Silvano Antonio A. P. Junior

Teorema de Decomposição de Lévy-Itô

Vitória - Espírito Santo, Brasil
15 de Dezembro de 2014

Silvano Antonio A. P. Junior

Teorema de Decomposição de Lévy-Itô

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo PPG-MAT/UFES, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientador: Prof° Fábio Júlio da Silva Valentim .

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Fábio Júlio da Silva Valentim

Vitória - Espírito Santo, Brasil

15 de Dezembro de 2014

Silvano Antonio A. P. Junior

Teorema de Decomposição de Lévy-Itô/ Silvano Antonio A. P. Junior. – Vitória - Espírito Santo, Brasil, 15 de Dezembro de 2014-

72 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Fábio Júlio da Silva Valentim

Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 15 de Dezembro de 2014.

1. Processos de Lévy. 2. Integral de Itô. I. Fábio Júlio da Silva Valentim. II. Universidade Federal do Espírito Santo. III. Departamento de Matemática. IV. Processos de Lévy e a Integral de Itô

CDU 02:141:005.7

Para Rose e Silvano, com carinho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me concedido a vida e forças para realização deste trabalho.

Agradeço a meus pais, Rose e Silvano, pelo apoio incondicional. Vocês são meu grande exemplo de vida. Agradeço também a meus irmãos, Gabriel e Daniel, pelo afeto e paciência demonstrados para comigo. Agradeço aos amigos Nadia, Solon e Victor pelo companheirismo neste anos de mestrado e pelas excepcionais conversas de cantina.

Ao amigo Oscar, que durante este período se tornou um terceiro irmão para mim, agradeço pela paciência com os meus maus dias e pelo apoio e motivação dados ao longo deste trabalho.

Agradeço a Thamiris por ter sido motivo de alegria nos meus dias e por ser compreensiva com minha distância na fase final de elaboração deste trabalho.

Agradeço em especial ao Profº Fábio Júlio, pela paciência e disponibilidade que teve para comigo ao longo deste trabalho. E por não ter desistido de orientar este trabalho, mesmo frente às intempéries encontradas ao longo do caminho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Muito a aprender você ainda tem.

(Yoda)

Resumo

Neste trabalho procuramos apresentar uma introdução ao estudo dos processos de Lévy seguindo o apresentado por (TANKOV, 2003). Para tal faremos no uma breve revisão de alguns resultados da Teoria da Probabilidade necessários ao estudo. Em seguida passamos ao estudos dos processos de Poisson, das medidas aleatórias e medidas aleatórias de Poisson. Introduzimos os processos de Lévy e as distribuições infinitamente divisíveis, apresentamos a medida de Lévy e, por fim, o resultado principal deste texto, o Teorema de Decomposição de Lévy-Itô.

Palavras-chaves: Processos Estocásticos. Processos de Lévy. Teorema de Lévy-Itô. Processos de Poisson.

Abstract

In this work we present an introduction to the study of Levy processes following those presented in the book (TANKOV, 2003). For this we will briefly review some results of the theory of Probability needed to the study. Then we study the Poisson processes, random measures and Poisson random measures. Next we introduce the Lévy processes and infinitely divisible distributions, we present the measure of Lévy and then the main result of this work, the Decomposition Theorem of Lévy-Itô .

Key-words: Stochastic Processes. Lévy Prcesses. Lévy-Itô Theorem. Poisson Processes.

Sumário

Introdução

Neste trabalho pretendemos apresentar uma introdução ao estudo de uma importante classe de processos estocásticos com saltos, os processos de Lévy. Dando destaque ao processos de Poisson e processos de Poisson compostos e tendo como resultado principal o Teorema de Decomposição de Lévy-Itô.

Os processos de Lévy encontram grande aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Grosso modo, são processos que conjugam em um só o movimento browniano, que dentre outros está associado a modelagem de ruídos brancos, e os processos de Poisson, associados a modelos de contagem aleatória. Mais formalmente, temos o Teorema de Decomposição de Lévy-Itô que afirma que um processo de Lévy X_t pode ser escrito da seguinte forma

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\epsilon \tag{1}$$

onde

$$X_t^l = \int_{|x| \geq 1, s \in [0,t]} x J_X(ds \times dx) \quad \text{e}$$

é a parte do processo com saltos de tamanho maior que 1,

$$\tilde{X}_t^\epsilon = \int_{\epsilon \leq |x| < 1, s \in [0,t]} x(J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds).$$

a parte dos saltos com tamanhos menores que 1 e B_t um movimento Browniano.

Uma síntese disto é o que acontece no mercado de finanças. Mercados financeiros são objetos de estudo dos matemáticos há muito tempo. Historicamente um dos primeiros trabalhos nesta direção foi a tese doutoral de Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (Le Havre, 11 de março de 1870 — Saint-Malo, 26 de abril de 1946), orientado por Jules Henri Poincaré, intitulada *"Théorie de la spéculation"*. Bachelier introduziu a utilização em finanças do movimento browniano (descoberto pelo biólogo Robert Brown), que é a base de muitos dos modelos matemáticos usados atualmente em finanças, por exemplo a fórmula de Black-Scholes (1973). Desde então, inúmeros e importantes, são os trabalhos matemáticos com aplicações em finanças. Dentre estes, os estudos sobre processos estocásticos encontram grande destaque, devido a suas aplicações no mercado financeiro (ações, opções, risco de crédito).

Os primeiros modelos matemáticos para o mercado financeiro, como o de Black-Scholes, faziam forte uso do movimento Browniano. Os processos de Poisson, por possuírem a forte restrição de apresentarem apenas saltos de tamanho 1, eram pouco utilizados em modelos para o mercado. Contudo, como podemos observar na figura abaixo, o preço

Figura 1: Cotação das ações do Google (*GOOGL*) na NASDAQ no dia 29/08/2014

de uma ação durante um dia apresenta saltos. Tais saltos não podem ser representados em modelos que usam apenas do movimento Browniano, que é um processo estocástico com trajetórias quase certamente contínuas. Nesta direção, tem se tornado grande o interesse nos processos estocásticos com saltos para tais aplicações, como podemos ver em (HIGHAM, 2004) e (SCHOUTENS; CARIBONI, 2010).

Para cumprirmos o objetivo proposto iniciamos no Capítulo 1 com uma breve revisão sobre alguns resultados da Teoria da Probabilidade, apresentamos ao espaço das funções *cadlag* e a topologia de Skorohod, tendo como referência para esta parte o livro de (BILLINGSLEY, 2012). Ainda no primeiro capítulo tratamos um pouco sobre processos estocásticos e enunciamos o Teorema de Kac, que trata da independência de variáveis aleatórias em termos de suas funções características. No Capítulo 2 discorremos sobre os processos de Poisson e medidas aleatórias de Poisson. Apresentamos as principais propriedades dos processos de Poisson, os quais nos motivam a definir a medida de saltos de um processo de Poisson e logo em seguir estender tal definição para processos quaisquer, dando origem às medidas aleatórias de Poisson.

No terceiro capítulo deste trabalho apresentamos a definição dos processos de Lévy, que grosso modo são processos estocasticamente contínuos com incrementos independentes e estacionários. Apresentamos alguns exemplos de processos de Lévy, dentre os quais podemos destacar os processos de Poisson, processos de Poisson compostos e o movimento Browniano, ainda no início deste capítulo apresentamos também o modelo de Merton. Em seguida apresentamos a medida de Lévy de um processo e demonstramos o Teorema de Lévy Itô, dando ênfase na caracterização da parte de saltos do processo, seguindo a demonstração apresentada no Capítulo 3 de (TANKOV, 2003) e também o apresentado em (KALLENBERG, 2002), demonstramos em seguida uma de suas principais consequências, o Teorema de Lévy-Khitchine.

1 Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve revisão dos termos e teoremas essenciais ao decorrer deste trabalho. São relembrados alguns conceitos fundamentais da Teoria da Probabilidade, apresentamos alguns resultados básicos sobre variáveis aleatórias exponenciais e variáveis aleatórias de Poisson, que nos serão úteis ao estudo dos processos de Poisson no Capítulo 2. São também revisados resultados relacionados ao estudo de processos estocásticos, como os resultados sobre martingais, que nos serão de grande auxílio no estudo dos processos de Lévy a ser realizado no Capítulo 3.

Supomos que o leitor esteja acostumado, em nível introdutório com as Teorias da Probabilidade e da Medida. Aos que necessitem de maiores detalhes indicamos (CHUNG, 2001) e (ATHREYA; LAHIRI, 2006) como referências sobre Teoria de Probabilidade e (BARTLE, 1996) para Teoria da Medida. Sugerimos ainda, para exemplos e aplicações, o livro *Introduction to Probability Models* de (ROSS, 2014).

1.1 Espaços de Probabilidade

Começamos nossa revisão recordando alguns conceitos fundamentais da Teoria de Probabilidade.

Definição 1.1.1 (Espaço de Probabilidade)**.** *Um espaço de probabilidade é uma tripla* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, onde* Ω *é um conjunto não vazio,* $\mathcal{F}$ *uma* σ*-álgebra em* Ω *e* $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ *uma medida de probabilidade.*

No contexto da Teoria de Probabilidades o conjunto Ω será chamado *Espaço Amostral*, a σ-álgebra será chamada *Espaço de Eventos* e seus elementos serão chamados *eventos*.

Um outro objeto importante no decorrer deste trabalho são os vetores aleatórios. Para defini-los lembramos que dados um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e um espaço mensurável $(\Omega', \mathcal{F}')$ uma função $f : \Omega \to \Omega'$ é dita mensurável se para todo $A \in \mathcal{F}'$ tem-se $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Um caso particular, que será muito usado, é quando temos $\Omega' = \mathbb{R}^d$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, onde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ denota a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.1.2 (Vetor Aleatório)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* $X : \Omega \to \Omega'$ *uma função mensurável. Então* X *será chamado um vetor aleatório e usaremos, algumas vezes, a abreviação v.a. No caso* $d = 1$*,* X *será chamado uma variável aleatória.*

No contexto da Teoria da Probabilidade a integral de uma variável aleatória X com respeito a medida de probabilidade P é interpretada como a esperança, média, ou valor esperado, de X. Seguindo a notação clássica denotaremos a esperança da variável aleatória X por:

$$\mathbf{E}[X] = \int_\Omega X dP.$$

Outra quantidade importante associada a uma variável é aleatória é sua variância, definida por:

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(\mathbf{E}[X] - X)^2].$$

Em palavras a média $\mathbf{E}[X]$ nos indica uma tendência dos valores assumidos pela variável aleatória X e a variância $\mathbf{Var}[X]$ nos diz o quanto a variável pode se afastar dessa tendência.

Muitas propriedades probabilísticas de uma variável aleatória podem ser descritas em termos das propriedades analíticas de sua *função característica*, o que torna tal conceito muito útil ao estudo de variáveis aleatórias.

Definição 1.1.3. *A função característica de uma variável aleatória X em $\mathbb{R}^d$ é a função $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\Phi_X(z) = \boldsymbol{E}[\exp \langle iz, X\rangle], \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^d. \tag{1.1}$$

A função característica de uma variável aleatória caracteriza totalmente a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória. Com respeito a Teoria da Medida um conceito importante é o de *Medidas de Radon*.

Definição 1.1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de Ω. Uma medida de Radon em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma medida μ tal que μ é σ-aditiva e para todo conjunto compacto $B \in \mathcal{F}$ tem-se*

$$\mu(B) < \infty.$$

Um exemplo de medida Radon é dado pela medida de *Lebesgue* em $\mathbb{R}^d$. De fato, um boreliano compacto B possui volume finito.

De forma mais geral diremos que uma medida μ em $(\Omega, \mathcal{F})$ é σ-finita se pudermos escrever

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad \text{com } \mu(B_i) < \infty.$$

1.2 Variáveis Aleatórias Exponenciais

Um de nossos principais objetos de estudo neste trabalho serão os processos de Poisson, os quais se encontram intimamente relacionados com as variáveis aleatórias exponenciais e variáveis aleatórias de Poisson. No que segue apresentaremos uma sucinta revisão sobre as variáveis aleatórias exponenciais.

Definição 1.2.1. *Uma variável aleatória absolutamente contínua X é dita uma variável exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função densidade é dada por*

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & 0 \leq t < +\infty \\ 0 & t < 0 \end{cases}. \tag{1.2}$$

Conhecidas essas funções podemos agora calcular a média e a variância de uma variável exponencial.

Denotando por $\mathbf{E}[X]$ a esperança, ou média, da v.a. X temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx && (1.3) \\ &= \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx && (1.4) \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[-\frac{ue^{-\lambda u}}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right] && (1.5) \\ &= \frac{1}{\lambda}. && (1.6) \end{aligned}$$

A variância $\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$ de uma v.a. exponencial pode ser calculada como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[X] &= \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - 2\mathbf{E}[X]^2 + \mathbf{E}[\mathbf{E}[X]^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2. \end{aligned}$$

Integrando por partes com $u = \lambda x^2$ e $dv = e^{-\lambda x}$ temos $du = 2\lambda x dx$ e $v = \frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}$, assim

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx &= \lim_{r\to\infty} (\left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^r + 2\int_0^r xe^{-\lambda x}dx) \\ &= \lim_{r\to\infty} \left(\left[-x^2 e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x} \right]_0^r \right) \\ &= \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

portanto, $\mathbf{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Sendo X uma variável aleatória exponencial, observamos que para todo $t, s > 0$ temos

$$P[X > t + s | X > t] = \frac{\int_{t+s}^\infty \lambda e^{-\lambda y dy}}{\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda y}dy} = P[X > s]. \tag{1.7}$$

Esta propriedade das variáveis aleatórias exponenciais é conhecida como *Perda de Memória*. Essa propriedade nos ajuda a caracterizar as variáveis aleatórias exponenciais:

Teorema 1.2.1 (Perda de Memória)**.** *Seja X uma variável aleatória positiva tal que para todo $t, s > 0$ tem-se*

$$P[X > t + s | X > t] = P[X > s] \tag{1.8}$$

Então X tem distribuição exponencial.

Demonstração. Escrevemos $g(t) = P[X > t]$. Segue então, das hipóteses, que dados $s, t > 0$

$$\begin{aligned} g(s) = P[X > s] &= P[X > t + s | X > t] \\ &= \frac{P[X > t + s]}{P[X > t]} \\ &= \frac{g(t + s)}{g(t)} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$g(s)g(t) = g(t + s) \quad \text{para todo } s, t > 0. \tag{1.9}$$

Como a função g acima definida é decrescente, segue que a solução da equação funcional 1.9 é do tipo

$$g(s) = e^{-\lambda x},$$

onde $\lambda \geq 0$. Concluímos que X tem distribuição exponencial. □

1.3 Variáveis Aleatórias de Poisson

As variáveis aleatórias de Poisson foram estudadas inicialmente pelo matemático francês Siméon Denis Poisson. Tais variáveis estão relacionadas com a contagem da ocorrência de determinado evento num intervalo de tempo e são inúmeras suas aplicações, veja por exemplo (DOANE; SEWARD, 2013) pág. 232. De forma semelhante ao realizado na seção anterior, apresentamos uma breve revisão sobre as variáveis aleatórias de Poisson.

Definição 1.3.1. *Uma variável aleatória X tomando valores inteiros não negativos é dita uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ quando satisfaz*

$$P[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad \textit{para } k = 0, 1, 2... \tag{1.10}$$

Sendo X uma v.a. de Poisson podemos calcular explicitamente sua função distribuição de probabilidade. Com efeito, temos

$$F_X(y) = \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}. \tag{1.11}$$

onde $\lfloor y \rfloor$ denota o maior número inteiro n tal que $n < y$. Calcularemos agora a esperança $\mathbf{E}[X]$ e a variância $\mathbf{Var}[X]$ de uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP[X=k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda
\end{aligned}$$

portanto X tem média $\mathbf{E}[X] = \lambda$.

Para calcularmos a variância $\mathbf{Var}[X]$, observamos que como X assume apenas valores inteiros, temos que para qualquer função mensurável f a seguinte igualdade

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(b_k)P[X=b_k]. \tag{1.12}$$

Segue desta observação que

$$\mathbf{E}[X^n] = \sum_{k}^{\infty} k^n\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}. \tag{1.13}$$

Em particular temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^2] &= \sum_{k}^{\infty} k^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1}\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}\lambda^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1}\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\lambda^{i} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j}\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right) = \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[X] &= \mathbf{E}[(\mathbf{E}[X] - X)^2] \\
&= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Assim concluímos que uma variável aleatória de Poisson satisfaz

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{Var}[X] = \lambda.$$

1.4 Processos Estocásticos

Nesta seção revisamos a definição de processo estocástico e alguns conceitos relacionados, como os de filtração natural e e processos $\mathcal{F}_t$-adaptados, e alguns resultados sobre martingais.

Em matemática um processo estocástico é a contrapartida a um processo determinístico (ou sistema determinístico). Em vez de estudarmos uma única possibilidade para a evolução do processo ao longo do tempo (como é o caso, por exemplo, para soluções de uma equação diferencial), em um processo estocástico lidamos com certas indeterminações. Isso significa que, mesmo que conheçamos seu ponto de partida, há muitas possibilidades para o futuro do processo, contudo podemos saber se algumas trajetórias são mais prováveis e outras menos. Mais precisamente temos a seguinte definição:

Definição 1.4.1. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $I \subset \mathbb{R}$. Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $(X_t)_{t\in I}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexadas em I.*

Se I for um conjunto discreto, como $I = \{1, 2, ..., n, ...\}$ por exemplo, então diremos que X é um processo estocástico discreto, iremos escrever $(X_n)_{n\in I}$. Se I for um intervalo da reta, como $I = [0, T]$ ou $I = [0, \infty)$ por exemplo, então diremos que X é um processo estocástico em tempo contínuo e escreveremos $(X_t)_{t\in I}$.

