UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Daniel Moreira dos Santos

ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO MENTAL DE ALUNOS DA 5ª SÉRIE/6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

VITÓRIA

2014

Daniel Moreira dos Santos

ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO MENTAL DE ALUNOS DA 5ª SÉRIE/6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação na Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de mestre em Educação, na linha de pesquisa Educação e linguagens, sublinha de Linguagem Matemática, vinculada ao campo científico de Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

VITÓRIA

2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial de Educação,
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Santos, Daniel Moreira dos, 1988-

S237e Estratégias de cálculo mental de alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental / Daniel Moreira dos Santos. – 2014.

172 f. : il.

Orientador: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Adição. 2. Aprendizagem – Matemática. 3. Ensino fundamental. 4. Matemática. 5. Matemática – Estudo e ensino. 6. Subtração. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos, 1955-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
PPGE UFES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

35 ANOS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PPGE-UFES

DANIEL MOREIRA DOS SANTOS

ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO MENTAL DE ALUNOS DA 5ª. SÉRIE/6º. ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Educação.

Aprovada em 28 de março de 2014.

COMISSÃO EXAMINADORA

Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Jussara Martins Albernaz
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Jaqueline Magalhães Brum
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

AGRADECIMENTOS

Grato, primeiramente, ao meu Senhor Jesus Cristo pela vida e por todo o processo de pesquisa. Sem seu favor nada disso seria possível.

Renovo aqui a gratidão que tenho como dívida à minha família por todo o apoio e compreensão nos momentos em que estive ausente. Agradeço aos meus pais por sempre acreditarem em mim e na minha carreira e pelas palavras de ânimo que carrego comigo todos os dias. A Monick, minha esposa, por ter me dado seu amor, sua compreensão e paciência, seu carinho em todos os instantes e seu lindo sorriso. Aos meus irmãos Brunella e Rafael, por partilharem seus sonhos, amor e amizade comigo.

Agradeço à minha orientadora, professora doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, por partilhar com dedicação seu conhecimento em matemática e educação matemática, por seus conselhos profissionais e pessoais que, certamente, me lembrarei.

Também agradeço aos professores do ensino médio Danilo e Daniel Simões de Sousa pela oportunidade e incentivo em minha carreira. Aos professores que tive durante a graduação em matemática. Em especial, agradeço à professora Julia S. Wrobel pela iniciação científica, pelo projeto Matemática Divertida e por me incentivar a continuar meus estudos no mestrado em educação matemática. Agradeço ao professor Tercio Girelli Kill pelas aulas de Didática da matemática, pela bolsa de estudos durante seu doutoramento, pelos momentos de reflexão sobre matemática, história e educação. Agradeço à professora Hellen Castro Almeida Leite pelas aulas de Estágio I, pela bolsa no LAMATI, por sua compreensão em muitos momentos. Agradeço à professora Isabel Cristina Rabelo Gomes por suas aulas de Estágio II, por suas palavras de incentivo e por sua correção do meu pré-projeto de pesquisa.

O próximo agradecimento é destinado aos colegas de mestrado e doutorado que cursaram comigo as disciplinas específicas da linha de pesquisa e outras disciplinas de educação. Vocês me proporcionaram muitos momentos de aprendizagem e reflexão, além de momentos de descontração que tornaram essa caminhada ainda mais agradável. Obrigado Alexsandra Senna, Thais Leal, Bernadete Hoffmann, Cátia Palmeira, Geraldo Broetto, Messenas Rocha e Leandra dos Santos.

Aos amigos do grupo de estudos, o GEEM-ES, que compartilharam comigo suas experiências em sala de aula e suas reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem.

Também deixo o meu sincero agradecimento à diretora, coordenadora pedagógica, professora Silvia, aos pais e alunos da escola participante da investigação. Sem o acolhimento de vocês, este trabalho não teria sido possível.

Igualmente, agradeço às professoras doutoras Célia Maria Carolino Pires, Jaqueline Magalhães Brum e Jussara Martins Albernaz, por aceitarem, prontamente, a contribuir com este estudo. Ainda agradeço à FAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta pesquisa de mestrado teve como principal objetivo investigar estratégias de cálculo mental, utilizadas por alunos de uma 5ª série/6º ano do ensino fundamental ao resolver cálculos de adição e subtração. Para atingir este objetivo procuramos responder aos questionamentos: Quais estratégias de cálculo mental, alunos da 5ª série/6º ano empregam na resolução de cálculos de adição e subtração? Que relações existem entre o tipo de cálculo envolvido e a estratégia adotada para resolvê-lo? Para respondermos a essas questões, seguimos uma metodologia de natureza qualitativa, configurada como estudo de caso do tipo etnográfico. O trabalho de campo foi desenvolvido em uma turma de 5ª série/6º ano do ensino fundamental de uma escola pública da rede estadual de ensino do município de Serra. A pesquisa aconteceu de maio a dezembro de 2013. Oito alunos resolveram uma atividade diagnóstica composta de quatro sequências de cálculos mentais, a saber, fatos fundamentais do número 5, do número 10, do número 20 e do número 100, dentre adições e subtrações próximas a esses resultados. Todos alunos participaram da etapa de entrevistas. Dos oito alunos, foram escolhidos dados de três que participaram de outras etapas da pesquisa. Os registros realizados pelos alunos na etapa de observação da turma, na etapa diagnóstica e na etapa de intervenção didática, as anotações no caderno de campo e algumas gravações em áudio serviram como fontes de coleta de dados. Utilizamos as estratégias identificadas por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998), Thompson (1999, 2000) e Lucangeli et al. (2003), como categorias de análise. Através da análise de dados, constatamos que as escolhas das estratégias de cálculo mental pelos alunos variaram de acordo com o tipo de sequência de cálculos, a operação aritmética (adição ou subtração) e o estado emocional deles durante a atividade. Foi possível identificar o uso de duas estratégias combinadas, o algoritmo mental e estratégias de contagens nos dedos para grande parte dos cálculos. O uso do algoritmo mental mostrou-se um procedimento de grande sobrecarga mental e, em alguns cálculos de adição sem reserva, serviu apenas como apoio à visualização numérica, sendo executado pelo aluno da esquerda para a direita, semelhantemente à estratégia de decomposição numérica. Os dados deste estudo apontam para: (i) a necessidade de se trabalhar fatos numéricos fundamentais de adição e subtração via cálculo mental de maneira sistemática em sala de aula; (ii) a necessidade de se ensinar estratégias autênticas de cálculo mental para que os alunos não se tornem dependentes de estratégias como contagens e algoritmo mental, que são mais difíceis de serem executadas com êxito; (iii) a importância de entrevistar, individualmente, os alunos a fim de compreender e avaliar o desenvolvimento destes em tarefas de cálculo mental.

Palavras-chave: Matemática. Ensino fundamental. Adição e subtração. Cálculo mental. Estratégias de cálculo mental. Sentido numérico.

ABSTRACT

The major objective of this research was to investigate strategies of mental calculation used byelementary school students in the fifth and sixth grade to solve addition and subtraction equations. For that purpose, we sought to answer the following questions: Which strategies of mental calculation do fifth and sixth-grade students use to solve addition and subtraction equations? What is the relationshipbetween the type of calculation and the strategy adopted for the solution? To answer these questions we followed a quantitative methodology configured as ethnographic case study. Our fieldwork was developed with a group of elementary students in the fifth and sixth gradeat a state public school in the city of Serra. The research recurred from May to December 2013. Eight students solved a diagnostic activity composed of four sequences of mental calculation: basic facts of numbers 5, 10, 20 and 100, among additions and subtractions close to these results.All the students also took part in the interviews.Out of eight students, we selected data of three students who took part in other stages of the research. As source to collect data,we used every record made by the students during group observation, diagnostic stage and didacticintervention stage, as well as notes from our fieldwork notebook and audio recording. We used the strategies identified by Beishuizen (1997), Klein and Beishuizen (1998), Thompson (1999, 2000) and Lucangeli et al (2003) as analysis categories. Through the data analysis, we verified that the students decided on a certain strategy of mental calculation according to the type of calculation sequence, the arithmetic operation (additionor subtraction) and their emotional condition during the activity. Two combined strategies were observed:the mental algorithm and strategies of finger counting for most of the calculations. The use of mental algorithm proved excess mental overload; with the student conducting it from the left to the righ – similarly to the strategy of numerical decomposition - for some cases of addition without carrying, the mental algorithm functioned only to support numerical display.Data in this study indicate: (i) teachers should be required to work sistematically with basic numerical facts for addition and subtraction via mental calculation during classes; (ii) teacher should be required to provide students with authentic strategies of mental calculation to make them not dependable on mental counting or algorithm – rarely successfully executed; (iii) it is important to interview each student in order to understand and assess their development in mental calculation tasks.

Key words: Mathematics. Elementary school. Addition and subtraction. Mental calculation. Strategies of mental calculation. Numerical sense.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO[1]

Neste capítulo, apresento um retrospecto de como surgiu meu interesse pela matemática, pelo ensino de matemática e, mais especificamente, a motivação para esta pesquisa. Procurei justificar a importância do tema cálculo mental para a sala de aula e para o ambiente de pesquisa. Encaminhei, em seguida, as questões de investigação, os objetivos da pesquisa e um quadro onde relacionei os objetivos de pesquisa com os questionamentos e os procedimentos de coleta de dados. Finalizei com a organização dada a este relato final de pesquisa.

1.1 - Retrospecto

Meu interesse pelo estudo da matemática começou cedo, ainda no ensino fundamental. Tive bons professores de matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio. Desde essa época, eu já aspirava ao estudo da matemática no ensino superior. Fazendo o ensino médio, busquei o ensino técnico para aprender a usar o computador. Estudei na Unidade Descentralizada de Serra do Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo (CEFETES/Uned Serra), atual Instituto Federal do Espírito Santo (IFES). O foco do curso técnico em informática era a construção de softwares. O último módulo do curso tinha uma disciplina cuja conclusão exigia a criação de um jogo em Actionscript, a linguagem de programação usada no programa de animações Adobe Flash. Mesmo tendo gostado de programação de computadores, continuei me preparando para o vestibular de matemática. Já na graduação em matemática na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), fui bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET/Matemática), e precisávamos estar inseridos em atividades de ensino, pesquisa e extensão. Participei por pouco tempo do Projeto Cartan, que oferecia aulas de matemática a alunos do ensino fundamental com altas habilidades. Logo em seguida, o projeto foi, temporariamente, desativado. Nesse período, tínhamos apenas disciplinas específicas de matemática e meu interesse, assim como o da maioria dos meus colegas, era a atividade de

[1] Redigi parte deste capítulo na primeira pessoa do singular em passagens que expressam questões pessoais.

pesquisa. Fui monitor de cálculo I e de geometria analítica, o que me permitiu ter algum contato com o ensino antes das disciplinas da modalidade licenciatura.

Durante o curso, pensava em integrar a informática e a matemática em minha formação. No ano de 2010, comecei a me interessar pelos jogos em matemática graças à introdução das disciplinas específicas da licenciatura. Foi quando me apresentei ao lúdico como ferramenta no ensino e aprendizagem de matemática. Nesse momento, quis me envolver com a pesquisa em educação matemática. Procurei a professora Drª Julia Schaetzle Wrobel do Departamento de Matemática da UFES, para obter orientação em algum tema relacionado ao ensino de matemática que pudesse estudar. Fui atendido e, como ainda não tinha um tema definido, a professora sugeriu que eu fizesse um levantamento em periódicos do que estava sendo discutido na área. Comecei a iniciação científica.

A professora Daiana Stursa, de psicologia da educação para o sexto período de licenciatura em matemática, indicou-me os trabalhos de Lino de Macedo e colegas[2]. Interessei-me por esse autor que trabalha com jogos educacionais. Sua linha de pesquisa é sobre o valor dos jogos na psicologia e educação, como recurso de observação e promoção de processos de aprendizagem e desenvolvimento, na visão de Piaget. Destaquei em suas pesquisas alguns trabalhos relacionados à aprendizagem matemática. Em seguida, li alguns autores que despertaram meu interesse pelo estudo dos jogos computacionais no ensino de matemática e outros temas, relacionando informática e educação matemática. Passei a desenvolver jogos para o ensino de matemática, depois de uma monitoria da disciplina iniciação ao estágio II, quando ajudava alguns alunos de uma turma de 7ª série/8º ano a resolver equações do primeiro grau. Constatei um tema de estudo e uma forma de unir a matemática e a informática: Jogos computacionais no ensino de equações. Percebi que os alunos resolviam com pouca dificuldade as equações da forma “ax=b”, isto é, encontrar um x tal que o produto dele por a resulte em b não era um obstáculo. Contudo, quando tínhamos

---

[2] MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS N. C. **Aprender com Jogos e Situações-Problema.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul, 2000. 116 p.
___________; PETTY, A. L. S.; PASSOS N. C. **Os Jogos e o Lúdico na Aprendizagem Escolar.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul, 2005. 110 p.

equações do tipo “ax + c = -bx + t - dx”, não raras vezes, os alunos erravam e juntavam termos não semelhantes. Por exemplo, somavam (a+c)x. Ignoravam algumas vezes a igualdade, “trocando o termo de lado” sem trocar o sinal, desequilibrando a equação. Refletindo sobre esse processo, logo tive a ideia de criar um jogo computacional de resolução das equações do primeiro grau, onde ficasse claro para o aluno que devemos juntar os termos semelhantes e observar a mudança de sinais dos termos com a mudança de lado da igualdade. Fiz um esboço em uma folha em branco de como seriam as suas telas, efeitos visuais e sonoros, evidenciando cada operação e respondendo aos estímulos do usuário. A proposta na iniciação científica foi desenvolver o jogo e avaliar o resultado do teste obtido da aplicação dele em uma turma de 7ª série/8º ano, o que resultou em um artigo intitulado “Jogo Computacional Equacione Brincando no ensino de equações algébricas” publicado nos anais do I Colóquio de Matemática da Região Nordeste (SANTOS; WROBEL, 2011).

Em seguida, redigimos[3] o projeto intitulado “Jogos Computacionais Livres para o Ensino de Matemática” a fim de concorrer na categoria Bolsa Cultura Tech do Programa Rede Cultura Jovem, filiado à Secretaria de Cultura do Espírito Santo (Secult) e financiado pelo Instituto Sincades. Esse programa financia jovens que querem contribuir para o desenvolvimento cultural do Espírito Santo. O projeto foi aprovado, tendo suas atividades desenvolvidas em 2011, ao longo de seis meses, sendo os três primeiros usados para pesquisa bibliográfica acerca dos impactos do lúdico e dos computadores na aprendizagem escolar e os últimos três meses reservados para produção, distribuição, divulgação e recolhimento das avaliações feitas por professores e pesquisadores em educação matemática. Produzimos sete jogos computacionais com código fonte aberto, gravados em trezentos CDs dos quais duzentos foram distribuídos nas escolas, partindo da última semana de agosto de 2011 e parte dos cem restantes durante a II Semana de Matemática / III Seminário de Educação Matemática e Educação Tecnológica / IX Encontro Capixaba de Educação Matemática, realizados no IFES Campus Vitória, em maio de 2012. Na ocasião, tive a oportunidade de ministrar uma oficina, explorando

[3] A partir daqui, utilizaremos a primeira pessoa do plural na introdução significando a minha participação e a da Profª. Drª. Julia S. Wrobel, orientadora da Iniciação Científica, nas atividades que se seguem.

dois dos jogos desenvolvidos no projeto. São eles o Soma 10 e o Memória 10. Um dos objetivos a serem alcançados pelo projeto é a avaliação dos jogos, segundo requisitos pedagógicos e de usabilidade. Essa avaliação foi feita por professores através do site[4] Matemática Divertida e durante um curso de formação continuada na prefeitura municipal de Vitória[5].

1.2 - Motivação

A motivação para esta pesquisa teve início na criação do jogo computacional Soma 10. O Soma 10 foi desenvolvido com o objetivo pedagógico de estimular o cálculo mental exato e por estimativas com números inteiros em turmas de sexto ano em diante. Posteriormente, notamos[6] que poderíamos trabalhá-lo em anos anteriores, após estudo exploratório, em duas turmas de quarto ano do ensino fundamental de escolas da rede municipal de Vitória. Com essa experiência, passamos a crer que o referido jogo tem potencial para motivar a busca por regularidades e propriedades numéricas, propiciar um ambiente motivador para a descoberta e o cálculo mental, estimular estratégias pessoais de cálculo mental e trabalhar os fatos fundamentais, totalizando dez. Durante a sua execução, o aluno deve criar estratégias que lhe permitam atingir a maior pontuação possível.

Outro fator contribuiu para o meu interesse de estudo nessa temática. O meu primeiro contato com os estágios iniciais do desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático e, em particular, das primeiras noções numéricas veio quando era aluno monitor do Núcleo Interdisciplinar de Estudos de Processos de Aprendizagem Cognição e Interação Social (NIEPACIS) e encontrei no Laboratório de Aprendizagem Matemática e Informática Educativa (LAMATI) o livro "A criança e o número" da autora Constance Kamii (1984). Nessa obra, a autora, discípula de Jean Piaget, aborda assuntos quanto à natureza do número, aos objetivos para ensinar número, aos princípios de ensino e às situações nas

[4] http://www.matdivertida.mygamesonline.org
[5] O curso foi apenas sobre o jogo computacional Soma 10.
[6] O plural se refere ao pesquisador juntamente com a profª. Drª. Julia S. Wrobel e a profª. Drª. Vânia Maria P. dos Santos-Wagner. Esta reflexão foi feita em conjunto e resultou em um artigo que está em fase de publicação.

escolas que podem ser usadas pelos professores para ensinar número, além da autonomia como finalidade da educação. Kamii (1984) afirma que a construção do conceito de número dá-se internamente, e o professor deve agir, criando oportunidades para o desenvolvimento da autonomia intelectual da criança, encorajando-a a colocar os objetos em todos os tipos de relações. Esse meu primeiro contato investigativo com o ensino de matemática trouxe uma necessidade de olhar de forma mais investigativa para outros assuntos ligados ao conceito de número, como por exemplo, as operações aritméticas, os fatos fundamentais e mais, especificamente, o cálculo mental.

1.3 – Justificativa

Ter o conhecimento de várias estratégias de cálculo (seja escrito por meio de algoritmos, material concreto, representação pictórica, mental ou com uso de calculadoras) e, com autonomia, lançar mão da mais adequada em cada situação é uma competência fundamental para a formação cidadã do indivíduo. Desse modo, é interessante investigar as estratégias de cálculo mental, porque se evidencia a forma como o indivíduo procede autonomamente. Ao invés de, simplesmente, darmos um algoritmo ou um caminho de solução, analisamos a estratégia que a criança lançou mão e inferimos questões sobre a sua aprendizagem.

Dentre suas atribuições, a escola deve propiciar um ambiente que favoreça a aprendizagem autônoma e a formação crítica ao cidadão. No entanto, algumas pesquisas e indicadores têm apontado uma formação matemática ineficiente. Estudos baseados no Indicador de Alfabetismo Funcional (INAF) sobre competências matemáticas dos brasileiros revelam que o cálculo mental exato e aproximado e a calculadora são os meios mais utilizados pela população em situações comuns do dia a dia (GOMES, 2007; BENITES, 2011). Em contraste, a maioria desses mesmos sujeitos afirma usar o lápis e o papel em situações escolares. Além disso, Gomes (2007) afirma que a análise dos resultados do INAF mostra a pouca eficiência do uso do cálculo mental e da calculadora, apesar da grande frequência. A pesquisadora chega a essa conclusão porque muitas pessoas não resolvem, corretamente, as questões do teste e do questionário sobre práticas cotidianas com a matemática, utilizando cálculo mental e a calculadora[7]. Por isso, reconhecemos[8] ser importante um ensino eficaz de cálculo mental, já que ele é o mais usado e o mais ineficiente. Um grande passo nesse tema de estudo é a presença de recomendações nos Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática (PCN) (BRASIL, 1997, 1998) quanto ao uso de atividades, incluindo o cálculo mental, bem como exercícios e sugestões ao professor trazidas por diversos livros didáticos atuais. Conforme os PCN

> No mundo atual saber fazer cálculos com lápis e papel é uma competência de importância relativa e que deve conviver com outras modalidades de cálculo, como o cálculo mental, as estimativas e o cálculo produzido pelas calculadoras, portanto, não se pode privar as pessoas de um conhecimento que é útil em suas vidas (BRASIL, 1998, p. 45).

Corroborando com o documento acima, notamos o mesmo que Gomes (2007), em relação à nossa experiência, enquanto aluno, e de nossos estudos sobre competências de cálculo. Concluímos que a matemática escolar ainda caminha para o equilíbrio entre cálculo escrito, ensino de algoritmos, estimativa, uso de calculadora e de cálculo mental. Acreditamos que trabalhar atividades de cálculo mental pode contribuir para o desenvolvimento do senso numérico e permitir uma intimidade maior com os números, fazendo com que as crianças não tenham medo de experimentar suas próprias estratégias de resolução. Temos notado através das leituras que o cálculo mental ainda não é muito explorado em sala de aula, embora fortemente recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática (PCN) (BRASIL, 1997). Nesse pensar, sentimos a necessidade de trabalhar com atividades que desenvolvem o senso numérico, estimulam a compreensão e a memorização dos fatos fundamentais e ajudam a desenvolver a própria competência de cálculo mental.

---

[7] Segundo Gomes (2007) este é o instrumento utilizado para avaliação das habilidades matemáticas da população. Para seu estudo, Gomes utilizou a base de dados do INAF referente ao ano de 2004.

[8] A partir daqui utilizaremos o plural que indica reflexões do pesquisador iniciante juntamente com a Professora Drª. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, orientadora desta pesquisa de mestrado.

Com base nessas reflexões, delimitamos nossa questão de investigação: **Quais estratégias de cálculo mental alunos da 5ª série/6º ano[9] utilizam ao resolver tarefas de adição e subtração?** Tentaremos responder ainda ao seguinte questionamento: **Que relações existem entre a tarefa de adição e subtração envolvida e a estratégia de cálculo mental adotada para resolvê-la?**

Chamamos de estratégias os procedimentos utilizados pelos alunos sem nenhuma instrução do pesquisador e da professora regente da turma. Escolhemos uma turma de 5ª série/6º ano por se tratar da primeira série/ano da segunda etapa do ensino fundamental e, por isso, os conhecimentos dos alunos dessa turma não se diferem muito dos conhecimentos matemáticos de alunos que estão no fim da primeira etapa do ensino fundamental.

1.4 - Objetivos da pesquisa

Geral

1. Investigar estratégias de cálculo mental, possíveis relações entre essas estratégias e tipos de tarefas de adição e subtração propostas a alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental.

Específicos

1. Analisar estratégias de cálculo mental desenvolvidas por alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental durante resolução de tarefas de adição e subtração com total menor ou igual a 5 ($a + b \leq 5$), total menor ou igual a 10 ($a + b \leq 10$), total menor ou igual a 20 ($a + b \leq 20$), total menor ou igual a 100 ($a + b \leq 100$).
2. Analisar relações entre a tarefa de adição e subtração envolvida e a estratégia utilizada por alunos da 5ª série/6º ano para resolvê-la.

[9] A escola ainda mantém a nomenclatura série ao invés de ano. Dessa forma, manteremos no texto as duas formas, por exemplo, 5ª série/6º ano.

Escolhemos trabalhar os fatos fundamentais de adição e subtração com os números cinco, dez, vinte e cem, porque esses números são quantidades de referência no sistema numérico decimal, portanto, auxiliam no cálculo mental com outras quantidades.

1.5 - Relações entre objetivos, questionamentos e coleta de dados

O quadro abaixo relaciona nossos objetivos específicos de pesquisa com os questionamentos específicos e a questão geral de investigação e com as tarefas, atividades e recursos empregados para a coleta de dados. Essa relação nos auxiliou a pensar na problemática de pesquisa de forma panorâmica ou geral e a elaborar tarefas que atendessem aos objetivos e respondessem às perguntas deste estudo.

Quadro 1: Relações entre objetivos, questionamentos e coleta de dados

Objetivos específicos	**Questionamentos**	**Tarefas para coleta de dados**
1. Analisar estratégias de cálculo mental desenvolvidas por alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental durante resolução de tarefas de adição e subtração com total menor ou igual a 5 ($a + b \leq 5$), total menor ou igual a 10 ($a + b \leq 10$), total menor ou igual a 20 ($a + b \leq 20$), total menor ou igual a 100 ($a + b \leq 100$).	a. Quais estratégias de cálculo mental alunos da 5ª série/ 6º ano utilizam ao resolver tarefas de adição e subtração?	Sequência diagnóstico de cálculos mentais de adição e subtração Entrevista individual com os alunos sujeitos da pesquisa.
2. Analisar relações entre a tarefa de adição e subtração envolvida e a estratégia utilizada por alunos da 5ª série/6º ano para resolvê-la.	b. Que relações existem entre o tipo de tarefa de adição e subtração envolvida e a estratégia de cálculo mental adotada para resolvê-la?	Observação das estratégias dos alunos durante tarefas de intervenção didática. (Mecanismos para coleta de dados: entrevistas individuais e registros feitos pelo pesquisador no caderno de campo). Listas de exercícios preparadas pela professora e pelo pesquisador.

1.6 – A organização da dissertação

Preocupamo-nos em deixar, no início de cada capítulo, uma explicação sobre o seu conteúdo e a ordem em que os argumentos foram redigidos. Aqui, nesta seção, esclarecemos, em linhas gerais, como o restante da dissertação está organizado. No capítulo dois, fizemos uma revisão de literatura de alguns trabalhos acadêmicos a que tivemos acesso e que se relacionam com nossa temática de pesquisa. Abordamos assuntos pertinentes ao tema e que nos auxiliaram na tarefa de análise e interpretação dos dados coletados. No capítulo três, expusemos o percurso metodológico da pesquisa, sua natureza e como essa se configura, as etapas da pesquisa, nossos planejamentos, características da escola, da professora, da turma e dos alunos participantes do estudo bem como a organização da tarefa diagnóstica e os procedimentos de coleta e análise de dados. No capítulo quatro, apresentamos os dados coletados de três alunos participantes da pesquisa em três etapas, a saber: a etapa de observação, a etapa diagnóstica e a etapa de intervenção didática, e trouxemos uma síntese dos resultados de toda a turma na etapa diagnóstica. Por fim, no capítulo cinco, exibimos nossas considerações finais, algumas evidências que auxiliaram a compreender a questão de investigação, nossas aprendizagens, as limitações desta pesquisa e algumas recomendações para estudos posteriores.

2 – REVISÃO DE LITERATURA E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

2.1 - REVISÃO DE LITERATURA

A revisão feita neste trabalho teve por objetivo reunir dissertações, artigos, livros e documentos oficiais que envolvem a temática do problema de pesquisa. Estudamos os conceitos de sentido numérico, cálculo mental, fatos fundamentais, memória e memorização, automatização de processos em matemática e estratégias de cálculo mental. Procuramos trabalhos que mostrassem o movimento histórico do valor e das concepções de cálculo mental e também trabalhos que trouxessem reflexões quanto ao papel do cálculo mental e seu uso em sala de aula. Refletimos sobre a importância da memorização e automatização de fatos fundamentais para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e quais estratégias alunos do ensino fundamental mobilizam ao resolver cálculos mentais de adição e subtração.

2.1.1 - O cálculo mental na história do ensino de matemática no Brasil

A dissertação de Beltrame (2000) examina a evolução do ensino de matemática no Brasil por meio dos programas de ensino de matemática do colégio Pedro II, desde sua fundação em 1837 até o ano de 1932. Beltrame (2000) justifica que como o colégio Pedro II era uma referência em ensino secundário no Brasil, a observação dos seus programas dá uma panorâmica desse nível de ensino no país. O objetivo específico do estudo foi “observar, através da análise comparativa destes documentos, quais as alterações de conteúdo sofridas por tais programas” (p. 1). O período de análise foi delimitado até a reforma de 1931, pois, segundo a pesquisadora, após o ano de 1931, o Ministério da Educação e Saúde passou a se responsabilizar pelos programas de ensino para utilização em todas as escolas de ensino secundário do Brasil. E mais, os programas passaram a ser encontrados com mais facilidade.

A investigação de Beltrame (2000) nos deu a oportunidade de notar o movimento do cálculo mental no decorrer do período pesquisado por ela. A primeira aparição do termo cálculo mental nos programas de matemática do colégio Pedro II data, em 1881, com uma recomendação a “exercícios de cálculo mental” (BELTRAME, 2000, p. 174). Em seguida, vem a listagem dos tópicos sem outra menção às atividades dessa modalidade. Notamos que, no programa de 1882, não aparece recomendação a exercícios de cálculo mental. O mesmo ocorre para os programas de matemática de 1893 a 1898. Uma recomendação ao uso do cálculo mental volta a aparecer nos programas do Colégio Pedro II, no período entre 1899 a 1901, como vemos:

> O programa, além de se conservar nos convenientes limites, atenderá acuradamente ao lado prático, de maneira que o ensino se torne utilitário por numerosos exercícios de aplicação e por judiciosa escolha de problemas graduados da vida comum (grifo nosso).
> De acordo com tais preceitos, o respectivo docente fará [...] durante o curso uso habitual do cálculo mental e do método de redução à unidade... (BELTRAME, 2000, p. 195-196).

O trecho citado acima aparece no programa de 1901, referente ao período 1901 a 1906. A citação é enfática no caráter prático e utilitário dado ao cálculo mental. Observamos a recomendação a um uso sistemático de exercícios que exercitam a mecânica das operações e problemas que estejam associados ao cotidiano, abrangendo diferentes conteúdos, como números inteiros e racionais. O cálculo mental desaparece, novamente, dos programas de aritmética nos anos 1912, 1915, 1919 e 1923 (BELTRAME, 2000). Segundo Gomes (2007), ele reaparece no Programa de Ensino de Matemática para o ano de 1926. Nesse documento, ainda encontramos uma proposta para um ensino de Aritmética “acentuadamente prático” (BELTRAME, 2000, p. 221). Apresenta, em seguida, uma recomendação a exercícios de cálculo mental.

Em 1928[10], há nova recomendação ao exercício de cálculo mental. No ano seguinte, uma disciplina chamada Matemática (que agrega tópicos de Aritmética, Álgebra e Geometria) é criada. Nesse programa não evidenciamos recomendações ao uso do cálculo mental. No entanto, em 1931[11], reencontramos

[10]“Roxo, depois de ter publicado, em 1922, o livro *Lições de Aritmética*, que representava o início da modernização dessa disciplina, conseguiu fazer aprovar uma reforma curricular radical para a Matemática. Nessa proposta, estavam presentes as ideias defendidas pelo movimento internacional para a modernização do ensino desse campo do conhecimento desde o início do século XX” (GOMES, 2007, p. 4-5).

[11] Ano da Reforma Francisco Campos.

na listagem de conteúdos de aritmética para o primeiro ano o “exercício de cálculo mental” (BELTRAME, 2000, p. 249). Esse programa foi expedido pelo Ministério da Educação para todo o Brasil. Ie há uma preocupação em fazer com que o aluno conheça os processos matemáticos e atenda ao “interesse imediato de sua utilidade” (BELTRAME, 2000, p. 248). Para esse fim, o professor deve despertar, no aluno, a capacidade de resolver e de agir bem como favorecer a capacidade de compreensão. Encontramos o cálculo mental vinculado às duas finalidades citadas:

> Para que satisfaça tais finalidades, a princípio, deve o ensino da Matemática acostumar o aluno à prática dos cálculos mentais, tornando-o seguro e desembaraçado nas operações numéricas. É, pois, necessário que ele compreenda bem o alcance e a natureza das operações elementares e adquira habilidade crescente no modo de aplicá-las (BELTRAME, 2000, p. 248).

Ainda no mesmo documento, constatamos outras menções ao uso e valorização do cálculo mental. Por exemplo: “O cálculo oral, ou escrito, será objeto de constantes exercícios, nos quais deverá sobressair, por sua importância, a prática do cálculo mental” e “Prática das operações fundamentais. Cálculo abreviado. Exercício de cálculo mental” (BELTRAME, 2000, p. 249). Segundo Gomes (2007), “na proposta de 1931, o cálculo mental é valorizado num contexto em que prevalece o ideário da escola nova, manifesto no texto do programa” (p. 6). Cita Miorim ao considerar que o programa solicitava a realização de:

> um ensino orientado segundo o grau de desenvolvimento mental, baseado no interesse do aluno, que deveria partir da intuição e apenas aos poucos ir introduzindo o raciocínio lógico, que enfatizasse a descoberta, e não a memorização (GOMES, 2007, p. 6 apud MIORIM[12], 1998, p. 95).

Em 1942[13], ocorreu uma modificação nos programas de matemática, devido a um movimento contrário à proposta de 1931. Todavia, Gomes (2007) assinala a “manutenção do cálculo mental entre os temas a serem trabalhados na Aritmética Prática do primeiro ano do curso ginasial” (p. 8). Gomes (2007) destaca que em

---

[12] MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

[13] Nova reformulação na organização da educação brasileira, através da Reforma Gustavo Capanema, que implantou a divisão da escola secundária em dois ciclos – o ginasial, de quatro anos, e o colegial (clássico ou científico), de três anos. A reforma Gustavo Capanema permaneceu em vigor até 1961 quando foi aprovada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (GOMES, 2007).

1951, houve um reajustamento nos programas de matemática realizado por meio de uma portaria do Ministério da Educação. Segundo o novo programa não há qualquer recomendação ao uso de cálculos mentais. A partir de 1960, a matemática escolar brasileira sofre mudanças significativas, devido ao que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna. No que diz respeito à aritmética e a seu estudo, passa a ser privilegiado o estudo dos conjuntos numéricos, que são apresentados, conforme a complexidade de sua estrutura. Gomes (2007) enfatiza que, dessa forma, não existia espaço para “valorizar o cálculo mental, e, de fato, constataremos a ausência de referências a ele nos livros didáticos de Matemática produzidos no Brasil nas décadas de 1960 a 1990” (p. 9) [14].

Cabe salientar que, atualmente, o cálculo mental volta a encontrar seu espaço nas diretrizes oficiais da educação brasileira. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática (PCN) enfatizam o uso e o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental como tão importantes quanto o uso de algoritmos, cálculo escrito e o uso de calculadora. Por meio dos trabalhos de Beltrame (2000) e Gomes (2007), conseguimos observar o movimento histórico realizado pelo cálculo mental quanto à sua recomendação e valorização. Por muito tempo, essa modalidade de cálculo foi estimulada, estritamente, pelo seu caráter prático e de uso imediato. Entretanto, descobriu-se que o seu emprego também traz benefícios para a compreensão e análise das relações numéricas.

2.1.2 - A importância do cálculo mental

O estudo de Fontes (2010) teve como objetivo principal identificar as concepções de cálculo mental e sua importância no contexto educacional da rede municipal de São Paulo do 2º ao 5º ano do ensino fundamental. Para Fontes (2010), o cálculo mental é constituído de várias formas pessoais de se obter, adequadamente, um resultado exato ou aproximado, com ou sem o uso de lápis e papel. Fontes (2010) afirma que os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do

[14] Gomes afirma que mesmo em declínio depois da segunda metade dos anos 1970, o Movimento da Matemática Moderna deixou marcas resistentes nos livros didáticos.

sistema de numeração decimal, assim como nas propriedades das operações. Seguindo sua concepção de cálculo mental, afirma que esses procedimentos e estratégias colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica e relações entre os números. Como características dessa modalidade de cálculo, aponta: maior flexibilidade de calcular, maior segurança e consciência na confirmação dos resultados esperados. Para Fontes (2010), apesar de a importância do cálculo mental ser reconhecida pelos documentos oficiais e pelos professores, na prática, ele é pouco explorado em sala de aula. Ademais, sua concepção não é consensual, gerando a necessidade de se ampliar a discussão tanto do valor e papel quanto das metodologias de ensino.

No seu estudo, traz três aspectos para endossar a relevância de sua pesquisa: o crescente investimento em pesquisas no campo da educação matemática; a importância do cálculo mental dentro da perspectiva da aprendizagem com compreensão; e, por último, o baixo desempenho em matemática dos estudantes brasileiros em todos os níveis. Fundamentada nesses três aspectos, Fontes (2010) constata que: as pesquisas acadêmicas apontam o cálculo mental como importante meio para desenvolver o pensamento matemático e a autonomia; os alunos da rede municipal de São Paulo, de maneira geral, não apresentam bons resultados em matemática nas principais avaliações oficiais. Esses dois apontamentos fazem a autora perguntar: Será que o cálculo mental tem sido considerado no contexto escolar das séries iniciais da rede? Como isso tem se dado? De que maneira esse tipo de cálculo é orientado nos documentos curriculares e nos cursos de formação da rede? Como ele é considerado pelos professores? Como ele é significado e trabalhado em sala de aula?

Assim sendo, o objetivo geral da pesquisa foi: Compreender e caracterizar concepções, crenças, valores, atitudes e práticas, a respeito do cálculo mental nas séries iniciais do ensino fundamental, no contexto da rede municipal de São Paulo. Objetivos específicos: Identificar como os cursos de formação oferecidos pela rede abordam o trabalho com cálculo mental e reconhecer como esses recursos influenciam a prática do professor. Identificar como os programas curriculares oficiais orientam e influenciam o trabalho do professor no uso do cálculo mental. Identificar o valor e o papel do cálculo mental para os professores da rede municipal de São Paulo. Evidenciar a percepção do professor sobre o seu papel e o papel do aluno perante as situações de cálculo mental.

Para a coleta de dados por entrevista foi utilizado um questionário semi-aberto. Foi entrevistada uma das formadoras da rede e Fontes (2010) aplicou um questionário fechado para oito professores do 2º ao 5º ano do ensino fundamental, que tinham mais de 10 anos de magistério pela rede municipal. A experiência profissional na rede justifica-se, porquanto, a intenção era entender as concepções de cálculo mental dos professores que, certamente, receberam influência dos documentos curriculares e dos cursos de formação. A análise das diretrizes curriculares do município aponta para uma grande valorização do cálculo mental no ensino fundamental I. Da análise do documento referente ao curso de formação, concluímos que

> o curso, portanto, dá subsídios à discussão sobre a flexibilidade na tomada de decisões por parte dos alunos. O professor deve incentivar e proporcionar momentos para que o aluno tenha contato tanto com cálculo mental, algoritmos e calculadora e tenha destreza com todos eles, usando-os com consciência e compreensão. É o aluno que vai 'decidir' se os cálculos devem ser feitos mentalmente, com papel e lápis ou com instrumentos de cálculo (FONTES, 2010, p. 137).

A entrevista com a formadora diz respeito aos cursos de formação oferecidos pela prefeitura. A formadora afirma que, apesar de o tema ser discutido nos encontros, o uso do cálculo mental em sala de aula ainda é pontual. Entretanto, acredita que houve algum progresso. Fontes (2010) afirma que da análise dos documentos oficiais, questionários respondidos e entrevistas feitas pôde deduzir que há uma crescente valorização do cálculo mental em sala de aula no decorrer do período investigado. Todavia, o uso sistemático dessa modalidade de cálculo ainda está longe da rotina de sala de aula.

2.1.3 - O cálculo mental na sala de aula

Em sua pesquisa, Benites (2011) buscou investigar os procedimentos do professor para o ensino de cálculo mental nos anos iniciais do ensino fundamental. A pesquisa foi desenvolvida dentro da abordagem qualitativa de um estudo de caso etnográfico, incluindo pesquisa bibliográfica, documental e pesquisa de campo. A coleta de dados foi realizada por meio de entrevistas com quatro professores, procurando obter informações sobre como ocorre o ensino e a aprendizagem do cálculo mental, além da análise de documentos oficiais, diários e registros feitos no caderno pelo aluno. A pesquisa se desenvolveu em uma escola pública sob a gestão do município de Presidente Prudente, estado de São Paulo. Os sujeitos da pesquisa eram professores polivalentes dos anos iniciais do ensino fundamental (3º e 4º anos do ensino fundamental). Foram observados os procedimentos que esses professores usavam em sala de aula, os exercícios e as atividades apresentadas aos alunos. Também observaram como os alunos interagiam e desenvolviam o cálculo mental diante das atividades propostas, e como estabelecem relações entre as operações e ocorrência da transposição e mobilização desses conhecimentos para o seu cotidiano. Os dados foram coletados com base nos depoimentos e nas entrevistas com os quatro professores, além da análise de seus diários, dos cadernos dos alunos, Projeto Político Pedagógico da escola e documentos oficiais. A entrevista contou com questões abertas.

