$$

onde  $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$  é o coeficiente de Christoffel construído a partir da métrica da seção espacial  $\gamma_{ij}$ .

As demais componentes do coeficiente de Christoffel são nulas. De maneira que as componentes do tensor de Ricci, são:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = (-a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 - 2k)\gamma_{ij}. \quad (2.45)$$

Para o escalar de Ricci, tem-se

$$R = -6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.46)$$

De maneira que as componentes não nulas do tensor de Einstein são:

$$G_{00} = 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{k}{a^2}, \quad (2.47)$$

$$G_{ij} = (-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k)\gamma_{ij}. \quad (2.48)$$

## 2.4 Conteúdo Material

Consideraremos agora o lado direito da equação de Einstein. O tensor momento-energia se escreve como (2.21). Como podemos sempre achar um sistema de referência que segue o fluido, então, nesse referencial, as partículas do fluido estarão em repouso.

Portanto, a quadri-velocidade se escreve como (2.32). Assim, as componentes do tensor momento-energia são as mesmas da equação (2.33). Podemos escrever  $T_{ij} = -pa^2\gamma_{ij}$ , sendo que as equações de Einstein tomam as seguintes formas

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (2.49)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (2.50)$$

Além das equações acima, temos também a lei de conservação, expressas devido ao fato que a derivada covariante do tensor momento-energia é nula:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (2.51)$$

que pode ser escrita como:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.52)$$

As equações (2.49), (2.50) e (2.51) formam o conjunto das equações que descrevem a evolução de um Universo homogêneo e isotrópico. A tarefa é encontrar as funções  $a(t)$  e  $\rho(t)$ . É importante lembrar que essas três equações não são independentes: elas são ligadas pelas identidades de Bianchi. Portanto, só se pode usar duas delas. Mas nesse caso, temos três funções incógnitas  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  e  $p(t)$  e somente duas equações. Isso é natural: as soluções destas equações não são as mesmas, dependem do tipo de matéria que preenche o Universo. O tipo de fluido que preenche o Universo é caracterizado pela *equação de estado*, que se traduz no fato que a pressão depende da densidade,  $p = p(\rho)$ . No caso relativístico, a pressão em geral é proporcional à densidade. Assim, podemos supor que

$$p = w\rho, \quad (2.53)$$

onde  $w$  é um parâmetro, que pode depender ou não da densidade. Quatro casos são considerados como os mais importantes em cosmologia:

- $w=0$ , representa a matéria sem interação, "poeira";
- $w=1/3$ , representa um gás de fótons, "radiação";
- $w=1$ , representa a matéria num estado altamente condensado, matéria "rígida";
- $w=-1$ , representa o estado de vácuo.

A última consideração,  $w=-1$ , é muito importante pois está relacionado com a energia de vácuo e, por conseqüência, com a *constante cosmológica*. A constante cosmológica  $\Lambda^6$  é um termo matemático que aparece nas equações de campo de Einstein, como é visto abaixo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Matematicamente, a parte esquerda da equação, que representa a geometria do espaço-tempo, é a forma mais geral de um tensor covariante, cuja derivada covariante seja idênticamente *nula*. O termo que contém a constante cosmológica pode aparecer à direita da equação,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}), \quad (2.55)$$

escrita dessa forma, podemos interpretar a constante cosmológica como fonte do campo gravitacional, onde  $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$ .

Esta é a expressão de um fluido perfeito cuja densidade de energia é

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.56)$$

---

<sup>6</sup>A constante cosmológica foi introduzida por Einstein em suas equações para obter um universo estático.

e cuja a pressão é

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} = -\rho_\Lambda. \quad (2.57)$$

A constante cosmológica contribui assim de forma efetiva para a chamada energia do vácuo.

Usando (2.53) podemos facilmente integrar a equação de conservação (2.52), onde obtemos

$$\dot{\rho} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (2.58)$$

$\rho_0$  é uma constante de integração. A solução acima é válida para  $w$  constante. Assim, a equação (2.49) torna-se

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}}. \quad (2.59)$$

## 2.5 Cenários Cosmológicos

Em um Universo espacialmente, homogêneo e isotrópico, a relação entre densidade de energia  $\rho(t)$ , a pressão  $p(t)$  e o fator de escala  $a(t)$  é dada pela equação de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.60)$$

a equação de fluido,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.61)$$

e a equação de estado,

$$p = w\rho. \quad (2.62)$$

Em princípio, dadas as condições apropriadas de contorno, podemos resolver as equações (2.60), (2.61) e (2.62) e ainda  $\rho(t)$ ,  $p(t)$  e  $a(t)$  para todos os tempos, passado e futuro.

### 2.5.1 Evolução da Densidade de Energia

Na realidade, a evolução do nosso Universo é complicada pelo fato que ele contém diferentes componentes com diferentes equações de estado. Sabemos que o universo contém matéria não-relativística e radiação. Assim, o Universo contém componentes com  $w = 0$ ,  $w = 1/3$ ,  $w = 1$  e pode ter uma constante cosmológica  $w = -1$ . Contudo, existe a possibilidade de conter mais componentes exóticas, com valores diferentes de  $w$ . Todavia, temos que para diferentes componentes do universo, a densidade de energia e pressão são somadas. Podemos, então, escrever a densidade total de energia  $\rho$  como a soma das densidades de energia das diferentes componentes como:

$$\rho = \sum_i \rho_i, \quad (2.63)$$

como a pressão total  $p$  é a soma das pressões das diferentes componentes, então

$$p = \sum_i p_i = \sum_i w_i \rho_i. \quad (2.64)$$

onde  $\rho_i$  representa a densidade de energia da componente com equação de estado de parâmetro  $w_i$ . Devido à adição das densidades de energia e das pressões, a equação de fluido (2.61) é dada para cada componente separadamente, já que não existe interação entre as diferentes componentes. Assim sendo, então a componente da equação de estado com parâmetro  $w$  será obtida por

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + p_i) = 0 \quad (2.65)$$

Assumindo que  $w_i$  é constante, temos como solução da equação (2.65)

$$\rho_i(a) = \rho_{i,0} a^{-3(1+w_i)}. \quad (2.66)$$

onde temos usado que  $a_0 = 1$  hoje, quando a densidade de energia da componente  $w_i$  é  $\rho_{i,0}$ .

## 2.6 O Modelo Cosmológico Padrão

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) baseia-se no princípio cosmológico, segundo o qual o Universo é isotrópico e homogêneo em grande escala. Observações da distribuição de galáxias sugerem que essa hipótese é válida em escalas próximas ou maiores de que  $100h^{-1}\text{Mpc}$ . Outras observações, como por exemplo a isotropia nas distribuições de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (RCFM) e de hidrogênio neutro também corroboram a validade desse princípio. A teoria envolvendo o MCP é sustentada por observações que a coloca como a melhor opção de tentativa para descrever o Universo. Essas observações são:

1- A expansão do Universo, descoberta por Edwin P. Hubble nos anos 20 [51]. Hubble observou que as linhas espectrais da luz proveniente de galáxias distantes apresentavam um considerável desvio para o vermelho. Ele observou também que o desvio para o vermelho aumentava com a distância das galáxias em relação ao observador. Dessa maneira, Hubble identifica que as galáxias são dotadas de uma velocidade de recessão e que é dada por:  $\vec{v} = H\vec{r}$ . Esta relação é conhecida como lei de Hubble, onde  $\vec{r}$  representa a distância do observador à galáxia e  $H$  é o parâmetro de Hubble, que é dado como  $H = \dot{a}/a$ , onde  $a$  é o fator de escala. Observações estimam que o valor do parâmetro de Hubble hoje é próximo de  $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [41];

2- A Radiação Cósmica de Fundo em Microondas, predita por George Gamow na década de 1940 e descoberta por Arno A. Penzias e Robert W. Wilson [76]. Esse evento é uma evidência do Big Bang e é originado na época da superfície de último espalhamento<sup>7</sup>. A RCFM se comporta como uma radiação de corpo negro com uma temperatura determinada hoje com o valor  $T_{RCFM} = 2,736 \pm 0,017 \text{ K}$  [44]. A RCFM é a mais importante evidência da homogeneidade e isotropia do Universo e confirma o Princípio Cosmológico;

3- Outra observação que fundamenta o MPC é a constatação, com boa precisão, da abundância de elementos leves como  $\text{He}^3$ ,  $\text{D}$ ,  $\text{He}^4$  e  $\text{Li}^7$  de acordo com o que prever o mecanismo de nucleosíntese primordial.

---

<sup>7</sup>Região do universo na qual os fótons se desacoplaram da matéria e passaram a viajar livremente, cerca de  $3,8 \times 10^5$  anos após o Big Bang.

Friedmann, em 1922, e Lemaître, em 1927, mostraram que um Universo em expansão pode ser explicado no contexto da Relatividade Geral. O elemento de linha em um Universo isotrópico e homogêneo em expansão, em coordenadas esféricas comóveis, é dado pela métrica de Robertson-Walker na equação (2.40). Combinando esta métrica com o tensor matéria-energia, nas equações de campo de Einstein, chega-se às equações de Friedmann-Lemaître, dadas por

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.67)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.68)$$

na métrica dada pela equação (2.67) o valor da constante de curvatura  $k$  pode ser  $-1$ ,  $0$  ou  $+1$ .

Embora o modelo cosmológico padrão tenha sucesso em suas predições, existem alguns problemas que estão em aberto no MCP. Apesar das observações da radiação cósmica de fundo em microondas evidenciarem a homogeneidade e isotropia do Universo, o MCP não explica a causa dessas constatações. O que resulta no problema denominado problema do horizonte, devido ao fato do Universo ser composto por muitas regiões que não tiveram contato causal em uma fase primordial, ou seja, existiam regiões que não estavam em cone de luz das demais. Não existindo qualquer tipo de interação entre essas regiões, como se pode explicar o equilíbrio térmico do Universo evidenciado pelo RCFM?

Outro problema é o chamado Problema da Curvatura, que está relacionado com a densidade de matéria observada no Universo, representada por  $\Omega_0 = \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2}$ . Com o auxílio da equação (2.64), podemos escrever

$$k = (\Omega - 1)a^2H^2. \quad (2.69)$$

No contexto do MCP, como veremos mais adiante, tem-se que na era dominada pela

radiação  $a \propto t^{1/2}$ , já na era dominada pela matéria  $a \propto t^{2/3}$ , ou seja,

$$\begin{cases} |\Omega - 1| \propto t & \text{se } \rho_r \gg \rho_m \\ |\Omega - 1| \propto t^{2/3} & \text{se } \rho_r \ll \rho_m \end{cases}$$

como a idade do Universo hoje é  $t_0 \approx 13,7 \times 10^9$  anos e o período de desacoplamento da radiação com a matéria é  $t_{des} \approx 3,8 \times 10^5$  anos, temos

$$\frac{|\Omega_0 - 1|}{|\Omega_{des} - 1|} = \left( \frac{t_0}{t_{des}} \right)^{2/3} \sim 10^3. \quad (2.70)$$

Dessa forma, na época do desacoplamento deveríamos ter  $|\Omega_{des} - 1| \sim 10^{-3}$ . Analogamente, na época de Planck  $t_P \approx 1,35 \times 10^{-43}$ s, o que leva a  $|\Omega_P - 1| \sim 10^{-60}$ . Dados observacionais em RCFM indicam um valor de  $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$  [45]. Este fato observacional é o que nos leva a considerar a geometria do Universo como sendo plana. Todavia, não se explica porque que a densidade do Universo é próxima da densidade crítica! Ou seja, a existência de um Universo plano no MCP exige condições iniciais muito restritas.

O último problema que abordaremos aqui é o Problema de Formação de Estruturas, ele se deve ao fato de que o mecanismo de geração de flutuações primordiais de densidade seja totalmente desconhecido. Como um Universo isotrópico e homogêneo pôde dar origem a estruturas como galáxias, aglomerados e superaglomerados?

Alguns dos problemas apresentados anteriormente, podem ser resolvidos se lançarmos mão do modelo inflacionário [2, 48, 65]. A principal ideia da Inflação supõe que houve uma época, nos primeiros instantes do Universo, em que o fator de escala  $a(t)$  cresceu exponencialmente. O modelo inflacionário propõe uma possível solução para os problemas do horizonte e da curvatura. Ele foi proposto na tentativa de resolver alguns problemas cruciais no MCP, e seu formalismo original se baseia na *Teoria de Grande Unificação*. Guth [48] inferiu que quando o Universo tinha um tamanho de  $l_P \approx 10^{-35}$ m (conhecido como escala de Planck), sua energia estaria concentrada em um campo escalar, chamado de campo escalar de falso vácuo. Apesar da duração do período inflacionário ser muito curta, necessitou de  $\approx 10^{-31}$ s para que o fator de escala  $a(t)$  aumentasse exponencialmente o suficiente.



Considerando como exemplo a possibilidade de um Universo plano,  $k = 0$ , e tomando a equação de estado dada pela equação (2.66), podemos concluir que, efetuando a integral da equação (2.60),  $a(t) = a_0(t/t_0)^{2/3(1+w)}$ . Sendo que imediatamente antes e depois da inflação, o Universo era dominado pela radiação,  $w = 1/3$ , e o fator de escala dado por  $a(t) \propto t^{1/2}$ . Posteriormente, quando  $t \approx 10^4$  anos, o Universo começou a ser dominado pela matéria,  $w = 0$ , e  $a(t) \propto t^{2/3}$  e, para a fase de aceleração na inflação, tem-se  $w < -1/3$ .

Vamos definir as grandezas abaixo,

$$\Omega_{tot} = \frac{\rho_{tot}}{\rho_{crit}}, \quad \rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad e \quad \rho_{tot} = \rho_{vac} + \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_Q, \quad (2.71)$$

onde  $\rho_{vac}$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_r$ ,  $\rho_\Lambda$  e  $\rho_Q$ , são as densidades do vácuo, radiação, matéria, constante cosmológica e quintessência, respectivamente. Tomando como base a equação 2.64, podemos escrever

$$\Omega_k = \Omega_{tot} - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.72)$$

Como o fator de escala varia com o tempo e de maneira diferente para cada época do Universo dominada por distintos constituintes, podemos analisar como varia o parâmetro de densidade em cada uma dessas épocas.

- **quando domina a matéria** tem-se que o fator de escala é dado por  $a = (t/t_0)^{2/3}$ , tomando  $a_0 = 1$ , o que leva a  $H = 2/(3t)$  e  $Ha = H_0/\sqrt{a}$ , onde  $H_0 = H(t_0)$ , o parâmetro de Hubble hoje, assim

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{k}{H_0^2} a; \quad (2.73)$$

- **quando domina a radiação** tem-se que o fator de escala é dado por  $a = (t/t_0)^{1/2}$ , assim

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{k}{(H_{eq} a_{eq})^2} \left( \frac{a}{a_{eq}} \right)^2, \quad (2.74)$$

onde  $H_{eq}$  e  $a_{eq}$ , representam o parâmetro de Hubble e o fator de escala na época da equivalência entre matéria e radiação;

- **durante a inflação** tem-se que o fator de escala é dado por  $a \propto e^{H_I t}$ , o que leva a

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{k}{H_I^2} \frac{1}{a^2}, \quad (2.75)$$

onde  $H_I$  é o parâmetro de Hubble na inflação.

No gráfico 2.1 são mostrados os pontos nos quais ocorrem transições: da fase dominada pela radiação para fase dominada pela matéria, da fase dominada pela matéria para a fase dominada pela energia de vácuo.

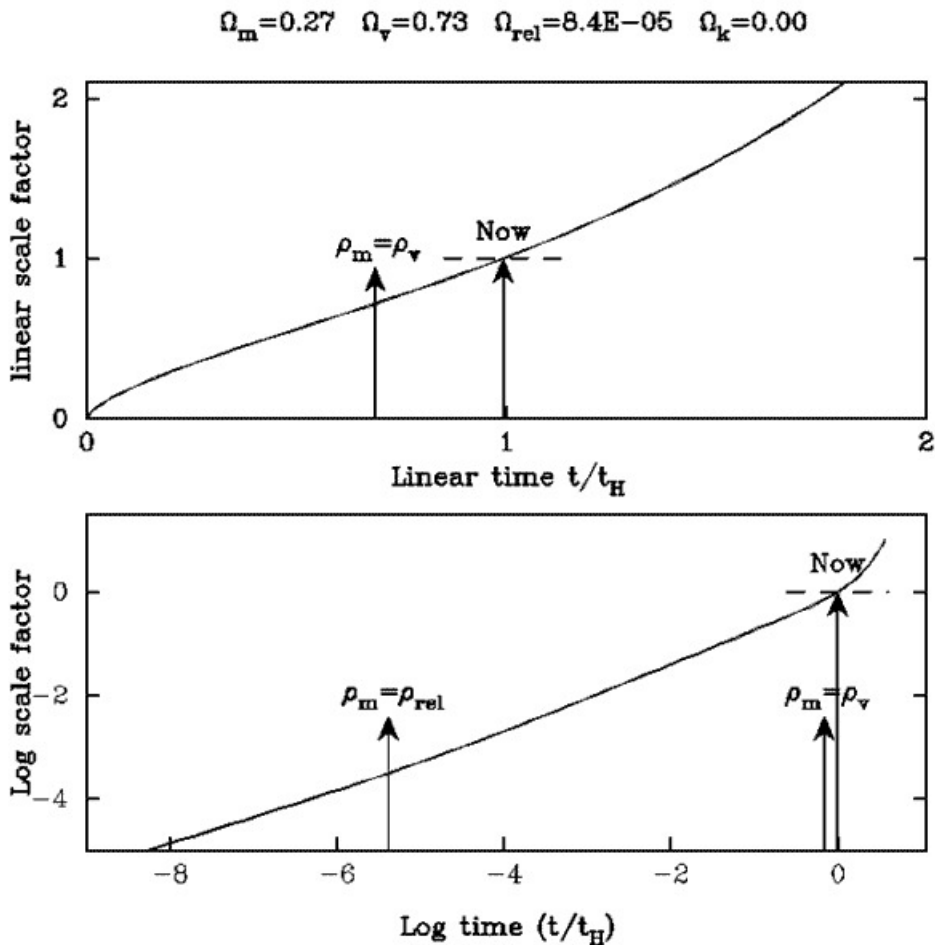


Figura 2.1: História do fator de escala para o modelo de concordância. Os gráficos mostram em escala linear (superior) e em escala logarítmica (abaixo) as grandezas fator de escala versus tempo cósmico.

Observações diretas de estruturas em largas escalas feitas por SSDS e 2dF [80] indicam que em escalas próximas de 200Mpc, o contraste de densidade é dado por

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx 10^{-1}, \quad (2.76)$$

o que leva a uma característica de homogeneidade na distribuição de matéria visível nessas regiões. Por outro lado, anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo implicam em inomogeneidades em escala de Hubble ( $\approx 4200$  Mpc), são dadas por

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx 10^{-5}, \quad (2.77)$$

evidenciando assim, indiretamente, a existência de matéria escura.

O problema do horizonte é solucionado pelo modelo inflacionário, pois no intervalo de tempo em que acontece a inflação as regiões causalmente separadas podem se conectar [23]. O problema da curvatura também é resolvido com a expansão inflacionária, isso se deve ao fato que, se existir um período inflacionário, necessariamente  $\Omega_0 \rightarrow 1$ .

Como pudemos perceber, apesar dos problemas enfrentados, alguns resolvidos pelo modelo inflacionário e outros ainda em aberto, o MCP é robusto, tanto teórica como observacionalmente, sendo este o alicerce da Cosmologia Moderna.

# Capítulo 3

## Modelos de Matéria e Energia Escuras

### 3.1 Evidência da Expansão Acelerada do Universo

Quando Galileu fez suas primeiras observações do céu utilizando um telescópio, em 1610, nossa visão de Universo foi drasticamente expandida. Galileu foi o primeiro a considerar que nossa galáxia, ou simplesmente Galáxia, era uma vasta coleção de estrelas individuais [72]. Em meados de 1700, para explicar as distribuições circulares que cruzavam o céu, Immanuel Kant (1724-1804) e Thomas Wright (1711-1786) propuseram que a Galáxia deveria ser um disco estelar e que nosso sistema solar seria apenas uma componente dentro desse disco. Então, em 1780, William Herschel produziu um mapa da Galáxia baseado em uma contagem bem grosseira do número de estrelas em algumas regiões do céu. Com esses dados, Herschel concluiu que o Sol deveria estar muito próximo do centro da distribuição e que as dimensões medidas ao longo do plano do disco seriam cinco vezes maiores que a espessura vertical do disco [72]. O modelo da Galáxia de Herschel foi posteriormente confirmado por Jacobus C. Kapteyn (1851-1922). Um dos grandes problemas enfrentados pelos astrônomos até os anos 1920, era saber se as nebulosas, os borrões luminosos no céu, pertenciam ou não à Galáxia. Dois pesquisadores travaram um grande debate sobre essa dúvida. De um lado estava Harlow Shapley que argumentava que as nebulosas pertenciam à Galáxia, e do outro lado Doust Curtis, que defendia a ideia contrária. A resposta para o embate só veio com as observações de Edwin Hubble que ao estudar Andrômeda, concluiu que a mesma fazia parte de um sistema estelar

independente; confirmando a hipótese de Curtis.

