

Universidade Federal do Espírito Santo

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Nível Doutorado

Rodolfo Camargo de Freitas

**Perturbações cosmológicas de
origens quântica e clássica:
oscilações no espectro de potência e
o condensado de Bose-Einstein**

Vitória

2014

Rodolfo Camargo de Freitas

**Perturbações cosmológicas de
origens quântica e clássica:
oscilações no espectro de potência e
o condensado de Bose-Einstein**

Tese apresentada como requisito
parcial para a obtenção do título de
Doutor em Física, pelo Programa
de Pós-Graduação em Física da
Universidade Federal do Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. Sérgio V. B.
Gonçalves

Vitória

2014

A minha esposa, Petra.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais, pelo exemplo, educação e possibilidades que me deram de realizar minhas conquistas. Agradeço também minha esposa pelos anos de companheirismo durante o meu treinamento acadêmico.

Agradeço também ao Prof. Sergio Gonçalves pelos oito anos de orientação e treinamento, além, é claro, dos professores da UFES, aos colegas do PPGFis e também aos colegas do grupo de cosmologia.

Também o meu agradecimento ao Dr. Thorsten Battefeld por ter aceito ser meu orientador durante o estágio de doutorado na Alemanha, por ter confiado no meu trabalho e pelos ótimos ensinamentos. Agradeço também a Universidade de Göttingen, ao Instituto de Astrofísica da Universidade de Göttingen e ao Prof. Jens Niemeyer pela hospitalidade.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES, CNPq e DAAD (Alemanha).

*“If we begin with certainties, we shall end in doubts; but if we begin with doubts,
and are patient in them, we shall end in certainties.”*

(Sir Francis Bacon, *De Augmentis Scientiarum*)

Resumo

Perturbações relativísticas de origem quântica no universo primordial são as “sementes” que evoluíram nas estruturas em grandes escalas através de instabilidades gravitacionais clássicas. Nós estudamos o formalismo invariante de calibre para as perturbações cosmológicas, aplicamos em um modelo inflacionário com dois campos onde um destes campos sofre um ganho de massa, que provoca uma guinada abrupta na trajetória dos campos, resultando em oscilações no espectro de potência primordial com amplitudes limitadas pelos dados observacionais. Estudamos também a formação de estruturas em um modelo onde a matéria escura é descrita por partículas que sofre uma condensação de Bose-Einstein.

Palavras-chaves: inflação, perturbação quântica, campo escalar, matéria escura, condensado de Bose-Einstein.

Abstract

The relativistic perturbations of quantum origin are the “seeds” that evolved into the large scale structures throughout classical gravitational instabilities. We study the gauge invariant formalism for the cosmological perturbations and we apply into a two fields model, where one of them suffers a gain of mass, that causes a sharp turn in the fields trajectory, resulting in oscillations of the primordial power spectrum with amplitudes bounded by the observational data. We also study the structure formation within a dark matter model, where dark matter particles are described by a Bose-Einstein condensate.

Key-words: *inflation, quantum perturbation, scalar field, dark matter, Bose-Einstein condensate.*

Lista de Figuras

4.1	Evolução dos campos escalares	52
4.2	Parâmetro da equação de estado	53
4.3	Correção do espectro de potência	68
4.4	Correção em função de N	68
4.5	Correção do espectro de potência	69
4.6	Correção em função das massas	69
4.7	Correção do espectro de potência	70
4.8	Correção em função das energias	70
4.9	Comparação entre correções	71
5.1	Parâmetro de Hubble	81
5.2	Potencial escalar	85
5.3	Contraste de densidade	86
5.4	Contraste de densidade	87
5.5	Potencial escalar	88
5.6	Contraste de densidade	89
5.7	Parâmetro de rolamento lento	96

Sumário

1	Introdução	4
2	Relatividade Geral e Cosmologia	9
2.1	Gravitação	11
2.2	Cosmologia	14
2.3	Inflação cósmica	22
3	Teoria de perturbações	29
3.1	Transformações de calibre	31
3.2	Equações de movimento	36
3.3	Flutuações durante a inflação	37
4	Excitações de campos pesados durante a inflação	44
4.1	Equações de base	47
4.1.1	Antes da transição, $t \leq t_*$	48
4.1.2	Após a transição, $t \geq t_*$	50
4.1.3	Transição abrupta	53
4.2	Perturbações	54
4.2.1	Antes da transição, $t \leq t_*$	57
4.2.2	Após a transição, $t \geq t_*$	59
4.2.3	Transição abrupta	60
4.3	Condições de continuidade	62
4.3.1	Transição abrupta	62

4.3.2	O caso completo: ambos os campos	64
4.4	Espectro de potência	65
4.4.1	Transição abrupta	66
4.4.2	O caso completo	66
5	Matéria escura: condensação de Bose-Einstein	72
5.1	Dinâmica de fundo	75
5.1.1	Matéria escura não condensada	76
5.1.2	Matéria escura na forma de um condensado de Bose-Einstein	77
5.1.3	Evolução cosmológica durante a transição de fase	78
5.2	Perturbações cosmológicas de densidade	82
5.2.1	Universo preenchido por bárions e matéria escura	84
5.2.2	Universo preenchido por bárions, matéria escura e constante cosmo- lógica	85
5.3	Equação de estado politrópica e o universo primordial	88
5.3.1	Dinâmica cósmica	91
5.3.2	Perturbações escalares	97
6	Conclusão	99
A	Perturbações	105
B	Coefficientes de Bogoliubov	108
	Referências Bibliográficas	113

Capítulo 1

Introdução

Desde que a humanidade começou a questionar a natureza das coisas, a origem do universo e de tudo que nele existe figura como uma das principais questões. Tome como exemplo a importância cultural das histórias, lendas e tradições de vários povos a respeito da criação do mundo. Mesmo sendo a origem de tudo uma questão fundamental, foi apenas com a criação da teoria geral da relatividade (TGR) [1–3] em 1915 que tivemos a possibilidade de começar a entender e descrever a origem e evolução do universo. Mesmo assim, apenas em 1929 encontramos os primeiros indícios experimentais [4] que indicavam que o comportamento dinâmico do universo em grandes escalas era consistente com modelos cosmológicos apoiados na TGR.

Logo no alvorecer da nova teoria de gravitação, a evolução do universo como o conhecíamos foi objeto de estudo de Einstein, Friedmann e Lemaître. Em um de seus primeiros trabalhos em cosmologia relativística Einstein percebeu que a TGR permitia prever um universo com espaço-tempo não estático, que ia de encontro àquilo que ele e muitas outras pessoas acreditavam (e sabiam) a respeito do cosmos. Em 1917, no trabalho “Considerações Cosmológicas da Teoria Geral da Relatividade” [5] ele introduz nas equações de campo da TGR uma constante, que ficou conhecida como constante cosmológica, e que reproduziria o universo estático. Mais tarde, quando já convencido pelas medidas experimentais de que o universo não era estático, ele mesmo teria refutado a constante cosmológica [6].

Ainda no início da década de 1920, Alexander Friedmann assumiu que o universo é homogêneo e isotrópico e encontrou soluções cosmológicas da TGR [7] que descreviam um universo que poderia se expandir ou se contrair, tendo curvatura espacial positiva, nula, ou negativa, que representam um espaço esférico, plano ou hiperbólico. Em 1927 Georges Lemaître calculou, de forma independente, as equações que até hoje são conhecidas como equações de Friedmann [8] e que descrevem um espaço-tempo em “movimento”, ou seja, que evolue com o tempo. Seguindo o raciocínio de que hoje o universo tem um determinado tamanho e amanhã ele será maior e de que ontem ele foi menor, Lemaître extrapolou a evolução do universo para o passado e propôs [9], pela primeira vez na história da física e astronomia como ciências, que o universo poderia ter sido iniciado em um ponto (de tamanho nulo), o qual ele chamou de “átomo primordial”. Nascia então a teoria que popularmente ficou conhecida com o nome sarcástico de teoria do “*Big Bang*” [10].

