

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CAROLINA MARTINS DE SIQUEIRA BARBOSA

**TESTES OBSERVACIONAIS DE MODELOS
VISCOSOS NO FORMALISMO DE ECKART**

Vitória

2014

CAROLINA MARTINS DE SIQUEIRA BARBOSA

**TESTES OBSERVACIONAIS DE MODELOS
VISCOSOS NO FORMALISMO DE ECKART**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

Vitória

2014

**“TESTES OBSERVACIONAIS DE MODELOS VISCOSOS NO
FORMALISMO DE ECKART”**

CAROLINA MARTINS DE SIQUEIRA BARBOSA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César Fabris - UFES

Dr. Hermano Endlich Schneider Velten - UFES

Prof. Dr. Davi C. Rodrigues - UFES

Prof. Dr. Henrique P. Oliveira - UERJ

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família. Meus pais por todo amor e apoio, e sem eles não teria chegado aonde cheguei, ao meu irmão Rodrigo, e ao meu noivo Ruan por todo amor, carinho, apoio e compreensão.

Agradeço também ao professor Júlio Fabris pela orientação durante todo o mestrado, e também ao Hermano por todas as discussões que ajudaram no amadurecimento do trabalho. Agradeço ainda aos meus colegas Alonso e Rodrigo pelas dúvidas e conversas, e também a todos colegas da UFES que contribuíram de alguma forma para o avanço deste trabalho.

Por fim, agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

"Somos o que pensamos. Tudo o que somos surge com nossos pensamentos. Com nossos pensamentos, fazemos o nosso mundo."(Buda)

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar como o modelo viscoso para a matéria escura influencia a evolução e a formação das estruturas no Universo. A análise é realizada usando os enfoques newtoniano e neo-newtoniano para a cosmologia. Considera-se que o fluido viscoso descreve as componentes escuras do Universo, não apenas a matéria escura, mas também em algumas situações, a energia escura. O estudo é feito introduzindo na equação de estado deste fluido o termo de viscosidade volumétrica.

Abstract

The aim of the present work is to study how the viscous model influences the evolution and formation of the structure in the Universe. The analysis is performed using Newtonian and neo-Newtonian approaches to cosmology. It is considered that the viscous fluid describes the dark components of the universe, not only dark matter but also in some situations, the dark energy. The study is done by placing in the fluid equation of state the term of volumetric viscosity.

Sumário

1	Introdução	3
2	Cosmologia	6
2.1	Relatividade Geral	7
2.2	Equação de Raychadhuri e condições de energia	11
2.3	O modelo cosmológico de Friedmann	13
2.4	O modelo padrão da cosmologia	18
2.4.1	O universo em expansão	18
2.4.2	A nucleossíntese primordial	19
2.4.3	A radiação cósmica de fundo	19
2.4.4	Matéria escura	20
2.4.5	Energia Escura	21
2.5	O modelo Λ CDM	22
3	Modelos cosmológicos newtonianos e neo-newtonianos	23
3.1	Introdução	23
3.2	Equações para fluidos do modelo newtoniano	24
3.3	A cosmologia newtoniana	26
3.4	A cosmologia neo-newtoniana	29
3.5	Equações para a teoria neo-newtoniana	31
4	Formação das grandes estruturas	33
4.1	Introdução	33
4.2	As perturbações	34
4.3	Detectando as flutuações	35

4.4	Análise de perturbações no modelo newtoniano	36
4.5	Análise de perturbações no modelo neo-newtoniano	38
5	Modelos viscosos	40
5.1	Modelo newtoniano viscoso: análise perturbativa	42
5.1.1	As equações perturbadas	42
5.1.2	Aplicando a expansão de Fourier	43
5.1.3	Uma solução analítica: fixando o parâmetro ν	45
5.2	Modelo newtoniano para o caso com dois fluidos: análise perturbativa . . .	46
5.2.1	As equações do modelo	46
5.2.2	Análise perturbativa	48
5.3	Modelo neo-newtoniano viscoso: análise perturbativa	49
5.4	Modelo neo-newtoniano para o caso de dois fluidos: análise perturbativa .	51
5.4.1	As equações do modelo	51
5.4.2	Análise perturbativa	54
5.5	Modelo neo-newtoniano viscoso com três fluidos: um fluido bariônico, um viscoso e um representando a constante cosmológica	55
6	Espectro de Potência	58
6.1	A função de correlação	59
6.2	Condições iniciais do espectro de potência	61
6.3	Forma de $P(k)$	62
6.4	Método numérico	63
6.4.1	2dF Galaxy Redshift Survey	65
6.5	Análise do espectro de potência para o caso newtoniano com dois fluidos .	65
6.6	Análise do espectro de potência para o caso neo-newtoniano com dois fluidos	70
6.7	Análise do espectro de potência para o caso neo-newtoniano com três fluidos	74
6.7.1	Universo com $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.3$	74
6.7.2	Universo com $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.7$	77
7	Teste com supernovas tipo Ia	82
7.0.3	Distância luminosidade	82

7.1	O método	84
7.2	Análise de supernovas com o modelo neo-newtoniano com dois fluidos . . .	85
7.3	Análise de supernovas com o modelo neo-newtoniano com três fluidos . . .	88
7.3.1	O Universo composto por $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.3$	88
7.3.2	O Universo composto por $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.7$	91
7.4	Análise conjunta dos resultados do espectro de potência e de supernovas tipo Ia	93
8	Conclusões	97

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia é o estudo sobre o Universo, como surgiu, como evoluiu, de seu estado atual e também um estudo sobre o que acontecerá com elas. A tentativa de melhor compreensão do Universo e de nós próprios é feita desde civilizações antigas, ao tentarem melhor compreender o que estava acontecendo ao redor, na natureza. A princípio, fenômenos da natureza eram associados à fenômenos sobrenaturais, como por exemplo trovões eram associados às iras divinas, e para àqueles que viviam muito antigamente como em épocas pré-históricas, o Universo era o que interagia com eles. Com a evolução da sociedade, as perguntas e definições de Universo também foram evoluindo. Um grande pensador, cujas ideias reinaram na sociedade por séculos, foi Aristóteles. Ele possuía ideias geocêntricas de que o Universo era finito, formado pelo sistema solar, e que acabava nas estrelas fixas. Ele defendia suas ideias a partir de observações que ele mesmo fazia.

Galileu Galilei foi um dos primeiro pensadores a defender o heliocentrismo, Johannes Kepler descobriu as órbitas elípticas dos planetas, e vários outros pensadores estudaram e pensaram no cosmos, no porquê de estarmos aqui, e com várias tentativas de compreender o que está a nossa volta. Uma das grandes revoluções na física, e também na Cosmologia veio da teoria newtoniana, que inclui a teoria da gravitação universal, criada por Isaac Newton. A teoria newtoniana permitia análises experimentais, e previsão de fenômenos, servindo como uma base para a cosmologia. As contribuições de Newton foram enormes, envolvendo várias áreas da ciência. Pensando em o que aconteceria com um conjunto de matérias em um Universo finito, como apenas existiria força gravitacional atuando nesses corpos, eles apenas iriam se aglomerar, cada vez mais e mais, chegando uma hora que tudo

iria acabar em uma grande aglomeração de massa. Em vista desse pensamento, Newton fez a suposição de que o Universo é infinito, de forma a contornar esse problema. Essa foi uma das primeiras suposições cosmológicas da ciência, suposição esta que vinha de bases teóricas bem determinadas.

Por muito tempo a teoria newtoniana serviu como a grande teoria base que descrevia o Universo, até o descobrimento de que ela é uma teoria falha para certos limites de velocidade. Surgiu então a teoria relativística de Albert Einstein (1917), preenchendo as lacunas da teoria newtoniana. A teoria relativística nos deu ferramentas para investigar muito além do que podemos simplesmente tocar.

Com a teoria da Relatividade Geral foram obtidos grandes avanços no entendimento do Universo. Com observações, feitas inicialmente por Hubble (1929), descobrimos que o Universo está em expansão acelerada. A verificação desse fenômeno ocorreu em 1998 através de estudos de supernovas. A causa dessa aceleração é um mistério, e atribuiu-se a uma nova componente, chamada energia escura, a causa da expansão acelerada. Foi descoberto também que por algum motivo a velocidade de rotação das galáxias não diminui a medida que se afasta de seu centro, e outra nova componente foi criada para explicar as curvas de rotação das galáxias.

Sabe-se hoje a partir de um modelo de concordância, o modelo Λ CDM que o Universo é composto de energia escura (70%), de matéria escura (25%), de matéria bariônica (4%), de fótons e de neutrinos. Esses resultados são obtidos através de testes observacionais. Neste modelo, a energia escura é descrita pela constante cosmológica Λ e a matéria escura é considerada ser do tipo matéria escura fria, que possui pressão nula. Apesar do modelo de concordância ser compatível com todos os testes observacionais, ele ainda apresenta problemas.

Na tentativa de resolver os problemas do modelo padrão muitos modelos alternativos foram propostos. Neste trabalho estuda-se o modelo neo-newtoniano viscoso, e como fluidos reais possuem viscosidade, por considerar viscosidade no fluido que preenche o Universo torna o tratamento mais realista neste sentido. Este modelo é uma modificação do modelo newtoniano de forma a poder ser considerado casos de pressão não nula, e possui resultados compatíveis com modelos relativísticos a nível perturbativo. Ele trata as componentes escuras do Universo como uma única componente, chamada de viscosa. A

viscosidade pode resolver problemas do Lambda CDM em pequenas escalas, e ao mesmo tempo pode contribuir para a aceleração do universo. Supõe-se então que o Universo pode ser composto por dois fluidos (um representando bárions e o outro as componentes viscosas) e também considera-se um caso aprimorado de um Universo composto por três fluidos (bárions, componente viscosa e constante cosmológica).

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo 2 é discutido a base da teoria relativística, o modelo cosmológico de Friedmann, os principais fenômenos observacionais e o modelo de concordância. O terceiro e quarto capítulo estuda os modelos newtonianos e neo-newtonianos e suas análises perturbativas.

O capítulo 5 discute uma forma alternativa de tratar as componentes escuras através dos fluidos viscosos, e discute a equação de estado que será utilizada neste trabalho. O capítulo 6 faz uma análise perturbativa dos modelos newtoniano e neo-newtonianos para obter-se o espectro de potência bariônico e compará-lo com os dados da amostra 2dFGRS. No capítulo 7 faz-se uma análise da base homogênea e isotrópica do modelo neo-newtoniano a partir de análises com Supernovas tipo Ia. No capítulo 8 será feita uma análise conjunta dos resultados obtidos através dos testes com Supernovas e com espectro de potência. Por fim, o capítulo 9 apresenta as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Cosmologia

Neste capítulo será feita uma revisão nas teorias e definições mais importantes sobre a cosmologia. Serão discutidos os principais pontos da Relatividade Geral, estudando as condições especiais que aplicadas nas equações de Einstein levam às equações de Friedmann, e também na conservação da energia devido às identidades de *Bianchi*. A Relatividade Geral é de grande importância para a cosmologia, pois nos fornece as ferramentas necessárias para analisar o Universo hoje, e também o Universo primordial. Um estudo do Universo observável nos dá muitas informações também sobre o passado do Universo, pois como a luz viaja a uma velocidade constante $c \approx 3,00 \times 10^8 m/s$, a radiação que chega a nós hoje foi enviada pela fonte no passado. Uma evidência desse tipo de radiação é a Radiação Cósmica de Fundo, que foi liberada no Universo no desacoplamento matéria-radiação. Compreender fenômenos que são observados e descobrir a razão de eles terem acontecido é fundamental para compreendermos o Universo em que vivemos, e também para que possamos prever eventos.

Será apresentado também o modelo cosmológico de Friedmann, que é uma das formas mais simples das soluções da equação de Einstein quando aplicada à Cosmologia. A partir da suposição do Princípio Cosmológico, que assume um Universo homogêneo e isotrópico, e também assumindo que o Universo é composto de um fluido perfeito que permeia todo seu espaço, Friedmann resolveu a equação de Einstein e encontrou um conjunto de equações para a dinâmica do Universo. Essas equações são chamadas de equações de Friedmann, e a partir delas foi observado uma possibilidade de expansão do Universo dependente apenas da distribuição de matéria e energia.

Em 1934, *Milne* e *McCrea* conseguiram desenvolver um modelo cosmológico newtoniano a partir das equações de hidrodinâmica da teoria newtoniana de fluidos, para o caso não relativístico, considerando fluidos de pressão desprezível. Foi suposto um Universo homogêneo, isotrópico e em expansão, satisfazendo a lei de Hubble. Com essas equações newtonianas foi possível ainda chegar a mesma forma das equações de Friedmann para o caso de pressão nula.

Neste capítulo faz-se também uma breve apresentação do modelo padrão da cosmologia. Ele é um conjunto dos principais modelos de concordância que temos, ou seja, os principais modelos que melhor se adequam ao que observamos atualmente. Uma detecção muito importante foi feita por Hubble, em 1929, evidenciando um Universo acelerado. A teoria da nucleossíntese primordial é também uma das teorias bem sucedidas que entram no modelo padrão, devido às incríveis concordâncias entre observações e medidas teóricas. Outra grande predição teórica feita por Alpher e Herman em 1949 foi a predição de que os fótons liberados depois do BigBang deveriam ter uma radiação distribuída na forma característica de corpo negro. Em 1965 essa radiação foi detectada, e foi um marco do começo da cosmologia moderna. Satélites recentes determinaram que essa radiação possui uma temperatura de $2.79 \pm 0.01K$.

Será apresentado também o modelo Λ CDM, que é utilizado como base de comparação para outros modelos.

2.1 Relatividade Geral

Uma das considerações mais importantes na cosmologia é o princípio cosmológico, que afirma que o universo é homogêneo e isotrópico, o que nos permite generalizar o que observamos ao nosso alcance para todo o universo. Homogeneidade significa que em um determinado tempo t o Universo é igual em todo o espaço, isotropia significa que o Universo é o mesmo em todas as direções. Esse princípio possui suas bases no princípio copernicano, e é uma boa aproximação para a distribuição do Universo, dependendo da escala que se deseja trabalhar. Mapeamentos de galáxias e também a alta isotropia da radiação cósmica de fundo (CMB) indicam que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas [1], aproximadamente a partir de escalas de 100 Mpc, sendo que o universo

observável possui um raio de aproximadamente 3000 Mpc. Em escalas menores que 100 Mpc existem muitas inomogeneidades, como galáxias e aglomerados de galáxias, de forma que o princípio cosmológico se torna uma aproximação ruim para tais escalas. Modelos inflacionários sugerem que em escalas muito maiores que nosso universo observável o universo volta a ser altamente inomogêneo [2].

A teoria da gravitação padrão utilizada é a teoria da Relatividade Geral, descrita pela equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

sendo $R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\rho\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\rho$ o tensor de Ricci, e $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ o símbolo de Christoffel dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\kappa} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}). \quad (2.2)$$

O termo $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci, também conhecido como escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento, que para um fluido ideal assume a forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde u_μ é o campo de velocidades e $g_{\mu\nu}$ é a métrica. Está sendo considerado a velocidade da luz $c = 1$. A equação (2.3) expressa que qualquer fonte de energia contribui para os efeitos gravitacionais. Diferentemente da teoria newtoniana, na teoria relativística não somente a matéria, mas também a pressão contribui gravitacionalmente. Tomando o traço da equação (2.1) encontramos $R = -8\pi GT$, e a equação de Einstein pode ser reescrita da forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (2.4)$$

O tensor de Ricci e o escalar de curvatura surgem da contração do tensor de Riemann, definido como

$$R_{\mu\nu\theta}^\beta = \partial_\nu \Gamma_{\mu\theta}^\beta - \partial_\theta \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\mu\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^\beta, \quad (2.5)$$

que satisfaz as seguintes identidades geométricas

$$\nabla_\alpha R_{\beta\mu\nu\theta} + \nabla_\theta R_{\beta\mu\alpha\nu} + \nabla_\nu R_{\beta\mu\theta\alpha} = 0, \quad (2.6)$$

que são chamadas de identidades de Bianchi. Contraindo a equação acima com a métrica $g^{\nu\beta}$ e utilizando propriedades de simetria do tensor de Riemann, obtêm-se:

$$R_{\mu\theta;\alpha} - R_{\mu\alpha;\theta} + R_{\mu\theta\alpha;\nu}^\nu = 0. \quad (2.7)$$

Contraindo novamente com a métrica $g^{\mu\theta}$ e usando a propriedade de que a derivada covariante da métrica é nula, é obtida a seguinte equação:

$$(R_{\alpha\theta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\theta}R)_{;\alpha} = 0. \quad (2.8)$$

Observe que o termo dentro do parênteses é a equação de Einstein (2.1). Portanto, o tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ satisfaz as identidades de Bianchi contraídas

$$\vec{\nabla}_\nu G_{\mu\nu} \equiv 0. \quad (2.9)$$

As identidades de Bianchi (2.6) levam à conservação do tensor momento energia, que é escrita como:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (2.10)$$

A métrica pode ser escrita através do deslocamento infinitesimal, que de forma geral é escrito como,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.11)$$

sendo $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. A métrica que descreve um espaço homogêneo e isotrópico é denominada de métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), onde o deslocamento infinitesimal assume a forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right] \\ &= a^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo $a(t)$ o fator de escala adimensional do universo num tempo t . O fator de escala nos diz como o universo se expande, e é definido como sendo igual a razão entre o fator

de escala dimensional do universo (que possui dimensão de comprimento) pelo fator de escala do universo calculado hoje. A coordenada t representa o tempo cósmico (ou tempo próprio), e na segunda equação introduzimos o termo η , que é o tempo conforme definido como $dt = a(\eta)d\eta$. As coordenadas r, θ, φ são coordenadas tridimensionais comóveis e k é o fator que está relacionado à curvatura do espaço-tempo e pode assumir os valores 1, 0 e -1. Para $k = 0$ a curvatura do universo é nula, portanto aplicá-lo na métrica FLRW representa a geometria de um universo plano. A geometria de uma hipersfera é indicada por $k = 1$ e indica um universo fechado, e $k = -1$ indica um universo aberto com curvatura negativa. Como as observações indicam que o universo é plano, na parte principal deste trabalho será utilizada a métrica de FRW para um espaço-tempo plano,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)] \quad (2.13)$$

Também pode ser dito que esta métrica possui simetria máxima.

Quando se considera o menor caminho entre dois pontos, no espaço plano é conhecido que tal caminho é uma reta, mas em espaços curvos tal caminho é chamado de geodésica. Uma geodésica é definida como uma curva Σ em que vetores tangentes em diferentes pontos são paralelos, além de ser o menor caminho entre dois pontos. Nessa curva, um tensor tangente T^α , definido como

$$T^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (2.14)$$

que é o vetor velocidade, e nessa curva ele satisfaz

$$T^\alpha \partial_\alpha T^\beta = 0. \quad (2.15)$$

Essa é a equação de transporte paralelo, e uma parametrização que satisfaz a equação (2.15) é chamada de parametrização afim. Agora considerando um sistema de coordenadas, a geodésica é mapeada em uma curva $x^\mu(t)$ em \mathfrak{R}^n , e as componentes T^μ de T^α nessas coordenadas satisfazem a seguinte equação:

$$\frac{dT^\mu}{dt} + \Sigma_{\sigma,\nu} \Gamma_{\sigma\nu}^\mu T^\sigma T^\nu = 0, \quad (2.16)$$

onde $\nabla_\alpha T^\beta = \partial_\alpha T^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta T^\gamma$. Utilizando a forma do tensor tangente (2.14) possibilita escrever a equação (2.16) como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Sigma_{\sigma,\nu} \Gamma_{\sigma,\nu}^\mu \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (2.17)$$

A equação acima é a equação da geodésica nesse sistema de coordenadas.

Em uma curva tipo tempo, os vetores tangentes são tipo tempo para todo o espaço-tempo. Se a curva tipo tempo é uma geodésica, ela é chamada de geodésica tipo tempo. De maneira similar são caracterizadas as geodésicas tipo espaço. Geodésicas tipo tempo são caminhos que podem ser utilizados por partículas ou corpos submetidos à ação da gravidade. Pode-se definir o cone de luz, que representa passado, futuro e o caminho percorrido pela luz separando eventos causais de não causais. O futuro e o passado que ficam dentro do cone de luz são regiões onde se podem alcançar por geodésicas tipo tempo. Já regiões fora do cone de luz, que não tem relação causal com eventos internos ao cone, são possíveis de ser alcançadas por geodésicas tipo espaço [3]. Para um aprofundamento da teoria da Relatividade Geral a referência [4] pode ser consultada.

2.2 Equação de Raychadhuri e condições de energia

Um fluido possui várias propriedades, como no caso de efeitos de forças internas que podem ser quantificados pela pressão, e para melhor descrição de sua dinâmica é necessário levar essas propriedades em conta. Considerando uma geodésica tipo tempo parametrizada pelo tempo próprio τ , será estudado o campo de velocidades u_α de um fluido, examinando sua derivada covariante que, por ser um tensor de segunda ordem, pode ser escrita como uma combinação de sua parte simétrica de traço nulo $\sigma_{\alpha\beta}$, sua parte anti-simétrica $\omega_{\alpha\beta}$ e a parte com traço Θ

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}) - \frac{1}{n-1}h_{\alpha\beta}\Theta, \quad (2.18)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha}), \quad (2.19)$$

$$\Theta = u_{;\alpha}^{\alpha}, \quad (2.20)$$

onde $\sigma_{\alpha\beta}$ representa o cisalhamento do fluido, $\omega_{\alpha\beta}$ é sua parte rotacional e Θ a expansão infinitesimal das vizinhanças da geodésica, sendo cada componente invariante. Ainda, $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta}$ é um tensor simétrico chamado de tensor projeção, que projeta um tensor no subespaço do espaço tangente perpendicular ao campo de velocidades e n é a dimensão do espaço-tempo. Uma forma de analisar a atuação de cada um desses efeitos causam no fluido é pensando em uma esfera de fluido. O efeito de expansão faria a esfera aumentar de tamanho mas mantendo sua forma, o efeito de rotação a faria girar, e o cisalhamento causaria uma mudança em sua forma mas mantendo seu volume.

Definindo a quantidade $B_{\alpha\beta} = u_{\alpha;\beta}$, temos que $u^{\gamma}B_{\alpha\beta;\gamma} = -B_{\beta}^{\gamma}B_{\alpha\gamma} + R_{\gamma\beta\alpha}^{\delta}u^{\gamma}u^{\delta}$ e tomando o traço dessa igualdade obtemos

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^2 + \omega^2 - R_{\gamma\delta}u^{\gamma}u^{\delta}. \quad (2.21)$$

Essa equação é conhecida como a equação de Raychaudhuri, que descreve a cinemática dos fluidos. Raychaudhuri desenvolveu essa equação tentando encontrar soluções não estáticas para a equação de Einstein, de forma a descobrir se era possível contornar o problema da singularidade inicial da teoria relativística. Ele não considerou o princípio cosmológico, por isso teve que incluir os efeitos de $\sigma_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}$ e Θ [4].

Observe agora o último termo ao lado direito da igualdade da equação (2.21). Utilizando (2.4) esse termo pode ser escrito como

$$R_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta} = 8\pi(T_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta} - \frac{1}{2}T). \quad (2.22)$$

Esse termo representa a densidade de energia, e geralmente considera-se que a densidade de energia é positiva

$$T_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} \geq 0. \quad (2.23)$$

Essa condição é conhecida como a condição fraca de energia, e de forma equivalente é possível escrever $\rho \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$. Esta última condição também expressa que quando a matéria expande, sua densidade decresce ao invés de aumentar.

Também é possível considerar que $T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ não será tão negativo ao ponto de tornar todo o lado direito da equação(2.22) negativo, de forma que

$$T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geq \frac{1}{2}T, \quad (2.24)$$

e essa condição é conhecida como a condição forte de energia e é a condição para convergência de geodésicas. A condição de energia forte também pode ser escrita como $\rho+3p \geq 0$ e $\rho+p \geq 0$ [4], [5]. Ainda, a condição de energia forte nos diz que não se pode ultrapassar a velocidade da luz, e está associada à convergência de geodésicas.

2.3 O modelo cosmológico de Friedmann

Em 1922 o matemático russo Alexander Alexandrovich Friedmann desenvolveu um modelo cosmológico que assume que o universo é homogêneo, isotrópico e possui simetria esférica. Esse foi o primeiro modelo que considerava um universo não estático, observando que esse resultado foi obtido antes mesmo das observações de Hubble que evidenciavam um universo em expansão. Esse modelo também foi descoberto paralelamente por George Lemaître, que encontrou o mesmo resultado de Friedmann, deixando o mérito do trabalho dividido entre os dois. A métrica utilizada é a FLRW que está escrita na equação (2.12), que satisfaz o Princípio Cosmológico. Friedmann aplicou essa métrica às equações de Einstein utilizando o tensor momento-energia para um fluido perfeito, obtendo a seguinte componente para a parte puramente temporal (a componente 0-0)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.25)$$

e a componente puramente espacial (a componente i-i) obtida foi:

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G\rho. \quad (2.26)$$

Combinadas, as equações (2.25) e (2.26) resultam em

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.27)$$

que é uma forma da equação de Raychadhuri. Esta equação nos dá uma expressão para a aceleração do universo, que depende tanto da densidade de matéria ρ quanto da pressão p . Friedmann observou então uma possibilidade de expansão dependente apenas de sua distribuição de matéria e energia.

Ainda, das identidades de Bianchi aplicadas na equação de Einstein, temos uma grandeza conservada, expressa na forma

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.28)$$

e ao desenvolver os termos da equação acima, para a componente $T^{0\nu}{}_{;\nu} = 0$ obtem-se

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.29)$$

que é a equação relativista da continuidade. Para o caso de o tensor energia momento $T^{\mu\nu}$ ser constituído pela combinação de vários fluidos que não interagem entre si e interagem apenas gravitacionalmente, então a equação da continuidade é válida para cada fluido independentemente. Podemos escrevê-la então como,

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + p_i) = 0, \quad (2.30)$$

sendo que o índice i indica cada fluido que compõe o Universo. A densidade total pode, então, ser escrita da forma $\rho = \Sigma\rho_i$.

A combinação das equações (2.25), (2.26) e (2.29) descrevem o modelo cosmológico de Friedmann. Para analisar soluções da equação de Friedmann é conveniente escrever as equações da dinâmica do sistema em termos do tempo conforme. Como foi mencionado antes, $dt = a(\eta)d\eta$, e aplicando isso na equação (2.25)

$$\frac{a'^2}{a^4} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (2.31)$$

onde a linha nas variáveis indica derivada em relação ao tempo conforme. A equação (2.27) fica na forma:

$$\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.32)$$

Da equação de Friedmann da aceleração (2.26) observamos que a dinâmica do universo depende não somente da geometria do universo, mas também de sua equação de estado. A equação de estado irá depender da composição do fluido cósmico. Considerando uma equação de estado mais geral, vamos supor que a pressão p dependa diretamente da densidade de matéria ρ da forma

$$p = \omega\rho, \quad (2.33)$$

onde ω é uma constante que possui dimensão de $[velocidade^2]$. Esses tipos de fluidos fazem parte de uma subclasse de fluidos chamados de barotrópicos (que de forma geral possui equação de estado $p = p(\rho)$). O valor de ω é limitado pela velocidade do som

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}_{isentropia} = \omega = v_s^2, \quad (2.34)$$

de forma que $0 < \omega < 1$, já que a velocidade da luz ($c = 1$) não pode ser ultrapassada, e o limite inferior é definido pela matéria não interagente com equação de estado $p = 0$. Para fluidos não-barotrópicos esses limites devem ser recalculados.