Apesar da inegável contribuição dada pelos telescópios à Astronomia, nem todos os objetos ou componentes do espaço sideral podem ser detectados por eles. A primeira evidência de matéria escura (DM - Dark Matter), ou seja, matéria indetectável, foi apontada pelo astrônomo suíço Fritz Zwicky em 1933 [104]. Na época a lei de Hubble, relacionando distância com velocidade, já tinha sido utilizada para estabelecer uma escala de distância extragaláctica. Além disso, existiam curvas de rotação disponíveis para várias galáxias espirais e essas foram usadas para estimar as razões massa-luminosidade da parte central dessas galáxias.

O trabalho de Zwicky foi baseado em medições das velocidades radiais de 7 galáxias pertencentes ao aglomerado de Coma. Ele verificou que as galáxias individuais tinham velocidades radiais que diferiam da velocidade média do aglomerado, com uma dispersão RMS (Root Mean Square) de aproximadamente 700km/s. Ele interpretou esta dispersão como uma medida da energia cinemática por unidade de massa das galáxias do aglomerado e fez uma estimativa grosseira do raio do aglomerado sendo capaz de medir a massa total do aglomerado usando o teorema do virial. Ao examinar o conjunto de galáxias de Coma, Zwicky percebeu que a massa média das galáxias dentro do conjunto era aproximadamente 160 vezes maior do que a esperada devido a sua luminosidade. Ele concluiu que praticamente toda massa do aglomerado estava em forma de matéria invisível ou matéria escura, que é indetectável, exceto por meio de força gravitacional [12].

Na literatura, o termo matéria escura denota qualquer forma de matéria cuja existência é inferida somente por seu efeito gravitacional. Não se tem conhecimento sobre sua constituição. A matéria dominante é considerada matéria escura fria (CDM - Cold Dark Matter), consistindo-se de partículas que se movem suavemente, de maneira que a densidade de energia CDM é devida, principalmente, à massa de partículas em repouso [13].

Até o início dos anos 1990, os astrofísicos tinham como maior mistério e questão a ser resolvida: o problema da "matéria faltante ou matéria escura". Como a matéria escura tem a característica de se aglomerar, pensava-se, até então, que esta matéria misteriosa desacelerava a expansão do Universo [14, 20, 46, 63, 77, 90]. Na referência [94], o autor

analisa a relação distância luminosidade versus redshift para baixo redshift,  $z \leq 0.1$ , onde a relação é linear e para alto redshift  $z = 0.35 - 0.6$ , no qual a curva se desvia do comportamento linear. A explicação que se dá, é que este comportamento da curva é devido à desaceleração do Universo. Para alguns configurações do modelos, a que ameniza o desvio mantendo o comportamento linear da curva é:  $\Omega_m=2/3$ ,  $\Omega_\Lambda=1/3$  e  $\Omega^1_\alpha=0$ . Em relação à desaceleração do Universo ainda encontramos em [71] um valor de  $\Omega_m = 0.93^{+0.34}_{-0.28}$ .

Após os resultados com supernovas [79, 84], houve uma reviravolta nas interpretações e nas propostas de se tentar explicar o comportamento do Universo - será que o problema foi resolvido? [74]. No trabalho [98] o autor infere sobre a natureza das componentes escuras, matéria e energia. Como existia um aparente conflito entre a densidade de matéria e energia atual,  $\Omega_0$ , e a densidade de matéria (bariônica e não bariônica),  $\Omega_m$  (40% da densidade crítica), é introduzida, em 1984, uma forma de fluido exótico [73, 96], que contribuía com 60% da densidade crítica para resolver a discrepância. Assim, tinha-se o valor do parâmetro desaceleração,  $q_0 = (1/2)\Omega_m - \Omega_\Lambda \approx -0.4$ .

Como cada vez mais se evidenciava que a matéria acumulada era cerca de 30% da densidade crítica, o que traria duas possibilidade de interpretação, ou a densidade de energia total do Universo era subcrítica, com geometria espacial hipérbolica, não Euclidiana, ou o Universo era plano; mas, 70% da densidade crítica está na forma de uma constante cosmológica, também conhecida como energia de vácuo. Foram apresentadas muitas alternativas no sentido de caracterizar a constante cosmológica, como X-matéria [24, 97], Q-matéria [15, 101], cosmologias de lei de potência [60], etc. Daí se seguem também muitas avaliações sobre a constante cosmológica, energia escura, estrutura em larga escala, evolução e futuro do Universo [27, 30, 55, 78, 89].

Vamos discutir aqui alguns dos testes observacionais. São eles: Supernovas, Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (em inglês, Cosmic Microwave Background - CMB) e o Oscilações Acústicas de Bárions (em inglês, Baryon Acoustic Oscillations - BAO) para verificação da expansão acelerada do Universo, para outros testes e mais informações são apresentadas em [102].

---

<sup>1</sup>Onde  $\alpha$  é uma outra forma possível de energia/matéria.

## 3.2 Distribuição de Matéria Escura em Algumas Escalas de Distância

Existem fortes evidências de que a maior parte da massa do Universo se encontra na forma de matéria escura não luminosa e ainda desconhecida, sendo essas evidências tanto no campo astrofísico como no campo cosmológico. A matéria escura tem natureza não bariônica, ou seja, ela não possui átomos e não interage com matéria ordinária através de interação eletromagnética, mas apenas gravitacionalmente. A matéria escura não bariônica inclui neutrinos e pode incluir também entidades hipotéticas tais como axions ou partículas supersimétricas. Ao contrário da matéria escura bariônica, a matéria escura não bariônica não contribui com a formação de elementos na Universo primordial (BBN) e sua presença apenas é revelada via atração gravitacional [18].

### 3.2.1 Matéria Escura em Escala Galáctica

Uma das evidências mais convincentes e mais diretas envolvendo matéria escura está em escalas galáticas. Essas evidências são apresentadas através das observações de *curvas de rotação*<sup>2</sup> de galáxias. A massa de uma galáxia espiral pode ser estimada pelo movimento de rotação das estrelas que estão em certa posição periférica da galáxia. Segundo a teoria Newtoniana, as velocidades de rotação das estrelas, a partir do ponto periférico, deveriam cair de acordo com a lei de Kepler, todavia as observações, como podemos notar na galáxia M33 na Fig. 3.1, mostram que as curvas de rotação mantêm um perfil plano mesmo em distâncias muito além da localização das estrelas periféricas.

Uma das explicações para este fenômeno seria a existência de algum tipo de matéria que não conseguimos observar via interação eletromagnética mas, apenas gravitacionalmente. No estudo da dinâmica de galáxias a distribuição de matéria, tanto escura quanto luminosa, é de fundamental importância para a determinação da estrutura de galáxias e da análise de colisão entre as mesmas. Os perfis característicos das curvas de rotação de galáxias espirais dados pela observação, podem ser reproduzidos com modelos analíticos relativamente simples [16]. A análise da distribuição de matéria em uma galáxia espiral

---

<sup>2</sup>É dada pelo gráfico das velocidades das estrelas e gás como função de sua distância ao centro galáctico.

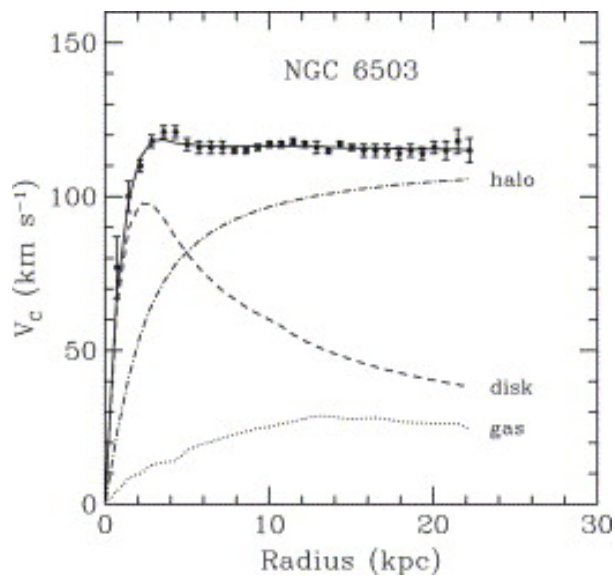


Figura 3.1: Curva de rotação da NGC 6503. As linhas pontilhadas, tracejadas e juntamente tracejadas e pontilhadas, são as contribuições de gás, disco e matéria escura, respectivamente. Figura extraída de [7].

na dinâmica Newtoniana é feita através da velocidade circular e é dada por

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, \quad (3.1)$$

onde,  $M(r) \equiv 4\pi \int \rho(r)r^2 dr$ ,  $\rho(r)$  é o perfil de densidade de massa e deve cair como  $\propto 1/\sqrt{r}$  para o disco ótico. Dados observacionais mostram que a velocidade  $v(r)$  é aproximadamente constante para distâncias maiores que o limite do raio do disco visível, o que implica na existência de um halo com  $M(r) \propto r$  e  $\rho \propto 1/r^2$ .

### 3.2.2 Matéria Escura em Escala de Aglomerado de Galáxias

A hipótese de matéria escura em aglomerados foi cogitada pela primeira vez em 1933 por Zwicky, ao medir velocidade de dispersão de galáxias no aglomerado de Coma, achando-se uma razão massa-luminosidade dada por:  $M/L \approx 400M_{\odot}/L_{\odot}$ . Para aglomerados em equilíbrio dinâmico as energias potencial e cinética média são relacionadas pelo



teorema virial,

$$K + \frac{U}{2} = 0, \quad (3.2)$$

onde  $U \approx -GM^2/R$  é a energia potencial de um aglomerado de raio  $R$ ,  $K \approx 3M \langle v_r^2 \rangle / 2$  é a energia cinética e  $\langle v_r^2 \rangle^{1/2}$  é a dispersão da velocidade na linha de visada das galáxias do aglomerado. Muitas galáxias, mais de 1000, têm sua curva de velocidades

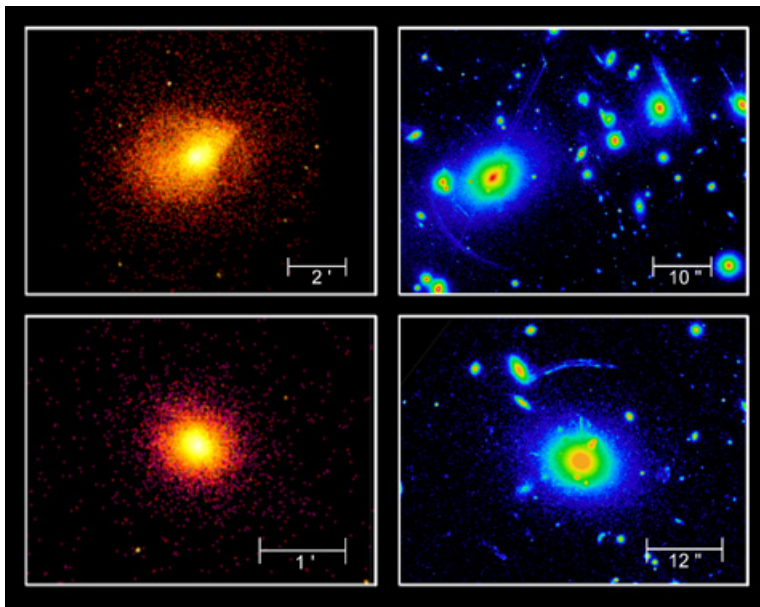


Figura 3.2: Lado esquerdo: imagens dos aglomerados Abell 2390 (superior) e MS2137.3-2353 (inferior) em raio X feitas pelo Chandra. Lado direito: imagens dos mesmos aglomerados feito no ótico pelo Hubble Sapce Telescope Wide Field Planetary Camera 2. Imagem extraída de [33].

conhecidas, essas curvas são construídas ao se medir as linhas de emissão de 21cm do hidrogênio neutro (HI). O resultado indica que  $M/L = (10 - 20)M_{\odot}/L_{\odot}$  em galáxias espirais e elípticas, enquanto esta razão cresce para  $M/L \approx (200-600)M_{\odot}/L_{\odot}$  em galáxias de baixo brilho superficial (LSB) e em anãs. Um aspecto curioso na distribuição de matéria escura em aglomerados e galáxias, é que enquanto a matéria escura aumenta com a distância para galáxias, em aglomerados a distribuição de matéria escura diminui com a distância [88].

### 3.2.3 Matéria Escura em Escala Cosmológica

A existência de radiação de fundo originadas pela propagação de fótons no Universo primordial, devido ao desacoplamento com a matéria, foi predita por George Gamow e colaboradores em 1948 e descoberto por acaso por Arno Penzias e Robert Wilson em 1965. Depois de algumas décadas de esforços experimentais, a RCFM é conhecida, sendo isotrópica em nível de  $10^{-5}$  e obtendo-se um espectro de corpo negro com grande precisão, corresponde a uma temperatura de  $T_0 = 2.7255 \pm 0.0006\text{K}$  [40].

Anisotropias trazem marcas das flutuações, filtradas através da geometria e dinâmica do Universo em expansão, que eventualmente formam as estruturas do Universo. Então, em geral, elas codificam as informações tanto do modelo de formação de estruturas no universo como a cosmologia de fundo. Flutuações na densidade total de matéria, que incluem espécies dissociadas tal qual os neutrinos e possibilidade de matéria escura não colisional, interagem com os fótons através do potencial gravitacional criado por eles. Essas mesmas flutuações crescem por atração gravitacional, isto é, caem em seus próprios poços de potenciais, para eventualmente formarem estrutura em largas escalas no Universo [53].

A fase de oscilação do último espalhamento determina a flutuação efetiva. Desde que a frequência de oscilação sejam dadas por  $w = kc$ , o número de onda crítico  $k = \pi/(c_s\eta_*)$  está essencialmente em escala do horizonte do som  $c_s\eta_*$ . Desde que flutuações como função de  $k$  vão como  $\cos(kc_s\eta_*)$  no último espalhamento, haverá uma série de harmônicos de picos de flutuações da temperatura com  $k_m = m\pi/(c_s\eta_*)$ , para o pico  $m$ . Picos ímpares então representam a fase de compressão (crista de temperatura), enquanto picos pares representam a fase de rarefação (vale de temperatura), dentro do poço de potencial.

Atualmente, as análises das anisotropias da RCFM permitem que testes precisos de modelos cosmológicos sejam realizados e impondo severas restrições aos parâmetros cosmológicos. As observações das anisotropias de temperatura são expressas como:

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.3)$$

onde  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  são os harmônicos esféricos. A variância  $C_l$  de  $a_{lm}$  é dada por

$$C_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2. \quad (3.4)$$

Considerando as flutuações de temperatura sejam Gaussianas, todas as informações contidas nos mapas da RCFM podem ser compactadas em um espectro de potência [11]. Geralmente, analisa-se o gráfico das flutuações de temperaturas em função dos momentos multipolar  $l$ , como mostra a Figura 3.3.

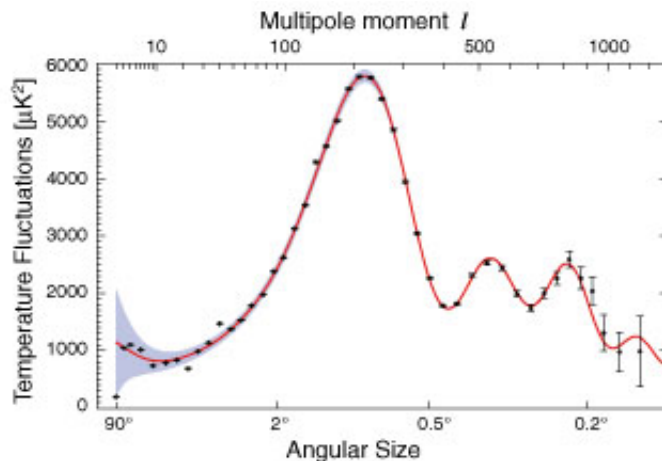


Figura 3.3: O gráfico mostra as flutuações na temperatura da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas detectadas pelo WMAP. NASA/WMAP Science Team.

Uma das principais informações obtidas pela teoria envolvendo RCFM é a posição do primeiro pico. Resultados obtidos pelas observações feitas pelo WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) [61], levam a um valor de  $l_1 = 220.8 \pm 0.7$ , no modelo padrão.

Nesta seção 3.2 pudemos perceber, apesar de não termos esgotadas todas possibilidades de análise observacional, a robustez da evidência da existência de matéria escura no Universo. Na seção seguinte iremos abordar alguns candidatos a este tipo de matéria.

### 3.3 Candidatos à Matéria Escura

Considerando-se as contribuições das frações de todas as formas de densidade de energia, tem-se que a densidade total de energia do Universo hoje é igual ( $\Omega_0 = 1$ ), segundo predição da inflação. Como a nucleossíntese do Big Bang restringe a densidade de bárions bem abaixo da densidade total de energia:  $0.018 < \Omega_b h^2 < 0.023$ , o que implica que deva existir outra forma de matéria que não seja a bariônica [91]. Por outro lado, sabe-se que a maior parte da matéria existente não está na forma de matéria escura, excedendo 30% da densidade total de energia, como bem já foi mencionado na seção anterior. Assim, cerca de 25% da densidade crítica devem estar na forma de partículas não bariônicas,  $\Omega_{nb} = \Omega_m - \Omega_b \approx 0.25$ .

Com o propósito de atenuar a dificuldade no entendimento do que pode constituir a matéria escura, faz necessário aqui separar a matéria escura em: bariônica e não bariônica.

#### 3.3.1 Matéria Escura Bariônica

A matéria escura bariônica interage tanto gravitacional como eletromagneticamente, de maneira que ela pode emitir luz. Como consequência sua energia é dissipada, fazendo com que ela possa se concentrar e vemos essa manifestação nas galáxias onde a matéria escura está concentrada no bojo e/ou nas barras próximos ao seu centro e, no caso das galáxias espirais, ela se encontra presente no disco [9].

- **Bárions escondidos - Gás** Parte de uma quantidade relativamente grande de gás quente emite em raios X em aglomerados, o principal componente bariônico do Universo pode ser gás distribuído difusamente entre galáxias e aglomerados. A detecção desses raios é muito difícil em baixo redshift utilizando os métodos existentes. Todavia, análises da absorção da luz para quasares<sup>3</sup> distantes devido à presença do gás mostram que a quantidade de gás hidrogênio e hélio condiz com as predições da nucleossíntese;

---

<sup>3</sup>Os quasares (Quasi Stellar Radio Sources) foram descobertos em 1960, como fortes fontes de rádio, com aparência óptica aproximadamente estelar, azuladas. São objetos extremamente compactos e luminosos, emitindo mais do que centenas de galáxias juntas [72].

- **Bárions escondidos - MACHOs** Não é excluída a possibilidade que uma quantidade significativa de matéria bariônica possa estar escondida em halos galáticos em forma de objetos de massa sub-solar (MACHO - Massive Astrophysical Compact Halo Object). Para tais objetos, é usada a técnica de microlentes como ferramenta de medição indireta, tendo como propósito monitorar estrelas (entre 1 a 10 milhões de objetos) em uma galáxia satélite, especificamente utilizando as nuvens de magalhães (LMC - Large Magellanic Cloud e SMC - Small Magellanic) [1]. Os resultados obtidos para esses objetos nas nuvens de Magalhães foram em torno de 20% da massa do halo, valor baixo para solucionar o problema da matéria faltante!

### 3.3.2 Matéria Escura Não Bariônica

Matéria escura não bariônica no entanto, consiste plausivelmente em partículas eletricamente neutras, sem interagir e é, portanto, incapaz de se condensar por dissipação de energia. Por outro lado, ela pode evoluir em várias formas sob a influência gravitacional.

Pelo que foi exposto, a origem e a estrutura de partículas não bariônica é um campo muito fértil para estudos, tanto para a cosmologia, para astrofísica como também para a teoria de modelo padrão de partículas. Neste nosso trabalho não temos a pretensão de enveredar no cerne desse arcabouço teórico, todavia abordaremos aqui alguns dos candidatos à esse tipo de matéria. Serão apresentados dois tipos distintos de matéria escura: a quente e a fria. A matéria escura quente é aquela dotada de velocidades relativísticas na época de formação de galáxias. Por outro lado, a matéria escura fria não alcança velocidades relativísticas naquele momento. Esta distinção tem consequências importantes para formação de estruturas. Estudos experimentais de formação da Galáxia podem fornecer um importante indicativo se a matéria escura é quente ou fria. A matéria escura quente apenas pode aglomerar quando ela a velocidades não relativísticas [18]. São muitos os candidatos à matéria não bariônica. Aqui apresentaremos alguns desses candidatos com base em [11].