Benites (2011) enfatiza que estudos em educação matemática revelam que a grande dificuldade dos alunos está em relacionar o que lhes é ensinado na escola com o que é necessário para o enfrentamento das dificuldades no seu cotidiano. A pesquisadora concentrou sua investigação em entender como o cálculo mental se realiza e se efetiva na prática em sala de aula. Portanto, delimitou a seguinte questão de investigação: A metodologia trabalhada pelos docentes nos anos iniciais do ensino fundamental abre espaço para a apropriação e utilização dos procedimentos do cálculo mental para resolução dos problemas diários dos educandos?

Da análise dos dados, Benites (2011) afirma que

> a formação docente não está direcionada a desenvolver no professor a competência necessária para desempenhar sua função de mediador e proporcionar aos alunos momentos que contribuiriam para sua conquista, para sua aprendizagem (p. 65).

Por essa forte constatação, concluímos que, segundo Benites (2011), a metodologia de ensino-aprendizagem dos professores investigados não contribuiu para que os alunos se apropriassem e empregassem procedimentos de cálculo mental no dia a dia. A pesquisadora ainda afirma que dos professores entrevistados

> somente uma busca conhecer e apresentar técnicas sobre o calculo mental e as demais desconheciam as metodologias e atividades que proporcionariam aos alunos o conhecimento esperado. Válido ressaltar que isto é consequência da formação comprometida que receberam (BENITES, 2011, p. 65).

As participantes da pesquisa foram questionadas sobre quais livros faziam uso e se apresentavam propostas para o ensino de cálculo mental. Somente uma das professoras utilizava a proposta do livro “Ler e Escrever” [15]. Sobre as propostas dos programas oficiais de ensino, três professoras disseram ter conhecimento de que o tema é tratado, mas elas não sabiam qual era o foco do tema. Outras três professoras disseram não conhecer as estratégias de ensino de cálculo mental.

Com respeito aos documentos oficiais, conclui que

> há uma preocupação em capacitar os alunos para a resolução de problemas matemáticos em seu cotidiano, estimulando o próprio aluno a criar estratégias de resolução, assim como, a utilização da linguagem oral e a relação entre ela e as representações matemáticas (BENITES, 2011, p. 78).

Durante a pesquisa somente um professor deu atenção ao tema, mas segundo Benites (2011) não houve ensino das estratégias de cálculo mental para todas as operações. A pesquisadora acrescenta que notavelmente o cálculo mental não recebeu atenção no momento da formação inicial dos professores envolvidos na pesquisa. Somente uma participante lembrou, vagamente, ter realizado alguma atividade durante o magistério. Benites (2011) afirma ainda, que os professores entrevistados não se sentem competentes para realizar o trabalho com cálculo mental, e a maioria dos professores não propõe atividades desse tipo por desconhecerem as estratégias associadas.

---

[15] Detalhes em: http://lereescrever.fde.sp.gov.br

Percebemos que, historicamente, o cálculo mental foi fortemente recomendado quanto ao seu caráter utilitário. Atualmente, diretrizes oficiais nacionais como os PCN apontam o seu uso em sala de aula como atividade benéfica tanto para a aquisição de habilidades de cálculo (úteis para o dia a dia) quanto para a compreensão do número e de suas relações formais (constituindo também um dos objetivos da matemática escolar). No entanto, ainda existe um hiato entre o que dizem as recomendações curriculares e a prática do cálculo mental em sala de aula.

2.1.4 – O cálculo mental na resolução de problemas

Morais (2011) dedicou-se a investigar o cálculo mental na resolução de problemas, envolvendo as operações de adição e subtração em uma turma de 1º ano de escolaridade de uma escola localizada em Lisboa, Portugal, onde lecionava para os alunos sujeitos da pesquisa. O objetivo principal de sua pesquisa foi compreender de que modo os alunos do 1º ano de escolaridade desenvolvem estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtração. Suas questões de investigação associadas a esse objetivo foram: Que estratégias de cálculo mental são utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtração? De que modo evoluem essas estratégias? Será que o significado da operação de adição ou subtração, presente no problema, influencia a estratégia de cálculo mental empregada na sua resolução? Segundo Morais (2011), devido à natureza do estudo, seguiu-se uma metodologia qualitativa, constituindo três estudos de caso.

Os instrumentos de coleta de dados aplicados pela pesquisadora foram os registros dos alunos das soluções dos problemas, notas de campo realizadas por ela e gravações em áudio e vídeo. Foram três sequências de problemas, contemplando diferentes ideias das operações de adição e subtração. Duas sequências resolvidas em duplas e a última, individualmente. Morais (2011) afirma que a análise de dados permitiu observar que as estratégias de cálculo mental dos alunos evoluíram de estratégias elementares como contagens e utilização de fatos numéricos fundamentais para estratégias complexas baseadas em decomposição numérica. Os dados permitiram revelar que as estratégias mudavam de acordo com a operação e a ideia da operação envolvida no problema. Por exemplo, em problemas de subtração com a ideia de retirar, os alunos utilizaram, preferencialmente, a estratégia de decomposição numérica (1010), por exemplo, calculariam 63 – 27, fazendo 60 – 20 = 40, 3 – 7 = – 4 40 – 4 = 36, ou seja, o aluno decompõe os números em dezenas e unidades. Em problemas de completar ou comparar, os alunos utilizaram a estratégia A10 da categoria N10, isto é, calculariam 63 – 27, fazendo 63 -20 = 43 e 43 – 7 = 36, ou seja, o aluno decompõe apenas o segundo número em dezena e unidade para efetuar o cálculo. Veja a seção sobre estratégias de cálculo mental na página 47. Segundo Morais (2011), os dados permitem afirmar que alunos do 1º ano de escolaridade são capazes de mobilizar estratégias complexas de cálculo mental, operadas normalmente, por alunos mais velhos. Enfatiza, portanto, que o professor de matemática deve criar um ambiente de aprendizagem com situações enriquecedoras.

A pesquisa de mestrado de Morais (2011) foi de suma importância para o enriquecimento de nossas leituras sobre cálculo mental, sobretudo, no que tange às estratégias de cálculo mental, normalmente mobilizadas pelos alunos. Essas estratégias foram categorizadas e analisadas por outros pesquisadores, tanto em contexto de resolução de problemas quanto somente com a operação aritmética sem vinculação com nenhuma de suas ideias (BEISHUIZEN, 1997; KLEIN; BEISHUIZEN, 1998; THOMPSON, 1999, 2000). Em nossa pesquisa de mestrado, abordamos as estratégias de cálculo mental identificadas, categorizadas e analisadas por esses pesquisadores bem como fazemos uso de suas pesquisas para analisar as estratégias utilizadas pelos alunos sujeitos de nosso estudo.

2.1.5 – Conhecimentos prévios em cálculo mental

O estudo de Figueiredo (2013) buscou identificar, compreender e caracterizar conhecimentos prévios de alunos de 6º e 7º anos, em relação ao cálculo mental e como esses conhecimentos se relacionam com a construção de primeiras noções algébricas. Sua pesquisa possuiu natureza qualitativa e foi realizada em sua própria turma em uma escola da rede privada de São Paulo Participaram do estudo sete alunos de uma turma de 6º ano e seis alunos de uma turma de 7º ano. Todos os alunos desenvolveram duas atividades, sendo a primeira mais relevante para nosso estudo. Como diz Figueiredo, a primeira atividade tratou-se da investigação das estratégias[16] de cálculo mental aplicadas pelos estudantes em cálculos com números naturais e fracionários. Na segunda tarefa de pesquisa tratou-se de identificar as estratégias trabalhadas pelos alunos que caracterizavam suas primeiras aproximações em cálculos com o uso de letras. Ainda no resumo de sua dissertação Figueiredo (2013) afirma que

> a competência revelada pelos alunos relativa ao cálculo mental com números naturais contribuiu de forma positiva para a exploração das situações algébricas apresentadas, o que mostra a importância de usar esses conhecimentos como âncoras (FIGUEIREDO, 2013, p. 7).

Isso levou a pesquisadora a concluir que os alunos conseguiram resolver os problemas algébricos utilizando seus conhecimentos sobre números naturais e cálculo mental com números naturais, o que não se verificou para números fracionários por conta das dificuldades apontadas na utilização da vírgula.

Em seus estudos, acerca da temática, Figueiredo (2013) traz sua concepção construtivista de ensino-aprendizagem, baseada em Ausubel, que leva em conta as relações que os estudantes estabelecem entre o que sabem e os conceitos novos que lhes são apresentados. O que os alunos já sabem é chamado de conhecimento prévio e pode ter relação direta, ou não, com o que está sendo ensinado, servindo sempre como suporte à aquisição de um novo conhecimento. Este conceito denominado conhecimento prévio está, diretamente, relacionado com o que chamamos, neste estudo, de estratégias de cálculo mental. Queremos identificar e compreender as estratégias de cálculo mental que alunos de 5ª série/6º ano uzam em resolução de problemas de adição e subtração sem que haja ensino de técnicas a priori.

Figueiredo (2013) enfatiza que “quanto mais relações com sentido um aluno for capaz de estabelecer entre o que já conhece e o novo conteúdo, mais significativa será a sua aprendizagem” (p. 26), o que também está de acordo com nossos

[16] A autora utiliza a palavra procedimento ao invés de estratégia.

pressupostos teóricos que estabelecem a importância da compreensão relacional (SKEMP, 1976) e da construção, organização e observação de regularidades em atividades matemáticas (BRASIL, 1997; SANTOS-WAGNER, 2012).

Figueiredo (2013) traz a concepção de cálculo mental trazida por Parra (1996), ao considerar este tipo de cálculo como flexível e adaptável aos números em jogo e sem recorrer a um algoritmo preestabelecido. Parra (1996) cita o "Diseño Curricular Base Educación Primaria" da Espanha, Parra e Saiz (1996) citam o "Programa de Matemática da província de Corrientes e o Diseño Curricular da província de Rio Negro". Ambos os documentos apresentam a mesma concepção de cálculo mental. Figueiredo (2013) chama a atenção para as diretrizes curriculares do Brasil que enfatizam a importância do uso de cálculo mental em sala de aula, tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais do ensino fundamental. Igualmente, o tema é ressaltado nas Orientações Curriculares da Secretaria Municipal de São Paulo (2007).

Notamos, mediante esta revisão de literatura, que já existem algumas pesquisas sobre o desenvolvimento das concepções de cálculo mental no decorrer da história do ensino de matemática no Brasil, pesquisas que procuram refletir sobre a importância e o papel do cálculo mental na aprendizagem numérica e em estratégias de cálculo mental em resolução de problemas, No entanto, ainda são poucas e todas as investigações que encontramos estão concentradas nos anos iniciais do ensino fundamental. Por isso, confiamos na relevância deste trabalho como ampliação para os anos finais do ensino fundamental dos resultados de pesquisa já obtidos nesta temática.

2. 2 - PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Nesta seção, trouxemos alguns resultados de nossos estudos sobre sentido numérico, compreensão relacional e instrumental, fatos numéricos fundamentais, cálculo mental, ensino de cálculo mental e estratégias de cálculo mental. A leitura desses assuntos e dos autores relacionados facilitou nossa compreensão da problemática de pesquisa, serviu de suporte à elaboração de nossa concepção de cálculo mental e foi fundamental na fase de análise e na interpretação dos dados coletados.

2.2.1 - Sentido numérico

Serrazina (2012a) afirma que a noção de sentido numérico, sentido de número ou senso numérico aparece pela primeira vez na literatura de educação matemática, na segunda metade dos anos 1980. Conforme Morais (2011) o termo "sentido numérico" foi cunhado em substituição ao termo "numeracia", proposto por Crowter, em 1959, para caracterizar habilidades matemáticas de nível superior necessárias à sociedade. Porém, o termo acabou associado às competências básicas no domínio da matemática. Nunes e Bryant (1997) utilizaram o Relatório Cockcroft (1982)[17] para estudarem o conceito de numeralização ou, na tradução portuguesa, numeracia. No documento, aparecem os termos *numeracy* e *numerate*. De modo geral, esses termos estão relacionados à forma confiante de se usar a matemática com finalidade prática. Portanto, a numeracia diz respeito à competência de ler e contar os números, fazer cálculos simples, como calcular o tempo de cozimento dos alimentos, o troco de uma situação de compra e venda, além de compreender gráficos e tabelas simples. Já o termo sentido numérico, lida com habilidades mais elaboradas do pensamento matemático.

Para McIntosh, Reys e Reys (1992), o sentido numérico é

> a compreensão pessoal de número e operações, juntamente com a capacidade e inclinação para usar este entendimento em formas flexíveis de fazer juízos matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações. Ela reflete uma inclinação para usar números e métodos quantitativos como meio de comunicação, processamento e interpretação de informação[18] (p. 3).

Assim, constatamos que o sentido numérico é pessoal e está além do conhecimento individual sobre números e operações como objetos matemáticos estanques. Tal concepção diz respeito muito mais à maneira como o indivíduo

---

[17] COCKCROFT, Dr. W.H. Mathematics counts: report of the Committee of Inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of Dr. W. H. Cockcroft. Department of Education and Science, 1982.

[18] Tradução do pesquisador.

articula seu conhecimento numérico de forma crítica, ágil e flexível, adaptando estratégias pessoais de cálculo conforme números em questão e exercitando sua criatividade com os números em um processo evolutivo, desde a idade pré-escolar até a fase adulta (SOWDER, 1988; MCINTOSH; REYS, REYS, 1992; LINS; GIMENEZ, 1997; SERRAZINA, 2012a).

Segundo alguns autores, o termo exige um aprofundamento teórico e, não, uma definição fechada. E mais, existe consenso entre os pesquisadores quanto à sua necessidade para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e outras habilidades quantitativas (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; LINS; GIMENEZ, 1997; SERRAZINA, 2012a). Na mesma linha de pensamento de Sowder (1988), Lins e Gimenez (1997) afirmam que a concepção de sentido numérico está associada a um conjunto de características e às diversas relações entre números e operações, a fim de resolver problemas de maneira flexível e criativa.

Lins e Gimenez (1997) afirmam que, por muito tempo, se valorizou-se o reconhecimento do sistema de numeração e um trabalho com as propriedades das operações como conhecimento aritmético suficiente. Entretanto, pesquisadores e diretrizes curriculares de vários países têm apontado para o valor de situações matemáticas, quando a criança põe em prática a intuição sobre as quantidades, isto é, situações em que a criança desenvolve um senso ou sentido numérico (NCTM, 1986; BRASIL, 1997; BUENOS AIRES, 2006; PORTUGAL, 2007). Para Lins e Gimenez (1997), o desenvolvimento de um sentido numérico implica várias ações cognitivas que resumimos como: a) pensamento não algorítmico; b) autorregulação do pensamento; c) reconhecimento da existência de vários caminhos e várias soluções; d) atribuição de significados. Existe um conjunto de habilidades fundamentais para um bom sentido numérico. Lins e Gimenez (1997) citam:

> Identificar significados para os números e as operações, reconhecer o valor relativo dos números, descobrir relações e padrões, imaginar e descrever uma quantidade em função de outras, de formas diversas, e intuir e estabelecer raciocínios na resolução de problemas (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 60).

Dessa forma, notamos que o conceito de sentido numérico vai mais longe do que simplesmente o domínio da aritmética, envolvendo também outras habilidades matemáticas como observação de regularidades, relações funcionais e o processo heurístico de resolução de problemas. Os autores afirmam que também existem características concernentes à atitude e ao valor como “saber situar-se no ‘mundo dos números’, e reconhecer o valor e os limites do uso do cálculo mental, escrito e com a calculadora” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 60). Na concepção de Lins e Gimenez (1997), o sentido numérico é entendido sempre em relação a uma situação-problema e a situação-problema exige algumas habilidades do aluno, dentre elas o conhecimento de processos de resolução (cálculo mental, algoritmo, calculadora e etc.) e controle do sistema numérico (representações, estrutura e etc.).

Lins e Gimenez citam importantes estratégias de aprendizagem do sentido numérico. Dentre elas, destacamos: “importância da visualização numérica, uso de técnicas de agrupamentos e decomposições, compreensão do significado das operações, tratamento da ordem, controle e reflexão sobre eficiência e aplicabilidade” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 75-76). Queremos olhar, neste estudo, para o uso de diferentes estratégias de cálculo mental que alunos empregam em cálculos de adição e subtração. Para esse tipo de estratégia de cálculo, faz-se necessário antes de tudo, a compreensão das operações e suas ideias; a visualização tanto das partes do número para uso de técnicas de agrupamento e decomposições quanto de seu valor na globalidade; o conhecimento de ordem de grandeza para cálculos por estimativa e, não menos importante, a crítica sobre qual estratégia de cálculo é mais adequada a cada situação.

Serrazina (2012a) concorda com Lins e Gimenez (1997) ao declarar que o foco na compreensão de conceitos promove o desenvolvimento do sentido numérico[19]. Ao invés do treino de procedimentos, o enfoque em sala de aula passa a ser na discussão conceitual, compreensão de casos particulares, construção, generalização e formalização de ideias matemáticas em um ambiente propício à comunicação de estratégias (SANTOS, 1997). Serrazina (2012a) ainda afirma a

[19] A autora faz uso do termo “sentido do número” ao invés de sentido numérico.

interdependência existente entre cálculo mental e sentido numérico. O desenvolvimento do cálculo mental e suas estratégias implicam o desenvolvimento do sentido numérico e vice-versa.

2.2.2 - Compreensão relacional e compreensão instrumental

Em seu artigo intitulado “Compreensão relacional e compreensão instrumental” (em inglês, “Relational understanding and instrumental understanding”), Skemp (1976) faz uma reflexão sobre dois significados do termo “compreensão” em matemática, a saber, a compreensão relacional e a compreensão instrumental, sendo que o pesquisador dá maior ênfase ao nível de compreensão relacional entre os objetos matemáticos. Para o autor, tanto professores quanto alunos podem ter uma ideia de que compreensão é o bom manejo de regras e procedimentos matemáticos. Mas, Skemp (1976) acrescenta que este olhar não dá conta de justificar o uso de determinados procedimentos, isto é, a fluência com operações, algoritmos e procedimentos é condição necessária para a aprendizagem matemática, mas não suficiente. Conforme Skemp (1976) é tão necessário saber fazer quanto saber o por quê se faz. Em seu artigo, Skemp (1976) propõe o exercício para o professor de identificar exemplos de explicações que levem a uma compreensão instrumental de qualquer tópico matemático. Para o autor, esse exercício traz como vantagens: (a) a identificação do quanto o ensino instrumental é abordado; (b) e que por meio de vários exemplos, podemos perceber mais sutilmente a distinção entre compreensão instrumental e relacional. Nós acreditamos que outra vantagem seria (c) a tendência ao equilíbrio entre as duas abordagens, visto que tanto uma metodologia de ensino-aprendizagem instrumental quanto uma metodologia com foco relacional são imprescindíveis para o ensino de matemática de forma abrangente e com significado.

Importa frisar que o ensino, que promove apenas a compreensão instrumental, capacita o aluno ao uso de regras e técnicas, meramente memorizadas e que podem, portanto, serem facilmente esquecidas. De modo semelhante, uma metodologia de ensino-aprendizagem apenas relacional prejudica o desenvolvimento da memorização dos conceitos e propriedades mais comuns. Se não houver certo nível de prática, a agilidade em resolução de problemas rotineiros fica prejudicada. Portanto, torna-se imprescindível abordar os dois tipos de compreensão apontados por Skemp (1976), nos processos de ensino, aprendizagem e avaliação de matemática.

O ensino pautado na compreensão instrumental favorece automatismos importantes para o desenvolvimento matemático, pois não queremos que nossos alunos tenham que construir conceitos e deduzir propriedades sempre que um problema simples é apresentado. Igualmente, a compreensão de como as técnicas, regras e procedimentos matemáticos são construídos e relacionam-se entre si facilita a aprendizagem e a recordação dos conceitos, promovendo uma aprendizagem significativa. Skemp (1976) acrescenta que o ensino pautado na aprendizagem relacional ainda possui, como vantagem, a busca por novas conexões e exploração de outros ramos do objeto de estudo, melhorando a qualidade da aprendizagem e o conhecimento matemático.

2.2.3 – Fatos numéricos fundamentais

Os fatos fundamentais de adição e subtração dizem respeito às relações básicas estabelecidas entre números (PARRA; 1996; BRASIL, 1997; VAN DE WALLE, 2009; FAYOL, 2012). Por exemplo, 3 + 6 = 9 é um fato fundamental de adição e 15 – 8 = 7 é um fato fundamental de subtração. O trabalho sistemático com fatos fundamentais nos primeiros anos do ensino fundamental leva as crianças a dominar cálculos mais complexos, recorrendo à memória em cálculos mais simples (PARRA, 1996; FAYOL, 2012). Devido a isso, o trabalho com fatos fundamentais constitui-se como uma ferramenta necessária para o cálculo mental. Segundo Van de Walle (2009, p. 191), “a fluência com fatos fundamentais permite a facilidade de cálculos, especialmente o cálculo mental e, portanto, ajuda na habilidade de raciocinar numericamente em todas as áreas relacionadas a números” (p. 191).

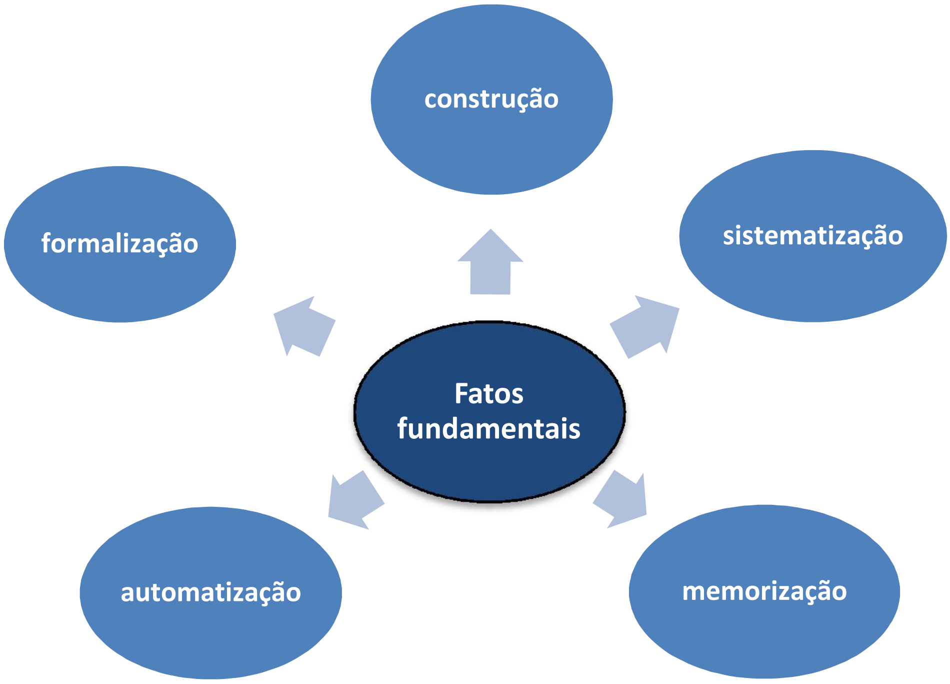
Portanto, a fluência com fatos fundamentais favorece o desenvolvimento do cálculo mental e o desenvolvimento matemático de modo geral. Segundo o pensamento de Van de Walle (2009), não se trata de abolir outros instrumentos de cálculo, mas de escolher o mais adequado a cada situação. Quando se trata de cálculos simples, recorrer à memória e ao cálculo mental é o melhor caminho. Porém, como afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

> Evidentemente, a aprendizagem de um repertório básico de cálculos não se dá pela simples memorização de fatos de uma dada operação, mas sim pela realização de um trabalho que envolve a construção, a organização e, como conseqüência, a memorização compreensiva desses fatos.
> A construção apóia-se na resolução de problemas e confere significados a escritas do tipo a + b = c, a x b = c. Já a organização dessas escritas e a observação de regularidades facilita a memorização compreensiva (BRASIL, 1997, p. 74).

Conforme afirmam os PCN (BRASIL, 1997), não é a simples memorização que garantirá a aprendizagem com compreensão de fatos fundamentais de uma operação aritmética, mas, sim, a construção desses fatos apoiada na resolução de problemas, na organização e observação de regularidades numéricas. Realmente, de maneira intuitiva, alguns alunos percebem a vantagem de conhecer e usar algumas propriedades das operações como associatividade e comutatividade no cálculo de fatos fundamentais.

Ao discutirem sobre memorização e automatização em matemática, algumas pessoas pensam, inevitavelmente, em métodos antiquados de ensino, em ensino tecnicista e sem reflexão. Esse equívoco é compreensível, pois durante muito tempo a memorização foi relacionada à mera repetição. Todavia, pesquisas em psicologia (VIGOTSKI, 2003/1926) e educação (SANTOS-WAGNER, 2012) têm mostrado que a memorização, quando trabalhada de outras formas e associada à compreensão, potencializa a aprendizagem. Santos-Wagner (2012) assinala que é preciso haver momentos destinados à construção de fatos fundamentais, porém deve existir espaço para a sistematização, memorização, automatização e formalização (ver figura 1, elaborada a partir das ideias de Santos-Wagner). Para isso, é necessário que o professor tenha domínio do conteúdo a ser ensinado, conheça diferentes maneiras de ensiná-lo e tenha clareza do objetivo a alcançar no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Essas são competências básicas que um professor de matemática deve adquirir por meio da formação inicial, continuada e através da experiência docente (SERRAZINA, 2012b). Por exemplo, a construção da tabuada pelo aluno mediante a busca de relações numéricas e padrões existentes na mesma, a formalização e a memorização dessas relações descobertas vão contribuir para que ele adquira um repertório básico de cálculo.

Figura 1: Fatos fundamentais – Alexsandra Senna, 2012



Apesar de a memorização e a automatização dos fatos fundamentais não serem o primeiro passo na construção de um repertório aditivo, encontrar rapidamente a, b ou c em $a+b=c$, quando $a<10$ e $b<10$ é um dos objetivos de matemática para o ensino fundamental (BRASIL, 1997). Para Parra (1996), essa memorização é a base do cálculo escrito e mental. Acrescentamos que essa é a base para a aquisição do procedimento de cálculo, seja escrito ou mental. Para nós, a base do cálculo seria a compreensão das relações concretas envolvidas por trás da relação simbólica $a+b=c$. Contudo, no ensino fundamental, esperamos que o aluno adquira tal nível de abstração que seja capaz de manipular símbolos fluentemente. E “ao final das manipulações simbólicas realizadas, o resultado obtido deve corresponder àquele a que chegaria a manipulação efetiva das entidades concretas” (FAYOL, 2012, p. 67).

Para Santos-Wagner (2012), a criança só aprendeu aritmética e, mais geralmente matemática, quando sabe operar em um dado contexto, com entidades concretas e quando sabe operar, formalmente, com a matemática escolar neste e em outros contextos. É fundamental que o aluno saiba lidar como nas situações cotidianas bem como as situações formais da matemática. Na mesma linha, Fayol (2012) acrescenta que

> As crianças têm de descobrir esse principio segundo o qual a manipulação regrada dos símbolos equivale à aplicação concreta de transformações. Em seguida, elas têm de compreender e admitir que a manipulação dos símbolos permite "liberdades" de processamento que tornam mais rápida e exata a resolução das operações (FAYOL, 2012, p. 67).

Fayol (2012) acrescenta que a gênese e a ativação das operações aritméticas levam em conta "certos *fatos aritméticos* (grifo do autor) que não exigem cálculo" (p. 68), isto é, fatos já memorizados. Por exemplo, registramos os passos intermediários resultantes da execução de um algoritmo, mas recuperamos os fatos de memória. Ao calcularmos 28 + 31 (figura 2, esquerda), recuperamos de memória o resultado de 8 unidades + 1 unidade (igual a 9 unidades) e 2 dezenas + 3 dezenas (igual a 5 dezenas). De modo semelhante, ao calcularmos 37 + 44 (figura 2, direita), recuperamos, de memória o fato fundamental do 11 (7 unidades + 4 unidades), efetuamos o registro (uma unidade e "vai" uma dezena) e fazemos a soma mental 1 dezena + 3 dezenas + 4 dezenas (igual a 8 dezenas).

Figura 2: Recuperação dos fatos de memória

$$\begin{array}{r} 28 \\ +31 \\ \hline 59 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ +44 \\ \hline 81 \end{array}$$

Parra (1996) aponta como vantagem da "ativação automática" de cálculo: a rapidez, a ausência de esforço e a inalteração da atividade mental em curso. Acrescenta que a memorização e automaticidade dos fatos numéricos vão além da simples agilidade de cálculo. Levam os alunos a "exercerem um controle mínimo" (p. 193) sobre os números, quanto à razoabilidade de uma conta equivocada, sobre estimativa de ordem de grandeza e uso de calculadoras e computadores.

Quanto à memorização e sua relação com cálculo mental, Rogers (2009) afirma que, educacionalmente, existem diferenças entre cálculo mental (*mental computation*) e aritmética mental (*mental arithmetic*). O cálculo mental está apoiado no construtivismo, desenvolvendo nas crianças o entendimento e a metacognição, isto é, põe, em evidência a construção de procedimentos pessoais de cálculo que se apóiam na compreensão dos números. Diferente disso, a aritmética mental está fundamentada no registro rápido e acurado de fatos numéricos, baseando-se, principalmente, nas habilidades de memorização das crianças. Porém, existe um componente do cálculo mental que depende do registro de fatos fundamentais. van den Heuvel-Panhuizen (1992), em Beishuizen and Anghileri (1998)[20] afirma que "automatizar fatos numéricos básicos como os complementos em 10 é um importante pré-requisito para aritmética mental flexível" [21] (ROGERS, 2009, p. 191). Como assevera Rogers (2009), é importante recuperar de memória fatos fundamentais que agilizem cálculos mentais mais complicados. Para a autora, existe um elo entre aritmética mental e cálculo mental.

2.2.4 - Cálculo Mental

Entendemos cálculo mental como um conjunto de procedimentos que se articulam sem recorrer a um algoritmo preestabelecido, para obter resultados exatos ou aproximados (SOWDER, 1988; PARRA, 1996; LINS; GIMENEZ, 1997; BRASIL, 1997; BUENOS AIRES, 2006). Os procedimentos de cálculo mental adaptam-se aos números em jogo e aos conhecimentos (ou preferências) do sujeito que as aplica.

De acordo com Parra (1996), "os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes relações entre os números" (p. 189). Essas estratégias utilizam as propriedades do sistema de numeração decimal (base

[20] BEISHUIZEN, M.; ANGILERI, J. Which Mental Strategies in the Early Number Curriculum? A comparison of British ideas and Dutch Views. **British Educational Research Journal,** vol. 24, no. 5, 1998, p.,519-538.

[21] Tradução do pesquisador.

decimal, posicional) e as propriedades aritméticas (comutatividade, associatividade, elemento neutro e elemento inverso) (SOWDER, 1988; PARRA, 1996). Albergaria e Ponte (2008), citando o trabalho de Sowder (1988), trazem a classificação dessa autora para um conjunto de características das estratégias de cálculo mental da seguinte forma:

> (i) São variáveis, o que permite que cada pessoa escolha a sua estratégia pessoal; (ii) São flexíveis, adaptando-se aos números utilizados; (iii) São holísticas, no sentido em que se lida com o número na sua globalidade, e não algarismo a algarismo; (iv) Requerem a compreensão de todo o processo de cálculo, forçando o aluno a focar a sua atenção no problema apresentado; e (v) Permitem a obtenção de resultados mais aproximados, uma vez que frequentemente se trabalha da esquerda para a direita com os números. Contudo, o cálculo mental é uma estratégia pertinente quando se trabalha com números de uma certa ordem de grandeza (ALBERGARIA; PONTE, 2008, p. 4).

Além dessas importantes características mencionadas por Sowder (1988), Buys (2008) complementa, dizendo que o cálculo mental se apoia em um profundo conhecimento de fatos numéricos fundamentais com números até 20 e até 100. Ademais, Buys (2008) acrescenta, em acordo com Parra (1996), que o cálculo mental não exclui a possibilidade do uso de registros intermediários.

Cabe ressaltar aqui a característica holística classificada por Sowder. Lidar com o número compreendendo sua totalidade, requer da criança a construção mental do número que conforme Piaget, se dá por meio da síntese da ordem e da inclusão hierárquica (KAMII, 1984). O trabalho com algoritmos revela-se inútil antes dessa construção mental e da compreensão do significado de quantidade numérica, pois ao operar com números com mais que um algarismo, a criança tratará cada um individualmente. Segundo Kamii (1984), a ordem diz respeito a uma coordenação mental dos objetos de forma a incluí-lo uma única vez, não necessariamente, tendo que dispor, espacialmente, os objetos. A inclusão hierárquica consiste na compreensão de que um número engloba os seus antecessores. O número quatro engloba os números um, dois e três, por exemplo. Esse conceito de inclusão é importante, pois permite a percepção de que não se trata de nomear o objeto quatro, mas de que são quatro objetos. Kamii (1984) ressalta que, sem essa noção, os objetos não poderiam ser quantificados.

Quando a criança já tem construída essa estrutura cognitiva e é desenvolvido um trabalho sistemático com cálculo mental, escolher uma estratégia se torna uma atividade cada vez mais comum. Por exemplo, ao somar mentalmente 4+9, uma criança pode fazer o seguinte: $4 + 9 = (3 + 1) + 9 = 3 + (1 + 9) = 3 + 10 = 13$, mesmo que não saiba explicitamente que propriedade está utilizando. Nesse exemplo, percebemos que o número quatro inclui o número três e o número um e, notamos a flexibilidade do pensamento em reverter a inclusão, realizando o desmembramento. Nota-se a propriedade associativa da adição, sendo usada para buscar totais iguais a dez, o que demonstra conhecimento sobre o sistema de numeração decimal e das propriedades das operações.

O cálculo mental, em nossa concepção (SOWDER, 1988; PARRA, 1996; LINS; GIMENEZ, 1997; BUYS, 2008) não deve ser colocado em contraposição ao cálculo escrito, desde que os registros no papel não sejam o procedimento algorítmico convencional. A distinção entre cálculo algorítmico e cálculo mental não reside no fato de que o primeiro seja escrito e o segundo não. O cálculo algorítmico utiliza sempre a mesma técnica para uma operação dada, quaisquer sejam os números. Em contrapartida, ao se proporem um trabalho de cálculo mental não se espera uma única maneira de proceder. Espera-se um uso de estratégias pessoais, criativas e que demonstrem compreensão dos números implicados. Por isso, a execução mental do algoritmo convencional não consiste em cálculo mental.

No documento “Matemática: Cálculo mental con números naturales. Apuntes para la enseñanza” do governo da cidade de Buenos Aires, publicado em 2006, a secretaria de educação afirma que os procedimentos de cálculo mental se contrapõem, por definição, ao procedimento algorítmico. O documento define algoritmo como uma série de regras aplicáveis em uma determinada ordem, sempre do mesmo modo, independentemente dos dados. Essas regras garantem que o resultado seja alcançado, utilizando um número finito de passos. Entretanto, ainda segundo o documento, o cálculo mental é um conjunto de procedimentos que, analisando os dados a tratar, se articulam sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados. Ou seja, caracteriza-se pela presença de uma diversidade de técnicas que se adaptam aos números em jogo e aos conhecimentos (ou preferências) do sujeito que as aplica.

Quanto ao assunto cálculo mental versus algoritmos convencionais, Rogers (2009) afirma que os professores, raramente, valorizam as estratégias de cálculo mental que surgem naturalmente e, frequentemente, apressam as crianças a utilizar os algoritmos. Segundo a autora "isto pode fazer com que as crianças parem suas estratégias de pensamento intuitivo e sigam cegamente as etapas descritas no algoritmo" [22] (p. 192), ou seja, tal atitude dos professores pode conduzir ao uso nocivo dos algoritmos de forma não reflexiva e acrítica, sem avaliar a razoabilidade da solução de um cálculo, além de desencorajar a busca por estratégias intuitivas e autônomas. Kamii (1995) apresenta três razões para o não uso precoce dos algoritmos nos anos iniciais do ensino fundamental:

> 1. Os algoritmos forçam o aluno a desistir de seu raciocínio numérico.
> 2. Eles "desensinam" o valor posicional e obstruem o desenvolvimento do senso numérico.
> 3. Tornam a criança dependente do arranjo espacial dos dígitos (ou de lápis e papel) e de outras pessoas (KAMII, 1995, p. 55).

Kamii (1995) defende que as crianças devem reinventar a aritmética, passando por um processo semelhante ao da humanidade na construção das técnicas computacionais, pois o conhecimento lógico-matemático "é o tipo de conhecimento que cada um pode e deve construir por meio de seu próprio raciocínio" (p. 55). Rogers (2009) traz argumentos semelhantes aos de Kamii (1995) para justificar que algoritmos escritos devam ser ensinados em um segundo momento para as crianças. A autora cita Westwood (2000)[23] ao acrescentar que:

> crianças não deveriam ter nenhum problema em dominar estes procedimentos [algoritmos] se eles estão conectados tanto quanto for possível à métodos mais informais de adição... Que são normalmente utilizados por crianças... Surgem dificuldades se os processos são ensinados sem referência ao conhecimento a priori das crianças ou se for usado apenas algum meio de decorar[24] (ROGERS, 2009, p. 192).

---

[22] Tradução do pesquisador.
[23] WESTWOOD, P. (2000). **Numeracy and learning difficulties:** approaches to teaching and assessment.Camberwell: ACER, 2000.
[24] Tradução do pesquisador.

Entendemos que a grande questão é permitir que a criança tenha o controle dos cálculos seja por meio de algoritmos, cálculo mental seja por uso de calculadoras. Quanto às recomendações do Ministério da Educação (MEC), um dos critérios de avaliação de matemática para o segundo ciclo, apresentados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997) é

> realizar cálculos, mentalmente e por escrito, envolvendo números naturais e racionais. Espera-se que o aluno saiba calcular com agilidade, utilizando-se de estratégias pessoais e convencionais, (BRASIL, 1997, p. 94).

Observamos que é uma preocupação das diretrizes enfatizar não só o domínio de diferentes modalidades de cálculo, mas também a fluência e rapidez nas execuções. Pesquisadores estão de acordo ao afirmarem que cálculo mental não é cálculo rápido, o uso eficiente dessa ferramenta implica, necessariamente, em uma maior habilidade e agilidade com números e operações, desenvolvendo o sentido numérico (PARRA, 1996; LINS; GIMENEZ, 1997; SERRAZINA, 2012a). Embora os PCN (BRASIL, 1997) orientem o trabalho com diversas modalidades de cálculo, de uma forma geral, o ensino de cálculo escrito por meio de algoritmos é predominante nas salas de aula de matemática (KAMII, 1995; CORREA; MOURA, 1997; ROGERS, 2009). Por isso, faz-se necessária a discussão sobre cálculo mental, ensino de cálculo mental e desenvolvimento do sentido numérico.

Essa discussão em torno da temática tem acontecido não só no Brasil. Diretrizes curriculares de outros países como Argentina (BUENOS AIRES, 2006) e Portugal (PORTUGAL, 2007; CARVALHO, 2011) também têm se preocupado em orientar professores para o trabalho com outras modalidades de cálculo desde os anos iniciais. Carvalho (2011, p. 1) afirma que o cálculo mental é referido nos currículos de matemática em Portugal há mais de 70 anos e que apesar do reconhecimento de sua importância, com o tempo verificou-se que sua exploração em aulas de matemática nem sempre foi regular. Situação similar ocorre no Brasil (GOMES, 2007; FONTES, 2010).

Dominar várias modalidades de cálculo é, sem dúvida, indispensável no cotidiano, devido às nossas relações sociais. A ênfase no cálculo escrito e no ensino de algoritmos, em sala de aula, não tem sido suficiente para cobrir as novas demandas da sociedade. São inúmeros os exemplos diários em que o cálculo escrito é dispensável e, em vários casos, dispendioso e desnecessário. Por exemplo, ir às compras no supermercado, onde fazemos diversas estimativas, a conferência do troco na feira, etc. O ensino formal dos algoritmos é útil, porém não pode substituir alternativas de cálculo, em especial, o cálculo mental. É preciso haver equilíbrio na hora de ensinar e valorizar as diversas estratégias de resolução dos alunos.