Apesar de ainda na primeira década do século XX Vesto Slipher ter medido o desvio para o vermelho de nebulosas espirais [11], ter interpretado este desvio como sendo um desvio Doppler e concluído que estas nebulosas se afastavam da Terra, foi apenas em 1926 que Edwin Hubble provou [12], através da medida das distâncias às nebulosas espirais, que as mesmas eram objetos (galáxias) localizadas fora da Via-Láctea. Em 1929, usando as medidas de distâncias e desvio Doppler de várias galáxias, ele também determinou uma relação entre a distância e a velocidade de afastamento, que ficou conhecida como lei de Hubble [4, 13]. Foi essa a confirmação experimental de que o universo poderia estar em expansão, como Friedmann e Lemaître haviam previsto anos antes usando a TGR.

Mas essa ainda não era a prova cabal de que o universo tinha uma origem no passado, como imaginava Lemaître. Durante muitos anos o modelo de Lemaître concorreu com o modelo estático defendido por Fred Hoyle [14], no qual matéria é criada enquanto as galáxias se separam umas das outras, fazendo com que o universo seja praticamente o mesmo em qualquer ponto do espaço-tempo. Com o modelo de Lemaître é possível assumir que inicialmente o universo era muito quente, denso e preenchido por fótons e um plasma quente de hidrogênio. Com a expansão do universo este plasma esfria, o que permite a combinação de prótons e elétrons para formar átomos neutros (recombinação)

e libera os fótons para viajarem livremente (desacoplamento dos fótons). Seguindo essa ideia foi possível prever a existência de um fundo de radiação que hoje teria a frequência da radiação de micro-ondas e temperatura próxima ao zero absoluto. Em 1965 foi feita a primeira medida [15] da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (RCFM). A medida da RCFM e a previsão da abundância de elementos leves produzidos durante a recombinação foram a prova cabal da teoria de uma origem quente e densa do universo e constituem hoje os pilares daquele que é conhecido como o modelo cosmológico padrão.

Desde então medidas cada vez mais precisas das flutuações de temperatura da RCFM, sua distribuição no céu e até mesmo sua polarização foram feitas por vários experimentos e entre eles podemos destacar as missões espaciais dos satélites *Cosmic Background Explorer* (COBE), *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) e *Planck*. Hoje sabemos que [16], exceto por pequenas flutuações, a RCFM tem um espectro de radiação de corpo negro com temperatura de $2,72548 \pm 0,00057$ K e que a recombinação aconteceu aproximadamente 377 mil anos após o nascimento do universo.

Mas são as pequenas flutuações na temperatura que nos dão as informações mais importantes sobre o universo hoje e no passado. Essas flutuações, também chamadas de anisotropias da RCFM, são produzidas primariamente devido a interação destes fótons com flutuações na densidade de matéria, que posteriormente cresceram devido instabilidades gravitacionais e resultaram nas estruturas que observamos em grandes escalas. A origem das flutuações de densidades é objeto de estudo da primeira parte desta tese.

Para compreendermos completamente o processo de formação de estruturas devemos também saber quais são os materiais constituintes do universo e em que proporção cada um deles contribui na densidade total. Pode parecer natural acharmos que toda a matéria do universo é feita das partículas que conhecemos do modelo padrão de partículas, mas observações cosmológicas, astronômicas e astrofísicas nos mostram a existência de componentes exóticos que não se encaixam no modelo padrão.

Primeiramente, a nucleosíntese primordial, que prevê acuradamente a abundância dos elementos químicos leves, também prevê que a matéria bariônica perfaz entre 4 – 5% da densidade crítica do universo. Ainda na década de 1930 a massa total de aglomera-

dos de galáxias foram estimadas através da observação do movimento das galáxias nas bordas dos aglomerados e comparadas com a estimativa feita usando a luminosidade total do aglomerado [17], o que nos permitiu concluir que naqueles aglomerados há várias vezes mais massa que interage gravitacionalmente e não emite ou absorve qualquer tipo de radiação do que matéria que emite algum tipo de onda eletromagnética. Mais tarde chegou-se a mesma conclusão [18] ao analisar-se as curvas de rotação (velocidade de rotação \times a distância em relação ao centro galáctico) de estrelas em galáxias espirais. Hoje, com os dados mais recentes das flutuação da RCFM sabemos que a matéria escura (como ficou conhecida essa componente que não emite e nem absorve radiação) perfaz 26,8% da densidade total do universo [16].

O leitor atento pode ter percebido que ainda falta pelo menos uma componente que corresponde a cerca de 2/3 da densidade de energia total do universo¹. Assim como a matéria escura, temos evidências indiretas da existência do que ficou conhecido como energia escura. A primeira evidência já mencionamos, que é exatamente a necessidade dessa componente para termos um universo aproximadamente plano, como mostram as medidas da RCFM [16]. Outro forte sinal da existência desta outra componente escura são as medidas de distância de supernovas [19, 20], que indicam que o universo está a se expandir de maneira acelerada, quando o que deveríamos esperar de um universo sem energia escura seria uma expansão desacelerada. Dos vários modelos conhecidos de energia escura, o que descreve melhor os dados da RCFM, das medidas de distâncias e da distribuição de estruturas em grande escalas é o de uma constante cosmológica (que é também o mais simples, já que conta com apenas um parâmetro) que permeia todo o espaço-tempo e domina a dinâmica da expansão do universo em grandes escalas.

Entre os principais desafios da cosmologia hoje podemos citar: i) explicar a origem das flutuações primordiais que evoluíram nas estruturas de grande escala, ii) entender o que são a matéria e a energia escuras, o que inclui determinar a natureza, possíveis componentes e o exato comportamento e iii) qual o papel delas na formação de estruturas e na evolução do universo.

¹Bárions, ou seja, a matéria ordinária da qual somos feitos, e a matéria escura somam juntas quase 32% do conteúdo material do universo.

No Capítulo 2 faremos uma breve revisão de gravitação e cosmologia, o que incluirá um estudo da inflação cósmica. Também serão bem elementares as noções de teoria cosmológica de perturbações que estudaremos no Capítulo 3. No Capítulo 4, que tem como referência o artigo [21], estudaremos um modelo inflacionário de dois campos, onde o campo auxiliar provoca correções oscilatórias no espectro de potência das perturbações devido a um ganho de massa. Já no Capítulo 5 iremos estudar um modelo de matéria escura que passa por um processo de condensação de Bose-Einstein, sendo que a parte perturbativa deste modelo foi nosso objeto de análise em [22]. Ainda no mesmo capítulo iremos generalizar a equação de estado da matéria escura condensada para desenvolvermos um modelo de universo primordial inflacionário e, assim como fizemos em [23], estudaremos as perturbações cosmológicas neste modelo.

Capítulo 2

Relatividade Geral e Cosmologia

A Relatividade Geral (RG) é a teoria que descreve o espaço-tempo e a gravitação [24–26]. Apesar de ter uma descrição matemática mais elaborada que a mecânica Newtoniana e nos levar a resultados que fogem do senso comum, a ideia essencial por trás da RG é bem simples e direta. Enquanto muitas interações (forças) da natureza são campos definidos no espaço-tempo, em gravitação a interação gravitacional é o próprio espaço-tempo. O que experimentamos como sendo a gravitação, ou o campo gravitacional, é na verdade a manifestação da curvatura do espaço-tempo.