- **Modelo Padrão de neutrinos** Pelo fato dos neutrinos já serem, de certa forma conhecidos e serem partículas que interagem fracamente WIMP (em inglês, Wea-

kly Interacting Massive Particles), até pouco tempo eles eram considerados ótimos candidatos para a matéria escura. Todavia, quando se efetua a estimativa de neutrinos no universo, levando em conta seus três diferentes tipos, tomando a  $m_i$  como a massa do  $i$ -ésimo neutrino, a densidade total dessas relíquias é calculada como:

$$\Omega_\nu h^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{93eV}. \quad (3.5)$$

Esse cômputo de matéria atinge um valor limitado superiormente por  $\Omega_\nu h^2 \lesssim 0.07$ , o que significa que os neutrinos não representam uma componente de matéria escura dominante.

- **Neutrinos estéreis** Essas partículas hipotéticas são similares a do Modelo Padrão de neutrinos, mas sem interação fraca daquele modelo. Esses neutrinos foram propostos como candidatos à matéria escura em 1993 por Dodelson e Widrow. Restrições cosmológicas e astrofísicas rigorosas aos neutrinos estéreis vêm da análise de suas abundâncias cosmológicas e do estudo de seus processos de decaimento [11].
- **Axions** Partículas introduzidas na tentativa de resolver o problema da violação CP (Carga, Partícula) em física de partículas, axions têm também sido considerado como um candidato à matéria escura. Espera-se que os axions são partículas que interagem fracamente com a matéria ordinária e têm massa muito pequena  $m_a \lesssim 10^{-2}eV$ , limite inferido por experimentos em laboratórios e objetos astrofísicos.
- **Neutralinos** No Modelo Padrão de física de partículas há uma distinção entre bósons e férmions: enquanto bósons são mediadores de interação, os férmions são os constituintes da matéria [11]. WIMPs são partículas estáveis que surgem da extensão supersimétrica do Modelo Padrão - SUSY<sup>4</sup>, com massas tipicamente entre 10 GeV e 10 TeV, nessa teoria se estabelece a simetria entre as partículas bosônicas e fermiônicas. Dos candidatos WIMPs, o mais promissor e adequado à matéria escura é o neutralino. Entre as quatro espécies de neutralinos o mais leve, massa da ordem de 200 GeV [18], permanece sendo excelente candidato à matéria escura.

---

<sup>4</sup>SUSY é a abreviação, em inglês, de supersymmetry.

### 3.4 Energia Escura

Além de confirmar as previsões feitas pela BBN e à existência de matéria escura, medidas dos parâmetros cosmológicos clássicos têm resultado em uma descoberta surpreendente: aproximadamente 70% da densidade de energia total do Universo está na forma de alguma misteriosa formação de energia escura a qual tem pressão negativa. A evidência original para a aceleração do Universo foi feita utilizando supernovas [79, 84], essa descoberta é atualmente ratificada pelas medidas de RCFM, essas medidas indicam que a contribuição da energia de vácuo é  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$  da densidade crítica [58].

Como podemos notar, os resultados advindos das medidas realizadas sobre parâmetros cosmológicos não estão apenas ligados à Cosmologia, porém também à Física. Como foi colocado na seção anterior, existem várias propostas de partículas exóticas no sentido de solucionar o problema de matéria escura em diversas escalas. As estruturas que dão sustentação a estes entes desconhecidos estão ligadas a uma nova Física, um novo modelo padrão de partículas. A possibilidade da energia escura foi uma surpresa para a comunidade científica e ainda permanece sendo um grande mistério. Abordaremos algumas possibilidades de representação da mesma.

- **Constante Cosmológica** No capítulo 2, pontuamos a presença da constante cosmológica nas equações de campo de Einstein, e obtemos equação (2.49), ou seja,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Na forma apresentada na equação anterior, podemos relacionar o termo  $\Lambda$  ao tensor momento-energia e identificá-lo como um certo componente presente no Universo, de maneira que encontra-se

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Considerando um universo isotrópico e homogêneo de FLRW contendo poeira sem pressão e  $\Lambda$ , temos que a dinâmica deste universo dada pela equação de Ray-

chaudhury [88], é

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}a\rho_m + a\frac{\Lambda}{3}, \quad (3.8)$$

este resultado leva a uma lei de força em que a constante cosmológica deve ser repulsiva. Esta característica repulsiva de  $\Lambda$  poderia ser a responsável pela desaceleração do Universo.

- **Quintessência** A quintessência postula a existência de uma nova forma de energia escura, uma configuração de campo escalar, com pressão negativa que então impulsiona a expansão acelerada do Universo de acordo com a relatividade geral. Tal cenário postula um campos escalar  $\phi(t, \vec{x})$  com uma densidade de energia potencial  $V(\phi)$ . A equação do movimento para componentes homogêneos do campo é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.9)$$

onde  $H$  é a razão da expansão, o ponto representa a derivada com respeito ao tempo e a linha representa a derivada em relação a  $\phi$ . Nesta teoria a expansão serve como um termo de atrito que impede que o campo escalar atinja o seu mínimo. A pressão no campo é  $p = (1/2\dot{\phi}^2) - V(\phi)$ , e a densidade de energia é dada por  $\rho = (1/2)\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ . Assim, se o campo evolui forma suficientemente lenta, então  $w < -1/3$  e a aceleração cósmica pode acontecer.

- **Gás de Chaplygin** Uma abordagem diferente para a energia escura é apresentada pelo gás de Chaplygin, ele tem a equação de estado dada por [57]

$$p_c = -A/\rho_c, \quad (3.10)$$

onde  $p_c$  e  $\rho_c$  são, respectivamente, a pressão e a densidade de energia em um referencial co-móvel, com  $\rho_c > 0$  e  $A$  é uma constante positiva. Uma das interessantes características da equação de estado, dada por 3.12, é o fato dela trazer a possibilidade de conexão com a teoria de cordas, além do mais, o gás de Chaplygin é um



fluido que admite uma generalização supersimétrica. A equação da conservação da energia, escrita na forma,  $dE = -pdV \Rightarrow d(\rho a^3) = -pd(a^3)$  leva ao resultado

$$p_c = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}, \quad (3.11)$$

onde  $B$  é uma constante de integração. Dessa maneira, o gás de Chaplygin se comporta como poeira sem pressão em tempos remotos e como uma constante cosmológica durante o período posterior.

O parâmetro de Hubble para um Universo contendo matéria escura fria e gás de Chaplygin é dado por

$$H(z) = H_0 \left[ \Omega_m(1+z)^3 + \frac{\Omega_m}{\kappa} \sqrt{\frac{A}{B} + (1+z)^6} \right]^{1/2}, \quad (3.12)$$

onde  $\kappa = \rho_{0m}/\sqrt{B}$ .

Uma das características mais interessantes no modelo do gás de Chaplygin, está na possibilidade de transição entre a fase dominada pela matéria e fase dominada pela constante cosmológica em um Universo composto por matéria escura fria e o gás de Chaplygin. Uma generalização do gás de Chaplygin (GCG) é proposta [8]. Uma nova equação de estado é adotada,  $p = -A/\rho^\alpha$ , com  $0 < \alpha \leq 1$ . Essa nova sugestão do gás Chaplygin, além de apresentar a possibilidade de transição da fase dominada pela matéria para uma fase dominada por uma constante, dada por matéria dura  $w = 1$ , traz uma maior possibilidade de ser bem sucedido no que diz respeito às confrontações teóricas e testes observacionais, devido à extensão dos valores de  $\alpha$ .

- **Gravidade Alternativa** Até aqui vimos algumas possibilidades de representantes da misteriosa componente que impõe uma expansão acelerada ao Universo. Por exemplo, campo escalar, gás exótico, constante cosmológica entre outros. Todos esses candidatos têm um ponto em comum, estão alicerçados na Relatividade Geral. Todavia, podemos fazer a seguinte pergunta: Será que realmente existe um "fluido" com a característica de acelerar o Universo, ou as leis da gravidade, neste

caso a Relatividade Geral, falham na representação do Universo em largas escalas de distâncias? Assumiremos aqui a segunda hipótese. As teorias que adotam esta hipótese são denominadas teorias  $f(R)$  da gravidade, onde  $f(R)$  é uma função do escalar de Ricci. As teorias  $f(R)$  explicam a fase acelerada do Universo observada hoje através da dinâmica gravitacional. Um exemplo bem conhecido, envolve uma dependência linear com o escalar de Ricci, é dado pela Lagrangiana de Einstein-Hilbert [18],

$$S_{EH} = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m, \quad (3.13)$$

e de forma generalizada, é dada por

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m. \quad (3.14)$$

Pode-se notar, comparando as duas últimas equações, que a primeira é um caso particular da segunda.

Uma outra teoria que envolve gravidade modificada é a conhecida *Teoria de Rastall*. Na teoria da gravitação de Einstein, uma suposição fundamental é que a divergência covariante do tensor momento-energia é igual a zero, ou seja,  $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ . É assumido na teoria de Rastall, que o tensor momento-energia não se conserva,  $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} \neq 0$ . Nela se estabelece uma dependência da divergência covariante do tensor momento-energia com o escalar de Ricci, dada por:  $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \kappa R^{;\nu}$ , onde  $\kappa$  é uma constante [81]. O termo do lado direito desta equação desaparece quando o espaço-tempo é plano, todavia, quando a curvatura do espaço-tempo passa a ter um papel importante, aquele termo é não nulo. Devido à forma divergência do tensor momento-energia implementada pela teoria de Rastall, as equações de campo desta teoria são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{\gamma - 1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (3.15)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\gamma - 1}{2} T^{;\nu}. \quad (3.16)$$

onde  $T$  é o traço do tensor momento-energia e  $\gamma$  é uma constante adimensional conectada com  $\kappa$ . Podemos notar que quando  $\gamma=1$ , as equações (3.15) e (3.16) se reduzem às equações da Relatividade Geral.

No próximo capítulo do nosso trabalho, trataremos especificamente de características e resultados envolvendo GCG.

# Capítulo 4

## O modelo de gás de Chaplygin e as restrições em parâmetros cosmológicos

### 4.1 Introdução

Nas últimas décadas muitos dados observacionais, tanto astrofísicos como cosmológicos, vêm ratificando a distribuição de componentes do Universo com as seguintes proporções:  $\sim 30\%$  de matéria escura, que aglomera e é responsável pela formação de estrutura em largas escalas, e  $\sim 70\%$  de energia escura, que é responsável pela atual expansão acelerada do Universo. A composição química da matéria bariônica é aproximadamente dada por 75% de hidrogênio, 25% de hélio e traços de elementos pesados. Além disso, a razão entre bárions e fótons é de um bárion por  $10^9$  fótons [70]. Como vimos no capítulo 3, muitas são as possibilidades de modelos que tentam caracterizar essas duas componentes extremamente abundantes em nosso Universo e que, também por isso, despertam um grande interesse científico no estudo das mesmas.

Nosso objetivo neste capítulo, é averiguar até que ponto tentativas de representação da componente responsável pela expansão acelerada do Universo estão em conformidade com os dados observacionais fornecidos por vários experimentos. Para o citado propósito, utilizaremos um modelo de fluido barotrópico em que a pressão  $p$  e a densidade de energia  $\rho$  são relacionados  $p = f(\rho)$ . O modelo de fluido que trabalharemos aqui é denominado de gás de Chaplygin<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Este nome dado ao gás é uma homenagem feita ao físico, matemático e engenheiro mecânico russo,

Na teoria da Quintessência [15, 82], sugere-se que a energia escura do Universo é dominada por um potencial de um campo escalar  $\phi$  que evolui suavemente para seu valor mínimo  $V=0$ . O gás de Chaplygin pode ser uma alternativa para a Quintessência [57], onde é mostrado que o potencial  $V(\phi)$  é ligado ao parâmetro  $A$  da equação de estado do GC. A equação de estado do gás de Chaplygin é dada por [57]

$$p_c = -A/\rho_c, \quad (4.1)$$

onde  $p_c$  e  $\rho_c$  são, respectivamente, a pressão e a densidade de energia em um referencial co-móvel, com  $\rho_c > 0$  e  $A$  é uma constante positiva.

Um dos aspectos mais interessantes do gás de Chaplygin e que motiva a nossa escolha por este modelo na representação do Universo em expansão acelerada ( $p < 0$ ), é o fato da possibilidade de unificação do setor escuro, matéria e energia escuras, como será mostrado mais adiante.

Outros modelos também possuem características marcantes. Teoricamente, um ponto importante relacionado à constante cosmológica é que sua pressão e sua densidade de energia estão ligadas por  $p = -\rho$ , ou seja, essa pressão negativa é uma condição necessária para causar uma expansão acelerada do Universo, além do mais, ela está relacionada à flutuações de vácuo. Na Quintessência, por sua vez, a expansão acelerada do Universo é promovida através de um campo escalar que pode descrever uma energia de vácuo *efetivamente* dinâmica. Caso a energia do vácuo não varie com o tempo ou com o espaço, então ela não é dinâmica, sendo representado pela constante cosmológica [18].

Neste capítulo, descreveremos o modelo do gás de Chaplygin e o confrontaremos com alguns testes de base. Além do mais, faremos uma análise de dados baseada na estatística Bayesiana para estimar os parâmetros  $\bar{A}$  e  $\alpha$  do modelo.

---

Sergey Alexeyevich Chaplygin.

## 4.2 Gás de Chaplygin

Ao estudar uma cosmologia na métrica de FLRW, dado por (2.34), de um Universo preenchido por gás de Chaplygin, temos que a equação de Friedmann é

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.2)$$

levando em consideração a lei de conservação da energia,

$$dE = -pdV \Rightarrow d(\rho a^3) = -pd(a^3) \quad (4.3)$$

encontramos, por integração, como resultado

$$\rho_c = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}, \quad (4.4)$$

onde  $B$  é uma constante de integração. É fácil notar, observando a equação (4.4), que gás de Chaplygin se comporta como poeira sem pressão em tempos remotos e tipo uma constante cosmológica durante o período posterior, pois

$$\text{se } a^6 \ll B/A \longrightarrow \rho \sim \frac{\sqrt{B}}{a^3}, \quad \text{termo de matéria} \quad (4.5)$$

$$\text{se } a \gg 1 \longrightarrow \rho \sim \sqrt{A}, \quad \text{termo tipo constante}, \quad (4.6)$$

esse mecanismo de transição de um tipo de conteúdo no outro, é o que abaliza o arcabouço teórico para a possibilidade de uma unificação do setor escuro.

Uma das interessantes características da equação de estado, dada por (4.1), é o fato dela trazer a possibilidade de conexão com a teoria de cordas [39, 49, 92], além do mais, o gás de Chaplygin é um fluido que admite uma generalização supersimétrica.

Uma generalização do gás de Chaplygin (GCG) é proposta por Bento [8]. Uma nova equação de estado é adotada,  $p_c = -A/\rho_c^\alpha$ , em princípio, com  $0 < \alpha \leq 1$ . Essa nova sugestão do gás Chaplygin amplia a abordagem relacionada à transição da fase dominada pela matéria para uma fase dominada por uma constante.

Efetuiremos agora o cálculo para encontrarmos o parâmetro  $\rho$  em função do fator de escala  $a$ . O procedimento é similar ao realizado para encontrarmos a equação (4.4). Como a equação de estado é dado por

$$p_c = -A/\rho_c^\alpha, \quad (4.7)$$

da equação de conservação, temos

$$\dot{\rho}_c + 3H(p_c + \rho_c) = 0, \quad (4.8)$$

para facilitar a integração, ao invés de trabalharmos com a derivada em relação ao tempo cósmico, representada pelo ponto, tomaremos a derivada referente ao fator de escala, de maneira que podemos escrever:

$$\frac{d\rho}{da} + \frac{3}{a}(p_c + \rho_c) = \frac{d\rho}{da} + \frac{3}{a}\rho_c(w_c + 1) = 0, \quad (4.9)$$

onde fizemos  $w_c = p_c/\rho_c = -A/\rho_c^{\alpha+1}$ . Integrando a equação (4.9), temos

$$\int \frac{\rho_c^\alpha d\rho_c}{3(\rho_c^{\alpha+1} - A)} = - \int \frac{da}{a}, \quad (4.10)$$

o resultado desta integral, após uma mudança de variável, é

$$\rho_c(a) = \rho_{c0} \left[ \bar{A} + \frac{(1 - \bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (4.11)$$

onde  $\bar{A} = A/\rho_{c0}^{\alpha+1}$  e  $\rho_{c,0}$  é a densidade do gás de Chaplygin hoje. A partir da equação (4.11) pode-se constatar que a motivação original por trás do GCG, ou seja, um fluido que evolui de um comportamento de matéria em tempos remotos para uma densidade constante em tempos posteriores, ocorre apenas se  $\alpha \geq -1$ .

Quando consideramos um modelo onde o conteúdo de energia é dado pela radiação e

bárions, além do gás de Chaplygin, as equações de Friedmann tomam a forma dada por

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \left[ \Omega_{bo}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{c0} \left( \bar{A} + (1-\bar{A})(1+z^{3(1+\alpha)}) \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right], \quad (4.12)$$

onde  $H_0$  é a constante de Hubble,  $z$  é o redshift, que está relacionado com o fator de escala  $a = 1/(1+z)$ . Assumimos aqui, uma base espacialmente plana, de acordo com os dados provenientes do WMAP e consideramos o fato de  $\Omega_{c0} + \Omega_{b0} + \Omega_{r0} = 1$ . O parâmetro de Hubble hoje pode ser expresso como  $H_0 = 100h \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ , onde  $h \approx 0.7$  (adotando a região de  $0 \leq h \leq 1$  como *prior* para nossa análise Bayesiana).

A perspectiva de unificação do setor escuro utilizando um único fluido, apesar de ser interessante e promissor, apresenta algumas dificuldades de diferentes pontos de vista. No que diz respeito à parte teórica, se a energia de vácuo não é responsável pela energia escura, deve-se explicar como ela contribui para a gravidade. Do ponto de vista observacional, introduzindo a equação (4.7), obtemos para a velocidade do som do GCG a seguinte expressão

$$c_s^2(a) = -\alpha w_c(a), \quad \text{se } a=1 \longrightarrow c_{s0}^2 = \alpha \frac{A}{\rho_{c0}^{\alpha+1}} = \alpha \bar{A}, \quad (4.13)$$

o parâmetro  $\alpha$  tende a valores ligeiramente negativos, como mostraremos a partir dos testes de bases que serão desenvolvidos na próxima seção, o que é inconveniente se olharmos a equação (4.13), pois  $c_s^2$  assume valores negativos.

Na próxima seção, apresentaremos alguns testes observacionais de base no sentido de confrontá-los com o arcabouço teórico trazido pelo gás de Chaplygin. Nossa perspectiva é a de colocar à prova a robustez do GCG e, ao mesmo tempo, estabelecer restrições para parâmetros cosmológicos.

### 4.3 Testes de Base

Para os dados da idade diferencial, conectados com a evolução da idade de galáxias velhas que têm envolvido passivamente, levando a valores de  $H(z)$  em redshifts específicos, foram usados 13 dados observacionais [56, 67, 69, 93, 95, 103]. Recentemente, uma



compilação de 21 dados foi considerada [38]. A relação fundamental é

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (4.14)$$

Uma análise do modelo de gás de Chaplygin, com uma amostra contendo 13 dados, foi realizada na referência [36], levando à conclusão que valores negativos de  $\alpha$  são ligeiramente favorecidos. Em nossas análises posteriores usamos o conjunto de 21 dados compilados na referência [38]. Neste contexto, resultados apontam para um favorecimento do cenário de unificação do setor escuro, com um valor do parâmetro  $\alpha \approx 0$  [36].

As grandezas utilizadas no teste de supernovas Ia são, mais especificamente, o redshift e a magnitude. O redshift indica que, quanto maior o deslocamento espectral de linhas de absorção ou emissão, a mais tempo esta radiação tem viajado até chegar a nós. Já a magnitude é uma escala logarítmica de medida do fluxo de radiação em um receptor. Definimos magnitude bolométrica<sup>2</sup> *aparente* como,

$$m \equiv -2.5 \log_{10}(f) + C, \quad (4.15)$$

onde  $C$  é uma constante que define a escala. Por sua vez, o fluxo pode ser escrito em função  $f = L/4\pi D_L^2$ , de maneira que temos

$$m = -2.5 \log_{10}(L/4\pi D_L^2) + C, \quad (4.16)$$

onde  $D_L$  é a *distância luminosidade*. A magnitude bolométrica *absoluta* será a magnitude quando a fonte estiver a uma distância luminosidade de 10pc. Assim,

$$M = -2.5 \log_{10}(L/4\pi(10pc)^2) + C. \quad (4.17)$$

A diferença entre as magnitudes aparente e absoluta é conhecida como *módulo de distância*

---

<sup>2</sup>Magnitude bolométrica se refere à integração do fluxo em todo o espectro.

$(\mu)$ , que resulta em

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{D_L}{1 \text{Mpc}} \right) + 25, \quad (4.18)$$

$$D_L = \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (4.19)$$

onde  $E(z') = H(z')/H_0$ .

