UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE

ANDRESSA CESANA

TEXTOS E CONTEXTOS DOS PROBLEMAS DE MEDIÇÃO DE ALTURAS EM LIVROS DO RENASCIMENTO

VITÓRIA
2013

ANDRESSA CESANA

TEXTOS E CONTEXTOS DOS PROBLEMAS DE MEDIÇÃO DE ALTURAS EM LIVROS DO RENASCIMENTO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação, na linha de pesquisa Educação e Linguagem: Matemática.
Orientadora: Circe Mary Silva da Silva Dynnikov

VITÓRIA

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial de Educação,
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Cesana, Andressa, 1974-
C421t Textos e contextos dos problemas de medição de alturas em livros do Renascimento / Andressa Cesana. – 2013.
233 f. : il.

Orientador: Circe Mary Silva da Silva Dynnikov.
Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. História. 2. Instrumentos de medição 3. Matemática – História. 4. Matemática – Problemas, exercícios, etc. 5. Renascença. I. Silva, Circe Mary Silva da, 1951-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

PPGE UFES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ANDRESSA CESANA

"TEXTOS E CONTEXTOS DOS PROBLEMAS DE MEDIAÇÃO DE ALTURA EM LIVROS DO RENACISMENTO."

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor(a) em Educação.

Aprovada em 12 de Novembro de 2013.

COMISSÃO EXAMINADORA

Professora Doutora Circe Mary Silva da Silva Dynnikov
Universidade Federal do Espírito Santo

Ligia Sad

Professora Doutora Lígia Arantes Sad
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Luiz Cláudio Moisés Ribeiro
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Tercio Girelli Kill
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Wagner Rodrigues Valente
Universidade Federal de São Paulo

Professor Doutor Givaldo Oliveira dos Santos
Instituto Federal de Alagoas

Aos meus pais, Deodoro e Terezinha, e ao meu filho Otoniel.

AGRADECIMENTOS

Agradecer! É retribuir, é doar de volta o que te fizeram de bem. Que tarefa difícil! O meu agradecer, procuro aqui fazer, com este meu trabalho, com a conquista de um imenso e antigo sonho, em homenagem àqueles que estiveram comigo nesta longa, árdua e feliz caminhada.

Graças e louvores, primeiramente, a Deus! O meu refúgio em todos os momentos. Como é maravilhoso viver a Sua misericórdia!

Aos meus pais, Deodoro e Terezinha, presença de Deus aqui na Terra, meus maiores exemplos de luta, trabalho, perseverança, fé, dedicação e amor ao próximo. É com vocês que aprendo a ser melhor a cada dia e, descubro em mim, forças para não desanimar nunca. Amo vocês acima de tudo!

Aos meus irmãos Fabrício e Vanessa. Meus bens preciosos, que sempre me apoiaram e torceram por mim. Lugar de amor maior, onde encontrei forças para me conservar firme.

Ao meu filho Otoniel, que amo desde o momento que desejei tê-lo, luz no meu viver, amor infinito, prova da misericórdia do Senhor por mim. Obrigada meu filho por ter sido meu parceiro em todos os momentos, apesar de tão pouca idade. Dos mais difíceis, aos mais felizes! Perdoe-me pelos momentos de ausência.

À minha querida Circe, pelo amor incondicional de orientadora e de “mãe”; dedicado a mim. Você representa meu exemplo de mulher de fibra, de garra, de singularidade e de amor ao próximo. Sempre disposta a ajudar, a bendizer, a doar carinho, a indicar o melhor caminho e que me fez acreditar que “o melhor está por vir”! Amo-a! Pra sempre a admirarei. Não teria escrito estes agradecimentos, se não você não estivesse presente em minha vida!

Ao querido Vladimir, por ter sempre uma palavra amiga, pela paciência, por ter-me acolhido com tanto carinho no seu lar e no da Circe e, por todos os momentos de compreensão.

Aos meus amigos de jornada neste doutorado: Martha, Arildo e Alex. Obrigada pelo prazer do aprendizado e da convivência! À Martha, especialmente, pela oportunidade de construção de uma amizade sincera, pelo carinho e pelas acolhidas.

Às minhas queridas Penha e prima Fernanda, pelo abrigo confortável concedido em suas casas no decorrer do doutorado, pela amizade e pela atenção. Obrigada, de coração!

A todos os meus professores do PPGE, por tudo que aprendi e amadureci como aluna, profissional e ser humano. Em especial, à querida professora Ligia. Obrigada por me mostrar a delicadeza e a sabedoria de uma notável pesquisadora. Você é encantadora!

Aos meus colegas de trabalho, do Departamento de Matemática Aplicada do Centro Universitário Norte do Espírito Santo – CEUNES, por terem contribuído com a concessão da minha licença durante esses três anos e três meses de ausência, pelo apoio ao meu crescimento profissional.

À professora Rita de Cassia Guizzardi, pela prontidão, pela responsabilidade da tradução dos textos em italiano, em minha tese.

À professora Maria Nader, pela dedicada revisão de português neste trabalho.

Aos professores, membros participantes da minha banca: Wagner Rodrigues Valente, Givaldo Oliveira dos Santos, Luiz Cláudio Moisés Ribeiro, Ligia Arantes Sad e Tercio Girelli Kill. Obrigada pela avaliação minuciosa da minha pesquisa e tão importante para a minha inserção no meio acadêmico e científico.

À amiga Maria de Lourdes, pelas orientações, pela generosidade e por estar sempre disposta a uma palavra de incentivo, força e carinho.

Às minhas amigas, irmãs de coração, Josilene e Katiuscia, pelas palavras de apoio, pela presença constante em minha vida, por não terem desistido de me ver vencer!

Aos parentes e amigos, que, de algum modo, estiveram presentes nesse meu caminhar, auxiliaram-me e torceram por esta vitória.

Se todas as coisas fossem mães, você seria...

Minha mãe seria o Sol. Sol porque é forte, resistente, não se deixa levar por coisas bobas. Sol porque brilha em seus estudos e beleza, e, principalmente, por seu carinho e amor, aliás, isso ela tem de sobra.

Quando está longe, causa efeito na gente: saudade. Ela é, sim, o centro de todo meu universo. Ilumina meu caminho quando mais preciso. Mãe, você é o Sol da minha vida!

Otoniel Cesana Biral

RESUMO

Esta pesquisa retrata uma investigação e uma análise sobre textos e contextos dos problemas de medição de alturas, em livros do período do Renascimento. Tendo por base teórica ideias dos historiadores Marc Bloch e Fernand Braudel, recorre à conjuntura social, econômica e cultural vivida pelos autores dos livros analisados, a fim de contextualizá-las no processo de produção dos mesmos. O tempo delimitado foi de longa duração, o Renascimento, e os lugares, Itália e França, onde viveram os autores das obras analisadas. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de abordagem histórica e documental. O tema central da pesquisa constitui-se numa abordagem interpretativa do panorama histórico dos problemas de medição de alturas de objetos, considerando os enunciados, as linguagens, as ilustrações, os processos matemáticos resolutivos e os instrumentos de medidas apresentados por cada autor. A análise ateve-se em três contextos distintos de resolução desses problemas. Considerando os instrumentos de medidas utilizados, investigou-se: o “gnômon” em Leon Battista Alberti (1404-1472), o quadrante geométrico em Oronce Finé (1494-1555) e o esquadro móvel em Ottavio Fabri (c. 1544-c.1612). A construção e o uso dos instrumentos para medição foram cruciais para o processo de solução de inúmeros problemas práticos de cada época; as ferramentas matemáticas usadas eram elementares, mas suficientes para resolução dos problemas. Todos os autores empregaram, basicamente, as mesmas propriedades geométricas no processo de solução dos problemas e, suas obras, refletem o contexto social e cultural em que viveram e no qual produziram seus trabalhos. Cada um deles teve algum tipo de relevância na sua sociedade e contribuíram para o desenvolvimento científico da época, escrevendo livros, a partir das necessidades e dos problemas vivenciados. Os resultados deste trabalho, para além da construção histórica conjunta em torno do tema, levantam questões para reflexão sobre a inter-relação existente entre a história da matemática e a educação matemática.

Palavras-chave: História. História da Matemática. História de Problemas Matemáticos. Medição de Alturas. Renascimento.

ABSTRACT

In this work are researched and analyzed texts and contexts in problems dealing with heights measurement in books of the Renaissance Period. The theoretical basis are the ideas of the historians March Bloch and Fernand Braudel, the social, economical and cultural contexts lived by the authors of the analyzed books are considered as to contextualize them in the production process. A long term period was determined for the research - the Renaissance – and the countries studied were Italy and France, where the authors of the analyzed works lived. This is a qualitative research with an historical and documental approach. The central theme of the research is the interpretative approach of the history of the problems dealing with height measurement of objects, considering the problem's enunciation, the languages, the illustrations, the resolutive mathematical processes and the measurements tools presented by each author. There were three mainly distinct contexts of problem solving. Considering the measurement tools used, it was investigated: the "gnomon" on Leon Battista Alberti (1404-1472) the geometric quadrant of Oroncce Finé (1494-1555) and the folding square of Ottavio Fabri (c. 1544-1612). The construction and use of measurements tools were crucial for the solving process of countless practical problems of each time; the mathematical tools used were basic but sufficient to solve the problems. All authors used basically the same geometric properties in the process of problem solving, and their works reflect the social and cultural context in which they lived and produced them. Each one of them had some relevancy in the society and contributed to the scientific development of that time, writing books based on their problems and needs. This work's results, beyond the joint historical construction around the theme, bring up questions to analyze the relation between the history of mathematics and the mathematical education.

Key-Words: History. History of Mathematics. History of Mathematical Problems. Height Measurement. Renaissance.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO: ESTABELECENDO AS MIRAS

1.1 O INTERESSE PELOS PROBLEMAS DE MEDIÇÃO DE ALTURAS E A INSPIRAÇÃO NA HISTÓRIA

O gosto pela história da matemática como área de estudo e pesquisa e como um dos caminhos para se ensinar matemática, apurou-se desde a elaboração da minha dissertação de mestrado intitulada *Trigonometria: uma abordagem histórica e uma análise de livros didáticos* (1999). Nela foi possível explorar sua história e propor algumas etapas caracterizadas pelo seu desenvolvimento desde a Antiguidade, até ao século XVII, além de realizar uma análise de dez livros didáticos de trigonometria, utilizados no Brasil durante os séculos XVIII, XIX e XX. Os autores considerados no trabalho, numa ordem cronológica de publicação dos textos analisados, foram: José Fernandes Pinto Alpoim (1748), Adrien-Marie Legendre (1809), Heinrich Borchert Lübsen (s.d.), E. D. de Castro (1903), Cristiano Benedito Ottoni (1904), Timotheo Pereira (1913), as coleções de didáticos por F.I.C. (1924) e F.T.D.[1] (1928), Algacyr Munhoz Maeder (1949) e Roberto Peixoto (1957).

Ainda naquele estudo, foi despertado o interesse por certos problemas de ordem prática[2] que, comumente, apareciam em tais livros. Com o intuito de tornar acessível ao professor de matemática uma amostra de problemas práticos de trigonometria apresentados no passado e também, tendo em vista fornecer informações das quais fosse possível fazer um julgamento crítico do ensino de trigonometria atual, foi realizado um exame e uma apresentação da resolução de alguns problemas trigonométricos encontrados nas obras analisadas. Problemas esses que tinham por objetivo medir a altura de objetos e distâncias acessíveis e inacessíveis.

Quanto à abordagem desses problemas práticos de trigonometria na dissertação, em virtude da delimitação do tema, eles tiveram uma exploração inicial, de caráter descritivo. De fato, foram escolhidos os quatro tipos de problemas mais comuns,

[1]Referem-se às coleções de livros didáticos franceses adotados no Brasil, a partir do final do século XIX, cujas siglas F.I.C. e F.T.D. representam, respectivamente, “Congregação dos Frades da Instrução Cristã” e “Congregação Marista”.

[2]Pode-se entender a qualidade prática dada aos problemas, referindo-se aos problemas reais e/ou do cotidiano.

presentes nas dez obras analisadas[3] e foi realizada uma descrição de seus enunciados, suas ilustrações e suas resoluções. A análise dos quatro tipos de problemas foi tratada no sexto capítulo da dissertação, cujo título é *Uma análise de alguns problemas práticos envolvendo resolução de triângulos*. A fim de esclarecer os problemas considerados naquela pesquisa, seguem os seus enunciados:

- Problema 1 – Determinar a altura de um objeto vertical de base acessível.
- Problema 2 – Determinar a altura e/ou distância de um objeto cuja base é inacessível.
- Problema 3 – Generalização do problema anterior: Calcular a altura de uma montanha.
- Problema 4 – Problema da carta, do mapa ou de Pothenot[4].

Esses problemas permanecem presentes até à atualidade nos livros didáticos e são, em geral, recomendados nos programas de matemática do ensino fundamental e médio. Para confirmar, com atenção especial aos problemas de medição de alturas, fez-se uma busca preliminar por eles, em livros didáticos de matemática, a partir de 2009. Optou-se por examinar livros recomendados pelo Ministério da Educação, para serem adotados em escolas públicas, tanto das séries finais do ensino fundamental quanto do ensino médio. Foram consultados quatro livros didáticos de matemática, examinadas as partes que continham os tipos de problemas que se intencionava investigar neste trabalho, e os exemplos, a seguir, ilustram a abordagem deles no campo da educação escolar atual.

Mori e Onaga (2009) apresentam em seu livro didático, dedicado ao 9° ano do ensino fundamental, uma seção intitulada *Leitura +* que, segundo as autoras, tem o objetivo de tratar de assuntos extracurriculares e interdisciplinares contando, com temas relacionados à história de pessoas que contribuíram com as produções matemáticas ao longo do tempo. Em uma dessas seções do *Leitura +*, as autoras propõem o *Cálculo de alturas e distâncias inacessíveis*, narrando um pouco da

[3]Dessas dez obras analisadas, apenas uma não tratava de problemas práticos que envolviam a resolução de triângulos.
[4]Refere-se à determinação de um ponto a partir da medida de dois ângulos tomados desde o ponto sobre uma base conhecida. Cada ângulo determina um arco capaz e a intersecção de ambos os arcos capazes determina o ponto. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/24620133/O-problema-de-Pothenot>. Acesso em: 24 fev. 2013.

história de Tales de Mileto e do problema que ele resolveu: “Como calcular a altura de uma pirâmide sem medi-la diretamente?”. Mori e Onaga (2009, p. 157) concluem que, pelas observações de Tales de Mileto, “ele descobriu que a sombra de uma estaca qualquer, fincada perpendicularmente ao solo, era proporcional à sombra projetada por uma pirâmide no mesmo instante”. Assim, elas mostram a relação de proporcionalidade entre os triângulos retângulos semelhantes formados, a partir das sombras da pirâmide e da estaca no solo.

Constatou-se que livros didáticos do 1° ano do Ensino Médio contemplam, em seus textos, vários problemas de medição de alturas. A trigonometria é tema amplo de estudo no 1° ano, e esses problemas de medição de alturas, geralmente, são propostos após o tópico *Trigonometria no triângulo retângulo*. O exemplo[5] abaixo foi apresentado em Souza (2010) na parte de *Atividades*, que foram sugeridas depois de terem sido abordadas as relações métricas num triângulo retângulo:

> Os funcionários de uma companhia de energia elétrica irão demarcar uma circunferência ao redor de uma torre de transmissão para que sejam fixados alguns ganchos sobre ela, e posteriormente colocados estais[6], ligando os ganchos ao topo da torre. De acordo com o projeto, os estais devem ter 57,7m de comprimento cada e formar com a horizontal um ângulo de 60°.
> a) A que distância do centro da base da torre, aproximadamente, devem ser fixados os ganchos para a colocação dos estais?
> b) Qual é a altura aproximada da torre de transmissão?
> c) Calcule, aproximadamente, a área interna à circunferência a ser demarcada pelos funcionários (SOUZA, 2010, p. 280).

O professor Paiva (2009), no terceiro capítulo da sua obra para o 1º ano do ensino médio, trata da geometria plana (triângulos e proporcionalidade) onde são apresentados vários problemas para calcular a altura de um objeto. Seguem dois exemplos desses problemas relatados pelo autor:

> - “Um cabo de aço de 10m de comprimento é esticado no topo de um poste a um ponto de um terreno plano e horizontal, de modo que o ângulo entre o cabo e o solo mede 30°. Calcule a medida do poste” (PAIVA, 2009, p. 76).
> - Um estudante posicionou-se a 50m de distância de um prédio e colocou, a 16cm de seus olhos, uma haste vertical de 20cm de comprimento tal que a haste e o prédio ficassem sob o mesmo ângulo visual. A partir dessa situação, o jovem calculou a altura do prédio. Qual é essa altura, em

[5]Vale ressaltar que há uma figura com o caráter meramente ilustrativo para esse problema.
[6]Os estais são os cabos que estarão ligados pelos ganchos fixados na circunferência até o topo da torre.

> metros? (PAIVA, 2009, p. 77).

Já no livro didático de Dante (2010), para o 2° ano do Ensino Médio, pode-se destacar o primeiro capítulo intitulado *Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer*. Esse capítulo contém vários problemas de medição de alturas, inclusive questões de vestibulares envolvendo o tema, e se apresenta como uma revisão de conteúdos do 1° ano.

Desde o trabalho de mestrado, o interesse por abordar mais profundamente em pesquisa acadêmica os problemas práticos de matemática permaneceu, principalmente, em relação àqueles que envolviam cálculos de medição de alturas, e é o que se desenvolveu nesta investigação.

A construção deste trabalho tem inspirações nas teorias sobre abordagem histórica tanto da matemática quanto da educação matemática. Pode-se compreender a história da matemática como um estudo das produções passadas desta ciência. Ou se vista, fundada em uma proposta educacional de ensino ou pesquisa, pode ser determinante em vários processos, como o de promover uma historiografia que, com ferramentas do presente, forneça uma percepção do passado como orientação para o futuro. Este trabalho coaduna com essa perspectiva, repousando sobre estudos comparativos da produção científica de um determinado período. D'Ambrosio (1999, p. 97) ratifica a relevância da história imersa na educação, quando afirma que

> as práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade.

Aponta-se aí uma forte ligação entre a prática educativa de matemática e a história da matemática. Além disso, grande número de pesquisas em educação matemática vem apontando a história da matemática qual uma contribuição importante para a prática pedagógica do professor. Não se referindo à simples utilização da história da matemática como motivação ao desenvolvimento do conteúdo, mas englobando "elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional" (BARONI; NOBRE, 1999, p. 132).

Levando em conta as intenções deste trabalho, de elaborar uma trajetória histórica de problemas de medição de alturas, coaduna-se com a ideia de que para que os conhecimentos matemáticos sejam amplamente abordados, faz-se necessária a busca pela história de tais conhecimentos e/ou conceitos, sendo que a compreensão deles implica também, conforme menciona Certeau (2010), na compreensão da relação entre o lugar de produção social, a prática e a escrita. Dessa forma, na produção deste trabalho de cunho histórico, na área de matemática, procura-se construir uma sequência de novas leituras do passado, que contemple lacunas e releituras.

1.2 A QUESTÃO DA PROBLEMATIZAÇÃO, OS OBJETOS DE ESTUDO E O MÉTODO

Na tentativa de elaborar o problema de pesquisa que se deseja investigar, tem-se, por foco, alguns aspectos essenciais: os problemas de medição de alturas, livros antigos que abordaram tais problemas, contextos sociais do tempo dos indivíduos que produziram esses livros e os modos de resoluções dos mesmos.

Considerando Baroni e Nobre (1999), a grande abrangência que a pesquisa científica em história da matemática apresenta foi sintetizada pelo Prof. Dr. Hans Wussing[7] nos seguintes itens: história de problemas e conceitos; as interligações entre matemática, ciências naturais e técnica; biografias; organizações institucionais; a matemática como parte da cultura humana; influências sociais ao desenvolvimento da matemática; a matemática como parte da formação geral do indivíduo; análise histórica e crítica de fontes literárias.

O primeiro item elencado, “história de problemas e conceitos”, está diretamente relacionado com as intenções deste trabalho. Os autores supracitados mencionam que ele possui maior densidade de trabalhos investigativos no panorama internacional; e que, no Brasil, não é tão simples realizar investigações em história

[7]Hans Wussing foi um dos mais respeitados pesquisadores em História da Matemática do mundo.

da matemática sobre temas desenvolvidos em outros países onde se encontram as fontes primárias.

Entretanto, levando-se em conta que, atualmente, se vive um tempo de intensas inovações tecnológicas, que grandes bibliotecas, no país e no mundo, procuram tornar cada vez mais acessíveis obras raras e antigas através da digitalização das mesmas, pode-se afirmar que existem mais facilidades para realização de pesquisa histórica em matemática. O que se pretendeu nesta investigação foi trabalhar com fontes primárias principalmente, mas que fossem, essencialmente, documentos disponíveis (tratados e publicados).

Em direção à questão desta pesquisa que está imersa no campo da educação, alguns cuidados foram tomados. Num artigo intitulado *A pesquisa educacional entre conhecimentos, políticas e práticas: especificidades e desafios de uma área de saber*, Charlot (2006) discute sobre educação, ressaltando-a como um espaço saturado de discursos diversos e múltiplos. São identificados diferentes tipos desses discursos, sendo que, em um deles, ela destaca serem o interesse e a legitimidade de um discurso científico sobre a educação, normalmente, negados ao se levar em conta ter cada indivíduo alguma experiência nesse campo. Concorda-se com Charlot (2006, p. 4), ao mencionar que “quem deseja fazer pesquisa em educação deve sair da esfera da opinião e entrar no campo do conhecimento”. Para isso, algumas questões devem guiar o trabalho do pesquisador, como por exemplo: o que quero saber e ninguém ainda sabe? Como, de fato, farei isso?

Ratificando essa ideia, compreende-se que, independente do campo de uma pesquisa, é necessário que se “tenha clareza sobre o que exatamente se deseja investigar, porque se deseja investigar esse tema, porque é relevante tal investigação, o que já se sabe a respeito, que objetivos se pretende alcançar e como realizar essa pesquisa” (SAD e SILVA, 2008, p. 27).

Como é recomendado, há uma questão que guia este trabalho no sentido de responder o que se quer saber: ***quais os textos e os contextos dos problemas de medição de alturas do Renascimento?***

Apoia-se na perspectiva do quão importante é fazer pesquisa histórica em matemática e em educação matemática e, na concepção de conhecimento do passado do historiador Bloch (2001), quando menciona que a própria definição de passado revela a impossibilidade de sua mudança; contudo, não há como negar que ele é algo que foi desenvolvido, transformou-se e até se aperfeiçoou.

Por outro lado, tomou-se, por base principal, a concepção de história de Braudel (2009b). Para ele, a história nunca parou de depender de condições sociais concretas, ela é “filha de seu tempo”; o papel do historiador é importantíssimo para que os métodos e os programas da história tenham respostas mais precisas e mais seguras, uma vez que tudo isso depende das reflexões, do trabalho e das experiências vividas. Como crítico, o trabalho histórico não pode ser realizado unilateralmente. Observou-se que alguns estudos já feitos sobre autores e obras desde o Renascimento sinalizam a inter-relação existente entre a matemática e a arquitetura, assim como a influência que a matemática exerceu e ainda exerce sobre outras áreas do conhecimento.

Enfim, as orientações teóricas desta pesquisa fundamentam-se em pensadores que compreenderam que produções humanas não são realizadas e nem são construídas isoladamente.

As principais fontes de estudo desta pesquisa referem-se aos livros selecionados com a finalidade de contribuir a “contar” uma história do processo de resolução de problemas de medição de alturas. Foram selecionados três livros para análise dos problemas de medição de alturas de objetos, produzidos no Renascimento europeu, cujos autores foram relevantes no contexto social em que viveram e produziram suas obras. Os livros selecionados para a análise nesta investigação foram:

1. BARTOLI, Cosimo. **Opuscoli morali di Leon Battista Alberti gentil’huomo firentino, tradotti e parte corretti da M. Cosimo Bartoli**. Venezia: Francesco de’Franceschi, 1568.[8]

---

[8]Analisaram-se duas obras de Alberti. Uma edição brasileira de 2006 (ALBERTI, Leon Battista. *Matemática Lúdica*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006), na qual se encontram informações de que antes do século XVIII, além de 13 manuscritos sem assinatura de Alberti, só há registro de uma única edição impressa de Cosimo Bartoli, sendo que o manuscrito original está perdido até hoje,

2. FINEO, Orontio. **Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Orivoli, Et gli Specchi**. Venetiá: Presso Francesco Franceschi Senese, 1587.
3. FABRI, Ottavio. **L'Uso della squadra mobile**. Padoua: Pietro Bertelli, 1615.

Parafraseando Jaguaribe (2001, p. 478) ao mencionar que "a história é um processo não concluído [...]" e compreendendo que o historiador trabalha com fatos revelados pelas fontes, a partir de uma análise minuciosa dos diferentes sentidos históricos que podem ser considerados, torna-se imprescindível conduzir este trabalho com algumas finalidades ou objetivos.

Como objetivo mais amplo para esta investigação, pretende-se analisar textos e contextos dos problemas que envolveram a medição de alturas presentes nos livros selecionados, produzidos num período que contempla o denominado Renascimento.

Nesse caso, o escopo principal de estudo são os problemas de medição de alturas de objetos, entendendo-os como aqueles nos quais os enunciados, por alguma necessidade específica, propõem encontrar uma medida para a altura de um determinado objeto. Tal objeto, nos casos analisados nesta pesquisa, foi sempre representado por uma torre, o que é natural, tendo em vista os problemas práticos ligados à vida cotidiana dos indivíduos no tempo do Renascimento.

Antes de elencar os objetivos específicos, entende-se relevante apresentar primeiro a compreensão que se tem dos livros escolhidos para a análise. Todos os livros desta investigação foram produzidos, de alguma forma, para o ensino, que poderia ser dito não acadêmico. Foram escritos sempre dedicados a alguém com título nobre, e a matemática utilizada para resolver os problemas apresentados ficava, na maioria das vezes, implícita, sobressaindo-se o processo de resolução com enfoque prático.

Optou-se por classificá-los apenas como livros. Eles eram assim denominados na época, apesar de terem representado textos especiais, pois, como evocado, foram escritos para uso de nobres, para iniciados no tema geometria e/ou na prática de

---

provavelmente escrito em meados do século XV. A outra obra foi traduzida e editada por Cosimo Bartoli (uma edição de 1568).

construção de instrumentos e também como manuais didáticos. Tais livros contribuíram para divulgar conhecimentos práticos e científicos do tempo de produção e, cada um deles foi analisado como inserido em um contexto social mais extenso, como aquele em que foi produzido o conhecimento pela comunidade científica, da época, em geral.

Com base nos livros selecionados e em seus respectivos autores que trataram de problemas do tipo “determinar a altura de um objeto”, deseja-se nesta pesquisa:

- Compreender o tempo e o lugar de produção dos livros selecionados para a pesquisa.
- Analisar como os instrumentos: *gnômon* (ou dardo, ou flecha), quadrante geométrico e esquadro móvel foram construídos e utilizados.
- Explorar como as ilustrações presentes nos livros selecionados foram impressas, e sob quais circunstâncias elas foram relevantes para a produção de cada um desses livros.
- Analisar os textos e os contextos de problemas que envolviam o cálculo de alturas de objetos, presentes em três livros do Renascimento europeu, segundo os seguintes pontos de interesse: enunciado; linguagem do problema; ilustrações; abordagem resolutiva e instrumentos de medida.

A natureza histórica desta investigação e os seus objetivos mencionados orientam os procedimentos metodológicos a serem seguidos. Desse modo, quanto ao método, este estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa de abordagem histórica, que procura analisar como o tipo de problema “determinar a altura de um objeto” se apresenta em livros que foram produzidos no período do Renascimento europeu. Conta, portanto, com os seguintes instrumentos metodológicos: pesquisa histórica e pesquisa bibliográfica.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009), a pesquisa bibliográfica (ou histórico-bibliográfica) é a que se faz, primordialmente, sobre documentação escrita, considerando que o campo de pesquisa pode ser caracterizado pelas bibliotecas, pelos museus, pelos arquivos e pelos centros de memória. O campo desta pesquisa contemplou uma busca de documentos: os livros. Eles, além de terem sido acessados por meio de fotografias em bibliotecas de obras raras[9], também puderam ser localizados em sítios da internet[10], que disponibilizam obras raras e antigas. No entanto, até o acesso efetivo das obras, pesquisas foram realizadas no acervo da seção de obras raras e de manuscritos da Biblioteca Nacional, na Biblioteca de Obras Raras da Universidade Federal do Rio de Janeiro, na Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo e no acervo particular de livros da orientadora desta pesquisa.

Conforme Sad e Silva (2008, p. 35), "a história da matemática trabalha com fontes de tipologia diversificada (dentre elas: escritas, orais, oficiais, públicas, individuais, coletivas)". Nesta pesquisa, foram consultadas tanto fontes originais quanto secundárias, por exemplo: tomaram-se por texto original o livro de Ottavio Fabri e, por fontes secundárias, obras dos autores Leon Battista Alberti e Oronce Finé, ambas traduzidas por Cosimo Bartoli.

Um dos critérios de seleção dos autores está relacionado com o destaque obtido por seus trabalhos e suas produções, o qual será mais bem explorado na próxima seção. O estudo das suas biografias amplia a compreensão da relação que existiu entre a obra, o próprio autor e o contexto socioeconômico e cultural em que o autor estava inserido. Para as biografias, foram utilizadas fontes correlatas, quais sejam: estudos já realizados a respeito dos autores escolhidos, em livros ou teses, biografias disponíveis pelos professores John O'Connor e Edmund Robertson, da Escola de Matemática e Estatística da University of St Andrews (Scotland), criadores do site intitulado *The Mac Tutor History of Mathematics archive*[11], que apresentam biografias de matemáticos.

É importante salientar que um dado, mesmo que ele tenha sido alcançado por meio de uma fonte primária, é pouco provável que responda completa e adequadamente

---

[9]Neste caso, a obra analisada de Oronce Finé também foi fotografada pela orientadora desta pesquisa no Instituto Max Planck da Alemanha.

[10]O livro de Leon Battista Alberti foi obtido através de donwload do site *Google Books* e, os livros de Oronce Finé e Ottavio Fabri foram obtidos através do sítio eletrônico do Instituto Max Plank: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/home>, o qual contém um grande acervo digitalizado de obras raras e antigas.

[11]As citações neste trabalho, feitas dos autores John O'Connor e Edmund Robertson, são traduções da autora das informações apresentadas no site de autoria dos mesmos. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Alberti.html>. Acesso em: 29 nov. 2010.

às questões que se almeja responder numa pesquisa. “Na maioria das vezes, é preciso cruzar os dados obtidos de diferentes modos ou fontes, ou analisá-los a partir de determinada teoria, para que sejam proficientes em termos do que o pesquisador almeja” (SAD; SILVA, 2008, p. 37). Por isso, foi inevitável recorrer além das fontes fornecedoras dos problemas, assim como buscar compreender o contexto de produção delas com o apoio de uma teoria histórica.

Tem-se aqui uma questão ampla de pesquisa, pois ela envolve um período extenso, o Renascimento, caracterizado dentro da história como de longa duração. O contexto social e o econômico desse tempo foram influenciados pelos indivíduos e por suas necessidades intrínsecas. Para analisar os textos e os contextos dos problemas de medição de alturas em livros do Renascimento foi preciso decidir por aspectos fundamentais que contribuíssem para tal análise. As escolhas foram norteadas pelos objetivos pretendidos sobre tais problemas e focaram-se em relação aos enunciados, às linguagens utilizadas, às ilustrações, às abordagens de resoluções e aos instrumentos.

Quanto às ilustrações presentes nos livros analisados, procurou-se abordá-las, com mais ênfase, dentro de cada um dos capítulos sobre os autores (Leon Battista Alberti, Oronce Finé e Ottavio Fabri). O motivo prende-se, principalmente, aos modos diferentes que cada um desses autores imprimiu as suas ilustrações nas obras analisadas.

Febvre e Martin (2005) comentam que os primeiros livros ilustrados na Itália haviam sido obra de impressores alemães, os quais formaram escolas locais, influenciados mais do que em outros lugares, pela pintura e pela arte dos frescos; por outro lado, o público italiano acostumado a uma arte menos tosca, parece não ter apreciado, de forma imediata, os livros ilustrados gravados em madeira, até que estes se adaptaram aos seus gostos. Assim, é possível perceber como deve ser complexo o estudo das ilustrações dos livros, visto que para isso é necessário compreender as correntes artísticas, intelectuais e sociais de cada época. Dessa forma, procurou-se tratar das ilustrações presentes nos livros analisados, baseando-se na obra de Febvre e Martin (2005), intitulada *La aparición del libro*, que investiga também as ilustrações no processo histórico de produção do livro. Tal tratamento é realizado no desenrolar dos capítulos sobre os livros de Alberti, Finé e Fabri.

Especificamente, sobre os instrumentos de medida, a preocupação maior neste trabalho foi a de compreender como os mesmos, em especial, o quadrante geométrico de Oronce Finé e o esquadro móvel de Ottavio Fabri foram construídos e utilizados para a medição de alturas de objetos. Smith (1958), em seu livro intitulado *History of mathematics*, trata de modo particular dos instrumentos presentes na geometria ao longo da história. Segundo Smith, antes da invenção do telescópio, do microscópio e do vernier[12], dificilmente podia-se afirmar quais foram todos os instrumentos de precisão. No entanto, para a medida prática da Terra, para nivelamento e para a medição de alturas, o mundo desenvolveu vários instrumentos interessantes.

Em geral, os antigos agrimensores mediam distâncias através do uso de uma corda ou de uma haste de madeira (como a utilizada por Leon Battista Alberti em sua obra *Matemática Lúdica*, produzida em meados do século XV)[13], sendo que as unidades de medida variavam de acordo com as localidades. Além disso, os primeiros livros impressos forneceram muitas informações quanto à natureza dos instrumentos herdados da Idade Média. Desses, podem ser destacados o espelho, para a medição de alturas através da formação de triângulos semelhantes, o quadrante geométrico (como o utilizado por Oronce Finé)[14], o quadrante, o astrolábio e o báculo (SMITH, 1958). A Figura 1, apresentada por Smith (1958), representa um tipo de quadrante geométrico usado por Oronce Finé, um dos autores analisados neste trabalho.

---

[12]É um dispositivo que nos permite efetuar a leitura das frações de unidade, ou seja, das frações da menor divisão de uma régua ou de um arco a que se adapte, e cuja invenção é atribuída a Pierre Vernier e Pedro Nunes. Disponível em: <http://fisica.uems.br/lab1/nonio-vernier.pdf>. Acesso em: 03 set. 2013.
[13]Observação nossa.
[14]Observação nossa.

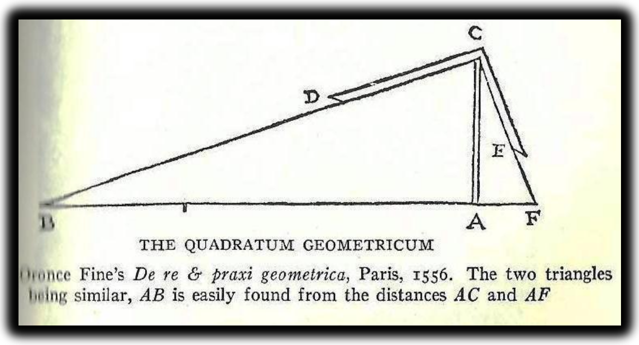


Figura 1 – Ilustração de um tipo de quadrante geométrico usado por Oronce Finé[15]
Fonte: Smith (1958, p. 345).

O astrolábio, por exemplo, foi o instrumento matemático astronômico mais conhecido. O nome vem do Grego e significa “o que busca estrelas”. Uma das formas iniciais do astrolábio foi a chamada esfera armilar, derivada do termo *armillae*, ou anéis, os quais eram dispostos de modo a formar dois, ou às vezes, três círculos, normalmente postos, perpendicularmente um ao outro. Um anel, usualmente, correspondia ao plano do equador e o outro, ao plano do meridiano. Por esses dois círculos, os antigos determinavam as duas coordenadas de uma estrela. O astrolábio descrito por Ptolomeu, astrônomo grego que viveu em Alexandria, era um tipo de esfera armilar, além disso, tais esferas foram mencionadas pela primeira vez, na escola à que ele estava associado. Os primeiros escritores comentaram que Eratóstenes, pelo seu interesse em Geodésia e Astronomia, induziu o rei Ptolomeu III a ter tais instrumentos expostos no museu em Alexandria (SMITH, 1958).

> Intimamente relacionado com o astrolábio é o quadrante, um instrumento no qual apenas um quarto de círculo era usado. Ele apareceu sob várias formas, às vezes sem um arco ou com os ângulos sendo lidos sobre os lados de um quadrado. A primeira descrição que nós temos é dada no Almagesto, e por causa disso a honra de sua invenção é geralmente atribuída a Ptolomeu (SMITH, 1958, p. 355, tradução nossa).

Observa-se aí uma familiar relação entre o astrolábio e o quadrante, sendo este um instrumento que foi utilizado pelos indivíduos do tempo do Renascimento italiano, como foi possível observar nos livros analisados. Faziam parte desse grupo de indivíduos: artistas, artesãos, nobres entre outros. Sobre a presença de profissionais, em vários campos do saber, Braudel (2007) ressalta a existência de

---

[15] Tradução do texto contido na Figura 1: “*De re & praxi geometrica* de Oronce Fine, Paris, 1556. Os dois triângulos sendo semelhantes, AB é facilmente encontrado a partir das distâncias AC e AF” (SMITH, 1958, p. 345, tradução nossa).

uma Itália abastada no final do século XVI, e nela uma cultura que se traduziu em um grande negócio, em uma grande indústria. Com efeito,

> desse ponto de vista, especializações regionais se esboçam, uma espécie de divisão do trabalho: os Alpes da vertente meridional fornecem à exportação mestres-de-obra, pedreiros, estucadores, escultores; Milão recruta músicos e violonistas; Mântua especializa-se na formação de companhias de comediantes; Cremona fabrica alaúdes e violinos. O traço mais forte é ainda a participação de uma crescente massa de italianos nesses empreendimentos ativos.
> Há mais canteiros de construção, mais pintores, mais escritos do que a Itália jamais viu. E mais efervescência intelectual. E meios intelectuais mais amplos do que nunca. (BRAUDEL, 2007, p. 113).

Esse contexto social, certamente, contemplou situações das quais se fizeram necessários os instrumentos de medidas para resolver problemas cotidianos daquele tempo. Interessante salientar que o autor Smith exibe a ilustração, contendo um instrumento de medida, o quadrante[16], de uma das obras analisadas nesta pesquisa. A Figura 2 contém o esquadro móvel (um tipo de quadrante, conforme Smith (1958)), utilizado pelo italiano Ottavio Fabri.

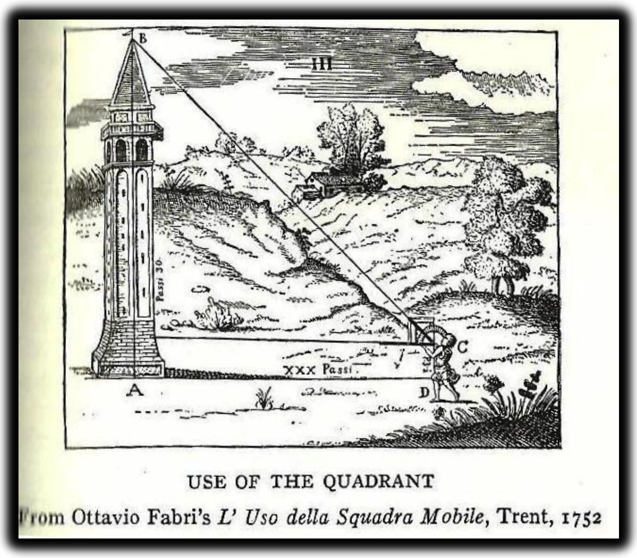


Figura 2 – Ilustração contendo um tipo de quadrante (o esquadro móvel) utilizado por Ottavio Fabri
Fonte: Smith (1958, p. 355).

Desse modo, os instrumentos de medidas abordados neste trabalho estão inclusos no processo histórico da utilização dos mesmos pelas civilizações e foram

---

[16]Neste caso, o quadrante é também chamado de esquadro móvel.

importantes no decurso da evolução técnica e matemática, na resolução de problemas práticos.

Acredita-se que para uma melhor compreensão do desenvolvimento de conceitos matemáticos, bem como do movimento de articulação deles, urge conhecer o contexto histórico em que eles surgiram. Levando isso em conta, identifica-se esta pesquisa dentro de uma perspectiva lógico-histórica em que o pressuposto é a “possibilidade do estudo no movimento do pensamento, no sentido de apreensão do objeto de estudo, isto é, do desenvolvimento do conceito” (DIAS; SAITO, 2009, p. 9). Alguns dos conceitos, neste caso, que se buscam compreender, são, por exemplo, os dos instrumentos de medidas propostos, como o quadrante geométrico e o esquadro móvel, a fim de serem utilizados na resolução dos problemas de calcular a altura de objetos verticais. Isso dentro de um contexto histórico do tempo do Renascimento.

1.3 OS “PORQUÊS” DA QUESTÃO, DO PERÍODO E DOS AUTORES

Em atenção à “questão central[17]” que esta pesquisa tentou responder, justifica-se sua importância, destacando-se dois aspectos fundamentais. O primeiro é que a história desse tipo de problema é relevante não só para a história da matemática como também para a história da educação matemática. Ele poderá desvelar vários tipos de resoluções, ao longo do tempo em que ferramentas matemáticas aplicadas estariam diretamente relacionadas com a produção matemática, obtida até o momento em que tais problemas foram propostos. A história desse tipo de problema poderá mostrar a relação entre os instrumentos empregados para medições e o contexto social da época de produção.

O segundo aspecto relaciona-se, diretamente, com a prática docente do professor de matemática. Como já exposto, esse tipo de problema apresenta-se em obras, durante vários séculos, inclusive, nos livros didáticos de matemática em uso, atualmente, nas escolas. Fazendo parte da história da educação matemática, os

[17]***Quais os textos e os contextos dos problemas de medição de alturas do Renascimento?***

problemas relacionados com a medição de alturas podem ser propostos em sala de aula, a partir de situações didáticas e/ou com a utilização de sequências didáticas.

Existem, atualmente, várias propostas para a utilização da história da matemática em sala de aula. Conforme Silva (2010, p. 168), “não é apenas expondo oralmente episódios da história da matemática, como o surgimento da álgebra ou da vida de matemáticos que podemos trabalhar a história”. A autora, com base em Fauvel e Van Maanen, aponta várias possibilidades de trabalho com a história: fragmentos históricos; projetos de pesquisa baseados em textos históricos; fontes primárias; fichários; pacotes históricos, utilizando como aproveitamentos, erros, concepções alternativas, argumentos intuitivos; *problemas históricos*[18]; instrumentos mecânicos; atividades matemáticas experimentais; jogos; filmes ou outros meios visuais; experiências ao ar livre; e a internet.

Certamente, conhecer o desenvolvimento histórico de um tipo de problema matemático poderá também ser útil ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. Acredita-se, como Silva (2010), que tal conhecer poderá: auxiliar o estudante na compreensão de conceitos; ajudar a estabelecer conexões entre a matemática e outras ciências; conscientizar os alunos das relações existentes entre a matemática e a sociedade; e permitir desenvolver e auxiliar a capacidade de resolução de problemas.

Delimitou-se um período para esta pesquisa: o caracterizado pelo Renascimento. Tal escolha justifica-se por vários fatores. Antes de mencioná-los, vale argumentar sobre a concepção de Renascimento.

O Renascimento é um tema que ainda gera muita polêmica. De acordo com Jaguaribe (2001), tal conceito, como se compreende atualmente, foi apresentado por Jules Michelet (1798-1874) e propagou-se com o trabalho de Jacob Burckhardt, em 1860, intitulado *A Civilização do Renascimento na Itália*.

> Michelet pensava que esse período se estendia, grosso modo, de 1400 até 1600, marcado pela descoberta do mundo e a descoberta do homem.

[18]Grifo nosso.

> Burckhardt via no Renascimento, em contraste com a Idade Média, a redescoberta do homem e do mundo empreendida por indivíduos em harmonia com a realidade circundante. Há um ressurgimento do individualismo, e o homem se torna o construtor do seu mundo, transformando o Estado e a própria vida em uma obra de arte (JAGUARIBE, 2001, p. 431).

Não se pode negar que, nessa concepção de Renascimento, houve uma continuidade das tradições e também das transformações ocorridas nos séculos XIII e XIV. Todavia, o que há de novo nesse período é o modo como o homem passa a encarar o mundo e a sua própria forma de ser (aceitando por premissa um individualismo radical) e também o modo de levar em conta o papel da religião e a diferença entre o sagrado e o profano (JAGUARIBE, 2001). "Essencialmente, os homens dos séculos XV e XVI pensavam viver um renascimento – embora a palavra não fosse empregada – no sentido de reviver e recuperar o mundo clássico" (JAGUARIBE, 2001, p. 434).

> O termo RENASCIMENTO se refere ao retorno ideal às formas da Antiguidade clássica enquanto verdadeira fonte da beleza e do saber. O período histórico que se acreditou merecedor de tal nome cultivava a leitura dos clássicos gregos e latinos em busca de uma linguagem que fosse universal, recuperando os modelos e as regras da arte antiga. Os intelectuais se dedicavam ao estudo da gramática, retórica e dialética, exercitando-se segundo os modelos mais elegantes da Antiguidade, em particular o latim neoclássico. Ao grande desenvolvimento de tais estudos, designados *studia humanitatis*, deu-se o nome de Humanismo. Seus protagonistas, os humanistas, foram a vanguarda da grande transformação cultural chamada Renascimento (BYINGTON, 2009, p. 7).

Byington (2009, p. 8) assevera que, em geral, quando se pensa sobre uma periodização que caracterize o Renascimento, compreende-se o tempo de meados do século XIV ao final do século XVI. Mas, para a autora, o Renascimento é um movimento histórico "caracterizado pelo progresso técnico e científico, por maior conhecimento da filosofia e da literatura antigas e maior amor pela beleza".

> O movimento surgiu nas cidades-Estado italianas e, graças a seus humanistas e artistas, matemáticos e engenheiros, banqueiros e homens de negócios, a península Itálica foi vanguarda dessa revolução cultural que dali se estendeu para o resto da Europa. Junto com as cortes, mas sobretudo por meio das ordens religiosas, as novidades formais viajaram para o Novo Mundo, onde seus ecos se estenderam pelo século XVIII (BYINGTON, 2009, p. 9).

Burke (1999) em seu livro intitulado *O Renascimento italiano*, faz um tratamento desse tema, salientando que há uma quebra na tradição - a do passado medieval, e na propagação de outra, a estabelecida na Antiguidade clássica. Citando Burke (1999, p. 12): “essas tradições em transformação têm alguma relação não só com o passado, mas com a história geral do tempo: *booms* e colapsos econômicos; crises políticas e transformações menos dramáticas e mais graduais da estrutura social”.

Importa salientar que esse tempo do Renascimento europeu não foi apenas representado pelo progresso das áreas da arte, do comércio, da engenharia, entre outras. Tal progresso ocorreu para a elite da sociedade. A maioria não tinha, efetivamente, acesso às “novas” transformações e, portanto, não poderia contribuir para esse progresso. Aspectos ligados às classes sociais mais baixas também podem ser citados quando o Renascimento é mencionado. Assim sendo, Miranda (2004, p. 142) comenta que “a escravidão fora muito combatida pelo cristianismo, mas reapareceu de forma crônica no início do Renascimento”.

De fato, o advento das grandes navegações na dita “Era Moderna”, que inclui o tempo do Renascimento, trouxe o estabelecimento de comunicação entre várias sociedades do mundo. Destarte,

> [...] Os contactos entre europeus e asiáticos se intensificaram através de novas vias de transportes. Ampliou-se o contacto entre europeus e africanos. Iniciou-se a colonização européia do continente africano. Estabeleceu-se o relacionamento irreversível e cada vez mais repetido entre populações variadas, mas este relacionamento assumiu formas, não só pacíficas, mas também violentas, incluindo a dominação colonial e a escravidão (GORENDER, 2000, p. 19).

Um ressurgir da escravidão aconteceu no Renascimento e contribuiu para o capitalismo europeu prosperar, mas também pode ser visto como um retrocesso civilizatório, já que a escravidão teve força social na Antiguidade Clássica e retornou nesse tempo, objetivando impulsionar um sistema econômico.

Dois dos três autores europeus tratados nesta pesquisa, Leon Battista Alberti e Ottavio Fabri, foram cidadãos italianos e personagens distintos no meio social em que viveram e no tempo hoje compreendido por Renascimento. O primeiro autor, por exemplo, destacou-se na história da arquitetura, e o segundo foi importante funcionário do governo de Veneza. Eles presenciaram o momento de renovação das artes italianas. Nesta reflexão, assevera Burke (1999, p. 25)

> na Itália, os séculos XV e XVI foram, certamente, um período de inovação das artes, uma época de novos gêneros, novos estilos, novas técnicas. O período é cheio de ‘primeiros’. Foi a época da primeira pintura em óleo, da primeira gravura em madeira, da primeira gravura em metal e do primeiro livro impresso (embora essas inovações cheguem à Itália vindas da Alemanha e dos Países Baixos). As regras da perspectiva linear são descobertas e postas em uso por artistas.

Assim, no entender do Renascimento, aparece uma concepção dinâmica do indivíduo. Segundo Heller (1982), ele “passa a ter a sua própria história de desenvolvimento pessoal, tal como a sociedade adquire também a sua história de desenvolvimento”. Ademais, para a autora, o tempo e o espaço se humanizam. Por isso, é importante preocupar-se na investigação com a época e com o lugar vividos pelos autores que trataram de problemas de medição de alturas.

Considera-se importante destacar quais eram as visões do ser humano sobre o mundo no Renascimento, porque foi nesse tempo que os principais personagens e as fontes desta investigação histórica estão imersos.

Segundo Jaguaribe (2001), no Renascimento, o ser humano passa a assumir uma posição individual, cuja capacidade é que determinará o seu tipo de vida. O autor cita também mais quatro características relacionadas a esse ser humano individual:

- visão secular do mundo, opondo-se à ideia de que a Igreja é que tinha o poder de determinar qual deveria ser o comportamento de cada indivíduo (como na Idade Média);
- “visão protagônica do homem como medida de todas as coisas”, o que o levou ao denominado humanismo (JAGUARIBE, 2001, p. 433);
- “crescente emancipação das mulheres, nas camadas sociais superiores, tanto como respeito à sua conduta pessoal nos assuntos emocionais como nas suas intervenções públicas [...]” (JAGUARIBE, 2001, p. 433);
- a arte ultrapassando os modelos da Antiguidade clássica.

Fundamentando-se em Jaguaribe (2001, p. 439), pode-se afirmar que o Renascimento assinalou o início “da ciência moderna, baseada na observação empírica, na experimentação e na matemática, assim como de novas tecnologias, como a pólvora e o canhão, a bússola e a imprensa de Gutenberg, entre muitas outras".

Cambi (1999) reforça que a base das ideias renascentistas contempla as grandes transformações políticas, sociais e culturais ocorridas desde antes do século XIV e influenciaram os indivíduos nos séculos seguintes. O autor cita dois fenômenos, intrinsecamente, relacionados:

> O primeiro é representado pela formação dos Estados nacionais na Europa e os regionais na Itália [...]. O outro grande fenômeno é a afirmação definitiva de uma burguesia ativa e industriosa que tem seu centro de vida sobretudo nas cidades, que se tornam assim lugares verdadeiros e próprios de propulsão da economia e da cultura (CAMBI, 1999, p. 222).

Sendo esta uma pesquisa histórica que, essencialmente, se utiliza de documentos escritos, parece adequado ter a escolha pela delimitação do tema se concentrado no Renascimento, visto que a invenção da imprensa trouxe, com ela, a possibilidade da divulgação ampla da produção escrita, até então restrita a poucos. Entende-se assim que o acesso aos livros, contendo registros de problemas matemáticos, foi mais simplificado a partir de tal acontecimento. Por outro lado, entende-se que ultrapassar o tempo do Renascimento neste trabalho implicaria em retomar outros movimentos históricos importantes ocorridos após o século XVI, em compreender outros modos de produção de livros e os contextos de seus respectivos autores. O que tornaria este trabalho demasiado longo, correndo-se o risco de não se fazer aprofundamento adequado aos problemas de medição de alturas, foco fundamental aqui proposto.

A escolha dos autores selecionados para responderem à questão[19] central de investigação, Leon Battista Alberti, Oronce Finé e Ottavio Fabri, não foi arbitrária. Suas obras contemplaram as inquietações da pesquisa, pois os papéis exercidos por eles como cidadãos da sociedade europeia em que viveram, influenciaram certamente outros autores, os quais, por sua vez, contribuíram para a divulgação de seus textos e para a divulgação dos modos de resolução de problemas que envolviam a medição de alturas de objetos. Características especiais serão elencadas a seguir e justificam a presença protagonista de cada um dos autores

[19] ***Quais os textos e os contextos dos problemas de medição de alturas do Renascimento?***

Alberti, Finé e Fabri neste trabalho. Entretanto, o reforço dessa justificativa será feito no decorrer desta pesquisa, quando para cada um deles será abordada sua representatividade dentro do seu tempo e lugar.

O Renascimento foi o tempo, e o Mediterrâneo, o lugar deste trabalho. O Mediterrâneo no sentido teórico braudeliano, que tratou desse espaço em sua obra num período de longa duração, e porque os lugares vividos por Alberti, Finé e Fabri, quais sejam, Itália e França, estão imersos nesse Mediterrâneo abordado na obra de Braudel, o qual foi aprofundado durante esta investigação.

O que há de singular nesses três autores é que eles produziram textos para "alunos especiais" como reis e príncipes, no caso de Alberti, e para artesãos ou leigos, no caso de Finé e Fabri. Ademais, eles não foram matemáticos teóricos nem filósofos, como Descartes, embora, poder-se-ia classificá-los como matemáticos práticos.

É importante mencionar o papel do tradutor de dois dos livros analisados: Cosimo Bartoli. Afinal, Bartoli também representou uma figura emblemática da intelectualidade italiana do século XVI e contribuiu para a divulgação dos livros que foram abordados nesta investigação, ou seja, ele presentificou os livros de Alberti e de Finé para uma mesma época. Segundo Saito e Dias (2011, p. 10), um dos livros que Bartoli produziu, intitulado *Del modo di misurare*[20], foi "uma das muitas obras escritas entre os séculos XVI e XVII que versavam sobre a construção e o uso de instrumentos para medir e calcular" e teve muita repercussão na época pelo seu aspecto prático e também pelo ensino proposto da geometria. Para esses autores, obras no estilo da de Bartoli, assim como as tratadas aqui, de Alberti, Finé e Fabri, são especialmente notadas pela articulação proposta entre a construção e o uso dos instrumentos de medidas.

Cosimo Bartoli[21] nasceu em Florença em 20 de dezembro de 1503. Seu pai teve experiência na arte de derretimento de bronze e também como técnico de armas de

[20]Título completo: *Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori*.
[21]A abordagem biográfica que segue foi realizada com base na referência:

fogo. Aos 27 anos, Bartoli se mudou para Roma e trabalhou com arquitetura, sem deixar de lado a matemática, a música e as ciências humanas. Trabalhou para a famosa família dos Médici que governaram Florença a maior parte do Renascimento. E, como agente dessa família, prestou serviços em Veneza por dez anos até que teve que retornar para Florença, com a saúde debilitada, tendo falecido logo depois, em 1572.

Importante destacar um pouco da obra literária de Cosimo Bartoli. Ele aperfeiçoou o vernáculo e, isso se tornou ferramenta poderosa nas mãos de poetas e prosadores de arte além de ter servido para expressar conteúdo científico.

Algumas de suas publicações destacam-se a seguir. Cosimo Bartoli publicou em Florença, em 1550, uma tradução de *L'Architettura* de Leon Battista Alberti. Traduziu e fez alterações nos *Opuscoli morali*, do mesmo autor (refere-se a uma coleção de obras vulgares: *Della statua* e *Della pittura*), além de ter traduzido obras do latim para o italiano (*Momus* e *Ludi Mathematici*), também de Leon Battista Alberti. Essas últimas foram publicadas em 1568, em Veneza.

O tratado de Bartoli sobre matemática aplicada, intitulado *Del modo di misurare*, ou, *O modo de medir a distância, a superfície, os corpos, as plantas, as províncias, as perspectivas e todas as outras coisas terrenas que possam ocorrer ao homem*, foi publicado em Veneza, no ano de 1564. Já em 1587, foi publicado em Veneza e, editado por Ercole Bottrigaro, outro de seu vernáculo científico: as *Obras de Orontio Fineo* de Dauphiné, dividido em cinco partes: *aritmética, geometria, cosmografia e relógios*, traduzido por Cosimo Bartoli e os *espelhos*, traduzido por Ercole Bottrigaro. A parte da geometria, desse livro de Orontio Fineo, foi a investigada neste trabalho.

Completando o quadro de atividades multiformes de Bartoli, são mencionados ainda alguns escritos históricos:

- da breve e agradável *Vida do imperador romano Frederico Barbarossa* (Florença, 1559) aos *Discursos históricos universais* (Veneza 1569);

BARTOLI, Cosimo. Treccani.it L'Enciclopedia Italiana. Dizionario Biografico degli Italiani. V. 6. 1964. Disponível em: <http://www.treccani.it/enciclopedia/cosimo-bartoli_(Dizionario_Biografico)/>. Acesso em: 24 nov. 2013 (tradução nossa).

- em 1566, aos seus cuidados, foi impresso postumamente em Veneza, a *História da Europa* de P. F. Giambullari, seguido da *Oração fúnebre*, que por ocasião da sua morte Bartoli tinha realizado na Academia de Florença;
- *A vida de Leão X*, escrito em latim por Paolo Giovio e popularizado por Cosimo Bartoli, que permaneceu inédito na Biblioteca Nacional Central de Firenze.

Como se percebe, Cosimo Bartoli foi um personagem representativo do Renascimento italiano e, sua qualidade de tradutor de obras, promoveu a divulgação de trabalhos de outros autores relevantes de sua época.

Convém chamar a atenção para o contexto. Na verdade, a presença dos problemas práticos de medição de alturas nas obras, no tempo do Renascimento, não representa um resultado isolado ou um trabalho solitário de um único autor, mas sim, tal presença é consequência dos contextos vividos pela sociedade da época, das necessidades que os indivíduos tinham naquele tempo e naquele lugar. Além disso, há estudos que defendem fortemente que matemáticos formais, como Galileu, que desenvolveram a dita "Ciência Moderna", foram influenciados pelo trabalho de cientistas-engenheiros do Renascimento. Com efeito, citando Lefèvre (2001) há sinais de que Galileu se viu no meio da tradição dos engenheiros italianos do Renascimento, sendo que ele mesmo classificou seu último livro[22] como dentro da tradição de tratados conhecidos, na qualidade de literatura de engenharia vernacular do início dos tempos modernos.

Koyré, citado por Lefèvre (2001, p. 12, tradução nossa), afirma que

> [...] as ciências modernas resultaram de uma mudança radical de paradigmas filosóficos, isto é, da substituição de uma visão da natureza na tradição de Aristóteles - visto como ligado às percepções sensoriais e aos conceitos da vida cotidiana - por uma visão matemática na tradição de Platão.

Isso indica que o trabalho desses matemáticos práticos - como se pode considerar Alberti, Finé e Fabri - foi relevante para o desenvolvimento das ciências modernas,

[22]Intitulado *Discorsi e dimonstrazioni mathematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica & I movimenti locali*.

pois, para acontecer essa transformação radical era imprescindível que antes existisse a preocupação prioritária de estudiosos, objetivando assim resolverem os problemas daquele tempo.

No tratamento dos problemas de calcular alturas de objetos, reconhecendo-os como primeira motivação para esta pesquisa, sentiu-se a curiosidade de compreender o modo como eles foram resolvidos por autores do Renascimento, os quais não se podem enquadrar como matemáticos teóricos ou formais, mas por aqueles que se relacionavam diretamente com a resolução de problemas reais, do cotidiano daquela época. Autores esses que podiam ser compreendidos como matemáticos práticos (não acadêmicos), peritos em resoluções de problemas, em construções de instrumentos e em construções civis, cujos textos funcionavam, prioritariamente, como manuais. Conforme Renn et al. (2001), um novo tipo de cientista-engenheiro emergiu nos séculos XVI e XVII, em distinção aos acadêmicos tradicionais. No que se deduz que

> [...] o surgimento desse novo grupo social e suas causas epistemológicas não podem ser adequadamente compreendidos sem levar em conta o desenvolvimento tecnológico que teve lugar pelo menos desde o Renascimento em certos centros urbanos europeus (RENN et al., 2001, p. 66, tradução nossa).