A equação da continuidade relativista, em função do tempo conforme, é

$$\rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.35)$$

e resolvendo para a equação de estado obtêm-se $\rho = \frac{\rho_0}{a^3(1+\omega)}$. Aplicando o resultado obtido a partir da equação da continuidade na equação (2.31)

$$\frac{a'^2}{a^2} + k = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{1}{a^{(1+3\omega)}}, \quad (2.36)$$

multiplicando os dois lados da equação por $a^{(\frac{1+3\omega}{2})}$:

$$a^{\frac{(-1+3\omega)}{2}} a' = \sqrt{8\pi G\rho_0} \sqrt{1 - k a^{(1+3\omega)}}, \quad (2.37)$$

que pode ser resolvida para cada caso de k . Para o caso mais simples $k = 0$:

$$a(\eta) = \left[\frac{1+3\omega}{2} \sqrt{8\pi G\rho_0\eta + c_{int}} \right]^{\frac{2}{(1+3\omega)}}, \quad (2.38)$$

sendo que c_{int} é uma constante de integração. Para o caso de um universo plano o fator de escala depende diretamente do tempo conforme η . Para o caso $k = 1$, a solução para a equação diferencial do fator de escala é:

$$a(\eta) = \text{sen}^{\frac{2}{(1+3\omega)}} \left[\frac{(1+3\omega)}{2} \sqrt{8\pi G \rho_0 \eta} + c_{int} \right]. \quad (2.39)$$

Portanto em um universo fechado o fator de escala depende de η na forma de uma senóide. Finalmente, para $k = -1$

$$a(\eta) = \text{senh}^{\frac{2}{(1+3\omega)}} \left[\frac{1+3\omega}{2} \sqrt{8\pi G \rho_0 \eta} + c_{int} \right]. \quad (2.40)$$

As equações gerais acima podem ser particularizadas para casos de maior interesse na descrição da evolução do Universo. Um tipo de energia que possui equação de estado $\omega = 0$ nas equações de Friedmann é a matéria bariônica, matéria escura, partículas fundamentais, entre outros. Aglomerados de partículas de $\omega = 0$, como buracos negros, também atuam de forma a ter equação de estado definida por $\omega = 0$. Essas partículas são mantidas juntas por forças fundamentais, como a forças nucleares fortes ou gravidade, por exemplo. Esse tipo de energia é de interesse pois sabemos que nosso universo possui matéria não relativística. O fluido que descreve essa matéria é chamado de poeira e a equação da conservação da matéria, que está relacionada à divergência do tensor momento energia, implica que a dependência da densidade de energia com o fator de escala é $\rho \approx \frac{\rho_0}{a^3}$.

Outro caso de grande interesse a ser considerado são tipos de energia que evoluem como $\omega = 1/3$, que representam a radiação do nosso universo. O exemplo mais comum de radiação são as eletromagnéticas, porém existem outros tipos de radiação, como a gravitacional. A princípio, partículas caracterizadas por $\omega = 0$ podem ser aceleradas até próximo da velocidade da luz, atuando portanto como $\omega = 1/3$. Para ondas gravitacionais, a pressão gravitacional é positiva, fazendo com que a radiação gravite de forma mais forte do que matéria com $\omega = 0$ com mesma densidade média de energia, e por esse motivo, durante a época em que o Universo foi dominado por radiação, a expansão era mais lenta do que a expansão de um Universo dominado por matéria. O fluido que descreve o Universo dominado por radiação possui dependência do fator de escala com o tempo cósmico da forma $a \approx t^{1/2}$ [7].

O caso em que a dependência do tipo de energia é da forma $\omega = -1$ representa a componente Λ chamada de constante cosmológica. Esse fator é introduzido na tentativa de explicar a expansão acelerada do Universo, pois como o termo gravitacional é do tipo atrativo, precisa-se então de um termo que atue de forma contrária, para se explicar a expansão do Universo. A constante cosmológica possui pressão negativa, de forma a poder agir repulsivamente, acelerando a expansão do universo, violando a condição de energia forte, apresentada na seção 2.2. A dependência do fator de escala com o tempo cósmico, obtida a partir da equação de Friedmann, é da forma $a = a_0 e^{H_0 t}$.

Vale lembrar que a constante cosmológica Λ foi introduzida em meados de 1915 por Albert Einstein na tentativa de manter sua crença de um universo estático e explicar como um universo preenchido por matéria, que é o observado, consegue ser estático. O que Einstein fez foi basicamente adicionar o Λ às suas equações de campo da forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

Observe que ao ser colocado no lado esquerdo da igualdade, o termo Λ pode ser considerado como uma contribuição geométrica, porém colocada à direita da igualdade, Λ atua como uma contribuição de energia. Adicionando então o termo Λ é o mesmo que adicionar uma contribuição na densidade de energia na forma $\Lambda = 8\pi G\rho_L$. Nas equações de Friedmann, a inclusão do termo Λ aparece na forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \\ &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{8\pi G}{3}\rho_L. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Um possível candidato para a constante cosmológica é a energia do vácuo. [6]

Existem outros valores possíveis de ω , como o caso $w < -1$ que caracteriza energia fantasma, uma situação onde a velocidade do som possui é maior que a velocidade da luz em magnitude; $\omega = -1/3$ que caracteriza as cordas cósmicas.

2.4 O modelo padrão da cosmologia

Graças à teoria da relatividade geral foi possível tornar teorias cosmológicas testáveis através de várias ferramentas, fenômenos explicados e também fenômenos previstos, como Radiação Cós mica de Fundo e o limite da velocidade da luz. Várias observações também puderam ser feitas, como a expansão acelerada do universo através de medidas do *redshift*, através do aprimoramento dos aparatos de medição. Vários modelos são compatíveis com os dados observados do universo, e o conjunto dos modelos bem sucedidas formam o modelo cosmológico padrão, ou mais conhecido como Big Bang. De acordo com o modelo padrão a evolução do Universo possui fases principais: a inflação, a fase de dominação da radiação, a fase de dominação da matéria e a fase acelerada, que estamos atualmente, e este trabalho irá focar apenas na fase de dominação da matéria. O cenário do Big Bang é o de um universo homogêneo e isotrópico evoluindo de acordo com o modelo de Friedmann obtido através da relatividade geral e cujas propriedades cinemáticas são compatíveis com o que observamos no nosso universo.

2.4.1 O universo em expansão

Se o universo está se expandindo, então as galáxias estão em média se afastando umas das outras, portanto devemos observar galáxias se afastando de nós. Considerando então que o efeito Doppler pode ser aplicado a *redshifts* baixos na forma $z = \frac{v}{c}$ e levando ainda em conta a equação para o *redshift* z

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emt}}, \quad (2.43)$$

sendo λ_{obs} o comprimento de onda observado e λ_{emt} o comprimento de onda emitido pela fonte. Então pode ser feito um gráfico da velocidade de galáxias pela distância. Esse diagrama foi inicialmente feito por Hubble em 1929 e mostra que a velocidade das galáxias tende a aumentar com a distância e que galáxias distantes estão se afastando de nós, que é o esperado de um universo em expansão.

A evidência mais direta que temos do universo em expansão é o diagrama de Hubble, que continua sendo feito atualmente utilizando os mesmos princípios, porém com maior

precisão. Medir distâncias em escalas cosmológicas é um processo complicado, e devido a essa dificuldade normalmente usa-se objetos chamados velas padrão, que são objetos com características específicas que conhecemos. Observar variações nas características observadas indica diferenças na distância. Um exemplo de velas padrão são supernovas tipo IA, que possuem linhas de emissão características e alta intensidade luminosa, permitindo que possamos medir com maior precisão as distâncias e também tornando possível medir em distâncias maiores. Quanto mais o espectro da supernova observada estiver desviado das linhas espectrais conhecidas, mais distante estará o objeto [8].

2.4.2 A nucleossíntese primordial

Uma das evidências do Big Bang vem da chamada nucleossíntese primordial, que nos diz qual as abundâncias dos elementos leves primordiais: ${}^4\text{He}$, D , ${}^3\text{He}$ e ${}^7\text{Li}$. Esses elementos foram produzidos nos primeiros 20min do Universo, quando o Universo era muito quente e denso. Sabendo então as condições iniciais do Universo primordial, podemos descobrir as abundâncias dos elementos nessa época, nos dando também a densidade bariônica do Universo. A nucleossíntese é considerada uma fase bem conhecida pois os processos físicos que ocorriam são similares aos da nucleossíntese estelar, as seções de choque também são bem conhecidas e as previsões teóricas são compatíveis com os dados observacionais. Com a nucleossíntese primordial pôde-se estimar a densidade bariônica do Universo, $\rho_B = (1 - 3) \times 10^{-31} \text{ g/cm}^3$ [9].

2.4.3 A radiação cósmica de fundo

Em uma época do Universo onde suas densidade e temperatura média eram muito grandes, matéria e radiação estavam acopladas formando um plasma. A expansão violenta do Universo resultou no resfriamento desse plasma, permitindo que os fótons se desacoplassem da matéria, que ocorreu na época da dominação da matéria. Portanto a radiação que chega hoje até nós nos dá uma visão de quando o universo tinha cerca de 300 mil anos após o Big Bang.

Detectada por acaso por Arno Penzias e Robert Wilson em 1964, a radiação cósmica de fundo (CMB) foi uma das maiores comprovações teóricas da cosmologia. Ela possui o

espectro de radiação de corpo negro, que indica que a radiação foi emitida em um época em que a radiação estava em equilíbrio termodinâmico com a matéria, e possui uma temperatura de aproximadamente 2,726K . Esse fundo de radiação é muito uniforme, ou seja, qualquer observador medirá a mesma temperatura. Dados recentes obtidos pelo satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) detecta anisotropias na CMB que são da ordem de $\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5}$. Vemos então que o Universo primordial era muito homogêneo, sendo também uma evidência de que o Universo é homogêneo em grandes escalas [1].

2.4.4 Matéria escura

Durante estudos de galáxias do aglomerado de Coma, em meados de 1930 o astrônomo Fritz Zwicky detectou estranhos comportamento da velocidade de rotação de galáxias, observando que as velocidades de galáxias individuais eram muito altas para a quantidade de matéria contida nas galáxias, necessitando portanto de grandes quantidades de matéria para explicar essas velocidades. Até os anos de 1960 acreditava-se que em galáxias espirais a velocidade de rotação de seus discos aumentava de acordo com que se afasta do centro da galáxia crescendo de forma linear, até chegar em regiões da galáxia em que praticamente não tem massa, e a partir dessas regiões a velocidade deveria cair tendendo ao limite kepleriano onde a velocidade tenderia à forma $v^2(r) = \frac{GM(r)}{r}$. Porém, em meados de 1960 através de equipamentos mais aprimorados, os dados observacionais mostravam que galáxias possuíam comportamento contrário ao esperado. As curvas de rotação continuavam crescendo, mesmo quando não tinha componente luminosa. Na maior parte das galáxias espirais a curva de rotação se mantém constante em grande parte da região da galáxia, até mesmo além da região óptica, necessitando de grandes quantidades de massa para explicar tais curvas. À essa massa que parecia estava faltando deu-se o nome de matéria escura (**ME**).

O nome **matéria escura** veio do fato de não conseguir detectá-la através de emissões de ondas eletromagnéticas, mesmo tendo fortes evidências de sua presença. Sabe-se que essa matéria interage gravitacionalmente com matéria bariônica e possui pressão nula, porém ainda não foi detectado nenhum tipo de radiação, nem por emissão, nem por absorção ou espalhamento de radiação, que sugere que essa matéria tenha origem não-

bariônica. Essa hipótese é suportada pela dificuldade que modelos bariônicos tem de formar estruturas, necessitando de algo adicional. A forma de detecção da ME é por efeitos gravitacionais em fontes luminosas, investigando o comportamento dos bárions [1]. Ela tem a característica de se aglomerar devido a efeitos de instabilidade gravitacional, e portanto tornou possível a formação de estruturas no Universo. A densidade medida de matéria escura no Universo atual é cerca de 25% de sua densidade total, enquanto o da matéria bariônica é cerca de apenas 4%. Uma propriedade da ME é que ela forma aglomerados (resolvendo assim o problema das curvas de rotação das galáxias). A ME é suposta possuir dois tipos: tipo quente ou fria. Partículas de ME quente são consideradas terem sido desacopladas do fluido matéria/radiação quando eles eram relativísticos e possuíam grande velocidade de dispersão, porém elas foram praticamente descartadas por indicarem excesso de aglomeração. Já partículas de ME fria possuem velocidades de dispersão muito baixas e desacoplam do resto de matéria/radiação quando eles já são não relativísticos [10]. Uma suposição mais recente é a matéria escura morna, que possui propriedades intermediárias às matérias escuras quente e fria.

2.4.5 Energia Escura

A partir de dados de supernovas tipo Ia foi detectado que o universo está em expansão acelerada, porém a razão dessa aceleração é um mistério, já que a matéria bariônica interage de forma gravitacional que é atrativa. A fonte que causaria essa aceleração foi chamada de energia escura (**EE**). Diferentemente da **ME**, a **EE** possui pressão negativa, de forma a se contrapor à atração gravitacional e fazer o universo expandir. Observações de supernovas indicam que o Universo é composto de aproximadamente 70% de **EE**. De acordo com (2.27), pelo fluido que representa o Universo possuir uma aceleração positiva, então grande parte da densidade de energia do Universo deve satisfazer a equação

$$\rho + 3p < 0. \tag{2.44}$$

Mesmo após anos de estudos e procura, a matéria escura ainda não foi detectada e não se sabe sobre suas origens nem sobre sua composição, e não sabemos nem de possíveis candidatos à matéria escura.

2.5 O modelo Λ CDM

O modelo Λ CDM considera que o Universo é composto basicamente de matéria, energia escura, neutrinos e fótons. A matéria escura considerada nesse modelo é a matéria escura fria, cuja equação de estado é dada por $\omega = 0$, afetando a aceleração do Universo da mesma forma que faria a matéria bariônica. O termo de constante cosmológica, possuindo $\omega = -1$, é o termo que representa a energia escura e gera a aceleração do Universo.

Medidas indicam que Λ contribui atualmente com 70% para a energia do universo, a matéria escura contribui com aproximadamente 25%, a matéria bariônica com aproximadamente 5%. Isso pode ser expresso através de variáveis chamadas parâmetros de densidade,

$$\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1. \quad (2.45)$$

Os parâmetros Ω_Λ e Ω_m são determinados sendo,

$$\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3H_0^2} \quad \Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}, \quad (2.46)$$

onde ρ_Λ e ρ_m representam as densidades de energia escura e de matéria (matéria escura e bariônica), respectivamente. Esse cenário é chamado de modelo Λ CDM, que atribui à Λ a expansão do universo. A vantagem desse modelo é sua simplicidade, e possui soluções analíticas. A boa aproximação desse modelo se deve ao fato de estarmos em uma fase do Universo que está dominada pela energia escura. Este é o modelo atual mais compatível com as observações feitas a partir de Supernova Ia, anisotropias na CMB, formação de grandes estruturas, oscilações acústicas bariônicas (BAO) e lentes fracas. Ele é chamado de modelo de concordância por satisfazer simultaneamente todos os testes observacionais conhecidos.

Mesmo sendo um modelo de concordância, esse é um modelo aproximativo, e que também possui problemas, o que leva à procura de um novo modelo que sirva ao cenário atual. Tentativas de modelos alternativos ao Λ CDM são modificações na teoria da gravitação, modificando a ação de Einstein Hilbert, chamadas teorias $f(R)$ [11].

Capítulo 3

Modelos cosmológicos newtonianos e neo-newtonianos

3.1 Introdução

A teoria newtoniana foi, durante muito tempo, a principal base para o estudo de movimento de corpos. Porém, ao ficar evidente problemas que essa teoria possuía em limites de altas velocidades, começou a ser necessário uma nova teoria onde esses problemas seriam resolvidos. Com o surgimento da teoria da Relatividade Especial (1905) e, depois, a teoria da Relatividade Geral (1915), não somente os problemas da teoria newtoniana foram resolvidos, como também vários fenômenos foram melhor compreendidos, e até mesmo vários fenômenos foram previstos. A RG permitiu, portanto, um grande avanço na cosmologia, porém levando aos modelos cosmológicos a complexidade matemática atribuída à teoria da Relatividade.

Nesse contexto de desenvolvimento das teorias relativísticas, os trabalhos de E. A. Milne [12] e W. H. McCrea [13] em meados do século 30 mostraram possível uma teoria cosmológica com o formalismo newtoniano, obtendo os principais resultados da teoria cosmológica relativística. Na formulação apresentada, a expansão do Universo, que a pouco tinha sido observada por Hubble (1929), era atribuída ao movimento das partículas, mantendo uma geometria plana. Em um novo trabalho, Milne e McCrea mostraram que, através da teoria newtoniana era possível obter as equações de Friedmann. Esse modelo passou a ser chamado de cosmologia newtoniana, e é válido para casos onde a

pressão do sistema pode ser desprezada, de forma que efeitos relativísticos não são consideráveis. Possuindo então uma simplicidade matemática em comparação com o modelo relativístico, prevendo os principais resultados da teoria da Relatividade Geral, quando se trabalha em um universo homogêneo para o caso de pressão nula e em escalas locais, a cosmologia newtoniana é uma excelente primeira aproximação para modelagem cosmológica, para posteriormente partir para uma abordagem relativística, e é também suficiente para entender eventos que acontecem dentro do horizonte de Hubble.

O modelo cosmológico newtoniano assume verdadeiro o Princípio Cosmológico, e como é observado que as inhomogeneidades na distribuição de matéria observadas apenas são relevantes em pequenas escalas (escalas abaixo de 100 Mpc), o Princípio Cosmológico é uma boa aproximação quando a escala de interesse é superior a 100 Mpc. Dessa forma, o modelo newtoniano trata o Universo como sendo preenchido por um fluido ideal, chamado fluido cosmológico, cujas partículas não interagem entre si. A dinâmica desse fluido é descrita pelas equações da continuidade e de Euler, enquanto a interação gravitacional associada ao fluido é descrita pela equação de Poisson, equações essas que serão descritas a seguir.

3.2 Equações para fluidos do modelo newtoniano

Para descrever um fluido, devemos dizer suas propriedades a cada ponto, e para isso devemos especificar sua velocidade \vec{v} em cada ponto e em todo o instante de tempo. Devemos também conhecer as outras propriedades do fluido como a pressão p , a densidade ρ e o potencial gravitacional ϕ . Outras grandezas também podem ser necessárias para descrever o fluido, como no caso de um fluido carregando uma corrente elétrica i , seria necessário conhecer também a densidade de corrente \vec{j} para uma descrição completa do comportamento do fluido. Neste trabalho serão considerados fluidos mais simples e não será necessário considerar propriedades elétricas do fluido. Será suposto ainda que a pressão e a densidade do fluido determinam sua temperatura em qualquer ponto [14].

A equação que representa a conservação da quantidade de matéria é a equação da continuidade. Se considerarmos um volume V_0 no espaço, a massa m do fluido nesse volume é $\int \rho dV$, sendo a integração feita em V_0 . Ainda, a massa do fluido que possui

velocidade \vec{v} e passa por um elemento de área $d\vec{A}$ é igual a $\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$ e esse é o acréscimo (ou decréscimo dependendo do sinal) de matéria do fluido no volume V_0 , sendo que a direção do vetor $d\vec{A}$ é a normal à superfície e a integral feita sobre toda a superfície fechada. O decréscimo de matéria no volume V_0 também pode ser escrita como a variação da matéria total em V_0 por unidade de tempo, $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$. Igualando essas duas integrais

$$\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV, \quad (3.1)$$

e utilizando a fórmula de Green para transformar uma integral de volume em uma integral de superfície:

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0. \quad (3.2)$$

Como a equação (3.2) deve ser válida para qualquer volume, temos então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.3)$$

que é a equação da continuidade, que expressa a conservação da matéria [15]. Para o caso de um fluido incompressível, as variações em p são muito pequenas e ρ é aproximadamente constante, de forma que a equação da continuidade se torna

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.4)$$

Também deve ser considerada a entropia do fluido, cuja equação de conservação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho s \vec{v}) = 0, \quad (3.5)$$

sendo o produto $s \cdot \vec{v}$ a densidade de fluxo de entropia [15]. Será considerado que o fluido é isentrópico, ou seja, as interações entre os elementos do fluido cósmico são adiabáticas. Portanto a equação (3.5) não será necessária nessa análise do modelo cosmológico newtoniano, já que ela se resume à $s = \text{constante}$ [15]. Em trabalhos onde as interações são não-adiabáticas deve-se levar em conta a entropia, que mede o grau de desordem do sistema (quanto maior a desordem, maior a entropia).

Outra equação que compõe as bases da dinâmica na cosmologia newtoniana é a equação de Euler, que define a dinâmica do fluido. Vamos considerar um volume V_0 do fluido, cuja força atuando sobre ele é igual à

$$-\oint p\vec{n} \cdot d\vec{A} = -\int \vec{\nabla}p \cdot d\vec{V}, \quad (3.6)$$

sendo p a pressão que atua sobre a superfície que cerca o volume V_0 e foi usado o teorema de Green para transformar a integral de superfície em uma integral de volume. Portanto a força por unidade de volume que atua em V_0 é $(-\vec{\nabla}p)$. Igualamos essa força com a expressão envolvendo o produto da aceleração (aqui a aceleração é considerada como sendo a taxa de variação da velocidade de uma dada partícula do fluido que está em movimento) com a densidade de fluido:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p. \quad (3.7)$$

Usando agora que $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ na equação (3.7), escrevemos a equação de Euler da forma

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}, \quad (3.8)$$

que é a equação de Euler. Esta equação será considerada neste trabalho, onde os elementos que compõe o fluido cósmico irão interagir apenas gravitacionalmente [15]. Efeitos de viscosidade serão considerados a frente.

Esse meio cósmico é gravitacionalmente auto-interagente via a equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (3.9)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional criado pela massa contida na densidade ρ do fluido [16].

3.3 A cosmologia newtoniana

O modelo criado por Milne e McCrea era de um Universo cuja expansão é atribuída localmente ao movimento das partículas do fluido cosmológico, mas globalmente o Universo é considerado estático. A velocidade dessas partículas é dada pela lei de Hubble:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = H(t)\vec{r}, \quad (3.10)$$

que diz que a velocidade de expansão é proporcional à distância até o observador, onde \vec{r} é a distância e $H(t)$ é o parâmetro de Hubble que depende do tempo cósmico, $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. A lei de Hubble está de acordo com o princípio cosmológico. O comprimento, ou uma distância, também pode ser escrito em termos do fator de escala:

$$r(t) = r_0 \frac{a(t)}{a_0}, \quad (3.11)$$

permitindo dessa forma a descrição da expansão de quaisquer pontos no universo usando o mesmo fator de escala $a(t)$. O termo a_0 é o fator de escala medido hoje.

Resolvendo a equação da continuidade encontra-se como a densidade de matéria varia com o fator de escala:

$$\rho(a) = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (3.12)$$

Através da solução da equação de Euler, obtêm-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a}\vec{r} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad (3.13)$$

e combinada à equação de Poisson (3.9),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho. \quad (3.14)$$

Combinando as equações (3.3) , (3.8) , (3.9) e a lei de Hubble encontra-se as equações dinâmicas da cosmologia newtoniana de um fluido em um fundo homogêneo e isotrópico em expansão acelerada:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\left(-2\frac{E}{H_0^2}\right)}{a^2} = \Omega_b \quad (3.15)$$

O termo Ω_b é o parâmetro de densidade para a matéria bariônica $\Omega_b = \frac{8\pi G\rho_b}{3H_0^2}$. Ainda, aplicando à equação de Friedmann (3.15) a forma explícita do parâmetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ obtêm-se a seguinte equação

$$\dot{H} + H^2 = -\Omega_b, \quad (3.16)$$

onde E é a constante de integração, que pode ser interpretada como a energia do sistema. O termo H_0^2 no denominador dos parâmetros de densidade aparece ao tornar as equações adimensionais. O processo de tornar as equações adimensionais será melhor explicado à frente. Observe que se compararmos a equação (3.15) com (2.25), a equação da dinâmica do fator de escala obtida através da teoria newtoniana é idêntica à equação de Friedmann obtida pela teoria relativística se considerarmos a igualdade $\frac{-2E}{H_0^2} = k$ e $p = 0$.

A diferença entre as equações de Friedmann obtidas pela teoria newtoniana e pelo modelo relativístico aparece na interpretação do termo $\frac{-2E}{H_0^2}$. Na cosmologia newtoniana este termo é uma constante de integração que está relacionada com a energia total do sistema, porém na teoria relativista essa constante é interpretada como a curvatura do espaço-tempo.

A dependência do fator de escala com o tempo cósmico varia de acordo com os possíveis valores dessa constante $-2\frac{E}{H_0^2}$, que por simplicidade será feito $-2\frac{E}{H_0^2} = k$, porém mantendo a interpretação newtoniana de k estando relacionado com a energia. Supondo $k = 0$, então a energia E do sistema é nula, e a equação (3.15) assume a forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\Omega_{b0}}{a^3} = 0. \quad (3.17)$$

Ao resolver a equação diferencial acima encontra-se

$$a(\eta) = \left[\frac{\Omega_{b0}\eta}{2} + \alpha_0^{\frac{1}{2}} \right]^2, \quad (3.18)$$

onde foi considerado $\Omega_{b0} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$, que é o parâmetro de densidade Ω_m medido hoje. A variável η é o tempo conforme de forma que satisfaz a relação $dt = a(\eta)d\eta$, e α_0 é uma constante de integração. A condição $k < 0$, implica que a energia do sistema é positiva, e a equação (3.15) assume a forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\frac{E}{H_0^2}}{a^2} = \frac{\Omega_{b0}}{2a^3}, \quad (3.19)$$

cuja solução para $a(\eta)$ é dada pela equação

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{k}} \operatorname{senh}^{-1} \left[\left(\frac{2ka}{\Omega_{b0}} + \alpha_1 \right) \right]. \quad (3.20)$$

O termo α_1 é uma constante de integração e $k = -\frac{2E}{H_0^2}$. Já para o caso de $k > 0$, a energia do sistema é negativa, e a equação (3.15) assume a forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\frac{E}{H_0^2}}{a^2} = \frac{\Omega_{b0}}{2a^3}. \quad (3.21)$$

A solução da equação diferencial (3.21) é:

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{k}} \text{sen}^{-1} \left[\left(\frac{2ka}{\Omega_{b0}} + \alpha_2 \right) \right], \quad (3.22)$$

sendo α_2 a constante de integração e novamente $k = -\frac{2E}{H_0^2}$.

A cosmologia newtoniana tem problemas em trabalhar com um universo finito, pois nos limites do universo a distribuição das estruturas não seria a mesma observada em regiões mais centrais (devido à atração gravitacional entre os corpos) ferindo o princípio cosmológico. Por isso, no modelo cosmológico newtoniano considera-se um universo infinito e com uma distribuição uniforme de matéria.

Se considerarmos a distribuição de matéria uniforme no Universo newtoniano, todos os pontos a uma mesma distância contribuiriam gravitacionalmente da mesma forma, resultando em uma aceleração gravitacional nula, e pela equação de Poisson, isso implicaria em uma densidade de matéria nula. Esse é o problema chamado de universo vazio. Para contornar esse problema, de acordo com a literatura [1] deve-se levar em conta o teorema de Birkhoff, que apenas pode ser demonstrado em uma formulação relativística. Este teorema considera que em uma esfera centrada em um ponto, apenas a massa interior ao raio da esfera contribui para o movimento da camada esférica. Portanto, se pensarmos em uma galáxia posicionada à uma distância r do centro de uma esfera, ela será atraída pela massa interior à esfera considerada $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3$ [1].

3.4 A cosmologia neo-newtoniana

Em 1934 os trabalhos de E. A. Milne e W. H. McCrea apresentaram uma forma de tratar a cosmologia utilizando a teoria newtoniana, sem utilizar a Relatividade Geral. É notável que, diferentemente do que geralmente ocorre, onde teorias físicas mais complexas surgem das teorias que possuem menos rigor e mais simplicidade, a cosmologia newtoniana

surgiu após a cosmologia relativística. A grande vantagem do tratamento newtoniano é a simplicidade matemática utilizada nos cálculos, comparativamente com a abordagem relativística.