Para os dados de SNIa, têm-se dois problemas principais. O primeiro está relacionado com a escolha da amostra, pois existem muitos conjuntos diferentes de dados, obtidos por técnicas distintas. Em alguns casos, esses diferentes conjuntos podem apresentar resultados muito distintos. O segundo problema diz respeito à calibração, na qual são utilizados dois métodos: um em Cosmologia, qual leva em conta altos  $z$  (Salt2); e o outro em métodos astrofísicos, válido para pequenos  $z$  [62]. Em alguns casos, empregar diferentes calibrações pode levar também a diferentes resultados. Por tudo isso, a análise de SNIa é muito delicada. Aqui, usamos a amostra Union [3]. A viabilidade do GCG como um modelo de unificação do setor escuro foi primeiro analisado no contexto de supernova na referência [35], obtendo posteriormente resultados que indicam valores negativos para o parâmetro  $\alpha$  [22].

A posição do primeiro pico do espectro da RCFM é mais um complexo teste. Ele está ligado às oscilações do plasma de bárions e fótons no período da recombinação, tendo suas perturbações transportadas por ondas sonoras, com velocidades  $c_s$ , dependente da razão entre os componentes do plasma. Da mecânica dos fluidos, tem-se que

$$\frac{c_s}{c} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}, \quad (4.20)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Considerando que os bárions não contribuem para a pressão, temos

$$p = \frac{1}{3} \rho_\gamma, \quad (4.21)$$

e, então

$$\delta p = \frac{1}{3} \delta \rho_\gamma. \quad (4.22)$$

A densidade total do plasma será

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_b, \quad (4.23)$$

onde se obtém

$$\delta \rho = \delta \rho_\gamma + \delta \rho_b. \quad (4.24)$$

Sendo que a densidade de bárions cai com  $a^{-3}$ , enquanto a de fótons cai com  $a^{-4}$ , então encontramos

$$\delta \rho_b = -3(1+z)\rho_b, \quad (4.25)$$

$$\delta \rho_\gamma = -4(1+z)\rho_\gamma. \quad (4.26)$$

Com estes resultados e considerando a equação (4.24), chegamos a

$$\frac{c_s}{c} = \left[ 3 + \frac{9\rho_b}{4\rho_\gamma} \right]^{-1/2}. \quad (4.27)$$

Para efetuar o cálculo da posição do primeiro pico, utilizamos a equação abaixo

$$l_1 = l_A(1 - \phi_1). \quad (4.28)$$

Uma análise numérica detalhada leva às seguintes fórmulas para os parâmetros funda-

mentais desta quantidade [28, 29, 54, 83]

$$\phi_1 = 0.267 \left( \frac{\Omega_{r0} z_{ls}}{0.3(\Omega_{m0} + \Omega_{b0})^2} \right)^{0.1}, \quad (4.29)$$

$$g_1 = 0.0783 \left( \omega_{b0}^{-0.238} \right) \left( 1 + 39.5 \omega_{b0}^{0.763} \right)^{-1}, \quad (4.30)$$

$$g_2 = 0.560 \left( 1 + 21.1 \omega_{b0}^{1.81} \right)^{-1}, \quad (4.31)$$

$$z_{ls} = 1048 \left( 1 + 0.00124 \omega_{b0}^{-0.738} \right) \left( 1 + g_1 \omega_{m0}^{g_2} \right), \quad (4.32)$$

$$l_A = \pi \frac{I_1}{I_2}, \quad (4.33)$$

$$I_1 = \int_0^{z_{ls}} \frac{dz}{E(z)}, \quad I_2 = \int_{z_{ls}}^{\infty} \frac{c_s^2(z)}{E(z)}, \quad (4.34)$$

$$c_s^2 = \left( 3 + \frac{9 \Omega_{b0}}{4 \Omega_{\gamma 0}} (1+z) \right)^{-1/2}. \quad (4.35)$$

Usamos os seguintes valores para os diferentes parâmetros de densidade:

$$\omega_{i0} = \Omega_{i0} h^2, \quad \Omega_{r0} h^2 = 4.116 \times 10^{-5}, \quad \Omega_{b0} h^2 = 0.02258, \quad \Omega_{m0} h^2 = \Omega_{dm0} + \Omega_{b0}. \quad (4.36)$$

Das observações, tem-se:  $l_1 = 220.08 \pm 0.7$ . Investigações neste âmbito, mostram que modelos de GCG são modelos com alto poder de predição quando comparados com as anisotropias RCFM [4], apresentando valores do parâmetro  $\alpha \approx 0$  [10].

As oscilações acústicas bariônicas são devidas ao efeito de oscilações no plasma de bárions e fótons no momento do desacoplamento, em aproximadamente  $z=1090$ . Este efeito é quantificado pela seguinte expressão [32]:

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{\Omega_{m0}}}{E(z)^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{1}{z_b} \int_0^{z_b} \frac{dz}{E(z)} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.37)$$

Neste trabalho usamos os dados do WiggleZ Dark Energy Survey [6].

O GCG comporta-se como poeira no passado. Por isso, deveremos identificar uma componente de matéria escura em GCG no sentido de usar a equação (4.37) nas análises. Existem diferentes indicações nesse sentido na literatura. Adotaremos aqui a decomposi-

ção proposta em [66], onde a decomposição da matéria escura é dada por,

$$\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0} \left(1 - \bar{A}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (4.38)$$

## 4.4 Ferramentas da Análise Estatística

Nas últimas décadas, a aquisição de grandes conjuntos de dados do Universo provocou uma forte transição na Cosmologia: ela deixa de ser uma ciência faminta por dados, para tornar-se uma ciência dirigida pelos dados, sendo necessário o desenvolvimento de ferramentas estatísticas cada vez mais sofisticadas [99]. Juntamente com o crescimento do número de dados são apresentadas novas técnicas e equipamentos sofisticados que impulsionam a melhoria da precisão dos dados obtidos. Principalmente após análises do espectro de anisotropias da radiação cósmica de fundo em microondas, diz-se frequentemente que a Cosmologia entrou numa era de precisão, a qual requer um necessário conhecimento das incertezas e intervalos de confiança das medidas, que vem a ser uma sentença própria da Estatística. No âmbito da Cosmologia Observacional, temos os dados e desejamos tratá-los de alguma maneira, sendo os problemas da análise de dados geralmente problemas inversos, que podemos classificar como:

- Tese de hipótese;
- Estimativa de parâmetros;
- Seleção de modelos.

### 4.4.1 Probabilidade

O estudo da Estatística se divide entre *Frequentistas* e *Bayesianos* [47, 99]. Para frequentistas, probabilidade  $\mathcal{P}$  está relacionada com frequência de ocorrência

$$\mathcal{P} = \frac{n}{N} \quad (4.39)$$

onde  $n$  é o número de sucessos dentre  $N$  tentativas. A definição mais rigorosa seria o número (4.28), quando a quantidade de tentativas independentes tendem a infinito. Para os Bayesianos, a probabilidade é interpretada como o *grau de confiança em uma hipótese*. Consideremos uma quantidade de interesse desconhecida  $\theta$ . A informação de que dispomos sobre  $\theta$ , resumida probabilisticamente através de  $\mathcal{P}(\theta)$ , pode ser aumentada observando-se uma quantidade aleatória  $X$  relacionada com  $\theta$ . A distribuição amostral  $\mathcal{P}(x|\theta)$  define esta relação [31]. A ideia de que após observar  $X = x$  a quantidade de informação sobre  $\theta$  aumenta, leva à necessidade de quantificar esse aumento de informação, e esta quantificação é feita pela probabilidade Bayesiana, dada por

$$\mathcal{P}(\theta|x) = \frac{\mathcal{P}(\theta, x)}{\mathcal{P}(x)}. \quad (4.40)$$

Dada uma variável aleatória  $x$ ,  $\mathcal{P}(x)$  será a probabilidade de  $x$  assumir um valor específico - esta função define uma distribuição de probabilidades. Caso  $x$  tenha espectro contínuo,  $\mathcal{P}(x)dx$  é interpretado como a densidade de probabilidade, ou seja, a probabilidade de uma variável aleatória ter um valor entre  $x$  e  $x + dx$ . Frequentistas consideram distribuição de probabilidades de eventos, enquanto Bayesianos consideram hipóteses como eventos. Em ambas abordagens, as seguintes regras se aplicam:

1.  $\mathcal{P}(x) \geq 0$ ;
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{P}(x) = 1$ <sup>3</sup>;
3. Para eventos independentes,  $\mathcal{P}(x_1 \cup x_2) \equiv \mathcal{P} = \mathcal{P}(x_1) + \mathcal{P}(x_2)$ ;
4. Em geral,  $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_1)\mathcal{P}(x_2|x_1)$ .

No quarto ponto, observamos que a probabilidade de  $x_1$  e  $x_2$  ocorrerem é dada pela probabilidade  $x_1$  vezes a probabilidade condicional de  $x_2$ , caso  $x_1$  já tenha acontecido. Para eventos que são independentes tem-se que  $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_2)$  logo,  $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_1)\mathcal{P}(x_2)$ . Como a probabilidade de que dois eventos ocorram pode ser escrita como  $\mathcal{P}(x_1, x_2)$  ou  $\mathcal{P}(x_2, x_1)$ , se substituirmos  $x_1$  por  $D$  e  $x_2$  por  $H$ , chegamos ao *teorema de*

---

<sup>3</sup>Para o caso de uma distribuição discreta, o símbolo de integral é substituído pelo de somatório.

*Bayes:*

$$\mathcal{P}(H|D) = \frac{\mathcal{P}(H)\mathcal{P}(D|H)}{\mathcal{P}(D)}, \quad (4.41)$$

onde  $H$  refere-se ao modelo (hipótese), e  $D$  aos dados. O termo  $\mathcal{P}(D|H)$  é conhecido como verossimilhança, e nos diz a probabilidade dos dados que temos, admitindo que a hipótese  $H_i$  é verdadeira.  $\mathcal{P}(H)$  é chamado de *prior*, onde acrescentamos informações que temos a priori, e  $\mathcal{P}(D)$  nos dá a normalização. Assim,  $\mathcal{P}(H|D)$  será a probabilidade posterior, a referente ao modelo, tendo ocorrido os dados  $D$ . A estatística Bayesiana é uma poderosa ferramenta, com a qual podemos analisar o modelo tomando diferentes *priors*, marginalizar sobre parâmetros e obter função de distribuição de probabilidades de hipóteses.

#### 4.4.2 Marginalização

Até aqui construímos uma rápida abordagem da estatística Bayesiana levando em consideração uma distribuição de probabilidade como função apenas de uma variável. Em geral, pode-se ter uma distribuição multivariada  $\mathcal{P}(x, y)$ , sendo ela a probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias, podemos estudar a distribuição de probabilidades de uma variável individual, integrando a distribuição de probabilidade multivariada sobre todos os possíveis valores de outra.

Vamos considerar o modelo estudado por nós neste trabalho, onde encontram-se três parâmetros a serem analisados, ou seja,  $\theta = \{h, \alpha, \bar{A}\}$  assim, obtivemos a distribuição de probabilidade individual do parâmetro  $h$  fazendo

$$\mathcal{P}(h) = \int \int d\alpha d\bar{A} \mathcal{P}(h, \alpha, \bar{A}). \quad (4.42)$$

Da mesma maneira, pode-se obter as probabilidades para as outras variáveis.

### 4.4.3 Estimativa de parâmetros

Para compararmos os resultados teóricos com os dados observacionais, utilizamos o parâmetro  $\chi^2$ . A qualidade dos resultados teóricos está caracterizada pela estatística do parâmetro  $\chi^2$ , que é dado por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{te} - \mu_{ob})^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.43)$$

onde  $\mu_i^{te}$  é a predição teórica para a quantidade  $\mu$ , enquanto  $\mu_i^{ob}$  é o dado observacional correspondente, com um erro de  $\sigma_i$ . Para o termo  $\chi^2$ , podemos construir a função distribuição de probabilidade (PDF, probability distribution function), ou seja,

$$\mathcal{P}(h, \alpha, \bar{A}) = C \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \quad (4.44)$$

é assumido que os dados são independentes e normalmente distribuídos. Como é indicado na equação (4.32), a PDF depende de três parâmetros livres:  $h, \alpha$  e  $\bar{A}$ , caracterizando uma função em três dimensões. Para encontrarmos a PDF em uma ou duas dimensões, podemos fazer a marginalização dos parâmetros que não estarão em foco em determinada análise.

Como já dissemos, calcularemos o  $\chi^2$  separadamente para cada conjunto de dados. O  $\chi^2$  total, para cada conjunto dos quatro testes observacionais, será a soma dos  $\chi^2$  separados. Considerando a forma exponencial da PDF, eq.(4.32), o PDF total será dado pelo produto entre as PDF individuais.

Os intervalos considerados para cada um dos parâmetros livres são cruciais para as estimativas finais. Para  $\bar{A}$ , em todos os casos, o intervalo considerado é  $0 \leq \bar{A} \leq 1$ . Para  $h$ , consideramos tanto  $\alpha$  quanto  $\bar{A}$  *priors*, isto é, para o primeiro *prior* fixamos valores para  $h$  enquanto para o último integramos no intervalo  $0 \leq h \leq 1$ . Para  $\alpha$ , a situação é mais complexa, desde que podemos considerar duas possibilidades:  $\alpha > -1$ , no sentido de assumir uma transição de poeira no passado para uma constante cosmológica no futuro,



ou  $\alpha > 0$ , no sentido de assumir o quadrado da velocidade do som positiva. Nossa meta aqui é mostrar que valores negativos para  $\alpha$  são preferidos. Portanto, focamos nossas análises no *prior*  $\alpha > -1$ . Contudo, por causa da completude, também realizaremos uma análise estatística deixando  $\alpha$  variando arbitrariamente entre valores positivos e negativos.

Avaliaremos a PDF em uma dimensão para  $\bar{A}$  e  $\alpha$  para os quatro testes listados separadamente, depois combinaremos todos eles. Os resultados são mostrados nas figuras de 4.1 a 4.6.

### Prior delta sobre $h$

Nas Figuras 4.1 e 4.2, são mostradas as distribuições de probabilidade unidimensional para  $\alpha$  e  $\bar{A}$  para uma escolha específica de  $h = h^*$ . Os valores escolhidos para  $h^*$  são mostrados nos quatro painéis.

Cada painel corresponde a um conjunto de dados. Todas as curvas têm sido normalizadas como se segue

$$\text{PDF}(\alpha) = \frac{\int_0^1 \mathcal{P}(h^*, \alpha, \bar{A}) d\bar{A}}{\int_0^1 \int_{-1}^{\infty} \mathcal{P}(h^*, \alpha, \bar{A}) d\alpha d\bar{A}} \quad (4.45)$$

e

$$\text{PDF}(\bar{A}) = \frac{\int_{-1}^{\infty} \mathcal{P}(h^*, \alpha, \bar{A}) d\alpha}{\int_0^1 \int_{-1}^{\infty} \mathcal{P}(h^*, \alpha, \bar{A}) d\alpha d\bar{A}}. \quad (4.46)$$

Exceto para os dados de  $H(z)$ , vemos que a verossimilhança máxima ocorre para as hipersuperfícies com valores de  $\alpha$  negativos.

### Prior plano sobre $h$

Para esta análise, utilizaremos  $h$  variando dentro do intervalo  $0 < h < 1$ . A PDF unidimensional final para  $\alpha$  e  $\bar{A}$ , será calculada formalmente por

$$\text{PDF}(\alpha) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \mathcal{P}(h, \alpha, \bar{A}) dh d\bar{A}}{\int_0^1 \int_{-1}^{\infty} \int_0^1 \mathcal{P}(h, \alpha, \bar{A}) dh d\alpha d\bar{A}}, \quad (4.47)$$

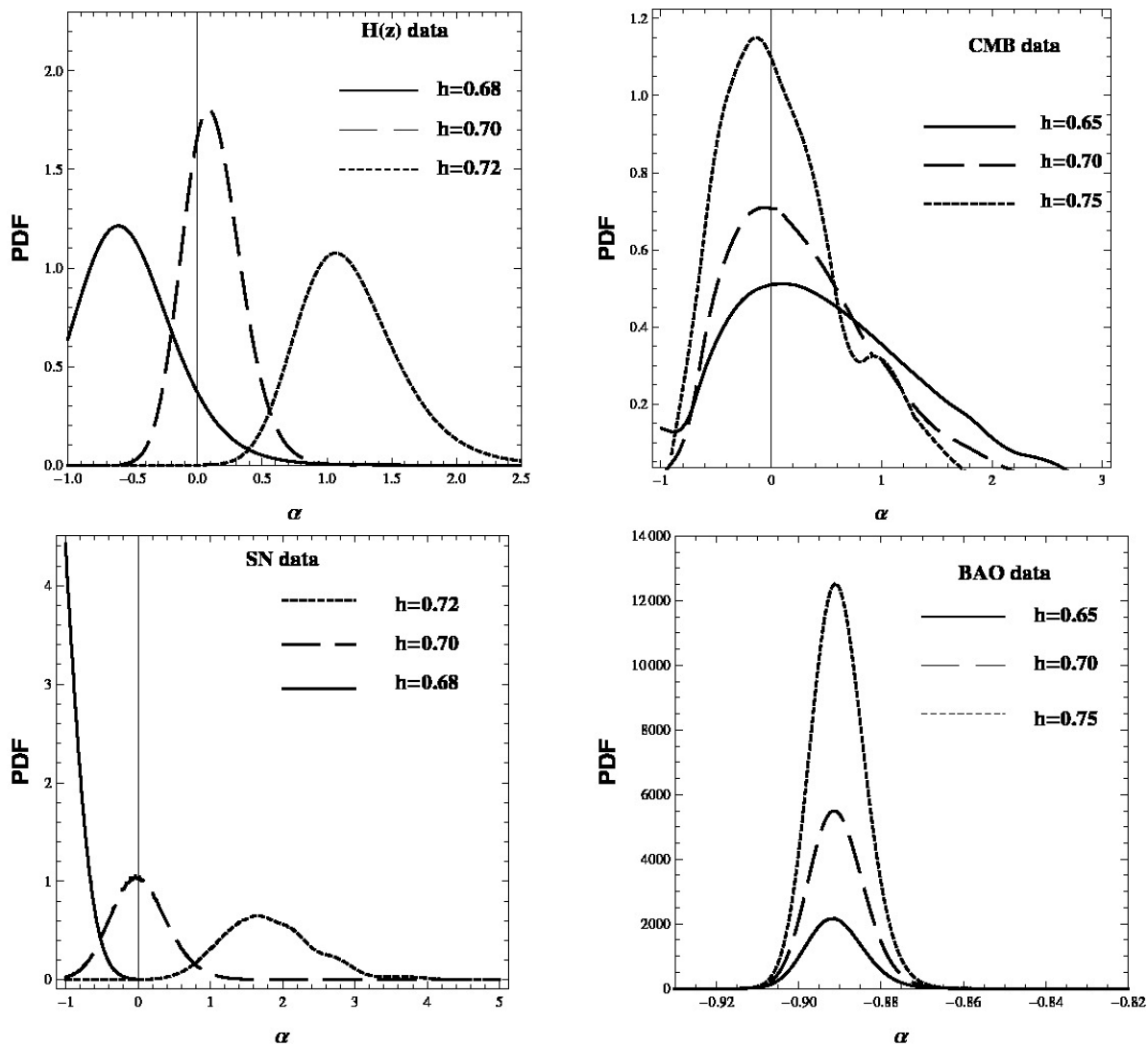


Figura 4.1: PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\alpha$  sob a restrição  $\alpha > -1$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel inferior esquerdo) e BAO (painel inferior direito).

e

$$\text{PDF}(\bar{A}) = \frac{\int_0^1 \int_{-1}^{\infty} \mathcal{P}(h, \alpha, \bar{A}) dh d\alpha}{\int_0^1 \int_{-1}^{\infty} \int_0^1 \mathcal{P}(h, \alpha, \bar{A}) dh d\alpha d\bar{A}}. \quad (4.48)$$

É crucial restringir o intervalo de  $\alpha$ . Se considerarmos o cenário padrão para a formação de estrutura, no contexto da RG sem perturbações entrópicas, requer que  $\alpha \geq 0$ . Contudo, se a única restrição é impor uma transição de aceleração para desaceleração, então a restrição é dada por  $\alpha > -1$ , já que para  $\alpha < -1$  o Universo acelera no passado, e hoje ele estaria desacelerando. Alternativamente, podemos deixar o valor de  $\alpha$  livre com o