O espaço-tempo pode ser definido, superficialmente, como sendo um conjunto quadridimensional em que três elementos representam as coordenadas espaciais, um elemento representa a coordenada temporal e cada ponto no espaço-tempo é chamado de evento. Posto assim fica a impressão de que não existe diferença entre a noção de espaço-tempo Newtoniano e relativístico. Em ambos os casos temos a noção de passado e futuro sabendo que um corpo material só pode viajar “adiante” na coordenada temporal (a “seta” do tempo tem um único sentido), enquanto na coordenada espacial qualquer sentido de movimento é permitido. A principal diferença entre as duas noções da estrutura do espaço-tempo está no conceito de simultaneidade. Na mecânica Newtoniana quaisquer dois eventos separados no espaço e que sejam simultâneos o serão para quaisquer observadores, ao passo que na mecânica relativística essa afirmação nem sempre é verdade. O cerne da diferença entre os dois conceitos de simultaneidade é a não existência de um referencial

preferencial na teoria relativística. Apesar do observador ainda poder definir uma noção de simultaneidade, essa noção irá depender do estado de movimento deste observador.

Considere dois observadores, O e O' , sendo que O' viaja com velocidade v na direção espacial x em relação a O . Se ambos sincronizarem seus relógios antes do observador O' começar a se mover, um evento p com coordenadas (t, x, y, z) observado por O terá coordenadas (t', x', y', z') quando observado por O' . Os dois sistemas de coordenadas do evento p podem ser relacionados através das transformações de Lorentz

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.2)$$

$$y' = y, \quad (2.3)$$

$$z' = z, \quad (2.4)$$

que no caso $v/c \ll 1$ se reduzem às transformações de Galileu, onde c é a velocidade da luz. A conclusão mais simples que podemos tirar das transformações de Lorentz é que não existe um observador absoluto ou preferencial e as coordenadas do espaço-tempo não são mais fisicamente interessantes, já que as mesmas dependem tanto dos observadores quanto da estrutura do espaço-tempo. Em relatividade a quantidade que é absoluta e independente do observador é o intervalo espaço-tempo, que podemos escrever como sendo

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.5)$$

onde as quantidades dx^i representam a distância infinitesimal entre dois eventos. A distância ds é invariante por transformações de coordenadas, ou seja,

$$ds' = ds. \quad (2.6)$$

O intervalo espaço-temporal como descrito em (2.5) (comumente chamado de elemento de linha) representa o intervalo entre dois eventos em um espaço-tempo quadri-dimensional plano, também conhecido como espaço-tempo de Minkowski. Para o caso de estruturas

espaço-temporais mais gerais podemos escrever

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.7)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico e os índices repetidos representam somas. Neste trabalho vamos usar a convenção de que, no espaço quadri-dimensional, índices gregos representam as quatro coordenadas do espaço-tempo e índices latinos representam apenas as coordenadas espaciais. Vamos rotular a coordenada temporal como sendo zero, ou seja, $x^0 \equiv ct$, e as coordenadas espaciais x^i como sendo $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ e $x^3 \equiv z$, onde x , y e z são as coordenadas Cartesianas. O produto interno entre dois tensores v_μ e u^μ é

$$v_\mu u^\mu \equiv g_{\mu\nu} v^\mu u^\nu = -v^0 u^0 + \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad (2.8)$$

sendo que no lado direito da equação (2.8) usamos a métrica do espaço-tempo de Minkowski. Em um espaço n -dimensional temos que

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\alpha_\alpha = n, \quad (2.9)$$

onde δ^α_α é o traço do tensor de Kronecker.

2.1 Gravitação

Apesar dos avanços da relatividade, a mesma ainda não era compatível com a lei de gravitação Newtoniana que, além de tratar de sistemas não-inerciais, também envolve a noção de influências instantâneas de um corpo em outro. Einstein procurava uma nova teoria do espaço-tempo e da gravitação, e a primeira ideia por trás desta nova teoria é a de que todos os corpos são influenciados pela gravidade e todos eles interagem da mesma maneira com o campo gravitacional, o que ficou conhecido como princípio de equivalência. A segunda ideia é o princípio de Mach, que descrito de forma bem simples, afirma que a estrutura do espaço-tempo é influenciada pela presença de matéria.

Na teoria geral da relatividade, assim como na teoria especial da relatividade, as propriedades independentes dos observadores do espaço-tempo são descritas pela métrica. No entanto, a métrica não precisa ser necessariamente plana, ou seja, a curvatura (que é a medida do quanto a métrica é diferente da planura) causa o efeito físico normalmente chamado de gravitação. A curvatura do espaço-tempo se relaciona com a distribuição de matéria-energia segundo as equações de Einstein. Encontrar as equações de Einstein exige um ferramental matemático bastante elaborado, o que foge do objetivo deste trabalho. O leitor ainda não habituado a teoria de gravitação pode consultar os livros-textos [24–26], mas o fundamental aqui é entender como se aplica a TGR na cosmologia. Para tanto, começamos apresentando as equações tensoriais de Einstein, que são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura, também chamado de tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é, novamente, a métrica do espaço-tempo, R é o escalar de curvatura, ou escalar de Ricci, e se relaciona com o tensor de curvatura, que é invariante¹, segundo $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, G é constante de gravitação, c a velocidade da luz e $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia. O lado esquerdo da equação de Einstein (2.10) é chamado de tensor de Einstein (muitas vezes escrito como $G_{\mu\nu}$) e descreve a curvatura do espaço-tempo, enquanto no lado direito o tensor momento-energia descreve o conteúdo material do universo ou do sistema em estudo.

Da geometria diferencial sabemos que o tensor de curvatura de um variedade Riemanniana é

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}, \quad (2.11)$$

sendo que as derivadas parciais de um tensor $\theta^{\alpha\beta}$ qualquer em relação as coordenadas x^{μ} são $\theta^{\alpha\beta}_{,\mu} = \partial_{\mu}\theta^{\alpha\beta} = \frac{\partial\theta^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}$, e os tensores $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ são chamados conexões, que são escritos em função do tensor métrico como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{g^{\alpha\beta}}{2} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (2.12)$$

¹Invariante no sentido de ser independente de qualquer transformação de coordenadas. Daqui em diante vamos chamar de invariante toda grandeza que for independente do observador.

Já mencionamos que uma propriedade fundamental da TGR é a invariância das leis da Física por transformações gerais de coordenadas. Em geometria diferencial as transformações que ligam um escalar ϕ , um vetor u^μ e um tensor $\theta^{\mu\nu}$ de um sistema de coordenadas x^μ com um sistema $x^{\mu'}$ são

$$\phi'(x^{\mu'}) = \phi(x^\mu), \quad (2.13)$$

$$u^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} u^\nu, \quad (2.14)$$

$$\theta^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} \theta^{\alpha\beta}, \quad (2.15)$$

que podemos generalizar para ordens superiores

$$\Theta^{\mu'\nu'\dots\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} \dots \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\rho} \Theta^{\alpha\beta\dots\rho}. \quad (2.16)$$

Também temos as derivadas parciais de tensores, que através de um cálculo direto usando as transformações apresentadas acima, podemos verificar que não se transformam como tensores. Em geometria diferencial precisamos substituir as derivadas parciais por derivadas covariantes (estas sim são tensores) que, para um tensor misto $\theta^\mu{}_\nu$ é

$$D_\alpha \theta^\mu{}_\nu = \nabla_\alpha \theta^\mu{}_\nu = \theta^\mu{}_{\nu;\alpha} \equiv \theta^\mu{}_{\nu,\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \theta^\beta{}_\nu - \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \theta^\mu{}_\beta, \quad (2.17)$$

onde no lado esquerdo mostramos as maneiras mais comuns de se denotar a derivada covariante.

As conexões escritas como na forma encontrada na equação (2.12) são ditas compatíveis com a métrica e delas surgem duas importantes propriedades. A primeira delas é a simetria das conexões compatíveis, ou seja, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$, e a segunda propriedade é a anulação da derivada covariante do tensor métrico (simétrico), ou seja,

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0. \quad (2.18)$$

No final podemos concluir que as equações de Einstein relacionam a estrutura do

espaço-tempo, representada através da métrica, com o conteúdo material do sistema em estudo, de maneira que as leis da Física sejam invariantes por transformações de coordenadas. Além disso, a estrutura do espaço-tempo é definida e modificada pela matéria, que por sua vez tem sua dinâmica regida pela estrutura do espaço-tempo.