No que diz respeito às metodologias de ensino, Lins e Gimenez (1997) apontam a necessidade de reconhecer e valorizar instrumentos como o ábaco, barras coloridas e outros materiais. Afirmam que o não uso desses recursos está associado ao desconhecimento de como aproveitá-los de maneira eficaz. Esclarecem que:

> Algo similar ocorre com o cálculo mental. Acreditamos que nos professores ainda existe a crença generalizada de que somente o cálculo escrito é efetivo, e qualquer outra forma “distrai” e faz perder tempo (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 43).

Todavia, pesquisas em educação matemática têm se preocupado em tornar o ensino de cálculo mental uma realidade em sala de aula. Conforme orienta Parra (1996), dois tipos de atividades devem ser executadas rotineiramente:

> - Um trabalho de memorização de repertórios e regras, à medida que é construído, e
> - Um trabalho coletivo, lento e detalhado, de aprendizagem do cálculo mental pensado, que se apóia na comparação de diversos procedimentos utilizados por diferentes alunos para tratar o mesmo problema (PARRA, 1996, p. 216).

Com essa finalidade, o professor deve avaliar os recursos e tipos de tarefas acessíveis de cálculo mental e que podem ser direcionados ao cumprimento dessas duas orientações citadas. Tarefas comuns como rodadas de cálculo mental, não só com adição e subtração, mas com as operações de multiplicação e divisão têm um grande potencial motivador se dirigidas em pequenos momentos da aula. Atividades mais elaboradas como o uso de jogos computacionais ou jogos de cartas dão maior liberdade e autonomia aos alunos, auxiliam na aquisição das regras operatórias e estratégias de cálculo mental, no entanto, requerem momentos de formalização posterior das ideias trabalhadas nos jogos.

É importante que o professor elabore tanto tarefas individuais quanto tarefas em equipe. Isso ajuda o professor a medir o progresso individual de seus alunos e também permite que estes compartilhem suas estratégias e ideias com os colegas.

É fundamental que o professor procure trabalhar sistematicamente o cálculo mental partindo de fatos numéricos elementares até chegar-se ao uso de estratégias mais complexas. Quanto mais cedo começa este tipo de trabalho mais rápido é o avanço da criança na compreensão de números e operações em questão.

2.2.5 - Estratégias de cálculo mental

Como já nos referimos, as estratégias de cálculo mental se apoiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações (PARRA, 1996). São formas flexíveis de manipular as quantidades que requerem a compreensão de todo o processo (SOWDER, 1988) o que estimula o desenvolvimento do sentido numérico dos alunos (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; LINS; GIMENEZ, 1997; SERRAZINA, 2012a). Apesar de existirem estratégias variadas de cálculo mental, existe um conjunto de estratégias que devem ser abordadas (RIBEIRO; VALÉRIO; GOMES, 2009). Dentre as estratégias que envolvem adição e subtração, destacamos a decomposição de números, a compensação e o uso das propriedades das operações. Analisamos os dados coletados, neste estudo, à luz de estratégias dessa natureza, categorizadas por Thompson (1999) para as operações de adição e subtração com números até 20, categorizadas por Beishuizen (1997) Klein e Beishuizen (1998) e Thompson (2000) para adição e subtração com números entre 20 e 100. Também, trabalhamos as categorias propostas por Lucangeli, Tressoldi, Bendotti, Bonamoni e Siegel (2003)[25] e estudadas por Baricatti (2010) para cálculo mental com números naturais em geral.

---

[25] LUCANGELI, D.; TRESSOLDI, P. E.; BENDOTTI, M.; BONAMONI, M.; SIEGEL, L. S. Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. Educational

Queremos salientar que a concepção de cálculo mental trazida neste trabalho é diferente da concepção de Lucangeli et al., (2003). Para esses pesquisadores, a execução mental do algoritmo (Mental Algorithm - MA) é uma estratégia autêntica de cálculo mental. Embora tenhamos um entendimento diferente, trouxemos a categoria MA por havermos identificado várias vezes, nos dados, o uso dessa estratégia. Além da identificação desta estratégia, fazemos uma análise crítica de seu uso durante os cálculos na análise de dados.

O quadro abaixo resume as estratégias de cálculo mental categorizadas por Thompson (1999) para números menores que 20, em cálculos de adição e subtração:

Quadro 2: Estratégias de cálculo mental para números menores que 20 – inspirando em Thompson, 1999, p. 22-25

Níveis de estratégias aditivas utilizadas pelos alunos com números menores que 20 **Exemplo: 4 + 5**	**Níveis de estratégias subtrativas utilizadas pelos alunos com números menores que 20** **Exemplo: 8 – 3**
i) contar todos: quando o aluno recorre aos dedos ou material concreto para contar tudo, determinando o resultado de uma adição. **ii) contagem a partir do primeiro número (Counting on from first number):** o aluno conta “Quatro… cinco, seis, sete, oito, nove”; **iii) contagem a partir do número maior (Counting on from larger):** o aluno inicia a contagem a partir do número 5; **iv) utilização de fatos fundamentais de adição:** o aluno dá uma resposta imediata para o cálculo; **v) cálculo com base em fatos fundamentais:** o aluno recorre a fatos fundamentais de seu repertório de cálculo para calcular o que ainda não sabe. **vi) saltos de 10 (*bridging through ten* ou *jumping via ten*).** Por exemplo, 7+6=; 7+3=10; 10+3=13.	**i) contagem dos que sobram (count out):** para calcular, o aluno levanta 8 dedos, abaixa 3 e conta os que ficaram levantados; **ii) contagem para trás, a partir de um número (count back from):** “Oito… sete, seis, cinco”, e para não se perder utiliza, por exemplo, os dedos. O resultado é o último número falado. **iii) contagem para trás até (count back to):** contagem decrescente, a partir de 8, até chegar ao 3, utilizando, por exemplo, os dedos. O resultado é a quantidade de dedos levantados. **iv) contagem até (count up):** a partir do 3, o aluno conta até 8, recorrendo, por exemplo, aos dedos; **v) utilização de fatos fundamentais de subtração e cálculo com base em fatos fundamentais,** **vi) saltos de 10 (*bridging through ten* ou *jumping via ten*).** Por exemplo, 12-5=; 12-2=10; 10-3=7.

Psychology, vol. 23, n. 5, dez. de 2005, p. 507–520.

Segundo Thompson (1999), uma das razões pela qual os professores deveriam discutir as estratégias mentais das crianças na sala de aula e deixá-los experimentar cada uma delas é dar legitimidade ao uso de estratégias pessoais, em contraposição ao uso de algoritmos convencionais. Ainda de acordo com o pesquisador, o foco principal quando se trabalha com estratégias de cálculo mental com números até 20 é a aquisição pela criança de estratégias mentais básicas com números de apenas um dígito. Thompson (1999) enfatiza que não há necessidade de a criança aprender a usar todas essas estratégias. Porém, existem estratégias mais importantes do ponto de vista da eficiência e agilidade de cálculos, como as estratégias de utilização de fatos numéricos fundamentais e cálculos com base em fatos fundamentais. Por fim, o autor afirma que é essencial que as crianças se familiarizem com o método de buscar relações que facilitem a obtenção dos resultados.

Para cálculos de adição e subtração com números entre 20 e 100, encontramos diferentes estratégias categorizadas por Beishuizen (1997) Klein e Beishuizen (1998) e Thompson (2000). Conforme Thompson (2000), Thompson e Smith (1999) sugerem quatro estratégias principais de cálculo mental com números entre 20 e 100, isto é, números de dois dígitos. São elas: (i) decomposição, (ii) sequenciação, (iii) método de combinação e (iv) compensação.

A estratégia de decomposição é bastante comum e põe em evidência a escrita numérica em dezenas e unidades separadas. (THOMPSON, 2000; RIBEIRO; VALÉRIO; GOMES, 2009). Por exemplo, ao efetuar 63 + 56, adicionamos 60 + 50 e 3 + 6. Por fim, juntamos os dois resultados, obtemos 119. No caso da subtração, 68 – 32 fazemos 60 – 30, em seguida 8 – 2 e, juntamos os resultados 30 + 6, resultando em 36. Tal estratégia também é conhecida na literatura científica como 1010 (dez-dez). Thompson (2000) chama a atenção para um problema desta estratégia: é que ela pode induzir ao erro, em situações de subtração com empréstimo. Segundo o pesquisador, essa é uma das razões pelas quais os holandeses ensinam uma estratégia diferente. Beishuizen (1997) afirma que a dificuldade dessa estratégia não reside na decomposição numérica e, sim, na recomposição do número.

Conforme Thompson (2000) a sequenciação é um método pouco aplicado na Inglaterra, mas bastante utilizado por crianças holandesas. O pesquisador dá os seguintes exemplos para cada uma das duas operações: (i) adição: 55 + 42. Adicionamos 55 e 40, obtemos 95 e adicionamos 2, resultando em 97; (ii) subtração: 54 – 27. 54 – 20 é 34 e 34 – 7 fazemos 34 – 4 igual a 30 e, 30 – 3 igual a 27. Estratégia conhecida na literatura científica como N10 (número + número de dezenas, ou ainda, inicia-se no número e adiciona múltiplos de dez).

A estratégia de combinação é o uso conjunto das estratégias de decomposição com os últimos estágios da estratégia de sequenciação. Por exemplo, ao calcular 37 + 45, fazemos 40 + 30 que dá 70; e, em seguida, adicionamos 5 ao 70, ficando com 75; e, por fim, adicionamos 7, obtendo 82. No caso de uma subtração, por exemplo, 37 – 18, adicionamos 2 ao 18, fazendo 20 e, em seguida, retiramos 20 de 37 e obtemos 17. Por fim, adicionamos 2 de volta ao 17, obtendo 19. Tal estratégia aparece na literatura científica como N10C (iniciamos com o número, adicionamos o próximo múltiplo de 10 e, então, compensamos).

Por fim, temos a estratégia de compensação. Conforme Thompson (2000), Ribeiro, Valério e Gomes (2009), a compensação é uma estratégia que abrange adição e subtração de um número maior que o especificado no cálculo. Costumamos usar o múltiplo de 10 mais próximo do número em questão. Em seguida, fazemos a compensação do número. Por exemplo, ao calcular 46 + 39, adicionamos 40 (o múltiplo de 10 mais próximo de 39) ao 46 e obtemos 86 e, em seguida, retiramos 1, obtendo 85. Na subtração 86 – 39 fazemos 86 – 40 (o múltiplo de 10 mais próximo de 39) e obtemos 46. Em seguida, adicionamos 1 e compensamos o cálculo, ficando com 47. Thompson (2000) afirma que a estratégia de compensação, embora eficiente não é muito usada, espontaneamente, por crianças pequenas. O que não significa que elas não possam aprender e se apropriar da estratégia ou de suas ideias centrais.

Essas estratégias categorizadas por Thompson (2000) para números entre 20 e 100 derivam de duas ideias principais, a saber, N10 e 1010, conforme o quadro abaixo inspirado em Morais (2011) e adaptado de Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998).

Quadro 3 – Estratégias de cálculo mental para números maiores que 20 – inspirando em Morais, 2011, p. 18

Estratégias		**Adição: 54 + 38 =**	**Subtração: 63 – 27 =**
N10	N10	54 + 30 = 84; 84 + 8 = 92	63 – 20 = 43; 43 – 7 = 36
	N10C	54 + 40 = 94; 94 – 2 = 92	63 – 30 = 33; 33 + 3 = 36
	A10	54 + 6 = 60; 60 + 32 = 92	63 – 3 = 60; 60 – 24 = 36
1010	1010	50 + 30 = 80; 4 + 8 = 12 80 + 12 = 92	60 – 20 = 40; 3 – 7 = – 4 40 – 4 = 36
	10S	50 + 30 = 80; 80 + 4 = 84; 84 + 8 = 92	60 – 20 = 40; 40 + 3 = 43; 43 – 7 = 36

Como vemos no quadro acima, na categoria N10, temos ainda uma estratégia identificada como A10, em inglês *adding on.* Adicionamos ou subtraímos à primeira parcela parte da segunda parcela, a fim de obter uma dezena completa, em seguida, adicionamos ou subtraímos o restante. Na categoria de estratégias do tipo 1010 (decomposição numérica), temos a variante 10S, também chamada de s-sequencial. Nessa estratégia, decompomos os números, adicionamos as dezenas e, acrescentamos as unidades em sequência à soma das dezenas.

Baricatti (2010) traz, em sua tese de doutorado, estratégias de cálculo identificadas por Lucangeli et al., (2003) em cálculos de adição e subtração tanto mentais quanto escritos que se assemelham às propostas por Thompson (1999) e Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998). Bariccatti (2010) resume essas estratégias como COF (contagem nos dedos), CON (contagem mental a partir de um algarismo), 1010 (ou estratégia de decomposição), N10 (somente a segunda parcela é decomposta em unidades e dezenas), MA (algoritmo mental da direita para a esquerda), C10 (formação de dez unidades, por exemplo, 43+6= (43+7) -1; 43-7= (43-3)-4, AUTO (cálculos automáticos ou recuperação de resultados).

3 – PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Esta pesquisa de mestrado foi desenvolvida com o intuito de identificar e compreender as estratégias de cálculo mental que alunos de uma 5ª série/6º ano do ensino fundamental utilizavam em cálculos de adição e subtração. Neste capítulo, delimitamos para o leitor o caminho metodológico escolhido para a pesquisa, descrevemos os procedimentos de coleta, categorização e interpretação dos dados obtidos. Também fizemos a caracterização da escola, da turma em geral, da professora e dos alunos comprometidos com a pesquisa.

Conduzimos uma investigação de natureza qualitativa pautada na metodologia de estudo de caso do tipo etnográfico. Segundo André (2008), um estudo de caso do tipo etnográfico é "um estudo em profundidade de um fenômeno educacional, com ênfase na sua singularidade e levando em conta os princípios da etnografia" (p. 19). Ainda, segundo a autora, para o estudo de caso se caracterizar como etnográfico precisa atender ao princípio da relativização, isto é, um distanciamento da situação investigada e, ao mesmo tempo, um grau de interação com o objeto de estudo e os sujeitos envolvidos.

3.1 - Contribuições do estudo exploratório

Antes da coleta definitiva dos dados desta pesquisa conduzimos um estudo exploratório dividido em dois experimentos de ensino. Para Fiorentini e Lorenzato (2006), uma pesquisa é exploratória

> quando o pesquisador, diante de uma problemática ou temática ainda pouco definida e conhecida, resolve realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela. [...] Funciona como uma sondagem e visa verificar se uma determinada ideia de investigação é viável ou não. [...] é frequentemente utilizada como primeira entrada em campo, tendo em vista o levantamento de hipóteses ou a busca de subsídio que permitam um melhor redimensionamento da pesquisa (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 70).

De acordo com os autores, em uma pesquisa exploratória, pode ser necessário um levantamento bibliográfico, a realização de entrevistas, a aplicação de questionários ou testes ou, até mesmo, estudos de caso. Fiorentini e Lorenzato (2006) recomendam o estudo de caso, quando se quer estudar algo singular e construir hipóteses sobre o problema. Para os autores, o estudo de caso busca retratar a realidade de modo profundo e tão completo quanto possível, dando ênfase à análise do objeto de pesquisa em seu contexto. Portanto, para coletar os dados de pesquisa, fazemos uso da observação, do diário de bordo, da gravação em áudio, e das entrevistas com a professora da turma, com a pedagoga da escola e com os alunos participantes do estudo.

O estudo exploratório foi conduzido, com o objetivo de delimitar a questão de investigação, adquirir experiência em pesquisa e obter dados mais esclarecedores e consistentes sobre a pesquisa (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). O estudo exploratório foi conduzido em dois momentos distintos. O primeiro ocorreu antes de nosso ingresso no mestrado[26], em todos os dias letivos do mês de fevereiro de 2012, em uma turma de 4º ano do ensino fundamental, ao termos hipóteses, questionamentos e objetivos mais associados ao jogo computacional Soma 10. Observamos todas as aulas das 13:00 às 17:30 horas. Auxiliamos no planejamento de algumas atividades e discutimos as questões pertinentes às aulas no intervalo e no horário de planejamento da professora. Esse mês de investigação mostrou algumas dificuldades enfrentadas por um professor pesquisador iniciante. Nessa etapa inicial do processo de investigação, tinha-se: (i) dificuldade em identificar todos os objetivos para a aprendizagem matemática que estão por trás de algumas atividades; (ii) dificuldade em interagir com bons questionamentos com os alunos. Isto é, questões que estimulam as crianças a externarem o seu pensamento e suas estratégias como sugere Polya (1995/1945). Segundo o autor, “pela repetição da indagação, (o aluno) poderá chegar à idéia certa... ele descobrirá a maneira correta de utilizar a indagação e assim a terá realmente assimilado” (POLYA, 1995/1945, p. 3).

Essa etapa do estudo exploratório também nos revelou a dinâmica de sala de aula nos anos iniciais do ensino fundamental. A professora procurou alcançar, no

---

[26] As aulas no mestrado em educação do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) começaram em março de 2012. Entretanto, já mantínhamos contato de estudos e troca de ideias com a professora orientadora Drª. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner desde o mês de fevereiro de 2012.

primeiro mês de atividades, os objetivos de matemática que dizem respeito a identificá-la como disciplina que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito investigativo e propiciando o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, incluindo os fatos fundamentais de número e operações de adição e subtração (BRASIL, 1997). Durante o mês, acompanhamos o trabalho da professora com atividades, envolvendo cálculo mental e algorítmico. No último encontro de fevereiro, procuramos verificar de que forma o jogo computacional Soma 10 poderia contribuir para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental em alunos com maior e menor repertório memorizado de fatos fundamentais de adição e subtração. Analisamos essa aula, verificamos o livro didático utilizado pela professora e fizemos uma entrevista quanto a seu conhecimento sobre cálculo mental. Através da análise da aula, constatamos que o jogo Soma 10 é rico para estimular a automatização e memorização de fatos fundamentais por meio da prática sistemática, contudo deve ser apresentado aos alunos após momentos de construção de fatos destinados ao primeiro contato da criança com as relações numéricas e com as operações aritméticas.

O segundo momento foi desenvolvido em setembro de 2012, com alguma experiência em pesquisa adquirida, sobretudo, pelo experimento anterior. Permanecemos em campo durante duas semanas e na turma pesquisada (5ª série/6º ano A) em três aulas: 5 de setembro de 2012 – quarta-feira (primeiro horário); 6 de setembro de 2012 – quinta-feira (terceiro horário) e 12 de setembro de 2012 – quarta-feira (primeiro horário). Queríamos investigar questões mais amplas em relação ao cálculo mental e suas estratégias executadas por alunos da 5ª série/6º ano, durante o jogo e em atividades matemáticas de resolução de problemas. Empregamos estratégias de observação e registro mais eficazes. A observação se mostrou mais focalizada, porque possuíamos mais clareza quanto ao objeto de pesquisa. Usamos então, estratégias diferenciadas de registro como: problemas formulados pelos alunos, relatos deles sobre o jogo Soma 10 e gravação de áudio das aulas, além de nossos registros escritos no diário de bordo. Analisamos os registros feitos pelos alunos sobre o jogo, os problemas formulados e a aula de resolução de quatro problemas escolhidosTambém, verificamos o livro didático consultado pela professora e fizemos uma entrevista considerando sua relação com o cálculo mental. A análise de uma das aulas nos trouxe evidências de que, no cotidiano escolar, os alunos não têm o hábito de lançar mão de estratégias diversificadas de cálculo mental, prevalecendo o uso do algoritmo convencional mentalmente. E a execução mental do algoritmo convencional além de uma tarefa penosa pode facilitar a ocorrência de erros de cálculo.

3.2 – Planejamento, 'troca de ideias" e reflexões com a orientadora

Houve encontros em grupo com outros orientandos e encontros individuais com a professora orientadora. Momentos esses que aconteceram tanto nos estudos exploratórios quanto na pesquisa final e foram cruciais para a investigação. As aulas e orientações auxiliaram desde a forma de buscar trabalhos relacionados à temática, como elaborar e apresentar seminários, até a apreciação das análises dos dados coletados e revisão do trabalho final. Nas aulas em grupo, tivemos a oportunidade de colaborar e aprender com pesquisas de mestrado e doutorado em educação matemática relacionadas a temas como: (i) leitura, escrita e oralidade em aulas de resolução de problemas; (ii) processo de inclusão de alunos cegos em aulas de matemática; (iii) a influência de crenças e concepções sobre matemática, ensino-aprendizagem de matemática na formação de licenciandos em matemática; (iv) ensino-aprendizagem do conceito de divisão; (v) pensamento matemático avançado; (vi) compreensão relacional e instrumental; (vii) números irracionais; (viii) cálculo diferencial, derivada como taxa relacionada e coeficiente angular; (ix) padrões no ensino-aprendizagem de matemática. As aulas em grupo nos proporcionaram aprendizagem de trabalho em equipe, aprendizagem dos temas mencionados, metodologia de pesquisa, análise e triangulação de dados entre pesquisadores. Parte de nossa aprendizagem, enquanto professor e pesquisador, deu-se nos encontros do Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo[27] (GEEM-ES).

[27] Coordenado pela Profª. Drª. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner e pela Profª. Drª. Sandra Aparecida Fraga da Silva, o GEEM-ES foi criado para que professores tenham a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos matemáticos e pedagógico-matemáticos. São realizadas discussões sobre conteúdos matemáticos, metodologias de ensino e saberes da prática docente.

Com esse grupo, tivemos a oportunidade de estudar a importância da reflexão na formação de professores de matemática (OLIVEIRA; SERRAZINA, 2002; SERRAZINA, 2012b).

3.3 - Revisão de literatura e perspectivas teóricas

Em nossos estudos sobre cálculo mental, identificamos investigações e recomendações nos seguintes eixos: (a) características do cálculo mental e de suas estratégias (NCTM, 1986; SOWDER, 1988; PARRA, 1996; BRASIL, 1997; BUENOS AIRES, 2006; PORTUGAL, 2007; CARVALHO, 2011), comparação entre cálculo mental e algoritmo convencional (KAMII, 1995; ROGERS, 2009), a relação entre senso numérico e cálculo mental (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; LINS; GIMENEZ, 1997; SERRAZINA, 2012a) e a automatização de fatos fundamentais em prol da fluência com cálculo mental (ROGERS, 2009; FAYOL, 2012). Além de artigos, livros e documentos oficiais, nós encontramos duas dissertações defendidas no Brasil envolvendo o tema (FONTES, 2010; BENITES, 2011). As dissertações nos ajudaram numa primeira aproximação ao tema. Também tivemos acesso à dissertação “O cálculo mental na resolução de problemas: Um estudo no 1º ano de escolaridade”, defendida por Morais (2011), em Portugal, que nos ajudou a encontrar textos científicos que categorizassem os níveis de estratégias de cálculo mental. Para mais detalhes sobre esses trabalhos ver capítulo dois.

Cremos que trabalhar com atividades de cálculo mental favorece a aprendizagem de fatos fundamentais de adição e subtração, pode contribuir para o desenvolvimento do senso numérico e de uma intimidade maior com os números, fazendo com que as crianças não tenham medo de experimentar suas próprias estratégias de resolução. Notamos através dos estudos durante o mestrado que o cálculo mental não é muito explorado em sala de aula, embora seja fortemente

---

Este grupo se reúne desde 2006. Em 2012, os encontros, que antes ocorriam na Universidade Federal do Espírito Santo, passaram a acontecer todas as terças-feiras no Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) campus Vitória.

recomendado pela literatura científica (SOWDER, 1988; PARRA, 1996; LINS; GIMENEZ, 1997; BEISHUIZEN, 1997; KLEIN; BEISHUIZEN, 1998; THOMPSON, 1999, 2000), pelas diretrizes curriculares nacionais (BRASIL, 1997) e documentos oficiais de outros países (NCTM, 1986; BUENOS AIRES; 2006; PORTUGAL, 2007). Por isso, nosso interesse está em contribuir para que o cálculo mental seja, de fato, praticado em sala de aula. Estamos interessados em investigar, em particular, estratégias de cálculo mental usadas por alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental para resolverem cálculos de adição e subtração.

Alguns livros indicados como referências na pesquisa fazem parte do acervo pessoal do pesquisador, outros do acervo da professora orientadora da investigação. A maior parte dos artigos foi encontrada na internet, por meio de sites de busca. O procedimento de pesquisa *online* foi utilizar palavras-chave do trabalho em português, inglês e espanhol e também entrar no site de busca de outros países como Portugal, Espanha, Argentina e Estados Unidos da América. Alguns artigos relacionados à temática foram encontrados, diretamente, em sites de periódicos brasileiros e um português (Associação dos Professores de Matemática - APM) da área de educação matemática. Muitos trabalhos importantes foram encontrados em *sites* mantidos pelos próprios pesquisadores, como Thompson e van den Heuvel-Panhuizen[28]. A dissertação de Fontes (2010) foi encontrada no banco de teses e dissertações da Capes.

3.4 - A pesquisa definitiva

Abaixo, organizamos um quadro resumo das etapas da pesquisa definitiva em campo. Associamos cada etapa às datas correspondentes, ao número de aulas aos nossos objetivos de pesquisa e de interesse pedagógico e os instrumentos de coleta de dados.

---

[28] Página pessoal do pesquisador Ian Thompson onde artigos publicados por ele podem ser encontrados: http://www.ianthompson.pi.dsl.pipex.com/index_files/Page352.htm. Página pessoal da pesquisadora M.H.A.M. van den Heuvel-Panhuizen com link para repositório de artigos: http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/

Quadro 4: Resumo das etapas da pesquisa em campo

Etapas da pesquisa em campo	**Data**	**Nº de aulas**	**Objetivos**	**Forma de organização dos dados**
Contato inicial e entrevista com professora e pedagoga.	10/05/2013 13/05/2013	- -	Obter autorização para entrada em campo. Coletar informações gerais sobre a professora e a escola.	Anotações em caderno de campo.
Observação inicial das aulas / caracterização da turma e alunos	13/05/2013 14/05/2013 17/05/2013 20/05/2013 21/05/2013 27/05/2013 28/05/2013	1 aula 2 aulas 1 aula 1 aula 2 aulas 1 aula 2 aulas	Conhecer a metodologia de ensino-aprendizagem da professora. Acompanhar o desempenho individual dos alunos nas atividades matemáticas propostas pela professora Silvia. **Observar prática de cálculo mental em sala de aula.**	Anotações em caderno de campo.
Intervenção didática	28/05/2013 06/06/2013 07/06/2013	2 aulas 1 aula 1 aula	Auxiliar a turma e a professora em atividades trimestrais. **Observar prática de cálculo mental em sala de aula.**	Lista de tarefas de multiplicação Lista de tarefas de divisão. Anotações em caderno de campo.
Relatório parcial de caracterização da turma e alunos Análise inicial da etapa de observação.	Mês de junho de 2013	-	Organizar dados coletados e registrados em caderno de campo. Registrar primeiras impressões e análises preliminares.	-
Elaboração da atividade diagnóstica	24/06/2013 08/07/2013 08/08/2013 12/08/2013	-	Elaborar sequência de tarefas de cálculo mental.	-
Atividade diagnóstica de cálculo mental	06/08/2013 08/08/2013 13/08/2013	1 aula 1 aula 1 aula	**Diagnosticar estratégias de cálculo mental em cálculos de adição e subtração.**	Anotações em caderno de campo. Folha de respostas da

Etapas da pesquisa em campo	**Data**	**Nº de aulas**	**Objetivos**	**Forma de organização dos dados**
				atividade de pesquisa.
Entrevista individual com os alunos	22/08/2013 02/09/2013 05/09/2013	1 aula 1 aula 1 aula	**Identificar e compreender estratégias de cálculo mental em cálculos de adição e subtração.**	Anotações em caderno de campo.
Observação das aulas	05/09/2013 06/09/2013 19/09/2013 23/09/2013	1 aula 1 aula 1 aula 1 aula	Auxiliar a turma e a professora em atividades trimestrais. **Observar prática de cálculo mental em sala de aula.** *Notamos que a professora Silvia passou a estimular o cálculo mental em sala de aula e a ensinar na lousa algumas estratégias a partir daqui.	Anotações em caderno de campo.
Análise de dados das etapas de observação e diagnóstica.	Outubro de 2013	-	Analisar estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos em cálculos de adição e subtração.	-
Intervenção didática Análise de dados das etapas de observação, diagnóstica e intervenção didática.	18/11/2013 03/12/2013 12/12/2013	1 aula 1 aula 3 aulas	Auxiliar a turma e a professora em atividades trimestrais. Ensinar estratégias de cálculo mental de adição, subtração e algumas de multiplicação. Estimular os alunos a usar o cálculo mental e a memorizarem fatos fundamentais.	Anotações em caderno de campo.

Iniciamos a pesquisa de campo no dia 10 de maio de 2013. Ficamos em período de observação da turma durante três semanas. Observamos o desempenho dos alunos nas tarefas propostas pela professora nas aulas de matemática. Ao final do período de observação, a pedido da professora Silvia[29], elaboramos duas sequências de atividades. A primeira sequência, aplicada no dia 28 de maio de 2013, trouxe cálculos de multiplicação, focalizando o procedimento algorítmico e as ideias da multiplicação, via resolução de problemas. No dia 29 de maio, aconteceu o conselho de classe; no dia 30 foi feriado; e no dia 31, iniciou-se o recesso escolar, finalizando o primeiro trimestre. Evidentemente, só discutimos a atividade com os alunos na primeira semana de junho que foi reservada para a recuperação trimestral. A segunda sequência de atividades, trabalhada no dia 6 de junho, trouxe cálculos de divisão, seguindo a mesma estrutura da sequência anterior, isto é, focalizando o procedimento algorítmico e as ideias da divisão por meio de resolução de problemas. Os exercícios foram discutidos com os alunos na aula posterior, dia 7 de junho de 2013.

Fizemos uma pausa de, aproximadamente, um mês após a discussão das listas em aula, a fim de redigir o relatório desta etapa. Retornamos à escola no mês de julho de 2013. Iniciamos a elaboração e a escolha da atividade de pesquisa, nos dias 24 de junho e 8 de julho de 2013. Enquanto elaborávamos a atividade de pesquisa, continuávamos com as observações da turma e auxiliando a professora regente durante as aulas de resolução de problemas e exercícios rotineiros. Em algumas aulas, trabalhamos no quadrado mágico, com a exploração de regularidades numéricas e exercitamos o cálculo mental.

Após a escolha da atividade de pesquisa, fizemos duas adaptações dos valores numéricos, nos dias 8 e 12 de agosto. Iniciamos a aplicação da atividade de pesquisa, no dia 6 de agosto de 2013. Neste dia, trabalhamos com as sequências 1 e 2 de cálculos mentais, totalizando 5 e com resultado menor ou igual a 10. No dia 8 de agosto de 2013, fizemos o retorno coletivo da atividade com toda a turma, discutindo as maneiras como fizeram os cálculos e outras possibilidades. No mesmo dia, iniciamos a aplicação da sequência 3 de cálculos mentais com total menor ou igual a 20. Ainda no dia 8, fizemos a discussão das estratégias usadas pelos alunos, após cada cadeia de cálculos. Finalmente, aplicamos a sequência 4, de cálculos mentais, com resultado menor ou igual a 100, no dia 13

[29] Nome fictício escolhido pela professora da turma.

de agosto de 2013, fazendo a discussão das estratégias após cada cadeia de cálculos. No dia 22 de agosto, conseguimos dar retorno individual da atividade de pesquisa a Ester, Artur e a outros alunos. No dia 2 de setembro, entrevistamos, novamente, Artur e também o aluno Douglas[30].

Depois do período de entrevistas, nos afastamos da sala de aula, no mês de outubro, para focalizarmos na organização, categorização e primeira interpretação dos dados coletados e apresentação dos resultados parciais da pesquisa em um congresso nacional de estudantes de pós-graduação em educação matemática. Durante esse período, trocamos ideias com a professora orientadora, a respeito dos dados e com a professora Silvia sobre atividades matemáticas e a etapa de intervenção didática. Retornamos à escola para planejarmos, juntamente com a professora Silvia, a etapa de intervenção didática da pesquisa. No dia 18 de novembro, aplicamos uma atividade que envolvia sensibilidade numérica, plausibilidade numérica e estimativa. Discutimos as soluções das atividades com os alunos na mesma aula. A professora Silvia estava preocupada com a quantidade de alunos em recuperação trimestral, por isso, continuou trabalhando com os assuntos: potenciação, radiciação, expressões numéricas, mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e máximo divisor comum (m.d.c.). Daí, procuramos realizar a intervenção didática, com foco nos conteúdos que seriam exigidos na recuperação trimestral e, paralelamente, exploramos o cálculo mental com as quatro operações fundamentais, potenciação e radiciação. Auxiliamos os alunos na aula de resolução da prova trimestral e, no dia 3 de dezembro, trabalhamos mais uma lista com os conteúdos mencionados acima. Dos quinze alunos da turma, onze ficaram em recuperação trimestral. Desses onze alunos, cinco foram para a recuperação final. Finalizamos nossas atividades de intervenção didática com os cinco alunos, no dia 12 de dezembro, durante três aulas geminadas de matemática. A prova de recuperação final aconteceu no dia 16 de dezembro de 2013.

---

[30] Nome fictício escolhido pelos alunos da turma.

3.4.1 - A escola

A pesquisa foi realizada numa escola da rede estadual de ensino localizada no bairro Jardim Limoeiro, no município de Serra, no estado do Espírito Santo. Escolhi essa escola, primeiro por ter cursado nela a maior parte do ensino fundamental e, segundo, por estar localizada próxima ao bairro onde moro. A escola oferece ensino fundamental, ensino médio, ensino médio profissional e educação de jovens e adultos na modalidade de ensino médio. Conforme censo realizado, no ano de 2011, a escola possui: alimentação escolar para os alunos, acesso à Internet, internet banda larga, biblioteca, cozinha, televisão, DVD, computadores, impressoras, água filtrada, água em rede pública, sala de diretoria, sala de professores, esgoto em rede pública, energia em rede pública, coleta de lixo periódica e sanitário dentro do prédio. Ainda, segundo o censo 2011, a escola não possui: Laboratório de informática em condições de uso, Laboratório de ciências, Reciclagem de lixo, Sala de leitura, Parque Infantil, Berçário, Dependências adequadas a alunos com deficiência, Sanitário adequado a alunos com deficiência, Quadra de esporte coberta, Sala para atendimento educacional especializado. O ensino fundamental é oferecido no turno vespertino. Existe uma turma para cada série escolar deste nível de ensino. De modo geral, a escola atende a alunos de famílias de baixa renda. Este estudo foi realizado entre os meses de maio e dezembro de 2013, no turno vespertino, na única 5ª série/6º ano da escola.

3.4.2 - A turma

A 5ª série/6º ano pesquisada possui 23 alunos matriculados. No entanto, a frequência nas aulas variava entre 11 e 15 alunos. Alguns alunos pediram transferência antes do término do primeiro trimestre por motivos diversos, dentre eles, mudança de emprego dos pais. A faixa etária dos alunos da turma está entre 11 e 14 anos, a maioria se concentra entre 11 e 13 anos e três alunos possuem 14 anos estando atrasados na idade escolar. Como a escola não oferece de 1ª a 4ª série (1º ao 5º ano), a maioria dos alunos vieram de outras unidades, exceto os alunos repetentes. Alguns estão repetindo a 5ª série/6º ano pela segunda vez. No período de observação e coleta de dados entraram três novos alunos, transferidos de outras escolas, e um aluno da turma pediu transferência para outra escola.

São cinco horas semanais de aulas de matemática. Até o dia 10 de maio de 2013, os conteúdos de matemática trabalhados com a turma foram: sistema de numeração egípcio, romano e decimal; antecessor e sucessor; decomposição numérica; a escrita dos números por extenso; as quatro operações fundamentais. Entre maio e dezembro de 2013, foram trabalhados os conteúdos de potenciação, radiciação, expressões numéricas, múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade, mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e máximo divisor comum (m.d.c.). A professora de matemática da turma disse que tem dado ênfase às quatro operações como revisão do que a turma deveria ter aprendido até a quarta série. Disse ainda que seus alunos têm muita dificuldade com as quatro operações, não fixam a tabuada e não conseguem realizar multiplicação com dois algarismos. Silvia relatou que tem trabalhado com estratégias diferenciadas como sistema monetário e algum jogo, mas eles não abstraíram os algoritmos e se ampararam em estratégias como contar palitinhos, risquinhos, etc.

A pedagoga da escola nos deu a mesma descrição da turma que a professora de matemática. Acrescentou que, pela primeira vez, na escola, a maior parte da turma estava na idade escolar correta. Disse que os alunos são bem imaturos, no sentido de não terem abandonado recursos como contagens com “risquinhos” e desenhos, indo diretamente ao cálculo formal. A pedagoga salientou que os alunos não obtinham êxito nas tarefas, utilizando os recursos de contagem. Ela reconhece que o problema é grave e é proveniente da falta de hábitos de estudo, uma base não muito boa de 1ª a 4ª série (1º ao 5º ano) e do não envolvimento da família na formação escolar dos filhos. Ela disse ainda que a escola desenvolve um projeto de reforço, enviando atividades matemáticas do ensino fundamental 1 para que os alunos façam em casa. Ademais, a professora de ciências desenvolve um trabalho com caligrafia na escola. Segundo a pedagoga, a escola tem feito o que pode dentro de suas limitações.

3.4.3 - A professora

No primeiro dia de contato com a escola, realizamos uma entrevista com a professora de matemática, buscando informações sobre sua formação, seus estudos e características da turma. A professora Silvia é bacharel em ciências contábeis e possui complementação pedagógica em matemática. Silvia nos informou que após o nascimento de seu filho não conseguiu retornar ao mercado de trabalho como contadora e passou a lecionar a disciplina de matemática. Possui, aproximadamente, 13 anos de experiência como professora. No turno matutino é professora efetiva da rede municipal de Vila Velha, em uma escola de ensino fundamental e, no turno vespertino, atua como professora em regime de Designação Temporária (DT) na escola participante da pesquisa, desde o início do ano letivo de 2012. Ela abraçou a proposta de investigação, mostrando interesse no tema cálculo mental. Mostrou-nos o livro didático[31] utilizado por ela, na prefeitura municipal de Vila Velha, que contém uma quantidade significativa de atividades, abordando cálculo mental, articulando o tema com o conteúdo curricular abordado. Acreditamos que o livro e a palestra ministrada pelo autor para os professores da rede municipal de Vila Velha influenciaram a maneira como Silvia trabalha parte dos assuntos em sala de aula.

Durante o período de pesquisa de campo, aprendemos com a professora Silvia a articulação de conteúdos dentro da própria matemática. Por exemplo, sua abordagem de ensino de potenciação que compreendeu tópicos como: área de figuras planas, quadrados perfeitos, sequências numéricas e organização e leitura de dados em tabela. Além disso, notamos como a professora aos poucos foi incorporando a prática regular de cálculo mental em sala de aula, integrando este a tópicos do currículo de matemática para a 5ª série/6º ano, como em potenciação, mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e máximo divisor comum (m.d.c.). A percepção da professora, resultado de sua experiência docente, chamou nossa atenção para a elaboração de tarefas de intervenção didática que auxiliassem tanto o desenvolvimento do programa de matemática proposto pela professora Silvia quanto os alunos que precisassem dessa ajuda. Assim, na intervenção

---

[31] Vontade de Saber - Matemática - 6º Ano - Joamir Souza – Patrícia Moreno Pataro - Editora FTD – 2010.

didática, não trabalhamos somente estratégias de cálculo mental de adição e subtração.

Nas primeiras semanas de observação, Silvia pareceu estar um pouco desconfortável com nossa presença em sala de aula e, algumas vezes chegou a dizer que estava nervosa, pois estava na frente de um mestre. Também disse que não possuía a formação pedagógica que eu tinha como licenciado em matemática. Para diminuir a tensão de Silvia, esclarecemos que não tínhamos muito tempo de experiência profissional e que por isso tínhamos muito a aprender com ela. Também estávamos ansiosos diante da situação de pesquisa que era nova para nós.

