UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO CENTRO TECNOLÓGICO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AMBIENTAL LABORATÓRIO DE SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA AMBIENTAL



FÁBIO PAVAN PICCOLI

# MODELO DE ESCOAMENTO MULTIFÁSICO PARA ESTUDO DA INTERAÇÃO ONDA/SEDIMENTO

Vitória, 2014

# MODELO DE ESCOAMENTO MULTIFÁSICO PARA ESTUDO DA INTERAÇÃO ONDA/SEDIMENTO

## FÁBIO PAVAN PICCOLI

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Ambiental da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Ambiental.

Orientador: Julio Tomás Aquije Chacaltana.



Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória, 2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP) (Biblioteca Setorial Tecnológica, Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Piccoli, Fábio Pavan, 1981-Modelo de escoamento multifásico para estudo da interação onda/sedimento / Fábio Pavan Piccoli. – 2014. 176 f. : il.
Orientador: Julio Tomás Aquije Chacaltana. Tese (Doutorado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.
1. Escoamento multifásico. 2. Equações de Boussinesq. 3. Colisões (Física). 4. Partículas (Física, química, etc.). 5. Ondas gravitacionais. 6. Transporte de sedimentos. I. Chacaltana, Julio Tomás Aquije. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III.

Título.

CDU: 628



Universidade Federal do Espírito Santo Centro Tecnológico Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental

"Modelo de Escoamento Multifásico para Estudo da Interação Onda/Sedimento".

### **FABIO PAVAN PICCOLI**

**Banca Examinadora:** 

Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana Orientador - DEA/CT/UFES

Prof. Dr. Daniel Rigo Examinador Interno – DEA/CT/UFES

Prof. Dr. José Antônio Tosta dos Reis Examinador Interno – DEA/CT/UFES

Man Prof. Dr. Paulo Cesar Colonna Rosman Examinador Externo - UFRJ

Prof. Dr. Geraldo de Freitas Maciel Examinador Externo – UNESP

Coordenadora do PPGEA: Profa. Dra. Regina de Pinho Keller UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO Vitória, ES, 29 de abril de 2014.

#### AGRADECIMENTOS

Expresso meus profundos agradecimentos a todos aqueles que contribuíram de formas variadas e em diferentes níveis ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Meus sinceros agradecimentos ao professor Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana pela amizade, paciência e orientação, que contribuiu de forma significativa na minha formação acadêmica. De forma coletiva, preciso registrar uma grande gratidão aos professores do colegiado do programa de pós-graduação em Engenharia Ambiental da UFES, pela oportunidade da defesa desse doutorado. Em especial, agradeço ao professor Dr. Daniel Rigo pelo apoio na etapa final da apresentação dessa tese de doutorado.

A toda minha família, em especial à minha mãe, Danuza, às minhas irmãs, Bianca e Fabiana, e às minhas sobrinhas, Isabela, Pietra, Larissa e Leda, e ao meu cunhado Daniel, pelo carinho, força e estímulo.

Dirijo um agradecimento especial à minha amada e futura esposa Kelly (Tica) por estar presente na minha vida durante todos os momentos de tensão e felicidade, oferecendo um grande apoio no desenvolvimento da tese. Também agradecendo à sua família, Silvia (sogra), Zézé (sogro), Jessica (Kinha), Weverton (afilhado), Mileny (sobrinha), Gessy Jr (primo), Geany (prima), Nilda (tia) e Rosa (tia), pelo carinho e acolhimento.

Não posso deixar de agradecer ao pessoal do LABESUL, Gregório, Leonardo, Kaio, Franciani, Karina, Fernando, Larissa, André Zorzanelli, André Paterlini, Mirela, Carlos, Danilo Barbosa, Danilo Pezzin, Denise, Felipe Mantuam, Thais, Thiago (Negão), Wesley e Vanessa, pela amizade, sugestões, colaborações e paciência no desenvolvimento dessa tese de doutorado. Também aos meus grandes amigos Rafael (Fafá), Lorena Aranha, Júlia, Grabiel (Panta), Carol, Tião, Dani, Jefferson, Ricardo Motta, Neuza, Heitor, Driely, Bruno (Lucio), Luiz Claudio (Panda), Geórgia (Gege), Thiago (Turtle), Humberto (Humbebo), Diego (Bart), Henrique (Tigrão), Murilo, Silvio, Marcelo Mappa, Marcelo Azevedo, Genny e Jhenifer, aos momentos de descontração e festivos.

Por fim, deixo meu agradecimento à instituição FAPES pelo apoio financeiro dessa pesquisa de doutorado.

#### **RESUMO**

Modelos de escoamento multifásico são amplamente usados em diversas áreas de pesquisa ambiental, como leitos fluidizados, dispersão de gás em líquidos e vários outros processos que englobam mais de uma propriedade físico-química do meio. Dessa forma, um modelo multifásico foi desenvolvido e adaptado para o estudo do transporte de sedimentos de fundo devido à ação de ondas de gravidade. Neste trabalho, foi elaborado o acoplamento multifásico de um modelo euleriano não-linear de ondas do tipo Boussinesq, baseado na formulação numérica encontrada em Wei et al. (1995), com um modelo lagrangiano de partículas, fundamentado pelo princípio Newtoniano do movimento com o esquema de colisões do tipo esferas rígidas. O modelo de ondas foi testado quanto à sua fonte geradora, representada por uma função gaussiana, pá-pistão e pá-batedor, e quanto à sua interação com a profundidade, através da não-linearidade e de propriedades dispersivas. Nos testes realizados da fonte geradora, foi observado que a fonte gaussiana, conforme Wei et al. (1999), apresentou melhor consistência e estabilidade na geração das ondas, quando comparada à teoria linear para um  $kh = \pi$ . A não-linearidade do modelo de ondas de 2ª ordem para a dispersão apresentou resultados satisfatórios quando confrontados com o experimento de ondas sobre um obstáculo trapezoidal, onde a deformação da onda sobre a estrutura submersa está em concordância com os dados experimentais encontrados na literatura. A partir daí, o modelo granular também foi testado em dois experimentos. O primeiro simula uma quebra de barragem em um tanque contendo água e o segundo, a quebra de barragem é simulada com um obstáculo rígido adicionado ao centro do tanque. Nesses experimentos, o algoritmo de colisão foi eficaz no tratamento da interação entre partícula-partícula e partícula-parede, permitindo a evidência de processos físicos que são complicados de serem simulados por modelos de malhas regulares. Para o acoplamento do modelo de ondas e de sedimentos, o algoritmo foi testado com base de dados da literatura quanto à morfologia do leito. Os resultados foram confrontados com dados analíticos e de modelos numéricos, e se mostraram satisfatórios com relação aos pontos de erosão, de sedimentação e na alteração da forma da barra arenosa.

Palavras-chave: Escoamento Multifásico, Equações de Boussinesq, Colisão (Física), Partículas (Física, Química, etc.), Ondas Gravitacionais, Transporte de sedimentos.

#### ABSTRACT

Multiphase flow models are widely used in many fields of environmental research, such as fluidized beds, gas dispersion in liquids, dam breaks, oil spill and others physical and chemical processes that use more than one property. Thus, a multiphase model to study the dynamics of two distinct properties represented on reference Eulerian-Lagrangian was developed. In order to study the dynamics of sediment transport due to wave's action, a non-linear wave Boussinesq model in Eulerian frame, in which the numerical formulation based on Wei et al. (1995), and a Lagrangian particle model, whose formulation is given by the Newtonian principle of motion, has been developed. In the Lagrangian particle model was added the scheme of hard-spheres particle collision. The coupling between the two models has been doing with the wave transferring momentum to sediment particles, which is carried by the flow. For the wave's model, the wave maker, defined by a Gaussian function, piston-paddle and flap-paddle, and the effects due to the depth of the waves were tested. The Gaussian wave maker showed better consistency in the generation of waves, getting errors about 0.11% compared to the linear theory for  $kh = \pi$ . The wave's nonlinearity simulated by the 2<sup>nd</sup> order dispersion Boussinesq-wave model showed satisfactory results when compared with experiment of wave propagation over a trapezoidal obstacle, where the deformation of the wave on the underwater structure is in agreement with literature data. In addition to the granular model was also tested in two experiments: the first, which simulates a dam break in a tank containing water-air; and the second experiment, the dam break interact with an obstacle in the center of the tank. In both experiments, the collision model was effective in the treatment of the interaction between the particles and the wall, and allowed the evidence of physical processes that are complicated to be simulated by models that use regular grids. For the coupling of wavesediment model, the algorithm has been tested with data obtained from the literature as the morphology of the bed. The results were compared with analytical data and numerical models, and it showed a certain agreement on points of erosion, sedimentation and change in shape of the sand bar.

**Keywords:** Multiphase flow, Boussinesq equations, Collision, Particles, Gravitational wave, Sediments transport.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Descrição dos parâmetros da onda
Figura 2.2. A equação governante, junto com as condições de contorno e o domínio de
solução da Teoria Linear de Ondas. Fonte: Young (1999)
Figura 2.3: Esboço gráfico da tanh <i>kh</i> para determinados valores de <i>kh</i>
Figura 2.4: Profundidade relativa e a função tangente hiperbólica
Figura 3.1: Área fragmentada de uma partícula passando por quatro células do domínio
euleriano54
Figura 3.2: Partícula atravessando várias células da grade do referencial euleriano55
Figura 3.3: Método de Verlet, a partícula mais escura é centrada no contorno delimitado
pelas arestas Dlist, onde as partículas que estão dentro desses limites estão na lista de
colisão
Figura 3.4: Numeração das células ligadas no canto superior esquerdo e à direita as
células que necessitam ser investigadas (células com tom de cinza) para a lista de
vizinhança das partículas localizada na célula mais escura, para um caso 2D63
Figura 3.5: Caixas margeando ao redor das partículas com suas respectivas projeções em
cada eixo, para um caso 2D63
Figura 3.6: Esquema do tempo de colisão entre as partículas <i>a</i> e <i>b</i>
Figura 3.7: Movimento relativo de duas esferas no ponto de contato. A figura da esquerda
mostra as velocidades rotacionais ( $\omega_a \in \omega_b$ ) e a velocidade relativa do sistema ( $\mathbf{u}_{ab}$ )
e a figura da direita mostra o vetor impulso ( <b>J</b> ) e suas componentes $J_n$ e $J_t$
Figura 4.1: Esquema do gerador de ondas do tipo pá-batedor
Figura 4.2: Esquema do gerador de ondas do tipo pá-pistão8
Figura 4.3: Esquema da geração de ondas pelo método de uma função gaussiana
Figura 4.4: Esquema do domínio do modelo de ondas. $z_b$ é elevação do nível do leito, $H$
é a altura da onda, $\eta$ é a elevação da superfície livre, $D$ é a profundidade total, $h$ é a
profundidade média, $W$ é a largura da região geradora, $X_s$ é a posição central da
fonte geradora, $Lx$ é comprimento inicial do domínio e $mx$ é o número de pontos na
direção horizontal90
Figura 4.5: Esquema da simulação do modelo de ondas

Figura 4.6: Grade 2D usada para cálculo dos parâmetros do fluido no referencial
euleriano
Figura 4.7: Posicionamento das partículas de acordo com um nível do leito 100
Figura 4.8: Posicionamento das partículas a grade euleriana a partir de uma caixa de
partículas de dimensões $L_{box} \times H_{box}$ 100
Figura 4.9: Fluxograma do modelo granular104
Figura 4.10: Algoritmo para o processamento de uma sequência de colisão dentro de um
passo de tempo constante ( <i>dt</i> )104
Figura 5.1: Domínio computacional para simulação da geração e propagação de ondas em
uma profundidade constante. S1, S2, S3 e S4 são estações de registros no tempo
da elevação da superfície livre106
Figura 5.2: Série temporal da elevação da superfície durante 30s de simulação nas
estações S1 (a), S2(b), S3 (c) e S4(d)geradas pelo Pistão 107
Figura 5.3: Série temporal da elevação da superfície durante 30s de simulação nas
estações S1 (a), S2(b), S3 (c) e S4(d)geradas pelo Batedor 108
Figura 5.4: Série temporal da elevação da superfície durante 30s de simulação nas
estações S1 (a), S2(b), S3 (c) e S4(d)geradas pela fonte gaussiana108
Figura 5.5: Esquema do canal de ondas usado na modelagem de ondas
Figura 5.6: Comparação da elevação da superfície livre do modelo (linha sólida) com
dados experimentais A de Dingemans (1994) (pontos) para cada estação de registro
da série temporal112
Figura 5.7: Densidade espectral de potência para as estações modeladas no experimento
A113
Figura 5.8: Altura significativa da onda em centímetros para as estações do experimento
A114
Figura 5.9: Perfil da elevação total da superfície da onda propagando-se sobre o obstáculo
no último passo de tempo para o experimento A114
Figura 5.10: Elevação total dos últimos 10 períodos de ondas propagando-se sobre o
obstáculo no experimento A114
Figura 5.11: Comparação da elevação da superfície livre do modelo (linha sólida) com
dados experimentais C de Dingemans (1994) (pontos) para cada estação de registro
da série temporal115

Figura 5.12: Densidade espectral de potência para as estações modeladas no experimento C116
Figura 5.13: Altura significativa da onda em centímetros para as estações do experimento C117
Figura 5.14: Perfil da elevação total da superfície da onda propagando-se sobre o
obstáculo no último passo de tempo para o experimento C117
Figura 5.15: Elevação total dos últimos 10 períodos de ondas propagando-se sobre o
obstáculo no experimento C117
Figura 5.16: Configuração inicial do experimento de quebra de barragem sem obstáculo. 
Figura 5.17: Comparação dos resultados experimentais com os numéricos da simulação
com coeficientes $e = 1,0$ , $\beta_0 = 1,0$ e $\mu = 1e^{-6}$
Figura 5.18: Simulações com diferentes coeficientes de restituição para o caso de quebra
de barragem sem obstáculo. A figuras à esquerda são os resultados experimentais e as
figuras à direita são os resultados numéricos122
Figura 5.19: Magnitude da velocidade das partículas para três testes de coeficiente de
restituição123
restituição123 Figura 5.20: Resultados para três casos como diferentes números de partículas123
restituição

direita são os resultados numéricos, das posições das partículas e da fração			
volumétrica, respectivamente			
Figura 5.26: Resultado da simulação da quebra de barragem com um obstáculo			
comparado com dados experimentais. A coluna da esquerda indica o experimento			
encontrado em Bernard-Champmartin e De Vuyst (2013), a coluna do meio e da			
direita são os resultados numéricos, das posições das partículas e da fração			
volumétrica, respectivamente			
Figura 5.27: Vetor e magnitude da velocidade das partículas na simulação de uma quebra			
de barragem com um obstáculo			
Figura 5.28: Vetor e magnitude da velocidade das partículas na simulação de uma quebra			
de barragem com um obstáculo			
Figura 5.29: Vórtices formado devido ao escoamento provocado pelo colapso de uma			
quebra de barragem e pela reflexão nas paredes do tanque133			
Figura 5.30: Representação esquemática do domínio da simulação do modelo ondas-			
sedimento134			
Figura 5.31: Nível do leito calculado a partir da fração de vazios			
Figura 5.32: Comparação ente a simulação de Hudson <i>et al.</i> (2005), gráfico da esquerda, e			
o modelo multifásico de ondas-sedimentos, gráfico da direita. A linha continua da			
figura da direita é o nível do leito suavizado136			
Figura 5.33: Sequência do movimento da onda/sedimento antes da barra arenosa entrar em			
colapso			
Figura 5.34: Sequência do movimento onda/sedimento durante o colapso da barra arenosa.			
Figura 5.35: Variação da barra arenosa devido à ação das ondas de gravidade. A linha			
mais superior de cada figura é a profundidade total e a linha na região da barra é o			
perfil do leito suavizado140			
Figura 5.36: Variação da barra arenosa devido à ação das ondas de gravidade. A linha			
mais superior de cada figura é a profundidade total e a linha na região da barra é o			
perfil do leito suavizado141			
Figura 5.37: Campo de velocidades das partículas na região ante-barra			
Figura 5.38: Campo de velocidades das partículas na região pós-barra			

Figura 5.39: Resultados da simulação comparando o perfil do nível do leito do modelo
euleriano com o modelo multifásico. A linha pontilhada sobre o leito é o resultado do
modelo euleriano e a concentração em cores é o resultado do modelo granular de
partículas147
Figura 5.40: Velocidade das partículas sob ação da onda de gravidade na região ante-
barra. A linha pontilhada no gráfico de cores na região da barra é o nível simulado
pelo modelo euleriano148
Figura 5.41: Velocidade das partículas sob ação da onda de gravidade na região pós-barra.
A linha pontilhada no gráfico de cores na região da barra é o nível simulado pelo
modelo euleriano149
Figura II.1. Comparação das velocidades de fase normalizada para diferentes valores de
$\alpha$ . Fonte: Nwogu (1993)175
Figura II.2. Comparação das velocidades de grupo normalizada para diferentes valores de
$\alpha$ . Fonte: Nwogu (1993)

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Posicionamento das estações de registro da série temporal das ondas	106
Tabela 5.2: Posicionamento das estações de registro da série temporal das ondas	110
Tabela 5.3: Coeficientes de colisão nos testes da quebra de barragem	121
Tabela 5.4: Tempo total da modelagem da quebra de barragem para vários testes de	
número de partículas e coeficientes de restituição em 2s de simulação	124
Tabela 5.5: Valores de entrada do modelo de sediment euleriano	145

### LISTA DE SIGLAS

- *a* Amplitude da onda [*m*]
- $a_0$  Amplitude da onda definida em águas profundas [m]
- C Celeridade da onda [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $C_d$  Coeficiente de arrasto []
- Cr Parâmetro de estabilidade de Courant []
- D Amplitude da componente espectral do gerador gaussiano [m]
- $d_{ab}$  Distância entre as bordas das partículas [m]
- $D_p$  Diâmetro de uma partícula esférica [m]
- dt Passo de tempo da simulação [s]
- $dt_{ab}$  Tempo para a colisão par de partículas [s]
- $dt_c$  Tempo mínimo de colisão dos pares de partículas [s]
- e Coeficiente de restituição das partículas []
- **F** Forças externas atuantes em uma partícula esférica [ $Kg \cdot m \cdot s^{-2}$ ]
- $F_{\rm g}$  Força devido ao peso na partícula esférica [ $Kg\cdot m\cdot s^{-2}$ ]
- $F_{d}\,$  Força devido ao arrasto na partícula esférica [ $Kg\cdot m\cdot s^{-2}$ ]
- $F_p$  Força devido ao gradiente de pressão na partícula esférica [ $Kg \cdot m \cdot s^{-2}$ ]
- $f_w$  Coeficiente de Fricção com o fundo []
- $F_{\omega}$  Força por unidade de massa devido à quebra da onda [ $m\cdot s^{-2}$ ]
- $F_{\tau}\,$  Força por unidade de massa devido à fricção com o fundo [  $m\cdot s^{-2}$  ]
- g Aceleração devido à gravidade [ $m \cdot s^{-2}$ ]
- h Profundidade média local [m]
- $h_{\!_0}$  Profundidade média típica da água [m]
- H Altura da onda [m]
- $I_a$  Momentum de Inércia de uma partícula  $Kg \cdot m^2$
- **J** Magnitude do impulso das partículas [ $Kg \cdot m \cdot s^{-1}$ ]
- $J_n$  Componente normal do impulso [ $Kg \cdot m \cdot s^{-1}$ ]
- $J_t$  Componente tangencial do impulso [ $Kg \cdot m \cdot s^{-1}$ ]

- k número de ondas [ $rad \cdot m^{-1}$ ]
- $k_0$  número de ondas definido em águas profundas [ $rad \cdot m^{-1}$ ]
- L Comprimento de onda [m]
- $L_0$  Comprimento de onda definida em águas profundas [m]
- **M** Vetor fluxo volumétrico horizontal [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]
- $m_p$  Massa de uma partícula esférica [Kg]
- mx Número de pontos na direção horizontal x []
- $M_w$  Fluxo volumétrico de massa da onda na direção  $x [m^2 \cdot s^{-1}]$
- n Vetor unitário normal às paredes do contorno []
- $\mathbf{n}_{ab}$  Vetor normal unitário entre um par de partículas []
- p Pressão do fluido [ $Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ ]
- $p_f$  Pressão da propriedade euleriana na posição da partícula [ $Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ ]
- $p_{\eta}$  Pressão definida na superfície, pressão atmosférica [ $Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ ]
- **r** Vetor posição de uma partícula esférica [*m*]
- R Raio de uma partícula esférica [m]
- $\mathbf{r}_{ab}$  Distância relativa entre um par de partículas [m]
- $R_{ab}$  Soma dos raios de um par de partículas [m]
- Re<sub>n</sub> Número de Reynolds para a partícula []
- S Largura do deslocamento do geradores do tipo pá [m]
- $S_f$  Fluxo massa devido à fonte geradora [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]
- $S_{g}\,$  Força por unidade de massa devido à fonte geradora [ $m\cdot s^{-2}$ ]
- t tempo [s]
- $\mathbf{t}_{ab}$  Vetor tangencial unitário entre uma par de partículas []
- $t_0$  Instante de tempo do início da quebra da onda [s]
- T Período da onda [s]
- $T^*$  Período de transição da quebra da onda [s]
- **u** Magnitude da velocidade do fluido [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\overline{\mathbf{u}}$  Magnitude da velocidade horizontal média [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\overline{u}$  Componente da velocidade horizontal média na direção x [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- u Componente da velocidade na direção  $x [m \cdot s^{-1}]$

- $\mathbf{u}_{ab}$  Magnitude da velocidade relativa entre um par de partículas [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\mathbf{u}_b$  Magnitude da Velocidade da onda no fundo [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\mathbf{u}_{f}$  Velocidade da propriedade na fase euleriana na posição da partícula [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $u_f$  Componente horizontal da propriedade euleriana na posição da partícula no eixo x [  $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\mathbf{u}_n$  -Magnitude da velocidade de uma partícula esférica [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $u_{p}$  Componente horizontal da velocidade da partícula no eixo x [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\mathbf{u}_{\alpha}$  Magnitude da velocidade horizontal no nível  $z_{\alpha}$  [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $u_{\alpha}$  Componente horizontal da velocidade da direção x no nível  $z_{\alpha}$  [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- v Componente da velocidade na direção  $y [m \cdot s^{-1}]$
- $V_{p}$  Volume de uma partícula esférica [ $m^{3}$ ]
- $v_{\alpha}$  Componente horizontal da velocidade da direção y no nível  $z_{\alpha}$  [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- x coordenada horizontal [m]
- $x_n$  Coordenada horizontal da partícula na direção x [m]
- $X_s$  Deslocamento do gerador de ondas [m]
- y coordenada horizontal [m]
- *w* Componente da velocidade na direção  $z [m \cdot s^{-1}]$
- $w_f$  Componente vertical da propriedade euleriana na posição da partícula no eixo z [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $w_p$  Componente vertical da velocidade da partícula no eixo  $z \ [m \cdot s^{-1}]$
- $w_1$  Coeficiente de amortecimento do resfriamento Newtoniano.
- $w_2$  Coeficiente de amortecimento viscoso
- W Largura da função geradora de ondas do tipo gaussiana [m]
- z Coordenada vertical [m]
- $z_b$  Elevação do nível do leito [m]
- $z_p$  Coordenada horizontal da partícula na direção z [m]
- $z_{\alpha}$  Nível de referência das equações de Boussines<br/>q derivadas por Nwogu (1993) [m]
- $\beta$  Coeficiente de troca de momentum em escoamentos Bifásico, Capítulo 4 []
- $\beta_0$  Coeficiente de restituição tangencial []

- $\delta_{h}$  Coeficiente do comprimento de mistura da turbulência []
- $\nabla$  -Operador differencial espacial [ $m^{-1}$ ]
- $\Delta t$  Incremento de tempo [s]
- $\Delta x$  Espaçamento da grade no referencial euleriano na direção x [m]
- $\Delta z$  Espaçamento da grade no referencial euleriano na direção z [m]
- $\varepsilon$  Fração de vazios ou fração volumétrica []
- $\varepsilon_{2D}$  Fração de vazios ou volumétrica em duas dimensões []
- $\mathcal{E}_{\scriptscriptstyle 3D}$  Fração de vazios ou volumétrica em três dimensões [ ]
- $\eta$  Elevação da superfície livre [*m*]
- $\eta_t^*$  Parâmetro que define o início ou o fim da quebra de ondas [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\eta_t$  Deslocamento da superfície livre no tempo [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\eta_t^{(I)}$  Valor da condição inicial para o começo da quebra da onda [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\eta_t^{(F)}$  Valor da condição final para o fim da quebra da onda [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $\mu_f$  Viscosidade dinâmica da propriedade no referencial euleriano [ $Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ ]
- $\mu$  Coeficiente de fricção dinâmica []
- $\nu$  Viscosidade turbulenta devido à quebra [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]
- $\rho$  massa específica do fluido [ $Kg \cdot m^{-3}$ ]
- $\rho_f$  Massa específica da propriedade euleriana [ $Kg \cdot m^{-3}$ ]
- $\phi$  Potencial da velocidade
- $\phi_0$  Potencial da velocidade no nível z = -h
- $\phi_{\alpha}$  Potencial da velocidade no nível  $z = z_{\alpha}$
- $\omega$  Frequência angular da onda [ $rad \cdot s^{-1}$ ]
- $\omega_a$  Velocidade angular de uma partícula [ $rad \cdot s^{-1}$ ]
- $\omega_s$  Frequência angular do gerador de ondas [ $rad \cdot s^{-1}$ ]

# SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO
1.1 ESBOÇO DA TESE19
1.2 INTRODUÇÃO20
1.3 OBJETIVOS
1.3.1 Geral
1.3.2 Específicos
CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO MODELO DE ONDAS25
2.1 REVISÃO DA TEORIA LINEAR DE ONDAS25
2.2 EMBASAMENTO TEÓRICO DO MODELO DO TIPO BOUSSINESQ
2.2.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO DE BOUSSINESQ
2.3 CINEMÁTICA DA ONDA AO LONGO DA COLUNA D'ÁGUA46
2.3.1 PERFIL VERTICAL DA VELOCIDADE HORIZONTAL
2.3.2 PERFIL VERTICAL DA VELOCIDADE VERTICAL
2.3.3 PERFIL VERTICAL DA PRESSÃO NO FLUIDO
CAPÍTULO 3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO MÉTODO MULTIFÁSICO 51
3.1 DINÂMICA DO MOVIMENTO GRANULAR
3.1.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MOVIMENTO GRANULAR52
3.1.2 INTERPOLAÇÃO DAS PROPRIEDADES EULERIANAS PARA A
PARTÍCULA LAGRANGIANA53
3.1.3 CÁLCULO DA FRAÇÃO DE VAZIOS55
3.2 DINÂMICA DA COLISÃO DE PARTÍCULAS
3.2.1 LISTA DE COLISÕES
3.2.2 TEMPO DE COLISÃO64
3.2.3 INTERAÇÃO ENTRE PARTÍCULAS
CAPÍTULO 4 METODOLOGIA NUMÉRICA73

4.1 IM	PLEMENTAÇÃO DO MODELO DE ONDAS	74	
4.1.1	DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL DO MODELO NUMÉRICO DE ONDAS	76	
4.1.2	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DO MODELO NUMÉRICO DE ONDAS	78	
4.1.3	CALCULO DA VELOCIDADE $u_{\alpha}$ A PARTIR DE $U$	80	
4.1.4	FILTRO NUMÉRICO	81	
4.1.5	GERAÇÃO DE ONDAS	86	
4.1.6	FRICÇÃO COM O FUNDO	91	
4.1.7	QUEBRA DE ONDAS	.92	
4.1.8	CONDIÇÕES DE CONTORNO	93	
4.1.9	CARACTERIZAÇÃO DO MODELO DE ONDAS	95	
4.2 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO MULTIFÁSICO			
CAPÍTI	ULO 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO	105	
5.1 VE	RIFICAÇÃO DO MODELO DE ONDAS1	105	
5.1.1	PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM UM CANAL COM UM FUNDO PLANO		
	105		
5.1.2	PROPAGAÇÃO DE ONDAS SOBRE UM OBSTÁCULO	09	
5.2 RE	SULTADOS DO MODELO GRANULAR1	18	
<b>5.2 RE</b>	SULTADOS DO MODELO GRANULAR	1 <b>18</b>	
5.2 RE	SULTADOS DO MODELO GRANULAR	1 <b>18</b> 19 28	
5.2 RE 5.2.1 5.2.2 5.3 RE	SULTADOS DO MODELO GRANULAR	118 19 128 133	
5.2 RE 5.2.1 5.2.2 5.3 RE CONCL	SULTADOS DO MODELO GRANULAR	118 119 128 133 150	
5.2 RE 5.2.1 5.2.2 5.3 RE CONCL	SULTADOS DO MODELO GRANULAR	<ul> <li>118</li> <li>119</li> <li>128</li> <li>133</li> <li>150</li> <li>150</li> </ul>	
5.2 RE 5.2.1 5.2.2 5.3 RE CONCL RECOM	SULTADOS DO MODELO GRANULAR       1         QUEBRA DE BARRAGEM SEM OBSTÁCULO       1         QUEBRA DE BARRAGEM COM UM OBSTÁCULO       1         SULTADOS DO MODELO ONDA/SEDIMENTO       1         LUSÕES E RECOMENDAÇÕES       1         LUSÕES       1         IENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS       1	<ul> <li>118</li> <li>119</li> <li>128</li> <li>133</li> <li>150</li> <li>150</li> <li>152</li> </ul>	
5.2 RE 5.2.1 5.2.2 5.3 RE CONCL CONCL RECOM REFER	SULTADOS DO MODELO GRANULAR	<ul> <li>118</li> <li>119</li> <li>128</li> <li>133</li> <li>150</li> <li>150</li> <li>152</li> <li>154</li> </ul>	
5.2 RE 5.2.1 5.2.2 5.3 RE CONCL CONCL RECOM REFER ANEXC	SULTADOS DO MODELO GRANULAR	<ul> <li>118</li> <li>119</li> <li>128</li> <li>133</li> <li>150</li> <li>150</li> <li>152</li> <li>154</li> <li>161</li> </ul>	

# CAPÍTULO 1 Introdução

#### 1.1 ESBOÇO DA TESE

O objetivo dessa tese é desenvolver um modelo para fins de estudo da morfodinâmica do leito devido ao escoamento induzido pelas ondas de gravidade. Para isso, no capítulo 2 são apresentados os fundamentos teóricos do estado da arte da teoria de ondas e no capítulo 3 os fundamentos teóricos do escoamento multifásico.

O capítulo 4 apresenta a metodologia numérica para o desenvolvimento dos modelos de ondas e granular, onde este último é um lagrangiano de partículas, fundamentado na teoria granular de partículas para escoamentos multifásicos considerando colisões binárias. Diferentemente do que vem sendo usado nos estudos morfodinâmicos, esta abordagem é importante para descrever o movimento da partícula do referencial lagrangiano sem a penetração das partículas entre si e nem com a parede.

Os resultados dos modelos desenvolvidos, o modelo de ondas, o modelo granular e o modelo acoplado ondas-sedimentos, são apresentados no Capítulo 5. Os resultados do modelo de ondas são confrontados com dados da literatura quanto à geração de ondas e à avaliação dos processos dispersivos quando a onda interage com um obstáculo rígido submerso no canal. Os resultados do modelo granular são confrontados com problemas clássicos da literatura. É proposto um modelo paramétrico da pressão para tratar à quebra de uma barragem e também à quebra de uma barragem com um obstáculo. Finalmente, os resultados do modelo acoplado onda-sedimento são comparados com resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura, que tratam as mudanças do leito ocasionadas pela interação da onda com um obstáculo deformável.

## 1.2 INTRODUÇÃO

O balanço dos sedimentos em corpos d'água é fundamental para diversas áreas da engenharia, para análises e previsões do impacto no meio ambiente, estabilidade habitacional, riscos à saúde pública, assim como para perigos marinhos tais como acidentes com embarcações, canais de acesso a portos, mudanças no leito, assoreamento de portos, entupimento de reservatórios e lagos artificiais, descarte de material dragado e na proteção costeira. Tais assuntos, além do interesse científico, são de grande importância comercial, estética e social para o auxílio ao desenvolvimento sustentável e gerenciamento da zona costeira.

A maioria dos trabalhos voltados para águas costeiras mostram que os processos físicos referentes ao transporte de poluentes e/ou sedimentos podem ser estudados através do uso de modelos numéricos. Os computadores fornecem aos pesquisadores resultados rápidos e com um nível de precisão adequado para o entendimento do problema físico em questão. A modelagem numérica soluciona as equações matemáticas de forma discreta, onde estas representam as leis físicas de conservação.

Deste modo, os modelos computacionais possuem capacidade de previsão suficiente e, assim, apresentam uma vantagem adicional sobre experimentos, onde várias opções de configurações e condições de operações podem ser testadas com relativa facilidade e menos custo (DEEN *et al.*, 2007).

Na modelagem físico-matemática do transporte de sedimento, existem duas aproximações gerais: uma é a aproximação euleriana, onde as partículas de sedimento são tratadas como uma fase contínua, descrita matematicamente pelas equações que representam as leis de conservação. A outra é a aproximação lagrangiana, usualmente conhecida como modelo de trajetória, onde o movimento de uma partícula individual é resultado da solução de sua equação do movimento. E o comportamento médio do sistema fluido-partícula requer a realização das trajetórias de um grande número de partículas (MENG e van der GELD, 1991).

Na literatura um dos métodos mais utilizados pela comunidade científica para solucionar um escoamento com estas misturas de fases é denominado de escoamento multifásico. Geralmente, na dinâmica fluida de múltiplas fases, as partículas, as quais podem estar no estado sólido, líquido ou gasoso, são representadas no referencial lagrangiano e o fluido circundante, que seria um líquido ou um gás, pode ser solucionado no referencial euleriano. Este método híbrido é importante para estudar constituintes escalares representados por partículas. Geralmente, estas partículas são relativamente pequenas em relação ao domínio total e são "dispersas", isto é, não são muito concentradas. Dessa forma, suas trajetórias são influenciadas pela interação com o escoamento do fluido circundante e, também, pelas colisões com outras partículas. Portanto, desde que a partícula é circundada por um fluido, que preenche todo o domínio, estas distribuição de partículas em geral são referidas como a "fase dispersa" e o fluido circunvizinho referido como a "fase contínua" (LOTH, 2010).