2.2 Cosmologia

Agora que já construímos uma teoria de gravitação que garante a equivalência de todos os observadores precisamos, primeiramente, construir uma métrica que descreva a dinâmica do universo como nós o observamos, e portanto a métrica que iremos usar tem de dar conta de descrever a expansão do universo. Quando apontamos um telescópio para o céu podemos ver estruturas como estrelas, planetas, asteróides, galáxias e até aglomerados de galáxias. Mas todas essas estruturas estão separadas por imensos espaços vazios. Durante décadas assumimos, através do Princípio Cosmológico, que o universo é homogêneo e isotrópico. Foi só mais tarde que as medidas da RCFM mostraram a veracidade da isotropia, enquanto que as observações de estruturas em grandes escalas indicam que o universo é estatisticamente homogêneo em escalas maiores que 100 Mpc ², que é justamente a escala que chamamos de “grande escala”.

A métrica que descreve um espaço homogêneo e isotrópico em expansão [24, 27, 28] é conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e, em coordenadas esféricas, é escrita como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.19)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala do universo, que descreve a expansão e evolução da estrutura do espaço-tempo, enquanto κ é o parâmetro de curvatura da seção espacial. Daqui em diante vamos trabalhar em um sistema de unidades onde a velocidade da luz é $c = 1$. Como já mencionamos várias vezes anteriormente, as medidas da RCFM indicam que

² 1 Mpc (Megaparsec) é uma unidade de medida de distâncias, que evidentemente equivale a 10^6 pc (parsec), sendo que $1 \text{ pc} \approx 3,3 \text{ anos-luz}$.

a curvatura do universo é nula. Se fizermos $\kappa = 0$ e usarmos coordenadas cartesianas podemos comparar a métrica FLRW (2.19) com (2.7) e identificarmos as componentes

$$g_{00} = -1, \quad g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}, \quad (2.20)$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronecker e $i, j = 1, 2, 3$.

O sistema de coordenadas $x^\mu = (t, x, y, z)$ é chamado comóvel, pois observadores imóveis no sistema de coordenadas comóvel estão também imóveis em relação à expansão. Dois observadores distantes \vec{r} no sistema de coordenadas comóvel tem uma distância física, também chamada própria, de

$$\vec{r}_{\text{fis}} = a(t)\vec{r}_{\text{com}}. \quad (2.21)$$

Podemos também derivar a equação acima em relação ao tempo para encontrarmos a velocidade física dos observadores que estejam imóveis no sistema de coordenadas comóvel, de onde vem

$$\vec{v}_{\text{fis}} = \dot{\vec{r}}_{\text{fis}} = \dot{a}\vec{r}_{\text{com}} = H\vec{r}_{\text{fis}}, \quad (2.22)$$

que nos dá a lei de Hubble, onde $f(t) = df(t)/dt$ é a derivada em relação ao tempo próprio e $H \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble.

A estrutura causal do universo é determinada pela propagação da luz no espaço-tempo de FLRW. Para fótons (de massa nula) temos que $ds^2 = 0$, e portanto definimos o horizonte comóvel de partícula

$$\tau \equiv \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.23)$$

que é a máxima distância que um fóton pode viajar em um determinado intervalo de tempo. Note, pela expressão acima, que essa distância depende da dinâmica do universo (o fator de escala) e também da geometria (curvatura). Aqui a dependência em relação a geometria não é tão evidente pois escolhemos um espaço plano. Podemos também chamar τ de tempo conforme ou comóvel, pois

$$dt = a d\tau, \quad (2.24)$$

que, se for substituído na métrica plana de FLRW (2.19) nos dá a métrica conforme

$$ds^2 = a^2(\tau) (-d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j) , \quad (2.25)$$

que muitas vezes pode facilitar alguns cálculos, e nos permite identificar o tensor métrico

$$g_{00} = -a^2 , \quad g_{ij} = a^2 \delta_{ij} . \quad (2.26)$$

Deste ponto em diante calcular o tensor de Einstein no espaço-tempo de FLRW se resume a manipular o tensor métrico. Começamos aplicando o tensor métrico (2.20) nas conexões (2.12) e encontramos

$$\Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \delta_{ij} , \quad \Gamma_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j , \quad (2.27)$$

onde as componentes Γ_{00}^0 , Γ_{00}^i , Γ_{0i}^0 e Γ_{ij}^k são nulas³. Se, ao contrário, usarmos a métrica conforme (2.26) ganhamos um termo extra para as conexões

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a} , \quad \Gamma_{ij}^0 = \frac{a'}{a} \delta_{ij} , \quad \Gamma_{j0}^i = \frac{a'}{a} \delta^i_j , \quad (2.28)$$

sendo que, novamente, as componentes restantes das conexões $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ são nulas e $f'(\tau) = df(\tau)/d\tau$ é a derivada em relação ao tempo comóvel.

O próximo passo é calcular o tensor de curvatura $R_{\mu\nu}$, dado em função das conexões pela equação (2.11), e também o escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, e então

$$R_{00} = -3 \left(\dot{H} + H^2 \right) , \quad R_{ij} = (\dot{H} + 2H^2) a^2 \delta_{ij} , \quad (2.29)$$

$$R = -6(\dot{H} + 2H^2) , \quad (2.30)$$

³Caso considerassemos a curvatura $\kappa \neq 0$ a componente Γ_{ij}^k seria não nula e conteria justamente os termos de curvatura.

enquanto que, na métrica conforme, teremos

$$R_{00} = -3\mathcal{H}' \quad , \quad R_{ij} = (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \delta_{ij} \quad , \quad (2.31)$$

$$R = -\frac{6}{a^2}(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \quad , \quad (2.32)$$

onde $\mathcal{H} = a'/a$.

O tensor de Einstein é definido em função do tensor de curvatura, da métrica e do escalar de curvatura como sendo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad , \quad (2.33)$$

e que tem componentes

$$G_{00} = 3H^2 \quad , \quad G_{ij} = -(\dot{H} + 3H^2)a^2\delta_{ij} \quad , \quad (2.34)$$

quando usamos a métrica no tempo próprio, enquanto que, se usarmos a métrica no tempo conforme teremos

$$G_{00} = 3\mathcal{H}^2 \quad , \quad G_{ij} = -(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\delta_{ij} \quad . \quad (2.35)$$

Já temos o lado esquerdo das equações de Einstein (2.10), que descreve a geometria do espaço-tempo. Agora precisamos completar nossas equações de movimento com o conteúdo material do universo, ou seja, determinar as componentes do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Começamos introduzindo um conjunto de observadores com trajetórias no espaço-tempo quadri-dimensional perpendiculares ao vetor de quadri-velocidade

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (2.36)$$

onde λ é o tempo próprio dos observadores e a quadri-velocidade deve obedecer a relação

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu = -1 \quad . \quad (2.37)$$

Precisamos também do tensor projeção $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, que projeta outros tensores no plano ortogonal a quadri-velocidade u^μ . Finalmente, o tensor momento-energia de um fluido imperfeito é

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p h^{\mu\nu} + (u^\mu q^\nu + q^\mu u^\nu) + \pi^{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

sendo ρ a densidade de matéria/energia, p a pressão do fluido, que pode ser relacionado com a densidade através de uma equação de estado, q^μ é o fluxo de energia e $\pi^{\mu\nu}$ é a pressão anisotrópica. Para o caso de um fluido perfeito, o fluxo de energia é nulo, assim como a pressão anisotrópica, ou seja, $q^\mu = 0 = \pi^{\mu\nu}$, o que nos permite reescrever o tensor momento-energia

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Em um referencial comóvel, a quadri-velocidade de um fluido em repouso é $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ se usarmos o tensor métrico (2.20) e $u^\mu = (1/a, 0, 0, 0)$ se usarmos a métrica conforme (2.26). Portanto, podemos calcular as componentes do tensor momento-energia

$$T^0_0 = \rho, \quad T^i_j = -p \delta^i_j. \quad (2.40)$$

No tempo próprio, relacionamos as componentes (2.40) do tensor momento-energia com as componentes (2.34) do tensor de Einstein, e encontramos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (2.41)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (2.42)$$

que são as equações de movimento para um universo homogêneo, isotrópico e com seção espacial plana. A equação (2.41) é conhecida como equação de Friedmann e, para encontrarmos a equação de aceleração (2.42), precisamos usar a equação de Friedmann (2.41) nas componentes espaciais das equações de Einstein.