Observamos a interação entre a professora e a pedagoga da escola. Acreditamos ser a interação importante para o planejamento de listas de atividades, provas e outras formas de avaliação. Na elaboração de listas de atividades e provas, a professora Silvia procurou resgatar conteúdos trabalhados, anteriormente, por ela. Suas atividades eram extraídas na íntegra ou adaptadas de livros didáticos. Um dos livros consultados para esse fim foi o intitulado “Vontade de saber Matemática”, dos autores Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro, que possui uma metodologia de ensino-aprendizagem, baseada na resolução de problemas com conteúdos distribuídos em espiral. Na maior parte das vezes, a professora Silvia e a pedagoga Marta[32] deram prioridade a exercícios rotineiros e tradicionais, seguidos do enfoque em resolução de problemas.

A professora Silvia distribuiu pontos entre exercícios no caderno, prova e algumas das atividades de intervenção didática da pesquisa, porém reconhecemos em sua fala que acredita ser a prova o instrumento de avaliação que, realmente, mostra o que o aluno aprendeu durante o processo de ensino-aprendizagem. Ainda durante a entrevista, Silvia mostrou bastante preocupação com o aspecto social de seus alunos, com o não envolvimento dos pais na educação de seus filhos, com a maneira que o celular, a internet e, por vezes, o crack têm chamado mais a atenção do que os estudos. Silvia leu o que escrevemos a respeito dela, a

[32] Nome fictício atribuído à pedagoga da escola.

respeito da pedagoga da escola e a respeito da turma, confirmando nossos registros.

3.4.4 - Os alunos sujeitos de pesquisa

A análise dos dados dos alunos de toda a turma seria inviável. Por isso, trouxemos, no relatório de pesquisa, os procedimentos de cálculo mental de três alunos participantes da investigação. Nosso critério de seleção dos alunos implicados na pesquisa foi o de participação em todas as atividades de cálculo mental conduzidas por nós. Oito alunos tiveram suas estratégias de cálculo observadas, três dos quais de forma mais detalhada por oferecerem mais variedades de condutas e respostas que permitiram responder às nossas questões de investigação. Os dados desses três alunos em particular mostram a importância da entrevista individual para a compreensão das estratégias adotadas de cálculo mental e para percebermos a influência dos afetos na escolha desses procedimentos. Participaram da pesquisa como sujeitos: Ester, Artur e Douglas. São nomes fictícios e foram escolhidos pelos próprios alunos para preservar o anonimato e garantir a privacidade deles conforme direitos da criança e do adolescente e de acordo com a ética na pesquisa em educação. Temos: dados coletados de Ester e Artur no período de observação da turma; dados de Ester, Artur e Douglas nas três aulas de aplicação da atividade de pesquisa; e, na fase de intervenção didática, nós temos dados de Artur e Douglas.

Ester é uma aluna assídua às aulas, mas com bastante dificuldade nas quatro operações aritméticas, sobretudo, quando aparecem em atividades de resolução de problemas. Percebemos um aumento significativo no desempenho de Ester nas tarefas de matemática propostas pela professora tanto para casa quanto em sala de aula, no decorrer do período em que estivemos na escola.

Artur é um dos alunos mais assíduos. Não possuiu nenhuma falta durante a pesquisa. Contudo, é um dos alunos da turma que mais teve dificuldades em tarefas matemáticas. Isso fez com que sua autoestima ficasse baixa e que tivesse pouco gosto pela matemática. Além disso, repetiu a 5ª série/6º ano, em 2013.

Durante a etapa de observação da pesquisa, observamos que Artur tem dificuldade em escrever, corretamente e, nas tarefas de matemática, costuma fazer representações particulares, distintas dos algoritmos convencionais. Possui poucos fatos fundamentais memorizados. Recorria bastante a contagens nos dedos e contagens com riscos no caderno.

Douglas também repetiu a 5ª série/6º ano, em 2013. Seu desempenho nas tarefas de matemática tem sido bom, mas ainda tem bastante dificuldade em resolução de cálculos de divisão. Suas notas baixas estão relacionadas ao grande número de faltas nos últimos meses. Quando presente em sala de aula, Douglas mostrava-se participativo nas discussões. Sua participação nas aulas diminuiu bastante no terceiro trimestre, durante as aulas e sua frequência também diminuiu.

Abaixo, montamos um quadro com as notas dos três alunos referentes aos trimestres do ano letivo de 2013. Os dois primeiros trimestres corresponderam ao total de 30 pontos cada um, e o último trimestre totalizou 40 pontos. Todos os três alunos foram aprovados, sendo que apenas Ester não precisou fazer a prova de recuperação final. A professora Silvia nos informou que o conselho de classe concordou na aprovação de Artur e Douglas, visto que repetiram a 5ª série/6º ano, em 2013.

Quadro 5: Rendimento trimestral dos alunos durante o ano de 2013

Aluno (a)	**1º Trimestre (nota)**	**2º trimestre (nota)**	**3º trimestre (nota)**	**Total**
Ester	19	22	19	60
Artur	15	12	23	60
Douglas	18	10	32	60

3.5 - O processo de elaboração da atividade de pesquisa definitiva

No decorrer do experimento de ensino exploratório, conduzido em setembro de 2012, sentimos a necessidade de trabalhar atividades de adição e subtração que explorassem de modo mais completo fatos fundamentais que podem ser aproveitados como estratégias para calcularmos mentalmente. Por exemplo, a busca por dobros, totais 5, totais 10, totais 15, totais 20 e totais 100. Portanto, precisávamos organizar uma sequência didática para esse fim. No exame de qualificação do projeto de pesquisa, foi-nos sugerida a leitura da dissertação de Figueiredo (2013), mais especificamente, foi-nos aconselhado ver como organizou uma sequência didática para atingir objetivos de cálculo mental com operações de adição e multiplicação. Após a leitura do relatório de pesquisa de Figueiredo (2013), lembramos-nos que havíamos discutido, durante algumas aulas com a orientadora, alguns tópicos do livro "Didáctica de las Matemáticas para maestros" [33] dos autores Juan D. Godino (organizador), Carmen Batanero, Vicenç Font, Eva Cid, Francisco Ruiz e Rafael Roa. Dentre os tópicos, trabalhados falamos de números, operações e procedimentos de cálculo como o cálculo mental. Analisando novamente o livro, encontramos uma atividade diagnóstica proposta pelos autores que ia ao encontro do que queríamos investigar. Dessa forma, adaptamos a atividade para atender aos seguintes objetivos:

- Diagnosticar repertório de cálculo mental de adição e subtração com total menor ou igual a 5 ($a + b \leq 5$), menor ou igual a 10 ($a + b \leq 10$), menor ou igual a 20 ($a + b \leq 20$) e menor ou igual a 100 ($a + b \leq 100$).
- Analisar estratégias dos alunos na resolução dos cálculos mentais.

A atividade extraída e adaptada do livro "Didáctica de las Matemáticas para maestros" traz o seguinte enunciado:

> Diagnóstico de competências na realização de adições e subtrações formais **orais**. Na tabela seguinte se inclui uma relação de tarefas aditivas que se pode usar para o diagnóstico das competências dos alunos de **1º curso do primário** na realização oral de adições e subtrações formais. Utilize esta pauta com alguma criança deste nível e **identifique as tarefas que envolvem maior dificuldade** (grifo do pesquisador) (CID; GODINO; BATANERO, 2004**,** p. 195).

Os autores propuseram, de modo implícito, a aplicação da atividade, individualmente, com alguma criança. Porém, em nossa proposta queríamos investigar com todas as crianças da turma ao mesmo tempo. A professora Silvia disse que, antes da aplicação da atividade, não tinha entendido como ela seria

---

[33] GODINO, J. D. et al (org.). **Didáctica de las matemáticas para maestros:** Manual para el estudiante. Granada: Gami, S. L. Fotocopias, 2004. 461 p. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>. Acesso em: 17 ago. 2012.

conduzida com toda a turma. Elaboramos a atividade e mostramos à professora Silvia no dia 8 de julho de 2013 e perguntamos o que ela achava da tarefa e o por quê. A propósito, queríamos saber o que Silvia esperava do desempenho dos alunos na atividade. A professora disse:

> Quando se pensa em 5ª série/6º ano, eu diria ‘muito fraco’, seriam atividades de séries iniciais, 5ª série/6º ano já domina esses exercícios, mas a nossa realidade é diferente, os fatos que considero mais simples 2 + 2, 3 + 3..., muitos não sabem de cabeça precisam da ajuda dos dedos. Enfim, a atividade parece ser interessante, mas não seria a que eu gostaria de aplicar, queria que meus alunos já soubessem.

Em sua opinião sobre a atividade de pesquisa, a professora Silvia nos deu um diagnóstico com base em seu conhecimento da turma. Afirma que, até para os fatos fundamentais mais simples, muitos alunos teriam dificuldade e utilizariam os dedos para contagens. A aplicação da atividade de pesquisa nos forneceria mais detalhes sobre as estratégias de cada aluno. Conforme sugestão dos autores Cid, Godino e Batanero (2004), nós identificamos os cálculos que ofereceram maiores dificuldades aos alunos e procuramos analisar as estratégias adotadas por eles.

3.5.1 - A atividade de pesquisa

A atividade de pesquisa consistiu em quatro sequências de cálculos mentais dados oralmente. Era fornecido algum tempo para que os alunos fizessem o cálculo mentalmente e registrassem apenas o resultado obtido. Durante esse tempo, repetíamos o cálculo várias vezes para os que não haviam entendido. Organizamos a atividade em quatro sequências de cálculos. Cada sequência possuía várias questões com cálculos semelhantes. Na aula um, do dia 6 de agosto de 2013, aplicamos as sequências de cálculos um e dois. Na aula dois, do dia 8 de agosto de 2013, aplicamos a sequência de cálculos três e, na aula três, do dia 13 de agosto de 2013, aplicamos a sequência de cálculos quatro. Cada aluno recebeu uma folha de respostas como a que está no apêndice B. Na folha de respostas, o aluno deveria apenas registrar a resposta de cada cálculo. O cálculo deveria ser realizado mentalmente, sem auxílio de nenhum registro de cálculos parciais. Ao final de cada folha de respostas, existiam dois campos de respostas para serem preenchidos pelos alunos: “o que eu percebi de parecido ou diferente nos cálculos foi” e “para calcular mentalmente, eu”. Com essas respostas, queríamos obter dados de cada aluno relativos a uma primeira reflexão sobre a própria maneira de calcular mentalmente. Devido ao programa curricular da escola, não tivemos tempo para aplicar a mesma atividade de pesquisa em outros formatos, como dar os cálculos escritos no papel ou escrevê-los no quadro. Aplicamos, apenas oralmente, como propõem os autores do livro “Didáctica de las Matemáticas para maestros”.

Abaixo, colocamos as quatro sequências de cálculos, suas questões e nossos comentários sobre o que queríamos analisar e o que esperávamos que os alunos registrassem. Os enunciados das tabelas bem como as respostas dos cálculos são para facilitar o trabalho do leitor, aumentando a legibilidade do texto. Os alunos não recebiam nenhum enunciado, apenas uma folha onde deveriam registrar suas respostas dos cálculos efetuados mentalmente. Queremos destacar que se professores de matemática querem que seus alunos incorporem esse tipo de repertório de cálculo, logo devem experimentar atividades semelhantes várias vezes com este e com outros formatos.

a) Primeira sequência de tarefas

Fornecemos de 5 a 7 segundos para registro de respostas de cada cálculo da sequência um. Repetíamos o cálculo de duas a três vezes durante o intervalo de tempo. No final do tempo estipulado, dávamos o comando “próximo” que significava que iríamos pronunciar o próximo cálculo da sequência. Algumas vezes, os alunos não entendiam o que falávamos e pediam para que repetíssemos o cálculo. Assim, repetíamos e dávamos, novamente, mais algum tempo para registro. Isso aconteceu em todas as sequências.

Atividade: Adição com parcelas e resultado menor ou igual a cinco (operações que se fazem com somente uma mão)

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais com menor ou igual a 5.

Figura 3: Primeira sequência de tarefas

1 + 1	1 + 2	1 + 3
1 + 4	2 + 2	2 + 3

Na sequência um, esperávamos que os alunos não tivessem nenhuma dificuldade e registrassem, rapidamente, o resultado na folha de respostas. Nossa expectativa era a de que todos tivessem esses resultados memorizados e automatizados.

b) Segunda sequência de tarefas

Fornecemos de 7 a 11 segundos para registro de cada cálculo da sequência dois. Semelhantemente à sequência um, dávamos o comando "próximo" e dizíamos o cálculo seguinte. O tempo destinado ao registro das respostas das sequências um e dois foi de, aproximadamente, 8 minutos.

Atividade: Adição com parcelas e resultado menor ou igual a dez (operações que se fazem com as duas mãos)

Questão um

Objetivos:

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição com total menor ou igual a 10.
- Diagnosticar conhecimento dos dobros de números naturais até 5.

Figura 4: Questão um – segunda sequência de tarefas

1 + 1	2 + 2	3 + 3
4 + 4	5 + 5	

Questão dois

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração com total menor ou igual a 10.
- Diagnosticar fatos fundamentais do número 5 com adição e subtração.

Figura 5: Questão dois – segunda sequência de tarefas

1 + 4	2 + 3	6 - 1
8 - 3	7 - 2	9 - 4

Questão três

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição com total igual a 10.

Figura 6: Questão três – segunda sequência de tarefas

1 + 9	2 + 8	3 + 7
4 + 6	5 + 5	

Questão quatro

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais diversos de números menores que 10 com adição.

Figura 7: Questão quatro – segunda sequência de tarefas

1 + 6	1 + 7	1 + 8	2 + 4
2 + 6	2 + 7	3 + 4	3 + 6

Na sequência dois, esperávamos que os alunos não tivessem dificuldade e registrassem, rapidamente, o resultado na folha de respostas. Nossa expectativa era a de que todos tivessem esses resultados memorizados e automatizados. E também que registrassem algumas regularidades em suas observações. Esperávamos que identificassem os dobros na questão um, identificassem que existem várias possibilidades de se formar o total 5 (questão dois) e várias formas de se formar o total 10 (questão três). Na questão quatro, queríamos verificar a fluência em cálculos simples com totais diferentes de 5 e 10. No final da aplicação de toda a sequência dois, fornecemos, aproximadamente, 17 minutos para registro do que haviam percebido de "padrões" nos cálculos e que estratégias de cálculo mental utilizaram. Entendemos como padrões em matemática, a ocorrência de ordem ou algum tipo de repetição ou mudança regular. No caso de cálculo mental, existem padrões na maneira como os algarismos se repetem, em cálculos diferentes com mesmo resultado, etc. Por exemplo, se sei que 6 + 8 = 14, este fato pode auxiliar o aluno a calcular 60 + 80. Basta que ele observe que somará os algarismos das dezenas, assim como faria se fossem unidades, 6 + 8 = 14 e, por fim, acrescentar um zero à direita, isto é, 140.

O tempo de aplicação das sequências um e dois totalizou, aproximadamente, 25 minutos. Havíamos previsto 20 minutos da aula para a aplicação da atividade.

Portanto, ultrapassamos 5 minutos com as repetições dos cálculos, oferecendo mais tempo de registro dos padrões e estratégias. O tempo de duração da atividade faz parte do planejamento de aula e é importante tanto no processo de pesquisa quanto no processo de ensino-aprendizagem cotidiano, procurando potencializar e otimizar a ação do professor e do pesquisador. Todavia, as aulas costumam conter momentos imprevisíveis para o professor e para o pesquisador. Daí, a experiência de ensino faz com que ambos aprendam a ajustar o tempo de duração das tarefas, incorporando momentos destinados a dúvidas e questionamentos dos alunos (SILVA; SANTOS-WAGNER, 2009). A pesquisa também contribui para nós, nesse sentido.

c) Terceira sequência de tarefas

Atividade: Adição e subtração com resultado menor ou igual a 20

Questão um

Objetivos:

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição com total menor ou igual a 20.
- Diagnosticar dobros até 20.

Figura 8: Questão um – terceira sequência de tarefas

6 + 6 **7 + 7** **8 + 8**

9 + 9 **10 + 10**

Questão dois

Objetivos:

- Diagnosticar fatos fundamentais do número 10 com subtração.

Figura 9: Questão dois – segunda sequência de tarefas

12 - 2	13 - 3	14 - 4	15 - 5
16 - 6	17 - 7	18 - 8	19 - 9

Questão três

Objetivos:

- Diagnosticar fatos fundamentais do número 15 com adição e subtração.

Figura 10: Questão três – terceira sequência de tarefas

14 + 1	13 + 2	12 + 3	11 + 4
16 - 1	18 - 3	17 - 2	19 - 4
20 - 5			

Questão quatro

Objetivos:

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição com total menor ou igual a 20.

Figura 11: Questão quatro – terceira sequência de tarefas

19 + 1	18 + 2	17 + 3	16 + 4
15 + 5	14 + 6	13 + 7	12 + 8
11 + 9			

Questão cinco

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição com total menor do que 20.

Figura 12: Questão cinco – terceira sequência de tarefas

7 + 12	3 + 11	8 + 9
6 + 11	13 + 5	6 + 9

Na sequência, três não esperávamos que os alunos tivessem muitas dificuldades nos cálculos. Apenas na questão cinco, imaginávamos mais dificuldades por se tratar de operações em geral, com resultados variados. Além do mais, apenas o último cálculo deste grupo totalizava 15. Todos os demais traziam fatos fundamentais com outros resultados. Queríamos que os alunos identificassem os dobros na questão um, observassem a regularidade na questão dois (1x – x = 10), observassem os fatos fundamentais do número 15 (questão três) e do número 20 (questão quatro).

d) Quarta sequência de tarefas

Atividade: Adição e subtração com parcelas e resultado menor ou igual a 100

Facilitamos, em média, 15 segundos para que os alunos fizessem o registro de cada resposta. Durante o tempo dado, repetíamos o cálculo, pelo menos, três vezes. Em vários momentos, foi necessária a repetição do cálculo para os alunos após o tempo determinado. A maioria das vezes, por não terem escutado corretamente, outras vezes por terem ficado para trás em algum cálculo. Estimamos, em 30 minutos, a aplicação da sequência quatro. Foram gastos, aproximadamente, 40 minutos, contando com a escrita das estratégias e observações de regularidades.

Questão um

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração com total menor do que 100.
- Trabalhar com operações de adição e subtração com dezenas e unidades.

Figura 13: Questão um – quarta sequência de tarefas

20 + 7	60 + 8	70 + 9	90 + 4
30 - 4	50 - 1	90 - 8	40 - 7

Questão dois

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração com total menor do que 100.

- Trabalhar com operações de adição e subtração com dezenas e dezenas.
- Verificar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas.

Figura 14: Questão dois – quarta sequência de tarefas

30 + 40	20 + 60	10 + 50
60 - 50	70 - 30	90 - 30

Questão três

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição com total menor do que 100.
- Trabalhar com operações de adição e subtração com dezenas e dezenas.
- Verificar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas.
- Verificar conhecimento dos dobros das dezenas.

Figura 15: Questão três – quarta sequência de tarefas

10 + 10	20 + 20	30 + 30
40 + 40	50 + 50	

Questão quatro

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição com total menor do que 100.
- Trabalhar com operações de adição e subtração com dezenas e dezenas.
- Verificar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas.

- Verificar conhecimento dos complementos de 100 com dezenas.

Figura 16: Questão quatro – quarta sequência de tarefas

10 + 90	20 + 80	30 + 70	40 + 60

Questão cinco

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração com total menor do que 100.
- Trabalhar com operações de adição e subtração com dezenas e unidades com dezenas.
- Verificar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas.

Figura 17: Questão cinco – quarta sequência de tarefas

47 + 20	63 + 30	16 + 60
55 - 10	43 - 30	78 - 50

Questão seis

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração com total menor do que 100.
- Trabalhar a subtração com dezenas e unidades e dezenas.

- Verificar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas.

Figura 18: Questão seis – quarta sequência de tarefas

32 - 30	49 - 40	78 - 70
93 - 90	84 - 80	65 - 60

Questão sete

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração com total menor do que 100.
- Trabalhar com operações de adição e subtração de dezenas e unidades com unidades.
- Verificar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas e unidades com dezenas.

Figura 19: Questão sete – quarta sequência de tarefas

45 + 3	37 + 2	73 + 6
45 - 3	67 - 4	89 - 8

Questão oito

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração com total menor do que 100.

- Trabalhar com operações de adição e subtração de dezenas e unidades com unidades em cálculos com reserva e empréstimo.
- Verificar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas e unidades com unidades.

Figura 20: Questão oito – quarta sequência de tarefas

45 + 7	53 + 8	39 + 7	24 + 9
45 - 7	83 - 8	67 - 9	

Questão nove

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição com total menor do que 100.
- Trabalhar com operações de adição e subtração de dezenas e unidades com dezenas e unidades em cálculos de dobros, com e sem reserva.
- Verificar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas e unidades.

Figura 21: Questão nove – quarta sequência de tarefas

25 + 25	27 + 27	33 + 33	39 + 39
46 + 46	38 + 38	19 + 19	

Questão dez

Objetivos

- Diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração com total menor do que 100.
- Trabalhar com operações de adição e subtração de dezenas e unidades com dezenas e unidades em cálculos diversos.

- Ampliar o repertório de cálculo dos alunos, transitando de operações com unidades para operações com dezenas e unidades.
- Possibilitar aos alunos o uso de estratégias de cálculo mental aprendidas anteriormente.

Figura 22: Questão dez – quarta sequência de tarefas

34 + 55	23 + 76	67 + 23	12 + 78	14 + 47
67 - 26	74 - 18	97 - 35	89 - 55	88 - 39

Na sequência quatro, confiávamos em que os alunos não tivessem dificuldades nos cálculos de adição da questão um, mas que tivessem dificuldades nas subtrações. Por exemplo, alunos que utilizassem o algoritmo convencional, mentalmente, poderiam sentir dificuldades em realizar o cálculo de subtração 90 – 8 com empréstimo. Por tratar-se de parcelas maiores do que os números das sequências anteriores, nós acreditávamos que alguns alunos iriam utilizar os algoritmos convencionais de adição e subtração. No caso, teriam a dificuldade de retirar 8 unidades de zero unidades e realizar corretamente o empréstimo na memória. Pensávamos que registrassem, rapidamente, os fatos da questão dois (de dezenas com dezenas), pois o raciocínio é análogo aos cálculos da questão quatro da sequência dois, adicionamos os algarismos das dezenas e repetimos o zero da direita.

A expectativa era a identificação rápida dos dobros na questão três e também esperávamos o registro rápido dos fatos fundamentais do número 100. Não supúnhamos que os alunos tivessem dificuldades em realizar os cálculos da questão cinco e da questão seis que se referiam à adição e à subtração, respectivamente, na casa das dezenas. Nos cálculos da questão sete, era de esperamos certa facilidade e agilidade, no entanto, na questão oito, esperávamos dificuldade, devido à reserva necessária em cada cálculo. Essa dificuldade parece aumentar, quando os cálculos são de subtração com empréstimo, como 45 - 7, 83 - 8, 67 – 9 e 94 – 8. Na questão nove, esperávamos a identificação dos dobros. Porém, acreditávamos que alguns alunos teriam dificuldade em calcular os dobros de 27, 39, 46, 38 e 19, por se tratarem de adições com reserva e números, que não terminam em 0 ou 5, que são mais fáceis de calcular. Na questão dez (operações em geral – envolvendo dezenas e unidades com dezenas e unidades), esperávamos dificuldades em vários cálculos, principalmente, nas contas de subtração com reserva, como 74 – 18. Colocamos, em algumas contas, a quantidade menor como primeira parcela para verificar se os alunos fariam uso da propriedade comutativa da adição.

3.6 - Coleta e análise dos dados

A coleta de dados se deu através das anotações em diário de campo, algumas gravações, transcrições e entrevistas. Nossa observação foi importante para registro posterior no diário de bordo de detalhes, a respeito do objeto de investigação. As entrevistas nos ajudaram a preencher lacunas em nossas inferências sobre os dados obtidos pela observação das aulas. Ademais, as entrevistas individuais foram cruciais para verificação das estratégias de cálculo mental dos alunos. A maior parte das estratégias mencionadas por eles se confirmou, outros cálculos foram mais bem desenvolvidos durante a entrevista do que durante as aulas de aplicação das sequências. Procuramos organizar os dados obtidos por aluno, fazendo um detalhamento do desempenho de cada um nas quatro sequências de cálculos mentais, bem como registrar os procedimentos utilizados por eles na entrevista. Categorizamos as estratégias de cálculo mental dos alunos, conforme categorias identificadas e propostas por Thompson (1999) para números menores que 20, propostas por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998) e Lucangeli et al. (2003) para números entre 20 e 100. Por fim, procuramos resumir todas as estratégias identificadas em um quadro e investigar a relação entre o tipo de cálculo e a estratégia adotada para resolvê-lo.

Na realização das análises dos dados, trabalhamos as pesquisas de Beishuizen (1997) Klein e Beishuizen (1998), Thompson (1999, 2000) e Lucangeli et al. (2003) como norteadoras da identificação das estratégias de cálculo mental adotadas pelos alunos. Essas pesquisas também nos auxiliaram na interpretação dos dados juntamente com Kamii (1984, 1995), Lins e Gimenez (1997) e outros trabalhos mais recentes sobre sentido numérico, aprendizagem numérica e cálculo mental. Procuramos confrontar os dados coletados por meio da atividade diagnóstica com os dados originados nas entrevistas. Isso nos ajudou a confirmar que estratégias de cálculo mental, os alunos haviam utilizado na atividade diagnóstica, auxiliou-nos a compreender que relação existiu entre o tipo de cálculo e a estratégia usada para resolvê-lo, como também, percebemos indícios de que existiu relação entre o estado emocional dos alunos e as estratégias escolhidas durante a atividade diagnóstica e durante as entrevistas.

Para nos auxiliar na interpretação dos dados, registrávamos as informações coletadas o mais rápido possível. Conseguimos registrar no computador quase todas as aulas, no mesmo dia de sua observação. Elaboramos um quadro, relacionando as estratégias de cálculo mental que identificamos para cada aluno nas quatro sequências da atividade diagnóstica. Esse quadro nos ajudou a esboçar uma resposta para nossas questões de estudo. O diálogo com nossa orientadora, acerca do procedimento metodológico da investigação e a respeito das análises dos dados, auxiliou na interpretação dos dados e no relato do texto final (SANTOS-WAGNER, 2012, 2013, 2014).

3.7 – As entrevistas com os alunos

Ao todo foram entrevistados oito estudantes. A etapa de entrevista com os alunos foi importante para verificação de algumas de nossas inferências, bem como de investigação das estratégias de cálculo mental observadas nos registros escritos dos alunos e no diálogo de retorno das estratégias com toda turma, após a aplicação de cada sequência. As entrevistas com os três alunos participantes das quatro sequências de tarefas aconteceram nos dias 22 de agosto e 2 de setembro. Entrevistamos cada aluno individualmente. Durante a entrevista pedíamos ao aluno para efetuar alguns cálculos mentais que estavam nas sequências de tarefas. Demos-lhes alguns cálculos que haviam acertado, mas a prioridade foi investigar as estratégias de cálculo mental nos cálculos com respostas incorretas. Portanto, a maior parte de nossos questionamentos foi em cálculos da sequência 4 (adição com parcelas e resultado menor ou igual a cem), na questão oito (de dezenas e unidades com unidades que ultrapassam a dezena), questão nove (dezenas e unidades com dezenas e unidades - dobros) e questão dez (dezenas e unidades com dezenas e unidades – operações em geral), onde os erros se concentraram.

Dávamos um cálculo, sem dizer ao aluno se havia acertado ou errado, no dia de aplicação da atividade diagnóstica. Queríamos verificar se, na entrevista, chegariam ao mesmo resultado, dado na folha de respostas. Conforme a resposta do aluno, dávamos um segundo cálculo para confirmação de sua estratégia. Foi possível interpretar os gestos feitos pelos alunos durante a entrevista que, muitas vezes, sinalizavam contagens nos dedos, contagens mentais ou representação da escrita do algoritmo convencional com o dedo indicador. No final da entrevista, parabenizávamos o aluno pelo resultado obtido na tarefa diagnóstica. Dizíamos o número de acertos e o número de erros obtidos, sendo o número de acertos bem superior. Observamos que tal atitude contribuiu para a tomada de segurança frente às atividades e autoestima de alguns alunos. O estudo da pesquisa de Gómez Chacón (2003) sobre a influência dos afetos na aprendizagem matemática foi relevante para a compreensão do uso de algumas estratégias, em momentos de ansiedade e tensão. As leituras sobre o tema também foram importantes para aprendermos a contornar situações de perturbação emocional, deixando os alunos mais tranquilos na entrevista.

3.8 – Os momentos de intervenção didática

Após a aplicação da atividade diagnóstica e das entrevistas, iniciamos o planejamento da etapa de intervenção didática. No dia 18 de novembro, aplicamos uma atividade que envolvia sensibilidade numérica e plausibilidade numérica (apêndice C). Discutimos as soluções das atividades com os alunos na mesma aula (ver no capítulo quatro a seção de intervenção didática, p. 115).

Estimamos a duração média dessa atividade em 40 minutos, com tempo de resolução para os alunos e discussão com toda a turma. O objetivo da atividade foi o de contribuir para o desenvolvimento da sensibilidade numérica dos alunos, por meio de questionamentos que envolviam razoabilidade e plausibilidade numérica. As atividades de sensibilidade numérica foram inspiradas no livro “Estimation and mental computation”, publicado em 1986, pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática, em inglês: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Como mencionamos no início deste capítulo, devido à quantidade de alunos em recuperação trimestral, a professora Silvia continuou trabalhando os assuntos: potenciação, radiciação, expressões numéricas, mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e máximo divisor comum (m.d.c.). No dia 3 de dezembro, trabalhamos mais uma lista com os conteúdos mencionados acima e focalizamos a realização das operações via cálculo mental (ver, no capítulo quatro, a seção de intervenção didática, p. 115). As atividades da lista foram extraídas de livros didáticos e escolhidas, tendo por parâmetro as atividades que a professora Silvia trabalhou com a turma.

No dia 12 de dezembro de 2013, além dos assuntos citados acima, trabalhamos com os alunos a construção, organização e observação de regularidades da tabuada de 1 a 9, algumas estratégias de cálculo mental para multiplicação e adição e intercalamos com os problemas da lista anterior várias rodadas de cálculo mental de, aproximadamente, quinze minutos com as quatro operações (ver detalhes no capítulo quatro na seção de intervenção didática).

A intervenção didática foi crucial para o ensino de algumas técnicas de cálculo mental e favorecer momentos destinados ao cálculo mental. Confiamos em ter conseguido contribuir para que o cálculo mental tivesse espaço nessa turma.

4 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, apresentamos os dados dos alunos Ester, Artur e Douglas, em três etapas, a saber: a etapa de observação (13, 14, 17, 20, 21, 27 e 28 de maio de 2013), a etapa da atividade diagnóstica (6, 8, 13 e 22 de agosto de 2013) e entrevistas (2 e 5 de setembro de 2013) e a etapa de intervenção didática (18 de novembro, 3 e 12 de dezembro de 2013). No final deste capítulo, sintetizamos o desempenho de todos os alunos participantes da atividade diagnóstica e da entrevista. Além de Ester, Artur e Douglas, participaram dessa etapa da pesquisa os alunos Luizza, Carlos, Eduardo, Junior e Vasco da Gama. As entrevistas desses alunos auxiliaram nossa compreensão durante a análise e interpretação dos dados sobre o uso de estratégias de cálculo mental.

Na etapa de observação, trouxemos dados de aulas com Ester e Artur e não de Douglas. Durante essa etapa, o aluno Douglas faltou bastante, o que dificultou registros de dados mais significativos. Na etapa diagnóstica, trouxemos dados dos três alunos envolvidos na pesquisa e, na etapa de intervenção didática, trouxemos dados de Artur e Douglas, pois Ester não participou da última aula de intervenção que, julgamos ter sido a aula de intervenção didática mais relevante para a pesquisa. Esta aula foi desenvolvida com alunos em recuperação final em matemática. Desta forma, o quadro abaixo resume os momentos em que aparecem os dados dos alunos.

Quadro 6: Dados dos alunos nas etapas da pesquisa

Aluno	**Observação**	**Diagnóstico**	**Intervenção**
Ester	**X**	**X**	
Artur	**X**	**X**	**X**
Douglas		**X**	**X**

Queremos salientar que durante a etapa de observação o desempenho de Douglas nas atividades matemáticas[34] foi baixo. Teve domínio do algoritmo de multiplicação, mas conhecia poucos fatos numéricos desta operação recorrendo bastante a contagens nos dedos e contagens com riscos e traços (representações

[34] Os conteúdos ministrados pela professora durante este período foram: Multiplicação e divisão: problemas e algoritmos.

icônicas). Precisou de auxílio da professora para a interpretação dos problemas, mas bastavam poucos questionamentos para que entendesse o que deveria ser feito. Sua maior dificuldade foi no domínio do algoritmo da divisão. No que diz respeito às operações de adição e subtração não vimos muitas dificuldades, exceto pelo desconhecimento de fatos numéricos básicos envolvendo subtração.

4.1 - Ester durante a etapa de observação

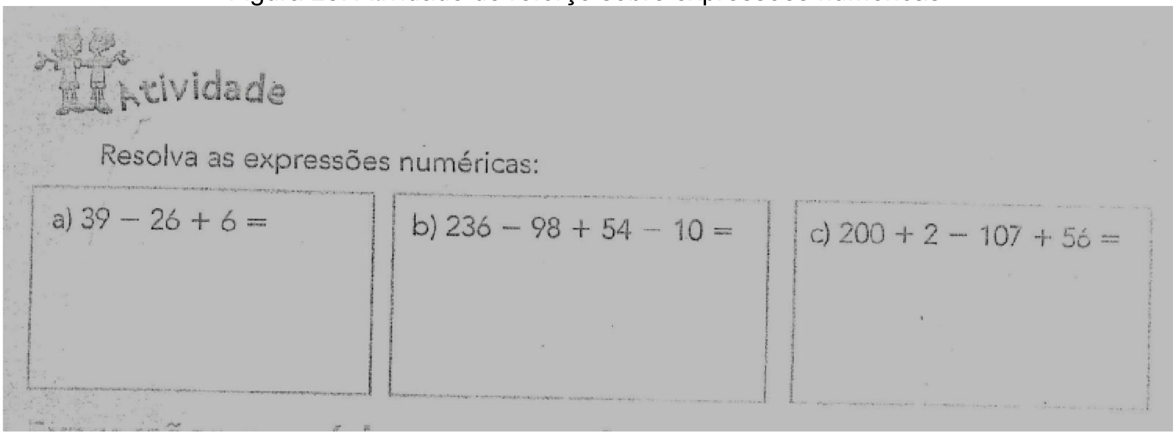
Escolhemos a aula do dia 13 de maio de 2013, para detalharmos o desempenho de Ester no decorrer da etapa de observação da turma. Optamos por essa aula porque a professora interagiu bastante com essa aluna. A análise da aula nos permitiu verificar o que Ester sabia e não sabia acerca de números, operações de adição e subtração e expressões numéricas. E mais, aprendemos sobre a importância da reflexão docente para orientação de suas ações durante e após uma aula de matemática. Ainda, julgamos relevante uma análise dos estados emocionais de Ester e suas influências em sua aprendizagem matemática.

4.1.1 - As soluções de Ester em expressões numéricas

Antes do dia 13 de maio, Silvia havia trabalhado as quatro operações fundamentais e expressões numéricas sem e com o uso de parênteses. Trabalhou com atividades de cálculo e também com resolução de problemas extraídos de livros didáticos[35]. Silvia dedicou essa aula à entrega e correção das atividades de reforço escolar planejadas por ela e pela pedagoga da escola. Abaixo está a primeira questão da lista sobre expressões numéricas sem o uso de parênteses:

[35] O livro utilizado para extrair exercícios de reforço foi utilizado pela pedagoga Marta em suas turmas de 4º e 5º ano em uma escola municipal de Serra.

Figura 23: Atividade de reforço sobre expressões numéricas



Analisando as soluções de Ester, notamos que soube efetuar adições e subtrações corretamente e não errou nenhuma operação presente nas expressões numéricas, se considerarmos a ordem de execução, como vemos no quadro abaixo. Realizou as contas, utilizando os algoritmos convencionais de adição e subtração, corretamente, em uma folha de rascunhos, deixando apenas os resultados em linha horizontal na estrutura de expressão numérica.

Quadro 7: Soluções de Ester

a) 39 – 26 + 6 39 – 32 7	b) 236 – 98 + 54 – 10 236 – 152 – 10 84 – 10 74	c) 200 + 2 – 107 + 56 202 – 163 39

Constatamos que Ester efetuou, primeiramente, as adições repetindo os sinais de subtração. Para ela, o símbolo de subtração indicava apenas que a operação deveria ser realizada, não importando a ordem. Neste tipo de expressão numérica, sem o uso de parênteses, professores e livros didáticos costumam orientar os alunos a realizar os cálculos na ordem em que aparecem. Mas é natural que os alunos procurem fazer primeiro aquilo que consideram mais fácil, nesse caso, Ester escolheu adicionar parcelas. Por isso, ela não resolveu, corretamente as expressões na ordem em que apareciam as parcelas. Alguns livros didáticos (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005) ao introduzirem o assunto, trazem exemplos de expressões numéricas vinculadas a uma situação-problema (figura 24).

Figura 24: Expressões numéricas – p. 19

Qual é o troco?

Aline comprou duas camisetas. A primeira custou 12 reais e a outra, 16 reais. Como havia levado uma nota de 50 reais, com quanto ela ficou de troco?

Danilo resolveu esse problema subtraindo de 50 o valor pago pela primeira camiseta e, do que restou, subtraiu o valor pago pela segunda:

$50 - 12 = 38$
$38 - 16 = 22$

Gustavo primeiro somou os gastos e depois subtraiu essa soma de 50:

$12 + 16 = 28$
$50 - 28 = 22$

Ambos os raciocínios estão corretos e suas contas também. Aline ficou com 22 reais.

O raciocínio de Danilo pode ser representado assim:

$$50 - 12 - 16$$

Já o raciocínio de Gustavo, indicamos assim:

$$50 - (12 + 16)$$

Os parênteses, ( ), são colocados na conta que é feita primeiro.

Situações como a apresentada na figura acima são classificadas por Santos-Wagner (2008), Charles e Lester (1982), como sendo de tradução complexa. Ou seja, são problemas que “fornecem aos alunos experiência em resolver situações problema que traduzem problemas reais e envolvem dois ou mais cálculos” (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 55). Esse tipo de problema com expressões numéricas tem o potencial de evidenciar a ordem de execução das operações.

Com respeito ao procedimento, é possível que Ester tenha se confundido com expressões numéricas com parênteses, pois nessas expressões, os cálculos não são executados na ordem em que aparecem e, sim, primeiro são feitos os cálculos entre parênteses, conforme a ordem em que aparecem e depois os cálculos fora dos parênteses.

Outra causa pode ter ocasionado o erro de Ester. Quando explicou o conteúdo à turma, a professora Silvia fez, no quadro, uma relação com a ordem de precedência de cálculo em uma expressão numérica. Listou: parênteses, colchetes, chaves, multiplicação/divisão, adição/subtração. É possível que Ester tenha imaginado, olhando o que a professora escreveu no quadro, que as adições devessem ser efetuadas antes das subtrações, mas, na verdade, Silvia disse que as adições e as subtrações deveriam ser feitas por último, ambas fazendo parte da mesma ordem na lista de precedência.

4.1.2 - A interação entre a professora Silvia e a aluna Ester

No item b desta mesma questão (figura abaixo), 236 – 98 + 54 – 10 =, a professora Silvia propôs que Ester efetuasse o cálculo de 236 – 98, utilizando o dinheiro falso[36]. Para esse fim, a aluna recebeu duas notas de cem, três notas de dez e seis notas de um real. Enquanto isso, Silvia fazia o passo a passo do algoritmo convencional, empregando a representação do Quadro Valor de Lugar (QVL) no quadro.