Dados $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, diremos que as variáveis são independentes se dados conjuntos mensuráveis $A_1, ..., A_n$ pudermos verificar a seguinte igualdade:

$$P[X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, ..., X_n \in A_n] = \prod_{j=1}^{n} P[X_j \in A_j]. \tag{1.14}$$

Enunciamos a seguir um resultado muito útil na verificação da independência entre processos:

Teorema 1.4.1 (Teorema de Kac)**.** *As variáveis $X_1, ..., X_n$ são independentes se, e somente se, satisfazem*

$$\boldsymbol{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\langle u_j, X_j\rangle\right)\right] = \Phi_{X_1}(u_1)\cdot\Phi_{X_2}(u_2)\cdot ....\cdot\Phi_{X_n}(u_n). \tag{1.15}$$

Uma referência para este resultado é o livro de (APPLEBAUM et al., 2003), veja o Teorema 2.1.

Ao interpretarmos o índice t como uma variável temporal introduzimos um aspecto dinâmico aos modelos estocásticos. Nesse contexto, a medida que o tempo passa mais informações são reveladas ao observador. Traduzimos esta ideia na seguinte definição:

Definição 1.4.2 (Filtração). *Uma filtração em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *é uma família crescente de* σ*-álgebras* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *tal que para todo* $t \geq s \geq 0$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

A ideia intuitiva é que a informação conhecida sobre w em Ω disponível para nós no instante t são precisamente os valores de $X(w)$ para toda função $\mathcal{F}_t$-mensurável. Usualmente $\mathcal{F}_t$ será tomada como sendo a filtração natural:

Definição 1.4.3 (Filtração Natural). *A filtração natural (ou histórico) de um processo* X_t *é a coleção* $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$, *onde* $\mathcal{F}_t^X$ *é o completamento da* σ*-álgebra gerada pelos valores anteriores do processo*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \in [0,t]) \cup \mathcal{N}$$

onde $\mathcal{N}$ *denota o conjunto dos conjuntos nulos, isto é,*

$$\mathcal{N} = \{B \subset A | A \in \sigma(X_s, s \in [0,t]) \quad \textit{e } A \textit{ tem medida nula}\}.$$

Definição 1.4.4 (Processo $\mathcal{F}$-adaptado). *Um processo estocástico* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *é dito* $\mathcal{F}_t$*-adaptado a uma filtração* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *se, para cada* $t \in [0,T]$, *a variável* X_t *é* $(\mathcal{F}_t)$*-mensurável.*

Dada uma filtração $(\mathcal{F}_t)$ uma questão natural é se dada a informação conhecida sem $\mathcal{F}_t$ podemos determinar se um evento ocorreu $\{T \leq t\}$ ou não $\{T > t\}$. Se a resposta for afirmativa então diremos que T é um *tempo de parada*. Mais precisamente:

Definição 1.4.5 (Tempo de Parada). *Uma variável aleatória* $T \geq 0$ *é um tempo de parada para* $(\mathcal{F}_t)$ *se*

$$\forall t \geq 0, \quad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Observamos então que se T_1 e T_2 são dois tempos de parada então:

- $\inf\{T_1, T_2\}$,
- $\sup\{T_1, T_2\}$,
- $T_1 + T_2$.

serão também tempos de parada.

Uma classe importante de processos é a dos *Martingais*. Em palavras, um processo estocástico X_t é um martingal se a melhor previsão que temos de seu valor futuro X_s, $s > t$, for o seu valor atual. Temos a seguinte definição:

Definição 1.4.6 (Martingal). *Seja* $\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade equipado com uma filtração* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. *Um processo cadlag* $(X_t)_{t\geq 0}$ *é dito ser um martingal se*

1. X_t *é* $\mathcal{F}_t$ *adaptado;*

2. *$\boldsymbol{E}[|X_t|] < \infty$ para todo $t \in [0, T]$;*

3. *para todo $s > t$ tem-se $\boldsymbol{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = X_t$.*

Umas das principais propriedades dos martingais e descrita no seguinte resultado:

Lema 1.4.1. *Seja X_t um martingal, S e T tempos de parada para X_t, ambos assumindo um número finito de valores, e tais que $S \leq T$. Então*

1. *para qualquer $u \geq T$*
$$\boldsymbol{E}[X_u|\mathcal{F}_T] = X_T.$$

2. $$\boldsymbol{E}[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S$$

onde $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0\}$.

Demonstração. Sejam $0 \leq t_1 < ... < t_k = t$ uma ordenação dos valores assumidos por T. Para cada $A \in \mathcal{F}_T$ e $j > 1$ temos

$$\begin{aligned} A \cap [T = t_1] &= A \cap [T \leq t_1] \in \mathcal{F}_{t_1} \\ A \cap [T = t_j] &= A \cap [T \leq t_j] \cap [T \leq t_{j-1}]^c \in \mathcal{F}_{t_j} \end{aligned}$$

Portanto para $u \geq T$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_T I_A] &= \mathbf{E}[\sum_{j=1}^{k} X_T I_{[T=t_j]\cap A}] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}[X_{t_j} I_{[T=t_j]\cap A}] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}[I_{[T=t_j]\cap A} \mathbf{E}[X_u|\mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}[\mathbf{E}[I_{[T=t_j]\cap A} X_u|\mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \sum_{j=i}^{k} \mathbf{E}[I_{[T=t_j]} I_A X_u] = \mathbf{E}[X_u I_A] \end{aligned}$$

segue que $\mathbf{E}[X_u|\mathcal{F}_T] = X_T$. Se $S \leq T$ então

$$X_S = \mathbf{E}[X_u|\mathcal{F}_S] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_u|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] = \mathbf{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$$

donde concluímos a demonstração do item (2) $\square$

A seguir enunciamos um resultado que explicita a relação entre processos com incrementos independentes e martingais.

Proposição 1.4.1. *Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo tomando valores reais e com incrementos independentes. Então:*

1. $\left(\frac{e^{iu\cdot X_t}}{\boldsymbol{E}[e^{iu\cdot X_t}]}\right)_{t\geq 0}$ *é um martingal* $\forall u \in \mathbb{R}$.
2. *Se para algum* $u \in \mathbb{R}$ *tem-se* $\boldsymbol{E}[e^{iu\cdot X_t}] < \infty$ *para todo* $t \geq 0$ *então* $\left(\frac{e^{u\cdot X_t}}{\boldsymbol{E}[e^{u\cdot X_t}]}\right)_{t\geq 0}$ *é um martingal.*
3. *Se* $\boldsymbol{E}[X_t] < \infty$ *para todo* $t \geq 0$ *então* $M_t = X_t - \boldsymbol{E}[X_t]$ *é um martingal (e também um processo com incrementos independentes).*
4. *Se* $\boldsymbol{Var}[X_t] < \infty$ *para todo* $t \geq 0$ *então* $(M_t)^2 - \boldsymbol{Var}[(M_t)^2]$ *é um martingal.*

Para a demonstração dos itens 1 e 2 veja (PROTTER, 2004) Capítulo 1 Teorema 39. Para os itens 3 e 4 veja o Capítulo 12 de (WILLIAMS, 1991).

1.5 A Topologia de Skorohod

No estudo de alguns processos estocásticos necessitamos lidar com funções com *saltos*. Ao lidar com tais funções podemos perceber que a métrica da convergência uniforme não é tão sensível ao que se passa como ocorria no espaço de funções contínuas. Se pensarmos, por exemplo, nas funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) \equiv 1$ e

$$g_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 1 & \epsilon < t \leq 1 \end{cases} \tag{1.16}$$

essas funções são distintas apenas em um intervalo de tamanho $\epsilon > 0$, o qual pode ser tomado tão pequeno quanto se queira. Isto nos leva a pensar que tais funções são parecidas ou próximas. Mas com a métrica da convergência uniforme ocorre que

$$\|f - g_\epsilon\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g_\epsilon(t)| = 1 \tag{1.17}$$

independente do ϵ que tomemos.

Tendo isto em mente construiremos, para um conjunto especial de funções com saltos, uma métrica que retrate melhor este tipo de situação.

Seja $\mathcal{D} := \mathcal{D}([0,1], \mathbb{R})$ o conjunto das funções reais f com domínio $[0,1]$ que são contínuas a direita e possuem limites a esquerda. Mas precisamente, $\mathcal{D}$ é o conjunto das funções reais que cumprem as seguintes condições:

1. para $t \in [0,1)$, $f(t+) = \lim_{s\downarrow t} f(s)$ exite e $f(t+) = f(t)$;
2. para $t \in (0,1]$, $f(t-) = \lim_{s\uparrow t} f(s)$ existe.

As funções pertencentes ao conjunto $\mathcal{D}$ são chamadas funções *cadlag* (um acrônimo de *"continue à droite, limite à gauche"*). Tal conjunto de funções possui propriedades interessantes. Na proposição a seguir destacamos algumas:

Proposição 1.5.1. *Se $f \in D$, valem as seguintes afirmações:*

1. *o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável;*
2. *dado $\epsilon > 0$ o conjunto dos pontos tais que $|f(t) - f(t-)| > \epsilon$ é finito.*

Demonstração. Observamos que é necessário apenas mostrar que as descontinuidades de f são enumeráveis nos intervalos da forma $[0,n]$ com $n \in \mathbb{N}$.

A existência dos limites laterais nos garante que para todo t e N existe um $\epsilon_{t,N} > 0$ tal que :

$$\forall t_1, t_2 \text{ tais que } t - \epsilon_{t,N} < t_1, t_2 < t + \epsilon_{t,N} \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \frac{1}{N}$$

Como $[0,n]$ é compacto, existe uma quantidade finita de intervalos da forma $(t - \epsilon_{t,N}, t + \epsilon_{t,N})$ que cobre $[0,n]$.

Isto é, exceto para uma quantidade finita de pontos (a saber os centros da bolas da cobertura), temos que não existem descontinuidades de tamanho maior que $\frac{1}{N}$ em $[0,n]$. Assim para cada N, o conjunto:

$$\left\{ t \in [0,n] : |\lim_{s\to t^+} f(s) - \lim_{s\to t^-} f(s)| > \frac{1}{N} \right\}.$$

é finito. Segue que o conjunto de descontinuidades de x em $[0,n]$ é dado por:

$$\left\{ t \in [0,n] : \lim_{s\to t^+} f(s) \neq \lim_{s\to t^-} f(s) \right\} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ t \in [0,n] : |\lim_{s\to t^+} f(s) - \lim_{s\to t^-} f(s)| > \frac{1}{N} \right\}$$

que é um conjunto enumerável, temos portanto:

$$\left\{ t \in [0,\infty) : \lim_{s\to t^+} f(s) \neq \lim_{s\to t^-} f(s) \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ t \in [0,n] : \lim_{s\to t^+} f(s) \neq \lim_{s\to t^-} f(s) \right\}$$

e, portanto, concluímos a demonstração do primeiro item.

Para demonstrarmos o segundo item consideremos o conjunto

$$A = \{ t \in [0,1] : \quad f \text{ possui um salto em } t \text{ de tamanho maior que } \epsilon \}.$$

Se A contém uma quantidade infinita de pontos, então existe uma sequência $\{t_n\} \subset A$ tal que $t_n \to t \in [0,1]$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n \downarrow t$. Como f é *cadlag*, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t'| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Em particular, exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos

$$\Rightarrow 0 < (t_n - t) < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_n)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Por outro lado, fixado $n > n_0$, sabemos que t_n é, por hipótese, um ponto de salto maior que ϵ. Assim, existe $\delta_n > 0$ de tal que

$$t' \in (t, t_n) \bigcap (t_n - \delta_n, t_n) \Rightarrow |f(t') - f(t_n)| > \frac{\epsilon}{2}.$$

Temos então que

$$\frac{\epsilon}{2} < |f(t') - f(t_n)| \leq |f(t') - f(t)| + |f(t) - f(t_n)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.$$

O que é uma contradição. Concluímos assim o desejado no item 2 da proposição. □

Duas funções f e g estão próximas na topologia uniforme usada em C^0, espaço das funções continuas, se o gráfico de f pode ser levado no gráfico de g por uma pequena perturbação uniforme nas "ordenadas". Em $\mathcal{D}$ permitiremos também pequenas mudanças na escala do tempo.

Seja Λ o conjunto das funções bijetivas contínuas $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ que são estritamente crescentes. Se $\lambda \in \Lambda$ então $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(1) = 1$. Para cada f e g em $\mathcal{D}$ definimos $d(f,g)$ como sendo o ínfimo dos números positivos ϵ para os quais existe $\lambda \in \Lambda$ satisfazendo

$$\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t| < \epsilon \tag{1.18}$$

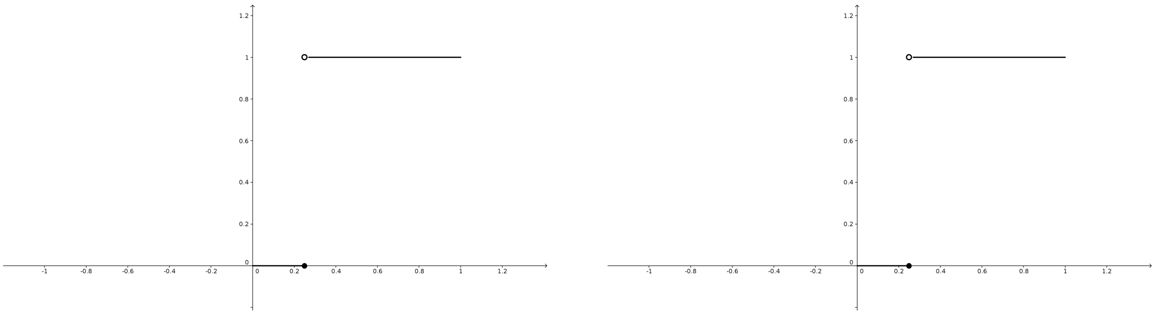
e

$$\sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(\lambda(t))| < \epsilon. \tag{1.19}$$

Para expressar isso de forma mais compacta, denotemos por I a aplicação identidade em $[0,1]$. Ficamos então com a seguinte equação:

$$d(f,g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max\{\|\lambda - I\|, \|f - g\lambda\|\}. \tag{1.20}$$

Proposição 1.5.2. *A aplicação $d : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ acima definida é uma métrica em $\mathcal{D}$.*



(a) $f(t)$ (b) $g(t)$

Figura 2: Funções distantes na métrica da convergência uniforme.

Demonstração. Primeiramente observamos que é imediato da definição que $d(f,g) \geq 0$ para todo $f,g \in \mathcal{D}$. por outro lado se $d(f,g) = 0$ devemos ter necessariamente $f(t) = g(t)$ ou $f(t) = g(t-)$, como f e g são *cadlag* temos em qualquer caso que $f(t) = g(t)$. Se $\lambda \in \Lambda$ então $\lambda^{-1} \in \Lambda$. Observamos que

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(\lambda(t))| = \sup_{t\in[0,1]} |f(\lambda^{-1}(t)) - g(t)| < \epsilon. \tag{1.21}$$

donde segue que $d(f,g) = d(g,f)$. Por último nos resta verificar a propriedade da desigualdade triangular. Para tal observe que se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{D}$ então a composição $\lambda_1\lambda_2 \in \mathcal{D}$. Tem-se então que

$$\sup ||\lambda_2\lambda_1 t - t|| \leq \sup ||\lambda_1 t - t|| + \sup ||\lambda_2 t - t||$$

e

$$\sup ||f(t) - h(\lambda_2\lambda_1 t)|| \leq \sup ||f(t) - g(\lambda_1 t)|| + \sup ||g(t) - h(\lambda_t)||.$$

logo d satisfaz as condições necessárias para que seja uma métrica. □

Afim de melhor entender o funcionamento desta métrica apresentamos um exemplo:

Exemplo 1.5.1. *Consideremos as seguintes funções :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.22}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

Nosso objetivo agora será encontrar uma mudança na escala do tempo, isto é, uma função $\lambda \in \Lambda$ tal que $\|f - g \circ \lambda\| = 0$ e observarmos qual o preço $\|\lambda - I\|$ que pagaremos por isso. Em busca de nosso objetivo seria desejável que x e y saltem ao mesmo tempo, para tal bastaria que tivéssemos $\lambda(t) = \frac{t}{2}$ para $t \in [0, \frac{1}{2})$. Assim definiremos λ em $(\frac{1}{2}, 1]$ de modo que $\lambda \in \Lambda$. Chegamos assim a

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \frac{3t-1}{2} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{1.24}$$

observe que λ assim definida é contínua e crescente em $[0, 1]$, logo $\lambda \in \Lambda$. Desta forma temos $\|f - g \circ \lambda\| = 0$ e $\|\lambda - I\| = \frac{1}{4}$. Segue $d(x, y) \leq \frac{1}{4}$. Além disso, para qualquer $\lambda \in \Lambda$ que satisfaça $\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ teremos que $\|\lambda - I\| \geq \frac{1}{4}$. Assim

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \max\{\|\lambda - I\|, \|f - g\lambda\|\} \geq \frac{1}{4},$$

segue então que $d(f, g) = \frac{1}{4}$.

Alguns espaços métricos possuem a interessante propriedade de que se uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy então ela é convergente. Dizemos neste caso que o espaço métrico é *completo*. Mostraremos através de um exemplo que o espaço $\mathcal{D}$ munido da métrica d não é completo.

Exemplo 1.5.2 ($\mathcal{D}$ Não é Completo)**.** *Consideremos as funções $f_n = I_{[0, \frac{1}{2^n})}$. Supondo que $\lambda_n(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, se λ for linear em $[0, \frac{1}{2^n}]$ então $\|f_{n+1}\lambda_n - f_n\| = 0$ e $\|\lambda_n - I\| = \frac{1}{2^{n+1}}$. Temos portanto que*

$$d(f_n, f_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{1.25}$$

Usando da desigualdade triangular temos que para $p \in \mathbb{N}$ fixado, vale:

$$d(f_n, f_{n+p}) \leq \frac{1}{2^n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^p})$$

donde segue que a sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy. Por outro lado $f_n(t) \to 0$ para cada $t > 0$, e $d(f_n, 0) = 1$ para todo $n \geq 1$.

É possível ainda construir uma métrica, equivalente a métrica acima definida, nos espaço das funções *cadlag* de forma que este espaço seja completo. Indicamos ao leitor interessado a dissertação de mestrado de (OLIVEIRA, 2007).