Nos modelos de trajetória, o movimento da fase dispersa pode ser avaliado pelo próprio movimento de partículas ou pelo movimento do centro de massa de uma nuvem de partículas. Os detalhes do escoamento ao redor da partícula ou da nuvem são submetidos às forças de arrasto, sustentação e momentum, os quais definem a trajetória destas partículas. O modelo de trajetória tem sido usado em estudos de escoamentos granulares, para avaliar os efeitos do fluido intersticial (BRENNEN, 2005).

Os modelos híbridos geralmente estão associados ao uso do conceito de fração de volume e com o tamanho das partículas. A literatura indica que frações de volume das partículas maior que 10% tipicamente torna o escoamento multifásico "denso", onde o movimento das partículas é dominado pelas interações partícula-partícula (ou seja, colisões ou mecânica de contato), como ocorre no transporte de sedimento de fundo. Por outro lado, frações de volume de 0,1% ou menor definem um escoamento "disperso", onde as partículas são tão diluídas que as interações partículas-partículas são negligenciadas e as concentrações de partículas são baixas para afetar o escoamento circunvizinho, como ocorre no transporte de sedimento suspenso (LOTH, 2010).

No modelo lagrangiano, o movimento para cada partícula individual é solucionada pelas equações de Newton do movimento, que considera os efeitos das colisões entre partículas. Segundo Goldschmidt *et al.* (2001), as colisões entre partículas são descritas pela lei da colisão, que consiste na dissipação de energia devido às interações não-ideais de partículas através dos coeficientes de restituição e fricção (aproximação do modelo de esferas rígidas) ou por coeficientes empíricos do sistema massa-mola, que considera um

coeficiente de dissipação e um coeficiente de fricção (aproximação do modelo esferas macias).

A vantagem em se utilizar um modelo de esfera rígida é devido ao seu maior desempenho computacional e pela capacidade de simular partículas de tamanhos variados. A maior velocidade de processamento do modelo de esfera rígida é porque as colisões entre os pares de partículas são identificadas e amarzenadas em uma lista de eventos para um tempo determinado, enquanto que o modelo de esfera macia, apesar de maior precisão nos seus resultados, todos os eventos de colisão são tratados a cada instante de tempo, necessitando de um passo de tempo muito pequeno para o modelo.

Para Deen et al. (2007), em um sistema de esferas rígidas, as trajetórias das partículas podem ser determinadas pelas colisões binárias e esta influência deve ser considerada na conservação do momentum. As colisões entre as partículas ocorrem de forma instantânea e por pares aditivos, sendo que estas colisões são processadas uma a uma de acordo com a ordem em que os eventos ocorrem.

A utilização desses modelos multifásicos com colisões geralmente é feita para estudos de leitos fluidizados, bicos injetores, bolhas de ar em fluidos, entre uma gama de outros experimentos da mecânica dos fluidos. Neste trabalho, será adaptada essa metodologia de escoamentos multifásicos com interações entre partículas para o estudo da dinâmica do transporte de sedimentos devido à ação de ondas de gravidade.

Dessa forma, será usado um modelo para o escoamento multifásico que permita a compreensão da interação entre o escoamento de superfície livre e um obstáculo deformável no leito. A fase contínua, água ou ar, será solucionada por um modelo euleriano e a fase dispersa, volume finito de sedimento ou de água, será solucionada por um modelo lagrangiano. O modelo euleriano, fundamentado nas equações de Boussinesq, será usado para representar a física de geração e propagação de ondas em um canal de profundidade variável. O modelo lagrangiano, fundamentado na teoria granular de partículas esféricas rígidas, que pode ser constituído de partículas esféricas de diâmetro variável, será usado para representar um obstáculo deformável no leito do canal.

Existe uma gama de modelos que empregam as equações do tipo Boussinesq para estudar o comportamento das ondas que se propagam em direção à costa. Porém, são poucos aqueles que empregam a mudança morfológica do leito através do acoplamento com modelos de transporte de sedimentos. Este aspecto é decorrente do fato de que os modelos do tipo Boussinesq são solucionados para duas dimensões horizontais e integrados na profundidade, estabelecendo-se assim a necessidade de um cálculo adicional para se encontrar o campo de velocidade em qualquer nível de profundidade. Assim, foi elaborado um modelo de ondas do tipo Boussinesq utilizando-se técnicas da teoria linear para calcular as velocidades da onda em qualquer nível de profundidade da água, possibilitando o cálculo do momentum da onda no nível em que o sedimento se encontra.

Já modelos clássicos lagrangianos, geralmente, não tratam as interações entre as partículas no meio físico, onde uma partícula passa pela outra sem ocorrer a troca de momentum, e muitas vezes podendo ocupar o mesmo espaço em um mesmo instante de tempo. No caso de transporte de sedimentos de fundo, as forças de colisão ou contato são importantes para caracterizar a morfologia do fundo quando as partículas estão sujeitas a algum tipo de escoamento. Neste contexto, um modelo de colisão do tipo esferas rígidas é implementado no modelo multifásico para evitar esse problema de sobreposição de partículas e definir o escoamento de forma mais realística.

A necessidade do aprimoramento e entendimento das técnicas numéricas é crucial para o desenvolvimento do modelo multifásico. Dessa forma, este estudo traz a metodologia usada em escoamentos multifásicos para a compreensão dos problemas relacionados na engenharia ambiental e costeira, como quebra de barragens e de transporte de sedimentos.

Um melhor entendimento dos processos físicos é de grande importância para o desenvolvimento de modelos numéricos. Estes modelos comumente são usados para o entendimento da dinâmica de corpos hídricos e sua interação com o meio ambiente, auxiliando na tomada de decisão em projetos ambientais. No presente trabalho, o desenvolvimento dos fundamentos hidrodinâmcos e de movimento de partículas em escoamentos multifásicos é descrito e aplicado para diferentes meios físicos, com a dinâmica dos processos comparada com a literatura internacional.

## **1.3 OBJETIVOS**

## 1.3.1 Geral

O presente trabalho tem por objetivo contribuir com a compreensão da dinâmica de escoamentos multifásicos, focando no desenvolvimento de um modelo numérico para estudo da interação entre o movimento da água e o transporte de sedimento. Para atingir este objetivo geral e fundamentado no estado da arte da dinâmica dos fluidos computacional são propostos os seguintes objetivos específicos.

## 1.3.2 Específicos

- Desenvolver um modelo euleriano de canal de ondas com fundo variável para o estudo da geração e propagação de ondas do escoamento induzido;
- Desenvolver um modelo lagrangiano de partículas de volume finito que represente os grãos de sedimento ou as próprias partículas d'água;
- Acoplar os modelos de onda e de partícula para o estudo morfodinâmico na interação da onda com obstáculo deformável.

## CAPÍTULO 2 Fundamentos Teóricos do Modelo de Ondas

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão da teoria de ondas, que é de grande importância para o desenvolvimento do modelo numérico capaz de representar de forma satisfatória a propagação da onda de gravidade em ambientes aquáticos. A seção 2.1 apresenta um resumo da teoria linear da onda de pequena amplitude, na qual se encontra a definição das ondas e os princípios matemáticos que representa a física do movimento ondulatório de ondas de gravidade progressivas através da teoria potencial. Na seção 2.2 encontra-se o embasamento matemático da teoria não-linear de ondas do tipo Boussinesq, onde se descreve a propagação das ondas sobre um fundo variável e com efeitos não-lineares incluídos nas equações. O conjunto de equações encontrado nessa última seção, junto com a teoria potencial, fornece o embasamento matemático para as formulações da cinemática da onda na seção 2.3.

## 2.1 REVISÃO DA TEORIA LINEAR DE ONDAS

As ondas de gravidade podem ser definidas como perturbações ocasionadas por forças aplicadas no fluido, onde a gravidade e a tensão superficial agem como forças restauradoras para manter o nível de equilíbrio da superfície do fluido, permitindo a propagação da onda. Os parâmetros mais importantes para descrever as ondas são o comprimento da onda, o período da onda e a altura da onda, além da profundidade sobre a qual a onda está propagando-se. Com esses parâmetros pode-se determinar teoricamente todos os outros parâmetros, como a velocidade, aceleração da água e a pressão induzida pela onda (DEAN e DALRYMPLE, 1991).

A Figura 2.1, apresenta um esquema de uma onda propagando-se na direção x. O comprimento da onda, L, é a distância horizontal entre duas cristas ou cavas sucessivas. Assim, a velocidade que uma onda necessita para percorrer a distância de um comprimento de onda (L) em um intervalo de tempo igual ao período da onda (T) é conhecida como velocidade de fase ou celeridade (C = L/T). Sendo assim, o período da onda é o tempo requerido para que duas cristas ou cavas sucessivas passem por um ponto fixo. O desvio máximo da onda em torno de seu nível de equilíbrio é a amplitude da onda (a) e a distância vertical entre uma crista e uma cava consecutiva é conhecida como altura de onda (H).

A elevação da superfície livre da onda  $(\eta)$  varia em função da coordenada horizontal e do tempo. Porém, a profundidade local da água (h), medida a partir do nível de equilíbrio, não varia com o tempo.

O sistema de coordenadas usado para descrever o movimento da onda se encontra localizado no nível de equilíbrio da água em repouso (z=0) com o eixo vertical apontando no sentido oposto à aceleração devido à gravidade. O eixo horizontal x aponta no sentido de propagação da onda e o eixo horizontal y é perpendicular ao plano xz formando o sistema de coordenadas da mão direita, ver Figura 2.1.



Figura 2.1: Descrição dos parâmetros da onda.

A teoria de ondas mais comum para descrever as ondas de gravidade é a teoria de ondas de Stokes que utiliza as equações do movimento e da continuidade para um fluido ideal (sem vorticidade) e com apropriadas condições de contorno. A teoria assume que a altura da onda é muito menor que o comprimento de onda e a profundidade. A Teoria de Ondas de Pequena Amplitude, apresentada por Airy em seu artigo de 1845, constitui a aproximação de primeira ordem na teoria de Stokes. Conforme as amplitudes das ondas se tornam maiores, uma aproximação de maior ordem na teoria de Stokes deve ser usada para descrever as ondas de amplitude finita com mais precisão (KAMPHUIS, 2000).

Na teoria de ondas de Airy as seguintes hipóteses são consideradas:

• A profundidade da água e o comprimento ou período de onda são constantes;

- O movimento da onda é bidimensional;
- As ondas apresentam a forma constante, isto é, não mudam no tempo;
- O fluido é incompressível e o escoamento irrotacional.
- Os efeitos da viscosidade, da turbulência e da tensão superficial são negligenciados;
- A altura da onda (H) é considerada muito pequena quando comparada ao comprimento da onda (L) e a profundidade da água (h), ou seja, H/L <<1 e H/h <<1.</li>

Sob a consideração de escoamento irrotacional, a cinemática da onda é geralmente descrita pela teoria potencial, onde o potencial de velocidades ( $\phi$ ) e o campo de velocidade estão relacionados pela expressão:

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi \tag{2.1}$$

onde  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  é o vetor campo de velocidade e  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  é o operador diferencial espacial. Substituindo a velocidade da equação 2.1 na equação da continuidade abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
2.2

e considerando uma onda plana, para um caso bidimensional, propagando-se no sentido de eixo x positivo obtém-se uma equação de conservação da massa para o potencial de velocidade, conhecida na literatura como equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$
2.3

Pela teoria linear, a equação do momentum, que é representada pela equação de Euler, é escrita da forma:

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$
 2.4

onde p é a pressão,  $\rho$  é massa específica do fluido, g é a aceleração devido à gravidade e t é o tempo. O termo não linear, referente à energia cinética por unidade de massa, foi removido da equação 2.4.

A equação de Laplace (equação 2.2) é uma equação linear para uma única variável e sua solução é garantida se condições de contorno, para o domínio representado pela Figura 2.1, lhe fossem fornecidas. Uma vez encontrada a solução para o potencial de velocidades, a equação linearizada de Euler (equação 2.4) pode ser usada para calcular a pressão no domínio fluido.

Em interfaces, as condições de contorno comumente impostas são da cinemática e da dinâmica. A primeira condição diz respeito às partículas materiais que se encontram na interface, que sempre devem permanecer na interface. A segunda condição diz respeito à continuidade das tensões tangenciais e normais. Sob a consideração de escoamento não rotacional, as tensões de cisalhamento são negligenciadas. Ao se negligenciar a tensão superficial, a continuidade das tensões normais conduz à continuidade da pressão.

As condições de contorno impostas para solucionar a equação de Laplace, são as seguintes:

• Condição de contorno dinâmica na superfície livre

Na superfície livre  $(z = \eta)$  a pressão que atua é a pressão atmosférica e é considerada constante ao longo dela. Usando série de Taylor para trasladar a condição de contorno para o nível de referencia (z = 0) e considerando sem perda de generalidade a pressão nula (p = 0), a equação (2.4) pode ser escrita como:

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \qquad \text{em } z = 0 \qquad 2.5$$

a equação acima é linear e relaciona, num ponto fixo, o deslocamento instantâneo da superfície livre com a taxa de variação da velocidade potencial.

• Condição de contorno cinemática no fundo

Já que o leito não altera sua forma com o tempo e que é considerado impermeável, a condição de contorno cinemática a ser imposta é de que nenhum escoamento pode existir atravessando o leito, assim:

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$
 em  $z = -h$  2.6

### • Condição de contorno cinemática da superfície livre

As partículas materiais que se encontram sob a superfície livre são identificadas pela expressão  $S(x, z, t) = z - \eta = 0$ . Para que essas partículas permaneçam na superfície livre, a velocidade vertical de cada partícula deve-se igualar à taxa de variação total da superfície livre, isto é  $w = \frac{D}{Dt} [\eta(x, t)]$ , de forma que no referencial de Euler essa relação pode ser escrita como:

$$w = \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{Velocidade vertical da superfície livre}} \quad \text{em } z = \eta \qquad 2.7$$

Considerando-se a hipótese de que ondas de pequena amplitude induzem pequenas velocidades e trasladando-se a condição cinemática para o nível de referência (z = 0), a equação (2.7) é linearizada e pode ser rescrita como:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \text{em } z = 0 \tag{2.8}$$

Nas laterais, a condição de contorno comumente imposta é a de periodicidade. As equações que expressam essa ideia são:

$$\eta|_{x=0} = \eta|_{x=L_x}$$
 para  $t > 0$  2.9

$$\nabla \phi \big|_{x=0} = \nabla \phi \big|_{x=L_x}$$
 para  $-h < z < \eta$  e  $t > 0$  2.10

A solução para a equação de Laplace (equação 2.3), sujeita às condições de contorno representadas pelas equações 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 e 2.10 (Figura 2.2), é realizada pela técnica de separação de variáveis.

	$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0$	$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$
z = 0		
	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$	
z = -h $x =$	$= 0 \qquad \qquad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$	0   x = -L

Figura 2.2. A equação governante, junto com as condições de contorno e o domínio de solução da Teoria Linear de Ondas. Fonte: Young (1999).

Conhecida a forma da superfície livre

$$\eta(x,t) = a\cos(kx - \omega t)$$
2.11

a solução para o potencial de velocidades é:

$$\phi(x,z,t) = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$
2.12

Como parte da solução da equação de Laplace é encontrada a relação de dispersão da onda, dada pela expressão:

$$\omega^2 = gk \tanh kh$$
 2.13

onde  $\omega = 2\pi/T$  é a frequência angular da onda e  $k = 2\pi/L$  é o número de onda.

Por definição uma onda se deslocará a distância de um comprimento de onda (L) a cada período de onda (T), sendo a celeridade da onda (C) obtida a partir da equação 2.13, como sendo:

$$C^2 = \frac{L^2}{T^2} = \frac{g}{k} \tanh kh$$
 2.14

$$C = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} \tanh kh$$
 2.15

para uma mesma profundidade nas equações 2.14 e 2.15, pode-se afirmar que a celeridade é proporcional a  $\sqrt{L}$  e ao T, onde é possível concluir que ondas com os maiores comprimentos têm os maiores períodos e se propagam com as maiores velocidades. Assim, numa região de geração onde ocorrem diversos comprimentos de onda, as ondas de maiores comprimentos se afastam mais rápido da região de geração e de forma gradativa vão se afastando das ondas de menor comprimento, dando a ideia de dispersão.

O comportamento da tanh kh em função de kh é mostrado na Figura 2.3. Nessa figura, é possível notar que quando o valor de kh aumenta a tanh kh tende a se aproximar de 1 e à medida que o valor de kh diminui a tanh kh se aproxima do próprio kh.



Figura 2.3: Esboço gráfico da tanhkh para determinados valores de kh.

Com isso, as funções hiperbólicas tem certa conveniência para definir limites entre águas rasas e profundas e, frequentemente são de grande ajuda para simplificar as formas das equações que descrevem o movimento da onda (DEAN e DALRYMPLE, 1991). Os limites para três regiões são mostrados na Figura 2.4. Água rasa para  $kh < \pi/10$ , Água Intermediaria para  $\pi/10 < kh < \pi$  e Água profunda para  $kh > \pi$ .

Para água rasa, o comportamento se tem que  $\tanh kh \cong kh$  e a relação da dispersão se reduz na seguinte maneira:

$$\omega^2 = gk \tanh kh = gk^2h \tag{2.16}$$

sendo a celeridade calculada a partir da equação:

$$C = \sqrt{gh}$$
 2.17

onde a celeridade da onda depende somente da profundidade da água.



Figura 2.4: Profundidade relativa e a função tangente hiperbólica.

Para água profunda tem-se a seguinte aproximação  $\tanh kh \cong 1$  e a equação da dispersão se reduz para:

$$\omega^2 = gk \tanh kh = gk \tag{2.18}$$

e a celeridade pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$C = \frac{gT}{2\pi}$$
 2.19

como observado, a celeridade somente depende do período.

A cinemática da partícula em água profunda é regida pelo movimento induzido pelas componentes da velocidade. A magnitude da componente horizontal da velocidade é igual à magnitude da componente vertical da velocidade. O resultado é um movimento orbital circular da partícula, cujo diâmetro orbital vai diminuindo de forma exponencial com a profundidade.

Em águas intermediárias, a cinemática da partícula muda um pouco. Conforme a profundidade diminui, a magnitude da componente horizontal da partícula vai se tornando maior que a magnitude da componente vertical da velocidade. O resultado é um movimento orbital elíptico da partícula, com a magnitude do eixo horizontal da elipse sendo maior que a magnitude do eixo vertical da elipse. Esses eixos diminuem em magnitude à medida que a profundidade aumenta. Nesse caso a velocidade tangente ao leito não é zero.

A cinemática da partícula em água rasa diz respeito ao movimento orbital da partícula de água que é dominado pelo movimento horizontal da partícula, com a magnitude da velocidade horizontal sendo muito maior que a magnitude da velocidade vertical. Nesse caso, a aceleração vertical da partícula pode ser desconsiderada e o termo difusivo ignorado. Logo, a componente vertical da quantidade de movimento se reduz à equação da pressão hidrostática. A magnitude da componente horizontal da velocidade se mantem constante ao longo de toda a profundidade.

A região costeira de maior importância onde ocorrem os processos de transporte de sedimentos, instalação de portos e dragagens de canais, é aquela região com profundidades menores que 30m. Nessa região, uma onda com período de 10s se encontra em água intermediária e conforme se aproxima da linha de costa se torna uma onda em água rasa. Modelos específicos de ondas têm sido desenvolvidos para compreender a cinemática e dinâmica da onda nessas regiões. Como exemplos desses modelos pode-se citar os do tipo Águas Rasas, de Declividade Suave e os do Tipo Boussinesq.

Na literatura, os modelos tipo Boussinesq têm sido aprimorados para cada vez mais serem aplicados para águas de maiores profundidades, com  $kh > \pi/10$ , para águas intermediárias ou mesmo até água profunda.

### 2.2 EMBASAMENTO TEÓRICO DO MODELO DO TIPO BOUSSINESQ

Nessa teoria, a estrutura vertical da velocidade não é uma solução exata das equações nãolineares do balanço de massas e do momentum. Em vez disso, a velocidade vertical é imposta e varia quase que linearmente ao longo da profundidade. Por outro lado, a velocidade horizontal do escoamento é constante ao longo da profundidade. O fluido é considerado incompressível e o escoamento irrotacional, o resultado é um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares (HOLTHUIJSEN, 2007).

Segundo Karambas (1998), as principais vantagens do uso das equações do tipo Boussinesq são:

- Um modelo unificado, sem a hipótese de ondas progressivas, é usado para estudar os fenômenos não lineares das ondas, como refração, empinamento, difração, reflexão (presença de estruturas), quebra de onda, dissipação após a quebra e *runup*;
- As equações são facilmente estendidas para maiores profundidades;
- A propagação de ondas irregulares é modelada incluindo as interações não lineares onda-onda;
- A corrente induzida pela quebra da onda é automaticamente incorporada.
- Os efeitos 3D (inclusão de um *undertow* médio) estão presentes.

Muitos pesquisadores têm modificado as equações originais de Boussinesq para melhorar as várias características de dispersão na propagação da onda. Essas novas versões de equações são conhecidas como equações estendidas de Boussinesq ou equações do tipo Boussinesq. Uma nova forma de equações tipo Boussinesq foi apresentada por Madsen *et al.* (1991). Para melhorar as características da dispersão linear os aurores introduz um termo adicional de terceira ordem na equação do momentum. Esse termo é obtido das equações de ondas longas resultando em uma forma padrão das equações para uma onda propagando-se de águas relativamente mais profundas para águas mais rasas. Essa modificação torna as equações do tipo Boussinesq aplicáveis para fora do limite de águas rasas, proporcionando um melhor entendimento das transformações da onda, como a refração e a difração, onde a velocidade de fase (celeridade da onda) e a velocidade de grupo devem ser modeladas de forma mais acurada.

O melhoramento das equações originais apresentou um erro para a celeridade de 5% para um valor da razão entre a profundidade (h) e o comprimento de onda de águas profundas  $L_0$ , de 0,22, que é muitas vezes adotado como o limite de águas profundas (MADSEN e SØRENSEN, 1992). Constata-se que um considerável aperfeiçoamento da precisão da relação da dispersão linear pode ser obtido pela combinação de uma expansão polinomial da teoria de primeira ordem de Stokes com a técnica da aproximação de Padé. Madsen *et*  *al.* (1991) usaram essa técnica para obter um novo sistema de equações de Boussinesq, expressada em duas dimensões horizontais em termos de elevação da superfície e componentes da velocidade integrados na profundidade.

Sem a necessidade de adicionar termos de alta ordem nas equações padrão, Nwogu (1993) usou uma variável dependente, como a velocidade em certa profundidade representativa, para obter uma aproximação polinomial para uma solução mais acurada da relação da dispersão. Ainda que a localização arbitrária pudesse ser escolhida para determinar uma aproximação de Padé para a relação da dispersão linear, Nwogu (1993) escolheu um valor alternativo que minimiza o erro na velocidade de fase em certa variação de profundidade. Madsen *et al.* (1991) e Nwogu (1993) mostraram que as equações estendidas encontradas são capazes de simular a propagação de ondas de águas relativamente profundas para águas rasas (WEI *et al.*, 1994).

Assim, as equações de Boussinesq estendidas por Nwogu (1993) foram propostas por vários pesquisadores no objetivo da modelagem de ondas, devido à simples forma das equações, e a boa representação da não-linearidade e dispersão da onda.

A partir daí, as equações de Boussinesq estendidas por Nwogu (1993) foram derivadas em uma forma totalmente não-linear por Wei *et al.* (1995) com a inclusão dos termos dispersivos de mais alta ordem. Dessa forma, essas novas equações de Wei *et al.* (1995) podem ser aplicadas para ambos os casos, de ondas de águas intermediárias e ondas com forte interação não-linear.

Com o intuito de melhorar a relação da dispersão da onda para águas mais profundas, as equações de Wei *et al.* (1995) são modificadas por Gobbi et al. (2000) para quarta ordem de exatidão para a dispersão, melhorando o cálculo da cinemática da onda para águas mais profundas. O efeito da quebra das ondas foi incorporado por Chen *et al.* (2000) nas equações através de um termo de vorticidade vertical de segunda ordem, o qual é capaz de simular vórtices no plano horizontal gerados após a quebra das ondas na zona de surfe. Também o nível de referência, ou profundidade representativa, usada por Nwogu (1993) e Wei *et al.* (1995), foi modificado por Kennedy (2001) para que o movimento deste esteja correlacionado com a elevação da superfície livre.

Nesse trabalho foi desenvolvido um modelo de ondas unidimensional baseado nas equações estendidas por Wei *et al.* (1995) para a propagação da onda sobre um leito com
profundidade variável. Apesar das recentes melhorias nas equações do tipo Boussinesq para a propagação de ondas, o uso das equações de Wei *et al.* (1995) é justificada pela sua simplicidade, para um caso unidimensional, e por ser recorrentemente adotada e testada pela literatura.

# 2.2.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO DE BOUSSINESQ

O primeiro conjunto de equações do tipo Boussinesq para uma profundidade variável foi derivado por Peregrine (1967), e usa o deslocamento da superfície livre  $\eta$  e uma velocidade horizontal média na profundidade,  $\overline{u}$ , como variáveis dependentes. Essas equações são conhecidas como equações padrões de Boussinesq e podem ser revisadas no ANEXO I. A forma final das equações derivadas por Peregrine pode ser escrita em uma dimensão como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \Big[ (h+\eta) \overline{u} \Big] = 0$$
2.20

e

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 (h \overline{u})}{\partial t \partial x} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial t \partial x^2}$$
2.21

onde as equações (2.20) e (2.21) correspondem à conservação da massa e à conservação do momentum, respectivamente, derivadas a partir da teoria de Boussinesq para ondas longas. Nas equações acima,  $\eta$  é a elevação da superfície livre,  $\overline{u}$  é a velocidade média horizontal da partícula de água integrada na vertical, h é a profundidade média da água, g é a aceleração devido à gravidade, x é a coordenada espacial horizontal e t é o tempo. Essas são equações de águas rasas unidimensionais suplementadas com correções para as acelerações horizontais sob as ondas, definidas pelos termos do lado direito da equação (2.21).

Devido ao aumento do erro na relação da dispersão modelada com o aumento da profundidade da água, essas equações padrão de Boussinesq são limitadas às águas relativamente rasas. As equações de Boussinesq derivadas por Nwogu (1993) são obtidas

através de uma derivação consistente a partir das equações de Euler da continuidade, onde uma profundidade arbitrária é usada como uma variável dependente. Portanto, a velocidade em uma elevação arbitrária é usada como uma variável da velocidade, ao invés da velocidade média na profundidade comumente usada pelo método da perturbação de Peregrine (1967). Essa nova aproximação de Nwogu (1993) utiliza o conjunto de equações de Yoon e Liu (1989), as quais incluem o efeito de interação onda-corrente. A nova forma da equação de Boussinesq derivada por Nwogu (1993) pode ser revisada no ANEXO II e sua forma final pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \left(h + \eta\right) \mathbf{u}_{\alpha} + \left(\frac{z_{\alpha}^{2}}{2} - \frac{h^{2}}{6}\right) h \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}\right) + \left(z_{\alpha} + \frac{h}{2}\right) h \nabla \left[\nabla \cdot \left(h \mathbf{u}_{\alpha}\right)\right] \right\} = 0$$
2.22

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + g \nabla \eta + \left(\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_{\alpha} + \frac{z_{\alpha}^{2}}{2} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t}\right) + z_{\alpha} \nabla \left[\nabla \cdot \left(h \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t}\right)\right] = 0$$
2.23

Onde  $\mathbf{u}_{\alpha} = (u_{\alpha}, v_{\alpha})$  é a velocidade em uma profundidade arbitrária  $z_{\alpha}$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  é o operador gradiente horizontal e g é a aceleração devido à gravidade. As equações 2.22 e 2.23 são as equações da conservação da massa e do momentum, respectivamente. O que diferencia essas novas equações daquelas de Peregrine (1967) é o surgimento de um termo dispersivo na equação da continuidade e os coeficientes dos termos dispersivos na equação do momentum são diferentes. Essas diferenças são devido ao uso da velocidade na elevação  $z_{\alpha}$ , ao invés da velocidade média na profundidade. Dessa forma as propriedades dispersivas lineares são melhoradas, deixando as equações aplicáveis para águas relativamente mais profundas.

Considerando-se o caso estudado aqui a ser unidimensional na direção horizontal, as equações podem ser reduzidas como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M_w}{\partial x} = 0$$
2.24

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ u_{\alpha} + h^{2} b_{1} \frac{\partial^{2} u_{\alpha}}{\partial x^{2}} + b_{2} h \frac{\partial^{2} (h u_{\alpha})}{\partial x^{2}} \right] + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} = 0$$
2.25

sendo o fluxo volumétrico da onda  $(M_w)$  com os termos dispersivos da equação da continuidade dado por:

$$M_{w} = (h+\eta)u_{\alpha} + a_{1}h^{3}\frac{\partial^{2}u_{\alpha}}{\partial x^{2}} + a_{2}h^{2}\frac{\partial^{2}(hu_{\alpha})}{\partial x^{2}}$$
 2.26

Onde as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , são dadas por:

 $a_1 = \beta^2 / 2 - 1/6;$  $a_2 = \beta + 1/2;$  $b_1 = \beta^2 / 2;$  $b_2 = \beta;$ 

$$\beta = z_{\alpha}/h$$

Linearizando as equações 2.24 e 2.25 e substituindo em uma solução para ondas periódicas de pequena amplitude dada por  $\eta = a_0 e^{[i(kx-\omega t)]}$  e  $u_{\alpha} = u_0 e^{[i(kx-\omega t)]}$ , onde  $a_0$  é a amplitude da onda, k é o número de onda,  $\omega$  é a frequência angular da onda e  $i = \sqrt{-1}$  é um número complexo imaginário, e deixando o discriminante desaparecer para uma solução não trivial, tem-se a seguinte relação da dispersão para as equações de Boussinesq:

$$C^{2} = \frac{\omega^{2}}{k^{2}} = gh\left[\frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)(kh)^{2}}{1 - \alpha(kh)^{2}}\right]$$
2.27

onde C é a velocidade de fase da onda.

Nwogu (1993) afirma que com uma variação do valor de  $\alpha$  ocorrerá mudança considerável na ordem de magnitude do erro na relação da dispersão. Ambas as equações,

da continuidade e do momentum, são mais precisas elevando a ordem na frequência de dispersão,  $\mu = h_0 / L$ , onde  $h_0$  é a profundidade típica da água e L é o comprimento de onda típico. Um valor ótimo de  $\alpha$  para uma variação de  $0 < h/L_0 < 0.5$ , onde  $L_0$  é o comprimento de ondas em águas profundas, de  $\alpha = -0.390$ , foi obtido por Nwogu (1993) minimizando a soma do erro relativo da velocidade de fase C sobre toda essa variação. Esse valor de  $\alpha$  é correspondente à velocidade em uma elevação  $z_{\alpha} = -0.53h = \beta h$ , determinando erros menores que 2% na velocidade de fase de toda aquela variação. Por comparação, a forma padrão das equações de Boussinesq, onde  $\alpha = -1/3$ , tem um erro na velocidade de fase de 85% em um máximo  $h/L_0$  de 0.48.

Uma sucinta avaliação da relação da dispersão realizada por Nwogu (1993) mostrou que o novo conjunto de equações de Boussinesq pode ser aplicável para profundidades da água de três a cinco vezes maiores que as equações padrão com o mesmo nível de precisão nas características da dispersão linear.

Wei e Kirby (1995) utilizaram as equações de Nwogu para o desenvolvimento de um modelo numérico com alta ordem, que foi aplicado em vários exemplos de propagação de onda em profundidade variável e os resultados comparados com dados experimentais. Os resultados mostraram que o modelo é capaz de simular a transformação da onda a partir de águas relativamente profundas para águas rasas, fornecendo uma precisão nas previsões da altura e forma das ondas no processo de empinamento em ambos os experimentos, de ondas regulares e irregulares.

De acordo com Wei *et al.* (1995), o melhoramento da relação da dispersão das equações extendidas de Boussinesq são ainda restritas a simulações com interações não-lineares mais fracas. Isso porque em muitos casos práticos, os efeitos da não-linearidade são grandes para serem tratados como uma pertubação fraca para um problema linear. A razão altura da onda com a profundidade, que acompanha o processo físico de empinamento e quebra da onda, são inapropriados para modelos de Boussinesq com fraca não-linearidade e, assim, extensões são necessárias no modelo para se obter uma ferramenta computacional que possa ser válida para uma crista de onda escarpada, quase na quebra e na quebra.

No estudo de Wei *et al.* (1995), um modelo de Boussinesq totalmente não-linear foi derivado seguindo-se a aproximação de Nwogu (1993), a qual usa-se a velocidade em uma certa profundidade como variável dependente, retendo-se a completa não-linearidade nas condições de contorno da superfície livre. A forma totalmente não-linear das equações governantes é baseada em uma série de soluções para a equação de Laplace no inteior do fluido. Usando-se um número de onda referencial  $k_0$  para a escala horizontal das distancias (x, y), uma profundidade da água referencial  $h_0$  para a escala da coordenada vertical z e a profundidade local h(x, y) e amplitude a para a escala do deslocamento da superfície livre  $\eta$ , podem ser introduzidos os seguintes parâmetros:

$$\delta = \frac{a}{h_0}; \ \mu^2 = (k_0 h_0)^2.$$

A partir daí, a escala  $(k_0(gh_0)^{1/2})^{-1}$  é usada para o tempo t e a escala  $\delta h_0(gh_0)^{1/2}/\mu$ para a velocidade potencial  $\phi$ . Introduzindo essas escalas no problema do valor de contorno para um movimento invíscido e irrotacional leva ao seguinte problema:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \mu^2 \nabla^2 \phi = 0 \qquad ; -h \le z \le \delta \eta \qquad 2.28$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu^2 \nabla h \cdot \nabla \phi = 0 \qquad \qquad ; \ z = -h \qquad \qquad 2.29$$

$$\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta \left[ \left( \nabla \phi \right)^2 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] = 0 \qquad ; \ z = \delta \eta \qquad 2.30$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \delta \nabla \phi \cdot \nabla \eta - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad ; z = \delta \eta \qquad 2.31$$

A partir daí, Wei *et al.* (1995) desenvolveram uma expressão para a conservação do fluxo volumétrico, através da integração da equação 2.28 em z a partir de -h para  $\delta\eta$  e usando as equações 2.29 e 2.31 para obter:

$$\eta_t + \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$$
 ;  $\mathbf{M} = \int_{-h}^{\delta \eta} \nabla \phi dz$  2.32

Com isso a equação 2.32 é utilizada para obter as expressões para a conservação da massa, enquanto que a equação do momentum é obtida usando a equação de Bernoulli, equação 2.30.