Figura 25: QVL

	C	D	U
	2	3	6
–		9	8

A professora disse que Ester deveria dar o troco (referindo-se ao resto da subtração) ao colega sentado ao seu lado. Cremos que Ester não entendeu o objetivo do uso do dinheiro falso e não fez associação entre o dinheiro falso e o algoritmo no quadro. Ester manipulou as notas, totalizando duzentos e trinta e seis reais várias vezes, do início ao fim, tentando encontrar alguma maneira de realizar o cálculo proposto. Não conseguiu sem ajuda da professora. Entendemos que a situação não favoreceu o seu sucesso na tarefa, porque a ocasião não se parecia com uma situação real por algumas razões: (a) nenhuma representação (dramatização) ou situação comercial foi criada em aula, a fim de dar sentido à palavra “troco”; (b) O colega de Ester não entregou o dinheiro a ela e, sim, à professora Silvia. Não fazia muito sentido, então, que ele recebesse o troco; (c) o valor numérico de um “troco” costuma serem poucas unidades, porquanto em uma situação comercial real, quem paga procura dar apenas o necessário e suficiente e, não alguma quantia que exceda muito o valor do

[36] Material de apoio didático também conhecido como dinheiro chinês. O “dinheiro chinês” é “um material didático elaborado por um grupo de pesquisadores da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, constituído por cédulas correspondentes a potências de 10, no nosso caso, cédulas de 1, 10 e 100. Objetivou auxiliar o aluno a compreender características do sistema de numeração decimal e a realizar operações numéricas, com base na reflexão sobre o uso do ‘dinheiro chinês’” (BEZERRA, 2009, p. 7).

produto ou serviço. No exemplo, se a mercadoria custava R$ 98,00, bastaria para Ester receber R$ 100,00 de seu colega, ao invés de R$ 236,00.

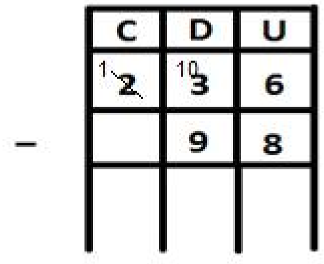
No capítulo sete da obra “Imaginação e criação na infância”, Vygotsky[37] (2004) tangencia a importância da representação (ou dramatização) nas relações de ensino. O autor afirma que “a criança é [...] um maravilhoso ator para si mesma” (p. 102), logo, a situação de sala de aula deve ser proposta, a fim de envolver a criança na interpretação. Isso ajuda a compreensão dos alunos na realização da tarefa proposta. Vygotsky (2004) afirma que “o drama está diretamente relacionado à brincadeira” (p. 99). O autor cita Petrova ao afirmar que “na brincadeira, a criação da criança tem o caráter de síntese; suas esferas intelectuais, emocionais e volitivas estão excitadas pela força direta da vida, sem tensionar, ao mesmo tempo e excessivamente, o seu psiquismo” (p. 100). Dessa forma, o aluno em estado emocional de motivação e ânimo (SANTOS, 1997; GOMÉZ CHACÓN, 2003) se predispõe à compreensão da tarefa sem sobrecarga emocional e cognitiva.

O professor pode e deve partir de onde o aluno está no desenvolvimento matemático e no desenvolvimento da tarefa (SANTOS, 1997; LORENZATO, 2006) para, por exemplo, criar uma encenação. Mediar onde o aluno está em seu conhecimento pode acelerar o desenvolvimento de seu potencial para aprendizagem (VYGOTSKY, 1991/1984). Portanto, a criação de uma situação de compra e venda facilitaria bastante o entendimento de Ester da proposta da aula.

A professora estimulou a aluna a realizar a troca de uma centena por dez dezenas para efetuar a subtração com empréstimo. As trocas no dinheiro eram feitas, observando-se o algoritmo da esquerda para a direita, isto é, uma centena equivalente a cem reais equivalentes a dez notas de dez reais.

[37] A obra possui escritos anteriores à década de 1930 que foram dirigidos inicialmente em forma de palestras para pais e professores.

Figura 26: Desenvolvimento do cálculo no QVL



Notamos que uma das dificuldades apresentadas foi que o dinheiro falso trabalha com o sistema de numeração decimal da esquerda para a direita, semelhantemente, ao cálculo mental, e o algoritmo convencional é, culturalmente trabalhado da direita para a esquerda, isto é, da menor para a maior classe. Outro fator importante para entendermos a dificuldade de Ester foi que, em situações práticas, costumamos dar o troco, completando o valor até chegar ao total recebido, semelhantemente à estratégia “contagem até” em que o aluno conta, a partir do subtraendo até chegar ao minuendo (THOMPSON, 1999), um procedimento diferente do proposto com o dinheiro falso. Constatamos que Ester passou a executar uma rotina, trabalhando em um nível esquemático e de compreensão instrumental sem estabelecer relações entre a situação proposta e a matemática envolvida (SKEMP, 1976). Como sugerem as ideias de Skemp (1976), se o professor faz uma pergunta ao aluno que não está, diretamente, relacionada às técnicas matemáticas memorizadas, será necessário mais um procedimento ou técnica para resolver o problema. Isso desencadeia um efeito dominó de incompreensão do assunto.

A professora perguntou à aluna quantas dezenas ela deveria trocar por unidades. Ester afirmou que deveria trocar quatro dezenas Possivelmente, a aluna efetuou, mentalmente, treze dezenas menos nove dezenas iguais a quatro dezenas e, imaginou que devesse trocar todas as quatro dezenas por unidades. Silvia corrigiu, afirmando que bastava uma dezena. Mesmo com o auxílio da professora, Ester não conseguiu concluir o cálculo, utilizando o dinheiro falso. Por isso, a professora Silvia concluiu o cálculo, empregando a representação do QVL no quadro, perguntando a Ester o que fazer e qual resultado em cada etapa. A aluna usou os dedos para calcular os fatos fundamentais, como 16 – 8 e 13 – 9, aplicando a estratégia “contagem até” (THOMPSON, 1999). Conforme van de

Walle (2009), "a dependência desses métodos (contagens, desenhos e etc.) para combinações numéricas simples é um impedimento sério ao desenvolvimento matemático" (p. 191). É possível que alguma falha tenha ocorrido no processo de ensino-aprendizagem de Ester no que diz respeito à transição de representações informais (icônicas e analógicas) para representações simbólicas (SCHLIEMANN, 2001/1983; FAYOL, 2012). De acordo com as pesquisas de Fayol (2012), Ester precisa admitir que a manipulação dos símbolos numéricos permite a agilidade e a exatidão de cálculo, passando de um nível concreto (apoio dos dedos) para um nível formal de cálculo exclusivamente mental. Fayol (2012) e Parra (1996) concordam ao acrescentarem que, além da agilidade de cálculo, a “ativação automática” leva os alunos à liberdade de cálculo e a exercerem um controle mínimo sobre números e operações.

4.1.3 – As emoções de Ester

Por fim, a professora Silvia pediu que a aluna juntasse as notas com o valor correspondente ao encontrado no algoritmo. Ester deveria ter dado 138 reais, mas deu 88 reais ao colega. Notamos que a aluna estava bastante ansiosa e sua feição transparecia medo de errar e insegurança. Certamente, essas emoções foram desencadeadas porque Ester não conseguiu compreender o propósito nem como executar a tarefa dada pela professora, ficando completamente desorientada (GOMÉZ CHACÓN, 2003). Além disso, a aula aconteceu em torno do diálogo entre a professora Silvia e Ester, diante de toda a turma, o que gerou um sentimento de tensão, ansiedade, desencadeando em Ester uma desorientação. Goméz Chacón (2006) afirma que a emoção de desorientação é um momento de perturbação da ordem. A autora acrescenta que a desorientação “manifesta-se como um momento de busca do porquê, como um salto para a abstração. A pessoa encontra-se desarmada e não sabe como dar a resposta” (p. 138). Entendemos que essa busca do porquê constitui-se como um momento promissor, para que o professor atue na transição de um nível de compreensão instrumental para um nível de compreensão relacional (SKEMP, 1976). O momento em que a criança começa a questionar a si mesma é a hora em que a compreensão instrumental revela-se insuficiente.

4.1.4 – Considerações sobre a aula

Olhando as soluções de Ester, em particular a soma 98 + 54 = 152 e 236 – 152 = 84, sentimos que não possuiu muita dificuldade com as operações de adição e subtração, exceto pelo uso dos dedos nas contagens. Vimos, nessa aula que aplicou o algoritmo convencional para calcular com o apoio dos dedos a fim de efetuar contagens e encontrar fatos fundamentais. Parece-nos que a aluna apenas não obedeceu às regras de precedência das expressões numéricas.

Para nós, a resolução da atividade, usando a representação do sistema monetário não ajudou, pois o problema não estava no cálculo e, sim, na ordem de resolução da expressão numérica. Tivemos a oportunidade de conversar com Ester nos últimos minutos da aula, quando a professora Silvia pediu aos alunos que refizessem os cálculos que haviam errado. Dissemos-lhe que, para não errar, os cálculos poderiam ser feitos na ordem em que apareciam nas expressões. Isso foi o suficiente para que Ester começasse a resolver corretamente. Temos consciência de que não interviemos em um nível de compreensão relacional, mas em um nível instrumental, visando apenas à aquisição do procedimento de resolução (SKEMP, 1976).

Queremos enfatizar como um professor deve estar atento para refletir durante e após uma situação em sala de aula. Santos-Wagner (2008) afirma que:

> Nós professores desenvolvemos uma série de ações durante as fases de planejamento, implementação e análise de aulas ministradas, mas nem sempre aprendemos ou sabemos usar estratégias que nos façam pensar, analisar e refletir sobre os conhecimentos utilizados em cada etapa deste processo pedagógico e sobre os conhecimentos que já adquirimos e/ou os conhecimentos que ainda precisamos adquirir enquanto profissionais da educação (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 64).

A professora Silvia acreditou que Ester teve dificuldade em realizar as operações. Mas, os cálculos estavam corretos, se olhássemos primeiro para as adições.

Muitas vezes por estarmos habituados ao procedimento correto, temos dificuldade em enxergar e analisar o erro de nossos alunos. A análise de erros pode trazer contribuições pedagógicas, para orientar o trabalho do professor, em suas futuras ações. Ademais, com o hábito de olhar criteriosamente o erro dos alunos, o professor passa a orientar sua reflexão na ação, no momento de aula quando percebe a causa do erro (CURY, 2007). Também, Oliveira e Serrazina (2002) afirmam que, de acordo com Schön (1983)[38], existem três níveis de reflexão, são eles a reflexão na ação, a reflexão sobre a ação e a reflexão sobre a reflexão na ação.

A reflexão na ação é por essência mais próxima do conhecimento tácito, intuitivo do professor. Mas, acreditamos que este conhecimento possa ser aprimorado com a experiência prática e teórica. O nível de reflexão sobre a ação também está próximo da reação do professor frente à situação, porém, esta reflexão acontece após o episódio fora do ambiente de aula. Mediamos neste nível com a professora Silvia após a aula, quando a fizemos refletir que a dificuldade de Ester na resolução das expressões numéricas estava na ordem de execução das operações e nem tanto nas operações a serem feitas. Já a reflexão sobre a reflexão na ação contribui para o crescimento profissional do professor (OLIVEIRA; SERRAZINA, 2002). Caracteriza-se por ser um momento de tomada de consciência do professor sobre o que aconteceu durante sua reflexão na ação, bem como um momento de atribuição de sentidos onde o docente pode questionar a si mesmo como pode melhorar suas práticas futuras. Este nível é essencialmente metacognitivo ao invés de tácito e reativo (SANTOS, 1997; OLIVEIRA; SERRAZINA, 2002; SERRAZINA, 2012b).

Cury (2007) afirma que, ao errar, o aluno tem o erro como seu próprio conhecimento construído por ele como verdadeiro. Por isso, o professor deve agir como sugerem Polya (1995/1945) e Serrazina (2012b), fazendo perguntas que levem o aluno a tomar consciência do que ele sabe, do que fez corretamente e do que errou, dirigindo seus esforços em um caminho correto de resolução. Além disso, Polya (1995/1945) afirma que o professor deve fazer questionamentos que

[38] Schön, D. A. (1983). **The reflective practioner:** How professionals think in action. Aldershot Hants: Avebury.

os próprios alunos tenham condições de fazerem a si mesmos na ausência do professor, favorecendo-lhes a autonomia na resolução de problemas. Desta forma, o autor declara que

> O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante* (POLYA, 1995/1945, p. 1).

Nessa mesma linha, Santos (1997) apresenta que uma concepção inovadora de ensino-aprendizagem para professores de matemática leva em conta a construção do conhecimento matemático pelo aluno em momentos pessoais de reflexão e nas interações sociais entre aluno/aluno e professor/aluno. Para Santos (1997), esta visão possibilita alunos “mais criativos e autônomos” (SANTOS, 1997, p. 6). Lorenzato (2006) concorda ao afirmar que “ensinar é dar condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento” (p. 3).

4.2 - Artur durante a etapa de observação

Trouxemos dados de Artur referentes à aula do dia 14 de maio de 2013. A professora Silvia circulou pela sala, olhando os cadernos para verificar quais alunos tinham continuado a resolução dos exercícios e copiaram as atividades que foram corrigidas na aula anterior. Chamou a atenção de Artur que não havia feito e nem copiado a correção das atividades que estavam no quadro. Artur disse que se esqueceu de fazer em casa. A professora perguntou: “Não estava arrumando a casa não, né?”, mas Artur não respondeu. No primeiro dia de contato, Silvia disse que Artur argumentou com algumas vezes essa justificativa para tarefas não cumpridas. Afirmou também que esse aluno mora apenas com o pai e fica a parte da manhã sozinho em casa. É de entendimento comum que a falta de acompanhamento dos pais na educação escolar dos filhos pode acarretar consequências em suas aprendizagens, pois as crianças sozinhas não têm capacidade para mensurar, completamente, a importância das tarefas escolares.

Pedimos à professora Silvia para acompanharmos o aluno Artur durante a aula de resolução da lista de exercícios. Após consentir, Silvia nos chamou a atenção para sua lista que só possuía as respostas dos problemas, sem nenhum cálculo em quase todos os exercícios. Quando a professora se afastou, Artur nos disse que preferia fazer “de cabeça”, ao invés de deixar os cálculos no papel. Perguntamos o porquê, e ele nos disse que com lápis cansa e dói a mão. Queríamos saber como procedeu nos cálculos, e ele afirmou aquilo que, de certa forma, já esperávamos, devido ao que ocorreu nos experimentos de ensino anteriores: “fui fazendo”. Ainda não conseguia externar o pensamento ou não estava à vontade para fazê-lo. No livro “Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem”, Schliemann, Santos e Costa (2001) expressam que

> Em todos os níveis, a criança é sempre mais capaz de fazer e compreender na ação do que de expressar verbalmente e conscientemente os princípios nos quais se baseiam suas ações. Discussões com a professora ou com outras crianças podem favorecer, afirma Piaget, a verbalização e a conscientização (SCHLIEMANN; SANTOS; COSTA, 2001, p. 101).

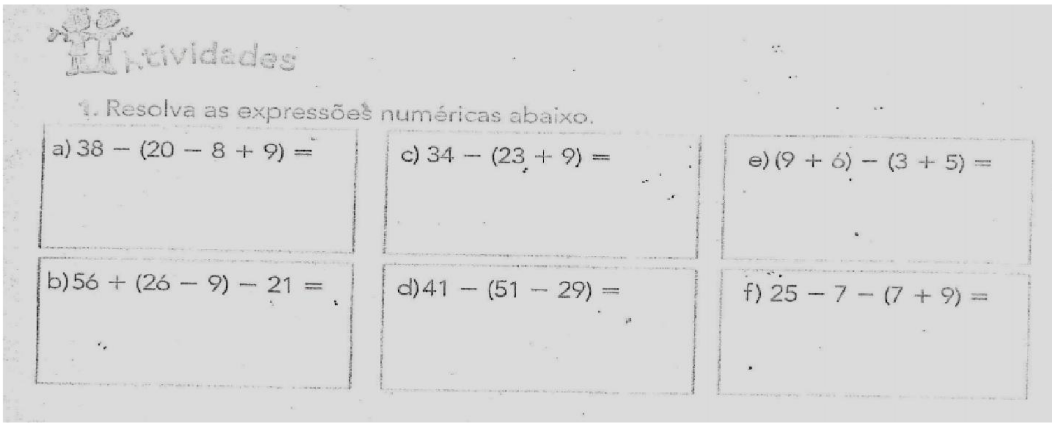
Estimular a verbalização de estratégias e a comunicação de ideias contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático (SANTOS, 1997). Isto demanda do professor tempo e paciência. O professor precisa estimular esse ambiente em sua classe, dando voz aos alunos. Segundo Carraher, Carraher e Schliemann (1995), “na escola, as respostas orais não têm reconhecimento em avaliações e exercícios, pois o modo de operar na escola é predominantemente escrito” (p. 150). Pelo exposto, inferimos que, em situações orais, os alunos acabam reproduzindo na mente aquilo que fazem todos os dias no papel.

4.2.1 – As soluções de Artur em expressões numéricas

Assim como a aluna Ester, Artur teve dificuldade de simplificar as expressões numéricas corretamente, ignorou a regra da expressão numérica de fazer, primeiro, os cálculos que estavam entre parênteses. Mas, assim que mostramos um exemplo e, fomos calculando, à medida que falávamos a ordem de resolução, Artur passou a respeitar a precedência de operadores sem nenhum problema.

Abaixo, uma das atividades que estavam na lista de exercícios elaborada pela professora Silvia sobre expressões numéricas com parênteses envolvendo adição e subtração:

Figura 27: Expressões numéricas com parênteses


tividades

1. Resolva as expressões numéricas abaixo.

a) 38 – (20 – 8 + 9) =

c) 34 – (23 + 9) =

e) (9 + 6) – (3 + 5) =

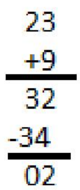
b) 56 + (26 – 9) – 21 =

d) 41 – (51 – 29) =

f) 25 – 7 – (7 + 9) =

No item c, 34 – (23 + 9), Artur fez o seguinte cálculo:

Figura 28: Algoritmo representado por Artur



Artur resolveu, corretamente, a expressão numérica, mesmo que fazendo uso dos dedos. Na adição, fez uso da estratégia de “contagem a partir da parcela maior” e, na subtração, fez uso do algoritmo, recuperando de memória os resultados de 4 - 2 e 3 - 3 (THOMPSON, 1999). Observamos que não escreveu a expressão numérica na horizontal que é sua forma de registro tradicional.

Embora seus cálculos mentais estivessem corretos, conduzimos o diálogo, a seguir com o aluno Artur, a fim de compreender seu pensamento e seu registro de cálculos:

> Pesquisador: Nós queremos 32 – 34 ou 34 – 32?
> Artur: 34 – 32. Foi o que eu fiz.

Constatamos que, para Artur, não fazia diferença entre registrar o maior ou o menor número em cima, importando apenas o resultado da operação.

> Pesquisador: Onde está o problema?
> Artur: Mas num deu a mesma coisa?

Novamente, Artur confirma através de sua pergunta que, se o resultado está correto, então não existe problema, na forma como o registro é feito. É comum alunos considerarem relevante apenas as respostas na realização das tarefas. Essa visão considera o resultado final como o objetivo da atividade. Ao contrário, consideramos importante para o desenvolvimento matemático todo o processo de resolução da tarefa e sua posterior verificação (POLYA, 1995/1945; SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008). No trecho a seguir, procuramos justificar, de maneira simples, a forma adequada de registro dos cálculos.

> Pesquisador: Mas a professora não sabe que você fez 34 – 32, pois está escrito 32 – 34. Você precisa criar uma conta separada para ela entender.
> Artur: Ah ta.
> Pesquisador: A gente tem que escrever de uma forma que todo mundo possa entender o cálculo. Existe uma forma de fazer isso em qualquer lugar.

Recorremos, como argumento, ao entendimento de um terceiro leitor dos cálculos de Artur, neste caso, a professora Silvia. Consideramos ser o algoritmo uma convenção social acordada no mundo inteiro, portanto, não bastava que a conta estivesse correta, ela precisava ser escrita de forma que todos pudessem entender. Em seguida, Artur fez uma conta separada para 34 – 32 = 2.

Enquanto calculava, observamos que Artur não possuía muitos fatos fundamentais memorizados. Recorreu sempre aos risquinhos, às bolinhas (representações icônicas) e aos dedos como auxílio à contagem. Por exemplo, em 15 – 7, utilizou a estratégia de “contagem até” com os dedos (THOMPSON, 1999); em 6 + 7 e 7 + 9, utilizou a estratégia “contagem a partir do número maior” também com o uso dos dedos (THOMPSON, 1999).

Conforme Schliemann (2001/1983)

> Resolver o problema de cabeça ou representando os dados informalmente por meio de risquinhos ou pelos dedos da mão poderá facilitar a tarefa da criança possibilitando a ênfase na compreensão que é, enfim, o mais importante na atividade de resolver problemas. Somente após assegurada a compreensão é que a criança deve ser levada a representar o problema de forma simbólica (p. 73).

Serrazina (2012b) acrescenta que os alunos devem ser estimulados a usar múltiplas representações partindo, gradativamente, de materiais manipuláveis para representações icônicas e, finalmente apenas o registro simbólico. É possível que alguma das etapas tenha sido trabalhada de modo insuficiente com Artur. Pois, possuía uma dependência muito grande desses recursos, impedindo gravemente seu desenvolvimento matemático (BRASIL, 1997; VAN DE WALLE, 2009). Constatamos que muitos itens da atividade envolviam fatos fundamentais com o número sete. Pesquisas revelam que cálculos, compreendendo os números sete, oito e nove, chamados de números elementares, são mais difíceis para as crianças do que cálculos, envolvendo os fatos fundamentais até o número cinco, chamados por Piaget de números perceptuais[39] (KAMII, 1984).

A falta de um repertório de fatos fundamentais memorizados prejudicou o desempenho de Artur nos cálculos desta e de outras atividades. Para Fayol (2012), “as operações aritméticas consistem bem mais em manipular símbolos respeitando-se regras do que em realizar transformações sobre as quantidades concretas associadas a esses símbolos” (p. 68). Ainda, conforme Fayol (2012), a gênese, a elaboração e a ativação das quatro operações elementares levam em conta fatos aritméticos que não exigem cálculo.

Artur mostrou dificuldade para interpretar a situação no item “a” da atividade dois (figura abaixo).

Figura 29: Atividade dois

2. As situações abaixo envolvem mais de uma operação. Com um colega, crie uma expressão numérica para cada um dos itens e, depois, resolva-a.

a) Numa adição de 3 parcelas, a primeira é 750, a segunda é 250 e a terceira é a soma das 2 anteriores. Qual é o total?

Mesmo sabendo que o enunciado da atividade pede que o problema seja realizado em dupla, a professora Silvia pediu a cada aluno que a fizesse individualmente. Artur fez o seguinte registro de cálculo para a situação acima:

---

[39] Os números perceptuais são números pequenos, até quatro ou cinco, que podem ser distinguidos através da percepção, sem requerer uma estruturação lógico-matemática (KAMII, 1984, p. 15).

Figura 30: Expressão numérica representada por Artur

$$\begin{array}{r} 750 \\ -250 \\ 500 \\ +5 \\ \hline 505 \end{array}$$

Questionando Artur sobre o que havia registrado acima, disse-nos que o número 5 se refere à adição de “3 parcelas” com “2 anteriores”. Isso nos mostrou que Artur não compreendeu a situação proposta pelo problema. A respeito da compreensão do problema, Polya (1995/1945) afirma que, antes de qualquer outra coisa, o aluno deve começar pelo enunciado do problema, visualizando-o como um todo e, “o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido” (p. 4). O aluno deve ser capaz de identificar a incógnita, os dados do problema e a relação entre os dados e a incógnita, isto é, a condição do problema. Segundo o autor, a vantagem desse procedimento está na familiarização com o problema, compreensão do seu objetivo, estímulo à memorização de partes importantes e entendimento dos detalhes relevantes na resolução do problema (POLYA, 1995/1945).

Notamos que o enunciado não estava claro para Artur. Pedimos ao aluno que nos explicasse o que tinha pensado na conta que armou.

> Artur: Eu somei 750 + 250 + 5. Dá 505 ta certo!

Enquanto falava Artur apontava para “2 anteriores” e “3 parcelas” no enunciado do problema. Seguimos o diálogo.

> Pesquisador: Somou 750 + 250?
> Artur: Diminuí.

Artur fazia corretamente associação entre o símbolo “-” e a operação de subtração, o símbolo “+” e a ideia da operação de adição, embora não conhecesse o significado da palavra adição presente no enunciado.

> Pesquisador: Mas não era adição de três parcelas?
> Artur: (silêncio)
> Pesquisador: O que é adição de três parcelas?
> Artur: Três subtrações (disse bem baixo).
> Pesquisador: O que? Não entendi.

> Artur: Não, deixa.
> Pesquisador: Pode falar o que você está pensando Artur, não tem problema!
> Artur: Não, deixa.

Apesar de que Artur já tivesse escutado as palavras “adição” e “subtração”, diversas vezes, ao longo de sua trajetória escolar, parece que ele não as associou, adequadamente, as ideias das operações que cada uma das palavras evoca. É comum que as crianças nos anos iniciais do ensino fundamental se refiram às palavras “soma” e “conta de mais” para a operação de adição e “conta de menos” para a operação de subtração. Quando questionado sobre sua resposta, Artur mostrou falta de confiança em seu próprio conhecimento, falando baixo e não querendo repetir o que havia falado bem baixo (GÓMEZ CHÁCON, 2003). Para Gómez Chácon (2003), essa emoção surge quando os alunos não experimentam controle da situação e não possuem familiarização com o processo de resolução de problemas.

Artur não sabia que adição era o nome da operação de somar. Ao percebermos isso, mudamos nosso vocabulário para que ele pudesse entender.

> Pesquisador: Não seria a soma de três parcelas?
> Artur: Ah sim, é.
> Pesquisador: Quais são elas?
> Pesquisador e Artur: a primeira é 750, a segunda 250.
> Pesquisador: E a terceira é...
> Artur: (silêncio)

Artur começou a desconfiar que a terceira parcela não era a adição de “3 parcelas” com “2 anteriores”, totalizando cinco. Certamente, sua desconfiança e insegurança foram provocadas por notar que nossos questionamentos se dirigiam aos seus erros. O momento de interação professor-aluno é bastante delicado no que tange às emoções do educando. O professor precisa ter cuidado em criar questionamentos que atuem como “catalisadores” do processo de resolução de problemas, potencializando soluções autônomas e, não, gerando um estado emocional de bloqueio. Acreditamos que nos faltou essa sensibilidade durante o diálogo e não agimos no momento, com bons questionamentos como sugere Polya (1995/1945). Bons questionamentos são aqueles que focalizam a atenção dos alunos nas partes relevantes do problema (a incógnita, os dados e a condicionante) e permitem, ao mesmo tempo, que o professor auxilie o aluno e que o estudante adquira alguma experiência em resolução de problemas de maneira independente. Artur, ao notar sua falta de progresso na atividade, sentiu-se em bloqueio e não conseguiu elaborar uma solução. Então sugerimos-lhe o que fazer.

> Pesquisador: A soma das duas anteriores: 750 + 250. Essa conta é só da terceira parcela.

Então, Artur fez o seguinte cálculo, direcionado por nossa fala anterior:

Figura 31: Cálculo de Artur

$$\begin{array}{r} 750 \\ +250 \\ \hline 50 \end{array}$$

> Pesquisador: Quanto deu cinco dezenas mais cinco dezenas?
> Artur: Quinze.
> Pesquisador: E cinco dedos mais cinco dedos?
> Artur: Dez.

Procuramos associar o cálculo operado com símbolos às transformações concretas realizadas com os dedos, já que era o recurso frequentemente usado por Artur com maior segurança. Ao fazermos isso, agimos de acordo com Polya (1995/1945) que recomenda o uso de problemas correlatos ou semelhantes ao que queremos, de fato, resolver. Demos sequência ao diálogo.

> Pesquisador: Então é...
> Artur: Mas num é três parcelas?

Artur somou cinco dezenas três vezes, embora só houvesse registrado duas dezenas no algoritmo acima. Fez uma grande confusão, achando que deveria adicionar três vezes o cinco por se tratar de uma adição de três parcelas. Na realidade, ao calcular 750 + 250, estávamos procurando o resultado da terceira parcela.

> Pesquisador: Sim, mas elas são 750 + 250 + 3ª parcela que a gente vai descobrir.
> Artur: Ah sim, agora eu entendi!

Nesse momento da interação, Artur compreende o que foi proposto pela situação problema. Refez os cálculos da terceira parcela como abaixo e, por fim, calculou a adição das três parcelas:

Figura 32: Cálculos de Artur

$$\begin{array}{r} 750 \\ \underline{+250} \\ 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 750 \\ +250 \\ \underline{1000} \\ 2000 \end{array}$$

Porém, Artur precisou novamente de nossa intervenção na releitura do enunciado, quando enfatizamos a escrita da expressão numérica.

As aprendizagens trazidas por essa aula foram além da observação e análise do desempenho de Artur nas tarefas matemáticas. Com esse episódio, aprendemos a conduzir os passos de um aluno em um processo de resolução de problemas de acordo com Polya (1995/1945), Santos (1997) e Santos-Wagner (2008). Assim, passamos a observar com mais cuidado a influência dos estados emocionais dos alunos, durante as tarefas de sala de aula, como nos sugere Gómez Chácon (2003).

4.2.2 – Comentários sobre o conhecimento numérico de Artur

Enquanto o ajudávamos a escrever os cálculos constatamos que Artur possuía algumas dificuldades para seu desenvolvimento matemático, como uso de contagem nos dedos ou de pequenos riscos no papel (representação icônica), para calcular; em cálculos de multiplicação, recorreu a adições sucessivas; teve dificuldade para efetuar registros, utilizando corretamente os algoritmos convencionais. Essas características nos levaram a crer que Artur possuía um sentido numérico pouco desenvolvido. Serrazina (2012a) afirma que, embora o sentido numérico não tenha uma concepção fechada e consensual entre os pesquisadores, a ausência de seu desenvolvimento pode ser identificada de maneira comum a todos os seus estudiosos. Vemos que as dificuldades de Artur entram em conflito com as características de um sentido numérico bem desenvolvido, conforme McIntosh, Reys e Reys (1992), Lins e Gimenez (1997) e Serrazina (2012a).

No entanto, Artur tem alguns conhecimentos sobre números e operações. Durante o diálogo com o aluno, surgiu o cálculo de sete unidades mais nove unidades. Artur se apoiou, totalmente, na contagem nos dedos e afirmou: “Vou fazer o contrário, nove é maior”. Isto é, ao invés de contar mais nove unidades, a partir do número sete, Artur contou mais sete unidades a partir do número nove, mostrando conhecimento da propriedade comutativa da adição. A estratégia foi identificada por Thompson (1999) como “contagem a partir do número maior”.

De forma sintética, para ter um sentido numérico bem desenvolvido, Artur deveria alcançar: segurança em calcular, usando manipulação simbólica, tanto no papel quanto mental (FAYOL, 2012); a formalização das operações através da construção, organização e memorização de fatos fundamentais (BRASIL, 1997; FAYOL, 2012; SANTOS-WAGNER, 2012, 2013); segurança na representação de cálculos tanto pelos algoritmos convencionais quanto ao utilizar diversidades de representações (BRASIL, 1997; LINS; GIMENEZ, 1997). É possível que Artur adquira todas essas habilidades, visto que o sentido numérico de qualquer pessoa se desenvolve ao longo da vida.

4.2.3 – As emoções de Artur

Notamos em Artur uma baixa autoestima. Ele afirmou algumas vezes que não conseguia realizar os cálculos sozinho e que precisava sempre da professora para ajudá-lo. Vemos que possuía desejo em ter mais autonomia intelectual. Gómez Chácon (2003) afirma que um estado de desconfiança na própria capacidade, de desânimo, de pessimismo e impaciência frente ao problema configura-se como desespero. A autora ainda afirma que nesta situação o aluno

> procurará eliminar sua ansiedade e seu desespero mediante a resignação, usando um procedimento de busca na memória, adivinhando a resposta desejada. O aluno ‘imitará’ o procedimento indicado, sem considerar a ‘compreensão’ da matemática (GOMÉZ CHACÓN, 2003, p. 139).

Parece que Artur chegou a esse estado emocional várias vezes, sendo comum terminar as tarefas sem que elas estivessem próximas da resposta correta, revelando também um estado emocional de pressa: para “se ver livre” das atividades de aula e de casa. Realizava as atividades em muitos momentos de modo instrumental, demonstrando pouca reflexão e compreensão das atividades e dos procedimentos que escolhia para solucioná-las (SKEMP 1976).

Porém, reconhecemos que ao dialogar com Artur, ele tinha interesse e capacidade para expressar seu raciocínio e explicar como pensou. Isso foi se revelando, à medida que ficava à vontade com nossa presença, e à medida que atuávamos como suporte afetivo (GOMÉZ CHACÓN, 2003). Em consequência, Artur passou a manifestar um estado emocional de ânimo e motivação. Goméz Chacón (2003) esclarece que essa atitude do professor provoca “um estímulo interno no aluno, favorecendo sua persistência na busca de solução” (p. 140). Em Artur, essa emoção manifestou-se em seu entusiasmo, otimismo, rosto radiante e por não levantar a cabeça do papel em algumas atividades. Ao discutir esse estado emocional, Santos (1997) enfatiza que a motivação pode ser intrínseca (que é interior ao indivíduo), isto é, uma predisposição para aprender e, extrínseca (que vem de fora do indivíduo), como elogios, palavras e gestos de apoio ao aluno. Procuramos estimular a motivação e o ânimo de Artur frente às suas dificuldades por meio de palavras de apoio e elogios. E, ainda, nossa presença ao lado de Artur também foi suficiente para motivá-lo. Com efeito, a motivação de Artur teve as duas componentes, ou seja, extrínseca (nosso apoio, elogios e presença em sala de aula) e intrínseca (acreditou que, com auxílio, seria possível realizar as atividades).

4.3 - Ester e a atividade diagnóstica

Quadro 8: Resumo dos acertos e erros de Ester

Resumo dos acertos e erros de Ester										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Sequência 1										
Sequência 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Sequência 3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Questão 5										
Sequência 4	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Questão 5										
Questão 6										
Questão 7										
Questão 8										
Questão 9										
Questão 10										

4.3.1 - Comentários gerais sobre o desempenho de Ester:

Ester acertou 107 cálculos (células em verde) dos 132 propostos. Acertou todos os cálculos da sequência um e errou apenas o último cálculo da sequência dois – questão 4: 3 + 6 = 10. Afirmou que já tinha os resultados das sequências um e dois de memória (AUTO) (LUCANGELI et al., 2003). Diz ter notado a repetição de alguns números no quadro de respostas, mas não disse que os cálculos eram distintos, embora dessem o mesmo resultado. Acertou todos os cálculos da sequência três, atingindo os objetivos da atividade: conhecer dobros até 20; subtrair, corretamente, todas as unidades de um número; reconhecer fatos fundamentais do número 15; reconhecer fatos fundamentais do número 20; e operar com fatos fundamentais diversos até 20. A aluna disse que já tinha memorizado os cálculos mais fáceis (estratégia de utilização de fatos fundamentais memorizados - AUTO) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003) e quando tinha dúvidas contava nos dedos (estratégia de contagem nos dedos - COF) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003), o que se confirmou na entrevista do dia 22 de agosto.

Em termos relativos, seus erros correspondem a, aproximadamente, 19% do total de cálculos, concentrando-se na sequência quatro: questão um (De dezenas com unidades) – errou todas as subtrações; questão três (De dezenas e unidades com dezenas) – errou duas adições e uma subtração; questão oito (Dezenas e unidades com unidades - adição com reserva e subtração com empréstimo – cálculos que ultrapassam a dezena): dois cálculos com adição e quatro cálculos com subtração; questão nove (De dezenas e unidades com dezenas e unidades – Dobros): errou três cálculos; Questão dez (De dezenas e unidades com dezenas e unidades – Operações em geral): Ester errou quatro cálculos com adição (todos com reserva) e quatro com subtração (dois com empréstimo e dois sem empréstimo).

A etapa posterior à observação e ao diagnóstico foi a entrevista com Ester. Nessa fase, focalizamos nos cálculos mentais que Ester realizou incorretamente. Queríamos analisar e compreender a razão dos erros de cálculos e que relação esses erros tiveram com as estratégias adotadas por Ester.

4.3.2 - A entrevista com Ester

No dia 22 de agosto de 2013, perguntamos à Ester quanto seria o resultado de 3 + 6 e, ela disse “dez” rapidamente. Após pensar um pouco sem nossa intervenção, Ester disse: “espera um pouco, 6 + 3 é 9”, após contar nos dedos.

Ester não empregou este fato numérico de adição de memória durante a entrevista, mas usou a propriedade comutativa da adição e realizou a "contagem a partir do número maior com o apoio dos dedos" (COF) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003). Thompson (1999) afirma que a "contagem a partir do número maior" gera uma economia cognitiva e diminui a carga sobre a memória. O autor afirma ainda que tal operação possui, como pré-requisito, a capacidade de comparar dois números e decidir qual deles é o maior.

Todavia, acreditamos que o uso de contagens pode revelar uma deficiência, em se tratando de números dessa ordem de grandeza (menores que dez), se levarmos em conta que se trata de uma aluna de 5ª série/6º ano. Ester afirmou, no dia da atividade diagnóstica e no dia da entrevista, que registrou todos os cálculos da sequência dois de memória. Isso se confirmou para os cálculos de adição. Mas, em todos os cálculos de subtração na questão dois da sequência dois (6 – 1; 8 – 3; 7 – 2; 9 - 4) Ester utilizou a estratégia de "contagem para trás, a partir de um número" com o apoio dos dedos (THOMPSON, 1999). Segundo Thompson (1999), essa é a estratégia de contagem mais comum na operação de subtração e pode ser realizada tanto mentalmente quanto com o uso dos dedos ou outro recurso analógico. Conforme o autor, para usar essa estratégia, a criança precisa seguir uma sequência de passos, partindo de um número dado e reconhecer que a resposta é o último número recitado. Para Thompson (1999), o erro mais comum que as crianças cometem ao usar essa estratégia é incluir o subtraendo na contagem. Por exemplo, ao efetuar 8 – 3 a criança diz "8, 7, 6. É seis".

Para os cálculos com números maiores, como por exemplo, 50 – 1, perguntamos a Ester a forma que resolvia. A aluna afirmou que, às vezes, "chuta" um valor. Ester escolheu um número, aleatoriamente e não teve um procedimento para verificar se sua resposta estava correta, fazendo uso de uma estimativa com pouca eficiência (LINS; GIMENEZ, 1997). Pareceu-nos que a aluna utilizou este procedimento como "saída" ou "fuga" da atividade, demonstrando um estado emocional de pressa (GÓMEZ CHÁCON, 2003). No caso de Ester, a emoção era desencadeada por dois motivos: (i) desconhecimento de uma estratégia de cálculo mental adequada aos números em questão; e, (ii) desejo de mostrar agilidade no desenvolvimento das tarefas. Dos dois motivos identificados, sem dúvida, o primeiro tem mais implicações negativas para a aprendizagem numérica.

Registrou, em sua folha de respostas, o cálculo: 50 – 1 = 60. Ao solicitarmos novamente que fizesse 50 – 1, Ester respondeu 59, recalculou e disse 69, depois 62 e, por fim, disse "ah, eu estou fazendo mais e tem que ser menos!", calculou, novamente, e dessa vez disse 49. Ester notou após a quarta tentativa que o resultado da subtração estava ficando maior que o minuendo. Todavia, só conseguiu chegar à resposta correta ao usar o algoritmo convencional mentalmente (estratégia MA), movimentando os dedos sobre a mesa como se estivesse escrevendo no papel (LUCANGELI et al., 2003). É natural que Ester aplique o algoritmo formal com mais segurança, pois esta é uma estratégia privilegiada pela escola e conhecida por ela (ROGERS, 2009). Conforme Rogers (2009), o emprego não reflexivo dessa ferramenta pode trazer prejuízos ao desenvolvimento do raciocínio numérico. Kamii (1995) corrobora com esse pensamento e acrescenta que os algoritmos "tornam a criança dependente do arranjo espacial dos dígitos (ou de lápis e papel)" (p. 55). Isso fica evidente quando Ester simula a escrita do algoritmo sobre a mesa. Além disso, Ester também utilizou os dedos para "contagem para trás a partir de um número (count back from)" (COF) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003). Morais (2011) menciona um projeto desenvolvido por Serrazina e Ferreira (2005) [40] que constata "dificuldades na utilização de estratégias flexíveis de cálculo mental" (p. 2) e que "as estratégias utilizadas consistiam em contagens um a um ou, a um nível formal, à utilização do algoritmo" (p. 2), do modo como verificamos nos procedimentos de Ester.