2 Processos de Poisson e Medidas Aleatórias

Neste capítulo introduzimos os processos de Poisson, que nos serão de grande importância ao entendimento dos saltos de um processo de Lévy. Introduzimos inicialmente, de maneira construtiva, os processos de Poisson e suas propriedades. Em seguida, mostraremos que os processos de Poisson podem ser vistos como processos de contagem, o que não acontece com sua versão de média zero, os processos de Poisson compensados. A partir dos processos de contagem construiremos as medidas aleatórias de Poisson.

2.1 Processos de Poisson

A distribuição de Poisson foi introduzida por Siméon Denis Poisson em 1834. Desde então tem sido assunto de diversas publicações e ferramenta útil à diversas aplicações práticas, como estimar o número de infecções por vírus num servidor de arquivos em um centro de dados durante um período de tempo ou o número de desligamentos de motores de uma aeronaves Airbus 330 em 100.000 horas de voo, (DOANE; SEWARD, 2013) pág. 232. Neste capítulo apresentamos os processos de Poisson, em seguida passamos ao estudo das medidas aleatórias de Poisson e alguns de seus principais resultados. Nossas principais referenciais são (TANKOV, 2003), (DURRETT, 2010) e (ROSS, 2014).

A ideia principal de um processo de Poisson é contar eventos que ocorrem em tempos aleatórios, quando tais tempos aleatórios possuem distribuição exponencial. Neste sentido é essencial observar que as variáveis aleatórias exponenciais tem forte relação com a distribuição de Poisson. Mais precisamente:

Proposição 2.1.1. *Sejam $(\tau_i)_{i\geq 1}$ variáveis aleatórias exponenciais com parâmetro $\lambda > 0$ independentes $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$. Então para cada $t > 0$ a variável aleatória*

$$N_t = \inf\{n \geq 1 : T_{n+1} > t\} \tag{2.1}$$

tem distribuição de Poisson com parâmetro λt, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$P[N_t = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{n!}. \tag{2.2}$$

Demonstração. Mostraremos, por indução, que a densidade de probabilidade de T_n é dada por:

$$f_{T_n} = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}.$$

Para $n = 1$ temos $T_1 = \tau_1$, e $f_{\tau_1} = \lambda e^{-\lambda t}$. Suponhamos que a afirmação seja válida para $n-1$, temos então:

$$\begin{aligned} f_{T_n} &= \int_0^\infty f_{\tau_n}(t-s) f_{T_{n-1}}(s)ds \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)} \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-2}}{(n-2)!} ds \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Observe que isto nos diz que T_n tem distribuição Gamma com parâmetros λ e n, isto é, $T_n \sim \Gamma(\lambda, n)$. Assim, como T_n e τ_{n+1} são independentes, obtemos:

$$\begin{aligned} P[N_t = n] &= P[T_n \le t < T_n + \tau_{n+1}] \\ &= P[(T_n, \tau_{n+1}) \in B] \end{aligned}$$

onde $B = \{(x, y) \mid 0 \le x \le t < x + y\}$. Segue que

$$\begin{aligned} P[N_t = n] &= \int_0^t \int_{t-x}^\infty \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} dydx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t \int_{t-x}^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dydx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \left(\int_0^t \frac{x^{n-1} e^{-\lambda t}}{\lambda} dx \right) \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n\lambda} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Concluímos então que o processo N_t acima definido tem distribuição de Poisson com parâmetro λt. □

Motivados por esta proposição definimos:

Definição 2.1.1. *Sejam $(\tau_i)_{i \ge 1}$ variáveis aleatórias exponenciais com parâmetro λ independentes e $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. O processo definido por*

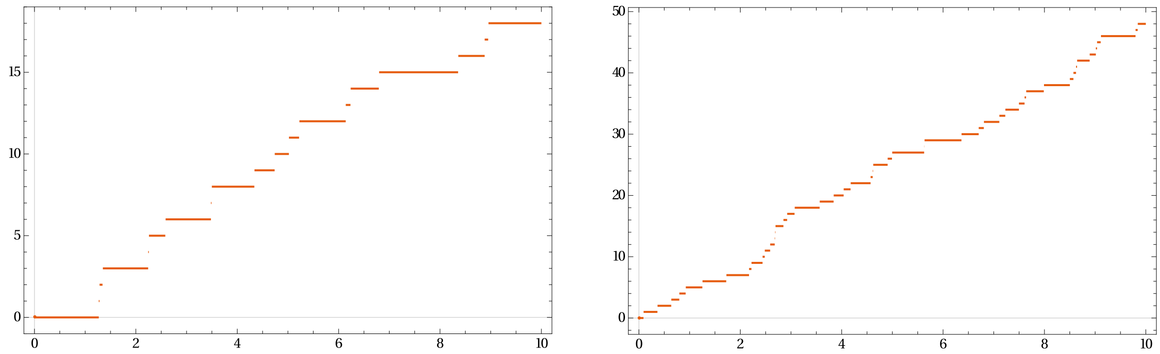
$$(N_t)_{t \ge 0} = \inf\{n \ge 1 : T_{n+1} > t\} \quad \textit{para } t > 0 \tag{2.3}$$

é chamado processo de Poisson com intensidade λ.

Observamos que podemos escrever o processo $(N_t)_{t \ge 0}$ de uma outra forma. A saber

$$(N_t)_{t \ge 0} = \sum_{n \ge 1} I_{[T_n \le t]}. \tag{2.4}$$

No que segue denotaremos o processo $(N_t)_{t \ge 0}$ por N_t e apresentamos algumas de suas principais propriedades.



(a) $\lambda = 2$. (b) $\lambda = 5$.

Figura 3: Trajetórias típicas de um processo de Poisson.

Proposição 2.1.2. *Seja N_t um processo de Poisson. Valem as seguintes propriedades.*

1. *Para cada $t \geq 0$, N_t é quase certamente finito.*
2. *Para cada $\omega \in \Omega$ a aplicação $\psi_\omega : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $\psi_\omega(t) = N_t(\omega)$ é constante por partes e cresce com saltos de tamanho 1.*
3. *N_t é cadlag.*
4. *Para cada $t \geq 0$, $N_{t^-} = N_t$ com probabilidade 1.*
5. *N_t é contínuo em probabilidade (ou estocasticamente contínuo), isto é, para todo $t > 0$ e $\epsilon > 0$ tem-se:*
$$\lim_{s \to t} P[|N_s - N_t| \geq \epsilon] = 0.$$
6. *Para qualquer $t > 0$, N_t tem distribuição de Poisson com parâmetro λt, isto é,*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ P[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$
7. *A função característica de N_t é dada por*
$$\Phi_{N_t}(z) = \boldsymbol{E}[e^{izN_t}] = \exp\{\lambda t(e^{iz} - 1)\}, \ \ \forall z \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$
8. *N_t tem incrementos estacionários, isto é, para $t > s$, $N_t - N_s$ tem a mesma distribuição que N_{t-s}.*
9. *N_t tem incrementos independentes, isto é, para $t_1 < ... < t_n$, $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, ..., N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1}$ são variáveis aleatórias independentes.*

Demonstração. (1) Para a demonstração deste item consideremos o conjunto
$$\Omega_1 = \left\{ \omega \in \Omega; \frac{T_n}{n} \to \frac{1}{\lambda} \right\}.$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números $P[\Omega_1] = 1$. Fixados $\omega \in \Omega_1$ e $t \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ $T_n(\omega) > t$, segue que $N_t(\omega) < \infty$. Portanto $P[N_t < \infty] \geq P[\Omega_1] = 1$. Assim N_t é quase certamente finito.

(2) Temos da expressão em 2.4 que N_t é constante nos intervalos (T_{n-1}, T_n) e além disso N_t cresce por saltos de tamanho 1 nos pontos T_n.

(3) Lembramos inicialmente que dadas constantes $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ e uma função contínua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e uma partição $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$, a função

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n} c_i I_{[t_i, t_{i+1})}$$

é *cadlag*. Se $N_t(w)$ é limitado, então existe $k \in \mathbb{N}$ talque $N_t = \sum_{n\geq 1} I_{[t\geq T_n]} = \sum_{n\geq 1}^{k} I_{[t\geq T_n]}$. Como N_t é quase certamente finito, segue o resultado desejado.

(4) Dado $\omega \in \Omega$, os pontos de descontinuidade de $N_t(\omega)$ são $\{T_n(\omega), n \geq 1\}$. Por outro lado dado t, temos

$$P[t \in \{T_n(\omega), n \geq 1\}] = 0.$$

Assim, quase certamente t não será um ponto de descontinuidade. Portanto que $N_{-t} = N_t$ com probabilidade 1.

(5) Para demonstrar que N_t é contínuo em probabilidade, basta observar que se t_0 é um ponto onde N_t não é contínuo em probabilidade então, como N_t tem trajetórias não decrescentes, existe um conjunto A mensurável com $P[A] > 0$ tal que em A tem-se $N_{t_0} - N_{t_0-} \geq 1$. Por outro lado, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{T_n = t_0\}$, mas $P[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{T_n = t_0\}] = 0$ e portanto $P[A] = 0$, absurdo. Segue que N_t e contínuo em probabilidade.

(6) Foi demonstrado em 2.1.1.

(7) Como N_t assume apenas valores inteiros temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{\langle iz, N_t\rangle}] &= \sum_{k\geq 0} e^{izk} P[N_t = k] \\
&= \sum_{k\geq 0} e^{izk} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{k\geq 0} \frac{(e^{iz}\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda t} \exp\{\lambda t e^{iz}\} \\
&= \exp\{\lambda t(e^{iz} - 1)\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(8) Para demonstrar o item 8 observamos inicialmente que dados números inteiros $n \geq 0$ e $m \geq 1$ então $(T_{n+1} - t, \tau_{n+2}, ..., \tau_{n+m})$ condicionado ao evento $\{N_t = n\}$ tem mesma

distribuição de probabilidade que $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m)$. Com efeito, dados $s_1, s_2, ..., s_m$ não negativos temos:

$$\begin{aligned}
&P[T_{n+1} - t > s_1, \tau_{n+2} > s_2, ..., \tau_{n+m} > s_m \mid N_t = n] \\
&= \frac{P[T_n \leq t, T_{n+1} > s_1, \tau_{n+2} > s_2, ..., \tau_{n+m} > s_m]}{P[N_t = n]} \\
&= \frac{P[T_n \leq t, T_{n+1} > s_1] P[\tau_{n+2} > s_2, ..., \tau_{n+m} > s_m]}{P[N_t = n]} \\
&= P[T_n - t > s_1 \mid N_t = n] P[\tau_{n+2} > s_2, ..., \tau_{n+m} > s_m] \\
&= P[\tau_1 > s_1] P[\tau_2 > s_2, ..., \tau_m > s_m] \\
&= P[\tau_1 > s_1, \tau_2 > s_2, ..., \tau_m > s_m].
\end{aligned}$$

Observe que nas igualdades acima usamos a propriedade de perda de memória das variáveis exponenciais e também que as mesmas são independentes.

A partir desta informação podemos calcular, para s,t > 0, $P[N_{t+s} - N_t = m]$. Temos:

$$\begin{aligned}
P[N_t = n, N_{t+s} - N_t = m] &= P[N_t = n] P[N_{t+s} = m \mid N_t = n] \\
&= P[N_t = n] P[T_{m+n} \leq t + s < T_{m+n+1} \mid N_t = n]
\end{aligned}$$

Aqui usaremos o demonstrado acima, observamos então que podemos reescrever o evento $\{T_{m+n} \leq t + s < T_{m+n+1}\}$ da seguinte forma:

$$\{T_{n+1} - t + \tau_{n+2} + ... + \tau_{n+m} \leq s < T_{n+1} - t + \tau_{n+2} + ... + \tau_{n+m+1}\}$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned}
P[N_t = n, N_{t+s} - N_t = m] &= P[N_t = n] P[T_m \leq s < T_{m+1}] \\
&= P[N_t = n] P[N_s = m].
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$P[N_{t+s} - N_s = m] = P[N_s = m]$$

(9) Para demonstrar este item seguiremos uma linha semelhante a adotada no item anterior. Começamos por observar que dados $0 \leq t_0 < t_1, ..., t_k$ temos:

$$\begin{aligned}
&P[N_{t_0} = n_0, N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, ..., N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k] \\
&= P[N_{t_0} = n_0, N_{t_1} = n_0 + n_1, ..., N_{t_k} = n_0 + ... + n_k] \\
&= P[N_{t_0} = n_0] P[N_{t_1 - t_0} = n + 1, ... N_{t_k - t_{k-1}}]
\end{aligned}$$

Repetindo este mesmo procedimento k vezes obtemos

$$
\begin{aligned}
P[N_{t_0} = n_0, N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, ..., N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k] \\
= P[N_{t_0} = n_0]P[N_{t_1 - t_0} = n_1]...[N_{t_k - t_{k-1}} = n_k] \\
= P[N_{t_0} = n_0]P[N_{t_1} - N_{t_0} = n_1]...P[N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k]
\end{aligned}
$$

Obtendo assim a independência dos incrementos. Observe que na última igualdade acima, usamos o item 8.

□

Ressaltamos ao leitor que também é possível obter o processo de Poisson partindo de suas propriedades e garantindo a existência de um processo que as satisfaça. De forma mais clara, ao procurarmos por um processo N_t que satisfaça as seguintes propriedades :

Incrementos Estacionários As variáveis $N_{t+s} - N_s$ e N_t tem mesma distribuição.

Incrementos Independentes Dados $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ as variáveis $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ são independentes.

Saltos N_t é constante por partes e cresce por saltos de tamanho 1.

obtemos um processo que possui distribuição de Poisson. Para mais detalhes veja o Capítulo 1 Seção 3 de (JAMES, 2004).

2.2 Processos de Contagem

Um processo de Poisson $(N_t)_{t \leq 0}$ é, de certa forma, um processo que conta o número de tempos aleatórios $\{T_n, n \leq 1\}$ que ocorrem em $[0, t]$, onde e T_n é a soma de uma sequência de variáveis aleatórias exponenciais i.i.d. De forma mais geral dado uma sequência de tempos aleatórios $\{T_n, n \leq 1\}$ com $P[T_n \to \infty] = 1$, podemos definir um processo de contagem associado, mais precisamente:

$$X_t = \sum_{n \leq 1} I_{[t \leq T_n]} = \#\{n \leq 1, T_n \leq t\}.$$

Assim como o processo de Poisson o processo X_t, acima definido, conta o número de tempos aleatórios T_n que ocorrem em $[0, t]$. Observamos ainda que a condição $P[T_n \to \infty] = 1$ se faz necessária para que, com probabilidade 1, o processo X_t esteja bem definido para qualquer $t \geq 0$. Temos da definição que o processo X_t, assim como os processos de Poisson, é um processo *cadlag* com trajetórias constantes por partes que crescem por saltos de tamanho 1. De forma mais geral, diremos que um processo X_t é um processo de contagem se satisfaz as seguintes propriedades:

- $X_t \in \mathbb{N}$;
- se $s \leq t$ então $X_s \leq X_t$.

Os processos de Poisson nos fornecem um exemplo de processo de contagem. Na verdade os processos de Poisson e os processos de contagem possuem uma forte relação. O lema a seguir mostra que para que um processo de contagem seja um processo de Poisson é suficiente que ele tenha incrementos independentes e estacionários.

Lema 2.2.1. *Seja X_t um processo de contagem com incrementos independentes e estacionários. Então X_t é uma processo de Poisson.*

Demonstração. Iniciamos a demonstração verificando que os instantes onde as trajetórias de um processo de contagem mudam de valor são exponencialmente distribuídos.

Seja $T_n = \inf\{t \geq 0, X_t \geq n\}$. Definimos, para $n \geq 1$

$$Y_n = T_n - T_{n-1}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
P[Y_1 > t + s | Y_1 > t] &= P[X_{t+s} = 0 | X_t = 0] \\
&= P[X_{t+s} - X_t = 0 | X_t = 0] \\
&= P[X_{t+s} - X_t = 0] \\
&= P[X_s = 0] \\
&= P[Y_1 > s]
\end{aligned}$$

ou seja, Y_1 é uma variável aleatória com perda de memória. Segue do Teorema 1.2.1 que Y_1 tem distribuição exponencial.

Mostraremos agora $(X_{t+Y_1} - X_{Y_1})_{t \geq 0}$ é independente de Y_1 e tem mesma distribuição que X_t. Para tal, observe que Y_1 é um tempo de parada para X_t, visto que o evento $\{Y_1 \leq t\} = \{X_t \geq 1\}$ não depende da trajetória de X após t. Definimos $f(t) = \mathbf{E}[e^{iuX_t}]$ para $u \in \mathbb{R}$ fixado . Como X_t tem incrementos independentes e estacionários tem-se para todo $s, t > 0$, que

$$\begin{aligned}
f(s+t) &= \mathbf{E}[e^{iuX_{s+t}}] = \mathbf{E}[e^{iu(X_{s+t} - X_s) + X_s)}] \\
&= \mathbf{E}[e^{iu(X_{s+t} - X_s)} e^{iuX_s}] = \mathbf{E}[e^{iu(X_{s+t} - X_s)}]\mathbf{E}[e^{iuX_s}] \\
&= \mathbf{E}[e^{iuX_t}]\mathbf{E}[e^{iuX_s}] = f(s)f(t)
\end{aligned}$$

e além disto, o processo

$$M_t = \frac{e^{iuX_t}}{f(t)}$$

é, pela Proposição 1.4.1, um martingal. Seja $Y_1^n = \inf\{n, Y_1\}$. Como Y_1^n é um tempo de parada limitado, obtemos

$$\mathbf{E}[e^{iu(X_{Y_1^n+t}-X_{Y_1^n})+ivY_1^n}|\mathcal{F}_{Y_1^n}] = \frac{f(t+Y_1^n)}{f(Y_1^n)}e^{ivY_1^n} = f(t)e^{ivY_1^n},$$

portanto

$$\mathbf{E}[e^{iu(X_{Y_1^n+t}-X_{Y_1^n})+ivY_1^n}] = \mathbf{E}[e^{iuX_t}]\mathbf{E}[e^{ivY_1^n}]$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, o Teorema da Convergência Dominada, veja o Teorema 7.2 e o Corolário 7.3 em (BARTLE, 1996), nos garante que

$$\mathbf{E}[e^{iu(X_{Y_1+t}-X_{Y_1})+ivY_1}] = \mathbf{E}[e^{iuX_t}].\mathbf{E}[e^{ivY_1}]$$

Assim concluímos, pelo Teorema 1.4.1, que $X_{Y_1+t} - X_{Y_1}$ é independente de Y_1 e tem a mesma distribuição de X_t. Segue que Y_2 é independente de Y_1 e tem distribuição exponencial. Concluímos a prova por indução.