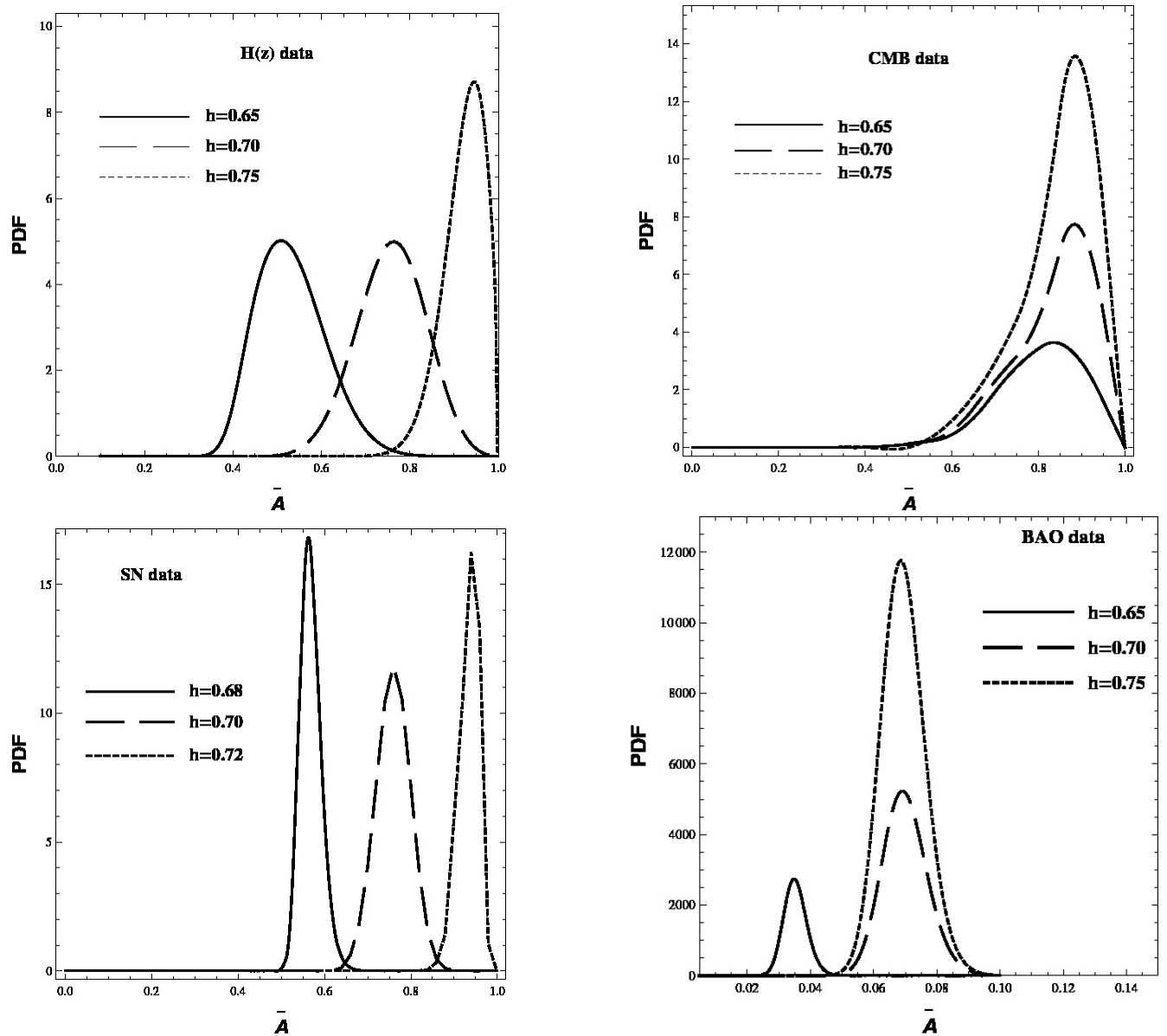


Figura 4.2: PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\bar{A}$  sob a restrição  $\alpha > -1$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel inferior esquerdo) e BAO (painel inferior direito).

intuito de inferirmos sobre a consistência dos testes de base no contexto do modelo GCG. No que segue, consideraremos dois casos:  $\alpha > -1$  e  $\alpha$  livre.

Para ambos os casos, o comportamento geral segue características similares. Tal comportamento pode ser resumido da seguinte maneira: Os testes  $H(z)$  e oscilações acústicas bariônicas predizem um máximo para  $\alpha$  ligeiramente negativo, enquanto a posição do primeiro pico indica um máximo para um pequeno valor positivo de  $\alpha$ . Para estes três testes a PDF decresce com o valor é aproximado de  $\alpha = -1$ . Somente para o teste SNIa

a PDF para  $\alpha$  pode ter valores significativos para  $\alpha < -1$ . É importante salientar que, para as oscilações acústicas de bárions e para o primeiro pico de RCFM, a PDF torna-se essencialmente zero para  $\alpha < -1$ . Isto é devido à decomposição em uma componente "matéria escura" empregada na equação (4.38): para  $\alpha < -1$ , o comportamento para "matéria escura" é revertido devido à mudança de sinal do expoente na equação (4.38).

## 4.5 Conclusão

Como podemos verificar, tanto restringindo os valores de  $\alpha$ ,  $\alpha > -1$  (Figuras 4.3 e 4.4), quanto deixando-os variarem livremente, (Figuras 4.5 e 4.6), o parâmetro  $\alpha$  tende a um valor negativo. A estimativa do valor de  $\alpha$  para o primeiro caso é  $\alpha = -0.087_{-0.135}^{+0.159}$ , enquanto que para o segundo caso é  $\alpha = -0.089_{-0.130}^{+0.159}$ . Este resultado mostra que  $\alpha > -1$  é um bom prior. Além do mais, achamos  $\alpha < 0$  com 85% de confiança.

Apesar dos valores negativos de  $\alpha$  não serem um problema para o modelo do GCG a nível de base, isso não é verdade a nível perturbativo. Pois, como podemos observar na equação (4.13), valores negativos de  $\alpha$  implicam em uma velocidade do som imaginária. No próximo capítulo, procuraremos contornar este problema usando a teoria de Rastall.

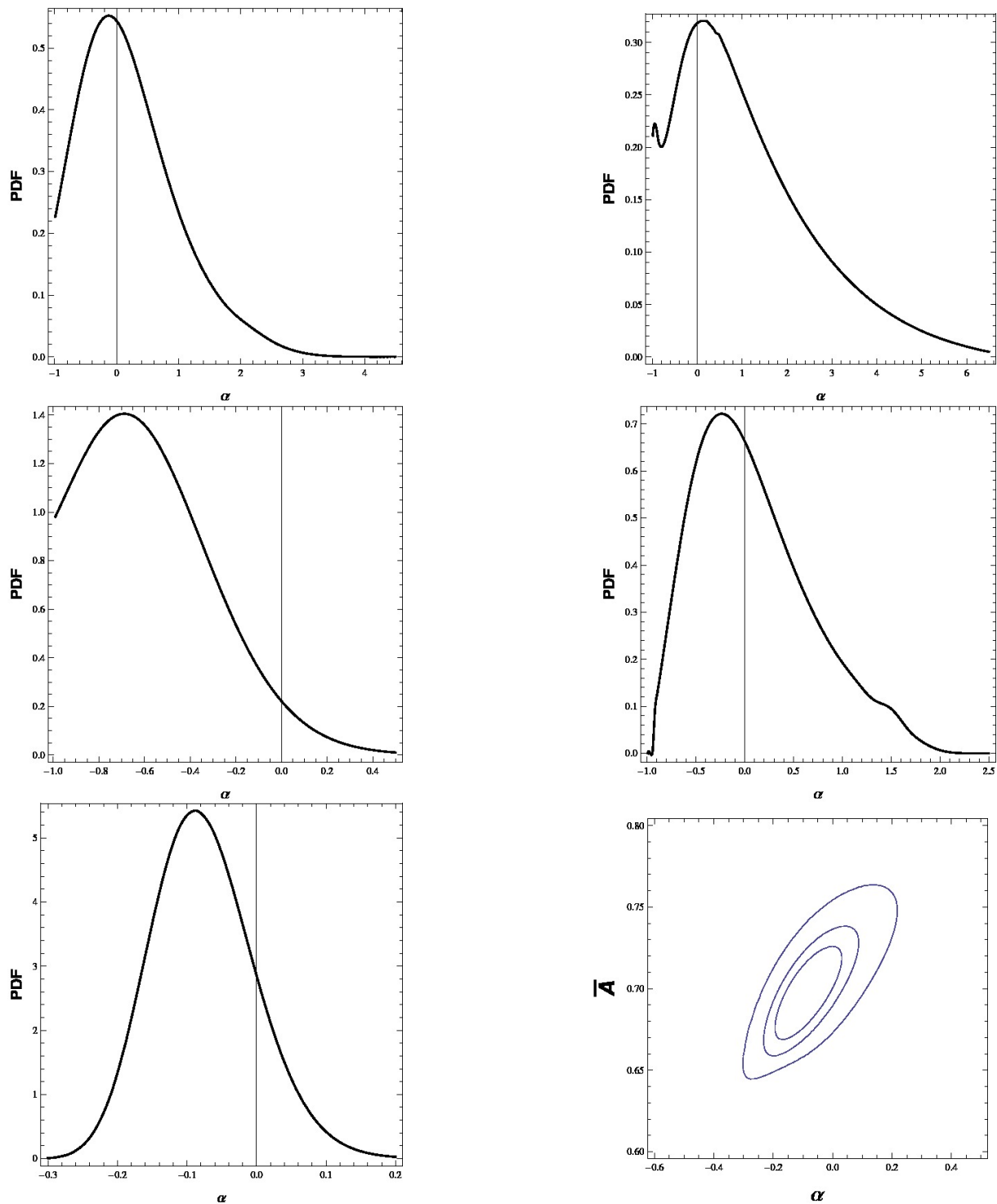


Figura 4.3: PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\alpha$  sob a restrição  $\alpha > -1$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel central esquerdo), BAO (painel central direito) e a combinação de todos esses quatro testes (painel inferior esquerdo). No painel inferior direito, apresentamos os contornos da PDF total no plano  $(\alpha, \bar{A})$  total.

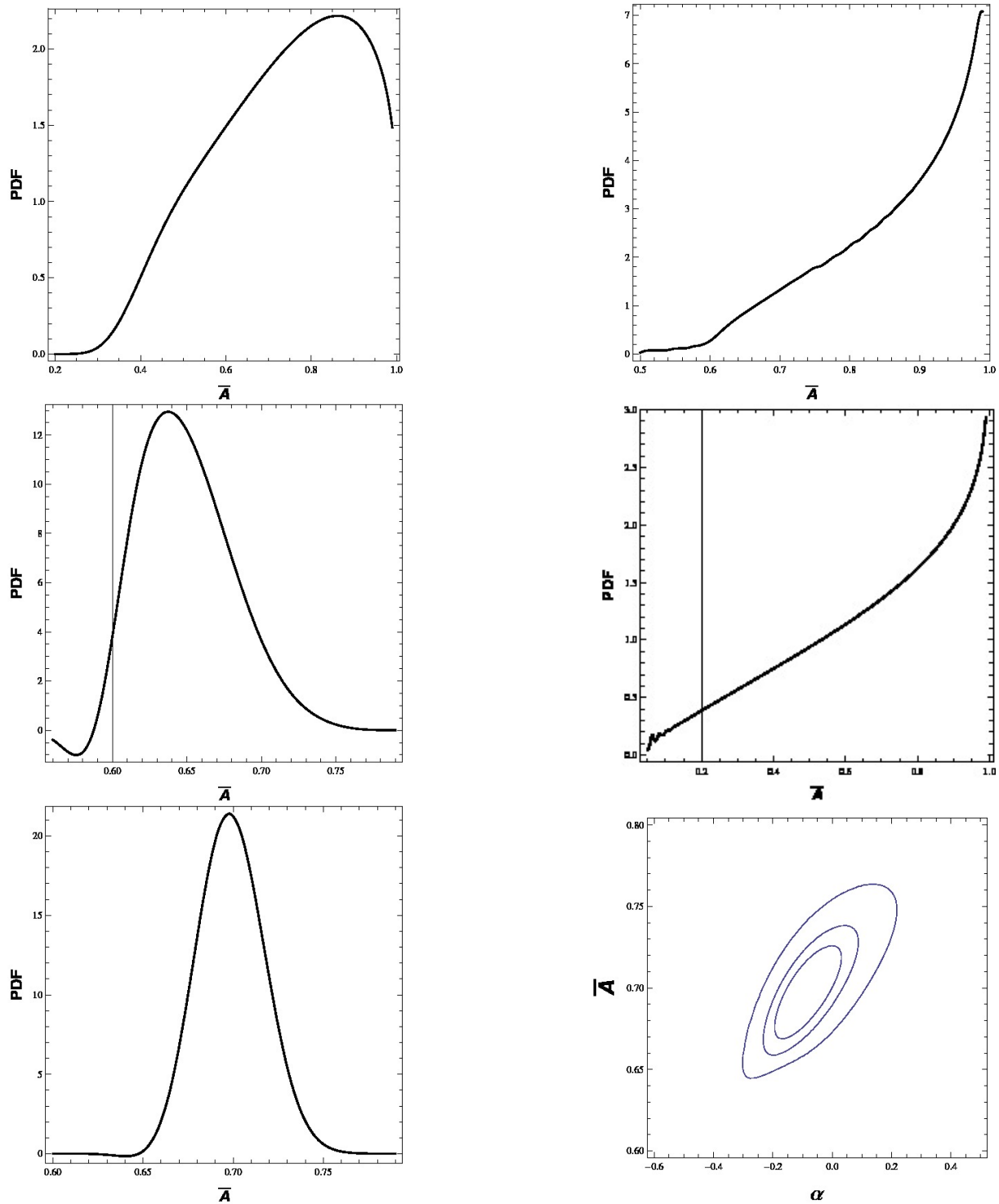


Figura 4.4: PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\bar{A}$  sob a restrição  $\alpha > -1$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel central esquerdo), BAO (painel central direito) e a combinação de todos esses quatro testes (painel inferior esquerdo). No painel inferior direito, apresentamos os contornos da PDF total no plano  $(\alpha, \bar{A})$  total.

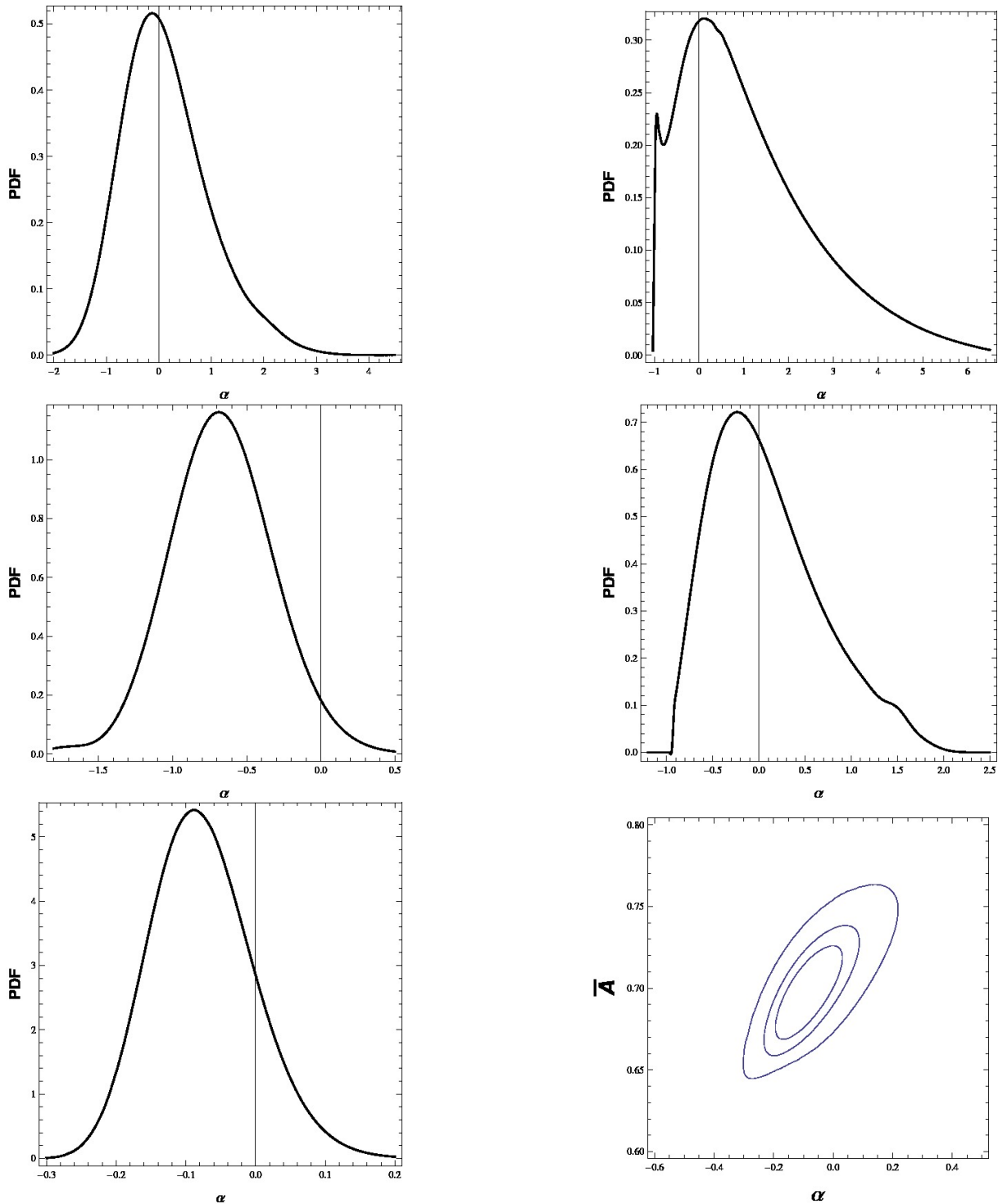


Figura 4.5: PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\alpha$  sem restrição para  $\alpha$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel central esquerdo), BAO (painel central direito) e a combinação de todos esses quatro testes (painel inferior esquerdo). No painel inferior direito, apresentamos os contornos da PDF total no plano  $(\alpha, \bar{A})$  total.

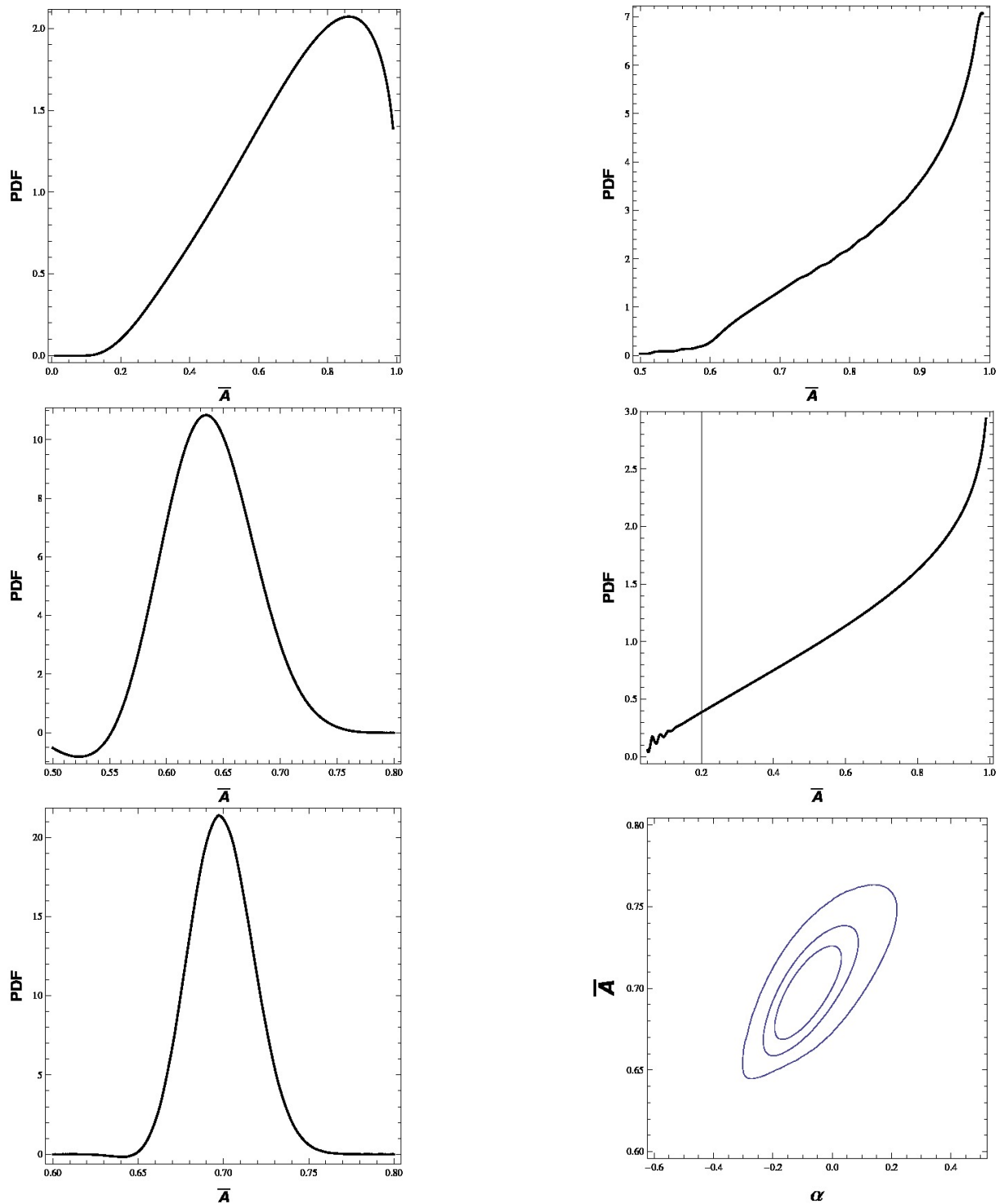


Figura 4.6: PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\bar{A}$  sem restrição para  $\alpha$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel central esquerdo), BAO (painel central direito) e a combinação de todos esses quatro testes (painel inferior esquerdo). No painel inferior direito, apresentamos os contornos da PDF total no plano  $(\alpha, \bar{A})$  total.