A princípio, a cosmologia newtoniana apenas pode ser válida para casos onde $p = 0$, mas em casos onde a pressão possui um papel importante, deve-se utilizar um tratamento relativístico no desenvolvimento da teoria. Porém, em busca de uma simplicidade matemática, pode-se fazer uma modificação na cosmologia newtoniana de forma a incluir termos de pressão. Essa modificação foi feita também por McCrea em 1951, e posteriormente aprimorada por E. R. Harrison. McCrea mostrou que para fazer a inclusão da pressão seria necessário adotar dois conceitos relativísticos, mantendo a equivalência entre matéria e energia através do fator c^2 , e assumir distinção entre massa gravitacional e massa inercial. Utilizando a densidade de massa gravitacional σ , que é escrita como a soma das componentes diagonais do tensor energia-momento,

$$\sigma = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3. \quad (3.23)$$

Utilizando o tensor energia momento de um fluido perfeito, a densidade de massa gravitacional (3.23) é escrita como

$$\sigma = \rho + 3p, \quad (3.24)$$

onde foi utilizado o espaço tempo de Minkowski. McCrea consegue chegar algebricamente nas equações de Friedmann, descritas na sessão (2.3). Já Harrison, em 1965 conseguiu chegar também nas mesmas equações de McCrea, porém sem a necessidade de utilizar conceitos relativísticos. Ele supôs que o Universo seria dividido em células de volume infinitesimal que estariam imersas em um espaço-tempo plano, sendo o estado de cada célula independente de seu volume, e quando faz-se o volume de cada célula tender a zero, a métrica do espaço tempo permanece plana, como na Relatividade Especial. Dessa forma, aplicando o Princípio Cosmológico, Harrison concluiu que não era necessário conceitos da Relatividade Geral para o modelo cosmológico neo-newtoniano [17].

3.5 Equações para a teoria neo-newtoniana

A princípio os trabalhos de McCrea e Harrison obtiveram as seguintes equações que descrevem a dinâmica do fluido que preenche o Universo, definindo a chamada cosmologia neo-newtoniana:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho + p)\vec{v}] = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho + p} - \vec{\nabla} \phi, \quad (3.26)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho + 3p), \quad (3.27)$$

Essas são as equações da continuidade, de *Euler* e de *Poisson*, em sequência. Na equação de continuidade foi considerado que o termo $(\rho + p)\vec{v}$ representa a corrente de matéria. Essas equações admitem soluções homogêneas e isotrópicas. De acordo com *Lima et al*, [18], *Sachs* e *Wolfe* ao estudarem essas equações a nível perturbativo, mencionaram que o contraste da densidade δ não é compatível com o resultado relativístico em um calibre síncrono. Portanto as equações acima não são aplicáveis para casos de inhomogeneidades. Este problema está relacionado à equação (3.25), que no caso perturbado gera termos extras de pressão, levando a resultados que não estão de acordo com os relativísticos. Para contornar este problema *Lima et al* sugere uma modificação na equação (3.25), reescrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.28)$$

Esta equação está relacionada com o trabalho necessário para expandir o fluido de um volume V a um volume $V + dV$, desta forma levando em conta expansões locais do fluido [18]. Esta modificação resolve o problema proposto por *Sachs* e *Wolfe*.

O novo conjunto de equações portanto é dado por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho + p} - \vec{\nabla} \phi, \quad (3.30)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho + 3p). \quad (3.31)$$

A densidade de energia ρ pode ser somada à pressão pois o termo de pressão na verdade é escrito como $\frac{3p}{c^2}$ deixando as unidades corretas, porém como c^2 foi feito igual à unidade a expressão fica da forma (3.31). Ainda, a equação de Poisson (3.31) pode ser obtida à partir da equação (3.9) considerando a densidade de matéria gravitacional (3.24). Neste modelo os conceitos da física newtoniana são mantidos, como espaço Euclidiano e tempo t absoluto [17].

O grande diferencial que aparece no modelo neo-newtoniano, se comparada com a teoria newtoniana, é a inclusão do termo de pressão p , que possui um papel muito importante. Da equação de Poisson vemos que p também contribui gravitacionalmente, assim como a matéria. Esse é um importante resultado relativístico que foi possível ser introduzido no modelo neo-newtoniano [17]. Assumimos ainda que os componentes que formam o fluido cosmológico são do tipo barotrópicos, e possuem uma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$. Diferentes composições do fluido implicam em diferentes equações de estado.

Da equação da continuidade temos $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$ e $a(t) = (\frac{\rho}{\rho_0})^{-\frac{1}{3(1+\omega)}}$ e da equação de Euler com a equação da contribuição gravitacional obtemos $3\ddot{a}_a + 4\pi G(\rho + 3p) = 0$, que nos dá as três formas possíveis do fator de escala a :

para $k=0$,

$$a(\tau) = \left[\sqrt{\frac{2}{3}\pi G\rho_0 (3\omega + 1)} \frac{1}{2}\tau \right]^{\frac{2}{(3\omega+1)}}, \quad (3.32)$$

para $k>0$

$$a(\tau) = \sqrt{\frac{2\pi}{3|\vec{k}|} G\rho_0} \operatorname{senh}^{\frac{2}{1+3\omega}} \left[\frac{1+3\omega}{2} \sqrt{|\vec{k}|} (\tau + cte) \right], \quad (3.33)$$

para $k<0$

$$a(\tau) = \sqrt{\frac{2\pi}{3|\vec{k}|} G\rho_0} \operatorname{sen}^{\frac{2}{1+3\omega}} \left[\frac{1+3\omega}{2} \sqrt{|\vec{k}|} (\tau + cte) \right]. \quad (3.34)$$

Foi feita a substituição $dt = a(\tau)d\tau$, sendo τ o tempo conforme, que seria uma forma diferente de analisar como o tempo "corre".

Capítulo 4

Formação das grandes estruturas

4.1 Introdução

O Universo possui localmente várias inhomogeneidades, como aglomerados de galáxias, e conhecer o modo com que essas estruturas se formaram é um dos principais desafios da cosmologia atual. Em cosmologia refere-se a estrutura de grande escala sendo aglomerados fora do regime não-linear. Através da CMB, sabemos que o Universo primordial possuía grande homogeneidade, porém como as estruturas se formariam nesse cenário? Acredita-se que pequenas flutuações quânticas surgidas no Universo primordial foram responsáveis pela formação das estruturas que observamos hoje, e um vestígio dessas pequenas flutuações seria a anisotropia da CMB, que é da ordem de 10^{-5} . Um dos modelos mais aceitos atualmente que explica a origem dessas instabilidades é o modelo inflacionário, que estica as flutuações, porém mantendo sua amplitude. Outros modelos que tentam explicar a origem das flutuações no Universo primordial são baseados na teoria de cordas ou modelos não-singulares, porém não é o objetivo desse trabalho estudar essas teorias.

A teoria que estuda a evolução dessas instabilidades é a teoria de perturbação, onde considera-se que perturbações são pequenas flutuações das grandezas físicas do sistema. Aplicando então a teoria de perturbação nas equações dinâmicas do sistema podemos analisar a evolução das perturbações. Pode-se utilizar a teoria newtoniana para analisar a formação das estruturas quando o comprimento de onda da perturbação possui escala menor que o raio de Hubble, que é a região de interesse nesse trabalho, o que é uma motivação para a utilização da teoria newtoniana na modelagem da formação das estruturas.

Porém para uma análise onde o comprimento da perturbação é da ordem (ou maior) que o raio de Hubble, é necessário um tratamento relativístico para descrever a evolução dessas perturbações.

4.2 As perturbações

Para um sistema de fluidos, que depende da velocidade dos fluidos \vec{v}_i , de sua densidade de matéria ρ_i , de sua pressão p e do potencial gravitacional de todos os fluidos compondo o sistema φ , uma perturbação linear nesse sistema é feita ao aplicar as seguintes mudanças nas variáveis:

$$\begin{aligned}\rho_i(t) &= \rho_{0i}(t) + \delta\rho(\vec{r}, t), \\ &= \rho_{0i}(t) + \rho_{0i}\delta(\vec{r}, t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$p_i(t) = p_{0i}(t) + \delta p_i(\vec{r}, t),\tag{4.2}$$

$$\vec{v}_i(\vec{r}, t) = \vec{v}_{0i} + \delta\vec{v}(\vec{r}, t),\tag{4.3}$$

$$\varphi_i(\vec{r}, t) = \varphi_{0i}(\vec{r}, t) + \delta\varphi_i(\vec{r}, t).\tag{4.4}$$

O índice "0"subscrito indica que a grandeza é não perturbada, e δ indica uma flutuação local da grandeza que o acompanha, que é a perturbação (ou flutuação). Uma propriedade dessas flutuações das grandezas é que elas são muito menores que seu valor não perturbado, ou seja, consideramos que $\delta\rho_i(t) \ll \rho_{0i}(t)$, que é a característica de um regime linear. Quando as perturbações são da ordem das grandezas não perturbadas, ou seja, $\delta\rho_i(t) \approx \rho_{0i}(t)$, então elas não fazem mais parte do regime linear.

Vamos ainda considerar um espaço com geometria plana, de forma que podemos usar a decomposição de Fourier na forma

$$\delta\vec{v} = \vec{v}_k(t)e^{\frac{i\vec{k}\vec{r}}{a}},\tag{4.5}$$

onde o vetor de onda \vec{k} está associado aos modos de Fourier. Dessa forma, pode-se estudar a evolução de cada escala de perturbações. Definindo o contraste da densidade como:

$$\delta = \frac{\rho - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle}, \quad (4.6)$$

sendo $\langle \rho \rangle$ a densidade média da distribuição de massa no Universo. Essa é uma forma conveniente de escrever o termo da densidade por ser uma grandeza adimensional, tornando mais simples a comparação teoria-observação, não tendo que se preocupar com unidades. O contraste da densidade δ pode também ser decomposto em ondas planas, da forma:

$$\delta(\vec{r}, t) = \sum \delta_k e^{\frac{i\vec{k}\vec{r}}{a}}, \quad (4.7)$$

onde δ_k é um coeficiente de Fourier, que depende de k , e a soma é feita sobre todos os valores de k . O coeficiente de Fourier é:

$$\delta_k = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{r}, t) e^{-\frac{i\vec{k}\vec{r}}{a}}. \quad (4.8)$$

O volume V é o volume de cada célula no espaço de fase, ou espaço de Fourier. Dessa forma, a perturbação na densidade pode ser escrita como:

$$\delta\rho(\vec{r}, t) = \rho(t)\delta(\vec{r}, t) = \rho_t \delta_k e^{\frac{i\vec{k}\vec{r}}{a}}. \quad (4.9)$$

Nas seções seguintes a teoria de perturbações lineares será aplicada aos modelos newtoniano e neo-newtoniano para analisar a evolução das perturbações.

4.3 Detectando as flutuações

Uma importante área da cosmologia consiste em estudar a distribuição das galáxias, e entender como essas observações podem ser comparadas com os modelos teóricos. Para tal, é útil aplicar a transformada de Fourier à essa distribuição, que define o espectro de potência $P(k)$. Portanto o espectro de potência mede a distribuição das flutuações da densidade de matéria no Universo no espaço de Fourier. Ele tem sido medidos por vários aparatos, como o *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS), o *Southern Survey* do *Atacama Cosmology Telescope* [19] e o *2dF Galaxy Redshift Survey*.

O espectro de potência $P(k)$ possui dimensões de k^{-3} . Como a intensão é de trabalhar

com grandezas adimensionais, define-se o espectro de potência adimensional φ ,

$$\Delta(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi}. \quad (4.10)$$

O espectro de potência é definido a partir das flutuações da densidade de matéria, e é definido como:

$$P(k) \propto \langle \delta \rangle^2 \quad (4.11)$$

É com a função δ que se faz o estudo dos modelos que serão estudados neste trabalho, e sua detecção está relacionada ao espectro de potência, e será estudado com mais detalhes nos próximos capítulos.

4.4 Análise de perturbações no modelo newtoniano

Será aplicado agora a teoria de perturbações lineares nas equações que descrevem a dinâmica do modelo cosmológico newtoniano, aplicando também a decomposição de Fourier:

$$\delta\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(t)\delta(\vec{r}, t). \quad (4.12)$$

Por simplicidade foi escrito ρ_0 simplesmente como ρ , porém deixando claro que, após ser feita a decomposição de Fourier, ρ sempre será a densidade calculada na base. Foi considerado ainda que a componente $\delta(\vec{r}, t)$ pode ser decomposta na forma de Fourier:

$$\delta(\vec{r}, t) = \delta_t(t)e^{\frac{i\vec{k}\vec{r}}{a}} \quad (4.13)$$

Aplicando primeiramente à equação da continuidade obtêm-se:

$$\rho\dot{\delta} + \dot{\rho}\delta + 3H\delta\rho + \frac{i\vec{k}}{a}\rho\delta\vec{v}_k = 0. \quad (4.14)$$

Aplicando as perturbações na equação de Euler obtêm-se:

$$\delta\dot{\vec{v}}_k + H\delta\vec{v}_k = -\frac{i\vec{k}}{a}\delta\varphi. \quad (4.15)$$

Utilizando a equação da continuidade de base em (4.14) nos dá uma forma para a velocidade perturbada:

$$a\dot{\delta}_1 = -i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1, \quad (4.16)$$

Para este caso foi considerado que a equação de estado é uma dependência linear entre ρ e p , de forma que podemos escrever $\delta p = p_0\delta_t$, porém essa consideração não pode ser generalizada para qualquer equação de estado. A equação de Poisson perturbada é:

$$-\frac{k^2}{a^2}\delta\varphi = 4\pi G\rho\delta_k \quad (4.17)$$

Aplicando (4.16) e (4.17) à equação (4.15) obtemos a equação diferencial de segunda ordem para a evolução das perturbações lineares:

$$\ddot{\delta}_k + 2\dot{a}\dot{\delta}_k + (c_s^2\frac{k^2}{a^2} - 4\pi G\rho)\delta_k = 0 \quad (4.18)$$

que é uma equação de um oscilador paramétrico amortecido, onde a relação adiabática para a velocidade do som é $\frac{\delta p}{\delta\rho} = c_s^2$. Observe que há uma "disputa" entre a contribuição da pressão e a contribuição gravitacional nos termos entre parênteses. O termo gravitacional contribui de forma a desacelerar a expansão do fluido, tentando forçar um colapso, enquanto a força da pressão, que está implícita na velocidade do som, se opõe a esse colapso, forçando o fluido à uma expansão.

Para o caso onde as escalas de comprimento do sistema são muito maiores que a escala de comprimento de Jeans λ_J o termo $\nabla^2\delta_k$ pode ser aproximado a zero. O comprimento de *Jeans* é definido como:

$$\lambda_J = v_s\left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

Jeans, em 1902, demonstrou que considerando um fluido homogêneo e isotrópico, as flutuações na densidade e na velocidade podem crescer com o tempo se os efeitos devido à pressão no fluido forem muito menores que os efeitos auto-gravitacionais do fluido. Com a predominância da atração gravitacional, regiões vão ficando mais e mais densas, criando uma instabilidade e podendo até levar a um colapso. Para a flutuação evoluir no tempo, a escala de comprimento da flutuação (λ) deve ser maior que o comprimento de *Jeans*

(λ_J). Para os casos que $\lambda < \lambda_J$, a força devido à pressão do fluido prevalece sobre a força gravitacional de forma que as flutuações não se comportam como ondas acústicas e não evoluem, se dissipando de forma rápida. Porém, quando $\lambda > \lambda_J$ a força da gravidade se torna superior que a contribuição da pressão e, como mencionado antes, as flutuações evoluem com o tempo.

4.5 Análise de perturbações no modelo neo-newtoniano

Será desenvolvida nesta seção como as perturbações na densidade evoluem. O desenvolvimento de perturbações no modelo neo-newtoniano foi feito por *Lima et al* [18], considerando já as equações hidrodinâmicas modificadas apresentadas na seção 3.4. Considerando pequenas flutuações no Universo newtoniano, da forma (4.1) à (4.4). Aplicando isso nas equações de movimento, obtém-se:

$$\rho \left[\dot{\delta} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta \right] + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\delta p - p \delta) + (\rho + p) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.20)$$

$$\dot{\vec{v}} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{r} + \frac{\dot{a}}{a} \delta \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} \delta p}{\rho + p} - \vec{\nabla} \delta \varphi \quad (4.21)$$

$$\nabla^2 \delta \varphi = 4\pi G (\rho \delta + 3\delta p) \quad (4.22)$$

onde foi considerado que as perturbações são adiabáticas, e portanto $\frac{\delta p}{\delta \rho} = v_s^2$.

Agora, passando para as coordenadas comóveis, tem-se que $\vec{r} = a\vec{q}$ e portanto $\vec{v} = \dot{a}\vec{q}$,

$$\dot{\delta}_k + \frac{1 + \omega}{a} \vec{\nabla}_q \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.23)$$

$$\delta \dot{\vec{v}}_k + \frac{\dot{a}}{a} \delta \vec{v}_k = - \frac{v_s^2}{\rho a (1 + \omega)} \vec{\nabla}_q \delta - \frac{\vec{\nabla}_q \varphi}{a} \quad (4.24)$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G (1 + 3\omega) a^2 \rho \delta \quad (4.25)$$

A variável $\vec{\nabla}_q$ é a derivada em relação à coordenada comóvel, e ela é igual a $\frac{1}{a} \vec{\nabla} = \vec{\nabla}_q$,

sendo $\vec{\nabla}$ a derivada em relação às coordenadas \vec{r} . Combinando as equações acima obtemos a equação diferencial que determina a dinâmica do sistema:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \frac{3}{2}\Omega(1+3\omega)(1+\omega)\delta = \frac{v_s^2}{a^2\rho(1+\omega)}\nabla_q^2\delta_k \quad (4.26)$$

onde foi utilizado que $\Omega = \frac{8\pi G\rho}{3}$. Essa equação coincide com a equação relativista para $v_s = 0$ e possui soluções do tipo *Bessel*.

Capítulo 5

Modelos viscosos

Viscosidade é a medida de quão fácil um fluido flui quando uma força age sobre ele, de forma que quanto mais viscoso for o fluido com mais dificuldade ele flui. Essas propriedades de fluidos são focos de estudo há séculos, com aplicabilidade em várias áreas da física. As equações de movimento de um fluido viscoso isotrópico são obtidas através da equação de Euler modificada, que é chamada de equação de Navier-Stokes:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\xi + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}). \quad (5.1)$$

De forma geral η e ξ podem variar, porém para a maioria dos casos eles podem ser considerados constantes. Os termos η e ξ serão considerados então constantes positivas chamadas de primeira viscosidade e segunda viscosidade, respectivamente.

Como modelos cosmológicos newtonianos consideram que o Universo é preenchido por um ou mais fluidos, então o estudo de propriedades viscosas desse fluido é razoável. É de interesse investigar se um modelo alternativo ao modelo cosmológico padrão obtém melhores resultados, resolvendo também os problemas da teoria padrão, como o problema da constante cosmológica, que é entender por que a densidade da energia do vácuo é tão pequena e por que possui a mesma magnitude da atual densidade de matéria no Universo (de acordo com observações com supernovas tipo Ia). Modelos viscosos propõem a unificação das componentes escuras na forma de um fluido viscoso, e é um modelo mais realista devido a não observação dessas componentes escuras, e também do não conhecimento do que elas são. Modelos viscosos também explicam a expansão acelerada

do Universo com termos repulsivos gerados pela pressão negativa. Ainda, pode-se analisar como uma equação de estado diferente de $p = 0$, normalmente utilizada para a matéria escura, irá influenciar a evolução da estrutura do Universo.

O modelo que será considerado nesse trabalho um modelo viscoso, cuja viscosidade é incluída no termo da pressão, de forma a deixar a pressão viscosa negativa. O efeito que a pressão negativa causa é contrário ao efeito gravitacional, e dependendo da contribuição da viscosidade, forçando uma repulsão ao invés de uma atração, explicando a expansão acelerada do Universo. Aplicando então uma modificação na forma da pressão considerada nos modelos cosmológicos newtonianos e neo-newtonianos, será estudado como a dinâmica desses modelos é alterada e se o acréscimo de viscosidade é suficiente para ser um candidato apto a substituir a matéria escura.

A pressão será de forma geral escrita como:

$$p = \omega\rho^\lambda - \xi\vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \quad (5.2)$$

Normalmente a forma geral de p é considerada possuir a forma $\omega\rho$, porém a forma considerada da pressão será algo ainda mais geral. Será incluído um parâmetro λ no expoente da densidade ρ , de forma que ele pode-se avaliar se modificações na equação de estado resultam em alguma melhora nos resultados do modelo. O coeficiente de viscosidade nesse modelo será diretamente proporcional à densidade de matéria do fluido viscoso, na forma:

$$\xi = \xi_0\rho^\nu. \quad (5.3)$$

Os parâmetros dos modelos relacionados às viscosidades serão ξ_0 , ν e λ . É importante notar que neste modelo não será possível distinguir matéria escura de energia escura. Haverá apenas uma densidade de energia viscosa que atuará como uma combinação dessas duas componentes escuras. Existem também vários modelos alternativos ao modelo viscoso, como modelos de quintessência e o próprio Λ CDM

5.1 Modelo newtoniano viscoso: análise perturbativa

5.1.1 As equações perturbadas

Aplicando a modificação nas equações de movimento do modelo cosmológico newtoniano, será desenvolvido o modelo viscoso. Observe que para este caso, o Universo é considerado composto totalmente por um fluido que possui uma viscosidade ξ_0 . As equações de movimento para a base são as mesmas que o modelo não viscoso apresentado no Capítulo 4. Elas são dadas por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \nabla \varphi, \quad (5.5)$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho. \quad (5.6)$$

Observe ainda que mesmo com a mudança feita na pressão, seu gradiente continua sendo nulo, porém ao aplicar a teoria de perturbação às equações de movimento do fluido, o gradiente da pressão é fundamental, motivo pelo qual (5.5) é escrito dessa forma.

Considerando um fluido newtoniano viscoso, as equações hidrodinâmicas acima determinam o movimento do sistema. A solução da equação da continuidade (5.4) resulta em $\rho_v(t) = \frac{\rho_{v0}}{a^3}$, e a combinação das equações (5.5) e (5.6) resulta em

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{3}{2}\Omega_v(\rho), \quad (5.7)$$

onde foi considerado que $\Omega_v(\rho) = \frac{8\pi G \rho}{3}$, e o índice subestricto $_v$ indica apenas que as grandezas calculadas representam componentes do fluido viscoso.

Aplicando agora pequenas perturbações ao sistema, da forma (4.1)-(4.4), às equações hidrodinâmicas para o fluido viscoso, as equações perturbadas são:

$$\delta \dot{\rho}_v + \vec{v}_v \cdot \vec{\nabla} \delta \rho_v + 3H \delta \rho_v + \rho_v \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v}_v = 0 \quad (5.8)$$

$$\delta\dot{\vec{v}} + H\delta\vec{v} + H\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}\delta p}{\rho} + \vec{\nabla}\delta\varphi = 0 \quad (5.9)$$

$$\nabla^2\delta\varphi = 4\pi G\delta\rho \quad (5.10)$$

que são as equações da continuidade, de Euler e de *Poisson* perturbadas, respectivamente.

5.1.2 Aplicando a expansão de Fourier

Fazendo agora uma decomposição de *Fourier* na perturbação, escrevendo essas perturbações como uma combinação de ondas planas na forma (4.7) e a perturbação na densidade escrita como (4.9), as equações de movimento perturbadas são:

$$a\dot{\delta}_k = -i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_k, \quad (5.11)$$

$$\delta\dot{\vec{v}}_k + \frac{\dot{a}}{a}\delta\vec{v}_k + \frac{i\vec{k}}{a} \frac{\delta p_k}{\rho} + \frac{i\vec{k}}{a}\delta\varphi_k = 0, \quad (5.12)$$

$$-\frac{k^2}{a^2}\delta\varphi_k = \frac{3}{2} \frac{\Omega_{v0}}{a^3}\delta_k. \quad (5.13)$$

Ainda, a perturbação na pressão é:

$$\begin{aligned} \delta p_k &= \left[(\omega\lambda\rho^{\lambda-1} - 3H\xi_0\nu\rho^{\nu-1})\delta\rho - \frac{i\vec{k}}{a}\xi_0\rho^\nu\delta\vec{v}_k \right] \\ &= \left[(\omega\lambda\rho^\lambda - 3H\xi_0\rho^\nu\nu)\delta_k - \xi_0\rho^\nu \frac{i\vec{k} \cdot \vec{r}}{a}\delta\vec{v}_k \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Com simples manipulações matemáticas das equações acima, e substituindo a expressão da perturbação da pressão, obtêm-se a equação diferencial de segunda ordem para a perturbação δ_k , que é:

$$\dot{\theta}_k + H\theta_k = \frac{k^2}{a} \left[(\omega\lambda\rho^{\lambda-1} - 3H\xi_0\rho^{\nu-1}\nu)\delta_k - \frac{\theta}{a}\xi_0\rho^{\nu-1} \right] - \frac{3}{2} \frac{\Omega_{v0}}{a^2}, \quad (5.15)$$

onde foi usado que $\theta = i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_k$.

Pode-se também escrever a equação da perturbação (5.15) em termos de δ_k utilizando a expressão (5.11):

$$\ddot{\delta}_k + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{k^2}{a^2}\xi_0\rho^{\nu-1} \right] \dot{\delta}_k - \left[3\frac{k^2}{a^2}\frac{\dot{a}}{a}\xi_0\nu\rho^\nu - \frac{k^2}{a^2}\omega\lambda\rho^{\lambda-1} + \frac{3}{2}\frac{\Omega_{b0}}{a^3} \right] \delta_k = 0. \quad (5.16)$$

Escreve-se agora a equação (5.16) em termos de a para ser feita a análise numérica. Lembrando que $\rho_\nu = \frac{\rho_{v0}}{a^3}$ e $a = a_0 t^{2/3}$, e ainda escrevendo as derivadas em termos do fator de escala $\frac{d}{dt} = Ha\frac{d}{da}$, a equação da perturbação na densidade pode ser escrita como:

$$\delta_k'' + \left[\frac{3}{2a} + \frac{3}{2}\frac{k^2\xi_0\rho_0^{(\nu-1)}}{a_0^{\frac{3}{2}}a^{3(\nu-1/2)}} \right] \delta_k' - \left[-\frac{9}{4}\frac{k^2\omega\lambda\rho_0^{(\lambda-1)}}{a_0^3a^{(3\lambda-2)}} + \frac{2k^2\xi_0\nu\rho_0^{(\nu-1)}a_0^{\frac{3}{2}}}{a^{(3\nu-1/2)}} + \frac{3}{2}\frac{\Omega_{v0}}{a^2} \right] \delta_k = 0. \quad (5.17)$$

Deve-se ainda tornar essa equação adimensional, tornando-a mais simples de resolver e analisar. Para tal, primeiro é feita a análise dimensional da equação (5.17), cuja dimensão é $[\text{tempo}]^{-2}$. Divide-se então toda a equação (5.21) por H_0^2 , que é quadrado do valor da constante de *Hubble* hoje. Fazendo ainda uma pequena modificação na variável temporal,

$$\bar{t} \rightarrow tH_0, \quad (5.18)$$

e redefinindo também o contraste de densidade da seguinte forma: $\Omega_{b0} \rightarrow \frac{\Omega_{v0}}{H_0^2}$, obtêm-se a equação adimensional para a perturbação:

$$\delta_k'' + \left[\frac{3}{2a} + \frac{3}{2}\frac{k^2\xi_0\rho_0^{(\nu-1)}}{a_0^{\frac{3}{2}}a^{3(\nu-1/2)}} \right] \delta_k' - \left[-\frac{9}{4}\frac{k^2\omega\lambda\rho_0^{(\lambda-1)}}{a_0^3a^{(3\lambda-2)}H_0^2} + \frac{2k^2\xi_0\nu\rho_0^{(\nu-1)}a_0^{\frac{3}{2}}}{a^{(3\nu-1/2)}H_0^2} + \frac{3}{2}\frac{\Omega_{b0}}{a^2} \right] \delta_k = 0. \quad (5.19)$$

Todas as variáveis envolvidas na equação acima já foram definidas previamente. Essa é uma equação diferencial de segunda ordem para a a perturbação δ_k , e é muito complicada para se resolver analiticamente com todas as variáveis. Por isso, para analisar como seria a perturbação nesse modelo (5.19) deverá ser analisada numericamente.