□

2.3 Processo de Poisson Compensado

Definiremos agora uma versão com média 0 do Processo de Poisson N_t por

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t. \tag{2.7}$$

onde λ é a intensidade dos saltos de N_t.

De forma semelhante ao obtido para processos de Poisson, temos:

Proposição 2.3.1. *A função característica de $\tilde{N}_t$ é dado por*

$$\Phi_{\tilde{N}_t}(z) = \exp[\lambda t(e^{iz} - 1 - iz)] \tag{2.8}$$

Demonstração. Como $\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$, onde N_t é um processo de Poisson com parâmetro λ temos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[e^{iz\tilde{N}_t}] &= \mathbf{E}[\exp\{iz(N_t - \lambda t)\}] \\ &= e^{-iz\lambda t}\mathbf{E}[\exp(izN_t)] \\ &= \exp[\lambda t(e^{iz} - 1 - iz)]\end{aligned} \tag{2.9}$$

□

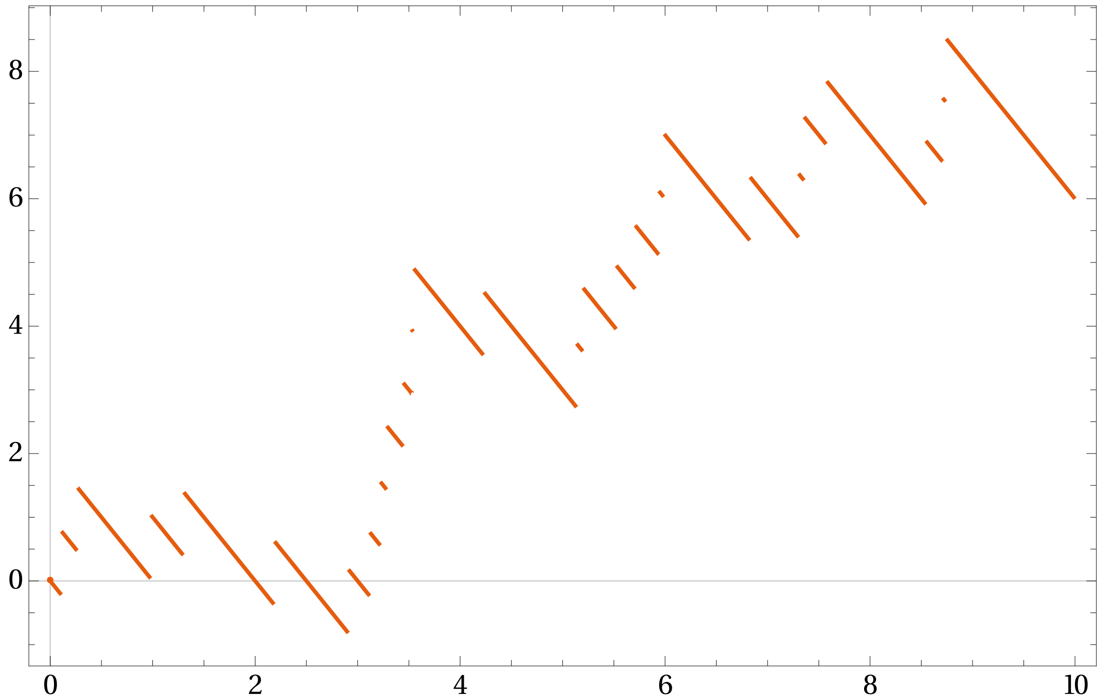


Figura 4: Trajetória típica de um processo de Poisson compensado com $\lambda = 2$.

Uma propriedade interessante dos processos de Poisson compensados é que eles são martingais com respeito a filtração gerada pelo processo de Poisson associado. Descrevemos isto através da seguinte proposição:

Proposição 2.3.2. *Seja $\tilde{N}_t$ um processo de Poisson compensado. Então $\tilde{N}_t$ é um martingal com respeito a filtração $\mathcal{F}_t$ gerada pela família de variáveis $(N_s)_{s\in[0,t]}$.*

Demonstração. Lembramos aqui que a filtração gerada por N_t é a coleção $(\mathcal{F}_t^{N_t})_{t\in[0,T]}$, onde $\mathcal{F}_t^N$ é o completamento da σ-álgebra gerada pelos valores anteriores do processo

$$\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \in [0,t]) \cup \mathcal{N}.$$

Por construção N_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável. Além disso

$$\mathbf{E}[|N_t|] = \mathbf{E}[N_t] = \lambda t < \infty$$

e, portanto, N_t é integrável. Logo $\tilde{N}_t$ também é integrável, temos ainda que para $0 \le s \le t$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[N_t - N_s] \\ &= \mathbf{E}[N_t] - \mathbf{E}[N_s] \\ &= \lambda t - \lambda s = \lambda(t-s). \end{aligned} \tag{2.10}$$

segue então que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[N_t - \lambda t|\mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[N_t - N_s + N_s - \lambda t|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{E}[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] + \mathbf{E}[N_s - \lambda t|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{E}[N_t - N_s] + N_s - \lambda t \\ &= \lambda(t-s) + N_s - \lambda t = N_s - \lambda s.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Logo $\tilde{N}_t$ é um martingal.

□

É interessante observarmos que é possível obter o movimento Browniano a partir de um processo de Poisson, isto é, o processo

$$X_t = \frac{\tilde{N}_t}{\sqrt{\lambda}} \tag{2.12}$$

que é uma versão com média zero e reescalada do processo de Poisson compensado satisfaz:

$$\mathbf{E}\left[\frac{\tilde{N}_t}{\sqrt{\lambda}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathbf{E}[\tilde{N}_t] = 0 \tag{2.13}$$

e

$$\mathbf{Var}\left[\frac{\tilde{N}_t}{\sqrt{\lambda}}\right] = \frac{1}{\lambda}\mathbf{Var}[N_t] = t. \tag{2.14}$$

o que nos mostra que este processo possui mesma média e variância que o Movimento Browniano.

Na verdade é conhecido, veja o Teorema 14.9 em (KALLENBERG, 2002), que quando a intensidade λ dos saltos cresce a interpolação de um processo de Poisson compensado converge, em distribuição, para o movimento Browniano.

2.4 Medidas Aleatórias

Vimos na seção anterior que um processo de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ está associado com a ideia de contagem, mais precisamente: se $T_1, T_2, ...$ é a sequencia dos tempos de saltos de N_t, então N_t é simplesmente o número de saltos entre 0 e t,

$$N_t = \#\{i \geq 1; T_i \in (0,t]\}. \tag{2.15}$$

Similarmente, se $t > s$ então

$$N_t - N_s = \#\{i \geq 1; T_i \in (s,t]\}. \tag{2.16}$$

Os tempos de salto $T_1, T_2, T_3, ...$ formam uma configuração aleatória dos pontos em $[0, \infty)$ e o Processo de Poisson N_t conta o número de pontos no intervalo $[0, t]$. Esse procedimento de contagem nos motiva a definir uma medida M da seguinte forma: para qualquer conjunto mensurável $A \subset [0, \infty)$ seja

$$M(\omega, A) = \#\{i \geq 1; T_i(w) \in A\}. \tag{2.17}$$

Assim $M(\omega, \cdot)$ é uma medida positiva tomando valores inteiros e $M(A)$ é finita com probabilidade 1 para qualquer conjunto limitado A. Observe que a medida $M(\omega, \cdot)$ depende do ponto $\omega \in \Omega$, daí o motivo do nome *medidas aleatórias*. A intensidade λ do processo de Poisson determina o valor médio da medida aleatória M: $E[M(A)] = \lambda|A|$, onde $|A|$ é a medida de Lebesgue do conjunto mensurável A.

De fato, se $A = [s, t]$ temos que $M(\omega, [s, t]) = N_{t-s}(\omega)$ e, portanto, $E[M(A)] = \lambda|s - t|$. Depois é possível estender a medida a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de forma única, como garante o Teorema de Carathéodory.

Chamaremos M a medida aleatória de salto associado ao processo de Poisson N. O processo de Poisson também pode ser expresso em termos das medidas aleatórias, mais precisamente:

$$N_t(w) = M(\omega, [0, t]) = \int_{[0,t]} M(\omega, ds). \tag{2.18}$$

No mesmo caminho, podemos associar uma medida aleatória a um Processo de Poisson Compensado N_t da seguinte forma

$$\tilde{M}(\omega, A) = M(\omega, A) - \int_A \lambda dt. \tag{2.19}$$

Observamos então que $\mathbf{E}[\tilde{M}(A)] = 0$ e $\mathbf{Var}[(A)] = \lambda|A|$. Ao contrário do que aconteceu com M, temos que $\tilde{M}$ é uma medida com sinal.

A medida M definida na equação 2.17 era uma medida de contagem tal que para qualquer conjunto mensurável $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbf{E}[M(A)] = \lambda|A|$. Vamos agora tentar estender esta construção a situações mais gerais, trocando $\mathbb{R}$ por $E \subset \mathbb{R}^d$ e a medida de Lebesgue por uma medida de Radon μ em E.

Definição 2.4.1 (Medida Aleatória de Poisson)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $E \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto fixado e μ uma medida (positiva) de Radon em $(E, \mathcal{E})$. Uma medida aleatória de Poisson em E com intensidade μ é uma medida aleatória, tomando valores inteiros,*

$$\begin{array}{rccl} M: & \Omega \times \mathcal{E} & \to & \mathbb{N} \\ & (\omega, A) & \mapsto & M(\omega, A) \end{array}$$

tal que:

1. *Para quase todo $\omega \in \Omega$, $M(\omega, \cdot)$ é uma medida de Radon tomando valores inteiros, isto é, para qualquer conjunto mensurável $A \subset \mathcal{E}$ limitado, $M(A) < \infty$ é uma variável aleatória tomando valores inteiros.*

2. *Para cada conjunto mensurável $A \subset E$ limitado, $M(\cdot, A) = M(A)$ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\mu(\lambda)$:*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P[M(A) = k] = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}. \tag{2.20}$$

3. *Para quaisquer conjuntos disjunto $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{E}$, as variáveis aleatórias $M(A_1)$, $M(A_2)$,...,$M(A_n)$ são independentes.*

O seguinte resultado nos permitirá construir, dada uma medida de Radon μ, uma medida aleatória de Poisson com intensidade μ.

Proposição 2.4.1. *Para qualquer medida de Radon μ em $E \subset \mathbb{R}^d$, existe uma medida aleatória de Poisson M em E com intensidade μ.*

Demonstração. Apresentaremos, de maneira construtiva, uma medida aleatória de Poisson que tenha parâmetro μ. Suponhamos inicialmente que $\mu(E) < \infty$. Procedemos da seguinte forma:

Passo 1 Tome $X_1, X_2, ...$ variáveis aleatórias i.i.d. tais que

$$P[X_i \in A] = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}. \tag{2.21}$$

Passo 2 Tome $M(E)$ uma variável aleatória de Poisson em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com média $\mu(E)$ e que seja independente de cada X_i

Passo 3 Definimos $M(A) = \sum_{i=1}^{M(E)} I_A X_i$ para todo $A \in \mathcal{E}$.

Verificaremos agora que M assim definida é, de fato, uma medida aleatória de Poisson com parâmetro μ.

1. Para verificar o primeiro item da Definição 2.4.1 basta observar que por construção M só assume valores inteiros. Além disso a soma do passo três é quase certamente finita uma vez que $M(E)$ foi tomada sendo uma variável aleatória de Poisson.

2. Seja $A \in \mathcal{E}$ um conjunto limitado. Queremos calcular $P[M(A)=k]$, para tal observamos que o evento $M(A)=k$ é realizado quando $M(E) \geq k$ e exatamente k das variáveis X_i estão em A, mais precisamente:

$$\begin{aligned}
P[M(A)=k] &= \sum_{j\geq k} P[M(E)=j]\frac{j!}{(j-k)!k!}P[X_i \in A]^k P[X_i \notin A]^{j-k} \\
&= \sum_{j\geq k} e^{-\mu(E)}\frac{\mu(E)^j}{j!}\frac{j!}{(j-k)!k!}\frac{\mu(A)^k}{\mu(E)^k}\frac{(\mu(E)-\mu(A))^{j-k}}{\mu(E)^{j-k}} \\
&= e^{-\mu(E)}\frac{\mu(A)^k}{k!}\sum_{n\geq 0}\frac{(\mu(E)-\mu(A))^n}{n!} \qquad (2.22) \\
&= e^{-\mu(E)}\frac{\mu(A)^k}{k!}e^{\mu(E)-\mu(A)} \\
&= \frac{\mu(A)^k}{k!}e^{-\mu(A)}
\end{aligned}$$

Concluímos assim que para A fixo $M(\cdot, A)$ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\mu(A)$.

3. Sendo $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{E}$ conjuntos disjunto, queremos calcular $P[M(A_1)=k_1, M(A_2)=k_2, ..., M(A_n)=k_n]$. Como feito no item anterior, observamos que o evento em questão acontece quando $M(E) \geq M = \sum_{i=1}^n k_i$ e k_1 dos X_i estão em A_1, k_2 estão em A_2,...,k_n estão em A_n e os demais X_i não estão em $\cup_{i=1}^n A_i$. Mas precisamente temos:

$$\begin{aligned}
&P[M(A_1)=k_1, M(A_2)=k_2, ..., M(A_n)=k_n] \\
&= \sum_{j\geq M} P[M(E)=j]\cdot a_n \cdot P[X_i \in A_1]^{k_1} ... P[X_i \in A_n]^{k_n} P[X_i \notin \cup A_i]^{j-k} \\
&= \sum_{j\geq M} e^{-\mu(E)}\frac{\mu(E)^j}{j!}a_n\left(\prod_{r=1}^n\left(\frac{\mu(A_r)}{\mu(E)}\right)^{k_r}\right)\left(\frac{\mu(E)-\mu(\cup_{r=1}^n A_r)}{\mu(E)}\right)^{j-M} \\
&= e^{-\mu(E)}\cdot\left(\prod_{r=1}^n\left(\frac{\mu(A_r)^{k_r}}{k_r!}\right)\right)\sum_{j\geq M}\left(\frac{\mu(E)-\mu(\cup_{r=1}^n A_r)}{(j-M)!}\right)^{j-M} \\
&= e^{-\mu(E)}\cdot\prod_{r=1}^n\left(\frac{\mu(A_r)^{k_r}}{k_r!}\right)\sum_{s\geq 0}\left(\frac{\mu(E)-\mu(\cup_{r=1}^n A_r)}{(s)!}\right)^{s} \\
&= e^{-\mu(E)}\cdot\prod_{r=1}^n\left(\frac{\mu(A_r)^{k_r}}{k_r!}\right)e^{\mu(E)-\mu(\cup_{r=1}^n A_r)} \\
&= e^{-\mu(E)}\cdot\prod_{r=1}^n\left(\frac{\mu(A_r)^{k_r}}{k_r!}\right)\cdot\frac{e^{\mu(E)}}{e^{\mu(\cup_{r=1}^n A_r)}} \\
&= e^{-\mu(E)}\cdot\prod_{r=1}^n\left(\frac{\mu(A_r)^{k_r}}{k_r!}\right)\cdot\frac{e^{\mu(E)}}{\prod_{r=1}^n e^{\mu(A_r)}} \\
&= \prod_{r=1}^n\left(\frac{\mu(A_r)^{k_r}}{k_r!}e^{\mu(A_r)}\right) \\
&= \prod_{r=1}^n P[M(A_r)=k_r].
\end{aligned}$$

onde $a_n = \left(\binom{M}{k_1}\binom{M-k_1}{k_2}...\binom{k_n}{k_n}\right)$, segue a independência das variáveis. Concluindo assim a verificação de que M é uma medida aleatória de Poisson.