# Capítulo 5

## Uma Descrição do gás de Chaplygin na Teoria de Rastall

### 5.1 Introdução

Mostramos anteriormente, que valores negativos para o parâmetro  $\alpha$  do gás de Chaplygin eram favorecidos, isso leva ao problema de se ter velocidades do som imaginárias. Neste capítulo, analisamos uma descrição do gás de Chaplygin na teoria de Rastall como uma possibilidade de solução para o problema. A motivação dessa abordagem deve-se ao fato da não conservação do tensor momento-energia pode modificar a equação de estado efetiva e conseqüentemente, a velocidade do som efetiva.

A divergência do tensor momento-energia na teoria de Rastall [81] é dada por

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \kappa R^{\nu}, \quad (5.1)$$

onde  $\kappa$  é uma parâmetro e  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci. A modificação acima pode ser interpretada de diversas maneiras, para nós, a mais interessante e significativa, é a de que a ideia da teoria Rastall pode ser vista no sentido de uma formulação semi-clássica de fenômenos quânticos, os quais esperamos que apareçam quando a curvatura for importante. É claro que se poderia escolher outros escalares ao invés de  $R$ , com o intuito de representar o tensor de Riemann, mas talvez  $R$  seja a escolha mais natural. Desde que a equação (5.1) satisfaça às identidades de Bianchi, podemos encontrar as seguintes

equações de Einstein modificadas

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{\gamma-1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (5.2)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\gamma-1}{2}T^{;\nu}. \quad (5.3)$$

onde  $T$  é o traço do tensor momento-energia. Então, é evidente que, quando assumimos a base FLRW, as equações de Friedmann serão modificadas com termos proporcionais à  $\gamma$ .

Neste capítulo, fizemos uma descrição do GCG via teoria de Rastall, levando em consideração análises de grandezas relacionadas à teoria de fluidos, como o parâmetro da equação de estado  $w$  e velocidade do som  $c_s$ . Além do mais, fizemos estudos das perturbações e da sua evolução.

## 5.2 Determinação do parâmetro da equação de estado e da velocidade do som

Considerando aqui um componente, fluido único, com densidade  $\rho$  e pressão  $p$ , encontraremos, na teoria de Rastall, as equações de Friedmann. Para tanto, escreveremos a componente temporal das equações de campo, ou seja,

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi G \left( T_{00} - \frac{\gamma-1}{2}g_{00}T \right), \quad (5.4)$$

$$\implies 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2} = 8\pi G \left( \rho - \frac{\gamma-1}{2}(\rho - 3p) \right). \quad (5.5)$$

Para um Universo plano, a equação (5.5) se reduz a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \left[ \frac{3-\gamma}{2} + \frac{3w}{2}(\gamma-1) \right], \quad (5.6)$$

onde  $w$  é o parâmetro da equação de estado. Nota-se que, diferentemente da RG, agora a pressão contribue para a expansão.

Para sabermos como as funções  $\rho$  e  $p$  variam com o tempo, vamos utilizar a equação da continuidade, de maneira que

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \rho + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \quad (5.7)$$

$$T^{;\nu} = (\dot{\rho} - 3\dot{p}), \quad (5.8)$$

ou seja,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = \frac{\gamma - 1}{2}(\dot{\rho} - 3\dot{p}), \quad (5.9)$$

ou ainda, podemos apresentar esta equação em termos da derivada em relação ao fator de escala,

$$\frac{3 - \gamma}{2} \frac{d\rho}{da} + \frac{3}{a}(\rho + p) = -3 \frac{\gamma - 1}{2} \frac{dp}{da}. \quad (5.10)$$

Claramente, desde que a equação da conservação da energia tenha mudado, não podemos usar a equação de estado do GCG. Todavia, procuraremos relacionar as equações geradas pela teoria de Rastall com os parâmetros vinculados ao GCG. Para tanto, vamos escrever o parâmetro  $H$  dado pela equação (4.11), definindo  $E \equiv H^2/H_0^2$ . E, a partir daí, derivar a equação de estado e a velocidade do som do fluido correspondentes na teoria de Rastall e investigar suas propriedades de estabilidade.

A equação (5.6) pode ser reescrita em termo do parâmetro  $E$ , como

$$E = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho \left[ \frac{3 - \gamma}{2} + \frac{3w}{2}(\gamma - 1) \right], \quad (5.11)$$

o que resulta, observando as equações (5.6) e (5.9), em

$$\frac{dE}{da} = -\frac{3}{a}(\rho + p), \quad (5.12)$$

que é um equação válida também na RG. Isolando o parâmetro  $p$  na equação (5.10) e substituindo em (5.11) encontra-se

$$\frac{dE}{da} = -\frac{3}{a} \left[ \frac{3\rho(\gamma - 1) + 2E - (3 - \gamma)\rho}{3(\gamma - 1)} \right], \quad (5.13)$$

o que leva a uma expressão para  $\rho$  dada por

$$\rho = \frac{\gamma - 1}{2(3 - 2\gamma)} a \frac{dE}{da} + \frac{1}{3 - 2\gamma} E. \quad (5.14)$$

Para encontrarmos o parâmetro  $p$ , isolamos o parâmetro  $\rho$  na mesma em(5.10) e o substituimos em (5.11), então

$$\frac{dE}{da} = -\frac{3}{a} \left[ \frac{2E + p(-4\gamma + 6)}{(3 - \gamma)} \right], \quad (5.15)$$

e por fim, chegamos à expressão de  $p$

$$p = \frac{\gamma - 3}{6(3 - 2\gamma)} a \frac{dE}{da} - \frac{1}{3 - 2\gamma} E. \quad (5.16)$$

Como tínhamos assumido anteriormente, usaremos

$$E = \left[ \bar{A} + \frac{(1 - \bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (5.17)$$

e assim podemos encontrar os parâmetros  $\rho$  e  $p$  em função de  $a$  e  $\gamma$ . Para tanto, temos que substituir também a primeira derivada de  $E$ , que será

$$\frac{dE}{da} = \frac{d}{da} \left\{ \left[ \bar{A} + \frac{(1 - \bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\} = \frac{-3(1 - \bar{A})a^{-(4+3\alpha)}}{\left[ \bar{A} + \frac{(1 - \bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}. \quad (5.18)$$

Agora podemos escrever as expressões de  $\rho$  e  $p$ , como

$$\rho = \frac{(3 - 2\gamma)(1 - \bar{A})(5 - 3\gamma)a^{-3(1+\alpha)} + 2(3 - 2\gamma)\bar{A}}{2(3 - 2\gamma)^2 \left[ \bar{A} + \frac{(1 - \bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \quad (5.19)$$

e

$$p = \frac{(3 - 2\gamma)(1 - \bar{A})(1 - \gamma)a^{-3(1+\alpha)} - 2(3 - 2\gamma)\bar{A}}{2(3 - 2\gamma)^2 \left[ \bar{A} + \frac{(1-\bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}. \quad (5.20)$$

De posse dos valores de  $\rho$  e  $p$ , vamos determinar o parâmetro da equação de estado e a velocidade do som do fluido. O parâmetro da equação de estado é dado por  $w = p/\rho$ , então

$$w = -\frac{2\bar{A}a^{3\alpha+3} + (\gamma - 1)(1 - \bar{A})}{\bar{A}(2a^{3\alpha+3} + 3\gamma - 5) - 3\gamma + 5}. \quad (5.21)$$

Para encontrarmos a velocidade do som, vemos que  $c_s^2 = dp/d\rho = (dp/da)/(d\rho/da)$ . Por sua vez,

$$\frac{dp}{da} = \frac{-3(1 - \bar{A})(\gamma - 9)a^{-(4+3\alpha)}}{6(3 - 2\gamma) \left[ \bar{A} + \frac{(1-\bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} + \frac{(\gamma - 3)a}{6(3 - 2\gamma)} \frac{d^2E}{da^2}, \quad (5.22)$$

e

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{-3(1 - \bar{A})(\gamma + 1)a^{-(4+3\alpha)}}{2(3 - 2\gamma) \left[ \bar{A} + \frac{(1-\bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} + \frac{(\gamma - 1)a}{2(3 - 2\gamma)} \frac{d^2E}{da^2}. \quad (5.23)$$

Vemos que as equações (5.22) e (5.23) contêm a segunda derivada de  $E$ , então derivaremos a equação (5.18)

$$\frac{d^2E}{da^2} = \frac{3(1 - \bar{A})}{a^{5+3\alpha} \left[ \bar{A} + \frac{(1-\bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \cdot \frac{4(1 - \bar{A}) + (4 + 3\alpha)\bar{A}a^{3(\alpha+1)}}{\bar{A}a^{3(\alpha+1)} + (1 - \bar{A})}, \quad (5.24)$$

assim, substituindo a equação (5.24) em (5.22) e (5.23), chega-se a

$$c_s^2 = \frac{\bar{A} \{ \gamma [(\alpha + 1)a^{3\alpha+3} - 1] - (3\alpha + 1)a^{3\alpha+3} + 1 \} + \gamma - 1}{\bar{A} \{ 3\gamma [(\alpha + 1)a^{3\alpha+3} - 1] - (3\alpha + 5)a^{3\alpha+3} + 5 \} + 3\gamma - 5}. \quad (5.25)$$

Com os parâmetros  $w$  e  $c_s^2$ , construímos os gráficos da Figura 5.1, lado esquerdo e lado

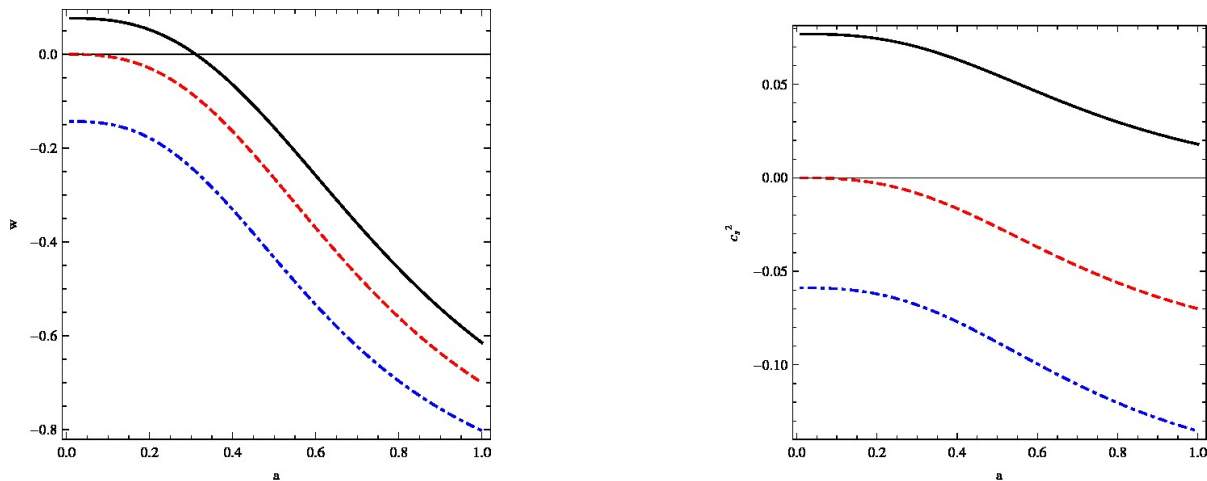


Figura 5.1: Evolução do parâmetro  $w$  da equação de estado e da velocidade do som  $c_s^2$  dados pelas equações (5.21) e (5.25) como funções do fator de escala. O parâmetro  $\gamma$  tem valores dados por:  $\gamma = 0.8$  (linha sólida preta),  $\gamma = 1$  (que é o limite RG, linha tracejada vermelha) e  $\gamma = 1.1$  (linha tracejada e pontilhada).

direito, respectivamente. Utilizamos os valores de  $\alpha = -0.1$  e  $\bar{A} = 0.7$ , pelo fato desses valores apresentarem o melhor ajuste para as curvas [17] e variamos  $\gamma$  na vizinhança de 1.

Na região escolhida para  $\gamma$ , a velocidade do som é monotonicamente decrescente e positiva se  $\gamma \lesssim 0.8$ . Analisando o comportamento assintótico das equações (5.21) e (5.25), temos no passado, ou seja  $\alpha \rightarrow 0$ , que

$$w \rightarrow \frac{\gamma - 1}{3\gamma - 5}, \quad a \rightarrow 0, \quad (5.26)$$

$$c_s^2 \rightarrow \frac{\gamma - 1}{3\gamma - 5}, \quad a \rightarrow 0, \quad (5.27)$$

e para  $\gamma = 1$  reproduzimos o resultado conhecido na RG para o GCG. Agora, em um futuro distante, ou seja  $\alpha \rightarrow \infty$ , percebemos que

$$w \rightarrow -1, \quad a \rightarrow \infty, \quad (5.28)$$

$$c_s^2 \rightarrow \frac{\gamma - 1 + \alpha(\gamma - 3)}{3\gamma - 5 + 3\alpha(\gamma - 1)}, \quad a \rightarrow \infty, \quad (5.29)$$

onde novamente reproduzimos corretamente o limite  $c_s^2$  quando  $\gamma = 1$ . Por construção, o estágio final da evolução é um estágio tipo de Sitter. É claro que nos cálculos acima temos assumido que  $\alpha \geq -1$ . Considerando a velocidade do som assintótica sendo positiva, achamos as seguintes regiões para  $\gamma$ :

$$\gamma < \frac{3\alpha + 1}{1 + \alpha}, \quad \gamma > \frac{5 + 3\alpha}{3(1 + \alpha)}. \quad (5.30)$$

### 5.3 Perturbações na métrica e a evolução de pequenas perturbações

Investigamos nessa seção, as características das perturbações na teoria de Rastall. Como sabemos, apesar da homogeneidade e isotropia observadas no Universo em larga escala, existem estruturas como galáxias, aglomerados de galáxias entre outros, que estão presentes no Universo. De maneira que, devemos buscar respostas para a origem dessas estruturas, e uma das explicações é justamente a presença de flutuações no Universo jovem. Sendo assim, o estudo de perturbações é fundamental para o entendimento do Universo da forma como se apresenta atualmente.

Quando se estuda perturbações, não é óbvio escolher que tipo de coordenadas que se deve trabalhar, de maneira que a liberdade de escolha das coordenadas pode levar a modos de perturbação fictícios, os quais não descrevem qualquer inhomogeneidade real. As perturbações escalares são caracterizadas por quatro funções escalares  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $B$  e  $E$ . Essas perturbações são induzidas pelas inhomogeneidades na densidade de energia, o que justifica nosso interesse nesse tipo de perturbações, pois elas exibem instabilidade gravitacional e podem levar a formação de estruturas [70]. As perturbações escalares são dadas por

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\Phi) d\eta^2 + 2B_{,i} dx^i d\eta + ((1 - 2\Psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij}) dx^i dx^j \right], \quad (5.31)$$

onde introduzimos o tempo conforme  $\eta$  e a vírgula significa a derivada em relação à co-

ordenada espacial  $\partial B/\partial x^i$ . Assumiremos aqui o calibre Newtoniano conforme, o qual é definido pelas condições  $B = E = 0$ , o que resulta na expressão

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\Phi) d\eta^2 + (1 - 2\Psi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (5.32)$$

Por conta da homogeneidade,  $\rho = \rho(\eta)$  e  $p = p(\eta)$ . Devido à isotropia, o fluido está em repouso,  $u^i = 0 \rightarrow u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$  no Universo base. Desde que,

$$u_\mu u^\nu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = a^2 \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -a^2 (u^0)^2 = -1 \quad (5.33)$$

temos

$$u^\mu = \frac{1}{a}(1, \vec{0}) \quad u_\mu = a(-1, \vec{0}). \quad (5.34)$$

Iniciaremos nossas discussões considerando o tensor momento-energia da base, ou seja

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (5.35)$$

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p \delta_\nu^\mu. \quad (5.36)$$

mais explicitamente,

$$T_0^0 = -\rho, \quad T_i^0 = T_0^i = 0, \quad T_j^i = p \delta_j^i = -\frac{A}{\rho^\alpha} \delta_j^i. \quad (5.37)$$

Para o caso perturbado, o tensor momento-energia do Universo é dado por

$$\bar{T}_\nu^\mu = (\bar{\rho} + \bar{p})u^\mu u_\nu + \bar{p} \delta_\nu^\mu, \quad (5.38)$$

de maneira que, as perturbações na densidade, na pressão e na velocidade são dadas por

$$\bar{\rho} = \rho + \delta\bar{\rho}, \quad \bar{p} = p + \delta\bar{p} \quad \text{e} \quad \bar{u}^i = u^i + \delta\bar{u}^i \equiv \frac{1}{a}\bar{v}_i, \quad (5.39)$$

onde o termo  $\delta\bar{u}^0$  deve obedecer a restrição  $\bar{u}_\mu \bar{u}^\mu = -1$ . Podemos escrever o tensor momento-



energia como uma parte de base e uma parte perturbada,

$$\bar{T}_\nu^\mu = T_\nu^\mu + \delta\bar{T}_\nu^\mu. \quad (5.40)$$

Para expressar as 4-velocidades  $\bar{u}^\mu$  e  $\bar{u}_\nu$  em termos de  $\bar{v}_i$ , descrevemo-as como

$$\bar{u}^\mu = u^\mu + \delta\bar{u}^\mu \equiv (a^{-1} + \delta\bar{u}^0, a^{-1}\bar{v}_1, a^{-1}\bar{v}_2, a^{-1}\bar{v}_3) \quad (5.41)$$

$$\bar{u}_\nu = u_\nu + \delta\bar{u}_\nu \equiv (-a + \delta\bar{u}_0, \delta\bar{u}_1, \delta\bar{u}_2, \delta\bar{u}_3). \quad (5.42)$$

As equações (5.41) e (5.42) estão relacionadas por  $\bar{u}_\mu = g_{\mu\nu}\bar{u}^\nu$  e  $\bar{u}_\mu\bar{u}^\mu = -1$ . Usando

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 - 2\Phi & 0 \\ 0 & (1 - 2\Psi)\delta_{ij}, \end{pmatrix}$$

chegamos a

$$\bar{u}_0 = g_{0\mu}\bar{u}^\mu = a^2(-1 - 2\Phi)(a^{-1} + \delta\bar{u}^0) = -a - 2a\Phi - a^2\delta\bar{u}^0 - 2a^2\Phi\delta\bar{u}^0, \quad (5.43)$$

observando que  $\bar{u}_0 = (-a + \delta\bar{u}_0)$  e levando em consideração apenas perturbações em primeira ordem, encontramos

$$\delta\bar{u}_0 = -2a\Phi - a^2\delta\bar{u}^0, \quad (5.44)$$

por fim,

$$\bar{u}^0\bar{u}_0 = -1 - 2\Phi - 2a\delta\bar{u}^0 = -1 \Rightarrow \delta\bar{u}^0 = -\frac{\Phi}{a}. \quad (5.45)$$

Assim, podemos descrever as perturbações para a 4-velocidade do fluido da seguinte maneira

$$\bar{u}^0 = \frac{1}{a}(1 - \Phi) \quad \text{e} \quad \bar{u}_0 = -a(1 + \Phi). \quad (5.46)$$

Para as componentes perturbadas do tensor de Ricci, tem-se

$$\bar{R}_0^0 = a^{-2} [-3\Phi'' - \Delta\Phi - 6\mathcal{H}\Phi' - 6\mathcal{H}'\Phi] \quad (5.47)$$

$$\bar{R}_i^0 = -2a^{-2}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi), i = -\bar{R}_0^i \quad (5.48)$$

$$\bar{R}_j^i = a^{-2} [-\Phi'' + \Delta\Phi - 6\mathcal{H}\Phi' - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2)\Phi] \delta_{ij}, \quad (5.49)$$

de maneira que o escalar Ricci fica

$$\bar{R} = a^{-2} [-6\Phi'' + 2\Delta\Phi - 24\mathcal{H}\Phi' - 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi]. \quad (5.50)$$

Depois desses cálculos, finalmente chegamos ao tensor de Einstein perturbado,

$$\bar{G}_0^0 = a^{-2} [-2\Delta\Phi + 6\mathcal{H}\Phi' + 6\mathcal{H}^2\Phi] \quad (5.51)$$

$$G_0^i = R_0^i = -R_i^0 = -G_i^0 \quad (5.52)$$

$$\bar{G}_j^i = a^{-2} [2\Phi'' + 6\mathcal{H}\Phi' + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi] \delta_j^i. \quad (5.53)$$

Na ausência de anisotropias na pressão, temos que  $\Phi = \Psi$ . Assumindo a métrica perturbada acima, podemos achar a equação de Einstein para o potencial  $\Phi$  na teoria de Rastall.