Baseando-se nos estudos anteriores das equações de águas rasas com fraca dispersão, o problema do valor de contorno pode ser reduzido através da introdução de uma expansão para  $\phi$ , onde uma expressão que retém os termos de ordem  $O(\mu^2)$  e satisfaça as condições de contorno do fundo é dada por:

$$\phi = \phi_0(x,t) - \mu^2(h+z)\nabla h \cdot \nabla \phi_0 - \mu^2 \frac{(h+z)^2}{2} \nabla^2 \phi_0 + O(\mu^4)$$
 2.33

Onde  $\phi_0$  é o valor da velocidade potencial em z = -h. Esse valor de  $\phi_0$  pode ser substituído por um valor potencial em qualquer nível da coluna d'água, levando um conjunto de equações com o mesmo nível de aproximação assintótica mas com propriedades de dispersão numericamente diferentes. Então, seguindo o trabalho anterior de Nwogu (1993) é denotado que  $\phi_{\alpha}$  é um valor de  $\phi$  em  $z = z_{\alpha}(x, y)$ , ou:

$$\phi_{\alpha} = \phi_0 - \mu^2 \left(h + z_{\alpha}\right) \nabla h \cdot \nabla \phi_0 - \mu^2 \frac{\left(h + z_{\alpha}\right)^2}{2} \nabla^2 \phi_0 + O\left(\mu^4\right)$$
2.34

A equação 2.34 é usada na equação 2.33 para obter uma expressão para  $\phi$  em termos de  $\phi_{\alpha}$  como:

$$\phi = \phi_{\alpha} - \mu^2 \left( z_{\alpha} - z \right) \nabla \cdot \left( h \nabla \phi_{\alpha} \right) - \frac{1}{2} \mu^2 \left( z_{\alpha}^2 - z^2 \right) \nabla^2 \phi_{\alpha} + O\left( \mu^4 \right)$$
2.35

Essa forma da velocidade potencial é então usada nas equações govenantes para a obtenção de aproximações numéricas para modelos de ondas. Com isso a expressão para **M** na equação 2.32 se torna:

$$\mathbf{M} = (h + \delta\eta) \left\{ \nabla \phi_{\alpha} + \mu^{2} \left[ \nabla \left( z_{\alpha} \nabla \cdot (h \nabla \phi_{\alpha}) + \frac{1}{2} z_{\alpha}^{2} \nabla^{2} \phi_{\alpha} \right) + \frac{(h - \delta\eta)}{2} \nabla \left( \nabla \cdot (h \nabla \phi_{\alpha}) \right) - \frac{(h^{2} - h \delta\eta + (\delta\eta)^{2})}{6} \nabla^{2} \nabla \phi_{\alpha} \right] \right\}$$

$$2.36$$

A expressão tende a zero quando a profundidade total  $h + \delta \eta$  tende a zero, que serve como uma condição de contorno de linha de costa natural.

A forma correspondente da equação de Bernoulli (equação 2.30) se torna:

$$\eta + \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\delta}{2} (\nabla \phi_{\alpha})^{2} + \mu^{2} \bigg[ (z_{\alpha} - \delta \eta) \nabla \cdot \bigg( h \nabla \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} \bigg) + \frac{1}{2} (z_{\alpha}^{2} - (\delta \eta)^{2}) \nabla^{2} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} \bigg] + \delta \mu^{2} \bigg\{ \nabla \phi_{\alpha} \cdot \bigg[ \nabla z_{\alpha} \nabla \cdot (h \nabla \phi_{\alpha}) + (z_{\alpha} - \delta \eta) \nabla (\nabla \cdot (h \nabla \phi_{\alpha})) \bigg] \bigg\}$$
2.37
$$+ \delta \mu^{2} \bigg\{ \nabla \phi_{\alpha} \cdot \bigg[ z_{\alpha} \nabla z_{\alpha} \nabla^{2} \phi_{\alpha} + \frac{1}{2} (z_{\alpha}^{2} - (\delta \eta)^{2}) \nabla (\nabla^{2} \phi_{\alpha}) \bigg] \bigg\} + \delta \mu^{2} \bigg\{ \frac{1}{2} \bigg[ \nabla \cdot (h \nabla \phi_{\alpha}) \bigg]^{2} + \delta \eta \nabla \cdot (h \nabla \phi_{\alpha}) \nabla^{2} \phi_{\alpha} + \frac{1}{2} (\delta \eta)^{2} (\nabla^{2} \phi_{\alpha})^{2} \bigg\} = 0$$

As equações na ordem de aproximação da usual teoria de Boussinesq podem ser imediatamente obtidas pela desconsideração dos termos de ordem  $O(\delta)$  ou de ordem mais alta nos termos dispersivos de ordem  $O(\mu^2)$ . A equação modificada para o fluxo de volume **M** é:

$$\mathbf{M} = (h + \delta\eta) \nabla \phi_{\alpha} + \mu^{2} \left\{ h \nabla \left[ \nabla \cdot (h \nabla \phi_{\alpha}) + \frac{1}{2} z_{\alpha}^{2} \nabla^{2} \phi_{\alpha} \right] + \frac{1}{2} h^{2} \nabla \left( \nabla \cdot (h \nabla \phi_{\alpha}) \right) - \frac{1}{6} h^{3} \nabla^{2} \nabla \phi_{\alpha} \right] \right\}$$

$$(2.38)$$

E a equação de Bernoulli reduz-se a:

$$\eta + \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\delta}{2} \left( \nabla \phi_{\alpha} \right)^{2} + \mu^{2} \left[ z_{\alpha} \nabla \cdot \left( h \nabla \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} z_{\alpha}^{2} \nabla^{2} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} \right] = 0$$
 2.39

Introduzindo uma velocidade horizonal  $\mathbf{u}_{\alpha}$  como  $\mathbf{u}_{\alpha} = \nabla \phi |_{z_{\alpha}}$ , retendo os termos de ordem  $O(\mu^2)$  para todas as ordens em  $\delta$  tem-se uma versão totalmente não-linear do modelo de Wei *et al.* (1995), onde o fluxo de volume é dado por:

$$\mathbf{M} = (h + \delta\eta) \left\{ \mathbf{u}_{\alpha} + \mu^{2} \left[ \left( \frac{1}{2} z_{\alpha}^{2} - \frac{1}{6} (h^{2} - h\delta\eta + (\delta\eta)^{2}) \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}) + \left( \mathbf{z}_{\alpha} + \frac{1}{2} (h - \delta\eta) \right) \nabla (\nabla \cdot (h\mathbf{u}_{\alpha})) \right] \right\} + O(\mu^{4})$$
2.40

E a equação do momentum:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + \delta \left( \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_{\alpha} + \nabla \eta + \mu^{2} \mathbf{V}_{1} + \delta \mu^{2} \mathbf{V}_{2} = O(\mu^{4})$$
2.41

Onde

$$\mathbf{V}_{1} = \frac{1}{2} z_{\alpha}^{2} \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) + z_{\alpha} \nabla \left( \nabla \cdot \left( h \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) \right) - \nabla \left[ \frac{1}{2} \left( \delta \eta \right)^{2} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + \delta \eta \nabla \cdot \left( h \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) \right]$$
2.42

$$\mathbf{V}_{2} = \nabla \left[ \left( z_{\alpha} - \delta \eta \right) \left( \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla \right) \left( \nabla \cdot \left( h \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( z_{\alpha}^{2} - \left( \delta \eta \right)^{2} \right) \left( \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla \right) \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right] + \frac{1}{2} \nabla \left[ \nabla \cdot \left( h \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \delta \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right]^{2} \right]$$
2.43

Como uma observação final, Wei *et al.* (1995) enfatiza que os modelos totalmente nãolineares apresentam o fluxo de massa  $\mathbf{M} \rightarrow 0$  na linha de costa, onde  $h + \delta \eta \rightarrow 0$ . Esse resultado é esperado por motivos físicos e aparece nas equações não-lineares de águas rasas e nos modelos de Boussinesq onda a velocidade média na profundidade é a variável dependente. Essa condição não é automaticamente satisfeita pelos modelos de Nwogu ou qualquer outro modelo de Boussinesq com fraca não-linearidade, onde são baseados em uma velocidade diferente daquele valor médio na profundidade, tornando a aplicação desses modelos problemática na linha de costa. As variações de modelos totalmente não-linear deveriam representar essa condição corretamente.

Portanto as equações de Boussinesq totalmente não lineares podem ser escritas em sua forma dimensional como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \left(h + \eta\right) \left[ \mathbf{u}_{\alpha} + \left(\frac{1}{2}z_{\alpha}^{2} - \frac{1}{6}\left(h^{2} - h\eta + \left(\eta\right)^{2}\right)\right) \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}\right) + \left(z_{\alpha} + \frac{1}{2}\left(h - \eta\right)\right) \nabla \left(\nabla \cdot \left(h\mathbf{u}_{\alpha}\right)\right) \right] \right\} = 0$$

$$2.44$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} + g \nabla \eta + z_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} z_{\alpha} \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) + \nabla \left( \nabla \cdot \left( h \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) \right) \right\} + \nabla \left\{ \frac{1}{2} \left( z_{\alpha}^{2} - \eta^{2} \right) (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}) + \frac{1}{2} \left[ \nabla \cdot (h \mathbf{u}_{\alpha}) + \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right]^{2} \right\} + \nabla \left\{ \left( z_{\alpha} - \eta \right) (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_{\alpha})) - \eta \left[ \frac{1}{2} \eta \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( h \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) \right] \right\} = 0$$

$$2.45$$

As equações 2.44 e 2.45 são as equações de conservação da massa e do momentum, respectivamente, as quais descrevem a evolução da onda sem fricção e sem quebra sobre um fundo impermeável e suave. Reduzindo as equações governantes 2.44 e 2.45 para o caso unidimensional tem-se:

Conservação da Massa

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial x} = 0$$
2.46

onde

$$M_{1} = (h+\eta)u_{\alpha} + a_{1}h^{3}\frac{\partial^{2}u_{\alpha}}{\partial x^{2}} + a_{2}h^{2}\frac{\partial^{2}(hu_{\alpha})}{\partial x^{2}}$$
 2.47

$$M_{2} = \left[a_{1}h^{2}\eta + \frac{1}{6}\eta\left(h^{2} - \eta^{2}\right)\right]\frac{\partial^{2}u_{\alpha}}{\partial x^{2}} + \left[a_{2}h\eta - \frac{1}{2}\eta\left(h + \eta\right)\right]\frac{\partial^{2}\left(hu_{\alpha}\right)}{\partial x^{2}}$$
 2.48

Conservação do Momentum

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ u_{\alpha} + h^2 b_1 \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x^2} + b_2 h \frac{\partial^2 (h u_{\alpha})}{\partial x^2} \right] + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$
2.49

Sendo os termos totalmente não-lineares,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , definidos como:

$$\Gamma_{1} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \left( z_{\alpha}^{2} - \eta^{2} \right) u_{\alpha} \frac{\partial^{2} u_{\alpha}}{\partial x^{2}} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( z_{\alpha} - \eta \right) u_{\alpha} \frac{\partial^{2} \left( h u_{\alpha} \right)}{\partial x^{2}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \left( h u_{\alpha} \right)}{\partial x} + \eta \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \right]^{2}$$

$$2.50$$

$$\Gamma_{2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \eta^{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial (hu_{\alpha})}{\partial t} \right]$$
2.51

A aproximação de Boussinesq do modelo de Nwogu pode ser recuperada negligenciandose o termo  $M_2$  da conservação da massa (equação 2.46) e os termos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  da equação do momentum (equação 2.49).

Segundo Nwogu (1996), as equações 2.46-2.51 são baseadas em uma solução de domínio temporal de um conjunto totalmente não-linear das equações do tipo Boussinesq para a propagação de ondas para águas intermediárias e rasas. Essas equações de Boussinesq podem descrever precisamente a maioria dos processos de transformação das ondas fora da zona de surfe, incluindo-se o empinamento, a refração, a difração, a reflexão e as interações não-lineares onda-onda. Com isso vários autores têm incorporado nas equações de Boussinesq termos que representam os processos que ocorrem nas ondas da zona de surfe até a praia. Os modelos essencialmente adicionam os termos dissipativos devido ao efeito de quebra da onda ao efeito de espraiamento (*runup/rundown*) e ao efeito de fricção do fundo (tensão de cisalhamento) na equação do momentum.

### 2.3 CINEMÁTICA DA ONDA AO LONGO DA COLUNA D'ÁGUA

Nos modelos de Boussinesq, apresentados nos tópicos anteriores, as velocidades horizontais são calculadas em certo nível de referência,  $z_{\alpha}$ . Sendo assim, é possível encontrar as velocidades e a pressão ao longo de toda a coluna d'água,  $-h < z < \eta$ , utilizando-se a teoria potencial da onda e as equações da continuidade e do movimento de Euler em função da velocidade horizontal calculada pelo modelo de Boussinesq.

#### 2.3.1 PERFIL VERTICAL DA VELOCIDADE HORIZONTAL

Derivando a equação 2.35 da seção 2.2.1 nas duas direções espaciais, tem-se a velocidade horizontal da onda, em qualquer nível vertical z, como função do potencial da velocidade:

$$\mathbf{u}(z) = \nabla \phi = \nabla \phi_{\alpha} + \mu^{2} \nabla \left\{ \left[ \left( z_{\alpha} - z \right) \nabla h \cdot \nabla \phi_{\alpha} \right] + \left[ \frac{\left( h + z_{\alpha} \right)^{2}}{2} - \frac{\left( h + z \right)^{2}}{2} \right] \nabla \cdot \left( \nabla \phi_{\alpha} \right) \right\} + O(\mu^{2}) \right\}$$
2.52

onde  $\nabla \phi_{\alpha}$  é o potencial da velocidade  $u_{\alpha}$ .

Manipulando a equação 2.52 a velocidade horizontal em função da velocidade  $u_{\alpha}$  é dada como:

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}_{\alpha} + \mu^{2} \left\{ \left( z_{\alpha} - z \right) \left[ \nabla \left( \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h \right) + \nabla h \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right] + \left[ \frac{\left( h + z_{\alpha} \right)^{2}}{2} - \frac{\left( h + z \right)^{2}}{2} \right] \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right\} + O(\mu^{2}) \right\}$$
2.53

Escrevendo a equação 2.53 na forma dimensional para uma dimensão horizonal tem-se:

$$u(z) = u_{\alpha} + \left\{ \left( z_{\alpha} - z \right) \left[ 2 \frac{\partial^{2} \left( u_{\alpha} h \right)}{\partial x^{2}} + u_{\alpha} \frac{\partial^{2} h}{\partial x^{2}} \right] + \left[ \frac{\left( h + z_{\alpha} \right)^{2}}{2} - \frac{\left( h + z \right)^{2}}{2} \right] \frac{\partial^{2} u_{\alpha}}{\partial x^{2}} \right\}$$

$$2.54$$

#### 2.3.2 PERFIL VERTICAL DA VELOCIDADE VERTICAL

Seguindo o mesmo passo da velocidade horizonal em z, porém derivando a equação 2.35 na direção vertical, é possível obter uma expressão para a velocidade vertical w(z) em função do potencial da velocidade como:

$$w(z) = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial z} + \mu^{2} \frac{\partial}{\partial z} \{ (z_{\alpha} - z) [\nabla h \cdot \nabla \phi_{\alpha}] + \left[ \frac{(h + z_{\alpha})^{2}}{2} - \frac{(h + z)^{2}}{2} \right] \nabla \cdot (\nabla \phi_{\alpha}) \} + O(\mu^{2})$$

$$(2.55)$$

onde  $\frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial z}$  não varia em z, então  $\frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial z} = 0$  e sabendo que  $\nabla \phi_{\alpha} = \mathbf{u}_{\alpha}$ , tem-se a expressão da valacidada vartical como:

da velocidade vertical como:

$$w(z) = -\mu^2 \left[ \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h + (h+z) \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right] + O(\mu^2)$$
 2.56

Assim, pode-se obter a equação da velocidade vertical na forma dimensional para uma dimensão horizontal como:

$$w(z) = -\left[u_{\alpha}\frac{\partial h}{\partial x} + (h+z)\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x}\right]$$
2.57

#### 2.3.3 PERFIL VERTICAL DA PRESSÃO NO FLUIDO

Para encontrar o perfil de pressão da onda pode-se integrar na vertical a equação do movimento de Euler em z. A equação do movimento de Euler em z pode ser escrita, na forma adimensional, como:

$$\delta \frac{\partial w}{\partial t} + \delta^2 \mathbf{u} \cdot \nabla w + \frac{\delta^2}{\mu^2} w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \delta \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0$$
2.58

Rearranjando a equação 2.58 tem-se:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \delta \mathbf{u} \cdot \nabla w + \frac{\delta}{\mu^2} w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\delta}$$
2.59

E integrando toda a equação 2.59 no intervalo z a  $\delta\eta$  tem-se:

$$-\int_{z}^{\delta\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) dz = \int_{z}^{\delta\eta} \left(\frac{1}{\delta}\right) dz + \int_{z}^{\delta\eta} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) dz + \int_{z}^{\delta\eta} \left(\delta \mathbf{u} \cdot \nabla w\right) dz + \int_{z}^{\delta\eta} \left(\frac{\delta}{\mu^{2}} w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz$$

$$(5.60)$$

Adotando a hipótese de incrompressibilidade do fluido,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , e avaliando a pressão na superfície livre e no nível z tem-se:

$$-(p_{\eta}-p) = \underbrace{\int_{z}^{\delta\eta} \left(\frac{1}{\delta}\right) dz}_{I} + \underbrace{\int_{z}^{\delta\eta} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) dz}_{II} + \underbrace{\int_{z}^{\delta\eta} (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla w) dz}_{III}$$
2.61

onde  $p_{\eta}$  é a pressão na superfície livre. Os termos *I*, *II* e *III* são, respectivamente, termo gravitacional, a taxa de variação da velocidade vertical e o termo convectivo da velocidade vertical. Para encontrar a equação da pressão em função da velocidade calculada pela equação de Boussinesq,  $\mathbf{u}_{\alpha}$ , substitui-se as equações 2.53 e 2.56 na equação 2.61 dando a seguinte relação para cada um dos termos:

$$I: \quad \eta - \frac{z}{\delta}$$
 2.62

$$II: -\mu^{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\delta \eta - z) (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h) + \left[ \frac{(\delta \eta + h)^{2}}{2} - \frac{(z+h)^{2}}{2} \right] (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}) \right\}$$
 2.63

IIIa: 
$$-\mu^{2}\mathbf{u}_{\alpha}\left\{\left(\delta\eta-z\right)\left[\nabla\left(\mathbf{u}_{\alpha}\cdot\nabla h\right)+\nabla h\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\left(\delta\eta+h\right)^{2}}{2}-\frac{\left(z+h\right)^{2}}{2}\right]\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\right\}$$
2.64a

$$\begin{split} IIIb : & +\mu^{4} \left\{ \left[ \nabla \left( \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h \right) + \nabla h \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right]^{2} \left[ \frac{\left( \delta \eta - z_{\alpha} \right)^{2}}{2} - \frac{\left( z - z_{\alpha} \right)^{2}}{2} \right] \right\} \\ & -\mu^{4} \left\{ \left[ \nabla \left( \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h \right) + \nabla h \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right] \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \left[ \frac{\left( \delta \eta + h \right)^{2}}{2} - \frac{\left( z + h \right)^{2}}{2} \right] \right\} \\ & +\mu^{4} \left\{ \left[ \nabla \left( \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h \right) + \nabla h \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right] \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \left[ \frac{\left( \delta \eta^{3} - z^{3} \right)}{3} \right] \right\} 2.64b \\ & +\mu^{4} \left\{ \left[ \nabla \left( \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h \right) + \nabla h \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right] \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \left[ \frac{\left( \delta \eta^{3} - z^{3} \right)}{6} - z_{\alpha} \frac{\left( \delta \eta - z \right)}{2} \right] \right\} \\ & +\mu^{4} \left\{ \left[ \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right]^{2} \left[ \frac{\left( \delta \eta^{4} - z^{4} \right)}{8} \right] \right\} \end{split}$$

$$IIIc: + \mu^{4}h\left\{\left[\nabla\left(\mathbf{u}_{\alpha}\cdot\nabla h\right) + \nabla h\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\right]\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\left[\frac{\left(\delta\eta^{2}-z^{2}\right)}{2}\right]\right\} + \mu^{4}h\left\{\left[\nabla\left(\mathbf{u}_{\alpha}\cdot\nabla h\right) + \nabla h\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\right]\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\left[\frac{\left(\delta\eta-z_{\alpha}\right)^{2}}{2} - \frac{\left(z-z_{\alpha}\right)^{2}}{2}\right]\right\} - 2.64c + \mu^{4}h\left\{\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\right]^{2}\left[\frac{\left(\delta\eta^{3}-z^{3}\right)}{2}\right]\right\}$$

$$IIId: + \mu^{4}h^{2}\left\{\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\right]^{2}\left[\frac{\left(\delta\eta-z_{\alpha}\right)^{2}}{2}-\frac{\left(z-z_{\alpha}\right)^{2}}{2}\right]\right\}$$
$$-\mu^{4}z_{\alpha}^{2}\left\{\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{\alpha}\right)\right]^{2}\left[\frac{\left(\delta\eta+h\right)^{2}}{4}-\frac{\left(z+h\right)^{2}}{4}\right]\right\}$$
$$2.64d$$

Permanecendo somente com os termos até de 2ª ordem para a dispersão, a equação adimensional da cinemática da pressão ao longo da coluna d'água fica:

$$p(z) = p_{\eta} + \eta - \frac{z}{\delta}$$

$$-\mu^{2} \left\{ (\delta\eta - z) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h) + \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h \frac{\partial \delta\eta}{\partial t} \right\}$$

$$-\mu^{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\delta\eta + h)^{2}}{2} - \frac{(z + h)^{2}}{2} \right] \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}) \right\}$$

$$-\mu^{2} \left\{ \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\delta\eta + h)^{2}}{2} \right] \right\}$$

$$-\mu^{2} \mathbf{u}_{\alpha} \left\{ (\delta\eta - z) \left[ \nabla (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla h) + \nabla h (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}) \right] \right\}$$

$$+ \left[ \frac{(\delta\eta + h)^{2}}{2} - \frac{(z + h)^{2}}{2} \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}) \right\}$$

$$2.65$$

A partir da equação 2.65 é possivel escrever a equação do perfil da pressão na forma dimensional para uma dimensão horizonal como:

$$p(z) = p_{\eta} + \rho g(\eta - z) - \rho \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} \left[ (\eta - z) \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial (\eta)}{\partial t} \right] \right\}$$
$$+ \left[ \frac{(h + \eta)^{2}}{2} - \frac{(h + z)^{2}}{2} \right] \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial (u_{\alpha})}{\partial x} + \frac{\partial (u_{\alpha})}{\partial x} \left[ (h + \eta) \frac{\partial (\eta)}{\partial t} \right] \right\}$$
$$2.66$$
$$- \rho u_{\alpha} \left\{ (\eta - z) \left[ 2 \frac{\partial^{2} (hu_{\alpha})}{\partial x^{2}} + u_{\alpha} \frac{\partial^{2} h}{\partial x^{2}} \right] + \left[ \frac{(\eta + h)^{2}}{2} - \frac{(z + h)^{2}}{2} \right] \frac{\partial^{2} (u_{\alpha})}{\partial x^{2}} \right\}$$

## CAPÍTULO 3 Fundamentos Teóricos do Método Multifásico

Esse capítulo descreve a teoria utilizada para o movimento particulado dos escoamentos multifásicos. Na seção 3.1, encontra-se uma breve revisão teórica e matemática da dinâmica granular, onde as partículas se deslocam de acordo com as leis de Newton do movimento. Em seguida, na seção 3.2, está descrito o movimento das partículas dominado por colisões, o qual é apresentado uma abordagem sobre as interações de partícula-parede e partícula-partícula. Sendo essas interações capazes de controlar o movimento das partículas em escoamentos densos ou granulares e evitar a interpenetração das mesmas.

### 3.1 DINÂMICA DO MOVIMENTO GRANULAR

De forma geral, todas as partículas em um escoamento multifásico são submetidas às forças externas e às forças inter-partículas devido ao deslocamento das mesmas.

Para a quantificação das forças que atuam em uma partícula quando estão sujeitas a um escoamento, integra-se numericamente a equação do movimento considerando os termos de massa aparente, arrasto estacionário, arrasto não estacionário (forças de Boussinesq/Basset) e forças de sustentação (SILVA, 2006). Essa equação do movimento é

dada pela segunda lei de Newton onde  $m_p \frac{D\mathbf{u}_p}{Dt} = \sum \mathbf{F}$ .

Nos trabalhos de Hoomans *et al.* (2000), Hoomans (2000), Hoomans *et al.* (2001), Link *et al.* (2004), Goldschmidt *et al.* (2004), Wu *et al.* (2006), e uma gama de outros trabalhos em diferentes áreas de pesquisa, foram implementadas equações de duas fases considerando apenas as forças de arrasto, gradiente de pressão e a força de corpo. Segundo os autores essas forças são consideradas mais significativas no movimento das partículas, negligenciando as outras forças que são muito pequenas.

### 3.1.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MOVIMENTO GRANULAR

Em modelos de partículas discretas ou modelos granulares, o movimento de cada partícula individual é solucionado pela equação do movimento durante a fase de "voo livre", dada como:

$$m_p \frac{D\mathbf{u}_p}{Dt} = F_g + F_d + F_p \tag{3.1}$$

Onde  $m_p$  e  $\mathbf{u}_p$  representam respectivamente a massa e a velocidade da p<sup>th</sup> partícula. Os termos  $F_g$ ,  $F_d$  e  $F_p$  do lado direito da equação 3.1 são, respectivamente, as forças devido à gravidade, ao arrasto e ao gradiente do campo de pressão. Para um modelo de duas fases (bifásico), as forças da equação do movimento são modificadas de forma que o momentum da fase euleriana é transferido para o momentum da partícula. Sendo assim, a equação 3.1 pode ser definida como:

$$m_{p} \frac{D\mathbf{u}_{p}}{Dt} = m_{p}g + \frac{V_{p}\beta}{(1-\varepsilon)} (\mathbf{u}_{f} - \mathbf{u}_{p}) - V_{p}\nabla p_{f}$$

$$3.2$$

Onde g é a aceleração devido à gravidade,  $\varepsilon$  é fração de vazios ou fração volumétrica de fluido em uma célula euleriana,  $V_p$  é o volume da partícula,  $\beta$  é um coeficiente de troca de momentum entre as fases,  $\mathbf{u}_f$  é a velocidade do fluido interpolada na posição da partícula e  $\nabla p_f$  é o gradiente de pressão do fluido interpolado na posição da partícula.

O coeficiente de transferência de momentum entre as fases ( $\beta$ ) é modelado por Link *et al.* (2004) como uma combinação da equação proposta por Ergun (1952), e a correlação de Wen e Yu, ver Wen e Yu (1966). Quando o regime é denso, ou seja, a fração de vazios é menor que 0,8 ( $\varepsilon < 0,8$ ), a equação de Ergun é usada e o coeficiente  $\beta$  pode ser escrito como:

$$\beta = 150 \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\mu_f}{D_p^2} + 1,75(1-\varepsilon) \frac{\rho_f}{D_p} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p|$$
3.3

Onde  $D_p$  é o diâmetro da partícula,  $\mu_f$  é a viscosidade da propriedade da fase euleriana e  $\rho_f$  é a massa específica da propriedade euleriana. Por outro lado, no regime mais diluído, quando a fração de vazios é maior que 0,8 ( $\varepsilon > 0,8$ ), o coeficiente  $\beta$  é calculado através da correlação de Wen e Yu como:

$$\beta = \frac{3}{4} C_d \frac{\varepsilon (1-\varepsilon)}{D_p} \rho_g \left| \mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p \right| \varepsilon^{-2.65}$$
3.4

Na expressão 3.4  $C_d$  é o coeficiente de arrasto e está em função do número de Reynolds na partícula, dado por:

$$C_{d} = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_{p}} \left(1 + 0.15 \,\text{Re}_{p}^{0.687}\right) & \text{Re}_{p} < 1000 \\ 0.44 & \text{Re}_{p} \ge 1000 \end{cases}$$
3.5

O número de Reynolds da partícula ( $\text{Re}_p$ ) nesse caso é definido como:

$$\operatorname{Re}_{p} = \frac{\varepsilon \rho_{f} \left| \mathbf{u}_{f} - \mathbf{u}_{p} \right| D_{p}}{\mu_{f}}$$

$$3.6$$

Portanto, a atualização das posições e das velocidades das partículas é feita por integração da equação 3.2, utilizando-se um simples esquema explícito de primeira ordem. O fator chave agora é encontrar a fração de vazios em cada célula euleriana e interpolar as propriedades físicas das células para a posição de cada partícula. Dessa forma, a equação 3.2 pode ser solucionada com a transferência de momentum da propriedade do referencial euleriano para a partícula do referencial lagrangiano.

### 3.1.2 INTERPOLAÇÃO DAS PROPRIEDADES EULERIANAS PARA A PARTÍCULA LAGRANGIANA

Segundo o trabalho de Hoomans (2000), o valor locais das propriedades eulerianas na posição central das partículas lagrangianas foi obtido a partir da técnica da média da área ponderada usando valores das velocidades e do gradiente de pressão dos quatros nós

vizinhos da malha euleriana. A técnica da média da área ponderada usada para obter o valor médio local  $\overline{Q}$  de uma quantidade Q(i, j) a partir de nós vizinhos da célula é mostrada na Figura 3.1. O valor da média local é calculado de acordo com a equação 3.7.

$$\overline{Q} = \frac{A_{i,j}Q_{i,j} + A_{ii,k}Q_{ii,j} + A_{ii,jj}Q_{ii,jj} + A_{i,jj}Q_{i,jj}}{dxdz}$$
3.7

Onde

 $\rightarrow$  ) (  $\rightarrow$ 

$$A_{i,j} = (dx - \delta_x)(dz - \delta_z)$$

$$A_{ii,j} = \delta_x (dz - \delta_z)$$

$$A_{ii,jj} = \delta_x \delta_z$$

$$A_{i,jj} = (dx - \delta_x) \delta_z$$
3.8



Figura 3.1: Área fragmentada de uma partícula passando por quatro células do domínio euleriano.

As distâncias  $\delta_x \in \delta_z$  são calculadas a partir da posição do centro das partículas para a borda da grade euleriana mais próxima. Dessa forma, é possível calcular as propriedades do referencial euleriano na posição da partícula que são definidas como  $\mathbf{u}_f \in \nabla p_f$  na equação 3.2.

## 3.1.3 CÁLCULO DA FRAÇÃO DE VAZIOS

A solução da equação 3.2 requer a especificação da fração de vazios ou fração volumétrica ( $\varepsilon$ ), que pode ser obtida a partir do modelo de partícula discreta. Uma vez que as posições das partículas são conhecidas, a fração de vazios  $\varepsilon(i, j)$  pode ser calculada baseada na área ocupada pelas partículas naquela célula *i*, *j*. O cálculo da fração de vazios pode ser feito através de uma verificação das partículas que atravessam os contornos das células eulerianas, onde múltiplas células são consideradas como mostra a Figura 3.2. Nessa figura é possível observar a partícula atravessando quatro diferentes células da grade euleriana. As distâncias dos contornos mais próximos ao centro da célula são dadas como  $\delta_x$  e  $\delta_z$ , respectivamente, na direção horizontal e vertical.



Figura 3.2: Partícula atravessando várias células da grade do referencial euleriano.

A menor área da partícula que atravessa a célula euleriana, definida por  $A_{ii,jj}$ , pode ser calculada por:

$$A_{ii,jj} = \delta_x \delta_z - \frac{1}{2} R_p \left\{ \delta_x \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_x}{R_p}\right)^2} + \delta_z \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_z}{R_p}\right)^2} - R_p \left[ \arccos\left(\frac{\delta_x}{R_p}\right) - \arcsin\left(\frac{\delta_z}{R_p}\right) \right] \right\}$$

$$(3.9)$$

As áreas da partícula que atravessam as células  $A_{i,jj}$  e  $A_{ii,jj}$  podem ser obtidas, respectivamente, pelas relações:

$$A_{i,jj} = R_p \left[ R_p \arccos\left(\frac{\delta_z}{R_p}\right) - \delta_z \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_z}{R_p}\right)^2} \right] - A_{ii,jj}$$
3.10

$$A_{ii,j} = R_p \left[ R_p \arccos\left(\frac{\delta_x}{R_p}\right) - \delta_x \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_x}{R_p}\right)^2} \right] - A_{ii,jj}$$
3.11

Logo a área  $A_{i,j}$  pode ser obtida como:

$$A_{i,j} + A_{i,jj} + A_{ii,jj} + A_{ii,j} = \pi R_p^{-2}$$
3.12

No caso em que as partículas ultrapassam somente duas células, a área da partícula que atravessa pode ser obtida simplesmente a partir das equações 3.10 e 3.11.

Finalmente, a fração de vazios por área (bidimensional),  $\mathcal{E}_{2D}$ , para cada célula pode ser definida como:

$$\varepsilon_{2D} = \frac{\sum_{n=1}^{N} A_{i,j}}{\Delta x \Delta z}$$

$$3.13$$

Onde N é o número de partículas que ultrapassaram os limites da célula i, j.

No entanto, a fração de vazios caclulada nesse modo é baseada em uma análise bidimensional, que é inconsistente com o empiricismo aplicado no cálculo da força de arrasto exercido pela partícula, descrita na subseção 3.1.1 deste Capítulo. Para corrigir essa inconsistência, a fração de vazios calculada na base da área é transformada em uma fração de vazios tridimensional usando a seguinte relação (Hoomans 2000):

$$\varepsilon_{3D} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}} \left(1 - \varepsilon_{2D}\right)^{3/2}$$
 3.14

Assim a fração de vazios de cada célula ( $\varepsilon$ ) é utilizada na equação do movimento da partícula, equação 3.2, particularmente no termo da força de arrasto.

## 3.2 DINÂMICA DA COLISÃO DE PARTÍCULAS

Como descrito na Seção 3.1 o movimento lagrangiano das partículas está na forma de um método determinístico baseado nas leis de Newton do movimento. Em qualquer instante de tempo, as componentes da aceleração linear e rotacional de cada partícula são calculadas através das forças agindo nessas partículas, ocasionando o seu movimento. Essa física das partículas é conhecida na literatura como dinâmica de elementos discretos ou dinâmica granular. A simulação de elementos discretos é usada em modelos de escoamento e movimento de materiais granulares, tais como, cascalhos, grãos, areia, pólvora, entre outros.