Nesses centros urbanos europeus incluíram-se, a princípio, cidades da Itália que se tornaram berço do desenvolvimento econômico da época. Pode-se mencionar, conforme Braudel (1983, p. 433), que toda economia-mundo admite um centro, uma região determinante que incita o progresso de outras regiões. “Com toda evidência, este centro mediterrânico, tanto no século XVI como no século XV, é um estreito quadrilátero urbano, Veneza, Milão, Gênova, Florença [...]”. Dois autores desta pesquisa, Alberti e Fabri, nasceram e viveram, respectivamente, nas cidades de Gênova e Veneza. Eles fizeram parte desse grupo social dos ditos cientistas-engenheiros que contribuíram para o desenvolvimento daqueles lugares.

No Renascimento, segundo Renn (2001), os artistas e os chamados cientistas-engenheiros compartilhavam carreiras de padrões semelhantes, assim como um currículo comum de aprendizagem. O que equipou esses profissionais com técnicas parecidas para enfrentar os problemas semelhantes, os desafios de projetos ligados às tarefas práticas, tais como os de arquitetura e os desafios da representação visual, no caso, a perspectiva.

O certo é que as grandes construções do Renascimento foram possíveis de serem realizadas, a partir da presença de grandes grupos de artesãos especializados, técnicos e engenheiros que combinavam administração com competência tecnológica. Com base em Renn et al. (2001, p. 67, tradução nossa),

> [...] devido também a pouca disponibilidade de força de trabalho e outros recursos, esses engenheiros artesãos foram continuamente confrontados com desafios técnicos e não apenas desafios logísticos. Em reação a esses desafios é que foram obrigados a explorar o potencial inerente de conhecimento técnico tradicional, com a finalidade de criar novos meios técnicos, como por exemplo, o conjunto de máquinas desenvolvidas por Filippo Brunelleschi [...].

Filippo Brunelleschi influenciou fortemente a obra de Alberti. Realmente, em consonância com D'Amore (2005), Alberti teve a oportunidade de ler a obra de Brunelleschi e ficou impressionado, admirado e incomodado com o trabalho do artista, tanto que na obra intitulada *De Pictura*, Alberti faz uma carta dedicatória, considerando a admiração e o entusiasmo pelo trabalho de Brunelleschi.

Para ratificar ainda mais a importância da presença desses autores nesta pesquisa, há que se mencionar que Castagnetti e Camerota (2001) atribuem o progresso científico, desde a Idade Média, aos profissionais ditos não acadêmicos, aqueles inclusos nas artes, pintores expressivos, assim como navegadores, arquitetos e poetas, incluindo, entre eles, Leon Battista Alberti. Para Caverni, citado por Castagnetti e Camerota (2001, p. 334, tradução nossa), tais profissionais representaram a terceira fase do desenvolvimento humano, "a que corresponde à fase do desenvolvimento individual, durante a qual 'o homem começa, através do uso dos sentidos, a adquirir a posse estável do mundo'".

Estudos feitos sobre autores de matemática (ou de ciências ligadas a ela) e suas obras sinalizam, claramente, a inter-relação existente entre essa ciência e a arquitetura, por exemplo, assim como a influência que a matemática exerceu e ainda exerce sobre outras áreas do conhecimento. Conforme os tipos de problemas que surgiram ou surgem para serem solucionados, emergem técnicas, instrumentos e habilidades desenvolvidas pelo homem para solucioná-los da forma mais eficaz possível.

O aporte teórico desta pesquisa fundamenta-se em pensadores que puderam embasar com mais eficiência as ideias acima, no sentido de justificar que, historicamente, as coisas não são concretizadas nem se constroem isoladamente. Por ser um trabalho de cunho histórico, fez-se uma escolha por historiadores que permitiram “fincar” os fundamentos téoricos da investigação e, ao mesmo tempo, possibilitaram visualizar amarras entre seus temas de escrita e os contextos sócio-históricos dos autores dos livros escolhidos para análise (Leon Battista Alberti, Oronce Finé e Ottavio Fabri).

1.4 OS INTERLOCUTORES TEÓRICOS: MARC BLOCH E FERNAND BRAUDEL

A interlocução teórica foi realizada, mais enfaticamente, com os historiadores Marc Bloch e Fernand Braudel. Além deles, foi conveniente, em alguns momentos, “beber nas águas” de Michel de Certeau e Jacques Le Goff. As ideias desses pensadores acompanharam todo o processo de escrita da tese, a fim de apontarem o caminho da escrita que se desejou para a produção final do trabalho, e de permitirem a escolha metodológica. Em relação ao “caminho” da escrita da tese, explorou-se vestígios deixados pelos homens no tempo, por meio dos livros analisados, e desvelou-se os textos e os contextos de um tipo de problema prático encontrado nos mesmos.

A seguir, apresenta-se a compreensão das concepções dos teóricos sobre pesquisa histórica que possuam relação direta com este trabalho. No entanto, o entrelaçamento entre as obras dos mesmos e o contexto vivido pelos autores dos livros da pesquisa explorou-se no próximo capítulo.

1.4.1 Interlocução teórica com o historiador Marc Bloch

Ao iniciar uma reflexão sobre o pensamento do historiador March Bloch e sua importância para a construção deste trabalho, revela-se oportuno considerar o processo de composição do perfil desse historiador, cujas concepções inovadoras para a sua época (início do século XX) inauguram a noção de "história como problema".

Esse processo de composição do historiador Marc Bloch (1886-1944) iniciou com seus estudos na École Normale até 1908, onde teve contato com a obra de Émile Durkheim. Especializou-se em história medieval, na Île de France, porém, foi na faculdade de letras da Universidade de Estraburgo onde começou, efetivamente, com suas primeiras produções e conheceu vários intelectuais, sendo o mais influente, o historiador modernista francês Lucien Febvre (1878-1956), com quem manteve contato diário entre 1920 até 1933. Juntos e interessados em questões econômicas e sociais em comum, fundam em 1929 os *Annales d'Histoire Économique et Sociale* (*Anais de História Econômica e Social*), uma revista de importante papel na difusão de vários estudos e que deu origem ao movimento atualmente denominado "Nova História" (ou "História Nova"). Em 1936, passou a lecionar história econômica na Sorbonne.[23]

A obra *A sociedade feudal*[24], último livro publicado pelo historiador em vida, reexamina e reclassifica inúmeros de seus estudos, oferecendo um novo conceito de história. Na abertura desse livro, Bloch (1982, p. 1) expõe seu grande questionamento: "Fabricador de instrumentos de trabalho, de habitações, de culturas e sociedades, o homem é também agente transformador da história. Mas qual será o lugar do homem na história e o da história na vida do homem?". Acredita-se ser na busca por respostas para essa questão que Marc Bloch se destaca no papel de historiador inovador. Uma tendência que se abre para a próxima geração de historiadores à qual Braudel faz parte.

---

[23]Citação indireta extraída da apresentação, escrita por Lilia Moritz Schwarcz, à edição brasileira da obra *Apologia da história, ou, O ofício do historiador* de autoria de Bloch (2001).
[24]Obra digital disponível no site <http://pt.scribd.com/doc/13475585/A-Sociedade-Feudal>. Acesso em 26 mar. 2011.

O prefácio da obra *Apologia da história ou O ofício de historiador*, escrito por Jacques Le Goff[25], é riquíssimo em informações, visto que transcreve, resumidamente, as ideias principais de Marc Bloch com extrema clareza e sensibilidade.

Convém evidenciar que a motivação para a escrita da obra *Apologia da história ou O ofício de historiador* já indica a função primordial do historiador:

> "Papai, então me explica para que serve a história." Assim um garoto, de que gosto muito, interrogava há poucos anos um pai historiador. Sobre o livro que se vai ler, gostaria de poder dizer que é minha resposta. Pois, não imagino, para um escritor, elogio mais belo do que saber falar, no mesmo tom, aos doutos e aos escolares. Mas simplicidade tão apurada é privilégio de alguns raros eleitos. Pelo menos conservarei aqui de bom grado essa pergunta como epígrafe, pergunta de uma criança cuja sede de saber eu talvez não tenha, naquele momento, conseguido satisfazer muito bem. Alguns provavelmente, julgarão sua formulação ingênua. Parece-me, ao contrário, mais que pertinente. O problema que ela coloca, com a incisiva objetividade dessa idade implacável, não é nada menos do que o da legitimidade da história (BLOCH, 2001, p. 41).

A frase "Papai, então me explica para que serve a história" representa o tema principal para o desenvolvimento da escrita dessa obra. Em contato com ela, percebe-se que essa simples frase foi o "motor" que gerou energia necessária para Bloch propor uma metodologia da escrita da história que ultrapassasse os seus limites como um passado narrativo "morto" e aprofundasse em uma história do passado que, para ser compreendida, deveria ser auxiliada pelo presente.

No caso desta pesquisa, intenciona-se que os textos e os contextos dos problemas de medição de alturas possam revelar uma ligação ou interface entre a história da matemática e a história da educação matemática, porquanto esse tipo de problema tanto pode ser analisado sob um ponto de vista, estritamente, da história da matemática como também do ponto de vista da história da educação matemática. Por exemplo, quando se observa os processos de construção dos instrumentos de

[25]Foi "ainda menino, aluno em Toulon, cidade do sul da França onde nasceu em janeiro de 1924, que o futuro historiador Jacques le Goff encontrou o seu destino. Depois de ter lido *Ivanhoé*, a mais famosa novela histórica de Walter Scott, nunca mais deixou de interessar-se pela Idade Média. A tal ponto que, ao completar 80 anos, em 2004, foi universalmente reconhecido, juntamente com Georges Duby e Le Roy Ladurie, como um dos maiores Medievalistas da França do após-Segunda Guerra Mundial". Informações disponíveis no site <http://educaterra.terra.com.br/voltaire/cultura/2004/07/05/001.htm>, Acesso em 26 mar. 2011.

medidas e de resolução dos problemas nos livros da pesquisa, nota-se, por um lado, o vínculo com a história da matemática, pois, a matemática utilizada para tais processos evoluiu ao longo do tempo. Por outro lado, essas ferramentas matemáticas usadas, na maior parte das vezes implicitamente, fazem parte até hoje do currículo do ensino de matemática, ou seja, estão, diretamente, relacionadas à história da educação matemática.

Pesquisar e analisar um problema específico e prático de matemática, durante dois séculos (XV e XVI) como é a delimitação do período desta pesquisa, implicou na identificação de livros compostos por conteúdos específicos de matemática ou ligados à matemática, e na compreensão dos contextos em que tais problemas foram propostos, como é o caso dos típicos problemas de cálculos de alturas de objetos que são apresentados até hoje, em livros de matemática, objetos de estudo. Para esse processo, como menciona Bloch (2001, p. 54), concordando com os ensinamentos de Michelet e Fustel de Coulanges, é preciso reconhecer que "o objeto da história é, por natureza, o homem". Assim, claramente, esta pesquisa precisou ser fecunda na busca por informações sobre os autores dos livros analisados e também sobre a vivência dos indivíduos da época que exigia resolução para tais tipos de problemas.

Por exemplo, a primeira parte de uma das obras entre as que serão analisadas, a *Matemática Lúdica* do arquiteto italiano Leon Battista Alberti (1404-1472), trata de solucionar problemas como: "medir com a vista a altura de uma torre", "medir a largura de um rio", "medir a altura de uma torre da qual só se consegue avistar o topo" e "medir a profundidade de um poço até o nível da água". Surge, então, uma questão: qual o motivo que levou Alberti a se interessar por problemas práticos como os de cálculos de alturas de objetos e os de distâncias inacessíveis? Souffrin, autor do Prefácio da tradução da obra de Alberti (2006, p. 12), auxilia na resposta a essa questão. Com efeito, Souffrin comenta que aqueles eram problemas referentes à arquitetura, construção civil ou militar, topografia ou navegação, com que um homem de certa posição social, na aurora do Renascimento, encontraria ou pelos quais poderia, simplesmente, ter curiosidade. Supõe-se também que tais problemas se refeririam às questões relevantes para a guerra e para os exércitos, como por exemplo, para construir pontes, fortes, torres, etc.

Há de se levar em conta que Leon Battista Alberti dedica seu trabalho ao príncipe Meliaduse, denominando o texto de “páginas de entretenimentos matemáticos”. Isso confirma a concepção de que, naquela época, os aspectos práticos da geometria tornaram-se relevantes para os príncipes e governantes. Efetivamente, o resgate de textos da Antiguidade faz reaparecer o interesse pela especulação matemática e, além disso, aconteceram a expansão do horizonte físico e as modificações nos métodos da arte militar (SAITO e DIAS, 2011).

Concorda-se com Bloch (2001, p. 60), ao colocar que “nunca se explica plenamente um fenômeno histórico fora do estudo de seu momento”. Sua concepção de história é a de “ciência dos homens no tempo e que incessantemente tem necessidade de unir o estudo dos mortos ao dos vivos”. O que será possível registrar nesse percurso histórico é um olhar para o passado sobre uma questão de pesquisa, mas, corroborados com ferramentas do presente.

Acredita-se que outro ponto a que se deve atentar, referente a esse tipo de pesquisa histórica, é em relação ao que Bloch coloca sobre o problema da observação histórica. Para ele, uma ciência não se define somente por seu objeto de estudo.

> Seus limites podem ser fixados, também, pela natureza própria de seus métodos. Resta, portanto nos perguntarmos se, segundo nos aproximemos ou afastemos do momento presente, as próprias técnicas de investigação não deveriam ser tidas por essencialmente diferentes (BLOCH, 2001, p. 68).

O historiador, pela sua própria condição, não pode constatar “in loco”, no momento da ocorrência, os fatos que estuda. E como característica da observação histórica, Bloch (2001) destaca que o conhecimento de todos os fatos humanos no passado deve ser um conhecimento através de vestígios. Vestígios compreendidos pelo autor como documentos, marcas que são perceptíveis aos sentidos, deixadas por um fenômeno. Ademais, dependendo dos vestígios, o historiador pode conhecer mais sobre determinado tema.

Reconhecendo a elaboração de uma tese que tem como pretensão analisar textos e contextos dos problemas de medição de alturas, utilizando-se de livros, escritos ao longo do tempo, em que o próprio tipo de problema representa uma fonte para a história, é importante observar que tais documentos apenas "falarão" para o pesquisador, se souber interrogá-los. É assim que Bloch (2001, p. 79) destaca: "[...] toda investigação histórica supõe, desde seus primeiros passos, que a busca tenha uma direção", e mais, que "o explorador sabe muito bem, previamente, que o itinerário que ele estabelece, no começo, não será seguido ponto a ponto". Porém, ressalta a importância de se ter uma proposta de caminho a seguir. Concordando com Bloch, procura-se levantar questões que favoreçam um diálogo com os documentos que serão analisados, como: por que o autor utilizou uma determinada ferramenta para resolver o problema de altura e não outra? Por que era importante desenvolver um tipo de estratégia para resolver o problema? Qual era o lugar social, da prática e da escrita do problema?

Outro ponto importante discutido por Bloch (2001, p. 87) no processo da escrita da história é como reunir os documentos fundamentais na investigação. Ele julga essa reunião como uma das tarefas mais difíceis do historiador e justifica esta afirmação, ao mencionar que qualquer pesquisa documental envolve de certa forma, "um resíduo de inopinado e, por conseguinte, de risco". Por isso, sempre haverá abordagens inéditas conforme o pesquisador, e o risco de se analisarem fontes que podem, ou não, ser verídicas.

Acorda-se com Bloch sobre esta difícil missão que é a de fazer a reunião dos documentos essenciais para a pesquisa. No caso deste trabalho, implicando fontes históricas que revelem resoluções de problemas práticos de matemática, não foi possível se ater, apenas a documentos matemáticos, porque os problemas de calcular alturas de objetos remontam há muitos séculos com finalidades distintas e, dentro de diversas áreas, como a engenharia militar e a arquitetura, em que a Matemática era coadjuvante em suas técnicas para a solução de problemas.

Quanto ao método histórico para investigações, o autor trata, essencialmente, de fazer um esboço do mesmo, ao qual ele chama de crítico. Para Bloch (2001, p. 96), o historiador crítico é aquele que "sabe que suas testemunhas podem se enganar ou mentir. Mas, antes de tudo, preocupa-se em fazê-las falar, para compreendê-las". Na tentativa de caracterizar a história, porquanto uma ciência crítica e exibir uma lógica desse método, ele defende a ideia de que para interpretar um documento é preciso detectá-lo numa “ordem” cronológica.

Em referência a esta pesquisa é importante considerar a perspectiva de um método crítico, conforme pensado por Bloch. Os livros analisados foram produzidos e/ou publicados entre os séculos XV a XVII, e, para compreender os textos e os contextos dos problemas de alturas será preciso vê-los nessa “ordem” cronológica, com a finalidade de analisar se tal desenvolvimento está, diretamente, relacionado ao desenvolvimento da própria matemática e do conhecimento de uma forma geral naquela sociedade.

Bloch também trata da análise histórica, importante no processo de construção deste trabalho. De fato, ele expõe dois problemas: o da imparcialidade histórica (no caso da imparcialidade do cientista e do juiz) e o da história como tentativa de reprodução ou como tentativa de análise. Bloch (2001, p. 126) menciona o papel antigo do historiador, visto tal qual um juiz que contava a história de heróis mortos e de certo modo apresentava julgamentos e, valorizava a história como tentativa de análise:

> Quanto a isso, o que me importa a decisão retardatária de um historiador? Apenas lhe pedimos que não se deixe hipnotizar por sua própria escolha a ponto de não mais conceber que uma outra, outrora, tenha sido possível (BLOCH, 2001, p. 127)

O autor destaca que os historiadores se veem em situação complicada ao se depararem com a análise histórica, tendo por instrumento, antes de tudo, a linguagem que deve ser apropriada e capaz de exprimir, precisamente, os fatos que estão em estudo. Considerando uma pesquisa em história da matemática que valoriza especialmente o texto, é importante ressaltar sobre a questão da nomenclatura mencionada por Bloch (2001, p. 135) quando afirma que toda análise requer primeiro uma linguagem apropriada, “embora conservando a flexibilidade necessária para se adaptar progressivamente às descobertas, uma linguagem, sobretudo sem flutuações nem equívocos”.

Procurou-se, desse modo, estabelecer uma linguagem apropriada no processo de análise dos problemas, quando se deparou, com termos matemáticos que eram utilizados no Renascimento, e que atualmente, outros os substituem. Um exemplo está na geometria: o termo *segmentos congruentes*, que também pode ser substituído em quaisquer contextos de geometria, por *segmentos de mesma medida*, em nada alterando o resultado das propriedades que envolvem tais segmentos. Uma mudança de nomenclaturas na linguagem matemática aconteceu ao longo do tempo. No Renascimento, se empregava a expressão “linhas iguais” para o que se define hoje por “segmentos congruentes”.

Vale ressaltar que diante dessas dificuldades mencionadas acima, o historiador tem que estudar o passado com as técnicas atuais. Com efeito, Bloch (2001, p. 136) evoca que “os documentos tendem a impor sua nomenclatura; o historiador, se os escuta, escreve sob o ditado de uma época cada vez diferente. Mas pensa, por outro lado, naturalmente segundo as categorias de sua época [...]”. Por exemplo, numa análise referente à introdução da parte de geometria da obra do matemático francês Orontio Fineo[26] (1587, p. 183), há uma frase com a utilização de um vocabulário bem específico da época. Realmente, na definição de geometria, o autor menciona os vocábulos “adestramentos dialéticos”:

> É então, a Geometria (para começar a tratar da matéria), a que nos demonstra, e ensina as razões das grandezas, das figuras, e dos termos que nelas se encontram; e ainda as afeições, e as várias posições e seus movimentos. É aquela ainda, que pela experiência vinda do sinal, ou do ponto de divisão, passa pelos corpos sólidos, e pelas suas diversas formas, fazendo comparações entre as coisas mais compostas e as mais simples; e recorrendo aos seus princípios, lhes vai analisando com sutil controle. Esta, digo, envolta em “adestramentos dialéticos”, servindo-se de muitos outros princípios, tirados da disciplina, que lhe está diante, parece ser a mais certa, e a que deva ser a mais examinada de todas as ciências (com exceção da Aritmética, cujos princípios, pela sua simplicidade, a coloca à frente) [...] (FINEO, 1587, p. 183).[27]

Em relação à época em que a obra foi escrita (final do século XVI) e, segundo as categorias da época atual, os vocábulos “adestramentos dialéticos” se referem aos ensinamentos da geometria feitos pelos professores, utilizando o livro. Ao longo de todo o texto, Fineo (1587) utiliza o termo “adestramentos” com o significado de

[26]Nome do autor em latim, traduzido para o francês: Oronce Finé.
[27]Esta é uma tradução, do italiano para o português, realizada pela professora Rita Guizardi, tradutora responsável por todos os textos em italiano desta pesquisa.

“ensinamentos” e o termo “dialéticos”, provavelmente (ao que tudo indica) com significado ligado à “lógica” ou à “argumentação dialogada”, não como compreendida, atualmente, dentro de um discurso filosófico. Esse exemplo ratifica uma nomenclatura imposta pelo documento e promove uma possibilidade de compreensão que o autor deve ter, respeitando as categorias de seu tempo.

Bloch (2001) descreve sobre as divisões cronológicas que, comumente, as pesquisas históricas são divididas, tal como, a classificação do tempo contado ao longo dos séculos. Destaca-se esse tópico porque, neste trabalho, se pretende tratar de uma análise em livros ao longo do tempo, e assim, deverá ser levada também em consideração a maneira como esse tempo será mencionado na pesquisa. O ideal, para tratar a pesquisa no tempo, proposto por Bloch (2001, p. 150), “consiste em se adequar, a cada vez, à natureza do fenômeno considerado”.

Bloch (2001) traz outras reflexões que devem ser consideradas em qualquer pesquisa histórica. Referem-se aos questionamentos que norteiam uma investigação: os porquês. Para Bloch (2001, p. 156), “[...] o emprego da relação causal, como ferramenta do conhecimento histórico, exige incontestavelmente uma tomada de consciência crítica” e, na sua conclusão inacabada, assume que as causas em história, assim como em outros campos de saber, não podem ser postuladas, mas sim, procuradas.

Posições sobre a escrita da história são propostas por outro historiador, o francês Fernand Braudel, contemporâneo e “herdeiro” de Marc Bloch, cujo tema principal de sua obra sobre o Mediterrâneo abarca o contexto histórico dos autores tratados nesta pesquisa. Sendo assim, entende-se também importante compreender o pensamento de Braudel, no que tange às suas perspectivas teóricas sobre historiografia.

1.4.2 Interlocução teórica com o historiador Fernand Braudel

Fernand Braudel (1902-1985) foi um historiador que contribuiu, efetivamente, para a transformação da escrita da História a partir do movimento dos *Annales* do início do século XX, numa dita segunda geração, pós Marc Bloch. Nasceu no dia 24 de agosto de 1902, em Luméville-en-Ornois, no nordeste da França. Faleceu aos 83 anos, na noite de 27 para 28 de novembro de 1985, em Saint-Gervais (DAIX, 1999).

Em virtude da delimitação e dos objetivos deste trabalho, tratar-se-á neste da concepção de História de Braudel construída concomitantemente com sua trajetória de vida, além de, no capítulo seguinte, ser apresentada uma abordagem mais geral sobre as obras *O Mediterrâneo e o mundo mediterrânico na época de Filipe* II; Civilização *Material, Economia e Capitalismo* e *O modelo italiano*, pois sinalizam, claramente, o método histórico pretendido e proposto pelo historiador.

Fator importante para a vida profissional de Braudel foi sua convivência, desde cedo, com pessoas mais velhas, com as quais estava sempre compartilhando informações sobre os acontecimentos do mundo na época. Isso o amadureceu, fez com que ele se aproximasse de uma abordagem sobre uma nova geografia, com base nas concepções do geógrafo francês Vidal de La Blache e sobre uma nova história, encontrada no trabalho do historiador francês Marc Bloch. Outrossim, assumiu o papel de discípulo de Lucien Febvre, que nasceu numa região de fronteira com a dele, como comenta Daix (1999).

> As observações brutas que o menino acumula não terão preço para ele, pois sua formação inicial como professor se dará no exato momento em que o desenvolvimento na França de uma nova geografia, capaz de tratar das transformações dos modos de vida [...], fornece a sua geração bases científicas sólidas para a renovação de uma História que na época carece terrivelmente de substrato [...] (DAIX, 1999, p. 27).

Em 1972, Braudel, aos 70 anos, escreveu um resumo da sua formação de historiador para um jornal americano e nele, o autor revela que foi um ótimo aluno porque o pai dele foi matemático, e então, ele também foi bom em matemática. Revela que foi bom em ciências e que se saiu tão bem em história, por ter excelente memória. Contudo, parece um pouco obscura a forma como Braudel chegou ao ensino superior. Tudo indica que ele se aproveitou de uma situação pós-guerra em que o estado pretendia reconstituir uma educação a nível nacional e, por isso, fez um curso rápido (DAIX, 1999).

Braudel, citado por Daix (1999, p. 46), justifica sua escolha pela História:

> Em dado momento, eu quis esquivar-me rapidamente à dependência em relação aos meus, e minha ambição era obter uma licenciatura e ser professor. A licenciatura era feita em um ano. Para mim, a história era mais fácil. Eu já havia acumulado tantos conhecimentos ao chegar à Sorbonne... Obtive portanto a licenciatura em um ano e me candidatei à agregação porque ainda não completara vinte anos, e fui aprovado, de modo que fui dar não na vocação de historiador, mas na profissão de historiador. A paixão veio depois.

Esse relato é extremamente interessante, pois demonstra que o amor pela História e o talento peculiar que o fez se tornar um dos maiores historiadores franceses do século XX vieram de uma escolha, inicialmente, profissional de Braudel, a de professor de História. Burke (2010) comenta que desde a morte de Febvre (1956) até a sua morte, em 1985, Braudel pôde ser reconhecido como o mais importante e o mais poderoso historiador francês.

Os primeiros passos profissionais do historiador ocorreram, quando ele realizou seu primeiro concurso para ser professor, tendo obtido o 17º lugar e assumido suas aulas no liceu de Constantina, na Argélia, em 1923. É importante ressaltar esse fato como fundamental na vida de Braudel porque foi, no caminho até a Argélia, que ele se encantou pelo Mediterrâneo, tema original de sua obra. Braudel, citado por Daix (1999, p. 60), revela sua perplexidade diante do mar: “[...] foi para mim uma tal surpresa! Eu não conhecia o mar, vejo o Mediterrâneo e confesso que é um presente dos deuses! [...]”.

O projeto de tese que Braudel elaborou, intitulado inicialmente *Filipe II e a política espanhola no Mediterrâneo de 1559 a 1574*, foi aprovado sem problemas pela Sorbonne. No entanto, sua delimitação do tempo ainda demonstrava certa distância da história de longa duração determinada por ele posteriormente. Interessante destacar os primeiros passos de Braudel, na qualidade de investigador histórico, por seu próprio olhar.

> Comecei meu aprendizado nos Arquivos Nacionais de Paris, onde havia um acervo K de arquivos espanhóis que haviam ficado na França depois de termos devolvido a Simancas [...] o que havíamos tomado [...]. Havia uma quantidade considerável de maços, que por sinal foram devolvidos pelo marechal de Pétain, de modo que hoje uma tal investigação não seria mais

> possível. Foi nos Arquivos Nacionais que aprendi a ler espanhol (BRAUDEL, apud DAIX, 1999, p. 88).

Percebe-se que a ousadia de Braudel, o desejo de ir além da profissão de professor de História, manifestou-se nessa necessidade de busca aos arquivos para a pesquisa. Acredita-se que o encanto pelo tema que se pretende investigar é essencial para um resultado de qualidade. Entretanto, conhecendo o percurso de vida percorrido por Braudel, entende-se que as escolhas sobre os temas para sua historiografia foram consequências das influências recebidas, dos seus gostos e da sedução pelos lugares, como também de seus sofrimentos, das suas angústias e decepções.

Conforme Daix (1999), Braudel entrou em contato, pela primeira vez, com seu grande “mestre”, Lucien Febvre, supostamente em 1927, através de uma carta. Nela Braudel demonstrou interesse pelo tema de pesquisa de Febvre, já que tratava de Felipe II, objeto também de seu trabalho. A mudança de foco da escrita da sua obra sobre o Mediterrâneo tem relação intrínseca com uma questão levantada por Febvre ao saber das pretensões de Braudel. Febvre, apesar de ter elogiado o tema de Braudel (*Filipe II e o Mediterrâneo*), incitou o historiador a refletir: por que não pesquisar o Mediterrâneo e Filipe II? Quer dizer, propôs uma inversão na ordem do tema, sugeriu colocar o mar no lugar do rei. Haveria, então, uma alteração substancial do problema e do objeto da pesquisa. Enfim, para Daix (1999, p. 96), “a dúvida lançada por Lucien Febvre e a mudança de centro de interesse por ele proposta levaram aos poucos o jovem historiador a se conscientizar da necessidade de criticar o que há de preestabelecido nos acervos de arquivos”.

O olhar prioritário dado ao Mediterrâneo por Braudel teve, provavelmente, influência da abordagem denominada “possibilista” do geógrafo francês Vidal de la Blache. No pensar de Burke (2002, p. 31), “tal abordagem destacava tudo o que o meio ambiente possibilitava que os homens fizessem, e não o que o meio os impedia de fazer”. Tal conjectura é feita, tendo em vista a preponderância dada por Febvre ao trabalho de la Blache.

Para Daix (1999), Braudel assegurou sua consolidação como historiador profissional enquanto esteve na Argélia, até 1932, tendo escrito grande ensaio sobre os espanhóis e a África do Norte, artigos, resenhas e feito comunicações em congressos, além de ter-se tornado secretário-adjunto da *Revue Africaine* e publicado também na *Revue Historique*. E assim, com a fama de historiador da África do Norte, Braudel foi nomeado em Paris, para os Liceus Pasteur de Neuilly, Condorcet e Henrique IV (respectivamente, em 1932, 1933 e 1934) e ainda dava aulas como auxiliar na Sorbonne.

É importante ressaltar um encontro especial ocorrido entre Fernand Braudel e Lucien Febvre. Foi em 1937, quando ambos os historiadores retornavam da América Latina: Braudel, do Brasil e Febvre, da Argentina. Tal encontro, numa longa viagem de navio, nunca mais se cessaria já que tudo era motivo de aproximação entre os dois (DOSSE, 2003).

Dosse (2003) traduz a escrita da tese de Braudel sobre o Mediterrâneo como a lenda do século. O fato é que Lucien Febvre argumentou ter recebido milhares de páginas dos escritos de Braudel, enquanto ele esteve aprisionado na Alemanha. Por outro lado, um amigo do historiador, da época em que permaneceu no Brasil, Jean Maugue mencionou que a essência da tese já estava escrita desde 1939. Para Dosse (2003, p. 199), a estrutura da tese de Braudel foi imaginada “como o antídoto às notícias alemãs sobre a guerra, como forma de fuga na longa duração em relação aos fatos cotidianos oferecidos pela rádio nazista”.

Em 1947, foi criada uma seção destinada às ciências sociais no interior da École Pratique des Hautes Études, a *VI Seção*. Mesmo que os principais atores dessa *VI Seção* tenham sido historiadores, como Febvre e Braudel, foram as ciências humanas que lucraram com essa formação. Fernand Braudel passou a ser visto como líder da “nova história” e como um dos renovadores da reunião dessas ciências (DAIX, 1999).

Em 1949, Braudel assumiu função de professor no Collège de France e de Diretor do Centre Rechercher Historiques, na École Pratique des Hautes Études. Após o falecimento de Febvre, em 1956, Braudel ocupou o lugar dele na direção efetiva dos *Annales* e, nesse tempo, a fim de fazer renovação desse movimento, ele convidou a participarem historiadores jovens como Jacques Le Goff, Emmanuel Le Roy Ladurei e Marc Ferro. Braudel também substituiu Febvre na presidência da *VI Seção* da École, instituiu a *Maison dês Sciences de l'Homme*, uma organização com a finalidade de destinar-se à pesquisa interdisciplinar. Isso promoveu uma convivência rica entre historiadores, antropólogos e sociólogos, a qual foi frutífera à comunicação de novas ideias e à propagação das ciências que estavam a se relacionar (BURKE, 2010).

Para Burke (2010, p. 63), "sendo um homem de grande respeitabilidade e de personalidade dominante, Braudel manteve sua poderosa influência, mesmo depois da aposentadoria, em 1972". De fato, Burke (2010) afirma que ainda teve tempo de se dedicar a uma história global da França e à estatística, no que se refere aos métodos quantitativos aplicados pelos pesquisadores da época, porém de modo mais superficial.

Enfim, os aspectos biográficos aqui levantados representam um olhar da autora deste trabalho, levando em conta as perspectivas de contribuições da obra de Fernand Braudel à construção desta pesquisa. Ademais, ao considerar o processo de elaboração desta tese numa perspectiva histórica e as escolhas do tema e dos procedimentos metodológicos, foi necessário compreender a tendência historiográfica proposta por Braudel. Conforme Morás (2001, p. 23), Braudel, com a sua obra sobre o Mediterrâneo e seu ensaio sobre a longa duração, criou novas tendências historiográficas, "trabalhos que se consagraram como autênticos marcos da historiografia contemporânea". É no intuito dessa compreensão que se apresenta a subseção seguinte.

1.4.3 A historiografia para Fernand Braudel

Sobre a concepção de História e sobre o método histórico de Braudel, serão tomados, por base, textos do próprio autor, contidos nos *Escritos sobre a história*, em *La historia y las ciencias sociales* e também na obra *A história em migalhas* de François Dosse.

Mesmo sendo herdeiro de Febvre, Braudel também sofreu forte influência de Marc Bloch, como se constata ao afirmar:

> [...] pode-se até perceber em sua obra essa dupla paternidade, essa síntese em construção no curso de um itinerário intelectual, que o conduz da geo-história ao estudo das estruturas econômicas, aos conceitos da economia-mundo, à reflexão sobre as estruturas capitalistas e a economia de mercado, que, mais sociologizante e econômicas, se aparentam mais à obra *A Sociedade Feudal* de Marc Bloch (DOSSE, 2003, p. 200).

Para Braudel, o espaço no sentido geo-histórico é um fator explicativo dos vários aspectos das civilizações, isto é, uma civilização representa um espaço organizado pelos homens e pela História. E compreende que “a geografia lhe permite valorizar a longa duração, minorar o peso do homem como ator da história ao substituí-lo por um sujeito espacial, [...]” (DOSSE, 2003, p. 202).

Na obra sobre o Mediterrâneo de Braudel, a geo-história é aprofundada na história do homem em relação ao seu meio e está presente, primeiramente, pelo amor do autor à região, sendo que “o objetivo é demonstrar que todas as características geográficas têm a sua história, ou melhor, são parte da história, e que tanto a história dos acontecimentos quanto a história das tendências gerais não podem ser compreendidas sem elas” (BURKE, 2010, p. 54).

Ainda com respeito à influência exercida por Febvre e Bloch sobre Braudel, o próprio autor se vê como filho da era “Movimento dos *Annales*”. Na verdade, Braudel (2009b, p. 33) destaca sobre tal movimento:

> É evidente que foi um momento decisivo, para a história francesa, a fundação, em 1929, em Estrasburgo, dos *Annales d’histoire économique et sociale*, por Lucien Febvre e Marc Bloch. Permitir-me-ão falar deles com admiração e reconhecimento, pois que se trata de uma obra rica de mais de vinte anos de esforços e de êxito, onde não sou mais que um operário da segunda obra.

Nessa “segunda obra” (ou segunda geração) que Braudel menciona, interessa, em especial, suas posições sobre a História. E é, na aula inaugural no Collège de France, feita em 1950, que o historiador evoca tais posições. Elas são mencionadas no primeiro capítulo, intitulado *Os tempos da história* e em outros capítulos da sua obra, *Escritos sobre a história*. Braudel (2009b, p. 17) ao escrever sobre as posições da História em 1950, ressaltou que as responsabilidades da área eram temíveis, porém, entusiasmavam pelo fato de que a História "jamais cessou, em seu ser e em suas mudanças, de depender de condições sociais concretas", ela é "filha de seu tempo". Por outro lado, destaca que o papel do historiador é importantíssimo para que os métodos e os programas da História tenham respostas mais precisas e mais seguras, porquanto tudo isso depende das reflexões, do trabalho e das experiências vividas do historiador.

É muito importante a mudança de visão sobre a escrita da História, com início no movimento dos *Annales*. Não é mais possível tomar a História tal qual ela se origina, pois o pesquisador, no caso, o observador é para Braudel (2009b, p. 20), "fonte de erros, contra ele a crítica deve permanecer vigilante". Sendo assim, como crítico, o trabalho histórico não pode ser realizado unilateralmente.

O próprio Braudel (2009b, p. 21) entende como complicada a tarefa de comentar o que, certamente, mudou no domínio dos seus estudos, considerando a influência obtida de Febvre e de Bloch, principalmente "como e porque a modificação se operou", e também parece avesso a isso. Nesse sentido, vai então à contramão de uma História vista como uma ciência profética e coloca o problema da História no coração da vida. Entende a vida como complexa de abordar e fragmentar, a fim de extrair ou aprender alguma coisa nela. Braudel (2009b, p. 23) nota ainda que "na história, o indivíduo é, muito frequentemente, uma abstração", que "não há jamais na realidade viva, indivíduo encerrado em si mesmo", e é a favor de que não somente os homens fazem a História, mas de que "a história também faz os homens e talha seu destino".

Todos esses pensamentos de Braudel coadunam com os de Marc Bloch. Por isso, Bloch (2001, p. 65) menciona que ama a vida exatamente por ser um historiador, e que "essa faculdade de apreensão do que é vivo" é justamente "a qualidade mestra do historiador". Assim, a vida é destacada para os dois historiadores, é uma vida que se pode dizer ligada ao ser humano ao longo dos tempos. A concepção de História, para Bloch (2001, p. 67), é compreendida dessa forma: "portanto, não há senão uma ciência dos homens no tempo e que incessantemente tem necessidade de unir o estudo dos mortos ao dos vivos".

A escolha de uma base teórica - que reúna forças, para o pesquisador justificar sua narrativa -, deve ser coerente. A tendência, neste trabalho, por explorar os pensamentos de Bloch e Braudel, contribui por ratificar a importância de olhar para um problema histórico, como é o caso do problema de calcular alturas de objetos e, naturalmente, ver-se "obrigado" a investigar sobre os homens que necessitaram resolvê-lo. Isso porque, esse era um problema de uma sociedade, e não de um homem. Também, é o olhar para o passado com as ferramentas do presente.

Braudel (2009b) credita ao movimento dos *Annales* a inevitável transformação da concepção da História, no sentido de alimentar as outras ciências humanas, como a economia, sociologia, antropologia, demografia, psicologia, linguística, etc. Após a morte de Bloch, o autor recoloca, em discussão, o papel e a utilidade da História e, nessa perspectiva, compreende-a como uma dialética da duração, de modo que é por causa dela e graças a ela que a História é o estudo de todo o social, incluindo então o estudo do passado e do presente, um inerente ao outro. Reconhecendo sua herança de Febvre e Bloch, Braudel (2009b, p. 98) ressalta que "a história me aparece como uma dimensão da ciência social, faz corpo com esta. O tempo, a duração, a história se impõem de fato, ou deveriam se impor a todas as ciências do homem. Suas tendências não são de oposição, mas de convergências".

A relação entre o tempo, a duração e a História, vista por Braudel, culmina em uma concepção global da História, aquela que inclui não apenas causalidades mas também a observação, a classificação, a comparação e o isolamento dos fenômenos. Dosse (2003, p. 167) comenta que "perceber em um mesmo movimento a totalidade do social é a grande ambição da história braudeliana" e que tal História é mundial, tem objetivo amplo e pressupõe a competência do método comparativo, por meio do tempo mais longo e do maior espaço possível.

Acredita-se que esta pesquisa é permeada pelo desafio proposto por Braudel, já que é preciso ter um campo de visão extenso, a fim de compreender, historicamente, determinados problemas matemáticos de cunho prático. Tem-se, nesses casos, um tempo maior, de modo que rupturas importantes aconteceram tanto em relação à história social quanto aos avanços científicos.

Braudel (2009b, p. 105) apresenta a História em três níveis com respeito à variável tempo:

> Na superfície uma **história factual** se inscreve no tempo curto: é uma micro-história. A meia encosta, uma **história conjuntural** segue um ritmo mais largo e lento. Foi estudada até aqui sobretudo no plano da vida material, dos ciclos ou interciclos econômicos [...]. Para além desse "recitativo" da conjuntura, **a história estrutural**, ou de longa duração, coloca em jogo séculos inteiros; está no limite do móvel e do imóvel e, por seus valores fixos há muito tempo, faz figura de invariante em face de outras histórias, mais vivas a se escoar e a se consumar, e que, em suma, gravitam em torno dela (grifos nossos).

Aspira-se contemplar, na abordagem histórica que neste trabalho aqui se apresenta, aspectos da história conjuntural e estrutural, já que investigar uma história de um tipo de problema prático da Matemática exige um tratamento especial dos homens e da sociedade que necessitaram resolvê-lo e, ainda mais se considerado num período de longa duração. Deseja-se tomar, por inspiração, o interesse apaixonado do historiador descrito por Braudel (2009b, p. 110), como sendo o "entrecruzamento desses movimentos, sua interação e seus pontos de ruptura: todas as coisas que não podem se registrar senão com respeito ao tempo uniforme dos historiadores, medida geral de todos esses fenômenos [...]". O autor comenta tal entrecruzamento, partindo de uma concepção sobre o tempo para os historiadores e o tempo para os sociólogos. Portanto, deixa bem claro que o tempo dos sociólogos não pode ser o tempo dos historiadores, pois, para aqueles, o tempo não cessa e nem pode ser medido, sendo que isso já é possível para esses. Para Braudel (2008, p. 118), "todo estudo do passado, deve, necessariamente, comportar uma medida minuciosa daquilo que, em determinada época precisa, pesa exatamente sobre sua vida, obstáculos geográficos, obstáculos técnicos, obstáculos sociais, administrativos...".

Ao considerar-se o estudo do passado sobre problemas de medição de alturas, na época específica do Renascimento, faz-se uma análise histórica sobre sua vida e também sobre obstáculos técnicos, no sentido exposto acima por Braudel. Isso porque às formas de resoluções dos problemas estão, intrinsecamente, ligados os indivíduos que viviam naquele tempo e os indivíduos que se propunham a escrever sobre os problemas. Já os obstáculos técnicos podem estar relacionados com as limitações matemáticas ou com as próprias construções dos instrumentos de medida, juntamente, com suas compreensões de uso.

Outro aspecto relevante que Braudel (2009b) discute é o que ele chama de pluralidade do tempo histórico, revelado pelo autor como um problema importante (o do *contínuo* e do *descontínuo*):

> O tempo que nos arrasta, arrasta também, ainda que de maneira diferente, sociedades e civilizações, cuja realidade nos ultrapassa, porque a duração de sua vida é bem mais longa que a nossa, e porque as balizas, as etapas para a decrepitude não são nunca as mesmas, para elas e para nós (BRAUDEL, 2009b, p. 123).

Essa pluralidade está ligada à ideia de que tem-se também no tempo em que se vive, o tempo de existência de outras estruturas sociais, herdadas com o passar do mesmo, isto é, tem-se neste tempo, "outro tempo".

Braudel (2009b) denomina a *descontinuidade* social como uma ruptura estrutural ou de profundidade (exemplifica isso com o processo de busca pela resposta da questão: quando nasceu o capitalismo moderno?) e esclarece tal concepção, ao mencionar que se nasce num tempo que está em meio ao tempo de algum contexto social, político e econômico, e antes que a vida se finda, mudanças ou rupturas poderão ocorrer, gerando interferências no tempo da mesma.

Para Dosse (2003, p. 173), apesar de Braudel pluralizar a duração, ele também almeja restaurar "uma dialética dessas temporalidades, e relacioná-las a um tempo único". Mesmo que proponha a subdivisão da unidade do tempo em níveis (estrutural, conjuntural e factual - ou individual), a ideia é de que eles se conservem relacionados ao tempo global.

Destaca-se a importância dada por Braudel (2009b, p. 124) ao método histórico, ao mencionar que "é entre as massas semelhantes que é necessário procurar as correlações, em cada degrau: primeiros cuidados, primeiras pesquisas, primeiras especulações. Em seguida, de degrau em degrau, reconstituiremos a casa como pudermos". Entendem-se as massas semelhantes como os objetos principais de estudo, as fontes utilizadas pelo pesquisador que se aproximam e tendem a representar o leque de vestígios semelhantes disponíveis para uma pesquisa. O que se torna, extremamente, importante neste trabalho. Aqui são examinadas correlações entre textos e contextos que contemplam problemas práticos de matemática num longo período de tempo – os quais, nessa concepção de Braudel, é que se entendem por massas semelhantes – e, com eles “definidos”, passo a passo, caminha-se na direção das respostas que se deseja alcançar com as questões feitas às fontes a serem exploradas, no caso, primordialmente, aos livros de Alberti, Finé e Fabri.

Relevante é destacar que Braudel (1983) declara suas limitações de pesquisador, quando evoca que, para fazer a história do mar, era preciso ter um conhecimento exato das tantas fontes de informação arquivadas. Ressalta, porém, que seria impossível fazer tal exploração com todas as fontes e que, apesar do seu esforço, não estudou todos os documentos de arquivo que estavam ao seu alcance. Além disso, Braudel (1983, p. 23) confessa: “sei, antecipadamente, que as conclusões a que cheguei serão analisadas, discutidas, substituídas por outras. Sei, e desejo-o. Porque é assim que progride, e deve progredir, a história”.

Acredita-se que as afirmações acima respaldam, de certa forma, o investigador que se propõe a realizar uma pesquisa histórica, sem ter, necessariamente, a especialidade de ser historiador. Na realidade, Braudel compreende o papel complexo de estar diante de tantas fontes, impossíveis de serem todas abrangidas em aprofundamento de pesquisa e a necessidade de delimitações no trabalho. Nesse sentido, esclarece sua posição de historiador que “vê” uma História, que não é completa e nem estática, mais do que isso, ela deve ser dinâmica.

No caso desta pesquisa, protagonizam três obras que passam ao longo dos séculos XV e XVI até o início do século XVII. São documentos densos, que precisam ser “questionados” de acordo com os objetivos do trabalho. Será impossível, no entanto, analisar, minuciosamente, todas as partes de tais fontes. Logo, configurar-se-á num trabalho que estará passível de diferentes olhares históricos e de outras perspectivas teóricas.

O processo de construção desta pesquisa exigiu um movimento constante das buscas pelos porquês relativos às questões correlatas que serão levantadas com base na pergunta central a que se propõe. Algumas dessas questões, atentando-se para as obras e os problemas de alturas propostos, poderão ser, entre outras:

- Por que tantas ilustrações no texto?
- Por que essas ilustrações?
- Por que o uso de instrumentos?
- Qual a importância desses instrumentos para a compreensão/resolução do problema?
- Quais autores podem ter influenciado o autor da obra?
- Qual o método de resolução utilizado para resolver o problema?

A escolha teórica desta pesquisa toma por base principal Marc Bloch e Fernand Braudel, além de julgar relevantes concepções de Michel de Certeau e Jacques Le Goff porque, dentre outros motivos, de alguma forma, suas ideias refutam a existência de uma verdade universal. Certeau (2010, p. 124) ressalta que "a historiografia mexe constantemente com a história que estuda e com o lugar onde se elabora". Com isso, infere que a História pode produzir "verdades". Verdades essas produzidas pelas pesquisas históricas e influenciadas pelo presente do pesquisador. Como consequência, alguma verdade poderá ser alcançada. Dessa forma, o trabalho do historiador consiste na busca de possibilidades e hipóteses relacionadas ao seu trabalho específico, por isso coloca a existência de verdades, o que não representa a verdade universal. Trata-se de uma verdade construída sob um método que o historiador cria no lugar, onde pesam suas convicções do presente. Pode-se afirmar que a verdade é científico-relativa, um produto da aplicação do seu método.

O desafio de produzir uma história, não tendo a profissão de historiador, exige do pesquisador um cuidado especial com os pressupostos teóricos e metodológicos do estudo a que se propõe realizar. Entretanto, crê-se que não existe uma limitação relativa às escolhas teóricas e metodológicas para a escrita sobre a história da matemática. Tais escolhas ficam sob a responsabilidade de cada pesquisador que deve buscar, adequadamente, teorias e metodologias, considerando seu tema de pesquisa.

Sabe-se que o Renascimento foi um período de longa duração, que os livros desta pesquisa foram produzidos naquele tempo e, por autores que viveram numa região banhada pelo Mediterrâneo (Itália e França). No capítulo a seguir, procura-se estabelecer uma identidade entre o tempo e o lugar de Braudel e o tempo e o lugar dos problemas de medição de alturas vistos a partir de obras dos autores Leon Battista Alberti, Oronce Finé e Ottavio Fabri.

2 FINCANDO ESTACAS: RENASCIMENTO E MEDITERRÂNEO

A expressão *Fincando estacas*, título deste capítulo, foi inspirada nos dardos (hastes ou *gnômons*), utilizados por Leon Battista Alberti nas resoluções dos problemas de medição de alturas. A intenção, nesta parte do trabalho, é apresentar uma inter-relação existente entre algumas obras da escolha teórica desta pesquisa, representadas pela fundamentação desta, e o tempo, e o lugar em que os autores Alberti, Finé e Fabri viveram e produziram seus livros.

2.1 A ESCOLHA POR FERNAND BRAUDEL

Esta pesquisa considera trabalhos relacionados à matemática, produzidos e/ou publicados num período que transita do século XV até início do século XVII. Como já se mencionou, é um período longo e, em termos históricos, pode ser identificado desde que foi inaugurada a chamada Idade/História Moderna com destaque para o Renascimento.

Todas as transformações ocorridas no Renascimento, certamente, influenciaram os indivíduos daquele abrangente período de variadas maneiras: no modo de viver em comunidade, na busca por evolução das ciências, na valorização da arte e, no empenho pela resolução eficiente dos problemas encontrados, cotidianamente, assim como ocorre atualmente. O próprio Braudel (2007, p. 77) discute o Renascimento como um movimento que está sempre a ser definido e também a ser redefinido. E assim discorre:

> A palavra "Renascimento", uma vez mais está diante de nós. Uma palavra prestigiosa, cômoda, "mítica" também, sem dúvida alguma; ela simplifica, confunde, suscita discussão. Assim, de saída, nenhum historiador aceitará, hoje, que o Renascimento seja um jardim exclusivo da história da arte e do pensamento inovador. A arte e a literatura são apenas uma linguagem para a sociedade que fala, que a escuta, que a aprova ou não, que a modifica se for o caso. O Renascimento deve ser forçosamente reconsiderado no tempo completo, no espaço completo, na significação completa da história.

O problema desta pesquisa é social. Ele aborda uma história com foco em problemas práticos, aqueles de medir alturas de objetos que estiveram presentes no tempo do Renascimento e estão presentes até hoje no cotidiano e também nos livros didáticos. Tal história inclui-se na história dos problemas que a humanidade produz e resolve utilizando-se das ferramentas matemáticas.

Urge compreender o contexto social da época em que esses problemas foram propostos, incluindo também o contexto de produção dos instrumentos auxiliares usados para calcular as medidas das alturas dos objetos. Isso significará tecer destaques à história da Europa, seguindo o rumo da história ocidental. Portanto, para conhecer uma história de problemas práticos matemáticos, é preciso conhecer as sociedades que os criaram. E é nessa vertente que Fernand Braudel constrói suas narrativas históricas, por isso a preferência por esse autor.

Rojas (2000, p. 295) explica o modo de trabalho desse historiador:

> Braudel insistiu muitas vezes em sua maneira peculiar de trabalhar: não partindo de uma teoria pré-concebida e anterior aos fatos, mas, elaborando esta teoria como quadro explicativo do conjunto de elementos e fenômenos históricos registrados e descobertos através do trabalho empírico. Por isso, uma vez concretizada sua primeira grande obra, Braudel se dedica a explicar, refinar e aprofundar as *lições metodológicas* derivadas desse mesmo trabalho inicial e monumental que é *O Mediterrâneo* [...].

O método histórico proposto por Braudel está relacionado, diretamente, com o período de tempo que abrange determinada pesquisa histórica. Ele será mencionado na próxima seção.

Tanto a obra sobre o Mediterrâneo quanto as obras *Civilização Material, Economia e Capitalismo: séculos XV-XVIII*, e também *O modelo italiano* de Braudel abordaram períodos de longa duração e englobaram um período de intensivas transformações históricas. Os dois exemplos, a seguir, ilustram isso:

- o próprio tempo do Renascimento, considerando os dois séculos tratados no trabalho *O modelo italiano* (1450-1650). Nele, Braudel (2007, p. 21) sugere que tudo o que ocorre na Itália nesse período, “a nós se oferece uma irradiação complexa, sob o signo ao mesmo tempo da aventura, da cultura de múltiplas facetas e do dinheiro de inúmeras astúcias”;

- o século XVI que, segundo Burke (2010, p. 53), “parece ter sido favorável ao desenvolvimento de grandes estados do tipo dos impérios rivais espanhol e turco, que dominaram o Mediterrâneo”.

Braudel (2009a, p. 8) ressalta que

> numa história completa do mundo há, porém, razões para desencorajar os mais intrépidos e até os mais ingênuos. É um rio sem margens, sem começo nem fim. E a comparação ainda é inadequada: a história do mundo não é um rio, são rios. Felizmente, os historiadores estão habituados ao confronto com superabundâncias. Simplificam-nas dividindo a história em setores (história política, econômica, social, cultural). Sobretudo, aprenderam com os economistas que o tempo se divide em diversas temporalidades e assim se domestica, se torna, em suma, manejável: há as temporalidades de longa e muito longa duração, as conjunturas lentas e menos lentas, os desvios rápidos, alguns instantâneos, sendo os mais curtos muitas vezes os mais fáceis de detectar. Afinal, dispomos de meios nada desprezíveis para simplificar e organizar a história do mundo, *o tempo do mundo*, que no entanto não é, não deve ser, a totalidade da história dos homens. Esse tempo excepcional rege, conforme os lugares e as épocas, certos espaços e certas realidades. Mas outras realidades, outros espaços lhe escapam e lhe são estranhos.

Essa citação é reveladora no que se refere ao papel do historiador diante do desafio de escrever sobre o *tempo do mundo*. O autor entende que é impossível um historiador dar conta da totalidade que um determinado tema abarca. Portanto, é preciso fazer escolhas daquilo que se deseja investigar. Desse modo, a título de exemplo, Braudel (2009a) justifica que, no terceiro volume de sua obra *Civilização Material, Economia e Capitalismo: séculos XV-XVIII*, a sua opção é por uma história setorial (material e econômica), ou seja, o seu olhar é para a economia com a proposta de se escrever sobre a economia mundial.

Reforça-se a ênfase em Braudel porque, conforme Dosse (2003, p. 168), “a história braudeliana é necessariamente mundial, seu objetivo é amplo e pressupõe, portanto, o domínio do método comparativo através do tempo mais longo e do maior espaço possível”. Braudel valoriza as questões do tempo e do espaço em larga escala, de modo que Burke (2010) afirma que se deve dar destaque principal ao fato que esse historiador contribuiu mais do que qualquer outro do século XX, no sentido de transformar nossas noções de tempo e espaço. E, ainda em Burke (2010), vale destacar alguns outros aspectos sobre Braudel, como por exemplo, sua visão do todo e o propósito de dividir o tempo histórico em tempo geográfico, tempo social e tempo individual. Sua conquista está permeada pela combinação de “um estudo na longa duração com o de uma complexa interação entre o meio, a economia, a sociedade, a política, a cultura e os acontecimentos” (BURKE, 2010, p. 61).

Todos esses aspectos mencionados acima estão, diretamente, relacionados com este trabalho. Com efeito, assumindo-o como uma pesquisa histórica e levando em conta os três séculos que ele toca, será imprescindível considerar uma visão do todo nesse tempo histórico, além do olhar para os indivíduos que se envolveram na resolução de problemas de medição de alturas, como para os instrumentos criados e empregados, isto é, o olhar deverá também estar voltado para a cultura material, tema que Braudel investiga profundamente em sua obra *Civilização Material, Economia e Capitalismo* (tradução para o português). Tal obra foi produzida pelo incentivo de Lucien Febvre a Fernand Braudel, para que escrevessem uma história da Europa (1400 a 1800), em dois volumes, a qual será mencionada mais especificamente, a seguir. No entanto, segundo Burke (2010), Febvre não conseguiu escrever sua parte já que morrera antes disso. Entretanto, Braudel escreveu essa obra em três volumes intitulada, originalmente, por *Civilisation matérielle et capitalisme*.

Além de tomar como base principalmente a concepção historiográfica de Fernand Braudel, abordada anteriormente, pretende-se apresentar um estudo especial de partes da obra do autor, quais sejam: a segunda parte do primeiro volume da obra *O Mediterrâneo e o mundo mediterrânico na época de Filipe II* (intitulada *Destinos colectivos e movimentos de conjunto*); o terceiro (e último) volume da obra *Civilização Material, Economia e Capitalismo*; e a obra *O modelo italiano*, a fim de contribuir para a compreensão da inter-relação existente entre o tempo e o espaço que permeia os problemas de medição de alturas tratados nos livros de personagens relevantes da história ocidental.

2.2 REFLEXÕES SOBRE BRAUDEL: NO *MEDITERRÂNEO*, NA *CIVILIZAÇÃO MATERIAL* E NO *MODELO ITALIANO*

O tempo do Renascimento em que os livros deste trabalho foram produzidos e seus lugares de produções (Itália e França – países margeados pelo Mediterrâneo) fazem interseção com o tempo histórico e geográfico, contado por Braudel em sua história dita *Total*. Por isso, se entende coerente e importante, a busca neste trabalho pela compreensão dos textos e dos contextos dos problemas de medição de alturas em livros do Renascimento, a partir de uma conexão com a obra de Braudel. Busca-se nesta seção destacar, concisamente, as concepções dos tipos de história abordados em alguns de seus livros.

As duas principais obras de Braudel, *O Mediterrâneo e o mundo mediterrânico na época de Filipe II* e, *Civilização material, economia e capitalismo* são vistas por Burke (2010) como obras-primas. Elas, certamente, foram influenciadas pela herança obtida pelo autor de Febvre e Bloch e por outras tradições, como a escola geográfica francesa de Vidal de La Blache, o geógrafo alemão Friedrich Ratzel e o historiador medievalista Henri Pirenne (BURKE, 2010).

Braudel permaneceu prisioneiro pelos alemães durante quase toda a Segunda Guerra Mundial, em um campo de oficiais perto de Lübeck[28], e segundo Lima (2005), os oficiais presos naquele lugar eram isentos de trabalhos forçados, conservavam contatos através de cartas e tinham acesso a livros. Desse modo, Braudel teve oportunidade de dedicar-se, profundamente, ao seu primeiro trabalho sobre o Mediterrâneo, que se tornou depois sua tese de doutorado. O próprio Braudel ressalta isso em uma de suas cartas a Febvre e a sua esposa, quando menciona que, se não fosse o cativeiro ele não teria conseguido escrever a obra (DAIX, 1999).

Braudel deu conferências enquanto esteve como prisioneiro, e, em uma das suas poucas notas que sobreviveram à prisão, ele argumenta seu tipo de História:

> A história que invoco é uma história nova, imperialista e mesmo revolucionária, capaz, para renovar-se e rematar-se, de se apoderar das riquezas das outras ciências sociais, suas vizinhas, uma história, repito, que mudou muito, que progrediu singularmente, digam o que disserem, no conhecimento dos homens e do mundo, em suma, na própria inteligência da vida. Uma grande história, o que significa uma história que tem em vista o geral, capaz de extrapolar os detalhes, de superar a erudição e de captar o

[28]Uma cidade do norte da Alemanha.

> que é vivo com todos os seus riscos e na mais ampla linha de verdade (BRAUDEL, apud DAIX, 1999, p. 196).

Essa história nova, revelada por Braudel, está refletida em sua obra *O Mediterrâneo e o mundo mediterrânico na época de Filipe II*. Com efeito, baseando-se nos Prefácios da obra analisada, percebe-se que as preocupações iniciais de Braudel (1983) foram declarar e justificar seu amor pelo Mediterrâneo; compreender e definir o "complexo de mares" (o Mediterrâneo) como um personagem histórico através das fontes disponíveis como muitos artigos, memórias, publicações, pesquisas, sendo que muitas delas eram oriundas da etnografia, geografia, botânica, geologia, etc. Está aí a ideia de tomar posse de outras ciências sociais, na intenção de escrever uma história.