5.1.3 Uma solução analítica: fixando o parâmetro ν

Apesar da equação (5.17) ser muito complicada, foi encontrado um caso onde ela possui solução analítica. Ao fixarmos o valor do parâmetro ν como

$$\nu = \frac{5}{6}, \quad (5.20)$$

a equação (5.16) possui solução analítica. Aplicando esse caso particular à equação (5.16) é obtida a seguinte equação para a perturbação:

$$\ddot{\delta}_k + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{k^2}{a^2}\xi_0\rho^{-\frac{1}{6}} \right] \dot{\delta}_k - \left[\frac{5k^2}{2a^2}\frac{\dot{a}}{a}\xi_0\rho^{-\frac{1}{6}} - \frac{k^2}{a^2}\omega\lambda\rho^{\lambda-1} + \frac{3}{2}\frac{\Omega_{v0}}{a^3} \right] \delta_k = 0. \quad (5.21)$$

Deixando a equação adimensional, a equação para a perturbação fica sendo:

$$\ddot{\delta}_k + \left[2H + \frac{k^2}{a^2}\xi_0\rho^{-\frac{1}{6}} \right] \dot{\delta}_k - \left[\frac{k^2}{a^2}\omega\lambda\rho^{\lambda-1} - \frac{5k^2}{2a^2}\frac{H}{H_0^2}\xi_0\rho^{-\frac{1}{6}} + \frac{3}{2}\frac{\Omega_{v0}}{a^3} \right] \delta_k = 0. \quad (5.22)$$

Essa equação possui uma forma do tipo função de *Bessel*, e para o valor $\nu = \frac{5}{6}$ possui solução analítica:

$$\delta(t) = t^{-\frac{1}{2}(B-1)} \left\{ c_1 J_{\frac{\sqrt{\alpha^2+F}}{\frac{4}{3}-\gamma}} \left[\frac{\sqrt{C}}{\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)} t^{\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)} \right] + c_2 Y_{\frac{\sqrt{\alpha^2+F}}{\frac{4}{3}-\gamma}} \left[\frac{\sqrt{C}}{\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)} t^{\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)} \right] \right\}, \quad (5.23)$$

onde,

$$F = \frac{5}{3} \frac{k^2 \xi_0}{\rho_0^{\frac{1}{6}} a_0^{\frac{3}{2}}} + 4\pi G \frac{\rho_0}{a_0} \quad B = \frac{4}{3} + \frac{\xi_0 a_0^{\frac{1}{2}} k^2}{\rho_0^{\frac{1}{6}}} \quad (5.24)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}(B-1) \quad C = \frac{k^2 \gamma \omega \rho_0^{\gamma-1}}{H_0^2 a_0^{3\gamma-1}} \quad (5.25)$$

5.2 Modelo newtoniano para o caso com dois fluidos: análise perturbativa

O modelo cosmológico newtoniano é uma boa primeira aproximação na tentativa de descrever a evolução do Universo. Aproximar o Universo por um fluido isotrópico acrescenta simplicidade ao problema, porém não necessariamente o torna realista. Ao trabalhar com um único fluido, estamos supondo que o Universo é composto por um único componente, e analisa-se apenas a evolução de uma única componente, que interage gravitacionalmente apenas com seus próprios componentes. Ao fazer a análise de formação de estruturas a partir do modelo perturbativo, considera-se que as condições iniciais do sistema são determinadas em épocas primordiais. Como desde essa época passamos por várias transição de épocas de dominação, como a transição da época de dominação da matéria e a época de dominação da energia escura **EE**, fazer a suposição de que o Universo possui praticamente um único componente não é um bom modelo. Ainda, a formação da grande estrutura do Universo passou por várias fases de dominações de componentes diferentes, mais uma motivação para não se trabalhar com apenas um fluido.

Uma forma de tornar a modelagem do Universo por fluido mais realista é considerar um Universo composto por mais de um fluido, onde cada fluido evolui de forma característica às componentes que ele estará descrevendo. Um fluido que descreve a componente de matéria bariônica do Universo irá possuir equação de estado $p = 0$. Um fluido que descreve a **EE** irá possuir pressão negativa, como por exemplo para o caso da constante cosmológica que possui equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, existindo ainda outras possibilidades de descrição da **EE**.

5.2.1 As equações do modelo

Nesta seção será considerado um modelo newtoniano composto por dois fluidos. Um fluido irá descrever a componente de matéria bariônica, e outro fluido será um fluido viscoso que irá unificar as contribuições que normalmente atribuímos às matéria e energia escuras, como foi descrito no começo deste capítulo. As equações de movimento desses fluidos devem ser escritas separadamente, cada uma contendo as características dos com-

ponentes que elas representam. Vamos denominar um fluido de **fluido v**, que será o fluido viscoso, e suas equações dinâmicas são:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_v \vec{v}_v) = 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_v}{\partial t} + (\vec{v}_v \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_v = -\frac{\vec{\nabla} p_v}{\rho_v} - \vec{\nabla} \varphi, \quad (5.27)$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G(\rho_v + \rho_b). \quad (5.28)$$

A equação de estado do fluido viscoso é definida como:

$$p_v = \omega_v \rho_v^\lambda - \xi_0 \rho_v^\nu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_v, \quad (5.29)$$

e ρ_b pertencente ao segundo fluido, que será descrito a seguir.

O segundo fluido será denominado de **fluido b**, que descreve as componentes bariônicas do Universo. Essas componentes possuem geralmente equação de estado do tipo $p = 0$, porém vamos considerar que a equação de estado pode ser, de forma geral, escrita como:

$$p_b = \omega_b \rho_b^\gamma, \quad (5.30)$$

para avaliar se pode ser obtida uma boa correspondência com os dados observacionais, ou seja, escrevendo a equação de estado desta forma fazemos uma generalização maior do modelo, permitindo procurar melhores ajustes do modelo em comparação com os dados observacionais.

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_b \vec{v}_b) = 0, \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} + (\vec{v}_b \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_b = -\frac{\vec{\nabla} p_b}{\rho_b} - \vec{\nabla} \varphi. \quad (5.32)$$

A equação de *Poisson* descreve a interação entre os dois fluidos, portanto (5.28) é a mesma para os dois fluidos.

A solução para as equações de base são as mesmas que o caso newtoniano viscoso,

para cada fluido separadamente. Portanto a solução da equação da continuidade para o **fluido v** é $\rho_v = \frac{\rho_{v0}}{a^3}$, e para o **fluido b** é $\rho_b = \frac{\rho_{b0}}{a^3}$. Já para a equação de Euler, a solução da equação de base, combinada com a equação de *Poisson* nos dá $\frac{\ddot{a}}{a} = -(\Omega_v + \frac{\Omega_{b0}}{2a^3})$. Apesar de saber o comportamento de ρ_v com o fator de escala a , é de interesse trabalhar com o termo Ω_v .

5.2.2 Análise perturbativa

Vamos agora fazer pequenas perturbações em cada fluido, separadamente. Para o **fluido b** aplicaremos pequenas flutuações nas equações (5.31), (5.32) e (5.28). As equações perturbadas são:

$$\dot{\delta}_{kb} = -\frac{\theta_b}{a}, \quad (5.33)$$

$$\dot{\theta}_b + H\theta_b = \frac{k^2}{a}\omega_b\gamma\rho_b^\gamma\delta_{kb} + \frac{k^2}{a}\delta\varphi_k, \quad (5.34)$$

$$-\frac{k^2}{a^2}\delta\varphi_k = \frac{3}{2}\left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3}\delta_{kb} + \Omega_v\delta_{kv}\right). \quad (5.35)$$

onde foi definido que $\theta_b = i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_{kb}$. Aplicando agora a equação de Poisson perturbada (5.35) à equação (5.34) resulta em:

$$\dot{\theta}_b + H\theta_b = \frac{k^2}{a}\omega_b\gamma\rho_b^\gamma\delta_{kb} - \frac{3}{2}\frac{\Omega_{b0}}{a^2}\delta_{kb} - \frac{3}{2}\Omega_v a\delta_{kv}. \quad (5.36)$$

Observe que é importante considerar as quadri-velocidades diferentes para cada componente do Universo, pois elas irão evoluir separadamente, interagindo apenas através da contribuição gravitacional dada pela equação de *Poisson*. As equações (5.33) e (5.36) também podem ser combinadas, de forma a serem escritas em termos das perturbações na matéria δ_b em uma única equação:

$$\ddot{\delta}_{kb} + 2H\dot{\delta}_{kb} + \frac{k^2}{a^2}\omega_b\gamma\rho_b^\gamma\delta_{kb} - \frac{3}{2}\left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3}\delta_{kb} + \Omega_v\delta_{kv}\right) = 0. \quad (5.37)$$

Essa é uma equação diferencial de segunda ordem, que ao ser resolvida nos dá como as flutuações na densidade de matéria se comportam.

Agora, para o **fluido v**, serão perturbadas as equações (5.26) e (5.27). As equações perturbadas são:

$$\dot{\delta}_{kv} = -\frac{\theta_v}{a}, \quad (5.38)$$

$$\dot{\theta}_v + H\theta_v = \frac{k^2}{a} \left[\omega_v \lambda \rho_v^{\lambda-1} \delta_{kv} - 3H\xi_0 \nu \rho_v^{\nu-1} \delta_{kv} - \xi_0 \rho_v^{\nu-1} \frac{\theta_v}{a} \right] - \frac{3}{2} \frac{\Omega_{b0}}{a^2} \delta_{kb} - \frac{3}{2} \Omega_v a \delta_{kv}, \quad (5.39)$$

onde já foi aplicada a equação de Poisson perturbada (5.35) à equação (5.39). Combinadas, as equações (5.38) e (5.39) resultam em:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{kv} + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{k^2}{a^2} \xi_0 \rho_v^{\nu-1} \right] \dot{\delta}_{kv} &= \frac{k^2}{a^2} \left[3\frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \nu \rho_v^{\nu-1} - \omega_v \lambda \rho_v^{\lambda-1} \right] \delta_{kv} + \\ &+ \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} \delta_{kb} + \Omega_v \delta_{kv} \right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Que é uma equação diferencial de segunda ordem que, ao ser resolvida, nos dá como a flutuação no fluido viscoso evolui.

5.3 Modelo neo-newtoniano viscoso: análise perturbativa

Nesta seção será apresentada a evolução de perturbações na densidade de matéria em um Universo newtoniano em expansão, para o caso do modelo neo-newtoniano viscoso. Para o caso viscoso a equação de estado do sistema será $p_v = -\xi_0 \rho^\nu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$. Essa equação de estado considera basicamente o termo viscoso, e é utilizada para simplificação, pois de resultados numéricos feitos com o modelo newtoniano foi observado que os termos do tipo $\omega \rho^\lambda$ numericamente ficavam muito próximos de zero. Como estamos tentando modelar as componentes escuras por um fluido viscoso, então pressão negativa é uma propriedade esperada do sistema, tornando essa aproximação razoável.

É importante primeiramente ser feito o cálculo para as equações de base. Devido à forma da pressão, e também à modificação da equação da continuidade incrementada no modelo neo-newtoniano descrito na seção 3.4, a equação da continuidade (3.29) pode ser

escrita na forma:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \left(\rho - \xi_0 \rho^\nu \vec{\nabla}_r \cdot \vec{v} \right) \vec{\nabla}_r \cdot \vec{v} = 0, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r) \vec{v} = -\vec{\nabla}_r \varphi, \quad (5.42)$$

$$\nabla_r^2 \varphi = -\frac{3}{2} \Omega_v + \frac{9}{2} \Omega_v \xi_0 \rho_v^{\nu-1} \vec{\nabla}_r \cdot \vec{v} \quad (5.43)$$

onde foi considerado que $\Omega_v = \frac{4\pi G \rho_v}{3}$. Não foi incluído o termo H_0^2 pois a equação ainda não foi tornada adimensional. Observe que as equações de base se tornam muito mais complexas do que as equações de base para o caso newtoniano.

Será aplicado agora pequenas flutuações às equações (5.41), (5.42) e (5.43). De acordo com *Lima et al* [18], para aplicar as perturbações deve-se utilizar o referencial comóvel, pois assim poderá se obter equações perturbadas compatíveis com o modelo relativístico. No referencial comóvel as coordenadas são redefinidas como $\vec{r} = a\vec{q}$, e \vec{v} será considerada a velocidade no sistema de coordenadas comóvel, definida como $\vec{v} = \dot{a}\vec{q}$. No referencial comóvel o operador $\vec{\nabla}$, que é o gradiente com respeito a um \vec{q} fixo, é:

$$\vec{\nabla} = a\vec{\nabla}_r, \quad (5.44)$$

onde $\vec{\nabla}_r$ é o gradiente com relação à \vec{r} fixo. A derivada temporal parcial também deve ser reescrita com relação a \vec{q} fixo. Portanto, para uma função f qualquer:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f} - \frac{\dot{a}}{a} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} f \quad (5.45)$$

Utilizando o referencial comóvel às equações da base neo-newtoniana viscosa (5.41), (5.42) e (5.43), obtêm-se o seguinte conjunto de equações:

$$\dot{\delta}_{kv} + \frac{\theta_{kv}}{a} \left(1 + \omega - 3\frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^{\nu-1} \right) + 3\frac{\dot{a}}{a} (\nu - 1) \omega \delta_{kv} = 0, \quad (5.46)$$

$$\dot{\theta}_{kv} + \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\xi_0 \rho_v^{\nu-1}}{(1 + \omega)a - \xi_0 \rho_v^\nu} \right] \theta_{kv} = \left[\frac{k^2}{a^2} \frac{\omega \nu}{1 + \omega} - \frac{3}{2} a \Omega_v - 3p_\nu \nu a \right] \delta_{kv}, \quad (5.47)$$

onde foi utilizado que $\omega = \frac{p}{\rho v}$ e novamente $\theta_k = i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_{kv}$. O acréscimo de uma viscosidade incluída na pressão aumenta a complexidade matemática tanto das equações de base, quanto das equações perturbadas.

5.4 Modelo neo-newtoniano para o caso de dois fluidos: análise perturbativa

Será considerado nesta seção um modelo com dois fluidos, como na seção 5.2, porém para o caso neo-newtoniano. A intenção de se trabalhar com dois fluidos é exatamente a tentativa de um tratamento mais realista do Universo, e trabalhando com um modelo neo-newtoniano, que foi visto na seção 4.5 possuir equação para a perturbação na densidade que coincide com as equações obtidas a partir da teoria relativista, torna o modelo ainda mais realista em comparação com o modelo newtoniano. A intenção então é trabalhar em cima desse modelo e compará-lo com os dados observacionais: o espectro de potência $P(k)$ e também dados de supernovas tipo Ia.

5.4.1 As equações do modelo

Será considerado então que o Universo pode ser descrito por dois fluidos, um **fluido b** que representa os bárions e um **fluido v** viscoso, que irá representar as componentes escuras do Universo. A característica do **fluido b** é que sua pressão é nula $p_b = 0$, e já para o **fluido v** a equação de estado considerada será:

$$p_v = -\xi_0 \rho_v^\nu \vec{\nabla}_r \cdot \vec{v}_v. \quad (5.48)$$

A pressão considerada é um caso simplificado do que o utilizado em (5.29).

Aplicando as propriedades do referencial comóvel descritas acima nas equações da dinâmica neo-newtoniana (3.29), (3.30) e (3.31), o conjunto de equações proposto para cada fluido é:

$$\dot{\rho}_b + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho_b \vec{v}_b) = 0, \quad (5.49)$$

$$\dot{\vec{v}}_b + (\vec{v}_b \cdot \vec{\nabla}_r) \cdot \vec{v}_b = -\vec{\nabla}_r \varphi \quad (5.50)$$

$$\nabla_r^2 \varphi = 4\pi G(\rho_b + \rho_v + 3p_v), \quad (5.51)$$

$$\dot{\rho}_v + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho_v \vec{v}_v) + p_v \vec{\nabla}_r \cdot \vec{v}_v = 0, \quad (5.52)$$

$$\dot{\vec{v}}_v + (\vec{v}_v \cdot \vec{\nabla}_r) \cdot \vec{v}_v = -\frac{\vec{\nabla}_r p}{\rho_v + p_v} - \vec{\nabla}_r \varphi. \quad (5.53)$$

Nestas equações foi considerado que o ponto sobrescrito representa derivada parcial em relação ao tempo t . As equação da continuidade de base para as componentes do **fluido b** são conhecidas do modelo newtoniano:

$$\rho_b(a) = \frac{\rho_{b0}}{a^3}, \quad (5.54)$$

e a equação de Euler para o **fluido b** é:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \Omega_v \right) + \frac{9}{2} \Omega_v \frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^{\nu-1} \quad (5.55)$$

Já a solução das equações da base para as componentes do **fluido v** são:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_v - 3 \frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^\nu \right) = 0, \quad (5.56)$$

e a equação de Euler combinada com *Poisson* nos dá

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \Omega_v \right) + \frac{9}{2} \Omega_v \frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^{\nu-1}, \quad (5.57)$$

onde foi utilizado que $\Omega_{b0} = \frac{8\pi G \rho_{b0}}{3}$ e $\Omega_v = \frac{8\pi G \rho_v}{3}$, sendo ρ_{b0} representando o valor da densidade de matéria bariônica hoje, e $\rho_v = \rho_v(t)$. As equações de Euler para a base do **fluido b** e do **fluido v** são iguais devido ao fato de a interação entre eles ser descrita pela mesma equação, a equação de Poisson.

Será útil para aplicações numéricas escrever as equações da base em termos do fator de escala a e também em termos do *redshift*, os motivos serão explicados nos próximos capítulos. Para a base do **fluido b**, a equação da continuidade escrita em termos do fator de escala é:

$$H(a) \left[\frac{\partial \rho_b}{\partial a} a + 3\rho_b \right] = 0, \quad (5.58)$$

e em termos do *redshift* z ,

$$H(z) \left[(1+z) \frac{\partial \rho_b}{\partial z} + 3\rho_b \right] = 0. \quad (5.59)$$

Já a equação de Euler escrita em termos de a é:

$$\frac{dH}{da} H a + H^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \Omega_v \right) + \frac{9}{2} \Omega_v \frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^{\nu-1}, \quad (5.60)$$

e escrita em termos do *redshift* z ,

$$(1+z) \frac{\partial H}{\partial z} H + H^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \Omega_v \right) + \frac{9}{2} \Omega_v \frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^{\nu-1}. \quad (5.61)$$

Agora para a base do **fluido v**, a equação da continuidade escrita em termos do fator de escala é:

$$H(a) \left[\frac{\partial \rho_v}{\partial a} a + 3(\rho_v - 3H\xi_0\rho_v^\nu) \right] = 0, \quad (5.62)$$

e a equação da continuidade escrita em termos do *redshift* z é:

$$H(z) \left[(1+z) \frac{\partial \rho_v}{\partial z} + 3(\rho_v - 3H\xi_0\rho_v^\nu) \right] = 0. \quad (5.63)$$

Já a equação de Euler escrita em termos de a é:

$$\frac{dH}{da} H a + H^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \Omega_v \right) + \frac{9}{2} \Omega_v \frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^{\nu-1}, \quad (5.64)$$

e escrita em termos do *redshift* z :

$$(1+z) \frac{\partial H}{\partial z} H + H^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \Omega_v \right) + \frac{9}{2} \Omega_v \frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^{\nu-1}. \quad (5.65)$$

5.4.2 Análise perturbativa

Aplicando agora perturbações da forma (4.1) a (4.4) às equações (5.49), (5.50), (5.51), (5.52) e (5.53), utilizando o referencial comóvel cuja velocidade \vec{v} considerada é a velocidade no sistema de coordenadas comóvel $\vec{r} = a\vec{q}$ definido na seção 5.3, as equações dinâmicas do fluido são as seguintes:

1) para o fluido bariônico:

$$a\dot{\delta}_{kb} = -\theta_b \quad (5.66)$$

$$\dot{\theta}_b + H\theta_b = -\frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^2} \delta_{kb} + a\Omega_v \delta_{kv} \right) - \frac{9}{2} \Omega_v (\omega_v \nu a \delta_{kv} - \xi_0 \rho^{\nu-1} \theta_v) \quad (5.67)$$

Na equação (5.67) foi definido que $\omega_v = \frac{p_v}{\rho_v}$, $\theta_b = i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_{kb}$ e $\theta_v = i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_{kv}$. Foi aplicada ainda a expansão de *Fourier*, considerando as coordenadas comóveis, que pode ser escrita como

$$\delta(\vec{q}, t) = \delta_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{q}} \quad (5.68)$$

É importante enfatizar que as quadri-velocidades dos fluidos não podem ser confundidas, pois cada fluido evolui de maneira própria, interagindo apenas gravitacionalmente, interação essa que é expressa pela equação de *Poisson*.

2) para o fluido viscoso:

$$\dot{\delta}_{kv} + 3\frac{\dot{a}}{a}\omega_v(\nu - 1)\delta_{kv} = -[1 + 2\omega_v] \frac{\theta_v}{a} \quad (5.69)$$

$$\dot{\theta}_v + \left[H - \frac{9}{2}\Omega_v \xi_0 \rho^{\nu-1} \right] \theta_v = \frac{k^2}{a^2} \frac{(\omega_v \nu a \delta_{kv} - \xi_0 \rho^{\nu-1} \theta_v)}{1 + \omega_v} - \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^2} \delta_{kb} + \Omega_v a \delta_{kv} \right) - \frac{9}{2} \Omega_v \omega_v \nu a \delta_{kv} \quad (5.70)$$

Todas as notações acima já foram definidas anteriormente.

O comportamento do contraste da densidade será definido pelas equações (5.66), (5.67), (5.69) e (5.70). Escrevendo agora essas equações em termos do fator de escala, para o fluido bariônico:

$$H(a) \frac{\partial \delta_{kb}}{\partial a} = -\frac{\theta_b}{a^2} \quad (5.71)$$

$$H(a) \left[\frac{\partial \theta_b}{\partial a} + \frac{\theta_b}{a} \right] = -\frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} \delta_{kb} + \Omega_v \delta_{kv} \right) - \frac{9}{2} \Omega_v \left(\omega_v \nu \delta_{kv} - \xi_0 \rho^{\nu-1} \frac{\theta_v}{a} \right) \quad (5.72)$$

e para o fluido viscoso:

$$H(a) \left[\frac{\partial \delta_{kv}}{\partial a} + \frac{3(\nu - 1)}{a} \omega_v \delta_k \right] = -(1 + 2\omega_v) \frac{\theta_v}{a^2} \quad (5.73)$$

$$H(a) \left[\frac{\partial \theta_v}{\partial a} + \frac{\theta_v}{a} \right] = \frac{k^2}{a^2} \left[\frac{\omega_v \nu \delta_{kv} - \xi_0 \rho^{\nu-1} \frac{\theta_v}{a}}{(1 + \omega_v) H_0^2} \right] - \frac{3}{2} \frac{\Omega_{b0}}{a^3} \delta_{kb} - \frac{3}{2} \Omega_v \left[\delta_{kv} - 3\omega_v \nu \delta_{kv} + 3\xi_0 \rho^{\nu-1} \frac{\theta_v}{a} \right] \quad (5.74)$$

Foi feita também a divisão de todos os termos do conjunto das equações acima por H_0^2 para tornar essas equações adimensionais. Para isso foi feita uma redefinição do parâmetro temporal $\bar{t} \rightarrow H_0 t$. Os parâmetros Ω_{b0} e Ω_v também foram redefinidos da forma $\Omega_{b0} = \frac{8\pi G \rho_{b0}}{3H_0^2}$ e $\Omega_v = \frac{8\pi G \rho_v}{3H_0^2}$.

5.5 Modelo neo-newtoniano viscoso com três fluidos: um fluido bariônico, um viscoso e um representando a constante cosmológica

As equações que descrevem a dinâmica de um fluido no modelo neo-newtoniano são as equações da continuidade (3.29), equação de Euler (3.30) e equação de Poisson (3.31) do modelo neo-newtoniano na seção 5.3. A vantagem de utilizar o modelo neo-newtoniano é poder considerar a pressão participando efetivamente das equações dinâmicas do sistema, e é na expressão da pressão que será incluída a viscosidade, como foi feito nos casos anteriores. Será considerado agora que o fluido cósmico que preenche o universo é formado pela combinação de três outros fluidos: um fluido que descreve matéria bariônica, um fluido viscoso e um fluido que representa a constante cosmológica Λ . A dinâmica de cada fluido é também determinada pelas equações neo-newtonianas e sua equação de estado. Para o caso do fluido bariônico a equação de estado é dada por:

$$p_b = 0. \quad (5.75)$$

Para o fluido viscoso a equação de estado é:

$$p_v = -\xi_0 \rho_v^\nu \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_v, \quad (5.76)$$

sendo ω_v , λ e ν constantes. Já para o fluido que representa a constante cosmológica, a equação de estado é:

$$p_L = -\rho_L \quad (5.77)$$

A dinâmica do sistema de base é escrita como a combinação das equações:

$$\dot{\rho}_b + 3H(t)\rho_b = 0, \quad (5.78)$$

$$\dot{\rho}_v + 3H(t)\rho_v - 3H(t)\xi_0\rho_v^\nu = 0, \quad (5.79)$$

$$\dot{\rho}_L = 0, \quad (5.80)$$

e também

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} - 2\Omega_L + \Omega_v - 9\Omega_v H(t)\xi_0\rho_v^{\nu-1} \right), \quad (5.81)$$

que é a equação da aceleração do fator de escala, onde ja foi utilizada a solução da equação 5.78, que resulta em $\rho_b = \frac{\rho_0}{a^3}$, sendo $\Omega_{b0} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}$. A equação (5.80) implica que a densidade da constante cosmológica é uma constante no tempo.

Para analisar como a inclusão da constante cosmológica influencia na formação de estruturas, vamos aplicar a teoria linear de perturbação, considerando relevantes apenas equações de primeira ordem na perturbação. Perturbando o sistema, obtêm-se as seguintes equações para as perturbações nas densidades :

1) para o fluido bariônico:

$$a\dot{\delta}_{kb} = -\theta_b, \quad (5.82)$$

$$\dot{\theta}_b + H\theta_b = -\frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^2} \delta_{kb} + a\Omega_v \delta_{kv} \right) - \frac{9}{2} \Omega_v (\omega_v \nu a \delta_{kv} - \xi_0 \rho^{\nu-1} \theta_v), \quad (5.83)$$

onde foi definido que $\omega_v = \frac{p_v}{\rho_v}$, $\theta_b = i\vec{k}\delta\vec{v}_{kb}$ e $\theta_v = i\vec{k}\delta\vec{v}_{kv}$. Foi aplicada ainda a expansão de *Fourier*, considerando as coordenadas comóveis. É importante enfatizar que as quadri-velocidades dos fluidos não podem ser confundidas, pois cada fluido evolui de maneira própria, interagindo apenas gravitacionalmente, interação essa que é expressa pela equação de *Poisson*.