Segundo Apostolou e Hrymak (2008), todas essas aplicações do método de elementos discretos diferem na dimensionalidade da geometria do escoamento estudado (duas ou três dimensões) e nas forças que agem em cada partícula, que podem ser descritas através de interações partículas-partículas e interações das partículas com suas vizinhanças.

Com isso, no escoamento bifásico, as forças agindo nas partículas e causando o seu movimento são resultados da interação com o escoamento e das colisões com outras partículas e/ou paredes.

Um simples exemplo de colisão é a colisão elástica, em que as partículas envolvidas mudam a magnitude de seu momentum ao longo de uma linha de contato de tal forma que o momentum total e a energia são conservados (SIGURGEIRSSON *et al.*, 2001).

Cada partícula interage com outras partículas através do contato, também chamado de forças de colisão. A avaliação das forças de colisão no algoritmo do método de elementos discretos e na dinâmica granular, em geral, segue dois métodos: modelos de esferas rígidas (denominado em muitos artigos como *hard sphere*) e modelos de esferas macias (denominado na literatura internacional como *soft sphere*).

Nos modelos de esferas rígidas, as colisões são assumidas instantâneas e binárias. No instante de colisão o momentum é trocado entre as partículas através do impulso normal

ou forças de colisão friccional, enquanto que todas as outras forças são negligenciadas (HOOMANS *et al.*, 1996). Esse tratamento permite uma rápida avaliação dos efeitos da colisão, no movimento das partículas, aspecto que, frequentemente, reduz o tempo computacional dos cálculos.

Por outro lado, os modelos de esferas macias tratam as colisões como forças de contato calculadas a partir de simples modelos mecânicos, como molas (*spring*), amortecedores (*dashpots*) e deslizamento friccional (*friction sliders*), sendo o processo de deformação das partículas permitido. Dessa forma as partículas sobrepõem o ponto de contato. A principal vantagem desse método é que as colisões de várias partículas são permitidas, ao contrário do método de esfera rígida que trata a colisão entre pares. Porém esse método requer um custo computacional maior, pois em escoamentos densos é requerido um passo de tempo muito pequeno. Esse passo de tempo deveria ser menor que a duração de um contato, porém a duração de um contato pode ser artificialmente aumentada permitindo uma interação mais suave e então reduzindo o tempo de cálculo computacional (HOOMANS *et al.*, 1996).

Nesses modelos de contato, a elasticidade linear, o amortecimento e o deslizamento friccional são combinados para aproximar a perda de energia total em uma colisão física. O cálculo da perda de energia tipicamente pode ser caracterizado pelos coeficientes de restituição e fricção (CHANG *et al.*, 2008).

No presente trabalho, um modelo de interação partícula-partícula com o método de esferas rígidas é usado. Esse modelo é baseado fisicamente no princípio fundamental da equação do impulso, para as partículas antes e após a colisão. Nesse estudo somente simples colisões binarias são consideradas, onde se adota um tempo muito curto durante o processo de colisão, negligenciando-se qualquer força externa entre um par de partículas ou partícula-parede. As partículas são assumidas esféricas e uniformes tanto em tamanho como em forma.

A interação partícula-parede está dentro de duas categorias hidrodinâmicas: as forças hidrodinâmicas devido à proximidade com uma parede e a interação puramente mecânica na ausência de fluido. A força de sustentação de Saffman devido ao gradiente da velocidade próximo da parede é um exemplo de uma interação hidrodinâmica. Outro exemplo é a força do fluido agindo em uma partícula aproximando-se da parede na

direção normal. Assumindo-se a massa de uma partícula ser infinitamente grande, a interação partícula-partícula é reduzida à interação partícula-parede. A velocidade póscolisão da partícula é afetada por essa interação, que pode ser negligenciada se a força de inércia da partícula é tão grande que a colisão acontece em um tempo pequeno comparado ao tempo de relaxação hidrodinâmica da partícula (CROWE et al., 1998).

Geralmente, as condições de contorno utilizadas para colisões partículas-parede são de paredes rígidas, onde uma partícula rebate elasticamente na parede, ou periódica, onde uma partícula desaparece em um contorno e reaparece no lado oposto (SIGURGEIRSSON *et al.*, 2001).

O tratamento do comportamento mecânico associado com a interação partícula-parede depende da inércia da partícula. Quando uma massa de partícula colide com uma parede ocorre perda de energia cinética devido aos efeitos de fricção e de inelasticidade. Para uma partícula muito pequena aproximando-se de uma parede, as forças moleculares se tornam dominantes comparadas com as forças inerciais. Como resultado, a partícula é capturada pela parede devido às forças coesivas, e não rebate e nem desliza ao longo da parede. Essa força coesiva é identificada como a força de *van der Waals* (CROWE et al., 1998).

Kosinski e Hoffman (2009) desenvolveram uma extensão para um modelo bem conhecido de esferas rígidas para a modelagem de interações partículas-paredes, tornando possível considerar a adesão das partículas com o contorno sólido, onde os modelos clássicos de esferas rígidas não consideram esse tipo de comportamento das partículas.

Pode ser observado em Kosinski e Hoffman (2010) como o modelo padrão de esferas rígidas pode ser estendido para incluir essas importantes interações em um modo apropriado e eficiente.

O principal objetivo desses dois últimos trabalhos foi estender o modelo de esfera rígida baseado no impulso, realizando formulações para a interação adesiva ou coesiva. Dessa forma, Kosinski e Hoffam (2011) melhoraram essa quantificação das interações adesivas e coesivas para serem usadas em modelos de esferas rígidas, para casos onde as superfícies dos corpos em colisão sejam "secas", ou seja, não existe formação de ponte líquida entre os corpos em colisão. Essa quantificação é baseada nas análises de Johnson-Kendall-Roberts (JKR) da dinâmica de colisões, mas inclui, além disso, forças dissipativas usando

uma técnica de esferas macias. Deste modo o impulso coesivo, requerido para o modelo de esfera rígida, é calculado junto com outros parâmetros, denominado de duração de colisão e coeficiente de restituição.

Por simplicidade, o modelo de colisão usado aqui é baseado nas leis de conservação do momentum linear e requer, além dos fatores geométricos, dois parâmetros empíricos: um coeficiente de restituição e um coeficiente de fricção. Para aperfeiçoar o algoritmo numérico do modelo de esferas rígidas é necessário identificar os pares de colisão. Para isso, normalmente é usado uma lista que contém as informações das partículas que possivelmente irão colidir.

#### 3.2.1 LISTA DE COLISÕES

Existem dois tipos de aproximações para a simulação do sistema de partículas com colisões. Uma das aproximações discretiza o tempo quanto ao tamanho do seu incremento (*Time-driven simulation*). A atualização da posição de cada partícula ocorre a cada passo de tempo e depois verifica se houve sobreposição de partículas. Se há uma sobreposição, retorna-se o passo de tempo para o tempo de colisão, atualizando-se as velocidades das partículas na colisão, e continua-se a simulação. Essa aproximação é simples, mas apresenta dois inconvenientes. Primeiro, a execução apresenta  $n^2$  iterações de verificações por passo de tempo, onde *n* é o número de partículas. Segundo, pode ocorrer a perda de colisões se o passo de tempo é muito grande e as colisões de partículas falham ao sobrepor quando são procuradas. Para se obter uma simulação mais acurada, o passo de tempo deve ser muito pequeno, e isso retarda a simulação. O outro tipo de aproximação é aquela que foca na ocorrência dos eventos de interesse (Event-driven simulation). No modelo de esferas rígidas, todas as partículas viajam em trajetórias retilíneas com velocidades constantes durante o evento de colisão. Assim, o desafio é determinar a ordem da sequência de colisão das partículas. Esse desafio pode ser encaminhado pela manutenção de uma "lista de prioridades" (priority queue) de futuros eventos, ordenados pelo tempo. Em qualquer dado tempo, a lista de prioridade contém todas as futuras colisões que poderão ocorrer, assumindo-se que cada partícula se move sempre em uma trajetória de linha reta. Conforme as partículas colidem e mudam de direção, alguns dos

eventos armazenados na lista de prioridade se tornam "invalidados", e já não correspondem a colisões físicas (TSOU e WAYNE, 2004).

Essa lista de prioridades determina uma sequência de colisão, determinada usando-se técnicas de procura de possíveis colisões no domínio, ou seja, antes da ocorrência da colisão cada partícula é mapeada e suas vizinhanças são armazenadas em uma estrutura de informação. A detecção da colisão necessita ser feita somente para partículas vizinhas e que potencialmente colidirão.

Para diminuir o esforço computacional Muth *et al.* (2007) apresentaram três sofisticados métodos para a detecção da colisão de partículas através de uma procura de vizinhança. Os métodos consistem na lista de vizinhança de Verlet (*Verlet-Neighbor List* – VL), método das células conectadas (*Linked Cell* – LC) e a lista linear conectada (*Linked Linear List* – LLL). Todos esses métodos mostraram eficiência na procura de possíveis colisões no domínio, sendo o primeiro e o segundo os mais usados na literatura.

No método VL uma área circular ou quadrada é delimitada ao redor de cada partícula e as outras partículas dentro desse domínio são consideradas como vizinhas da partícula central (Figura 3.3). O tamanho adequado da zona ao redor de uma partícula depende da velocidade das partículas e da densidade do sistema. A criação da lista de vizinhança requer n(n-1)/2 cálculos, onde o número necessário de operações ainda é da ordem  $O(n^2)$ . Entretanto, a lista não tem que ser atualizada em todo passo de tempo. A frequência de atualização depende da densidade do sistema, da velocidade das partículas, e do tamanho das esferas.

No método LC o sistema é dividido em uma grade, contendo  $m \times m \times m$  células para um caso 3D e  $m \times m$  para 2D (Figura 3.4). O tamanho adequado das células, como antes no método VL, depende da velocidade das partículas e da densidade do sistema. Como uma regra, o tamanho das células deve ser maior que o tamanho da maior partícula. A principal diferença entre LC e VL é que para LC as células não estão ligadas às partículas e assim não se movem. O tamanho da célula pode ser selecionado de modo que uma célula contenha no máximo aproximadamente três partículas.



Figura 3.3: Método de Verlet, a partícula mais escura é centrada no contorno delimitado pelas arestas *Dlist*, onde as partículas que estão dentro desses limites estão na lista de colisão.

Já o método LLL, as partículas são margeadas por caixas em que cada partícula está exatamente ajustada dentro dessas caixas, e as bordas são alinhadas ao sistema de eixo (Figura 3.5). Em seguida uma ordem linear é realizada com o início 'b' e fim 'e' de cada eixo da caixa. Dessa forma, as sequências de interesse são armazenadas em uma lista linear, para cada eixo. Se existe 'b' ou 'e', ou ambos, de uma partícula entre 'b' e 'e' de certa partícula, então existirá uma sobreposição das projeções de suas caixas ao longo do eixo.



Figura 3.4: Numeração das células ligadas no canto superior esquerdo e à direita as células que necessitam ser investigadas (células com tom de cinza) para a lista de vizinhança das partículas localizada na célula mais escura, para um caso 2D.



Figura 3.5: Caixas margeando ao redor das partículas com suas respectivas projeções em cada eixo, para um caso 2D.

Segundo Deen *et al.* (2007), a aproximação de esferas rígidas difere da aproximação de esferas macias, pelo uso do método *event-driven*, e para realizar a procura de futuras colisões mais eficiente, as colisões somente podem ocorrer durante um passo de tempo do sistema principal (*dt*). Nesse limite a distância máxima  $|\mathbf{r}_{ab}|_{max}$  entre a partícula *a* e seu potencial parceiro de colisão *b*, que pode também ser parede, é:

$$\left|\mathbf{r}_{ab}\right|_{\max} = R_a + R_{\max} + 2\mathbf{u}_{\max} dt \tag{3.15}$$

onde  $R_{\max} = \max(R_a)$  é o raio máximo das partículas e  $\mathbf{u}_{\max} = \max(|\mathbf{u}_a|)$  é o máximo das velocidades das partículas. Todas as partículas (incluindo parede) dentro dessa distância da partícula *a* faz sua lista de vizinhança. Assim pode-se calcular o tempo requerido para uma partícula *a* colidir com um parceiro de colisão *b* pertencente a essa lista a partir de sua atual posição.

Após definir a lista de colisão dos pares de partículas, o seguinte passo é calcular o tempo em que as partículas possivelmente colidirão, ou seja, o tempo requerido aos pares de partículas entrarem em contato.

#### 3.2.2 TEMPO DE COLISÃO

De acordo com Sigurgeirsson *et al.* (2001), para simular um sistema de colisões binárias com forças diferentes de zero, uma aproximação natural para os métodos numéricos é discretizar no tempo e integrar o sistema sobre um passo de tempo dt. Então, no fim de cada passo de tempo, é verificado se qualquer duas partículas estão sobrepostas, e se isso ocorrer é assumido que estão em processo de colisão. Por exemplo, durante um passo de tempo, um par de partículas pode colidir ou sobrepor, e então, separar-se novamente, deixando nenhuma evidência da colisão no fim do passo de tempo. Para capturar muitas colisões, um curto passo de tempo é, portanto, necessário, o que aumenta o esforço computacional.

Outro problema é assegurar que não há duas novas partículas sobrepostas após lidar com todas as partículas que se sobrepõem. Mas, eliminando-se o par que se sobrepôs, de algum modo pode resultar na sobreposição entre uma das duas partículas e outra partícula no sistema. Portanto, isto não parece ser uma abordagem correta para o problema (SIGURGEIRSSON *et al*, 2001).

Uma diferente aproximação é considerar a ação das forças exercidas nas partículas como nulas, em que as partículas se movem em linhas retas entre as colisões. Nesse caso, é possível calcular o tempo exato de uma colisão entre quaisquer duas partículas (Figura 3.6). Considerando duas partículas esféricas em que as posições no tempo dt são dadas por:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a^0 + \mathbf{u}_a dt \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{r}_b = \mathbf{r}_b^0 + \mathbf{u}_b dt \tag{3.16}$$

onde  $\mathbf{r}_a^0 \in \mathbf{r}_b^0 \in \Re^d$  são suas posições no tempo 0, e  $\mathbf{u}_a \in \mathbf{u}_b \in \Re^d$  são suas velocidades constantes. Sabendo-se que o raio das partículas é dado por  $R_a \in R_b$ , as partículas colidirão no tempo  $dt_{ab}$  somente se a distância entre seus centros for igual à soma dos seus raios, ou seja, se:

$$\left|\mathbf{r}_{a}\left(dt_{ab}\right) - \mathbf{r}_{b}\left(dt_{ab}\right)\right| = R_{a} + R_{b}$$
3.17



Figura 3.6: Esquema do tempo de colisão entre as partículas *a* e *b*.

Devido às esferas em colisão moverem-se com velocidades constantes, em que é determinada por suas posições no instante dt, o instante de tempo de colisão de cada par  $dt_{ab}$  é dado por:

$$\left|\mathbf{r}_{ab}^{0} + \mathbf{u}_{ab}^{0} dt_{ab}\right| = R_{ab}$$

$$3.18$$

onde  $\mathbf{r}_{ab}^{0} = \mathbf{r}_{a}^{0} - \mathbf{r}_{b}^{0}$  é a distância relativa,  $\mathbf{u}_{ab}^{0} = \mathbf{u}_{a}^{0} - \mathbf{u}_{b}^{0}$  é a velocidade relativa e  $R_{ab} = R_{a} + R_{b}$  é a soma dos raios das partículas em colisão. A solução da equação 3.18 é dada pela seguinte relação quadrática:

$$\left(\mathbf{u}_{ab}^{0}\cdot\mathbf{u}_{ab}^{0}\right)dt_{ab}^{2}+2\left(\mathbf{u}_{ab}^{0}\cdot\mathbf{r}_{ab}^{0}\right)dt_{ab}+\left(\mathbf{r}_{ab}^{0}\cdot\mathbf{r}_{ab}^{0}\right)=R_{ab}$$
3.19

Solucionando para o tempo de contato tem-se:

$$dt_{ab} = \frac{-\mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{r}_{ab}^{0} \pm \sqrt{D_{ab}}}{\left(\mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ab}^{0}\right)}$$

$$3.20$$

onde 
$$D_{ab} = \left(\mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{r}_{ab}^{0}\right)^{2} - \left(\mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ab}^{0}\right) \left(\mathbf{r}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{r}_{ab}^{0} - R_{ab}^{2}\right)$$
 é o termo discriminante da equação 3.20.

Dessa forma, o tempo de colisão é uma raiz de uma função quadrática. Se as partículas não estão sobrepondo no tempo 0, e sua equação tem duas soluções, então a menor solução é o tempo de sua próxima colisão. Por outro lado, se a equação não tem solução,  $D_{ab} < 0$ , ou se a condição  $\mathbf{u}_{ab}^0 \cdot \mathbf{r}_{ab}^0 > 0$  é satisfeita, as partículas não colidirão movendo-se ao longo da mesma linha reta com velocidade constante indefinidamente.

O cálculo de cada  $dt_{ab}$  para todos os parceiros de colisão ab são armazenados através da verificação de todos  $\frac{1}{2}n(n-1)$  pares. Finalmente, se  $dt_c = \min_{\{\forall ab\}} \{dt_{ab}\}$ , então  $dt + dt_c$  é o tempo da próxima colisão. Em  $dt + dt_c$ , a interação é processada, ou seja, as velocidades pós-colisão são calculadas, e o algoritmo procura o próximo  $dt_c$  (VALENTINI e SCHWARTZENTRUBER, 2009).

### 3.2.3 INTERAÇÃO ENTRE PARTÍCULAS

Ao movimentar a partícula até o ponto de contato pelo tempo  $dt_c$  o modelo de colisão de esfera rígida, descrito em Crowe *et al.* (1998), é aplicado para simular a colisão entre corpos. De modo geral, os modelos de esferas rígidas são baseados na equação do movimento de Newton integrada no tempo para corpos em colisão, obtendo assim, o impulso,  $\mathbf{J} \equiv \int \mathbf{F} dt$ , onde  $\mathbf{F}$  é a força agindo nos corpos em colisão. Desse modo, as relações entre as velocidades translacional e angular pós-colisão e pré-colisão podem ser encontradas diretamente.

Os parâmetros chave do modelo são os coeficientes de restituição ( $0 \le e \le 1$ ) e o coeficiente de fricção dinâmica ( $\mu \ge 0$ ). No caso de uma colisão perfeitamente elástica (e = 1) e perfeitamente sem atrito ( $\mu = 0$ ), *perfectly smooth collision*, nenhuma energia é dissipada. Essas colisões são referidas como colisões ideais. No caso de colisões não-ideais (e < 1 e/ou  $\mu > 0$ ), a energia é dissipada durante o processo de colisão (HOOMANS *et al.*, 2000).

No ponto de contato, os corpos em colisão apresentam um plano tangencial e uma direção normal  $\mathbf{n}_{ab}$ , mas com diferentes velocidades. Os corpos entram em colisão com uma velocidade relativa  $\mathbf{u}_{ab}^0$  e se separam com uma velocidade relativa  $\mathbf{u}_{ab}$  para o ponto de contato. A lei de Newton do impacto,  $\mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{n} = -e\mathbf{u}_{ab}^0 \cdot \mathbf{n}_{ab}$ , relaciona a componente normal da velocidade de pós-colisão  $\mathbf{u}_{ab}$  com a componente normal da velocidade pré-colisão  $\mathbf{u}_{ab}^0$  por medidas de um coeficiente de restituição *e* determinado experimentalmente, onde  $0 \le e \le 1$ . Corpos colidindo também apresentam uma componente tangencial da velocidade relativa no ponto de impacto,  $\mathbf{u}_{ab} - (\mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{n}_{ab})\mathbf{n}_{ab}$ , que é chamada de *slip* (deslizamento). A força de reação friccional no ponto de contato é oposta ao *slip* (STRONGE, 1990).

O sobrescrito 0 indica termos antes da colisão e o subscrito *ab* significa termos relativos entre as partículas *a* com as partículas *b*. Considere duas partículas esféricas colidindo, como na Figura 3.7, com vetores posições  $\mathbf{r}_a \in \mathbf{r}_b$ . O vetor unitário normal pode ser definido como:

$$\mathbf{n}_{ab} = \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{\left|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right|}$$
3.21

Dessa forma, o vetor unitário normal é direcionado da partícula a para a partícula b. O ponto de origem é o ponto de contato. Antes da colisão, as esferas com raios  $R_a$  e  $R_b$ , e massas  $m_a$  e  $m_b$  apresentam vetores velocidades translacional  $\mathbf{u}_a$  e  $\mathbf{u}_b$ , e vetores velocidade rotacional  $\omega_a$  e  $\omega_b$  (por definição a rotação horária é negativa).



Figura 3.7: Movimento relativo de duas esferas no ponto de contato. A figura da esquerda mostra as velocidades rotacionais ( $\omega_a \in \omega_b$ ) e a velocidade relativa do sistema ( $\mathbf{u}_{ab}$ ) e a figura da direita mostra o vetor impulso ( $\mathbf{J}$ ) e suas componentes  $J_n \in J_t$ .

Para uma colisão binária dessas esferas, as seguintes equações, apresentadas em Hoomans *et al.* (2001), podem ser derivadas aplicando-se a segunda e a terceira leis de Newton:

$$m_a \left( \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_a^0 \right) = \mathbf{J}$$

$$m_b \left( \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^0 \right) = -\mathbf{J} \tag{3.23}$$

$$I_a \left( \omega_a - \omega_a^0 \right) = - \left( R_a \mathbf{n}_{ab} \right) \times \mathbf{J}$$

$$3.24$$

$$I_b\left(\omega_b - \omega_b^0\right) = -\left(R_b \mathbf{n}_{ab}\right) \times \left(-\mathbf{J}\right)$$
3.25

$$m_a \left( \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_a^0 \right) = -m_b \left( \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^0 \right) = \mathbf{J}$$
3.26

$$\frac{I_a}{R_a} \left( \omega_a - \omega_a^0 \right) = -\frac{I_b}{R_b} \left( \omega_b - \omega_b^0 \right) = -\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{J}$$

$$3.27$$

onde  $I_a$  e  $I_b$  é o momento de inércia das partículas a e b, respectivamente, e é definido como:

$$I_a = \frac{2}{5}m_a R_a^2$$
 e  $I_b = \frac{2}{5}m_b R_b^2$  3.28

O vetor impulso  $\mathbf{J}$  é definido como:

$$\mathbf{J} = \int_{t=0}^{t=dt_c} \mathbf{F}_{ab} dt$$
3.29

onde  $dt_c$  é o tempo de contato (ou seja, a duração do contato). As equações 3.26 e 3.27 mostram que as velocidades pós-colisão de ambas as partículas podem ser calculadas em função do vetor **J**. Se a força  $\mathbf{F}_{ab}$  na equação 3.29 é conhecida como uma função de todos os parâmetros envolvidos, o impulso **J** poderia ser calculado diretamente.

Antes de essas relações constitutivas serem definidas, a velocidade relativa no ponto de contato tem que ser definida como:

$$\mathbf{u}_{ab} \equiv \mathbf{u}_{a}^{c} - \mathbf{u}_{b}^{c}$$
3.30

$$\mathbf{u}_{ab} = \left(\mathbf{u}_a - \omega_a \times R_a \mathbf{n}_{ab}\right) - \left(\mathbf{u}_b + \omega_b \times R_b \mathbf{n}_{ab}\right)$$
3.31

$$\mathbf{u}_{ab} = (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b) - (R_a \omega_a + R_b \omega_b) \times \mathbf{n}_{ab}$$
3.32

A partir dessa velocidade relativa, o vetor unitário tangencial pode ser obtido como:

$$\mathbf{t}_{ab} = \frac{\mathbf{u}_{ab}^{0} - \mathbf{n}_{ab} \left( \mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{n}_{ab} \right)}{\left| \mathbf{u}_{ab}^{0} - \mathbf{n}_{ab} \left( \mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{n}_{ab} \right) \right|}$$
3.33

As equações 3.26 e 3.27 podem ser rearranjadas usando  $(\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{J}) \times \mathbf{n}_{ab} = \mathbf{J} - \mathbf{n}_{ab} (\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{J})$ e a equação 3.32 para obter:

$$\mathbf{u}_{ab} - \mathbf{u}_{ab}^{0} = B_{1}\mathbf{J} - (B_{1} - B_{2})\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{J})$$
3.34

onde:

$$B_1 = \frac{7}{2} \left( \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \right) \tag{3.35}$$

e

$$B_2 = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}$$
 3.36

A partir daqui é necessário utilizar as relações constitutivas, onde três parâmetros entram no modelo matemático, para calcular os valores do impulso. O primeiro parâmetro é o coeficiente de restituição normal ( $0 \le e \le 1$ ):

$$\mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{n}_{ab} = -e \left( \mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{n}_{ab} \right)$$
 3.37

Para partículas não esféricas, essa definição pode levar a inconsistências da energia, entretanto, para partículas esféricas essa definição é válida.

O segundo parâmetro é o coeficiente de fricção dinâmica ( $\mu \ge 0$ ):

$$\left|\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{J}\right| = -\mu \left(\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{J}\right)$$
3.38

O terceiro parâmetro é o coeficiente de restituição tangencial ( $0 \le \beta_0 \le 1$ ):

$$\mathbf{u}_{ab} \times \mathbf{n}_{ab} = -\beta_0 \left( \mathbf{u}_{ab}^0 \times \mathbf{n}_{ab} \right)$$
 3.39

É possível notar que essa relação não afeta as componentes paralelas a  $\mathbf{n}_{ab}$  e que as componentes ortogonais a  $\mathbf{n}_{ab}$  estão relacionadas por um fator  $\beta_0$ . Embora seja aceito que esses coeficientes dependem do tamanho e velocidade de impacto das partículas, Hoomans *et al.* (2001) não consideraram essa dependência. A única exceção é feita para o coeficiente de restituição normal, onde as colisões que ocorrem em uma velocidade de impacto menor que um valor limiar, tipicamente  $10^{-4}$  m/s, são assumidas como perfeitamente elásticas (*e* = 1).

Combinando-se as equações 3.34 e 3.37 produz-se a seguinte expressão para a componente normal do vetor impulso:

$$J_n = -\left(1+e\right) \left(\frac{\mathbf{u}_{ab}^0 \cdot \mathbf{n}_{ab}}{B_2}\right)$$
3.40

Para a componente tangencial, dois tipos de colisões podem ser distinguidos: adesão (*sticking*) e deslizamento (*sliding*). Se a componente tangencial da velocidade relativa é suficientemente alta em comparação aos coeficientes de fricção e restituição tangencial, ocorre um "deslizamento" através de toda duração do contato, então a colisão é do tipo deslizamento. As colisões não-deslizamento são do tipo adesão. Quando  $\beta_0$  é igual a zero, a componente tangencial da velocidade relativa se torna zero durante a colisão de adesão. Quando  $\beta_0$  é maior do que zero nessa colisão, a componente tangencial da velocidade relativa se torna zero durante de tangencial da velocidade relativa se torna zero durante de tangencial da velocidade relativa se torna zero durante de tangencial da velocidade relativa se tor

$$\mu < \frac{(1+\beta_0)\mathbf{u}_{ab}^0 \cdot \mathbf{t}_{ab}}{J_n B_1} \qquad \text{deslizamento} \qquad 3.41$$
$$\mu \ge \frac{(1+\beta_0)\mathbf{u}_{ab}^0 \cdot \mathbf{t}_{ab}}{J_n B_1} \qquad \text{adesão} \qquad 3.42$$

Para colisões do tipo adesão, o impulso tangencial é dado por:

$$J_{t} = -(1+\beta_{0})\frac{\left|\mathbf{n}_{ab}\times\mathbf{u}_{ab}^{0}\right|}{B_{1}} = -(1+\beta_{0})\frac{\mathbf{t}_{ab}\cdot\mathbf{u}_{ab}^{0}}{B_{1}}$$
3.43

Para colisões do tipo deslizamento, o impulso tangencial é dado por:

$$J_t = -\mu J_n \tag{3.44}$$

O vetor impulso total é, então, simplesmente obtido pela soma:

$$\mathbf{J} = J_n \mathbf{n}_{ab} + J_t \mathbf{t}_{ab}$$

$$3.45$$

As velocidades agora podem ser calculadas a partir das equações 3.22 e 3.23.

Para a colisão partícula-parede, a massa da partícula *b* (ou seja, a parede) é infinitamente grande, que leva o termo  $1/m_b$  bem próximo de zero. Também, as velocidades rotacional e translacional dessas partículas de parede são todas iguais a zero.

Para o desenvolvimento do modelo de colisão, Hoomans *et al.* (1996) se basearam nas seguintes hipóteses:
- As partículas são esféricas e rígidas, a forma é retida após o impacto;
- As colisões são binárias e instantâneas;
- O contato ocorre em um ponto, permitindo a conservação do momentum angular no ponto de contato;
- O movimento é bidimensional com os centros de massa das partículas movimentando-se em um plano;
- As partículas estão em voo livre durante as colisões;
- As forças de interação são impulsivas e todas as outras forças são negligenciadas durante a colisão.

Como as colisões são binárias, as partículas não impactarão em mais que uma partícula vizinha simultaneamente. Assim, os múltiplos contatos são interpretados como uma serie de sucessivos impactos, todos ocorrendo rapidamente dentro de um determinado passo de tempo. Se essa hipótese de colisões binárias não é considerada, as equações de conservação do momentum se tornam muito complexas, diminuindo substancialmente a eficiência do processamento dos cálculos.

Usando-se a hipótese de contatos praticamente instantâneos, mas de forma sequencial, as partículas podem ser consideradas em voo livre entre os impactos. Essa é a principal hipótese do estágio de atualização do movimento, e evita a necessidade de integração.

No entanto, segundo Hogue e Newland (1994), o movimento de voo livre não é possível em todos os casos. Esse autores enfatizam que o voo livre não pode ocorrer quando uma partícula está circundada por outras partículas de tal modo que um deslocamento na direção de sua velocidade resultante gera um excessiva interpenetração com as partículas vizinhas. Nesse caso, a partícula não pode ser movida. Para contornar esse problema, os movimentos de voo livre das partículas são considerados somente como "configurações de teste". Se o estado de "teste" não envolve excessiva penetração, o voo livre é aceito; por outro lado, a antiga posição é mantida como a nova posição.

# CAPÍTULO 4 Metodologia Numérica

Neste capítulo aborda-se a formulação numérica para a implementação do modelo de ondas com a descrição numérica das equações do tipo Boussinesq descritas na Seção 2.2 e o modelo granular multifásico abordado no Capítulo 3. Para o modelo de ondas foi adotado o modelo de Wei et al. (1995), pois o algoritmo numérico está bem descrito na literatura e é muito utilizado pela comunidade científica. A seção 4.1 apresenta as equações não lineares de ondas do tipo Boussinesq com suas extensões adotadas para o modelo euleriano. Na seção 4.1.1 está descrito o esquemas de diferenciação temporal, em que consiste no método previsor-corretor de 4ª ordem de Adams-Bashforth-Moulton e a seção 4.1.2 apresenta o esquema de diferenciação espacial de 4ª ordem do modelo numérico. Para calcular a velocidade local da onda, a seção 0 apresenta o método de Thomas, que consiste em um algoritmo que soluciona um sistema de matriz tridiagonal utilizando apenas os valores das diagonais principais. Os ruídos gerados pelo modelo de ondas e por altos gradientes da profundidade podem ser suavizados utilizando-se um filtro numérico, abordado na seção 4.1.4 através do filtro Savitzky-Golay para suavizar altas frequências geradas nos cálculos numéricos. Os métodos de geração de ondas são descritos na seção 4.1.5, a qual apresentam-se três métodos distintos de gerador de ondas (pá-pistão, pá-batedor e função gaussiana). A dissipação da energia da onda devido ao leito é descrito nas seções 4.1.6 e 4.1.7, que definem os termos dissipativos devido à fricção com o fundo e devido à quebra da onda, respectivamente. As condições de contorno do modelo de ondas são definidas na seção 4.1.8, onde o contorno fechado é representado por uma parede rígida e impermeável, e o contorno aberto por uma camada de absorção da energia da onda (camada esponja). Na seção 4.1.9 está o esquema do modelo de ondas com as características para a funcionalidade do algoritmo numérico.

Finalmente na seção 4.2 tem-se o esquema do modelo granular utilizado para o movimento da fase de partículas em um meio de fase fluida. O processo geral adotado para solucionar a dinâmica das partículas segue o trabalho de Hoomans (2000).

#### 4.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE ONDAS

Segundo Wei e Kirby (1995) a escolha do esquema numérico para as equações 2.46 e 2.49 é determinada por dois fatores principais. Primeiro, é que em qualquer sistema de equação de Boussinesq, a diferença finita de segunda ordem de precisão para os termos com as derivadas de primeira ordem deixam a ordem dos termos do erro de truncamento matematicamente na mesma forma dos termos dispersivos que aparecem no modelo. Esses termos são eliminados quando o limite  $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$ , mas geralmente são grandes o suficiente para interferir na solução numérica. Em vez de reduzir todos os erros de diferenciação para um tamanho menor que todos os termos retidos nas equações do modelo, Wei e Kirby (1995) adotaram um esquema onde a diferenciação espacial dos termos de primeira ordem é feita para quarta ordem de precisão, levando a um erro de truncamento de  $O(\Delta x^4/\mu^2)$  relativo aos termos dispersivos do modelo em  $O(\mu^2)$ . Dessa forma, as diferenças finitas dos termos dispersivos são somente para segunda ordem de precisão, levando a erros de  $O(\Delta x^2)$  relativo aos atuais termos dispersivos. Finalizando, o sistema de equações é escrito em uma forma mais conveniente para a aplicação de um procedimento de passo de tempo de mais alta ordem, que é o esquema "previsor-corretor" de Adams-Bashforth-Moulton para quarta ordem (esquema ABM) usado por Wei et al. (1995).