Todavia, o desafio de investigar uma grande história que fosse além das minúcias e tratasse de um longo tempo, implicaria também um processo complexo de pesquisa. Com isso, em sua obra *La historia y las ciencias sociales*, Braudel demonstra sua preocupação com as dificuldades de uma pesquisa histórica. De fato, para ele,

> a história das técnicas, a simples história das técnicas de pesquisa, além de investigações incertas, minuciosas, continuamente interrompidas – já que o fio se rompe demasiadas vezes entre os dedos, ou, dito de outra maneira, já que bruscamente faltam os documentos a interrogar – também descobre paisagens amplas em excesso e coloca problemas muito vastos. No século XVI, o Mediterrâneo, o Mediterrâneo considerado em bloco, foi objeto de toda uma série de dramas técnicos. É então quando a artilharia se instala na estreita ponte dos barcos, e de fato, muito devagar [...] (BRAUDEL, 1970, p. 33).

Ao retomar os três níveis da História propostos por Braudel (*estrutural, conjuntural* e *factual*), eles são explicados considerando a divisão de sua obra sobre o Mediterrâneo em três partes, de acordo com esses níveis.

Braudel (1983, p. 25) classifica a primeira parte como aquela que trata de uma história quase imóvel, lenta, de lentas transformações, "é a do homem nas suas relações com o meio que o rodeia", ou seja, está a referir-se à história *estrutural*.

Para a história *conjuntural*, Braudel (1983, p. 25) distingue outro nível da História, assinalado por um ritmo lento, aquele em que se estuda de modo sucessivo "as economias, os Estados, as sociedades, as civilizações" e ainda tenta com isso mostrar como tais "forças profundas actuam no complexo domínio da guerra".

Quanto à história *factual*, ele também a julga como tradicional, relacionada à história na dimensão do indivíduo, uma história de acontecimentos. Braudel (1983, p. 25) comenta que esta é "uma história com oscilações breves, rápidas, nervosas" e a trata como a mais perigosa por tender para confundir o historiador, podendo ocasionar equívocos e não proporcionar uma análise mais aprofundada. Burke (2010, p. 52) afirma que Braudel se preocupou em posicionar indivíduos e acontecimentos em um contexto, mas possuía habilidade em explicar sua história "ao preço de revelar sua fundamental desimportância".

Ainda quanto aos níveis da História mencionados por Braudel (2009a): *estrutural, conjuntural e factual* e, com respeito à variável tempo (ou, à temporalidade), ele também os classifica, respectivamente, como a história de um tempo *geográfico*, de um tempo *social* e de um tempo *individual*, no Prefácio da obra sobre o Mediterrâneo.

A concepção de historiografia de Braudel, considerando o tempo numa longa duração, manteve-se até o fim da sua vida, tanto que seu maior estudo após o Mediterrâneo, sobre a história da Europa e intitulado *Civilização material, economia e capitalismo*, também possui três partes e é comparado pelo próprio autor, conforme Burke (2010), com um edifício de três andares onde: no andar térreo está a civilização material; no andar intermediário, encontra-se a vida econômica; e no andar superior, o capitalismo.

> Há um paralelo óbvio entre as estruturas tripartites de *O Mediterrâneo* e da *Civilisation et Capitalisme*. Em ambos os casos, a primeira trata da história quase imóvel, a segunda, das mudanças estruturais institucionais lentas e a terceira, de mudanças mais rápidas – eventos no primeiro livro, tendências no outro (BURKE, 2010, p. 65).

Burke (2010) constata que Braudel mantém sua concepção sobre os níveis da História em suas duas maiores obras.

Para Daix (1999), a “Obra Magna” de Braudel, *Civilização material, economia e capitalismo*, culminou com a sua concepção da História e representou uma provocação a seus sucessores. Isso porque Braudel seguiu uma tendência oposta à historiografia de seu tempo, ao estabelecer uma história do espaço e dos grandes espaços na longa duração. O próprio Braudel, citado por Daix (1999, p. 540), declara seu receio quanto à postura dos historiadores numa entrevista, no início da década de 1980:

> Observamos espantados tantos historiadores preocupados com a novidade a estudarem um tema bem delimitado, situado numa região específica, que começa em tal data precisa e termina em tal outra data precisa. Eles não se dão conta de que podem ter feito tudo, menos história de grandes horizontes, pois a história é uma problemática que ultrapassa os limites comuns.

A obra *Civilização material, economia e capitalismo – séculos XV-XVIII*, com esse título, foi lançada em 1979 e composta por três volumes, quais sejam: I) *As estruturas do cotidiano*; II) *Os jogos da troca*; III) *O tempo do mundo*.

Com a finalidade inicial de escrever uma história da Europa na composição dessa obra, de acordo com Burke (2010, p. 65), “o primeiro volume é dedicado ao alicerce, isto é, lida com o velho regime econômico que permanece há quase quatrocentos anos”. Isso indica o empenho de Braudel pela longa duração e revela a sua abordagem à história total de modo que uma de suas mais importantes justificativas é sustentar ser impossível expor as mudanças relevantes, sem se valer de uma visão global.

Os jogos da troca, título do segundo volume, se situa no ponto de encontro entre a base da vida material e a vida econômica que inicia com o estabelecimento do valor de troca. Braudel citado por Daix (1999, p. 547), tratou de analisar o conjunto dos jogos de troca desde “o escambo elementar até o capitalismo mais sofisticado”, isto é, um tipo de “história econômica geral” de modo mais atencioso e neutro possível. Análise essa classificada como “estudo na junção do social, do político e do econômico”.

Pretende-se nesta seção compreender alguns aspectos da obra de Braudel, úteis para o “espírito” da escrita desta pesquisa. Coaduna-se, portanto, com a menção de Daix (1999, p. 556) quando dá ênfase à inovação de Braudel em sua abordagem, no sentido de que o autor não se restringe a fazer a economia interferir na história sociocultural, “mas, a partir de uma análise refinada dessa economia, identifica as repercussões de suas variações nos diferentes setores da sociedade e as formas de reação destes, assim como as interações dos diferentes setores entre eles”.

Como se percebe, a empreitada de Braudel na obra *Civilização material, economia e capitalismo – séculos XV-XVIII* é ousada e profunda, digna de ser estudada sempre por quem deseja avançar numa pesquisa histórica, principalmente, se se procura narrar uma história que envolva longo tempo. O que atrai no trabalho do autor é o seu talento em tomar ideias de outras áreas/disciplinas e transformá-las próprias para a história.

Segundo Burke (2010, p. 70), *O tempo do mundo*, último volume da obra supracitada, altera o foco “da estrutura para o processo” e o autor toma, por base, as ideias de Immanuel Wallerstein[29] sobre a economia mundial.

Braudel (2009a, p. 7) afirma que *O tempo do mundo* foi escrito a partir de uma aposta e de uma pretensão próprias. Com efeito, a aposta estaria em recorrer a uma questão possível numa pesquisa histórica, o de reconhecer nela várias temporalidades, segundo um desenvolvimento cronológico. “Uma aposta, como se vê, mesclada a uma certa pretensão, a de que a história seja capaz de se apresentar ao mesmo tempo como uma explicação – uma das mais convincentes – e como uma verificação [...]”.

Ainda expõe como outra pretensão “querer apresentar um esquema válido da história do mundo a partir de dados muito incompletos e, no entanto, demasiado numerosos para se deixarem abarcar completamente” (BRAUDEL, 2009a, p. 7). O autor sugere que todo seu esforço é para fazer-se compreendido através do que ele

[29]Segundo Burke (2010), Immanuel Wallerstein é um sociólogo que fez pesquisas na África e, por ter percebido que não poderia compreendê-la se não conhecesse o capitalismo, retornou a fazer pesquisa na área da economia, sendo que o título de historiador econômico lhe foi dado porque buscou o capitalismo em suas origens.

viu e mostrou em sua história. Isso justificaria suas buscas e o próprio ofício de historiador.

Braudel, em *O tempo do mundo*, estabelece o conceito de *economia-mundo*, empregado também por ele na obra sobre o Mediterrâneo, o qual está relacionado com uma economia que significa “um mundo em si mesma”. De fato, conforme Daix (1999, p. 563), tal conceito “corresponde à existência de um espaço econômico coerente, de um envoltório econômico não limitado por fronteiras estatais, mas, ainda assim autônomo”. Ratificando essa reflexão, para o próprio Braudel (2009a, p. 12), a palavra *economia-mundo* “envolve apenas um fragmento do universo, um pedaço do planeta economicamente autônomo, capaz, no essencial, de bastar a si próprio e ao qual suas ligações e trocas internas conferem certa unidade orgânica”.

Para tratar da *economia-mundo*, Braudel recorre a uma ordem dos poderios econômicos mais importantes no período de sua pesquisa. Braudel (2009a) começa por Veneza do século XV, porque foi ela, segundo o próprio Braudel que, primeiramente, conseguiu uma hegemonia sobre a economia do mundo. Depois de Veneza, tratou das seguintes cidades, economicamente dominantes: Antuérpia, Gênova e Amsterdam. Em seguida, segundo Burke (2010, p. 71), Braudel considerou o problema da *economia-mundo* de modo contrário, recorrendo a uma análise do “fracasso de outras partes do mundo em obter uma posição dominante similar, concluindo sua história com a Grã-Bretanha e a Revolução Industrial”.

Em *Destinos colectivos e movimentos de conjunto*, segunda parte do primeiro volume sobre o Mediterrâneo, Braudel (1983) dá indícios do seu objetivo maior, não tendo sido somente o de abordar a longa duração, mas também de estudar uma história social, que parte do homem, que envolve grupos, seus destinos e seus movimentos. Em suma, seu interesse esteve tanto nas estruturas sociais quanto no movimento das mesmas. Reforçando essa ideia, Braudel (1983, p. 399) declara que “estas duas realidades, como sabem os economistas, a quem devemos sua verdadeira distinção, estão associadas na vida de todos os dias, divididas sem fim entre o que muda e o que persiste”.

Burke (2010, p. 52) esclarece que a preocupação de Braudel na história das estruturas esteve, diretamente, relacionada aos “sistemas econômicos, estados, civilizações e formas mutantes de guerra”.

> Esta história se movimenta a um ritmo mais lento do que a dos eventos. As mudanças ocorrem no tempo de gerações, e mesmo de séculos, por isso os contemporâneos dos fatos nem sempre se apercebem delas. Mas, mesmo assim, eles são carregados pela corrente. [...] (BURKE, 2010, p. 52).

Interessante ressaltar que Braudel (1983) menciona suas dificuldades em tratar desses problemas num único trabalho e deixa vestígios de que teve de fazer “cortes” no caminhar da pesquisa histórica, para chegar a uma compreensão única para o leitor, como ele almejava.

Daix (1999, p. 565) explica como se faz o caminhar da história geral do mundo, em Braudel:

> [...] alia os movimentos da economia a cada problema mais importante, em sínteses renovadas. Aqui, partindo do espaço da economia, ele passa ao espaço político, ao surgimento dos Estados, às guerras, mas descortina e explica a dinâmica efetivamente sintética da duração econômica. É verdade que a exposição acelera esta duração, mas é assim que ele anima uma paisagem global que, na cronologia tradicional, parecia dividida e imóvel entre as datas consideradas. É uma história fluida, aliando geografia humana e econômica à duração, efetivamente multidimensional.

A última obra de Braudel analisada neste trabalho é *O modelo italiano*. Foi escrita assim que Braudel se aposentou e, publicada em italiano em 1974, sendo que a versão original francesa só foi publicada em 1986. Daix (1999) declara-a como sendo um dos melhores trabalhos do historiador, pois trata de civilização como a maior parte deles e, em especial, aborda a história cultural com muita liberdade, tema que, praticamente, não considerou ao longo de sua vida. Ainda para Daix (1999, p. 624) “as páginas sobre o humanismo, o Renascimento, o Barroco são brilhantes por dominarem de considerável altura temas não raro confinados ao anedótico”. Ele entende que Braudel conseguiu escrever uma história única que permeia da economia à cultura e à arte.

A obra *O modelo italiano*, a que se teve acesso neste estudo, foi uma edição brasileira de 2007, em que Laura de Mello e Souza, autora da *Introdução* dessa edição, destaca que a conclusão de Braudel foi que a Itália, como tantas outras civilizações, continuou sendo importante para a Europa, mesmo tendo entrado em decadência. Para Mello e Souza, *O modelo italiano* “depois de tornado livro, escrito há mais de trinta anos e destinado a oferecer uma análise geral do apogeu italiano entre os séculos XV e XVII, iluminou e continua iluminando as relações entre a história da arte e história total”.

O tempo do mergulho histórico, feito em *O modelo italiano*, é de 1450 a 1650. Segundo Braudel (2007) seu estudo é realizado por comparação com outras experiências, concebidas ao longo de uma história multissecular, apesar de parecerem distintas e distantes. Também justifica sua delimitação no tempo. Para 1450, o autor deixa claro que não foi um acontecimento único que o fez escolhê-lo, mas vários, como a propagação da potência Itália e a tomada ativa do Mediterrâneo por meio das navegações. Além disso, teve as emigrações contínuas com início na Itália que, embora não tivessem sido maciças, tiraram do país personagens de qualidade:

> engenheiros, operários especializados que levavam consigo o segredo de técnicas eruditas, comerciantes, principalmente eles, homens da Igreja e, já a esta altura ‘tecnocratas’ da política [...], humanistas (professores ou não), enfim, artistas, musicistas, arquitetos, pintores, escultores, ourives, grupos de teatro, encenadores, mestres de dança, astrólogos... (BRAUDEL, 2007, p. 21).

Esses especialistas difundiram seus trabalhos em outros lugares, fazendo com que a Itália ficasse conhecida. Para Braudel (2007), considerando a civilização, sua investigação vai do Renascimento ao Barroco triunfante até meados do século XVII. Renascimento esse vivido pela civilização italiana e influenciador da civilização europeia.

Ainda sobre a delimitação do tempo, Braudel (2007) vê nesses dois séculos de pesquisa histórica, três Itálias: uma Itália pacífica (de 1454 a 1494) criada e preservada por ela mesma; uma Itália devastada (de 1494 a 1559) por uma guerra determinada por outros “povos” ou guerras ocorridas pela conquista e dominação da península itálica e, por fim, uma Itália inesperada, caracterizada por uma paz de longa duração, de novo livre para viver ao seu modo.

Com uma obra tão densa como a de Fernand Braudel, naturalmente, críticas ao seu trabalho surgiram. Algumas serão destacadas neste trabalho, tendo em vista que elas também estão integradas ao olhar que se tem hoje desse historiador. Segundo Burke (2010, p. 56), certas afirmações de Braudel não foram bem aceitas, por exemplo, o tema sobre a "falência da burguesia" que "não satisfez os historiadores dos Países Baixos, cujos mercadores continuaram a prosperar". Outra censura mais radical feita a Braudel, segundo Burke (2010, p. 57), foi que o autor teria dado uma "resposta poética a um problema histórico do passado", e que a organização da sua obra sobre o Mediterrâneo separa os acontecimentos dos seus fatores sociogeográficos, os quais, na opinião do crítico, poderiam explicá-los. Assim, a suposta fuga de Braudel sobre a discussão profunda da história voltada para problemas é rebatida por ele, ao argumentar que "meu grande problema, o único problema a resolver, é demonstrar que o tempo avança com diferentes velocidades" (BRAUDEL, apud BURKE, 2010, p. 58).

A concepção de história estrutural com respeito ao tempo não agradava muito ao pensamento de Febvre, apesar de ter sido grande mestre de Braudel. Mesmo assim, conforme Dosse (2003), o pensamento do discípulo de Febvre era que o homem não poderia fazer nada contra os acontecimentos passados através dos séculos, aos quais ele está condicionado, nem contra os períodos da economia na longa duração. Portanto, o homem não tem como encontrar subterfúgios para agir sobre o passado, contudo, pode tomar consciência do mesmo.

> A longa duração desempenha aqui uma linha de fuga para o homem, ao introduzir uma ordem fora de seu domínio. A retórica braudeliana permanece, no entanto, humanista na medida em que o homem está descentralizado mas não ausente de sua construção temporal, e permanece fiel nesse plano à herança antropocêntrica de Lucien Febvre e de Marc Bloch. Um humanismo organicista que não se dedica à realidade humana como finalidade, mas à pluralidade de seus órgãos (DOSSE, 2003, p. 177).

Todo esse fascínio de Braudel em olhar para o tempo histórico escalonado gerou opiniões desfavoráveis ao autor. Os motivos estão ligados ao fato de que ele "mantém um fino equilíbrio entre o abstrato e o concreto, o geral e o particular.

Interrompe, aqui e ali, seu panorama para focalizar um estudo de caso, [...]" (BURKE, 2010, p. 68).

Para Burke (2002, p. 69), Braudel tinha grande habilidade em se apossar das ideias de outras áreas - como, por exemplo, da Geografia, da Sociologia e da Economia - e transformá-las para a História, sendo que "nessa análise dos mecanismos de distribuição e troca, Braudel oferece, caracteristicamente, explicações ao mesmo tempo estruturais e multilaterais". Ele não admitia explicações em termos individuais. Entretanto, sempre foi contrário a explicações apoiadas em um único fator, como ao afirmar que o capitalismo não se originou de uma única fonte. Desse modo, uma das críticas feitas a Braudel por Burke (2002, p. 70) é que ele "combina uma visão ampla com uma falta de rigor analítico, dando peso a fatores pouco analisados no decorrer do livro". Esse livro a que Burke está a se referir é *Civilização material, economia e capitalismo*.

Outras críticas salientadas por Burke (2002) é que em alguns momentos, Braudel: se distanciou do Mediterrâneo (foco prioritário de sua pesquisa); se conservou cativo da divisão do trabalho original (em relação às histórias estrutural, conjuntural e factual); e teve dificuldade em valorizar a autonomia da cultura e das ideias dos homens, sobrepondo a elas explicações ligadas à geografia dos lugares.

Para concluir, em relação às considerações críticas ao historiador, coaduna-se com Burke (2010, p. 72), ao mencionar, relativamente, à obra *Civilização material, economia e capitalismo* que

> as qualidades, contudo, da trilogia de Braudel superam e muito seus defeitos. Juntos, os três volumes constroem uma magnífica síntese, tomando-se o termo economia num sentido amplo, da história econômica do início da Europa moderna, e colocam essa história num contexto comparativo.

Entende-se que não será possível compreender os textos e os contextos dos problemas de medição de alturas presentes nos livros, num período de longa duração, sem fazer um exercício de investigar, também, as conjunturas sociais e econômicas de cada época, com o apoio do pensamento de Braudel.

2.3 O TEMPO E O LUGAR DE FERNAND BRAUDEL E SUAS RELAÇÕES COM A PESQUISA

Esta pesquisa suscita personagens italianos que viveram na Itália, nos séculos XV e XVI, respectivamente, Leon Battista Alberti e Ottavio Fabri e tiveram importância fundamental nas áreas em que exerceram seus trabalhos. Alberti foi um artista italiano que até hoje é referência na história da arquitetura mundial e escreveu várias obras, inclusive uma de matemática prática para governantes da época. Já Fabri, foi engenheiro e perito, trabalhou para o governo italiano e também deixou uma obra escrita sobre resolução de problemas práticos de matemática, e mais outros dois que nunca foram publicados. Por outro lado, foi abordado um terceiro autor, o francês Oronce Finé, da primeira metade do século XVI, que apesar da formação em medicina, dedicou sua vida à paixão pela matemática, tendo escrito livros e assumido cadeira de professor dessa disciplina. Entende-se que um estudo como esse envolve a compreensão de uma história "conjuntural e estrutural" que contempla aspectos sociais e econômicos de um período de longa duração.

Os problemas matemáticos abordados nesta investigação são analisados em obras escritas e/ou publicadas do século XV até o início do século XVII, sendo todas oriundas da Europa, mais precisamente da Itália e França. Logo, torna-se pertinente e coerente um encontro com a obra de Braudel. Destarte, a fim de ilustração, os autores de duas das obras tratadas, Leon Battista Alberti e Ottavio Fabri foram cidadãos italianos importantes para a história social e econômica das cidades em que viveram e tiveram alguma relação com o governo das mesmas. Eles fizeram parte da história de longa duração sobre o Mediterrâneo, contada por Braudel.

Leon Battista Alberti, com seu método sobre a perspectiva, no período do Renascimento teve influência até para a cultura moderna. Flores (2007, p. 73) destaca que "o elogio dado à perspectiva de Alberti na pintura, o fascínio pelas técnicas e máquinas para melhor ver, outorgou à visão um lugar especial para a cultura moderna". Além disso, a importância do trabalho de Alberti não se limita apenas ao campo da arquitetura. Cambi (1999), em seu livro intitulado *História da Pedagogia*, menciona a importância das ideias sobre educação propostas por Alberti na obra *Della famiglia*, de 1435. Nela Alberti sugere que o homem a ser educado, seja um homem ativo e, assim, inclui em sua proposta de educação uma literatura essencial à vida do cidadão daquela época, com o objetivo de obter honra e influência e para participar, efetivamente, da vida política, além de incluir o estudo de matemática (inserindo o ábaco e a geometria) e a educação física. Para Cambi (1999, p. 232), Alberti “coloca-se no quadro de um Renascimento aberto que interpreta as instâncias do novo que avança”, sendo que “com ele, o humanismo adquire uma dimensão menos ligada ao espírito do classicismo e mais alinhada com as exigências práticas do tempo”. É a incorporação do pensamento à cultura e ao cotidiano que os artistas promoveram na época.

Ao constatar que, por exemplo, o livro *Matemática Lúdica* de Alberti foi escrito, especialmente, para um nobre, é interessante ressaltar que a Itália vivida por esse autor apresentou características especiais em relação às artes. Uma parte muito seleta da sociedade, uma alta burguesia, é quem dava ordens do que e como deveriam ser as construções, as pinturas entre outros elementos. Era esse tipo de cliente que encomendava, escolhia e impunha seu gosto (BRAUDEL, 2007).

E quanto à França de Oronce Finé?

Sabe-se que a Itália foi berço do fenômeno Renascimento e, segundo Jaguaribe (2001, p. 434), teve Florença

> como seu foco de irradiação, do qual se expandiu para muitas cidades no Norte da Itália e Nápoles, mas especialmente para Roma e Veneza. Predominantemente sob influência italiana, mas também, no caso da pintura dos Países Baixos, influenciada por fontes nativas, no fim do século XV até o princípio do século XVII houve uma expansão da cosmovisão renascentista pela maior parte da Europa Ocidental, particularmente a Holanda, Suíça, França, Alemanha, Inglaterra e Península Ibérica.

Logo, a França também recebeu influências advindas da Itália. No campo das artes, por exemplo, Braudel (2007, p. 80) observa como foi: “[...] uma Itália modesta, de modo genérico, representou muitas vezes a primeira fórmula da nova arte, com destino à França ou a outra parte”.

> As trocas miúdas, os pequenos serviços, os empréstimos modestos não começam com o fim do século XV: o italianismo iniciou bem cedo sua infiltração. Assim, para tomar na França um só exemplo ilustre, Jean Fouquet[30] viajou e trabalhou na Itália de 1443 a 1447: encontrou-se em Minerva com Fra Angelico e tomou-lhe de empréstimo "os temas decorativos, pilastras, guirlandas, couraças e elmos [...] cujos modelos lhe haviam sido fornecidos por seu amigo Michelozzo" (BRAUDEL, 2007, p. 81).

A cidade de Paris foi uma grande praça mercantil desde o século XII até o século XV. Para Braudel (2009a, p. 99), "a cidade tirou proveito da proximidade de tantos homens de negócios. Ao mesmo tempo, acolhia as instituições da monarquia francesa, cobria-se de monumentos, abrigava a mais brilhante das universidades da Europa [...]", além de ter assumido "o lugar de honra da Cristandade".

Oronce Finé viveu na França numa, época imediatamente posterior àquela em que seu país viu estabelecido, em seu meio, o centro econômico do Ocidente. Mesmo que isso não tivesse perdurado no século XVI, a influência do movimento renascentista italiano continuou viva na França.

Conforme Braudel (2007), após 1528 o rei Francisco I da França recriou em torno dele um cenário italiano, e houve então uma virada na vida artística francesa. Em Paris, o rei imprimiu nas construções interiores de vários castelos, o estilo novo, entretanto, "a escola de Fontainebleau[31] [...] é o verdadeiro Renascimento que se

[30]Artista italiano nascido na cidade francesa de Tours, considerado o mais importante pintor francês do século XV do começo do Renascimento, criador de miniaturas de notável beleza com em um estilo reunindo características da pintura italiana e do detalhismo da arte flamenga. Aparentemente estudou pintura em Paris e foi formado na tradição francesa do gótico internacional. Foi influenciado por pintores como Piero della Francesca, Masaccio e *Fra* Angelico e desenvolveu um novo estilo integrando as fortes tonalidades cromáticas do gótico, com a perspectiva e os volumes italianos e a inovação naturalista dos artistas flamengos. Consagrou-se no gênero em que se tornou célebre ao realizar aquela que é considerada sua obra-prima, o *Retrato de Carlos V* (1427). Seguiu para a Itália onde pintou o retrato do papa Eugênio VI e produziu suas belas ilustrações de Antiguidades judaicas, de Flávio Josefo. De regresso a Tours, trabalhou por dez anos para Etienne Chevalier, o tesoureiro real, na elaboração do seu mais famoso trabalho: as ilustrações de um *Livro de horas*, com sessenta miniaturas de página inteira. Pintou para a igreja de Notre Dame de Melun uma placa de madeira com a figura de Etienne Chevalier, de um lado, e de outro uma *Madona* com as feições de Agnès Sorel, amante do rei Luís XI (1450) e morreu em Tours. Apesar de muito popular em seu tempo, depois sua obra foi esquecida até sua redescoberta no século XIX pelos românticos franceses e alemães, interessados na arte medieval. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JeanFouq.html>. Acesso em: 22 ag. 2013.

[31]Utilizada pelos reis da França desde o século XII, a residência de caça de Fontainebleau, situada no coração de uma grande floresta na Île-de-France, foi reformada, ampliada e adornada no século XVI por Francisco I, que queria fazer dela uma "nova Roma". O castelo teve inspiração em construções italianas e convergiu com a arte do Renascimento e com as tradições francesas. Foi naquele local onde se deu a criação da escola de Fontainebleau, movimento dominante da criação artística

instala na França, já não dos ornamentistas ‘industriais’ da primeira hora, mas dos ‘chefes de escola’” (BRAUDEL, 2007, p. 90). Finé produziu muitos trabalhos[32] nesse tempo, assim exerceu influências em obras de outros autores. Como se pode constatar, o italiano Cosimo Bartoli escreveu a obra intitulada *Del modo di misurare* (1564) que tratava da construção e do uso de instrumentos para medir e calcular - tal qual o seu primeiro livro - é uma compilação do trabalho de Oronce Finé, no que se refere às medidas de distâncias (SAITO; DIAS, 2011).

Após 1559, até metade do século XVII, segundo Braudel (2007), a Itália seguiu um caminho imprevisto, com uma paz predominante que se insinuava através dos Estados e das economias e que foi prolongada. O autor sugere algumas razões para que essa paz tenha se instalado como, por exemplo, sua unidade religiosa de fidelidade à Roma; o não apoio à Reforma; e a não divisão religiosa.

Braudel (2007, p. 97) menciona que “durante muito tempo, o mar pertencera aos cristãos do Mediterrâneo, isto é, antes de tudo aos marinheiros da Itália” e que “um Mediterrâneo próspero é uma Itália próspera”.

O autor narra que muitos acontecimentos políticos e econômicos de outros países, que margeiam o Mediterrâneo, terminaram por favorecer a Itália. Um exemplo é que em 1571, a rota marítima direta que havia entre a Espanha e os Países Baixos foi interrompida, o caminho terrestre por meio da França não era bom, e então, as rotas mais convenientes foram as da Itália.

Ottavio Fabri, engenheiro e perito italiano, viveu na segunda metade do século XVI, em Veneza. Foi um personagem de relevância na sociedade veneziana em virtude de suas atividades como comerciante, comprador de artes e membro no *Provveditori ai Beni Inculti* (conselhos criados para melhorar a agricultura na Itália do século XVI). Ademais, sua formação matemática e científica contribuiu para ele ser um profissional influente na época, ligado ao desenvolvimento de conhecimentos

---

francesa até meados do século XVII. Disponível em: <http://www.france.fr/pt/arte-e-cultura/o-castelo-de-fontainebleau>. Acesso em: 22 ag. 2013.
[32] Tais trabalhos estão elencados no capítulo reservado ao autor Oronce Finé.

teóricos e às habilidades práticas de vários outros peritos como ele (PANEPINTO, 2008/2009).

Fabri viveu esse período de paz e de glória da Itália, mas também participou de uma forte queda na economia italiana. Como importante comerciante, ele veio à falência no final de sua vida, tendo perdido muitos dos seus bens, inclusive aqueles obtidos como colecionador de artes. Isso corrobora com Braudel (2007, p. 105), ao evocar que “a longo prazo, tal situação excepcional se enrijece e se deteriora. Nem tudo dependia apenas dos agiotas, de seus cálculos, cautelas e habilidades”. A situação econômica de cidades potências italianas vai perdendo força até acontecer uma crise forte que “liquida o ‘século dos genoveses’”, em 1627.

Alberti, Finé e Fabri fizeram, efetivamente, parte desse tempo classificado como Renascimento e desse lugar, adotado por Fernand Braudel como sua geografia favorita, o Mediterrâneo. Desse modo, foram influenciados pelos contextos sociais e econômicos em que viveram e, reciprocamente, influenciaram de certo modo o tempo e o lugar em que viveram. Se não fosse assim, suas obras que continham problemas de medição de alturas não teriam alcançado algum tipo de relevância e nem teriam sido utilizadas por aqueles que as recomendaram. Elas foram escritas pelas necessidades sobrevindas dos indivíduos, necessidades essas que estão presentes até hoje, no entanto, com objetivos distintos daqueles do Renascimento.

3 LEON BATTISTA ALBERTI: O PROBLEMA DE CALCULAR ALTURAS E O USO DOS DARDOS (FLECHAS OU *GNÔMONS*)

3.1 LEON BATTISTA ALBERTI[33]

O italiano Leon Battista Alberti (Figura 3) viveu por 68 anos, na época da chamada Primeira Renascença. Nasceu em 18 de fevereiro de 1404, em Gênova (Império Francês – hoje Itália) e faleceu em 03 de abril de 1472, em Roma (Estados Pontifícios – hoje Itália). Nascido em família de ricos comerciantes, cresceu tendo incentivo do pai para estudar Matemática (O'CONNOR; ROBERTSON, 2006).

O pai de Alberti faleceu quando ele tinha apenas 17 anos. Após isso, ele foi estudar direito na Universidade de Bolonha, mesmo a contragosto. Para se distrair, Alberti voltou a dedicar-se aos estudos de matemática e física e ainda escreveu uma comédia clássica intitulada *Philodoxeos*, classificada pelos seus contemporâneos como uma antiga peça de teatro romano. Desse modo, Alberti interrompeu, por um tempo, seus estudos em direito e tudo indica que passou uma temporada em Florença. Suspeita-se que lá, então, conheceu Filippo Brunelleschi (1377 - 1446, pioneiro arquiteto renascentista) e Lorenzo Ghiberti (1378 - 1455, escultor italiano renascentista). Isso, provavelmente, o influenciou em suas obras. Retomou seus estudos e conseguiu concluir graduação em direito canônico em Bolonha. Com a queda do poderio econômico de sua família e conflitos familiares ele ingressou numa carreira eclesiástica (O'CONNOR; ROBERTSON, 2006).

---

[33]Essa biografia de Leon Battista Alberti foi elaborada com base na tradução/adaptação da autora desta pesquisa do texto, apresentado pelos matemáticos John O'Connor e Edmund Robertson, encontrado disponível no site: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Alberti.html (elaborado em agosto de 2006).

Figura 3 - Estátua de Leon Battista Alberti na Galleria degli Uffizi (Galeria dos Ofícios)
Fonte: Ars Dictum[34].

Segundo Pierre Souffrin, astrônomo francês, que apresenta e comenta a obra *Matemática Lúdica*[35] de Alberti (2006, p. 8), a carreira eclesiástica deste italiano foi impulsionada pelo apoio do papa Eugênio IV, já que lhe deu a possibilidade de ser secretário do chanceler Biagio Molin (em 1432), breviador[36] da Cúria romana. Com isso, Alberti estudou ruínas antigas de Roma, dedicou-se à pintura e aos experimentos de óptica e começou a escrever a obra *Della famiglia* (1434). Retornou a Florença em 1434, e lá ficando até 1443, teve mais contatos com artistas renascentistas, concluindo o tratado *Della famiglia* (1435), no qual aborda o tema educação. Participou de debates literários, escreveu obras literárias e poéticas e compôs, em 1437, um tratado intitulado *De pictura*, que trata sobre pintura (e dedicado ao amigo Brunelleschi). Essa obra sobre pintura representa um tratado geral a respeito das leis da perspectiva. Conforme Pierre Souffrin, depois da primeira edição do tratado *De pictura*, tal obra repercutiu bastante, sendo até hoje a que mais atrai a atenção de pesquisadores sobre Alberti.

[34] Disponível em: <http://arsdictum.com/Battista.htm>. Acesso em: 30 jun. 2011.
[35] A abordagem sobre o problema de medir alturas apresentado por Alberti foi realizada com base na tradução para o português intitulada *Matemática Lúdica* (tradução brasileira autorizada, a partir da versão francesa de Pierre Souffrin – *Divertissements mathématiques*) e, principalmente, de uma tradução da obra de Alberti do latim para o italiano, feita por Cosimo de Bartoli e publicada em 1568.
[36] Funcionário que na Cúria romana tem a seu cargo o expediente dos brevês. Um brevê apostólico ou brevê pontifício é um tipo de documento circular assinado pelo Papa e referendado com a impressão do Anel do Pescador.

Encontrou-se outra edição da obra sobre pintura de Alberti. Ela se refere à tradução de Lodovico Domenichi de 1547, foi impressa em Veneza por Gabriel Giolito de Ferrari e dedicada a Francesco Salviati[37].

John O'Connor e Edmund Robertson, professores da Escola de Matemática e Estatística da University of St Andrews (Scotland) e criadores do site intitulado *The MacTutor History of Mathematics archive*[38], apresentam uma biografia de Leon Battista Alberti onde ressaltam que nessa carreira eclesiástica, Alberti teve contato com o papa Nicolau V (papa de 1447 até 1455). Os professores afirmam que

> o papa Nicolau V era um entusiasta de estudos clássicos e produziu um ambiente muito adequado para Alberti, que lhe presenteou com seu livro sobre a arquitetura *De re aedificatoria* em 1452. Alberti elaborou o livro sobre a obra clássica de Vitruvius e copiou o seu formato, dividindo seu texto em dez capítulos. Vitruvius (século 1 a.C.) foi o autor do famoso tratado *De architectura* (Sobre Arquitetura). Os métodos de fortificação os quais Alberti estabeleceu no texto foram altamente influentes e foram utilizados na construção de fortificações de cidades por várias centenas de anos. Em 1447, o ano em que Nicolau V se tornou papa, Alberti se tornou um cânone da Igreja Metropolitana de Florença e do Abade de Sant'Eremita de Pisa. O papa Nicolau V empregou-o em uma série de grandes projetos de arquitetura [...].

Foi encontrada também uma versão[39] em latim do livro *De re aedificatoria* de Alberti de 1485. Além disso, é possível ter acesso a duas edições de uma obra desse autor sobre Arquitetura: uma edição de 1565 intitulada *L'architettura*, traduzida por Cosimo Bartoli e impressa por Francesco Franceschi Sanese; e a outra, uma edição inglesa de 1755, cujo título é *The ten books of Architecture*, por Leoni Edition.

Retomando à *Introdução* da obra de Alberti (2006, p. 9) e ratificando menções anteriores, Pierre Souffrin comenta que, a partir de 1443, Alberti retornou a Roma e produziu de forma incessante até sua morte, tendo sido responsável por

---

[37] Disponível em: < http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/mpiwg/online/permanent/library/8KEMEWQV/pageimg&pn=5&mode=imagepath>. Acesso em: 25 jun. 2013.

[38] As citações neste trabalho, feitas dos autores John O'Connor e Edmund Robertson, são traduções/adaptações da autora dos textos apresentados no site <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Alberti.html>.

[39] As versões das obras de Alberti citadas neste parágrafo estão todas disponíveis em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/home/search?searchSimple=alberti>. Acesso em: 07 jul. 2013.

> tantos grandes tratados teóricos sobre arte, arquitetura e ciência – *Descriptio urbis Romae*, *De statua* (posterior a 1464), *De re aedificatoria* (1452) – quanto importantes realizações arquitetônicas, como as fachadas do palácio Rucellai e da igreja Santa Maria Novella, em Florença. Igualmente a essa época remonta a composição do tratado *Ludi rerum mathematicarum*. Alberti morreu em Roma em abril de 1472.

Desde esse panorama sobre a sua vida, Alberti pôde ser classificado como um artista/arquiteto representante no Renascimento. E a Matemática? Como ela influenciou nas escritas das obras de autores como Alberti e nas arquiteturas de grandes construções do Renascimento?

De acordo com O'Connor e Robertson (2006), o próprio Alberti escreveu, explicando sobre como ele gostava de aplicar a Matemática em empreendimentos artísticos quando disse que

> nada me agrada tanto como investigações matemáticas e demonstrações, especialmente quando eu posso transformá-las em algum desenho prático e útil da matemática com os princípios da pintura em perspectiva e algumas proposições surpreendentes sobre a movimentação dos pesos.

Outros autores também comentam como a Matemática influenciou as artes através das contribuições de Alberti e de outros autores do mesmo período. Um deles, Field, citado por O'Connor e Robertson (2006), comenta:

> o que parece que estamos vendo neste progresso da perspectiva aplicada às artes no século XVI, é o progresso da Matemática como um componente cada vez mais importante na formação e na prática dos artesãos em geral, e dos arquitetos, em particular.

É válido mencionar as duas obras sobre arquitetura mais importantes de Alberti: *De pictura* e *De re aedificatoria*. Segundo Sharp[40] (1991, p. 11-12) o *De re aedificatoria* representou a obra teórica de Alberti, sugerindo aos arquitetos como os edifícios deveriam ser construídos e não como foram construídos. E mais, tal obra continuou a ser o tratado clássico sobre a arquitetura do século XVI até o século XVIII.

---

[40]Citação indireta retirada e traduzida do site <http://www.greatbuildings.com/architects/Leon_Battista_Alberti.html> cuja referência é:
SHARP, Dennis. **A Enciclopédia Ilustrada de Arquitetos e Arquitetura**. Nova York: Editora Quatro, 1991. NA 40.I45. ISBN 0-8230-2539-X. p 11-12.

Supeita-se que Galileo Galilei, cientista fundamental na dita Revolução Científica, teve, de algum modo, acesso à obra *Ludi Matematici*[41] de Alberti. Bredekamp (2001) aponta que, Galileo tentou explicar o problema da superfície da lua, utlizando lições que extraiu das aulas de Ricci. Já Ricci[42] ensinou geometria baseando-se em Euclides e em Arquimedes, além de ter utilizado o *Ludi Matematici* de Leon Battista Alberti para ensinar perspectiva. Tais textos faziam parte da formação dos artistas daquele tempo.

Pode-se afirmar que o método teórico proposto por Leon Battista Alberti para o tema perspectiva, também chamado técnica de representação pictural, foi pioneiro no período do Renascimento italiano. De fato, com o intuito de pesquisar sobre a representação em perspectiva, a autora Flores (2007) mostra a relevância fundamental de Alberti, no processo de compreender o surgimento da representação em perspectiva e de interpretação de como nosso olhar se transformou em perspectiva.

É essencial destacar a importância que Alberti exerceu para uma mudança no representar as imagens, no tempo do Renascimento e para a compreensão do tipo de olhar que se tem para a cultura moderna. De acordo com Flores (2007, p. 73),

> [...] a empresa do olhar que se instaurou no Renascimento pressupõe um sujeito racional e centrado cujo olho, ocupando um lugar privilegiado, é o mediador entre o homem e o mundo, o instrumento para conhecer. [...] O elogio dado à perspectiva de Alberti na pintura, o fascínio pelas técnicas e máquinas para melhor ver, outorgou à visão um lugar especial para a cultura moderna.

Segundo Flores (2007, p. 79), surge uma noção moderna de espaço para aquele tempo e apresentada por Alberti, “uma representação do espaço que é presentemente homogêneo, contínuo e infinito a partir de conceitos geométricos”. Reflexão que resulta em novos modos de encarar o conhecimento, por meio de um raciocínio mais objetivo e claro, com predomínio da razão.

---

[41] *Matemática Lúdica*.

[42] Ostilio Ricci foi um matemático da corte Toscana, aluno de Tartaglia e ministrou um curso sobre *Os Elementos* de Euclides na Universidade de Pisa que foi freqüentado por Galileo. Ricci também foi responsável por tentar convencer o pai de Galileo a permitir que seu filho estudasse matemática. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Galileo.html>. Acesso em: 08 jul. 2013.

Problemas práticos, emergidos pelas carências básicas dos indivíduos que viviam no tempo do Renascimento, como os tratados nesta pesquisa, incluem-se nesse novo modo de conhecer o mundo. Levando em conta as técnicas de pinturas desenvolvidas para a representação real do mundo, por meio dos artistas, Flores (2007, p. 115) entende que

> [...] a matemática encontrava o lugar propício para o seu uso. Isso se via não só na pintura plástica, mas, por exemplo, no comércio em geral que praticava relações de proporcionalidade [...]. Além do papel em destaque da matemática, na metade do século XV, a arquitetura, a geometria e as proporções encontravam-se estreitamente ligadas [...].

Essa relação estreita entre a arquitetura, a geometria e as proporções é intrínseca aos processos de resoluções dos problemas de medição de alturas, nesse tempo do Renascimento. Os problemas propostos nos livros analisados envolvem a necessidade de calcular alturas de torres, castelos, objetos que faziam parte da arquitetura da época. Destarte, as ferramentas matemáticas usadas para se encontrar as soluções desses problemas eram propriedades geométricas da semelhança de triângulos, e, consequentemente, as proporções eram utilizadas. O texto de Alberti, tratado na próxima seção, ratifica tais considerações e, na subseção a seguir, procurou-se compreender o contexto vivido por Alberti e sua relação com as ilustrações presentes em sua *Matemática Lúdica* e com os instrumentos empregados na resolução dos problemas de medição de alturas.

3.1.1 As ilustrações em Alberti

Leon Battista Alberti nasceu em Gênova e, durante sua vida produtiva, passou por Veneza, Pádua, Bolonha, Florença e Roma. Ele viveu a efervescência do Renascimento italiano, e suas produções foram, certamente, influenciadas pelas mudanças provocadas por esse movimento. A cidade de Veneza já possuía, no século XV, cerca de cem mil habitantes, sabendo-se que a maioria da população trabalhava com as próprias mãos para sobreviver, com exceção de alguns milhares de privilegiados e de pobres ou vagabundos. Braudel (2009a, p. 116) relata que:

> Coexistem lá dois universos de trabalho: por um lado, os operários não qualificados que nenhuma organização enquadra ou garante [...] – carregadores, estivadores, marinheiros, remadores; por outro lado, o universo das *Arti*, das corporações de ofícios, que forma a estrutura organizada dos diversos artesanatos da cidade [...].

Alberti pertencia ao segundo universo referido por Braudel – aquele que se dedicava às artes e ofícios. Fazia parte dos que foram responsáveis pelas inovações.

A artilharia, a imprensa e a navegação de alto-mar são as grandes revoluções técnicas entre os séculos XV e XVIII. Conforme Braudel (2005, p. 362), “os primeiros moinhos para papel giraram na Espanha no século XII. Contudo, é a partir da Itália, no início do século XIV, que se instala a indústria europeia [sic] do papel”, o país tornou-se o centro irradiador da cultura do papel. Assim, este contexto histórico, econômico e social, instaurado na Itália, contribuiu para a produção de livros que retratavam aquela realidade, como ocorreu com a obra de Alberti.

Alberti foi importante para o Renascimento italiano, pois sua obra é referência até hoje para a história da arquitetura, além de ter produzido vários outros trabalhos em diversos âmbitos da vida humana. Inclusive, sua *Matemática Lúdica* (ou, na versão em latim, *Ludi rerum mathematicarum*) é questionada por D’Amore (2005), no início de seu artigo, se - dentro da produção multifacetada de Alberti -, ela fora um mero divertimento intelectual ou um trabalho a ser contado entre os textos mais representativos da época. Tal obra está em destaque nesta pesquisa, porque foi produzida, provavelmente, entre 1450 e 1452 (período dito da Alta Renascença) e contém ilustrações dos problemas apresentados, como os de medir alturas de objetos, propósito neste texto.

Ainda, segundo D’Amore (2005), a primeira obra impressa sobre engenharia de construção[43] foi o livro de Alberti, intitulado *De re aedificatoria* (1485), redigido entre 1443 e 1452. Ele foi escrito em latim e, assim, era de pouca utilidade para o

[43]Vale ressaltar que, sobre esse mesmo tema, há uma obra manuscrita intitulada *De Architetura*, cujo autor foi Marcus Vitruvius Pollio (85 a 20 a.C.) e era composta por dez volumes dedicados à hidráulica, engenharia, arquitetura e urbanismo. Sabe-se que ela foi escrita pelo fim de sua vida, e, tem sido considerada como um manual do arquiteto da época em que foi escrito até a Idade Média (O’CONNOR; ROBERTSON, 2008). Esse assunto será retomado adiante já há indícios de que Alberti recorre à estrutura da obra de Vitruvius para escrever sua *De re aedificatoria*.

praticante. Alberti discutiu assuntos novos como uma nova teoria de construção de cúpula e regras para abóbadas.

Sabe-se que, na Idade Média, os construtores e artesãos eram desafiados a fazer grandes obras, principalmente catedrais imponentes, altas, indicando, implicitamente, o poder da igreja. Vilas de trabalhadores das obras eram formadas, e os povoados viviam da renda que obtinham no processo de construção. A partir dos projetos dessas obras, espécies de maquetes feitas pelos construtores, os construtores e artesãos contavam com suas habilidades para erguer as catedrais e também apostavam nos materiais dos quais se valiam para ter sucesso nas construções. Essas preocupações eram importantes, porque se o material usado ou o planejamento para a estrutura da obra desencadeava algum acidente, como a queda de um teto ou uma abóbada, fazia com que repensassem numa outra arquitetura para a reformulação da obra.

O filme *Os Pilares da Terra* aborda, de forma explícita, as dificuldades vividas pelos construtores, na expectativa de erguer grandes obras na Idade Média. O resumo do filme mostra o contexto da Inglaterra no século XII:

> O ambicioso **Tom Construtor** tem um sonho: construir uma catedral majestosa, verdadeiro símbolo de adoração a Deus. Mas essa tarefa não será nada fácil, e o motivo para isso está longe de ser a falta de técnicas modernas ou tecnologias revolucionárias. A verdade é que, na Idade Média, uma (aparentemente) simples construção pode causar todo tipo de conflitos. E em uma época durante a qual alianças são como a neve, mudando de lugar de acordo com os ventos do poder, ser o estopim de intrigas políticas é perigo na certa (JANKAUSKAS, 2011).

Compreende-se, então, a preocupação de estudiosos, como Alberti, em elaborar algum tipo de teoria, mesmo que baseada na empiria, visando a resolver problemas de ordem prática, tão constantes naquela época.

Por exemplo, as proporções numéricas que Alberti fornecia para a construção de pontes de pedra, não eram, claramente, baseadas na estática: elas foram obtidas, matematicamente, formuladas com regras empíricas. Em seu texto italiano, intitulado *Ludi Matematici*[44], ele lidava com problemas da geometria prática, com base em

[44] *Matemática Lúdica*, cujo título em latim é *Ludi rerum mathematicarum*.

escritos antigos, medievais e contemporâneos, bem como na sua própria experiência (GRATTAN-GUINNESS, 1994).

> Até os dias atuais, conhecemos 14 testemunhos dos *Ludi* anteriores ao século XVIII, 13 manuscritos e uma edição impressa (Bartoli, 1568). Nenhum dos manuscritos é autógrafo, e todos apresentam um certo número de incoerências e dificuldades de leitura e interpretação de que é preciso ter consciência para apreciar a possível relação entre o manuscrito original de Alberti, perdido até hoje, e o que podemos ler nas edições e traduções modernas (ALBERTI, 2006, p. 21).

A Figura 4 exemplifica a ilustração feita por Alberti para o problema de calcular a altura de uma torre, considerada em sua *Matemática Lúdica*. Entretanto, como não é possível ter acesso ao manuscrito original, exibe-se a ilustração análoga, da edição impressa sobre a qual se evoca na citação anterior, e se acredita ser uma cópia da ilustração original, apresentada na obra *Opuscoli morali di Leon Battista*, publicada em 1568, por Cosimo Bartoli.

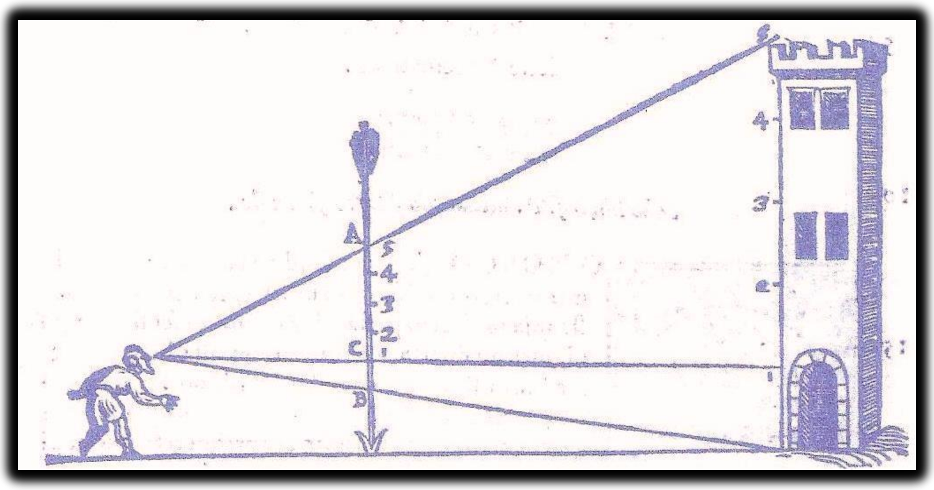


Figura 4 – Esquema explicativo para o cálculo da altura da torre
Fonte: Bartoli (1568, p. 236).

Observa-se que a ilustração é composta por elementos simples e "suficientes" para se calcular, aproximadamente, a altura de um objeto: uma torre, um observador, um instrumento auxiliar: uma flecha (ou dardo, ou haste - também conhecida na Antiguidade por gnômon[45]) e a triangulação. Percebe-se, de forma clara, a

[45]O gnômon deve ter sido o mais antigo instrumento astronômico construído pelo homem. Em sua forma mais simples, consistia apenas de uma vara fincada, geralmente na vertical, no chão. A observação da sombra dessa vara, provocada pelos raios solares, permitia materializar a posição do Sol no céu ao longo do tempo. Disponível em: <http://www.iag.usp.br/siae98/astroinstrum/antigos.htm>. Acesso em: 10 out. 2012.

possibilidade de resolver um problema prático da geometria elementar, sem o uso de um instrumento sofisticado de medida, visto que a flecha pode ser compreendida como um instrumento elementar. De fato,

> em seu pequeno livro, Alberti enumera, conceitua e descreve cerca de duas dezenas de técnicas de medição de distâncias com o auxílio de instrumentos elementares, como quando ele sugere a utilização do gnômon, uma haste fixada verticalmente no chão (REZENDE, 2006, p. 45).

Atentando-se para que: os tipos móveis inovadores foram criados por Johann Gutenberg em 1445; o registro de aparição do primeiro livro impresso na Itália foi em 1465; anteriormente ao século XVIII, só havia registros de manuscritos não autografados da *Matemática Lúdica* de Alberti; além disso, o manuscrito original está até hoje perdido, conjectura-se que as ilustrações da obra original *Ludi rerum mathematicarum* de Alberti, escrita por volta de 1452, tenham sido produzidas pelo próprio autor, em forma de desenhos e/ou pinturas, corroborando com a afirmação de Febvre e Martin (2005), que obras como essas só eram acessíveis a grupos pequenos e privilegiados.

Apesar da influência das pranchas xilográficas dos impressores alemães na Itália, do estilo e espírito alemão nas ilustrações dos livros italianos, as modalidades locais não tardaram em aparecer e logo se criaram as escolas regionais. Dessa forma, com características próprias, os novos ilustradores de livros italianos foram se destacando e tiveram seus estilos influenciados pelas pinturas da região e pela arquitetura das obras existentes, criando suas especialidades (FEBVRE; MARTIN, 2005).

Também se observa que, de um século para o outro, a realidade mudou, ou porque, no século XV, houve a valorização pelos italianos das pinturas originais nas obras e, no século XVI, o crescimento da demanda por livros ilustrados desencadeou a reprodução dos mesmos, sem muita preocupação com originalidade. Por certo,

> [...] os gravadores de Veneza do século XV souberam assimilar a dupla influência francesa e alemã, porém, não aconteceu o mesmo com os do século XVI, pois, apressados pelos encargos dos editores que trabalhavam, sobretudo para exportar, se limitaram em muitos casos a reproduzir, sem se importar com originalidade, os modelos estrangeiros (FEBVRE; MARTIN, 2005, p. 97, tradução nossa).

Vale observar que, nos textos originais de Alberti, por se tratarem de manuscritos, não é possível afirmar que ele tenha empregado as técnicas de xilogravuras. Contudo, é provável que tais técnicas tenham sido usadas no trabalho de tradução de Alberti por Cosimo Bartoli, em 1568. Trabalho esse que foi analisado nesta pesquisa.

Quanto aos instrumentos utilizados por Alberti, no processo de resolução dos problemas de medição de alturas, pode-se afirmar que os mesmos foram instrumentos elementares e auxiliares, como o caso do gnômon (ou haste ou flecha) e também da tigela com água. Nenhum instrumento de medida específico foi construído, a fim de que fosse usado, posteriormente, para calcular alturas de objetos. É o que será possível analisar na obra *Matemática Lúdica*.

3.2 *LUDI RERUM MATHEMATICARUM*[46] DE LEON BATTISTA ALBERTI

Interessa neste trabalho, em especial, o tratado *Ludi rerum mathematicarum*[47] escrito por Alberti, em meados do século XV. Constituiu-se num breve tratado dedicado à utilidade da Matemática e dedicada ao príncipe/marquês Meliaduse d'Este. Pode-se afirmar que essa pequena obra representa um testemunho histórico de como, em uma determinada época (no caso, o Renascimento), eram feitos os estudos que tinham por objetivo compreender os fenômenos da natureza e aumentar o domínio do homem sobre o mundo à sua volta. Alberti buscava solucionar problemas enfrentados no cotidiano renascentista, ao demonstrar que é possível fazer medições, aparentemente inacessíveis, sem a ajuda de instrumentos específicos de medida, usando apenas relações geométricas elementares, envolvendo formas semelhantes e grandezas (como a usual regra de três).

Alberti viveu no tempo que poderia ser chamado como o "início" do Renascimento e no lugar em que ele ocorreu como pioneiro. Pode-se dizer que, nesse contexto, está o cerne do processo inventivo do homem moderno, o homem industrial. Para se ter

[46]Utilizar-se-á também *Ludi Matematici* ou *Matemática Lúdica* para indicar o mesmo título de Alberti.
[47]Título original (em latim) da obra *Matemática Lúdica*.

ideia da influência italiana na produção desse homem moderno, Braudel (2009a) apresenta Veneza, cidade italiana, como a primeira economia-mundo da Europa destacando-se no comércio, na política, no trabalho e também na indústria. Inclusive, o autor comenta que há certa fama que classifica Veneza como uma organização capitalista precoce. Menciona também que lá existem simultaneamente, dois universos de trabalho, um do qual fazem parte um grupo de operários não qualificados e outro, do qual fazem parte os trabalhadores das corporações de ofícios, ou seja, de acordo com Braudel (2009a, p. 116), "o universo das *Arti*, das corporações de ofícios, que formam a estrutura organizada dos diversos artesanatos da cidade".

Braudel (2009a, p. 119) afirma que "em caso algum as *Arti* venezianas tiveram acesso ao governo, à imagem daquelas de Florença". Compreende-se assim que as *Arti* não atingiram apenas, localmente, Veneza, mas também, outras cidades italianas, além de ser possível entender que Alberti, influenciado por artistas de Florença, fazia parte desse universo de trabalho, denominado das *Arti*.

Esse novo modo de compreender os tipos de trabalho existentes naquela época, visto por Braudel (2009a, p. 119), como uma atividade industrial múltipla, é o que faz declarar que Veneza, no século XV, por conta da variedade de suas atividades, pela excelência de suas técnicas e por seu desenvolvimento antecipado em relação às outras cidades, "é provavelmente o primeiro centro industrial da Europa [...]".

No prólogo da obra *Matemática Lúdica*, o autor Alberti apresenta seu trabalho, desculpando-se, primeiramente, por estar respondendo tão tardiamente ao pedido do príncipe Meliaduse d'Este (quinze anos depois da solicitação) e tenta explicar a visão lúdica com a qual escreveu o tratado:

> Devo admitir que respondo bastante tardiamente, com esta pequena obra, aos anseios que Vossa Senhoria exprimiu. Poderia invocar muitas desculpas e razões, mas prefiro confiar-me a vossa indulgência e bondade, e pedir que me perdoeis. Vossa paciência talvez tenha sido compensada pelo prazer que espero sintais ao conhecer as coisas bastante lúdicas que aqui encontrareis reunidas, ou até mesmo ao pô-las em prática e delas se servir. Empenhei-me em descrevê-las mui claramente; devo, porém, salientar que se trata de matérias bem sutis, cuja exposição não dispensa o leitor de um esforço de atenção. Far-me-ias felicíssimo se ficásseis com ela. Caso desejeis saber mais sobre esses temas, mandai-me informar, tentarei

> cumprir vossos desejos. Por ora contentai-vos com isso: encontrareis [aqui] coisas notabilíssimas. Recomendo-vos meu irmão Charles, cujo devotamento vos é dedicado assim como a vossa família (ALBERTI, 2006, p. 27).

Percebe-se que Alberti, embora não tivesse estudado, de modo formal, a arquitetura, interessou-se especialmente por ela e tornou-se figura importante nessa área do conhecimento. No entanto, esta obra sobre a qual se pretende discutir neste trabalho, demonstra uma crença de Alberti, em que a Matemática poderia ser útil para a resolução de problemas práticos. Sua proposta para a primeira parte da *Matemática Lúdica* é a de solucionar problemas como:

- *Medir com a vista a altura de uma torre.*
- *Medir a largura de um rio.*
- *Medir a altura de uma torre da qual só se consegue avistar o topo.*
- *Medir a profundidade de um poço até o nível da água.*

A segunda parte contempla a solução dos seguintes problemas:

- *Medir uma grande profundidade de água.*
- *Medir tempos.*
- *Agrimensura e nivelamento.*
- *Medir cargas muito pesadas.*
- *Uma outra utilização do equilibra: ajustar uma bombarda.*
- *Elaborar o mapa de uma cidade ou de uma região.*
- *Medir grandes distâncias.*
- *Arquimedes e a coroa de Hiêron.*

Na próxima seção, propõe-se uma abordagem detalhada sobre o primeiro problema exposto na obra *Matemática Lúdica* de Alberti (2006), que se refere a uma tradução atual do texto de Alberti para o português. Analisar-se-ão também outros dois problemas de medir a altura de uma torre, todavia, esses, serão considerados na tradução de 1568, feita do latim para o italiano, por Cosimo de Bartoli. Esses dois problemas também estão presentes na tradução do trabalho de Alberti para o português (edição de 2006). Porém, optou-se por abordá-los na tradução do latim para o italiano por se aproximar mais do trabalho (manuscrito) original de Alberti. Ademais, os problemas apresentados na tradução para o português não são analisados, do modo como se pretende, nesta pesquisa. Há um cuidado com a tradução, mas as ferramentas matemáticas abordadas não são aprofundadas. Sendo assim, pareceu adequado fazer a maior parte das análises dos problemas, segundo o texto mais antigo que se conhece da *Matemática Lúdica* de Leon Battista Alberti.

As Figuras 5 e 6, a seguir, ilustram, respectivamente, a capa do livro de Alberti, traduzido para o português, e a folha de rosto da tradução feita por Bartoli.