2) para o fluido viscoso:

$$\dot{\delta}_{kv} + 3\frac{\dot{a}}{a}\omega_v(\nu - 1)\delta_{kv} = -[1 + 2\omega_v]\frac{\theta_v}{a}. \quad (5.84)$$

$$\dot{\theta}_v + \left[H - \frac{9}{2}\Omega_v\xi_0\rho^{\nu-1} \right] \theta_v = \frac{k^2}{a^2} \frac{(\omega_v\nu a\delta_{kv} - \xi_0\rho^{\nu-1}\theta_v)}{1 + \omega_v} - \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^2}\delta_{kb} + \Omega_v a\delta_{kv} \right) - \frac{9}{2}\Omega_v\omega_v\nu a\delta_{kv}. \quad (5.85)$$

Todas as notações acima já foram definidas anteriormente. Essas equações perturbadas são as mesmas equações que foram obtidas no caso neo-newtoniano viscoso, analisado na seção 5.4.

Capítulo 6

Espectro de Potência

Mesmo assumindo o Universo ser em média homogêneo e isotrópico, em escalas pequenas o Universo é altamente inhomogêneo, possuindo em certas regiões galáxias aglomeradas e em outras regiões um número muito menor delas com composições diferentes. Ao fazer observações do Universo, o que detectamos são essas inhomogeneidades, radiações emitidas por esses objetos, e para fazer uma comparação entre modelos cosmológicos e o que é observado, precisamos primeiro saber como obter os dados e como analisá-los para testar os modelos propostos.

Ao longo dos anos foram feitas várias tentativas de analisar a forma com que as galáxias estão distribuídas no Universo, e como normalmente a distribuição é muito complexa, não é muito vantajoso fazer análises pontuais para esses objetos celestes. Dessa forma, as análises e medidas de dados são feitas estatisticamente analisando-se as distribuições da densidade de massa.

A função estatística mais utilizada para medidas de galáxias e aglomerados é a função de correlação, que será discutida em seguida. Se pensarmos nas galáxias como pontos, devido a sua distância, e desconsiderarmos efeitos relativísticos, então a análise de distribuição de matéria no Universo se torna uma análise estatística da distribuição desses pontos. Considerando a densidade média de objetos sendo n , que está dentro de um volume δV , então a probabilidade δP de encontrar um objeto dentro do volume infinitesimal é

$$\delta P = n\delta V, \tag{6.1}$$

e ao integrar a equação acima encontra-se o número médio $\langle N \rangle$ de objetos dentro do volume V

$$\langle N \rangle = nV. \quad (6.2)$$

6.1 A função de correlação

A função de correlação de dois pontos ξ_c é definida sendo a probabilidade de encontrar um ponto em um elemento de volume δV_1 e ao mesmo tempo encontrar um outro em um volume δV_2 , considerando uma separação r_{12} . A probabilidade é escrita na seguinte forma:

$$\delta P = n^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 - \xi_c(r_{12})], \quad (6.3)$$

onde o fator n^2 torna a equação adimensional, e não se deve confundir a função de correlação ξ_c com a viscosidade ξ_0 apresentada nos capítulos anteriores nos casos de fluidos viscosos. A função de correlação de dois pontos mede, portanto, o quanto uma variável irá depender da outra. Estatisticamente na cosmologia a função de correlação irá medir o grau de dependência observado entre as posições das galáxias no Universo local, que devido à atração gravitacional acabam se aglomerando mais em certos pontos do que em outros gerando assim as inhomogeneidades. Caso o Universo fosse totalmente homogêneo e isotrópico a função de correlação seria nula e a probabilidade de encontrar um objeto não dependeria das posições dos objetos, assumindo a forma:

$$\delta P = n^2 \delta V_1 \delta V_2. \quad (6.4)$$

De certa forma podemos interpretar a função de correlação como uma forma de analisar a capacidade de aglomeração dos objetos, no sentido de que quão maior for a correlação entre galáxias, mais aglomeradas elas estarão. Ela pode assumir os valores entre:

$$-1 \leq \xi_c \leq 1, \quad (6.5)$$

sendo que $\xi_c = 0$ significa que a distribuição dos objetos é homogênea, se $\xi_c > 0$ significa que as posições dos objetos estão correlacionadas, e se $-1 \leq \xi_c < 0$ significa que as posições dos objetos estão anti-correlacionadas. Em outras palavras, quão mais positivo

for ξ_c significa uma maior aglomeração de galáxias, e um ξ_c negativo indica uma escassez de galáxias [20].

Apesar de o valor médio de δ ser nulo em todo o volume V por definição, a variância σ^2 , que é o quadrado do desvio padrão de δ , possui valores não nulos, e é escrita da forma:

$$\sigma^2 \equiv \langle \delta^2 \rangle = \sum_k \langle |\delta_k|^2 \rangle, \quad (6.6)$$

onde $\delta = \frac{\rho(t) - \rho_0}{\rho_0}$ é o contraste da densidade definido anteriormente. A quantidade δ_k é o coeficiente de *Fourier*, que aparece ao decompor o contraste da densidade em ondas planas. Conhecendo todos os possíveis δ_k pode-se reconstruir a flutuação da densidade δ . Observe que σ^2 possui apenas dependência temporal, que é a dependência de δ_k , portanto a variância de δ não depende da posição. A medida de σ^2 depende do volume V da célula do espaço de fase e também da direção do vetor de onda. Fazendo então o volume $V \rightarrow \infty$, retira-se a dependência de σ^2 com a direção de k , e a variância pode ser escrita na forma:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty P(k) k^2 dk. \quad (6.7)$$

Foi introduzida a variável $P(k)$ que é igual a δ_k^2 , e é chamada de espectro de potência do contraste da densidade δ [21]. A função $P(k)$ é a transformada de *Fourier* da função de correlação, ou de forma contrária:

$$P(\vec{k}) = \int \xi(\vec{r}) e^{\frac{i\vec{k}\vec{r}}{a}} d^3\vec{r}. \quad (6.8)$$

O espectro de potência é uma função Real, e nos dá informações sobre a distribuição de matéria, indicando para quais valores de k existe maior probabilidade de encontrar um objeto. Ele contém basicamente as mesmas informações que a função de correlação, deixando o critério de qual das duas funções utilizar de acordo com a conveniência e tem sido medidos por vários aparatos, como o *Sloan Digital Sky Survey (SDSS)*.

A variância pode ser escrita como:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(k) d \ln(k) \quad (6.9)$$

definindo então uma quantidade adimensional $\Delta(k)$:

$$\Delta(k) = \frac{1}{2\pi^2} P(k) k^3 \quad (6.10)$$

que representa a contribuição da variância por intervalo logarítmico em k [21].

6.2 Condições iniciais do espectro de potência

O espectro de potência real depende de vários termos. Supondo que o ponto de partida é um espectro inicial $P_i(k)$, que vem de uma época primordial, possui uma forma de potência:

$$P_k \propto k^{n_e}, \quad (6.11)$$

onde n_e é chamado de índice espectral. *Harrison e Zel'dovich* argumentaram que esse fator deveria ser $n_e \approx 1$ [22] devido a grande homogeneidade do Universo recente, e por isso $P(k)$ deveria ter amplitudes iguais para todas as escalas dentro do horizonte [23]. Essa proposta de *Harrison e Zel'dovich* possui uma concordância razoável com os dados observacionais.

Análises atuais indicam que para altos *redshifts* o comportamento do espectro de potência é linear, como em $P_i(k)$. A amplitude de $P(k)$ cresce até chegar em um pico máximo, como está apresentado na figura abaixo:

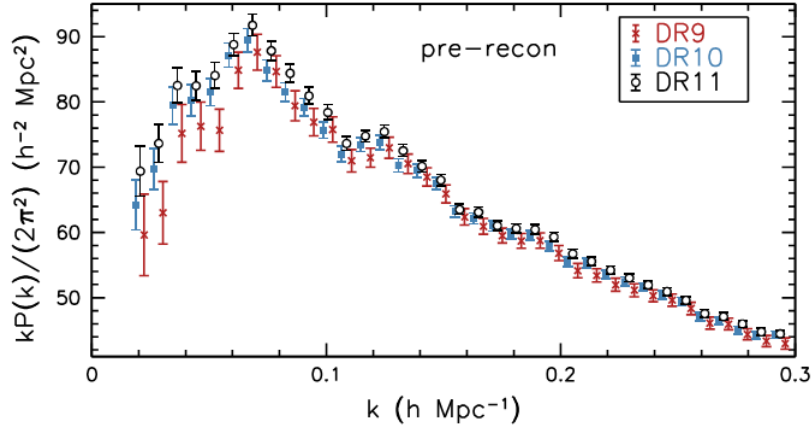


Figura 6.1: O espectro de potência de galáxias *CMASS*, multiplicado por k para cada um dos dados lançados do *BOSS* (*DR9*, *DR10* e *DR11*), plotado em função de k .

que ocorre aproximadamente em *redshifts* próximos à recombinação, que é próximo também do desacoplamento matéria-radiação. Para os valores de z menores, o comportamento de $P(k)$ apresenta uma queda de amplitude. Dados mais atuais estão sendo coletados pelo WiggleZ Dark Energy Survey [24], que planeja analisar as distribuições de galáxias para melhor compreensão da energia escura.

6.3 Forma de $P(k)$

Uma função importante, que irá contribuir para "trazer" o espectro de potência primordial $P_i(k)$ para o atual $P(k)$ é a função de transferência T_k . Ela descreve o efeito de redução das amplitudes das perturbações que estão dentro do horizonte, e é definida como :

$$T_k = \frac{\delta_k(z=0)}{\delta_k(z)g(z)}, \quad (6.12)$$

onde $g(z)$ é o fator crescimento linear entre o *redshift* z até hoje ($z=0$). A função de transferência causa um aumento na amplitude de P_i , mantendo sua forma linear.

A forma de $P(k)$ que será utilizada neste trabalho é a seguinte:

$$P(k) = |\delta_k|^2 = AkT_k^2(k) \frac{g^2(\Omega_0)}{g^2(\Omega_{m0})}, \quad (6.13)$$

onde Ω_{m0} é a soma das densidades relativas de matéria escura e matéria bariônica hoje, e Ω_0 é a quantidade total de matéria no Universo hoje. O termo A é uma constante de normalização, que pode ser fixada a partir de medidas do espectro das anisotropias da *CMB*,

$$A = \frac{95}{5} l_H^4 \pi^2 \frac{Q_{rms}^2}{T_0^2}, \quad (6.14)$$

onde $Q_{rms} = 18\mu k$ é o momento de quadripolo da *CMB*, que está consistente com medidas do *WMAP*, l_H é o raio de *Hubble*, que é aproximadamente $3000 \frac{Mpc}{h}$ e T_0 é a temperatura da *CMB*. Dessa forma podemos fixar $A = 6,8 \times 10^5 Mpc^4$. A função de transferência é uma função de interpolação de forma:

$$T(n) = \frac{\ln(1 + 2,34q)}{2,34q} [1 + 3,89q + (16,1q)^2 + (5,46q)^3 + (6,71q)^4]^{-\frac{1}{4}}, \quad (6.15)$$

chamada de função BBKS. O termo q é definido como um parâmetro adimensional:

$$q = q(n) = \frac{n}{n\Gamma Mpc^{-1}}, \quad (6.16)$$

em que $\Gamma = \Omega_{m0} h e^{-\Omega_{b0} - (\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{m0}})}$ é o parâmetro de *Sugiyama* [25].

Foi assumido ainda que a função de crescimento $g(\Omega)$ possui a forma abaixo, que pode ser encontrada em [26]

$$g(\Omega) = \frac{5\Omega}{2} \left[\Omega^{\frac{4}{7}} - \Omega_\Lambda + \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right) + \left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{70}\right) \right]^{-1} \quad (6.17)$$

que leva em conta o efeito da constante cosmológica Λ no processo de formação de estruturas, sendo Ω_Λ a fração de massa da constante cosmológica.

6.4 Método numérico

As equações diferenciais para a perturbação na densidade de matéria para os modelos analisados, como as equações (5.37) e (5.40), são muito complexas, portanto elas serão resolvidas numericamente. Por serem equações diferenciais de segunda ordem é necessário

conhecer as condições iniciais do problema. Portanto, o primeiro passo para resolver as equações diferenciais é encontrar quais são as condições iniciais para o problema em questão.

Para serem fixadas as condições iniciais, usa-se como base o modelo que é mais compatível com os dados observados no Universo hoje. Será utilizado então o modelo Λ CDM como base para serem fixadas as condições iniciais. Ainda, precisa-se escolher uma posição inicial, onde serão calculadas as condições iniciais. Esta posição inicial será considerado como sendo $z + 1 = 500$, já que o *redshift* também pode ser utilizado como medida de distância, como mostra a equação (2.43). Utiliza-se então as condições iniciais para o modelo Λ CDM sendo $\Omega_{b0} = 0.04$, $\Omega_{ME0} = 0.24$ e $\Omega_{\Lambda 0} = 0.72$ que representam as frações da massa que observamos hoje. Observe que essas condições iniciais de hoje são utilizadas para se obter, a partir do Λ CDM as condições iniciais no *redshift* que foi escolhido para os modelos deste trabalho. É ainda importante comentar que o *redshift* escolhido pode ser maior ou menor do que o escolhido para este trabalho, porém ele deve ser escolhido entre os intervalos de *redshift* que limitam a fase do Universo em que a matéria dominava.

Após fixadas as condições iniciais do modelo, resolve-se as equações de base para encontrar os valores de $H(a)$ e $\rho(a)$. Após todo este processo, resolve-se então as equações diferenciais para a perturbação. É considerado que cada modo perturbado corresponde a um valor de k . Faz-se então variar o número de onda, encontrando então os valores de $\delta(a)$, encontrando também o espectro de potência $P(k) = |\delta_k|^2$, que é o espectro de potência teórico para o modelo analisado.

Achado então o espectro de potência teórico, o passo seguinte é fazer a comparação com os dados observacionais. Para tal primeiramente define-se a probabilidade estatística \wp para o modelo, que é

$$\wp \propto e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \quad (6.18)$$

sendo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{P(k)_{\text{modelo}} - P(k)_{\text{obs}}}{\sigma_i} \right)^2, \quad (6.19)$$

para N dados da amostra, que é a função que quantifica a concordância entre modelo e dados observacionais. Portanto, ajustando os parâmetros do modelo para encontrar um valor mínimo para \wp , estaremos encontrando os valores para os parâmetros que melhor se

ajustarão ao modelo [27].

Esses passos serão usados para as análises do espectro de potência para os modelos perturbados para o caso newtoniano com dois fluidos, para o caso neo-newtoniano com dois fluidos e para o caso neo-newtoniano com dois fluidos e constante cosmológica. Os dados utilizados serão os obtidos pelo *2dF Galaxy Redshift Survey*.

6.4.1 2dF Galaxy Redshift Survey

O *2dF Galaxy Redshift Survey*, resumido como **2dFGRS**, é um projeto construído pelo Observatório Anglo-Australiano entre 1997 e 2002. A publicação final dos dados obtidos por esse mapeamento foi feita em 2003. Ele obteve o espectro de 245591 objetos, em principal galáxias e obteve o *redshift* para 221414 galáxias [28].

6.5 Análise do espectro de potência para o caso newtoniano com dois fluidos

Será feita agora a análise do espectro de potência para o caso da teoria newtoniana viscosa com dois fluidos, caso esse descrito na seção 5.4. As perturbações são dadas pelas equações (5.33), (5.36), (5.38) e (5.39). Essas equações serão resolvidas numericamente utilizando o *Mathematica 9.0*, e para isso é necessário deixá-las adimensionais e escritas em termos do fator de escala a . Serão fixados os parâmetros $\omega_v = 0.0001$, $\xi_0 = 0.0001$ e $\lambda = 0$. Reescrevendo então essas equações:

$$H(a) \frac{d\delta_{kb}}{da} = -\frac{\theta_b}{a^2} \quad (6.20)$$

$$H(a) \left[\frac{d\theta_b}{da} + \frac{\theta_b}{a} \right] = \frac{k^2}{a^2} \omega_b \lambda \rho_b^\lambda \frac{\delta_{kb}}{H_0} - \frac{3}{2} \frac{\Omega_{b0}}{a^3} \delta_{kb} - \frac{3}{2} \Omega_v \delta_{kv} \quad (6.21)$$

$$H(a) \frac{d\delta_{kv}}{da} = -\frac{\theta_v}{a^2} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned}
H(a) \left[\frac{d\theta_v}{da} + \frac{\theta_v}{a} \right] &= \frac{k^2}{a^2} \left[\omega_v \gamma \rho_v^{\gamma-1} \frac{\delta_{kv}}{H_0} - 3 \frac{H}{H_0} \xi_0 \nu \rho_v^{\nu-1} \delta_{kv} \right] - \\
&- \left[\frac{k^2}{a^2} \xi_0 \rho_v^{\nu-1} \frac{\theta_v}{H_0 a} \right] - \frac{3}{2} \frac{\Omega_{b0}}{a^3} \delta_{kb} - \frac{3}{2} \Omega_v \delta_{kv}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

onde já foi feita a redefinição de Ω_{m0} , Ω_v e t incluindo nessa redefinição os fatores H_0^2 . Os parâmetros dessa modelagem serão λ , Ω_{b0} e ν .

Será aplicado então o método descrito na seção 6.4 com as equações perturbadas acima para o conjunto de dados coletados pelo projeto **2dFGRS**. O espectro de potência hoje obtido através da função BBKS é mostrado na figura (6.2):

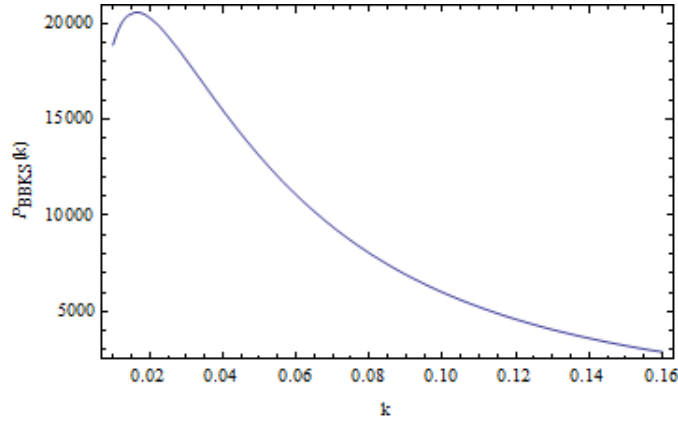
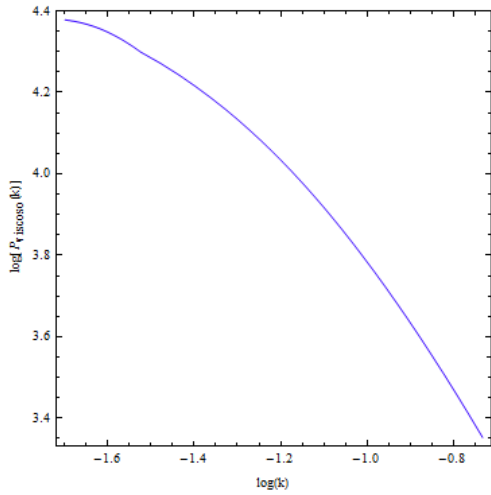
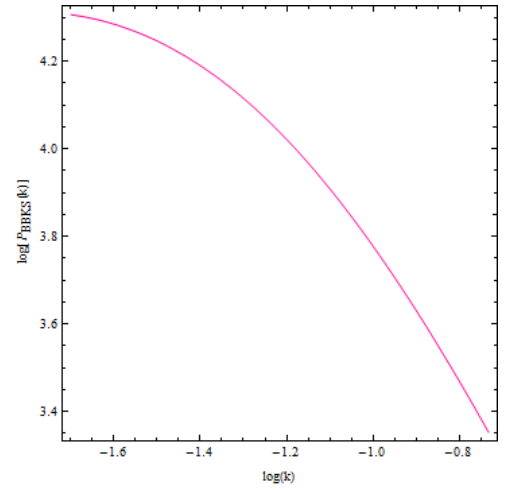


Figura 6.2: Espectro de potência hoje $P_{BBKS}(k)$, obtido a partir do espectro primordial através da função BBKS, em função de k , para as amostras *2dFGRS*.

Nas figuras (6.3(a)) e (6.3(b)) são mostrados os gráficos do $\log P(k)$ para o modelo viscoso (com os valores de melhor ajuste) e para o espectro de potência hoje devido à função de transferência BBKS, respectivamente, em termos de $\log k$. Já na figura (6.4), (6.3(a)) e (6.3(b)) são plotados simultaneamente, permitindo uma melhor comparação entre os resultados obtidos pelo modelo comparado com o logaritmo do espectro de potência hoje.



(a) $\log(P_{viscoso}(k))$ em função de $\log(k)$



(b) $\log(P_{\Lambda CDM}(k))$ em função de $\log(k)$

Figura 6.3: **Figura esquerda:** $\log(P_{viscoso}(k))$ em função de $\log(k)$ para o modelo newtoniano viscoso com dois fluidos para amostra 2dFGRS. **Figura direita:** $\log(P_{BBKS}(k))$ em função de $\log(k)$ para a amostra 2dFGRS.

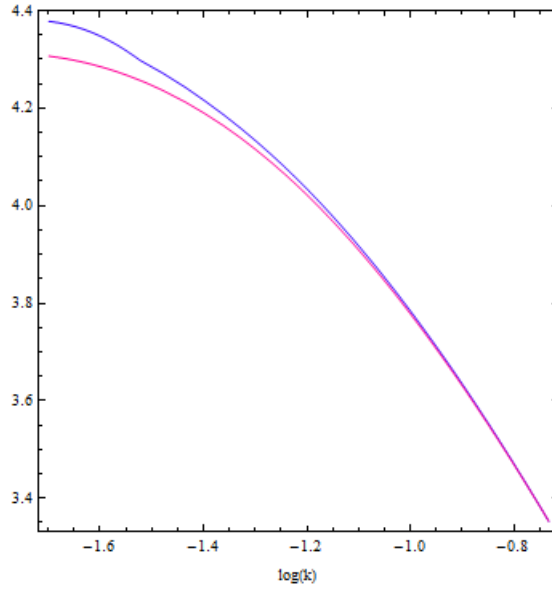


Figura 6.4: *Plot* duplo do espectro de potência $\log[P_{BBKS}(k)]$ (linha vermelha) com o espectro de potência $\log[P_{viscoso}(k)]$ (linha azul), em função de $\log(k)$ para o modelo newtoniano viscoso com dois fluidos, em um ajuste estatístico de $\chi_{min}^2 = 0.419517$.

É observado na figura (6.4) que existe uma boa correspondência entre o modelo newtoniano viscoso e o espectro P_{BBKS} apenas na região $\log k \gtrsim -1.1$, e para valores menores que $\log k \approx -1.1$ os resultados do espectro de potência obtidos pelos modelos começam a divergir uns dos outros.

Os valores estatísticos de melhor ajuste obtidos através do processo de minimização do χ^2 são: $\nu = -4.16818$, $\Omega_{b0} = 0.197784$ e $\gamma = 1.57778$ com um ajuste de $\chi_{min}^2 = 0.419517$. Considerando o valor de melhor ajuste para o γ e mantendo os parâmetros Ω_{b0} e ν livres, obtêm-se os valores desses parâmetros que melhor se ajustam à esse modelo, mostrados na figura (6.5).

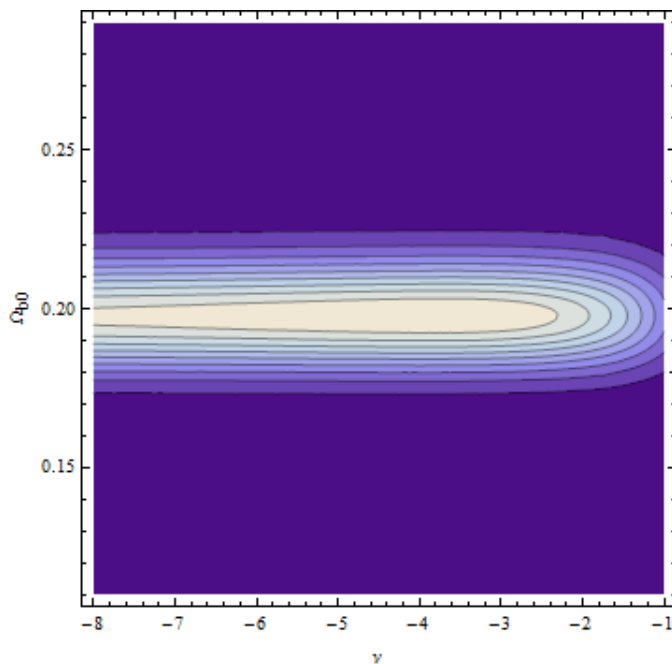


Figura 6.5: Valores de melhor ajuste para Ω_{b0} e ν com parâmetro $\gamma = 1.57778$ fixado através do ajuste estatístico de $\chi_{min}^2 = 0.419517$.

No gráfico (6.5) observa-se que os valores de melhor ajuste para Ω_{b0} de maior probabilidade são os de cor mais clara, e estão nas regiões de $0.19 \leq \Omega_{b0} \leq 0.21$. Comparando esses valores com o valor $\Omega_{b0\text{lit}} = 0.042$ obtido da literatura [29] com o obtido pelo modelo newtoniano viscoso $0.19 \leq \Omega_{b0} \leq 0.21$ é evidente que os valores previstos para a componente bariônica no Universo hoje estão superestimadas pelo modelo newtoniano, de acordo com as observações. Este valor também não está de acordo com o valor estimado pela nucleossíntese $\Omega_{b0} \approx 0.04$ [2]. Ainda, mesmo com o valor $\Omega_{b0\chi^2} = 0.197784$ estão muito acima do valor de $\Omega_{b0\text{lit}}$. A análise individual do parâmetro Ω_{b0} é obtida através do processo de integração e está esboçada na figura (6.6(a)), e para o parâmetro ν está na figura (6.6(b)). Os valores de melhor ajuste de ν não se comportam como uma forma gaussiana, indicando um valor máximo em $\nu \approx -3.8$, porém a probabilidade estatística

para ν muito negativos continua sendo relativamente alta. Este comportamento também pode ser observado no processo de ajuste utilizando χ^2 da figura (6.5).

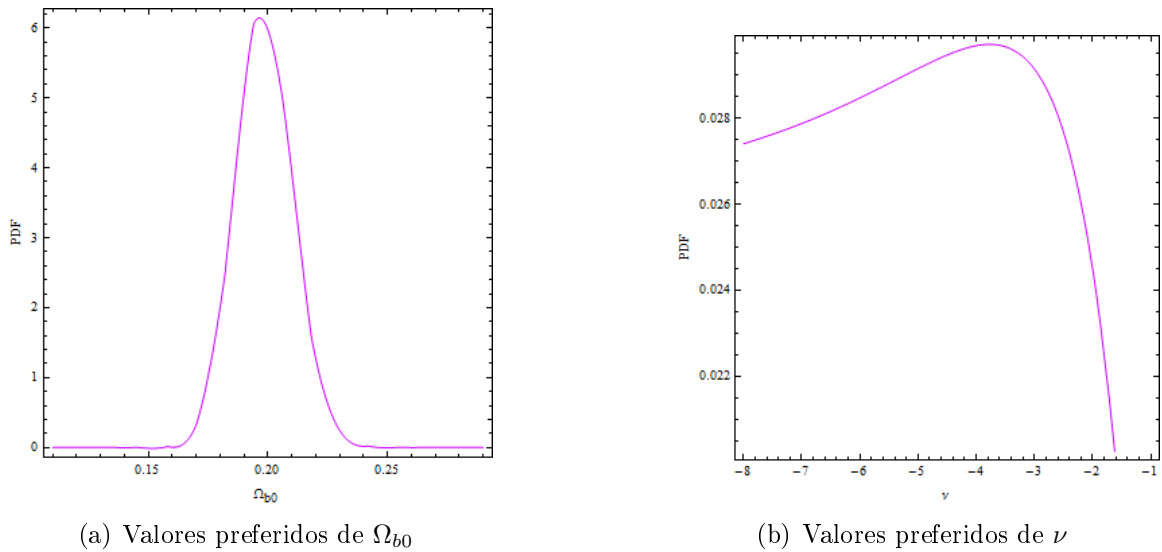


Figura 6.6: **Figura esquerda:** Valores preferidos de Ω_{b0} para o modelo newtoniano viscoso com dois fluidos para amostra **2dFGRS**. **Figura direita:** Valores preferidos de ν para o modelo newtoniano viscoso com dois fluidos para amostra **2dFGRS**.