O segundo fator é o tratamento não implícito dos termos dispersivos na equação do momentum. Dessa forma, as equações 2.46 e 2.49 podem ser reescritas na forma unidimensional como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = E(\eta, u_{\alpha})$$

$$4.1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u_{\alpha}) = F\left(\eta, u_{\alpha}, \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t}\right)$$

$$4.2$$

onde U é definido como:

$$U = u_{\alpha} + \left[ b_1 h \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 (h u_{\alpha})}{\partial x^2} \right]$$

$$4.3$$

que é tratado como uma simples variável no esquema ABM. As quantidades  $E \in F$  são as derivadas espaciais de  $\eta$ ,  $u_{\alpha} \in \partial u_{\alpha}/\partial t$  que são definidas como:

$$E = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ (h+\eta)u_{\alpha} \right] + \left[ a_{1}h^{3}\frac{\partial^{2}u_{\alpha}}{\partial x^{2}} + a_{2}h^{2}\frac{\partial^{2}(hu_{\alpha})}{\partial x^{2}} \right] \right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ a_{1}h^{2}\eta + \frac{1}{6}\eta\left(h^{2} - \eta^{2}\right) \right] \frac{\partial^{2}u_{\alpha}}{\partial x^{2}} \right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ a_{2}h\eta - \frac{1}{2}\eta\left(h+\eta\right) \right] \frac{\partial^{2}(hu_{\alpha})}{\partial x^{2}} \right\}$$
$$4.4$$

$$F = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( u_{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \right)$$
  
$$- \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left( z_{\alpha}^{2} - \eta^{2} \right) u_{\alpha} \frac{\partial^{2} u_{\alpha}}{\partial x^{2}} \right\}$$
  
$$- \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( z_{\alpha} - \eta \right) u_{\alpha} \frac{\partial^{2} \left( h u_{\alpha} \right)}{\partial x^{2}} \right\}$$
  
$$- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \left( h u_{\alpha} \right)}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \right)^{2} \right\}$$
  
$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \eta^{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \left( h u_{\alpha} \right)}{\partial t} \right\}$$
  
$$4.5$$

As constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são definidas como:

$$a_1 = \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{6}$$
,  $a_2 = \beta + \frac{1}{2}$ ,  $b_1 = \frac{\beta^2}{2}$ ,  $b_2 = \beta$  4.6

onde  $\beta$  foi definido no trabalho de Nwogu (1993) como  $\beta = z_{\alpha}/\beta = -0.531$ .

As equações de conservação da massa e do momentum, equações 4.1 e 4.2, respectivamente, descrevem a propagação da onda sobre um fundo suave, sem fricção e sem quebra da onda. Para aplicações práticas, como a propagação da onda sobre um fundo

irregular e transporte de sedimentos sobre praias com barras arenosas, é necessário uma descrição mais precisa dos processos de quebra e fricção com fundo, onde existe um rápido decaimento da energia da onda. A zona de transição da quebra da onda é muito importante na previsão de correntes induzidas pelas ondas e transporte de sedimentos na zona de surfe (NWOGU, 1996). Para incorporar esses efeitos nas equações da massa e do momentum, pode-se reescrever as equações 4.1 e 4.2 em forma mais completa como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = E(\eta, u_{\alpha}) + S_f(x, t)$$

$$4.7$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u_{\alpha}) = F\left(\eta, u_{\alpha}, \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t}\right) + F_{\omega} + F_{\tau} + S_{g}(x, t)$$

$$4.8$$

Onde os termos  $S_f(x,t)$  e  $S_g(x,t)$  estão relacionados com a geração das ondas,  $F_{\omega}$  é o termo de quebra da onda e  $F_{\tau}$  é o termo de fricção com o fundo. Esses termos são discutidos nas próximas seções.

Zou e Fang (2008) usaram um filtro de quarta ordem a cada *n* passos de tempo para remover os ruídos de alta frequência causados pelas mudanças bruscas da batimetria, movimentos não-lineares da onda e erros de discretização. Para o modelo desenvolvido aqui, foi usado o filtro de Savitzky-Golay, definido mais adiante na seção 4.1.4.

A estabilidade dos métodos de diferenciação espacial e temporal das equações de Boussinesq foram pesquisadas por Lin e Man (2005). Os autores encontram que o esquema numérico de ABM é mais estável quando o número de Courant  $Cr = \sqrt{gh} (\Delta t / \Delta x)$  é menor ou igual a 0,5.

## 4.1.1 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL DO MODELO NUMÉRICO DE ONDAS

Uma vez que o lado direito das equações 4.7 e 4.8 é calculado nos passos de tempo n-2, n-1 e n, é possível estimar as quantidades de  $\eta$  e U no próximo passo de tempo n+1 aplicando o esquema explícito de Adams-Bashforth com 3ª Ordem no estágio previsor como:

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \frac{\Delta t}{12} \Big[ 23E_i^n - 16E_i^{n-1} + 5E_i^{n-2} \Big]$$

$$4.9$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{12} \Big[ 23F_i^n - 16F_i^{n-1} + 5F_i^{n-2} \Big]$$

$$4.10$$

Os valores de  $\eta_i^{n+1}$  são simples de obter. Já a avaliação das velocidades horizontais no novo nível de tempo  $u_i^{n+1}$ , entretanto, requer simultaneamente a solução de um sistema de matrizes tridiagonais.

Após o cálculo dos valores previstos de  $\eta_i^{n+1}$  e  $u_i^{n+1}$ , é possível determinar as quantidades do lado direito das equações 4.1 e 4.2 no passo previsor ficando com  $E_i^{n+1}$  e  $F_i^{n+1}$ . Em seguida, aplica-se o método implícito corretor Adams-Moulton de quarta ordem como:

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \frac{\Delta t}{24} \Big[ 9E_i^{n+1} + 19E_i^n - 5E_i^{n-1} + E_i^{n-2} \Big]$$

$$4.11$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{24} \Big[ 9F_i^{n+1} + 19F_i^n - 5F_i^{n-1} + F_i^{n-2} \Big]$$

$$4.12$$

Pode ser observado que o cálculo de E e F em certo nível de tempo apresenta valores correspondentes de  $\partial u_{\alpha}/\partial t$  e  $\partial (hu_{\alpha})/\partial t$  que podem ser solucionados explicitamente no passo previsor nos tempos conhecidos, n-2, n-1 e n, como:

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial t} \right|^n = \frac{1}{2\Delta t} \left[ 3q_i^n - 4q_i^{n-1} + q_i^{n-2} \right] + O\left(\Delta t^2\right)$$

$$4.13$$

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial t} \right|^{n-1} = \frac{1}{2\Delta t} \left[ q_i^n - q_i^{n-2} \right] + O\left(\Delta t^2\right)$$

$$4.14$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}\Big|^{n-2} = -\frac{1}{2\Delta t} \Big[ 3q_i^{n-2} - 4q_i^{n-1} + q_i^n \Big] + O\Big(\Delta t^2\Big)$$

$$4.15$$

onde q representa  $u_{\alpha} e h u_{\alpha}$ .

Para o estágio corretor,  $\partial q/\partial t$  pode ser avaliado como:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} \bigg|^{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} \Big[ 11q_i^{n+1} - 18q_i^n + 9q_i^{n-1} - 2q_i^{n-2} \Big] + O(\Delta t^3)$$

$$4.16$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}\Big|^n = \frac{1}{6\Delta t} \Big[ 2q_i^{n+1} + 3q_i^n - 6q_i^{n-1} + q_i^{n-2} \Big] + O(\Delta t^3)$$
4.17

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}\Big|^{n-1} = -\frac{1}{6\Delta t} \Big[ 2q_i^{n-2} + 3q_i^{n-1} - 6q_i^n + q_i^{n+1} \Big] + O\Big(\Delta t^3\Big)$$

$$4.18$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}\Big|^{n-2} = -\frac{1}{6\Delta t} \Big[ 11q_i^{n-2} - 18q_i^{n-1} + 9q_i^n - 2q_i^{n+1} \Big] + O(\Delta t^3)$$

$$4.19$$

O estágio corretor fica em iteração até o erro entre dois sucessivos resultados alcançar um limite definido. Valores do erro na ordem de  $10^{-5}$  tem-se mostrado com resultados satisfatórios na literatura. O erro será calculado para cada uma das duas variáveis dependentes  $f = \eta, u_{\alpha}$  com relação as variáveis previstas  $\tilde{f} = \eta, u_{\alpha}$  e é definido como:

$$erro = \frac{\sum_{i} \left| f_{i}^{n+1} - \tilde{f}_{i}^{n+1} \right|}{\sum_{i} \left| \tilde{f}_{i}^{n+1} \right|}$$

$$4.20$$

## 4.1.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DO MODELO NUMÉRICO DE ONDAS

No método previsor-corretor, a discretização espacial para várias ordens de derivadas espaciais, que incluem de primeira e de segunda ordem. As derivadas de primeira ordem são discretizadas pelo método de diferenças centradas de cinco pontos com quarta ordem de precisão e para as derivadas de segunda ordem usou-se o método de diferenças centradas de segunda ordem de precisão com três pontos.

Para as derivadas de primeira ordem dos termos  $f = \eta, u_{\alpha}, hu_{\alpha}, \partial^2 u_{\alpha}/\partial x^2, \partial^2 (hu_{\alpha})/\partial x^2$ tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i} = \frac{1}{12\Delta x} \left( f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2} \right) \quad \text{para} \quad 3 \le i \le m - 2$$

$$4.21$$

As diferenciações de primeira ordem nos pontos i=1, i=2, i=m-1 e i=m são, respectivamente, definidas na seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i=1} = \frac{1}{12\Delta x} \left(-25f_1 + 48f_2 - 36f_3 + 16f_4 - 3f_5\right)$$

$$4.22$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i=2} = \frac{1}{12\Delta x} \left( -3f_1 - 10f_2 + 18f_3 - 6f_4 + f_5 \right)$$

$$4.23$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i=m-1} = \frac{1}{12\Delta x} \left(3f_m + 10f_{m-1} - 18f_{m-2} + 6f_{m-3} - f_{m-4}\right)$$

$$4.24$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i=m} = \frac{1}{12\Delta x} \left(25f_m - 48f_{m-1} + 36f_{m-2} - 16f_{m-3} + 3f_{m-4}\right)$$

$$4.25$$

Para as derivadas de segunda ordem dos termos  $f = u_{\alpha}, hu_{\alpha}$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_i = \frac{1}{\Delta x^2} \left( f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \right) \quad \text{para} \quad 2 \le i \le m - 1$$

$$4.26$$

A diferenciação de segunda ordem nos pontos i = 1 e i = m são, respectivamente, definidos na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{i=1} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(2f_1 - 5f_2 + 4f_3 - f_4\right)$$
4.27

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{i=m} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(2f_m - 5f_{m-1} + 4f_{m-2} - f_{m-3}\right)$$

$$4.28$$

# 4.1.3 CALCULO DA VELOCIDADE $u_{\alpha}$ A PARTIR DE U

Aplicando diferenças centradas de segunda ordem para as derivadas de segunda ordem, a equação 4.3 no passo de tempo após o estágio previsor fica:

$$u_{\alpha}\Big|_{i=1}^{n+1}\left(\frac{b_{1}h_{i}^{2}}{\Delta x^{2}} + \frac{b_{2}h_{i}}{\Delta x^{2}}h_{i-1}\right) + u_{\alpha}\Big|_{i}^{n+1}\left(1 - 2\frac{b_{1}h_{i}^{2}}{\Delta x^{2}} - 2\frac{b_{2}h_{i}^{2}}{\Delta x^{2}}\right) + u_{\alpha}\Big|_{i+1}^{n+1}\left(\frac{b_{1}h_{i}^{2}}{\Delta x^{2}} + \frac{b_{2}h_{i}}{\Delta x^{2}}h_{i+1}\right) = U(u_{\alpha})\Big|_{i}^{n+1}$$

$$4.29$$

A equação 4.29 pode ser solucionada através do método de matriz tridiagonal, esquematizada como:

$$\begin{bmatrix} b_{1} & c_{1} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1} & b_{2} & c_{2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3} & b_{3} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & c_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{m} & b_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\alpha} |_{1}^{n+1} \\ u_{\alpha} |_{2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{\alpha} |_{n}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d |_{1}^{n+1} \\ d |_{2}^{n+1} \\ d |_{3}^{n+1} \\ \vdots \\ d |_{n}^{n+1} \end{bmatrix}$$

A solução de matriz tridiagonal pode ser elaborada através do algoritmo de Thomas que consiste em um método de simplificação da Eliminação de Gauss para solução de sistemas de equações tridiagonais, utilizando apenas valores das diagonais principais e, assim, otimizando o desempenho computacional. A equação 4.29 se torna:

$$u_{\alpha}|_{i-1}^{n+1}(a_{i}) + u_{\alpha}|_{i}^{n+1}(b_{i}) + u_{\alpha}|_{i+1}^{n+1}(c_{i}) = d|_{i}^{n+1}$$

$$4.30$$

onde

$$\begin{split} a_{i} &= \frac{b_{1}h_{i}^{2}}{\Delta x^{2}} + \frac{b_{2}h_{i}}{\Delta x^{2}}h_{i-1};\\ b_{i} &= 1 - 2\frac{b_{1}h_{i}^{2}}{\Delta x^{2}} - 2\frac{b_{2}h_{i}^{2}}{\Delta x^{2}};\\ c_{i} &= \frac{b_{1}h_{i}^{2}}{\Delta x^{2}} + \frac{b_{2}h_{i}}{\Delta x^{2}}h_{i+1}; \end{split}$$

$$d\big|_{i}^{n+1} = U\big(u_{\alpha}\big)\big|_{i}^{n+1}.$$

r

O primeiro passo é realizar uma varredura (*sweep*) adiantada onde novos coeficientes são encontrados na seguinte forma:

$$\begin{cases} c'_{i} = \frac{c_{i}}{b_{i}} & \text{para } i = 1 \\ c'_{i} = \frac{c_{i}}{b_{i} - c'_{i-1}a_{i}} & \text{para } i = 2, m - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d'_{i} = \frac{d_{i}}{b_{i}} & \text{para } i = 1 \\ d'_{i} = \frac{d_{i} - d'_{i-1}a_{i}}{b_{i} - c'_{i-1}a_{i}} & \text{para } i = 2, m - 1 \end{cases}$$

$$4.32$$

O segundo passo é realizar uma segunda varredura atrasada para obter a solução desejada como:

$$u_{\alpha}\big|_{m}^{n+1} = d'_{m} \tag{4.33}$$

$$u_{\alpha}|_{i}^{n+1} = d'_{i} - c'_{i} u_{\alpha}|_{i+1}^{n+1}$$
 para  $i = m - 1, -1, 1$  4.34

## 4.1.4 FILTRO NUMÉRICO

Nessa seção será discutido um tipo particular de filtro passa-baixa, utilizado para a suavização das altas-frequências geradas pelo método numérico discutido anteriormente. O filtro utilizado é fundamentado na formulação dos mínimos-quadrados de Savitzky e Golay (1964), também conhecido como filtro de Savitzky-Golay ou filtro Digital de Suavização Polinomial (*Digital Smoothing Polynomial filter*).

Savitzky e Golay (1964) afirmam que o modo mais simples de suavizar flutuações nos dados é através da média móvel. Uma descrição mais precisa que pode ser abrangida para métodos mais sofisticados é baseada no conceito de um convoluto e de uma função de convolução. Por exemplo, para executar a média móvel de uma série de dados utilizando-

se o método de convolução, um grupo de pontos deve ser adotado e cada valor ordinário dentro desse grupo é multiplicado por um coeficiente de convolução. Os produtos resultantes são somados e divididos pelo número de pontos desse grupo, ou seja, se a escolha é de cinco pontos para um grupo tem-se o seguinte:

Grupo de dados

O conjunto de dados acima é a função de convolução, e o número pelo qual deve ser dividido, nesse caso, é 5. Para ter o próximo ponto na média móvel, o centro do grupo de dados é deslocado para direita e o processo é repetido.

O conceito de convolução pode ser generalizado através da média móvel simples. No caso geral os valores de C representam qualquer conjunto de inteiros de convolução. O procedimento é multiplicar  $C_{-2}$  pelo número oposto a ele, então  $C_{-1}$  pelo seu número oposto, e assim por diante, a soma dos resultados divididos por um fator de normalização é a função desejada avaliada no ponto convoluto indicado por  $C_0$ . Para o próximo ponto, move o grupo de inteiros de convolução para a direita e repete a operação. Em outras palavras, esse método pode ser descrito matematicamente por:

$$g_{j} = \frac{\sum_{i=-m}^{i=m} C_{i} f_{j+1}}{N}$$
4.35

onde o subscrito *j* representa o índice de execução dos dados ordinários na série de dados original, m = (N-1)/2, *N* é o número de pontos do grupo de dados *f* e *g* é o resultado final.

Savitzky e Golay (1964) mostram que a média móvel e outras funções tem o efeito desejado em reduzir o nível de ruído, porém provocam a degradação da intensidade do pico dos dados. As funções de convolução descritas anteriormente são muito simples e não extraem o máximo de informação possível. Numericamente é possível desenhar uma linha que melhor se ajusta em um determinado registro de dados e o critério mais comum

é o de mínimos-quadrados. O mínimo-quadrado pode ser indicado como um curva que se ajusta a um conjunto de pontos. Esse método leva à derivação de um grupo de inteiros que fornece uma função peso, onde a partir desse grupo de inteiros o ponto central pode ser avaliado pelo procedimento de convolução discutido anteriormente. Assim, é definido o método de Savitzky-Golay, que é exatamente equivalente ao método de mínimos quadrados.

A vantagem de utilizar filtros com o método de Savitzky-Golay é que, primeiramente, o princípio é intrínseco, ou seja, a execução do polinômio de ajuste de mínimos-quadrados é muito simples. A operação de convolução é muito mais fácil de ser implementada em algoritmos do que o cálculo dos mínimos quadrados. Segundo, os coeficientes do filtro podem ser distribuídos em uma tabela, a partir de soluções explícitas, ou podem ser encontrados através de cálculos numéricos, a partir de rotinas computacionais. E por último, os filtros de Savitzky-Golay podem ter comprimentos arbitrários (ordens) e, portanto, preferidos para processamento de dados (LUO *et al.*, 2005a).

Com isso, os filtros de Savitzky-Golay são baseados no princípio de ajuste de um  $N^{th}$  grau polinomial para um grupo de amostras de entrada em um intervalo de comprimento finito em torno do tempo de amostragem de saída. Esses filtros são preferidos pois, quando são adequadamente designados para coincidir com a forma de onda de um sinal "sobre amostrado" por um ruído, tendem a preservar a largura e altura dos picos no sinal da forma da onda (SCHAFER, 2010).

Na aproximação de Savitzky-Golay, cada sucessivo subgrupo de 2m+1 pontos é ajustado por um polinômio de grau p, sendo  $p \le 2m$ , no senso dos mínimos quadrados. A  $d^{th}$ diferenciação, onde  $0 \le d \le p$ , do dado original no ponto central, é obtida pela diferenciação do polinômio ajustado em vez dos dados originais. Finalmente, a execução do polinômio ajustado dos mínimos quadrados pode ser simplesmente e automaticamente realizada pela convolução de todo o dado de entrada com um filtro digital de comprimento 2m+1. Os coeficientes de convolução podem ser obtidos para todos os pontos do dado, para todos os graus polinomiais e para todas as ordens de diferenciação, mas com somente um número ímpar de grupo de dados (LUO *et al.*, 2005b). Para uma série de dados igualmente espaçados com valores  $f_i \equiv f(t_i)$ , onde  $t_i \equiv t_0 + i\Delta$ para algum espaçamento de amostragem constante  $\Delta$  e i = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., o mais simples tipo do filtro digital substitui cada valor do dado  $f_i$  por uma combinação linear  $g_i$  pode-se reescrever a equação 4.35 como:

$$g_{i} = \sum_{n=nl}^{n=nr} c_{n} f_{i+n}$$
 4.36

onde nl é o número de pontos usado à esquerda de um ponto de dado *i*, enquanto que nré o número usado à direita. Como um ponto de partida para o entendimento dos filtros de Savitzky-Golay, foi considerado o procedimento mais simples possível: Para algum nl = nr fixo, calcula-se cada  $g_i$  como a média dos pontos de dado a partir de  $f_{i-nl}$  para  $f_{i-nr}$ . Esse procedimento é também conhecido como média da janela móvel (moving window averaging) e corresponde à equação 4.35 com a constante C = 1 e a equação 4.36 com a constante  $c_n = 1/(nl + nr + 1)$ . Se a função subjacente é constante, ou é mudada linearmente com o tempo (aumentando ou diminuindo), então nenhum viés ou erro sistemático é introduzido no resultado. Pontos mais altos em uma extremidade do intervalo da média estão na média balanceada pelos pontos mais baixos no outra extremidade. Um viés é introduzido, entretanto, se a função subjacente apresenta uma segunda derivada diferente de zero. Em um máximo local, por exemplo, a média da janela móvel sempre reduz o valor da função. Na aplicação espectrométrica, a linha espectral estreita tem sua altura reduzida e seu comprimento aumentado. Uma vez que esses parâmetros são próprios de interesse físico, o viés introduzido é indesejado.

Portanto, a ideia da filtragem usando o método de Savitzky-Golay é encontrar os coeficientes  $c_n$  que preservam os momentos mais altos. Equivalentemente, a ideia é aproximar a função subjacente dentro da janela móvel (grupo de dados) não por uma constante (cuja estimativa é a média) mas por um polinômio de mais alta ordem, tipicamente quadrática ou quartica. Para cada ponto  $f_i$ , são ajustados os mínimos quadrados em um polinômio para todos os pontos nl + nr + 1 em uma janela móvel e então faz-se  $g_i$  ser o valor daquele polinômio na posição i. Existem grupos particulares

de coeficientes do filtro  $c_n$  para que a equação 4.36 automaticamente acompanhe o processo de ajustamento dos mínimos quadrados dentro de uma janela móvel.

Para derivar estes coeficientes, considere que  $g_0$  pode ser obtido a partir de um ajuste de polinômio de grau M em i, denominado por  $a_0 + a_1i + \dots + a_Mi^M$  para os valores  $f_{-nl}, \dots, f_{nr}$ . Então  $g_0$  será o valor daquele polinômio em i = 0, denominado por  $a_0$ , a configuração da matriz para esse problema é:

$$A_{ij} = i^{j}$$
 onde  $i = -nl, ..., nr$ ,  $j = 0, ..., M$  4.37

e as equações normais para o vetor de  $a_j$  em termos do vetor de  $f_i$  são em notação matricial dadas como:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{f} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{f})$$
  
4.38

Que apresentam as formas específicas:

$$\left\{\mathbf{A}^{T} \cdot \mathbf{A}\right\}_{ij} = \sum_{k=-nl}^{nr} A_{ki} A_{kj} = \sum_{k=-nl}^{nr} k^{i+j}$$
4.39

e

$$\left\{\mathbf{A}^{T}\cdot\mathbf{f}\right\}_{j} = \sum_{k=-nl}^{nr} A_{ki}f_{k} = \sum_{k=-nl}^{nr} k^{j}f_{k}$$

$$4.40$$

Uma vez que o coeficiente  $c_n$  é a componente de  $a_0$  quando **f** é substituído pelo vetor unitário  $\mathbf{e}_n$ ,  $-nl \le n < nr$ , tem-se:

$$c_n = \left\{ \left( \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \right)^{-1} \cdot \left( \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{e}_n \right) \right\}_0 = \sum_{m=0}^M \left\{ \left( \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \right)^{-1} \right\}_{0m} n^m$$

$$4.41$$

onde  $\mathbf{A}^{T}$  é a transposta da matriz  $\mathbf{A}$ . Então, a solução para os coeficientes polinomiais pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{c}_{n} = \left(\boldsymbol{A}^{T} \cdot \boldsymbol{A}\right)^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{A}^{T} \cdot \boldsymbol{e}_{n}\right)$$

$$4.42$$

Assim os coeficientes podem ser substituídos na equação 4.36 para encontrar a suavização do registro de dados.

## 4.1.5 GERAÇÃO DE ONDAS

Em laboratórios de tanques de ondas de águas rasas, a geração das ondas é muito importante, e tanto o movimento da onda quanto sua energia podem ser determinados através da aproximação da teoria linear de ondas. A teoria do gerador de ondas pode ser encontrada com mais detalhes em Dean e Dalrymple (1991), o qual define o problema do valor de contorno para o gerador de ondas em um tanque de ondas. Os autores definem uma formulação matemática para o gerador de ondas partindo da equação de Laplace para velocidade potencial da propagação de ondas em duas dimensões considerando o fluido incompressível e irrotacional. Dean e Dalrymple (1991) descrevem dois tipos de geradores do tipo pá, o batedor (*flap*), Figura 4.1, e o pistão (*piston*), Figura 4.2, em que a teoria baseia-se na proposta de Galvin, no qual se move para frente e para trás de acordo com o sinal fornecido para a pá propulsora.

Sendo assim, a velocidade da pá é igual à velocidade da partícula na profundidade média local da onda gerada. A teoria indica que a água deslocada pelo gerador de onda deveria ser igual à crista do volume da propagação da forma da onda.



Figura 4.1: Esquema do gerador de ondas do tipo pá-batedor.



Figura 4.2: Esquema do gerador de ondas do tipo pá-pistão.

Dessa forma, Dean e Dalrymple (1991) definem uma formulação matemática, a partir da teoria linear, que relaciona a largura do deslocamento ou batida (*Stroke*) S do gerador com a altura de onda H como sendo:

#### Movimento do tipo batedor (*flap*)

$$\frac{H}{S} = 4 \left(\frac{\sinh kh}{kh}\right) \frac{k \sinh kh - \cosh kh + 1}{\sinh kh + 2kh}$$

$$4.43$$

#### Movimento do tipo pistão (piston)

$$\frac{H}{S} = \frac{2\cosh 2kh + 1}{\sinh kh + 2kh}$$

$$4.44$$

onde  $k = 2\pi/L$  é o número de ondas e h é a profundidade local média.

Se S(z) é a amplitude do deslocamento da pá (*Stroke*) do gerador de ondas, seu deslocamento horizontal  $X_s$  é dado por:

$$X_s = \frac{S(z)}{2} \sin \omega_s t \tag{4.45}$$

onde  $\omega_s$  é a frequência angular o gerador de ondas.

Assim, a aceleração do gerador de onda na equação do momentum fica como:

$$\frac{\partial^2 X_s}{\partial t^2} = -\frac{S(z)}{2} \omega_s^2 \sin \omega_s t \tag{4.46}$$

Outro método de geração de ondas aplicado neste trabalho, é o método descrito em Wei *et al.* (1999). Os autores incluem um termo fonte nas equações governantes na forma de uma fonte de massa na equação da continuidade, termo  $S_f(x,t)$  na equação 4.7, ou uma forçante de pressão na equação do momentum, termo  $S_g(x,t)$  na equação 4.8. No entanto, os autores mostraram estudo de casos usando a função fonte  $S_f(x,t)$  na equação da conservação da massa com uma forma gaussiana suave, Figura 4.3, dada por:

$$\hat{S}_f(x) = D\exp\left(-\beta X_s^2\right)$$

$$4.47$$

onde D é amplitude de cada componente espectral,  $\beta$  é um parâmetro associado com a largura da função geradora e  $X_s$  é a posição da fonte geradora na direção x. Então a

função fonte pode ser escrita em duas dimensões horizontais para várias frequências e direções de onda como:

$$S_{f}(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^{2}} \int \int D(\lambda, \omega) \exp(-\beta X_{s}^{2}) \exp[i(\lambda y - \omega t)] d\omega d\lambda$$
  
=  $\exp(-\beta X_{s}^{2}) F(y, t)$  4.48

A equação 4.48 apresenta uma vantagem em simular ondas aleatórias com maior velocidade computacional.



Figura 4.3: Esquema da geração de ondas pelo método de uma função gaussiana.

Para o caso unidimensional a variável da série temporal da função fonte F(y,t) que é dada por  $F(y,t) = \int \int D \sin(\lambda y - \omega t) d\omega d\lambda$ , pode ser reescrita como:

$$F(t) = \int D\sin(-\omega t)d\omega$$
4.49

onde substituindo 4.49 em 4.48 obtém-se a forma final da equação da fonte geradora para o caso unidimensional horizontal e para uma frequência de onda:

$$S_f(x,t) = \exp(-\beta X_s^2) D\sin(-\omega t)$$

$$4.50$$

Segundo Wei *et al.* (1999), a amplitude da função fonte D não é somente uma função da característica da onda desejada, mas também uma função do parâmetro livre  $\beta$  que descreve a largura da fonte. Um valor grande de  $\beta$  é desejado, já que a região correspondente à fonte é mais estreita, o que equivale a alargar o domínio de cálculo. Entretanto, valores muito grandes de  $\beta$  podem resultar em uma pobre representação de diferenças finitas da região da fonte. A largura da fonte W pode ser dada por:

$$W = \left| x_2 - x_1 \right| \tag{4.51}$$

onde  $x_1 e x_2$  são, respectivamente, as coordenadas horizontal inicial e final da largura da fonte, e são as raízes da equação (WEI *et al*, 1999):

$$\exp\left(-\beta (x - X_c)^2\right) = \exp(-5) = 0,0067$$
 4.52

onde  $X_c$  é a posição central da região fonte. A partir das equações 4.51 e 4.52, é obtido uma relação entre a largura da fonte e o parâmetro  $\beta$  como:

$$W = 2\sqrt{5/\beta} \tag{4.53}$$

A largura da função fonte também pode ser relacionada com o comprimento de onda *L* como:

$$W = \delta\left(\frac{L}{2}\right)$$
 4.54

Eliminando o valor de W das equações 4.53 e 4.54, pode ser encontrada uma relação de  $\beta$  com o comprimento de onda L como sendo:

$$\beta = \frac{80}{\delta^2 L^2}$$

O valor típico do  $\delta$  usado por Wei *et al* (1999) varia na faixa de valores de 0,3–0,5 e a largura correspondente da função fonte é aproximadamente de 0,15–0,25 vezes o comprimento de onda.

As vantagens de se usar uma função fonte distribuída espacialmente para a geração e propagação de ondas é a simples implementação e é independente da geometria da camada de absorção localizada nos contornos laterais. Entretanto, os métodos implementados neste trabalho geram ondas propagando-se para frente e para trás da região fonte, e a presença de uma camada de absorção é necessária no contorno atrás da região fonte para evitar a reflexão da onda.

## 4.1.6 FRICÇÃO COM O FUNDO

A camada limite de fundo induzido pelo campo de ondas de gravidade é geralmente confinada a uma fina região sobre o leito marinho, diferentemente de escoamentos de rios e sobre ação das marés, onde pode ser estendida até a superfície livre.

O fator de fricção do fundo, entretanto, segue uma regra na transformação das ondas próxima da linha de costa e nos padrões de circulação costeira. O efeito da dissipação de energia devido à camada limite turbulenta no leito do mar tem sido modelado pela adição do termo na tensão de cisalhamento no lado direito da equação do momentum (NWOGU e DEMIRBILEK, 2001), definido aqui como o termo  $F_{\tau}$  da equação 4.8. Nwogu e Demirbilek (2001), Chen *et al.* (2003) e outros pesquisadores usaram a tensão de cisalhamento do fundo seguindo a lei quadrática da velocidade para o movimento combinado entre ondas e corrente como:

$$F_{\tau} = \frac{f_{w}}{h+\eta} \mathbf{u}_{\alpha} \left| \mathbf{u}_{\alpha} \right|$$

$$4.56$$

onde  $f_w$  é o coeficiente da tensão de cisalhamento do fundo. Segundo Chen *et al.* (2003) o coeficiente de cisalhamento do fundo não conserva o momentum, ao invés disso, serve como uma fonte de energia e momentum. A variação deste coeficiente depende das características hidrodinâmicas e morfológicas do ambiente de estudo.

De acordo com Nwogu e Demirbilek (2001), a equação 4.56 tem sido expressa em termos de  $\mathbf{u}_{\alpha}$  ao invés da velocidade no fundo do leito  $\mathbf{u}_{b}$ , para minimizar o esforço computacional adicional da avaliação de  $\mathbf{u}_{b}$ .

#### 4.1.7 QUEBRA DE ONDAS

O modelo de quebra utilizado aqui é o esquema de Kennedy *et al.* (2000) que é amplamente usado e validado pela literatura para os modelos do tipo Boussinesq.

A ideia básica desse esquema é a adição de um termo de difusão de momentum nas equações do tipo Boussinesq, com a difusividade localizada na face frontal da onda que está quebrando (CHEN *et al.* 2003). O termo adicional da viscosidade turbulenta aparece na equação do momentum, equação 4.8,  $F_{\omega}$  e pode ser definido em uma dimensão horizontal como:

$$F_{\omega} = \frac{1}{h+\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ v \frac{\partial}{\partial x} \left[ (h+\eta) u_{\alpha} \right] \right\}$$

$$4.57$$

onde a viscosidade turbulenta v, foi determinada por Kennedy *et al.* (2000) como:

$$\nu = B\delta_b^2 (h+\eta)\eta_t \tag{4.58}$$

onde  $\delta_b$  é o coeficiente de comprimento de mistura. Kennedy *et al.* (2000) encontraram bons resultados para a faixa de valores entre 0,9 e 1,5. A quantidade *B* varia suavemente de 0 a 1 de modo a evitar um início impulsivo da quebra e resultar em instabilidades. Esses valores são dados como:

$$B = \begin{cases} 1, & \eta_t \ge 2\eta_t^* \\ \frac{\eta_t}{\eta_t^*} - 1, & \eta_t^* < \eta_t \le 2\eta_t^* \\ 0, & \eta_t \le 2\eta_t^* \end{cases}$$

$$4.59$$

O parâmetro  $\eta_t^*$  determina o início e o fim da quebra da onda. O uso de  $\eta_t$  como um parâmetro de iniciação da quebra garante de uma simples maneira que a dissipação seja concentrada na face frontal da onda, como na natureza. No modelo de Kennedy *et al.* (2000) um evento de quebra inicia-se quando  $\eta_t$  excede algum valor limiar inicial, mas, quando a quebra se desenvolve, a onda continuará a quebra até  $\eta_t$  diminuir a um valor

limiar do fim da quebra. A magnitude de  $\eta_t^*$ , entretanto, diminui no tempo a partir de algum valor inicial  $\eta_t^{(I)}$  para um valor terminal  $\eta_t^{(F)}$ . Kennedy *et al.* (2000) definiram:

$$\eta_t^* = \begin{cases} \eta_t^{(F)}, & t \ge T^* \\ \eta_t^{(I)} + \frac{t - t_0}{T^*} \left( \eta_t^{(F)} - \eta_t^{(I)} \right), & 0 \le t - t_0 < T^* \end{cases}$$

$$4.60$$

onde  $T^*$  é o tempo de transição,  $t_0$  é o tempo que a quebra foi iniciada e, assim,  $t - t_0$  é a idade do evento de quebra, que é maior que zero. Os valores padrão de  $\eta_t^{(I)}$  e  $\eta_t^{(F)}$  usados por Kennedy *et al.* (2000) são  $0,65\sqrt{gh}$  e  $0,15\sqrt{gh}$ , respectivamente. O valor padrão do tempo de transição é dado por  $T^* = 5\sqrt{h/g}$ . Para todos os eventos de quebra, a viscosidade turbulenta,  $\nu$ , é filtrada para gerar uma estabilidade antes de ser inserida na equação do momentum.