Resta ainda o caso em que $\mu(E) = \infty$. Neste caso como μ é uma medida σ-finita, existem $E_1, E_2, ...$ tais que:

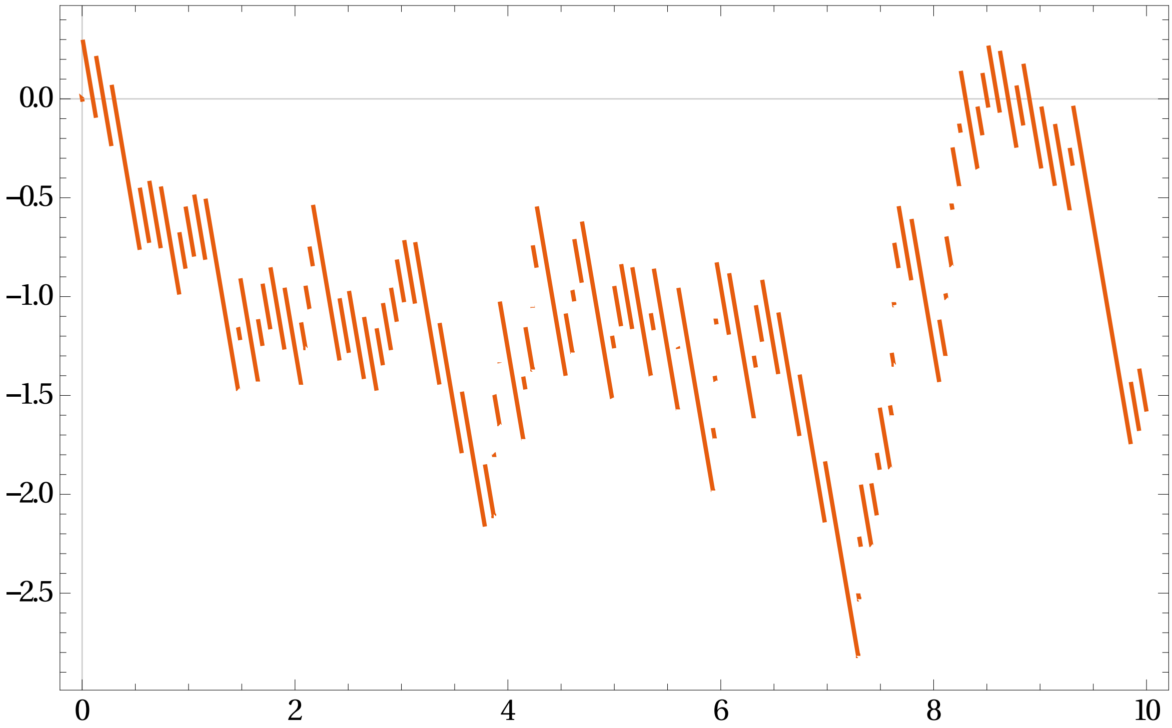
$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \qquad \text{e} \qquad \mu(E_i) < \infty \qquad \text{para } i = 1, 2, ...$$

Podemos então para cada E_i aplicar o mesmo procedimento do caso anterior obtendo medidas $M_1, M_2, ...$, definimos então

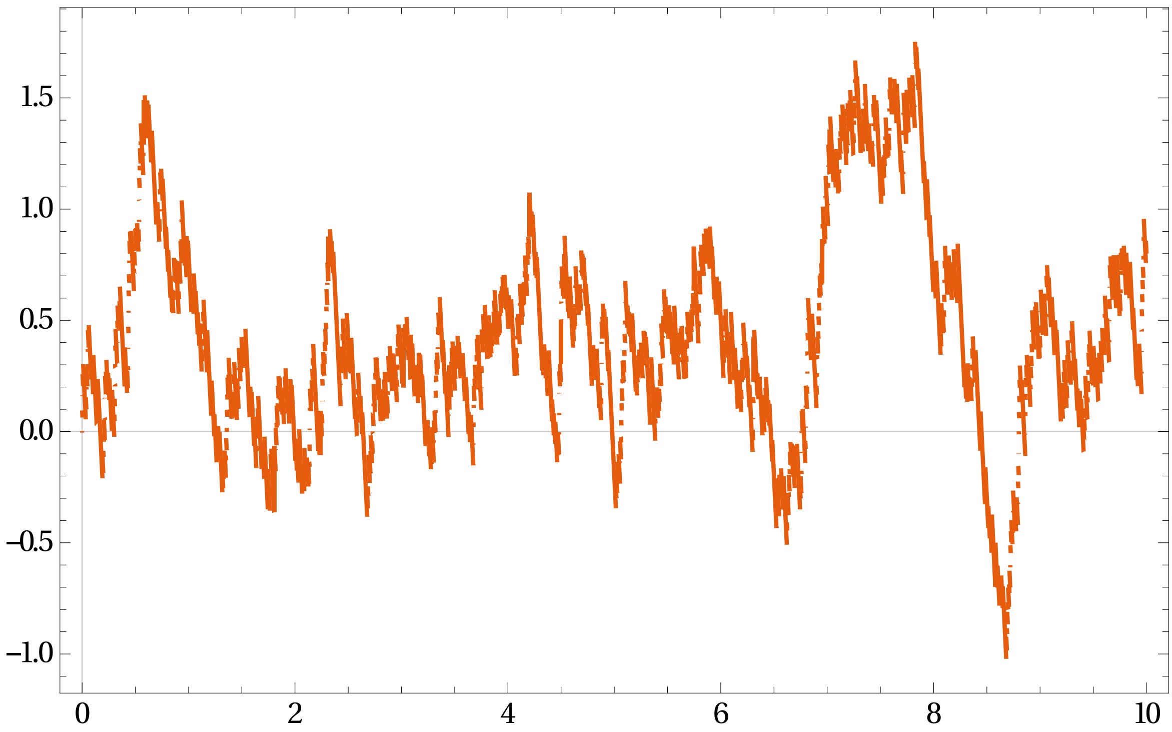
$$M_E(A) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i(A), \forall A \in \mathcal{E}.$$

$\square$

Uma consequência deste resultado é que uma medida aleatória de Poisson M é determinada por sua medida de intensidade μ.



(a) $\lambda = 10$.



(b) $\lambda = 100$.

Figura 5: Trajetória de X_t para $\lambda = 10$ e $\lambda = 100$.

3 Processos de Lévy

Assim como os caminhos aleatórios (que são somas de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas) nos fornecem exemplos de processos estocásticos em tempo discreto, seus similares a tempo contínuo, isto é, processos com incrementos independentes e estacionários, nos fornecem exemplos importantes de processos estocásticos em tempo contínuo. Os processos de Poisson e o movimento Browniano são exemplos de processos com incrementos independentes e estacionários muito importantes e com várias aplicações em finanças e física, como podemos ver em (SCHOUTENS; CARIBONI, 2010) e (APPLEBAUM et al., 2003). Veremos neste capítulo que os processos de Lévy são, de certa forma, uma superposição de um movimento Browniano e uma quantidade, possivelmente infinita, de processos de Poisson. Para cumprirmos este objetivo proposto apresentaremos na primeira seção a definição e algumas propriedades gerais dos processos de Lévy, estudaremos também a relação entre os processos de Lévy e as distribuições infinitamente divisíveis. Apresentamos na segunda seção os processos de Poisson compostos, que são processos de Poisson cujo os tamanhos dos saltos são variáveis aleatórias que seguem uma distribuição de Poisson, e introduzimos, como exemplo, o modelo de Merton. No que segue estudamos as medidas de saltos para processos de Poisson e introduzimos a medida de Lévy. Na quarta seção usamos os resultados desenvolvidos ao longo deste trabalho para demonstrarmos os Teorema de Lévy-Itô e, em seguida, apresentamos algumas consequências deste resultado, como a fórmula de Lévy-Khitchine e algumas propriedades das trajetórias de processos de Lévy.

3.1 Definição e Exemplos

Nesta seção apresentamos a definição e alguns exemplos de processos de Lévy, dentre os quais podemos destacar os processos de Poisson e o movimento Browniano. Mostraremos também que os processos de Lévy possuem forte relação com as distribuições infinitamente divisíveis.

Definição 3.1.1 (Processo de Lévy). *Um processo estocástico cadlag $(X_t)_{t\geq 0}$ tomando valores em $\mathbb{R}^d$ e com $X_0 = 0$ q.c. é um Processo de Lévy se satisfaz as seguintes condições:*

Incrementos Independentes: *dados $t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$ as variáveis aleatórias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são independentes;*

Incrementos Estacionários: *a distribuição de $X_{t+h} - X_t$ não depende de t;*

Continuidade Estocástica: *para todo* $\epsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} P[|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon] = 0. \tag{3.1}$$

O termo *processos de Lévy* homenageia a obra do matemático francês Paul Lévy. Na literatura mais antiga, processos Lévy podem ser encontrados com alguns nomes diferentes. Na década de 40, o próprio Lévy referiu-se a eles como processos de aditivos. Em parte da literatura refere-se a processos de Lévy simplesmente como processos com incrementos independentes e estacionários.

Os processos de Poisson nos fornecem um exemplo de processos de Lévy. De fato, vimos nos itens 8 e 9 Proposição 2.1.2, que o processo de Poisson verifica as duas primeiras condições da definição acima. Para verificarmos o terceiro item basta observar que temos do item 4 da Proposição 2.1.2 que $\lim_{h\to 0} N_{t+h} - N_{t-} = 0$ com probabilidade 1, segue que

$$\lim_{h\to 0} P[|N_{t+h} - N_t| \geq \epsilon] = 0. \tag{3.2}$$

Um outro exemplo essencial de processo de Lévy é o movimento Browniano:

Exemplo 3.1.1. *O movimento Browniano, também chamado de processo de Wiener, é um processo fundamental ao estudo de diversos outros processos estocásticos. Um processo é dito um movimento Browniano se possuir as seguintes propriedades:*

- B_t *tem incrementos independentes.*
- *Se* $s, t \geq 0$, *então*

$$P[B(s+t) - B(s) \in A] = \int_A (2\pi t)^{-1/2} \exp(-x^2/2t)dx. \tag{3.3}$$

- *Com probabilidade* 1, B_t *tem trajetórias contínuas.*

O movimento Browniano claramente satisfaz, por definição, aos itens da definição 3.1.1.

Um resultado muito interessante com respeito a relação entre processos de Lévy e o movimento Browniano é enunciado a seguir, uma demonstração deste fato pode ser vita no Teorema 11.4 de (KALLENBERG, 2002).

Teorema 3.1.1 (Lévy)**.** *Seja* $(X_t)_{t\geq 0}$ *um processo com trajetórias contínuas e incrementos independentes. Então* $X_t - X_0$ *é um processo Gaussiano, e existem funções contínuas* b *em* $\mathbb{R}^d$ *e* A *em* $\mathbb{R}^{d^2}$ *tais que* $X_t - X_s$ *tem distribuição normal com média* $b_t - b_s$ *e covariância* $A_t - A_s$*, isto é,* $X_t - X_s \sim \boldsymbol{N}(b_t - b_s, A_t - A_s)$*.*

Os processos de Lévy possuem uma caracterização muito importante em termos de sua distribuição de probabilidade, mais precisamente se tirarmos amostras de um processo de Lévy em intervalos de tempo regulares $0, h, 2h, ...$, obtemos um caminho aleatório, e podemos então escrever:

$$X_{nh} = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$$

onde $Y_k = X_{(k+1)h} - X_{kh}$. Como X_t possui incrementos independentes e estacionários, temos que as variáveis Y_k são variáveis aleatórias i.i.d. que tem a mesma distribuição que X_h.

Se escolhermos $nh = t$ teremos que para quaisquer $t > 0$ e $n \geq 1$, X_t pode ser representado como uma soma de n variáveis aleatórias i.i.d. tendo a mesma distribuição de $X_{\frac{t}{n}}$. Quando uma distribuição satisfaz essa condição dizemos que tal distribuição é infinitamente divisível.

Definição 3.1.2 (Infinitamente Divisível)**.** *Uma distribuição de probabilidade em $\mathbb{R}^d$ é dita ser infinitamente divisível se para qualquer inteiro $n \geq 2$ existem n variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, i.i.d. tais que $Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ tem distribuição F.*

A recíproca do demonstrado acima também é válida:

Proposição 3.1.1. *Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Lévy. Então para cada t, X_t tem uma distribuição infinitamente divisível. Reciprocamente, se F é uma distribuição infinitamente divisível, então existe um processo de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ tal que a distribuição de X_1 é dada por F.*

Uma demonstração é dada em (SATO, 1999) Corolário 11.6.

Um dos exemplos mais comuns de distribuições infinitamente divisíveis são as distribuições Gaussianas.

Exemplo 3.1.2. *Uma variável aleatória X é dita uma variável aleatória normal com parâmetros μ e σ^2 se a função densidade de probabilidade é dada por:*

$$f(X, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.4}$$

Assim se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, podemos reescrever X da seguinte maneira:

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$$

onde Y_k são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}})$.

Assim como o feito no item 7 da Proposição 2.1.2 para processos de Poisson e na Proposição 2.3.1 para processos de Poisson compensados, apresentamos a seguir o cálculo da função característica de um processo de Lévy. Antes porém faremos um Lema auxiliar.

Lema 3.1.1. *Se $(X_t)_{t\geq 0}$ é estocasticamente contínuo, então a aplicação $t \to \Phi_{X_t}(u)$ é contínua com respeito a t para cada $u \in \mathbb{R}^d$.*

Demonstração. Fixado $z \in \mathbb{R}^d$, como a função $y \to e^{i\langle z,y\rangle}$ é contínua na origem, dado um $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $\sup_{0\leq|y|\leq\delta_1} |e^{i\langle z,y\rangle} - 1| < \frac{\epsilon}{2}$. Por outro lado, como X_t é estocasticamente contínuo, existe δ_2 tal que $0 < |t-s| < \delta_2$ então $P[|X(t) - X(s)| > \delta_1] < \frac{\epsilon}{4}$.

Assim para todo $0 < |t-s| < \delta_2$, temos

$$\begin{aligned} |\Phi_{X_t}(z) - \Phi_{X_s}(z)| &= |\int_\Omega e^{i\langle z,X_t\rangle} P(dw) - \int_\Omega e^{i\langle z,X_s\rangle} P(d\omega)| \\ &= |\int_\Omega e^{i\langle z,X_s\rangle} \left(e^{i\langle z,X_t - X_s\rangle} - 1\right) P(d\omega)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{i\langle z,y\rangle} - 1| F_{X_t - X_s}(dy) \\ &\leq \int_{B(0,\delta_1)} |e^{i\langle z,y\rangle} - 1| F_{X_t - X_s}(dy) + \int_{B(0,\delta_1)^c} |e^{i\langle z,y\rangle} - 1| F_{X_t - X_s}(dy) \\ &\leq \sup_{0\leq|y|\leq\delta_1} |e^{i\langle z,y\rangle} - 1| + 2P[|X(t) - X(s)| > \delta_1] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

onde $B(0,\delta_1)$ é bola em $\mathbb{R}^d$ de centro em 0 e raio δ_1 e $F_{X_t - X_s}$ é a distribuição de probabilidade de $X_t - X_s$. Assim obtemos

$$|\Phi_{X_t}(z) - \Phi_{X_s}(z)| < \epsilon$$

obtendo o resultado desejado. □

Agora calcularemos a função característica de X_t:

Proposição 3.1.2 (Função Característica)**.** *Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Lévy em $\mathbb{R}^d$. Então existe uma função contínua $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, chamada expoente característico de X, tal que:*

$$E[e^{\langle iz,X_t\rangle}] = e^{t\psi(z)} \tag{3.5}$$

para todo $z \in \mathbb{R}^d$.

Demonstração. De fato, para $t > s$ escrevemos $X_{t+s} = X_s + (X_{t+s} - X_s)$. Como X_t possui incrementos independentes e estacionários segue:

$$\begin{aligned} \Phi_{t+s}(z) &= \Phi_{X_s}(z)\Phi_{X_{t+s}-X_s}(z) \\ &= \Phi_{X_s}(z)\Phi_{X_t}(z) \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade segue da definição de função característica e da escrita de X_{t+s} dada acima e da independência dos incrementos de X_t. A segunda igualdade segue do fato de X_t ter incrementos estacionários, isto é, $X_{t+s} - X_s$ tem mesma distribuição de X_t

e, portanto, mesma função característica. Como X_t é estocasticamente contínuo temos do Lema anterior que $\Phi_t(z)$ é contínua com respeito a t. Unindo a continuidade a propriedade multiplicativa temos que uma função $\Phi_t(z)$ que satisfaz a equação

$$\Phi_{t+s}(z) \quad = \Phi_{X_s}(z)\Phi_{X_t}(z)$$

para todo $t > s$, deve ser da forma $e^{t\psi(z)}$.Assim temos uma função $\psi(z)$ definida para cada $z \ \in \mathbb{R}^d$. A continuidade da função $\psi(z)$ com respeito a variável u segue do fato de que fixado $t \geq 0$ a função $\Phi_{X_t}(z)$ é uniformemente continua. □

Como exemplo, temos do item 7 da Proposição 2.1.2 que o processo de Poisson possui função característica dada por:

$$\Phi_{N_t}(z) = \mathbf{E}[e^{\langle iz, N_t \rangle}] = \exp\{\lambda t(e^{iz} - 1)\}, \ \forall z \in \mathbb{R}.$$

segue que o processo de Poisson tem expoente característico dado por:

$$\psi(z) = \lambda(e^{iz} - 1).$$

3.2 Processo de Poisson Composto

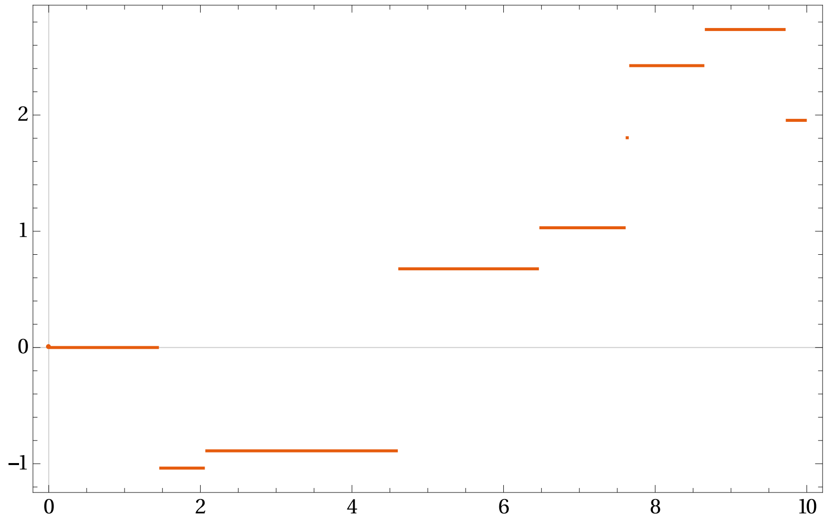
Os processos de Poisson não são usados em modelos para preços de ações pois seus saltos são sempre de tamanho 1, o que é muito restritivo, mas eles podem ser usados para construir processos mais complexos que possuam propriedades interessantes para modelagem do preço de ativos. Nesta seção apresentamos os processos de Poisson compostos, que são uma generalização do processo de Poisson. Os processos de Poisson compostos são de grande importância ao estudo dos processos de Lévy, principalmente no resultado principal desta dissertação, o Teorema de Lévy-Itô, onde mostraremos que de forma geral um processo de Lévy pode ser escrito como a soma de um movimento Browniano e a superposição, possivelmente infinita, de processos de Poisson compostos.