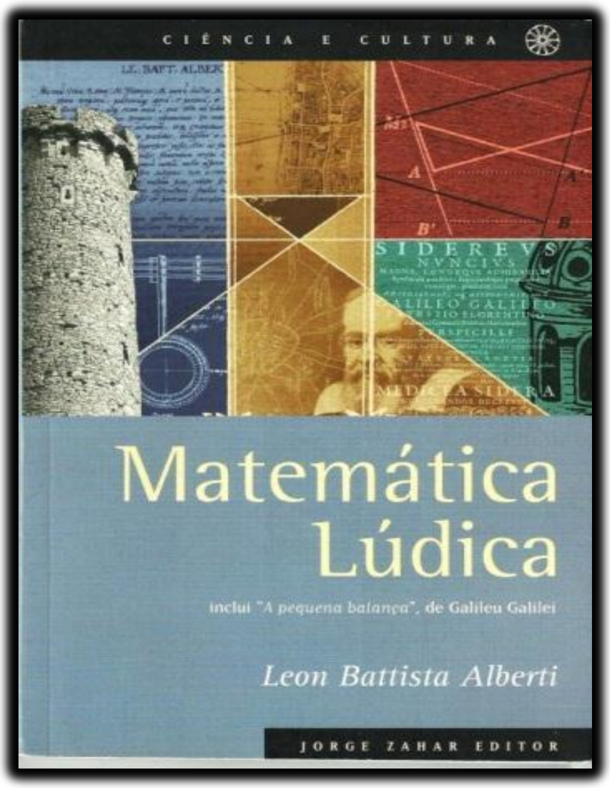


Figura 5 – Capa da obra *Matemática Lúdica* traduzida para o português
Fonte: Alberti (2006).

Figura 6 – Folha de rosto da obra *Opuscoli Morali* de Leon Batista Alberti traduzida por Cosimo Bartoli
Fonte: Bartoli (1568, p. 4).

Apresenta-se no quadro abaixo a tradução dos dados da folha de rosto da obra *Opuscoli Morali* de Alberti, traduzida por Bartoli.

Opuscoli Morali DI **LEON BATISTA** **ALBERTI** CAVALHEIRO FLORENTINO Os quais contêm muitos ensinamentos necessários à vida do homem, seja na vida em sociedade como em âmbito privado. Traduzidos, e em parte corrigidos por M. COSIMO BARTOLI Em Veneza, Impresso Francesco Franceschi, Sanese. 1568.

QUADRO 1 – TRADUÇÃO DA FOLHA DE ROSTO DA OBRA *OPUSCOLI MORALI*
Fonte: BARTOLI (1568, p. 4).

Nota-se, a partir dos títulos dos problemas solucionados por Alberti (2006) e da tradução de Bartoli (1568), que a finalidade de seu trabalho estava totalmente voltada para a prática cotidiana. Entretanto, para Alberti, a perfeição submete-se antes aos cálculos matemáticos e, por isso, ele julga importante saber desenhar as coisas, fundamentando-as na geometria e nos cálculos matemáticos.

3.3 O USO DE *GNÔMONS*[48] PARA CALCULAR ALTURAS: FERRAMENTAS MATEMÁTICAS E RESOLUÇÕES

O primeiro problema proposto é: “Medir com a vista a altura de uma torre” (ALBERTI, 2006, p. 29).

Desse problema, o autor trata três casos, quais sejam:

- *Como proceder se podemos conhecer sua distância e medir diretamente uma parte dela*.
- *Como proceder se podemos conhecer a distância da torre, mas não medir diretamente nenhuma parte dela*.
- *Outras formas bem diretas de proceder* (são apresentados dois modos práticos de resolver o problema de calcular a altura da torre).

O primeiro caso, “*como proceder se podemos conhecer sua distância e medir diretamente uma parte dela*” (ALBERTI, 2006, p. 29), o problema é considerado, quando se conhece a distância do medidor até a torre (distância acessível), e é possível medir até certa altura dela. Os outros dois casos serão explorados nesta pesquisa, utilizando-se da tradução de Bartoli de 1568. Pretende-se detalhar a resolução proposta por Alberti, do primeiro caso, em conformidade com suas explicações (propostas na tradução para o português), e segundo interpretação da autora deste trabalho.

O esquema para mostrar a resolução do problema (primeiro caso) na tradução italiana de Bartoli foi exibido na Figura 4 e, a Figura 7 a seguir, exibe o esquema que está proposto na tradução analisada para o português:

[48] O *Gnômon*, como já mencionado, é uma espécie de relógio de sol vertical que foi muito usado pelas primeiras civilizações. Referia-se a uma haste reta perpendicular a uma superfície plana, lisa e horizontal. Por isso o gnômon é também chamado de flecha na tradução de Alberti (2006). Disponível em: <http://www2.dm.ufscar.br/profs/salvador/jornada/Ciencias_e_Matematica_do_Sol_e_do_Gnomon.pdf>. Acesso em: 06 nov. 2012.
Vale mencionar que, na tradução de Cosimo Bartoli, o autor se utiliza também do termo dardo para indicar a flecha ou o gnômon.

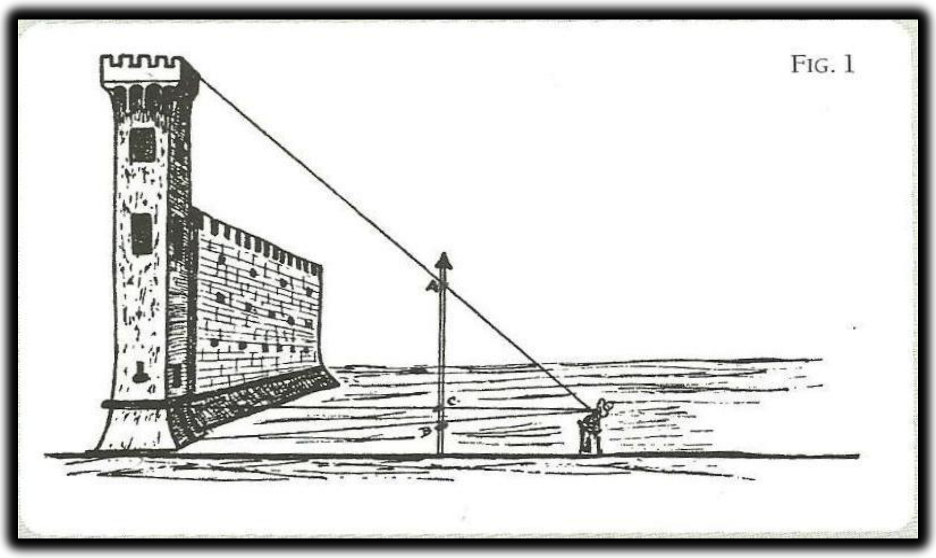


Figura 7 – Esquema explicativo para o cálculo da altura da torre - 2006
Fonte: Alberti (2006, p. 30).

Pode-se observar que essas duas ilustrações se referem ao mesmo problema. Elas são diferentes apenas nos detalhes. Por exemplo, a torre na versão italiana (Figura 4) está do lado direito e, na versão para o português (Figura 7), está do lado esquerdo. Também, na Figura 4, há uma escala de unidades de medida presente no dardo (no segmento formado pelo ponto onde a mira do observador toca o instrumento, ao olhar para a torre, paralelamente ao chão; e, pelo ponto onde a mira do observador toca o instrumento, ao olhar para o topo da torre), e também uma escala de unidades de medida correspondente na torre. Já na Figura 7, apresentada na tradução para o português, essa escala não é considerada.

Alberti (2006, p. 29), no início da solução do problema, esclarece que

> se quiser medir a altura de uma torre situada numa praça apenas olhando-a da outra extremidade, proceda da seguinte maneira. Finque uma flecha no chão, bem verticalmente, distancie-se um pouco, seis ou oito pés, e dali vise o topo da torre tomando a flecha como mira;[...].

A torre tem duas extremidades, e a outra extremidade da qual Alberti destaca é a que está situada no chão, pois é dessa extremidade “do chão” que é possível olhar a outra. A flecha fincada, verticalmente, assegura o paralelismo que deverá existir entre a torre (vertical) e a flecha, para o uso posterior das propriedades de semelhança de triângulos. É importante observar que a unidade de medida de comprimento utilizada era pés, o que hoje equivale a, aproximadamente, 30,48 centímetros.

Continuando as instruções:

> [...] coloque uma marca com um pouco de cera no lugar preciso em que seu olhar encontra a flecha, e chamemos A essa marca de cera. Depois, do mesmo lugar em que tinha mirado o topo da torre, mire sua base e, novamente, ali onde seu olhar encontra a flecha, coloque uma marca de cera, e chamemos essa segunda marca de B (ALBERTI, 2006, p. 29).

Subtende que a flecha deverá ser maior do que o medidor, pois, só assim, olhando para o topo da torre e mirando na flecha, o olhar dele interceptará a flecha (ou poderá coincidir com a ponta da mesma) no ponto A (que deverá ser marcado). O ponto B é depois marcado na flecha, no ponto em que o olhar do medidor a intercepta, ao estar mirando para a base (o pé) da torre.

> Finalmente, aponte o olhar para algum lugar da torre que conheça e do qual possa facilmente medir a posição até a base da torre com sua flecha, como por exemplo, o pórtico de entrada, ou algum buraco, ou algo parecido situado bem embaixo. Assim como fez mirando o topo e depois a base da torre, faça enfim uma terceira marca de cera no lugar em que seu olhar encontra a flecha. Feito isso, chamemos C essa terceira marca, como na Figura 1 (ALBERTI, 2006, p. 29).

O ponto C é, então, marcado na flecha, sendo o marco que representa alguma altura em relação à torre, cuja medida pode ser conhecida. Isso porque no enunciado do problema foi explicado que, no cálculo da medida da altura da torre, se conhece a sua distância e que é possível medir diretamente uma parte dela. Nesse caso, o ponto C, na flecha, poderia ser marcado, por exemplo, exatamente no ponto em que representa a altura do medidor (uma altura/medida conhecida).

> Digo que a parte da flecha que está entre a marca de cera B e a marca C cabe na parte da flecha situada entre o ponto A e o ponto B tantas vezes quanto a parte inferior da torre, já conhecida, cabe na parte superior cuja altura é desconhecida. E para captar mais claramente e na prática esse procedimento, examinemos isto com um exemplo numérico (ALBERTI, 2006, p. 30).

Quais ferramentas matemáticas estão implícitas acima nos passos de Alberti? Alberti afirmou que o segmento BC (a parte da flecha que está entre a marca de cera B e a marca C) cabe no segmento BC (parte da flecha situada entre o ponto A e o ponto

B) tantas vezes o segmento B’C’ (a parte inferior da torre, já conhecida) cabe, na parte superior, cuja altura é desconhecida A’B’. Em termos de proporção, Alberti quis dizer $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ ou, equivalentemente, que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. Na Figura 9, a seguir, apresenta-se um esquema prático do problema proposto por Alberti, a fim de ilustrar a semelhança de triângulos que deve ser tomada em consideração para demonstrar que a resolução feita por Alberti está correta.

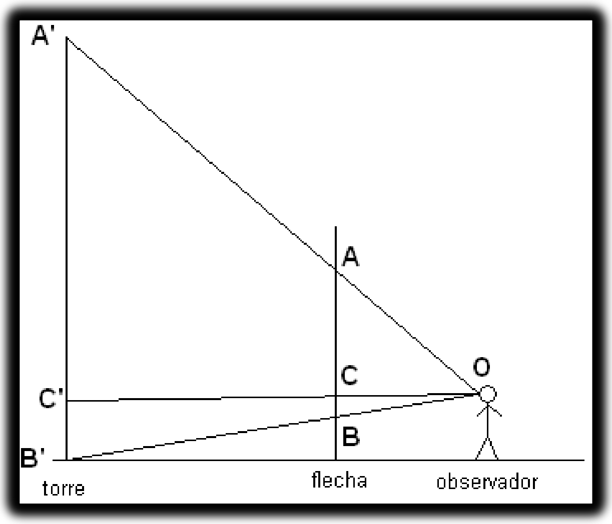


Figura 8 - Esquema matemático para a solução do problema

Pela Figura 8, como os segmentos A’B’ e AB são paralelos, os triângulos ABO e A’B’O são semelhantes (por possuírem dois ângulos congruentes), e também, pelo mesmo caso de semelhança, os triângulos BCO e B’C’O. Portanto, a proporção entre os segmentos é verdadeira.

No exemplo numérico, Alberti (2006, p. 30) supõe que a torre tem 100 pés de altura (isto é, AB = 100), e o pórtico, 10 pés (medida de B’C’). Conduz, então, o leitor a pensar que a relação entre os dois segmentos dados, ou seja, que B’C’ cabe nove vezes em A’C’ (ou ainda, que B’C’ é a décima parte da torre inteira), também ocorrerá com as medidas respectivas da flecha BC e AB. De fato, “a parte AC da flecha será tal que, dividida em 9 partes, conterá 9 vezes BC, que é a 10ª parte de AB considerada integralmente”.

É interessante ressaltar que Alberti (2006, p. 30) garante que, procedendo as instruções como ele recomenda, a medida da altura da torre será correta. De fato, ele afirma que

> ao proceder desta forma, nunca incorrerá um erro, contanto que zele para manter o olho sempre no mesmo lugar para colocar as marcas. Pode fazer a mesma coisa suspendendo um fio de chumbo à sua frente e marcando suas miradas com pérolas, como lhe mostrei algumas vezes.

Pode-se observar a garantia dada por Alberti (2006) da certeza da solução correta do problema, mas acredita-se que em virtude dos objetivos da escrita da obra, a constatação matemática da validade do problema não era importante.

Como mencionado anteriormente, os outros dois casos que serão analisados, foram extraídos da tradução feita por Bartoli da obra *Opuscoli Morali* de Alberti. O segundo caso do autor a ser analisado neste trabalho, para o problema de medir a altura de uma torre, intitula-se assim: “Se quiseres medir a altura de uma torre da qual não conheças parte alguma, mas que se possa ir até a sua base” (BARTOLI, 1568, p. 237, tradução nossa).

O processo de resolução do problema é do seguinte modo instruído:

> Fincai no chão, como dito acima, um dardo, ou uma haste ou outra coisa similar, e vos afastai do dardo o quanto vos parecer conveniente; colocai o olho no chão e daí, olhai para o alto da torre dirigindo vosso olhar para o dardo, e, onde a vista tocar o dardo, ponhais uma marca de cera e chamai-a de C, a ponta do dardo de A, a base do dardo de B e o teu olho de D, como na figura que se segue (BARTOLI, 1568, p. 237, tradução nossa).

A Figura 9 é a citada por Bartoli:

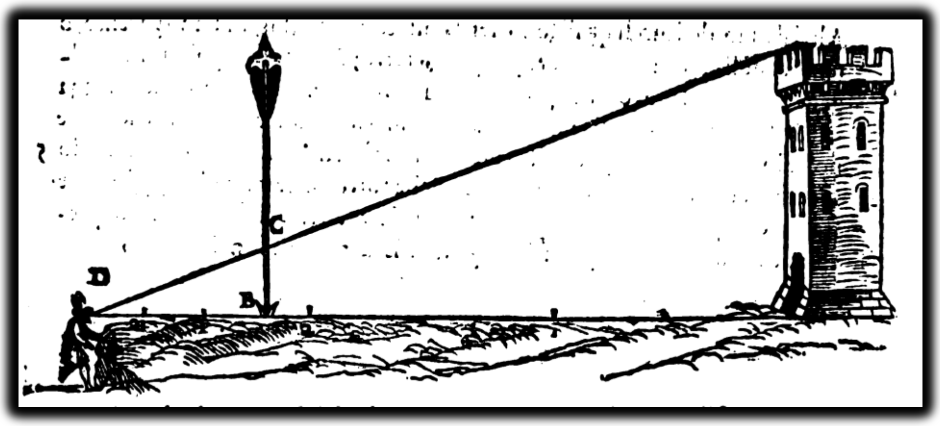


Figura 9 – Esquema explicativo do segundo problema de Alberti para calcular a altura da torre, sendo possível chegar até sua base
Fonte: Bartoli (1568, p. 238).

Antes de proceder com um exemplo numérico, Bartoli (1568, p. 238, tradução nossa) conclui que “a parte do dardo BC cabe tantas vezes na distância BD, isto é, entre vosso olho e a base do dardo, quantas vezes a altura total da torre cabe entre o vosso olho e a base da torre”.

A conclusão acima é possível por conta da semelhança entre o triângulo BCD e aquele formado pela base da torre, pelo cume da torre e pelo ponto B. Logo, os dois triângulos possuem dois ângulos congruentes entre si.

No exemplo numérico dado pelo autor, de modo curioso, a suposição inicial é de que a altura da torre é dada, medindo cem pés, e de que a distância entre o olho do medidor e a base da torre também é dada, medindo trezentos pés. Daí, Bartoli (1568, p. 238, tradução nossa) explica a consequência disso: “como cem cabe em trezentos três vezes, também CB cabe três vezes em BD”. Ou seja, ao invés de fazer o procedimento contrário e mais natural, afirmando primeiro a descoberta possível entre a razão dos segmentos BD e CB, é feita uma hipótese sobre a razão entre os segmentos formados pela distância entre o olho do medidor e a base da torre e pela altura da torre, medida desejada. Suspeita-se que a explicação dada pelo autor tinha o objetivo de simplificar os passos para o “aluno” que fosse resolver o problema na prática.

O terceiro caso abordado contempla duas alternativas diferentes para resolver o mesmo problema. Uma é sugerida do seguinte modo:

> Alguns acham que o mais rápido seja aproximar-se bastante da torre, de modo que estando deitado no chão e tocando com os pés o dardo, colocado verticalmente ao solo, que a vista até o topo da torre toque no dardo tão alto quanto será do vosso olhar à base do dardo. E dizem a verdade, porque tanto será da base da torre ao teu olho quanto é da dita base da torre ao seu topo (BARTOLI, 1568, p. 238, tradução nossa).

Esse raciocínio se torna possível porque, estando o observador deitado e mirando o topo da torre, o seu olhar intersectará o dardo num ponto, em que a medida do chão até esse ponto será igual à medida da altura do observador. O que acarreta na formação de um triângulo retângulo e isósceles e semelhante ao triângulo retângulo, formado pelo olhar do observador, a base e o topo da torre. Assim, tal triângulo será também retângulo e isósceles e, consequentemente, a medida da altura da torre será igual à medida da distância do olhar do observador até à base da torre. O problema resolver-se-á desse modo mais facilmente.

Na outra alternativa, recorre-se a um resultado da Física, a *Lei da Reflexão*[49]. Bartoli (1568) sugere a utilização de um espelho ou de uma tigela cheia de água a ser colocada no chão (representada pelo ponto C), como mostra a Figura 10.

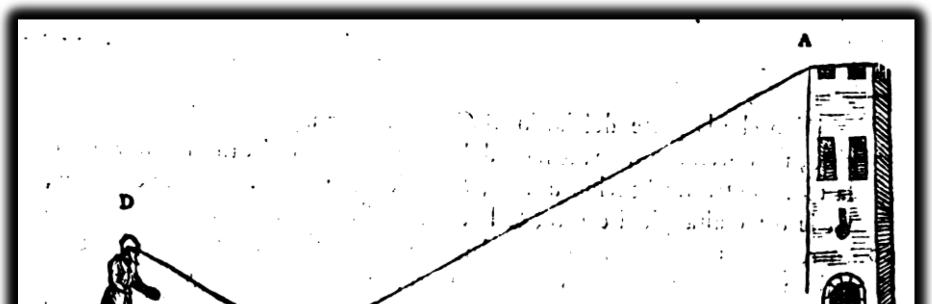


Figura 10 – Esquema explicativo do segundo problema de Alberti para calcular a altura da torre com o uso de um espelho ou de uma tigela com água
Fonte: Bartoli (1568, p. 239).

As instruções para a solução do problema seguem então:

[49]Dada a situação, como mostra a Figura 11, considera-se uma reta perpendicular (normal) ao plano horizontal, passando pelo ponto C, onde está localizado o espelho (ou tigela com água). Por definição, o ângulo de incidência é aquele formado pelo segmento DC e pela reta perpendicular e, o ângulo de reflexão, é aquele formado pela reta perpendicular e pelo segmento CA. Segundo Halliday, Resnick e Krane (2004), o plano formado pelo raio incidente (DC) e a reta perpendicular é chamado de *plano de incidência*. Desse modo, a *Lei da Reflexão* é assim proposta: Os raios refletidos permanecem no plano de incidência, e o ângulo de incidência é congruente ao ângulo de reflexão.

> Outros dão outros modos que também são muito verdadeiros e dizem: se pega um espelho ou uma tigela cheia de água e coloca-se no chão. Distancia-se da mesma virando sempre a face para o espelho e para a torre até que se veja no espelho ou na tigela o topo da torre. Descobrir-se-á quantas vezes o espaço entre vossos olhos e os pés caberá no espaço que está entre os pés e o espelho; tantas vezes ainda a altura da torre caberá no espaço que está entre ela e o espelho. Chame-se o topo da torre de A, a sua base de B e o espelho de C, o olho de D e os pés de quem observa de E, como se vê no desenho (BARTOLI, 1568, p. 239, tradução nossa).

A fim de esclarecer os passos, Bartoli (1568) propõe um exemplo numérico. De modo análogo ao exemplo anterior, o autor faz hipótese inicial sobre a altura da torre, no caso, supõe novamente que, se ela tiver cem pés (no caso, AB) e que se BC tiver duzentos pés, então será encontrada proporção igual para os segmentos CE e DE. Ou seja, o autor quis dizer que, se a razão entre BC e AB for igual a dois, então, dois também será a razão entre os segmentos CE e DE. E desse modo, tendo válida a proporção $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC} = 2$, e sendo conhecidas as medidas dos segmentos BC, DE e EC, encontra-se a medida da altura da torre AB.

Cabe uma justificativa sobre a veracidade do uso do espelho ou da tigela para resolver o problema de calcular a altura da torre. O autor não explica que se utiliza da *Lei da Reflexão*, mas, é ela que garante a semelhança entre os triângulos ABC e DEC, pois, os ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}C$ são congruentes (retos), e, pela *Segunda Lei da Reflexão*, os ângulos $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}E$ são também congruentes. É da semelhança entre os triângulos ABC e DEC que se pode concluir a validade da proporção $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC}$. Acredita-se que esse tipo de abordagem na obra de Alberti esteja presente pelo fato de ele também ter se dedicado a estudos de óptica no início de sua carreira.

Outro tipo de problema de medir a altura de uma torre será tratado neste estudo, conforme proposta do autor. Agora toma-se um caso em que não se pode ter acesso à torre, mas se deseja medir sua altura. O problema é apresentado assim:

> Se você vir de uma torre somente o topo e nenhuma outra parte sua, e quer saber sua altura, faça o seguinte: ponhais como dito acima, o vosso dardo no chão, olhai para o solo, mirai o topo da torre e marcai com cera onde vosso olhar toca o dardo. Chamai o dardo de AB, o topo da torre de C, o ponto onde pusestes o olho no chão de D e a marca que pusestes no dardo de E. Feito isso, afastai-vos um pouco para trás e igualmente de baixo mirai

> o dito topo da torre e ponhais no dardo outra marca. A essa segunda marca chamai de F, onde pusestes o olho chamai G, como se pode ver no desenho (BARTOLI, 1568, p. 241, tradução nossa).

O desenho o qual se refere o problema é dado pela Figura 11:

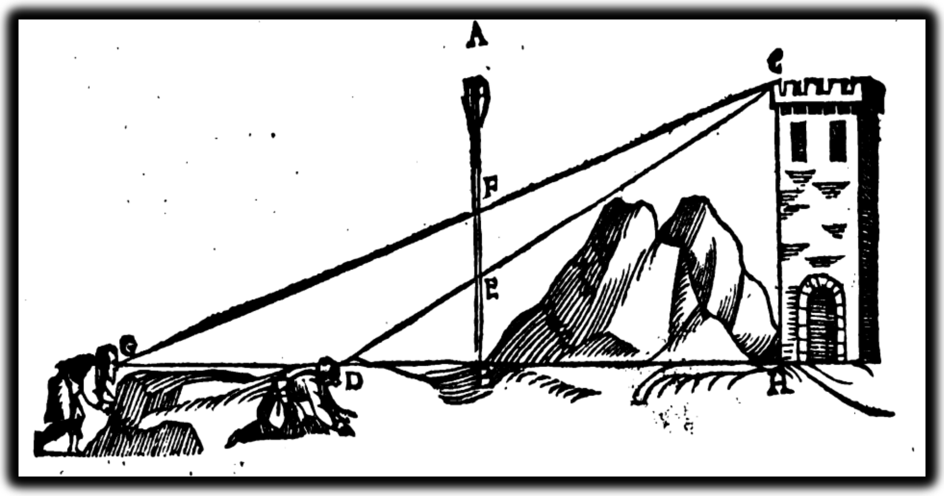


Figura 11 – Ilustração do terceiro problema de Alberti para calcular a altura da torre não sendo possível aproximar-se da base
Fonte: Bartoli (1568, p. 241).

A partir da Figura 11, apresenta-se a Figura 12 a fim de realçar melhor os segmentos e os pontos utilizados no processo de resolução do problema dado anteriormente:

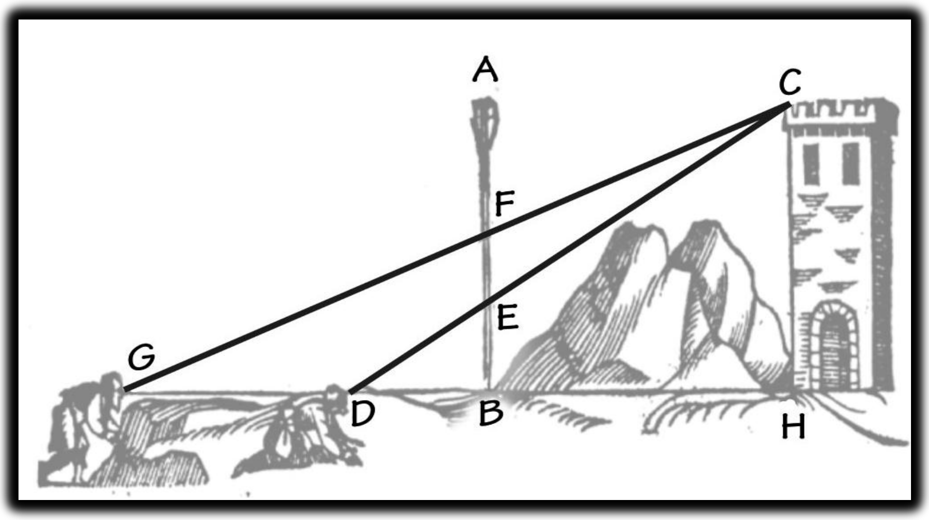


Figura 12 – Esquema ilustrativo referente à Figura 11
Fonte: Adaptado de Bartoli (1568, p. 241).

Nesse problema, o autor utiliza-se de comparações entre razões de segmentos formadas pelos quatro triângulos formados na Figura 12, a fim de resolver o problema. Optou-se, primeiro, por apresentar a demonstração geométrica (não realizada pelo autor) que prova a possibilidade de encontrar a altura da torre da qual não se pode aproximar, tomando-se as ações propostas pelo autor na citação mencionada anteriormente.

Os triângulos FBG e CHG são semelhantes, do mesmo modo que são semelhantes os triângulos EBD e CHD. De fato, eles possuem entre si, dois ângulos congruentes. A saber: nos triângulos FBG e CHG, os ângulos $F\hat{B}G$ e $C\hat{H}G$ são retos e, os ângulos $F\hat{G}B$ e $C\hat{G}H$ são congruentes, pois se referem a um mesmo ângulo. Já nos triângulos EBD e CHD tem-se que os ângulos $E\hat{B}D$ e $C\hat{H}D$ são retos e, os ângulos $E\hat{D}B$ e $C\hat{D}H$ são congruentes, pois, de modo análogo ao anterior, se referem a um mesmo ângulo. Vale também mencionar que são conhecidas as medidas dos segmentos FB, BG, EB e BD.

Por conta das semelhanças entre os triângulos evocadas acima, podem-se afirmar verdadeiras as proporções em destaque, a seguir. Da semelhança entre os triângulos FBG e CHG:

$\frac{FB}{BG} = \frac{CH}{HG} = k$, sendo k uma constante racional positiva $\Rightarrow k.HG = CH$.

Da igualdade acima e da Figura 12, observa-se que:

$$k.(HB + BD + DG) = CH \Leftrightarrow$$
$$k.HB + k.BD + k.DG = CH \Leftrightarrow$$
$$k.HB = CH - k.BD - k.DG \Leftrightarrow$$
$$HB = \frac{CH}{k} - BD - DG \Leftrightarrow$$
$$HB = \frac{CH}{k} - (BD + DG) \Leftrightarrow$$
$$HB = \frac{CH}{k} - BG.$$

Na última igualdade, BG é medida conhecida, e as incógnitas são HB e CH. Agora, da semelhança entre os triângulos EBD e CHD resulta a proporção:

$\frac{EB}{BD} = \frac{CH}{HD} = l$, sendo l uma constante racional positiva $\Rightarrow l.HD = CH$.

Da igualdade acima e da Figura 12 observa-se que:

$$l.(HB + BD) = CH \Leftrightarrow$$
$$l.HB + l.BD = CH \Leftrightarrow$$
$$l.HB = CH - l.BD \Leftrightarrow$$
$$HB = \frac{CH}{l} - BD.$$

Na última igualdade, BD é medida conhecida e, as incógnitas são HB e CH. Desse modo, das duas igualdades $HB = \frac{CH}{k} - BG$ e $HB = \frac{CH}{l} - BD$, é possível obter a medida CH relativa à altura da torre, como se desejava.

As instruções, passo a passo, dadas pelo autor para o cálculo da medida da altura da torre, sobre a qual não seja possível aproximação, são apresentadas assim:

> Convém considerar que nesta figura[50] há quatro triângulos, dois dos quais já são conhecidos por você, isto é, FBG maior, e o outro EBD menor. Para estes que são os dois menores, conhecereis outros dois maiores, chamados um CHG e o outro CHD. Compreenderás como explicado acima, que como a linha DB, em seu triângulo, corresponde à linha BE, assim a linha GH[51], no triângulo maior, corresponde à linha HC. Então meça, por esse raciocínio e comparação, quantas vezes BE cabe em BD. Vamos dizer, por fácil exemplo, que caiba duas vezes, assinalem que GH[52] seja dois tantos de HC. Depois mede quantas vezes BF cabe em BG; caso caiba três vezes, segue-se que CH seja o terço de HG. E do mesmo modo que seguido por DH são dois, GH são três números. Mas, não sabeis que numero é este, ou se corresponde a braços ou passos, ou outra medida. Eis como o fazes. Se DH são dois e GH são três, segue-se que GH avança HD de um, e este avanço é DG, então DG é um terço. Mede DG, que serão dez passos, toda HG será trinta passos, donde se faz o seguinte argumento: se a torre CH cabe em todo esse espaço HG e DG é o terço e, do mesmo modo, cabe ainda três vezes em todo GH, quem duvida que a torre HC seja tão alta

[50]Figura 12.
[51]Há que se ressaltar um erro de impressão do texto de 1568. De fato, para que valham as instruções dadas pelo autor, no lugar desse segmento GH, deve-se considerar o segmento DH. Assim, poderão ser consideradas as proporções citadas no texto de forma verídica.
[52]Também neste caso, GH refere-se ao segmento DH.

> quanto à largura do espaço DG? Esse espaço DG é igual a dez, então a torre igual a esse espaço DG será ainda dez passos. Assim conseguireis medir tudo que quiserdes. São raciocínios similares e sutis, mas muito úteis a muitas e muitas coisas, as quais se devem medir, e ainda a descobrir os números incógnitos (BARTOLI, 1568, p. 242, tradução nossa).

Nos passos sugeridos acima para a resolução do problema de calcular a altura da torre, sem ser possível se aproximar dela, são utilizadas as consequências da semelhança entre os triângulos FBG e CHG e, também entre os triângulos EBD e CHD. São feitas hipóteses simples sobre a razão entre os segmentos proporcionais, facilitando a compreensão da solução. Portanto, da semelhança entre os triângulos EBD e CHD, em que DB está para BE, assim como DH está para HC, é feita a suposição de que BD seja o dobro de BE[53], o que acarretará $DH = 2.HC$. Analogamente, considerando a semelhança entre os triângulos FBG e CHG, em que BG está para BF, assim como HG está para HC, faz-se a suposição de que BG seja três vezes a medida de BF, o que, equivalentemente, significa $GH = 3.HC$.

A conclusão tirada pelo autor é ser possível estabelecer uma relação entre DG (medida conhecida) e HC, que representa a medida da altura da torre. A fim de compreender esse raciocínio, analisando a parte final da citação anterior, se $DH = 2.HC$ e $GH = 3.HC$, e observando a Figura 12, tem-se:

$$DG = GH - DG \Leftrightarrow DG = 3.HC - 2.HC \Leftrightarrow DG = HC.$$

Ressalta-se que, tais instruções do autor tornam possível a solução do problema para encontrar a altura de uma torre de alcance inacessível.

Há no texto de Alberti (tradução por Cosimo Bartoli, de 1568) muitos outros problemas relativos à vida cotidiana da época. Contudo, não serão abordados nesta pesquisa, pois, fogem do escopo deste trabalho. São problemas que ensinam a calcular, por exemplo, a profundidade de um poço. E assim, após apresentar os problemas de medição de alturas de uma torre, considerando as várias possibilidades já explicitadas, Alberti propõe um problema para encontrar a medida

[53] É simples descobrir, na prática, a razão entre DB e BE, já que as medidas desses segmentos são conhecidas: DB é distância do observador no ponto D até o dardo (ou flecha) e, BE é a medida entre o chão, onde está fincado o dardo, até o ponto onde o olhar do observador “toca” o mesmo no momento em que se faz a mira no topo da torre.

da largura de um rio, supondo que o medidor esteja na margem do mesmo. A Figura 13 ilustra-o.

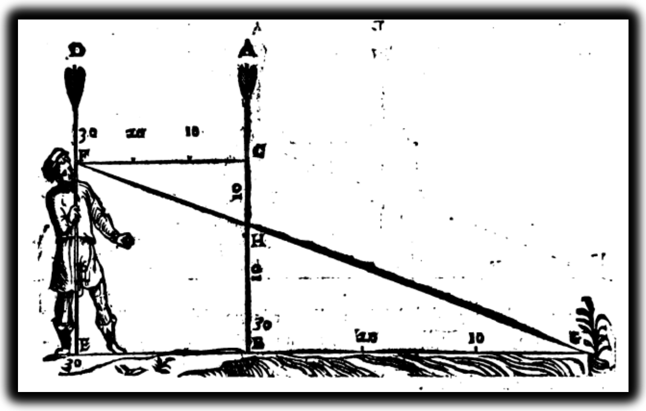


Figura 13 – Ilustração do problema de Alberti para medir a largura de um rio
Fonte: Bartoli (1568, p. 240).

A seguir, Alberti menciona que “com isto, pois até aqui recitado, formas de medição podem igualmente medir qualquer profundidade, mas, por exemplo, vamos apresentar o modo certo” (BARTOLI, 1568, p. 242).

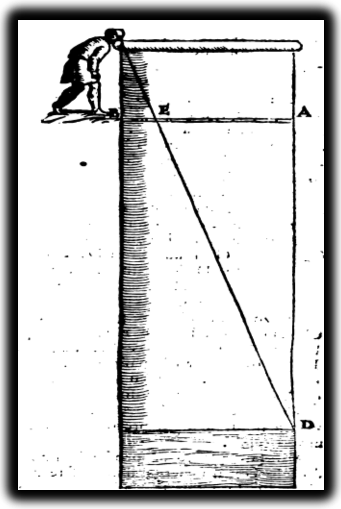


Figura 14 – Ilustração do problema de Alberti para calcular a profundidade de um poço
Fonte: Bartoli (1568, p. 243).

A Figura 14 exemplifica a situação de um problema proposto pelo autor para calcular a profundidade de um poço com água.

E desse modo, Alberti escreve um texto inspirado em problemas práticos do cotidiano da época em que vivia e, primordialmente, para agradar e atender a um pedido de um nobre que poderia precisar resolver tais problemas.

3.4 REVISITANDO ALBERTI

Leon Battista Alberti: nome de relevância do Renascimento italiano. Suas obras, seus estudos e suas contribuições irrefutáveis à história da arquitetura compõem o primeiro personagem deste trabalho. Acredita-se que, ao buscar compreender o modo como eram as resoluções dos problemas de medição de alturas de objetos, na época do Renascimento, ressurgem várias questões interligadas ao tema. Nesse sentido, ao fazer esse “mergulho” histórico, são incitadas perguntas tais como: como foram escritos os textos que tinham esses problemas? Quem eram os autores dos mesmos? Como eles viviam em sociedade? Com quais objetivos esses textos foram escritos? Entre tantas outras.

O tempo do Renascimento e a escolha primeira por Leon Battista Alberti foram coerentes com o objetivo desta pesquisa, porque os primeiros livros impressos com temas ligados à matemática tiveram vinculação direta com a prática cotidiana dos indivíduos. E a intenção aqui foi, exatamente, exaltar os indivíduos que contribuíram com a matemática, entretanto, não necessariamente representativos da matemática denominada pura. Entende-se que não é possível fazer uma interpretação interna imediata de um livro, ou de parte dele, sem que se leve em conta que ele fez parte de um contexto social maior, como por exemplo, o da produção de conhecimento pela comunidade científica em geral.

Nesse tempo de Alberti, conforme Renn (2001), os profissionais que, atualmente, são chamados engenheiros, possuíam um padrão tradicional de conhecimento, além de estarem envolvidos em um processo de aceleração própria da inovação. Esse processo de inovação e o conhecimento técnico dos “engenheiros” desenvolveram-se de forma independente das tradições acadêmicas e, num primeiro momento, tiveram pouco impacto sobre o método escolástico aristotélico dominante na época. No entanto, a divulgação desse novo tipo de conhecimento que foi realizada por produções literárias é ilustrado nos escritos de Leon Battista Alberti, Piero dela Francesca, Leonardo da Vinci, entre outros. Desse modo, esse conhecimento "tornou-se parte de uma nova interpretação da natureza e do lugar do homem nela, entrando um discurso intelectual em que se buscaram alternativas para a interpretação escolástica dominante da natureza e da sociedade" (RENN et al., 2001, p. 67, tradução nossa).

Num desfecho para este estudo sobre Alberti, faz-se, a seguir, uma análise geral levando em conta alguns aspectos especiais dos problemas de medição de altura de um objeto, tratados neste capítulo.

Quanto ao enunciado, nos dois livros analisados, o autor fornece um título geral para o problema. Por exemplo: "Medir com a vista a altura de uma torre" (ALBERTI, 2006, p.29). Mas, inclui casos particulares como, por exemplo, quando é possível conhecer a distância até a base da torre e medir, diretamente, uma parte dela ou quando se explica o modo de medir a altura de uma torre, fazendo-se uso de artifícios mais práticos, como o de um espelho ou de uma tigela com água.

Quanto à linguagem do problema, o autor utiliza uma linguagem natural, como se fosse um diálogo, é retórica e, praticamente, sem simbolismo. A representação simbólica limita-se ao uso de letras maiúsculas para indicar pontos em destaque nas ilustrações e também para denotar segmentos de reta, significando sempre lados de um triângulo.

Quanto às ilustrações, é apresentada para cada problema uma ilustração simples que simula a realidade. Como já mencionado, anteriormente, é provável que tais ilustrações devam ter sido elaboradas pelo próprio autor, ao se considerar os manuscritos originais perdidos. Mas, considerando o livro analisado, a tradução de Cosimo Bartoli, suspeita-se que as ilustrações presentes são resultados de xilogravuras, técnica, vastamente, difundida na época de produção do referido texto.

A abordagem resolutiva dos problemas é feita através de instruções passo a passo. Como ferramenta matemática, Alberti utiliza a semelhança de triângulos (proporção de segmentos), porém, sem justificativa. A "didática" implícita é do tipo "faz assim porque dá certo", como a de um manual. É uma abordagem mais geométrica. Porém, preocupa-se em apresentar, no final de cada resolução, um exemplo numérico:

- "Caso a torre tenha 100 pés de altura e o pórtico, 10, [...]" (ALBERTI, 2006, p.30).
- "Mede DG que serão dez passos, toda HG será trinta passos [...]" (BARTOLI, 1568, p. 242, tradução nossa).

Quanto aos instrumentos de medida, pode-se dizer que há apenas a proposta do uso de um instrumento auxiliar, como é o caso do dardo (ou flecha ou gnômon), e da cera para marcação dos pontos em que o olhar do observador/medidor intersectava o dardo ao mirar o topo da torre. Não há um instrumento construído com unidades de medidas específicas e empregado no processo de resolução dos problemas, apresentados por Alberti.

Alberti viveu no tempo do início do Renascimento italiano em que se iniciaram muitas transformações, assim como preocupações com construções de fortificações também ocorreram. Além disso, houve evolução da artilharia, das técnicas de medições e da arquitetura. No entanto, as ferramentas matemáticas e os instrumentos utilizados para a resolução dos problemas de medição de alturas eram relativamente simples. Nesse espírito de compreender os textos e os contextos desses tipos de problemas na época do Renascimento, o próximo autor analisado nesta pesquisa, o francês Oronce Finé, avança mais na técnica, propondo a construção e o uso de um instrumento de medida, que ele chama de quadrante geométrico.

4 ORONCE FINÉ: O PROBLEMA DE CALCULAR ALTURAS E O USO DO QUADRANTE GEOMÉTRICO

4.1 ORONTIO FINEO[54]

Figura 15 - Oronce Finé
Fonte: O'Connor e Robertson (2005).[55]

Oronce Finé, cuja imagem ilustrativa apresenta-se na Figura 15, nasceu dia 20 de dezembro de 1494, em Dauphiné, uma região do sudeste da França e morreu dia 08 de agosto de 1555, em Paris, França. Na época de seu nascimento esta era uma região semi-independente da França, assim chamada porque o país era governado pelo filho mais velho do rei da França, a quem foi dado o título de delfim. Briançon, a cidade de nascimento de Finé, ficava nessa região de Dauphiné. Sendo assim, o nome de Oronce Finé foi escrito em latim como Orontius Finaeus Delphinatus (ou, como aparece em uma das obras analisadas desta pesquisa, aquela publicada na Itália: Orontio Fineo del Delfinato). O último desses nomes, Delphinatus (Delfinato), indica então que ele veio de Dauphiné. Na tradução para o francês, além do sobrenome Finé, é provável que duas outras formas sejam possíveis, Finee ou Fine,

[54]Salvo mencionado o contrário, esta primeira seção compreende uma tradução/adaptação, realizada pela autora deste trabalho, da biografia de Orontio Fineo apresentada pelos matemáticos John O'Connor e Edmund F. Robertson, autores do site intitulado *The MacTutor History of Mathematics archives*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fine.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.
[55]Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/FINE.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

mas especialistas sobre a região Dauphiné explicam que Finé é a que se esperaria naquela região.[56]

François Finé, o pai de Finé era médico, formado pela Universidade de Paris e atuava em Briançon quando seu filho Oronce nasceu. François Finé, possivelmente, esteve na Universidade de Paris, em 1472 e 1473, pois existem cópias de notas de aula de um curso sobre Aristóteles, feitas por ele, naqueles anos. A família seguia a profissão médica, o avô de Finé, Michel Finé, escreveu um texto sobre a epidemia publicado mais tarde por Oronce Finé. Foi criado em Briançon até a morte do seu pai e depois foi enviado a Paris onde foi cuidado por Antoine Silvestre. Na época, Silvestre foi professor no Collège de Montaigu[57], onde Calvino estudou alguns anos mais tarde, em 1523, e Silvestre ocupou a mesma posição no Collège de Navarre[58]. Finé foi educado na Universidade de Paris, obtendo um diploma de médico do Collège de Navarre, em 1522. Ele passou um tempo na prisão em 1518, antes de ter se formado e, depois, de novo, foi preso em 1524. Não se sabe se ele trabalhou na construção de um relógio de sol enquanto esteve na prisão, porém, certamente, construiu um relógio de marfim, em 1524, que ainda existe. Apesar de sua fascinação por instrumentos, é possível que esse tenha sido o único que ele, na realidade, construiu.

Antes de ter seu diploma de medicina, Finé tinha editado livros de matemática e astronomia numa tipografia de Paris. Entre os textos que foram editados, destacam-se: *Theoricae Novae Planetarum* de Peurbach, que trata da teoria dos epiciclos dos

---

[56]Neste trabalho utilizar-se-á sempre, a título de padronização em referência a Orontio Fineo, seu nome traduzido para o francês, Oronce Finé, com exceção dos casos das citações diretas ou indiretas, nas quais serão mantidos os nomes originais do autor, como aparecem nas fontes pesquisadas.

[57]Desde as origens da Universidade de Paris, o ensino era mantido por instituições financiadas e concebido pelos ricos mecenas, príncipes, condes ou prelados que queriam ou deixar um nome ou permitir que os jovens da sua província se formassem em Paris. Assim nasceram as Faculdades de Navarre, a do Cardeal Lomoine ou a Faculdade de Montaigu. A faculdade de Montaigu tem um significado especial na vida de Rabelais, e especialmente dentro do contexto histórico do movimento da Reforma. E, foi nesse antro de conservadorismo pedagógico e religioso, surpreendentemente, um lugar por que passaram quase todos os homens que dominaram o campo do pensamento desta primeira metade do século XVI.
Disponível em: <http://www.renaissance-france.org/rabelais/pages/universite3.html>. Acesso em: 28 maio 2012. Tradução nossa.

[58]Fundada por Jeanne de Navarre, esposa de Philippe, o belo, em 1304 e foi a única faculdade em Paris, onde houve exercício completo, isto é onde se ensinou teologia, filosofia e humanidades. Disponível em: <http://www.cosmovisions.com/monuParisCollegeNavarre.htm>. Acesso em: 28 maio 2012. Tradução nossa.

planetas de Ptolomeu, e o *Tractatus de Sphaera* de Sacrobosco, um livro de astronomia em quatro capítulos. O primeiro livro de autoria de Finé, publicado em 1526, apresenta o *equatorium*, um instrumento no qual ele estava muito interessado e trabalhou em toda a sua vida, escrevendo mais quatro textos sobre isso. O instrumento podia ser usado para determinar as posições dos planetas. Finé foi nomeado para a cadeira de matemática no *Collège Royal* em Paris, em 1531, e lá ensinou, desde esse momento até a sua morte. O Collège Royal foi fundado em 1530 por François I (Francisco I), rei da França de 1521 até 1544, patrono das artes e da cultura. Também conhecida como a *Trilinguae Collegium*, ele ainda existe hoje como *Collège de France*.

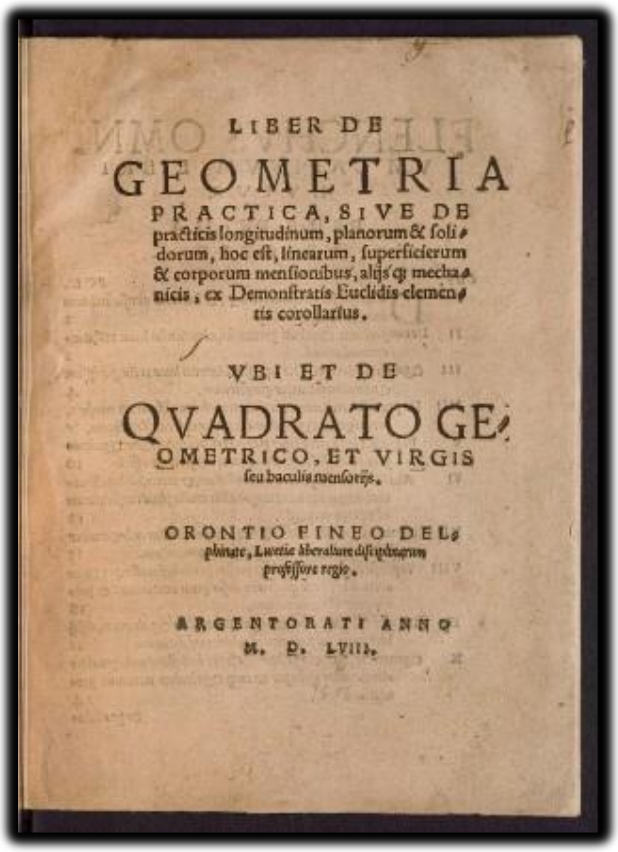
O trabalho mais importante produzido por Finé, quase exatamente na época em que ele foi nomeado para a cátedra de matemática no Collège Royal, é conhecido como *Protomathesis*. Assemelha-se mais com uma coleção de obras separadas, para cada parte tem uma folha de rosto própria, com datas, geralmente, de um ou dois anos, antes de todo o trabalho ter aparecido em 1532. Apesar de parecer que os volumes dessa obra foram publicados separadamente, é improvável que esse tenha sido o caso. A primeira parte trata da aritmética, particularmente, com números inteiros, frações comuns e frações sexagesimais. Este último tópico foi importante para as partes posteriores da astronomia da *Protomathesis*. A segunda parte aborda a geometria em dois volumes. O texto inicia com a definição de geometria similar, a axiomática de *Os Elementos* de Euclides, depois ele passa a considerações mais práticas de medição do comprimento, altura, área de superfície, e volumes. Nesta parte, Finé usa a aproximação $\frac{22}{7}$ para o cálculo de π. O segundo volume da geometria cobre tópicos em trigonometria, mas somente em um nível elementar.

No site intitulado *Les Bibliothèques Virtuelles Humanistes* (*As Bibliotecas Virtuais Humanistas*) obtém-se acesso a uma edição francesa sobre geometria prática, publicada por Finé. Como nota está registrada que tal edição de 1556 é a tradução francesa parcial, feita pelo próprio Oronce Finé de sua *Geometria Prática*[59],

[59]A obra a qual se está fazendo referência é:
FINÉ, Oronce. **La composition et usage du quarre geometrique, par lequel on peut mesurer fidelement toutes longueurs, hauteurs, & profunditez, tant accessibles, comme inaccessibles, que lon peut appercevoir à l'oeil:** Le tout reduit nouuellement en François, escrit, e pourtraict. Paris:

publicada primeiro em 1532, como uma das partes de sua obra *Protomathesis*. Também segundo a nota, o manuscrito de apresentação desse texto francês foi dedicado a François I, em 1538.[60]

Há outra obra sobre geometria escrita por Oronce Finé, que é possível de se ter acesso, intitulada *Geometria Practica*, e que não é mencionada na biografia do autor por O'Connor e Robertson (2005). Ela foi publicada em latim, separadamente da *Protomathesis*, em 1558. A Figura 16 ilustra a folha de rosto dessa obra.



LIBER DE
GEOMETRIA
PRACTICA, SIVE DE
practicis longitudinum, planorum & soli-
dorum, hoc est, linearum, superficierum
& corporum mensionibus, aliisq; mecha-
nicis, ex Demonstratis Euclidis elemen-
tis corollarius.
VBI ET DE
QVADRATO GE-
OMETRICO, ET VIRGIS
seu baculis mensoriis.
ORONTIO FINEO DEL-
phinate, Lutetiae liberalium disciplinarum
professore regio.
ARGENTORATI ANNO
M. D. LVIII.

Figura 16 - Folha de rosto da *Geometria Practica* (versão em latim) de Oronce Finé
Fonte: Fineo (1558, p. 5).

O'Connor e Robertson (2005) presumiram que parece improvável que as partes da obra *Protomathesis* tenham sido publicadas separadamente. No entanto, como

Avec Privilege, 1556. Disponível em: <http://www.bvh.univ-tours.fr/Consult/consult.asp?numtable=B372615206_15105&numfiche=129&mode=3&offset=0&ecran=0>. Acesso em: 02 nov. 2011.

[60] Informações obtidas pela autora deste trabalho por meio do site intitulado *Les Bibliothèques Virtuelles Humanistes*. Disponível em: <http://www.bvh.univ-tours.fr/Consult/index.asp?numtable=B372615206_15105&numfiche=129&mode=3&offset=0&ecran=0&url=>. Acesso em: 28 maio 2012.

evocado no parágrafo anterior, é possível encontrar uma edição isolada da *Geometria Prática* de Finé, sendo esta, parte integrante da *Protomathesis*. É provável que essa conjectura de O'Connor e Robertson tenha validade apenas ao se considerar que as partes da *Protomathesis* não foram publicadas separadas antes da primeira aparição da obra, já que a *Geometria Prática*, à qual se tem acesso hoje, é de 1556, 24 anos depois da primeira aparição da obra completa.

A terceira e quarta partes da *Protomathesis* são sobre astronomia e instrumentos astronômicos, respectivamente. A terceira parte é uma introdução elementar à Astronomia. E a quarta parte descreve muitos quadrantes e relógios de sol.

Finé fez várias tentativas de aproximações para o número π. Além do valor $\frac{22}{7}$, ele alegou que $\frac{\left(22+\frac{2}{9}\right)}{7}$ foi a melhor aproximação obtida em um trabalho publicado, em 1544. Mais tarde, ele deu para π a aproximação $\frac{47}{15}$ e, em *De rebus mathematicis* (publicado, postumamente, em 1556), apresentou $3+\frac{11}{78}$. Os valores aproximados são:

$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$
$$\frac{22}{7} = 3{,}142857143\ldots$$
$$\frac{\left(22+\frac{2}{9}\right)}{7} = 3{,}174603175\ldots$$
$$\frac{47}{15} = 3{,}133333333\ldots$$
$$3+\frac{11}{78} = 3{,}141025641\ldots.$$

Dessas aproximações, vê-se que a melhor é $3+\frac{11}{78}$. Essas tentativas de Finé em encontrar melhores aproximações se confundem com as suas tentativas para a quadratura do círculo. Ele deu várias provas, evidentemente falaciosas, e seus contemporâneos foram rápidos em apontar os seus erros. Poulle (apud O'CONNOR e ROBERTSON, 2005, tradução nossa) afirma que "é preciso reconhecer que a arrogância de Finé sobre suas realizações, sem dúvida, tornou os seus erros de lógica ainda mais intoleráveis para os seus adversários”. Alguns desses serão mencionados a seguir.

Nessa referência, além da crítica feita por Poulle, há uma obra quase toda destinada a criticar o trabalho de Oronce Finé, cujo título é, de imediato, sugestivo: *De erratis Orontii Finaei* (*Dos erros de Orôncio Fineu*). Foi escrita pelo matemático português Pedro Nunes Salaciense, contemporâneo de Finé. Segundo O’Connor e Robertson (2010, tradução nossa), depois que Pedro Nunes se mudou para Coimbra, ele publicou a obra, pela primeira vez, em 1546. Em suma, esta foi produzida com intenção de mostrar que as tentativas de Oronce Finé para resolver os três problemas clássicos: da quadratura do círculo, da trissecção de um ângulo arbitrário e da duplicação do cubo estavam incorretas, além de outros erros cometidos sobre cosmografia.

Sabe-se que existem três problemas de geometria que os matemáticos gregos estudaram e que cumpriram papel relevante no desenvolvimento da Matemática. São problemas de construção que resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los, usando apenas a régua sem graduação e o compasso, os únicos instrumentos utilizados por Euclides nos *Elementos*. Os três problemas que ficaram conhecidos como *os três problemas clássicos* são: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo. Só a partir do século XIX, ficou provado que tais problemas não podiam ser resolvidos com apenas régua e compasso (CARVALHO, 2004).

Nesta pesquisa, se obteve acesso à tradução da obra *De erratis Orontii Finaei*[61] (*Dos erros de Orôncio Fineu*), do latim para o português, mencionada anteriormente, e realizada pelo historiador português Joaquim de Carvalho, editada pela Academia das Ciências de Lisboa/Imprensa Nacional de Lisboa, em 1960. Estão nela: a versão em latim, a tradução para o português e uma parte final intitulada *Anotações ao*

[61]Livro de Pedro Nunes, Salaciense, sobre os erros de Orôncio Fineu, lente de Matemáticas no Colégio Real de Paris. Orôncio Fineu chegou à conclusão de ter achado entre duas linhas dadas duas meias proporcionais em proporção contínua, quadrado o círculo, duplicado o cubo, ensinado a maneira de inscrever no círculo qualquer polígono rectilíneo e haver determinado as diferenças das longitudes geográficas, em todo e qualquer tempo, por processo diferente do dos eclipses lunares (CARVALHO e PERES, 1960).

<<*De erratis Orontii Finaei*>> (constituída por *Preliminares*[62] e *Generalidades*). A parte *Generalidades* foi redigida por Manuel Peres, tendo em vista o adoecimento e morte de Joaquim de Carvalho (em 1958), que não teve tempo de terminar, efetivamente, a obra, embora ele ainda pretendesse escrever, além dessa tradução, uma crítica externa à obra de Pedro Nunes.

Em observância aos objetivos desta pesquisa, parece paradoxal dar valor à obra de um autor, como Oronce Finé, que cometeu erros matemáticos graves, do ponto de vista da busca por soluções de problemas insolúveis. No entanto, ele não agiu diferente de muitos estudiosos e/ou cientistas, inclusive de matemáticos, que tentaram resolver, sem sucesso, aquilo que não tinha solução. Contudo, seus erros não estão relacionados com os problemas de alturas dos quais se tratam neste trabalho. Segundo a tradução de Carvalho e Peres (1960, p. 190-193), dentro da obra *Protomathesis*, Pedro Nunes fez críticas apenas aos seguintes tópicos:

> ✓ Mostra-se que Orôncio não traduziu exactamente na Protomathesis a invenção de Arquimedes acerca da razão da circunferência para o diâmetro – Capítulo XII – Refutação 9ª.
> ✓ Falsidade da quadratura do círculo imaginada por Orôncio Fineu e por ele descrita na Protomathesis – Capítulo XIII – Refutação 10ª.

De acordo com Carvalho e Peres (1960, p. III – *Preliminares*), contando com essa edição traduzida do latim para o português e publicada por eles, “o *De erratis Orontii Finaei* foi dado quatro vezes ao prelo, ocorrendo as três edições anteriores ao século XVI, duas em vida de Pedro Nunes, em 1546 e 1571, e a terceira postumamente [sic], em 1592”. A obra *Dos erros de Orôncio Fineu* foi a única de contestação que Pedro Nunes publicou. Provavelmente, porque seu perfil de matemático valorizava acima de tudo a explicação lógica rigorosa dos resultados, suas exposições eram exímias e seus raciocínios, severamente, objetivos. Logo, deveria haver da parte de Pedro Nunes uma grande inquietação: criticar Oronce Finé, tendo conhecido os seus erros.

[62]Toda a obra de Pedro Nunes comentada por Joaquim de Carvalho está disponível num site cujo título é Joaquim de Carvalho – o homem e a obra, por José V. de Pina Martins. Inclusive esta parte, *Preliminares*. Disponível em: <http://www.joaquimdecarvalho.org/artigos/artigo/149-8.-Anotacoes-ao-De-Erratis-Orontii-Finaei>. Acesso em 01 jun. 2012.

Quanto à constituição do texto do *De erratis Orontii Finaei*, Carvalho e Peres (1960, p. VII – *Preliminares*) relatam que:

> Mal escorrido do prelo, Pedro Nunes teve logo conhecimento deste livro, como se deduz do preâmbulo do *De erratis Orontii Finaei*, em que declara ter tido o propósito, *havia treze anos*, de advertir Oronce Finé de que não fosse tão precipitado nem tão leviano nas afirmações que lançava a público: havendo saído o *De erratis Orontii* em 1546 e a *Protomathesis* em 1532, é óbvio que os trezes anos foram contados desde a data da impressão deste livro até ao ano em que escrevia, ou seja o ano anterior ao da saída a público do *De erratis Orontii*, 1545. A *Protomathesis* foi expressamente tida em consideração nos capítulos XII e XIII do *De erratis*.

Não é possível fazer retorno ao passado para esclarecer, com veemência, os reais motivos que promoveram essa querela, ou, que levaram Pedro Nunes a construir essa crítica tão severa à obra de Oronce Finé. Entretanto, Carvalho e Peres (1960, p. VII - *Preliminares*) levantam uma questão interessante: “Não teria, porém, Pedro Nunes obedecido também, de algum modo, ao impulso pessoal do amor-próprio?”. Acredita-se que isso é passível de se questionar e que, ao levantar esse tipo de questão, coaduna-se com a concepção de Lucien Febvre sobre a história, evocada por Braudel (2009b, p. 34-35):

> Ela lhe apareceu sempre como uma explicação do homem e do social a partir dessa coordenada preciosa, sutil e complexa – o tempo – que só nós, historiadores, sabemos manejar, e sem o que, nem as sociedades, nem os indivíduos do passado ou do presente retomam o aspecto e o calor da vida.