## 4.1.8 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são necessárias para uma execução apropriada do modelo numérico. A seguir são apresentadas as condições de uma parede refletiva e impermeável e uma com parede aberta ou de absorção.

### CONDIÇÃO DE CONTORNO DE REFLEXÃO TOTAL

Quando a onda alcança uma parede sólida, a onda será refletida completamente. Para uma condição de reflexão no geral com um vetor normal à parede  $\mathbf{n}$ , as condições de contorno podem ser definidas como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.61}$$

$$\nabla \eta \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.62}$$

Para uma dimensão horizontal e utilizando uma discretização espacial de cinco pontos, as equações 4.61 e 4.62 na parede ficam:

$$u_{\alpha} = 0 \tag{4.63}$$

$$\eta_{i} = \begin{cases} \frac{1}{25} (48\eta_{i+1} - 36\eta_{i+2} + 16\eta_{i+3} - 3\eta_{i+4}) & \text{para } i = 1\\ \frac{1}{25} (48\eta_{i-1} - 36\eta_{i-2} + 16\eta_{i-3} - 3\eta_{i-4}) & \text{para } i = mx \end{cases}$$

$$4.64$$

## CONDIÇÃO DE CONTORNO ABERTA

Para reduzir as ondas refletidas causadas pelos contornos abertos, uma camada de amortecimento é aplicada para o domínio computacional (HSU *et al.*, 2003). Uma camada de amortecimento perfeita absorve toda a energia da onda e simula o contorno aberto em que todas as ondas deixam o domínio sem reflexão significativa. Os termos de amortecimento propostos por Wei e Kirby (1995) são inseridos na equação do momentum, equação 4.8, como:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u_{\alpha}) = F\left(\eta, u_{\alpha}, \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t}\right) + F_{\omega} + F_{\tau} + S_{g}(x, t) - w_{1}u_{\alpha} + w_{2}\frac{\partial^{2}u_{\alpha}}{\partial x^{2}}$$

$$4.65$$

onde o termo de amortecimento,  $w_1$  com a velocidade  $u_{\alpha}$ , é chamado de "resfriamento Newtoniano" (*Newtonian cooling*) e aquele  $w_2$  com a segunda derivada de  $u_{\alpha}$  é análogo ao termo viscoso lineare da equação de Navier-Stokes (ver Israeli e Orzag, 1981). Os coeficientes de amortecimento podem ser definidos como:

$$w_{1} = \begin{cases} 0, & x < x_{start} \\ \alpha_{c} \omega f(x), & x > x_{start} \end{cases}$$

$$4.66$$

$$w_2 = \begin{cases} 0, & x < x_{start} \\ \alpha_v v f(x), & x > x_{start} \end{cases}$$

$$4.67$$

em que a função de decaimento f(x) é expressa como:

$$f(x) = \left[\frac{\exp\left(\frac{x - x_{start}}{x_{end} - x_{start}}\right)^{M} - 1}{\exp(1) - 1}\right]$$
4.68

onde  $\omega$  é a frequência angular da onda, v é o coeficiente de viscosidade,  $\alpha_c$ ,  $\alpha_v$  e Msão parâmetros livres que devem ser determinados para problemas numéricos específicos.  $x_{start}$  e  $x_{end}$  definem as coordenadas inicial e final da camada de absorção, respectivamente. A largura da camada de absorção,  $x_{end} - x_{start}$ , é geralmente duas ou três vezes o comprimento de onda L.

## 4.1.9 CARACTERIZAÇÃO DO MODELO DE ONDAS

O passo inicial para realizar os cálculos dos componentes da onda no domínio físico e com referencial euleriano é informar as características iniciais da simulação, que consistem as dimensões do domínio, as características das ondas (amplitude e período), a elevação do nível do leito e o nível de referência da água (Figura 4.4).

No domínio computacional são adicionadas células virtuais para preencher o tamanho da camada de absorção, ou camada esponja, onde é utilizados coeficientes de amortecimentos com valores de  $\alpha_c = 30$ ,  $\alpha_v = 0,0$  e M = 2. A profundidade da água é definida no modelo como a distância entre o nível d'água ( $\eta$ ) e o nível do fundo do leito ( $z_b$ ). Em seguida, o processo de cálculo computacional, ver fluxograma da Figura 4.5, gera os resultados das variáveis que serão usadas como variáveis de entrada para o modelo lagrangiano granular.



Figura 4.4: Esquema do domínio do modelo de ondas.  $z_b$  é elevação do nível do leito, H é a altura da onda,  $\eta$  é a elevação da superfície livre, D é a profundidade total, h é a profundidade média, W é a largura da região geradora,  $X_s$  é a posição central da fonte geradora, Lx é comprimento inicial do domínio e mx é o número de pontos na direção horizontal.

A condição inicial do modelo é considerar a água em repouso, onde as velocidades e a elevação no instante de tempo n são nulas. Após iniciar o sistema é calculado o comprimento de onda, a partir da equação II-31 do Anexo II, dada como:

$$k^{2} = \frac{\omega^{2}}{gh} \left[ \frac{1 - \alpha \left( kh \right)^{2}}{1 - \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) \left( kh \right)^{2}} \right]$$

$$4.69$$

Multiplicando os dois lados da equação por  $h^2$  obtém-se a seguinte relação:

$$(kh)^{2} = \frac{\omega^{2}h}{g} \left[ \frac{1 - \alpha (kh)^{2}}{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) (kh)^{2}} \right]$$

$$4.70$$

Assim, é possível aplicar o método de Newton-Raphson para encontra o valor de  $(kh)^2$  com a seguinte relação:

$$(kh)^{2} = (kh)^{2} - \frac{F_{kh}}{F_{kh}'}$$
4.71

onde

$$F_{kh} = \frac{\omega^2 h}{g} \left[ \frac{1 - \alpha (kh)^2}{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) (kh)^2} \right] - (kh)^2$$
4.72

$$F_{kh}' = \frac{\omega^2 h}{g} \left\{ \frac{-\alpha \left[ 1 - \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 - \left( 1 - \alpha (kh)^2 \right) \left( -\alpha - \frac{1}{3} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 \right]^2} \right\} - 1$$

$$4.73$$

Adotando um limite do erro de iteração para a convergência do método de Newton-Raphson bem pequeno, da ordem de  $10^{-5}$ , pode-se obter um valor mais preciso para o comprimento da onda a partir do $(kh)^2$  encontrado na equação 4.71.

Em seguida, com as definições iniciais da onda, são preparadas as informações para o gerador de ondas, onde são atribuídas ao algoritmo as informações sobre as características das ondas, o tipo de gerador (pistão, batedor ou função gaussiana), a posição do gerador e a profundidade em que o gerador se encontra. Assim os coeficientes do gerador de ondas são calculados e são incorporados nas equações de conservação da massa e do momentum, como definido na seção 4.1.5 deste capítulo. Um tempo de amortecimento de no mínimo  $2T_s$  é utilizado para permitir uma geração de ondas mais suave, e assim evitar instabilidades numéricas. Assim como o gerador de ondas, os parâmetros de quebra são calculados a partir das características da onda e dos coeficientes de quebra definidos na seção 4.1.7 deste capítulo.

Dessa forma a integração no tempo inicia a simulação com passo de tempo calculado em função do parâmetro de instabilidade numérica de Courant, definido como:

$$\Delta t < 0.5 \frac{\Delta x}{\sqrt{gh}} \tag{4.74}$$

onde  $\Delta x$  é o espaçamento da grade no referencial euleriano.



Figura 4.5: Esquema da simulação do modelo de ondas.

Após o início da interação temporal, as forças da geração da onda, as forças devido à dissipação de energia da onda (fricção com o fundo e quebra) e os parâmetros da camada de absorção são incorporados na equação do momentum e da conservação da massa e solucionados como descrito nas seções 4.1.1 e 4.1.2 deste capítulo. Se necessário, o filtro numérico de Savitzky-Golay, definido na seção 4.1.4, é aplicado em um determinado intervalo de cálculo para suavizar os ruídos gerados pelos cálculos numéricos. É importante lembrar que o filtro deve ser aplicado com cuidado, pois pode retirar altas frequências que deveriam ser resultados de algumas interações das ondas com obstáculos. Então o comprimento da filtragem e a ordem polinomial do filtro devem ser escolhidos com cuidado.

Assim, depois que a hidrodinâmica da onda é solucionada pelo método preditor-corretor de Adams-Bashforth-Moulton, é construída uma grade retangular em duas dimensões, Figura 4.6, (uma dimensão horizontal com uma dimensão vertical) e os valores das componentes da velocidade da onda e de pressão são calculados no centro das células. Isso é importante, pois são as informações que serão usadas no modelo granular de partículas.



Figura 4.6: Grade 2D usada para cálculo dos parâmetros do fluido no referencial euleriano.

# 4.2 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO MULTIFÁSICO

O primeiro passo do modelo é alocar as partículas na malha euleriana, isso foi feito de duas maneiras: uma é alocando as partículas de acordo com o nível do leito  $z_b$ , onde as partículas são posicionadas abaixo do nível do leito (Figura 4.7); e o outro modo é definir uma caixa onde as partículas são posicionadas dentro dessa caixa (Figura 4.8). Nas paredes do domínio euleriano são adicionadas células virtuais onde se encontram partículas de massa infinitamente maior que as partículas reais. A sequência de simulação do modelo granular está esquematizado na Figura 4.9.



Figura 4.7: Posicionamento das partículas de acordo com um nível do leito.



Figura 4.8: Posicionamento das partículas a grade euleriana a partir de uma caixa de partículas de dimensões  $L_{box} \times H_{box}$ .

Logo após os cálculos das variáveis do modulo euleriano e para um instante de tempo fixo, os valores das variáveis do fluido, no referencial euleriano, são interpoladas para as posições das partículas no objetivo de se transferir o momentum do fluido para cada partícula. Em seguida o algoritmo da dinâmica das partículas define as velocidades das partículas e realiza seus movimentos no tempo. As velocidades horizontal  $u_p$  e vertical  $w_p$  podem ser encontradas para cada passo de tempo, respectivamente, como:

$$u_p^{n+1} = u_p^n + \Delta t \frac{V_p \beta}{(1-\varepsilon)} \left( u_f^n - u_p^n \right) - \Delta t V_p \frac{\partial p_f^n}{\partial x}$$

$$4.75$$

$$w_p^{n+1} = w_p^n - \Delta t g + \Delta t \frac{V_p \beta}{(1-\varepsilon)} \left( w_f^n - w_p^n \right) - \Delta t V_p \frac{\partial p_f^n}{\partial z}$$

$$4.76$$

onde o sobrescrito (n) indica o tempo atual onde os valores das variáveis são conhecidas, o sobrescrito (n+1) indica o tempo futuro onde os valores devem ser calculados e  $\Delta t$  é o passo de tempo lagrangiano.

Dessa forma as partículas podem ser atualizadas a partir da seguinte relação:

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \mathbf{u}_p \tag{4.77}$$

Sendo **r** o vetor posição das partículas. Para os deslocamentos nas direções horizontais e verticais das partículas, as posições horizontal  $x_p$  e vertical  $z_p$  são atualizadas através da expressão:

$$x_{p}^{n+1} = x_{p}^{n} + u_{p}^{n+1} \Delta t$$
4.78

$$z_p^{n+1} = z_p^n + w_p^{n+1} \Delta t 4.79$$

Antes de atualizar as posições das partículas com as novas velocidades, é realizada a procura de possíveis pares de colisão. A Figura 4.10 mostra o fluxograma dos principais passos para realizar uma sequência de colisão de partícula. A lista de colisão é feita pelo método de Verlet e o tempo de colisão é encontrado através da equação 3.20. Os pares de partículas são encontrados quando a distância entre a borda das partículas está dentro de um raio de corte, definido na seção 3.2.1. A distância das bordas pode ser definida como:

$$d_{ab} = \sqrt{\left(x_{p}(a) - x_{p}(b)\right)^{2} + \left(z_{p}(a) - z_{p}(b)\right)^{2}} - \left(R_{p}(a) + R_{p}(b)\right)$$

$$4.80$$

onde  $a \in b$  identificam duas partículas diferentes. Então, a lista é montada com os pares em que a distância entre as partículas seja menor que um raio de corte definido pelo usuário. Em seguida é inserido na lista o tempo de colisão entre os pares de partículas, calculado a partir da equação 3.20 da seção 3.2.2, dado como:

$$dt_{ab} = \frac{-\mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{r}_{ab}^{0} \pm \sqrt{D_{ab}}}{\left(\mathbf{u}_{ab}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ab}^{0}\right)}$$

onde

$$\mathbf{u}_{ab} = \left(u_{p}(a) - u_{p}(b), w_{p}(a) - w_{p}(b)\right)$$

$$\mathbf{r}_{ab} = \left(x_{p}(a) - x_{p}(b), z_{p}(a) - z_{p}(b)\right)$$
4.81

Portanto a lista de colisão é iniciada de modo que cada partícula *a* apresenta um parceiro de colisão, podendo este ser uma partícula *b* ou uma parede, e um tempo de colisão correspondente a esses pares. Para cada par de partículas, o menor tempo de colisão é determinado através da verificação de todos os relevantes parceiros de colisão. Se um par de partículas se encontra na lista de colisão e não colidirão, o passo de tempo de colisão será igual ao passo de tempo euleriano do modelo principal, o modelo euleriano. A variável  $t_{ac}$  tem como função manter o registro do tempo acumulativo lagrangiano desde o início do intervalo de tempo mínimo de colisão ( $dt_c = \min\{dt_{ab}\}$ ) até atingir o valor do passo de tempo euleriano. A posso de tempo acumulativo lagrangiano for maior ou igual ao passo de tempo do modelo principal dt. Dessa forma, a sequência de colisão é tempo do modelo euleriano. Após a sequência de colisão ser terminada, as partículas são movidas com tempo restante ( $dt - (t_{ac} - dt_c)$ ). Na sequência de colisão, o movimento das partículas é realizado com  $dt_c$  e as posições das partículas são atualizadas usando uma simples integração explicita:

$$\mathbf{r}_{a}(t+dt_{c}) = \mathbf{r}_{a}(t) + \mathbf{u}_{a}dt_{c}$$

$$4.82$$

A equação acima move as partículas até o ponto de contato, onde a dinâmica de colisão será realizada. Assim, a colisão é feita utilizando as equações da seção 3.2.3 sendo as velocidades horizontal e vertical pós-colisão, além do giro da partícula devido ao impacto, dado, respectivamente, para cada partícula com:

$$u_a^{n+1} = u_a^n + \frac{J_x}{m_a} \qquad \qquad u_b^{n+1} = u_b^n - \frac{J_x}{m_b} \qquad \qquad 4.83$$

$$w_a^{n+1} = w_a^n + \frac{J_z}{m_a}$$
  $w_b^{n+1} = w_b^n - \frac{J_z}{m_b}$  4.84

$$\omega_{a}^{n+1} = \omega_{a}^{n} - \frac{R_{a}}{I_{a}} (n_{x}J_{z} - n_{z}J_{x})$$

$$\omega_{b}^{n+1} = \omega_{b}^{n} - \frac{R_{b}}{I_{b}} (n_{x}J_{z} - n_{z}J_{x})$$
4.85

onde

$$n_{x} = \frac{x_{p}(a) - x_{p}(b)}{\sqrt{\left(x_{p}(a) - x_{p}(b)\right)^{2} + \left(z_{p}(a) - z_{p}(b)\right)^{2}}}$$

$$4.86$$

$$n_{z} = \frac{z_{p}(a) - z_{p}(b)}{\sqrt{\left(x_{p}(a) - x_{p}(b)\right)^{2} + \left(z_{p}(a) - z_{p}(b)\right)^{2}}}$$

$$4.87$$

$$J_x = J_n n_x + J_t n_x \tag{4.88}$$

$$J_z = J_n n_z + J_t n_z \tag{4.89}$$

Subsequentemente, é necessário reiniciar a lista de colisões, onde novos parceiros e tempos de colisões tem que ser encontrados para as partículas que já colidiram e para as partículas que estavam prestes a colidirem. Finalmente, um novo par de colisões é detectado e o novo tempo de colisão  $(dt_c)$  é adicionado no tempo acumulativo  $(t_{ac})$ . Após terminada a colisão, as posições são atualizadas e segue para o próximo passo de tempo repetindo todo o processo descrito acima.



Figura 4.9: Fluxograma do modelo granular.



Figura 4.10: Algoritmo para o processamento de uma sequência de colisão dentro de um passo de tempo constante (dt).

# CAPÍTULO 5 Resultados e Discussão

Este capítulo apresenta os resultados dos modelos descritos anteriormente, juntamente com o resultado do modelo híbrido de transporte de sedimento devido à passagem de ondas de gravidade. A seção 5.1 mostra os resultados do modelo de ondas no referencial euleriano, que emprega as equações não-lineares de ondas do tipo Boussinesq. Os resultados são confrontados com dados de experimentos encontrados na literatura. Por seguinte, na seção 5.2, o modelo granular lagrangiano é testado quanto à sua capacidade em reproduzir a física do movimento de um colapso de uma barragem, além de verificar os problemas de impenetrabilidade das partículas entre si e com a parede. Por final, a seção 5.3 apresenta os resultados de um acoplamento do modelo de ondas no referencial euleriano com o modelo granular no referencial lagrangiano para simular a dinâmica do transporte de sedimentos ocasionado pela ação de ondas de gravidade.

## 5.1 VERIFICAÇÃO DO MODELO DE ONDAS

O modelo de ondas foi testado para dois casos experimentais: o primeiro caso está relacionado com a geração de onda em um canal, que engloba um domínio com profundidade constante, para verificar se a fonte geradora está de acordo com a solução linear; no segundo caso, é realizada a geração e propagação da onda que passa sobre um obstáculo trapezoidal submerso, onde os resultados numéricos são confrontados com os dados do experimento de Dingemans (1994).

## 5.1.1 PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM UM CANAL COM UM FUNDO PLANO

Neste experimento, o domínio do fluido do canal apresenta profundidade constante em um tanque de comprimento de 20m, sendo o nível da água alterado de modo a apresentar resultados para  $kh \ge \pi$ . São usados 401 pontos na direção horizontal, totalizando 400 células na horizontal da grade com espaçamento de 0,05m. O tipo de onda simulada pelo modelo apresenta período de 1,0s e Altura de 0,01m.

Para testar os três tipos de geradores de ondas implementados neste trabalho, foram realizadas simulações numéricas para uma profundidade relativa  $kh = \pi$  (ver seção 4.1.5). As ondas geradas durante 30s de simulação na profundidade de h = 0,79m, apresentam comprimento de onda de L = 1,58m e propagam-se no domínio saindo pelas laterais, onde as condições de camada esponja simulam o contorno aberto, sem sofrer nenhuma alteração alguma na sua forma. O domínio é apresentado na Figura 5.1, onde a fonte geradora se localiza no centro do domínio (na posição de 10m) e as localizações das estações do registro da série temporal são mostradas na Tabela 5.1.



Figura 5.1: Domínio computacional para simulação da geração e propagação de ondas em uma profundidade constante. *S*1, *S*2, *S*3 e *S*4 são estações de registros no tempo da elevação da superfície livre.

Tabela 5.1: Posicionamento das estações de registro da série temporal das ondas

ID Estação	Posição [m]
<b>S</b> 1	4
S2	8
S3	12
S4	16

Os resultados, apresentados nas Figura 5.2, Figura 5.3 e Figura 5.4, mostram que os geradores de ondas obtiveram resultados satisfatórios na geração das ondas monocromáticas. Os geradores de ondas apresentaram erros relativos, em função da solução da teoria linear de ondas, de aproximadamente 0,11% para o gaussiano, 0,61% para o pistão e 1,38% para o batedor. Dean e Dalrymple (1991) explicam que essa

diferença entre os geradores de ondas do tipo pistão e do tipo batedor se dá pela profundidade da região geradora, onde o gerador do tipo pá-pistão é recomendado a ser usado em águas rasas e o gerador tipo pá-batedor é mais recomendado para águas profundas. Isso pode ser explicado pelo fato de que o gerador tipo pistão desloca toda a coluna d'água na direção de propagação da onda, produzindo um perfil de velocidade vertical semelhante ao perfil vertical da velocidade das ondas de águas rasas. Enquanto que o gerador do tipo batedor empurra a coluna d'água ao redor de um eixo de rotação, deixando o perfil de velocidade da onda com um decaimento em direção ao fundo, como ocorre em águas profundas.

Contudo, o gerador do tipo gaussiano se mostrou mais eficiente na geração das ondas. Isso porque, foi verificado uma maior estabilidade na propagação da onda na região geradora, onde os outros geradores apresentaram ruídos que necessitaram a aplicação do filtro numérico para suavizar essas instabilidades.



Figura 5.2: Série temporal da elevação da superfície durante 30s de simulação nas estações S1 (a), S2(b), S3 (c) e S4(d)geradas pelo Pistão.


Figura 5.3: Série temporal da elevação da superfície durante 30s de simulação nas estações S1 (a), S2(b), S3 (c) e S4(d)geradas pelo Batedor.



Figura 5.4: Série temporal da elevação da superfície durante 30s de simulação nas estações S1 (a), S2(b), S3 (c) e S4(d)geradas pela fonte gaussiana.

Com a simulação da propagação das ondas em águas rasas, ou seja,  $kh \approx \pi/10$ , mostrouse que após a sua geração, a onda é submetida a uma forte dissipação de energia, que pode ser explicada pela forte não linearidade que ocorre nessas regiões rasas e pelos processos dissipadores de energia devido à quebra e à fricção com o fundo. Já para a simulação com uma profundidade relativa entre  $\pi/10 < kh < \pi$ , que define a onda como de águas intermediárias, a não linearidade é mais fraca e a dissipação da energia da onda é menor, como resultado a forma da onda é levemente alterada. Finalmente para a simulação das ondas para a zona de águas mais profundas,  $kh \approx \pi$ , a forma da onda é mantida durante toda a propagação, sem ser deformada significativamente. Com isso, a funcionalidade do modelo está em maior concordância com a teoria linear e maior instabilidade na geração quando a fonte geradora é aplicada para condições de  $kh > \pi/10$ , porém o modelo de Boussinesq estendido por Wei *et al.* (1995) apresenta melhores resultados para condições de  $kh < \pi$ .

# 5.1.2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS SOBRE UM OBSTÁCULO

Quanto à aplicação do modelo de ondas sobre um fundo variável, o modelo não-linear de ondas foi testado para um experimento encontrado em Beji e Battjes (1993), onde as dimensões do domínio foram redimensionadas por Dingemans (1994). Esse experimento é frequentemente usado pela comunidade científica para a verificação de modelos não-lineares de ondas, como Gobbi e Kirby (1999), Chazel *et al.* (2010) e Shuang e Hai-Lun (2013).

O experimento de Beji e Battjes (1993) foi elaborado no canal de ondas do Departamento de Engenharia Civil, *Delft University of Technology*, e redimensionado por Dingemans (1994) para as medidas do canal de ondas do *Delft Hydraulics*, onde o esquema do domínio é apresentado na Figura 5.5. O domínio apresenta 24m de comprimento e com o nível da água em repouso de 0,4m. A barra trapezoidal apresenta altura máxima de 0,3m e com declividades de 1/20 na região frontal à propagação das ondas e 1/10 no lado aposto. O domínio computacional é discretizado em 481 pontos horizontais com espaçamentos de 0,05m, sendo adicionadas 100 células para cada extremidade do domínio para alocar a camada de absorção da onda. A fonte geradora de ondas é do tipo gaussiana e está

localizada na posição 0 do domínio. O tempo de simulação foi de 100s com incremento de tempo de 0,01s, proporcionando um parâmetro de estabilidade de Courant de Cr = 0,39.

Dos três casos experimentais de Dingemans (1994) serão abordados os casos A e C, que compreendem a propagação da onda sobre a barra sem a presença da quebra da onda. Para o caso A foram simulado ondas com altura Hs = 0,02m e período Ts = 2,02s determinando um  $kh \cong 0,67$  para a região de maior profundidade. Já para o Caso C, a onda apresenta características de altura Hs = 0,041m e período Ts = 1,01s com  $kh \cong 1,69$  para a região de maior profundidade. Dessa forma, é possível simular a decomposição do trem de ondas incidente devido aos efeitos não lineares decorrentes da propagação da onda sobre uma estrutura submersa. Os registros da onda foram adquiridos por meio de estações localizadas antes da barra, sobre a barra e após a barra como definido abaixo na Tabela 5.2 e mostrado na Figura 5.5.

Tabela 5.2: Posicionamento das estações de registro da série temporal das ondas

ID Estação	Posição [m]
S1	4
S2	10,5
<b>S</b> 3	12,5
S4	13,5
S5	15,7
<b>S</b> 6	21



Figura 5.5: Esquema do canal de ondas usado na modelagem de ondas.

No caso A, a onda é menos dispersiva e com a face frontal menos inclinada (*wave steepness*), sendo os resultados das séries temporais do modelo comparados com os experimentais (Figura 5.6). Nesse experimento foi possível observar que o modelo nãolinear de ondas do tipo Boussinesq obteve um resultado aproximado com relação aos dados experimentais, porém na estação S6 os efeitos dispersivos da onda são mais pronunciados no resultado experimental do que no modelado. Essa discrepância dos resultados numérico com o experimental também foi observada em Gobbi *et al.* (1999), mesmo aumentando a ordem da relação da dispersão para 4ª Ordem. Segundo os autores, esse resultado é um forte indicador de que o melhoramento na dispersão linear nem sempre é mais importante que os efeitos totalmente não-lineares, contrariando a conclusão de Dingemans (1994).

Na Figura 5.7 pode ser observada a presença de um segundo harmônico da onda na estação S2, que é intensificado até o aparecimento de outros harmônicos nas estações seguintes. Essas componentes harmônicas de alta frequência aparecem justamente quando a componente principal da onda está em processo de empinamento no declive do obstáculo. Após a passagem da onda sobre a barra, os altos harmônicos decompostos propagam-se como ondas livres e interagem com a componente principal da onda. Esse processo de empinamento pode ser visível na Figura 5.8, onde as alturas significativa, ou média do terço superior das alturas de ondas, são calculadas em cada estação. Na estação S2, sobre a rampa a onda tende a aumentar sua altura, e chega a um máximo na estação S3, onde começa a decomposição de superharmônicos ocorrendo à diminuição de energia da onda principal. A onda, ao passar pela inclinação da rampa, sua face frontal tende a ficar mais íngreme e por seguinte sua crista vai se tornando mais afilada ou aguda. Essa assimetria provocada pela não-linearidade da onda pode ser observada nas Figuras Figura 5.9 e Figura 5.10, onde a onda diminui seu comprimento e aumenta sua altura mudando sua forma em relação àquela propagada na região de profundidade constante.



Figura 5.6: Comparação da elevação da superfície livre do modelo (linha sólida) com dados experimentais A de Dingemans (1994) (pontos) para cada estação de registro da série temporal.



Figura 5.7: Densidade espectral de potência para as estações modeladas no experimento A.



Figura 5.8: Altura significativa da onda em centímetros para as estações do experimento A.



Figura 5.9: Perfil da elevação total da superfície da onda propagando-se sobre o obstáculo no último passo de tempo para o experimento A.



Figura 5.10: Elevação total dos últimos 10 períodos de ondas propagando-se sobre o obstáculo no experimento A.

Para o caso C, a onda é mais curta e, assim, é mais dispersiva e com a face frontal mais inclinada (*wave steepness*). Os resultados numéricos das séries temporais são comparados

com os resultados experimentais e mostrados na Figura 5.6. Nesse experimento, as formas das ondas nas estações são bem reproduzidas pelo modelo e somente à elevação da superfície livre aparece discrepante na estação S6.



Figura 5.11: Comparação da elevação da superfície livre do modelo (linha sólida) com dados experimentais C de Dingemans (1994) (pontos) para cada estação de registro da série temporal.

Foi observada na análise espectral gerada pela onda, Figura 5.12, que a proporção de energia transferida da componente principal para as componentes de superharmônicos é bem menor que no experimento A. Devido a isso, a Figura 5.13 mostra alturas

significativas mais constantes após o empinamento da onda sobre a barra. Dessa forma, pôde ser observado na Figura 5.14 e na Figura 5.15 que a característica morfológica da onda é mais homogênea após a propagação sobre a barra.



Figura 5.12: Densidade espectral de potência para as estações modeladas no experimento C.



Figura 5.13: Altura significativa da onda em centímetros para as estações do experimento C



Figura 5.14: Perfil da elevação total da superfície da onda propagando-se sobre o obstáculo no último passo de tempo para o experimento C.



Figura 5.15: Elevação total dos últimos 10 períodos de ondas propagando-se sobre o obstáculo no experimento C.

### 5.2 RESULTADOS DO MODELO GRANULAR

Os resultados do modelo granular bidimensional foram confrontados com os resultados de dois casos experimentais de quebra de barragem encontrados na literatura. Cruchaga *et al.* (2007) e Bernard-Champmartin e De Vuyst (2013), compararam resultados de modelos numéricos com resultados de experimentos realizados em tanque com uma quebra de barragem sem obstáculo e outro com obstáculo.

Os domínios a ser simulado nestes casos consistiram em adotar três fases diferentes. O referencial euleriano foi usado para o gás e o referencial lagrangiano para representar as partículas de líquido e sólido. As partículas de líquido representam a água com massa específica  $\rho_f = 1000 kg \times m^{-3}$  e as partículas sólidas foram consideradas imóveis para representar os contornos do domínio e o obstáculo. A fase do gás, no referencial euleriano, é representada pelo ar, onde foi adotada uma massa específica de  $\rho_g = 1,4kg \cdot m^{-3}$  e viscosidade dinâmica de  $17,4 \times 10^{-6} Pa \cdot s$ .

Para os dois casos avaliados, foi necessário modificar a pressão nos elementos da grade euleriana de acordo com a concentração de partículas, para adaptar uma pressão hidrostática e dinâmica, que é responsável pelo colapso da coluna. Para isso, cada célula do domínio euleriano apresenta uma massa específica de mistura dada pela seguinte equação:

$$\rho_{ij} = \varepsilon_{ij}\rho_g + (1 - \varepsilon_{ij})\rho_f$$
5.1

Com isso a pressão hidrostática do fluido  $p_h$  é dada como:

$$p_h = \rho_{ij} g H_{ij}$$
 5.2

onde a  $H_{ij}$  é a profundidade da célula (i, j) no domínio com referencial euleriano. Dessa forma, onde as células são totalmente preenchidas por ar, ou seja, a fração de vazios  $\varepsilon_{ij}$  é igual a 1, a pressão hidrostática será a pressão do gás, a qual é muito pequena. Por outro lado, quando a célula está preenchida por partículas de água, a pressão será hidrostática. Assim, a pressão total na célula  $p_{ij}$  é dada por:

$$p_{ii} = p_h + p_d \tag{5.3}$$

onde a pressão dinâmica ( $p_d$ ) é determinada unicamente pela massa específica da célula que contém partículas de água e segue a lei constitutiva conectando a pressão e a massa específica como (ZHENG *et al*, 2013):

$$p_d = B \left(\frac{\rho_{ij}}{\rho_f}\right)^N - B$$
 5.4

onde *B* e *N* são constantes que dependem do material simulado. Neste trabalho foi usado B = 11,2 e N = 7 para a água, onde se obteve maior concordância com os dados experimentais. Esses coeficientes também foram empregados pelo modelo SPHysics de Gómez-Gesteira *et al.* (2012) como sendo B = 10 e N = 7.

A vantagem da equação do estado (equação 5.4) é fornecer uma relação direta entre a pressão e a massa específica, sendo assim, não ocorre a necessidade de solucionar qualquer equação adicional para a pressão (STAROSZCZYK, 2010).

## 5.2.1 QUEBRA DE BARRAGEM SEM OBSTÁCULO

O primeiro experimento da quebra de barragem considera um tanque com dimensões em altura e largura de 44cm x 42cm com uma coluna d'água no canto esquerdo de largura 11,4cm e com altura de 22,8cm (Figura 5.16). O domínio foi discretizado em 22 pontos na horizontal e 23 na vertical, sendo usado um espaçamento constante de 0,02m. O tempo total de simulação foi de 2s com incremento de 0,005s para o cálculo numérico no tempo.

O modelo multifásico foi testado para diversos coeficientes de restituição utilizados no algoritmo de colisão. Foi observado, através de diversos testes, que os coeficientes de elasticidade normal e e o tangencial  $\beta_0$  forneceram os melhores resultados para valores maiores que 0,85. Valores menores que 0,85 aumentam a adesão entre as partículas, formando aglomerados e aumentando a resistência ao movimento, além disso, diminui o desempenho computacional. Para a fricção dinâmica, o modelo foi testado com valores

variando de  $1 \times 10^{-6}$  até 0,15, sendo os valores mais baixos representando melhor o movimento do líquido e proporcionando maior velocidade de processamento.



Figura 5.16: Configuração inicial do experimento de quebra de barragem sem obstáculo.

A Figura 5.17 mostra o instante de tempo de 0,3s do resultado do modelo com coeficientes e = 1,0,  $\beta_0 = 1,0$  e  $\mu = 1 \times 10^{-6}$ , proporcionando uma colisão perfeitamente elástica. Os resultados mostraram que as partículas tendem a se espalhar mais quando entram em contato entre si e com a parede do reservatório.



Figura 5.17: Comparação dos resultados experimentais com os numéricos da simulação com coeficientes e = 1,0,  $\beta_0 = 1,0$  e  $\mu = 1e^{-6}$ .