Da geometria diferencial podemos calcular que a derivada covariante do tensor de

Einstein $G_{\mu\nu}$ é nula, ou seja

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (2.43)$$

portanto, derivando as equações de Einstein (2.10), encontramos

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (2.44)$$

que é chamada de conservação do tensor momento-energia. Se tomarmos as componentes espaciais da conservação do tensor momento-energia (2.44), ou seja, $\nu = i$, encontramos que $\nabla p = 0$, onde ∇ é o operador gradiente, o que garante que a pressão não depende da posição no espaço. Tomando a componente temporal, ou seja, $\nu = 0$, temos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.45)$$

que é a equação da conservação da energia, e que poderia ser obtida apenas combinando as equações de movimento (2.41) e (2.42).

O mesmo procedimento para a métrica comóvel (2.26) resulta nas relações equivalentes

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -\frac{4\pi G}{3} a^2 (\rho + 3p), \quad (2.47)$$

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0. \quad (2.48)$$

A matéria bariônica com baixa dispersão de velocidades tem pressão praticamente nula, assim como a matéria escura, enquanto matéria relativística, como fótons e neutrinos, tem equação de estado $p = \rho/3$. Como esses são os principais componentes do universo é muito comum usarmos como conteúdo material fluidos com equação de estado barotrópica, ou seja,

$$p = \omega\rho, \quad (2.49)$$

onde ω é o parâmetro, constante, da equação de estado e que tem os valores $\omega = 0$ para um fluido de pressão nula, como bárions e matéria escura (também chamados de poeira),

$\omega = 1/3$ para um fluido de partículas relativísticas, como fótons e neutrinos, e $\omega = -1$ para um fluido de densidade constante, também chamado de constante cosmológica. Portanto, para um fluido com equação de estado barotrópica, podemos resolver a equação de conservação da energia (2.45) para mostrarmos que

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.50)$$

que, se substituirmos os três valores do parâmetro da equação de estado discutidos anteriormente, teremos

$$\begin{aligned} \rho_m &\propto a^{-3}, \\ \rho_r &\propto a^{-4}, \\ \rho_\Lambda &= \text{const.}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde m significa matéria sem pressão, r radiação ou fluido relativístico e Λ a constante cosmológica. O resultado não é muito surpreendente, principalmente para o caso da matéria e da radiação. Como a seção espacial do espaço-tempo tem três dimensões e sabendo que o volume total do universo cresce com a^3 , fica evidente que densidade cai com mesma potência. Já para radiação temos um termo extra devido ao desvio para o vermelho, que faz com que o fóton perca energia, já que a frequência $\propto a^{-1}$.

De nossas experiências cotidianas temos certeza da existência de fótons e bárions. Observando como as densidades dos mesmos evoluem com o fator de escala $a(t)$ podemos concluir que no passado, quando o universo era menor, a radiação pode ter sido a componente dominante do universo, mas hoje é subdominante pois a densidade da mesma cai mais rapidamente do que da matéria sem pressão.

Se substituirmos a equação de densidade barotrópica (2.50) na equação de Friedmann (2.41), podemos calcular que o fator de escala tem a seguinte dependência em relação ao

tempo

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(1+\omega)}, & \omega \neq -1, \\ e^{Ht}, & \omega = -1, \end{cases} \quad (2.52)$$

onde H é constante. Aqui consideramos apenas um fluido. Podemos também considerar vários fluidos e, dividindo a equação de Friedmann (2.41) pelo quadrado de H_0 , que é valor do parâmetro de Hubble hoje, teremos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega \equiv \frac{\sum_i \rho_i}{\rho_{\text{crit}}} = \Omega_r^0 a^{-4} + (\Omega_b^0 + \Omega_m^0) a^{-3} + \Omega_\Lambda, \quad (2.53)$$

sendo $\rho_{\text{crit}} = 3H_0^2/8\pi G$ a densidade crítica do universo e $\Omega_i = \rho_i/\rho_{\text{crit}}$ são chamados parâmetros de densidade. De medidas como as da RCFM e também das distâncias de supernovas, sabemos que o universo é espacialmente plano, ou seja, $\Omega^0 \approx 1$, a densidade de partículas relativísticas é desprezível e para bárions, matéria escura e energia escura temos

$$\begin{aligned} \Omega_b^0 &\approx 0,05, \\ \Omega_m^0 &\approx 0,27, \\ \Omega_\Lambda &\approx 0,68, \end{aligned} \quad (2.54)$$

além de termos uma energia escura tipo constante cosmológica, com parâmetro da equação de estado

$$\omega_\Lambda \approx -1. \quad (2.55)$$

Este é o modelo cosmológico mais compatível com os dados observacionais que conhecemos, e é chamado de modelo cosmológico padrão, modelo de concordância, ou Λ CDM, onde Λ é a constante cosmológica e CDM é a abreviação para *cold dark matter*.

2.3 Inflação cósmica

Apesar do sucesso do modelo cosmológico padrão em prever expansão do universo, a abundância de elementos leves e a existência da RCFM, pequenos problemas no modelo cosmológico descrito até aqui que ainda precisam ser esclarecidos. Anteriormente assumimos a homogeneidade do universo em grandes escalas, mas em pequenas escalas gigantescas não-homogeneidades são evidentes, ou seja, se observarmos uma grande região do céu iremos ver aglomerações de matéria com uma distribuição estatisticamente homogênea, mas se olharmos para uma pequena região as aglomerações de matéria e os espaços vazios ficam mais evidentes. Além disso, pela observação das flutuações de temperatura na RCFM, verificamos que essas não-homogeneidades eram bem menores na última superfície de espalhamento, que foi a época logo após a recombinação, quando os fótons agora livres, interagiram pela última vez com as estruturas em formação, resultantes das instabilidades gravitacionais.

Sendo assim, sabendo que as instabilidades gravitacionais crescem com o tempo, podemos imaginar que antes da última superfície de espalhamento as flutuações na densidade eram ainda menores. Além disso, o modelo padrão original prevê que, no passado remoto, o universo era formado por várias regiões do espaço sem contato causal. Portanto, as três questões que precisam ser respondidas são [29, 30]: i) como foi possível ter um universo inicialmente tão homogêneo, ii) como regiões causalmente desconexas têm hoje, estatisticamente, as mesmas flutuações na temperatura da RCFM e iii) qual a origem das flutuações de densidade que permitiram o surgimento das estruturas que observamos hoje?

O problema da homogeneidade inicial do universo é conhecido como o problema da planura, enquanto as regiões causalmente desconexas é conhecido como problema do horizonte, e a origem das flutuações de densidade é o problema das condições iniciais.