Na questão cinco da sequência quatro (de dezenas e unidades com dezenas), Ester errou duas adições e uma subtração. Por exemplo, errou a adição 63 + 30, registrando como resposta o número 96. Apesar de termos repetido de três a

[40] Projeto "Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares" (DSN) desenvolvido em Portugal no ano de 2005.
SERRAZINA, L.; FERREIRA, E. Competência de cálculo? Sim! E também… colaborando a distância. In: **Desenvolvendo o sentido de número:** Perspectivas e exigências curriculares. Lisboa: APM, 2005, vol. 1, p. 29-39.

mais vezes cada cálculo na atividade diagnóstica, a aluna entendeu 66 + 30, pois a sonoridade dos números três e seis é semelhante. Durante a entrevista, Ester fez a conta, corretamente, ao ver o cálculo escrito no papel. Fez uso da estratégia “contagem a partir do número maior” (THOMPSON, 1999) com o uso dos dedos para adicionar apenas as dezenas das duas parcelas e repetiu as unidades, encontrando, corretamente, o resultado 93.

No cálculo 16 + 60 havia respondido 72 na folha de respostas. Colocamos a primeira parcela menor do que a segunda, porque queríamos desmotivar o uso dos dedos ou contagens mentais de qualquer tipo: contar todos; contar a partir do primeiro número; contagem a partir do número maior - como único recurso de cálculo. Estávamos pensando nos números 16 e 60 em suas globalidades. No entanto, na entrevista Ester fez uso da estratégia contagem, iniciando pelo primeiro número utilizando apenas as dezenas, isto é, fez 1 + 6 = 7, contando nos dedos, desde o número 1 até alcançar o número 7. Em seguida, disse, corretamente, “76”. Observamos que a aluna possuiu certo conhecimento do sistema de numeração decimal e conseguiu visualizar o número decomposto em dezena e unidade, mesmo que usando o algoritmo mentalmente e os dedos como recurso de cálculo. Carraher, Carraher e Schliemann (1995) afirmam que tanto a decomposição numérica aplicada, frequentemente, como estratégia de cálculo mental (do tipo 1010) (BEISHUIZEN, 1997; KLEIN; BEISHUIZEN, 1998; THOMPSON, 2000; LUCANGELI et al., 2003) quanto os algoritmos formais, a princípio, fazem uso do mesmo conhecimento do sistema de numeração decimal que é a operação sobre as partes, ao invés de todo o número. Todos os dois procedimentos são úteis para evitar a sobrecarga mental que ocorreria ao operar simultaneamente, com centenas, dezenas e unidades. Porém, a aplicabilidade dos algoritmos alivia essa sobrecarga mental, quando é possível efetuar registros no papel. Ocorreu, entretanto, que, em alguns momentos como o citado acima, o algoritmo serviu para Ester apenas como apoio à visualização, visto que operou da esquerda para a direita, exatamente, como em uma decomposição numérica.

Já no cálculo de subtração 43 – 30, Ester respondeu “14” em sua folha respostas. Durante a entrevista, Ester completou a parcela menor até atingir a maior, fazendo contagens nos dedos, iniciando a contagem a partir de 30, ao invés de iniciar a contagem em 31 – tentativa de uso da estratégia “contagem até” (THOMPSON, 1999). Esse é um erro comum em números menores ou em números desta ordem de grandeza. Thompson (1999) acredita que, o uso desta estratégia não é natural para as crianças, e o professor deve oferecer uma “estrutura de trabalho” com diferentes problemas para estimular o uso dela. Para nós, a tática “contagem até” revela o conhecimento de Ester em utilizar a adição como operação inversa da subtração. É um procedimento comumente executado no comércio ou em situações práticas, envolvendo dinheiro. Porém, um comerciante habilidoso com os números completaria, primeiramente, as dezenas e, em seguida, as unidades, ao invés de contar um a um. Ao solicitarmos Ester que realizasse o cálculo de outra maneira, a aluna fez uso do algoritmo mentalmente (MA) (LUCANGELI et al., 2003), operando com as dezenas, repetindo corretamente a unidade e encontrando o resultado 13.

Na questão oito da sequência quatro, Ester errou duas adições com reserva e todas as subtrações com empréstimo. Em todos estes cálculos (45 + 7, 53 + 8, 39 + 7, 24 + 9, 45 – 7, 83 – 8, 67 - 9), Ester se serviu do algoritmo mental (MA) como estratégia de cálculo. No caso, não foi possível para Ester usar o algoritmo mental, semelhantemente, à estratégia de decomposição numérica, visto que a segunda parcela da adição e o subtraendo são unidades simples. Existe uma grande dificuldade em realizar, mentalmente, cálculos de subtração com empréstimo, servindo-se do algoritmo mental (MA) ou a estratégia 1010, sobretudo pela perda de sentido numérico (BEISHUIZEN, 1997; KAMII, 1995). No ato da entrevista, Ester também usou o algoritmo mental, mas agora, simulando a escrita dos algoritmos sobre a mesa, encontrando corretamente os resultados.

Na questão nove, Ester errou o cálculo 27 + 27, respondendo o número 57. Começou a adição pelas unidades, registrando incorretamente o fato fundamental 7 + 7 como 17. Executou o passo a passo do algoritmo mentalmente (MA) e somou uma dezena com duas dezenas e mais duas dezenas. Na entrevista Ester, inicialmente, não notou nenhum problema em seu registro de cálculo. Porém, ao efetuar, novamente, o algoritmo mental, utilizou os dedos como auxílio a contagem de 7 + 7, começando pela primeira parcela (THOMPSON, 1999). Outros dois cálculos foram feitos de maneira inadequada por meio do algoritmo mental (MA). Como dissemos, anteriormente, essa estratégia evidencia perda de sentido numérico e falta de controle sobre o cálculo. Ao efetuar 33 + 33, registrou o número 76 na folha de respostas. Durante a entrevista, Ester efetuou o algoritmo mental, partindo das unidades, contando nos dedos 3 + 3, a partir da primeira parcela. Registrou o número 6 e, em seguida, realizou o mesmo procedimento para as dezenas. Registrou, por fim, o número 66.

Ester não soube explicar o que pensou durante a atividade diagnóstica. Entendemos que os demais cálculos de adição com reserva dessa sequência influenciaram a aluna a efetuar a reserva neste cálculo, fazendo 3 + 3 = 6, vai um, 1 + 3 + 3 = 7, resultando em 76. Ao calcular 39 + 39 colocou como resultado 48. Considerando que Ester usou quase que, exclusivamente, o algoritmo mental, nós vemos que neste cálculo efetuou, corretamente, o cálculo de nove unidades mais nove unidades igual a dezoito unidades. Deixou oito unidades e elevou uma dezena e adicionou uma dezena com três dezenas, esquecendo-se das outras três dezenas. Na entrevista, Ester respondeu corretamente “78”, fazendo novamente pelo algoritmo mental (MA).

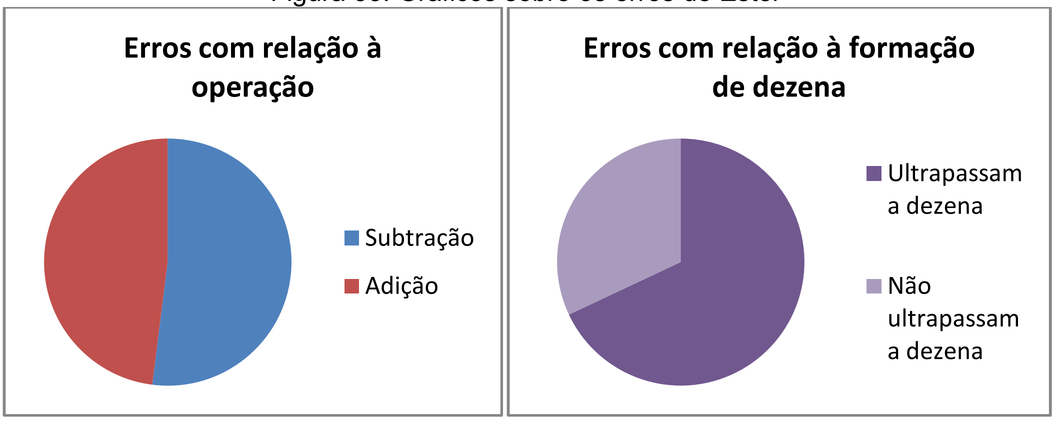
No registro da questão dez da sequência quatro, ao fazer o teste diagnóstico, a aluna errou alguns cálculos de subtração sem empréstimo: 97 – 35 = 12, onde subtraiu, corretamente, a unidade e não as dezenas. E 89 – 55 = 144, onde Ester adicionou os dois números com o uso do algoritmo mental (MA), ao invés de subtrair (LUCANGELI et al., 2003). Em ambos os cálculos, Ester utilizou o algoritmo mental durante a entrevista, como também as estratégias de “contagem até” nos dedos para unidade e dezenas (THOMPSON, 1999). Por exemplo, em 97 – 35, ela fez estendendo um dedo por vez para unidades: “6, 7”. Registrando “2”. E, “4, 5, 6, 7, 8, 9” registrando 6 para as dezenas, totalizando 62.

Ester ficou um pouco ansiosa durante as aulas em que aplicamos a atividade e também no decorrer da conversa de retorno dos dados. Cremos que a ansiedade e o nervosismo diante de uma situação nunca antes vivenciada (atividade proposta por outro professor – pesquisador/atividade de cálculo mental) influenciaram no desempenho da aluna (GOMÉZ CHÁCON, 2003). Também perguntamos se a aluna achou o ditado dos cálculos muito rápido no dia de atividade diagnóstica, e ela confirmou que sim. Estamos certos de que cálculo mental não significa cálculo rápido, mas, sim, cálculo pensado e refletido em cada etapa (PARRA, 1996). No entanto, a agilidade nas contas é um resultado alcançado por quem desenvolve habilidades de cálculo mental. Na ocasião da atividade diagnóstica, queríamos desmotivar o uso de estratégias dispendiosas como contagens e algoritmo formal. Dessa forma, procuramos não dispensar para cada cálculo tempo maior que o necessário, conforme nosso julgamento.

Ester não mobilizou conhecimento de estratégias mais avançadas de cálculo mental para os cálculos da sequência quatro (adição e subtração com parcelas e resultado menor ou igual a cem) como as categorizadas por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998), Thompson (2000) e Lucangeli et al. (2003), estratégias do tipo N10 e 1010. Os gráficos abaixo mostram o número de erros de Ester com relação à operação aritmética e o número de erros em cálculos de adição e subtração que ultrapassam a dezena. Observamos que Ester possuiu mais erros nos cálculos, abrangendo subtração e nos cálculos de adição e subtração que ultrapassavam a dezena.

Os gráficos abaixo mostram o número de erros de Ester, com relação à operação aritmética e o número de erros em cálculos de adição e subtração que transpõem a dezena (adição com reserva e subtração com empréstimo). Inferimos que Ester possuiu mais erros nos cálculos incluindo subtração e nos cálculos de adição e subtração que ultrapassavam a dezena, revelando muita dificuldade nos cálculos de subtração com empréstimo.

Figura 33: Gráficos sobre os erros de Ester



4.4 - Artur e a atividade diagnóstica

Quadro 9: Resumo dos acertos e erros de Artur

Resumo dos acertos e erros de Artur										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Sequência 1										
Sequência 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Sequência 3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Questão 5										
Sequência 4	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Questão 5										
Questão 6										
Questão 7										
Questão 8										
Questão 9										
Questão 10										

4.4.1 - Comentários gerais sobre o desempenho de Artur:

Artur acertou 114 questões e obteve 18 erros. Dois erros na sequência três e 16 erros na sequência quatro. Notamos durante a aplicação da atividade que Artur em alguns momentos registrava, recalculava, apagava e registrava novamente. Artur afirmou que nas sequências um e dois não precisou pensar muito e, por isso, achou fácil. Ele escreveu ainda que pensou, diretamente, no resultado do cálculo, pois já tinha a solução na memória (AUTO), fazendo utilização de fatos numéricos de adição (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003). Associou os problemas propostos na atividade diagnóstica com problemas dados anteriormente, pela professora regente da turma. Foi um comentário importante, porque se Artur viu semelhança entre a atividade proposta e as atividades escolares a que já estava habituado, então seus procedimentos na atividade de pesquisa, possivelmente, foram também semelhantes aos procedimentos desempenhados, cotidianamente, na escola nessas atividades (SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2012).

Artur registrou que o professor pesquisador ditavaem relação ao cálculo de modo, muito rápido. Em suas respostas para a sequência três, Artur observou que a maioria dos cálculos tinha o mesmo resultado, porém com cálculos diferentes. Assim sendo, atingiu um dos objetivos da atividade que era a identificação dos fatos fundamentais. Conforme o que foi registrado, sua estratégia de resolução dos cálculos mentais nas sequências um e dois foi contar nos dedos, a partir da primeira parcela para alcançar a “resposta correta e não errar”, mostrando que, na adição fez “contagem a partir do número maior” (THOMPSON, 1999) e na subtração usou a estratégia de “contagem até (count up)” (COF) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003).

Seus erros na sequência três foram: na questão um (adição com parcelas e resultado menor ou igual a 20 – questão de dobros) 6 + 6 = 13; e na questão cinco (adição com parcelas e resultado menor ou igual a 20 – questão de operações em geral) 7 + 12 = 17. Na sequência quatro, Artur afirmou ter “imaginado” as contas. Quando perguntamos o que queria dizer com “imaginar” as contas, ele se referiu aos algoritmos convencionais de adição e subtração (estratégia de uso do algoritmo mental MA) (LUCANGELI et al., 2003). Seus erros na sequência quatro foram: questão um (Operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – questão de dezenas com unidades) 90 – 8 = 83; 40 – 7 = 44; questão dois (Operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – questão de dezenas com dezenas) 90 – 30 = 10; questão cinco (Operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – questão de dezenas e unidades com unidades – que não ultrapassam a dezena) 89 – 8 = 82; questão seis (Operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – De dezenas e unidades com unidades – que ultrapassam a dezena) 39 + 7 = 49; 45 – 7 = 36; 83 – 8 = 77; 67 – 9 = 57; questão sete (Operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – De dezenas e unidades com dezenas e unidades - Dobros) 46 + 46 = 96; 38 + 38 = 86; 19 + 19 = 40; questão oito (Operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – De dezenas e unidades com dezenas e unidades – Operações em geral) 67 – 26 = 96; 74 – 18 = 63; 97 – 35 = 55; 89 – 55 = 63; 88 – 39 = 51.

4.4.2 - A entrevista com Artur

Iniciamos nossa entrevista com Artur, no dia 22 de agosto de 2013. Na ocasião, queríamos compreender suas estratégias de cálculo mental para a sequência três. Na questão um, dessa sequência, Artur pôs, como resultado de 6 + 6, o número 13. Perguntamos-lhe se achava que o resultado era 13, e ele nos disse que não. Em seguida, afirmou que o resultado de 6 + 6 é 12. Não soube explicar como calculou na ocasião. Nossa hipótese é que Artur pulou algum número na contagem com o auxílio dos dedos (COF) (LUCANGELI et al., 2003), finalizando em 13 ao invés de 12, pois já tinha errado alguns cálculos dessa maneira durante a etapa de observação. Ao que nos parece, Artur já conhecia o fato numérico de memória (AUTO) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003), pois, respondeu imediatamente, durante a entrevista, mas se enganou no dia da atividade. Na questão cinco da mesma sequência, ao calcular 7 + 12, Artur afirmou ter feito o algoritmo da adição mentalmente (MA) (LUCANGELI et al, 2003) invertendo as parcelas, isto é,

Figura 34: Algoritmo mental

$$\begin{array}{r} 12 \\ +7 \\ \hline 19 \end{array}$$

No entanto, Artur havia registrado 17, ao invés de 19. Artur registrou no dia da atividade sem realizar o cálculo, procurando recordar-se do resultado. O aluno já havia cometido erros dessa natureza em aulas anteriores à atividade de pesquisa. Entretanto durante a entrevista, Artur contou nos dedos (COF), a partir da parcela maior (THOMPSON, 1999). Observamos o uso da propriedade comutativa da adição.

No dia 22 de agosto, Artur estava bastante ansioso e disse que estava assim, porque nunca tinha feito esse tipo de atividade. Disse ainda que, no primeiro dia da atividade (aplicação das sequências um e dois) estava “nervoso”, mas nas outras duas aulas estava tranquilo, pois sabia como seria. Parece que a atividade deixou de despertar sua ansiedade, à medida que foi se habituando.

O sentimento de tranquilidade e segurança que Artur mencionou é uma das vantagens da prática regular de cálculo mental e da prática sistemática de qualquer atividade matemática (SANTOS, 1997). Goméz Chácon (2003) afirma que os estados emocionais de tranquilidade e segurança surgem quando “há ausência de pressa e nervosismo” e “sem preocupação por não saber o que fazer” (p. 141). Mapeamos os estados emocionais de Artur por meio de sua fala (palavras e entonação), seus gestos, seu olhar e postura diante das atividades, procedendo de maneira semelhante a Gómez Chácon (2003). Percebemos também, no segundo dia de entrevista[41] que Artur mobilizou estratégias de cálculo mentais mais elaboradas com maior tranquilidade e facilidade. Artur falou que, para ele, a atividade estava “mais ou menos” difícil.

No dia 2 de setembro de 2013, conversamos novamente com Artur. Queríamos obter detalhes de seus procedimentos nos cálculos da sequência quatro. Na questão um desta sequência, perguntamos-lhe como fez o cálculo 90 – 8. Artur disse que imaginou a conta (MA) (LUCANGELI et al., 2003):

Figura 35: Outro cálculo com algoritmo mental

$$\begin{array}{r} 90 \\ \underline{-8} \end{array}$$

Contudo, para obter a resposta, Artur estendeu os dez dedos sobre a mesa e abaixou um por um, começando pelo número 89, recitando os números em ordem decrescente até obter 82, e usando a estratégia de “contagem para trás, a partir de um número (count back from)”, conforme categoriza Thompson (1999).

[41] Conversamos com Artur no dia 22 de agosto e no dia 02 de setembro de 2013.

Constatamos que o aluno imaginou o algoritmo e utilizou o recurso de subtração com empréstimo de uma dezena, subtraindo oito unidades dessa dezena. Artur empregou uma combinação das estratégias de algoritmo mental (MA) e contagens (COF ou CON) (LUCANGELI et al., 2003).

Na questão dois, questionamos a ele como faria o cálculo 90 – 30. Artur disse: “30 + 30, 60 e, 60 + 30, 90 e, 90 – 30 é 60”. O aluno compõe o número 90, começando pela menor parcela, isto é, a partir de 30. Nota que ao adicionar 30 a 60 alcança 90. Logo, retira os últimos 30 adicionados e chega, portanto, ao resultado 60. Sua estratégia pessoal é do tipo encontrar o complementar de 30 em relação a 90, um tipo de estratégia semelhante a saltos de 30. Na questão oito, no cálculo 39 + 7, Artur disse que faria 40 + 7 = 47 e, 47 – 1 = 46. Percebemos nessa estratégia, que Artur faz 39 + 1, completando quatro dezenas, porque sabe adicionar dezenas com unidades. Em seguida, subtrai uma unidade do total, compensando a unidade que havia adicionado à primeira parcela. Essa estratégia é semelhante à estratégia N10C categorizada por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998). Todavia, em vez de arredondar a segunda parcela, Artur arredondou a primeira para a dezena mais próxima. Perguntamos porque ele achava que errou o cálculo no dia da atividade. Artur afirmou: “Você estava falando muito rápido. Não deu tempo de pensar. Aí eu fiz, pulando logo”. Artur foi um dos alunos que achou o tempo para cada cálculo insuficiente. Reconhecemos que o ritmo, que impomos para a atividade, gerou um estado emocional de pressa e insatisfação em Artur (GOMÉZ CHÁCON, 2003). Como-lhe foi dado tempo insuficiente para calcular, fez pulando etapas e números durante as contagens.

Perguntamos como faria 45 – 7. Artur disse: “Agora você me pegou”. Achamos que Artur não iria calcular corretamente. Porém, colocou os dedos sobre a mesa, abaixando um por um e encontrando o número 38 como resposta (COF) (LUCANGELI et al., 2003). Mais uma vez Artur faz uso da estratégia de “contagem para trás, a partir de um número (count back from)”, conforme categoriza Thompson (1999). A frase de Artur frente a um cálculo de subtração com empréstimo nos revela o quão difícil é essa operação para ele e justifica o uso de uma estratégia (segura) de contagem com o uso dos dedos.

Na questão nove da sequência quatro, perguntamos a Artur como calcularia 46 + 46. Artur disse: “eu faço 4 + 4, 80. Aí 80 mais uma dezena de 12 dá 90, mais 2 dá 92”. Afirmou ainda que fez o algoritmo convencional na mente, executando-o da esquerda para a direita. Fora a estrutura, esse procedimento é semelhante à estratégia 1010 categorizada por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998) e Lucangeli et al., (2003). Servir-se de ambas as estratégias evidenciam conhecimento do sistema de numeração decimal de que o número é composto de partes (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995). Ao operar da esquerda para direita, Artur estava na realidade, efetuando um cálculo por decomposição numérica (1010). O algoritmo mental (MA) serviu apenas como suporte à visualização do arranjo numérico, visto que o aluno já estava habituado a realizar cálculos no papel dessa maneira. Ao pedirmos para Artur que fizesse o cálculo 38 + 38, ele fez 10 + 8, 18 e 18 – 2 = 16. Isto é, completou uma dezena e calculou 10 + 8, pois, sabendo adicionar dezenas e unidades, utilizou fatos memorizados (AUTO) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003). Em seguida, subtraiu duas unidades do resultado obtido (18), compensando as duas unidades que tinha acrescentado à primeira parcela. Disse ainda: “3 + 3” (referia-se a três dezenas mais três dezenas) “dá 60. 60 + 10, 70 e 70 + 6, 76”, conforme estratégia 1010 categorizada por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998), Thompson (2000) e Lucangeli et al., (2003).

Na questão dez da sequência quatro, pedimos a Artur que calculasse 88 – 39. Artur exclamou “essa aí é difícil!”. Novamente, o aluno manifestou sua dificuldade com operações de subtração com empréstimo. Artur disse que durante a atividade diagnóstica efetuou o algoritmo de subtração, mentalmente (MA) (LUCANGELI et al., 2003), fazendo:

Figura 36: Cálculo incorreto via algoritmo mental

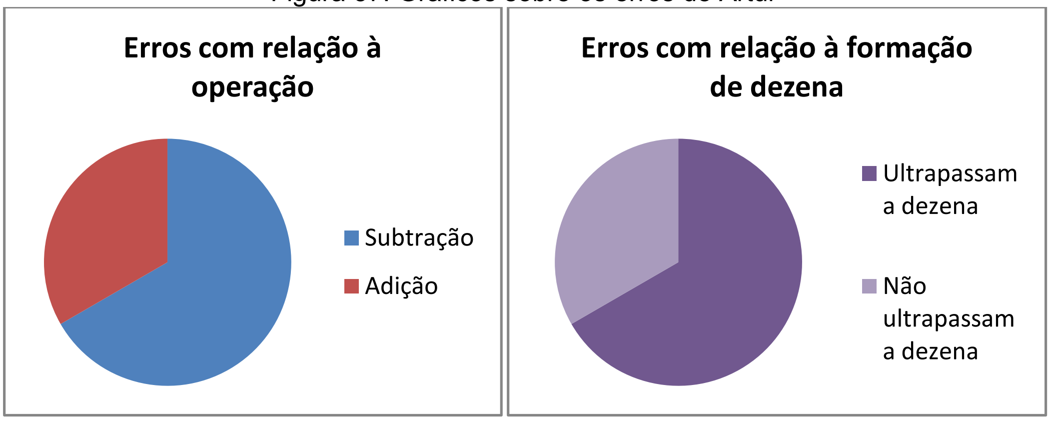
$$\begin{array}{r} 88 \\ -39 \\ \hline 50 \end{array}$$

Diante de um cálculo mais difícil, os alunos se prendem à estratégia que mais empregam, porque, naturalmente adquirem segurança, ao praticar bastante qualquer procedimento. Essa segurança é adquirida pela prática rotineira dos algoritmos convencionais durante as aulas de matemática. Como Artur empregou o algoritmo, pedimos que explicasse como o cálculo foi feito. Artur disse que “8 – 9 não dá para retirar” então é zero e, 8 – 3 é cinco. Morais (2011) afirma que esse tipo de erro foi identificado por Beishuizen (2001), e que quando crianças utilizaram estratégias de algoritmo mental ou de decomposição 1010. A autora afirma que essas estratégias em cálculos de subtração com empréstimo podem levar à perda de sentido numérico. Perguntamos, apontando para as parcelas: Mas, é isso que fazemos quando as unidades do minuendo são menores que as do subtraendo? Artur respondeu: “Não, tem que pegar emprestado”. Artur fez então: “18 – 9, 9 e o 8 que virou 7 menos 3, 4. Então, 49”. O que evidencia uma execução correta, mas procedimental do cálculo proposto (SKEMP, 1976), por meio de algoritmo mental (MA) (LUCANGELI et al., 2003).

Por fim, perguntamos a Artur se tinha o hábito de calcular mentalmente, fora da escola. Artur disse que não tinha muito hábito, mas que, às vezes, calculava “de cabeça”. Ainda perguntamos se costumava ir ao supermercado, à feira ou à mercearia e se realizava cálculos mentais com os preços. Ele nos disse que não, mas que em casa, seu pai lhe fazia perguntas, relacionando cálculos. Por exemplo: “Oh Artur, quanto é 50 + 25?”, 75, disse Artur. Continuou: “E quanto é 50 + 25 + 25?”, completou: “um real”. Perguntamos a Artur quem o ensinou a calcular, mentalmente, dessa maneira. Artur respondeu: “Sei lá. Aprendi sozinho, eu acho”. Parabenizamos Artur por seus acertos durante a entrevista. Artur disse que devagar aprende mais e acerta “na hora”. Referia-se, ao momento de entrevista, ao fazer um cálculo e, somente após sua finalização, passávamos a outro.

Os gráficos acima mostram o número de erros de Artur, com relação à operação aritmética e o número de erros em cálculos de adição e subtração que ultrapassam a dezena (adição com reserva e subtração com empréstimo). Contatamos que Artur possuiu mais erros nos cálculos referentes à subtração e nos cálculos de adição e subtração que ultrapassavam a dezena, revelando muita dificuldade nos cálculos de subtração com empréstimo.

Figura 37: Gráficos sobre os erros de Artur



4.5 - Douglas e a atividade diagnóstica

Quadro 10: Resumo dos acertos e erros de Douglas

Resumo dos acertos e erros de Douglas										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Sequência 1										
Sequência 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Sequência 3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Questão 5										
Sequência 4	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Questão 1										
Questão 2										
Questão 3										
Questão 4										
Questão 5										
Questão 6										
Questão 7										
Questão 8										
Questão 9										
Questão 10										

4.5.1 - Comentários sobre o desempenho de Douglas:

O aluno Douglas acertou 121 cálculos de 132 no total. Seus onze erros se concentraram na sequência quatro, principalmente, na questão dez. Douglas acertou todos os cálculos das sequências um e dois. Afirma que já possuía os resultados de memória, revelando a utilização de fatos numéricos de adição e subtração (AUTO) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003). Na sequência três, errou apenas um cálculo na questão cinco (adição com parcelas e resultado menor ou igual a 20 – questão de operações em geral): 8 + 9 = 18. Na sequência quatro, os erros de Douglas distribuíram-se da seguinte forma: questão cinco (questão de dezenas e unidades com dezenas) 16 + 60 = 86; questão oito (questão de dezenas e unidades com unidades – que ultrapassam a dezena) 53 + 8 = 71, 94 – 8 = 82; questão dez (questão de dezenas e unidades com dezenas e unidades – Operações em geral) 12 + 78 = 61, 14 + 47 = 40 (nestes dois cálculos de adição, colocamos a primeira parcela menor do que a segunda parcela. Inferimos que as duas respostas do aluno trazem resultados menores que a segunda parcela. Deduzimos que Douglas levou em conta que as respostas deveriam ser maiores que a primeira parcela, mas não atentou para o fato de que também deveriam ser maiores que a segunda parcela), 67 – 26 = 35, 74 – 18 = 62, 97 – 35 = 34, 89 – 55 = 97, 88 – 39 = 51.

4.5.2 - A entrevista com Douglas

No dia 2 de setembro de 2013, conversamos com Douglas para entendermos seus procedimentos de cálculo. Mostramos para Douglas os seus acertos nas sequências um e dois. Em seguida, perguntamos como fez para calcular 8 + 9 na sequência três. Douglas afirmou que fez 8 + 8 = 16 e depois fez 16 + 1 = 17. Isto é, utilizou um fato numérico que conhecia (8 + 8 = 16, recorrendo ao conhecimento do dobro de 8) para realizar um cálculo (estratégia AUTO) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003). No entanto, Douglas havia respondido 19, na folha de respostas. Perguntamos-lhe se saberia nos explicar porque respondeu 19 ao invés de 17. Douglas disse que achava que tinha "passado da conta", não sabendo dar mais detalhes. Douglas pode ter usado alguma estratégia de contagem (COF ou CON) (LUCANGELI et al., 2003) e ultrapassado o resultado do cálculo. Outra possibilidade é ter feito 8 + 8 = 18 e 18 + 1 = 19. Esse tipo de erro é comum, quando o aluno perde um pouco de atenção durante a tarefa, registrando corretamente a dezena e repetindo a parcela na casa das unidades.

Douglas não conseguiu ou não soube explicar como pensou e como efetuou vários cálculos mentais que errou no dia da atividade diagnóstica. Schliemann, Santos e Costa (2001) afirmam que “a criança é sempre mais capaz de compreender na ação do que de expressar verbalmente e conscientemente os princípios nos quais se baseiam suas ações” (p. 101). Santos-Wagner (2012) e Nova escola (2011) esclarecem que isso acontece, porque ao exercitarmos a explicação e a argumentação, nosso cérebro trabalha em um nível cognitivo mais elevado. Além disso, durante o tempo decorrido entre a atividade diagnóstica e a entrevista, Douglas pode ter se esquecido de alguns procedimentos que realizou. Douglas afirma que tem as contas armadas na cabeça, isto é, executa o algoritmo convencional, mentalmente, conforme estratégia MA (LUCANGELI et al., 2003). Como afirma Kamii (1995) e Morais (2011), esse tipo de estratégia mental acarreta perda no sentido de número durante o cálculo. Por exemplo, 89 – 55 = 97, o aluno não percebe que o resultado foi maior que o minuendo. Douglas afirma ainda que quando está com dúvidas, conta nos dedos (COF) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003). Vimos, em um momento, que Douglas iria tentar calcular o algoritmo na carteira e dissemos-lhe que não fizesse isso, mas que registrasse o que ele achava que era correto, sem se preocupar em estar certo ou errado.

Na questão cinco, da sequência quatro, perguntamos como faria 16 + 60, e ele disse que calcularia 60 + 10 + 6 = 76. Nesse cálculo, Douglas mostra o uso da propriedade comutativa da adição, a decomposição do número 16, somando primeiramente, a dezena, 60 + 10 = 70 e, em seguida, somando ao resultado o número 6, obtendo 76, conforme estratégia N10 (somente a segunda parcela é decomposta em unidades e dezenas) categorizada por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998), Thompson (2000) e Lucangeli et al., (2003).

Novamente, perguntamos por que imaginava que tinha registrado errado na folha de respostas. Douglas acredita que calculou 60 + 20 + 6 = 86. Nota-se que Douglas fez um cálculo corretamente que justifica seu registro na folha de respostas, usando novamente a estratégia N10 (BEISHUIZEN, 1997; KLEIN; BEISHUIZEN, 1998; THOMPSON, 2000; LUCANGELI et al., 2003). A estratégia de decomposição revela o conhecimento que Douglas tem sobre o sistema de numeração decimal (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995). Carraher, Carraher e Schliemann (1995) afirmam que a utilização da estratégia de decomposição revela uma forma de arredondamento dos números em questão. Esse arredondamento traz, como benefícios, a facilidade de memorização, a diminuição da sobrecarga mental que a criança teria ao operar, ao mesmo tempo, com dezenas e unidades.

Na questão oito, perguntamos como resolveria 53 + 8. Douglas disse que faria 8 + 3 = 11 e 50 + 11 = 61, efetuando a decomposição da primeira parcela. Perguntamos como faria 94 – 8. Douglas disse que, nas subtrações, utilizava os dedos. Estendeu os dez dedos sobre a mesa e dobrou um por um, recitando números em ordem decrescente (estratégia count back from) (THOMPSON, 1999) e COF (LUCANGELI et al., 2003), até o oitavo dedo, quando encontrou o número 86. Disse que deve ter errado, por estar nervoso. Embora essa não seja uma estratégia de cálculo que demonstre maturidade numericamente, Douglas a executou com segurança. Percebemos que assim como Ester e Artur, Douglas também possuía dificuldade na operação de subtração, sobretudo quando o cálculo tinha a necessidade de empréstimo. Vemos que Douglas empregou a mesma estratégia de Artur, nesse tipo de cálculo.

Sua justificativa para os erros parece razoável, uma vez que um desequilíbrio emocional (ansiedade, nervosismo) atrapalha o desempenho dos alunos em atividades avaliativas e não rotineiras como a atividade de pesquisa (GOMÉZ CHÁCON, 2003). Douglas mobilizou estratégias complexas de cálculo mental para adição, ao passo que, nas subtrações com empréstimo (que ultrapassavam a dezena), recorreu a estratégias de contagem com apoio dos dedos (COF) (THOMPSON, 1999; LUCANGELI et al., 2003). Conforme Buys (2008), o uso de estratégias mais avançadas não exclui do repertório de cálculo o uso de estratégias mais primitivas. Observamos que Douglas usou tanto estratégias aditivas complexas quanto estratégias primitivas (contagens) nas subtrações.

Na questão dez, indagamos a Douglas como faria 12 + 78 e ele nos disse que calcularia 10 + 70 = 80 e 8 + 2 = 10. Por fim, faria 80 + 10 = 90 conforme estratégia 1010 (BEISHUIZEN, 1997, KLEIN; BEISHUIZEN, 1998; THOMPSON, 2000; LUCANGELI et al., 2003) e estratégia de decomposição (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995). Apontamos para o resultado 61 que havia registrado e perguntamos o que ele achava desse número em relação à segunda parcela (78). Ele disse que o número 61 é muito menor do que 78 e não poderia ser a resposta. Questionamos o que ele imaginava que o teria levado ao erro. Douglas disse: “Acho que fiz de menos. Não?”. Perguntamos: “Se fosse de menos (subtração) quanto daria?”. Douglas disse: “78 – 12... 70 – 10 = 60 e 60 – 8 = 52, 52 – 2 = 50”, usando uma estratégia de decomposição semelhante a 1010. Beishuizen (2001) em Morais (2011) alerta que o aplicar da estratégia 1010 e do algoritmo mental (MA) pode levar a esse tipo de erro, ao calcularmos uma subtração. Pedimos para que fizesse novamente. Queríamos nos certificar de seu procedimento. Douglas repetiu o mesmo processo. Então, escrevemos em uma folha, como abaixo, explicando cada passo e aproveitando aquilo que havia feito corretamente.

Figura 38: Estratégia de decomposição em cálculo de subtração

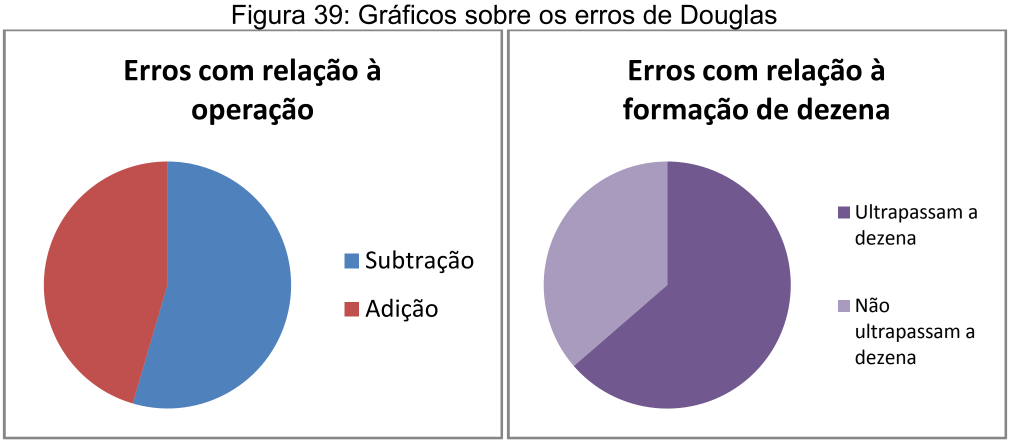
$$\underbrace{78}_{70+8} - \underbrace{12}_{10+2}$$

E 70 -10 = 60 e 8 – 2 = 6. Portanto, 60 + 6 = 66, conforme estratégia 1010 (BEISHUIZEN, 1997; KLEIN; BEISHUIZEN, 1998; THOMPSON, 2000; LUCANGELI et al., 2003). Como Douglas afirmou que entendeu a estratégia que adotamos pedimos, que calculasse 67 – 26, porque havia registrado o número 35 na folha de respostas. Douglas fez 60 – 20 = 40 e disse agora vou fazer no dedo: 7 – 6 = 1. 40 + 1 = 41. O que mostra que Douglas entendeu e utilizou a estratégia 1010, adequadamente, mesmo que com auxílio dos dedos (COF) em 7 – 6 = 1 (BEISHUIZEN, 1997; KLEIN; BEISHUIZEN, 1998; THOMPSON, 1999, 2000; LUCANGELI et al., 2003). Durante o diálogo, Douglas mostrou-se bastante seguro, resolvendo os cálculos com estratégias eficientes. Questionamo-lo, novamente, por que achava que tinha errado os cálculos que mostramos. Douglas disse que ficou nervoso durante a atividade e acabou se perdendo nos cálculos. Gómez Chácon (2003) ressalta que “as reações emocionais são o resultado de discrepâncias entre o que o sujeito espera, e o que ele experimenta no momento em que a reação se produz” (p. 86). A atividade de cálculo mental na escola foi novidade para Douglas assim como para Ester e Artur. Por isso, a dificuldade experimentada nas tarefas de cálculo desencadeou reações emocionais de medo, tensão e ansiedade nesses alunos.

Perguntamos se tínhamos falado a sequência de cálculos rápido demais. Segundo Douglas, falamos normalmente e sem pressa. Ficamos curiosos quanto à origem das estratégias de cálculo mental apresentadas por Douglas na a entrevista. Ele afirmou que a sua própria mãe lhe o ensinou a calcular mentalmente, desse jeito e que seu pai e sua madrasta o incentivavam a fazer cálculos mentais. Perguntamos a Douglas se costumava calcular no lava jato de seu pai, e ele disse que não, mas que calculava, às vezes, no supermercado e na “mulher do frango”. Ele disse: “Quando ela me dá o troco a mais, eu falo com ela”.

Os gráficos abaixo mostram o número de erros de Douglas, com relação à operação aritmética, e o número de erros em cálculos de adição e subtração que ultrapassam a dezena (adição com reserva e subtração com empréstimo). Observamos que Douglas possuiu mais erros nos cálculos, envolvendo subtração e nos cálculos de adição e subtração que ultrapassavam a dezena.

Figura 39: Gráficos sobre os erros de Douglas



4.6 – Ester, Artur e Douglas na aula de 18 de novembro de 2013

Na aula do dia 18 de novembro de 2013, trabalhamos com uma atividade composta por quatro questões sobre sensibilidade numérica, adaptadas do livro “Estimation and mental computation” publicado, em 1986, pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática, em inglês: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (NCTM, 1986).

Figura 40: NCTM – Questões sobre sensibilidade numérica

CIRCULE O NÚMERO QUE PARECE MAIS ADEQUADO EM CADA SITUAÇÃO.