Isso ocorre porque tanto o momentum linear quanto a energia cinética do sistema se conservam e, assim, as partículas tendem a se separar com mais velocidade após a colisão. Para diminuir esse espalhamento, o problema foi testado para colisões do tipo inelástica, onde foram utilizados os seguintes coeficientes:

	е	$eta_0$	μ
SIM 2	0,90	1,00	$1 \times 10^{-6}$
SIM 3	0,90	0,90	$1 \times 10^{-6}$
SIM 4	0,90	0,90	0,15

Tabela 5.3: Coeficientes de colisão nos testes da quebra de barragem

A Figura 5.18 mostra os resultados do experimento, no tempo de 0,3s, para cada um dos coeficientes da Tabela 5.3. A diminuição dos valores dos coeficientes de restituição até um valor de 0,90 mostrou que os resultados tendem a se aproximar qualitativamente do caso experimental. Como partículas virtuais são posicionadas em células localizadas após as paredes do domínio, as partículas reais são influenciadas pela rugosidade ocasionada por essas partículas, provocando uma dissipação da energia cinética e, assim, retardando o movimento das partículas. A simulações do teste Sim2 e Sim3 obtiveram resultados mais satisfatórios no que diz respeito a física do movimento da água após o colapso da barragem. Quando o coeficiente  $\mu$  foi aumentado, na Sim 4, as partículas apresentaram velocidades menores que dos testes Sim3 e Sim2, representando uma resistência ao movimento das partículas d'água. Dessa forma, no caso das partículas de água, o coeficiente de fricção dinâmica trabalha como uma viscosidade dinâmica da água. A Figura 5.19, compara os resultados com relação à magnitude da velocidade nos três últimos testes aplicados.

Outro fator importante avaliado nas simulações é o número de partículas utilizadas na simulação. A Figura 5.20 mostra resultados da Sim2 para 3 diferentes testes em quantidade de partículas. Como esperado, os resultados indicam que quanto maior a quantidade de partículas, melhor a representação dos processos físicos decorrentes no experimento.





Figura 5.18: Simulações com diferentes coeficientes de restituição para o caso de quebra de barragem sem obstáculo. As figuras à esquerda são os resultados experimentais e as figuras à direita são os resultados numéricos.



Figura 5.19: Magnitude da velocidade das partículas para três testes de coeficiente de restituição.



Figura 5.20: Resultados para três casos como diferentes números de partículas.

Porém, assim como na diminuição do coeficiente de restituição das partículas, o aumento da quantidade de partículas aumenta o esforço computacional significativamente. Isso é devido ao aumento de número de pares de colisão, onde a lista de colisão pode se tornar maior, visto que a lista é definida na seção 3.2.1 com tamanho  $N_p (N_p - 1)/2$ . Assim, a Tabela 5.4 mostra o tempo computacional para a execução do modelo para uma simulação de 2*s* em um CPU QuadCore com processador Intel Core I5 de 3,00GHz e memória RAM de 8Gb.

	NP	е	$eta_0$	$\mu$	Tempo da modelagem (h)
SIM2	7362	0,90	1,00	$1 \times 10^{-6}$	27,45
SIM3	7362	0,90	0,90	1x10 <sup>-6</sup>	33,70
SIM4	7362	0,90	0,90	0,15	45,32
SIM5	2935	0,90	1,00	$1 \times 10^{-6}$	2,65
SIM6	452	0,90	0,90	1x10 <sup>-6</sup>	0,15

Tabela 5.4: Tempo total da modelagem da quebra de barragem para vários testes de número de partículas e coeficientes de restituição em 2s de simulação.

As Figuras Figura 5.21 e Figura 5.22 mostram alguns instantes de tempo do resultado do modelo numérico de partículas com seus respectivos tempos experimentais. A diferença entre os resultados dos dados experimentais e numéricos é evidente durante a quebra da barragem. Isso é devido ao tratamento do gradiente de pressão total, que necessita ser aprimorado. Dessa forma a coluna d'água tende a ser derramada de forma instantânea com as maiores velocidades do fundo para a superfície.

Após o colapso da barragem, o modelo foi capaz de simular os processos da onda tanto na sua propagação no tanque quanto na sua quebra quando impacta nas paredes do container, formando um vagalhão (*bore*). Esse processo pode também ser verificado na Figura 5.23 onde as velocidades são maiores na crista da onda durante a quebra, onde forma um jato turbulento que mergulha na superfície da água.





Figura 5.21: Resultado da simulação da quebra de barragem comparado com dados experimentais. A coluna da esquerda indica o experimento de Cruchaga *et* al. (2007), a coluna do meio e da direita são os resultados numéricos das posições das partículas e da fração volumétrica, respectivamente.



Figura 5.22: Resultado da simulação da quebra de barragem comparado com dados experimentais. A coluna da esquerda indica o experimento de Cruchaga *et* al. (2007), a coluna do meio e da direita são os resultados numéricos das posições das partículas e da fração volumétrica, respectivamente.



Figura 5.23: Vetor e magnitude da velocidade das partículas na simulação de uma quebra de barragem.

### 5.2.2 QUEBRA DE BARRAGEM COM UM OBSTÁCULO

Nesta simulação foi adicionado um obstáculo no meio do tanque, como no experimento de Graves (2006) e usado por Bernard-Champmartin e De Vuyst (2013). Os autores descrevem esse experimento como sendo a origem da formação de uma onda longa que impactará em uma parede. O domínio foi discretizado em 28 pontos na direção horizontal e 18 pontos na direção vertical, espaçados igualmente com 4cm. Dessa forma, o domínio da Figura 5.24 apresenta dimensões de largura x altura de  $100cm \times 60cm$  com uma coluna d'água de largura de 25cm e altura de 50cm localizada no canto esquerdo do domínio. Nesse domínio foi adicionada uma parede vertical com altura de 8cm e largura de 4cm no centro do domínio, onde foram alocadas partículas sólidas com massa infinita para simular paredes rígidas. O tempo total de simulação foi de 2,0124s com incremento de tempo do cálculo numérico de 0,00645s.



Figura 5.24: Domínio da simulação de uma quebra de barragem com obstáculo.

As Figuras Figura 5.25 e Figura 5.26 mostram os resultados da simulação em comparação com os resultados experimentais encontrados em Bernard-Champmartin e De Vuyst (2013) para os instantes de tempo de 0s, 0,129s, 0,258s, 0,387s, 0,516s e 0,645s. Os coeficientes de restituição das partículas na colisão foram usados com base nos testes feitos na seção anterior, sendo e = 0,90,  $\beta_0 = 0,90$  e  $\mu = 1 \times 10^{-6}$ . Para a configuração da coluna d'água o número de partículas reais calculadas foi de 5000, sendo um total de 5772 partículas contando com as partículas virtuais da parede. Dessa forma a simulação durou aproximadamente 14h.

Assim como observado na seção anterior, somente poucas partículas de água representaram o alcance máximo do jato após o impacto com o obstáculo. Isso mostra a necessidade de uma melhor formulação do gradiente de pressão total, para representar de forma mais precisa o colapso da coluna d'água e a superfície livre. Pode ser observado no tempo de t = 0,129s da Figura 5.25, que a água alcança o obstáculo sólido antes do modelo numérico, onde a parede rugosa tem certa influência no escoamento das partículas reais.



Figura 5.25: Resultado da simulação da quebra de barragem com um obstáculo comparado com dados experimentais. A coluna da esquerda indica o experimento encontrado em Bernard-Champmartin e De Vuyst (2013), a coluna do meio e da direita são os resultados numéricos, das posições das partículas e da fração volumétrica, respectivamente.



Figura 5.26: Resultado da simulação da quebra de barragem com um obstáculo comparado com dados experimentais. A coluna da esquerda indica o experimento encontrado em Bernard-Champmartin e De Vuyst (2013), a coluna do meio e da direita são os resultados numéricos, das posições das partículas e da fração volumétrica, respectivamente.

Contudo o modelo granular foi capaz de simular os processos físicos de galgamento sobre o obstáculo e da reflexão na parede do tanque, inundando a região seca após a passagem sobre o obstáculo. Nas Figuras Figura 5.27 e Figura 5.28 podem ser observado que após a passagem da água sobre o obstáculo ocorre uma acumulo de água no canto direto, que por gravidade forma uma onda do tipo *bore* que retorna para a esquerda do domínio. Esta onda interage com o obstáculo e com o escoamento de água contrário à propagação da onda. Com isso, esse processo de interação começa a aparecer um efeito físico semelhante ao efeito de cavidade, onde é possível observar na Figura 5.29 a formação de vórtices nos dois lados do obstáculo.



Figura 5.27: Vetor e magnitude da velocidade das partículas na simulação de uma quebra de barragem com um obstáculo.



Figura 5.28: Vetor e magnitude da velocidade das partículas na simulação de uma quebra de barragem com um obstáculo.



Figura 5.29: Vórtices formado devido ao escoamento provocado pelo colapso de uma quebra de barragem e pela reflexão nas paredes do tanque.

### 5.3 RESULTADOS DO MODELO ONDA/SEDIMENTO

O acoplamento entre os modelos de onda e de partículas foi feito utilizando o modelo euleriano de ondas para representar a fase líquida e o modelo granular para representar a fase sólida. Dessa forma, as partículas são representadas por grãos de sedimentos circundados por água cujo movimento é devido à passagem de ondas. O modelo híbrido foi testado baseando-se no experimento descrito em Hudson *et al.* (2005), porém foi

aplicado em dimensões reduzidas para melhorar o desempenho computacional. O experimento consiste na propagação de uma onda sobre uma barra arenosa localizada na região central do canal. Dois testes foram realizados: um consiste em amplificar o escoamento para estudar o comportamento da barra arenosa, diminuindo o tempo em que a barra entra em colapso; e o outro teste foi comparar com um modelo semi-empírico, o comportamento da barra sob a ação de uma onda de gravidade.

A Figura 5.30 mostra o domínio computacional inicial, que consiste em um tanque com dimensões de Lx = 10m para comprimento horizontal e de nível médio da água (NMA) de h = 0,25m. Uma barra arenosa gaussiana é adicionada no centro do domínio com altura máxima de  $z_{bmax} = 0,175m$ . O domínio foi discretizado em 201 pontos na direção horizontal e 13 pontos na direção vertical, igualmente espaçados em 0,05m. Nas extremidades foram adicionadas células virtuais para a camada esponja com dimensão igual ao comprimento da onda e na posição de 2m foi localizada a fonte geradora do tipo gaussiana. Foram usados para a massa específica da água e para o sedimento os valores de  $1000kg / m^3$  e  $2650kg / m^3$ , respectivamente. Sendo assim, as partículas de sedimento são adicionadas no nível do leito com uma pequena camada de partículas acima do nível da barra, para representar uma camada porosa. No objetivo de diminuir o esforço computacional, foi feito o esquema de nuvens de partículas, onde cada partícula lagrangiana representa 125 grãos de sedimento do tipo quartzo com diâmetro mediano  $d_{s0} = 0,2mm$ .



Figura 5.30: Representação esquemática do domínio da simulação do modelo ondassedimento.

Para as constantes de colisão, foram usados os coeficientes de elasticidade normal, de elasticidade tangencial e de fricção dinâmica parâmetros com valores de e = 0.96,

 $\beta_0 = 0,86$  e  $\mu = 0,15$ , respectivamente. Esses valores, para os parâmetros de restituição, também foram usados por Hoomans (2000) para partículas esféricas de vidro.

O nível do leito foi atualizado com base na fração de vazios do fluido calculada nas células do referencial euleriano. Dessa forma, o nível do leito será a altura máxima de uma coluna de células empacotadas, ou seja, quando a fração de vazios atingir o valor limiar de 0,2. Se uma célula na posição *ij* apresenta fração de vazios maior ou igual a 0,2 e se suas vizinhas verticais, ij - 2 e ij - 1, também estão empacotadas, a altura do nível do leito será a coordenada z(i, j), conforme Figura 5.31. Em seguida foi aplicado o filtro de Savintzky-Golay para suavizar a batimetria, devido ao fato de que uma mudança abrupta pode gerar ruídos de alta frequência no modelo de ondas.



Figura 5.31: Nível do leito calculado a partir da fração de vazios.

## **TESTE 1 – ESCOAMENTO ACELERADO**

Hudson *et al.* (2005) utilizaram esquemas de Lax-Wendroff e de Roe, ambos com e sem método de fluxo limitado, para estudar soluções simultâneas das equações de sistemas morfodinâmicos em uma dimensão horizontal. A transformação da duna do teste dos autores foi comparada com a simulação do modelo multifásico de ondas-sedimentos desenvolvido aqui, porém com dimensões reduzidas. Esta estratégia é usada para estudar o comportamento da barra arenosa sujeita à ação de uma onda de gravidade.

As ondas geradas apresentam características de período Ts = 2,5s e altura significativa Hs = 0,05m. O tempo de simulação foi de 100s com incremento do tempo de 0,01s, fornecendo um parâmetro de estabilidade de Courant de Cr = 0,31. O escoamento é

acelerado em cinco vezes para aumentar os processos erosivos da barra arenosa e verificar o comportamento morfodinâmico do leito com a ação de uma onda de gravidade em um menor período de simulação.

A Figura 5.32, mostra-se que o comportamento da barra arenosa está semelhante com o comportamento simulado por Hudson *et al.* (2005), onde a crista tende a ser curvada na direção da propagação das ondas. À medida que a onda se propaga, o movimento oscilatório move as partículas de sedimento para frente e para trás sobre o leito, que através do balanço do fluxo de massa a partícula é transportada na direção de propagação da onda. É possível observar que o perfil da barra arenosa modelada neste trabalho não fica tão escarpado quanto os resultados da literatura. Como a barra arenosa tende a se curvar na direção do escoamento, as partículas no nível do leito atingem certo ângulo onde ocorre o colapso e, assim, a barra quebra derramando o sedimento no fundo.



Figura 5.32: Comparação ente a simulação de Hudson *et al.* (2005), gráfico da esquerda, e o modelo multifásico de ondas-sedimentos, gráfico da direita. A linha continua da figura da direita é o nível do leito suavizado.

O movimento da inclinação da barra é mostrado na Figura 5.33 e na Figura 5.34, durante a passagem de um período completo da onda. Nessas figuras pode ser observado que o movimento da crista da barra está em fase com o movimento orbital da onda, onde o sedimento é levado à suspensão, que posteriormente é decantado durante um período de onda, realizando o movimento por saltação.



Figura 5.33: Sequência do movimento da onda/sedimento antes da barra arenosa entrar em colapso.



Figura 5.34: Sequência do movimento onda/sedimento durante o colapso da barra arenosa.

Nas Figuras Figura 5.35 e Figura 5.36, podem ser observado que após o colapso da barra arenosa, o sedimento passa a ser transportado no leito por rolamento e saltação, onde ocorre uma tendência a formar marcas onduladas no leito (*ripples*). Para uma melhor visualização dessa feição morfológica seriam necessárias simulações mais refinadas quanto ao número de partículas, ocasionando um aumento significativo no esforço computacional.

A erosão da barra arenosa foi evidenciada tanto na região ante-barra quanto na pós-barra. Na Figura 5.37, observa-se que as velocidades das partículas de sedimento na região antebarra são transportadas na direção contrária ao fluxo da onda. Isso ocorre devido às partículas sedimentadas na região ante-barra serem bloqueadas pela barra arenosa, aproximadamente na coordenada x = 4m, não permitindo o movimento das partículas na direção da onda. Já na região pós-barra, Figura 5.38, as partículas são movimentadas na direção da onda, Já na região pós-barra, Figura 5.38, as partículas são movimentadas na direção da onda com o fluxo de massa tende a configurar a feição do leito.



Figura 5.35: Variação da barra arenosa devido à ação das ondas de gravidade. A linha mais superior de cada figura é a profundidade total e a linha na região da barra é o perfil do leito suavizado.



Figura 5.36: Variação da barra arenosa devido à ação das ondas de gravidade. A linha mais superior de cada figura é a profundidade total e a linha na região da barra é o perfil do leito suavizado.



Figura 5.37: Campo de velocidades das partículas na região ante-barra.





Figura 5.38: Campo de velocidades das partículas na região pós-barra.

# TESTE 2 – COMPARAÇÃO COM UM MODELO EULERIANO

O modelo multifásico foi confrontado com um modelo puramente euleriano encontrado em Long *et al.* (2006), em que utilizaram as equações de Boussinesq para o modelo de ondas e a fórmula de Meyer-Peter-Müller, adaptada para regiões costeiras, com tensão de cisalhamento a partir de um modelo de camada limite para o transporte de sedimentos. O modelo de Long *et al.* (2006) foi desenvolvido para estudar o transporte de sedimentos e simular eventos de migração das barras arenosas tanto em direção à costa quanto o seu afastamento da mesma.
A taxa de transporte do volume de sedimento total é calculada por:

$$q_{tot} = q_w + q_c \tag{5.5}$$

onde  $q_w$  corresponde à taxa de transporte relacionada com o movimento da onda, que é controlada pela tensão de cisalhamento da camada limite de fundo e  $q_c$  está associado com a velocidade média fora da camada limite.  $q_w$  é calculado de acordo com a fórmula de Meyer-Peter-Müller (MPM):

$$\psi = A \left( \theta - \theta_c \right)^b \tag{5.6}$$

$$\Psi = \frac{q_w}{\left(d_{50}\sqrt{\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)}\right)}$$
5.7

$$\theta = \frac{\tau_b}{\left(\rho_p - \rho\right)gd_{50}}$$
 5.8

onde  $\psi$  é a taxa de transporte normalizada,  $\theta$  é o parâmetro de Shields,  $\theta_c$  é o valor limiar do parâmetro de Shields para iniciar o transporte de sedimento,  $A \in b$  são constantes adimensionais, com valores típicos de  $A = 11 \in b = 1,65$ .  $\tau_b$  é a tensão de cisalhamento instantânea no fundo e é obtida a partir da camada limite da onda ao invés de usar as correlações quadráticas.  $q_c$  é calculada de acordo com a fórmula de Bailard (1981) para uma corrente média.

$$q_{c} = \frac{\rho}{g(\rho_{p} - \rho)} C_{f} \frac{\varepsilon_{B}}{\tan \varphi} \left[ \left| u_{b} \right|^{2} \overline{u}_{b} - \frac{\tan \beta}{\tan \varphi} \left| u_{b} \right|^{3} \right] + \frac{\rho}{g(\rho_{p} - \rho)} C_{f} \frac{\varepsilon_{S}}{w_{fall}} \left[ \left| u_{b} \right|^{3} \overline{u}_{b} - \frac{\varepsilon_{S} \tan \beta}{w_{fall}} \left| u_{b} \right|^{5} \right]$$
5.9

onde  $u_b$  é a velocidade calculada no fundo,  $\overline{u}_b$  é a velocidade média no fundo baseada na média temporal da velocidade instantânea no fundo para um determinado período de tempo,  $\varphi$  é o ângulo de fricção, tan  $\beta$  é a declividade do nível do leito,  $C_f$  é o coeficiente de fricção,  $w_{fall}$  é a velocidade de sedimentação,  $\varepsilon_B$  é o coeficiente de efetividade para a carga de leito e  $\varepsilon_S$  é o coeficiente de efetividade para a carga suspensa. As mudanças temporais no nível do leito  $z_b$  devido à acreção e erosão são determinadas a partir do gradiente da taxa do transporte de sedimentos e pela equação da conservação da massa do sedimento dada como:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial q_{tot}}{\partial x}$$
 5.10

onde  $\varepsilon_p = 0.8$  é a porosidade do leito.

As características das ondas geradas apresentam um período Ts = 6,0s e altura significativa Hs = 0,1m. O tempo de simulação foi de 100s, com incremento do cálculo numérico de 0,01s, fornecendo um parâmetro de estabilidade de Courant de Cr = 0,3132. Para as constantes do modelo de sedimento euleriano foram utilizados os valores padrão como mostrados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Valores de entrada do modelo de sedimento euleriano.

$d_{50}$	0,13 <i>mm</i>
φ	32°
$C_{f}$	0,003
$W_{fall}$	0,012 <i>m/s</i>
$\mathcal{E}_{B}$	0,135
$\mathcal{E}_{S}$	0,010

A Figura 5.39 mostra os resultados comparando o modelo multifásico com o modelo euleriano. É possível observar que o comportamento da duna nos dois modelos está em concordância qualitativa, onde a crista da duna com essas características de onda move-se na direção contrária ao movimento. Esse processo morfológico é devido à quebra da onda sobre a barra arenosa, a qual gera um fluxo mais intenso no fundo em sentido contrário ao

movimento da onda. Isso explica a movimentação da barra arenosa em direção ao mar e erosão de praias em eventos de ondas de tempestades, as quais são de grande energia.

Guanel *et al.* (2007) indica que a maioria do sedimento que move-se na direção contrária ao movimento da onda é mobilizado e deslocado pelas contra-correntes de fundo (*undertow*). Se essas correntes são fracas, a predominância do movimento do sedimento está na direção de propagação da onda.

Neste caso de ondas regulares, a posição inicial da barra arenosa somente depende do ponto de quebra da onda, que é dependente da altura da onda incidente. A mudança da característica da barra arenosa leva à mudança do ponto de quebra da onda. Essa interação entre as ondas e o perfil do leito gera instabilidades da barra arenosa causando o colapso da estrutura e transportando o sedimento de acordo com a passagem da onda, conforme Figuras Figura 5.40 e Figura 5.41.



Figura 5.39: Resultados da simulação comparando o perfil do nível do leito do modelo euleriano com o modelo multifásico. A linha pontilhada sobre o leito é o resultado do modelo euleriano e a concentração em cores é o resultado do modelo granular de partículas.



Figura 5.40: Velocidade das partículas sob ação da onda de gravidade na região antebarra. A linha pontilhada no gráfico de cores na região da barra é o nível simulado pelo modelo euleriano.



Figura 5.41: Velocidade das partículas sob ação da onda de gravidade na região pós-barra. A linha pontilhada no gráfico de cores na região da barra é o nível simulado pelo modelo euleriano.

#### Conclusões e Recomendações

### CONCLUSÕES

O desenvolvimento de um modelo multifásico foi elaborado para simular interação do escoamento de uma fase fluida dominada por ondas com uma fase particulada ou dispersa dominada por grãos de sedimentos. Para isso, foi necessário um tratamento de colisão de partículas do tipo esferas rígidas para evitar a interpenetração da matéria.

O modelo de ondas, baseado nas equações não-lineares do tipo Boussinesq descritas em Wei *et al* (1995), se mostrou eficiente na geração e propagação de ondas sobre fundo variável. Na geração de onda, pelo método proposto por Wei *et al*. (1999), a geração por fonte gaussiana apresentou resultados mais estáveis e consistentes do que os métodos clássicos de pá-pistão e pá-batedor. Adicionalmente, foi verificado que o modelo funciona melhor quando as ondas são geradas em águas intermediárias até um limite de kh = 3.

Para regiões mais rasas, os resultados dos experimentos com ondas propagando-se sobre um obstáculo trapezoidal revelaram que o modelo de onda pode ser usado de forma satisfatória, pois é capaz de capturar a não-linearidade quando a onda interage com o leito e a decomposição da onda ao atravessar o obstáculo, surgindo oscilações de altafrequência.

Já os resultados apresentados pelo modelo granular no referencial lagrangiano atestaram seu bom desempenho. As simulações de quebra de barragem, sem obstáculo e com um obstáculo, mostraram que a consideração das colisões binárias de partículas (*hard sphere*), importantes para impedir a sobreposição de massa num mesmo espaço, representou de forma satisfatória a física dos problemas. Contudo, ainda são necessários estudos mais aprimorados do gradiente de pressão na coluna d'água. A pressão é muito importante em problemas de colapso do fluido e ainda é um desafio a ser solucionado matematicamente nos modelos de partículas pela comunidade científica.

Também foi verificado que o número de partículas no domínio é de grande importância para a representação física dos processos ocasionados pelo movimento da coluna d'água. Mesmo com uma quantidade razoável de partículas o modelo granular foi capaz de capturar os efeitos do colapso da coluna d'água, propagando-se na forma de onda e interagindo com as paredes do domínio formando uma onda do tipo *bore*. A forma da quebra da onda foi "semelhante" aos resultados experimentais, onde essa característica é "muito complicada" para ser simulada por modelos utilizando malhas regulares.

No caso da barragem com obstáculo, o modelo não foi adequado em relação ao alcance máximo do jato de água ocasionado após o impacto com o obstáculo. Isso pode ser explicado por três fatores: a adaptação da equação da pressão, onde é um parâmetro muito importante para a aceleração das partículas da coluna d'água; as partículas da parede, gerando certa rugosidade que absorve a energia das partículas quando interagem com a parede; e o número de partículas, uma vez que para capturar minuciosamente os efeitos no fluido seria necessária uma maior quantidade de partículas.

Na simulação da quebra de barragem com um obstáculo, o processo de galgamento pode ser observado quando a água inunda a área seca do tanque e, assim, ocorre uma acumulação de partículas de água no canto do domínio. Quando o fluxo diminui, essas partículas acumuladas retornam na forma de uma onda, que, juntamente com o fluxo contrário, faz surgir vórtices nas laterais do obstáculo.

Portanto, o modelo granular obteve resultados satisfatórios na representação dos processos físicos ocasionados pelo movimento das partículas, no referencial lagrangiano, alocadas dentro de um domínio fluido de gás, no referencial euleriano. Com isso, alterando as massas específicas e reformulando a equação do momentum das partículas, pode-se aplicar o modelo para qualquer propriedade físico-química que esteja dentro dos padrões da limitação computacional.

Finalmente, o modelo híbrido que trata do acoplamento na interação onda-sedimento foi capaz de processar o movimento das partículas de sedimento, quando são forçadas pela ação de uma onda de gravidade. Os resultados do modelo mostraram que esta metodologia é promissora para estudos científicos relacionados ao transporte de sedimentos em regiões costeiras, onde o comportamento de uma duna submersa modelado neste trabalho foi semelhante ao comportamento da duna simulada por trabalhos da literatura e por modelos eulerianos calibrados. Porém, a vantagem de utilizar o modelo granular é que a física do movimento do grão fica melhor representada, uma vez que o movimento da partícula ser acompanhado sem a necessidade de uma malha fixa e, assim, as propriedades físicas

podem ser calculadas em qualquer posição do domínio. O movimento do sedimento de fundo mostrou-se estar em concordância com movimento da onda, onde com a passagem da onda, o grão é jogado em suspensão pela velocidade orbital da onda e em seguida é decantado pela ação da gravidade (movimento de saltação). Dessa forma, o tratamento por meio de colisões permite que as partículas sejam amontoadas no leito, onde a concentração desse "empacotamento" indica a forma que o leito se encontra.

# **RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

A simulação das colisões binárias, ou de esferas rígidas, foram de grande importância para a simulação do modelo granular de partículas, solucionando o problema de interpenetrabilidade entre as partículas. Tanto esse método de colisão quanto o método da literatura de esferas macias podem ser empregados em outros modelos numéricos que utilizam partículas lagrangianas, como modelos do tipo SPH (*Smooth Particle Hydrodynamics*), ou qual é um modelo bem usado e validado pela literatura internacional que não trata o contato partícula-partícula.

Também é necessário um estudo mais detalhado do gradiente de pressão da coluna d'água para melhor representar a física da quebra de barragens utilizando modelos lagrangiano de partículas.

Os resultados do modelo de onda podem ser melhorados aumentando-se a ordem das propriedades dispersivas da onda. Esse aperfeiçoamento das equações não-lineares de ondas permite uma melhor representação dos processos decorrentes da propagação da onda, como a não-linearidade da onda e a dispersão em águas mais profundas.

A fim de estudar o balanço de sedimento na linha de costa, será necessário adicionar ao modelo um algoritmo que soluciona o movimento da onda na linha de costa. Nessa região ocorre um importante processo de transporte de sedimento, que ocorre devido à subida (*run-up*) e à descida (*run-down*) da onda na face da praia, conhecido como espraiamento (*swash*).

A otimização do algoritmo do modelo granular é importante para uma simulação mais refinada do transporte de sedimentos devido à ação das ondas. Devido à diferença entre as

escalas da onda e do sedimento, o modelo acoplado se torna lento e pode corromper a memória virtual do CPU. Assim, uma nova formulação para as interações entre as partículas deve ser elaborada para solucionar esse problema e obter resultados mais refinados e satisfatórios.

#### **Referencias Bibliográficas**

- Apostolou, K.; Hrymak, A.N. (2008). Discrete Element Simulation of Liquid-Particle Flows. Computers and Chemical Engineering, v. 32, pp. 841-856.
- Bailard, J. A. (1981). An Energetics Total Load Sediment Transport Model for a Plane Sloping Beach. Journal of Geophysical Research, v. 86, pp. 10938-10954.
- Beji, S.; Battjes, J. A. (1993). Experimental Investigation of Wave Propagation over a Bar. Coastal Engineering, v. 19, pp. 151-162.
- Bernard-Champmartin, A.; De Vuyst, F. (2013). A Low Diffusive Lagrange-Remap Scheme for the Simulation of Violent Air-Water Free-Surface Flows. Journal of Computational Physics, p. 35.
- Brennen, C. E. (2005). Fundamentals fo Multiphase Flows. Cambridge University Press, ISBN 0521 848040, p. 410.
- Chang, W-T; Hsieh, S-H; Yang, F-L; Chen, C-S. (2008). Discrete Element Simulation of Collision-Rich Dynamics of Wet Granular Flows Down an Inclined Channel. Tsinghua Science and Technology, v. 13, n. S1, pp. 90-95.
- Chawla, A.; Kirby, J. T. (2000). A source function method for generation of waves on currents in Boussinesq Models. Applied Ocean Research, v. 22, pp. 75-83.
- Chazel, F.; Benoit, M.; Em, A. (2010). Validation of a Double-Layer Boussinesq-Type Model for Highly Nonlinear and Dispersive Waves. Coastal Engineering, p. 12.
- Chen, Q.; Kirby, J. T.; Dalrymple, R. A.; Kennedy, A. B.; Chawla, A.(2000).
   Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. II: 2D.
   Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering.
- Chen, Q.; Kirby, J. T.; Dalrymple, R. A.; WEI, F.; Thomton, E. B. (2003).
   Boussinesq Modeling of Longshore Currents. Journal of Geophysical Research, v. 108, n. C11,3362, pp. 1-18.
- Crowe, C. T.; Sommerfeld, M.; Tsuji, Y.(1998). Multiphase Flows with Droplets and Particles. Ed. CRC press, p. 470.

- Cruchaga, M. A.; Celentano, D. J.; Tezduyar, T. F. (2007). Collapse of a Liquid Column: Numerical Simulation and Experimental Validation. Computational Mechanics, v. 39, pp. 453-476.
- Dean, R. G.; Dalrymple, R. A (1991). Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. Advanced Series On Ocean Engineering, ed. World Scientific, v. 2, p. 354.
- Dean, R. G.; Dalrymple, R. A. (1991). Water Wave Mechanics for Engineering and Scientists. Advanced Series on Ocean Engineering, ed. World Scientific, v. 2.
- Deen, N.G.; van sint Annaland, M.; van der Hoef, M.A.; Kuipers, J.A.M.(2007). Review of Discrete Particle Modeling of Fluidized Beds. Chemical Engineering Science, v. 62, pp. 28-44.
- Dingemans, M. (1994). Comparison of Computations with Boussinesq-Like Models and Laboratory Measurements. Mast-G8M technical report H1684, Delft Hydraulics, Delft, Holanda.
- Gobbi, M. F.; Kirby, J. T. (1999). Wave Evolution Over Submerged Sills: Tests of a High-Order Boussinesq Model. Coastal Engineering, v. 37, pp. 57-96.
- Gobbi, M. F.; Kirby, J. T.; Wei, G.(2000). A Fully Nonlinear Boussinesq Model for Surface Waves. Part II. Extension to O(kh)4 . J. Fluid Mech., 405, pp. 181-210.
- Goldschmidt, M. J. V.; Beetstra, R.; Kuipers, J. A. M. (2004). Hydrodynamic Modelling of Dense Gas-Fluidized Beds: Comparison and Validation of 3D discrete particle and Continuum Models. Powder Technology, v. 142, pp. 23-47.
- Goldschmidt, M. J. V.; Kuipers, J. A. M.; van Swaaaij, W. P. M. (2001). Hydrodynamic Modelling of Dense Gas-Fluidised Beds Using the Kinetic Theory of Granular Flow: Effect of Coefficient of Restitution on Bed Dynamics. Chemical Engineering Science, v. 56, pp. 571-578.
- Gómez-Gesteira, M.; Rogers, B. D.; Crespo, A. J. C.; Dalrymple, R. A.; Narayanaswamy, M.; Dominguez, J. M. (2012). SPHysics Development of a Free Surface Fluid Solver, Part I: Theory and Formulations. Computes & Geosciences, v. 48, pp. 289-299.

- Guannel, G.; Özkan-Haller, H. T.; Haller, M. C.; Kirby, J. T. (2007). Influence of Velocity Moments on Sand Bar Movemente During CROSSTEX. Coastal Sediments, ASCE, p. 14.
- Holthuijsen, L. H.(2007). Waves in Oceanic and Coastal Waters. Technische Universiteit Delft, ed. Cambridge University Press.
- Hoomans, B.P.B.; Kuipers, J.A.M.; Briels, W.J.; van Swaaij, W.P.M.(1996). Discrete Particle Simulation of Bubble and Slug Formation in a Two-Dimensional Gas-Fluidized Bed: Hard-Sphere Approach. Chemical Engineering Science, v. 51, n. 1, pp. 99-118.
- Hoomans, B.P.B.; Kuipers, J.A.M.; mohd Salleh, M.A.; Seville, J.P.K.(2001). Experimental Validation of Granular Dynamics Simulations of Gas-Fluidized Beds with Homogenous in-Flow conditions Using Positron Emission Particle Tracking. Powder Technology, v. 116, pp. 166-177.
- Hoomans, B.P.B.; Kuipers, J.A.M.; van Swaaij, W.P.M.(2000). Granular Dynamics Simulation of Segregation Phenomena in Bubbling Gas-Fluidized Beds. Powder Technology, v. 109, pp. 41-48.
- Hougue, C.; Newland, D.(1994). Efficient Computer Simulation of Moving Granular Particles. Powder Technology, v. 78, pp. 51-66.
- Hsu, T. W.; Yang, B. D.; Tseng I. F.; Tsai, J. Y. (2003). On the Damping Coefficients of Sponge Layer in Boussinesq Equations. Proceedings of the Thirteenth International Offshore and Polar Engineering Conference, Honolulu, Hawaii.
- Hudson, J.; Damgaard, J.; Dodd, N.; Chesher, T.; Cooper, A. (2005). Numerical Approaches for 1D Morphodynamics Modelling. Coastal Engineering, v. 52, pp. 691-707.
- Kamphuis, J. W.(2000). Introduction to Coastal Engineering and Management.
   Advanced Series on Ocean Engineering, ed. World Scientific, v. 16.
- Karambas, T.V.(1998). 2DH Non-linear Dispersive Wave Modelling and Sediment Transport in the Nearshore Zone. Coastal Engineering, pp. 2940-2953.
- Kennedy, A. B.; Chen, Q.; Kirby, J. T.; Dalrymple, R. A. (2000). Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. I: 1D. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, pp. 39-47.