Definição 3.2.1. *Um processo de Poisson composto com intensidade $\lambda > 0$ e distribuição de saltos f é um processo estocástico X_t definido como*

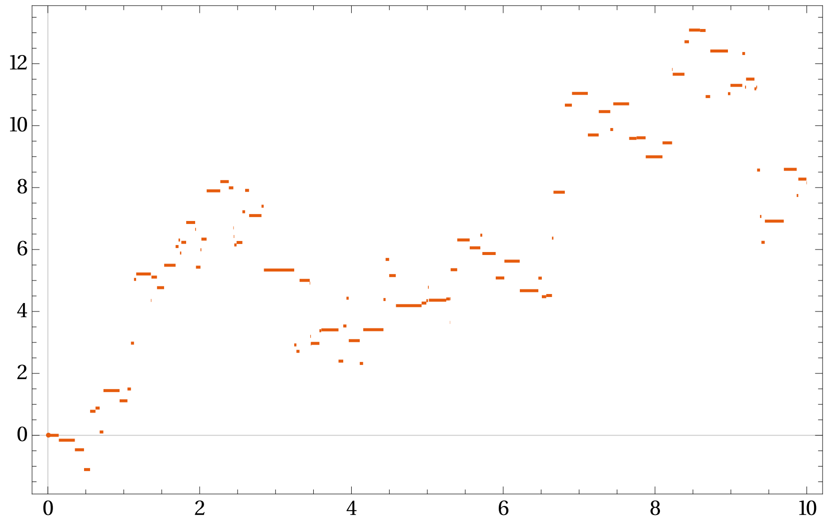
$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{3.6}$$

onde os tamanhos Y_i dos saltos são i.i.d. com distribuição f em $\mathbb{R}^d$ e N_t é um processo de Poisson com intensidade λ, independente dos $(Y_i)_{i\geq 1}$.

Em outras palavras, um processo de Poisson composto é um processo constante por partes com tempos de salto seguindo uma distribuição Poisson e cuja os tamanhos dos saltos são variáveis aleatórias i.i.d.



(a) $\lambda = 1$ e $f \sim \boldsymbol{N}(0,1)$



(b) $\lambda = 10$ e $f \sim \boldsymbol{N}(0,1)$

Figura 6: Trajetórias típicas de um processo de Poisson Composto.

Em particular um processo de Poisson pode ser visto ele mesmo como um processo de Poisson composto onde tem-se $Y_i = 1$. A figura acima, mostra trajetórias típicas de um processo de Poisson composto. Na figura (a) temos uma trajetória de um processo de Poisson composto com intensidade de saltos $\lambda = 1$ e tamanhos de saltos seguindo uma distribuição normal com média 0 e variância 1. Na figura (b) temos uma trajetória de um processo de Poisson composto com intensidade de saltos $\lambda = 10$ e tamanhos de saltos seguindo uma distribuição normal com média 0 e variância 1.

Como dito na introdução, processos estocásticos são muito usados na modelagem de ativos financeiros. A seguir apresentamos um modelo para ativos financeiros que utiliza processos com saltos.

Exemplo 3.2.1 (Modelo de Merton)**.** *O modelo de Merton* (1976) *é uma das primeiras aplicações de processos com saltos à modelagem do mercado financeiro. Neste modelo,* *que leva em conta as descontinuidades do preço, são adicionados saltos com distribuição gaussiana ao* log *do preço. Mais precisamente:*

$$S_t = S_0 e^{rt+X_t} \tag{3.7}$$

onde

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

com $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$*, e* N_t *um processo de Poisson com parâmetro* λ *e* B_t *um movimento Browniano. Aqui* S_t *indica o preço de um ativo financeiro num instante* t*,* S_0 *é o preço inicial e* γ *indica um tendência de crescimento ou descrescimento. Umas das vantagens da escolha deste modelo é que escolha feita para a distribuição dos saltos possui uma representação em série para a densidade do* log *do preço:*

$$p_t(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp - \frac{(x-\gamma t - k\mu)^2}{2(\sigma^2 t + k\delta^2)}}{k! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\delta^2)}}. \tag{3.8}$$

O parâmetro σ *é conhecido como parâmetro de drift.*

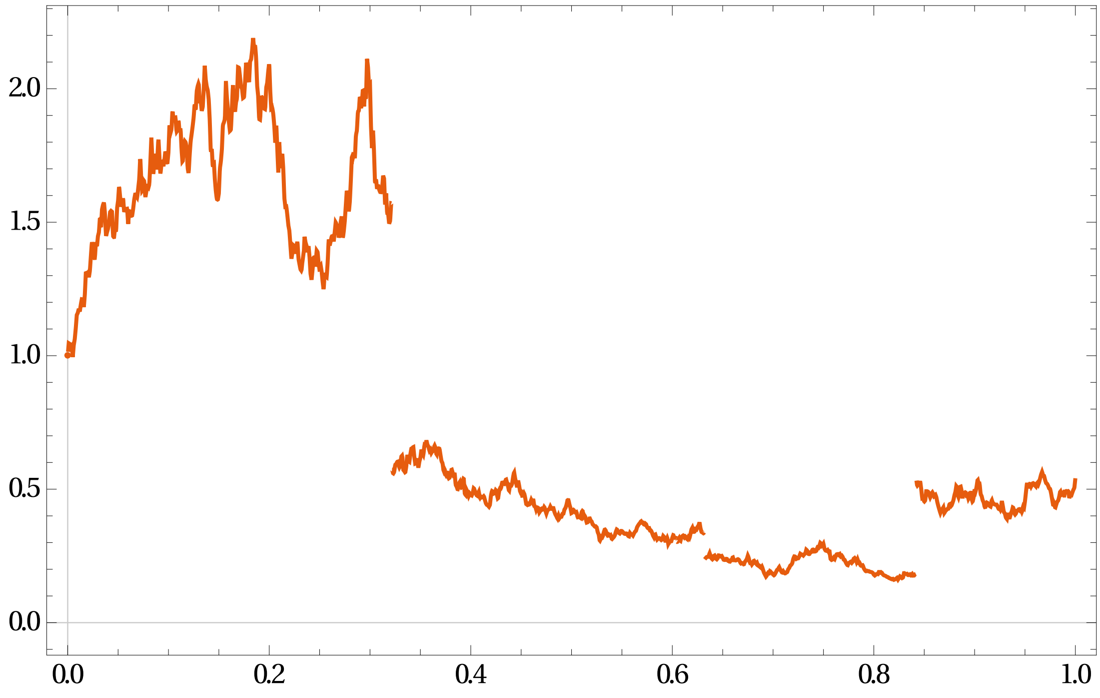


Figura 7: Trajetória simulada com o software Mathematica 10. Com $r = 1$, $S_0 = 1$, $\gamma = 0.3$, $\sigma = 0.5$, $\lambda = 4$ e $f \sim \boldsymbol{N}(0, 1)$.

De forma mais geral os processos da forma:

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

são conhecidos como processos de *difusão com saltos.*

A seguir apresentamos um resultado que nos apresenta as condições necessárias e suficientes para que um processo de Lévy seja um processo Poisson composto.

Proposição 3.2.1. *$(X_t)_{t\geq 0}$ é um processo de Poisson composto se, e somente se, é um processo de Lévy e suas trajetórias são funções constantes por partes.*

Demonstração. Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Lévy com trajetórias constantes por partes. Inicialmente construiremos um processo que indique os tempos de saltos do processo X_t. Definimos

$$N_t = \#\left\{0 < s \leq t \mid X_{s^-} \neq X_s\right\}.$$

Como, por hipótese, as trajetórias de X_t são constantes por partes as trajetórias de X_t possuem um número finito de saltos em qualquer intervalo limitado de tempo, veja a Proposição 1.5.1. Assim temos que N_t é um processo de contagem.

Seja $h < t$. Temos

$$\begin{aligned} N_t - N_h &= \#\left\{h < s \leq t \mid X_{s^-} \neq X_s\right\} \\ &= \#\left\{h < s \leq t \mid X_{s^-} - X_h \neq X_s - X_h\right\}. \end{aligned}$$

Portanto, como X_t tem incrementos independentes e estacionários, segue que N_t tem incrementos independentes e estacionários. Segue do Lema 2.2.1 que N_t é um processo de Poisson. Agora usaremos o processo N_t para entender os saltos de X_t, isto é, agora que conhecemos os tempos de saltos do processo procuremos entender como os saltos estão distribuídos. A demonstração é semelhante, embora mais complexa, que a feita no 2.2.1, onde mostramos que os tempos de saltos eram somas de variáveis aleatórias exponenciais. Definimos então:

$$Y_n = X_{T_n} - X_{T_{n^-}}$$

onde $T_n = \inf\left\{t \geq 0 \mid N_t \geq n\right\}$. Em palavras, temos que T_n são os tempos de salto do processo X_t e as variáveis Y_n representam os tamanhos de saltos nos instantes T_n. Resta mostrar que as variáveis Y_n assim definidas são i.i.d. Para isso, observamos inicialmente que os incrementos de X_t condicionados as trajetórias de N_t são independentes. De fato, dado $0 \geq s < t$ considere os seguintes conjuntos

$$\begin{array}{cc} A_1 \in \sigma(X_s) & B_1 \in \sigma(N_r; r \leq s) \\ A_2 \in \sigma(X_t - X_s) & B_2 \in \sigma(N_r - N_s; r \leq s) \end{array}$$

tais que $P(B_1) > 0$ e $P(B_2) > 0$. Como X_t possui incrementos independentes, os processos

$$(X_r - X_s)_{r>s} \quad \text{e} \quad (X_r)_{r\leq s}$$

são independentes. Assim

$$P[A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2] = P[A_1 \cap B_1] P[A_2 \cap B_2].$$

Além disso,

- A_1 e B_1 são independentes de B_2;
- A_2 e B_2 são independentes de B_1;
- B_1 e B_2 são independentes.

Segue que

$$\begin{aligned} P[A_1 \cap A_2 | B_1 \cap B_2] &= \frac{P[A_1 \cap B_1]P[A_2 \cap B_2]}{P[B_1]P[B_2]} \\ &= \frac{P[A_1 \cap B_1 \cap B_2]P[A_2 \cap B_1 \cap B_2]}{P[B_1]^2 P[B_2]^2} \\ &= P[A_1 | B_1 \cap B_2]P[A_2 | B_1 \cap B_2]. \end{aligned}$$

isto prova que $X_t - X_s$ e X_s são independentes se condicionados as trajetórias de N_t. Em particular se tomarmos $B_1 = \{N_s = 1\}$ e $B_2 = \{N_t - N_s = 1\}$, obtemos que Y_1 e Y_2 são independentes. Como podemos tomar qualquer número de incrementos de X_t, concluímos que Y_i são independentes.

Por último vamos verificar que os Y_i são identicamente distribuídos. Como o processo (X_t, N_t) tem incrementos independentes temos que para $n > 0$ e $s > h > 0$ e para toda função limitada Borel mensurável,

$$\mathbf{E}[f(X_h)|N_h = 1, N_s - N_h = n] = \mathbf{E}[f(X_{s+h} - X_s)|N_{s+h} - N_s = 1, N_s - N_h = n].$$

Portanto para qualquer $n \geq 0$, Y_1 e Y_{n+2} tem a mesma distribuição.

Reciprocamente, seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Poisson composto. Vamos verificar que este processo satisfaz as condições dadas na definição 3.1.1. Iniciamos por verificar a independência dos incrementos.

Seja $0 < r < s$ e sejam f e g funções limitadas e Borel mensuráveis em $\mathbb{R}^d$. Temos que

$$X_r = \sum_{i=1}^{N_r} Y_i \qquad \text{e} \quad X_s - X_r = \sum_{i=N_{r+1}}^{N_s} Y_i,$$

se condicionados as trajetórias de N_t para $t \in [0, s]$ são independentes. De fato a representação de X_r depende apenas de Y_i para $i \leq N_r$ e os termos na representação de $X_s - X_r$ dependem apenas de Y_i para valores de $i > N_r$. Além disso $E[f(X_r)|N_t, t \leq s]$ depende apenas de N_r, bem como $E[g(X_s - X_r)|N_t, t \leq s]$ depende apenas de $N_s - N_r$. Segue então, da independência dos incrementos de um processo de Poisson, que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[f(X_r)g(X_s - X_r)] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[f(X_r)g(X_s - X_r)|N_t, t \le s]] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[f(X_r)|N_t, t \le s]\mathbf{E}[g(X_s - X_r)|N_t, t \le s]] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[f(X_r)|N_t, t \le s]]\mathbf{E}[\mathbf{E}[g(X_s - X_r)|N_t, t \le s]] \\
&= \mathbf{E}[f(X_r)]\mathbf{E}[g(X_s - X_r)].
\end{aligned}
$$

donde concluímos que X_r e $X_s - X_r$ são independentes. Argumento semelhante pode ser feito para qualquer quantidade finita de incrementos.

Agora demonstraremos que $(X_t)_{t\ge 0}$ tem incrementos estacionários. Sejam $0 < r < s$ e f uma função limitada Borel mensurável. Podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[f(X_s - X_r)] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\sum_{i=N_{r+1}}^{N_s} Y_i|N_t, t \le s]] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\sum_{i=1}^{N_s - N_r} Y_i|N_t, t \le s]] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\sum_{i=1}^{N_{s-r}} Y_i|N_t, t \le s]] \\
&= \mathbf{E}[f(X_{s-r})],
\end{aligned}
$$

o que implica que X_t tem incrementos independentes. Observe que os argumentos utilizados acima foram feitos para funções mesuráveis quaisquer. Basta considerar $f(X_r) = e^{i\langle u, X_t\rangle}$, $g(X_s - X_r) = e^{i\langle v, X_s - X_r\rangle}$ e aplicar o Teorema 1.4.1 para obtemos a independência. Já a parte dos incrementos estacionários segue tomando $f(X_s - X_r) = e^{i\langle u, X_s - X_r\rangle}$ e usando a unicidade da função característica.

Finalmente, para verificar a continuidade estocástica observamos que X_t só salta quando N_t salta. Pela Proposição 2.1.2 , para $t > 0$,

$$P[N_s \to N_t] = 1.$$

quando $s \to t$, com $s < t$. Consequentemente, para $t > 0$

$$P[X_s \to X_t] = 1.$$

Como convergência quase certa implica em convergência em probabilidade, obtemos a continuidade estocástica.

Assim concluímos que X_t é um processo de Lévy, o que encerra a demonstração do Teorema. □

Assim como no caso de um processo de Poisson, podemos calcular de maneira direta a função característica de um processo de Poisson composto:

Proposição 3.2.2. *Seja (X_t) um processo de Poisson composto em $\mathbb{R}^d$. Sua função característica tem a seguinte representação*

$$\boldsymbol{E}[\exp\langle iu, X_t\rangle] = \exp\left[t\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle iu,x\rangle} - 1) f(dx)\right] \tag{3.9}$$

onde λ é a intensidade dos saltos e f a distribuição dos saltos.

Demonstração. Condicionando a esperança a N_t e chamando a função característica de f por $\tilde{f}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\exp\langle iu, X_t\rangle] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\exp\langle iu, X_t\rangle]|N_t] \\ &= \mathbf{E}[(\tilde{f}(u))^{N_t}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n (\tilde{f}(u))^n}{n!} \\ &= \exp\left[t\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle iu,x\rangle} - 1) f(dx)\right] \end{aligned}$$

□

em particular, para processos de Poisson compostos em $\mathbb{R}$ a função característica assume a seguinte forma:

$$\mathbf{E}[\exp\{iuX_t\}] = \exp\left[t\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1) f(dx)\right], \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Denotando por ν a medida definida como

$$\nu(A) = \lambda f(A) \tag{3.10}$$

podemos então reescrever a equação 3.9 da seguinte maneira:

$$\mathbf{E}[\exp\{iuX_t\}] = \exp\left[t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)\nu(dx)\right], \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

A medida ν será chamada *Medida de Lévy* do processo $(X_t)_{t\geq 0}$.

A seguir demonstramos um Lema que futuramente nos será extremamente útil na demonstração do resultado principal deste texto, o Teorema de Decomposição de Lévy-Itô. Este resultado nos diz, grosso modo, que se dois processos de Lévy possuem incrementos independentes e saltam em momentos distintos quase certamente então eles são independentes.

Lema 3.2.1. *Sejam X e Y processos cadlag contínuos em probabilidade em $\mathbb{R}^d$ com $X_0 = Y_0 = 0$ tais que (X, Y) tem incrementos independentes. Se $\Delta X \cdot \Delta Y = 0$ q.c. (isto é, os processos nunca saltam juntos), então X e Y são independentes.*

Demonstração. Definindo a medida J em termos dos saltos do processo Y. Como podemos assumir que os saltos de Y são limitados (por uma composição de Y com o *arcotangente*). Como J_Y é uma medida aleatória de Poisson, então Y possui variação integrável em cada intervalo finito.

Vamos mostrar que para quaisquer $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, tem-se que $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ e $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$ são independentes, e para isto é suficiente mostrar que $Y_t - Y_s$ e $X_t - X_s$ são independentes para quaisquer $0 \leq s < t$. Sem perca de generalidade vamos assumir $S = 0$ e $t = 1$;

Fixamos $u, v \in \mathbb{R}^d$ e introduzimos os seguintes processos

$$M_t = \frac{e^{i\langle u, X_t\rangle}}{\mathbf{E}[e^{i\langle u, X_t\rangle}]} \quad , \quad N_t = \frac{e^{i\langle u, Y_t\rangle}}{\mathbf{E}[e^{i\langle u, Y_t\rangle}]} \tag{3.11}$$

que são martingais locais (veja (PROTTER, 2004) Capítulo 1 Teorema 39).

Como Y tem saltos limitados, N_t também terá saltos limitados e, portanto, terá variação integrável em cada intervalo finito. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$, usamos a propriedade de Martingal e obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_1 N_1 - 1] &= \mathbf{E}[\textstyle\sum_{k=1}^{n} (M_{k/n} - M_{(k-1)/n})(N_{k/n} - N_{(k-1)/n})] \\ &\to \mathbf{E}[\textstyle\sum_{s \leq 1} \Delta M_s \Delta N_s] = 0. \end{aligned}$$

Segue que

$$\mathbf{E}[M_1 N_1] = 1$$

e assim obtemos

$$\mathbf{E}[e^{i\langle u, X_1\rangle + i\langle v, Y_1\rangle}] = \mathbf{E}[e^{i\langle u, X_1\rangle}]\mathbf{E}[e^{i\langle v, Y_1\rangle}]$$

donde concluímos que X e Y são processos independentes, pelo Teorema 1.4.1. □

3.3 Medidas de Saltos Para Processos de Poisson Compostos

Usaremos agora a notação e os resultados obtidos previamente para estudarmos o comportamento dos salto de um processo de Poisson composto. A cada processo de Poisson composto $(X_t)_{t\geq 0}$ em $\mathbb{R}^d$ iremos associar uma medida aleatória, mas precisamente dados um conjunto mensurável $B \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ definimos

$$J_X(B) = \#\{(t, \Delta X_t) \in B \mid \Delta X_t \neq 0\} \tag{3.12}$$

onde $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.