Mantendo agora os três parâmetros livre, e realizando processos de integração na probabilidade estatística, obtém-se comportamento similar ao que foi discutido acima, como era esperado.

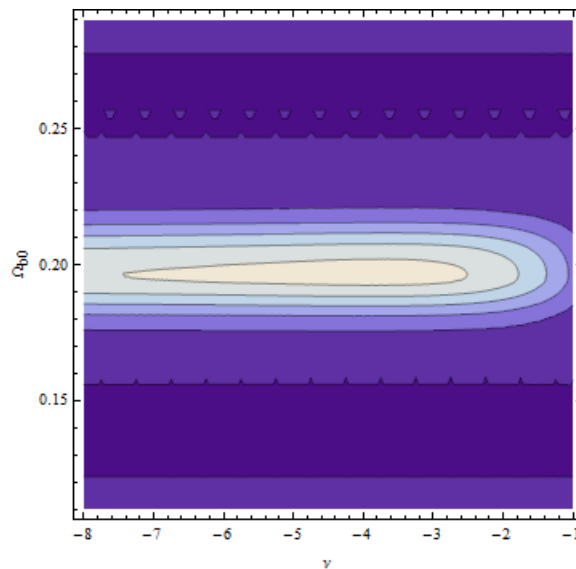
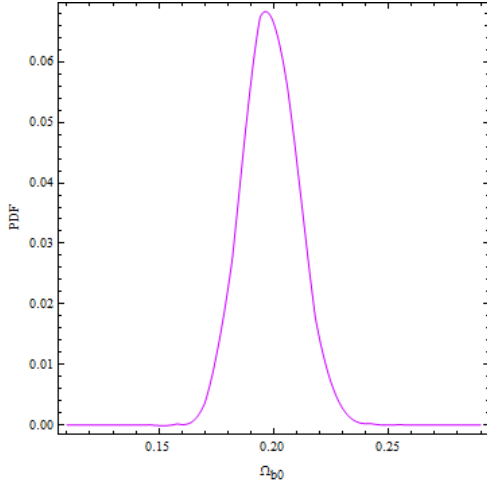
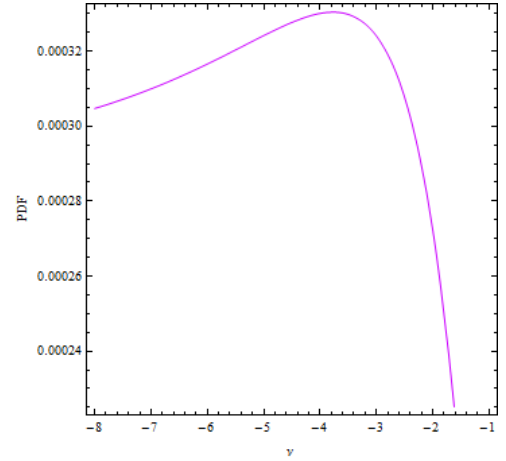


Figura 6.7: Valores de melhor ajuste para Ω_{b0} e ν , integrando os valores de λ entre 1.5 e 5/3.



(a) Valores preferidos de Ω_{b0}



(b) Valores preferidos de ν

Figura 6.8: **Figura esquerda:** Valores preferidos de Ω_{b0} para o modelo newtoniano viscoso através do processo de integração, para a amostra **2dFGRS**. **Figura direita:** Valores preferidos de ν para o modelo newtoniano viscoso com dois fluidos através do processo de integração, para amostra **2dFGRS**.

6.6 Análise do espectro de potência para o caso neo-newtoniano com dois fluidos

Nesta seção será analisado o modelo neo-newtoniano com dois fluidos, discutido na seção 5.4. As equações de base desse modelo que serão analisadas são as equações (5.58), (5.60), (5.62) e (5.64). Através delas resolve-se numericamente o parâmetro de Hubble H e a densidade viscosa ρ_v .

As equações perturbadas do modelo são (5.66), (5.67), (5.69) e (5.70), e a partir do método detalhado na seção 6.4, será calculado o espectro de potência $P_{viscoso}$ para este modelo. Será considerado que o Universo hoje possui $\Omega_{b0} = 0.04$, que está de acordo com a nucleossíntese primordial. Será considerado ainda que os parâmetros livres do sistema são os parâmetros viscosos ν e ξ_0 , entretanto os valores de ν foram vinculados a serem positivos. O programa utilizado para os cálculos numéricos será o *Mathematica 9.0*, utilizando a amostra de dados do 2dFGRS.

O processo de minimização da função χ^2 nos dá os valores preferidos de ν e ξ_0 para o modelo, que são $\nu_{min} = 0.318917$ e $\xi_{0min} = 0.00491275$, para um ajuste $\chi_{min}^2 = 0.363992$. Em comparação com $\chi_{min \Lambda CDM}^2 = 0.382248$, o ajuste deste modelo é ligeiramente melhor do que o ΛCDM . O espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ encontrado utilizando os valores

preferidos ν_{min} e ξ_{0min} está esboçado na figura (6.9).

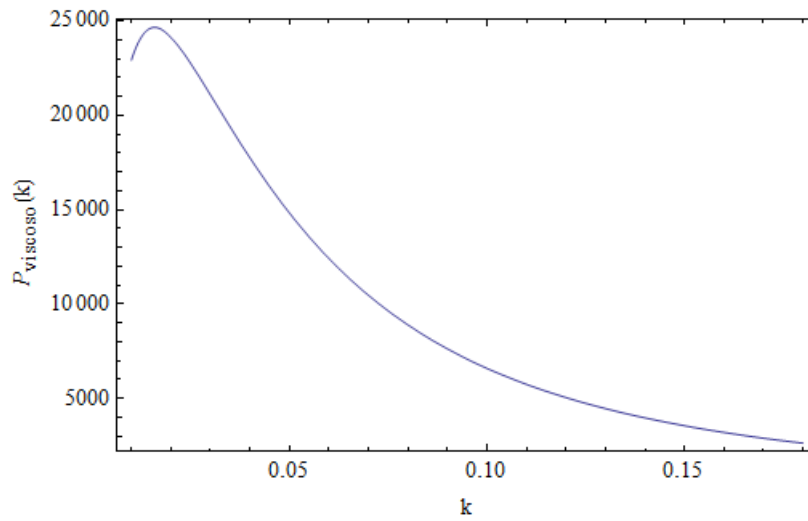


Figura 6.9: Espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ em função de k para o modelo neo-newtoniano viscoso utilizando os dados da amostra **2dFGRS**.

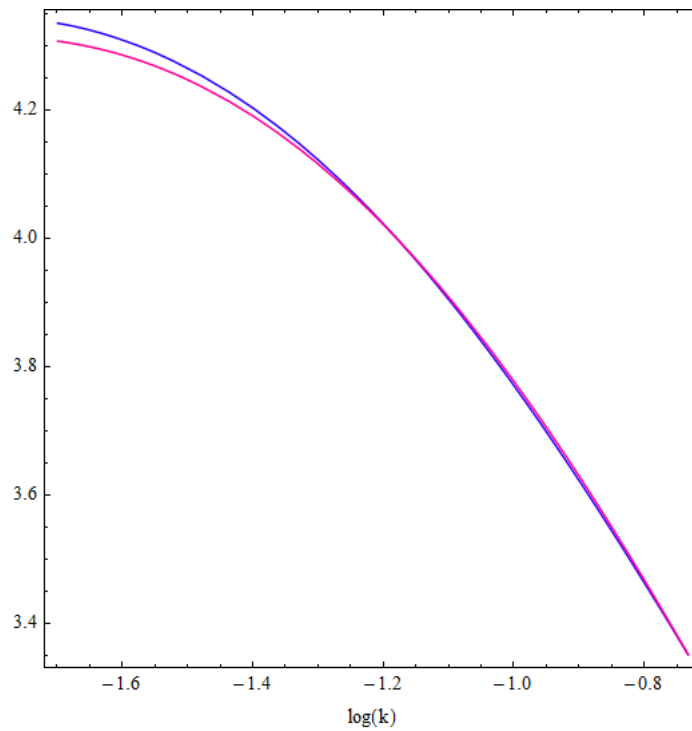


Figura 6.10: *Plot* duplo do espectro de potência hoje $\log[P(k)]$ (linha vermelha) com o espectro de potência viscoso $\log[P_{viscoso}(k)]$ (linha azul), em função de $\log(k)$ para o modelo neo-newtoniano viscoso, em um ajuste estatístico de $\chi_{min}^2 = 0.363992$.

Na figura (6.10) está apresentado um plot duplo do logaritmo do espectro de potência hoje $P(k)$ obtido através da função BBKS e o logaritmo do espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ encontrado para o modelo neo-newtoniano com dois fluidos, em função do logaritmo de k . Observa-se que há uma boa concordância entre os dois espectros, que começam a divergir para valores menores que $\log k \approx -1.26$.

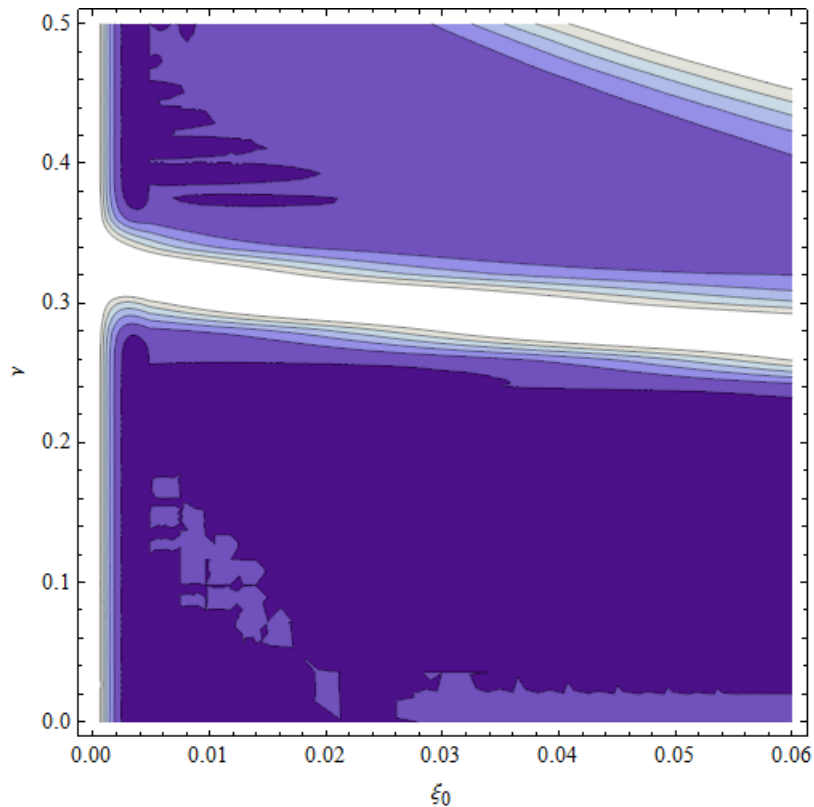
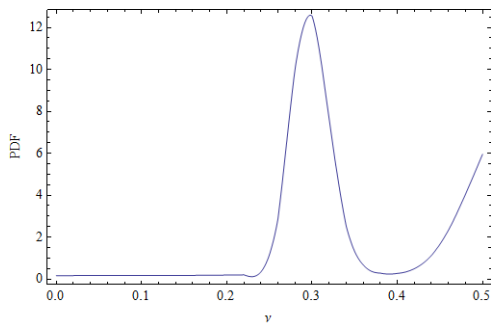


Figura 6.11: Valores preferidos de ν e ξ_0 para o modelo neo-newtoniano viscoso utilizando os dados da amostra **2dFGRS**.

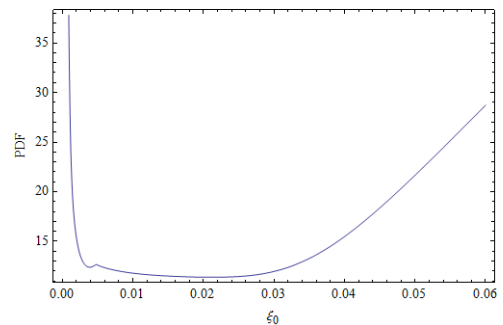
Fazendo uma análise estatística da probabilidade (PDF) utilizando os valores de χ^2 para cada valor de k , obtêm-se valores de melhor ajuste aos dados observacionais para os parâmetros do modelo. O gráfico (6.13) esboça os valores preferidos para os parâmetros ν e ξ_0 que melhor se ajustam aos dados observacionais. Neste gráfico as regiões de maior probabilidade possuem cores claras, quanto mais escura a cor vai ficando, menor a probabilidade dos valores serem bons ajustes. O comportamento de nu indica que as regiões de maior probabilidade estão entre os valores $0.29 \leq \nu \leq 0.35$ para todo o intervalo de ξ_0 analisado. Também há indícios de bons ajustes para regiões de $\nu \gtrsim 0.45$, porém ao

tentar aumentar os intervalos de análise começaram a surgir problemas computacionais relacionados à precisão.

Fazendo ainda integrações separadamente na função estatística de probabilidade para os parâmetros livres do sistema, encontra-se os valores preferidos de ν e ξ_0 , que estão plotados na figura (6.12). A variável ν apresenta um pico de probabilidade em $\nu = 0.29$ e também apresenta uma tendência a uma degenerescência para valores de $\nu > 0.4$ devido ao indício da existência de outro pico de probabilidade, porém como mencionado anteriormente, na tentativa de analisar regiões para valores maiores de ν existem complicações computacionais. Já a variável ξ_0 possui um comportamento peculiar, apresentando uma tendência de dois possíveis picos, um para valores menores que $\xi_0 = 0.003$, e outro para valores maiores que $\xi_0 = 0.03$.



(a) Valores preferidos de ν



(b) Valores preferidos de ξ_0

Figura 6.12: **Figura esquerda:** Valores preferidos de ν para o modelo newtoniano viscoso através do processo de integração, para a amostra **2dFGRS**. **Figura direita:** Valores preferidos de ν para o modelo newtoniano viscoso com dois fluidos através do processo de integração, para amostra **2dFGRS**.

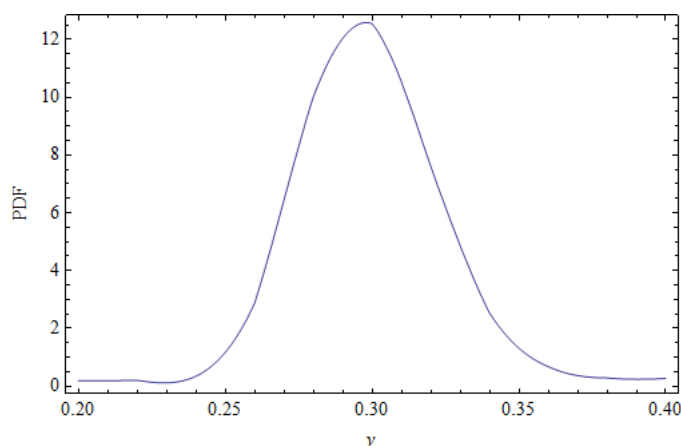


Figura 6.13: Uma ampliação do primeiro pico do gráfico (6.12(a)) para os valores preferidos de ν .

6.7 Análise do espectro de potência para o caso neo-newtoniano com três fluidos

6.7.1 Universo com $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.3$

Será considerado nesta seção o modelo neo-newtoniano com um fluido bariônico, um fluido viscoso e um fluido representando a constante cosmológica, que foi analisado na seção 5.5. As equações de base desse modelo que serão analisadas são as equações (5.78), (5.79), (5.80) e (5.81), que podem ser escritas como:

$$H(a) \left[\frac{d\rho_v}{da} + \frac{3}{a} (\rho_v - 3H(a)\xi_0\rho^\nu) \right] = 0, \quad (6.24)$$

$$\frac{dH}{da} Ha + H^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \Omega_v - 2\Omega_L - 9H\xi_0\Omega_v\rho^{\nu-1} \right) \quad (6.25)$$

$$\dot{\rho}_L = 0 \quad (6.26)$$

Através delas resolve-se numericamente o parâmetro de Hubble H e a densidade viscosa ρ_v .

As equações perturbadas do modelo são as mesmas que o caso neo-newtoniano viscoso com dois fluidos da seção 5.4, que são as equações (5.66), (5.67), (5.69) e (5.70), e a partir do método detalhado na seção 6.4, será calculado o espectro de potência $P_{viscoso}$ para este modelo. Será considerado que o Universo hoje possui $\Omega_{b0} = 0.04$, e também que o parâmetro de densidade para a constante cosmológica representada pelo fluido é $\Omega_L = 0.3$. Será considerado ainda que os parâmetros livres do sistema são os parâmetros viscosos ν e ξ_0 , entretanto os valores de ν são vinculados a serem positivos. O programa utilizado para os cálculos numéricos será o *Mathematica 9.0*, utilizando a amostra de dados do 2dFGRS.

O processo de minimização da função χ^2 nos dá os valores preferidos de ν e ξ_0 para o modelo, que são $\nu_{min} = 0.327343$ e $\xi_{0min} = 0.00282996$, para um ajuste $\chi_{min}^2 = 0.362564$. Em comparação com $\chi_{min \Lambda CDM}^2 = 0.382248$, o ajuste deste modelo é ligeiramente melhor

do que o Λ CDM. O espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ encontrado utilizando os valores preferidos ν_{min} e ξ_{0min} está esboçado na figura (6.14).

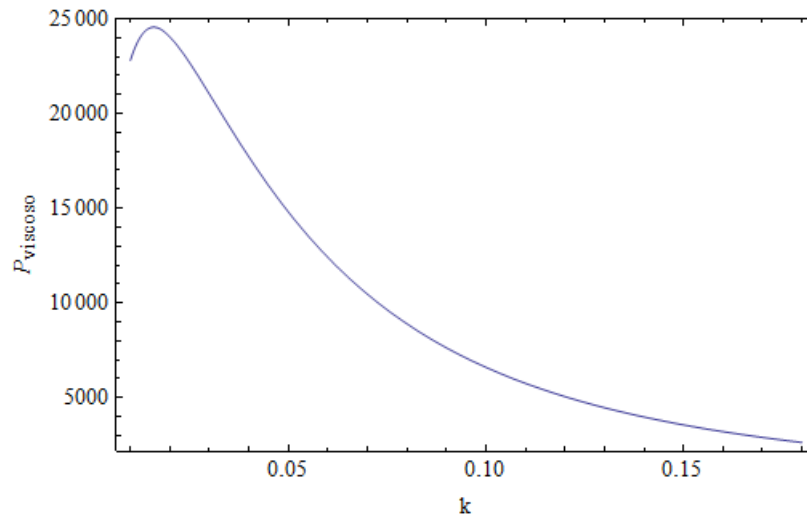


Figura 6.14: Espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ para os valores de melhor ajuste de $\nu = 0.327343$ e $\xi_0 = 0.00282996$ em função de $\log(k)$ para o modelo neo-newtoniano viscoso com três fluidos utilizando os dados da amostra **2dFGRS**.

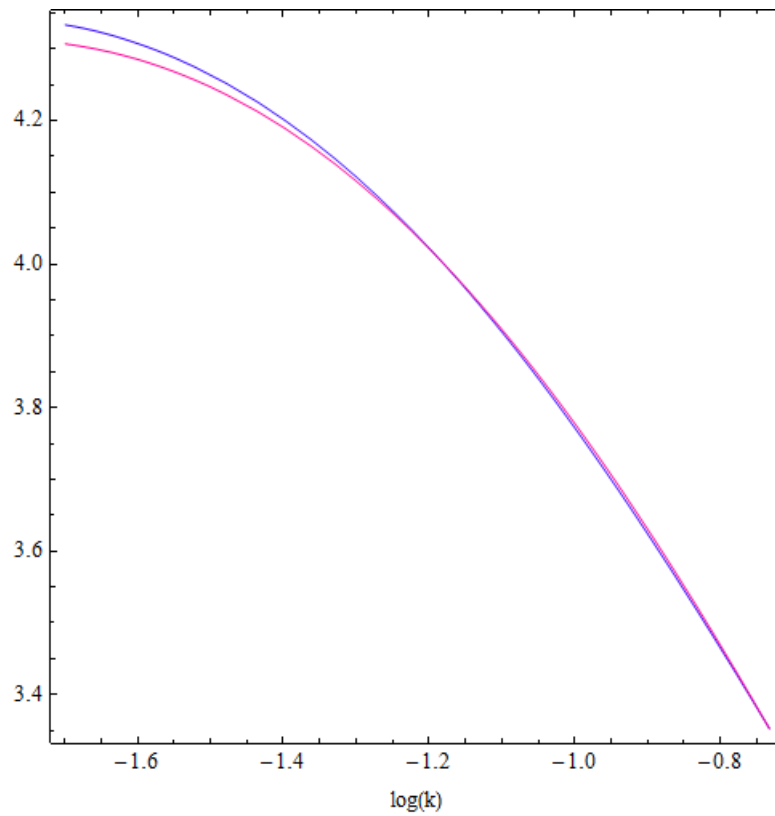


Figura 6.15: *Plot* duplo do logaritmo do espectro de potência primordial (linha vermelha) e o logaritmo do espectro de potência viscoso (linha azul) para os valores de melhor ajuste de $\nu = 0.327343$ e $\xi_0 = 0.00282996$ em função de $\log(k)$, utilizando os dados da amostra **2dFGRS**.

Na figura (6.15) está apresentado um *plot* duplo do logaritmo do espectro de potência hoje $P(k)$ obtido através da função BBKS e o logaritmo do espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ encontrado para o modelo neo-newtoniano com três fluidos, em função do logaritmo de k . Observa-se que há uma boa concordância entre os dois espectros, que começam a divergir para valores menores que $\log k \approx -1.30$.

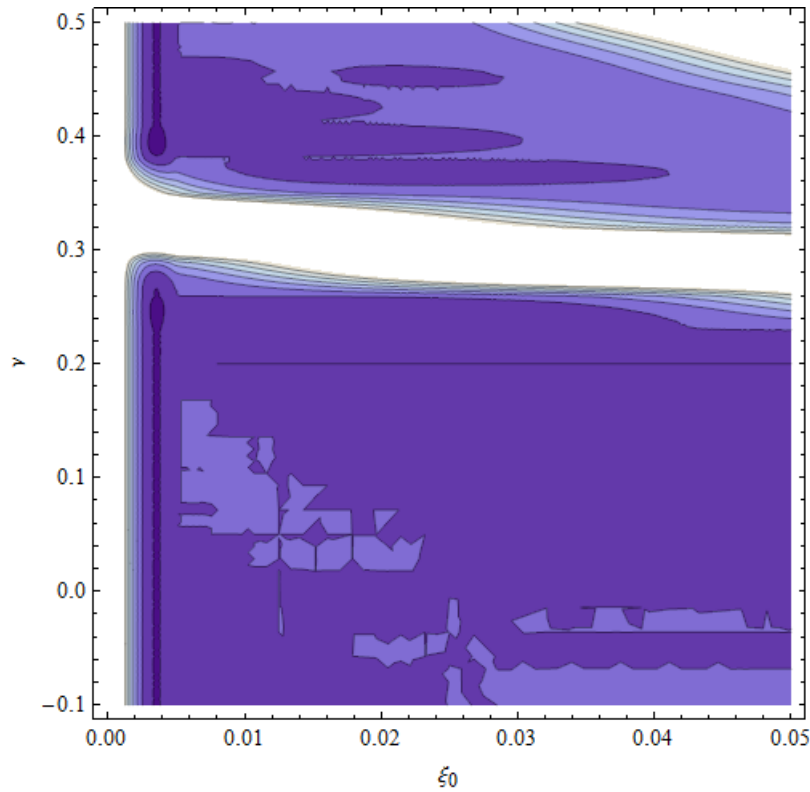


Figura 6.16: Valores preferidos de ν e ξ_0 do modelo neo-newtoniano viscoso com 3 fluidos, utilizando os dados da amostra **2dFGRS**.

Fazendo uma análise estatística da probabilidade (PDF) utilizando os valores de χ^2 para cada valor de k , obtêm-se valores de melhor ajuste aos dados observacionais para os parâmetros do modelo. O gráfico (6.22) esboça os valores preferidos para os parâmetros ν e ξ_0 que melhor se ajustam aos dados observacionais. O comportamento de nu indica que as regiões de maior probabilidade estão entre os valores $0.29 \leq \nu \leq 0.36$, apresentando uma leve declinação a medida ξ_0 aumenta, chegando a apresentar bons valores no intervalo

$0.26 \leq \nu \leq 0.31$ para $\xi_0 = 0.05$. Também há indícios de bons ajustes para regiões de $\nu \gtrsim 0.45$, que é um valor muito próximo ao que é encontrado na análise feita na seção 6.6, ocorrendo também problemas de precisão ao tentar investigar melhor esse intervalo.

Fazendo integrações separadamente na função estatística de probabilidade para os parâmetros livres do sistema, encontra-se os valores preferidos de ν e ξ_0 , que estão plotados na figura (6.17). A variável ν indica uma maior probabilidade nos intervalos $0.27 \leq \nu \leq 0.33$ e também apresenta uma tendência a uma degenerescência para valores de $\nu > 0.44$ devido ao indício da existência de outro pico de probabilidade. Já a variável ξ_0 possui um comportamento peculiar, apresentando uma tendência de dois possíveis picos, um para valores menores que $\xi_0 = 0.0036$, e outro para valores maiores que $\xi_0 = 0.003$. Os resultados para os valores de melhor ajuste para este caso são muito similares aos resultados obtidos no modelo neo-newtoniano com dois fluidos.

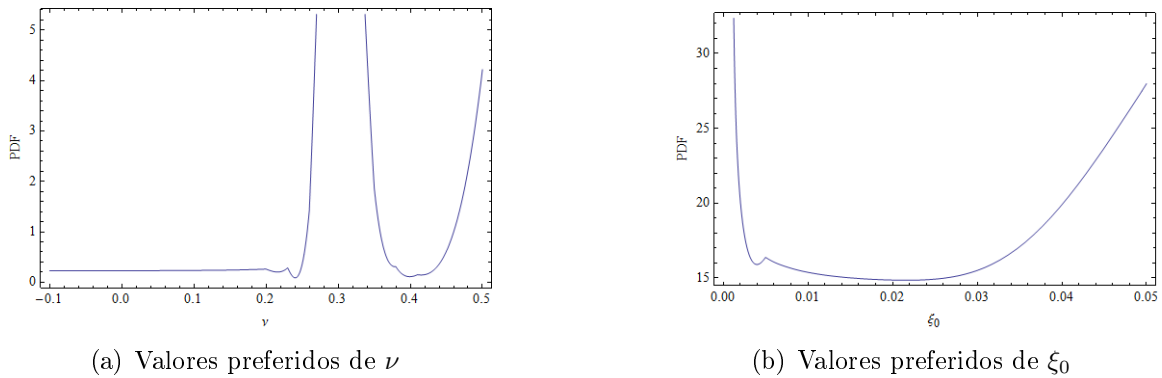


Figura 6.17: **Figura esquerda:** Valores preferidos de ν para o modelo newtoniano viscoso através do processo de integração, para a amostra **2dFGRS**. **Figura direita:** Valores preferidos de ξ_0 para o modelo neo-newtoniano viscoso com três fluidos através do processo de integração, para amostra **2dFGRS**.

6.7.2 Universo com $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.7$

Nesta seção será considerado o mesmo modelo neo-newtoniano com três fluidos analisado na seção 6.7.1, porém para o caso onde $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.7$. As equações de base e equações perturbadas são as mesmas analisadas em (6.7.1). Os parâmetros livres do sistema são os parâmetros viscosos ν e ξ_0 , sendo os valores de ν são vinculados a serem positivos. O programa utilizado para os cálculos numéricos será o *Mathematica 9.0*, utilizando a amostra de dados do 2dFGRS.