- Kennedy, A. B.; Kirby, J. T.; Chen, Q.; Dalrymple, R. A.(2001). Boussinesq-type equations with improved nonlinear performance. Wave Motion, 33, p. 225-243.
- Kosinski, P.; Hoffman, A.C.(2009). An Extension of the Hard-Sphere Particle-Wall Collision Model to Account for Particle Deposition. Physical Review, v. 79.
- Kosinski, P.; Hoffman, A.C.(2010). An Extension of the Hard-Sphere Particle-Particle Collision Model to Study Agglomeration. Chemical Engineering Science, pp. 3231-3239.
- Kosinski, P.; Hoffman, A.C.(2011). Extended Hard-Sphere Model And Collisions of Cohesive Particles. Physical Review, v. 84, 2011.
- Link, J.; Zeilstra, C.; Deen, N.; Kuipers, H. (2004). Validation of a Discrete Particle Model in a 2D Spout-Fluid Bed Using Non-Intrusive Optical Measuring Techniques. The Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 82.
- Long, W.; Kirby, J. T.; Hsu, T.-J. (2006). Cross Shore Sandbar Migration Predicted by a Time Domain Boussinesq Model Incorporating Undertow. Coastal Engineering, pp. 2655-2666.
- Loth, E. (2010). Particle, Drops and Bubbles: Fluid Dynamics and Numerical Methods. Cambridge University Press, p. 348.
- Luo, J.; Ying, K.; Bai, J.(2005b). Savitzky-Golay Smoothing and Differentiation
   Filter for Even Number Data. Signal Processing, v. 85, pp. 1429-1434.
- Luo, J.; Ying, K.; He, P.; Bai, J.(2005a). Properties of Savitzky-Golay Digital Differentiators. Digital Signal Processing, v. 15, pp. 122-136.
- Madsen, P. A.; Murray, R.; SØRENSEN, O. R. A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Coastal Engineering, v. 15, pp. 371-388, 1991.
- Madsen, P. A.; Sørensen, O. R.(1992). A new form of the Boussinesq equation with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly varying bathymetry. Coastal Engineering, v. 18, pp. 183-204, 1992.
- Muth, B.; Muller, M.-K.; Eberhard, P.; Luding, S.(2007). Collision Detection and Administration Methods for Many Particles with Different Sizes. Preprint submitted to Elsevier Science.

- Nwogu, O. G.; Demirbilek, Z. (2001). BOUSS-2D: A Boussinesq Wave Model for Coastal Regions and Harbors; Theorical Background and User's Manual. Coastal and Hydraulics Laboratory, U. S. Army Engineer Research and Development Center, p. 80.
- Nwogu, O.(1993). Na alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation. J. Waterway, Port, Coast., Ocean Engineering, 119(6), pp. 618-638.
- Nwogu, O.G.(1996). Numerical Prediction of Breaking Waves and Currents with a Boussinesq Model. Proc. 25th International Conference on Coastal Engineering, ICCE '96, Orlando, Vol. 4, 4807-4820.
- Peregrine, D. H.(1967). Long Waves on a beach. Journal of Fluid Mechanics, v. 27, pp. 815-882.
- Pereira, M. R. (2004). Estudo do Transporte Local de Poluentes em Iperó por Meio de um Modelo Lagrangiano de Partículas. Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo, IAG-USP, São Paulo.
- Savitzky, A.; Golay, M.J.E.(1964). Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least-Squared Procedures. Analytical Chemistry, v. 36, n. 8, pp. 1627-1639.
- Schaffer, R.W.(2010). On the Frequency-Domain Properties of Savitzky-Golay
   Filters. Hewlett-Packard Development Company, 2010.
- Shuang, L.; Hai-Lun, He. (2013). Simulating Regular Wave Propagation Over a Submerged Bar by Boundary Element Method Model and Boussinesq Equation Model. Chin. Phys. B, v. 22, n. 2.
- Sigurgeirsson, H.; Stuart, A.; Wan, W-L.(2001). Algorithms for Particle-Field Simulations with Collisions. Journal of Computation Physics, v. 172, pp. 766-807.
- Silva, R. G. (2006). Estudo Numérico de Movimentação de Partículas em Escoamentos. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica, São Paulo, Brasil.

- Staroszczyk, Ryszard. (2010). Simularion of Dam-Break Flow by a Corrected Smoothed Particle Hydrodynamics Method. Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics, v. 57, n. 1, pp. 61-79.
- Stronge, W.J.(1990). Rigid Body Collisions with Friction. Proceedings of the Royal Society, London, v. 431, pp. 169-181.
- Tsou, B.; Wayne, K. (2004). Molecular Dynamics Simulation of Hard Spheres. COS 226 Programming Assignment, disponível em: < introcs.cs.princeton.edu/java/assignments/collisions.html>.
- Valentini, P.; Shwartzentruber, T. E.(2009). A Combined Event-Driven/Time-Driven Molecular Dynamics Algorithm for the Simulation of Shock Waves in Rarefied Gases. Journal of Computational Physics, v. 228, pp. 8766-8778.
- Wei, G. ; Kirby, J. T.; Sinha, A (1999). Generation of Wave in Boussinesq Models Using a Source Function Method. Coastal Engineering, v. 36, pp. 271-299.
- Wei, G.; Kirby, J. T.; Grilli, S. T.; Subramanya, R.(1994). A Fully nonlinear Boussinesq Model Equations for Surface Waves. I. Highly Nonlinear, Unsteady Waves. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering.
- Wei, G.; Kirby, J. T.; Sinha, A.(1999). Generation of waves in Boussinesq Models using a source function method. Coastal Engineering, 36, p. 271-299.
- Wei, G.; Kirby, J.T; Grilli, S. T.; Subramanya, R.(1995). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. I. Highly nonlinear, unsteady waves. Journal of Fluid Mechanics, vol. 294, pp. 71-92.
- Wu, C. L.; Zhan, J. M.; Li, Y. S.; Lam, K. S. (2006). Dense Particulate Flow Model on Unstructured Mesh. Chemical Engineering Science, v. 61, pp. 5726-5741.
- Young, I. R. (1999). Wind Generated Ocean Waves. Elsevier ocean engineering book series, v. 2.
- Zheng, J. G.; Khoo, B. C.; Hu, Z. M. (2013). Simulation of Wave-Flow-Cavitation Interaction Using a Compressible Homogenous Flow Method. Community Computational Physical, v. 14, n. 2, pp. 328-354.

Zou, Z.L.; Fang, K.Z.(2008). Alternative Forms of the Higher-order Boussinesq Equations: Derivations and Validations. Coastal Engineering, v. 55, pp. 506-521.

## **ANEXO I** Equações de Peregrine (1967)

Em Peregrine (1967) as equações do movimento foram derivadas para ondas longas em águas de profundidade variável, que incluem os termos não-lineares e são válidas para ondas de pequena amplitude. Esses termos extras representam o efeito da aceleração vertical da água na pressão. As equações são derivadas em três dimensões e na formulação matemática, as equações são adimensionalizadas da seguinte forma:

$$(x, y, z) = h_0^{-1}(x', y', z'),$$
  

$$t = t'(g / h_0)^{1/2},$$
  

$$p = p' / (\rho g h_0),$$
  

$$(u, v, w) = (g h_0)^{-\frac{1}{2}} (u', v', w').$$

onde as variáveis com apóstrofo indicam as variáveis dimensionais, sendo  $h_0$  o comprimento representativo da profundidade da água. As coordenadas x', y' e z' são as variáveis espaciais, t' é o tempo, p' é a pressão, u', v' e w' são, respectivamente, as componentes da velocidade nas direções x, y e z. O eixo z aponta verticalmente para cima, a superfície livre d'água é pela expressão  $z = \eta(x, y, t)$  e o fundo d'água como z = -h(x, y). E h é á profundidade média local.

As equações do movimento de Euler para um fluido invíscido, na forma adimensional, são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + w \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \nabla p = 0$$
 I.1

e

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right) w + w \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0$$
 I.2

A equação da continuidade é escrita da forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
 I.3

ou na forma integrada na vertical como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$$
 I.4

onde o fluxo de volume é dado por  $\mathbf{M} = \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u} dz$ ,  $\mathbf{u} = (u, v)$  é o vetor velocidade horizonta e o vetor operador horizontal é  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ . A condição de contorno dinâmica de pressão nula (p = 0) é válida em  $z = \eta(x, y, t)$  e a condição de impenetrabilidade,  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)h + w = 0$ , é válida em z = -h(x, y). A condição de contorno cinemática na

superfície livre, em  $z = \eta$ , é usada na obtenção da equação I.4. O escoamento induzido pela onda é assumido como irrotacional e pode ser escrito como:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} e \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \nabla w$$
 I.5

Observa-se que na presença de uma superfície livre a vorticidade de um fluido invíscido não permanece necessariamente zero se a vorticidade é nula inicialmente. A superfície livre pode se cruzar, como acontece quando uma conda quebra e o vórtices em folha (*vortex sheets*) são criados. Entretanto, não se espera que a teoria de Boussinesq, apresentada aqui, seja válida quando uma onda inicia o processo de quebra.

O negligenciamento da viscosidade, que é razoável para águas com profundidades maiores que 30cm, deve ser uma boa aproximação para ondas propagando-se em águas paradas, isso porque os efeitos da viscosidade estão primeiramente confinados a uma fina camada limite que ocorre na superfície e no fundo. Já que as ondas viajam muito mais rápido que a própria água, a vorticidade na camada limite não é carregada pelas ondas.

Existem dois parâmetros importantes associados com ondas longas. Um deles é a razão da amplitude com a profundidade, e o outro é a razão da profundidade com o comprimento de onda, representados por  $\delta$  (=  $a/h_0$ ) e  $\mu$  (=  $h_0/L$ ). Para todas as teorias de onda longa

 $\mu \ll 1$ . Para a teoria de amplitude finita  $\delta = O(1)$ . Porém para a onda solitária e para as equações de Boussinesq,  $\delta \in \mu^2$  são da mesma ordem.

As variáveis  $\eta$ , p,  $\mathbf{u} \in \mathbf{M}$  são expandidas na forma:

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots$$
 I.6

e w como

$$w = \delta \left( w_0 + \mu w_1 + \dots \right)$$
 I.7

As variáveis independentes são escalonadas de modo que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \ \frac{\partial}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) \text{ ou } \nabla = \mu \nabla_1 \text{ e } \frac{\partial}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)$$
 I.8

As variáveis  $\eta_i$ ,  $p_i$ ,  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{M}_i$ , (i = 0, 1, ...) e suas derivadas com respeito a  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z \in t_1$ são todos assumidos a ser de ordem O(1) tanto que a ordem de magnitude dos termos nas equações aparecem explicitamente quando as relações das equações I.6, I.7 e I.8 são substituídas. A profundidade,  $h(x_1, y_1)$ , e suas derivadas também devem ser ordem O(1), caso contrário, as variações na profundidade da água seriam menores que das ondas incidentes e tenderiam a gerar ondas curtas, e assim gerando perturbações no esquema numérico.

A solução de ordem zero é considerada representar a água parada, tanto que  $p_0 = -z$  e todas as outras variáveis de ordem zero são nulas. Se, em vez disso, as equações de ordem zero forem trabalhadas, a solução conduziria às equações de Airy.

A equação de primeira ordem obtida da equação I.5 é  $\partial \mathbf{u}_1 / \partial z = 0$ , onde  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 (x_1, y_1, t)$ e  $z = \delta \eta_1 \mathbf{M}_1 = h \mathbf{u}_1$ . A partir da equação I.2, a pressão satisfaz  $\partial p_1 / \partial z = 0$ , que combinada com a condição de contorno  $p_0 + \delta p_1 = 0$ . As equações de primeira ordem a partir das equações I.1 e I.4 são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \nabla_1 \eta_1 = 0 \tag{I.9}$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} + \nabla_1 \cdot \left(h \mathbf{u}_1\right) = 0$$
 I.10

que são as equações linearizadas de ondas longas.

A partir da equação de primeira ordem da equação I.3, a velocidade vertical  $w_1$  é encontrada pela integração em relação a *z* e aplicando a condição de contorno em z = -h. Dessa forma segue:

$$w_1 = -\nabla_1 (h \mathbf{u}_1) - z \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_1$$

Para os termos de segunda ordem segue-se o mesmo procedimento que o realizado para obter os termos de primeira ordem. O termo de segunda ordem da equação I.5 é escrito como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} = \nabla_1 W_1$$

A solução dessa equação é:

$$\mathbf{u}_{2} = \mathbf{U}_{2}(x_{1}, t_{1}) - z\nabla_{1} \left[\nabla_{1} \cdot (h\mathbf{u}_{1})\right] - \frac{1}{2}z^{2}\nabla_{1}(\nabla_{1} \cdot \mathbf{u}_{1})$$

Onde  $\mathbf{U}_2(x_1, t_1)$  é uma função arbitrária que é um produto da integração. O termo de segunda ordem da equação I.2 agora inclui a aceleração vertical:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1} + \frac{\partial p_2}{\partial z} = 0$$

e integração dessa equação de um nível para z até a superfície livre, resulta em:

$$p_2 = \eta_2 \left( x_1, y_1, t_1 \right) + z \frac{\partial}{\partial t_1} \nabla_1 \cdot \left( h \mathbf{u}_1 \right) + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial}{\partial t_1} \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_1$$

onde a condição de contorno na superfície livre, em  $z = \delta \eta_1 + \delta^2 \eta_2$  foi usada. A substituição de  $\mathbf{u}_2$  e  $p_2$  na equação do momentum de segunda ordem da equação I.1, se obtém:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla_1) \mathbf{u}_1 + \nabla_1 \eta_2 = 0$$
 I.11

A forma dessa equação depende da origem de z, os termos das derivadas mais altas se anulam somente quando z = 0, é adotada como origem da superfície livre não perturbada. Similarmente, existem na equação da continuidade termos equivalentes que depende da origem de z.

A partir da definição de M,

$$\delta^2 \mathbf{M}_2 = \int_{-h}^0 \delta^2 \mathbf{u}_2 dz + \int_0^{\delta \eta_1} \delta \mathbf{u}_1 dz ,$$

Que resulta em:

$$\mathbf{M}_{2} = \eta_{1}\mathbf{u}_{1} + h\mathbf{u}_{2} + \frac{1}{2}h^{2}\nabla_{1}\left[\nabla_{1}\cdot\left(h\mathbf{u}_{1}\right)\right] - \frac{1}{6}h^{3}\nabla_{1}\left(\nabla_{1}\cdot\mathbf{u}_{1}\right).$$

Os termos de segunda ordem da equação da continuidade são:

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t_1} + \nabla_1 \cdot \mathbf{M}_2 = 0$$
 I.12

Nesse ponto uma mudança de abordagem é requerida. É possível encontrar a solução para  $\mathbf{u}_1 \in \eta_1$ , em seguida introduzir esses valores nas equações I.11 e I.12 para encontrar  $\mathbf{U}_2$  e  $\eta_2$ . Entretanto, essa aproximação somente pode ser realizada para valores pequenos de  $t_1$  e as soluções das equações para um fundo plano mostram que a solução real pode variar substancialmente das equações linearizadas. Para tempos moderados, os termos de segunda ordem têm efeitos de primeira ordem. Para incluir esses efeitos, as variáveis de primeira ordem, que incorporam os termos de segunda ordem, são usadas. Para a amplitude da onda se tem  $\eta = \delta \eta_1 + \delta^2 \eta_2$ .

Para a velocidade variável existem mais possibilidades, em particular, a velocidade média,

$$\overline{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{M}}{(h+\eta)} = \delta u_1 + \delta^2 \left\{ \mathbf{U}_2 + \frac{1}{2}h\nabla_1 \left[\nabla_1 \cdot (h\mathbf{u}_1)\right] - \frac{1}{6}h^2 \nabla_1 (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_1) \right\};$$

e a velocidade em z = 0,  $\hat{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{u}_1 + \delta^2 \mathbf{U}_2$ .

Em termos de  $\overline{\mathbf{u}}$  as equações do momentum e da continuidade, formada pela adição de  $\delta$  vezes às equações I.11 e I.12 com as equações I.9 e I.10, respectivamente, e voltando para as variáveis x, y e t, se obtém a forma final das equações de águas rasas com aproximação de Boussinesq:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \overline{\mathbf{u}} + \nabla \eta = \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial t} \nabla \left[ \nabla \cdot (h \overline{\mathbf{u}}) \right] - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \left( \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} \right)$$
I.13

e

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left[ \left( h + \eta \right) \overline{\mathbf{u}} \right] = 0$$
 I.14

Ondes as equações I.13 e I.14 são as equações do momentum e da continuidade, respectivamente.

# ANEXO II Equações de Nwogu (1993)

As equações padrão de Boussinesq representam as equações da conservação da massa e do momentum integradas na profundidade para um fluido incompressível e invíscido. Para reduzir o problema tridimensional a um problema bidimensional, é considerado que a velocidade vertical varia linearmente com a profundidade.

A maior limitação das equações padrão de Boussinesq, equações de Peregrine (1967), é que essas são somente aplicáveis para profundidades relativamente rasas e para que o erro na velocidade de fase seja menor que 5%, as equações devem ser aplicadas em profundidades da água que tenham aproximadamente 1/5 do comprimento da onda equivalente em água profunda.

No objetivo de expandir a validade das equações de Boussinesq para águas mais profundas, muitos autores iniciaram pesquisas para melhorar as propriedades da relação da dispersão tendo como meta aproxima-la da relação da dispersão para ondas de Airy.

A forma alternativa das equações de Boussinesq em duas dimensões para a profundidade da água variável foi apresentada por Nwogu (1993). As equações foram derivadas a partir das equações da continuidade e do movimento de Euler, usando a velocidade em uma distância arbitrária a partir do nível da água em repouso como a velocidade incógnita.

Para a manipulação das equações de Boussinesq, Nwogu (1993) fez as seguintes considerações:

- Campo de ondas com a elevação da superfície livre  $\eta(x, y, t)$ , no tempo t, propagando sobre uma profundidade variável h(x, y).
- Um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) é adotado, sendo a origem da coordenada z localizada no nível da água parada.
- O fluido é considerado como invíscido e incompressível, e o escoamento é assumido irrotacional.

Além dessas considerações, o autor, utiliza duas importantes escala de comprimento: a profundidade da água característica  $h_0$  para a direção vertical e; um comprimento de onda típico L para a direção horizontal. Para os efeitos devido ao movimento da superfície

livre, é considerada a amplitude de onda típica  $a_0$ . As variáveis associadas com as diferentes escalas de comprimento são consideradas de diferentes ordens de magnitude. Então, as seguintes variáveis independentes e adimensionais podem ser definidas:

$$x = \frac{x'}{L}, \ y = \frac{y'}{L}, \ z = \frac{z'}{h_0}, \ t = \frac{\sqrt{gh_0}}{L}t'$$
 II-1

$$u = \frac{h_0}{a_0 \sqrt{gh_0}} u', \ v = \frac{h_0}{a_0 \sqrt{gh_0}} v', \ w = \frac{h_0^2}{a_0 L \sqrt{gh_0}} w'$$
 II-2

$$\eta = \frac{\eta'}{a_0}, \ h = \frac{h'}{h_0}, \ p = \frac{p'}{\rho g a_0}$$
 II-3

onde g é a aceleração devido à gravidade, (u,v,w) é o vetor velocidade da partícula d'água, p é a pressão e  $\rho$  é a massa específica do fluido. Os apóstrofos são usados para identificar as variáveis dimensionais. As equações governantes para o movimento do fluido são as equações da continuidade e as equações do movimento de Euler. A equação da continuidade pode ser expressa na forma adimensional como:

$$\mu^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
 II-4

Em três dimensões, as equações do movimento de Euler pode ser expressa na forma adimensional como:

$$\mu^{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta \mu^{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \mu^{2} v \frac{\partial u}{\partial y} + \delta w \frac{\partial u}{\partial z} + \mu^{2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
 II-5

$$\mu^{2} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta \mu^{2} u \frac{\partial v}{\partial x} + \delta \mu^{2} v \frac{\partial v}{\partial y} + \delta w \frac{\partial v}{\partial z} + \mu^{2} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
 II-6

$$\delta \frac{\partial w}{\partial t} + \delta^2 u \frac{\partial w}{\partial x} + \delta^2 v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\delta^2}{\mu^2} w \frac{\partial w}{\partial z} + \delta \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0$$
 II-7

Os parâmetros  $\delta = a_0/h_0$  e  $\mu = h_0/L$  são, respectivamente, uma medida da nãolinearidade e da dispersão da frequência, e são considerados pequenos. A condição de irrotacionalidade é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
 II-8

O fluido deve satisfazer a condição de contorno dinâmica na superfície livre e as condições de contorno cinemática na superfície livre e no fundo. Dessa forma, essas equações podem ser escritas como:

$$p = 0$$
 em  $z = \delta \eta$  II-9

$$w = \mu^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \delta \mu^2 u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \delta \mu^2 v \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \text{em } z = \delta \eta \qquad \text{II-10}$$

$$w = -\mu^2 u \frac{\partial h}{\partial x} - \mu^2 v \frac{\partial h}{\partial y}$$
 em  $z = -h$  II-11

Para a propagação horizontal das ondas, o problema tridimensional pode ser reduzido para um bidimensional integrando as equações de II-4 a II-7 através da profundidade da água. Integrando a equação da continuidade II-4 a partir do fundo até a superfície livre e aplicando as condições de contorno cinemática II-10 e II-11 resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\delta\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\delta\eta} v dz + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0$$
 II-12

Similarmente, as equações do momentum horizontal II-5 e II-6 podem ser integradas na profundidade, e usando as equações II-4, II-9 e II-11 resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\delta\eta} u dz + \delta \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\delta\eta} u^2 dz + \delta \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\delta\eta} u v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\delta\eta} p dz - p \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad \text{II-13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\delta\eta} v dz + \delta \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\delta\eta} u v dz + \delta \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\delta\eta} v^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\delta\eta} p dz - p \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \qquad \text{II-14}$$

O campo de pressão é obtido pela integração da equação do momentum vertical II-7 em z e aplicando as condições de contorno II-9 e II-10 na superfície livre:

$$p = \eta - \frac{z}{\delta} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{z}^{\delta \eta} w dz + \delta \frac{\partial}{\partial x} \int_{z}^{\delta \eta} u w dz + \delta \frac{\partial}{\partial y} \int_{z}^{\delta \eta} v w dz - \frac{\delta}{\mu^{2}} w^{2}$$
 II-15

Finalmente, a velocidade vertical w é obtida pela integração da equação da continuidade II-4 em relação à z e aplicando a condição de fundo II-11:

$$w = -\mu^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{z} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{z} v dz \right)$$
 II-16

Todas as equações acima são exatas e são válidas para todas as ordens de  $\delta \in \mu$ . Para integrar essas equações, deve ser conhecida a dependência das variáveis com a profundidade. Uma aproximação que pode ser feita é considerar a variação de cosseno hiperbólico da onda de Airy com a profundidade. Entretanto, as equações resultantes somente seriam aplicáveis para ondas regulares, uma vez que a função hiperbólica depende da frequência da onda.

Uma aproximação diferente, consistente com a teoria de Boussinesq, é uma pertubação a partir da teoria de onda longa para incluir o efeito da dispersão de frequencias. As velocidaes horizontais são inicialmente expandidas em uma série de Taylor em torno do fundo (z = -h):

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, -h, t) + (z+h) \frac{\partial \mathbf{u}(x, y, -h, t)}{\partial z}$$
  
+ 
$$\frac{(z+h)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, y, -h, t)}{\partial z^2} + \cdots$$
 II-17

onde  $\mathbf{u} = (u, v)$ . Substituindo a equação II-16 para a velocidade vertical na condição de irrotacionalidade II-8 e avaliando no fundo, tem-se:

$$\mathbf{u}(x, y, -h, t) = -\mu^2 \left[ \nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \Big|_{z=-h} \nabla h \right]$$
 II-18

onde  $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}(x, y, -h, t)$  é a velocidade no fundo e  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ . Substituindo as equações II-17 e II-18 na equação II-16 e integrando obtém-se:

$$w = -\mu^{2} \nabla \cdot \left[ (z+h) \mathbf{u}_{b} \right] + \mu^{4} \nabla \cdot \left\{ \frac{(z+h)^{2}}{2} \left[ \nabla (\mathbf{u}_{b} \cdot \nabla h) + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \Big|_{z=-h} \nabla h \right] \right\} + O(\mu^{6})$$
 II-19

Assumindo que  $\nabla h$  é de O(1), w varia linearmente na profundidade no termo de maior ordem na dispersão de frequências  $O(\mu^2)$ . As velocidades horizontais podem ser expressas em termos da velocidade do fundo através da integração da condição de irrotacionalidade II-8 na profundidade, que é:

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_b = \int_{-h}^{z} \nabla w dz \qquad \qquad \text{II-20}$$

Substituindo a equação II-19 para w na equação II-20 e integrando tem-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b + \mu^2 \left(\frac{h^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right) \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_b\right) - \mu^2 \left(h + z\right) \nabla \left[\nabla \cdot \left(h\mathbf{u}_b\right)\right] + O\left(\mu^4\right)$$
 II-21

Para ordem  $O(\mu^2)$ , as velocidades horizontais variam de forma quadrática na profundidade. Se assumirmos que  $O(\delta) = O(\mu^2) << 1$ , o campo de pressão pode ser obtido pela substituição da equação II-21 para **u** e a equação II-19 para *w* na equação II-15 e integrando, retendo os termos de ordem  $O(\delta) \in O(\mu^2)$ :

$$p = \eta - \frac{z}{\delta} + \mu^2 z \nabla \cdot \left( h \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} \right) + \mu^2 \frac{z^2}{2} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} + O\left(\delta^2, \delta \mu^2, \mu^4\right)$$
 II-22

A distribuição vertical da pressão é também na forma quadrática. Ao invés de usar a velocidade no fundo ou a velocidade média na profundidade como a variável de velocidade variável, pode ser usada a velocidade  $\mathbf{u}_{\alpha}$  em uma elevação arbitrária  $z = z_{\alpha}$ . As velocidades e a pressão podem ser expressas em termos de  $\mathbf{u}_{\alpha}$  como:

$$w = -\mu^2 \nabla \cdot (h \mathbf{u}_{\alpha}) - \mu^2 z \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} + O(\mu^4)$$
 II-23

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\alpha} + \mu^{2} \left( \frac{z_{\alpha}^{2}}{2} - \frac{z^{2}}{2} \right) \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \mu^{2} \left( z_{\alpha} - z \right) \nabla \left[ \nabla \cdot \left( h \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right] + O(\mu^{4})$$
 II-24

e

$$p = \eta - \frac{z}{\delta} + \mu^2 z \nabla \cdot \left( h \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) + \mu^2 \frac{z^2}{2} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + O\left(\delta^2, \delta \mu^2, \mu^4\right)$$
 II-25

Substituindo as equações de II-23 a II-25 nas equações integradas na profundidade da continuidade e do momentum horizontal, equações de II-12 a II-14, e integrando, retendo os termos até a ordem  $O(\delta)$  e  $O(\mu^2)$ , Nwogu (1993) encontrou um novo conjunto de equações do tipo Boussinesq:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( h + \delta \eta \right) \mathbf{u}_{\alpha} \right]$$

$$+ \mu^{2} \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{z_{\alpha}^{2}}{2} - \frac{h^{2}}{6} \right) h \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \left( z_{\alpha} + \frac{h}{2} \right) h \nabla \left[ \nabla \cdot \left( h \mathbf{u}_{\alpha} \right) \right] \right\} = 0$$
II-26

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \eta + \delta (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} + \mu^{2} \left\{ \frac{z_{\alpha}^{2}}{2} \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) + z_{\alpha} \nabla \left[ \nabla \cdot \left( h \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) \right] \right\} = 0$$
II-27

Comparada às equações padrões de Boussinesq de Peregrine (1967), as novas equações contem um termo adicional de dispersão de frequencia na equação da continuidade. A seguir, é mostrado que a caracterísitca linear da dispersão do novo conjunto de equações pode ser bem diferente daquele conjunto de padrão de equações de Boussinesq, especialmente em águas intermediárias e profundas.

Nwogu considerou o limite linear e escolhou  $z_{\alpha}$ , para obter o melhor ajuste entre a relação linear da dispersão linear do modelo e a relação da dispersão exata para uma ampla faixa de profundidade da água. A versão linearizada das equações, para uma

dimensão horizontal e com profundidade constante, pode ser expressa na forma dimensional como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial x} + \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) h^3 \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial x^3} = 0$$
 II-28

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} \right) = 0$$
 II-29

onde  $\alpha = (z_{\alpha}/h)^2/2 + (z_{\alpha}/h).$ 

Considerando uma onda periódica de pequena amplitude com frequência  $\omega$  e o número de onda k:

$$\eta = a_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad u_\alpha = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$$
 II-30

Ssubstituindo as equações II-30 nas equações II-28 e II-29 e permitindo que o discriminante seja nulo, de forma a obter uma solução não-trivial, a seguinte relação da dispersão é obtida:

$$C^{2} = \frac{\omega^{2}}{k^{2}} = gh\left[\frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)(kh)^{2}}{1 - \alpha(kh)^{2}}\right]$$
 II-31

onde C é a velocidade de fase.

A relação da dispersão exata para as ondas de Airy é dada por:

$$C^{2} = \frac{\omega^{2}}{k^{2}} = gh \frac{\tanh kh}{kh}$$
 II-32

A profundidade relativa é definida como a razão entre a profundidade da água, h e o comprimento de onda equivalente em águas profundas  $L_0 = 2\pi g/\omega^2$ . O limite de águas profundas corresponde a  $h/L_0 = 0.5$ . As diferentes equações de dispersão são todas equivalentes em águas relativamente rasas ( $h/L_0 < 0.02$ ), mas gradualmente se afastam

da solução exata com o aumento da profundidade. A velocidade no nível da água em repouso fornece o pior dos ajustes. Os coeficientes da aproximação de Padé obtidos a partir da expansão da série de Taylor para a tanh *kh* até a ordem  $O(\mu^4)$ , são:

$$\frac{\tanh kh}{kh} = 1 - \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{2}{15} (kh)^4 + O(\mu^6) = \frac{1 + \frac{1}{15} (kh)^2}{1 + \frac{2}{5} (kh)^2} + O(\mu^6)$$
 II-33

A relação linear da dispersão da forma padrão das equações de Boussinesq é somente precisa até a ordem  $O(\mu^2)$ :

$$\frac{\tanh kh}{kh} = 1 - \frac{1}{3} (kh)^2 + O(\mu^4) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2} + O(\mu^4)$$
 II-34

Assim, variando o valor de  $\alpha$ , é possível alterar consideravelmente a ordem de magnitude do termo do erro na relação da dispersão. Mesmo que as equações da continuidade e do momentum são somente precisas até a maior ordem na dispersão de frequência,  $O(\mu^2)$ , a relação de dispersão para o conjunto de equações pode ser precisa até a ordem  $O(\mu^4)$ . Um valor ótimo de  $\alpha$  para a faixa de variação de  $0 < h/L_0 < 0.5$  foi obtido através da minimização da soma dos erros relativos da velocidade de fase sobre toda essa faixa de variação. Isso fornece um valor de,  $\alpha = -0,390$  que, corresponde à velocidade em uma elevação  $z_{\alpha} = -0,53h$ .

A velocidade de fase normalizada para vários valores de  $\alpha$ , em função da profundidade relativa é mostrada na Figura II.1. É possível observar que a forma padrão das equações de Boussinesq ( $\alpha = -1/3$ ) apresenta um erro na velocidade de fase de 85% para um máximo de  $h/L_0 = 0,48$ . O novo valor de  $\alpha$  fornece um melhor aferimento da velocidade de fase do que a expansão da série de Taylor da tanh *kh* até a  $O(\mu^4)$ , apresentando um erro menor que 2% para toda a faixa de variação.



Figura II.1. Comparação das velocidades de fase normalizada para diferentes valores de  $\alpha$ . Fonte: Nwogu (1993).

A velocidade de grupo,  $C_g$ , que é associada com a propagação da energia da onda (ou o envelope da onda), é também importante nos estudos de propagação de ondas. A frente da onda, bem como grupos alternados de ondas grandes e pequenas que ocorrem em trens de ondas irregulares, viajam na velocidade de grupo. A velocidade de grupo para as equações de Boussinesq estendidas por Nwogu é dada por:

$$C_{g} = \frac{d\omega}{dk} = C \left\{ 1 - \frac{\frac{(kh)^{2}}{3}}{\left[1 - \alpha (kh)^{2}\right] \left[1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) (kh)^{2}\right]} \right\}$$
 II-35

Na Figura II.2 é mostrada as velocidades de grupo normalizada para diferentes valores de  $\alpha$  em um função da profundidade relativa ( $h/L_0$ ). É possível observar um desvio rápido das velocidades de grupo da relação exata do que as velocidades de fase da Figura II.1. O novo valor de  $\alpha$  tem um erro máximo de 12% para a velocidade de grupo (Figura II.2), enquanto que a forma padrão das equações de Boussinesq ( $\alpha = -1/3$ ) tem um erro de 100% em um máximo de  $h/L_0 = 0.48$ .



Figura II.2. Comparação das velocidades de grupo normalizada para diferentes valores de  $\alpha$ . Fonte: Nwogu (1993).

Em profundidades de águas intermediárias com  $h/L_0 < 0.3$ , as diferenças entre as velocidades de fase e de grupo do modelo de Boussinesq de Nwogu e da teoria de Airy se tornam insignificantes. Um valor de  $\alpha = -0.393$  fornece erros menores que 0.2% para a velocidade de fase e 1% para a velocidade de grupo em toda a faixa de variação de  $h/L_0$ .

Em uma forma comparativa entre o modelo de Nwogu e as equações padrões de Peregrine, e aplicarmos um critério de erro máximo de 1% para a velocidade de fase,  $\alpha = -1/3$  determina um valor máximo de  $h/L_0 = 0,12$ , enquanto que  $\alpha = -0,393$ determina um valor máximo de  $h/L_0 = 0,42$ . Aplicando o mesmo critério de erro para a velocidade de grupo tem-se o valor de  $h/L_0 = 0,06$  para  $\alpha = -1/3$  e o valor de  $h/L_0 = 0,30$  para  $\alpha = -0,393$ . Com isso o conjunto de equações de Nwogu é aplicável para profundidades da água de três a cinco vezes mais profundas do que poderia ser previamente modelada, para o mesmo nível de precisão, com as características da dispersão linear.