1) Um par de tênis comum (que usamos para ir à escola) pode custar:

R$ 5,00 R$ 80,00 R$ 500,00

2) Um computador comum pode custar:

R$ 29,90 R$ 159,00 R$ 1.499,00 R$ 10.599,89

3) A altura média de um menino com 12 anos de idade pode ser:

1,50 cm 20,00 cm 0,9 m 1,50 m 2,5 m

4) O comprimento do quadro da sala de aula pode ser:

50,0 cm 1,0 m 4,0 m 30,0 m

5) Um copo comum que usamos para tomar água em casa pode conter que volume de água?

10 ml 80 ml 300 ml 1,5 litros

Conforme o documento, este tipo de trabalho ajuda a tornar os alunos conscientes de uma sensibilidade numérica em vários contextos e em condições de efetuarem um cálculo. O NCTM defende que com este tipo de habilidade, os alunos passam a examinar as soluções dos problemas sob uma perspectiva diferente, a da razoabilidade de um resultado.

Ester, Artur e Douglas obtiveram resultados diferentes nesta atividade. Artur marcou, corretamente, as respostas das questões 1 e 2, que eram perguntas que envolviam números associados à unidade monetária. Já na questão 3, Artur responde que a altura média de um menino com 12 anos de idade pode ser 20 cm. Na questão 5, Artur responde que um copo comum que usamos para tomar água em casa pode conter 10 ml. A dificuldade de Artur reside na compreensão do significado de centímetro, uma fração do metro. Igualmente, Artur não fazia ideia de que volume de água representava 10 ml. Sua dificuldade residiu na compreensão da unidade de medida. Ester e Douglas, no entanto, responderam, corretamente, todas as cinco questões sobre sensibilidade numérica na folha de respostas, e quando indagamos à turma acerca de que outros valores, nós poderíamos colocar no lugar desses. Respostas como “um metro e 52 centímetros” e “1,55 metros” para altura de uma criança com doze anos de idade e, respostas como “cinco metros” e “seis metros” para o comprimento do quadro da sala de aula foram dadas por eles, durante as discussões.

4.7 - A aula do dia 12 de dezembro de 2013

Durante esse dia, todos os professores estavam incumbidos de trabalhar na revisão para a prova de recuperação final, na semana seguinte. A prova foi aplicada na segunda-feira, dia 16 de dezembro. Fomos surpreendidos por uma mudança repentina no cronograma de aulas do dia. A professora Sílvia ficou com 6ª série/7º ano e 7ª série/8º ano nos três primeiros horários. Cinco alunos da 5ª série/6º ano, dentre eles Artur e Douglas, iriam ficar sem aula nos três horários. Então, colocamo-nos à disposição para trabalhar com eles nas três primeiras aulas. Revisamos os conteúdos de: expressões numéricas, incluindo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação com e sem o uso de parênteses; problemas com mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e máximo divisor comum (m.d.c.). Ademais, trabalhamos cálculo mental com as quatro operações como mostraremos adiante. Ester já havia sido aprovada no ano letivo de 2013, portanto, não participou dessa aula.

Iniciamos a primeira aula com as expressões numéricas da lista que levamos na semana anterior (apêndice D). Os alunos pediram para que cada um fizesse uma questão no quadro. Perguntamos–lhe qual era a ordem de precedência dos operadores das expressões. Artur sabia e disse, prontamente: “parênteses, potenciação e radiciação, multiplicação e divisão, adição e subtração”. Mas, quando foi resolver, demorou bastante para escrever os resultados dos cálculos. Fez contagens mentais tediosas, risquinhos e uso dos dedos, o que dificultou seu progresso. Trabalhamos com ele algumas maneiras mais eficientes como contar ou subtrair de dois em dois, ou cinco em cinco, etc, a fim de que fosse registrando alguns fatos numéricos, como dobros e fatos fundamentais do número cinco. Enquanto isso, Douglas desenvolveu os cálculos das sequências numéricas. Esse tipo de atividade de adição e subtração de dois em dois, etc, em escala ascendente e descendente é sugerido pelos PCN, como conteúdo conceitual e procedimental e deve ser sugerido o cálculo dêssa maneira, a partir de qualquer número dado (BRASIL, 1997). Aos poucos, o aluno vai incorporando ao seu repertório alguns fatos numéricos que lhe servirão como atalhos, quando tiver que realizá-los em outras situações.

Em seguida, trabalhamos com sequências de cálculos mentais, envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão com resultados até 30. A atividade foi inspirada em Oliveira (2003). Dávamos um cálculo para determinado aluno e, com a resposta desse cálculo, criávamos outra conta para outro aluno de modo que nenhum aluno ficou sem efetuar um cálculo em cada rodada. Quando um aluno demorava muito, a ponto dos colegas o apressarem, nós passávamos a vez para outro responder e retornávamos com um cálculo mais simples para esse aluno. Assim, agimos de acordo com Polya (1995/1945) que recomenda que os professores devem propor atividades que sejam em certa medida desafiadoras, mas que os alunos tenham condição de resolvê-las. Essa atividade durou cerca de quinze minutos, e a fizemos em cada uma das três aulas de revisão para a prova final.

Os alunos nos rodearam animados com a tarefa e competiam entre si: quem respondia mais depressa. Reconhecemos que, a partir daí, os alunos com menor repertório de fatos numéricos das quatro operações, como Artur, passaram a demonstrar um estado emocional de bloqueio e não conseguiram efetuar alguns cálculos. Usamos o mapa de humor proposto por Gómez Chácon (2003), para identificarmos as emoções dos alunos por meio de palavras, entonação de voz e gestos. Os gestos muito frequentes foram: balançar apressado das mãos, levar as mãos ao rosto, coçar a cabeça etc. Douglas, apesar de conhecer uma quantidade razoável de fatos numéricos ficou bastante nervoso com a atividade de cálculo mental assim conduzida. Víamos em seu rosto e no balançar de suas mãos que estava ansioso e, por isso, demorou um pouco para realizar os cálculos. No entanto, conseguiu fazer todos com sucesso.

Começamos com “2 x 3”, e todos os cinco alunos responderam corretamente, sem respeitar a vez do colega. Isso aconteceu em diversos momentos tamanha a euforia que a atividade despertou. Em seguida, direcionamos a pergunta para um dos alunos: “6 x 4” e, respondeu “24”, “24 - 4” e, enquanto o colega pensava os outros diziam “ah não, essa é fácil!”, demos o cálculo para outro que respondeu “20”, retornamos com outra pergunta para o aluno anterior “20 : 2” e este respondeu “10”. Fizemos em seguida, “10 – 3”, “7 x 4”, “28 - 13” e aí se iniciava um cálculo, compreendendo alguns procedimentos mais difíceis. Muitos cálculos eram elementares e, mesmo assim tiveram bastante dificuldade em geral.

Interessante observar que os outros três alunos se mantiveram animados até a terceira rodada de cálculos mentais, enquanto que Artur e Douglas pediram para que não fizéssemos mais cálculos mentalmente, apenas problemas escritos. Quando-lhes perguntamos por que não queriam mais cálculos mentais, afirmaram com tom de decepção: “eu não sei cálculo mental! É muito difícil”. A fala desses alunos confirmou nossas observações sobre seus estados emocionas. As falas de Artur e Douglas se referiam, sobretudo, aos cálculos de subtração e divisão. Nessas operações tinham bastante dificuldade sem o uso de lápis e papel ou contagens nos dedos, mesmo que com cálculos básicos. Artur conseguiu desenvolver bem apenas as adições. Todas as demais operações foram complicadas para ele.

Gostaríamos de ter realizado mais aulas como a do dia 12 de dezembro de 2013, com a turma toda, e não apenas com os cinco alunos em recuperação final. Porém, tivemos limitação de tempo para aplicação das atividades. O cronograma da escola era bem delimitado, e o cronograma da turma estava atrasado, em relação ao planejamento da professora Silvia. Também, muitos alunos estavam em recuperação trimestral e alguns em recuperação final. Isso nos fez dedicar nosso tempo em planejar intervenções didáticas que fossem proveitosas tanto para a professora quanto para os alunos em recuperação. Trabalhamos mais com atividades de outros conteúdos que não faziam parte do escopo desta pesquisa.

4.8 – Síntese do desempenho de outros alunos da turma na atividade diagnóstica e na entrevista

Trazemos nesta seção uma síntese do desempenho de outros alunos da turma. Apresentamos análises de Luizza, Carlos, Eduardo, Junior e Vasco da Gama durante a atividade diagnóstica e durante a entrevista. Os dados coletados acerca das estratégias de cálculo mental destes alunos se assemelharam aos dados referentes à Ester, Artur e Douglas, o que nos ajudou na análise, interpretação e busca de uma resposta para nossa questão de investigação.

a) A aluna Luizza

De modo geral, Luizza não teve um bom desempenho nas tarefas de cálculo mental, mesmo tendo acertado quase todas as respostas da atividade. Dos 132 cálculos realizados obteve apenas 11 erros. Luizza tinha alguns fatos numéricos memorizados e afirmou na sequência 1 (adição com parcelas e resultado menor ou igual a cinco) e na sequência 2 (adição com parcelas e resultado menor ou igual a dez) que já tinha as contas na memória. Logo, Luizza atingiu um nível de cálculo formal para cálculos que totalizam até 10. Morais (2011) afirma que, para van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2008), o nível de cálculo formal é atingido quando as crianças utilizam relações numéricas já conhecidas por elas. Além disso, relacionamos o uso da memória feito por Luizza com uma das categorias propostas por Thompson (1999) chamada de utilização de fatos numéricos de adição e subtração. Isto ocorre quando o aluno fornece, imediatamente, uma resposta ao problema. Luizza também afirma que calculou com facilidade, pois as respostas obedeciam a uma regularidade numérica. Para Luizza identificar essa regularidade ajudava, em alguns momentos, ter certeza da resposta correta.

Na sequência 3, notou, como queríamos, que contas diferentes poderiam resultar no mesmo valor. Por exemplo, 11 + 4 = 15 e 18 – 3 = 15 são denominados fatos numéricos fundamentais ou, apenas, fatos fundamentais do número 15. Luizza percebeu a aparição de diferentes fatos fundamentais, mas não recuperou todos de memória, pois, em seguida, a aluna afirmou que fez alguns cálculos nos dedos quando não conseguiu apenas mentalmente. Ao se tratar de números entre 10 e 20, Luizza calculou, mentalmente, em um nível de contagem a partir do número maior recorrendo aos dedos (THOMPSON, 1999, 2000). Isto é, para calcular 14 + 6 Luizza fez “quatorze... quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove, vinte”, mexendo os dedos sobre o braço.

Na sequência 4, Luizza afirmou não ter conseguido calcular mentalmente, por nunca ter feito esse tipo de atividade. A observação da aluna está de acordo com Fisher (1987)[42] citado por Parra (1996) e o que dizem os estudos de Beishuizen e Anghileri (1998)[43] citados por Morais (2011). Esses autores afirmam que a falta de uma prática regular com atividades de cálculo mental que favoreçam o aprendizado e a memorização de fatos fundamentais faz com que vários alunos continuem recorrendo a estratégias de contagem, como vemos nos dados de Luizza. A aluna não possuiu procedimentos eficientes de cálculo mental porque nunca efetuou, rotineiramente, atividades dessa natureza.

Disse que, no começo, estava fácil (se referia aos cálculos da questão 1 e aos cálculos da questão 7 da sequência 4), mas, nos cálculos finais (a partir dos cálculos propostos na questão 8), a aluna alega que não dava nem para utilizar os dedos como apoio. As estratégias de contagem, com o apoio dos dedos (do tipo COF) ou sem o apoio dos dedos (do tipo CON), mostraram-se ineficientes para os cálculos com números da ordem de grandeza da sequência 4 (números maiores que 20 e menores que 100). A tentativa de usar estratégias de contagem, a partir da questão 8 revelou que Luizza se apoiou, quase exclusivamente, na estratégia de cálculo exposta por Thompson (2000) de contagem a partir do número maior. Luizza não mobilizou estratégias de utilização de fatos numéricos de adição e também não usou estratégias de cálculo com base em fatos numéricos, o que seria mais adequado, a partir desse grupo de cálculos. Isso se deve a não familiaridade de Luizza com as tarefas matemáticas da sequência 4.

---

[42] FISHER, J. P. (1987): "L'automatisation des calculs elémentaires à l´école", **Revue Française de Pédagogie,** nº 80, pp. 17-24.
[43] Beishuizen, M. & Anghileri, J (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. **British Educational Research Journal,** 24(5), pp. 519-538.

Luizza não mobilizou o conhecimento de fatos fundamentais (estratégia AUTO) para a realização de cálculos mais difíceis como os cálculos da questão 10 da sequência 4 (LUCANGELI et al., 2003; THOMPSON, 2009). Isso ficou evidenciado em seus registros, quando afirmou ter trabalado os dedos. Dos onze cálculos errados seis eram de subtração e cinco de adição. Dos cálculos de adição três eram cálculos de dobros onde respondeu: 39 + 39 = 48 (a aluna adicionou as unidades, resultando em 18 e, em seguida, adicionou uma dezena a três dezenas, totalizando quatro dezenas, esquecendo-se de adicionar as outras três dezenas - uma tentativa de utilização da estratégia de algoritmo mental MA), 46 + 46 = 62 (é possível que a aluna tenha pensado da seguinte forma: somou as unidades, totalizando 12 adicionou uma dezena com três dezenas, mais três dezenas totalizando 9 dezenas, mas por falta de atenção, registrou o algarismo invertido, isto é, o algarismo 6 - também tentou usar a estratégia MA neste cálculo) e 19 + 19 = 32 (calculou 9 + 9, incorretamente, como 12, em uma tentativa de aplicar a estratégia MA) (LUCANGELI et al., 2003). Os outros dois cálculos de adição eram da questão 10 (dezenas e unidades com dezenas e unidades): 34 + 55 = 88 e 14 + 47 = 60. Erros como esses dois últimos são comuns, quando os alunos utilizam os dedos no auxílio à contagem um a um, pois começam a contar a partir da parcela e, não, de seu sucessor. Por exemplo, ao efetuar 5 + 4 alguns alunos contam “5, 6, 7 e 8”, ao invés de “6, 7, 8 e 9”. Entretanto, muitas vezes empregam a combinação de duas estratégias: algoritmo mental e contagem nos dedos (MA e COF), ou algoritmo mental e contagem mental (MA e CON), o que atrapalha ainda mais a resolução do cálculo. A maioria desses cálculos de adição possuía reserva o que dificultava o uso da estratégia MA (LUCANGELI et al., 2003), levando o aluno ao erro e à perda de sentido numérico (BEISHUIZEN, 2001; KAMII, 1995). Dos cálculos de subtração dois eram da questão 8 (dezenas e unidades com unidades – que ultrapassam a dezena): 45 – 7 = 34 e 67 – 9 = 53. Os demais cálculos subtrativos pertenciam à questão 10: 67 – 26 = 42, 74 – 18 = 54, 89 – 55 = 40 e 88 – 39 = 56.

No dia 22 de agosto de 2013, demos o retorno à Luizza de seus acertos e fizemos questionamentos sobre seus procedimentos de cálculo mental em um cálculo de cada grupo onde havia errado. Perguntamos-lhe como fez ou faria para calcular

45 – 7 (cálculo proposto na questão 8). Luizza disse que “chuta” um valor, adiciona 7 e verifica se o total é igual a 45. Perguntamos porque experimentou 34 e, não, o número 20, por exemplo. Luizza disse: “porque o 20 não iria passar nem perto!”, o que mostra que sua escolha não é, totalmente, arbitrária. Observamos através da resposta de Luizza que a aluna tem noção de estimativa e julga a razoabilidade de um número, enquanto possível resultado (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; LINS; GIMENEZ, 1997; SERRAZINA, 2012a). Fez, rapidamente uma estimativa de que 20 + 7 é menor que 38. Contudo, a aluna não tem uma estratégia eficiente para calcular com exatidão 45 – 7, como por exemplo, primeiro retirar todas as unidades da primeira parcela: 45 – 5 = 40 e em seguida efetuar 40 – 2 = 38, que seria uma estratégia de saltos em 10 (THOMPSON, 1999). Luizza refes, o cálculo e verificou que a resposta deveria ser maior do que 34, já que 34 + 7 = 41. Disse, em seguida, 38, verificando que ao acrescentar 4 ao total (41 + 4 = 45) poderia acrescentar 4 à primeira parcela e obter o resultado (34 + 4 = 38), mostrando o uso de uma estratégia do tipo compensação que se apoia no desenvolvimento de um cálculo intermediário. Não encontramos essa estratégia categorizada na literatura a que tivemos acesso.

Perguntamos como ela faria para calcular 39 + 39, e Luizza nos respondeu que faz o algoritmo convencional na mente (MA) (LUCANGELI et al., 2003). Daí, resultaria que “9 + 9 = 18, 1 + 3 = 4, então é 48”. Luizza se esqueceu da dezena do outro número não se dando conta, novamente, de que deveria adicionar uma dezena com 3 dezenas mais 3 dezenas. Quando-lhe perguntamos como faria para calcular 34 + 55, disse que faria do mesmo jeito, isto é, executando o algoritmo na cabeça (MA). Ao refazer o cálculo, Luizza disse que a resposta deveria ser 89 e, não, 88 como ela havia registrado na atividade diagnóstico. Luizza também utilizou os dedos para contar, um a um, 4 unidades mais 5 unidades e 3 dezenas mais 5 dezenas, realizando a contagem, a partir do primeiro número, conforme o nível ii para adição identificado por Thompson (1999, 2000) e conforme estratégia COF de Lucangeli et al., (2003). Deduzimos que a aluna usa uma combinação das estratégias de algoritmo mental e contagem nos dedos. O uso dessa combinação de estratégias não foi categorizado pelas pesquisas a que tivemos acesso. Luizza mexia, timidamente, um dedo de cada vez da mão esquerda sobre o antebraço direito. Perguntamos a Luizza se achou que ditamos, muito rapidamente, os cálculos e ela disse que só um pouco rápido. Não identificamos nos procedimentos de Luizza estratégias de cálculo mental complexas do tipo N10 e 1010 para adição e subtração, conforme categorização proposta por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998) e Lucangeli et al., (2003) com parcelas entre 20 e 100.

b) O aluno Carlos

Ao todo, Carlos acertou 117 cálculos e errou 15 cálculos: dois erros na sequência dois, dois erros na sequência três e onze erros na sequência quatro. Carlos acertou todos os cálculos da sequência um. Na sequência dois errou os cálculos da questão 4 (Adição com parcelas e resultado menor ou igual a dez – De operações em geral), registrando: 2 + 7 = 10, 3 + 4 = 6. Em seus registros, disse de modo geral que algumas respostas deram números iguais, em outro grupo os números “pularam” de dois em dois, e em outro grupo, as respostas não obedeceram a algum padrão, o que ele identificou como aleatório. Afirma que tinha alguns cálculos memorizados. “vinha logo na minha memória a conta e a resposta”, disse, mostrando a utilização de fatos numéricos de adição para números até 10 (THOMPSON, 1999). Quando não tinha o resultado memorizado recorria à contagem um a um, a partir da maior parcela na adição e da menor parcela na subtração, usando a ideia de complementar ou “contagem até” – count up, conforme categorizou Thompson (1999).

Buys (2008) afirma que o uso de estratégias mais complexas não elimina, necessariamente, o de estratégias mais simples como a contagem. Por exemplo, obcervamos que Carlos aproveita fatos numéricos já memorizados e também recorre à contagem para fatos numéricos que ainda não foram incorporados ao seu repertório de cálculo. Na sequência três (adição com parcelas e resultado menor ou igual a 20), na questão 5 (De operações em geral), errou os cálculos 7 + 12 = 18 (erros desse tipo ocorrem, quando contamos um a um, a partir da maior parcela ao invés de seu sucessor) e 8 + 9 = 19 (é muito comum que o aluno se perca na contagem um a um, ultrapassando, em algumas unidades, o resultado do cálculo). Carlos Identificou os dobros (múltiplos de dois), resultados iguais numa mesma sequência de cálculos e identificou números aleatórios. Como estratégia de cálculo mencionou, como na aula anterior, o uso da memória e a contagem mental.

Na sequência quatro (adição com parcelas e resultado menor ou igual a cem) questão 1 (dezenas com unidades) errou o primeiro cálculo de subtração: 30 – 4 = 32. Carlos não atentou para a operação de subtração. O resultado não poderia ser superior ao minuendo. Errou apenas um cálculo na questão 3 (de dezenas e unidades com dezenas): 78 – 50 = 38. Possivelmente, Carlos completou 7 dezenas, partindo de 5 dezenas fazendo 5, 6, 7 dezenas, tendo contado três vezes. Por isso, o resultado 38. Os erros de Carlos se concentraram nas questões 8 e 10, principalmente, nos cálculos de subtração. Na questão 8 (dezenas e unidades com unidades – que ultrapassam a dezena) calculou: 39 + 7 = 48, 45 – 7 = 42, 67 – 9 = 52 e 94 – 8 = 84. Carlos valeu-se da mesma estratégia em todos esses cálculos de subtração, repetindo a dezena e subtraindo a unidade maior da unidade menor. Por exemplo, 45 – 7, 7 – 5 = 2, repetindo 4 dezenas, temos 42. Soluções desse tipo mostram a perda de sentido numérico, quando Carlos utiliza o algoritmo mental (KAMII, 1995; MORAIS, 2011) e não respeita suas regras. Na questão 10 (dezenas e unidades com dezenas e unidades – operações em geral), calculou: 23 + 76 = 109, 67 + 23 = 89, 74 – 18 = 61, 89 – 55 = 33 e 88 – 39 = 61. Na parte final da atividade, escreveu que “armou as contas na mente” (referindo-se ao algoritmo mental), complementa, dizendo que, em alguns cálculos não deu conta de resolver. Vimos, portanto, que essa estratégia mostrou-se insuficiente para todos os cálculos propostos.

No dia 22 de agosto de 2013, mostramos a Carlos seu resultado na atividade de pesquisa. Quando-lhe perguntamos como tinha feito o cálculo 2 + 7, ele disse “contando um por um. 2 + 7 é 10”. Pedimos-lhepara contar um por um como havia feito e Carlos disse “7 + 2 é igual a 9, não é?” e ele mesmo concluiu “7 + 2 é igual a 9”. Notamos que Carlos conhece a comutatividade da adição 2 + 7 = 7 + 2 e aplicoua estratégia de “contagem a partir do número maior” (THOMPSON, 1999) No entanto, não utiliza esse recurso sempre que necessário. Por exemplo, na sequência 3, perguntamos a Carlos quanto seria 7 + 12. Carlos afirmou: “Essa eu não consigo”. Questionamos: “Por quê?”. Carlos: “Com número grande eu não consigo”. Insistimos: “E se fosse 12 + 7?”. Carlos: “Aí é bem mais fácil! Geralmente, eu faço o maior primeiro mesmo”. Perguntamos: “E como você faz?”. Carlos: “Eu somo de um em um” (utilizando contagens mentais CON) (LUCANGELI et al., 2003). Entendemos que Carlos ainda não está completamente seguro com a propriedade comutativa da adição. Na verdade, recorre à contagem um a um, partindo do maior como sua estratégia principal de cálculo mental (THOMPSON, 1999). Na sequência 4, perguntamos a Carlos como faria a subtração 30 – 4. Carlos: “Subtração é mais difícil. Aí eu uso os dedos” (THOMPSON, 2000; LUCANGELI et al., 2003). “Como você faz?”, perguntamos. “29, 28, 27, 26” falou, levantando um dedo por vez, enquanto dizia um número fazendo uma “contagem para trás a partir de um número (count back from)” (THOMPSON, 2000). Questionamos: “E nesse caso: 23 + 76?”. Carlos: “Aí eu armo a conta na cabeça mesmo, senão não consigo” (estratégia MA) (LUCANGELI et al., 2003). Notamos nas respostas dos cálculos de Carlos que a estratégia do algoritmo usual mostrou-se ineficiente. Conforme Kamii (1995) e Morais (2011), essa estratégia mostra perda do sentido de número durante o cálculo. Isso fica evidente, quando existe uma discrepância entre o resultado do cálculo e as parcelas. Carlos disse que ficou um pouco nervoso durante as aulas da atividade de pesquisa (GOMÉZ CHÁCON, 2003) e também achou que o tempo dado para efetuar cada cálculo foi insuficiente.

c) O aluno Eduardo

Eduardo acertou 122 cálculos e errou dez. O aluno acertou todos os cálculos das sequências um, dois e três. Seus erros se concentraram na sequência 4 e a maioria deles nas questões 8, 9 e 10. Eduardo havia manifestado em aulas anteriores que precisava de mais tempo para fazer algumas atividades, pois não era bom em cálculos mentais. Identificamos que a queixa do aluno tinha relação com seu desempenho em atividades anteriores de multiplicação e divisão. Acreditamos que ter iniciado essa sequência didática com cálculos simples de adição e subtração pode ter contribuído para aumento de sua autoestima

(GOMÉZ CHACÓN, 2003). Uma evidência disso é que Eduardo escreveu nas respostas das sequências 1 e 2 ter pensado, diretamente, nos resultados das contas, porque já sabia os cálculos de adição (uso de fatos numéricos memorizados) (THOMPSON, 1999), o que confirmou com segurançana entrevista. Para a sequência 3, escreveu que já tem contas armadas na cabeça (algoritmo mental MA) (LUCANGELI et al., 2003) e quando tinha dificuldade, contava nos dedos (THOMPSON, 1999, 2000).

Durante o diálogo com Eduardo, no dia 22 de agosto de 2013, ele nos disse que achou a passagem um pouco rápida de um cálculo para outro e que tinha ficado um pouco nervoso com a atividade no primeiro dia, porquanto imaginava que os cálculos seriam muito difíceis. Constatamos que o aluno gerou expectativas de que a atividade seria difícil, o que ocasionou um desequilíbrio emocional negativo (ansiedade, medo). Ao se deparar com cálculos que não eram tão complicados para ele, sentiu-se aliviado (GOMÉZ CHACÓN, 2003). Conforme Goméz Chacón (2003), o professor precisa estar consciente da tensão que é gerada entre as expectativas dos alunos e aquilo que é proposto por ele, em sala de aula. Essa tomada de consciência e posterior reflexão do professor, ajuda-o a entender a verdadeira causa de muitos erros de seus alunos (GOMÉZ CHACÓN, 2003; SANTOS-WAGNER, 2013).

Ao lhe perguntarmos como fez para resolver 90 – 8, Eduardo disse que imaginou bolinhas (mostrou os dez dedos) e, então, retirou oito. Nessa estratégia, o aluno desmembrou dez unidades das 90 referentes à primeira parcela, mostrando compreensão de que a quantidade 10 está incluída na quantidade 90, isto é, possui noção de inclusão hierárquica (KAMII, 1984). Retirou oito unidades de dez unidades, fazendo uma “contagem dos que sobram (count out)” (THOMPSON, 2009). Apesar de ter imaginado bolinhas (estratégia de contagem mental - CON), utilizou os dedos (COF) em sua explicação (LUCANGELI et al., 2003). A imaginação de dez unidades nessa situação é uma tarefa mais dispendiosa do que o uso dos dedos que são entes concretos. Certamente, isso levou Eduardo a contar as bolinhas que sobraram, após retirar oito delas, erroneamente. Já no cálculo 38 + 38, Eduardo fez a “conta armada na cabeça” (algoritmo mental MA)

(LUCANGELI et al., 2003), mas adicionou, primeiro, as dezenas e depois as unidades como na figura abaixo (esquerda):

Figura 41: Cálculo mental de Eduardo

```
  38
+ 38
----
   6       74
+ 16     - 18
----     ----
  76       64
```

Como afirmamos, anteriormente, o uso do algoritmo, mentalmente, não é uma estratégia de cálculo adequada (KAMII, 1995; ROGERS, 2009). No entanto, o aluno fez o processo de modo interessante, somando primeiro as dezenas (3 dezenas + 3 dezenas = 6 dezenas), depois as unidades (8 unidades + 8 unidades = 16 unidades), transformando 6 dezenas em 60 unidades e somando, por fim, com 16 unidades, encontrando o total 76. Com essa estratégia Eduardo elimina a necessidade de realizar uma adição com reserva. A menos da estrutura do cálculo, o procedimento realizado pelo aluno é semelhante à estratégia 1010 categorizada por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998) quando se efetua primeiro a soma das dezenas, depois a soma das unidades e, após, recompõe-se o número resultante. Eduardo, ao efetuar 74 – 18 (figura 41, algoritmo do lado direito), também utilizou como recurso o algoritmo mental (MA) (LUCANGELI et al, 2003). Entretanto, calculou 7 – 1 e 8 – 4, ao invés de procurar fazer a subtração com empréstimo. É natural que alguns alunos procurem aplicar o procedimento mais fácil, mesmo que este não respeite todas as regras operatórias. Em 7 – 1 e 8 – 4 Eduardo serviu-se de fatos numéricos de subtração (THOMPSON, 2009), já ao calcular 89 – 55 não conseguiu calcular 9 – 5 e nem 8 – 5 sem o auxílio dos dedos, realizando uma contagem (COF) (LUCANGELI et al., 2003) dos que sobram (count out) (THOMPSON, 2009). Observamos que ficava tímido em usar os dedos na nossa frente.

d) O aluno Junior

Junior acertou 121 cálculos e errou 11. Acertou todos os cálculos da sequência um. Na sequência 2, errou um cálculo da questão 4 (adição com parcelas e resultado menor ou igual a 10 – de operações em geral), registrando 3 + 6 igual a 6. Consideramos que tenha sido apenas falta de atenção já que o aluno acertou todos os demais cálculos dessa sequência. Em seus registros, afirmou que somou de cabeça, mas não detalhou o procedimento que utilizou para calcular. Também não explicou, detalhadamente, o procedimento empregado nos cálculos das sequências 3 e 4. Na sequência 4, errou os seguintes cálculos: questão 8 (operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – de dezenas e unidades com unidades – que ultrapassam a dezena) 45 + 7 = 43; 45 – 7 = 37; 67 – 9 = 57; questão 9 (operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – de dezenas e unidades com dezenas e unidades - dobros) 46 + 46 = 96; questão 10 (operações com parcelas e resultado menor ou igual a cem – de dezenas e unidades com dezenas e unidades – operações em geral) 23 + 76 = 103; 67 – 26 = 61; 74 – 18 = 41; 97 – 35 = 56. Notamos, em determinado momento, que Junior havia efetuado alguns cálculos na carteira via algoritmo convencional.

No dia 2 de agosto de 2013, conversamos com Junior sobre suas respostas, acertos, erros e mais do que isso, queríamos detalhes de seus procedimentos de cálculo mental. Mostramos a Junior e lhe perguntamos o que achava do cálculo 3 + 6 = 6, e ele afirmou: “Está errado”. Questionamos: “O que está errado?” Ele nos disse: “É nove”. Junior afirmou que já sabia de memória “utilizando fatos numéricos de adição” (THOMPSON, 1999). Na questão 5 da sequência 3, perguntamos-lhe quanto seria 6 + 11 e, prontamente, nos disse: “Dezessete”. Novamente, evidenciando o uso de fatos numéricos automatizados (THOMPSON, 1999). E ao perguntarmos: “E como você fez?”. Junior disse: “Fiz 11 + 6 e depois somei”. Junior usa a propriedade comutativa da adição, facilitando o cálculo. E à pergunta: “e 13 + 5?” Junior respondeu: “18”. “Como você fez?”. Junior falou: “Somei, não sei explicar”. Junior não consegue externar seu pensamento em alguns momentos. Reconhecemos que, com o tempo, calcular torna-se uma atividade rotineira e mecânica, fazendo com que os alunos não reflitam sobre os passos utilizados na resolução. É necessário que professores estimulem explicações e justificativas de seus alunos em todos os ramos da matemática desenvolvendo a capacidade deles de argumentação matemática (SANTOS, 1997; GODINO, 2004). Já na questão 8, Junior conseguiu nos dar mais pistas de seu raciocínio. Ao calcular 45 – 7 o aluno disse que fez 45 – 5, 40. E 40 -2, 38. Em 45 + 7 fez 45 + 5, 50. E 50 + 2 = 52. Tanto na subtração quanto na adição, sabemos que Junior procurou formar dezenas completas, usando a segunda parcela e, em seguida, adicionou (ou subtraiu) as unidades restantes às dezenas formadas, conforme estratégia de complementos em 10 ou C10 (LUCANGELI et al., 2003). Em todos esses cálculos, Junior fez "utilização de fatos numéricos de adição" e fez "cálculo com base em fatos numéricos" (THOMPSON, 1999, 2000; LUCANGELI et al., 2003). Em 46 + 46 disse que seu procedimento foi somar 40 + 40, 80. Em seguida, 6 + 6, 12 e, por fim, 80 + 12, 92, conforme estratégia 1010 categorizada por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998).

e) O aluno Vasco da Gama

O aluno Vasco da Gama acertou todos os 132 cálculos propostos na atividade de pesquisa. Vasco da Gama fez vários registros, observando padrões nos resultados dos cálculos. Para as sequências 1 e 2, disse que nenhuma resposta era superior a 10. Algumas questões possuíam apenas respostas pares, outras questões apenas respostas ímpares e outros respostas pares e ímpares juntas. Nas sequências 3 e 4, fez observações semelhantes quanto à paridade e ordem de grandeza dos resultados dos cálculos. Para calcular, mentalmente, Vasco da Gama escreveu em todas as três folhas de respostas que adicionou o número menor ao número maior, mostrando conhecimento e uso corrente da propriedade comutativa da adição. Não fez uso de contagem nos dedos nem uso de contagens mentais. Conversamos com Vasco da Gama no dia 05 de setembro de 2013. Estávamos interessados em conhecer seus procedimentos de cálculo e, em especial, as estratégias que aplicou nos cálculos da sequência 4, na questão 8 (adição e subtração com parcelas e resultado menor ou igual a cem – de dezenas e unidades com unidades – que ultrapassam a dezena); na questão 9 (adição e subtração com parcelas e resultado menor ou igual a cem – de dezenas e unidades com dezenas e unidades – dobros); e na questão 10 (adição e subtração com parcelas e resultado menor ou igual a cem – de dezenas e unidades com dezenas e unidades – operações em geral) por se tratarem de cálculos mais complexos.

Perguntamos a Vasco da Gama como havia feito 45 + 7. Vasco disse que fez 45 + 5, 50. E 50 + 2, 52. Notamos que Vasco procurou completar cinco dezenas, empregando parte da segunda parcela, conforme estratégia C10 (LUCANGELI et al., 2003). Em seguida, adicionou as duas unidades restantes às cinco dezenas formadas, o que corresponde à formação do número 52. Semelhantemente, aos cálculos da questão um, na sequência quatro. Em 39 + 7 Vasco fez rapidamente 40 + 7, 47. E de imediato, 47 – 1, 46. Utilizando a estratégia de compensação, adicionou um a 49 e retirou uma unidade no resultado 47, obtendo a resposta final 46. Continuamos a investigar os procedimentos de Vasco nos cálculos de subtração da questão 8. Em 45 – 7, Vasco disse que fez 45 – 5, 40. E 40 – 2, 38. Em 83 – 8 fez 83 – 3, 80. E 80 – 5, 75. Vasco procurou retirar todas as unidades da primeira parcela procurando formar dezenas (estratégia C10) para depois subtrair o restante (LUCANGELI et al., 2003). Essa estratégia revela o conhecimento de fatos numéricos, de composição numérica e inclusão hierárquica. Nos cálculos de dobros, perguntamos a Vasco como fez 39 + 39. Ele nos disse que fez 30 + 30, 60. 60 + 9, 69. E 69 + 9 igual a 78. Identificamos essa estratégia como sendo do tipo 10S (operou com as dezenas das duas parcelas, em seguida, somou em sequência, o resultado com as unidades e, novamente, o resultado do último cálculo com as unidades restantes), uma variante da estratégia de decomposição 1010 categorizada por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998). Vasco comentou que realizou o mesmo procedimento para os demais dobros.

Também identificamos as estratégias de Vasco nas operações em geral em relação às parcelas com dezenas e unidades (questão 10). Em 67 – 26 Vasco fez 60 – 20, 40. E 40 + 7, 47. Por fim, 47 – 6, 41. A estratégia de Vasco corresponde à estratégia 1010 na variante 10S para subtrações, categorizada por Beishuizen (1997), Klein e Beishuizen (1998). Essa estratégia, foi novamente, estabelecida por Vasco para calcular 88 – 39. O aluno fez: 80 – 30 = 50. 50 + 8 = 58 e, finalizando, fez 58 – 9 igual a 49. De modo semelhante Vasco fez 74 – 18 da seguinte maneira: 70 – 10 = 60. E 60 + 4 = 64. Ficamos, então, com 64 – 8. Vasco fez 64 – 4 igual a 60 e, por fim, 60 – 4 igual a 56. Em muitos momentos, Vasco da Gama procurou operar com dezenas inteiras (C10), subtraindo todas as unidades da primeira parcela. Em todos esses cálculos de adição e subtração Vasco fez utilização de fatos numéricos, bem como calculou com base em fatos numéricos (THOMPSON, 1999). Verificamos que Vasco da Gama também procurou utilizar seu conhecimento do sistema de numeração decimal por meio de decomposições (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995).

5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS, APRENDIZAGENS, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES DO ESTUDO

Organizamos este capítulo iniciando pelos resultados encontrados na pesquisa. Em seguida, relatamos algumas de nossas aprendizagens, enquanto professor de matemática e pesquisador iniciante em educação matemática. Por fim, expomos uma dificuldade e limitação do estudo e alguns desdobramentos da pesquisa.

5.1 – Evidências trazidas pela pesquisa

Nesta pesquisa, nos dispomos a responder ao questionamento: Quais estratégias de cálculo mental alunos da 5ª série/6º ano utilizam ao resolver cálculos de adição e subtração? Procuramos também analisar que relações existem entre o tipo de tarefa de adição e subtração envolvida e a estratégia de cálculo mental adotada para resolvê-la.

Para isso, investigamos as estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos de uma 5ª série/6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede estadual de educação, localizada no município de Serra, Espírito Santo. Iniciamos o trabalho de campo no dia 10 de maio de 2013 e encerramos nossas atividades junto à escola, alunos e professora, no dia 12 de dezembro de 2013. Visitamos ainda a escola, no dia 16 de dezembro de 2013, dia da recuperação final de todas as disciplinas escolares.

Para respondermos às nossas questões de pesquisa, planejamos, adaptamos e aplicamos quatro sequências de tarefas de cálculo mental que envolvessem fatos numéricos com os objetivos de: (i) diagnosticar fatos fundamentais de adição e subtração, com total menor ou igual a 5, com total menor ou igual a 10, com total menor ou igual a 20 e com total menor ou igual a 100; e (ii) analisar estratégias dos alunos na resolução dos cálculos mentais. Conduzimos entrevistas com os alunos participantes da pesquisa, a fim de confirmar, ou não, o uso das estratégias de cálculo mental apontadas por eles.

Para coletar os dados, servimo-nos de folhas de respostas das sequências de tarefas, gravações de alguns episódios de aulas observadas, o registro de cálculos desenvolvidos pelos alunos durante atividades dadas pela professora e atividades da pesquisa, observação e anotações em caderno de campo. Para identificação e análise das estratégias de cálculo mental usadas, espontaneamente pelos alunos sujeitos da pesquisa, empregamos a categorização de Thompson (1999) para números inferiores a 20 e usamos a categorização de Beishuizen (1997), Thompson (2000) e Lucangeli et al. (2003) para estratégias de cálculo mental com números entre 20 e 100. À medida que estudávamos os dados, fomos sentindo a necessidade de levar em consideração a influência dos afetos na aprendizagem matemática. Para isso, as categorias de análise dos estados emocionais propostas por Gómez Chácon (2003) nos ajudaram a compreender a influência deles nas respostas dos alunos.