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a}\Phi + \Phi' \right) = 4\pi G a^2 \left[ \delta\rho - \frac{\gamma-1}{2}(\delta\rho - 3\delta p) \right], \quad (5.54)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left[ 2 \left( \frac{a'}{a} \right)' + \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \right] \Phi = 4\pi G a^2 \left[ \delta p + \frac{\gamma-1}{2}(\delta\rho - 3\delta p) \right], \quad (5.55)$$

onde a linha representa a derivação com respeito ao tempo conforme e o termo  $\Delta\Phi$  na equação (5.54) representa o Laplaciano do campo  $\Phi$ . Introduzindo a velocidade do som (assumindo a adiabaticidade, ou seja,  $\delta p/\delta\rho = dp/d\rho$ ), podemos escrever

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a}\Phi + \Phi' \right) = 4\pi G a^2 \delta\rho \left[ \frac{3-\gamma}{2} + 3\frac{\gamma-1}{2}c_s^2 \right], \quad (5.56)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left[ 2 \left( \frac{a'}{a} \right)' + \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \right] \Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \left[ \frac{\gamma-1}{2} + \frac{5-3\gamma}{2}c_s^2 \right]. \quad (5.57)$$

Mudando da derivada em relação tempo conforme para a derivada em relação ao fator de escala e combinando as duas equações anteriores, achamos a equação do potencial gravitacional

$$\Phi_{aa} + \left(\frac{\mathcal{H}_a}{\mathcal{H}} + \frac{4}{a}\right) \Phi_a + \left(2\frac{\mathcal{H}_a}{a\mathcal{H}} + \frac{1}{a^2}\right) \Phi = \frac{\gamma - 1 + (5 - 3\gamma)c_s^2}{3 - \gamma + 3(\gamma - 1)c_s^2} \frac{1}{a^2} \left(-\frac{k^2}{\mathcal{H}^2} \Phi - 3\Phi - 3a\Phi_a\right), \quad (5.58)$$

onde o subscrito  $a$  significa a derivação em relação ao fator de escala,  $\mathcal{H} \equiv a'/a$ , e temos introduzido uma expansão em ondas planas. Aqui nomeamos o termo abaixo como "fator Rastall",

$$Rf \equiv \frac{\gamma - 1 + (5 - 3\gamma)c_s^2}{3 - \gamma + 3(\gamma - 1)c_s^2}. \quad (5.59)$$

Desde que seja multiplicado pelo número de onda  $k$ , este pode ser considerado como uma velocidade do som "efetiva", diferente da velocidade adiabática  $c_a^2$  introduzida. Neste sentido, a teoria Rastall parece desempenhar um papel de entropia geométrica. Usando (5.25), no sentido de reduzir o "fator Rastall", encontramos

$$Rf = \frac{\bar{A}\alpha}{\bar{A} + (1 - \bar{A}a^{-3(\alpha+1)})}, \quad (5.60)$$

que é exatamente a velocidade do som do GCG na RG. A teoria de Rastall parece ser capaz de reproduzir as mesmas evolução das perturbações de um fluido em RG que proporciona uma dada expansão na base. Portanto, podemos concluir que mesmo enquadrando o GCG na teoria de Rastall, esse procedimento não salva o modelo de ser descartado pelo fato de seu comportamento em pequenas perturbações.

Vamos analisar aqui como o sistema evolui para as condições iniciais dadas por  $\Phi = -1$  e  $\Phi_a = 0$  com  $a=0.005$ , para os valores de  $\alpha = -0.1$  e  $\bar{A} = 0.7$ . Na Figura 5.2 construímos o gráfico da evolução de  $\Phi$  e  $\delta$  como função do fator de escala para uma escala representativa  $k = 0.1h\text{Mpc}^{-1}$ .

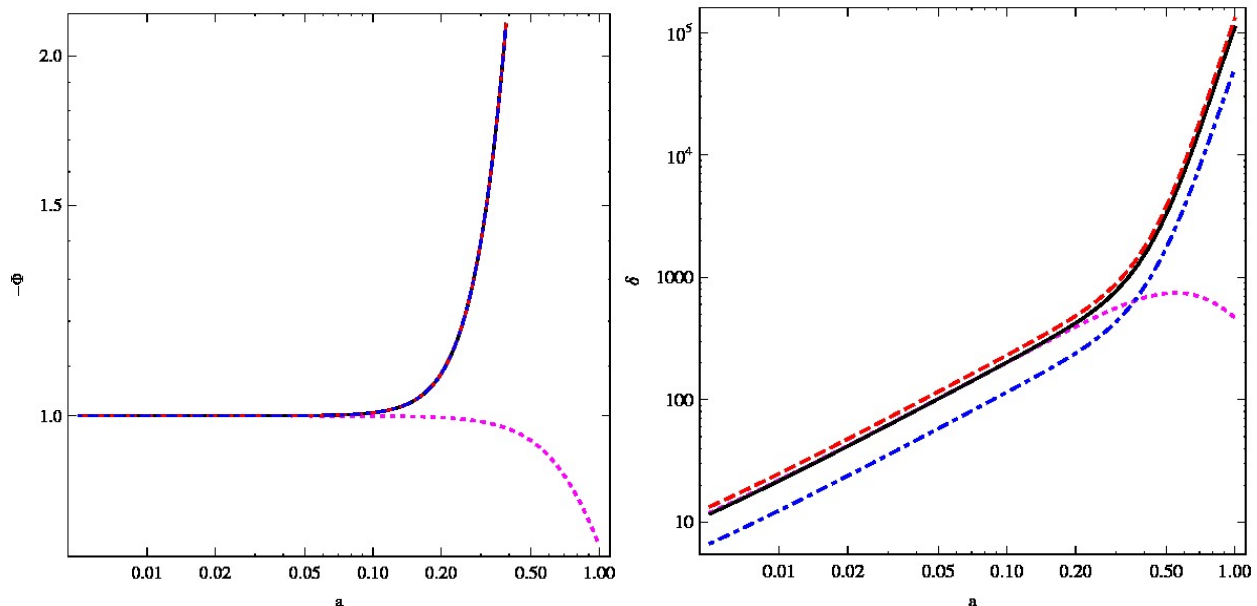


Figura 5.2: Evolução de  $\Phi$  e  $\delta$  como funções do fator de escala. Os parâmetros do GCG foram fixados em  $\alpha = -0.1$  e  $\bar{A} = 0.7$ . O parâmetro  $\gamma$  dado por  $\gamma = 0.5$  (linha preta sólida),  $\gamma = 1$  (o limite RG, linha vermelha tracejada) e  $\gamma = 2$  (linha azul pontilhada e tracejada). Para comparação, o  $\Lambda$ CDM é representado pela linha magenta pontilhada.

Claramente, os resultados são catastróficos. Uma possibilidade remanescente de salvação seria adotar uma descrição de campo escalar para o GCG, como é feito em [37]. Uma abordagem de campo escalar com velocidade do som efetiva no referencial do campo escalar,  $T^i_0 = 0$ , é feita nas referências [26, 43]. Faremos uma sucintamente descrição dessa abordagem.

Na análise perturbativa, é usada a expressão dada em [43], que liga as perturbações na pressão às perturbações na densidade, isto é

$$\delta p = \hat{c}_s^2 \delta \rho + 3aH\rho(1+w)(\hat{c}_s^2 - c_a^2) \frac{\theta}{k^2}, \quad (5.61)$$

onde  $\hat{c}_s^2$  é a velocidade do som no referencial de repouso do campo escalar,  $c_a^2$  é a velocidade adiabática,  $w$  é o parâmetro da equação de estado,  $k$  é o número de onda proveniente da decomposição de modos normais e  $\theta$  é definido através da relação  $a(\rho + p)\theta \equiv \dot{\phi}_0 \partial^i \delta \phi_i$ .

É verificado pelos autores da referência [26], a impossibilidade da representação de matéria escura utilizando um campo escalar canônico auto-interagente. Todavia, eles apre-

sentam uma proposta de campo escalar auto-interagente não canônico como perspectiva de representação de matéria escura. Para tanto, eles consideram o tensor momento-energia dado por

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\rho}\phi^{,\rho} + g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (5.62)$$

Tomando como base a teoria de Rastall e substituindo a equação (5.62) na equação (5.2), eles encontram a expressão

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{2-\gamma}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + g_{\mu\nu}(3-2\gamma)V(\phi), \quad (5.63)$$

a qual dar origem ao seguinte tensor momento-energia efetivo:

$$T_{\mu\nu}^{ef} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{2-\gamma}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + g_{\mu\nu}(3-2\gamma)V(\phi), \quad (5.64)$$

implicando nas seguintes expressões para a densidade de energia e pressão:

$$\rho_{\phi}^{ef} = \frac{\gamma}{2}\dot{\phi}^2 \quad \text{e} \quad p_{\phi}^{ef} = \frac{2-\gamma}{2}\dot{\phi} - (3-2\gamma)V(\phi). \quad (5.65)$$

Com o intuito de avaliar a velocidade do som, as equação (5.65) é substituída na expressão (5.61), resultando em

$$c_s^2 = \frac{2-\gamma}{\gamma}, \quad (5.66)$$

que evidentemente vai a zero para  $\gamma = 2$ . Desde que a descrição de campo escalar possua um grau de liberdade a mais que a descrição do fluido, a expansão na base pode ser fixada sem quaisquer desvantagens na evolução de perturbações, já que  $\gamma = 2$  pode ser idêntico ao de um fluido sem pressão na RG (CDM).

Na próxima seção, averiguaremos o comportamento da evolução de perturbações para a representação de campo escalar.

## 5.4 Evolução das perturbações em sub-horizonte

Os nossos resultados para os testes de base não impõe valores de  $\alpha$  negativos com um nível alto de confiança. Isto poderia significar que o GCG tem de fato  $\alpha$  significando que o setor escuro do universo é exatamente um fluido adiabático ordinário com uma pequena pressão negativa e constante. Então podemos argumentar que em altos redshifts o GCG não parece ser exatamente do tipo padrão CDM, pressão igual a zero.

Nossa meta nessa seção é revisitar a questão relativa a equivalência do GCG em  $\alpha = 0$  e o modelo  $\Lambda$ CDM. Obviamente ambos os casos produzem a mesma expansão de base.

Apresentamos uma análise do efeito Mészáros, o qual descreve a formação de estrutura de matéria escura durante os primeiros estágios da época dominada pela matéria. Esta aproximação é razoável se objetivamos acompanhar as perturbações no sub-horizonte durante a época dominada pela matéria.

Para perturbações lineares em (5.36), definimos a velocidade escalar  $v$ , que é associada com a velocidade peculiar, como  $\delta u^i_{,i} \equiv kv/a$ . Em primeira ordem, a componente (0-0) das equações de Einstein mostra-se da seguinte maneira

$$-k^2\psi - 3\mathcal{H}\psi' - 3\mathcal{H}^2\psi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta_{tot}, \quad (5.67)$$

onde  $\delta_{tot}$  é o contraste total de densidade, ou seja,  $\delta_{tot} \equiv \delta\rho_{tot}/\rho_{tot}$ . Durante o intervalo de tempo entre o desacoplamento cinético das partículas de matéria escura do plasma primordial e a época da igualdade da matéria radiante ( $z_{eq} \approx 3300$  para o modelo  $\Lambda$ CDM), o sub-horizonte das perturbações na matéria escura crescem apenas logaritmicamente com o fator de escala. Depois de  $z_{eq}$ , as perturbações na matéria escura obedecem a  $\delta \propto a$ . Este o é principal resultado por trás do chamado efeito Mészáros [68].

Analisaremos aqui um exemplo em que o GCG, com  $\alpha = 0$ , comporta-se diferentemente do  $\Lambda$ CDM. Mostraremos que o crescimento de perturbações na matéria GCG no sub-horizonte é diferente do CDM padrão. A fim de obter uma equação tipo Mészáros para o GCG, faremos o uso da conservação covariante do tensor momento-energia ( $T^\mu_{\nu;\mu}=0$ ).

Em primeira ordem encontramos

$$\delta' = -3\mathcal{H}\delta (c_s^2 - w_c) - (1 + w_c) (kv - 3\psi'), \quad (5.68)$$

e

$$v' = -\mathcal{H} (1 - 3w_c) v - \frac{w_c'}{1 + w_c} v + k\psi + \frac{kc_s^2}{1 + w_c} \delta, \quad (5.69)$$

para o balanço energia e momento para cada componente, respectivamente. Para pequenas escalas, podemos desconsiderar o termo  $\psi'$  em (5.68) e também faremos o limite do sub-horizonte da equação de Poisson (5.67). Junto com (5.69) e com o fato que  $\delta_{tot} = \delta_{gcg}$ , encontramos uma equação tipo Mészáros para o GCG com  $\alpha = 0$ , ou seja,  $c_s^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} & a^2 \frac{d^2 \delta_{gcg}}{da^2} + \left[ 3(1 - w_c) + \frac{a}{H} \frac{dH}{da} \right] a \frac{d\delta_{gcg}}{da} + \\ & \left[ -\frac{3}{2} - \frac{15}{2} w_c + 9w_c^2 - \frac{3aw_c}{H} \frac{dH}{da} - 3a \frac{dw_c}{da} \right] \delta_{gcg} = 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

A equação padrão para o CDM no modelo  $\Lambda$ CDM pode ser obtida pelo mesmo caminho, mas relembramos que

$$\delta_{tot} = \frac{\rho_{cdm}}{\rho_{cdm} + \rho_\Lambda} \delta_{cdm} = \Omega_{cdm} \delta_{cdm}, \quad (5.71)$$

desde que o modelo  $\Lambda$ CDM seja basicamente um modelo de dois fluidos. Portanto, temos

$$a^2 \frac{d^2 \delta_{cdm}}{da^2} + \left[ 3 + \frac{a}{H} \frac{dH}{da} \right] a \frac{d\delta_{cdm}}{da} - \frac{3}{2} \Omega_{cdm} \delta_{cdm} = 0. \quad (5.72)$$

Identificando a expansão da base nos dois casos,  $\Lambda$ CDM e GCG, podemos escrever  $\Omega_{cdm} = 1 + w_c$ , então

$$a^2 \frac{d^2 \delta_{cdm}}{da^2} + \left[ 3 + \frac{a}{H} \frac{dH}{da} \right] a \frac{d\delta_{cdm}}{da} - \frac{3}{2} (1 + w_c) \delta_{cdm} = 0. \quad (5.73)$$

As equações (5.70) e (5.73) são claramente diferentes, portanto  $\delta_{gcg}$  e  $\delta_{cdm}$  evoluem

diferentemente. De fato, podemos mostrar que  $\delta_{gcg} = (1 + w_c)\delta_{cdm}$ .

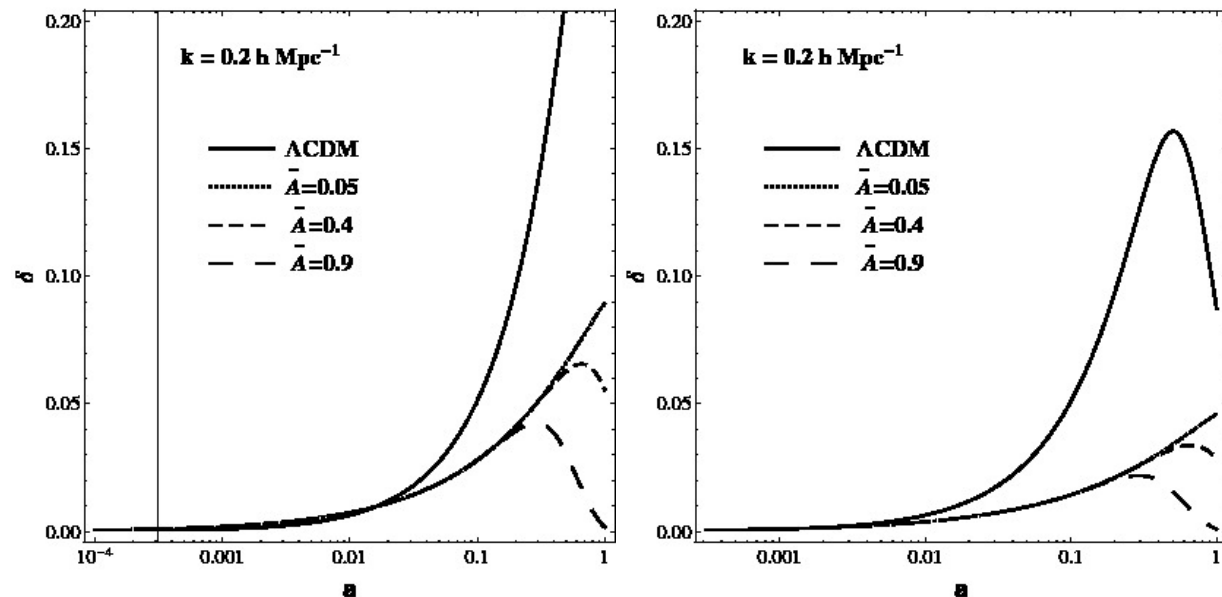


Figura 5.3: Evolução da densidade de contraste  $\delta$  no sub-horizonte. A CDM padrão sem pressão ( $p = 0$ ) é mostrada pela linha sólida. Para o GCG com  $\alpha = 0$  mostramos a evolução de  $\delta$  para três valores diferentes de  $\bar{A}$ . Painel esquerdo:  $\delta_{cdm} \equiv \delta\rho_{cdm}/\rho_{cdm}$ . Painel direito:  $\delta_{cdm} \equiv \delta_{cdm}/(\rho_{cdm} + \rho_\Lambda)$ .

Na Figura 5.3, mostramos a evolução de um sub-horizonte em escala típica depois da igualdade,  $z_{eq} \approx 3000$ . Assumimos que em ambos, CDM e GCG, têm as mesmas condições iniciais neste período. Nós os encontramos por meio da geração de espectro de potência neste tempo para a escala  $k = 0.2h\text{Mpc}^{-1}$  com o auxílio do código CAMB [64]. Então, resolvemos numericamente a equação (5.70) para  $\bar{A} = 0.05, 0.4$  e  $0.90$ . As perturbações no fluido GCG são fortemente suprimidas em comparação ao caso CDM.

## 5.5 Conclusão

Verificamos nesse capítulo, que uma descrição do gás de Chaplygin no contexto da teoria de Rastall não resolveu o problema das velocidades imaginárias. Todavia, essa descrição faz-se necessária para uma estrutura de gás de Chaplygin em uma teoria de campo escalar. Também mostramos que apesar de podermos abordar a relatividade geral



padrão no cenário de unificação fornecido pelo gás de Chaplygin generalizado, no caso  $\alpha = 0$ , o comportamento da evolução de pequenas perturbações, são diferentes nos dois cenários e a formação de halos de matéria GCG em sub-horizonte deve ser afetada fortemente em comparação com o cenário  $\Lambda$ CDM.

# Capítulo 6

## Conclusão

### 6.1 Considerações e Perspectivas

Realizamos uma análise Bayesiana do comportamento do modelo GCG a nível de base usando conjuntos de dados de  $H(z)$ , SNIa, RCFW e BAO. Focamos particularmente no parâmetro  $\alpha$  que é abordado amplamente na literatura. Nosso resultado é dado por  $\alpha = -0.087_{-0.135}^{+0.159}$  no nível de  $2\sigma$ , ou seja, valores negativos de  $\alpha$  parecem ser favorecidos sobre os valores positivos. De fato,  $\alpha$  é negativo com 85% de confiança. A incerteza é muito grande para afirmarmos que existe tensão com testes perturbativos, todavia, especulamos saber as consequências desta ocorrência, a qual não encontra-se longe de ser resolvida, devido aos contínuos programas observacionais que coletam dados cada vez mais precisos. Este tipo de inconsistência iria afastar o modelo do GCG, uma vez que é inaceitável obter dois diferentes conjuntos de parâmetros dependendo dos testes observacionais aplicado. Assumimos que isto ocorra e figure como a possibilidade de salvar o paradigma da unificação do GCG. Introduzimos um modelo de fluido na teoria de Rastall que se comportou exatamente como o GCG a nível de base e discutimos suas propriedades perturbativas. Verifica-se que velocidades do som pequenas e positivas são compatíveis com  $\alpha < 0$ . Por outro lado, mostrar que a evolução de perturbações são governadas por uma velocidade do som efetiva que é idêntica ao GCG na teoria da RG, como se a teoria de Rastall introduzisse um tipo de "entropia geométrica". Portanto, como já é esperado, os resultados são catástóficos. O contraste de densidade e o potencial

gravitacional crescem muito rapidamente para estarem de acordo com as observações. Como uma possível salvação, indicamos uma descrição de campo escalar do GCG na teoria de Rastall, onde a expansão na base e a velocidade efetiva do som pode ser fixada independentemente.