Portanto, considerando o “tempo”, uma variável imprescindível dentro da história, e, com o olhar no passado, podem-se fazer conjecturas sobre a decisão de Pedro Nunes, ao fazer críticas tão duras a Oronce Finé. Carvalho e Peres (1960 – *Preliminares*) tentam responder essas indagações, justificando que o *De erratis Orontii Finaei* foi a primeira obra que Pedro Nunes publicou, após sua nomeação como lente da cadeira de Matemática na Universidade de Coimbra, sendo que dois anos antes de sua nomeação, ele publicou a obra intitulada *De crepusculis* a qual aprovara de modo pleno sua capacidade e originalidade como matemático e astrônomo. Sem contar que Depois, com a publicação da obra de crítica a Finé, Pedro Nunes provara mais competência como professor universitário do que a de Oronce Finé, um também professor universitário, lente da *Academia Real de Paris*, cujas obras se espalhavam pelo mundo em várias edições. Isso, provavelmente, elevaria o ego de Pedro Nunes e poderia ser um dos motivos dele ter publicado essa obra de controvérsia a outro autor de obras de matemática. Carvalho e Peres (1960, p. XIII – *Generalidades*) ainda suspeitam que a forma violenta como Pedro Nunes apresentou as críticas de Finé pode ter relação à mágoa “pois parece que escreveu primeiramente ao francês e este não mostrou aceitar suas objecções, a ponto de nas vésperas de morrer ter reeditados os seus erros”.

Claramente, essa história que se apresenta entre as relações interpessoais, no caso, entre Oronce Finé e Pedro Nunes é algo hoje complexo de se analisar. As considerações feitas aqui coadunam com as ideiais de Braudel (2009b, p. 92) porquanto compreendem “uma soma de curiosidades, de pontos de vista, de possibilidades, soma à qual amanhã outras curiosidades, outros pontos de vista, outras possibilidades se acrescentarão ainda”.

Como muitos matemáticos do tempo de Finé, ele foi um especialista em fortificações e trabalhou nas fortificações de Milão. Sua sugestão que os eclipses da lua poderiam ser utilizados para determinar a longitude dos lugares foi uma ideia relevante para a cartografia, outra de suas contribuições. Finé nasceu dois anos após a descoberta da América, e quando ele tinha três anos, Vasco da Gama navegou em torno da África até à Índia. Ele viveu uma época em que os mapas eram de extrema importância para as potências europeias. Era natural, portanto, que Finé fosse encorajado a fazer uso de suas habilidades matemáticas nessa tarefa. Na confecção de mapas, Finé teve duas origens distintas de informações, sendo uma o mapa de Ptolomeu, recentemente, redescoberto e outros que foram relatados, a contar desse período. Finé inventou uma projeção de mapa e, por volta de 1519, produziu um mapa do mundo, usando sua projeção em forma de coração. Isso foi na época em que Magalhães estava navegando em volta da América do Sul. Finé também produziu mapas da França, em 1525 e outro mapa do mundo, em 1531, com uma projeção dupla em forma de coração (Figura 17), onde o nome de *Terra Australis* aparece pela primeira vez. Somente no século XX, seu mapa alcançou certo status de celebridade.

Figura 17 – Mapa do mundo por Oronce Finé na forma de um coração[63]
Fonte: Biblioteca Digital Mundial (2011).[64]

A razão disso deve-se ao trabalho do professor Charles Hapgood e dois de seus alunos que, em 1956, ao redescobrirem o mapa de Finé de 1531, começaram a desenvolver teorias bastante surpreendentes sobre o mapa. Essas teorias foram publicadas no *Maps of the Ancient Sea Kings* de Hapgood em 1965. O que impressionou Hapgood, ao examinar o mapa do mundo de Finé, foi a constatação de uma representação bastante precisa da Antártica no mapa. Ele foi elaborado em 1531 mesmo que se saiba que a ocupação humana na Antártica tenha acontecido por volta de 1820. Como isso foi possível? A representação bastante precisa da Antártica mostra, contudo, os rios e o mar de Ross, os quais não podem ser vistos por causa de grossas camadas de gelo que cobrem o continente. A teoria de Hapgood de que Finé estava na posse de um mapa antigo, elaborado num momento em que a Antártica não era coberta por lençóis de gelo, parece inconsistente. Entretanto, ainda continua a questão de como Finé sabia que a Antártica estava lá. O mais provável é o seguinte: há muito tempo se acreditou que tinha de haver um equilíbrio entre as massas de terra dos hemisférios norte e sul e assim, algumas massas de terra no sul eram necessárias. Leonardo da Vinci, por exemplo, produziu um globo com uma terra abaixo do sul da África mais de vinte anos antes de Finé

[63]Esse mapa de Finé reflete o estado dos conhecimentos, as hipóteses geográficas e as incertezas de sua época. A América do Norte se une à Ásia, e uma vasta *Terra Australis*, continente hipotético que os geógrafos supunham existir para contrabalançar o peso das massas de terra do norte, está desenhada no sul. O mapa pertence à coleção do geógrafo Jean-Baptiste Bourguignon d'Anville (1697-1782). Foi comprado pelo rei Luís XVI em 1779 e depositado na Biblioteca Nacional da França em 1924. Disponível em: <http://www.wdl.org/pt/item/4072/>. Acesso em: 28 maio 2012.
[64]Disponível em: <http://www.wdl.org/pt/item/4072/zoom/>. Acesso em 29 maio 2012.

elaborar o seu mapa. Conjectura-se que Finé pode ter se inspirado no trabalho de Leonardo da Vinci.

Além disso, a costa norte da Austrália, talvez, tenha sido visitada pelos europeus nessa época, e a costa norte da Antártica que Finé apresentou em seu mapa foi, provavelmente, retirada de tais representações. Também podem ter sido usados relatórios os quais, por certo, apresentam o avistamento da Antártica e Finé tenha relacionado esses relatórios juntamente com essas suposições, já citadas, para produzir o seu mapa que tem características reais e também conjecturadas. Claro que essa explicação coloca o fato de a Antártica de Finé se parecer muito com a Antártica real, ficando dependente de hipóteses com as informações acessíveis.

Poulle, citado por O'Connor e Robertson (2005, tradução nossa), destaca sobre as contribuições de Finé:

> o trabalho científico de Finé pode ser caracterizado resumidamente como enciclopédico, elementar, e sem originalidade. Parece que o objetivo de suas publicações, que abrangem desde a astronomia à música instrumental, foi para popularizar a ciência da universidade na qual ele próprio tinha ensinado.

Todas essas críticas relacionadas à obra de Oronce Finé, tanto as comentadas por O'Connor e Robertson (2005) quanto às destacadas por Pedro Nunes, no seu texto *Dos erros de Orôncio Fineu*, além de serem relevantes e de terem destaque no âmbito da produção desta tese, serviram também de incentivo para a inclusão da geometria de Finé neste trabalho, com o objetivo de analisar como ele trata das resoluções dos problemas de alturas. Não há que se valorizar somente as produções científicas não passíveis de refutações das antigas produções do conhecimento matemático, há que se levar em conta, também, aqueles autores que ousaram estudar problemas e buscar soluções, mesmo constatadas equivocadas posteriormente. Pois, historicamente, no campo da matemática, se reconhece que muitos erros foram cometidos e muitas conjecturas foram feitas até se chegar a um determinado resultado, assumido pela academia como científico.

Considerar a geometria de Finé neste trabalho significa valorizar sua produção útil no campo da resolução dos problemas de altura, não omitindo seus erros. Braudel

(2009b, p. 22-23) observa que "o trabalho histórico é um trabalho crítico por excelência" e que "na história, o indivíduo é, muito frequentemente, uma abstração". Isso quer dizer que se torna imprescindível considerar as críticas direcionadas ao trabalho de Oronce Finé, sem negar a importância deste professor do *Collége Royal* de Paris, do século XVI e produtor de obras de matemática que foram úteis para a época.

4.1.1 As ilustrações em Finé

Sabe-se que o cartógrafo e médico francês Oronce Finé viveu na primeira metade do século XVI. Foi um apreciador da matemática e a sua obra mais importante, intitulada *Protomathesis*, apareceu completa em 1532, e o segundo volume, sobre geometria, é o que contém tópicos que hoje podem ser classificados como de trigonometria. Apresenta resoluções de problemas práticos, incluindo os de medição alturas de objetos com uma ilustração para cada problema proposto.

De acordo com O'Connor e Robertson (2005), assim como muitos matemáticos do tempo, Oronce Finé foi um especialista em fortificações e nelas também trabalhou, como em Milão. Isso, provavelmente, influenciou a escrita de sua obra sobre geometria já que propôs a construção de um instrumento de medida chamado quadrante geométrico, empregado para resolver problemas como os de cálculos de declives de montes e alturas de torres.

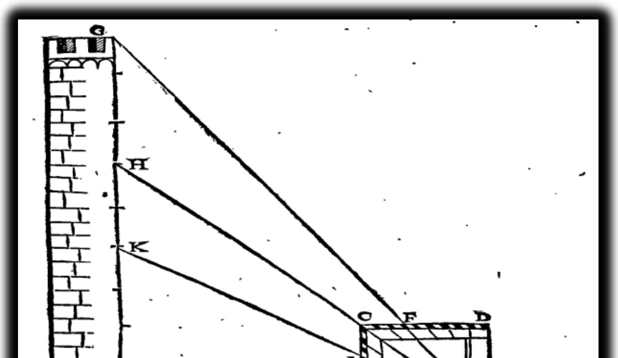


Figura 18 - Esquema explicativo do uso do quadrante geométrico por Finé
Fonte: Finé (1556, p. 8).

A Figura 18 exemplifica uma ilustração utilizada por Oronce Finé para explicar a resolução do problema de medir a altura de uma torre. Nesse caso, a ilustração contempla a torre, o quadrante geométrico e a triangulação usada para encontrar a solução do problema. Observa-se que, diferentemente de Alberti, Finé utiliza-se de um instrumento mais sofisticado de medida, o que, possivelmente, indica uma melhor aproximação da altura obtida em relação à altura real da torre.

Febvre e Martin (2005) mencionam algumas das obras eleitas entre as mais célebres do século XVI e recordam os nomes de alguns artistas que também fizeram sucesso naquela época, os quais incluíram ilustrações em seus trabalhos, como Albrecht Dürer.

> Albrecht Dürer (1471-1528) foi um pintor alemão, gravador e teórico de Nuremberg. Suas famosas obras ainda incluem as xilogravuras do Apocalipse, do Cavaleiro, da Morte e do Diabo (1513), São Jerônimo em seu Estudo (1514) e Melancolia I (1514), as quais têm sido objeto de extensa análise e interpretação. Suas aquarelas determinaram-no como um dos primeiros paisagistas europeus, enquanto suas ambiciosas xilogravuras revolucionaram o potencial desse meio. A introdução de Dürer de motivos clássicos dentro da arte do Norte, através do seu conhecimento de artistas italianos e humanistas germânicos, tem assegurado sua reputação como uma das figuras mais importantes do Renascimento do Norte. Isto é reforçado por seu tratado teórico o qual envolve princípios de Matemática, perspectiva e proporções ideais. Suas impressões estabeleceram sua reputação em toda a Europa quando ele ainda estava com seus vinte anos, e ele tem sido convenientemente considerado como o maior artista da Renascença do Norte da Europa desde então (ALBRECHT DÜRER, tradução nossa).[65]

Vale salientar também o interesse de Albrecht Dürer pela Matemática, tanto que são encontrados vários relatos da influência da mesma, em seus trabalhos, como a gravura *Adão e Eva* (Figura 19), descrita em sua obra *The four books on human proportions* (publicada em 1528), feita utilizando-se régua e compasso para construir as figuras, com intuito de obtê-las, proporcionalmente, adequadas. As obras de Dürer também foram influenciadas pela perspectiva (ALBRECHT DÜRER, s.d., 2000).

[65]Disponível em: < http://www.albrecht-durer.org/>. Acesso em: 25 março 2012.

Figura 19 – *Adão e Eva* por Albrecht Dürer
Fonte: http://www.albrecht-durer.org/Adam-and-Eve-(The-Fall-of-Man).html

Conforme Flores (2007, p. 69), “Albrecht Dürer é considerado o responsável por divulgar, na Alemanha, a teoria italiana da perspectiva, retomando a imagem do quadro transparente e definindo a perspectiva como visão transparente”. Ainda segundo a autora, Dürer fornece exemplos, mostrando como eram os procedimentos usados por Brunelleschi e Alberti para desenhos em perspectiva e utiliza vários instrumentos perspectivos (ou perspectivadores) que, em princípio, deveriam ajudar o artista no processo de produção dos desenhos em perspectiva.

Chartier (2002, p. 68) classifica esse tempo de produções de livros, por meio da xilografia de “antigo regime tipográfico” e ressalta que as intervenções, especificamente, editoriais se fazem nessa época “nas escolhas feitas em razão dos públicos visados e que comandam as decisões quanto ao formato, ao papel, aos caracteres, à presença ou não de ilustrações”.

Constata-se que o século XVI foi um período precursor da difusão dos livros ilustrados. Ocorre o desenvolvimento da arte aplicada aos livros por meio das iluminuras e xilogravuras. Conforme registrado por Febvre e Martin (2005, p. 101, tradução nossa):

> [...] eles, herdeiros e sucessores da xilografia, tiveram em suas origens o mesmo objetivo e os mesmos clientes dos livros com as xilogravuras: educar um público extenso que frequentemente apenas sabia ler, explicar um texto por meio de imagens, precisar e fazer inteligíveis os diversos

episódios da vida de Cristo, dos profetas e dos santos, dar aparência sensível aos demônios e aos anjos que disputavam as almas dos pecadores, e também aos personagens míticos ou legendários, familiares para o povo naquele momento.

Por outro lado, o livro ilustrado teve um período de repercussão muito positiva na Alemanha e França, sendo que os franceses estiveram em contato com o Renascimento por meio da Alemanha. Foi o caso do professor de matemática Oronce Finé, que fez gravações em folhas (também em suas margens), normalmente talhadas no cobre, assim como fizeram os alemães.

As Figuras 20 e 21 ratificam as considerações feitas por Febvre e Martin (2005) ao ressaltarem que os estudos levaram o professor de matemática Oronce Finé a se interessar pela ilustração dos livros e a criar moda das margens geométricas com temas alegóricos, fiéis ao espírito do renascimento alemão.

Figura 20 – Ilustração apresentada na margem superior na obra de Finé
Fonte: Finé (1556, p. 2).

Figura 21 – Ilustração da letra S que inicia a primeira parte do livro de Oronce Finé
Fonte: Finé (1556, p. 2).

Assim, percebe-se que Oronce Finé se viu naturalmente imbuído desse espírito de apresentar ilustrações em seus trabalhos, tendo, possivelmente, utilizado neles a técnica dos gravados em cobre, como era moda no seu tempo.

4.2 A GEOMETRIA NA *PROTOMATHESIS* DE ORONCE FINÉ

Uma das obras de Oronce Finé, em análise neste trabalho, cuja folha de rosto refere-se à Figura 22, a seguir, está em língua italiana e é intitulada *Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli* (*Aritmética, Geometria, Cosmografia, e Relógios*) traduzido por Cosimo Bartoli, fidalgo e acadêmico fiorentino*, Et gli Specchi* (*e os Espelhos*), traduzido pelo Cavalero Ercole Bottrigaro, fidalgo bolonhês. Em sequência, têm-se as informações: Novamente publicado com privilégio, em Veneza, Impresso Francesco Franceschi Senese, 1587.

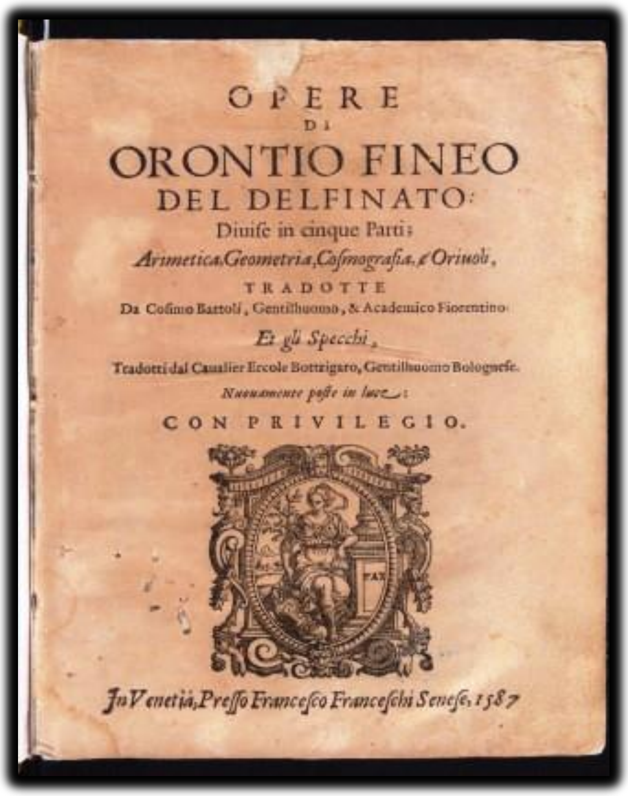


Figura 22 – Folha de rosto da obra de Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 5).[66]

---

[66]Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?url=/mpiwg/online/permanent/library/P9R3M8SW/pageimg&viewMode=images&pn=5&mode=imagepath>. Acesso em: 29 maio 2012.

Certamente, as quatro primeiras partes da obra supracitada referem-se à *Protomathesis* de Oronce Finé, publicada pela primeira vez, em 1532, em latim. Como se pode verificar nas *Preliminares* da tradução da obra *Dos erros de Orôncio Fineu* para o português, por Carvalho (1960, p. VI), é citado o que contém o volume *Protomathesis*:

> 1° Orontii Finaei Delphinatis de Aritmetica practica libri IIII;
> 2° Orontii Finaei Delphinatis de Geometria libri duo. Lutetiae Parisiorum 1530;
> 3° Orontii Finaei Delphinatis, de Cosmographia sive mundi sphaera libri V. Lutetiae Parisiorum 1530;
> 4° Orontii Finaei Delphinatis, de Solaribus libri IIII. Lutetiae Parisiorum 1531.

Os três primeiros títulos (*Aritmetica, Geometria e Cosmographia*) coincidem com as três primeiras partes dessa tradução de Cosimo Bartoli, de 1587, e o quarto título (*Solaribus*) coincide também com a quarta parte da tradução italiana (*Oriuoli*) por se referir a relógios solares. Para auxiliar nessa última ratificação, basta observar a folha de rosto da obra publicada em latim, de 1560 (Figura 23):

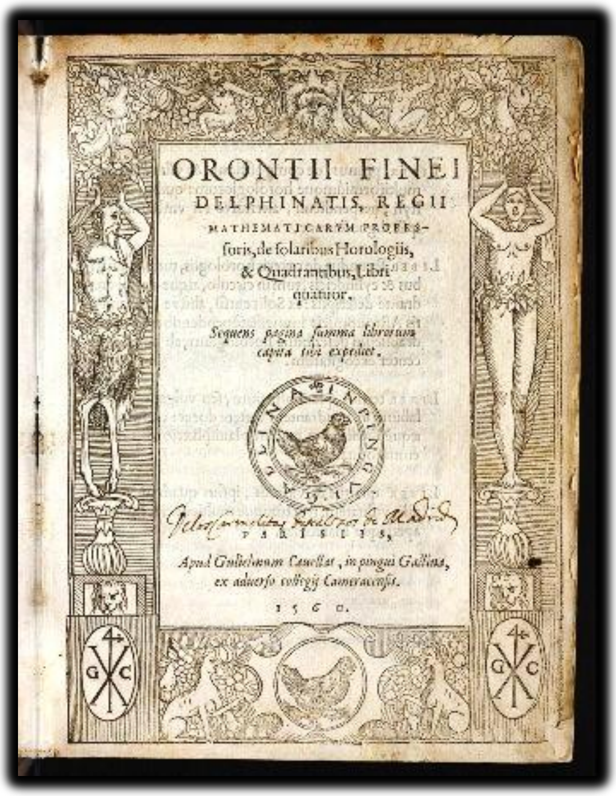


Figura 23 – Folha de rosto da obra *Solaribus Horologiis* de Oronce Finé
Fonte: Finei (1560, p. 3).

Este trabalho se definirá pela leitura da versão italiana (1587) da geometria de Finé, mais especificamente, das partes que incluem a concepção de geometria, a construção do quadrante geométrico e os problemas de alturas. O autor começa chamando a atenção para a dificuldade comum que é estudar a geometria logo após a aritmética. De fato, Fineo (1587, p. 183, tradução nossa) ressalta:

> Julgamos estudioso leitor, que seja uma coisa incômoda, ensinar-lhe, depois da prática da Aritmética, os primeiros ensinamentos mais notáveis da Geometria, embora se apresentem cômodos para quase tudo, não o são às nossas obras de Geometria e Cosmografia que se seguirão; mas, ainda parecem necessários aos estudos universais das Matemáticas.

Sua geometria é composta por dois livros (Livro Primeiro e Livro Segundo): o primeiro consta de 14 capítulos, e o segundo consta de 33. A Figura 24 representa uma parte do índice do Primeiro Livro da Geometria de Oronce Finé.


DELLA GEOMETRIA.

Libro Primo.

DELLA ragione de' principij Geometrici. cap.1 1
Della figura, & de' suoi termini. cap.2 2
Della general differenza delle figure, & del disegno ancora delle piane, così semplici, come composte. cap.3 3
Degli angoli così piani come solidi. cap.4 4
Come si ha da considerare la qualità delli angoli piani, & di linee diritte, cap.5 5
Delle figure piane, & di linee diritte. cap.6 6
Delle figure solide. cap.7 8
Delle dimande Geometriche. cap.8
Delle sentenze comuni. cap.9 9
Del

Figura 24 – Parte do índice da *Geometria* de Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 12).

Abaixo se apresenta a tradução de todo o índice da Geometria de Finé. Intenta-se mostrar para o leitor todos os enunciados dos temas e problemas tratados pelo autor em seu livro.

TABELA 1 – ÍNDICE DA GEOMETRIA DE ORONCE FINÉ – PRIMEIRO LIVRO

Da Geometria Primeiro Livro		
Título do capítulo	**Capítulo**	**Página**
Da razão dos principios geométricos	Cap. 1	1
Da figura e dos seus termos	Cap. 2	2
Da diferença geral entre as figuras, e de seus desenhos, tanto das planas quanto das sólidas	Cap. 3	3
Dos ângulos, tanto os planos quanto os sólidos	Cap. 4	4
Como se considerar a quantidade dos ângulos planos e das linhas retas	Cap. 5	5
Das figuras planas e das linhas retas	Cap. 6	6
Das figuras sólidas	Cap. 7	7
Das demandas geométricas	Cap. 8	8
Das sentenças comuns	Cap. 9	9
Das relações gerais entre os círculos e a esfera	Cap. 10	10
Das apropriadas medidas dos geômetras	Cap. 11	11
De um seno e do outro, isto é, do direito e do reverso, das linhas retas que estejam estendidas sob o quadrante no círculo	Cap. 12	12
De que modo se faz a seguinte Tábua dos senos e da reciproca ou da reciproca inversão dos senos, das cordas e dos arcos, mediante a mesma tábua	Cap. 13	13
Como é composta a tábua dos arcos do primeiro móvel, mediante a seguinte tábua dos senos retos	Cap. 14	16

Fonte: FINEO (1587, p. 12-13, tradução nossa).

TABELA 2 – ÍNDICE DA GEOMETRIA DE ORONCE FINÉ – SEGUNDO LIVRO

Título do capítulo	Capítulo	Página
Como são medidos os corpos sólidos com ângulos retos	Cap. 28	71
Do modo geral de medir colunas	Cap. 29	74
Como se medem as pirâmides	Cap. 30	76
Como se mede um corpo redondo e suas partes	Cap. 31	78
Como se medem os outros corpos regulares	Cap. 32	80
Como se mede um tetraedro ou outros corpos, na forma de tetraedro, firmes e irregulares, e da capacidade de barris de vinho	Cap. 33	82

Fonte: FINEO (1587, p. 13-14, tradução nossa).

Observando todos os tópicos de geometria considerados por Finé, percebe-se que ela é importantíssima para ele. Representam um verdadeiro tratado de geometria prática, com aplicação direta no cotidiano europeu, no tempo do autor. Segundo Fineo (1587), o processo de apresentar, primeiramente, os fundamentos da geometria, para depois se chegar a outros resultados que deles derivam, fazem dela relevante, para se aplicar também em outras disciplinas (ele cita a Astrologia, e, de modo geral, estudos universais da Matemática).

Apresentam-se, no primeiro livro, os princípios da geometria dos quais não são necessárias demonstrações, de modo que seja possível com simples discurso chegar às coisas que seguem e às que deles derivam e conceder-lhes a razão/conhecimento (FINEO, 1587). O que indica, claramente, a valorização da geometria pelo autor, assim como o método que segue para apresentá-la, baseado na geometria de Euclides.

Fineo (1857, p. 236, tradução nossa) destaca que:

> Tendo então já tratado dos ensinamentos gerais e princípios dessa Geometria, como a introdução aos Elementos de Euclides, ao entendimento destas nossas obras que seguirão, nos parece razoável consequentemente tratar da prática universal da Geometria, isto é, da medição de algumas linhas[67], algumas superfícies e alguns corpos, como demonstraram os elementos de Euclides [...].

Interessante ressaltar que Finé foge da abordagem euclidiana, na medida em que introduz, em seu texto, uma geometria prática, talvez por motivos relacionados às exigências técnicas da época, como construções de fortificações, às necessidades práticas, ou por uma própria “ambição” do autor em escrever sobre assuntos

[67]Neste caso, as linhas as quais menciona Fineo (1587) representam o que chamamos atualmente de segmentos de retas.

relacionados à matemática, mesmo sem ter domínio suficiente sobre determinados resultados da mesma. De fato, na parte das *Generalidades* (escrita por Manuel Peres) da obra traduzida para o português *Dos erros de Orôncio Fineu* encontra-se uma afirmação, constatando que Oronce Finé tentou e achou que havia conseguido demonstrar vários problemas matemáticos, os quais atualmente, tem-se conhecimento de que são impossíveis de serem provados matematicamente, problemas sem solução como o problema da quadratura do círculo. Carvalho e Peres (1960, p. XIII) declaram que "a argumentação do professor francês é, por vezes, falha de lógica e, num ou noutro ponto até dá mostras de ignorância de princípios elementares".

O segundo livro da geometria trata de medir os comprimentos, os planos e os corpos, ou seja, das linhas, das superfícies e dos corpos e também de outras coisas mecânicas, segundo as *Regras de Euclides.* O autor esclarece que é preciso, primeiramente, medir as linhas, depois os planos e as superfícies e, finalmente, os corpos. Observa-se que há uma tendência de Oronce Finé, para recorrer a exemplos práticos, a fim de explicar ao leitor/estudante sua geometria.

Com efeito, no caso de medição das linhas, o autor vale-se de representações práticas para ensinar sobre as linhas/segmentos. A título de ilustração, o autor menciona que, para medir as linhas, ocorrem três ideias: como estendidas no chão numa planície em um campo, ou então, como hastes agrupadas sobre o terreno; como se estivessem desenhadas para baixo, ao longo de um muro ou de outras coisas verticais; e ainda, como se estivessem pendendo para baixo, como são as coisas usadas para demonstrar o comprimento da profundidade de poços (FINEO, 1587).

O segundo capítulo do segundo livro da geometria de Fineo (1587, p. 238, tradução nossa) é intitulado *Como se faz o quadrante geométrico comodíssimo para medidas das linhas retas* [68]. Segundo o autor, mesmo que o comprimento das linhas retas possa ser medido de várias formas e com diversos instrumentos, agrada-o em especial, examinar seu comprimento com o quadrante geométrico, para ele, o

[68]Com este título, o autor intenciona mostrar como se constrói um quadrante geométrico, instrumento muito útil ou cômodo para calcular distâncias.

melhor dos instrumentos geométricos. Assim, apresenta os passos para a construção do quadrante que será discutido na próxima seção deste trabalho.

Como já se mencionou neste trabalho, o tradutor da obra em análise desta pesquisa, Cosimo Bartoli (1503-1572), também escreveu uma obra datada de 1564, intitulada *Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori*[69], que como outras obras dos séculos XVI e XVII, por exemplo, a geometria de Oronce Finé, tratava da construção e do uso de instrumentos para medir e calcular. Constata-se que, em virtude da demanda por novos métodos matemáticos e experimentais nesse período, novos instrumentos passaram a ser concebidos. Para Saito e Dias (2011) isso aconteceu para facilitar a resolução de problemas matemáticos, observacionais e experimentais. Os aspectos práticos da geometria tornaram-se importantes naquela época para os príncipes e governantes. Nesse aspecto, o resgate de textos da Antiguidade faz reaparecer o interesse pela especulação matemática e, ainda mais, aconteceram a expansão do horizonte físico e as modificações nos métodos da arte militar.

É provável que o grande interesse de Oronce Finé pela matemática e, mais especificamente, pela geometria, o "obrigasse", consequentemente, naquela época a interessar-se também pelos instrumentos geométricos. Conforme Saito e Dias (2011), os denominados "professores de matemática" daquela época eram os praticantes de matemática, sabendo-se que a maior parte deles não tinha formação universitária e estava associada com alguma corporação de ofício ou trabalhava em alguma oficina de fabricação de instrumentos. Comumente, tais profissionais, chamados de artesãos, desenvolviam seu próprio instrumento e depois comunicavam sobre a construção e uso para aqueles que iam em busca de instrução.

[69]*O modo de medir a distância, a superfície, os corpos, as plantas, as províncias, as perspectivas e todas as outras coisas terrenas que possam ocorrer ao homem, Segundo as leis reais de Euclides e de outros autores mais elogiados.*

Nota-se que Cosimo Bartoli segue de perto a obra de Finé, uma vez que no seu primeiro livro, segue a sequência proposta por Finé para medidas de distâncias, isto é, para comprimento, largura e profundidade. Ademais, como apresentam Saito e Dias (2011, p. 13), para a construção do quadrante geométrico, Cosimo Bartoli inicia o texto com o título “Como construir um quadrante, instrumento muito cômodo para medir distâncias (Cap. II)”, praticamente idêntico ao utilizado por Fineo (1587, p. 238, tradução nossa): “Como se faz o quadrante geométrico comodíssimo para as medidas das linhas retas (Cap. II – Livro Segundo da Geometria)”.

4.3 O PROCESSO DE FABRICAÇÃO DO QUADRANTE GEOMÉTRICO POR ORONCE FINÉ

Oronce Finé teve predileção pelo quadrante geométrico para encontrar medidas, como já mencionado anteriormente, por isso fez-se aqui a escolha de pesquisar com mais profundidade a construção desse instrumento e como dele se serviu Finé para resolver problemas de alturas. Contudo, o autor trata de outros instrumentos de medidas a fim de resolver problemas práticos, como por exemplo, o quadrante num quarto de círculo, o esquadro e o báculo.

As Figuras 25, 26, 27 e 28 mostram, respectivamente, um instrumento de medida, o quadrante num quarto de círculo, uma ilustração do uso do quadrante num quarto de círculo, uma ilustração do uso do esquadro e uma ilustração do uso do báculo.

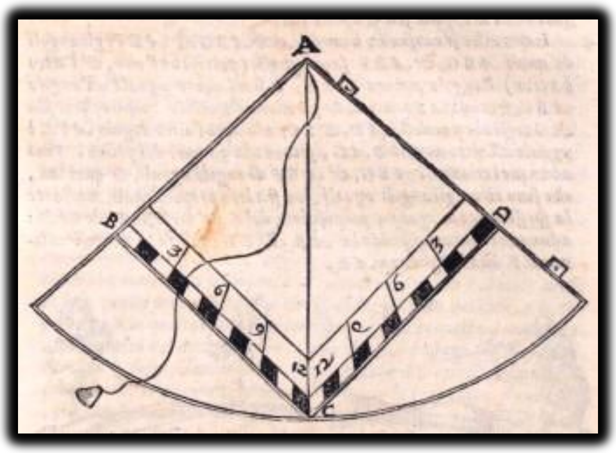


Figura 25 – Quadrante num quarto de círculo
Fonte: Fineo (1587, p. 245).

Figura 26 – Ilustração de como usar o quadrante num quarto de círculo
Fonte: Fineo (1587, p. 246).

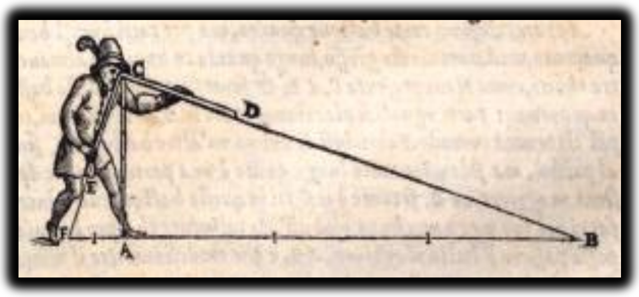


Figura 27 – Ilustração de como usar o esquadro
Fonte: Fineo (1587, p. 247).

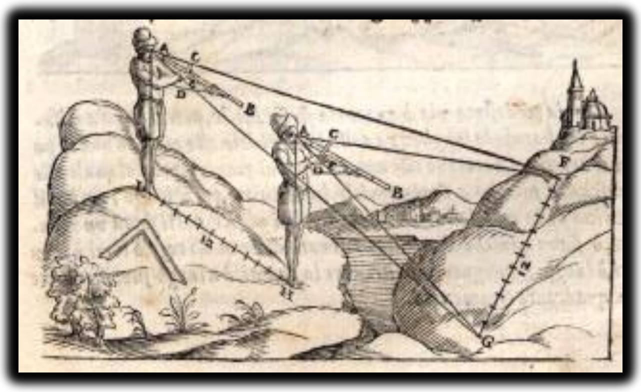


Figura 28 – Ilustração de como usar o báculo
Fonte: Fineo (1587, p. 249).

Nesta seção, pretende-se apresentar uma sequência de ações para a construção do quadrante geométrico por Oronce Finé, acompanhando o documento de 1587. Para isso, serão reproduzidas partes do texto original em análise, sempre exibidas como citações diretas[70] e acrescentadas com comentários de como as ações podem ter sido desenvolvidas pelos indivíduos que necessitavam construir o instrumento com

[70]A fim de ficar claro para o(a) leitor(a), todas as instruções fornecidas por Finé em seu texto, serão apresentadas aqui como citações diretas já traduzidas do italiano para o português (tradução nossa). Os comentários e interpretações da autora deste trabalho apresentar-se-ão registrados de forma normal.

base nas instruções dadas por Finé. Intenta-se também registrar possíveis caminhos e conhecimentos matemáticos que podem ser mobilizados no processo dessa construção.

A Figura 29 é a ilustração dada por Finé (1587, p. 239) para o seu quadrante geométrico.

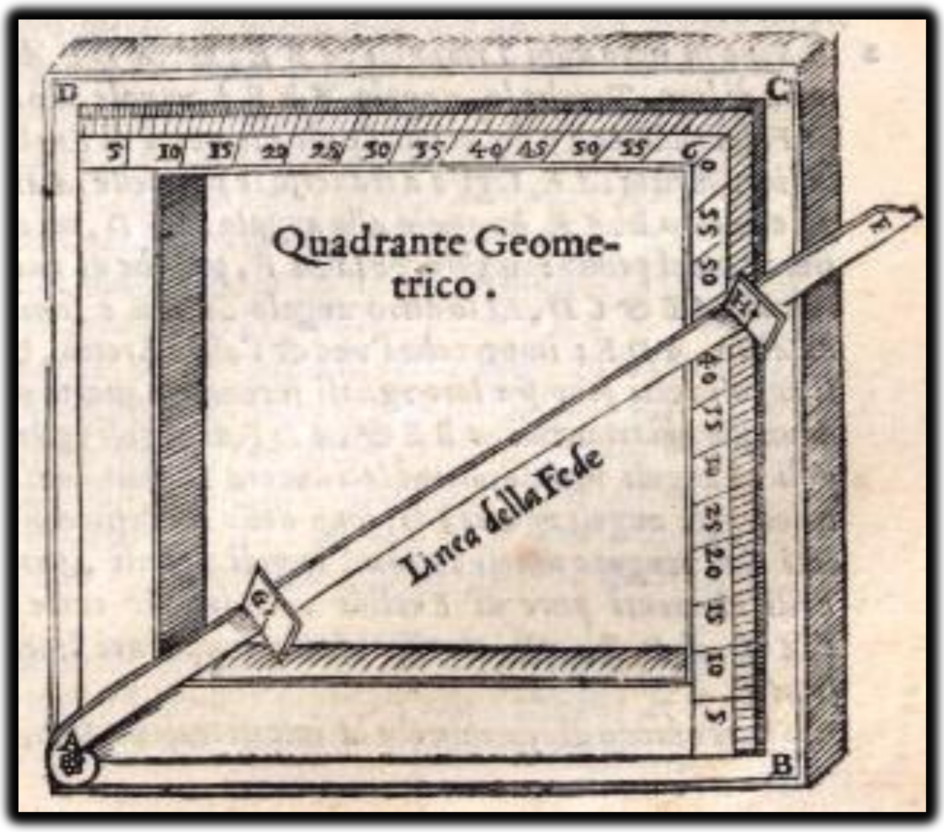


Figura 29 – O quadrante geométrico por Finé
Fonte: Fineo (1587, p.239).

A primeira instrução proposta por Fineo (1587, p. 238, tradução nossa) é:

> Munir-se primeiramente de quatro réguas feitas de alguma madeira duríssima que tenham entre si o mesmo comprimento e a mesma largura. Dispô-las de maneira que formem ângulos retos com suas faces (ou terminações ou cabeças), que devem ter ao menos meio pé de largura e o comprimento seja dois ou três cubiti/côvados[71], ou a medida pode variar de acordo com o fabricante. Ao colocá-las juntas deve-se ter o cuidado de fazê-lo de tal modo que formem um plano e, em esquadro com suas faces e superfícies.

[71]A tradução de cubiti do italiano para o português é côvados. Segundo o dicionário online Priberam, côvado era uma antiga medida de comprimento equivalente a 0,66m. Disponível em <http://www.priberam.pt/dlpo/definir_resultados.aspx?pal=c%F4vados>. Acesso em 11 nov. 2011.

Cabem aqui duas análises. Uma do ponto de vista instrumental com a finalidade de discutir o tipo de material usado para a elaboração do quadrante; e outra, do ponto de vista didático, abordando a intencionalidade provável e os conceitos matemáticos implícitos nas instruções para a confecção do instrumento. Sempre que possível e conveniente, em cada instrução proposta pelo autor para a confecção do instrumento, far-se-ão tais análises.

No caso da primeira instrução, a seleção do tipo de material é importante quando se leva em conta o uso do instrumento, pois, para os artesãos do século XVI, ele era útil para um fim prático. Dessa forma, era preciso considerar a durabilidade, maleabilidade e resistência do material a ser usado na sua construção. A qualidade "duríssima" indica, certamente, condição necessária para que o instrumento seja eficiente no momento do manuseio, ou seja, para que o instrumento funcione corretamente.

Mesmo que pudesse ser usado para ensinar matemática, no contexto social em que estava sendo proposto, o quadrante geométrico não era ferramenta didática voltada para "educação escolar". Não obstante, há de se destacar os vários conceitos matemáticos exigidos pelo construtor, com o objetivo de confeccionar um quadrante geométrico. A contar da primeira instrução, fornecida por Finé e citada anteriormente, pode-se elencar: ângulos, perpendicularismo, figuras planas (quadrado), face e superfície. Outrossim, o autor sugere uma unidade de medida aproximada para as dimensões das réguas de madeira (tanto para o comprimento quanto para a largura das peças), de modo a tornar simples e adequado o manuseio do instrumento.

As próximas instruções para a construção do quadrante geométrico são:

> Depois, sobre uma de suas faces, a mais limpa, deixar do modo que quiser, na direção do lado externo alguns intervalos iguais, e se desenha o quadrado ABCD. Colocada em seguida a régua no ponto A e no ponto C, e desenhada a linha obliqua CE, em qualquer dos lados BC e CD, se desenham três linhas paralelas, que venham exatamente a conjugar-se na obliqua CE e com essas BC e CD de modo que causem intervalos proporcionais entre elas em que o espaço interno que se deseje entre os referidos lados seja o dobro do intervalo que se segue ao lado, ou daquele do meio; e o do meio seja o dobro do primeiro, ou do intervalo de fora de ambos os lados citados (FINEO, 1587, p. 238, tradução nossa).

A escolha da face mais limpa (polida) é feita para facilitar o traçado dos segmentos. Os passos agora seguem com o objetivo de fazer as marcações no instrumento. Deve-se, então, definir o quadrado ABCD e o segmento oblíquo CE que servirá de base para serem traçados os segmentos paralelos que indicarão as futuras medidas.

Após, faz-se um recorte do quadrante, ilustrado na obra de Finé, (a Figura 30 abaixo) e acrescentam-se segmentos de reta em destaque e comentários necessários para entender os passos indicados para a confecção do instrumento. Neste caso, na Figura 30, distinguem-se os três segmentos paralelos[72] que devem formar os três intervalos proporcionais entre si, sendo um sempre o dobro do outro em espessura/largura.

Figura 30 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 239).

Em relação aos conceitos matemáticos requisitados para a construção do quadrante, além dos já mencionados, pode-se destacar: paralelismo, segmento de reta, segmento oblíquo (linha obliqua CE) e proporcionalidade entre segmentos.

Em continuidade, o autor propõe as seguintes instruções:

---

[72]Os três segmentos paralelos foram postos em destaque pela autora para ilustrar com mais clareza as interpretações, a seguir. Sempre que conveniente, ao longo do texto, serão apresentados segmentos destacados e coloridos na figura, com essa mesma intenção.

> Divide-se consequentemente os lados BC e CD em 12 partes iguais entre elas, e partindo do ponto A, acomodando a régua no ponto escolhido das divisões se puxam suas pequenas linhas, das ínfimas paralelas de dentro por esses intervalos até os citados lados BC e CD [...] (FINEO, 1587, p. 238, tradução nossa).

Na tentativa de esclarecer as instruções, percebe-se que elas estão, diretamente, relacionadas com a construção das unidades de medidas do instrumento, fundamental para realizar as medições. O autor orienta a necessidade da divisão dos segmentos BC e CD em doze partes iguais, mas não deixa claro como realizar esse passo, nem mesmo que as divisões devem ser feitas no segmento interno (dos três paralelos já evocados antes). Para elucidar, encontra-se, em destaque, o segmento CD, aquele que tem sobre ele a numeração 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 e, segundo as instruções, deve ser dividido em doze partes iguais, como se mostra na Figura 31.

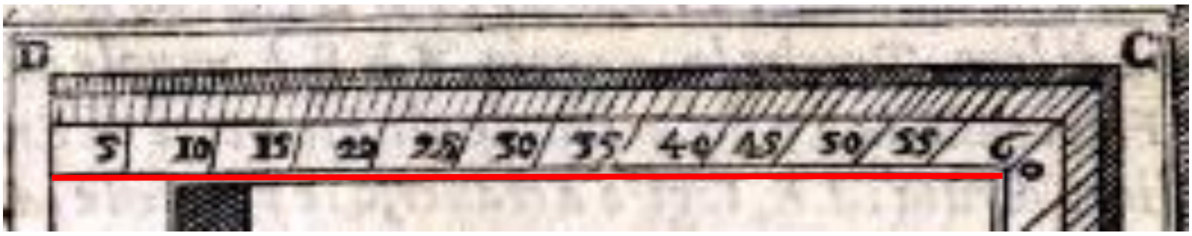


Figura 31 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 239).

Para fazer as divisões no lado CD, por exemplo, não é possível remeter ao traçado de mediatrizes, por suas próprias caracterizações, até serem obtidos doze segmentos de mesma medida em CD. Precisa-se de outro processo que recorre ao Teorema de Tales, no qual o resultado trata das partes proporcionais estabelecidas por duas retas transversais em um conjunto de retas paralelas. Isso resulta na possibilidade de traçar, com uso apenas de régua não graduada e compasso, segmentos congruentes.

Para prosseguir a construção, após a divisão do segmento CD em doze partes iguais, o autor propõe o alinhamento da régua, usando os pontos A e cada um dos obtidos com a divisão do segmento CD, em doze partes iguais, para obter segmentos de retas transversais às paralelas que constituirão a organização da segunda escala do instrumento e devem atingir apenas o primeiro intervalo que foi obtido, anteriormente, através da construção dos três segmentos paralelos tomando como referência cada um dos segmentos BC e CD.

Observa-se que, após fazer todo esse processo em uma das doze divisões do lado CD do quadrado, não será preciso repeti-lo para o lado BC. De fato, bastará transferir com o compasso o tamanho (abertura) do segmento obtido da subdivisão anterior, formando doze novos segmentos contíguos no lado BC. Destarte, o segmento em destaque, na Figura 32, estará dividido em doze partes.

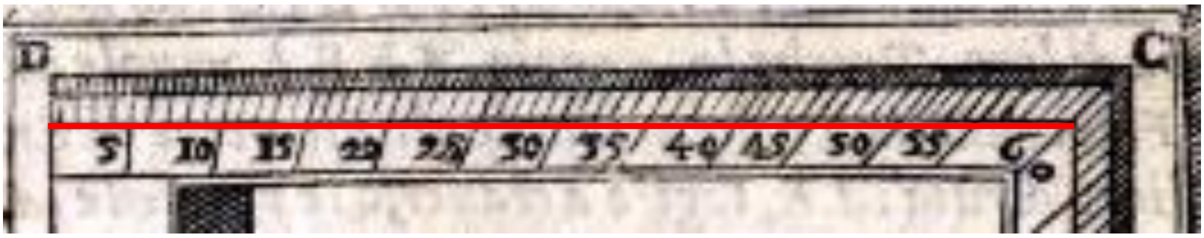


Figura 32 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 239).

Os passos seguintes são propostos pelo autor:

> [...] cada duodécima parte de novo do lado BC e do CD, se redivida de novo em 5 partes iguais. E outra vez colocada a régua no ponto A e em qualquer ponto desta nova divisão, se puxam as linhas mais curtas, estendidas somente para os dois intervalos dos lados menores. Desse modo então, cada um dos lados BC e CD será dividido em 60 partes iguais entre si, pois que 5 vezes 12 ou 12 vezes 5 fazem 60 [...] (FINEO, 1587, p. 238, tradução nossa).

Num processo análogo, Finé indica uma nova divisão, obtendo cinco segmentos de mesma medida, em cada um dos doze segmentos construídos no processo anterior, tanto em BC quanto em CD. Por isso, conclui que, nesta subdivisão, serão encontrados sessenta segmentos. A Figura 33 ilustra os dois segmentos em destaque que ficarão divididos em sessenta partes iguais.

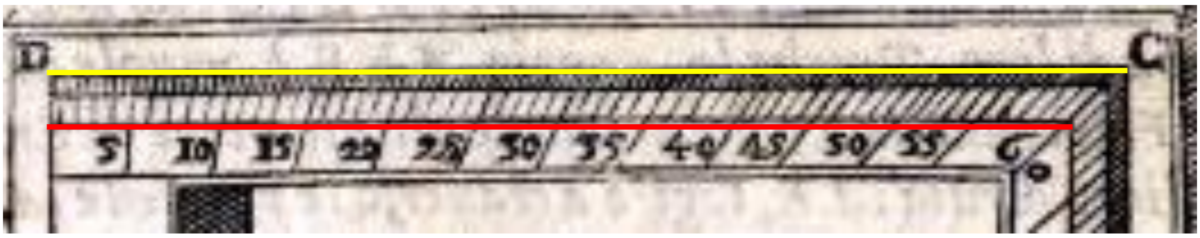


Figura 33 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Finé
Fonte: Fineo, 1587, p. 239.

> Pode-se finalmente redividir este primeiro exterior, ou seja, o menor intervalo destes três em duas partes iguais e cada uma dará 30 minutos das partes passadas: ou, realmente, se dividirá qualquer das 60 partes em três, e cada uma destas partes representará 20 minutos, ou se poderá dividir em 4 partes e, cada uma delas será 15 minutos e assim sucessivamente pode-se continuar dividindo a vontade, ou, segundo o tamanho e a capacidade do instrumento. No mais baixo e maior espaço das divisões de um lado e do outro se reunirão os convenientes números de um e de outro ponto B e D, de 5 em 5, indo na direção do ponto C, distribuindo-os até o 60, ou seja, 5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60, como se vê na figura da página 239. A linha que corta o quadrante se chama "Linha de Fé" (FINEO, 1587, p. 238, tradução nossa).

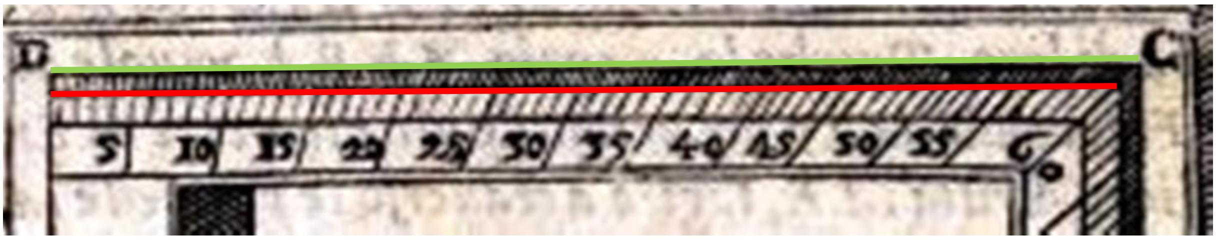


Figura 34 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Finé
Fonte: Fineo, 1587, p. 239.

Evidencia-se que, na última parte dividida, aquela de menor largura, destacada entre os segmentos da Figura 34 acima, é sugerida uma nova divisão, partindo de cada divisão anterior, em duas partes iguais, gerando assim 120 pequenos intervalos iguais. Cada uma dessas 120 partes representa para o autor 30 minutos em relação à divisão anterior, logo, obtém-se a operação 120 vezes 30 minutos, que resulta um total de 3600 minutos, a divisão de cada um dos segmentos BC e CD. De mais a mais, as instruções de Finé mostram que cada parte anterior pode ser subdividida de acordo com a "vontade" do construtor ou a limitação do tamanho do instrumento, o que implica em sua explicação, caso seja possível na construção do instrumento, por exemplo, subdividir cada parte anterior em 4 partes iguais (e não em 2, como ele mostra na ilustração do texto); então, tem-se um total de 4 vezes 60 partes, ou seja, 240 partes compõem cada um dos segmentos BC e CD. Logo, conforme a convenção adotada por Finé, cada uma dessas 240 partes representará 15 minutos de cada divisão anterior, para se obter um total de 3600 minutos, referentes aos segmentos BC e CD (240 x 15 minutos = 3600 minutos).

A explicação que segue na obra de Finé procura elucidar a "régua" ou "linha de fé":

> Fabrica-se finalmente uma régua, a guisa de demonstrador, como uma parte da linha do astrolábio[73], puxada igualmente na espessura e na largura, e plana, a qual chamaremos AF, que seja pelo menos tão longa quanto a oblíqua AC, e ainda dos quatro cantos a esquadro da mira da fé, se acomodem duas miras furadas diametralmente e os tais furos sejam muito pequenos sobre essa linha da fé como nos apresentam as letras G e H, na figura da pagina 239. Que essa linha ou régua se acomode de tal forma no centro A que se possa levar para cima e para baixo livremente, e que a linha da fé AF, puxada por meio da mira do ponto A, ou qualquer das divisões dos lados acima citados possam da mesma forma conduzir-se com facilidade e para maior compreensão dos fatos supracitados, eis a figura do supracitado quadrante geométrico (FINEO, 1587, p. 239, tradução nossa).

Na sequência, Fineo (1587, p. 239) exibe então a ilustração do seu quadrante geométrico (Figura 29) e, com a citação anterior, contendo o esclarecimento sobre a “linha de fé”, finaliza o Capítulo II[74] do seu segundo livro, da Geometria. Nota-se que a “linha da fé” é essencial ao instrumento porque servirá como uma mira, no momento da medição da altura de algum objeto, ratificando todo o processo minucioso de construção, de forma mais precisa possível, com a finalidade de obtenção de um instrumento, realmente, eficiente. Enfim, a construção do quadrante geométrico é necessária, pois é um instrumento que possibilita executar inúmeras medições, e era para Finé, como já mencionado, o melhor deles.

4.4 O USO DO QUADRANTE GEOMÉTRICO PARA CALCULAR ALTURAS: FERRAMENTAS MATEMÁTICAS E RESOLUÇÕES

O sétimo capítulo do segundo livro da geometria de Finé intitula-se “Como se medem, com o quadrante geométrico, as linhas retas que estejam sobre o plano do terreno, formando ângulos retos” (FINEO, 1587, p. 251, tradução nossa). A Figura 35 exibe uma ilustração que o autor utiliza para ajudar na compreensão do problema.

---

[73]Foi o instrumento matemático astronômico mais conhecido.
[74]Intitulado *Como se faz o quadrante geométrico comodíssimo para medidas das linhas retas*.

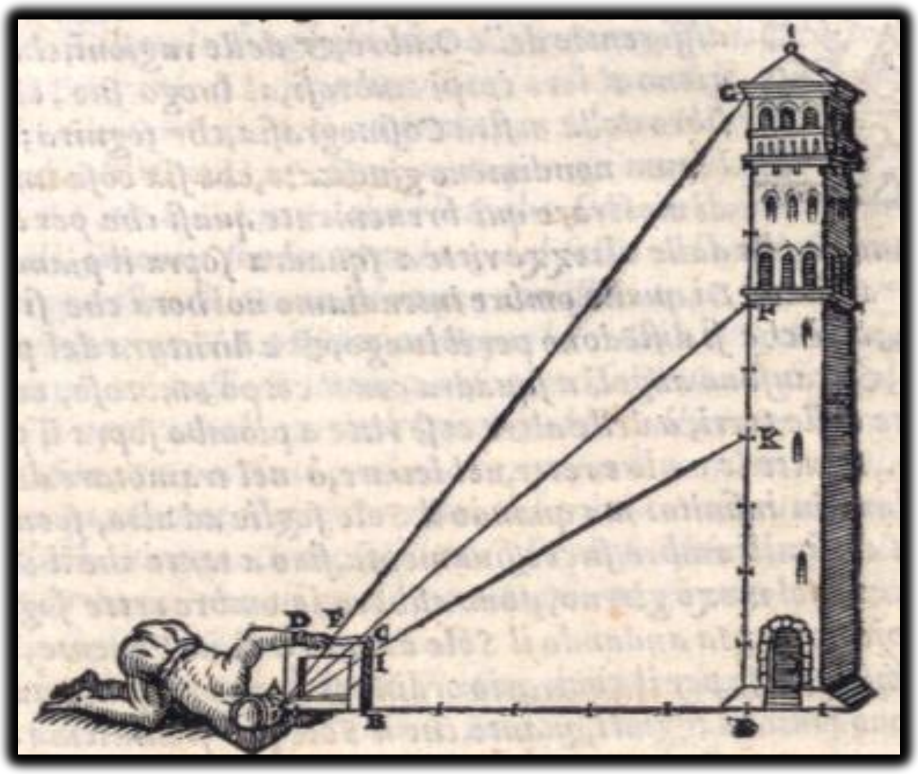


Figura 35 – Ilustração de como usar o quadrante geométrico para medir alturas de objetos verticais por Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 253).

A Figura 36 refere-se à Figura 35:

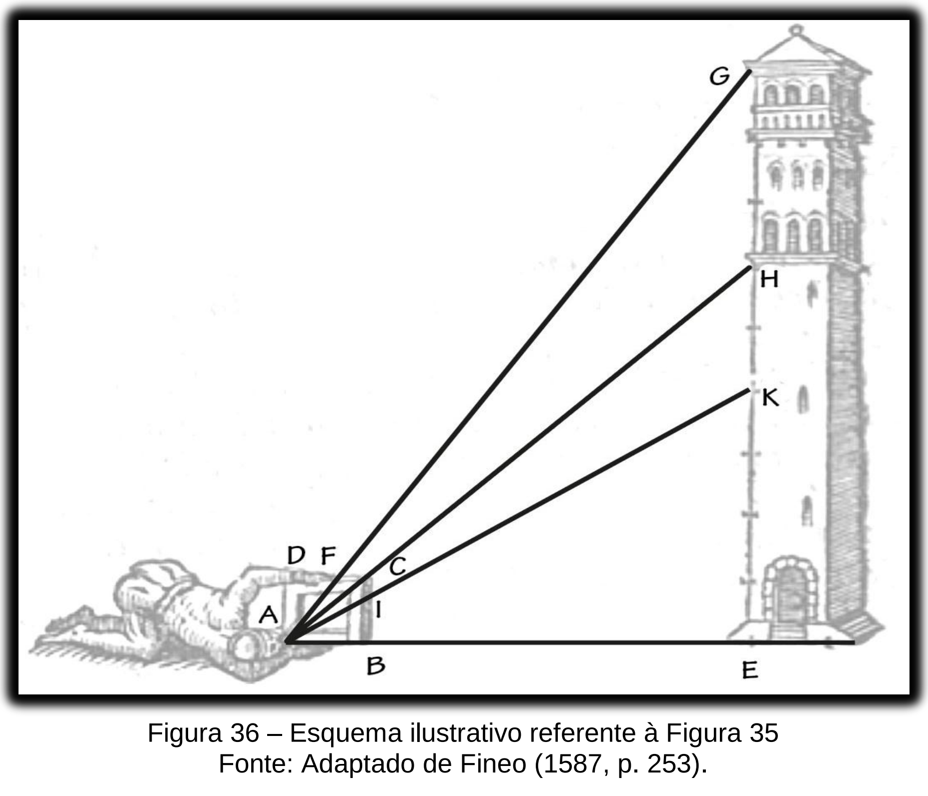


Figura 36 – Esquema ilustrativo referente à Figura 35
Fonte: Adaptado de Fineo (1587, p. 253).

Entende-se que, para resolver o problema, o medidor deve estar com o quadrante geométrico mirando a uma certa distância e se posicionar em direção à base da torre, além disso, são feitas três marcações distintas, utilizando a "linha de fé". Para compreender melhor, apresentar-se-ão os passos propostos por Finé e, em seguida, serão feitas explicações complementares ao texto original. Em primeiro lugar, Fineo (1587, p. 251, tradução nossa) propõe: "tomada a título de demonstração uma linha reta, cujo comprimento deva ser medido, que seja EG ou EH ou ainda EK para o comprimento e na direção da torre EKHG que esteja sobre um plano proposto AE na perpendicular, ou em prumo".

Segue instruindo:

> Acomoda-se então sobre o mesmo plano que lhe está em torno, o quadrante ABCD, de forma que os lados BC e CD, compartilhadas em partes, se voltem diretamente para essa linha proposta, pois que isto parece ser sempre necessário. Posto então o olho no ponto A, levanta-se ou abaixa-se esta linha contanto que o raio de visão de A, passando pelas miras, chegue ao final da linha proposta. Feito isso, observa-se a interseção dessa linha, isto é se ela baterá no lado BC ou no lado CD, visto que ela não poderá chegar a outro lugar.
>
> Diga-se, então que ela bata primeiramente no lado CD, isto é, no ponto F, e seja a linha a ser medida EG, então essa linha EG será maior do que o comprimento do plano AE e corresponderá na mesma proporção a AE, que o lado AD à parte intersectada DF. Como que se DF será 40 das partes das quais cada lado é igual a 60, porque o 60 corresponde ao 40 de *sesquialtera*[75], isto é, 40 mais sua metade, não diferentemente, a linha EG abraçará uma vez e meia a linha AE. Logo se o comprimento AE, for, por exemplo, igual a 18 cúbitos, a linha EG considerada será de 27 cúbitos. E isto se demonstra desse modo, porque os dois triângulos ADF e AEG são de ângulos iguais, por isso que o ângulo DAF é igual ao ângulo AGE, pelo 29 do primeiro livro dos Elementos de Euclides. E da mesma forma, o ângulo AFD é também igual ao ângulo EAG, visto que tanto o ângulo ADF como o ângulo AEG são retos e iguais entre si. São então de ângulos iguais os triângulos ADF e AEG, cujos lados então que estão de frente aos ângulos iguais estarão mediante a 4 enquanto que o de 6 os mesmos elementos entre eles proporcionais. Logo, como o lado AD corresponde à parte intersectada DF assim será a proposta linha EG ao comprimento do plano AE (FINEO, 1587, p. 251-252, tradução nossa).

Os passos acima são bem detalhados por Finé, e, mais ainda, estão muito bem justificados matematicamente, analisando-se a possibilidade de medir a altura EG, fazendo-se uso da semelhança entre os triângulos ADF e AGE. Pretende-se adiante

[75]Palavra que não foi possível traduzi-la, porém, não alterará o sentido do texto.

explicar alguns pontos que poderão gerar algum tipo de dúvida para o leitor, em relação à leitura das instruções contidas na citação anterior.

Primeiro, fica claro observar que a medida AE (do vértice do quadrante geométrico, do qual parte a “linha de fé”, até a base da torre) é acessível. Nesse caso acima referido, o objetivo é obter a medida da altura EG, da base ao cume da torre.