Podemos formular alguns destes problemas de maneira matemática, e começamos pelo problema do horizonte, ou das regiões causalmente desconexas. Anteriormente havíamos definido o horizonte comóvel como sendo a distância máxima que um fóton pode viajar de um tempo inicial t_i até um tempo final t , o que nos permite ver o horizonte partícula

como sendo o horizonte de contato causal. Podemos também escrever o horizonte comóvel em função do raio de Hubble comóvel, ou seja,

$$\tau = \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_0^a \frac{d \ln \tilde{a}}{\tilde{a}H(\tilde{a})}, \quad (2.56)$$

onde definimos nosso tempo inicial como sendo a origem do universo, e $(aH)^{-1}$ é o raio de Hubble comóvel. Para um universo preenchido por um fluido barotrópico, ou seja, com equação de estado (2.49), podemos calcular o horizonte comóvel

$$\tau \propto a^{(1+3\omega)/2}. \quad (2.57)$$

Devido a relação entre o horizonte comóvel e o fator de escala vemos que, para um universo preenchido por radiação ou matéria, as escalas que entram hoje no horizonte estavam fora dele quando a RCFM desacoplou do plasma primordial, mas mesmo assim, essas escalas mostram o mesmo padrão de flutuações na temperatura da RCFM, e então podemos levantar a hipótese de que regiões do universo que estão hoje causalmente desconexas estavam, em um passado remoto, em contato causal, ou seja, no mesmo horizonte.

Para visualizarmos o problema da planura temos de lembrar que as observações da RCFM indicam que o parâmetro de densidade total, apresentado na equação (2.53) é, hoje, aproximadamente 1. Caso considerássemos uma possível contribuição da curvatura na métrica do espaço-tempo, a equação de Friedmann neste caso seria

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(a) - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (2.58)$$

onde κ é o parâmetro de curvatura. Podemos também escrever essa equação como sendo

$$1 - \Omega(a) = -\frac{\kappa}{(aH)^2}. \quad (2.59)$$

Note que, em um universo preenchido por poeira ou radiação, o raio de Hubble comóvel $(aH)^{-1}$ cresce, e portanto a quantidade $\Omega - 1$ deve divergir em algum momento. Sabemos que o universo no passado foi dominado pela radiação, e depois pela poeira. Portanto,

para que Ω seja tão próximo da unidade hoje, quando do desacoplamento da radiação ele deveria ser ainda menor. Por exemplo, durante a nucleosíntese primordial, deveríamos ter aproximadamente [29]

$$\Omega_{\text{NP}} - 1 \approx \mathcal{O}(10^{-16}) , \quad (2.60)$$

que é uma condição inicial muito específica e precisa.

Ambos os problemas do horizonte e da planura poderiam ser facilmente resolvidos se assumíssemos condições iniciais para o universo (como a de cima), mas a teoria da inflação cósmica primordial pode explicar esses problemas, além de prever o espectro de potência da RCFM e explicar a origem das flutuações primordiais.

Na formulação matemática dos problemas do horizonte e da planura, equações (2.56) e (2.59), o raio comóvel de Hubble $(aH)^{-1}$ tem um papel central. Em ambos os casos podemos reduzir os dois problemas ao fato de que, para fluidos barotrópicos, o raio comóvel de Hubble cresce, portanto podemos resolver ambos os problemas fazendo com que o raio comóvel de Hubble decresça no universo primordial⁴.

Para solucionarmos o problema do horizonte é importante observar que partículas com distâncias maiores do que o horizonte partícula τ nunca se comunicaram, ou seja, nunca puderam interagir (não tiveram contato causal), mas se elas estão separadas por uma distância maior do que $(aH)^{-1}$ elas não têm contato causal *agora*. Basta que no presente τ seja muito maior do que $(aH)^{-1}$, de maneira que duas partículas que não podem interagir hoje estavam em contato causal em algum momento do passado. Podemos ter essa configuração se $(aH)^{-1}$ foi muito maior no passado do que ele é hoje, de modo que τ cresceu mais em tempos remotos do que em tempos próximos ao presente. Isso requer uma fase no universo primordial onde o raio comóvel de Hubble tenha diminuído. Portanto, grandes escalas que entram agora no horizonte estavam em contato causal antes da inflação, o que explica a homogeneidade através da RCFM.

Essa mesma configuração permite resolver facilmente o problema da planura. Basta

⁴Existem outras teorias e modelos que tentam resolver os mesmos problemas sem a necessidade da inflação cósmica. Não trataremos destes modelos aqui, tendo em vista que, até o momento, a inflação é o modelo que melhor descreve os instantes iniciais do universo, além de ser um dos temas principais deste trabalho.

olhar para a equação (2.59) para verificar que o parâmetro de densidade Ω estava mais próximo de 1 quando o raio comóvel de Hubble foi menor.

Um raio de Hubble comóvel que diminui com tempo deve ter derivada temporal

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0, \quad (2.61)$$

e se aplicarmos a condição acima nas equações de Friedmann (2.41) e (2.42) temos

$$\frac{d^2 a}{dt^2} > 0, \quad \rho + 3p < 0, \quad (2.62)$$

o que caracteriza uma fase de expansão acelerada e um fluido de pressão negativa, sendo que $p < -\rho/3$.

É também possível relacionar a segunda derivada do fator de escala com a primeira derivada do parâmetro de Hubble, para obtermos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon), \quad \epsilon \equiv \frac{-\dot{H}}{H^2}. \quad (2.63)$$

Em termos do parâmetro ϵ a aceleração implica em

$$\epsilon = \frac{-\dot{H}}{H^2} = \frac{-d \ln H}{dN} < 1, \quad (2.64)$$

onde $dN \equiv H dt = d \ln a$, que mede o número de potências e^N que o fator de escala cresce, e portanto $H \approx \text{const}$.

Seria muito simples atender a estas condições assumindo que nos primórdios o universo era preenchido por um fluido tipo constante cosmológica, ou seja, $p = -\rho$. Este foi um dos primeiros modelos propostos para a inflação, mas que tinha o problema de ser um modelo de inflação eterna, já que a componente que dirige a inflação tem densidade constante, enquanto as outras caem com a expansão do fator de escala.

Nos modelos atuais mais simples de inflação a expansão acelerada é dirigida por um campo escalar, chamado *inflaton*. Sob certas condições esse campo escalar se comporta aproximadamente como uma constante cosmológica. O tensor momento-energia de um

campo escalar ϕ é

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - g_{\mu\nu}V(\phi), \quad (2.65)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é tensor métrico e $V(\phi)$ é o potencial. Assumindo a métrica de FLRW (2.20) e um campo escalar uniforme, ou seja, $\phi = \phi(t)$, encontramos

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \quad (2.66)$$

sendo ρ_ϕ e p_ϕ a densidade e a pressão, respectivamente. O parâmetro da equação de estado é

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}. \quad (2.67)$$

Para determinarmos a dinâmica do universo precisamos encontrar a equação de Friedmann e a equação de conservação de energia para o campo escalar. A equação de Friedmann é facilmente encontrada a partir da expressão (2.41), portanto

$$3H^2 = M_{\text{Pl}}^{-2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (2.68)$$

onde definimos a chamada massa de Planck $M_{\text{Pl}}^{-2} \equiv 8\pi G$. A equação de conservação de energia nos dará

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (2.69)$$

que é conhecida como equação de Klein-Gordon, onde $V_{,\phi} = dV/d\phi$.

Nessa configuração o parâmetro ϵ , definido na equação (2.64), é

$$\epsilon = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2}. \quad (2.70)$$

A condição que garante uma expansão acelerada é $\epsilon < 1$; além disso, o campo escalar irá se comportar aproximadamente como uma constante cosmológica se fizermos

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (2.71)$$

o que fará com que $\omega_\phi \approx -1$ e $\epsilon \ll 1$. Na literatura ϵ é conhecido como o primeiro parâmetro de rolamento lento⁵ [27–29], porque a inflação só ocorre enquanto o campo escalar “rola” lentamente pelo potencial $V(\phi)$. A inflação só acontecerá por um período de tempo suficiente para resolver os problemas do horizonte e da planura se

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V(\phi)|, \quad (2.72)$$

e então definimos o chamado segundo parâmetro de rolamento lento, que é

$$\eta \equiv \frac{-\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \epsilon - \frac{1}{2\epsilon} \frac{d\epsilon}{dN}, \quad (2.73)$$

que, durante o período inflacionário, deve satisfazer a condição $\eta \ll 1$.