Assim, para cada conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^d$, $J_X([t_1, t_2], A)$ conta o número de saltos dos processo X_t entre os instantes t_1 e t_2 cujo o tamanho do salto pertence ao conjunto A. A medida J_X assim definida é uma medida aleatória. A seguir demonstramos que J_X é uma medida aleatória de Poisson.

Proposição 3.3.1. *Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Poisson Composto com intensidade λ e distribuição de saltos f. Sua medida de saltos J_X é uma medida aleatória de Poisson em $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ com medida de intensidade $\mu(dx \times dt) = \nu(dx)dt = \lambda f(dx)dt$.*

Demonstração. Precisamos verificar que a medida dos saltos J_X satisfaz as condições da Definição 2.4.1. Observamos que por sua definição J_X é uma medida que assume valores inteiros não negativos. Iniciamos verificando que dado um conjunto mensurável $B \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ temos que $J_X(B)$ é uma variável aleatória de Poisson. Para tal basta fazermos a verificação para os conjuntos da forma $B = [t_1, t_2] \times A$ onde $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Seja N_t o processo de Poisson com parâmetro λ que conta os saltos do processo X_t. Ao condicionarmos $J_X([t_1, t_2] \times A)$ as trajetórias de N_t obtemos que $J_X([t_1, t_2] \times A)$ é uma soma de $N_{t_2} - N_{t_1}$ variáveis aleatórias de Bernoulli que assumem valor 1 com probabilidade $f(A)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{iuJ_X([t_1,t_2]\times A)}] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[e^{iuJ_X([t_1,t_2]\times A)} \mid N_t]] \\
&= \mathbf{E}[\Big(e^{iu}f(A) + 1 - f(A)\Big)^{N_{t_2}-N_{t_1}}] \\
&= \exp\{\lambda(t_2 - t_1)f(A)(e^{iu} - 1)\}
\end{aligned}
$$

pois $N_{t_2} - N_{t_1}$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda(t_2 - t_1)$. Segue, da unicidade da função característica, que $J_X([t_1, t_2] \times A)$ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $f(A)\lambda(t_2 - t_1)$.

Agora iremos verificar que dados dois borelianos disjuntos em $\mathbb{R}^d$ temos que $J_X([t_1, t_2]\times A)$ e $J_X([t_1, t_2] \times B)$ são variáveis aleatórias independentes. De fato, basta observar que $iuJ_X([t_1, t_2] \times A) + ivJ_X([t_1, t_2] \times B)$ é uma soma de variáveis aleatórias i.i.d. assumindo os seguintes valores:

- iu com probabilidade $f(A)$
- iv com probabilidade $f(B)$
- 0 com probabilidade $1 - f(A) - f(B)$

Procedendo como no item anterior obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{iuJ_X([t_1,t_2]\times A)+ivJ_X([t_1,t_2]\times B)}] &= \mathbf{E}[\{(e^{iu}-1)f(A)+(e^{iv}-1)f(B)+1\}^{N_{t_2}-N_{t_1}}] \\
&= \exp\{\lambda(t_2-t_1)((e^{iu}-1)f(A)+(e^{iv}-1)f(B))\} \\
&= \mathbf{E}[e^{iuJ_X([t_1,t_2]\times A)}]E[e^{ivJ_X([t_1,t_2]\times B)}].
\end{aligned}$$

Além disso, se $[t_1, t_2]$ e $[s_1, s_2]$ são intervalos disjuntos. Como X_t possuem incrementos independentes, segue que $J_x([t_,t_2] \times A)$ e $J_X([s_2, s_1] \times B)$. Observamos ainda que o mesmo método pode ser repetido para um número qualquer, finito, de subconjuntos disjuntos de $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, visto que J_X é σ-aditiva. O que conclui a demonstração da proposição.

□

Este resultado nos leva a rever a definição de medida de Lévy dada em 3.3.1. Podemos perceber através dele que a medida de Lévy de um processo de Poisson composto é homogênea com respeito ao tempo, assim a medida de Lévy de um processo de Poisson composto pode ser vista como a taxa de saltos do processo por unidade de tempo decorrida. Seguindo esta direção definimos a medida de Lévy de um processo de Lévy:

Definição 3.3.1 (Medida de Lévy)**.** *Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Lévy em $\mathbb{R}^d$. A medida ν definida por*

$$\nu(A) = E[\#\{t \in [0,1]; \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}] \tag{3.13}$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, é chamada Medida de Lévy do processo X_t.

Assim como fizemos anteriormente para os processos de Poisson, podemos escrever um processo de Poisson composto em termos de sua medida de saltos:

$$X_t = \sum_{s\in[0,t]} \Delta X s = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} xJ_X(ds \times dx), \tag{3.14}$$

onde J_X é uma medida aleatória de Poisson com intensidade $\nu(dx)dt$. Observamos ainda que o fato de um processo de Poisson composto ter, quase certamente, um número finito de saltos no intervalo $[0, t]$, a integral acima é uma soma finita e, portanto, está bem definida.

Um outro resultado sobre medidas aleatórias de Poisson, que utilizaremos para demonstração do Teorema de Decomposição de Lévy-Itô, discorre sobre a esperança e a variância de um processo definido a partir de uma medida aleatória de Poisson.

Proposição 3.3.2. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(\Omega) < \infty$ e M uma medida aleatória de Poisson com medida de Lévy μ. Dada uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$, definimos*

$$X(\omega) = \int_\Omega f(\psi) M(d\psi, \omega) \tag{3.15}$$

Então o seguinte é verdadeiro:

1. *X é uma variável aleatória em $\mathbb{R}^d$ com distribuição de Poisson composto satisfazendo*

$$\boldsymbol{E}[e^{i\langle z,X\rangle}] = \boldsymbol{E}[\int_\Omega (e^{i\langle z,f(\psi)\rangle} - 1)\mu(d\psi)] = \exp[\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle z,x\rangle} - 1)(\mu f^{-1})(dx)] \tag{3.16}$$

2. *Se f é quadrado integrável então $\boldsymbol{E}[|X|^2] < \infty$ e*

$$\boldsymbol{E}[X] = \int_\Omega f(\psi)\mu(d\psi) \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{E}[|X - \boldsymbol{E}[X]|^2] = \int_\Omega |f(\psi)|^2 \mu(\psi) \tag{3.18}$$

3. *Suponhamos que $B_1, B_2, ..., B_m$ sejam subconjuntos disjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*

e definamos

$$X_k(\omega) = \int_{B_k} f(\psi) M(d\psi, \omega) \tag{3.19}$$

Então $X_1, X_2, ..., X_k$ são independentes.

Demonstração. 1- Por hipótese $\mu(\Omega) < \infty$, segue que M assume valores finitos quase certamente. Portanto a medida $X(d\psi, \omega)$ tem suporte em um número finito de pontos e $X(\omega)$ também é quase certamente finita. Para cada $p \in \mathbb{Z}^d$ e $n \in N$ consideremos as caixas $C_p^n = \{x = (x_1, ..., x_2) | 2^{-n}(p_j - 1) < x_j \leq 2^{-n}p_j\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ a família $\{C_p^n : p \in \mathbb{Z}^d\}$ formam uma cobertura para o espaço $\mathbb{R}^d$. Escolhemos um ponto $x_p^n \in C_p^n$ e definimos a seguinte sequência de funções $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ definidas por $f_n(\psi) = x_p^n$ se $\psi \in f^{-1}(C_p^n)$. Desta forma :

$$\sup_{\psi\in\Omega} |f_n(\psi) - f(\psi)| \leq 2^{-n}\sqrt{d}$$

o que implica que quase certamente

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq 2^{-n}\sqrt{d}M(\Omega, \omega)$$

e, portanto, $|X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0$ quando $n \to \infty$. Isto implica que X é mensurável, isto é, X é uma variável aleatória em $\mathbb{R}^d$.

Por outro lado, como

$$X_n(\omega) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} x_n^p M(f^{-1}(C_p^n),\omega)$$

e $X(f^{-1}(C_p^n),\omega)$ possuem distribuição de Poisson com parâmetro $\mu(f^{-1}(C_p^n))$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{i\langle z,X_n\rangle}] &= \prod_{p\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{E}[e^{i\langle z,x_p^n X(f^{-1}(C_p^n))\rangle}] \\
&= \prod_{p\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{E}[(e^{i\langle z,x_p^n\rangle} - 1)\mu(f^{-1}(C_p^n))] \\
&= \exp[\int_\Omega (e^{i\langle z,f_n(\omega)\rangle} - 1)\mu(d\psi)].
\end{aligned}$$

como $|\mathbf{E}[e^{i\langle z,X_n\rangle}]| \le 1$ e $\mu(\Omega) < \infty$ podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, veja o Teorema 7.2 e o Corolário 7.3 em (BARTLE, 1996), temos então que

$$\mathbf{E}[e^{i\langle z,X\rangle}] = \exp[\int_\Omega (e^{i\langle z,f(\omega)\rangle} - 1)\mu(d\psi)],$$

segue da unicidade da função característica que Y é um Poisson composto.

2- Como $\mu(\Omega) < \infty$ podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para obter as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{i\partial z_j} \int_\Omega e^{i\langle z,f_n(\omega)\rangle} - 1)\mu(d\psi) &= \int_\Omega f_j(\psi) e^{i\langle z,f(\psi)\rangle}\mu(d\psi) \\
\left(\frac{\partial}{i\partial z_j}\right)^2 \int_\Omega e^{i\langle z,f_n(\omega)\rangle} - 1)\mu(d\psi) &= \int_\Omega f_j^2(\psi) e^{i\langle z,f(\psi)\rangle}\mu(d\psi).
\end{aligned}$$

Derivando $\mathbf{E}[e^{i\langle z,X\rangle}]$ com respeito a z_j e substituindo $z = 0$, obtemos as igualdades do item 2.

3- Usando a sequência $f_n(\psi)$ introduzida acima, temos

$$X_{n,k}(\omega) = \int_{B_k} f_n(\psi) M(d\psi,\omega) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} x_p^n M(B_k \cap C_p^n,\omega)$$

para $k = 1, 2, ..., m$. Temos então que $M(B_k \cap C_p^n,\omega)$, com $1 \le k \le m$ e $p \in \mathbb{Z}^d$ são variáveis independentes. Portanto $X_{n,1}, ..., X_{n,m}$ são independentes e, portanto, $X_{n,k}(\omega) \to X_k(\omega)$ quando $n \to \infty$. Segue que $X_1, ..., X_n$ são independentes. Concluindo a demonstração da proposição. □

3.4 A Decomposição de Lévy-Itô

Nosso objetivo nesta seção será caracterizar os processos de Lévy em termos do processo de Poisson composto e do movimento Browniano e obter a partir desta caracterização uma fórmula para o expoente característico de um processo Lévy. Para tal, apresentamos o resultado a ser demonstrado, o Teorema de Lévy-Itô, em seguida apresentamos alguns lemas necessários a demonstração, como a Desigualdade de Kolmogorov. Por fim apresentamos a demonstração do Teorema e uma de suas consequências, o Teorema de Lévy-Khitchine.

Teorema 3.4.1 (Lévy-Itô)**.** *Sejam $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Lévy em $\mathbb{R}^d$ e ν sua medida de Lévy associada. Então*

1. *$J_X(ds \times dx)$ é uma medida aleatória de Poisson em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ com intensidade $\nu(dx)ds$.*

2. *ν é uma medida de Radon em $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ e satisfaz*

$$\int_{|x|\geq 1} \nu(dx) < \infty \quad , \quad \int_{|x|\leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty. \tag{3.20}$$

3. *Existem um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^d$ e um movimento browniano B_t em $\mathbb{R}^d$ com matriz de covariância A, tais que*

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\epsilon \tag{3.21}$$

onde

$$X_t^l = \int_{|x|\geq 1, s\in[0,t]} x J_X(ds \times dx) \quad e$$
$$\tilde{X}_t^\epsilon = \int_{\epsilon\leq|x|<1, s\in[0,t]} x(J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds).$$

Além disso a convergência do último termo é q.c. e uniforme para $t \in [0, T]$.

Antes de apresentarmos a demonstração deste Teorema faremos algumas observações. Começamos definindo uma medida de saltos para o processo X_t de forma semelhante ao feito na equação 3.12:

$$J_X(B) = \#\{(t, \Delta X_t) \in B \mid \Delta X_t \neq 0\}$$

onde $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$. Contudo a medida de Lévy do processo definida como sendo

$$\nu(A) = E[\#\{t \in [0, 1] \mid \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}]$$

possui uma singularidade em 0, isto é, se fixarmos $\epsilon > 0$ sabemos, uma vez que as trajetórias de um processo de Lévy são *cadlag* q.c., que $\#\{(t, \Delta X_t) \mid |\Delta X_t| \geq \epsilon\} < +\infty$, enquanto que não podemos garantir o mesmo para os saltos menores que ϵ. Neste sentido, veremos que as duas condições no segundo item do Teorema, Equação 2, são necessárias para tratar deste problema. Necessitamos ainda demonstrar a convergência q.c. e uniforme do termo:

$$\tilde{X}_t^\epsilon = \int_{\epsilon \leq |x| < 1, s \in [0,t]} x(J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds).$$

Para justificar tal convergência do último termo e as desigualdades do item 2 apresentamos alguns resultados preliminares. Dentre os quais destacamos a desigualdade de Kolmogorov. Demonstraremos também um Lema que nos permitirá concluir que $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\epsilon$ é uma função *cadlag*. Lembramos aqui que $\mathcal{D}$ denota os conjunto das funções *cadlag* e $\|S\|_t = \sup_{s \in [0,t]} \|S(s)\|$.

Lema 3.4.1. *Fixado $t > 0$, sejam $\{Y_j(s) : s \in [0,t]\}$; $j = 1, 2, ...$ processos independentes e $S_0(s) = 0$ e $S_n(s) = \sum_j^n Y_j(s)$. Suponhamos que a trajetória $Y_j(s) \in \mathcal{D}$ q.c. Então para $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$*

$$P[\max_{1 \leq j \leq n} \|S_j\|_t > 3\epsilon] \leq 3 \max_{1 \leq j \leq n} P[\|S_j\|_t > \epsilon] \tag{3.22}$$

Demonstração. Sejam $M_0 = 0$ e para k inteiro positivo, seja

$$M_k = \max_{1 \leq j \leq k} \|S_j\|_t. \tag{3.23}$$

Dados números reais $a, b > 0$ e definimos o evento

$$A_k = [M_{k-1} \leq a + b < \|S_k\|_t] \, . \tag{3.24}$$

Observamos que se $k \neq k'$ então $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$. De fato, supondo $A_k \cap A_{k'} \neq \emptyset$ e $k > k'$, temos

$$a + b < \|S_{k'}\|_t \leq M_{k-1} \leq a + b \tag{3.25}$$

o que é um absurdo. Além disso, podemos escrever

$$[M_n > a + b] = \bigcup_{k=1}^n A_k. \tag{3.26}$$

Assim

$$\begin{aligned} P\left[\|S_n\|_t > a\right] &\geq \sum_{k=1}^n P\left[A_k \cap (\|S_n\|_t > a)\right] \\ &\geq \sum_{k=1}^n P\left[A_k \cap (\|S_n - S_k\|_t \leq b)\right] \\ &= \sum_{k=1}^n P\left[A_k\right] P\left[\|S_n - S_k\|_t \leq b\right] \\ &\geq P\left[M_n > a + b\right] \min_{1 \leq k \leq n} P\left[\|S_n - S_k\|_t \leq b\right] \end{aligned}$$

Tomando $a = \epsilon$ e $b = 2\epsilon$, obtemos

$$\begin{aligned}P\left[\|S_n\|_t > \epsilon\right] &\geq P\left[M_n > 3\epsilon\right] \min_{1\leq k\leq n} P\left[\|S_n - S_k\|_t \leq 2\epsilon\right] \\ &\geq P\left[M_n > 3\epsilon\right]\left(1 - 2\max_{1\leq k\leq n} P\left[\|S_k\|_t \leq \epsilon\right]\right).\end{aligned}$$

Se $\max_{1\leq k\leq n} P\left[\|S_k\|_t \leq \epsilon\right] < \frac{1}{3}$, então

$$P[M_n > 3\epsilon] \leq 3 \max_{1\leq j\leq n} P[S_j > \epsilon] \tag{3.27}$$

donde segue

$$P[\max_{1\leq j\leq n} S_j > 3\epsilon] \leq 3 \max_{1\leq j\leq n} P[S_j > \epsilon]. \tag{3.28}$$

Por outo lado, se $\max_{1\leq k\leq n} P\left[\|S_k\|_t \leq \epsilon\right] \geq \frac{1}{3}$, então

$$3 \max_{1\leq k\leq n} P\left[\|S_k\|_t \leq \epsilon\right] \geq 1 \geq P[\max_{1\leq j\leq n} S_j > 3\epsilon] \tag{3.29}$$

em qualquer caso obtemos o resultado desejado no Lema. □

Com este resultado em mãos, estamos preparados para demonstrar o segundo Lema

Lema 3.4.2. *Considere $\{S_n(t)\}$ como no Lema 3.4.1 . Se*

$$\lim_{n,m\to\infty} P\left[\|S_n - S_m\|_t > \epsilon\right] = 0 \tag{3.30}$$

para qualquer $\epsilon > 0$. Então existe um processo estocástico $\{S(s) : s \in [0,t]\}$ tal que as trajetórias de S são cadlag q.c. e

$$\lim_{n\to\infty} ||S_n - S||_t = 0 \quad q.c. \tag{3.31}$$

Demonstração. Como estamos nas hipóteses do Lema 3.4.1, temos que

$$P[\max_{n\leq j\leq m} \|S_j - S_n\|_t > 3\epsilon] \leq 3 \max_{n\leq j\leq m} P[\|S_j - S_n\|_t > \epsilon].$$

Assim

$$\begin{aligned}P\left[\max_{n\leq j\leq m} \|S_j - S_k\|_t > 6\epsilon\right] &\leq P\left[\max_{n\leq j\leq m} \|S_j - S_n\|_t + \|S_n - S_k\|_t > 6\epsilon\right] \\ &\leq P\left[\max_{n\leq j\leq m} \|S_j - S_n\|_t > 3\epsilon\right].\end{aligned}$$

Portanto

$$P\left[\max_{n\leq j\leq m} \|S_j - S_k\|_t > 6\epsilon\right] \leq P\left[\max_{n\leq j\leq m} \|S_j - S_n\|_t > 3\epsilon\right] \tag{3.32}$$

para todo inteiro $m \geq n$. Segue que

$$P\left[\max_{n\leq j}\|S_j - S_k\|_t > 6\epsilon\right] \leq P\left[\max_{n\leq j}\|S_j - S_n\|_t > 3\epsilon\right]. \tag{3.33}$$

Como o lado direito da desigualdade converge a 0 quando $n \to \infty$ segue a convergência desejada. Além disso, como o espaço $\mathcal{D}$ é completo com métrica da convergência uniforme, temos que o limite também pertence a $\mathcal{D}$. □

Agora demonstraremos um resultado que nos ajudara a mostrar a convergência do limite acima. Na verdade este resultado nos permitirá aplicar o Lema anterior para concluirmos a convergência do limite em questão.