Outro item interessante é quando se utiliza a mira do quadrante geométrico, isto é, a “linha de fé”, então, o autor, supondo que ela seja mirada no topo da torre e que intersecta o lado CD do quadrante no ponto F, afirma que tal segmento EG será maior do que o segmento AE. Contudo, isso só pode ocorrer por ser assumida a seguinte propriedade geométrica de desigualdades nos triângulos: “Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado” (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 55). Como, por hipótese, a mira com a “linha de fé” intersecta o lado CD até atingir o topo da torre, o ângulo $E\hat{A}G$ é maior do que 45°. Considerando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, que o triângulo AGE é retângulo em $A\hat{E}G$ = 90°, tem-se que a soma dos outros dois ângulos $E\hat{A}G + A\hat{G}E$ = 90° e, como o ângulo $E\hat{A}G$ é maior do que 45°, o ângulo $A\hat{G}E$ será menor do que 45°. Sendo assim, $E\hat{A}G$ > $A\hat{G}E$, e, portanto, como afirma Finé, EG > AE, ou seja, o segmento EG será maior do que o segmento AE.

Destaca-se um problema interessante tratado por Finé, o de medir o declive do monte, não no sentido de inclinação, mas referindo-se à medida (em comprimento) do “pé” ao “topo” do monte. Fineo (1587, p. 271, tradução nossa), considerando esse problema no décimo quarto capítulo do seu segundo livro da Geometria e o intitulando assim: “Como mediante o mesmo quadrante se mede o comprimento de um declive de um monte”. Este problema aparece primeiro, porque, logo após, o autor descreve os passos de resolução para os problemas de cálculos de alturas de objetos sobre montes, valendo-se do mesmo e de outros instrumentos apresentados por ele no texto.

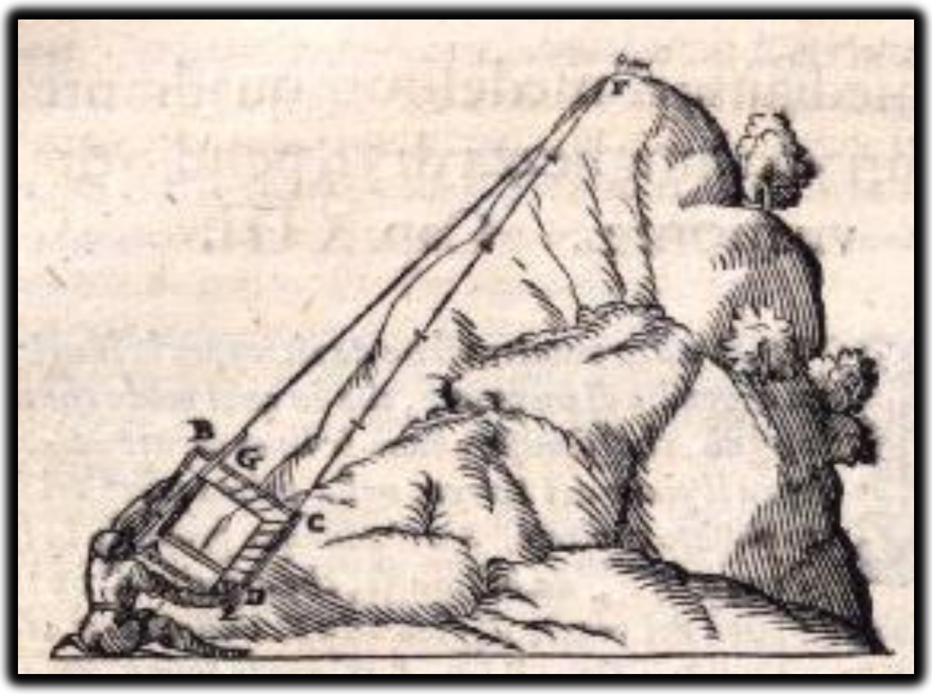


Figura 37 – Ilustração de como usar o quadrante geométrico para medir a declividade de um monte por Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 272).

A Figura 38 refere-se à Figura 37:

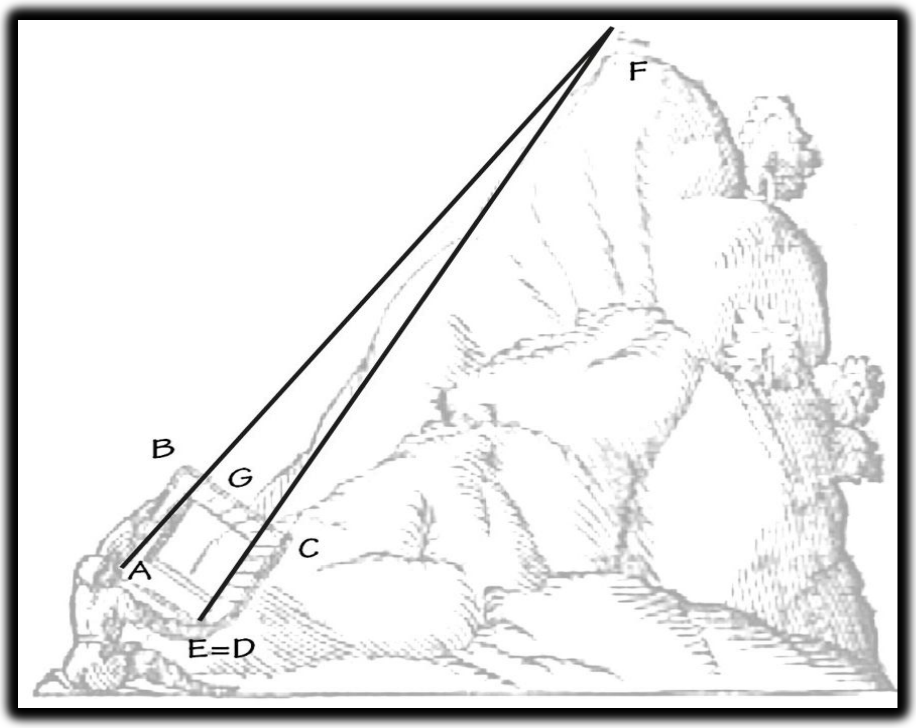


Figura 38 – Esquema ilustrativo referente à Figura 37
Fonte: Adaptado de Fineo (1587, p. 272).

A Figura 38 ilustra o manuseio do quadrante geométrico para a obtenção da medida do declive do monte. Para a compreensão do texto, propõem-se, inicialmente, as instruções de Fineo (1587, p. 271, tradução nossa):

> Não de outra forma se encontrará o comprimento ou declive de um monte ou montanha, senão por aquele que já foi ensinado, ou seja, medindo as linhas retas adjacentes sobre o plano do terreno, na primeira parte do capítulo passado. Seja-nos proposto o comprimento EF, a ser medido, que na forma de um telhado esteja encostado no cume do monte F, até E. Emprega-se então o quadrante ABCD sobre o lado CD no sentido do comprimento e também EF pondo o ângulo D, no ponto E e, voltando o lado BC, como de costume, para o ápice F, como dito acima. E olhando para o ângulo A, levanta ou abaixa tanto a linha da fé que o raio de visão passando pelos furos de ambas as miras chegue a F. Feito isso, se considera onde a linha atinja o lado BC; e tal acontece no ponto G. Nesta proposição então, que corresponderá o lado AB à parte BG, corresponderá ainda o comprimento EF ao lado AD. Sendo assim, os dois triângulos ABG e AEF são de ângulos iguais entre si, e os lados internos aos ângulos iguais, são proporcionais, como na seção acima demonstramos.

Com outro esquema, elaborado a partir da Figura 37, pretende-se auxiliar na compreensão do processo de encontrar a medida do declive do monte. Por certo, observando a Figura 39 e as instruções apresentadas na citação acima, pode-se concluir que o problema propõe encontrar a declividade (ou comprimento) do monte, representado naquele esquema pelo segmento EF.

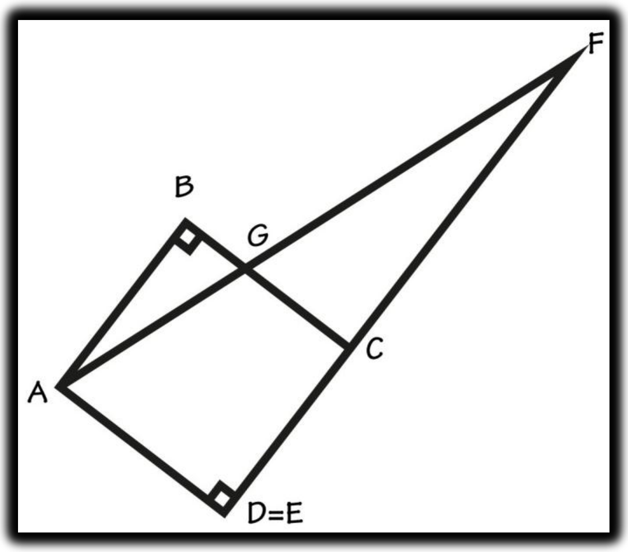


Figura 39 – Esquema ilustrativo da Figura 37

Procura-se, então, explicar as orientações firmadas por Finé, deduzindo-se da citação acima. Com efeito, tendo sido determinado o “segmento imaginário” EF do qual se deseja encontrar a medida, utiliza-se então o quadrante geométrico de modo que um dos lados dele, nesta situação, o CD esteja na mira do comprimento EF e também propõe que um dos vértices do quadrante, no caso, o D, coincida com o ponto E. Com essa convenção, o lado BC fica voltado para o cume do monte, designado por F.

Depois, fazendo o uso da "linha de fé", mirando-a no ponto F, marca-se o ponto G sobre BC e obtêm-se dois triângulos semelhantes, quais sejam: ABG e FEA. De fato, os ângulos $A\hat{B}G$ e $F\hat{E}A$ são congruentes, pois são retos, além disso, pelo fato de os segmentos AB e EF serem paralelos e o segmento AF, transversal a eles, logo, os ângulos alternos internos $B\hat{A}G$ e E$\hat{F}A$ são congruentes. Dessas duas congruências, conclui-se a semelhança dos triângulos ABG e FEA. Assim é possível a proporção:

$$\frac{AB}{BG} = \frac{EF}{EA}.$$

Como são conhecidas as medidas dos segmentos AB, BG e EA = AD, obviamente descobre-se a medida do declive do monte EF.

O autor ainda exemplifica com dados numéricos:

> Seja, por exemplo, BG igual a 10 daquelas partes das quais todo lado do quadrante é igual a 60, porque 60 corresponde a dez de proporção dos seis tantos. Do mesmo modo, o comprimento proposto EF será 6 vezes o comprimento AE, no caso, AD, lado do mesmo quadrante, donde, se o lado do quadrante for três cúbitos**,** o mesmo comprimento EF será de 18 cúbitos (FINEO, 1587, p. 271, tradução nossa).

Reconhece-se aí que a maior preocupação do autor é, realmente, a de "transmitir" as instruções para quem deseja resolver um problema como esse. A fundamentação matemática existe, mas está implícita. Ademais, a apresentação de um exemplo numérico reforça a ideia de esclarecer cada um dos passos de resolução do problema.

O último problema de Finé, selecionado para fazer parte deste trabalho, emprega em sua resolução o resultado do problema anterior, de calcular o comprimento do declive de um monte. Ele se refere ao décimo quinto capítulo do segundo livro da Geometria e trata de resolver o seguinte problema: "Como a altura das linhas retas que estejam postas eretas em cima de um monte são medidas com um ou com outro quadrante geométrico”. Fine (1587, p. 272, tradução nossa) propõe a torre EF a ser medida sobre o monte denotado por AE (comprimento do declive do monte), supondo que o medidor esteja situado ao pé do monte. Apresenta as instruções, explicando detalhadamente, como resolver o problema:

> Toma-se então o comprimento AE entre o pé do monte e a base da torre, como ensinado no capitulo anterior, o qual seja, por exemplo, 18 cúbitos. Feito isto, se acomoda o quadrante no ponto A, com o lado AD, voltando o lado CD do mesmo quadrante para a torre EF. Levanta-se ou abaixa-se a linha[76] contanto que passando o raio de visão por ambos os furos da mira chegue ao vértice F. Mantendo fixa a linha deste modo, deixa-se cair um fio conduzido da mesma linha do qual parte sobre o lado AD, assim também à GF, e que divida este lado AD, no ponto H, isto é, no meio entre a A e D. Mede-se então a parte do fio GH, a parte compreendida pela linha e pelo lado AD, distendendo a mesma parte GH do fio sobre o lado BC pela extensão, ou então sobre o lado CD. A proporção então que terá a parte entrecortada AH na parte do fio HG, a terá ainda entre o comprimento do declive do monte e a altura da torre EF, já que os dois triângulos AHG e AEF, são de ângulos iguais entre si, mediante o anexo 29 do primeiro dos Elementos de Euclides. E porque o ângulo AHG é igual ao interno do mesmo lado AEF, intervem por 4 do sexto do mesmo Euclides que como AH corresponde a HG, assim o faz AE a EF, que é a altura da torre proposta.

A Figura 40 é a ilustração referente ao problema de calcular a altura de um objeto vertical sobre um monte.

Figura 40 – Ilustração de como usar o quadrante geométrico para medir a altura de um objeto vertical sobre um monte por Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 273).

[76]Refere-se à linha de fé do quadrante geométrico.

A Figura 41 refere-se à Figura 40:

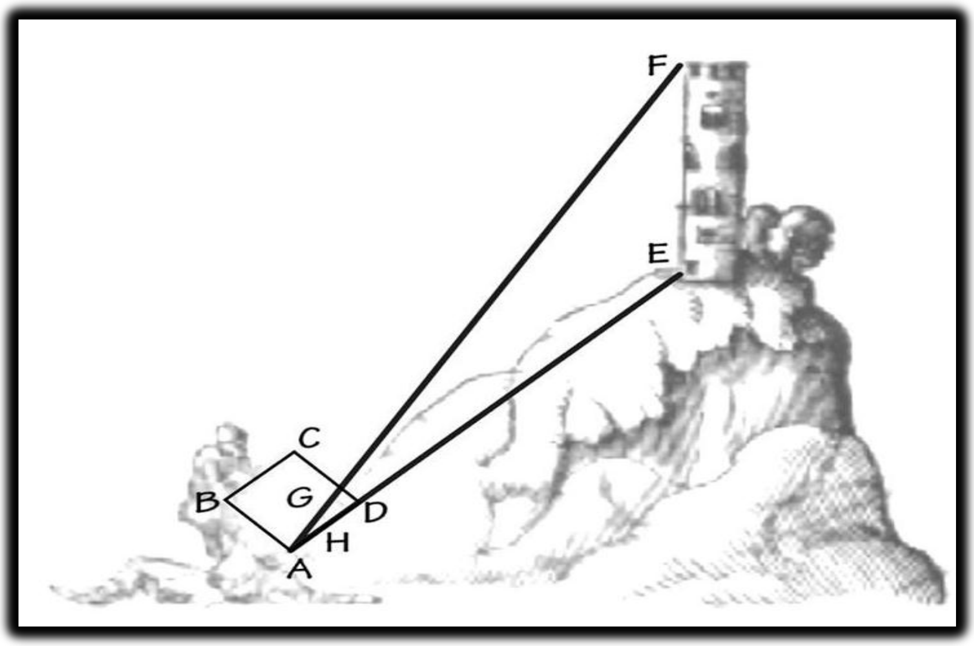


Figura 41 – Esquema ilustrativo referente à Figura 40
Fonte: Adaptado de Fineo (1587, p. 273).

Observa-se a utilização da geometria euclideana por Finé, para explicar o processo de encontrar a altura da torre em cima do monte. Ao construir o triângulo AGH, semelhante ao triângulo AFE, com o auxílio do quadrante geométrico, e tendo como hipótese já ser conhecido o processo de medir o comprimento do declive do monte, medir a altura da torre sobre o monte torna-se simples. Com efeito, o segmento GH é construído paralelamente à torre EF, ou, de modo análogo, perpendicular ao plano (que é o chão), sendo assim, são congruentes os ângulos $A\hat{G}H$ e $A\hat{F}E$ e os ângulos $A\hat{H}G$ e $A\hat{E}F$. Do caso de semelhança entre dois triângulos (bastam dois ângulos serem congruentes entre si), tem-se a seguinte proporção:

$$\frac{AH}{HG} = \frac{AE}{EF}.$$

Conhecendo-se as medidas AH, HG e AE (comprimento do declive do monte), facilmente se encontrará a medida da altura da torrre EF.

Como é de praxe, o autor propõe um exemplo numérico em que AH = 30 e HG = 15. Destarte, Fineo (1587) considera que a razão entre AH e HG é 2, e portanto, o comprimento AE será o dobro de EF, ou seja, a altura proposta da torre será de 9 cúbitos. Esclarece ainda que “do que se quiser tornar mais clara a experiência da regra da quarta proporcional, multiplica-se 18 por 15 e terá 270, número que, dividido por 30, dará o número 9” (FINEO, 1587, p. 273, tradução nossa).

Interessante destacar que Fineo (1587) ainda levanta uma questão: como resolver o problema de medir a altura de uma torre sobre um monte, considerando que o mesmo fosse muito irregular e/ou cheio de precipícios, como se pode observar na Figura 42?

Figura 42 – Ilustração de como usar o quadrante geométrico para medir a altura de um objeto vertical sobre um monte irregular por Oronce Finé
Fonte: Fineo (1587, p. 273).

Não será realizada a exposição detalhada como feita para os problemas anteriores. Optou-se por explicar, apenas, a ideia fornecida por Finé para a resolução desse problema particular, pois, nesse caso, o autor usa outro instrumento de medida, o quadrante num quarto de círculo que não foi aprofundado neste trabalho. Segundo Fineo (1587), é mais conveniente que esse instrumento seja usado para solucionar o último problema proposto, porque, no capítulo nove do segundo livro de sua Geometria, ele já havia resolvido o problema de calcular a altura de um objeto vertical, reconhecendo o quadrante num quarto de círculo, mostrando a alternativa de uso de outro instrumento, apesar de ter sua preferência pelo quadrante geométrico. Isso auxiliaria o processo de solução, no caso da altura, a ser calculada, estar sobre um monte irregular, do qual não se pode chegar à base.

Admitindo-se que já são conhecidos os passos para resolver esse problema, para calcular a altura da torre sobre o monte irregular basta que eles sejam repetidos duas vezes. Uma vez para encontrar a medida da altura do monte, e a outra vez, para encontrar a altura entre a base do monte e o topo da torre. No caso, em referência à Figura 42, primeiro calcula-se GH (onde G representa a base da torre e H, o pé do monte) e depois, FH (F representa o cume da torre). A altura da torre será, então, a diferença entre as medidas dos segmentos FH e GH, como era o objetivo do problema.

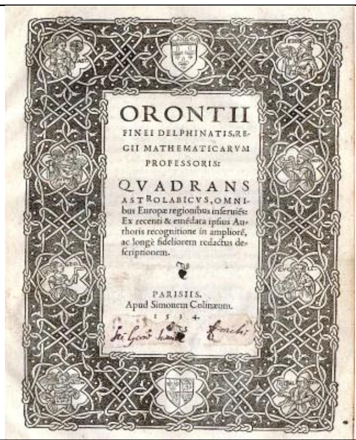
Entende-se que Finé procura em seu trabalho demonstrar as várias possibilidades de uso de instrumentos de medidas para resolver problemas geométricos práticos do seu tempo. Dentro das análises realizadas, suas instruções, apesar de usarem ferramentas matemáticas elementares, são detalhadas e o autor preocupa-se, constantemente, em oferecer ao leitor situações extras que podem surgir ao resolver determinado problema. Como é o caso de calcular a altura de uma torre sobre um monte, Finé considera o caso de um monte “normal” e o caso de um monte ser muito irregular, com precipícios. Os exemplos numéricos também contribuem para tornar mais claro o processo de resolução formal de cada problema.

4.5 REVISITANDO FINÉ

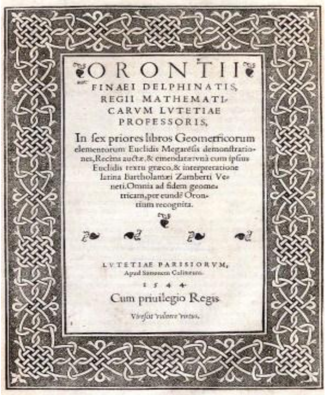
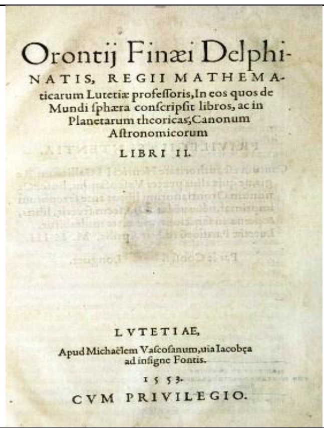
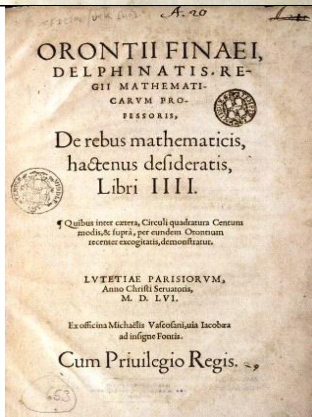
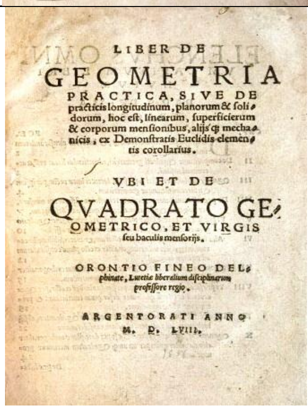
O trabalho de Oronce Finé teve grande repercussão na época de publicação, tanto que sua obra mais importante, a *Protomathesis*, foi publicada em latim, em 1532, na mesma época em que assumiu a cadeira de lente na Faculdade Real de Paris. Traduzida e publicada em 1587, por Cosimo Bartoli, 55 anos após a primeira aparição, é a obra italiana em que se faz a análise principal nesta pesquisa. Cabe registrar que Bartoli publicou uma obra em 1564, em que o primeiro livro segue a sequência proposta por Oronce Finé.

Para se ter uma ideia da quantidade de obras publicadas por Oronce Finé, existem nove títulos disponíveis para acesso digital, que foram obtidos e estão elencados. Os títulos e respectivos anos de publicação apresentam-se na Tabela 3 abaixo:

TABELA 3 – LISTA DE TÍTULOS PUBLICADOS POR ORONCE FINÉ[77]

Título	Folha de rosto[78]	Ano de Publicação
Qvadrans astrolabicvs, omnibus Europae regionibus inseruies: ex recenti et emedata ipsius authoris recognitione in ampliore, ac longè fideliorum redactus descriptionem		1534
Arithmetica practica, libris qvatuor absoluta, omnibus qui Mathematicas ipsas tractare volunt perutilis, admodumque necessaria: ex nouissima authoris recognitione, amplior, ac emendatior facta		1542
De mundi sphaera, siue Cosmographia, primave astronomiae parte: libri V		1542

[77]Estas obras estão disponíveis para acesso digital no site do Instituto Max Planck da Alemanha. Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/home/search?searchSimple=Fine%2C+Oronce>. Acesso em: 03 jun. 2012.
[78]A fonte das imagens das folhas de rosto dos livros de Oronce Finé é também o site do Instituto Max Planck (o mesmo citado na nota de rodapé 76).

In sex prioris libros geometricorum elementorum Euclides Megarensis demonstrationis	 ORONTII FINAEI DELPHINATIS, REGII MATHEMATI- CARVM LVTETIAE PROFESSORIS, In sex priores libros Geometricorum elementorum Euclidis Megarēsis demonstratio- nes, Recēns auctæ, & emendatæ, vnà cum ipsius Euclidis textu græco, & interpretatione latina Bartholamæi Zamberti Ve- neti. Omnia ad fidem geome- tricam, per eundē Oron- tium recognita. LVTETIAE PARISIORVM, Apud Simonem Colinæum. 1544 Cum priuilegio Regis Virescit vulnere virtus.	1544
In eos quos de Mundi sphaera conscripsit libros, ac in planetarum theoricas, canonum astronomicorum libri II	 Orontij Finæi Delphi- NATIS, REGII MATHEMA- ticarum Lutetiæ professoris, In eos quos de Mundi sphæra conscripsit libros, ac in Planetarum theoricas, Canonum Astronomicorum LIBRI II. LVTETIAE, Apud Michaëlem Vascosanum, uia Iacobæa ad insigne Fontis. 1553. CVM PRIVILEGIO.	1553
De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII: quibus inter caetera, Circuli quadratura Centrum modis, et suprà, per eundem Orontium recenter excogitatis, demonstratur	 ORONTII FINAEI, DELPHINATIS, RE- GII MATHEMATI- CARVM PRO- FESSORIS, De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII. Quibus inter cætera, Circuli quadratura Centum modis, & suprà, per eundem Orontium recenter excogitatis, demonstratur. LVTETIAE PARISIORVM, Anno Christi Seruatoris, M. D. LVI. Ex officina Michaëlis Vascosani, uia Iacobæa ad insigne Fontis. Cum Priuilegio Regis.	1556
Liber de geometria practica: sive de practicis longitudinum, planorum & [et] solidorum hoc est, linearum, superficierum & [et] corporum mensionibus alijsque mechanicis, ex demonstratis Euclidis elementis corollarius ; vbi [ubi] et de quadrato geometrico, et virgis seu baculis mensorijs [mensoriis]	 LIBER DE GEOMETRIA PRACTICA, SIVE DE practicis longitudinum, planorum & soli- dorum, hoc est, linearum, superficierum & corporum mensionibus, alijsque mecha- nicis, ex Demonstratis Euclidis elemen- tis corollarius. VBI ET DE QVADRATO GE- OMETRICO, ET VIRGIS seu baculis mensorijs. ORONTIO FINEO DEL- phinate, Lutetiæ liberalium disciplinarum professore regio. ARGENTORATI ANNO M. D. LVIII.	1558

De solaribus horologiis, & quadrantibus libri quatuor	 ORONTII FINEI DELPHINATIS, REGII MATHEMATICARVM PROFESsoris, de solaribus Horologiis, & Quadrantibus, Libri quatuor. Sequens pagina summa librorum capita tibi expediet. PARISIIS, Apud Gulielmum Cavellat, in pingui Gallina, ex adverso collegii Cameracensis. 1560.	1560
Opere di Orontio Fineo del Delfinato: diuise in cinque parti; arimetica, geometria, cosmografia, e oriuoli et gli specchi	 OPERE DI ORONTIO FINEO DEL DELFINATO: Diuise in cinque Parti; Arimetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli, TRADOTTE Da Cosimo Bartoli, Gentilhuomo, & Academico Fiorentino. Et gli Specchi, Tradotti dal Cavalier Ercole Bottrigaro, Gentilhuomo Bolognese. Nuovamente poste in luce: CON PRIVILEGIO. In Venetia, Presso Francesco Franceschi Senese. 1587	1587

Fonte: Instituto Max Planck.

Além dessas, encontrou-se também uma edição francesa já mencionada no texto, que foi traduzida e publicada por Oronce Finé em 1556. Ela trata da sua geometria prática, uma parte da *Protomathesis*.

Outro aspecto importante a se destacar é que, em seus textos ilustrados, Oronce Finé, apesar de francês, obteve influência do estilo de impressão alemão ao fazer gravações em folhas talhadas em cobre, e ao criar moda enriquecendo seus livros com margens geométricas contendo temas alegóricos, como explorado no início deste capítulo.

É notável mencionar que tomando, por referência, a geometria de Oronce Finé, em especial, seu texto que trata da construção dos instrumentos, percebe-se a articulação que existe entre a construção e o uso dos instrumentos. Na verdade, o texto não pode ser descrito como um manual do tipo "faça você mesmo", e pode-se observar que ele estava destinado a um público que tinha, obviamente conhecimentos não apenas da geometria implícita à construção do instrumento, no caso, o quadrante geométrico, mas também da prática do ofício. Por exemplo, Fineo

(1587, p. 238, tradução nossa) fornece ações para a construção do quadrante geométrico:

> Divide-se consequentemente os lados BC e CD em 12 partes iguais entre elas, e partindo do ponto A, acomodando a régua no ponto escolhido das divisões se puxam suas pequenas linhas, das ínfimas paralelas de dentro por esses intervalos até os citados lados BC e CD [...].

Elas são somente apresentadas em forma de instrução, exigindo do leitor que ele cumpra as tarefas, porém, é preciso que saiba executá-las, para que o instrumento funcione corretamente, quando utilizado.

Em todos os problemas de alturas analisados na geometria de Oronce Finé não foram detectados erros matemáticos no processo de resolução. Ratifica-se isso, pois, no decorrer da análise, procurou-se sempre fazer o detalhamento e as justificativas matemáticas que estão implícitas às menções do autor, tendo sido possível concluir que os resultados apresentados por Finé estavam corretos. Em síntese, expõe-se, a seguir, uma análise geral sobre o problema de fazer a medição da altura de um objeto, especificamente na obra de Fineo (1587), segundo alguns aspectos especiais.

Ao atentar para os enunciados dos problemas/capítulos da Geometria de Finé, fica claro que o autor fornece apenas um título geral para cada problema. Por exemplo: “Como se medem, com o quadrante geométrico, as linhas retas que estejam sobre o plano do terreno formando ângulos retos” (FINEO, 1587, p. 251, tradução nossa). E, com base nos enunciados é que ele apresenta, como lhe convém, outras situações ou casos particulares desses problemas, propondo inclusive, exemplos numéricos.

A linguagem empregada para apresentação dos problemas pode ser dita como natural, assemelhando-se a um diálogo, é retórica. Por exemplo, pode-se citar a parte final da resolução do último problema evocado na seção anterior, aquele de medir a altura de uma torre localizada sobre um monte irregular, utilizando-se do quadrante num quarto de círculo:

> Examina-se então a altura FH, gerada do monte GH e da altura da torre, de acordo com o que foi ensinado no mesmo nono capitulo. E seja de novo OQ

> segundo a primeira operação, ou NP, junto com aquela perpendicular DN ou DP, de acordo com a segunda operação, igual a FH,e tanto uma como outra sejam de 18 varas, e deixe-se que a altura proposta da torre FG seja de 6 varas. Tudo isso, mediante o capítulo 9 e junto com a figura que se segue é muito claro e suficiente para exemplo semelhante e assim feito às observações (FINEO, 1587, p. 274, tradução nossa).

O uso do simbolismo matemático/geométrico fica a cargo da nomenclatura usada para referência de um segmento de reta, como por exemplo, “[...] seja a linha a ser medida EG, então essa linha EG será maior do que o comprimento do plano AE [...]” (p. 251, tradução nossa), e também para o caso de indicação de um ângulo. Evidentemente, Finé (1587, p. 251, tradução nossa) afirma que “[...] e da mesma forma, o ângulo AFD é também igual ao ângulo EAG, visto que tanto o ângulo ADF como o ângulo AEG são retos e iguais entre si [...]”.

Para cada problema prático da parte da Geometria, Finé expõe uma ilustração que simula a realidade. Cada ilustração é rica em detalhes, demonstrando não apenas um esquema explicativo, mas a imagem, simulando a realidade da situação que o problema/capítulo apresenta, incluindo o objeto a ser medido, o instrumento, uma paisagem e o medidor. Como mencionado no início deste capítulo, o uso das ilustrações foram importantes para Finé, tendo usado, provavelmente, técnicas de gravados em cobre em suas obras.

No processo de resolução dos problemas analisados, a maior preocupação do autor demonstra ser, realmente, a de “transmitir” as instruções passo a passo para quem deseja resolver um problema como aqueles discutidos anteriormente. A fundamentação matemática/geométrica existe, mas está implícita. A apresentação de um exemplo numérico corrobora fortalece a ideia de esclarecer cada um dos passos de resolução do problema. Como ferramentas matemáticas, Finé lança mão da semelhança de triângulos e também de uma propriedade geométrica de desigualdade triangular, porém, sem dar justificativas, como já mencionado, apenas salientando para o leitor que ele se baseia exclusivamente dos resultados euclidianos para fundamentar, corretamente, suas resoluções.

Quanto aos instrumentos de medição, Finé propõe o uso do quadrante geométrico, o seu instrumento preferido, dedicando um capítulo especial para tratar da construção do mesmo, embora considere ainda, em sua obra, outros instrumentos de medida como o quadrante num quarto de círculo, o esquadro e o báculo.

Finé viveu na primeira metade do século XVI, no período classificado normalmente como *Cinquecento*, o qual, conforme Jaguaribe (2001, p. 458), representou uma extensão “das grandes tendências intelectuais e artísticas do século precedente”, no caso, época do início do tempo do Renascimento, além de ter ocorrido uma “mudança profunda no sistema internacional”. (JAGUARIBE, 2001).

Nesse tempo vivido por Finé, o espírito do Renascimento italiano irradiava sobre a França. Segundo Braudel (2007), os pintores foram os primeiros a sentir a influência italiana. Os livros italianos exportados auxiliaram a divulgar na França o estilo de vida italiano, e a moda arquitetônica do detalhe atingiu a França, também pela ascendência italiana. “Na França, a Renascença italiana e antiga, ao menos na arquitetura, foi mais aceita em qualquer outro país da Europa” (BRAUDEL, 2007, p. 90).

A presença das ilustrações nos problemas analisados na Geometria de Finé fornece indícios que, nesse tempo como no de Alberti, perdurava a preocupação com a resolução de problemas práticos que incluíam situações reais da época, como as construções de fortificações e de poços de água. Na intenção de compreender os textos e os contextos dos problemas de medição de alturas no tempo do Renascimento, o próximo autor, analisado nesta pesquisa, o italiano Ottavio Fabri, com objetivos similares aos de Oronce Finé, propôs a resolução de problemas práticos da época em que viveu, como os de medir alturas de objetos, no entanto, adota outro instrumento de medida para isso, o esquadro móvel. Uma distinção básica entre esses dois autores é que Finé assumiu ser professor de matemática, tendo feito isso até a sua morte. Fabri tinha gosto especial pela matemática, mas por ter trabalhado para o governo italiano em construções de aquedutos e ter sido grande comerciante, certamente contribuiu para a elaboração de uma obra ligada aos problemas que precisavam ser resolvidos naquele tempo em que viveu. Isso está de acordo com a ideia de que cada sociedade cria seus problemas conforme sua capacidade de resolvê-los.

5 OTTAVIO FABRI: O PROBLEMA DE CALCULAR ALTURAS E O USO DO ESQUADRO MÓVEL (*ZOPPA*)

5.1 OTTAVIO FABRI

Ottavio Fabri viveu na segunda metade do século XVI em Veneza, na Itália, foi um personagem importante na sociedade veneziana, em virtude da sua atividade como comerciante e colecionador de artes e, devido à sua formação matemática e científica, tornou-se um importante técnico do governo veneziano. Isso contribuiu para que ele fosse um profissional ligado à engenharia[79] do século XVI, em conexão com o desenvolvimento de conhecimentos teóricos (bem como habilidades práticas) de muitos dos especialistas (ou peritos) (PANEPINTO, 2008/2009).

Não foi possível encontrar trabalhos em português sobre Ottavio Fabri, entretanto, por conta da sua relevância na Itália, ele já foi digno de investigação com respeito à sua biografia e, principalmente, às suas contribuições profissionais ao país. De fato, obteve-se acesso a uma tese de autoria de Emanuele Panepinto, datada de 2008/2009, intitulada *Ottavio Fabri, perito et ingegnero publico*[80] a qual aborda aspectos importantes da sociedade italiana à época de Ottavio Fabri e, em especial, as contribuições deixadas por esse perito e engenheiro.[81]

A tese de Emanuele Panepinto é composta de quatro capítulos, além da *Introdução* e da *Conclusão*:

---

[79]O termo *engenheiro* já era usado desde o século XVII com a acepção de quem era capaz de fazer fortificações e engenhos bélicos. A função de engenheiro confundia-se também com a do arquiteto e a do construtor. Antes desse tempo, houve muita gente que se ocupou de diversas tarefas que hoje são atribuições dos engenheiros e, estão aí para comprovar as inúmeras e magníficas construções e outras obras de engenharia, desde a Antiguidade (TELLES, 1984). No caso de Ottavio Fabri, sua referência como engenheiro neste trabalho refere-se às suas atividades ligadas às construções na Itália da segunda metade do século XVI.
[80]Referência completa:
PANEPINTO, Emanuele. **Ottavio Fabri, perito et ingegnero publico**. Tese (Laurea Specialistica in Storia e Geografia dell'Europa – Indirizzo Geografico) – Facolta' di Lettere e Filosofia, Universita' Degli Studi di Verona, Verona, 2008/2009.
[81]Todas as contribuições da tese de Emanuele Panepinto a esta pesquisa referem-se à tradução nossa, do italiano para o português. Além disso, a denominação *engenheiro* é como a proposta no início da tese.

- No capítulo I, intitulado *Gestão e governo do território de Veneza*[82], é tratada a gestão e o governo veneziano entre o período medieval e o Renascimento;
- No capítulo II, intitulado *Biografia*, é revelado o perfil biográfico de Ottavio Fabri, com foco em suas qualidades de perito e engenheiro público.
- No capítulo III, cujo título original é *Ambito teorico*, a autora considera primeiramente o processo de produção da obra *O uso do esquadro móvel*[83] por Ottavio Fabri, a invenção do instrumento de medida (o esquadro móvel), apresentando uma breve análise do texto e, por fim, faz uma análise de outras supostas obras que Fabri poderia ter escrito, mas, devido às dificuldades financeiras, nunca as teria publicado. Na segunda parte do capítulo, faz referência à elaboração do projeto e à construção da Ponte de Rialto[84] e apresenta uma discussão do envolvimento de Fabri como perito e engenheiro nessa empreitada.
- No capítulo IV, intitulado *Ambito pratico*, é realizado um estudo de quatro aspectos distintos relacionados com a prática de atuação dos peritos italianos no governo veneziano, sendo considerada ênfase especial ao perito Ottavio Fabri.

A fim de compreender a importância do autor Ottavio Fabri e da sua obra, entende-se relevante investigar o contexto social e econômico da época e do lugar em que viveu. A Itália vivida por esse autor foi um país, extremamente, importante para o desenvolvimento social europeu nos séculos XV e XVI, e as atividades prestadas por Ottavio Fabri ao governo e suas habilidades estão inerentes a esse processo. Para contribuir com esta investigação, tomou-se por base a tese de Emanuele Panepinto, no que se refere às informações biográficas, e também excertos de livros de Fernand Braudel (*O Mediterrâneo e o mundo mediterrânico na época de Filipe II* e *O modelo italiano*), reveladores dos contextos vividos por Fabri.

---

[82]Título original: *Gestione e governo del territorio di Venezia*.
[83]Título original: *L'Uso della squadra mobile*.
[84]A Ponte de Rialto é a ponte em arco mais antiga e mais famosa sobre o Grande Canal, na cidade italiana de Veneza. Ela foi formalmente, por quase 300 anos, a única maneira de atravessar o Grande Canal a pé e veio substituir várias pontes de madeira que haviam ocupado o mesmo lugar desde o século XII (tradução nossa). Disponível em: <http://www.aviewoncities.com/venice/rialtobridge.htm>. Acesso em: 01 ag. 2012.

.

Fabri fez parte de uma instituição muito importante da península itálica de seu tempo, como o *Conselho de Autoridade de* Água, além de ter sido um superintendente dos *Beni Inculti* cuja ocupação era tratar da recuperação das terras. Detalham-se as considerações a seguir, primeiro, compreendendo a relevância de cidades italianas que permearam a vida de Ottavio Fabri.

Algumas cidades da Itália, como Gênova e Veneza, se consideradas a partir do século XV até a queda da República Sereníssima de Veneza, no final do século XVIII, exerceram papéis extremamente importantes, principalmente, pela representatividade de poderio econômico das mesmas. Anteriormente a essa fase, por exemplo, Veneza explorou, prioritariamente, o poder marítimo e o comércio de sal, no entanto, negligenciou a gestão sobre o continente. Tanto que não demoraram a aumentar os fenômenos de alagamentos provocados pelos rios, ou mesmo o assoreamento da Lagoa de Veneza em virtude das características tão específicas do território veneziano (PANEPINTO, 2008/2009).

É na transição da Idade Média para o Renascimento que foi dada maior atenção ao continente veneziano. Nessa fase, a Sereníssima República de Veneza passou a cuidar mais do seu interior e, em especial dos seus problemas. Foram criados para tal fim seus próprios conselhos superiores, sendo que um dos mais famosos foi o *Conselho de Autoridade da Água*, um órgão amplo instituído em 1505. E mais, teve origem na década 1545-1556 os *Provveditori sopra i Beni Inculti*[85], que foram superintendentes (ou supervisores) que se ocupavam da recuperação das terras (PANEPINTO, 2008/2009).

Vale recorrer ao historiador Fernand Braudel e à sua obra sobre o Mediterrâneo, pois a Itália de Fabri está inserida nela. Braudel (1983) fez parte do movimento dos *Annales*, e seu trabalho contempla uma abordagem muito aprofundada da história imóvel/estrutural, assim nomeada pelo autor por ser aquela que inclui uma concepção de geografia, e que olha com atenção primordial, aos dados humanos. O foco de Braudel é o Mediterrâneo e, consequentemente, ele tratou da Itália. Com

[85]Os *Proveditori* teriam sido então instituídos para vigiarem as culturas e a drenagem das águas e promoverem as actividades agrícolas mediante a constituição das "sociedades" prediais (MOSTO apud BRAUDEL, 1983, p. 93).

efeito, Braudel (1983, p. 33) destaca que “o Mediterrâneo é duplo, pelo menos. Em primeiro lugar, é composto por uma série de penínsulas compactas, montanhosas, separadas por vastas planícies: Itália, península dos Balcãs, Ásia Menor, África do Norte, península Ibérica [...]”. Na terceira seção (*As planícies*) do primeiro capítulo de Braudel (1983), intitulado *As penínsulas: montanhas, planaltos, planícies*, há uma subseção (*As mutações a curto prazo das planícies: a Terra Firme Veneziana*), indicando os beneficiamentos dispendiosos recebidos pelos povoados das planícies a partir do século XV.

Portanto,

> aparentemente, nada há de mais razoável que o tradicional processo de beneficiação, cujo esquema se mantém inalterado ao longo de todo o século, prudente e deliberadamente copiado do antecedente, e confiado pela administração veneziana, a partir de 1566, aos *Proveditori ai beni inculti*. Cada beneficiação, cada *ritratto*, define para uma dada área de terrenos pantanosos todo um programa de obras hidráulicas: diques construídos ou a construir (*argine*), tomadas de água (*presi*), canais e regos para a distribuição de água (*scalladori*)... Por vezes os canais são utilizados por barcos, estabelecendo-se então uma portagem que parcialmente compensa as despesas [...] (BRAUDEL, 1983, p. 93).

Percebe-se a existência de um programa de obras hidráulicas que beneficiava a região das planícies. No entanto, há um alerta feito por Braudel (1983), uma reflexão crítica acerca desse beneficiamento não ter realmente contribuído de forma positiva para os camponeses e para as comunidades rurais. Isso porque os proprietários das terras beneficiadas deveriam pagar taxas pelas obras, de acordo com o tipo de terreno e, caso não pagassem dentro do prazo, tinham metade de seus bens embargados.

Mesmo sabendo da existência desse grande sistema de cobrança de taxas, relativos aos beneficiamentos obtidos nas construções de diques (ou outras) pelos administradores, o historiador Braudel vê um mistério no processo de conhecimento da verdadeira condição dos camponeses e proprietários venezianos, no século XVI. Braudel (1983, p. 95) alerta: “sabemos apenas que os camponeses venezianos se endividam, que a estrutura econômica se mantém frequentemente no arcaísmo, que as terras comunitárias se reduzem...”.

O modelo italiano de Fernand Braudel é classificado na sua *Introdução à edição brasileira* como um trabalho designado a proporcionar um panorama geral do apogeu da Itália dos séculos XV ao XVII e que serve até hoje de inspiração para estudos das relações entre a história da arte e a história total[86]. Por essa razão e por tal tema coadunar-se com esta investigação, vale considerá-lo com atenção especial. Para Braudel (2007, p. 19), essa glória italiana ocorreu em três momentos. O último deles foi "a segunda Renascença, no sentido corrente e amplo da palavra, que se expandiu da metade do século XV até o início, ou melhor, até a metade do XVII". Nesse período, viveu o perito e engenheiro italiano Ottavio Fabri, cuja obra *O uso do esquadro móvel* é objeto de estudo neste trabalho. Portanto, há uma coerência em compreender o mundo italiano daquela época, objetivando compreender melhor Ottavio Fabri e sua abordagem nos problemas práticos de matemática.

Com a finalidade de revelar e entender a vida e o trabalho de Ottavio Fabri, Panepinto (2008/2009) levou em consideração as centenas de cartas topográficas que ele fez, sua escrita autobiográfica, a obra *L'Uso della Squadra Mobile* (1598) e várias cartas de outras personalidades do século XVI, que contribuíram para ser feito um aprofundamento das relações entre os diversos engenheiros, que viveram no Renascimento, em Veneza e no entorno da mesma. A maioria dos documentos cartográficos e dos manuscritos desses personagens foi encontrada no Arquivo do Estado de Veneza, de Verona e de Modena, como também na Biblioteca Estense de Modena.

Os documentos investigados por Panepinto (2008/2009) apontam o nascimento de Ottavio Fabri, entre 1544 e 1545, em Veneza. Quanto à sua formação profissional, existem poucas informações, mas é provável que ele tenha sido aluno de um estudioso humanista e especialista em ciências matemáticas de Treviso, o senhor Marco Antônio Gandino (1537-1587), pois o próprio Fabri, em seus textos,

[86]No *Glossário: a linguagem dos Annales*, Burke (2010, p. 148) descreve o termo *história total*, segundo vários historiadores. Braudel, "usou o termo na conclusão da segunda edição de seu *Mediterrâneo* e em vários outros estudos", no sentido de uma *história global* só possível com a existência de um processo de interdisciplinaridade, incluindo várias áreas como a sociologia, a geografia, a antropologia, entre outras. É nesse sentido que o termo *história total* está sendo considerado.

reconheceu o mérito dos ensinamentos dele, como sendo seu professor, principalmente, na área de matemática.

Possivelmente Ottavio Fabri começou a trabalhar bem jovem para a República Sereníssima de Veneza, com cerca de 18 ou 19 anos, porquanto ele mesmo relata a data do momento inicial de atuação para Veneza como o ano de 1563. Para confirmação, observa-se que, em uma de suas cartas dirigidas ao Senado de Veneza, em 16 de dezembro de 1598, ao ser enviado à área do delta do Rio Pó para fazer inspeções com a finalidade de desviar o rio, Fabri relembra que ele passara mais de vinte anos trabalhando na área, relatando as suas atividades, como: elaboração de grandes desenhos/mapas, trabalho com nivelamentos, medições e sondagens realizados muitas vezes, para serem obtidas as relações entre esses dados (PANEPINTO, 2008/2009).

Ottavio Fabri confessa, assim, o seu ambiente de trabalho de Veneza, e é nessa época, como mencionada anteriormente - final do século XVI e início do século XVII – que a Itália se vê abastada. Conforme Braudel (2007), foi nessa Itália que se criou o Barroco[87] e que influenciou toda a Europa.

> Há mais canteiros de construção, mais pintores, mais escritos do que a Itália jamais viu. E mais efervescência intelectual. E meios intelectuais mais amplos que nunca. [...] o povo inteiro discute política, cada qual levando consigo sua própria paixão [...]. Mas política e história não são tudo. Também se discutem arte, arquitetura, literatura, ciência experimental, ciência teórica... (BRAUDEL, 2007, p. 115).

Nesse contexto de mudanças, também se deu a formação e a atuação profissional de Ottavio Fabri. Segundo Panepinto (2008/2009) é provável que sua formação tenha ocorrido, com ênfase, em matemática, como também foi fundamentada em uma visão mais ampla. A justificativa é que a educação, durante os séculos XV e XVI, era desse tipo, entretanto, dentro de uma formação de âmbito econômico-comercial. Normalmente as famílias ligadas aos setores econômicos e sociais contratavam tutores para ensinar a seus filhos e que aprendessem sobre a própria

---

[87]Uma nova forma do gosto e da cultura. Movimento/estilo responsável por várias criações modernas que ultrapassam as formas religiosas que inventou. A moda do barroco “cria o teatro moderno, cria a ópera, põe-se sob o signo da investigação científica experimental, cria a ciência fundamental moderna – assinala uma era na Europa” (BRAUDEL, 2007, p. 112).

atividade mercantil. Suspeita-se que Ottavio Fabri, quando jovem, tenha recebido alguma instrução desse tipo mesmo que incipiente. O fato é que além dele ter servido à República de Veneza, trabalhou com seu irmão Tullio Fabri, atuando como mercador e comerciante, quando se tornou um dos homens mais ricos e poderosos de Veneza do século XVI.

Olhando para Ottavio Fabri nessa condição de mercador e comerciante de sucesso, reforça-se a importância de tratar de um personagem tão distinto da Itália dos séculos XVI e XVII. A relevância histórica desse país para o mundo, exatamente nesse tempo, pode ser relatada sob alguns aspectos relacionados ao espaço e à economia. De fato, segundo Braudel (1983), no final do século XVI, em relação à venda e ao transporte das mercadorias, se compreendia como mais prudente dividir as entregas por diversos trajetos e datas distintas, ou em vários navios na mesma rota. Outra estratégia era selecionar o itinerário mais curto, aquele que restituía com mais rapidez o dinheiro e o respectivo lucro. Braudel (1983, p. 423) afirma que "deste modo, no início do século XVII, os mercadores preferem as rotas terrestres venezianas em vez da cómoda rota do Pó[88]". O problema é que apesar de a rota marítima ser mais rápida do que a terrestre, ela era muito mais dispendiosa financeiramente, já que havia, pelo mar, o risco da fiscalização rigorosa e da cobrança exagerada de impostos.

Ao retomar aspectos da vida pessoal de Ottavio Fabri, Panepinto (2008/2009) constatou que ele foi casado com uma mulher chamada Orsetta, teve, pelo menos, cinco filhos, mas de apenas um deles se têm mais notícias. Chamava-se Alessandro, e foi, provavelmente, o primogênito, assumiu cargo de inspetor do *Beni Inculti*, como o pai e também trabalhou com ele.

Quanto ao falecimento de Fabri, suspeita-se que ocorreu de forma abrupta e sabe-se que foi nos primeiros meses de 1612, em Veneza. Essa conclusão é observada porque seu último trabalho, um projeto para os superintendentes do *Beni Inculti*, realizado com outro famoso perito chamado Francis Belgrado, está registrado no dia 03 de dezembro de 1611. Depois disso, seu nome só foi retomado oficialmente

[88] Trata-se aqui do Rio Pó, o maior rio italiano.

através de uma intimação, um inventário de bens, a fim de ser feito o testamento dele, em Veneza, realizado entre 30 de abril e 02 de maio de 1612 (PANEPINTO, 2008/2009).

Na convergência entre o mundo vivido por Ottavio Fabri e a história escrita por Fernand Braudel, encontra-se a cultura que, para o historiador, tornou-se, em meados do século XVI, o grande negócio, a grande indústria italiana. Braudel (2007, p. 113) relembra que "o traço mais forte é ainda a participação de uma crescente massa de italianos nesses empreendimentos ativos". Para o historiador, não é um equívoco afirmar que a difusão da Itália para outros lugares, a partir dessa época, refere-se ao movimento barroco, praticamente tomado na íntegra. Braudel (2007, p. 116) constata que o barroco "é um 'conjunto' no sentido dos matemáticos".

Considerando o movimento barroco e o período vivido por Ottavio Fabri, Panepinto (2008/2009) trata das fortes relações que ele teve com os setores literários, culturais, artísticos e mercantis de seu tempo. Primeiramente, do ponto de vista literário, seus relacionamentos importantes fizeram-se com alguns dos nomes mais importantes dos séculos XVI e XVII, como por exemplo, o famoso autor da obra *Il Pastor Fido*, o italiano Giovan Battista Guarini, que fez poemas para Fabri, além de terem convivido, no final do século XVI, na corte de Ferrara e Modena, onde Guarini, trabalhava como secretário.

No que se refere ao comércio e às comissões artísticas, é essencial destacar a colaboração ativa de Ottavio Fabri ao seu irmão Tullio Fabri. Ele exercia suas atividades para a Sereníssima República de Veneza como contador e, ao que parece claramente, combinava esse trabalho com a atividade comercial, de modo que a Ottavio Fabri, o irmão confiou a praça de Veneza para o comércio de produtos. Tullio Fabri chegou a comprar um grande navio para vir de Constantinopla para Veneza com seus abundantes bens. Tal navio também navegou pelas principais rotas do mar Mediterrâneo. Ademais, há registros dos irmãos comerciantes, fazendo negócios com ricos mercadores de Veneza. O comércio deles envolvia a venda de pedras preciosas, joias, especiarias, panos de couro, lã, seda, algodão, cera, além de trigo, em tempos de escassez (PANEPINTO, 2008/2009).

Após a morte de Tullio Fabri, em 1597, a atividade comercial dos Fabri enfraqueceu, pois não foi possível para Ottavio Fabri seguir, ao mesmo tempo, com o ramo comercial e com as suas atividades como engenheiro. Assim, Ottavio Fabri coloca, num processo de alienação, as atividades comerciais e à venda, todos os bens restantes. Entretanto, a atividade comercial, juntamente, com a prosperidade e a solidez econômica da qual Ottavio Fabri poderia se beneficiar, foi muitas vezes investida no campo da arte, tanto em termos de puro colecionismo tanto em termos comerciais. A casa de Ottavio Fabri era, de fato, adornada, como testemunham várias fontes, de obras dos mais célebres pintores e escultores da Idade Moderna e do Renascimento Italiano (e não só), tanto que há claros relatos de que sua coleção foi uma das mais ricas de Veneza do final do século XVI (PANEPINTO, 2008/2009).

Constatou-se que além das obras de arte, Ottavio Fabri possuía muitos objetos extravagantes de pedra e outros instrumentos científicos, de tal modo que é possível até afirmar que ali se encontrava um verdadeiro estudo de antiguidades, como muitas vezes aconteceu durante o século XVI. Além do mais, há outros relatos, descrevendo os bens de Ottavio Fabri, que incluíam muitos instrumentos *diometrici*[89] e matemáticos de estranha raridade, tais como astrolábios, quadrantes, raios latinos, relógios solares e noturnos, esferas, mapas-mundis, níveis, compassos e coisas similares, perfeitas e singulares. Todos esses instrumentos testemunhavam a paixão e o interesse científico de Ottavio Fabri, coroados na publicação da obra *L'Uso della Squadra Mobile* (PANEPINTO, 2008/2009).

Em síntese, a próxima seção, será dedicada a explorar, mais especificamente, a obra supracitada, a fim de conhecer o modo como Fabri resolveu alguns problemas de alturas. Já na subseção, a seguir, discutem-se a presença das ilustrações e o uso de instrumentos de medida, na obra analisada de Ottavio Fabri.

[89]Não foi possível fazer tradução deste termo ao "pé da letra", mas, suspeita-se que ele seja "de medidas".

5.1.1 As ilustrações em Fabri

Ottavio Fabri viveu na segunda metade do século XVI, sendo que a partir dessa época, os efeitos das altas dos preços na economia da Europa influenciaram nas edições dos livros ilustrados daquele tempo.

> Aproximava-se uma crise que se manifestaria na segunda metade do século XVI. O livro ilustrado deixou de renovar-se a partir de então; os autores de novos gravados se limitaram a executar cópias ruins das ilustrações anteriores. O resultado foi que se publicaram menos livros ilustrados e que, quando os editores voltaram a fazê-lo no final do século XVI, usaram não o gravado em madeira, e sim uma técnica distinta, a do gravado em cobre, o qual revela um novo estado de ânimo sobre o qual convém insistir (FEBVRE; MARTIN, 2005, p. 104, tradução nossa).

Por muito tempo, iniciando no século XV, ficou bem conhecida a arte da ourivesaria que com o uso do cinzel[90], se gravavam adornos em peças de metal, como de prata ou ouro. Técnica essa aprendida por Albrecht Dürer com o seu pai e depois aperfeiçoada para os seus gravados, sendo que o uso, neste caso, era feito com o da folha em cobre gravada que era utilizada para imprimir o papel, com auxílio de uma prensa. Conforme Febvre e Martin (2005), o gravado em cobre para as pinturas permitia reproduzir melhor o contraste entre sombras e luzes e obter traços muito finos, mas o uso desta técnica para as ilustrações nos livros, gerava algumas dificuldades, porque os textos e as lâminas com as ilustrações gravadas em cobre deveriam ser impressas separadamente, o que era um processo complexo se se desejava obter bom registro.

Inferindo-se que, no final do século XVI a técnica predominante de impressão das ilustrações era a dos gravados em cobre, observando a riqueza de detalhes das ilustrações presentes no livro de Fabri e, levando em conta que ele foi um rico e influente cidadão italiano, suspeita-se que este autor também tenha se valido dos gravados em cobre nas ilustrações de seus problemas. De todos os livros analisados, o de Fabri é o que contém ilustrações mais representativas da realidade,

[90]Lâmina de aço temperado, de que uma das extremidades é talhada em bisel, para trabalhar a madeira, o ferro, a pedra, o mármore. Disponível em: <http://www.dicio.com.br/cinzel/>. Acesso em: 26 abril 2012.

com minúcias de pormenores, num intento claro de retratar cada situação-problema proposta.

5.2 *L'USO DELLA SQUADRA MOBILE* DE OTTAVIO FABRI

De acordo com as perspectivas teóricas de Fernand Braudel e, de modo mais específico, baseando-se na tese sobre Ottavio Fabri, de Emanuele Panepinto, procurou-se construir o "terreno" para a análise de um problema de altura, tratado por Fabri, utilizando-se do instrumento esquadro móvel.

Ottavio Fabri escreveu um livro intitulado *L'Uso della squadra mobile*, que, segundo Panepinto (2008/2009), foi publicado pela primeira vez, em 1598, contendo a descrição de um instrumento topográfico, chamado esquadro móvel ou quadrado móvel ou *zoppa*[91], útil para realizar todo tipo de medição topográfica, como cálculo de alturas, distâncias e profundidades em áreas urbanas, agrimensura e mapas, como está indicado na própria folha de rosto do livro[92]. Certamente, tal obra representou um registro poderoso de toda a experiência técnica do autor, derivada do levantamento de desenhos de áreas geográficas nos mapas elaborados por ele, ao longo da vida.

A obra[93] de Ottavio Fabri, analisada neste trabalho, é uma edição de 1615 por Pietro Bertelli, como mostra a Figura 43:

[91]Manteve-se a denominação *zoppa* (em italiano) como aparece no texto original para também designar o esquadro móvel.
[92]Ver Quadro 2.
[93]Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/4KY9GTGC/pageimg&viewMode=images>. Acesso em: 03 set. 2012.

L'VSO DEL LA SQVADRA MOBILE

CON LA QVALE PER
Teorica, & Pratica
Si misura Geometricamente
ogni distanza, altezza,
e profondità;
S'IMPARA A' PERTICARE,
livellare, & pigliare in disegno
le Città, paesi, & provincie.
Il tutto con le sue Dimostrationi
intagliate in Rame.

DA OTTAVIO
FABRI
Data in luce.

IN PADOVA, M.DC.XV.
Appresso Pietro Bertelli,
Con licenza de' Superiori.

Figura 43 – Folha de rosto do livro *L'Uso della squadra mobile* de Ottavio Fabri
Fonte: Fabri (1615, p. 5).

Com objetivo de elucidar os dados da capa, os Quadros 2 e 3, a seguir, os exprimem, respectivamente, na língua original, a italiana do século XVII e, em português, referindo-se à tradução nossa:

L'Uso della squadra mobile Con la quale per teorica, & pratica si misura geometricamente ogni distanza, altezza, e profunditá; s'impara à perticare, livellare, & pigliare in disegno le città, paesi, & provincie Il tutto con le sue dimostrationi intagliate in Rame Da OTTAVIO FABRI Data in luce. IN PADOVA, MDCXV Apresso Pietro Bertelli, Com licenza de' Superiori.

QUADRO 2 – INFORMAÇÕES ORIGINAIS DA FOLHA DE ROSTO DO *L'USO DELLA SQUADRA MOBILE*
Fonte: FABRI (1615, p. 5).

O uso do esquadro móvel Com que teoria e prática se medem geometricamente cada distância, altura e profundidade; aprende a praticar, nivelar e apreender um projeto nas cidades, países e províncias Tudo com as suas demonstrações esculpidas em cobre De OTTAVIO FABRI Data em luz. Em Padova, 1615 Impresso Pietro Bertelli, Com licença de superiores.

QUADRO 3 – TRADUÇÃO DO QUADRO 2

Observa-se pelas informações da capa, que essa obra de Fabri era, especialmente, de cunho prático. Tanto que houve também a preocupação do autor em apresentar ilustrações muito detalhadas das situações práticas que ele exibia e procurava resolvê-las. Na realidade, com a frase "Tudo com as suas demonstrações esculpidas em cobre", contida no Quadro 3, Fabri quis dizer que todos os seus problemas continham ilustrações esculpidas em cobre. Essa forma de apresentar ilustrações nas obras, em cobre, era típica do século XVI, sendo uma sucessora das xilogravuras[94].