Sob as condições de rolamento lento, as equações de Friedmann e de Klein-Gordon simplificam e podem ser escritas como

$$3H^2 \approx M_{\text{Pl}}^{-2} V(\phi), \quad 3H\dot{\phi} \approx -V_{,\phi}, \quad (2.74)$$

e, por sua vez, os parâmetros de rolamento lento serão

$$\epsilon \approx \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad (2.75)$$

$$\eta \approx M_{\text{Pl}}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V}. \quad (2.76)$$

Neste caso o parâmetro de Hubble é aproximadamente constante e o fator de escala evolui em função do tempo como

$$a \approx e^{Ht}. \quad (2.77)$$

O período de expansão exponencial termina quando as condições de rolamento lento são violadas, ou seja,

$$\epsilon(\phi_{\text{final}}) \approx 1, \quad \eta(\phi_{\text{final}}) \approx 1. \quad (2.78)$$

⁵Do inglês *slow-roll*.

Entre o início e o final da inflação, o número de potências N que o fator de escala cresce é

$$N = \ln \frac{a_{\text{final}}}{a} = \int_t^{t_{\text{final}}} H dt \approx M_{\text{Pl}}^{-2} \int_{\phi_{\text{final}}}^{\phi} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_{\text{final}}}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}}. \quad (2.79)$$

Para resolvermos os problemas da planura e do horizonte temos de ter no mínimo $N \approx 60$ ao final da inflação. O comportamento exato do fator de escala, do *inflaton* e o valor final de N dependem do formato do potencial $V(\phi)$ e também de detalhes do período imediatamente após a inflação.

Capítulo 3

Teoria de perturbações

No capítulo anterior vimos como um período de expansão exponencial no início do universo pode explicar porque a seção espacial hoje é tão plana e como o universo é tão homogêneo em grandes escalas, sendo que em um universo apenas preenchido por fótons e/ou poeira regiões que hoje estão em contato causal eram desconexas no passado. Mas ao resolvermos esses problemas, conhecidos como o problema da planura e do horizonte, criamos um novo: agora o universo primordial é ainda mais homogêneo devida a inflação. De onde surgem, então, as flutuações na RCFM e as estruturas em grande escala? A resposta pode estar em minúsculas flutuações de origem quântica no conteúdo material do universo primordial, que neste caso é o inflaton ϕ .

Qualquer perturbação $\delta T_{\mu\nu}$ do tensor momento-energia, onde $|\delta T_{\mu\nu}| \ll |T_{\mu\nu}|$ implica em flutuações $\delta G_{\mu\nu}$ no tensor de Einstein através das equações de movimento, ou seja, flutuações $\delta g_{\mu\nu}$ no espaço-tempo. Podemos expandir o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ em uma base $g_{\mu\nu}^{(0)}$ e na perturbação $\delta g_{\mu\nu}$ como em uma expansão de Taylor, portanto

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)}(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, \vec{x}), \quad (3.1)$$

onde $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$.

As perturbações da métrica $\delta g_{\mu\nu}$ podem ser divididas em três categorias [27–29, 31, 32], sendo elas escalares, vetoriais e tensoriais. Essa classificação é dada pela maneira com que

os campos que formam a perturbação $\delta g_{\mu\nu}$ transformam-se segundo translações e rotações espaciais em um hipersuperfície de tempo constante. Sob tais rotações δg_{00} se comporta como um escalar, e portanto escrevemos

$$\delta g_{00} = -2a^2 A(x^\mu), \quad (3.2)$$

onde $A(x^\mu)$ é uma função escalar das coordenadas. A componente δg_{0i} é escrita de maneira mais geral como sendo a soma do gradiente de um escalar com um vetor de divergente nulo, ou seja,

$$\delta g_{0i} = a^2(B_{,i} + S_i), \quad (3.3)$$

onde $B_{,i} = \partial B / \partial x^i$ e o vetor S_i obedece a relação de vínculo $S^i_{,i} = 0$, sendo que a partir de agora subimos e descemos os índices espaciais usando o delta de Kronecker δ_{ij} . Já a componente espacial δg_{ij} tem de ser escrita como uma combinação de escalares, tensores e vetores, de onde a forma mais geral é

$$\delta g_{ij} = -2\psi\delta_{ij} + 2D_{ij}E + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}, \quad (3.4)$$

sendo $D_{ij} \equiv \partial_i \partial_j - \delta_{ij} \nabla^2 / 3$. Além disso, ψ e E são funções escalares, o vetor F_i tem divergente nulo, ou seja, $F^i_{,i} = 0$ e o tensor h_{ij} satisfaz

$$h^i_{,i} = 0, \quad h^i_{j,i} = 0, \quad (3.5)$$

o que faz de h_{ij} um tensor transverso e de traço nulo. Em resumo, usando a métrica conforme (2.26) como base do espaço-tempo, teremos

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[- (1 + 2A)d\tau^2 + 2(B_{,i} + S_i) d\tau dx^i + \right. \\ \left. + ((1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2D_{ij}E + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (3.6)$$

Essa é apenas uma das várias maneiras de definir as perturbações na métrica. Na lite-

ratura podemos encontrar diferenças em alguns sinais e também na definição do operador D_{ij} . Quando formos estudar perturbações durante a inflação iremos usar uma formulação diferente da que é dada pela equação (3.6).

As perturbações escalares, descritas pelos campos A , B , ψ , e E são induzidas na métrica pelas não-homogeneidades na densidade de energia e são essas perturbações que vão resultar nas estruturas observadas em grandes escalas. Já os vetores S_i e F_i estão relacionados com os movimentos rotacionais do fluido e decaem muito rapidamente durante a expansão do universo e portanto não deixam traços observacionais muito interessante [28, 31]. Já os tensores h_{ij} são perturbações no espaço que descrevem ondas gravitacionais, sendo que, no regime linear, não influenciam nas perturbações de densidade, mas podem carregar preciosas informações a respeito do universo primordial [27, 29].

As três classes de componentes, ou seja, as perturbações escalares, vetoriais e tensoriais evoluem de forma independente [29], e portanto podem ser estudadas separadamente. Como as componente vetoriais não trazem nenhuma informação relevante vamos ignorar os campos vetoriais S_i e F_i , e estudar os escalares A , B , ψ , e E e o tensor h_{ij} separadamente.

3.1 Transformações de calibre

Vimos que, em grandes escalas, o universo é homogêneo e isotrópico, mas em pequenas escalas encontramos todos os tipos de estruturas produzidas por instabilidades gravitacionais. Ao estudarmos as perturbações cosmológicas na densidade estaremos estudando um espaço que não é homogêneo e nem isotrópico. Podemos fazer isso analisando a evolução das diferenças entre o espaço-tempo verdadeiro e o espaço-tempo homogêneo e isotrópico (descrito pela métrica de FLRW) que estudamos nas seções anteriores.

De maneira mais rigorosa podemos definir a perturbação de qualquer quantidade física como sendo a diferença entre o valor dessa variável no espaço-tempo físico, que é não-homogêneo e anisotrópico, e o valor no espaço-tempo de fundo, que é homogêneo e isotrópico. Essa comparação tem de ser feita no mesmo ponto do espaço-tempo. Mas

essas duas quantidades (a perturbada e a não perturbada) estão em geometrias diferentes e, portanto, se faz necessário indicar um mapa que ligue o mesmo ponto de maneira única nos dois espaços-tempo. A correspondência entre os dois mapas é chamada de calibre e mudar o mapa nada mais é do que fazer uma transformação de calibre [28, 29, 31, 32].