Também abordamos a questão do limite  $\alpha \rightarrow 0$ . Este é indistinguível do modelo  $\Lambda$ CDM em regime perturbativo linear, todavia mostramos que uma pequena pressão negativa do GCG afeta a evolução no contraste de densidade do GCG durante a fase dominada pela matéria, onde se espera um comportamento como CDM e fornece uma evolução diferente para as perturbações de matéria no sub-horizonte. Esta análise mostra que estruturas no sub-horizonte, quer dizer halos escuros, não podem se formar como no caso  $\Lambda$ CDM padrão. Assim, deve ser muito mais interessante fazer simulações numéricas para fluidos de matéria com uma evolução hidrodinâmica distinta do caso sem pressão padrão. Esta análise poderia esclarecer se no limite de  $\alpha \rightarrow 0$  do GCG é realmente idêntico ao modelo  $\Lambda$ CDM.

Os resultados mais recentes envolvendo as observações realizadas pela missão Planck, abrem perspectivas de análises e de restrições mais robustas para os parâmetros e as situações estudadas nessa tese, nos incentivando a desenvolver trabalhos futuros.

# Apêndice

## Listas de Figuras

**Figura 3.1** Curva de rotação da NGC 6503. As linhas pontilhadas, tracejadas e juntamente tracejadas e pontilhadas, são as contribuições de gás, disco e matéria escura, respectivamente.

**Figura 3.2** Lado esquerdo: imagens dos aglomerados Abell 2390 (superior) e MS2137.3-2353 (inferior) em raio X feitas pelo Chandra. Lado direito: imagens dos mesmos aglomerados feito no ótico pelo Hubble Space Telescope Wide Field Planetary Camera 2.

**Figura 3.3** O gráfico mostra as flutuações na temperatura da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas detectadas pelo WMAP.

**Figura 4.1** PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\alpha$  sob a restrição  $\alpha > -1$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel inferior esquerdo) e BAO (painel inferior direito).

**Figura 4.2** PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\bar{A}$  sob a restrição  $\alpha > -1$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel inferior esquerdo) e BAO (painel inferior direito).

**Figura 4.3** PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\alpha$  sob a restrição  $\alpha > -1$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel central esquerdo), BAO (painel central direito) e a combinação de todos esses quatro testes (painel inferior esquerdo). No painel inferior direito, apresentamos os contornos da PDF total no plano  $(\alpha, \bar{A})$  total.

**Figura 4.4** PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\bar{A}$  sob a restrição  $\alpha > -1$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel

central esquerdo), BAO (painel central direito) e a combinação de todos esses quatro testes (painel inferior esquerdo). No painel inferior direito, apresentamos os contornos da PDF total no plano  $(\alpha, \bar{A})$  total.

**Figura 4.5** PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\alpha$  sem restrição para  $\alpha$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel central esquerdo), BAO (painel central direito) e a combinação de todos esses quatro testes (painel inferior esquerdo). No painel inferior direito, apresentamos os contornos da PDF total no plano  $(\alpha, \bar{A})$  total.

**Figura 4.6** PDF em uma dimensão para o parâmetro  $\bar{A}$  sem restrição para  $\alpha$  usando  $H(z)$  (painel superior esquerdo), CMB (painel superior direito), SNIa (painel central esquerdo), BAO (painel central direito) e a combinação de todos esses quatro testes (painel inferior esquerdo). No painel inferior direito, apresentamos os contornos da PDF total no plano  $(\alpha, \bar{A})$  total.

**Figura 5.1** Evolução do parâmetro  $w$  da equação de estado e da velocidade do som  $c_s^2$  dados pelas equações (5.21) e (5.25) como funções do fator de escala. O parâmetro  $\gamma$  tem valores dados por:  $\gamma = 0.8$  (linha sólida preta),  $\gamma - 1$  (que é o limite RG, linha tracejada vermelha) e  $\gamma = 1.1$  (linha tracejada e pontilhada).

**Figura 5.2** Evolução de  $\Phi$  e  $\delta$  como funções do fator de escala. Os parâmetros do GCG foram fixados em  $\alpha = -0.1$  e  $\bar{A} = 0.7$ . O parâmetro  $\gamma$  dado por  $\gamma = 0.5$  (linha preta sólida),  $\gamma = 1$  (o limite RG, linha vermelha tracejada) e  $\gamma = 2$  (linha azul pontilhada e tracejada). Para comparação, o  $\Lambda$ CDM é representado pela linha magenta pontilhada.

**Figura 5.3** Evolução da densidade de contraste  $\delta$  no sub-horizonte. A CDM padrão sem pressão ( $p = 0$ ) é mostrada pela linha sólida. Para o GCG com  $\alpha = 0$  mostramos a evolução de  $\delta$  para três valores diferentes de  $\bar{A}$ . Painel esquerdo:  $\delta_{cdm} \equiv \delta\rho_{cdm}/\rho_{cdm}$ . Painel direito:  $\delta_{cdm} \equiv \delta_{cdm}/(\rho_{cdm} + \rho_\Lambda)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Alcock, C. *et al* *MACHO Collaboration - Proc. of The Third Stromlo Symposium: The Galactic Halo*, ASP Conference Series **165**, 1999.
- [2] Albrecht, A. Steinhardt, P. J. *Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220, 1982.
- [3] Amanullah, R. *et al*. *Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at  $0.511 < z < 1.12$  and the Union2 Compilation*, Astrophys. J. **716**, 2010.
- [4] Amendola, L., Finelli, F., Burigana, C. e Carturan, D. *WMAP and the Generalized Chaplygin Gas*, JCAP **005**, 203.
- [5] Barata, J. C. A. *Curso de Física- Matemática*, Notas de Aula, 2013. ([http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula))
- [6] Blake, C. *et al*. *The WiggleZ Dark Energy Survey: Mapping the Distance-Redshift Relation with Baryon Acoustic Oscillations*, MNRAS **418** , 2011.
- [7] Begeman, N. G., Broeils, A. H. e Sanders, R. H. *MNRAS*, **249**, 1991.
- [8] , Bento, M. C., Bertolami, O. e Sen, A. A. *Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion, and Dark-Energy-Matter Unification*, Phys. Rev. D **66**, 2002.
- [9] Bergström, L. *Non-Barionic Dark Matter: Observational Evidence and Detection Methods*, Rep. Prog. Phys. **63**, 2003.
- [10] Bertolami, G., Hooper, D. e Silk, J. *Generalized Chaplygin Gas Model: Dark Energy - Dark Matter Unification and CMBR Constraints*, Gen. Rel. Grav. **35**, 2003.

- [11] Bertone, G., Hooper, D. e Silk, J. *Particles Dark Matter: Evidence, Candidates and Constraints*, Physics Reports, **405**, 2005.
- [12] Binney, J. e Tremaine, S. *Galactic Dynamics*, terceira edição Princeton University Press, 1987.
- [13] Bradley W. Carroll e Dale A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*, ed. Companhia Addison-Wesley, 1996.
- [14] Branch, D. e Tammann, G. A. *Type Ia Supernovae as Standard Candles*, Annu. Rev. Astron. Astrphys., 1992.
- [15] Caldwell, R. R., Dave, R. e Steinhardt, P. J. *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State* , Phys. Rev. Lett. **80**, 1586-1587, 1998.
- [16] Campos, J. P. e Madejsky, R. *Dinâmica de Galáxia e Matéria Escura*, Sitientibus Série Ciências Físicas **02**, 16-24, 2006.
- [17] Campos, J. P., Fabris, J. C., Perez, R., Piattella, O. F. e Velten, H. *Does Chaplygin Gas Have Salvation?*, arXiv:astro-ph/1212.4136v2.
- [18] Capozziello, S. e Lambiase, G. *A Comprehensive View of Cosmological Dark Side*, arXiv:astro-ph/1304.5640v1.
- [19] Carmeli, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory* , World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [20] Carroll, S. M., Press, P. H. e Turner, E. L. *The Cosmological Constant* , Annu. Rev. Astron. and Astrophys. Lett. **30**, 499-542, 1992.
- [21] Cheng, B., Olinto, A. V., Schramm, D. N. e Truran, J. W. *Constraints on the Strength of Primordial Magnetic Fields from Big Bang Nucleosynthesis Reexamined*, Phys. Rev. **D54**, 4714-4718, 1996.
- [22] Colistete, R. Jr. e Fabris, J. C. *Bayesian Analysis of the (Generalized) Chaplygin Gas and Cosmological Constant Models using the 157 gold SNe Ia Data*, Class. Quantum Grav. **22**, 2005.

- [23] Coles, P. e Lucchin, F. *Cosmology The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, John Wiley and Sons, Ltd, 2002.
- [24] Cornish, N. J. e Starkman, G. *Of Matter Less Repulsive than a Cosmological Constant*, arXiv: astro-ph/9805027v1.
- [25] Davis, T. M., *et al.* , Astrophysical Journal, **666**,p.716-725, 2007.
- [26] Daouda, M. H., Fabris, J. C. e Piattella, O. F. *Scalar Models for the Unification of the Dark Sector*, AIP Conf. Proc. **1471**, 2012.
- [27] Domínguez, I., Höflich, Straniero, O. e Weeler, C. *Evolution of Type Ia Supernovae on Cosmological Time Scales*, Memorie della Societa Astronomica Italiana, **71**, 2000.
- [28] Doran, M., Lilley, M. J., Schwindt, J. e Wetterich, C. *Quintessence and the Separation of CMB peaks*, Astrophys. J. **559**, 2001.
- [29] Doran, M., Lilley, M. J. e Wetterich, C. *Constraining Quintessence with the new CMB Data*, Phys. Lett. B **528**, 2002.
- [30] Drell, P. S., Loredo, T. J. e Wasserman I. *Type Ia Supernovae, Evolution, and the Cosmological Constant*, Astrophys. J. **530**, 2000.
- [31] Ehlers, R. S. *Introdução à Inferência Bayesiana*, Notas de Aula, 2003.
- [32] Eisenstein, D. J. *et al.* *Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies*, Astrophys. J. **633**, 2005.
- [33] Fabian, A. C. e Allen, S. W. *Proceedings of the 21st Texas Symposium on Relativistic Astrophysics (Texas in Tuscany)*, Florence, Italy, 2002, astro-ph/0304020.
- [34] Fabris, Gonçalves, S. V.B. e de Souza, P. E. V. *Fitting the Supernova Type Ia Data with the Chaplygin Gas*, Gen. Rel. Grav. **34**, 2002.
- [35] Fabris, Gonçalves, S. V.B. e de Souza, P. E. V. *Fitting the Supernova Type Ia Data with the Chaplygin Gas*, 2002b,arXiv astro-ph/0207430.



- [36] Fabris, J. C., de Oliveira, P. L. C. e Velten, H. E. S. *Constraints on Unified Models for Dark Matter and Dark Energy Using  $H(z)$* , Eur. Phys.J. C **71**, 2010.
- [37] Fabris, J. C., Guio, T. C. C., Daouda, M. H. e Piattella, O. F. *Scalar Models for the Generalized Chaplygin Gas and the Structure Formation Constraints*, Grav. Cosmol. **17**, 2011.
- [38] Farooq, D. Mania e Ratra, B. *Hubble Parameter Measurement Constraints on Dark Energy*, arXiv:1211.4253 [astro-ph.CO].
- [39] Fischler, W., Kashani-Poor, A., McNeese, R. e Paban, S. *The Acceleration of the Universe, a Challenge for String Theory*, JHEP **7**, 2001.
- [40] Fixsen, D. *The Temperature of the Cosmic Microwave Background*, Astrophys. J., **707**, 2009.
- [41] Freedman, W. L. et al. *Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant*, Astrophys. J. **553**, 47, 2001.
- [42] Friedmann, A. *On the Curvature of Space*, Z. Phys. **10**, 377, 1922 (Translated by Brian Doyle).
- [43] Gao, C., Kunz, M., Liddle, A. R. e Parkinson, D. *Unified Dark Energy and Dark Matter from a Scalar Field Different from Quintessence*, Phys. Rev. D. **81**, 2010.
- [44] García-Bellido, J. *Cosmology and Astrophysics*, astro-ph/0502139.
- [45] Giovannini, M. *Why CMB Physics?*, astro-ph/0703730.
- [46] Goobar, A. e Perlmutter, S. *Feasibility of Measuring the Cosmological Constant  $\Lambda$  and Mass Density  $\Omega$  Using Type Ia Supernovae*, Astrophys. J. **450**, 1995.
- [47] Gregory, P. *Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica Support*, Cambridge University Press, 2010.
- [48] Guth, A. H. *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 327, 1981.

- [49] Hellerman, S., Kaloper, N. e Sussikind, L. *String Theory and Quintessence*, JHEP **6**, 2001.
- [50] Hillebrandt, W. e Niemeyer, J. C. *Type Ia supernova explosion models*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **38**, 191-230, 2000.
- [51] Hubble, E. P. *A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extragalactic Nebulae* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **15**, 168, 1929.
- [52] Hu, W. e Sugiyama, N. *Small-Scale Cosmological Perturbations: an Analytic Approach*, Astrophys. J. **471**, Nov. 1996.
- [53] Hu, W., Sugiyama, N. e Silk, Joseph. *The Physics of Microwave Background Anisotropies*, Nature **386**, 1997.
- [54] Hu, W., Fukugita, M., Zaldarriaga, M. and Tegmark, M. *CMB observables and their cosmological implications*, Astrophys. J. **549** 669, 2001.
- [55] Huterer, D., Starkman, G. D. e Trodden, M. *Is the Universe Inflating? Dark Energy and the Future of the Universe*, Phys. Rev. **D66**, 2002.
- [56] Jimenez, R., Verde, L., Treu, T. e Stern, D. *Constraints on the Equation of State of Dark Energy and the Hubble Constant from Stellar Ages and the CMB*, Astrophys. J. **593**, 2003.
- [57] Kamenshchik, A., Moschella, U. e Pasquier, V. *An Alternative to Quintessence*, Phys. Lett. **B511**, 2001.
- [58] Kamionkowski, M. *Dark Matter and Dark Energy*, astro-ph/0706.2986v1.
- [59] Kamionkowski, M. e Kinkhabwala, A. *Galactic Halo Models and Particle Dark-Matter Detection*, Phys. Rev. **D57**, 1998.
- [60] Kaplinghat, M., Steigman, G., Tkachev, I. e Walker, T. P. *Observational Constraints on Power-Law Cosmologies*, Phys. Rev. **D59**, 1999.

- [61] Komatsu, E., M., *et al.* *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, *Astron. J. Supplement* **192**, 2011.
- [62] Lago, B. L. *et al.* *Type Ia Supernova Parameter Estimation: a Comparison of two Approaches using Current Datasets*, arXiv:1104.2874 [astro-ph.CO].
- [63] Leibundgut B. e Spyromilio J. *Distant Supernova and Cosmic Deceleration*, *The Early Universe with the VLT*. Berlin: Springer, p. 95, 1997.
- [64] Lewis, A., Challinor, A. e Lasenby, A. *Efficient Computation of CMB Anisotropies in Closed FRW Models*, *Astrophys. J.* **538**, 2000.
- [65] Linde, A. D. *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, *Phys. Lett.* **108 D**, 389, 1982.
- [66] Lu, J., Xu, L., Wu, Y. e Liu, M. *Combined Constraints on Modified Chaplygin Gas Model form Cosmological Observed Data: Markov Chain Monte Carlo Approach*, *Gen. Rel. Grav.* **43**, 2011.
- [67] Ma, C. e Zhang, T. J. *Power of Observational Hubble Parameter Data: a Figure of Merit Exploration*, *Astrophys. J.* **730**, 2011.
- [68] Meszaros, P. *The Behaviour of point Masses in an Expanding Cosmological Substratum*, *Astron. Astrophys.* **37**, 2007.
- [69] Moresco, A. *et al.* *Improved Constraints on the Expansion rate of the Universe up to  $z \approx 1.1$  from the Spectroscopic Evolution of Cosmic Chronometers*, *JCAP* **1208**, 2012.
- [70] Mukhanov, V. *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [71] Nomoto, K., Iwamoto, K., e Kishimoto, N. *Type Ia Supernovae: Their Origin and Possible Applications in Cosmology*, *Science*, **276**, 1997.

- [72] Oliveira Filho, K.S. e Saraiva, M.F.O. *Astronomia e Astrofísica*, Livraria da Física, 2004.
- [73] Peebles, P. J. E. *Tests of Cosmological Models Constrained by Inflation*, *Astrophys. J.* **284**, 1984.
- [74] Peebles, P. J. E. *Is Cosmology Solved? An Astrophysical Cosmologist's Viewpoint*, *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **111**, 1999.
- [75] Peebles, P. J. E. e Ratra, B. *The Cosmological Constant and Dark Energy*, *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 2003.
- [76] Penzias, A. A. e Wilson, R. R. *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, *Astrophys. J.* **142**, 1965.
- [77] Perlmutter, S. *Discovery of a Supernova Explosion at half the Age of the Universe and its Cosmological Implications*, *Nature*, 1998.
- [78] Perlmutter, S., Turner, M. S. e White, M. *Constraining Dark Energy with Type Ia Supernovae and Large-Scale Structure*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1999.
- [79] Perlmutter, S. *et al.* *Cosmology from Type Ia Supernovae*, *Astrophys. J.* **517**, 1999.
- [80] Prokopec, T. *Lecture notes for Cosmology*, [www.staff.science.uu.nl/proko101](http://www.staff.science.uu.nl/proko101).
- [81] Rastall, P. *Generalization of the Einstein Theory*, *Phys. Rev.* **6**, 1972.
- [82] Ratra, B. e Peebles, P. J. E. *Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field*, *Phys. Rev. D* **37**, 1988.
- [83] Reese, E. D., Carlstrom, J. E., Joy, M., Mohr, J. J., Grego, L. e Holzappel, W. L. *Determining the Cosmic Distance Scale from Interferometric Measurements of the Sunyaev-Zel'dovich Effect*, *Astrophysical Journal*, **581**, 2002.
- [84] Riess, A. G. *et al.* *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *Astrophys. J.* **116**, 1998.

- [85] Roy, D. P. *Basic Constituents of the Visible and Invisible Matter - A Microscopic View of the Universe*, physics/0007025.
- [86] Ryden, B. *Introduction to Cosmology*, Addison-Wesley, 2003.
- [87] Sahni, V., Saini, T. D., Starobinsky, A. A. e Alam, U. *Statefinder - A New Geometrical Diagnostic of Dark Energy*, JETP Lett. **77**, 2003.
- [88] Sahni, V. *Dark Matter and Dark Energy*, Lect. Notes Phys. **653**, 2004.
- [89] Sahni, V. e Starobinsky, A. A. *The Case for a Positive Cosmological  $\Lambda$ -term*, Int. J. Mod. Phys. **D9**, 2000.
- [90] Schmidt, B. P. *The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae*, Astrophys. J. **507**, 1998.
- [91] Schramm, D. N. e Turner, M. *Ten Things Everyone Should Know About Inflation*, Rev. Mod. Phys. **70**, 1998.
- [92] Sen, A. A., Scherrer, J. *Generalizing the Generalized Chaplygin Gas*, Phys. Rev. D **72**, 2005. astro-ph/0507717.
- [93] Simon, J., Verde, L. e Jimenez, R. *Constraints on the Redshift Dependence of the Dark Energy Potential*, Phys. Rev. D **71**, 2005.
- [94] Steinhardt, P. J. *Regarding the Deceleration of the Universe*, astro-ph/9603072v1.
- [95] Stern, D., Jimenez, R., Verde, L., Kamionkowski, M. e Stanford, S. A. *Constraints the Equation of State of Dark Energy. I:  $H(z)$  Measurements*, JCAP **1002**, 2010.
- [96] Turner, M. S., Steigman, G. e Krauss, L. M. *Flatness of the Universe: Reconciling Theoretical Prejudices with Observational Data*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1984.
- [97] Turner, M. S. e White, M. *CDM Models with a Smooth Component*, Phys. Rev. **D56**, 1997.
- [98] Turner, M. S. *Dark Matter and Dark Energy in the Universe*, Astron. Soc. Pac. Conf. Ser. **666**, 1999.

- [99] Verde, L. *Statistical Methods in Cosmology*, Astrophysical J. **800**, 2010.
- [100] Wang, L., Caldwell, R.R., Ostriker, J. P. e Steinhardt, P. J. *Cosmic Concordance and Quintessence*, Astrophysical J. **530**, 2000.
- [101] Wang, Y. *Distance Measurements from Supernovae and Dark Energy Constraints*, Phys. Rev. **D80**, 2009.
- [102] Weinberg, D. H. *et al.* , Preprint (arXiv:1201.2434v1), 2012.
- [103] Zhang, T. J. e Ma, C. *Constraints on the Dark Side of the Universe and Observational Hubble Parameter Data*, Adv. Astron. **2010**, 2010.
- [104] Zwicky, F. *Helvetica Physica Acta*, **6**, 110, 1933.