Fato relevante é que o próprio Fabri foi autor de suas ilustrações. Panepinto (2008/2009), em sua breve análise do texto, *O uso do esquadro móvel*, comprova-o afirmando que, depois de várias discussões de natureza teórica, Fabri propõe a descrição de vários exemplos, resumidos em 22 pequenos capítulos (além de uma introdução), acompanhados por gravuras de cobre executadas por ele mesmo.

No entanto, foi em 1598, 17 anos antes de a publicação ser analisada que, segundo Panepinto (2008/2009), esse tratado foi publicado pela primeira vez em Veneza, pela tipografia Francesco Barilleti. Além da primeira, cinco outras edições foram feitas, no decorrer dos séculos XVII e XVIII, inclusive a de 1615 que se considera neste trabalho.

Segundo Panepinto (2008/2009, p. 47, tradução nossa), essas outras cinco edições do texto *L'Uso della squadra mobile* foram publicadas, do seguinte modo:

> Os três primeiros foram publicados em Pádua em 1615 (por Pietro Bertelli), em 1670 e em 1673 (ambos por Gattella); dois outros são relatados em

[94]As ilustrações presentes nas obras estão exploradas com maior aprofundamento neste trabalho no Capítulo 2 desta tese, intitulado *As ilustrações dos problemas de alturas nos livros da pesquisa*.

> Trento, em 1752 e em 1753, para as tipografias de Giovanni Battista Parone, impressora episcopal. Ambas as publicações foram tratadas pelo arquiteto veneziano Giovanni Vettori, que definiu curiosamente a reimpressão de "terceira edição". Essas duas últimas reimpressões que chegaram até nós são também caracterizadas por uma ampliação das definições e das ilustrações aritmético-geométricas presentes no tratado, pelo mesmo Vettori.

Há polêmicas quanto à elaboração de *L'Uso della squadra mobile* por Ottavio Fabri. Ou seja, se realmente teria sido ele o inventor do instrumento. Inclusive, segundo Panepinto (2008/2009), foi levantada até a conjectura de que tal trabalho de Fabri poderia referir-se a um plágio do trabalho do matemático Marco Antonio Gandino. Entretanto, acredita-se que essa querela se esclarece, ao se analisar a carta dedicatória que Fabri escreve a Francesco Gandino, filho de Marco Antonio Gandino, publicada na primeira edição de 1598 e também, na edição de 1615, que está sendo analisada. O conteúdo da dedicatória:

> AO ILUSTRE E MUITO REVERENDO SENHOR,
> O SENHOR FRANCESCO GANDINO,
> Canônico de Trevigi, meu senhor observantíssimo.
> A invenção do Esquadro Móvel, por mim, poucos dias faz, remonta às figuras, com toda minha diligência, de pena e de intelecto, para honrar o quanto possível, as vigílias e os esforços do ilustre senhor Marco Antonio Gandino, seu pai, habilíssimo matemático e de agudíssimo intelecto, das quais a dita obra é retirada, é redescoberta, é formada; e a mim muito honra sua simples concessão, porque dela se faça nobilíssima doação ao universo. Julguei melhor unir-me à V.S. (Vossa Senhoria) Ilustre e muito Reverendíssima, do que a qualquer outro, como filho e não menos digno de tal pai, e da sua memória observadíssima.
> Dessa forma, pois, V.S. Ilustre e muito Reverendíssima, não havendo referência a qualquer imperfeição que possa ter sido causada pelo descuido de outros, sou grato e a defendo não como coisa minha, mas como coisa que reputo sua própria, sendo o presente livro, invenção e esforço, como o será qualquer outra coisa que farei conhecer do excelentíssimo senhor seu pai. Com tal finalidade lhe beijo com muito afeto as mãos.
> Veneza, 1° de Julho de 1598.
> V.S. Ilustre e muito Reverendíssima.
> Afetuosíssimo servidor
> Ottavio Fabri (FABRI, 1615, p. 12, tradução nossa).

A dedicatória, que Ottavio Fabri faz por ocasião da publicação do *L'Uso della squadra mobile*, incita a interpretação de que seu trabalho é, na verdade, uma adaptação do tratado escrito por Marco Antonio Gandino sobre o referido instrumento. E que a sua invenção sobre o esquadro móvel está diretamente relacionada à presença das ilustrações no texto. Conjectura-se que essa seria a contribuição de Fabri ao trabalho, além é claro, da divulgação do tão útil instrumento, segundo o próprio Fabri.

Panepinto (2008/2009), ainda assim, ressalta que seria muito interessante ser possível realizar uma análise do texto de Marco Antonio Gandino, para confronto entre os conteúdos das duas obras e avaliar as eventuais mudanças feitas por Ottavio Fabri. No entanto, ter-se-á de ficar com as conjecturas, já que o tratado de Gandino se perdeu.

A estrutura[95] da obra *L'Uso della squadra mobile* por Ottavio Fabri, com tradução e adaptação nossa, encontra-se, resumidamente, assim:

TABELA 4 – ESTRUTURA DA OBRA *L'USO DELLA SQUADRA MOBILE*

PÁGINA(S)	ASSUNTO
5	Folha de rosto – apresentada na Tabela 1
7 e 8	Carta escrita pelo Cavaleiro Guerini e dedicada a Fabri
8 a 11	Apresentação de seis sonetos em homenagem a Fabri
12	Carta de Fabri ao Reverendo Senhor Francesco Gandino
13 a 16	Carta de Fabri ao Senhor Currio Boldieri
17 e 18	Carta de Fabri ao leitor
19 a 32	Introdução da obra: *Raciocínio de algumas coisas que você precisa saber antes das medidas geométricas, segundo a opinião de bons autores*[96]
33 a 39	*Fabricação do instrumento*[97]
40 a 117	*O uso do Esquadro Móvel*[98]: 23 Propostas - uma Introdução e vinte e dois problemas práticos resolvidos, utilizando-se do esquadro móvel
118	Errata
119 a 123	Índice

Fonte: Fabri (1615).

A seguir, propõe-se uma abordagem mais cuidadosa de cada um dos assuntos elencados nessa tabela, com o intuito de compreender a fabricação do instrumento e dos problemas de alturas analisados neste trabalho.

[95]A paginação que segue nesta tabela para explicar a estrutura do trabalho de Fabri refere-se à paginação proposta como no site do Max Planck onde se encontra a obra digitalizada.
[96]Título original dessa Introdução: *Ragionamento d'alcune cosi Che si debbono sapere innanzi alle misure Geometriche secondo l'opinione di buoni Auttori* (FABRI, 1615, p. 19).
[97]Originalmente: *Fabrica dello Istrumento* (FABRI, 1615, p. 33).
[98]Originalmente: *L'Uso della Squadra Mobile* (FABRI, 1615, p. 40).

Conforme Panepinto (2008/2009), a carta do Cavaleiro Guerini foi escrita em novembro de 1597. Demonstra que Fabri e ele eram amigos íntimos, tendo o Cavaleiro até recebido de Fabri uma cópia do texto sobre o uso do esquadro móvel.

Analisando a obra, vê-se que os sonetos são todos dedicados a Fabri, tanto que o nome do engenheiro é citado em cada um deles. Os autores dos poemas foram o próprio Cavaleiro Guerini, além de dois de Agostino Michele, e um de cada pintor Giovanni Contarini P., Giovanni Dalla Torre e Gio. Battista Aleotti.

A carta de Fabri escrita ao Reverendo Senhor Francesco Gandino, filho do Senhor Marco Antonio Gandino, já foi comentada anteriormente, em especial sobre a "polêmica" gerada sobre a adaptação de Fabri ao tratado do matemático Gandino, ao considerar a construção e o uso do instrumento esquadro móvel.

Quanto à carta dedicada ao Senhor Currio Boldieri, de Verona, Fabri manifesta uma forte relação de amizade da sua família com o mesmo, tanto que, na carta, o chama de compadre. Suspeita-se que se tenham conhecido durante as várias estadas em Verona, quando membro do *Beni Inculti* ou também, não se pode excluir outras relações entre os dois em Ferrara, onde Fabri trabalhou no final do século XVI (PANEPINTO, 2008/2009). Eis o conteúdo da carta:

> Entre todas as artes liberais, ilustre senhor, nenhuma é mais prazerosa e mais nobre do que a Astrologia, e que, na maior parte eleva os olhos do intelecto para as coisas Divinas, ou que melhor participe da natureza do conhecimento e que mais demonstre dar a conhecer o autor dessa maravilhosa máquina do universo; tendo ela por objeto um corpo nobilíssimo, que é o céu, do qual quem quisesse seguir a opinião dos Platônicos, nada é mais similar à Divina natureza, por isso sendo esta simples, indivisível, distante de toda contradição e livre de toda corrupção; da mesma forma o corpo celeste não é composto de matéria corruptível e longe de qualquer mistura, indivisível, livre de qualquer qualidade contrária, destrutiva de toda forma encontrada. Além disso, se a sabedoria é o conhecimento das coisas que são eternas e a Astrologia contempla as coisas do céu sempre estáveis e estáticas, poderia se afirmar com razão que entre todas as artes ela seja a que mais participa do conhecimento, de onde dizia Platão que esta é uma coisa sapientíssima, a Astrologia (FABRI, 1615, p. 13, tradução nossa).

Entende-se, nesta primeira parte da carta que Fabri (1615) remete à concepção de Astrologia cuja classificação está como uma arte liberal. O autor a vê Astrologia como uma forma de conhecer e louvar a obra de Deus: o universo. Achou-se conveniente compreender, nesse contexto, as concepções de Arte, Ciência e Arte Liberal. A *Enciclopédia ou Dicionário raciocinado das Ciências, das Artes e dos ofícios por uma sociedade de letrados*[99] de Diderot e D'Alembert (1989) trata dessas concepções, como abordado a seguir.

Diderot e D'Alembert (1989, p. 43), no *Discurso preliminar dos editores*, assumem a Arte como conhecimento aplicado. De fato,

> pode-se dar o nome de Arte a todo sistema de conhecimentos que é possível reduzir a regras positivas, invariáveis e independentes do capricho ou da opinião, e seria permitido dizer, neste sentido, que várias de nossas ciências são artes, quando consideradas por seu lado prático.

Em relação à última frase da citação de Fabri, e, se for possível entender a concepção de sabedoria dada por ele como a de Ciência, parece adequado sustentar que a Astrologia teria sido a arte que mais se aproximava da Ciência, isso devido à abstração, ao intangível como objeto.

Os autores Diderot e D'Alembert fazem distinção das artes em liberais e em mecânicas e admitem as liberais superiores às mecânicas, mesmo pensando injusta essa superioridade. No entanto, ressaltam a vantagem das artes liberais e a utilidade das artes mecânicas. Com efeito,

> a vantagem que têm as Artes liberais sobre as Artes mecânicas, pelo trabalho que as primeiras exigem do espírito e pela dificuldade de nelas se distinguir, é suficientemente compensada pela utilidade bem superior que as últimas, em sua maioria, nos trazem (DIDEROT; D'ALEMBERT, 1989).

Abbagnano (1998, p. 91), em seu *Dicionário de Filosofia*, São Tomás, padre e filósofo italiano do século XIII, instituiu uma diferença entre artes liberais e artes servis[100], tendo por base que as artes liberais "destinam-se ao trabalho da razão, as segundas 'aos trabalhos exercidos com o corpo, que são, de certo modo, servis, porquanto o corpo está submetido servilmente à alma e o homem é livre segundo a

---

[99]O referido texto é resultado de uma tradução feita por Diderot e D'Alembert da obra *Cyclopaedia, or an Universal of Arts and Sciences* de Efraïm Chambers, editado em Londres em 1728. Conforme Diderot e D'Alembert (1989, p. 11) foi quando o uso moderno do termo Enciclopédia apareceu pela primeira vez, significando literalmente "o círculo da educação, correspondendo ao conjunto organizado do saber a ser ensinado a todo 'homem de bem'".
[100]Ou mecânicas.

alma'". Abbagnano (1998, p. 91) ainda afirma que a Arte perdurou muito tempo, referindo-se às artes liberais, mas também às artes mecânicas, ou seja, os ofícios como ainda se entende atualmente. Para o autor, "entendemos por Arte ou artesão, um ofício ou quem o pratica". O que coaduna com as ideias descritas na *Enciclopédia* de Diderot e D'Alembert e com as menções feitas por Ottavio Fabri nas dedicatórias de seu livro *L'Uso della squadra móbile*.

Sobre a concepção de Ciência, de acordo com Abbagnano (1998, p. 145) ela representa um

> conhecimento que inclua, em qualquer forma ou medida, uma garantia da própria validade. A limitação expressa pelas palavras "em qualquer forma ou medida" é aqui incluída para tornar a definição aplicável à Ciência Moderna, que não tem pretensões de absoluto. Mas, segundo o conceito tradicional, a Ciência inclui garantia absoluta de validade, sendo, portanto, como conhecimento, o grau máximo da certeza.

Ainda sobre Ciência, também dita Filosofia, com base na Enciclopédia de Diderot e D'Alembert (1989, p. 117), ela era vista como "a porção do conhecimento humano que deve ser reportada à Razão" e era dividida em três tipos: de Deus, do Homem e da Natureza, e cada uma tinha outras subdivisões.

Há uma formação de uma árvore genealógica na Enciclopédia de Diderot e D'Alembert (1989), na qual a Astrologia está colocada como parte da Física Particular dentro da Ciência da Natureza e está subdividida em Astrologia Judiciária[101] e Astrologia Física. A Astrologia (pura) está posta, juntamente, com a Astronomia Física nessa classificação dos autores. Ou seja, no século XVIII, a Astrologia incluía-se na Ciência da Natureza.

Segundo Stuckrad (2007), os astrólogos profissionais foram bem tolerados pela Igreja Católica até o século XVI. Inclusive, vários papas adotaram práticas da Astrologia como auxiliares em seus trabalhos. Porém, em meados do século XVI, essa situação é modificada no Concílio de Trento ocorrido na Contra-Reforma, quando se regulamentaram, novamente, as normas da Igreja Católica. Nesse

[101] Era considerada a prática de aceitar que os astros determinassem ou influenciassem, decisivamente, a vida e o futuro dos homens. Disponível em: <http://www.portaldoastronomo.org/tema94.php>. Acesso em: 14 fev. 2013.

contexto, os livros ligados à geomancia, hidromancia, aeromancia, dentre outros, e, também aqueles de Astrologia Judicial foram todos, totalmente, condenados. A única permissão foi para livros que tratassem das determinações ou observações naturais, escritas a favor da navegação, da agricultura ou da arte medicinal e incluídas dentro da chamada Astrologia Natural.

A Astrologia atingiu seu apogeu ainda na primeira metade do século XVII. O motivo desse apogeu, no mundo moderno, tem relação com as cartas celestes que serviam para fazer previsão do futuro das pessoas, além dos ditos almanaques astrológicos. “Na Europa, as práticas astrológicas eram amplamente cultivadas nas cortes; a influência celeste era motivo de teses nas universidades europeias e a Teologia se ocupou da discussão sobre seus limites” (CAROLINO, 2011, p. 11).

No fim do século XVI e início do século XVII, um acontecimento repentino veio contribuir com o declínio da Astrologia: o aparecimento de cometas e de “estrelas novas”. Isso levou os estudiosos a concluírem que “os céus eram corruptíveis, tal como a Terra”, isto é, passíveis de alterações dinâmicas e, portanto, de mudanças em seu conhecimento. Além dessas novidades, havia a inserção da teoria copernicana que contribuiu para o enfraquecimento da Astrologia como ciência. Conforme Carolino (2011, p. 3),

> se a estas razões juntarmos a crítica racionalista dos autores iluministas do século XVIII, que consideravam a Astrologia um conhecimento sem qualquer fundamento científico, é compreensível que a Astrologia fosse cada vez mais associada às crenças e superstições próprias das pessoas pouco letradas.

Fabri (1615) comenta sobre a excelência da Astrologia, contudo, enfatiza que são necessários os instrumentos para conhecer as posições dos “objetos peregrinos” no céu. Justifica, então, o seu apreço pelos instrumentos inventados pelo homem para a medição tanto das coisas visíveis no céu quanto das coisas da Terra, o que sob considerações mais contemporâneas, poder-se-ia comentar que as preocupações do autor estavam mais direcionadas às de um geômetra, com trabalhos direcionados, mais, especificamente, à astronomia do que, propriamente, à astrologia.

> [...] compelido pelo amor que tenho aos que professam esta arte, os quais têm por prazer além das coisas celestes, investigar e conhecer as verdadeiras e mais próximas medidas de todas as coisas sublunares apresentadas à nossa visão, eu quis assim fazer conhecer este instrumento, "o esquadro móvel", que espero ser útil a todos, seja como um artifício, seja como instrumento próprio; que por seu intermédio se possa fazer, e saber, tudo aquilo que com qualquer outro instrumento matemático até hoje adotado não se pôde realizar, pois que além do uso pela teoria se pode adotar ainda com uma simples prática, e se forma com o mesmo tudo que se haja adotado com ele e, se constitua toda a forma e sorte de ângulo, e se compreenda toda proporção, se conheça qualquer distância tanto em comprimento como em largura, altura, profundidade que constituem cada corpo; fazem-se todas as operações, assim como das seguintes demonstrações se descobrem ainda outros inumeráveis efeitos, conforme o Astrolábio, Heliômetro, Quadrante, Báculo, Raio Latino, Bússola, viva e morta, Nível e outros tantos tipos de instrumentos que podem ser utilizados à sua semelhança [...] (FABRI, 1615, p.15, tradução nossa).

Nota-se que Fabri justifica a escolha pelo instrumento esquadro móvel, mencionando primeiro o seu gosto pela possibilidade de medição das coisas e também pelos instrumentos que a torna praticável. É interessante ressaltar que tanto Ottavio Fabri quanto Oronce Finé, outro autor investigado nesta pesquisa, tomam partido de um instrumento de medida para apresentar os seus trabalhos, tornam explícitas as suas posições, apesar de conhecerem e indicarem outros instrumentos de medidas que também poderiam ser usados, na época, com a mesma finalidade de medição das coisas. No caso do francês Oronce Finé, seu instrumento preferido e tratado em sua obra foi o quadrante geométrico.

Fabri (1615), nessa dedicatória ao seu compadre Currio Boldieri, contando com toda sua experiência, servindo à República Sereníssima de Veneza, confessou que o esquadro móvel não era o mais simples instrumento para se construir, contudo foi motivo de encanto para os também engenheiros como ele. Assim, fundamenta a escolha pelo esquadro móvel e suas aplicações pela afeição por aqueles que apreciavam a ciência e para ajudar aos que, teoricamente, não aprenderam a ciência, mas atuavam com a prática.

Ainda na parte que se refere às cartas escritas por Fabri, há aquela dedicada ao leitor da obra, na qual o autor reforça homenagem a Marco Antonio Gandino pelos ensinamentos obtidos sobre Matemática, considerando-os como ponto de referência para o seu trabalho (PANEPINTO, 2008/2009).

Na parte introdutória, intitulada *Raciocínio de algumas coisas que você precisa saber antes das medidas geométricas segundo a opinião de bons autores*, entende-se que há agora uma ênfase à parte teórica da geometria, a fim de preparar o "leitor" para a prática efetiva, isto é, para aprender a construir e saber utilizar o esquadro móvel na resolução de problemas práticos.

Nesta parte do tratado, Fabri (1615):

- conceituou a geometria como uma ciência da grandeza e da forma;
- expressou, etimologicamente, a palavra geometria como vinda dos gregos e significando medida da Terra;
- apresentou de modo breve a história da matemática, enfaticamente, sobre características da Geometria, levando em conta as contribuições dos antigos egípcios até de alguns filósofos gregos como Thales, Anaxágoras, Hipócrates, Platão, Euclides, entre outros;
- dividiu as formas de medir, de acordo com as mais utilizadas: *Altimetria*, *Planimetria* e *Estereometria*;
- fez uma descrição detalhada das unidades de medidas utilizadas pelos antigos como dedo, palmo, pé, côvado, passo, pértica, estádio, milha e légua;
- mencionou conceitos de ângulo agudo e triângulo retilíneo e retângulo ;
- listou as unidades de medidas, mencionadas anteriormente, de diferentes localidades e países como Roma, França, Urbino, Florença, Servia, Pesaro, Ferrara, Modena, Mantua, Milão, Veneza, Trivigi, Pádua, Vicenza, Verona, Cologna, Rovigo, Badia, Friuli, Bréscia e Bérgamo.

Sobre as formas de medir, Fabri (1615, p. 21, tradução nossa) as definiu do seguinte modo:

> A Altimetria trata da medida de uma quantidade segundo uma só divisão, somente segundo seu comprimento.
> A Planimetria, pois pensa das medidas de quantidade segundo o comprimento e largura.
> E a Estereometria, da medida de quantidade segundo comprimento, largura e profundidade.

Após essa parte introdutória, Ottavio Fabri prenuncia os problemas práticos, de acordo com as formas de medição (Altimetria, Planimetria e Estereometria). Seus problemas são enunciados e resolvidos, minuciosamente, sempre contando com ilustrações muito ricas em detalhes, auxiliando o leitor na compreensão dos mesmos. Como exemplo, segue a Figura 44 que, no texto, é utilizada para explicar as instruções de resolução do problema de encontrar a distância do medidor a um dado ponto, com o uso apenas do semicírculo (ou *mezocerchio*) do esquadro móvel.

Figura 44 – Esquema ilustrativo da *Proposta X*
Fonte: Fabri (1615, p. 70).

Para conceber a abordagem resolutiva dos problemas de altura considerados por Fabri, será observada inicialmente, na seção seguinte, uma análise do processo de fabricação do instrumento. Isso contribuirá na pesquisa com respeito à comparação entre os autores escolhidos para esta investigação. E, finalmente, far-se-á uma análise de dois problemas de altura (da *Altimetria*) propostos por Fabri.

5.3 O PROCESSO DE FABRICAÇÃO DO ESQUADRO MÓVEL POR OTTAVIO FABRI

A apresentação da fabricação do esquadro móvel (Figura 45) por Ottavio Fabri é realizada de modo bem detalhado, com explicações acessíveis aos leigos ou aos “menos entendidos”, como ele mesmo menciona na introdução desta parte da obra. Didaticamente organizado, Fabri (1615) ressalta que fabricou muitos esquadros móveis e fez doações a militares e a outros cavalheiros, aos quais, tais instrumentos poderiam ter utilidade.

O autor narra, minuciosamente, os materiais usados por ele no processo de fabricação, ressaltando que se servira daquilo que estava ao seu dispor. Com isso, Fabri procura mostrar que existe uma variedade de materiais possíveis de serem trabalhados na confecção do instrumento, dependendo da criatividade do artesão. Fabri (1615, p. 33, tradução nossa) descreveu os seguintes materiais usados na produção do esquadro móvel: “[...] papelão, parte em madeira de cipreste, parte em cobre e parte em latão, que a propósito, são os preferidos por mim, na verdade por serem de tão macio metal que me agradaram mais que os outros [...]”. Ainda destacou que sua preferência pelo metal se fazia por conta da imutabilidade do produto, pois que nem as intempéries poderiam estragá-lo, resistindo ao sol e à chuva.

A narrativa de Fabri (1615) não é apenas detalhada em suas instruções, é também rica em orientações como um manual. Por essa razão, ele orienta aquele que deseja construir o instrumento que o faça de madeira por ter baixo custo e ser mais fácil para fabricar ou caso queira fazer de metal e não souber utilizar, corretamente, o buril e os compassos para o traçado das linhas, sugere buscar auxílio com algum especialista para construir o instrumento.

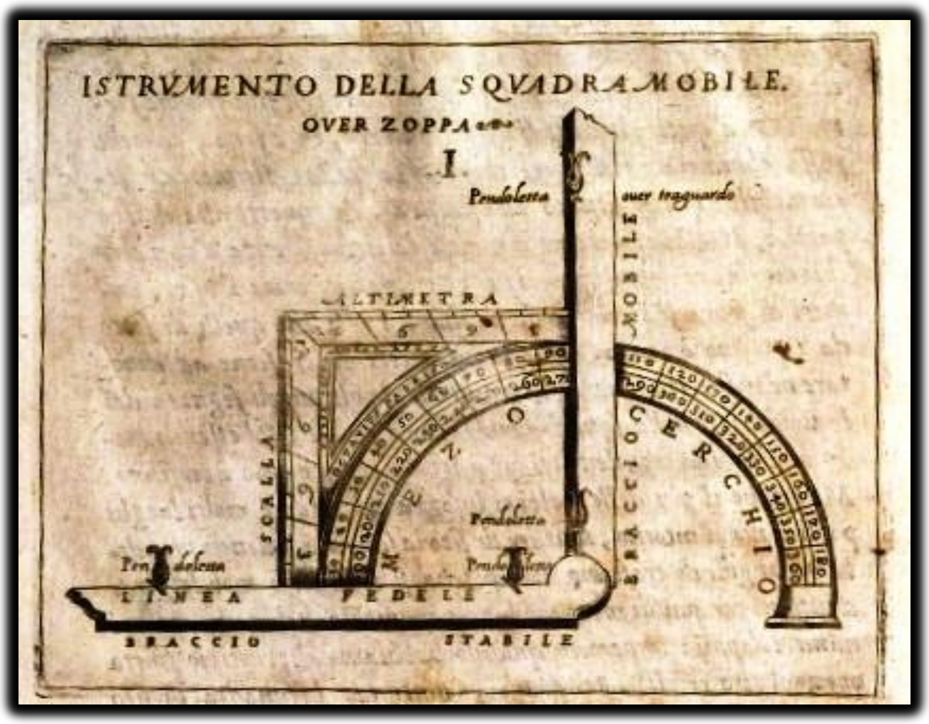


Figura 45 – Ilustração do esquadro móvel por Ottavio Fabri
Fonte: Fabri (1615, p. 42).

A descrição do processo de confecção do esquadro móvel (Figura 45), segundo Fabri (1615), segue os passos abaixo elencados:

- adquirir uma chapa de latão bruto da espessura de um dorso de faca ;
- aplainar e polir com areia as desigualdades e asperezas do metal;
- assinalar com o compasso sobre o metal um meio círculo[102] (ou semicírculo), de modo que houvesse sobra de espaço para prender o braço estável e o quadrado para fazer escala altímetra[103], ressaltando que deveria se utilizar da mesma grandeza[104], sugerindo que cada braço deveria ter, pelo menos, um pé de comprimento[105] (Figura 46);

Figura 46: Recorte e adaptação do esquadro móvel para visualização do *mezocerchio*
Fonte: Fabri (1615, p. 42).

- fazer um pequeno quadrado para a escala altímetra com o mesmo compasso ou com um esquadro[106];
- dividir o semicírculo em 18 segmentos de reta, partindo do centro do mesmo[107];

[102]Aqui se escreve também meio círculo porque Fabri denomina o semicírculo de *mezocerchio* cuja tradução “ao pé da letra” para o português é meio círculo.
[103]Segundo Reis (1988), a escala altímetra é também chamada de quadrado de sombras e é formada por duas partes intituladas, originalmente, por *umbra recta* e *umbra versa* como se pode ver na Figura 43 do esquadro móvel.
[104]Para Fabri (1615), ao se fazer as medições, quanto maior o instrumento mais correto ele se tornaria.
[105]Historicamente, a medida de pé variou entre 9 a 12 polegadas, ou de 24 a 30 centímetros de comprimento.
[106]O autor não menciona diretamente a medida do lado do quadrado, mas pela ilustração do esquadro móvel, tal lado mede o raio do meio círculo mais a largura do mesmo.
[107]Fabri ressalta que não se deve marcar a parte do semicírculo que permanece para que o braço móvel possa movimentar-se até 180° e destaca a necessidade de um pedaço de cordão para que o braço móvel não saia ao abrir-se até 180°, mas, que fique exatamente alinhado com o braço estável.

- dividir cada uma dessas 18 partes em 10 partes (ou graus), assinalando-as nas bordas de cima e de baixo do semicírculo[108];
- imprimir na primeira casela[109] (Figura 47), a mais próxima à escala altímetra e a da primeira ordem dos números, com um buril[110] ou com uma etiqueta, o número 10, na segunda 20, e assim sucessivamente até 180;

Figura 47: Recorte e adaptação do esquadro móvel para visualização da casela que inclui os números 50 e 230
Fonte: Fabri (1615, p. 42).

- retornar à primeira casela e, na segunda ordem, como Fabri denomina, imprimir os números seguintes, começando por 190 até chegar a 360;
- dividir o lado do quadrado da escala altímetra do lado esquerdo (*umbra versa*) em quatro partes e o lado direito também;
- dividir cada uma dessas quatro partes em três partes;
- dividir cada uma dessas três partes em cinco ou em dez partes (como se deseja) para ter mais facilidade no momento da utilização do instrumento, aprofundando as linhas que determinam as partes propostas para que elas fiquem visíveis;
- registrar, na direção do braço estável, o número 3 na primeira casela, 6 na segunda e assim, sucessivamente, até 12 na última casela, que vai dar no ângulo reto;
- registrar, na direção do braço móvel, de forma decrescente, o número 12 até o número 3;
- imprimir as palavras *umbra versa* e *umbra recta* com o buril para se conhecer a escala altímetra e assim se terá a chapa ou a tábua do instrumento;

[108]Assim o autor conta um total de 360° traçados no semicírculo.
[109]Casela neste caso significa um setor de coroa circular
[110]Instrumento de ponta de aço utilizado na execução de gravuras em metal ou madeira.

- construir em uma fôrma cada um dos dois braços, “como fazem os metalúrgicos, ou, eu mesmo o faço” (FABRI, 1615, p. 36, tradução nossa)[111]. Tais braços deveriam ser construídos de modo que, quando abertos sobre o diâmetro do semicírculo, fossem do comprimento de um braço inteiro (ou pouco menor). Fabri (1615) sugere que cada um dos braços tenha um nódulo[112], que o braço móvel tenha espessura, em média, três vezes maior do que a tábua do esquadro móvel e que se deixe um espaço no qual seja possível girá-lo sem dificuldades;
- fixar o braço móvel com a tábua do instrumento, ou com parafusos, sobre o braço estável;
- fazer “as quatro miras ou pendoletes de latão, da grossura do dorso de uma faca fina, feitas no formato desejado, mas de tamanho razoável [...]” (FABRI, 1615, p. 37, tradução nossa).

Depois, o autor explica que esses pendoletes devem ficar exatamente sobre a linha de fé de ambos os braços. Finaliza: “[...] e deste modo terás o instrumento perfeitamente construído para medir o que quiseres” (FABRI, 1615, p. 38, tradução nossa). O pendolete está ilustrado na Figura 48.

Figura 48: Recorte e adaptação do esquadro móvel para visualização do pendolete
Fonte: Fabri (1615, p. 42).

Após todas as instruções apresentadas para a fabricação do esquadro móvel, o autor preocupa-se em discutir o modo adequado de utilizá-lo. Como explica:

> Quanto a acomodá-lo para operar, eu o acomodo sobre um tripé, com uma bola presa em outra bola côncava que se gira, e assim levanto e abaixo à

[111]Vale mencionar que Fabri (1615), para o caso em que não se queira, pessoalmente, construir o instrumento, faz indicações de homens habilidosos na construção de instrumentos da época e do lugar que poderiam construir os braços do esquadro móvel, como por exemplo: M. Battista, Sazi, Cecca e M. Enea Sortis.
[112]Uma espécie de buraco para se encaixar parafuso.

> vontade; com pequenos parafusos fixo a bola sólida na bola côncava e faço alguns furinhos na bola sólida de mais ou menos três dedos de diâmetro, sobre os quais fixo com parafusos o braço estável (FABRI, 1615, p. 38, tradução nossa).

A Figura 49 ilustra o esquadro acomodado no tripé, como dito anteriormente.

Figura 49: Ilustração que demonstra um modo de usar o esquadro móvel sendo acomodado sobre o tripé
Fonte: Fabri (1615, p. 42).

5.4 O USO DO ESQUADRO MÓVEL PARA CALCULAR ALTURAS: FERRAMENTAS MATEMÁTICAS E RESOLUÇÕES

Os dois primeiros problemas de medição de alturas propostos por Fabri, em *L'Uso della Squadra Mobile*, são ilustrativos do processo de resolução que o autor adota. A abordagem de resolução dos problemas resume-se em uma receita prática, a que se deve seguir passo a passo, pois, por garantia do autor, o resultado será correto. Conclue-se que as ferramentas matemáticas necessárias para encontrar as soluções dos problemas são, provavelmente, conhecidas pelo autor, contudo, nem sempre são mencionadas, ficando essas apenas implícitas. Para elucidar essa questão, apresentam-se exemplos encontrados no aprofundamento dos dois problemas a que se propõem neste trabalho.

O primeiro problema possui o seguinte título: *Encontrar a altura de uma coisa, da qual se possa aproximar ou distanciar, ereta perpendicularmente sobre um plano* (FABRI, 1615, p. 48, tradução nossa) e constitui-se na terceira proposta do autor. A Figura 50 ilustra o problema.

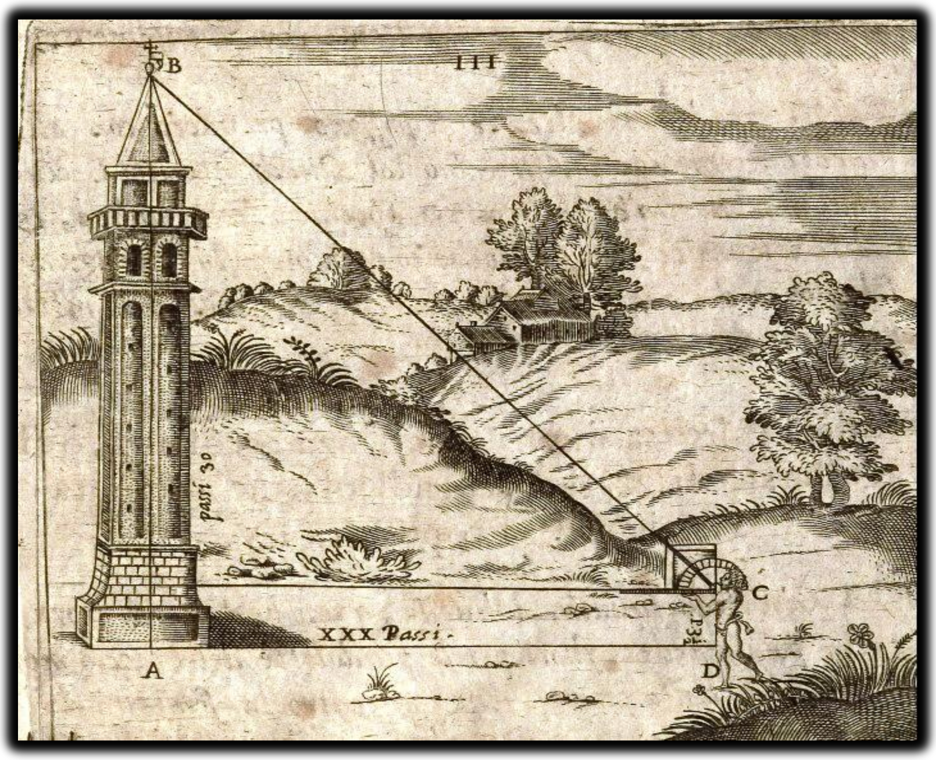


Figura 50: Esquema ilustrativo do problema de calcular a altura de uma torre por Fabri
Fonte: Fabri (1615, p. 49).

Para encontrar a altura de uma torre (objeto vertical), como na Figura 50, da qual era possível se aproximar ou se afastar, Fabri (1615) instrui que o esquadro móvel seja acomodado com o braço estável nivelado (no caso, paralelo ao plano do chão), e depois que o braço móvel do esquadro seja posto sobre os 45° do semicírculo (ou, então, sobre os 12 pontos de ambas as sombras: *umbra recta* e *umbra versa*). Dessa forma, mantendo fixa esta abertura do esquadro móvel e mirando-se através dos pendoletes do braço móvel do instrumento, o medidor deve posicionar-se em local que consiga visualizar, com clareza, o cume do objeto. De fato, segundo Fabri (1615, p. 49, tradução nossa), "[...] se os raios de sua visão alcançarem um ponto mais alto aproxime-se então do objeto, se, porém, atingirem um ponto mais baixo, afaste-se do objeto até que você veja, como eu disse acima, o cume do mesmo". A medida obtida da distância entre o esquadro e o pé do objeto observado, adicionada à altura do centro do esquadro móvel até o plano (chão) será, então, a altura do objeto.

Antes de comentar sobre um exemplo numérico apresentado por Fabri, atenta-se para a geometria implícita, empregada na solução do problema. Ao estipular que o esquadro móvel deveria estar posicionado em 45° e, sendo o objeto a ser medido, perpendicular ao plano, ocorre a formação de um triângulo retângulo que também é isósceles, o que acarreta em catetos congruentes. Portanto, a afirmação de que a altura do objeto desejada é a soma da distância do esquadro ao pé do objeto, adicionada à altura do centro do instrumento ao plano, é consequência da própria definição de um triângulo isósceles, cujos dois lados são congruentes.

A Figura 51, recorte da Figura 50, é que ilustra que esse problema é utilizado por Fabri também para fornecer um exemplo numérico. Observa-se que letras maiúsculas indicam os pontos: **A** refere-se ao pé do objeto (no caso, da torre); **C**, ao o centro do semicírculo do esquadro móvel; e **D**, à projeção de **C** no plano. Inclusive, na própria Figura 50, os valores estão expressos com suas respectivas unidades de medidas, no caso, passos (passi) e pés (pie).

Figura 51 – Recorte e adaptação da Figura 50
Fonte: Fabri (1615, p. 49)

Eis a narrativa do autor:

> Seja o objeto AB do qual desejamos saber a altura sobre o plano AD, coloco o esquadro com o braço estável a nível com o ponto C, depois giro o braço móvel com a linha fiel sobre os 45 graus dos primeiros números do meio círculo, ou então sobre os 12 pontos da *umbra recta*, e giro; e olhando através dos pendoletes do braço móvel da circunferência, na direção do centro, vejo o cume B do objeto de cuja visão meço o espaço DA de 30 passos e lhe adiciono a altura CD do esquadro do plano de 3 e meio pés, de

> onde tenho 30 passos igual a 3 e meio, altura desejada do objeto (FABRI, 1615, p. 49, tradução nossa).

O processo simples de resolução do problema por Fabri não exige que o medidor tenha conhecimentos geométricos, mas que apenas saiba medir, adicionar e utilizar o instrumento.

A *Proposta IIII* é outra versão do problema anterior, contudo apresentado sob uma forma diferente de resolver. Está intitulada assim: *Tomar a altura de uma coisa, da qual se possa aproximar ou distanciar ereta perpendicularmente sobre um plano. Proposta IV.* (FABRI, 1615, p. 50, tradução nossa). A Figura 52 refere-se à ilustração do problema:

Figura 52 – Ilustração da *Proposta IIII*
Fonte: Fabri (1615, p. 52).

A Figura 53 refere-se à Figura 52:

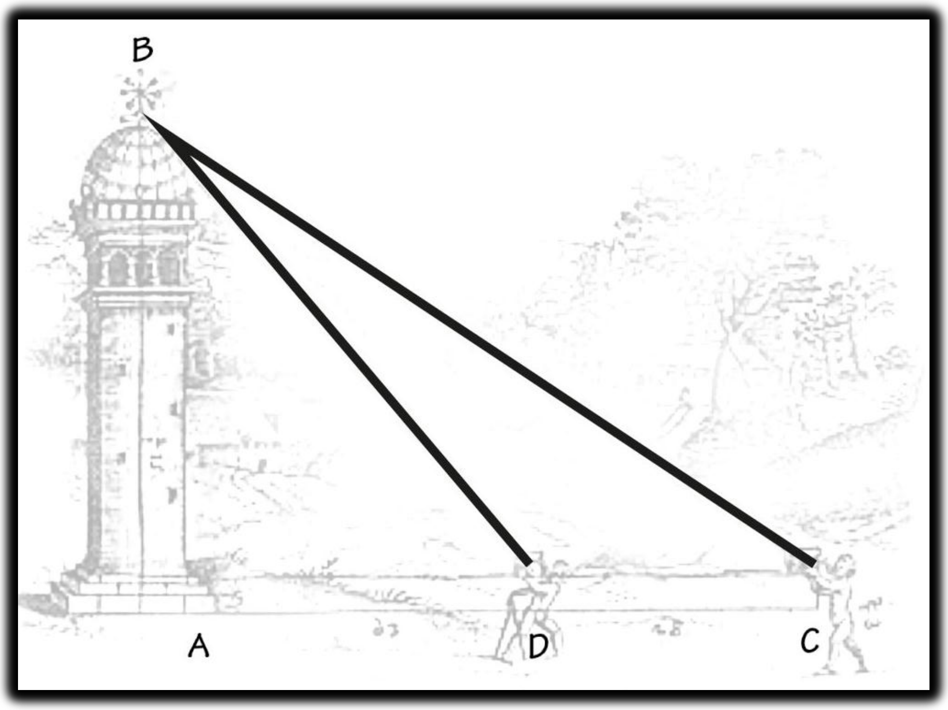


Figura 53 – Esquema ilustrativo referente à Figura 52
Fonte: Adaptado de Fabri (1615, p. 52).

Nesse problema, referente à quarta proposta, o autor elucida o processo de resolução, usando de um exemplo numérico. As instruções para encontrar a altura do objeto perpendicular ao plano, do qual se pode distanciar ou aproximar, serão apresentadas a seguir, intercalando citações de Fabri e interpretações da autora deste trabalho.

O primeiro passo é, conforme Fabri (1615), posicionar o esquadro móvel nivelado e mirar pelos pendoletes do braço móvel do instrumento no cume do objeto. Depois, deve-se observar o ponto que o braço móvel corta a escala altímetra e também em qual sombra (se a direita ou a inversa). No que se conclue, segundo o autor que - se o braço móvel tocar a sombra direita – deduzir-se-á que a altura do objeto será maior do que a distância do esquadro à base do objeto que se deseja medir. E ainda, que a razão entre o ponto onde o braço móvel corta a escala altímetra e toda a sombra (no caso, 12) será a mesma que a distância do esquadro ao pé do objeto e a altura do mesmo. Para encontrar a medida do objeto, deve-se resolver a proporção estabelecida acima e, ao resultado obtido, deve-se adicionar a altura do esquadro ao plano. Isso tudo é válido, matematicamente, pois, se estabelece a semelhança entre os seguintes triângulos: o triângulo retângulo formado pelo esquadro móvel no momento em que o medidor faz a mira no topo do objeto e o triângulo, também retângulo, formado pela base do objeto, pelo topo do objeto e pelo centro do esquadro móvel.

Por outro lado, Fabri (1615) também explica a situação de o braço móvel cortar a sombra inversa. Observa que, nesse caso, a altura do objeto será menor do que a distância do esquadro ao pé do mesmo. E, de modo análogo ao anterior, encontra-se a medida da altura do objeto desejado. Vê-se aí que o autor não tem intenção de justificar ou dar, claramente, qualquer razão matemática que explique a situação conjecturada.

O exemplo numérico é apresentado para melhor compreensão da resolução do problema. Esclarece Fabri (1615, p. 51, tradução nossa):

> [...] seja o cume B do objeto AB do qual desejamos saber a altura. Coloco o esquadro em nível e, mirando pelos pendoletes do braço móvel o cume B, vejo que ele corta com a linha de fé, por exemplo, 9 pontos na sombra direita, até D, donde digo ser a altura do objeto AB maior do que a distância AD, do esquadro ao seu pé, e ser os 9 pontos da sombra direita à toda sombra, isto é, 12, em tal proporção na qual é a distância DA à altura desejada. Meço então a distância DA, que seja 36 pés. Para tal objeto tenho três medidas conhecidas, primeira, 9 pontos da sombra direita; a segunda é toda sombra, isto é, 12; e a terceira 36, isto é, a distância do esquadro ao pé do objeto, donde digo que, pela regra de três, se 9 pontos da sombra direita me dão todo o lado da escala, isto é, 12, qual me darão 36 pés de distância do esquadro ao pé do objeto? Multiplico a segunda medida pela terceira, isto é, 12 por 36 e obtenho 432, produto que divido pela primeira quantidade, ou seja, 9, e obtenho 48; ao qual se eu adiciono a altura do centro do esquadro até o chão, isto é, 3 pés e meio, tenho a altura desejada do objeto, isto é, 51 pés e meio.

O autor não justifica, com clareza, a possibilidade de resolver o problema através de uma proporção; não há a preocupação de explicitar as ferramentas matemáticas utilizadas. O fato é que o triângulo retângulo formado pelos pontos B, pelo centro do esquadro móvel e pela projeção do centro do esquadro móvel sobre o objeto é semelhante ao triângulo retângulo, definido pelo esquadro móvel, ao se considerar o braço móvel, cortando a escala altímetra no ponto 9. Sendo assim, tem-se que:

$$\frac{9}{12} = \frac{36}{h},$$

onde h representa a distância entre o cume do objeto a ser medido e a projeção do centro do esquadro móvel sobre tal objeto, de modo que a altura do centro do esquadro até o chão é uma medida conhecida.

Resolvendo a proporção, obtém-se: $h = 48$. Para encontrar a altura do objeto deve-se agora adicionar ao valor 48, a altura do centro do esquadro até o chão, ou seja, 3,5 pés. A altura do objeto é igual a $48 + 3{,}5 = 51{,}5$ pés.

E o exemplo numérico para o caso do braço móvel cortar a escala altímetra do lado da sombra inversa? Fabri (1615) também considera essa situação e resolve de modo análogo ao exemplo anterior citado.

> A exemplo, estando o esquadro a nível, miro pelos pendoletes do braço móvel no cume B do objeto AB ereto sobre o plano AC e noto a linha de fé cortar 9 pontos da sombra inversa; depois meço a distância AC do esquadro ao pé do objeto, que seja, por exemplo de 64 pés, donde digo que pela regra de três: se 12 me dão 9, o que me darão 64? Multiplico a segunda pela terceira, isto é, 9 por 64, cujo produto é 576, o qual divido por 12 e terei como o quarto, 48, ao qual adiciono à altura do plano ao centro do esquadro, isto é, 3 pés e meio e obterei a altura desejada AB do objeto, isto é, 51 pés e meio (FABRI, 1615, p. 53, tradução nossa).

Importante observar que Fabri (1615) preocupa-se também com as pessoas que necessitarão utilizar o instrumento, mas que não têm conhecimento sobre as operações aritméticas de multiplicação e divisão. O autor dá indícios que sabe que vive num mundo de maioria analfabeta ou pouco culta. Ele ensina uma técnica de modo que o medidor possa encontrar a altura do objeto, sem precisar recorrer às tais operações. Apresentam-se abaixo as instruções do autor e uma explicação cujo objetivo é esclarecê-las. Fabri (1615, p. 53, tradução nossa) assevera:

> [...] como nem todo mundo conhece a arte de multiplicar e dividir os números quero ensinar certa prática com a qual, sem a ajuda dessa arte, se pode encontrar essa altura. Traçam-se sobre uma superfície duas linhas retas que se cortem formando um ângulo reto, ou como se diz, a esquadro. Depois, com o esquadro, verifica-se, como acima, em quantos pontos corta a linha fiel do braço móvel e de qual sombra; e cortando os da sombra direita, faz-se uma daquelas linhas retas que inicialmente se tenha traçado sobre a superficie uma sobre a outra em ângulos retos igual a todo lado inteiro da escala; e outra, igual aqueles pontos que foram cortados pela linha fiel; e aquela que faz igual ao lado inteiro da escala, se pega como altura do objeto, e aquela outra que se faz igual aos pontos da sombra direita, se pega como distância do esquadro ao pé do objeto; depois se mede o espaço entre o esquadro e o pé do objeto, e seja dividida e aquela

> das duas linhas que representa essa distância em tantas partes quantos pés ou passos, são colocados na distância medida, e com aquelas mesmas divisões seja medida a outra das duas linhas que representa a altura do objeto, porque tantas dessas divisões entrarão nessa linha, tantos pés ou passos, será a altura desejada; se junta a altura do esquadro ao plano.

Uma explicação mais esclarecida dessa citação literal do autor pode ser fornecida a partir da observação de uma proporção equivalente à utilizada na resolução numérica, qual seja, $\frac{9}{12} = \frac{36}{h}$. Logo, essa igualdade pode ser compreendida dos seguintes modos:

$$\frac{9}{12} = \frac{36}{h} \Leftrightarrow 9.h = 12.36 \Leftrightarrow \frac{h}{12} = \frac{36}{9} \Leftrightarrow \frac{h}{12} = 4.$$

Refletindo sobre as equivalências anteriores, procura-se explicar as instruções fornecidas pelo autor para aqueles medidores que não dispunham dos conhecimentos sobre as operações de multiplicação e divisão. A proposta de se traçarem dois segmentos de reta (“duas linhas retas”), formando ângulo reto e depois, fazer operações sobre os mesmos, dá-se com a finalidade de manter a proporção ocorrida, como consequência da semelhança dos dois triângulos retângulos, formados entre o instrumento e o objeto a ser medido, no próprio processo de medição.

Segundo os passos dados, nota-se que é feita a marcação dos pontos 9 e 12, um em cada segmento traçado. Depois 9, o ponto onde a linha de fé do braço móvel corta a escala altímetra, é tomado como unidade de medida; e, então, o medidor deve descobrir quantas vezes tal unidade de medida cabem em 36, que representa a medida (em pés) da distância do centro do esquadro móvel até à base do objeto. Nesse caso, o resultado é 4. Logo, para valer a propriedade geométrica da semelhança de triângulos, levando em conta a igualdade $\frac{h}{12} = \frac{36}{9}$, deve-se compreender que 12 também caberão 4 vezes em h, ou seja, de acordo com Fabri (1615, p. 53, tradução nossa) “[...] com aquelas mesmas divisões seja medida a outra das duas linhas que representa a altura do objeto, porque tantas dessas divisões entrarão nessa linha, tantos pés ou passos, será a altura desejada [...]”. Isso acarreta na medida $h = 12.4 = 48$. Medida que significa a distância do cume do objeto até a projeção do centro do esquadro sobre tal objeto. Sendo assim, para obter a medida da altura do objeto, basta adicionar ao valor 48 a distância do centro do esquadro até o chão, que no exemplo numérico proposto, é igual a 3,5 pés. Finalmente, conclui-se que a altura a ser medida é 51,5 pés.

Uma questão que surge, considerando as ferramentas matemáticas/trigonométricas que se utiliza, atualmente, para resolver esse tipo de problema de medir altura é: qual é a relação que se estabelece entre o ângulo α e a medida do segmento x determinado pela interseção do braço móvel com a escala altímetra do esquadro móvel? Dois esquemas simplificados do esquadro móvel, levando em conta duas situações possíveis, apresentam-se:

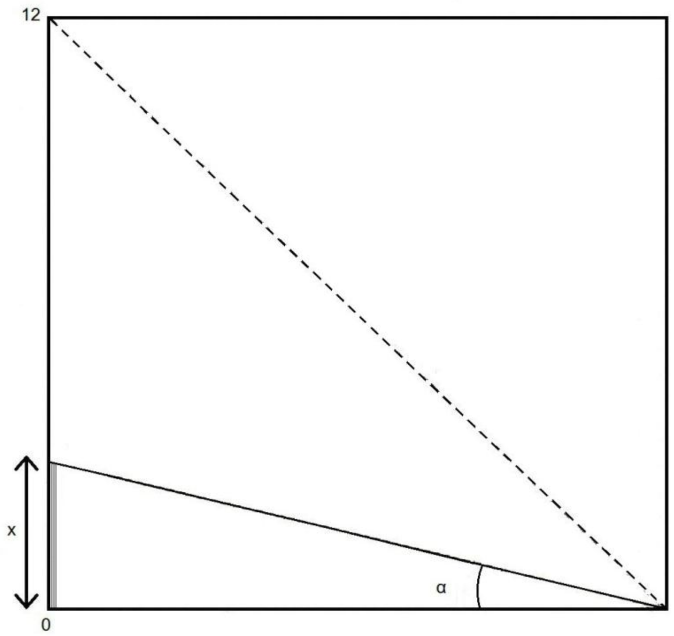


Figura 54 – Primeiro esquema matemático para a solução do problema

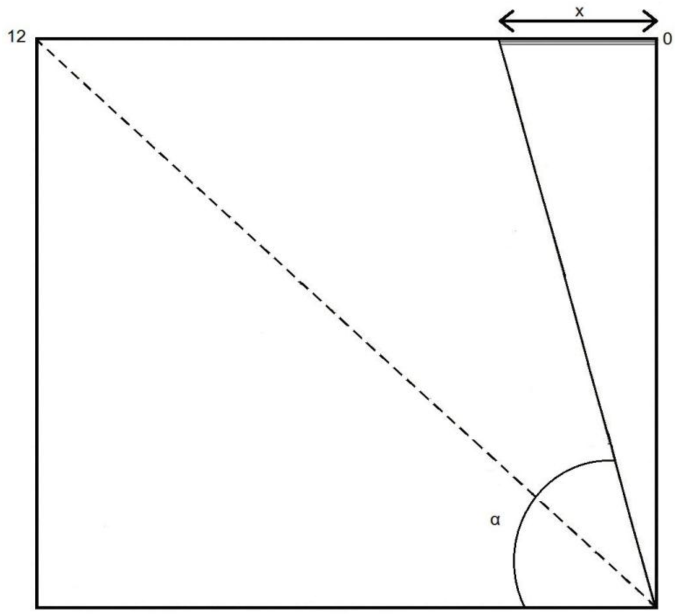


Figura 55 – Segundo esquema matemático para a solução do problema

No primeiro esquema, Figura 54, considera-se o braço móvel, cortando a escala altímetra em algum ponto da sombra inversa, ou em termos de ângulos medidos em graus: $0° < \alpha \leq 45°$. No segundo esquema, Figura 55, o braço móvel corta a escala altímetra na sombra direita, ou seja, pode-se obter $45° \leq \alpha < 90°$. Pelos esquemas, x representa o ponto onde o braço móvel intersecta a escala altímetra, podendo estar no intervalo de medida: $0 < x \leq 12$, de acordo com a própria construção do instrumento proposta por Fabri (1615). Mostrar-se-á que a relação entre α e x, em cada situação (Figuras 54 e 55), é dada por: $\alpha = arctg\left(\frac{x}{12}\right)$, no primeiro esquema; e $\alpha = arctg\left(\frac{12}{x}\right)$, no segundo.

Conclue-se, então, que a partir da definição de tangente como uma razão, em um triângulo retângulo, tem-se:

Primeira situação (Figura 54):

$$tg\alpha = \frac{x}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = 12tg\alpha, ou \\ \alpha = arctg\left(\frac{x}{12}\right) \end{cases}.$$

Segunda situação (Figura 55):

$$tg(90° - \alpha) = \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{1}{tg\alpha} = \frac{x}{12} \Rightarrow x.tg\alpha = 12 \Rightarrow tg\alpha = \frac{12}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{tg\alpha}, ou \\ \alpha = arctg\left(\frac{12}{x}\right) \end{cases}.$$

No exemplo numérico que Fabri (1615) propõe, o braço móvel do instrumento, nas duas situações possíveis, intersecta a escala altímetra no ponto 9. Assim, como a medida de cada sombra da escala altímetra é 12, dois segmentos de retas ficam determinados: um medindo 9, e outro medindo 3. Nesse caso, há o ângulo α correspondente ao segmento que mede 9, e também há o ângulo $\theta = 45° - \alpha$, que corresponde ao segmento cuja medida é $x = 3$, no caso desse exemplo, como é possível observar na Figura 56:

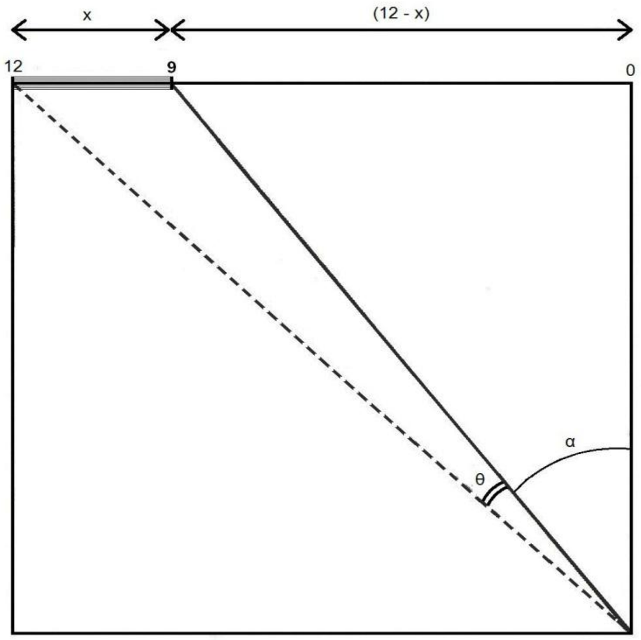


Figura 56 – Esquema matemático para a solução do problema

Qual é a relação estabelecida entre o ângulo θ e o segmento x correspondente na escala altímetra do esquadro móvel? Fazendo-se uso de ferramentas matemáticas/trigonométricas atuais, responde-se a essa questão: se $\theta = 45° - \alpha$, então $\alpha = 45° - \theta$. Desse modo, considerando que o braço móvel corta a escala altímetra na sombra direita, tem-se a segunda situação mencionada anteriormente, na qual já se tem firmado que $tg(45° - \theta) = \frac{12-x}{12}$.

Resolvendo essa igualdade para encontrar o valor de x, caso se conheça o ângulo θ, tem-se:

$$tg(45° - \theta) = \frac{12 - x}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{tg45° - tg\theta}{1 + tg45°tg\theta} = \frac{12 - x}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{1 - tg\theta}{1 + tg\theta} = \frac{12 - x}{12} \Rightarrow$$

$$12\left(\frac{1 - tg\theta}{1 + tg\theta}\right) = 12 - x \Rightarrow$$

$$x = 12 - 12\left(\frac{1 - tg\theta}{1 + tg\theta}\right) \Rightarrow$$

$$x = 12\left(1 - \frac{1 - tg\theta}{1 + tg\theta}\right) \Rightarrow$$

$$x = 12\left(\frac{2tg\theta}{1 + tg\theta}\right) \Rightarrow$$

$$x = \frac{24tg\theta}{1+tg\theta}.$$

Partindo da última igualdade, também se pode encontrar a medida do ângulo θ, caso se tenha conhecido a medida do segmento x. Refletindo, ao se considerar: $x = \frac{24tg\theta}{1+tg\theta}$, tem-se:

$$24tg\theta = x(1 + tg\theta) \Rightarrow$$

$$24tg\theta = x + xtg\theta \Rightarrow$$

$$(24 - x)tg\theta = x \Rightarrow$$

$$tg\theta = \frac{x}{24 - x} \Rightarrow$$

$$\theta = arctg\left(\frac{x}{24-x}\right).$$

Como aplicação, ao retomar o exemplo numérico dado por Fabri (1615), em que o ângulo θ é correspondente ao segmento x apresentado no esquema anterior, e cuja medida é $x = 3$, é possível encontrar a medida do ângulo θ, aplicando a igualdade

$\theta = arctg\left(\frac{x}{24-x}\right)$. Sendo assim: $\theta = arctg\left(\frac{3}{21}\right) \Rightarrow \theta \cong 8{,}1301°$. Ou para o caso de se considerar conhecido o ângulo $\theta \cong 8{,}1301°$, é possível encontrar a medida do segmento x, utilizando-se da igualdade $x = \frac{24tg\theta}{1+tg\theta}$. Desse modo, tem-se que $x = \frac{24tg8{,}1301°}{1+tg8{,}1301°} \cong 3$.

Pode-se ainda concluir que, por exemplo, para o segmento cuja medida é 9 na escala altímetra (tendo sido cortado pelo braço móvel na sombra direita), a medida do ângulo correspondente será fornecido pela igualdade $\alpha = arctg\left(\frac{12}{x}\right)$. Então, $\alpha = arctg\left(\frac{12}{9}\right) \Rightarrow \alpha \cong 53{,}1301°$ ou, simplesmente, $\alpha = 45° + \theta = 45° + 8{,}1301° \cong 53{,}1301°$.

Todo o processo discutido sobre as ferramentas matemáticas atuais, implícitas nas resoluções dos problemas de medição de alturas propostos por Fabri (1615), contribui para a compreensão de que o mais importante para a época era tornar acessível e possível a construção e a utilização do instrumento de medida para se resolverem os problemas necessários. As propriedades geométricas e os porquês de se aplicar a regra de três eram apenas citados, fazendo parte do processo, não compreendidos como itens imprescindíveis ao aprendizado de tal tarefa.

5.5 REVISITANDO FABRI

Ottavio Fabri foi um personagem importante para a época, e, principalmente, para o local em que viveu. Teve gosto apurado para a estética, a inovação, o lucro e a novidade. Sua inclinação e habilidade com respeito à matemática ajudaram-no a exercer um trabalho de perito para o governo veneziano, que lhe rendeu reconhecimento e aprofundamento na prática de resolver problemas do cotidiano da época, narrados na obra aqui investigada, mais enfaticamente, os problemas de medição de alturas, utilizando-se do esquadro móvel.