O processo de minimização da função χ^2 nos dá os valores preferidos de ν e ξ_0 para o

modelo, que são $\nu_{min} = 0.335828$ e $\xi_{0min} = 0.00139273$, para um ajuste $\chi_{min}^2 = 0.359894$. Em comparação com $\chi_{min \Lambda CDM}^2 = 0.382248$, o ajuste deste modelo é ligeiramente melhor do que o ΛCDM . O espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ encontrado utilizando os valores preferidos ν_{min} e ξ_{0min} está esboçado na figura (6.18).

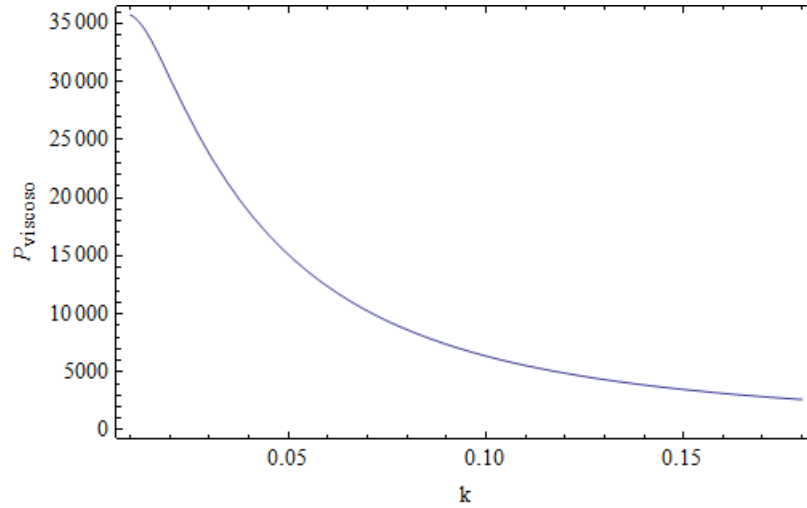


Figura 6.18: Espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ para os valores de melhor ajuste de $\nu = 0.335828$ e $\xi_0 = 0.00139273$ em função de $\log(k)$ para o modelo neo-newtoniano viscoso com três fluidos utilizando os dados da amostra **2dFGRS**.

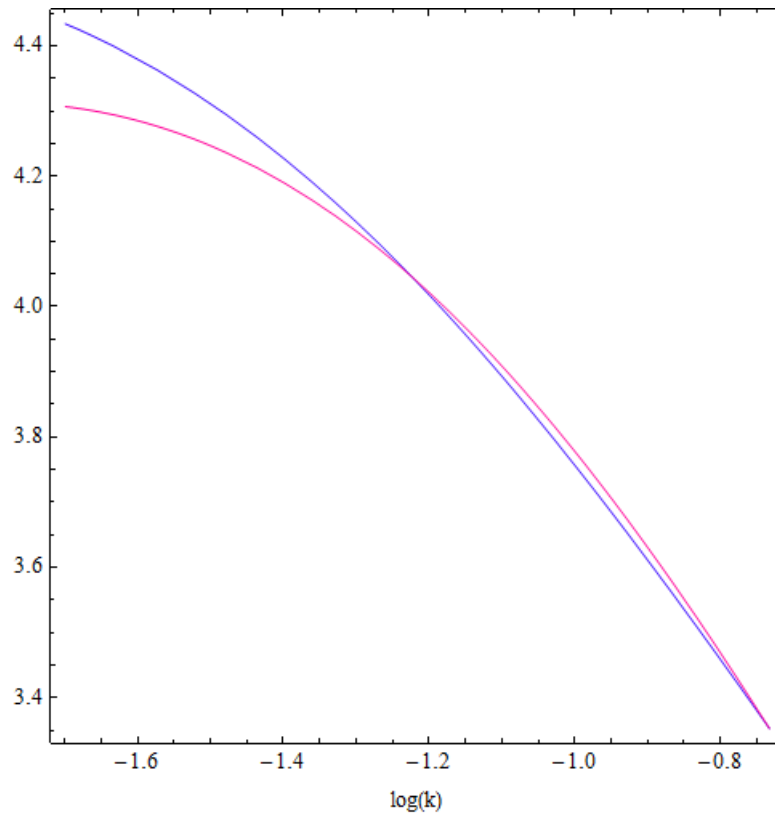


Figura 6.19: *Plot* duplo do logaritmo do espectro de potência primordial (linha vermelha) e o logaritmo do espectro de potência viscoso (linha azul) para os valores de melhor ajuste de $\nu = 0.332908$ e $\xi_0 = 0.00176314$ em função de $\log(k)$, utilizando os dados da amostra **2dFGRS**.

Na figura (6.19) está apresentado um *plot* duplo do logaritmo do espectro de potência hoje $P(k)$ obtido através da função BBKS e o logaritmo do espectro de potência $P_{viscoso}(k)$ encontrado para o modelo neo-newtoniano com três fluidos, em função do logaritmo de k . Observa-se ligeiras discordâncias entre os dois espectros no intervalo de k analisado.

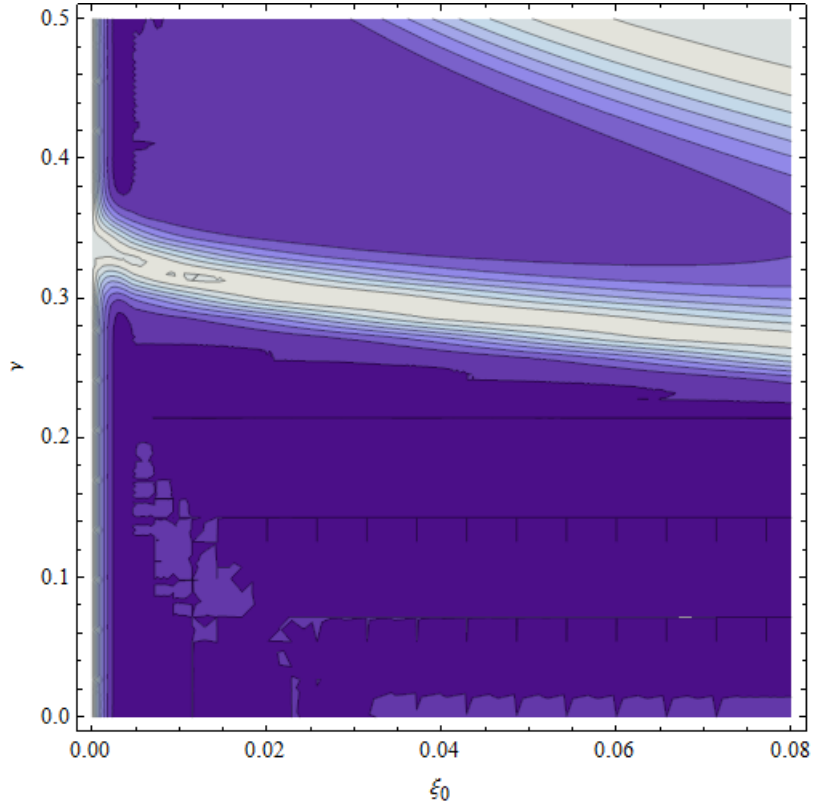
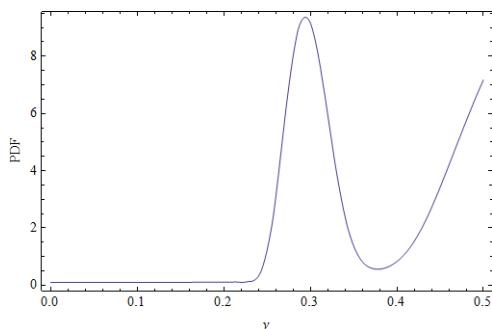


Figura 6.20: Valores preferidos de ν e ξ_0 do modelo neo-newtoniano viscoso com 3 fluidos, utilizando os dados da amostra **2dFGRS**.

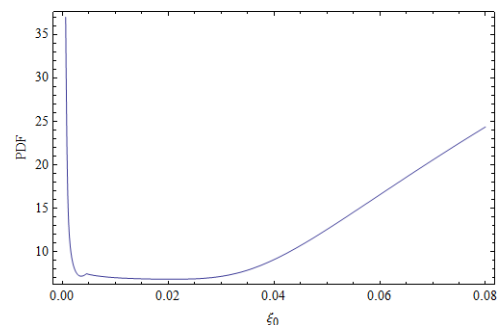
Fazendo a análise estatística da probabilidade (PDF) utilizando os valores de χ^2 para cada valor de k , obtêm-se valores de melhor ajuste aos dados observacionais para os parâmetros do modelo. O gráfico (6.20) esboça os valores preferidos para os parâmetros ν e ξ_0 que melhor se ajustam aos dados observacionais. O comportamento de nu indica que as regiões de maior probabilidade estão entre os valores $0.312 \leq \nu \leq 0.355$ para $\xi_0 = 0$, apresentando uma grande inclinação a medida ξ_0 aumenta, chegando a apresentar bons

valores no intervalo $0.26 \leq \nu \leq 0.27$ para $\xi_0 = 0.08$. Também há indícios de bons ajustes para regiões de $\nu \gtrsim 0.46$, que é um valor muito próximo à região encontrada nas seções anteriores (6.6 e 6.7.1), ocorrendo também problemas de precisão ao tentar investigar melhor esse intervalo.

Fazendo integrações separadamente na função estatística de probabilidade para os parâmetros livres do sistema, encontra-se os valores preferidos de ν e ξ_0 , que estão plotados na figura (6.17). A variável ν indica uma maior probabilidade em $\nu \approx 0.2943$ e também apresenta uma tendência a uma degenerescência para valores de $\nu > 0.44$ devido ao indício da existência de outro pico de probabilidade. Já a variável ξ_0 possui um comportamento peculiar, apresentando uma tendência de dois possíveis picos, um para valores menores que $\xi_0 = 0.036$, e outro para valores maiores que $\xi_0 = 0.003$. Os resultados para os valores de melhor ajuste para este caso são muito similares aos resultados obtidos no modelo neo-newtoniano com dois fluidos e também no caso do modelo neo-newtoniano com três fluidos em um Universo com $\Omega_L = 0.3$.



(a) Valores preferidos de ν



(b) Valores preferidos de ξ_0

Figura 6.21: **Figura esquerda:** Valores preferidos de ν para o modelo newtoniano viscoso através do processo de integração, para a amostra **2dFGRS**. **Figura direita:** Valores preferidos de ξ_0 para o modelo neo-newtoniano viscoso com três fluidos através do processo de integração, para amostra **2dFGRS**.

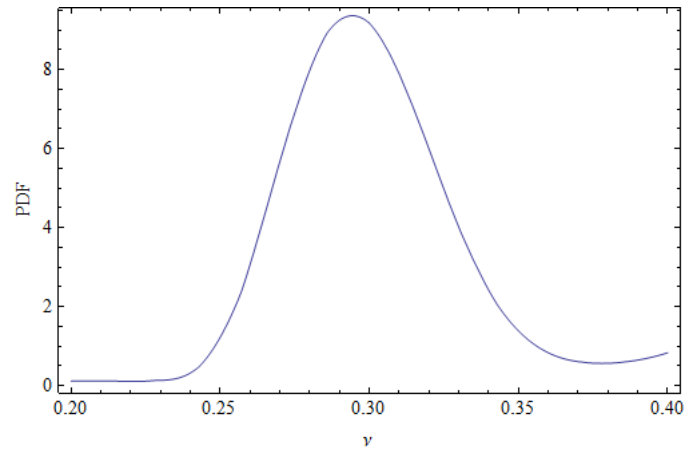


Figura 6.22: Uma ampliação do primeiro pico do gráfico (6.17(a)) para os valores preferidos de ν .

Capítulo 7

Teste com supernovas tipo Ia

As supernovas tipo Ia são fenômenos que acontecem quando uma anã branca que está em um sistema binário recebe um acréscimo de massa suficiente de seu parceiro até chegar ao limite de Chandrasekhar, que é o limite máximo de massa que a pressão gerada pelo elétrons da anã branca consegue manter. Passado esse limite, a anã branca se torna instável causando explosões termonucleares que podem ser observadas a milhares de megaparsecs. Como a estrela em colapso sempre possui massa perto do limite de Chandrasekhar, a intensidade luminosa emitida por diferentes estrelas é praticamente a mesma, tornando eventos de supernova Ia boas velas padrão [30]. Elas ainda são estimadas a estarem a poucos *redshifts* de nós, e possuem linhas espectrais bem conhecidas, portanto quanto maior o desvio espectral observado para a supernova, maior a distância ela estará de nós.

7.0.3 Distância luminosidade

Uma forma de medir distâncias com supernovas tipo Ia é a distâncias de luminosidade, que nos permite medir distâncias de galáxias a *redshifts* grandes. Quando se referencia a *redshifts* grandes se refere a valores de $z > 0.1$, que são distâncias onde não se pode mais ignorar efeitos devido a expansão do Universo. Essas medidas nos permitem calcular se o Universo está ou não se expandindo de forma acelerada.

Para fontes próximas a luminosidade aparente l para uma fonte luminosa que emite

luminosidade L a uma distância d de um observador é:

$$l = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (7.1)$$

e define-se distância luminosidade d_L como sendo:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \quad (7.2)$$

Porém, para distâncias cosmológicas vários efeitos devem ser levados em consideração, como a diferença entre a área da fonte luminosa que emitiu a radiação e a observada na Terra, a taxa de emissão de fótons ser diferente da taxa de chegada ao observador na Terra e a diferença entre a energia dos fótons emitidos e dos recebidos. Dessa forma, levando todos esses fatores em consideração, a luminosidade aparente é:

$$l = \frac{L}{4\pi r_l^2 a^2(t_0)(1+z)^2}, \quad (7.3)$$

sendo r_l a coordenada radial da fonte emissora e $a(t_0)$ o fator de escala hoje. Nessa sequência, a distância de luminosidade d_L pode ser definida como [30],

$$d_L = a(t_0)r_l(1+z). \quad (7.4)$$

Ainda, para uma métrica plana, d_L pode ser escrito em termos do fator de Hubble, da forma:

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (7.5)$$

Ao analisar um modelo, o ideal é que sejam feitos vários testes com eles, analisando de todas as formas possíveis o modelo com os dados observacionais. Existem vários testes que podem ser feitos, como a análise do espectro de potência, o teste com supernovas, o *BAO*. Todos esses testes estão relacionados com a formação de estruturas no Universo.

O teste com supernovas precisa do *redshift* e da magnitude de radiação, que mede o fluxo de radiação em um receptor. Para um objeto que se conhece a luminosidade aparente l , que foi definida em (7.1), define-se a magnitude bolométrica aparente, que

considera todos os comprimentos de onda da radiação, como:

$$m \equiv -2.5 \log(f) + C, \quad (7.6)$$

sendo C uma constante que depende da escala de medida. Ainda, usando a definição (7.1) pode-se reescrever a magnitude bolométrica aparente na forma:

$$m \equiv -2.5 \log\left(\frac{L}{4\pi d_L^2}\right) + C. \quad (7.7)$$

Quando a fonte luminosa estiver à uma distância luminosa igual a $10pc$ então:

$$M \equiv -2.5 \log\left(\frac{L}{4\pi(10)^2}\right) + C. \quad (7.8)$$

A quantidade M será chamada de magnitude bolométrica absoluta.

A partir da diferença entre as duas quantidades acima definimos o módulo de distância μ :

$$\mu = m - M = -2.5 \log\left(\frac{10^{-5}}{d_L^2}\right). \quad (7.9)$$

onde já foi feita a conversão $10pc = 10^{-5}Mpc$. Porém, para a análise computacional é mais conveniente escrever a equação acima como:

$$\mu = 5 \log\left((1+z) \int_0^{z'} \frac{dz'}{H(z')}\right) + 25 \quad (7.10)$$

7.1 O método

O método numérico para fazer a análise de supernovas consiste em alguns passos. Primeiro resolve-se as equações de base em função do do modelo *redshift* para encontrar a forma do parâmetro de *Hubble* $H(z)$, integrando sobre todo o *redshift*, no caso foi considerado a integração entre os intervalos $z = 0$ e $z = 2$. Após encontrada a função $H(z)$, resolve-se a equação (7.10) para encontrar os valores de μ em função dos parâmetros do modelo, que para o caso do modelo viscoso são χ_0 e ν .

Após feito o cálculo teórico do módulo da distância, deve-se comparar os dados teóricos com os observacionais, que é feito a partir da função ξ^2 . Essa função é definida de forma

semelhante ao caso do espectro de potência, porém aqui as funções comparadas serão os módulos de distância observacionais μ_{obs} com os módulos de distância teóricos μ_{teo} ,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mu_{modelo(i)} - \mu_{obs}(z_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (7.11)$$

para o número total N de supernovas analisadas, e o erro σ_i das medidas. Após encontrado, acha-se o valor que minimiza a função χ^2 , que nos dará os valores que melhor se ajustam ao modelo. Os dados que serão utilizados são resultados do *Union 2.0* [31], lançados em 2010, que foram calibrados com o filtro SALTII [32]. Os dados podem ser encontrados no próprio site do projeto <http://supernova.lbl.gov/>.

7.2 Análise de supernovas com o modelo neo-newtoniano com dois fluidos

Será feita nesta seção a análise do modelo neo-newtoniano de dois fluidos com dados de supernovas tipo Ia, utilizando os dados da amostra Union 2. É considerado um Universo com $\Omega_{b0} = 0.04$, as equações de base utilizadas são (5.59), (5.61), (5.63) e (5.65). Os parâmetros livres desse modelo são o parâmetro de Hubble H , e os parâmetros de viscosidade ν e ξ_0 , ν estando livre para variar entre valores negativos e positivos. Utilizando então os passos descritos anteriormente neste mesmo capítulo na seção 7.1, será calculado o módulo de distância e avaliado os melhores ajustes para os parâmetros livres do sistema em relação aos dados observacionais. Toda a análise numérica foi feita utilizando o *Mathematica 9.0*.

Através do cálculo de minimização da função χ^2 (7.11) encontrou-se os valores preferidos de H , ν e ξ_0 , que são $H_{min} = 0.701628$, $\nu_{min} = -0.735962$ e $\xi_0 = 0.242566$, para um ajuste de $\chi_{min}^2 = 542.609$. Fixando o valor de H em seu valor preferido $H = H_{min}$, o comportamento dos outros parâmetros que melhor se ajustam aos dados observacionais é apresentado na figura (7.1). Os valores de ξ_{min}^2 estão coerentes com os valores encontrados na literatura.

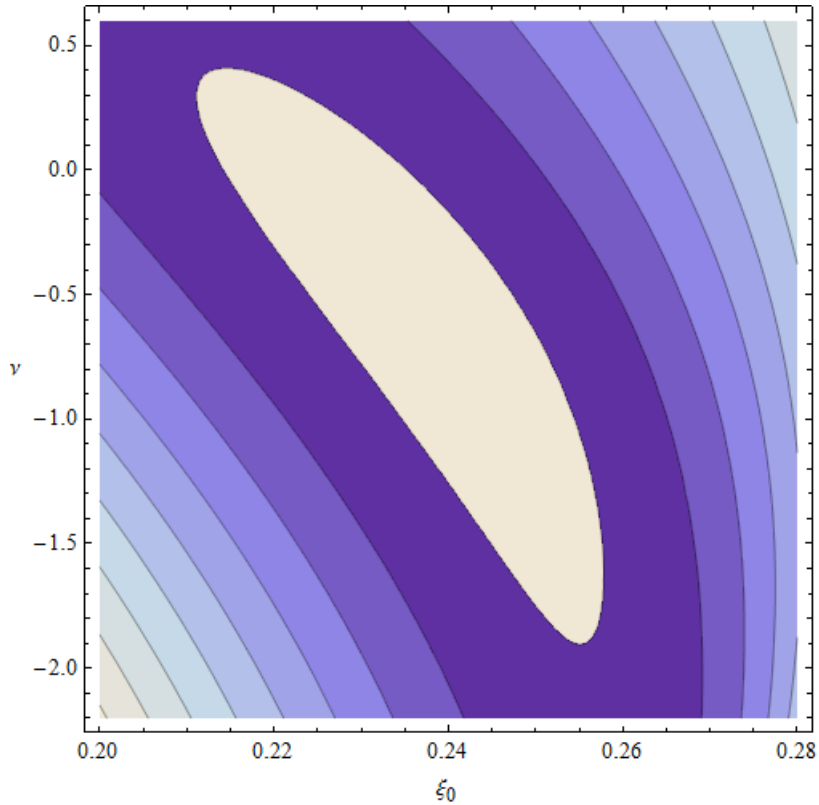


Figura 7.1: O gráfico acima é o plot do módulo da distância μ em função dos parâmetros de viscosidade ξ_0 e ν para os dados do Union 2, em um ajuste estatístico de $\chi^2 = 542.609$.

Fazendo uma análise estatística da probabilidade (PDF) utilizando os valores de χ^2 para cada valor de k , obtêm-se valores de melhor ajuste aos dados observacionais para os parâmetros do modelo. Integrando essa probabilidade em H , obtêm-se os valores preferidos para os parâmetros ν e ξ_0 que melhor se ajustam aos dados observacionais. O gráfico (7.2) esboça os valores preferidos de ν e ξ_0 . Neste gráfico as regiões de maior probabilidade possuem cores claras, quanto mais escura a cor vai ficando, menor a probabilidade dos valores serem bons ajustes. Observa-se que existe uma grande região central cujos valores de ν e ξ_0 possuem boa compatibilidade com os dados observacionais, e essa região se estende até valores negativos de ν .

Fazendo ainda integrações separadamente na função estatística de probabilidade para os outros parâmetros livres do sistema, encontra-se os valores preferidos de ν e ξ_0 , que estão plotados na figura (7.3). A variável ν apresenta uma maior probabilidade em $\nu \approx -0.951$, e a variável ξ_0 possui uma maior probabilidade em $\xi_0 \approx 0.2439$.

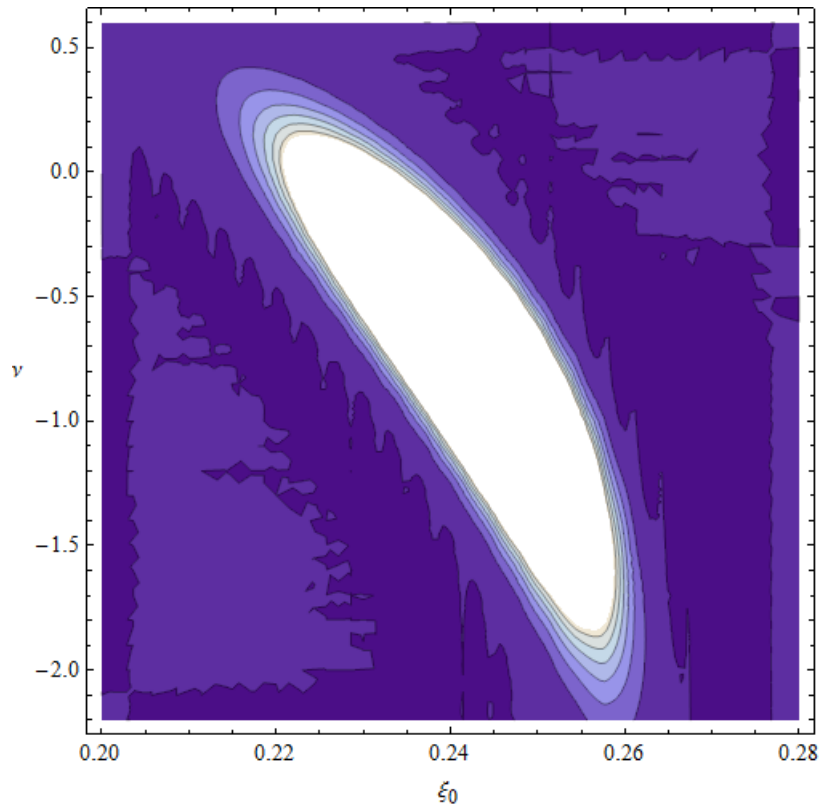
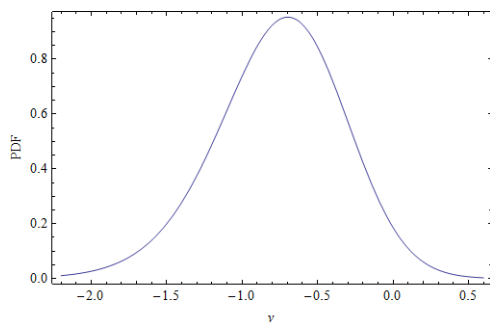
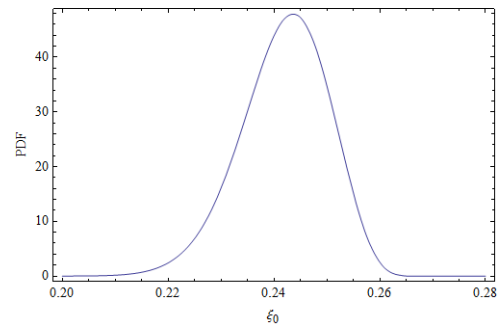


Figura 7.2: O gráfico acima é o plot do módulo da distância μ em função dos parâmetros de viscosidade ξ_0 e ν para os dados do Union 2, com parâmetro de Hubble fixado em 0.701628.



(a) Valor preferido de ν



(b) Valor preferido de ξ_0

Figura 7.3: **Figura a:** Valor preferido de ν para amostra Union 2. **Figura b:** Valor preferido de ξ_0 para amostra Union 2.

7.3 Análise de supernovas com o modelo neo-newtoniano com três fluidos

Será feita nesta seção a análise do modelo neo-newtoniano de três fluidos com dados de supernovas tipo Ia, utilizando os dados da amostra Union2. As equações de base utilizadas são (5.78), (5.79), (5.80) e (5.81). Essas equações também podem ser escritas como:

$$H(z) \left[(1+z) \frac{\partial \rho_v}{\partial z} + 3(\rho_v - 3H\xi_0 \rho_v^\nu) \right] = 0, \quad (7.12)$$

$$(1+z) \frac{\partial H}{\partial z} H + H^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \Omega_v - 2\Omega_L \right) + \frac{9}{2} \Omega_v \frac{\dot{a}}{a} \xi_0 \rho_v^{\nu-1}, \quad (7.13)$$

onde já foi aplicada a solução para a densidade bariônica $\rho_b = \frac{\rho_0}{a^3}$. Os parâmetros livres desse modelo são o parâmetro de Hubble H , e os parâmetros de viscosidade ν e ξ_0 , ν estando livre para variar entre valores negativos e positivos.

7.3.1 O Universo composto por $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.3$

Considerando um Universo com $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.3$, utilizou-se os passos descritos na seção 7.1 para calcular o módulo de distância e avaliar os melhores ajustes para os parâmetros livres do sistema em relação aos dados observacionais. Toda a análise numérica foi feita utilizando o *Mathematica 9.0*.

Através do cálculo de minimização da função χ^2 (7.11) encontrou-se os valores preferidos de H , ν e ξ_0 , que são $H_{min} = 0.701639$, $\nu_{min} = -0.197608$ e $\xi_0 = 0.182738$, para um ajuste de $\chi_{min}^2 = 542.66$. Fixando o valor de H em seu valor preferido $H = H_{min}$, o comportamento dos outros parâmetros que melhor se ajustam aos dados observacionais é apresentado na figura (7.4). A região de maior probabilidade, indicada pela cor branca, é claramente menor do que o observado no modelo com dois fluidos no gráfico (7.1).