Lema 3.4.3 (Desigualdade de Kolmogorov)**.** *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a. independentes em $\mathbb{R}^d$ tais que $\boldsymbol{E}[X_n] = 0$ e $\boldsymbol{E}[|X_n|^2] < \infty$ para cada n. Seja*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{3.34}$$

Então

$$P\left[\sup_{n\geq 1}|S_n| > \epsilon\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^2]. \tag{3.35}$$

Demonstração. dado $1 \geq n \leq N$, observamos que

$$|S_N|^2 - |S_n|^2 = |S_N - S_n|^2 + 2(S_N - S_n)\cdot S_n \geq 2(S_N - S_n)\cdot S_n;$$

e, portanto, como $S_N - S_n$ tem média 0 e é independente de $\sigma(X_1, ..., X_n)$,

$$\mathbf{E}[|S_N|^2|A_n] \geq \mathbf{E}[|S_n|^2|A_n] \quad \text{para qualquer } A_n \in \sigma(X_1, ..., X_n).$$

Em particular, se $A_1 = [|S_1| > \epsilon]$ e

$$A_{n+1} = \left[\max_{1\leq j\leq n}|S_j| \leq \epsilon < |S_{n+1}|\right]$$

então, os A_n são disjuntos e, além disso,

$$B_N = \left[\max_{1\leq j\leq N}||S_j|| > \epsilon\right] = \bigcup_{n=1}^{N} A_n,$$

assim obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[|S_N|^2|B_N] &= \sum_{n=1}^{N}\mathbf{E}[|S_N|^2|A_n] \geq \sum_{n=1}^{N}\mathbf{E}[|S_n|^2|A_n] \\ &\geq \epsilon^2\sum_{n=1}^{N}P[A_n] = \epsilon^2 P[B_N].\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\epsilon^2 P\left[\sup_{n\geq 1}|S_n| > \epsilon\right] &= \lim_{N\to\infty}\epsilon^2 P[B_N] \\ &\leq \lim_{N\to\infty}\mathbf{E}[|S_n|^2] \leq \sum_{n=1}^{\infty}E[|X_n|^2].\end{aligned}$$

com isso concluímos a demonstração. □

Demostrados estes resultados iniciamos a demonstração do Teorema de Decomposição de Lévy-Itô:

Demonstração. Iniciamos por verificar que a medida dos saltos de X_t é uma medida aleatória de Poisson. Seja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, então $J_{X_t}(A) = \#\{0 \leq s < t : \Delta X_s \in A\}$ é um processo de contagem e também um processo de Lévy, então pela Proposição 3.2.1 ele será um processo de Poisson tal que $J_X([t_1, t_2] \times A)$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $(t_1 - t_2)\nu(A)$ e $J_X([t_1, t_2] \times A)$ é independente de $J_X([s_1, s_2] \times A)$ se $t_2 \leq s_1$. Por outro lado, tomando A e B dois conjuntos disjuntos, temos do Lema 3.2.1 que $J_{X_t}(A)$ e $J_{X_t}(B)$ são independentes, e assim podemos concluir que $J_X([t_1, t_2] \times A)$ e $J_X([s_1, s_2] \times A)$ também são independentes de s_1, s_2, t_1, t_2. Concluindo então que J_X é uma medida aleatória de Poisson com intensidade ν.

Vamos verificar agora que ν é uma medida de Radon em $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Seja $B \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ um conjunto mensurável compacto. Neste caso o número $c = \inf_{x \in B}\{|x|\}$ é estritamente positivo. Assim se $\Delta X_t \in B$ temos que $\Delta X_t \geq c$, segue

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \mathbf{E}\left[\#\{t \in [0,1]; B \ni \Delta X_t \neq 0\}\right] \\ &\leq \mathbf{E}\left[\#\{t \in [0,1]; |\Delta X_t| \geq c\right]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Suponhamos, por contradição, que o último termo acima não seja finito. Logo, existe $\omega_0 \in \Omega$ tal que $\#\{t \in [0,1]; B \ni \Delta X(\omega_0)_t \neq 0\} = \infty$, o que é um absurdo pois $X(\omega_0)_t$ é uma função cadlag. Para verificarmos

$$\int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty$$

observamos que

$$\int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty = \mathbf{E}\left[\#\{t \in [0,1]; |\Delta X_t| \geq 1\right]$$

e este último termo é finito pelo mesmo argumento que usamos ao demonstrar que ν é uma medida de Radon.

Para demonstrar a segunda desigualdade de 2, definimos para cada $\epsilon > 0$

$$X_t^\epsilon = \int_{\epsilon \leq |x| < 1, s \in [0,t]} x J_X(ds \times dx).$$

isto é, o processo que conta os saltos de tamanho maior ou igual ϵ e menores que 1. Tal processo, como já vimos na Proposição 3.3.1 é definido por uma medida aleatória de Poisson, e portanto é um processo de Poisson composto. Assim X_t^ϵ e $X_t - X_t^\epsilon$ são, pelo Lema 3.2.1, processos independentes. Temos então para $\epsilon, t > 0$ e $u \in \mathbb{R}^d$ que

$$0 < C \leq |\mathbf{E}[e^{i\langle u, X_t \rangle}]| \leq |\mathbf{E}[e^{i\langle u, X_t^\epsilon \rangle}]| \leq 1$$

onde a primeira igualdade independe de u e segue do fato de que a função característica de v.a. infinitamente divisíveis nunca se anula, veja (CHUNG, 2001) Teorema 7.6.1, e a segunda desigualdade é obtida escrevendo $X_t = X_t^\epsilon + (X_t - X_t^\epsilon)$ e usando a independência dos processos e o fato de que as funções características tem norma menor ou igual que um. Por outro lado, temos da Proposição 3.3.2 que

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}[e^{i\langle u, X_t^\epsilon\rangle}]| &= |\exp\left(\int_{\epsilon\leq|x|<1, s\in[0,t]}(e^{i\langle u,x\rangle}-1)\nu(dx)ds\right)| \\ &= |\exp\left(t\int_{\epsilon\leq|x|<1}(e^{i\langle u,x\rangle}-1)\nu(dx)\right)| \end{aligned}$$

Segue destas observações que existe $C > 0$ tal que :

$$0 < C \leq \exp\left(t\int_{\epsilon\leq|x|<1}(\cos(\langle u,x\rangle)-1)\nu(dx)\right) < \infty.$$

Temos então que

$$0 \leq \int_{\epsilon\leq|x|<1}(1-\cos(\langle u,x\rangle))\nu(dx) \leq \tilde{C}$$

onde $\tilde{C} = -\frac{\log(C)}{t}$. sando a expansão em série de Taylor e tomando o limite quando $\epsilon \downarrow 0$ obtemos

$$4\tilde{C} \geq \int_{0<|x|<1}\langle u,x\rangle^2\nu(dx).$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \int_{0<|x|<1}\langle u,x\rangle^2\nu(dx) &= \int_{0<|x|<1}|u|^2|x|^2\cos(\theta)\nu(dx) \\ &\geq \int_{0<|x|<1}|x|^2\cos(\theta)\nu(dx) \end{aligned}$$

onde θ é função de u e x. Observamos também que é possível obter uma cobertura finita $\{V_k\}$ de $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq 1\}$ de forma que para cada $u \in S^{n-1}$ tenhamos $|\cos(\theta)|^2 > \frac{1}{2}$. Segue daí

$$\int_{0\leq|x|<1}|x|^2\nu(dx) < \infty$$

como queríamos demonstrar.

Sobre a decomposição

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon\downarrow 0}\tilde{X}_t^\epsilon$$

a convergência do último termo é garantida pelo seguinte:

Afirmação: Para qualquer sequência $(\epsilon_n)_{n\geq1} \in (0,1]$ com $\epsilon_n \downarrow 0$

$$\tilde{X}_t^{\epsilon_n} = \int_{(0,t],\epsilon_n<|x|\leq\epsilon_{n-1}} x\{J_X(ds\times dx) - \nu(dx)ds\} \tag{3.37}$$

converge q.c. para um processo estocástico *cadlag*, uniformemente em intervalos limitados, quando $n \to \infty$.

De fato, Suponhamos que $\epsilon_0 = 1$ e definimos para $n \geq 1$

$$Y_n(t) = \int_{(0,t],\epsilon_n<|x|\leq\epsilon_{n-1}} x\{J_X(ds\times dx) - \nu(dx)ds\}$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j(t).$$

Observamos que

$$S_n = \int_{(0,t],\epsilon_n<|x|\leq 1} x\{J_X(ds\times dx) - \nu(dx)ds\}. \tag{3.38}$$

para $m > n$. Pela Proposição 3.3.2 tem-se $\mathbf{E}[S_n] = 0$ e

$$E[\|S_m(t) - S_n(t)\|^2] = t\int_{\epsilon_m<|x|\leq\epsilon_n} |x|^2\nu(dx).$$

Seja $r_0, r_1, r_2, ...$ uma enumeração de $([0,t]\cap\mathbb{Q})\cup\{t\}$, com $r_0 = 0$ e $r_1 = t$. Então

$$P\left[\sup_{s\in[0,t]} |S_m(s) - S_n(s)| > \epsilon\right] = \lim_{q\to\infty} P\left[\max_{0\leq j\leq q} |S_m(r_j) - S_n(r_j)| > \epsilon\right]. \tag{3.39}$$

Para q fixado, seja $0 = s_0 < s_1 < ... < s_q = t$ uma ordenação de $\{r_0, r_1, r_2, ..., r_q\}$. Então

$$S_m(t) - S_n(t) = \sum_{j=1}^{q} \int_{(s_{j-1},s_j],\epsilon_m<|x|\leq\epsilon_n} x\{J_X(ds\times dx) - \nu(dx)ds\}. \tag{3.40}$$

Usando a Proposição 3.3.2 obtemos o lado direito da igualdade é uma soma de v.a. independentes. Temos então do Lema 3.4.3, Desigualdade de Kolmogorov, que

$$\sup_{s\in[0,t]}\left[\sum_{j=1}^{q}\int x\{J_X(ds\times dx) - \nu(dx)ds\}\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_{\epsilon_m<|x|\leq\epsilon_n} |x|^2\nu(dx).$$

Logo

$$\lim_{m,n\to\infty} P\left[\|S_m(t) - S_n(t)\| > \epsilon\right] = 0 \tag{3.41}$$

e, portanto, estamos em condições de aplicar o Lema 3.4.2, o qual nos garante a existência do limite em questão e mostra que a afirmação é verdadeira.

Observamos ainda que o limite em questão independe da sequência escolhida. Uma prova deste fato é dada em (SATO, 1999) nos Lemas 20.6 e 20.7.

Para concluir a demonstração, observamos que

$$G_t = X_t - X_t^l - \lim \tilde{X}_t^\epsilon$$

é um processo de Lévy contínuo. Segue do Teorema 3.1.1 que G_t é um processo gaussiano e portanto podemos escrever:

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon\downarrow 0}\tilde{X}_t^\epsilon. \tag{3.42}$$

Concluindo assim a demonstração do Teorema. $\square$

Uma implicação importante deste resultado é que cada processo de Lévy é uma combinação de um movimento Browniano com drift e uma soma, possivelmente infinita, de processos de Poisson compostos independente. Isto também significa que todos os processos Lévy podem ser aproximados arbitrariamente por um processo de difusão de saltos, que é a soma do movimento Browniano drift e um processo de Poisson composto, um ponto que é útil tanto na teoria quanto na prática.

Este conhecimento da estrutura das trajetórias de um processo Lévy nos permitirá obter o segundo resultado fundamental da teoria: a expressão da função característica de um processo Lévy em termos da sua tripleta característica (A, ν, γ).

Para tal, basta observarmos que podemos escrever um processo de Lévy X_t, com tripleta característica (A, ν, γ), como

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\epsilon. \tag{3.43}$$

onde temos convergência q.c. e uniforme na variável t quando $\epsilon \to 0$. Lembramos que convergência q.c. implica em convergência em distribuição, temos que também a convergência das funções características (veja Teorema 18.1 de (WILLIAMS, 1991)). Temos então, uma vez que os termos presentes na decomposição são independentes entre si:

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_t}(u) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{E}[e^{i\langle u, \gamma t + B_t + X_t^l + \tilde{X}_t^\epsilon\rangle}] \\
&= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{E}[e^{i\langle u, \gamma t + B_t\rangle}]\mathbf{E}[e^{i\langle u, X_t^l\rangle}]\mathbf{E}[e^{i\langle u, \tilde{X}_t^\epsilon\rangle}] \\
&= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \exp\{it\langle u, \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle tu, Au\rangle\} \exp\{t\int_{|x|>1}(e^{iux} - 1)\nu(dx)\} \exp\{t\int_{\epsilon<|x|<1}(e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx)\} \\
&= lim_{\epsilon \downarrow 0} \exp\{it\langle u, \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle tu, Au\rangle\} + t\int_{|x|>1}(e^{iux} - 1)\nu(dx) + t\int_{\epsilon<|x|<1}(e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx)\} \\
&= \exp\{it\langle u, \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle tu, Au\rangle\} + t\int_{|x|>1}(e^{iux} - 1)\nu(dx) + t\int_{0<|x|<1}(e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx)\}.
\end{aligned}$$

Assim obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.2 (Representação de Lévy-Khitchine)**.** *Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Lévy em $\mathbb{R}^d$ com tripleta de Lévy (γ, A, ν). Então*

$$\phi_{X_t(u)} = e^{t\psi(u)} \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

onde

$$\psi(u) = i\langle u, \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au\rangle\} + \int_{|x|>1}(e^{iux} - 1)\nu(dx) + \int_{0<|x|<1}(e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx). \tag{3.44}$$

3.5 Conclusões

Observamos ao longo deste trabalho a grande importância dos processos de Poisson e do movimento Browniano, uma vez que vimos no resultado principal estudado neste trabalho, o Teorema de Lévy-Itô, que tais processos são essenciais ao entendimento dos processos Lévy. Vimos também a importância do estudos dos processos de Poisson para entendimento dos processos de salto e sua relação com os processos contagem. Além disso, foi ainda demonstrado que os processos de Lévy são infinitamente divisíveis e citada sua relação com a importante classe das distribuições infinitamente divisíveis. Cabe aqui ressaltar que no livro de (SATO, 1999), a fórmula de Lévy-Kitchen é obtida para as distribuições infinitamente divisíveis sem a utilização da decomposição de Lévy-Itô, veja Capítulo 2, Teorema 8.1.

Futuramente esperamos dar continuidade a este estudo, seguindo o roteiro apresentado no livro de (TANKOV, 2003).

Referências

APPLEBAUM, D. et al. *Quantum Independent Increment Processes I: From Classical Probability to Quantum Stochastic Calculus*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 45.

ATHREYA, K.; LAHIRI, S. *Measure Theory and Probability Theory*. [S.l.]: Springer, 2006. (Springer Texts in Statistics). Citado na página 15.

BARTLE, R. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. [S.l.]: Wiley, 1996. (Wiley Classics Library). Citado 3 vezes nas páginas 15, 36 e 60.

BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*. [S.l.]: Wiley, 2012. (Wiley Series in Probability and Statistics). Citado 2 vezes nas páginas 14 e 72.

CHUNG, K. *A Course in Probability Theory*. [S.l.]: Academic Press, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 65.

DOANE, D.; SEWARD, L. *Applied Statistics in Business and Economics*. [S.l.]: McGraw-Hill Irwin, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

DURRETT, R. *Probability: Theory and Examples*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics). Citado na página 29.

HIGHAM, D. *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics and Computation*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. (An introduction to financial option valuation: mathematics, stochastics and computation, v. 13). Citado na página 14.

JAMES, B. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004. (Projeto Euclides). ISBN 9788524401015. Citado na página 34.

KALLENBERG, O. *Foundations of Modern Probability*. [S.l.]: Springer, 2002. (Applied probability). ISBN 9780387953137. Citado 3 vezes nas páginas 14, 38 e 46.

KARATZAS, I.; SHREVE, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. [S.l.]: Springer New York, 1991. (Graduate Texts in Mathematics). Citado na página 72.

KARATZAS, I.; SHREVE, S. *Methods of Mathematical Finance*. [S.l.]: Springer, 1998. (Applications of mathematics). Citado na página 72.

OLIVEIRA, A. N. de. *A Métrica de Skorohod*. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, 2007. Citado na página 27.

PROTTER, P. *Stochastic Integration and Differential Equations: Version 2.1*. [S.l.]: U.S. Government Printing Office, 2004. (Applications of mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 56.

ROSS, S. *Introduction to Probability Models*. [S.l.]: Elsevier Science, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 29.

SATO. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Citado 3 vezes nas páginas 47, 67 e 69.

SCHOUTENS, W.; CARIBONI, J. *Levy Processes in Credit Risk*. [S.l.]: Wiley, 2010. (The Wiley Finance Series). ISBN 9780470685068. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 45.

TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2003. (Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series). Citado 5 vezes nas páginas 7, 9, 14, 29 e 69.

WILLIAMS, D. *Probability with Martingales*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1991. (Cambridge mathematical textbooks). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 68.