O esquadro móvel foi um instrumento muito usado, e o texto de Ottavio Fabri sobre tal instrumento repercutiu durante os séculos XVII e XVIII, tanto que nesse período aconteceram várias reimpressões do *L'Uso della squadra mobile*. Ademais, com base no aperfeiçoamento do esquadro móvel, outros instrumentos foram inventados, outros autores abordaram-no em suas obras e continuou sendo usado pelos funcionários do governo de Ferrara, pelo menos, até a segunda metade do século XVII (PANEPINTO, 2008/2009).

E quanto a outros possíveis trabalhos de Fabri? Panepinto (2008/2009) explora isso em sua tese e conclui, realmente, que a única obra publicada do autor foi *L'Uso della squadra mobile*. Entretanto, destaca que - ao analisar documentos e o próprio texto *L'Uso della squadra mobile* -, apesar não terem sido publicados, o autor escreveu mais outras duas obras no final do século XVI. Uma sobre unidades de medida do mundo todo, e outra que se referia a um tratado de hidráulica, o qual continha assuntos sobre todos os mares, lagoas, lagos, rios, córregos e outros afluentes entre outros relacionados, diretamente, com as águas.

Suspeita-se que a queda das condições financeiras da família Fabri tenha contribuído para ele nunca ter conseguido publicar essas duas obras, as quais, ao que tudo indica, já haviam sido completamente escritas. Destarte, Panepinto (2008/2009, p. 55) salienta que a intenção de Fabri era ainda "realizar mais tarde um segundo volume sobre seu esquadro móvel, para proceder à análise das coisas celestiais, de muito maiores considerações, seguindo assim os passos de muitos outros autores [...]". Ação que também não realizou.

Algumas análises conclusivas podem ser feitas a partir de aspectos fundamentais observados na obra de Fabri. Com respeito ao enunciado do problema de calcular altura, assim como Oronce Finé, Ottavio Fabri apresenta, em seu texto, cada um dos problemas práticos[113] com um enunciado mais geral, denominado *Proposta*. Por exemplo, a *Proposta III* é a de "Encontrar a altura de uma coisa da qual se possa aproximar ou distanciar, ereta perpendicularmente sobre um plano" (FABRI, 1615, p. 48, tradução nossa) e a *Proposta VII* intitula-se: "Saber sobre uma altura menor

[113]Não somente aqueles relacionados às medições de alturas de objetos.

quanto é levantado do plano uma altura maior” (FABRI, 1615, p. 59, tradução nossa).

Levando em conta tanto o enunciado quanto a resolução de cada *Proposta*, o autor usa uma linguagem natural/coloquial, também retórica e até mesmo, em alguns aspectos, pode-se classificá-la como repetitiva. Portanto, no processo de resolução de alguns problemas, como aquele que se refere à *Proposta IIII*, além de apresentar a solução do problema, contendo as instruções passo a passo, utilizando-se de propriedades matemáticas (como as operações fundamentais e a regra de três) e fornecendo exemplos numéricos para dois casos específicos, Fabri repete a mesma resolução para leitores que conhecem os números, mas não conhecem as operações matemáticas.

As instruções são narradas, passo a passo e se apoiam, constantemente, nas ilustrações de cada problema. Sem a figura, não seria possível compreender o processo de resolução. Vê-se, por exemplo, na *Proposta III*, como a ilustração é parte fundamental. Neste caso, Fabri (1615, p. 48, tradução nossa) instrui: “Acomode o esquadro, como visto acima, com o braço estável em nível, depois coloque a linha fiel do braço móvel sobre os 45 graus do meio círculo, ou então sobre os 12 pontos de ambas as sombras que será o mesmo [...]”. O termo “visto acima” exige que o leitor observe a ilustração do problema para entender a solução.

O autor simula um diálogo com o leitor que extrapola as ideias matemáticas exigidas para resolver cada problema. Fabri (1615) sugere ao leitor – aquele que deseja mais aprofundamento nas demonstrações das instruções que ele fornece, baseadas nas suas ilustrações -, recorrer a outros autores[114] que, segundo ele, abordaram o mesmo tema. Inclusive, um desses autores é Oronce Finé (ou Orontio Fineo), tratado no capítulo anterior.

Apesar de deixar claro que não mencionará sobre outros instrumentos de medidas, Fabri (1615) cita outros que podem ser aproveitados para medição de alturas como

[114]De fato, Fabri (1615, p. 50, tradução nossa) comenta: “[...] Não farei demonstrações destas figuras, remetendo aqueles que desejarem vê-las aos escritos de Giovanni de Monteregio, de Orontio, e de Roias que disto falaram difusamente”. Sendo que Orontio se refere ao autor Oronce Finé também tratado nesta pesquisa.

o astrolábio, o heliômetro, o quadrante, o báculo, entre outros. Isso também extrapola o processo de resolução de cada problema em si, pois, abre portas ao leitor que desejar conhecer mais sobre o uso de outros instrumentos.

Ainda sobre a linguagem, vale destacar que, embora cada problema seja enunciado para um caso geral, ao se observar o detalhamento das resoluções, nas exemplificações numéricas, Fabri lança mão das unidades de medidas da época, como pés e passos:

> [...] depois meço a distância AC do esquadro ao pé do objeto, que seja, por exemplo, de 64 pés, donde digo que pela regra de três, se 12 me dão 9 que me darão 64; multiplico a segunda pela terceira, isto é, 9 x 64 cujo produto é 576, o qual divido por 12 e terei como o quarto, 48 ao qual adiciono a altura do plano ao centro do esquadro, isto é, 3 pés e meio (FABRI, 1615, p. 53, tradução nossa).

A citação acima também remete à outra reflexão: a narrativa das instruções para a resolução dos problemas é apresentada pelo autor em primeira pessoa. Logo, verbos na primeira pessoa do singular como meço, digo, multiplico, terei, adiciono, etc, são empregados para ensinar os passos de construção do instrumento.

Nas instruções para a fabricação do instrumento, Fabri recorre aos números do ábaco para imprimi-los no esquadro móvel, tanto na escala altímetra quanto na graduação dos ângulos do semicírculo. E assim, Fabri (1615, p. 35) orienta: “[...] e depois com um buril ou com uma etiqueta imprimo na primeira casela, com caracteres de números do ábaco, dez, isto é 10, na segunda, 20, na terceira 30, e assim por diante, na primeira ordem dos números imprimo até 180 [...]”.

Para cada problema, Fabri apresenta uma ilustração que simula a realidade. Cada ilustração é rica em detalhes, demonstrando não apenas um esquema explicativo, mas a imagem da situação que o problema/capítulo apresenta, incluindo o objeto a ser medido, o instrumento e uma paisagem.

Dos três autores analisados, Fabri é o que contempla, em seu texto, as ilustrações com maior riqueza de detalhes, entende-se nele um cuidado especial com o paisagismo ao redor da situação proposta, com o relevo e também com a valorização da natureza, isto é, cada ilustração parece representar uma verdadeira pintura.

Conjectura-se que, pela riqueza de pormenores, as ilustrações presentes na obra de Ottavio Fabri foram feitas através de gravados em cobre, pois era moda, na época de produção do seu trabalho, e ademais, ele era exímio conhecedor das artes, além de colecionador e comerciante, fazia parte da elite italiana, classe que possuía maior acesso às artes, aos livros ilustrados, entre outros. No parecer de Febvre e Martin (2005), desde o final do século XV, o procedimento de gravados em cobre, além de ter sido utilizado por ourives e pintores, também foi experimentado nas ilustrações de livros, apesar de se ter a desvantagem de que cada ilustração deveria ser impressa separadamente do texto nas obras. A valorização da pintura é registrada por Febvre e Martin (2005, p. 105, tradução nossa) quando afirmam que

> [...] não há que se duvidar que o século XVI foi um século de pintores. O gosto pela pintura havia se estendido por toda Europa. Pessoas da mesma região de Veneza ou de Amberes, burgueses ricos de Paris ou de Lyon se fizeram retratar e encarregaram a pintores, cujo número aumentava sem cessar, quadros para adornar as casas e já não mais as igrejas. Ao mesmo tempo, vários pintores se dedicaram à arte das gravuras, e as gravuras executadas em cobre, verdadeiras imagens reais de pobres, alcançaram um êxito extraordinário.

Acredita-se que todo esse contexto de valorização da pintura influenciou a presença das ricas ilustrações na obra de Ottavio Fabri. Nota-se sempre que, em suas ilustrações, há grande preocupação com os detalhes e também em dar visibilidade aos objetos que devem ser medidos. Por exemplo, na Figura 48, vê-se o local, ao fundo, composto com suas casas, ruas, árvores e pequenos montes. Já o objeto a ser medido, no caso, uma torre, é colocada no plano da frente, em destaque, com o medidor, utilizando o esquadro móvel.

O problema da *Proposta III*, abordado anteriormente, é apresentado, com exemplo numérico, em duas situações distintas, para o caso da mira ao cume do objeto passar pela *umbra recta* e pela *umbra versa* da escala altímetra. Percebe-se que a única figura referente a esse problema (Figura 48), compõe-se de dois medidores, um mais perto da torre e outro mais afastado, ou seja, ilustrando cada um dos casos mencionados. Isso se deve, provavelmente, à possibilidade de uma única figura ser considerada em duas situações e, consequentemente representar uma economia na impressão das ilustrações, o que na época significava uma diminuição dos gastos com as gravações, ainda mais, como se suspeita, se fossem gravadas em cobre.

O autor usa nas ilustrações numerais romanos impressos na parte superior central, como se pode observar, por exemplo, nas Figuras 48 e 50. Interessante notar que, em todo o texto, o número quatro em romanos está sob a forma **IIII**, diferente da que se utiliza hoje, **IV**[115]. Já os algarismos hindu-arábicos aparecem como se conhece, no entanto, em algumas situações estão sob a forma espelhada (voltada para o observador que faz a medição) ou na ordem trocada, como é o caso do número 36 da Figura 48. Suspeita-se que houve algum erro na cunhagem para a impressão dos números nas gravuras.

A fim de mostrar como Fabri (1615) sempre incluía os instrumentos de medidas e o medidor em suas ilustrações, apresenta-se, a seguir, as Figuras 57, 58, 59 e 60. Pode-se também observar a presença constante das torres, construções importantes para a época, pois, notadamente, serviam para a segurança.

Figura 57 – *Proposta V*: Medir a altura de uma coisa erguida sobre um plano, ao pé do qual não se pode aproximar
Fonte: Fabri (1615, p. 55).

[115]Isso demonstra que nem sempre os algarismos romanos foram escritos sob a forma como conhecemos hoje.

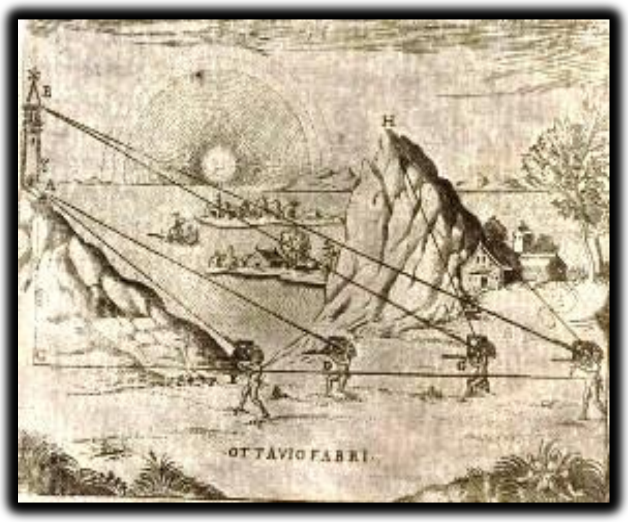


Figura 58 – *Proposta VI*: Saber a altura de uma coisa vertical sobre um monte ao qual não é possível se aproximar, onde vemos o topo e o pé
Fonte: Fabri (1615, p. 58).

Figura 59 – *Proposta VII*: Saber sobre uma altura menor quanto é levantado do plano uma altura maior
Fonte: Fabri (1615, p. 59).

Figura 60 – *Proposta XIIII*[116]: Aprender a profundidade de uma coisa instalada (poço) posta perpendicularmente abaixo num lugar onde se pode ver o fundo
Fonte: Fabri (1615, p. 79).

Evidenciando a abordagem resolutiva dos problemas, pode-se mencionar que as instruções são dadas passo a passo para a resolução dos problemas e são, principalmente, voltadas para a prática. Concebe-se que o maior interesse no tratamento das resoluções dos problemas para Fabri está em fornecer autonomia para o medidor. Como é a prática que prevalece, o autor preocupa-se também em instruir aquele que, inclusive, não sabe realizar operações numéricas como multiplicação e divisão. Capacita aquele que conhece apenas os números e sabe operar o instrumento como mencionado na seção anterior.

Para resolver os problemas considerados neste trabalho, além das operações numéricas, outro conceito matemático é citado por Fabri, a regra de três. Ainda especifica a regra: “[...] donde pela regra das quatro proporções que nós chamamos regra de três, tendo conhecidas três quantidades, se multiplicarmos a segunda pela terceira e dividirmos o produto pela primeira, haveremos a quarta ainda não conhecida” (FABRI, 1615, p. 51, tradução nossa).

Há ferramentas geométricas manipuladas, mas, estão implícitas nas instruções. Como por exemplo, a propriedade que garante que “num triângulo, ao maior lado

[116]Ou XIV, em notação usual de numerais romanos.

opõe-se o maior ângulo” abordada na *Proposta IIII*. No texto de Fabri (1615, p. 51-52, tradução nossa), ela é apresentada, implicitamente, da seguinte forma:

> Coloque o esquadro no nível, como foi dito acima, depois olhe pelos pendoletes do braço móvel, da circunferência ao centro, o cume do objeto, e observo quantos pontos ele corta da Escala Altímetra com sua linha de fé, e de qual *ombra*[117]; porque se ele tocar a *ombra dritta*[118], saberemos que a altura será maior que a distância do esquadro ao seu pé [...].

Apesar de considerar a existência de vários instrumentos de medidas para resolver os problemas como, por exemplo, o astrolábio, o quadrante, o báculo, o raio latino, entre outros, Fabri aprofunda-se em sua obra apenas no esquadro móvel (dito também quadrado móvel ou *zoppa*), pois se supõe que ele queria divulgar o “seu” instrumento.

[117]Aqui se apresenta a palavra *ombra* como está no texto original. Ela tem o mesmo significado da palavra *umbra* (no caso, representa uma das partes da Escala Altímetra – *umbra recta* e *umbra versa*).
[118]Neste caso, o termo *ombra dritta* representa o mesmo que *umbra recta*.

6 CONSIDERAÇÕES NO CAMINHAR ENTRE O USO DO *GNÔMON* E DO *ESQUADRO MÓVEL*

O percurso histórico vivenciado, ao fazer esta pesquisa, permitiu um olhar para um tempo de longa duração e para um lugar, berço desse tempo. Desafiador é pensar que o estudo de um tipo de problema prático, o de encontrar a medida de alturas de objetos, presente em livros do Renascimento, instigou, naturalmente, outras investigações concernentes aos indivíduos, que produziram tais obras, às suas motivações e aos contextos sociais e econômicos da época em que viveram. Neste ensaio conclusivo pretendeu-se relatar de que modo os objetivos foram alcançados e apontar caminhos possíveis para outras questões de pesquisas, a fim de complementarem ou lançarem diferentes olhares sobre este trabalho. Afinal, como coloca Braudel (2009b), o caminho de uma pesquisa deve ser sempre da realidade social ao modelo, depois, do modelo à realidade social, e assim sucessivamente, num processo de idas e vindas ou, de construção, desconstrução e reconstrução.

A obra resultante aqui é fruto do olhar para problemas de medição de alturas numa perspectiva histórica através de livros do Renascimento. Eles e seus respectivos autores fizeram parte de uma realidade social, a partir da qual, as reconstruções propostas nesta investigação, se procurou compreender aquele mundo em que tais problemas precisavam ser solucionados.

Peço permissão ao leitor, neste capítulo final, para que, em alguns momentos, seja feita referência à primeira pessoa do singular ou à primeira pessoa do plural.

A busca por analisar textos e contextos dos problemas de medição de alturas em livros do Renascimento induziu, inevitavelmente, a um caminho de leituras antes não conhecidas por mim. O encantamento especial pela história, unido ao desejo de aprofundar em uma pesquisa matemática de cunho histórico, certamente, não foram suficientes para arriscar numa vereda historiográfica. Apenas isso não foi o bastante. Foi preciso conhecer e procurar compreender como a historiografia vem sendo tratada ao longo dos tempos pelos historiadores, foi também necessário fazer escolhas teóricas na tentativa de explorar e desenvolver um estilo próprio de escrita, mesmo não sendo uma historiadora. Trabalho que se mostrou muito complexo, apesar, é claro, que compensador, pois para uma pessoa com formação matemática, os estilos de escrita e os modos de ver e representar o mundo sempre tomaram um viés mais técnico. Acredito num ganho essencial de maturidade a todo aquele que arrisca a escrever história, vista como uma ciência. Aproveito para enaltecer a fala de Braudel (2009, p. 68) e concordar com ela, quando menciona que a pesquisa histórica deve ser encaminhada num processo de ir e vir entre a realidade social e o modelo. Entendo que são nessas idas e vindas que evoluímos como pesquisadores na área de história.

Em uma pesquisa histórica, independente do objeto de investigação, ciências devem ser convidadas pelo pesquisador a estabelecerem relações de “diálogos”, e, se na pesquisa se conta uma história dos homens no tempo, obrigatoriamente, há uma necessidade de buscar, ao máximo possível, vestígios sobre tal objeto, nos diferentes campos que ele permeia. Neste estudo foi preciso recorrer à teoria da história, à história da matemática, à matemática, sendo ainda mediadas, de modo geral, por outras ciências como a sociologia, a geografia e a economia.

Ao se iniciar um processo de pesquisa, sempre deve haver em mente, uma questão-guia que se quer responder. Com ela, acontece a busca pelas fontes que, provavelmente, fornecerão as pistas para encontrar respostas. Entretanto, o aprofundamento nas fontes pode fazer com que o pesquisador altere e/ou melhore sua pergunta de pesquisa ou o seu problema ou vice-versa. De fato, no caso deste trabalho, eu e minha orientadora pensávamos em uma análise de problemas de medição de alturas nos livros para cada século, do XV até o XIX. Porém, o “garimpo”, o exame das fontes e as sugestões dos membros da banca (por ocasião do segundo Exame de Qualificação) mostraram que a decisão mais conveniente para a delimitação do tempo da pesquisa seria não aquela indicada por séculos, mas por uma classificação de épocas históricas. Mesmo porque, pesquisar obras, produzidas do século XV ao XIX demandaria um tempo que extrapolaria o previsto para esta investigação. Nesse sentido, estabelecemos o tempo do Renascimento para a escolha dos nossos livros, sem a preocupação específica de encontrar um autor para cada um dos séculos do Renascimento, mas com o foco de obter autores que pudessem contribuir com essa história. Essa escolha, por exemplo, nos deu liberdade para tratar de um autor italiano do século XV, Leon Battista Alberti, e mais dois autores, o francês Oronce Finé e o italiano Ottavio Fabri, estes viveram num mesmo século, o XVI. Eles divulgaram em suas obras instrumentos distintos de medidas, exerceram profissões e influências diferentes para os indivíduos de seus tempos, entre outros fatores os quais permitiram estabelecer comparações.

Compreender o tempo e o lugar de produção dos livros, escolhidos para a pesquisa, representou a busca por compreender o Renascimento e também a Itália e a França nesse período.

O Renascimento teve suas primeiras transformações conhecidas historicamente através da Itália no século XIV. Foi o tempo vivido por Leon Battista Alberti, no qual existiam grandes preocupações com construções de fortificações, evolução da artilharia, medições e arquitetura. Tanto que esse autor se destacou, mundialmente, como representante da arquitetura, e a sua maneira de tratar a perspectiva influenciou nossos modos de olhar até hoje. Nessa fase, conforme Flores (2007), tudo começava a ser guiado por um pensamento mais objetivo e racional, originário de um indivíduo que passou a se ver como capaz de conhecer um novo mundo, dado ao conhecimento. Nessa época, destacamos também o realce do realismo, principalmente, o advindo das pinturas e dos retratos. Nesse contexto, a matemática achou lugar para sua utilização.

A primeira metade do século XVI, período incluído no dito *Cinquecento* e o tempo vivido pelo francês Oronce Finé, representou uma extensão das intensas tendências intelectuais e artísticas do século XV, além de ter promovido uma transformação profunda no sistema internacional europeu, que se referiu, especialmente, à expansão do comércio, à formação de um mercado mundial e ao domínio dos grandes espaços oceânicos. Essa transformação também está relacionada com uma forte luta que existiu na época, pelo controle da Itália, essencialmente, entre a França e a Espanha. Também, foi tempo de aparecimento das monarquias modernas na França, Inglaterra e Espanha (JAGUARIBE, 2001).

Finé viveu no período de maior impacto das grandes navegações, chegou até a confeccionar mapas que impressionaram estudiosos no século passado, e foi um especialista em fortificações. Segundo Jaguaribe (2001), as navegações, nesse tempo, promoveram o aumento da gama de conhecimentos produzidos pela humanidade e proporcionaram a verdadeira base para o mundo moderno em duas direções: uma, que destituiu mitos e verdades incontestáveis dos cientistas clássicos e medievais; e outra, que suscitou acontecimentos novos que influenciaram a análise mais profunda de várias áreas, como a geografia, a cosmologia e as ciências naturais.

Em relação à época vivida pelo autor Ottavio Fabri, entre a segunda metade do século XVI e o início do século XVII, podemos afirmar que, em termos culturais, deu prosseguimento aos movimentos intelectuais e artísticos do século XV, como também surgiu "uma nova preocupação com a religião, e uma nova compreensão da fé cristã, com a Reforma e a Contra-Reforma" (JAGUARIBE, 2001, p. 458).

Mais especificamente, em relação à Itália do *Cinquecento*, Braudel (2007) observa que, de 1450 até 1650, ocorreram dois séculos e três Itálias, quais sejam: uma Itália "pacífica" (de 1454 até 1494); uma Itália "devastada" (de 1494 até 1559); e uma Itália "inesperada" (de 1559 até 1650). Dessas Itálias, aquela do tempo vivido por Ottavio Fabri, classificada por Braudel (2007) como uma "Itália inesperada", é vista por ele, de certo modo, como inexplicável. A descrição mais relevante desse período foi a paz duradoura que se introduziu pouco a pouco através dos Estados e das economias daquele país.

A Itália, do fim do século XVI ao início do século XVII, encontrou-se no auge de sua irradiação, com uma evidente prosperidade. A título de ilustração e, mais especificamente, mencionando a Veneza de Fabri, constatamos, no terceiro capítulo[119] da segunda parte da obra sobre o Mediterrâneo de Braudel (1983), que num balanço industrial feito por ele sobre a cidade, ela possuía milhares de artesãos e pedreiros e de outros profissionais como moleiros, operários do preparo da pasta de papel, caldeireiros, ferreiros, ourives, dentre outros. Tudo isso coaduna com o que estudamos sobre a vida de Fabri, pois ele, certamente, esteve imerso nessa "Itália inesperada" e próspera. Participou dela como um importante funcionário do

[119]Título do terceiro capítulo: *Pode construir-se o <<modelo>> da economia mediterrânica?*

governo veneziano, foi rico comerciante juntamente com seu irmão e também grande colecionador de obras de artes.

Os autores analisados, Alberti, Finé e Fabri e as suas obras refletem o contexto social e cultural em que viveram e no qual produziram seus trabalhos. Como já observamos, cada um deles teve algum tipo de relevância na sua sociedade. Contribuíram para o desenvolvimento científico da época, escrevendo livros, registrando necessidades e problemas vivenciados.

Uma questão que levantamos é sobre a relação entre a Trigonometria desenvolvida até o Renascimento e o uso de suas propriedades para resolver problemas práticos. O fato é que Alberti, Finé e Fabri não utilizaram, nos seus livros que foram analisados, as razões trigonométricas para resolverem os problemas de medição de alturas, apesar de tábuas de senos já terem sido elaboradas naquela época. Todavia, os três autores aplicaram propriedades geométricas elementares com base na concepção do Teorema de Tales e de semelhança de triângulos. Por que isso aconteceu?

Na tentativa ratificar a afirmação acima e de responder a questão colocada, na dissertação de mestrado, intitulada *Trigonometria: uma abordagem histórica e uma análise de livros didáticos* (BIRAL, 1999), nós tratamos de autores do tempo do Renascimento e de suas respectivas obras sobre Trigonometria. Constatamos que o personagem principal da Matemática, no século XV, foi Johan Müller (1436-1476), conhecido por Regiomontanus. Ele completou uma tradução do grego para o latim da principal obra sobre Astronomia da Antiguidade, o *Almagesto* de Ptolomeu (cerca de 150 d. C.), obra que possuía uma tábua de cordas. Essa tábua de cordas fornecia a medida das cordas de diversos arcos/ângulos, em ordem crescente e era equivalente a uma tabela de senos de (1/2)º a 90º, por passos de (1/4)º.

Ademais, a obra mais importante de Regiomontanus, *De Triangulis Omnimodis,* representou a primeira exposição europeia sistematizada da Trigonometria Plana e Esférica, num tratamento independente da Astronomia, como era de praxe até essa época, e também marcou o renascimento da Trigonometria. Nela, as únicas funções trigonométricas empregadas foram seno e coseno, no entanto, essa obra influenciou de forma profunda o desenvolvimento posterior da própria Trigonometria e das suas aplicações à Álgebra e à Astronomia (BIRAL, 1999).

Quanto ao século XVI, esse foi um período em que a Trigonometria se desenvolveu com boa qualidade, foi sistematizada e ainda, se calculavam excelentes tábuas. Surgiu, nesse tempo, um *Tratado de Trigonometria*, desenvolvido por Bartholomäus Pitiscus (1561-1613), um clérigo alemão com inclinações para a Matemática. Ele foi o primeiro a utilizar o nome *Trigonometria* e, por volta de 1613, publicou tábuas de senos com quinze casas decimais (BIRAL, 1999).

Tendo em vista esse contexto histórico mencionado anteriormente, o que podemos concluir é que as obras sobre Trigonometria no Renascimento foram produzidas, prioritariamente, para aprimorar as tábuas trigonométricas já formuladas, e não havia ainda naquela época a preocupação de aplicar as razões trigonométricas em problemas práticos de resolução de triângulos. Não fazia parte daquela cultura o uso do seno, por exemplo, para auxiliar na resolução de um problema prático, como o de medição de altura de um determinado objeto. Portanto, os usos do Teorema de Tales, da semelhança de triângulos e da regra de três, juntamente com o auxílio dos instrumentos, eram suficientes para solucionar os problemas de medição de alturas que tratamos nesta investigação.

Sabemos que problemas práticos estão presentes no cotidiano do ser humano desde que ele existe e luta por sua sobrevivência. Podemos conjecturar que os registros desses problemas foram deixados pelo ser humano, desde a época dos desenhos nas cavernas e são, claramente até hoje, apresentados sob diversas formas.

Levando em conta o período do Renascimento, analisamos registros dos problemas de medição de alturas de objetos, preferencialmente, em livros produzidos a partir de técnicas de impressão, utilizando uma matriz em madeira ou em cobre e também a partir da "Era da Imprensa", que dessa forma foi classificada, segundo Schubring (2003), pela inovação decisiva de Johann Gutenberg em 1445, provocando a mudança essencial na produção de livros, devido à introdução dos tipos móveis que passaram a permitir a impressão de um número grande de cópias, acelerando assim a reprodução de textos.

Nos livros analisados encontramos os enunciados dos problemas, suas resoluções e, na maior parte dos casos, as ilustrações respectivas. Isso mostra a preocupação natural de cada autor em elucidar o problema não só por meios técnicos e/ou matemáticos, mas também, através da visualização do problema de calcular a altura em questão. Desse modo, é relevante tratar de algumas questões especiais: De que forma as ilustrações apareceram nos livros, desde o Renascimento? Como elas foram importantes para o desenvolvimento de cada obra?

As ilustrações presentes nas obras do Renascimento foram incorporadas ao texto, de acordo com a forma de produção de livros na época. Conforme Febvre e Martin (2005), havia naquele tempo o costume de ilustrar e decorar com pinturas o texto de certos manuscritos, como os livros de horas, missas, obras piedosas, livros de cavalaria ou tratados de caça. Contudo, esses manuscritos ilustrados, escritos por habilidosos copiadores e ilustradores e, às vezes, por célebres pintores, só eram acessíveis a grupos reduzidos de privilegiados, senhores eclesiásticos ou leigos e burgueses.

Com a imprensa, houve um aumento da quantidade de cópias produzidas e uma maior divulgação dos trabalhos escritos, no entanto, percebe-se que este tipo de trabalho “manual” de pintura continuou na produção de ilustrações nas obras. Mas, tal procedimento era longo e trabalhoso e só podia ser usado, quando se tratava de exemplares especializados, impressos, geralmente, em vitela[120] e dirigidos a importantes personagens. Ao decorar uma grande quantidade de livros impressos e, ao se democratizar o livro, houve necessidade de se recorrer a um procedimento distinto: a reprodução em série dos textos tinha que corresponder, necessariamente, a um meio mecânico para se conseguir o mesmo com as imagens (FEBVRE; MARTIN, 2005).

[120]Tipo de papel assim designado pela sua semelhança com a pele usada nos códices. Disponível em: <http://www.priberam.pt/DLPO/default.aspx?pal=vitela>. Acesso em: 05 nov. 2012.

Outra técnica utilizada industrialmente, antes mesmo da aparição dos primeiros livros impressos, foi o registro em madeira, conhecido por xilogravura[121]. Segundo Febvre e Martin (2005), esta técnica atingiu seu ápice, quando a imprensa foi inventada e, desde o final do século XVI as estampas xilográficas circularam em grande quantidade. A indústria da xilografia floresceu na Alemanha, e os tipógrafos alemães disseminaram essa técnica em outros países, como Itália, França e, posteriormente, Inglaterra e Espanha.

Desse modo, a presença constante das ilustrações em todos os livros da pesquisa nos fez desejar saber mais sobre elas. Compreender como se concebeu a história da presença das ilustrações nos livros, ao longo dos tempos, com base no trabalho de Lucien Febvre e Henri-Jean Martin, sobre a aparição do livro, principalmente, após a era da imprensa, foi fundamental para um olhar mais crítico sobre elas, assim como fazer constatações ou conjecturas sobre a forma como essas ilustrações foram inseridas nas fontes analisadas.

Ressaltamos aqui o caso das ilustrações nos livros italianos, por vários motivos. Com efeito, a primeira obra analisada neste trabalho é de autoria de um artista italiano, que influenciou o mundo da arquitetura moderna, Leon Battista Alberti. A obra analisada - uma tradução italiana de Bartoli (1568) - contém ilustrações elucidativas dos problemas para calcular alturas apresentados por ele. Quanto a Oronce Finé, apresentou ilustrações em suas obras. Ele influenciou, na época, outros autores ao utilizar, temas alegóricos nas margens das páginas e nas letras iniciais dos capítulos de seus trabalhos. Por fim, considerando Ottavio Fabri, seu tempo foi aquele de certo avanço no campo das impressões dos livros, em relação às xilogravuras em madeira. Isso coaduna com as informações da folha de rosto do seu *L'Uso della squadra mobile*, onde está escrito que todas as ilustrações ali foram esculpidas em cobre, ou seja, observamos outro estilo de impressão de figuras nos livros que eram produzidos naquela época. No entanto, as impressões em cobre nos

---

[121]Etimologicamente, a palavra xilogravura é composta por **xilon**, do grego, e por **grafó**, também do grego. **Xilon** significa madeira e **grafó** é gravar ou escrever. Assim, xilogravura é uma gravura feita com uma matriz de madeira. Simplificando, pode-se dizer que é um processo de impressão com o uso de um carimbo de madeira. Disponível em: <http://www.casadaxilogravura.com.br/xilo.html>. Acesso em: 06 nov. 2012.

livros encareciam muito suas produções, significando que o acesso a esse tipo de trabalho não era para muitos.

Nossa história construída só se tornou possível pela documentação que tivemos acesso e que nos possibilitou obter respostas às nossas questões. Assim, concordamos com Braudel (2009b) quando afirma que existe todo um passado por reedificar. Esta história aqui proposta também coaduna com as ideias de Lucien Febvre, citadas por Braudel (2009b, p. 35): ela sempre apareceu como uma explicação do homem e do social a partir do tempo, "que só nós, historiadores, sabemos manejar, e sem o que, nem as sociedades, nem os indivíduos do passado ou do presente retomam o aspecto e o calor da vida".

Considerando a proposta de uma história tripartite de Braudel, de uma história de um tempo *geográfico* (de longa duração), *social* e *individual*, acreditamos que foi possível permear, neste trabalho histórico, também por uma história de pelo menos dois desses tempos: o social e o individual.

Quanto à história de um tempo *social*, a dos grupos e dos agrupamentos, nós a abordamos, por um lado, quando estivemos diante da história da sociedade em que viveram nossos autores Alberti, Finé e Fabri. Cada um esteve envolvido em um contexto social que contribuiu para reforçar o papel de cada um dentro de sua sociedade. Por outro lado, discorremos por uma história de um tempo *social* no sentido em que ela pautou uma mudança de público a que se dirigiram os autores. De fato, Alberti escreveu para a nobreza, Finé escreveu para iniciados no tema geometria e Fabri, direcionou seu texto para um público mais geral, com vistas ao uso prático de seu livro.

Quanto à história de um tempo *individual* sobre a qual tratamos, ela se refere à história ocorrencial, àquela da vida dos autores protagonistas dessa história e que nos permitiu compreender mais as influências que exerceram no meio em que viveram e que na história, como afirma Braudel (2009b), o indivíduo representa mais uma abstração e nunca um ser encerrado em si mesmo.

Levando em conta nossa aproximação com a história braudeliana e, ponderando a questão central desta pesquisa, a de analisarmos textos e contextos dos problemas que envolveram a medição de alturas de objetos no período do Renascimento, alguns aspectos especiais sobre tais problemas foram tratados (enunciados, linguagens, ilustrações, abordagens resolutivas e instrumentos de medida) e, a seguir, fazemos algumas considerações conclusivas sobre o que também aprendemos nesse caminhar.

Nos livros analisados, os enunciados dos problemas sempre foram apresentados com um caráter mais generalista, do tipo, “calcular a altura de um objeto vertical”. Todavia, era comum a aparição de dados numéricos na resolução, a fim de melhor esclarecê-los. Quanto à linguagem de apresentação dos problemas (tanto dos enunciados quanto das resoluções), ela era em estilo retórico nas três obras, exibia-se praticamente um diálogo entre o autor e o leitor.

As ilustrações mostraram-se riquíssimas em detalhes, nos autores Oronce Finé e Ottavio Fabri. Havia neles uma preocupação em transcrever para o desenho uma simulação da possível realidade dos problemas. Já Leon Battista Alberti, apesar de ter apresentado ilustrações que imitavam a realidade, visava instruir a situação-problema em si. Isso, provavelmente, porque Alberti não dispunha, na época, de recursos de impressão que lhe possibilitassem incluir figuras mais elaboradas na produção de sua obra. Como já comentamos, os manuscritos da *Matemática Lúdica* dele se perderam e o que utilizamos, como base, foi uma tradução de Cosimo Bartoli de 1568 que, provavelmente, imitou as ilustrações propostas por Alberti, em seu texto original.

As abordagens resolutivas nos problemas analisados tornaram-se motivo de estudos bem mais aprofundados em relação às nossas expectativas. Isso porque para compreender bem cada resolução, era preciso antes elucidar, minuciosamente, o processo de fabricação dos instrumentos (como foi o caso do quadrante geométrico e do esquadro móvel) para, posteriormente, compreender as resoluções. Ademais, nas resoluções dos problemas nos livros, na maior parte das vezes, as propriedades matemáticas ficavam implícitas, o que incitou a então pormenorizá-las, visando constatar que as resoluções estavam corretas, asseguradas pelas ferramentas matemáticas usadas.

Antes de fazer uso das propriedades trigonométricas para resolver os problemas de medição de alturas e do uso dos instrumentos modernos de medição de alturas (como o teodolito digital para medir ângulos), os instrumentos de medição representaram, em cada época aparelhos imprescindíveis para resolução de problemas da vida cotidiana (não só de medição de alturas). A quantidade expressiva de profissionais artesãos, possuidores de habilidades específicas para fabricação de instrumentos, que surgiu em tempos de Renascimento e Barroco, demonstraram a relevância que eles tinham naquele tempo.

Encontramos, nos livros analisados, uma quantidade expressiva de problemas de medição de alturas, como também problemas de cálculos de distâncias e de profundidades, mas escolhemos de cada autor, apenas alguns deles, para não sermos repetitivos, porque os demais, embora tratassem de situações diferentes, usavam os mesmos princípios matemáticos já explicitados, assim como os mesmos instrumentos.

O caminho da investigação histórica trilhada fez compreender que, de uma questão simples, a de analisar textos e contextos de problemas de medição de alturas em livros do Renascimento, muitas abordagens puderam ser feitas, mas também outras questões podem ser consideradas, a título de novas pesquisas ou até mesmo, com desdobramentos das que foram abordadas aqui.

Uma questão que se coloca, quanto à utilização dos instrumentos (auxiliares ou de medidas) no processo de medição de alturas é: em que medida instrumentos distintos levam a tratamento matemático distinto? Ou seja, um caminho que pode ser analisado é sobre a questão da precisão no uso dos instrumentos. Podemos pensar em examinar, por exemplo, qual dos três processos de utilização de instrumentos traz resultados mais precisos ou, mais próximos do valor real.

Além disso, foi possível reconhecer que os três autores, Alberti, Finé e Fabri usaram nas resoluções desses problemas, na época do Renascimento, praticamente, as mesmas propriedades geométricas como, por exemplo, a semelhança de triângulos, o Teorema de Tales, e também as proporções. No entanto, sabemos que, no século XVIII, o matemático Adrien-Marie Legendre já utilizava em sua obra as propriedades das razões trigonométricas, como o seno, para resolver problemas de medição de alturas. Uma questão de pesquisa futura, que surge dessa situação, é: como e a partir de qual momento, passou-se a utilizar, nos livros, as propriedades da Trigonometria, na resolução dos problemas de medição de alturas?

Outro desdobramento deste trabalho está, intrinsecamente, ligado à Educação Matemática, pois, como já observamos, os problemas de medição de alturas de objetos estão presentes até hoje nos livros didáticos de Matemática. Acreditamos que, assim, compreender o modo como eles foram resolvidos no Renascimento e depois, aprender como foram resolvidos posteriormente e, em época atual, pode ser um caminho produtivo para o professor ensinar.

Uma possibilidade de estratégia metodológica é o desenvolvimento e a aplicação de uma sequência didática, em sala de aula, numa abordagem histórica, a fim de contribuir para o aluno compreender o uso de conceitos matemáticos no processo de solução de problemas, envolvendo medição de alturas. Para explicar com mais clareza essa ideia, apresento, a seguir, resumidamente, um trabalho realizado por Cesana (2011), professora de matemática do Ensino Médio, o qual culminou, na sua monografia de Pós-Graduação em Educação Básica, intitulada, *Problema de medir a altura de um objeto vertical: abordagem histórica numa sequência didática* sob minha orientação.

O objetivo da pesquisa dessa professora foi o de analisar como aplicação de uma sequência didática numa abordagem histórica pode contribuir para a compreensão da utilização de conceitos matemáticos na resolução de problemas, envolvendo cálculo de alturas verticais. A sequência didática baseou-se em referenciais teóricos que dão ênfase à História da Matemática, como recurso metodológico, ao ensino da Matemática e à Teoria das Situações Didáticas. Caracterizou-se por uma pesquisa qualitativa de abordagem histórico-bibliográfica e por um estudo de caso. Embasou-se também na Engenharia Didática, para analisar os resultados obtidos com a aplicação da sequência. A sequência didática proposta para a prática docente teve, por eixo norteador, a resolução de um problema de medir a altura de uma torre. Primeiro, aplicando um método validado pela proporção entre segmentos, retirado do livro *Matemática Lúdica* de Leon Battista Alberti (2006), seguido da apresentação de outra proposta, empregando métodos e instrumentos mais modernos e validado pelas razões trigonométricas. Os alunos fizeram a medição da altura de um objeto vertical (selecionado na própria escola onde a pesquisa foi feita), aproveitando materiais como: hastes de madeira, teodolitos construídos pelos alunos, além de materiais didáticos usuais. A turma de alunos, participante da pesquisa, dividiu-se em quatro grupos para realização das atividades durante cinco aulas de uma hora cada. Os dados coletados por meio das observações em cada aula e a análise do questionário respondido pelos alunos mostraram que as razões trigonométricas foram mais compreendidas e valorizadas pelos alunos. No entanto, eles entenderam, como essencial, conhecer o processo histórico de evolução das ferramentas matemáticas usadas para resolver os problemas de medição de alturas (CESANA, 2011).

Nessa tendência, outras pesquisas poderiam ser feitas por professores de matemática, utilizando-se da elaboração de sequências didáticas que contemplem as construções dos instrumentos propostos por Oronce Finé e Ottavio Fabri, respectivamente, o quadrante geométrico e o esquadro móvel, além do emprego dos mesmos para serem encontradas alturas de objetos.

Vimos-nos, enfim, diante de uma história como a compreendida por Braudel (2009), no sentido de existirem ofícios, histórias e uma junção de tendências para se averiguarem fatos, pontos de vista, possibilidades que vão cada dia sendo acrescentados a outros fatores. Neste momento da pesquisa, entendemos como contempladas as respostas às questões levantadas, porém, isso não representa o fim desta narrativa histórica, já que outros olhares sobre o tema abordado poderão suscitar novas perguntas e desse modo, um processo contínuo de desenrolar histórico se estabelecerá.

7 REFERÊNCIAS

FONTES DAS ANÁLISES DOS PROBLEMAS

1. ALBERTI, Leon Battista. **Matemática Lúdica/Leon Battista Alberti**. Edição apresentada e comentada por Pierre Souffrin; tradução, André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.[122]

2. BARTOLI, Cosimo. **Opuscoli morali di Leon Battista Alberti gentil'huomo fiorentino, tradotti e parte corretti da M. Cosimo Bartoli**. Venezia: Francesco de'Franceschi, 1568. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=MDY8AAAAcAAJ&printsec=frontcover&dq=Opuscoli+morali+di+Leon+Battista+Alberti&hl=pt-PT&sa=X&ei=gd2aUMmBBKzU0gHi9oBw&redir_esc=y>. Acesso em: 20 jan. 2012.

3. FABRI, Ottavio. **L'Uso della squadra mobile**. Padova: Pietro Bertelli, 1615. Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/4KY9GTGC/pageimg&viewMode=images>. Acesso em: 03 set. 2012.

4. FINEO, Orontio. **Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Orivoli, EtgliSpecchi**. Venetiá: Presso Francesco Franceschi Senese, 1587. Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/P9R3M8SW/pageimg&viewMode=images>. Acesso em: 15 jun. 2010.

OBRAS CITADAS

5. ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. Martins Fontes: São Paulo, 1998.

6. BARONI, Rosa L. S.; NOBRE, Sergio. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

7. BIRAL, Andressa Cesana. **Trigonometria: uma abordagem histórica e uma análise de livros didáticos**. 1999. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada). Programa de Pós-Graduação em Matemática. Pontifícia

[122]Tradução de: *Ludi matematici*. Tradução brasileira autorizada a partir da versão francesa de Pierre Souffrin, *Divertissements mathematiques*. Apêndice: Comentários – Lista dos manuscritos conhecidos – A pequena balança (La Bilancetta), Galileu Galilei.

Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.

8. BLOCH, Marc Leopold Benjamin. **A sociedade feudal**. Lisboa: Edições 70, 1982. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/13475585/A-Sociedade-Feudal>. Acesso em: 26 mar. 2011.

9. BLOCH, Marc Leopold Benjamin. **Apologia da história, ou, O ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2001.

10. BRAUDEL, Fernand. **Civilização material, economia e capitalismo: séculos XV-XVII: As estruturas do cotidiano**.V. 1. 1. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

11. BRAUDEL, Fernand. **Civilização material, economia e capitalismo: séculos XV-XVII: O tempo do mundo**. V. 3. 2. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2009a.

12. BRAUDEL, Fernand. **Escritos sobre a história**. Tradução de J. Guinburg e Tereza Cristina Silveira da Mota. São Paulo: Perspectiva, 2009b.

13. BRAUDEL, Fernand. **La historia y las ciencias sociales**. Madrid: Alianza Editorial, 1970.

14. BRAUDEL, Fernand. **O Mediterrâneo e o Mundo Mediterrânico na Época de Filipe II**. V. 1. 1. ed. Lisboa: Martins Fontes, 1983.

15. BRAUDEL, Fernand. **O modelo italiano**. Tradução de Franklin de Mattos. São Paulo: Companhia das Letras, 2007.

16. BREDEKAMP, Horst. Gazing hands and blind spots: Galileo as draftsman. In: RENN, Jürgen. **Galileo in context**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

17. BURKE, Peter. **A Escola dos Annales (1929-1989): a revolução francesa da historiografia**. Tradução de Nilo Odalia. 2. ed. São Paulo: Editora da UNESP, 2010.

18. BURKE, Peter. **História e teoria social**. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

19. BURKE, Peter. **O renascimento italiano: cultura e sociedade na Itália**. Tradução de José Rubens Siqueira. São Paulo: Nova Alexandria, 1999.

20. BYINGTON, Elisa. **O projeto do Renascimento**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

21. CAMBI, Franco. **História da pedagogia**. Tradução de Álvaro Lorencini. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

22. CAROLINO, Luís Miguel. O declínio do império astrológico. **Revista de História da Biblioteca Nacional**. Rio de Janeiro: Sociedade de Amigos da

Biblioteca Nacional: 2011. Disponível em: <http://www.revistadehistoria.com.br/secao/dossie-imigracao-italiana/o-declinio-do-imperio-astrologico>. Acesso em: 08 out. 2012.

23. CARVALHO, João Pitombeira de. Os três problemas clássicos da Matemática Grega. In: II BIENAL DA SBM. 2004, Salvador. **Anais**... Salvador: SBM, UFBA e Instituto do Milênio, 2004. P. 1-21.

24. CARVALHO, Joaquim de; PERES, Manuel (orgs). **Pedro Nunes: Obras**. Nova edição revista e anotada por uma comissão de sócios da Academia das Ciências. Vol. III. De erratis Orontii Finaei Regii Mahematicarum Lutetiae Professoris. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, MCMLX (1960).

25. CASTAGNETTI, Giuseppe; CAMEROTA, Michele. Raffaello Caverni and his History of the Experimental Method in Italy. In: RENN, Jürgen. **Galileo in context**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

26. CERTEAU, Michel de. **A Escrita da História**. Rio de Janeiro: Forense Universitária. 2010.

27. CESANA, Vanessa Bayerl. **Problema de medir a altura de um objeto vertical: abordagem histórica numa sequência didática**. 2001. Monografia (Especialização em Ensino na Educação Básica). Programa de Pós-Graduação em Educação Básica. Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, Espírito Santo, 2011.

28. CHARLOT, Bernard. A pesquisa educacional entre conhecimentos, políticas e práticas: especificidades e desafios de uma área de saber. In: **Revista Brasileira de Educação**. Rio de Janeiro, v. 11, n. 31, jan./abr. 2006.

29. CHARTIER, Roger. **Os desafios da escrita**. Tradução de Fulvia M. L. Moretto. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

30. D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

31. D'AMORE, Bruno. Leon Battista Alberti ed i suoi Ludi rerum mathematicarum. In: **Il Carobbio**. Bologna, Itália, XXX, p. 61-66, 2005. Disponível em: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/Leon%20Battista%20Alberti.pdf>. Acesso em: 7 ago. 2011.

32. DAIX, Pierre. **Fernand Braudel: uma biografia**. Tradução de Clóvis Marques. Rio de Janeiro: Record, 1999.

33. DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Vol. 2. Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2010.

34. DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília: SBEM, 2009.

35. DIDEROT; D'ALEMBERT. **Enciclopédia ou Dicionário raciocinado das ciências, das artes e dos ofícios por uma sociedade de letrados. Discurso preliminar e outros textos**. (Tradução de Fúlvia Maria Luiza Moretto). São Paulo: UNESP, 1989.

36. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. V. 9. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

37. DOSSE, François. **A História em migalhas: dos *Annales* à Nova História**. Tradução de Dulce Oliveira Amarante dos Santos. Bauru, SP: EDUSC, 2003.

38. FEBVRE, Lucien; MARTIN, Henri-Jean. **La aparición del libro**. México: FCE, Libraria, 2005.

39. FINÉ, Oronce. **La composition et usage du quarre geometrique, par lequel on peut mesurer fidelement toutes longueurs, hauteurs, & profunditez, tant accessibles, comme inaccessibles, que lon peut apperceuoir à l'ceil: Le tout reduit nouuellement en François, escrit, e pourtraict**. Paris: Avec Privilege, 1556. Disponível em: <http://www.bvh.univ-tours.fr/Consult/consult.asp?numtable=B372615206_15105&numfiche=129&mode=3&offset=0&ecran=0>. Acesso em: 02 nov. 2011.

40. FINEI, Orontii. **Solaribus Horologiis, & Quadrantibus, Libri quatuor**. Paris: Lutetiae Parisiorum, 1560. Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?url=/mpiwg/online/permanent/library/N8XZR6KW/pageimg&viewMode=images&pn=3&mode=imagepath>. Acesso em: 29 maio 2012.

41. FINEO, Orontio. **Liber de geometria practica: sive de practicis longitudinum, planorum et solidorum hoc est, linearum, superficierum et corporum mensionibus alijsque mechanicis, ex demonstratis Euclidis elementis corollarius ; vbi [ubi] et de quadrato geometrico, et virgis seu baculis mensorijs [mensoriis]**. Argentorati: Knobloch, 1558. Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?url=/mpiwg/online/permanent/library/661KYHE9/pageimg&viewMode=images&pn=5&mode=imagepath>. Acesso em 29 maio 2012.

42. FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

43. FLORES, Cláudia. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva**. São Paulo: Musa, 2007.

44. FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa. **Análise de conteúdo**. 2. ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2005.

45. GINZBURG, Carlo. **O queijo e os vermes: o cotidiano e as ideias de um moleiro perseguido pela inquisição**. São Paulo: Companhia das Letras, 2006.

46. GORENDER, Jacob. **Brasil em preto e branco: o passado escravista que não passou**. Série Livre Pensar. V. 4. São Paulo: Editora SENAC, 2000.

47. GRATTAN-GUINNESS, Ivor. **Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences**. V. 1. London and New York: Routledge, 1994.

48. HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. **Física 4**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2004.

49. HELLER, Agnes. O homem do Renascimento. Lisboa: Editorial Presença, 1982.

50. JAGUARIBE, Helio. **Um estudo crítico da histórica**. Tradução de Sérgio Bath. V. 2. São Paulo: Paz e Terra, 2001.

51. JANKAUSKAS, Marina. **A minissérie Os Pilares da Terra mostra como a Idade Média está na moda na TV**. 2011. Disponível em: <http://revistamonet.globo.com/coluna/2011/10/12/a-minisserie-os-pilares-da-terra-mostra-como-a-idade-media-esta-na-moda-na-tv/>. Acesso em: 6 abril 2012.

52. LEFÈVRE, Wolfgang. Galileo Engineer: Art and Modern Science. In: RENN, Jürgen. **Galileo in context**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

53. LIMA, Luís Corrêa. O Brasil transforma Braudel. **Instituto Fernand Braudel de Economia Mundial**, São Paulo, out. 2005. Disponível em: <http://pt.braudel.org.br/pesquisas/arquivos/2005/o-brasil-transforma-braudel.php>. Acesso em: 04 jul. 2012.

54. MIRANDA, Evaristo Eduardo de. **O descobrimento da biodiversidade: a ecologia de índios, jesuítas e leigos no século XVI**. São Paulo: Edições Loyola, 2004.

55. MORÁS, Antonio. **Os entes sobrenaturais na Idade Média: imaginário, representações e ordenamento social**. São Paulo: Annablume, 2001.

56. MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: ideias e desafios**. 9° ano. Manual do Professor. 15 ed. reform. São Paulo: Saraiva, 2009.

57. PANEPINTO, Emanuele. **Ottavio Fabri, perito et ingegnero publico**. Tese (Laurea Specialistica in Storia e Geografia dell'Europa – Indirizzo Geografico)

– Facolta' di Lettere e Filosofia, Universita' Degli Studi di Verona, Verona, 2008/2009.

58. PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. Ensino Médio. Vol. 1. 1. ed. São Paulo: Moderna: 2009.

59. RENN, Jürgen. Galileo in Context: an engineer-scientist, artist, and courtier at the origins of classical sciences (Editor's Introduction). In: RENN, Jürgen. **Galileo in context**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

60. RENN, Jürgen et al. Hunting the white elephant: when and how did Galileo discover the law of fall? In: RENN, Jürgen. **Galileo in context**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

61. REZENDE, Wagner de Souza. **Medida por medida, da representação à simulação, do analógico ao digital**. 2006. 146 f. Dissertação (Mestrado em Arquitetura) – Núcleo de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

62. RICOEUR, Paul. **A memória, a história, o esquecimento**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2007.

63. ROCHA, Antonio Penalves. F. Braudel: tempo histórico e civilização material. Um ensaio bibliográfico. In: MUSEU PAULISTA, vol. 3, n° 1, 1995. **Anais**... São Paulo: Scielo, 1995, p. 239-249.

64. ROJAS, Carlos Antonio Aguirre. **Os Annales e a historiografia francesa: tradições críticas de Marc Bloch a Michel Foucault**. Tradução e revisão técnica de Jurandir Malerba. Maringá/PR: EDUEM, 2000.

65. SAD, Ligia Arantes; SILVA, Circe Mary Silva da. "Reflexões teórico-metodológicas para investigações em história da matemática". In: **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, n. 30, 2008, p. 27-46.

66. SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumentos de medida do século XVI. In: IX Seminário Nacional de História da Matemática, 9, 2011, Aracaju. **Coleção História da Matemática para professores**. Aracaju: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

67. SCHUBRING, Gert. **Análise histórica de livros de matemática: notas de aula**. Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas/SP: Autores Associados, 2003.

68. SHARP, Dennis. **A Enciclopédia Ilustrada de Arquitetos e Arquitetura**. Nova York: Editora Quatro, 1991. NA 40.I45. ISBN 0-8230-2539-X. p 11-12. Disponível em: <http://www.greatbuildings.com/architects/Leon_Battista_Alberti.html>. Acesso em: 29 jun. 2012.

69. SILVA, Circe Mary Silva da. Qual o papel da História da Matemática na Educação Matemática? In: VIII SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2009, Belém, Pará. **Anais do VIII Seminário Nacional de História da Matemática**. Belém: SNHMat, 2010. p. 167-177.

70. SIQUEIRA FILHO, Moysés Gonçalves. “As estratégias utilizadas na resolução de problemas: criando oportunidades para se rever o ensino da matemática”. In: *Caderno de Pesquisa*. *Formação e práxis do professor:* **Educação Matemática**, n.10, p. 99-124. Vitória: UFES/PPGE, 1999.

71. SMITH, David Eugene. **History of mathematics**. Volume II. Special topics of elementary mathematics. New York: Dover Publications, Inc., 1958.

72. SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. Coleção Novo olhar. Vol. 1. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

73. STUCKRAD, Kocku von. **História da Astrologia: da Antigüidade aos nossos dias**. Tradução de Kelly Panos. São Paulo: Globo, 2007.

TERMOS EXTRAÍDOS DE SÍTIOS DA INTERNET

1. ALBRECHT Dürer. 2000. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Durer2.htm>. Acesso em: 25 abril 2012.

2. ALBRECHT Dürer: The completes works. Disponível em: < http://www.albrecht-durer.org/>. Acesso em: 25 abril 2012.

3. BIBLIOTECA Digital Mundial. Um mapa múndi moderno e completo pelo matemático real Oronce Fine, de Delfinado. 2011. Disponível em: <http://www.wdl.org/pt/item/4072/>. Acesso em: 28 maio 2012.

4. CINZEL. Dicionário online de português. Disponível em: <http://www.dicio.com.br/cinzel/>. Acesso em: 26 abril 2012.

5. COLLÈGE de Navarre. Disponível em: <http://www.cosmovisions.com/monuParisCollegeNavarre.htm>. Acesso em: 28 maio 2012.

6. CÔVADOS. PRIBERAM. Disponível em <http://www.priberam.pt/dlpo/definir_resultados.aspx?pal=c%F4vados>. Acesso em 11 nov. 2011.

7. ÉCOLE Pratique dês Hautes Études. Disponível em: <http://www.ephe.sorbonne.fr/>. Acesso em: 23 jun. 2012.

8. JEAN Fouquet. Só biografias. 2011. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/>. Acesso em: 22 ag. 2013.

9. ESCOLA de Fontainebleau. France.fr. O website oficial da França. Disponível em: <http://www.france.fr/pt/arte-e-cultura/o-castelo-de-fontainebleau>. Acesso em: 22 ag. 2013.

10. GNÔMON. Instrumentos antigos de Astronomia. Disponível em: <http://www.iag.usp.br/siae98/astroinstrum/antigos.htm>. Acesso em: 10 out. 2012.

11. HEEMa. História e Epistemologia na Educação Matemática. 2008. Disponível em <http://heema.org/?page_id=9>. Acesso em: 24 jun. 2011.

12. INSTRUMENTOS antigos da Astronomia. Disponível em: <http://www.iag.usp.br/siae98/astroinstrum/antigos.htm>. Acesso em: 08 maio 2012.

13. JACQUES Le Goff: a paixão pelo medieval. História por Voltaire Schilling. Disponível em <http://educaterra.terra.com.br/voltaire/cultura/2004/07/05/001.htm>. Acesso em: 26 mar. 2011.

14. JOAQUIM de Carvalho: Vida e Obra. Disponível em: <http://www.joaquimdecarvalho.org/>. Acesso em: 01 jun. 2012.

15. JUAN E. Nápoles Valdés. Biografia. Editora Sulina. Disponível em: <http://www.editorasulina.com.br/autor_det_2.php?id=377>. Acesso em: 03 nov. 2012.

16. L'UNIVERSITE de Paris au XVIè Siecle. Disponível em: <http://www.renaissance-france.org/rabelais/pages/universite3.html>. Acesso em: 28 maio 2012.

17. LEONE Battista Alberti. Biography. 2006. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Alberti.html>. Acesso em: 29 nov. 2010.

18. LES Bibliothèques Virtuelles Humanistes. Disponível em: <http://www.bvh.univ-tours.fr/Consult/index.asp?numtable=B372615206_15105&numfiche=129&mode=3&offset=0&ecran=0&url=>. Acesso em: 28 maio 2012.

19. MARC Bloch. Biografia. Uol Educação. Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/biografias/marc-bloch.jhtm>. Acesso em: 08 mar. 2011.

20. MENDES, Iran Abreu. *Ensino da Matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática*. Natal, RN, 2001. 283p. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001. Resumo de tese disponível em:

<http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=200117323001011001P1>. Acesso em: 24 jun. 2011.

21. NÔNIO ou Vernier. Disponível em: <http://fisica.uems.br/lab1/nonio-vernier.pdf>. Acesso em: 03 set. 2013.

22. O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F. The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Alberti. 2006. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Alberti.html>. Acesso em: 04 abril 2012.

23. O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F. The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Galileo Galilei. 2002. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Galileo.html>. Acesso em: 08 jul. 2013.

24. O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F. The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Marcus Vitruvius Pollio. 2008. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Vitruvius.html >. Acesso em: 30 jan. 2013.

25. O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F. The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Oronce Finé. 2005. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/FINE.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

26. O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F. The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Pedro Nunes Salaciense. 2010. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nunes.html>. Acesso em: 21 jan. 2013.

27. O PROBLEMA DE POTHENOT. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/24620133/O-problema-de-Pothenot>. Acesso em: 24 fev. 2013.

28. PEDRO Nunes e a Astrologia. Portal do Astrónomo. Disponível em: <http://www.portaldoastronomo.org/tema94.php>. Acesso em: 14 fev. 2013.

29. PONTE de Rialto. Disponível em: <http://www.aviewoncities.com/venice/rialtobridge.htm>. Acesso em: 01 ag. 2012.

30. VITELA. PRIBERAM. Disponível em: <http://www.priberam.pt/DLPO/default.aspx?pal=vitela>. Acesso em: 05 nov. 2012.

31. XILOGRAVURA. Casa da Xilogravura. Disponível em: <http://www.casadaxilogravura.com.br/xilo.html>. Acesso em: 06 nov. 2012.