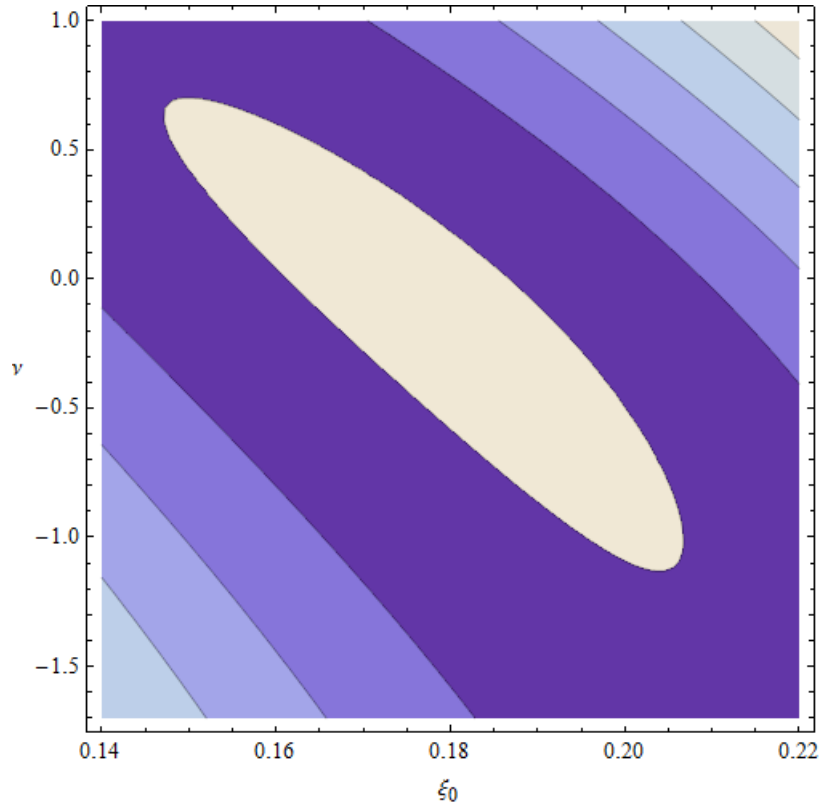


Figura 7.4: O gráfico acima é o plot do módulo da distância μ em função dos parâmetros de viscosidade ξ_0 e ν para os dados do Union 2, com parâmetro de Hubble fixado em 0.701628.

Fazendo uma análise estatística da probabilidade (PDF) utilizando os valores de χ^2 e integrando essa probabilidade em H , obtêm-se os valores preferidos para os parâmetros ν e ξ_0 que melhor se ajustam aos dados observacionais. O gráfico (7.5) esboça os valores preferidos de ν e ξ_0 . Observa-se que existe uma grande região central cujos valores de ν e ξ_0 possuem boa compatibilidade com os dados observacionais, e essa região se estende até valores negativos de ν .

Através de integrações na função estatística de probabilidade, encontra-se os valores preferidos de ν e ξ_0 , que estão plotados na figura (7.6). A variável ν apresenta uma maior probabilidade em $\nu \approx -0.1971$, e a variável ξ_0 possui uma maior probabilidade em $\xi_0 \approx 0.1837$.

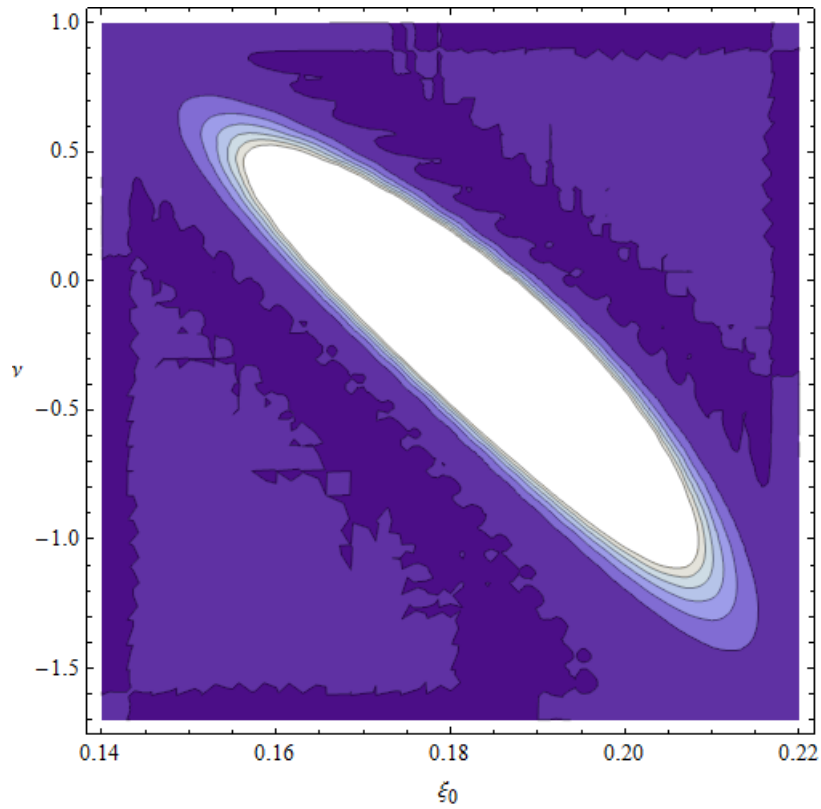
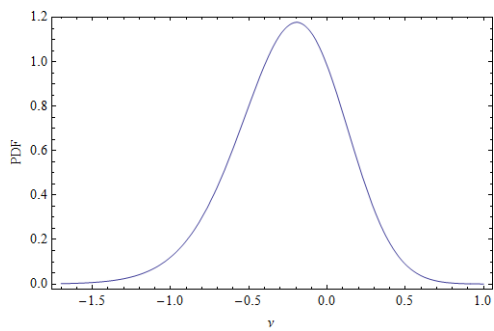
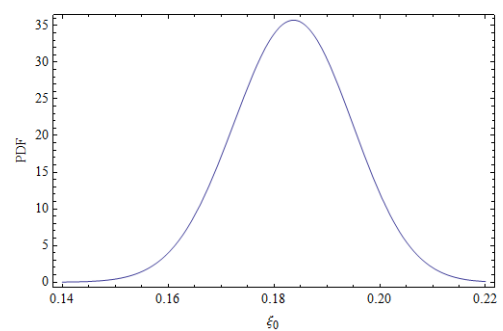


Figura 7.5: O gráfico acima é o plot do módulo da distância μ em função dos parâmetros de viscosidade ξ_0 e ν para os dados do Union 2, com parâmetro de Hubble fixado em 0.701628.



(a) Valor preferido de ν



(b) Valor preferido de ξ_0

Figura 7.6: **Figura a:** Valor preferido de ν para amostra 2dFGRS. **Figura b:** Valor preferido de ξ_0 para amostra 2dFGRS.

7.3.2 O Universo composto por $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.7$

Considerando um Universo com $\Omega_{b0} = 0.04$ e $\Omega_L = 0.7$, utilizou-se os passos descritos na seção 7.1 para calcular o módulo de distância e avaliar os melhores ajustes para os parâmetros livres do sistema em relação aos dados observacionais. Toda a análise numérica foi feita utilizando o *Mathematica 9.0*.

Através do cálculo de minimização da função χ^2 (7.11) encontrou-se os valores preferidos de H , ν e ξ_0 , que são $H_{min} = 0.701852$, $\nu_{min} = 0.351738$ e $\xi_0 = 0.0981243$, para um ajuste de $\chi^2_{min} = 542.68$. Fixando o valor de H em seu valor preferido $H = H_{min}$, o comportamento dos outros parâmetros que melhor se ajustam aos dados observacionais é apresentado na figura (7.7). A região de maior probabilidade, indicada pela cor branca, apresenta maiores probabilidades para maiores valores de ν e menores valores de ξ_0 se comparado com a figura (7.4).

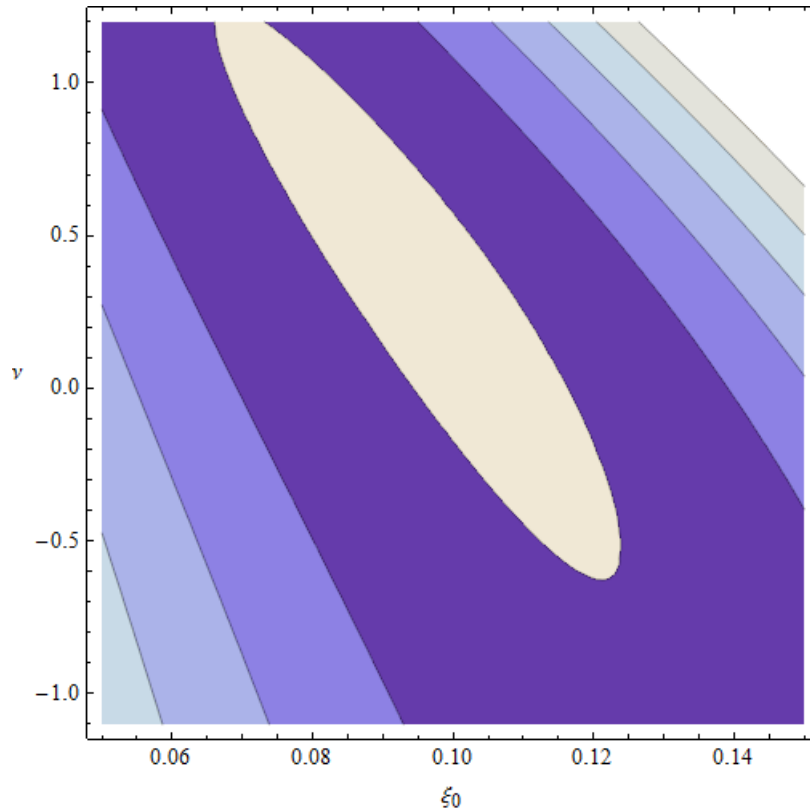


Figura 7.7: O gráfico acima é o plot do módulo da distância μ em função dos parâmetros de viscosidade ξ_0 e ν para os dados do Union 2, com parâmetro de Hubble fixado em 0.701628.

Com uma análise estatística de χ^2 e integrando a probabilidade estatística em termos

H , obtêm-se os valores preferidos para os parâmetros ν e ξ_0 que melhor se ajustam aos dados observacionais. O gráfico (7.8) esboça os valores preferidos de ν e ξ_0 . Observa-se que existe uma grande região central cujos valores de ν e ξ_0 possuem boa compatibilidade com os dados observacionais, e essa região se estende até valores negativos de ν .

Através de integrações na função estatística de probabilidade, encontra-se os valores preferidos de ν e ξ_0 , que estão plotados na figura (7.9). A variável ν apresenta uma maior probabilidade em $\nu \approx 0.3261$, e a variável ξ_0 possui uma maior probabilidade em $\xi_0 \approx 0.09927$.

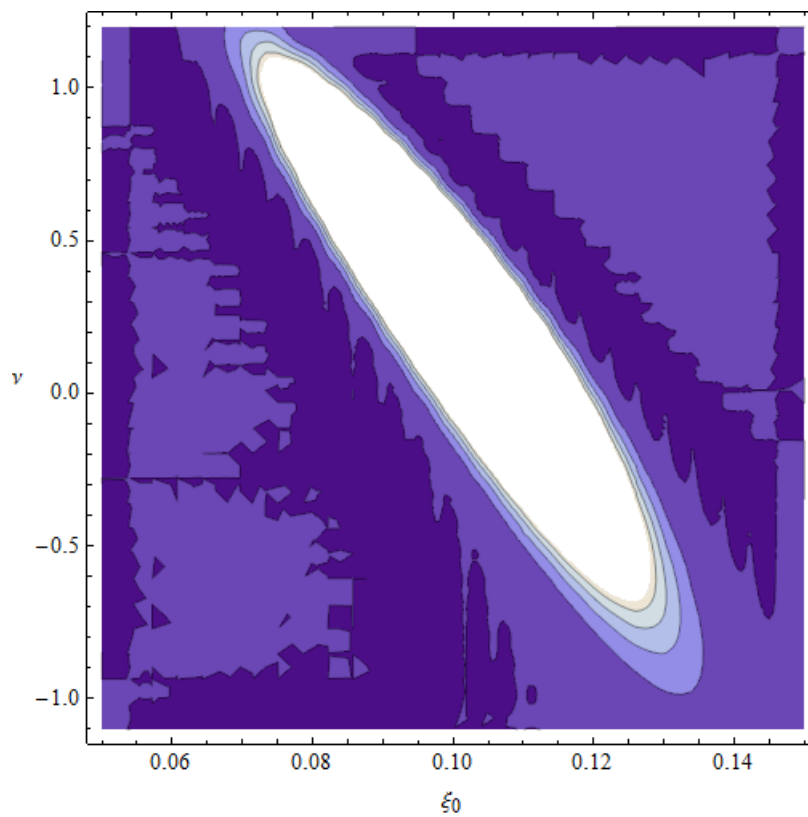
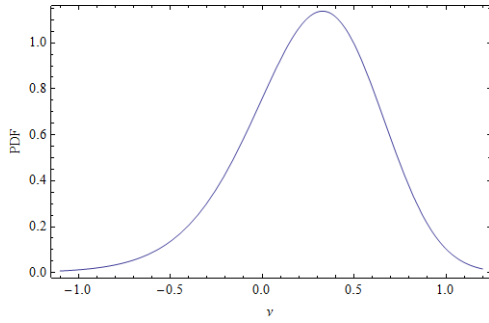
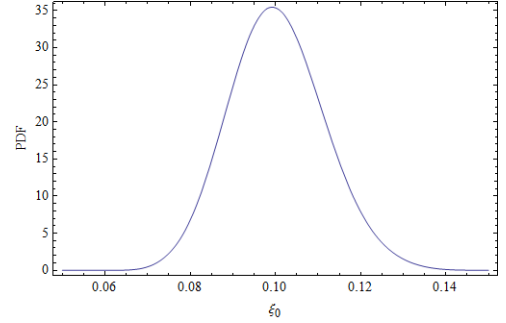


Figura 7.8: O gráfico acima é o plot do módulo da distância μ em função dos parâmetros de viscosidade ξ_0 e ν para os dados do Union 2, com parâmetro de Hubble fixado em 0.701628.



(a) Valor preferido de ν



(b) Valor preferido de ξ_0

Figura 7.9: **Figura a:** Valor preferido de ν para amostra 2dFGRS. **Figura b:** Valor preferido de ξ_0 para amostra 2dFGRS.

7.4 Análise conjunta dos resultados do espectro de potência e de supernovas tipo Ia

Será feito nesta seção uma análise conjunta de todos os resultados obtidos com as análises anteriores. Esboçado na (Tabela 1) estão os valores de melhor ajuste obtidos na minimização de χ^2 para os parâmetros das análises com o espectro de potência. Com a introdução de novos fluidos nos modelos observa-se uma melhora no ajuste do modelo com os dados, e também observa-se uma queda em χ^2_{min} com a introdução e com o aumento de Ω_L .

Os resultados do caso newtoniano não são muito favoráveis ao modelo, pois ao deixar Ω_{b0} como parâmetro livre encontra-se excesso de matéria bariônica no Universo que não está de acordo com a predição da nucleossíntese primordial, que indica valores de $\Omega_{b0} \approx 0.04$. Outro fator desfavorável ao modelo é o valor excessivamente pequeno de ν para ξ_0 fixo, o que indica que também é necessário grandes quantidades de componentes viscosas no Universo. Por sabermos previamente que os resultados do modelo newtoniano não são compatíveis com os relativísticos a nível perturbativo, o intuito de analisar este modelo foi apenas para analisar de forma geral a variação dos parâmetros livres. Devido a esses fatos, os resultados obtidos por este modelo não serão comparados com o modelo neo-newtoniano. Foi ainda considerado uma forma mais completa da equação de estado para os bárions, e os resultados indicaram que no fluido bariônico possui pressão muito próxima de zero, fato este que implicou o uso direto da pressão nula para as componentes bariônicas nas outras análises.

Os modelos com Ω_L indicam que a presença de um fluido Λ gera uma menor necessidade de componentes viscosas, que pode ser visto com a grande queda nos valores de ξ_0 . Os modelos neo-newtonianos apresentam várias ilhas de probabilidade, que podem ser vistas nas figuras (6.13), (6.22) e (6.20). Existem várias regiões de grandes probabilidades, dificultando a análise do modelo. Outro fator que dificulta a análise é a utilização de um grande *redshift* ($z = 499$), pois ao ser feita a integração até hoje ($z = 0$) encontra várias regiões de baixa probabilidade, e isso acaba dificultando a análise em certas variações dos parâmetros.

O caso mais favorecido foi o modelo neo-newtoniano com três fluidos sendo $\Omega_L = 0.7$, que apresentou menor ajuste χ_{min}^2 e cujos valores de ν mais se aproximaram ao valor de ν ajustado para a amostra de supernovas. No caso da análise do espectro de potência, o parâmetro de Hubble foi fixado em 0.72, que também não difere tanto do valor encontrado para o caso de supernovas.

Tabela 1: Tabela com os valores favoritos para os parâmetros das análises do espectro de potência com a amostra 2dFGRS

caso:	χ_{min}^2	ν_{min}	$\xi_{0\ min}$	γ'_{min}	Ω_{b0}
newtoniano dois fluidos	0.419517	- 4.168180	0.0001	1.577780	0.197784
neo-newtoniano dois fluidos	0.363992	0.318917	0.004913	—	0.04(fixo)
neo-newtoniano três fluidos $\Omega_L = 0.3$	0.362564	0.327343	0.002830	—	0.04(fixo)
neo-newtoniano três fluidos $\Omega_L = 0.7$	0.359854	0.335828	0.001393	—	0.04(fixo)

Tabela 2 : Tabela com os valores favoritos para os parâmetros da análise as análises com Supernovas tipo Ia com a amostra Union2

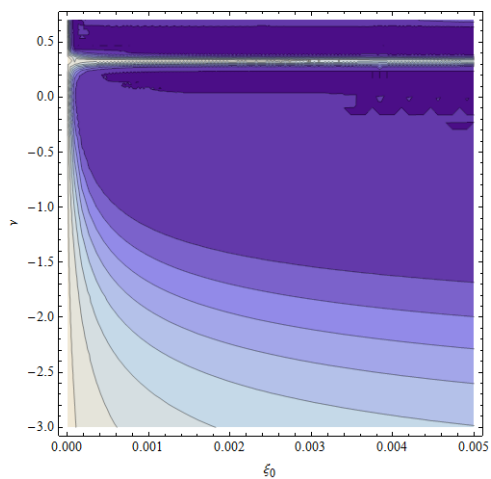
caso:	χ_{min}^2	ν_{min}	$\xi_{0\ min}$	H_{min}	Ω_{b0}
neo-newtoniano dois fluidos	542.609	- 0.735962	0.242566	0.701628	0.04(fixo)
neo-newtoniano três fluidos $\Omega_L = 0.3$	542.66	- 0.197608	0.182738	0.701639	0.04(fixo)
neo-newtoniano três fluidos $\Omega_L = 0.7$	542.68	0.351738	0.0981243	0.701852	0.04(fixo)

Na (Tabela 2) estão os valores preferidos dos parâmetros livres obtidos através da análise com supernovas tipo Ia. Os valores de ajuste de χ_{min}^2 para todos os casos estão muito próximos, com diferenças na ordem de 10^{-2} .

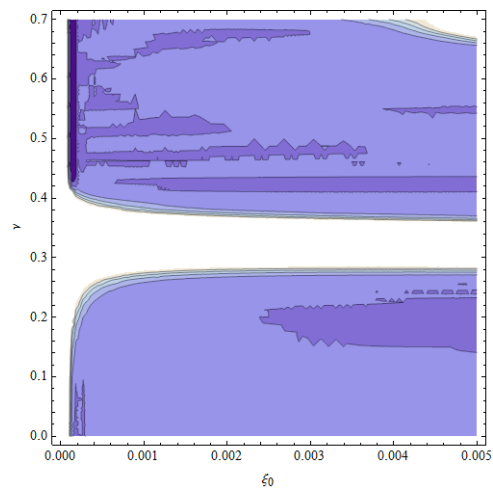
Os valores preferidos para os parâmetros ν são muito diferentes dos valores encontrados com a análise do espectro de potência, que pode ser visto na (Tabela 1), e os valores preferidos de ξ_0 são muito maiores que os valores encontrados com a análise do espectro de potência (Tabela 1), indicando a necessidade de grandes viscosidades nos modelos. Há portanto uma incompatibilidade entre os resultados encontrados para as análises de supernovas tipo Ia e as do espectro de potência.

A figura (7.10) exemplifica as ilhas de probabilidade citadas acima. A figura (7.10(a)) foi feita em uma análise para o modelo neo-newtoniano com dois fluidos, sem vincular o valor de ν . Observe que para valores negativos aparece uma grande degenerescência para os valores de melhor ajuste de ν , com um $\chi_{min}^2 = 0.38216$. A figura (7.10(b)) foi feita também em uma análise do modelo neo-newtoniano viscoso com dois fluidos, porém vinculando os valores de ν a serem positivos, e ela mostra os valores preferidos de ν e ξ_0 em relação aos dados observacionais. Observe que os valores de ν também são degenerados para o caso de ν vinculado, apresentando valores de bom ajuste em $\nu > 0.67$, para um ajuste de $\chi_{min}^2 = 0.363496$.

Para a formação de estruturas nos modelos analisados, o valor do intervalo escolhido gera grandes variações em χ_{min}^2 . Ainda, com as várias ilhas de probabilidade torna difícil a comparação entre os testes de supernovas e espectro de potência.



(a) Valores preferidos de ν e ξ_0 com $-3 \leq \nu \leq 0.7$ e $0 \leq \xi_0 \leq 0.005$.



(b) Valores preferidos de ν e ξ_0 com $0 \leq \nu \leq 0.7$ e $0 \leq \xi_0 \leq 0.005$.

Figura 7.10: **Figura esquerda:** Valores preferidos de ν e ξ_0 para o modelo neo-newtoniano viscoso com ν livre. **Figura direita:** Valores preferidos de ν e ξ_0 para o modelo neo-newtoniano viscoso com ν vinculado. Para as duas figuras foram utilizados os dados da amostra **2dFGRS**.

Capítulo 8

Conclusões

Este trabalho estudou modelos neo-newtonianos viscosos, que descreve as componentes escuras do Universo em um único fluido, chamado fluido viscoso. Por não conseguirmos medir diretamente essas componentes e não sabermos do que são constituídas, é possível tratá-las como uma única componente, não podendo portanto distinguir as componentes escuras. Foi estudado ainda como uma pressão negativa também à matéria escura afeta o Universo.

O modelo neo-newtoniano é estudado na literatura [33], e possui grande compatibilidade a nível perturbativo com resultados relativísticos para perturbações lineares. As regiões de interesse deste modelo são perturbações que estão dentro do raio de Hubble, tornando possível um tratamento não relativístico.

Foram analisados casos neo-newtonianos com dois fluidos, um fluido bariônico e um fluido viscoso. As componentes bariônicas foram consideradas se conservar separadamente do fluido viscoso. A análise deste modelo foi dividida em duas etapas: a análise do fundo homogêneo e isotrópico a partir de teste com Supernovas tipo Ia da amostra de dados Union2, e a análise perturbativa testada com o espectro de potência com a amostra de dados 2dFGRS, para estudar a formação de estruturas de larga escala.

Foi analisado ainda o modelo neo-newtoniano em um Universo composto por três fluidos, um fluido dos bárions, um fluido viscoso e um fluido representando a constante cosmológica. Analisou-se dois casos, o caso com $\Omega_L = 0.3$ e $\Omega_L = 0.7$, atribuindo mais e menos, respectivamente, contribuição da energia escura ao fluido viscoso. A análise deste modelo também foi dividida em duas etapas, como no caso do modelo neo-newtoniano

com dois fluidos.

A análise com Supernovas indica necessidade de viscosidades altas no modelo. O estudo do espectro de potência indica que a contribuição de Ω_L alivia a necessidade de viscosidade ao fluido, e também valores altos e positivos para ν . Nesse sentido, há uma discordância entre os resultados encontrados nas análises com espectro de potência e Supernovas tipo Ia.

Apesar de haver discordância entre os testes, isso não descarta de imediato o modelo estudado. Foram encontradas várias ilhas de probabilidades nos estudos dos dois testes observacionais. Existe a possibilidade de encontrar regiões com alta compatibilidade entre os teste ao se estudar todas essas ilhas de probabilidade. Ainda são necessários vários estudos utilizando dados mais recente e mais precisos para verificar a compatibilidade do modelo com o cenário atual.

Referências Bibliográficas

- [1] Ronaldo E. Souza, *INTRODUÇÃO À COSMOLOGIA*, Editora USP, 2004.
- [2] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [3] Ray d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Clarendon Press Oxford, 1992.
- [4] Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- [5] George F. R. Ellis , Roy Maartens, Malcolm A. H. MacCallum *Relativistic cosmology*, Cambridge, 2012.
- [6] Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology*, Addison-Wesley.
- [7] Robert J. Nemiroff, Bijunath Patla, *Adventures in Friedmann cosmology: A detailed expansion of the cosmological Friedmann equations*, arXiv:astro-ph/0703739v2, 2007.
- [8] Scott Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press.
- [9] Alain Coc, *Primordial Nucleosynthesis* arXiv:1208.4748v1, 2012.
- [10] Varun Sahni, *Dark Matter and Dark Energy*, arXiv:astro-ph/0403324v3.
- [11] Amare Abebe, Alvaro de la Cruz-Dombriz, Peter K. S. Dunsby, *Large Scale Structure Constraints for a Class off(R)Theories of Gravity*, arXiv:1304.3462v2 [astro-ph.CO].
- [12] E. A. Milne *Quart. J. Math.* 5, 64, (1934)
- [13] E. A. Milne, W. H. McCrea *Quart. J. Math.* 5, 73, (1934)

- [14] Richard Feynman, Leighton, Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, PEARSON Addison Wesley.
- [15] Landau e Lifshitz, *Fluid Mechanics 2nd edition*, ELSEVIER B. H., 1987.
- [16] H. Velten, D. J. Schwarz, J. C. Fabris, W. Zimdahl, *Viscous dark matter growth in (neo-)Newtonian cosmology*, arXiv:1307.6536 [astro-ph.CO].
- [17] H. Velten, D. J. Schwarz, J. C. Fabris, *Neo-Newtonian cosmology: an intermediate step towards General Relativity*, arXiv:1207.0060v1 [physics.space-ph].
- [18] J. A. S. Lima, V. Zanchin, R. Brandenberger, *On the Newtonian Cosmology equations with pressure*, arXiv:astro-ph/9612166v1, 1997.
- [19] Renée Hlozek, Joanna Dunkley et al, arXiv:1105.4887v1, 2011.
- [20] P. J. E. Peebles, *The large-scale structure of the Universe*, Princeton Series in Physics, 1980.
- [21] Peter Coles, Francesco Lucchin, *Cosmology, The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, WILEY, segunda edição, 2008.
- [22] Jhon A. Peacock, *Cosmological Physics* Cambridge.
- [23] Hermano E. S. Velten. *Dissertação de Mestrado*, UFES, 2007.
- [24] <http://wigglez.swin.edu.au/site/>.
- [25] N. Sugiyama, *Astrophys. J. Suppl.*, 100 281 (1995), astro-ph/9412025
- [26] S. M. Carrol, W. H. Press, E. L. Turner. *Ann. Rev. astron. Astrophys.* **30** 499-542, 1992.
- [27] Cássio Bruno Magalhães Pigozzo. *Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro*, Tese de Doutorado, **UFB**, 2010.
- [28] *The 2dF Galaxy Redshift Survey*, <http://www2.aao.gov.au/TDFgg/>
- [29] Shaun Cole et al, arXiv:astro-ph/0501174v2, 2005.

- [30] Steven Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [31] R. Amanullah et al. *Astrophys.J.*716:712-738, 2010.
- [32] J. Guy et al., *Astron. Astrophys.*, 443, 781 (2005).
- [33] H. Velten, D. J. Schwarz, J. C. Fabris, W. Zimdahl, *Viscous dark matter growth in (neo-)Newtonian cosmology*, *Physical Review D* 88, 103522 (2013).