As considerações finais do nosso estudo levaram em conta, sobretudo, a análise dos procedimentos de cálculo mental mobilizados pelos alunos na atividade diagnóstica e nas entrevistas. O quadro resumo das estratégias dos alunos (ver seção 5.1.2) também nos ajudou a identificar as principais estratégias abordadas por eles, segundo a operação (adição e subtração) e conforme o nível de dificuldade dos cálculos (sequência um, sequência dois, sequência três, sequência quatro). Para isso, olhamos os dados por dois prismas distintos para respondermos às duas questões propostas no estudo: (i) relação entre o tipo de tarefa de adição e subtração e a estratégia de cálculo mental adotada para resolvê-la; (ii) a influência do estado emocional do aluno durante a escolha da estratégia e desenvolvimento do cálculo.

5.1.1 – Síntese de nossas interpretações

Constatamos que Ester e Artur utilizaram, preferencialmente, uma combinação de duas estratégias de cálculo. A primeira trata-se do uso do algoritmo convencional executado mentalmente. Embora não a reconheçamos como uma estratégia de cálculo mental autêntica, foi identificada por Lucangeli et al. (2003) e, por nós, neste estudo. Beishuizen (2001), Serrazina e Ferreira (2005), citados por Morais (2011) evidenciam a perda de sentido numérico no uso dessa estratégia. A estratégia realizada, recorrentemente, por Ester e Artur, nos indicou a falta de flexibilidade numérica que possuíram. Contudo, em alguns momentos, o algoritmo mental foi utilizado por eles, apenas como apoio à visualização dos números, tendo operado da esquerda para a direita, semelhantemente à estratégia de decomposição numérica 1010 (dez-dez), identificada por Carraher, Carraher e Schliemann (1995), Beishuizen (1997) e Thompson (2000). Apesar de ser uma estratégia semelhante à decomposição numérica, o uso do algorimo mental, como apoio à visualização da operação, mostrou-se uma tarefa dispendiosa e de grande sobrecarga para a memória dos alunos. Foi necessário que Ester simulasse o procedimento algorítmico passo a passo na mesa, como se estivesse escrevendo o cálculo. Certamente, isso a ajudou a aliviar sua memória de trabalho. Em alguns cálculos, Artur mobilizou estratégias mais complexas como N10C (número + número de dezenas com compensação).

A segunda estratégia muito vivenciada por Ester e Artur foi a contagem nos dedos. Na sequência dois, em cálculos de subtração com números até 10, Ester utilizou a estratégia de “contagem para trás, a partir de um número” identicada por Thompson (1999). O uso dessa estratégia, por uma aluna de 5ª série/6º ano, pode indicar pouca prática sistemática de cálculo mental em anos anteriores, a fim de adquirir um repertório básico de cálculo. Artur fez uso a estratégia “contagem até”, que, apesar de também ser pouco flexível e madura, revela conhecimento da adição como operação inversa da subtração. Ester também usou, nos cálculos de subtração da seuquência três, a estratégia contagem até identificada por Thompson (1999). Nessa estratégia, Ester revela ter conhecimento da adição como operação inversa da subtração como aponta Thompson (1999). Porém, percebemos a falta de confiança da aluna em somar números maiores que um até atingir o resultado. Por exemplo, contar de dois em dois, cinco em cinco, etc. Os cálculos de subtração com empréstimo revelaram-se os mais difíceis para Ester e Artur e, nesse tipo de conta, trabalharam, exclusivamente, o algoritmo mental operado da direita para a esquerda com o uso dos dedos para contagens. Nas adições, Ester aplicou a contagem a partir do número maior (THOMPSON, 1999), o que revela seu conhecimento da propriedade comutativa da adição.

A entrevista com Douglas nos mostrou a importância de auscultar o aluno, isto é, dar ouvidos à voz dos alunos e tentar escutar e compreender de fato as suas falas, ao invés de somente ouvi-los (LORENZATO, 2006). Na atividade diagnóstica, Douglas mobilizou estratégias pouco criativas e flexíveis de cálculo mental como contagens nos dedos e algoritmo mental. No entanto, durante a entrevista, empregou estratégias complexas como cálculo com base em fatos fundamentais para números até 20 e as estratégias N10 (número + número de dezenas) e 1010 (decomposição numérica) em cálculos de adição com números entre 20 e 100. Todavia, em cálculos de subtração com números entre 20 e 100, Douglas operou, assim como Ester e Artur, o algoritmo mental (LUCANGELI et ., 2003) e a estratégia de contagem nos dedos "Contagem para trás a partir de um número" (THOMPSON, 1999).

Conforme a identificação e análise da complexidade das estratégias, esboçamos uma resposta para os questionamentos: **Quais estratégias de cálculo mental alunos da 5ª série/6º ano utilizam ao resolve cálculos de adição e subtração?** E, **que relações existem entre o tipo de tarefa de adição e subtração envolvida e a estratégia de cálculo mental adotada para resolvê-la?** Constatamos que as estratégias mudam conforme a dificuldade da operação aritmética. As subtrações revelaram ser mais difíceis para os alunos, sobretudo, as que possuíam necessidade de realização de empréstimo. Nas subtrações, os alunos recorreram, portanto, preferencialmente, às estratégias de contagem nos dedos e uso do algoritmo mental por acharem essas estratégias mais seguras, embora pouco flexíveis. Parra (1996) afirma que Fisher (1987) concluiu, em suas pesquisas, que os alunos erram muito nos cálculos com subtração e que possuem muitas dificuldades em cálculos com reserva e empréstimo (que ultrapassam a dezena). A operação de subtração é, geralmente, vista pelos alunos como mais difícil do que a operação de adição. Sendo assim, o professor deve explorar a subtração e a adição como operações inversas, deve explorar as ideias da subtração de complementar e comparar, além da ideia mais simples de retirar (GODINO, 2004). Ainda, segundo Fisher (1987), "é por um trabalho regular e sistemático, e não pelo acaso de alguns cálculos não intencionais e nãocontrolados, que os alunos alcançarão o domínio requerido" (PARRA, 1996, p. 193).

Observamos ainda que as estratégias em cálculos de adição mobilizadas por Artur e Douglas na atividade diagnóstica foram diferentes das estratégias que utilizaram na entrevista. Portanto, através de uma análise da mudança de humor dos alunos, constatamos que as estratégias de cálculo mental também mudaram de acordo com o estado emocional que tinham no momento. Quando estavam ansiosos, nervosos etc., preferiam estratégias pouco flexíveis como contagens nos dedos e algoritmo mental. Ao passo que, quando se sentiam tranquilos, usavam estratégias mais complexas como decomposição numérica e outras baseadas em decomposições, agrupamentos e compensações.

Neste estudo, detalhamos os procedimentos trabalhados por Ester, Artur e Douglas, mas temos dados de mais cinco alunos, referentes à etapa diagnóstica da pesquisa e também referentes à entrevista, conforme final do capítulo 4. Os dados dos cinco alunos (Luizza, Carlos, Eduardo, Junior e Vasco da Gama), juntamente com os dados de Ester, Artur e Douglas, nos auxiliaram a identificar os seguintes apontamentos gerais:

- A maioria dos alunos acertou os cálculos de dobro, de total igual a dez, de total igual a vinte, cálculos com somente dezenas, complementos de cem e etc. Porém, nenhum dos alunos utilizou esses conhecimentos na resolução de cálculos de operações em geral para as sequências dois, três e quatro.
- Os cálculos de subtração mostraram-se mais difíceis de serem realizados mentalmente do que os cálculos de adição.
- Os cálculos de adição e subtração que ultrapassavam a dezena (adição com reserva e subtração com empréstimo) foram mais difíceis do que os cálculos de adição e subtração que não ultrapassavam a dezena (adição sem reserva e subtração sem empréstimo). No total de 80 tarefas, 56 cálculos errados foram de subtração e 34 de adição. No total de 80 tarefas, 56 cálculos errados foram com reserva ou empréstimo e 34, sem reserva ou empréstimo.

- A contagem um a um através dos dedos foi uma estratégia aplicada por quase todos os alunos, com exceção de Vasco da Gama.
- A maioria dos alunos utilizou os algoritmos convencionais de adição e subtração mentalmente, com exceção de Vasco da Gama.
- Na questão dez da sequência quatro, sete dos oito alunos erraram o cálculo: 74 – 18. Respostas dadas: 54, 41, 61, 62, 63 e dois alunos responderam 64.
- Ao contabilizar todos os erros dos oito alunos, identificamos um total de 80 erros. De todos esses erros, 67 eram de cálculos que envolviam os algarismos 7 e 9, o que reforça o que dizem as pesquisas sobre a dificuldade em operar com números não perceptuais (KAMII, 1984).
- Em alguns momentos, houve discrepância entre a estratégia utilizada na aula e a usada na entrevista por alguns alunos. Acreditamos que isso aconteceu pela alteração do estado emocional dos alunos, durante a atividade diagnóstica (GÓMEZ CHACÓN, 2003).
- Identificamos, neste estudo, o uso da combinação das estratégias de algoritmo mental (MA) e contagens nos dedos. Essa combinação de estratégias não foi identificada na literatura a que tivemos acesso.
- Identificamos, também, o uso da estratégia de "chute" pelas alunas Ester e Luizza. Perguntamos a Luizza como fez, ou faria para calcular 45 – 7. Luizza disse que "chuta" um valor, adiciona 7 e verifica se o total é igual a 45. Perguntamos-lhe experimentou 34 e, não o número 20, por exemplo. Luizza disse: "Porque o 20 não iria passar nem perto!", o que mostra que sua escolha não é, totalmente, arbitrária. Observamos, através da resposta de Luizza, que a aluna tem noção de estimativa e julga a razoabilidade de um número enquanto possível resultado (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; LINS; GIMENEZ, 1997; SERRAZINA, 2012). Fez rapidamente, uma estimativa de que 20 + 7 é menor que 38. Contudo, a aluna não tem uma estratégia eficiente para calcular com exatidão 45 – 7, como, por exemplo, primeiro retirar todas as unidades da primeira parcela: 45 – 5 = 40 e, em seguida efetuar, 40 – 2 = 38, que seria uma estratégia de saltos em 10 (THOMPSON, 1999) ou do tipo C10 (LUCANGELI et al., 2003). Luizza fez, novamente, o cálculo e verificou que a resposta deveria ser maior do que

34, já que 34 + 7 = 41. Disse, em seguida 38, verificando que, ao acrescentar 4 ao total (41 + 4 = 45), poderia acrescentar 4 à primeira parcela e obter o resultado (34 + 4 = 38), mostrando o uso de uma estratégia do tipo compensação que se apoia no desenvolvimento de um cálculo intermediário.

- Identificamos, neste estudo, o uso de estratégia de algoritmo mental (MA) como apoio à visualização, sendo o cálculo realizado da esquerda para a direita, semelhantemente, ao uso da estratégia de decomposição 1010.
- Seis alunos utilizaram o algoritmo mental (MA) tanto na atividade diagnóstica quanto na entrevista. Desses alunos, quatro aplicaram o algoritmo mental combinado com estratégias de contagem e dois associaram a estratégia (MA) com a recuperação de fatos numéricos fundamentais de memória.
- Constatamos que as estratégias das quais se serviram durante a atividade de pesquisa e as utilizadas durante a entrevista diferiram para alguns alunos. Devido à ansiedade, na a atividade diagnóstica, alguns alunos usaram procedimentos de algoritmo mental e contagens, enquanto que, na entrevista, preferiram estratégias mais flexíveis.

5.1.2 - Relação entre o tipo de tarefa de adição e subtração e a estratégia utilizada

Este quadro apresenta um resumo das estratégias de cálculo mental dos alunos Ester, Douglas e Artur, participantes da pesquisa, segundo a operação (adição e subtração), utilizadas em cada nível de dificuldade ou ordem de grandeza dos números (sequência um, sequência dois, sequência três, sequência quatro).

Quadro 11: Resumo das estratégias de cálculo mental dos alunos participantes da pesquisa

		Sequência um total 5	**Sequência dois total 10**	**Sequência três total 20**	**Sequência quatro total 100**
Ester	*Adição*	Utilização de fatos fundamentais.	Utilização de fatos fundamentais.	Utilização de fatos fundamentais.	Algoritmo mental com “representação”.

		Sequência um total 5	Sequência dois total 10	Sequência três total 20	Sequência quatro total 100
			Contagem a partir do número maior (usou os dedos).	Contagem a partir do número maior (usou os dedos).	Contagem nos dedos.
	Subtração	-	Contagem para trás a partir de um número	Algoritmo mental com “representação” Contagem até.	Algoritmo mental com “representação”. Contagem para trás a partir de um número.
Douglas	*Adição*	Utilização de fatos fundamentais.	Utilização de fatos fundamentais.	Cálculo com base em fatos fundamentais. Uso de dobro.	N10 (número + número de dezenas) 1010 (decomposição)
	Subtração	-	Utilização de fatos fundamentais.	-	Contagem para trás, a partir de um número (nos dedos) 1010 (decomposição). Contagem para trás, a partir de um número (usou os dedos).
Artur	*Adição*	Utilização de fatos fundamentais.	Utilização de fatos fundamentais.	Contagem a partir do número maior (usou os dedos).	Semelhante a N10C (número + dezena com compensação) Algoritmo mental da esquerda para direita; 1010 (decomposição).
	Subtração	-	Contagem até (usou os dedos).	Contagem até (usou os dedos). Algoritmo mental.	Algoritmo mental. Contagem para trás, a partir de um número (usou os dedos). Saltos de 30. Contagem para trás, a partir de um número.

A partir da síntese de nossas interpretações dos dados coletados nesta pesquisa, e do quadro acima, mostrando a relação entre o tipo de tarefa de adição e subtração e a estratégia utilizada por Ester, Artur e Douglas, chegamos a alguns encaminhamentos necessários ao desenvolvimento do sentido numérico de alunos da educação básica por meio de atividades com cálculo mental, a saber: (i) trabalhar fatos numéricos fundamentais de adição e subtração via cálculo mental de maneira sistemática em sala de aula; (ii) ensinar estratégias autênticas de cálculo mental para que os alunos não se tornem dependentes de estratégias como contagens e algoritmo mental, que são mais difíceis de serem executadas com êxito; e (iii) entrevistar, individualmente, os alunos a fim de compreender e avaliar o desenvolvimento destes em tarefas de cálculo mental.

5.2 – Minhas[44] aprendizagens enquanto pesquisador e professor

O primeiro ponto que gostaria de abordar sobre minhas aprendizagens enquanto pesquisador e professor é a diferença entre ministrar aulas e pesquisar. Silva e Santos-Wagner (2009, p. 54) trazem um quadro resumo dos passos para se ministrar uma aula e os passos para se pesquisar.

Quadro 12: Comparativo entre ministrar aulas e realizar pesquisas – Silva e Santos-Wagner, 2009, p. 54

Ministrar aulas	Pesquisa
Definir o tema: introduzir novo assunto, explorar, conceituar e sistematizar, exercitar, revisar, sintetizar e avaliar. Planejar: Plano mental e/ou com registros. Ler livro didático. Rever materiais didáticos seus ou de colegas. Prever situações de ensino e aprendizagem que possam acontecer.	Planejar e registrar de modo sistemático, organizado e disciplinado todas as etapas do processo de pesquisa (elaborar diário de campo). Definir o tema de pesquisa: grande área, foco, perguntas e objetivos. Planejar por escrito. Ler livros didáticos, artigos, dissertações, teses e livros sobre pesquisas. Rever, periodicamente, as etapas anteriores ampliando, simplificando, complementando

[44] Nesta seção, volto a utilizar o singular que traduz minhas aprendizagens, durante as aulas no programa de mestrado e no desenvolvimento da pesquisa sobre cálculo mental.

Ministrar aulas	Pesquisa
Apreciar e avaliar o seu plano. **Características:** mais flexibilidade, menor sistematização, busca de uma apreciação geral.	ou reformulando. Prever e imaginar situações que podem ocorrer no campo da pesquisa. Coletar dados e informações: selecionar, organizar e analisar. Apreciar e avaliar, constantemente, as etapas. Redigir o relato final: trabalho de conclusão de curso, monografia, dissertação, tese ou relatório de pesquisa. **Características:** menor flexibilidade, maior sistematização, busca evidências que respondam a seus questionamentos.

Silva e Santos-Wagner (2009) assinalam que ministrar aulas e pesquisar exigem olhares distintos. Para as autoras, o professor se preocupa e se ocupa, principalmente, com a resolução de questões estritamente ligadas à sala de aula. Seu conhecimento para lidar com essas questões é muito mais empírico, isto é, intuitivo e advindo de sua experiência profissional. No cotidiano escolar, é comum o professor não dispor de sistematicidade na realização de registros e observação de determinado fenômeno de aprendizagem, além de, dificilmente, ter algum referencial teórico metodológico norteador de seu trabalho. Dessa forma, muito do seu próprio trabalho é perdido. De modo contrário, o pesquisador possui uma preocupação maior com o registro sistemático e detalhado de um fenômeno educacional, a fim de compreender e buscar evidências que o ajudem a responder suas indagações de pesquisa. A escrita, portanto, é uma ferramenta fundamental no trabalho de um investigador.

O primeiro passo no processo de pesquisa é a definição do tema, da grande área de investigação, foco, perguntas e objetivos. Em seguida, é importante realizar primeiras leituras sobre a temática, com a finalidade de compreender os conceitos implicados. Visitar dissertações e teses sobre o tema ajuda o pesquisador iniciante a descobrir o que tem sido pesquisado e quais discussões tem se levantado a respeito do objeto de investigação. A fase de coleta de dados constitui o próximo passo. Sentimos, na prática, com esta investigação, como o estudo exploratório auxilia o pesquisador a criar ou adaptar tarefas que coletem dados relevantes para responder suas indagações de pesquisa. Em nosso caso, esse fato mostrou-se notável. A etapa de análise exige paciência e, ao mesmo tempo, continuidade na apreciação dos dados por parte do pesquisador. É a fase quando surgem, ou não, evidências que ajudem o investigador a, pelo menos, esboçar uma resposta para seu problema de estudo. A organização dos dados em tabelas e/ou gráficos, o agrupamento e categorização desses dados, procurando semelhanças e diferenças ajudam o pesquisador a realizar suas interpretações.

Embora as ações de lecionar e pesquisar exijam procedimentos de trabalho diferentes, é fato que todo o processo da pesquisa desenvolvido me ajudou a sistematizar também o olhar de professor, no que diz respeito à apreciação crítica de livros e materiais didáticos, prever situações que podem ocorrer em sala de aula, incluindo, por exemplo, ensino-aprendizagem de cálculo mental e outros assuntos. Além disso, tornou-se forte para mim a importância do registro escrito acerca de aulas ministradas e situações de aprendizagem. É uma das ações que tenho praticado com regularidade no meu trabalho atual, em 2014, como professor da rede municipal de Vitória, Espírito Santo. Aprendi, enquanto pesquisador, como identificar uma grande área e um objeto com potencial para estudo, como elaborar questionamentos de pesquisa e vincular a esses objetivos específicos, que ajudem a respondê-los. Aprendi, a importância de seguir um planejamento organizado de todas as ações, o registro imediato das informações mais relevantes, a posterior descrição dos cenários que ocorreram e uma rápida análise ou apreciação dos dados descritos. Aprendi a identificar, na literatura científica, assuntos diretamente ligados à pergunta de pesquisa, como cálculo mental e estratégias de cálculo mental, bem como identificar temas que possuem fortes interseções com o grande tema como, por exemplo, sentido numérico. Procurei dar um pequeno panorama histórico do movimento do cálculo mental no ensino de matemática no Brasil. Visitei dissertações de mestrado defendidas no Brasil, relacionada à temática e também uma dissertação estrangeira. Procurei concepções de cálculo mental e estratégias de cálculo mental identificadas e categorizadas por diferentes autores de diferentes países. A busca por trabalhos estrangeiros justifica-se pelo fato de o ensino de cálculo mental e a pesquisa em cálculo mental serem reconhecidos como uma preocupação mundial, desde meados dos anos 1980.

Procurei fazer pausas, no decorrer da pesquisa de campo, com o objetivo de descrever os dados coletados e registrar primeiras análises, revendo, periodicamente, as etapas anteriores como sugerem Silva e Santos-Wagner (2009). No que diz respeito à escrita da dissertação, procurei utilizar duas estratégias: (i) a redação durante todas as etapas da pesquisa, desde o meu ingresso no programa de mestrado, com algumas pausas razoáveis para posterior leitura. A redação em todas as etapas me ajudou a diminuir a ansiedade em ver o progresso do texto final da pesquisa e a refletir sobre cada assunto, em estudo antes que as reflexões fugissem da minha memória. As pausas e posterior retorno de leitura e escrita me ajudaram a enxergar muitos problemas de encadeamento lógico nos argumentos. Como sugerem Fiorentini e Lorenzato (2006), é importante deixar o texto "dormir" (p. 149); (ii) a escrita final me permitiu ver a problemática de modo global e tentar criar no texto "a presença de um fio condutor percorrendo todos os capítulos" (p. 151).

Um dos impactos, causados por esta pesquisa em minha prática de sala de aula foi o de valorizar o cálculo mental e os registros que podem ser feitos de estratégias de cálculo mental. Muito mais que o registro do resultado, pude perceber, através das leituras, a importância de estimular registros variados e não convencionais em sala de aula. Também pude compreender a relação existente entre cálculo mental e o desenvolvimento do sentido numérico dos alunos. Outros aspectos relevantes trazidos por esta pesquisa para mim enquanto professor foram: a importância de auscultar o aluno (LORENZATO, 2006), isto é, dar voz aos seus pensamentos de modo a compreender, completamente, os seus procedimentos, seus acertos e seus erros e ter a sensibilidade de observar a influência, positiva ou negativa, dos diversos estados emocionais de meus alunos, enquanto realização de diferentes tarefas em sala de aula (GÓMEZ CHÁCON, 2003). Certamente, esses aspectos já estão me ajudando, e me ajudarão, a ser um professor melhor em minha prática.

5.3 – Limitações e desdobramentos do estudo

Uma limitação do nosso estudo foi o tempo, pois necessitávamos de mais aulas de intervenção didática, com foco em atividades de cálculo mental, com adição e subtração. Tivemos abertura da escola e da professora regente da turma para observação, atividade diagnóstica e também intervenção didática. Porém, como o cálculo mental não era um conteúdo curricular, e os alunos de 5ª série/6º ano enfrentavam muitas dificuldades nos tópicos desenvolvidos durante o ano, optamos por não trabalhar com cálculo mental, envolvendo adição e subtração na etapa de intervenção didática. Preferimos estimular o cálculo mental durante o trabalho com multiplicação, divisão, resolução de problemas com m.m.c. e m.d.c., etc.

Como desdobramento desta pesquisa, destacamos a produção de três artigos, sendo um já publicado (SANTOS; SANTOS-WAGNER, 2013) e dois, aguardando apreciação final dos editores. Também estamos produzindo um caderno de atividades de cálculo mental, as quais podem ser aplicadas como diagnóstico e como intervenção didática por professores do ensino fundamental.

Este estudo concentrou-se nas operações de adição e subtração, mas questões importantes podem ser investigadas, com respeito às operações de multiplicação e divisão. Por exemplo, quais estratégias de cálculo mental alunos da 5ª série/6° ano utilizam ao resolver cálculos de multiplicação e divisão? Outras questões interessantes a serem investigadas são: De que forma atividades de resolução de problemas influenciam no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental? Como as ideias das operações aritméticas influenciam na escolha das estratégias de cálculo mental usadas pelos alunos? Existe essa influência? Destarte, desses questionamentos, outras perguntas podem ser elaboradas, tendo em vista o uso de estratégias de cálculo mental em outras séries/anos escolares e, também, o uso de estratégias de cálculo mental com números inteiros negativos e até números racionais em forma decimal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERGARIA, I. S.; PONTE, J. P. Cálculo mental e calculadora. In A. P. CANAVARRO, A. P.; MOREIRA, D.; ROCHA, M. I. (Eds.), **Tecnologias e educação matemática.** Lisboa: SEM-SPCE, 2008, p. 98-109.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. 3 ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2008.

BARICCATTI, K. H. G. **As relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas.** 2010. Tese (Doutorado em educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BEISHUIZEN, M. Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In: Gravemeijer, K. P. E. e van Lieshout (Eds). **The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures.** Freundenthal Institute, 1997, p. 127-162.

BELTRAME, J. **Os programas de matemática do Colégio Pedro II:** 1837-1932. 2000. 267p. Dissertação (mestrado) - Departamento de matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

BENITES, M. C. P. **Cálculo mental nos anos iniciais do ensino fundamental:** dúvidas e expectativas. 2011. 94f. Dissertação (Mestrado em educação) - Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1997.

______. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

BUENOS AIRES. **Matemática:** Cálculo mental con números naturales. Apuntes para la enseñanza. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires / Secretaria de Educación Dirección General de Planeamiento Dirección de Currícula, 2006.

BUYS, K. Mental arithmetic. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (Ed.), **Children learn mathematics:** A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Netherlands: Sense Publishers, 2008, p. 121 – 146. (Obra original publicada em 2001).

CARRAHER, T. N. O desenvolvimento mental e o Sistema Numérico Decimal. In: CARRAHER, T. N. (org.). **Aprender pensando:** contribuições da psicologia cognitiva para a educação. 15 ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2001. (A 1ª edição foi publicada pela Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco e Universidade Federal de Pernambuco em 1983).

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. Matemática escrita versus matemática oral. In CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero.** 10 ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CARVALHO, R. Calcular de cabeça ou com a cabeça? In: **Anais do ProfMat2011.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2011, p. 1-8.

CHARLES, R.; LESTER, F. Teaching problem solving: What, why and how. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications,1982.

CORREA, J.; MOURA, M. L. S. A solução de problemas de adição e subtração por cálculo mental. **Psicologia, Reflexão e Crítica.** Puerto Alegre: Revista de la Universidad Federal do Rio Grande do Sul, v. 10, n. 001, 1997.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FAYOL, M. **Numeramento:** aquisição das competências matemáticas. São Paulo: Parábola Editorial, 2012.

FIGUEIREDO, T. M. F. Q. **Possíveis relações entre competências de cálculo mental e iniciação algébrica de alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental.** (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006, 224 p.

FONTES, C. **O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais. 2010. 220p.** Dissertação (Mestrado – Programa de pós-graduação em educação. Área de concentração: Ensino de ciências e matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

GODINO, J. D. (org.). **Didáctica de lãs matemáticas para maestros:** manual para El estudiante. Granada: Gami, S. L. Fotocopias, 2004. 461 p. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>. Acesso em: 17 ago. 2012.

GOMES, M. L. M. O cálculo mental na história da matemática escolar brasileira. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX ENEM Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa.** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

GÓMEZ CHÁCON, I. M. **Matemática emocional:** os afetos na aprendizagem matemática. Porto Alegre: Artmed, 2003.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade - 5ª série.** 5.ed. São Paulo: Atual, 2005.

KAMII, C. **A criança e o número.** Campinas: Papirus, 1ª edição, 1984.

_______. **Desvendando a aritmética:** Implicações da Teoria de Piajet. Campinas: Papirus, 2ª edição, 1995.

KLEIN, A. S.; BEISHUIZEN, M. The empty number line in dutch second grades: realistic versus gradual program design. **Journal for Research in Mathematics Education,** vol. 29, no. 4, 1998, p. 443–464.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS N. C. **Aprender com Jogos e Situações-Problema.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul, 2000. 116 p.

___________; PETTY, A. L. S.; PASSOS N. C. **Os Jogos e o Lúdico na Aprendizagem Escolar.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul, 2005. 110 p.

MCINTOSH, A.; REYS, B. J.; REYS, R. E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the Learning of Mathematics**, vol. 12, no. 3, 1992, p. 2–8.

MORAIS, C. M. S. **O cálculo mental na resolução de problemas:** um estudo no 1º ano de escolaridade. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM]. **Estimation and mental computation.** Reston, VA: Author, 1986.

NOVA ESCOLA. **Cálculo mental.** São Paulo: Editora Abril, n. 14, p. 23-34, junho 2011.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, I.; SERRAZINA, M. L. M. A reflexão e o professor como investigador. In: Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional, ed. Grupo de Trabalho sobre Investigação. Lisboa: **Associação de Professores de Matemática.** 2002, p. 29 - 42.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C.; Saiz, I (org). **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1996. p. 186-235.

PARRA, C.; Saiz, I (org). **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1996.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 1ª ed. brasileira em 1975, 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. (A obra foi publicada originalmente em inglês em 1945).

PORTUGAL. **Programa de matemática do ensino básico.** Ministério da Educação, 2007.

RIBEIRO, D.; VALÉRIO, N.; GOMES, J. T. **Cálculo mental.** Escola Superior de Educação de Lisboa. Lisboa, 2009.

ROGERS, A. Mental Computation in the Primary Classroom. In: **MAV Annual Conference,** 2009, p. 190-199.

SÃO PAULO (Cidade). **Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem para o Ensino Fundamental:** ciclo I – Matemática. São Paulo: SME / DOT, 2007. 208p.

SANTOS, D. M.; WROBEL, J. S. Jogo computacional equacione brincando no ensino de equações algébricas. In: I Colóquio de Matemática da Região Nordeste, 2011, Aracaju. **Anais do I Colóquio de Matemática da Região Nordeste.** Aracaju: UFS, 2011.

SANTOS, D. M.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Jogo soma 10: fatos fundamentais e cálculo mental. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,** v. 4, no. 2, 2013, p. 1-15.

SANTOS, V. M. P. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:** métodos alternativos. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ – Projeto Fundão, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM,** v. 53, 2008, p. 43-74.

___________________________. **Notas de aulas com a orientadora sobre Tópicos em linha de pesquisa I**. PPGE/UFES. 2012, 2013.

___________________________. **Orientações para elaboração de texto final**. PPGE/UFES. 2013, 2014.

SCHLIEMANN, A.; SANTOS, C. M.; COSTA, S. C. Da compreensão do sistema decimal à construção de algoritmos. In: ALENCAR, E. (Org.). **Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem.** 4.ed. São Paulo: Cortez, 2001, p. 97-117.

SCHLIEMANN, A. As operações concretas e a resolução de problemas de matemática In: CARRAHER, T. N. (org.). **Aprender pensando:** contribuições da psicologia cognitiva para a educação. 15. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2001. p. 51-68. (A 1ª edição foi publicada pela Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco e Universidade Federal de Pernambuco em 1983).

SERRAZINA, M. L. M. O sentido do número no 1º ciclo: uma leitura de investigação. **Boletim GEPEM.** Seropedica: Rio de Janeiro, n. 61, p. 15-28, jul./dez. 2012a.

_______________. Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista eletrônica de educação.** São Carlos, SP: UFScar, v. 6, no. 1, p. 266-283, mai. 2012b. Disponível em http://www.reveduc.ufscar.br. Acesso em: 19 de fev. de 2013.

SILVA, C. M. S.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Considerações para os iniciantes em pesquisas em educação matemática e educação do campo. In: **Metodlologia da pesquisa em educação do campo:** povos, territórios, saberes da terra, movimentos sociais, sustentabilidade. Vitória: Programa de Pós-Graduação em Educação, 2009, p. 53-64.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics teaching,** vol. 77, 1976, p. 20-26.

SOWDER, J. Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds). **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum, 1988, p. 182-197.

THOMPSON, I. Mental calculation strategies for addition and subtraction – part 1. **Mathematics in school,** vol. 28, no. 5, nov. de 1999, p. 22-25.

THOMPSON, I. Mental calculation strategies for addition and subtraction – part 2. **Mathematics in school,** vol. 29, no. 1, jan. de 2000, p. 24-26.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª edição, Porto Alegre, Artmed, 2009.

VIGOTSKI, L. S. **Psicologia pedagógica.** Porto Alegre: Artmed, 2003. (Publicado originalmente em russo em 1926).

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** 4ª ed., São Paulo: Martins Fontes, 1991. (Publicado pela primeira vez no Brasil em 1984).

_____________. **Imaginação e criação na infância.** São Paulo: Ática, 2004.

APÊNDICE A

SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO À DIREÇÃO DA ESCOLA

Daniel Moreira dos Santos, aluno de mestrado regularmente matriculado no Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, vem pelo presente solicitar a V. Sª autorização para desenvolver, nesta instituição, uma pesquisa sobre atividades matemáticas com o uso de cálculo mental. Os objetivos da pesquisa são identificar, compreender e analisar as estratégias de cálculo mental dos alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental. Informamos que o(a) professor(a) da turma será convidado(a) a participar por meio de entrevista e, se aceitar, assinará um termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Os alunos sujeitos de pesquisa levarão para os responsáveis legais um termo de Consentimento Livre e Esclarecido com as informações devidas.

Gratos pela atenção de V. Sª. Renovamos nossos votos de estima e consideração.

Atenciosamente,

Daniel Moreira dos Santos

Programa de Pós-Graduação em Educação

Universidade Federal do Espírito Santo

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) para participar, como voluntário, em uma pesquisa. Após ser esclarecido(a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é do pesquisador responsável.

Desde logo fica garantido o sigilo das informações. Em caso de recusa você não será penalizado(a) de forma alguma.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Título do Projeto: Cálculo mental no ensino fundamental

Pesquisador Responsável: Daniel Moreira dos Santos
Telefone para contato: (27) XXXX-XXXX / 9XXX-XXXX
Professora orientadora da pesquisa: Drª. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

A pesquisa tem o objetivo de analisar o desempenho e a aprendizagem dos alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental no jogo computacional Soma 10. Esta atividade foi desenvolvida pela então professora da turma Leandra Gonçalves dos Santos e seu colaborador e pesquisador responsável Daniel Moreira dos Santos em setembro de 2012. Na ocasião, fizemos registros por escrito de observação do desempenho dos alunos e os mesmos fizeram registros de suas estratégias no caderno. Ressaltamos que não há nenhum risco para os alunos participantes da pesquisa e as informações registradas são para fins de estudo. O nome de nenhum aluno participante será divulgado. Se autorizado pelos responsáveis, existe a possibilidade de publicação dos registros em livro e revista especializada da área de Educação e Matemática. Esclarecemos que não existe qualquer risco para o aluno participante da pesquisa. Portanto, solicitamos a autorização ou recusa do responsável sem que isto leve à qualquer penalidade.

- Assinatura do pesquisador:

- **CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO SUJEITO**

Eu, ____, responsável pelo aluno ____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo ____ , como sujeito. Fui devidamente informado e esclarecido pelo pesquisador _________________________________ sobre a pesquisa e os procedimentos nela envolvidos. Foi-me garantido o sigilo das informações e que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve à qualquer penalidade ou interrupção de meu acompanhamento/ assistência/tratamento.

Local e data ________________
_______/_______/_______/

Nome: _______________________________________

Assinatura do sujeito ou responsável: ____

APÊNDICE B

<u>Aula 1</u>

Nome: **Nome fictício:**

Sequência 1:

Sequência 2:

Questão 1

Questão 2

Questão 3

Questão 4

O que eu percebi de parecido ou diferente nos cálculos foi:

Para calcular mentalmente eu:

<u>Aula 2</u>

Nome: **Nome fictício:**

Sequência 3

Questão 1

Questão 2

Questão 3

Questão 4

Questão 5

O que eu percebi de parecido ou diferente nos cálculos foi:

Para calcular mentalmente eu:

Aula 3

Nome: **Nome fictício:**

Sequência 4

Questão 1

Questão 2

Questão 3

Questão 4

Questão 5

Questão 6

Questão 7

Questão 8

Questão 9

Questão 10

O que eu percebi de parecido ou diferente nos cálculos foi:

Para calcular mentalmente eu:

APÊNDICE C

NOME: ____

DATA: 18/11/2013

CIRCULE O NÚMERO QUE PARECE MAIS ADEQUADO EM CADA SITUAÇÃO.

1) Um par de tênis comum (que usamos para ir à escola) pode custar:

R$ 5,00 R$ 80,00 R$ 500,00

2) Um computador comum pode custar:

R$ 29,90 R$ 159,00 R$ 1.499,00 R$ 10.599,89

3) A altura média de um menino com 12 anos de idade pode ser:

1,50 cm 20,00 cm 0,9 m 1,50 m 2,5 m

4) O comprimento do quadro da sala de aula pode ser:

50,0 cm 1,0 m 4,0 m 30,0 m

5) Um copo comum que usamos para tomar água em casa pode conter que volume de água?

10 ml 80 ml 300 ml 1,5 litros

APÊNDICE D

Nome:____________________________________Data: __/12/2013

1) Resolva as expressões numéricas:

a. $(5^2 - 3 . 7) + (\sqrt{49} + 3 . 2) . 2 - 2^3$
b. $(5^2 - 3^2) : 4 - (1 + 2^0 + 3^0)$
c. $(5^2 - 3 . 4) . 2 + (3^2 . 2^3 + 3) : 5^2 - 10 : 5$
d. $2^4 : 8 + 1^{7474} . 0^{6000} + (2^3 - \sqrt{25})^2$
e. $(3^4 : 27)^4 : \sqrt{9} + 10^3 : 5^3 + \sqrt[4]{81}$

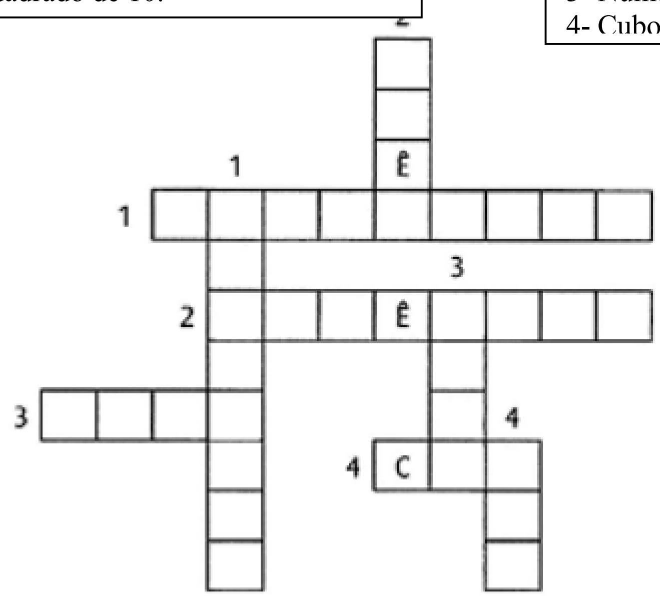
2) Calcule as operações indicadas e complete a palavra cruzada a seguir:

HORIZONTAIS

1- Dois elevado à quarta potência.
2- Multiplicação de fatores iguais.
3- Fator que se repete na potenciação.
4- Quadrado de 10.

VERTICAIS

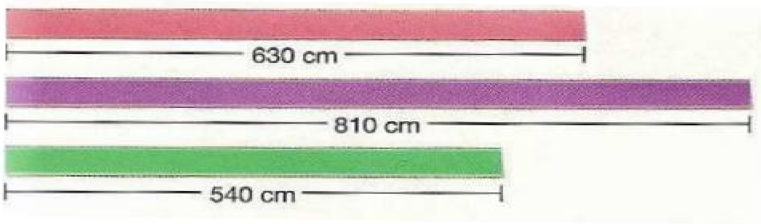
1- Número que indica quantas vezes a base é multiplicada por si mesma.
2- Número cujo quadrado é 9.
3- Número que é o quadrado de 3.
4- Cubo de 10.



3) Duas pessoas, fazendo exercícios diários, partem simultaneamente de um mesmo ponto e, andado, contornam uma pista oval que circunda um jardim. Uma dessas pessoas dá uma volta completa em 12 minutos. A outra, andando mais devagar, leva 20 minutos para completar a volta. Depois de quantos minutos essas duas pessoas voltarão a se encontrar no mesmo ponto de partida?

4) De um aeroporto partem, todos os dias, três aviões que fazem rotas internacionais. O primeiro avião faz a rota em 4 dias, o segundo em 5 dias e o terceiro, em 10 dias. Se, certo dia, os três aviões partirem simultaneamente, depois de quantos dias esses aviões esses aviões partirão novamente no mesmo dia?

5) Regina possui 3 pedaços de fita, como os apresentados abaixo, que serão utilizados na confecção de alguns enfeites. Ela pretende cortá-los em pedaços do maior tamanho possível, de forma que não haja sobras e que todos os pedaços tenham o mesmo tamanho.



a) Qual será o tamanho de cada pedaço de fita após o corte?

b) Quantos pedaços de fita serão obtidos ao todo?

6) Em uma mercearia o proprietário deseja estocar 72 garrafas de água, 48 de suco e 36 de mel em caixas com o maior número possível de garrafas, sem misturá-las e sem que sobre ou falte garrafa. Qual deve ser a quantidade de garrafas por caixa?