Em relatividade geral as transformações de calibre são transformações de coordenadas entre dois referenciais, o que significa que fixar um calibre é o mesmo que escolher um sistema de coordenadas. Vamos escolher uma mudança de coordenadas infinitesimal, do tipo

$$\widetilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (3.7)$$

onde δx^μ é uma função infinitesimal do espaço-tempo. Consideremos um escalar

$$q(x^\mu) = q_0(x^\mu) + \delta q(x^\mu) \Rightarrow \delta q(x^\mu) = q(x^\mu) - q_0(x^\mu), \quad (3.8)$$

sendo $\delta q(x^\mu)$ a perturbação e $q_0(x^\mu)$ a base. Sob a transformação de calibre (3.7) temos $\widetilde{\delta q}(\widetilde{x}^\mu) = \widetilde{q}(\widetilde{x}^\mu) - \widetilde{q}_0(\widetilde{x}^\mu)$, e portanto encontramos

$$\widetilde{\delta q} = \delta q - q_{,\mu} \delta x^\mu, \quad (3.9)$$

para qualquer função escalar.

Para um tensor, como o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, devemos usar a lei de transformação de coordenadas para tensores, que é

$$\widetilde{g}_{\mu\nu}(\widetilde{x}^\gamma) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \widetilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x^\gamma), \quad (3.10)$$

lembrando que no sistema de coordenadas \widetilde{x}^γ o tensor métrico $\widetilde{g}_{\mu\nu}(\widetilde{x}^\gamma)$ também pode ser escrito como sendo a soma de uma base e uma perturbação, ou seja,

$$\widetilde{g}_{\mu\nu}(\widetilde{x}^\gamma) = g_{\mu\nu}^{(0)}(\widetilde{x}^\gamma) + \widetilde{\delta g}_{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

onde a base $g_{\mu\nu}^{(0)}(\widetilde{x}^\gamma)$ do tensor métrico é expandida em série de Taylor

$$g_{\mu\nu}^{(0)}(\widetilde{x}^\gamma) \approx g_{\mu\nu}^{(0)}(x^\gamma) + \frac{\partial g_{\mu\nu}^{(0)}(x^\gamma)}{\partial x^\gamma} \delta x^\gamma. \quad (3.12)$$

Sendo assim, a lei de transformação para a perturbação no tensor métrico $\delta g_{\mu\nu}$, segundo a transformação de coordenadas (3.7), é

$$\widetilde{\delta}g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu,\gamma} \delta x^\gamma - g_{\mu\gamma} \delta x^\gamma_{,\nu} - g_{\gamma\nu} \delta x^\gamma_{,\mu}, \quad (3.13)$$

onde desprezamos o índice $^{(0)}$ e chamamos a base de $g_{\mu\nu}$.

Vamos decompor o vetor infinitesimal δx^μ em

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= \xi^0, \\ \delta x^i &= \beta_{,i} + v^i, \quad v^i_{,i} = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde ξ^0 , β e v^i são funções das coordenadas x^γ . Aplicando as transformações (3.13) e a decomposição (3.14) ao tensor métrico perturbado definido em (3.6), encontramos

$$\widetilde{A} = A - \frac{(a\xi^0)'}{a}, \quad (3.15)$$

$$\widetilde{B} = B + \xi^0 + \beta', \quad (3.16)$$

$$\widetilde{\psi} = \psi - \frac{1}{3} \nabla^2 \beta + \mathcal{H} \xi^0, \quad (3.17)$$

$$\widetilde{E} = E + 2\beta, \quad (3.18)$$

para as perturbações escalares. Para as perturbações vetoriais, temos

$$\widetilde{S}_i = S_i + v'_i, \quad (3.19)$$

$$\widetilde{F}_i = F_i + v_i. \quad (3.20)$$

E, finalmente, para as perturbações puramente tensoriais, teremos

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij}, \quad (3.21)$$

ou seja, a perturbação h_{ij} é um invariante de calibre.

Podemos usar a mudança de calibre para simplificar as equações de movimento das perturbações. Ao mesmo tempo, corremos o risco de incluirmos no nosso calibre termos não-físicos [28, 31, 32], já que, como vimos, a mudança de coordenadas pode fazer com que as perturbações assumam valores diferentes, dependendo da escolha do calibre. Uma segunda opção é procurar combinações que sejam invariantes por transformações de calibre, o que irá nos permitir fazer os cálculos apenas com quantidades físicas.

As duas funções invariantes de calibre para as perturbações escalares que encontramos mais facilmente na literatura, também conhecidas como potenciais de Bardeen, são

$$\Phi \equiv -A - \frac{1}{a} \left[\left(B - \frac{E'}{2} \right) a \right]', \quad (3.22)$$

$$\Psi \equiv -\psi - \frac{\nabla^2 E}{6} + \mathcal{H} \left(B - \frac{E'}{2} \right). \quad (3.23)$$

Para qualquer função escalar $q(x^\mu)$ podemos definir a perturbação invariante de calibre

$$\delta q^{(\text{IC})} = -\delta q - q' \left(B - \frac{E'}{2} \right), \quad (3.24)$$

onde IC significa invariante de calibre, δq é a perturbação e a base q deve depender apenas do tempo para preservarmos a homogeneidade da base.

Por sua vez, a perturbação invariante de calibre do tensor de Einstein pode ser calculada como

$$\delta G^{(\text{IC})}_0{}^0 = \delta G_0{}^0 - (G_0{}^0)' \left(B - \frac{E'}{2} \right), \quad (3.25)$$

$$\delta G^{(\text{IC})}_i{}^0 = \delta G_i{}^0 - \left(G_i{}^0 - \frac{1}{3} G_k{}^k \right) \left(B - \frac{E'}{2} \right)_{,i}, \quad (3.26)$$

$$\delta G^{(\text{IC})}_i{}^j = \delta G_i{}^j - (G_i{}^j)' \left(B - \frac{E'}{2} \right), \quad (3.27)$$

e, de maneira análoga, para o tensor momento-energia teremos

$$\delta T^{(\text{IC})}_0{}^0 = \delta T_0{}^0 - (T_0{}^0)' \left(B - \frac{E'}{2} \right), \quad (3.28)$$

$$\delta T^{(\text{IC})}_i{}^0 = \delta T_i{}^0 - \left(T_i{}^0 - \frac{1}{3} T_k{}^k \right) \left(B - \frac{E'}{2} \right)_{,i}, \quad (3.29)$$

$$\delta T^{(\text{IC})}_i{}^j = \delta T_i{}^j - (T_i{}^j)' \left(B - \frac{E'}{2} \right). \quad (3.30)$$

Além dos potenciais de Bardeen (3.22), existem outras duas funções invariantes de calibre que iremos usar quando estudarmos perturbações primordiais. A primeira é a perturbação de curvatura comóvel \mathcal{R} , escrita como

$$\mathcal{R} = \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi'}, \quad (3.31)$$

onde ϕ e $\delta\phi$ são, respectivamente, o campo escalar inflaton e a sua perturbação. \mathcal{R} é invariante por transformações de calibre. Em hipersuperfícies onde $\delta\phi = 0$ a perturbação de curvatura é simplesmente o potencial gravitacional ψ .

A segunda função é conhecida como variável de Sasaki-Mukhanov, que também é invariante por transformações de calibre, e é definida como

$$Q = \delta\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}} \psi. \quad (3.32)$$

No calibre espacialmente plano, que nada mais é do que fixar o potencial $\psi = 0$, Q se reduz a perturbação no campo escalar ϕ . A variável de Sasaki-Mukhanov (3.32) pode ser relacionada com a perturbação de curvatura (3.31) via

$$Q = \frac{\phi'}{\mathcal{H}} \mathcal{R}. \quad (3.33)$$

Outro calibre muito comum é o calibre longitudinal, ou Newtoniano, onde fixamos $E = 0$ e $B = 0$. Desta maneira, vemos que os potenciais de Bardeen (3.22), que são invariantes por transformações de calibre, serão $\Phi_l = -A_l$ e $\Psi_l = -\psi_l$. Um dos primeiros,

e por muito tempo mais usados calibres é o calibre síncrono. A descrição do calibre síncrono e uma comparação com o calibre Newtoniano pode ser encontrado em [28].

3.2 Equações de movimento

Para encontrarmos as equações de movimento podemos fixar um calibre ou então procurar quantidades invariantes por transformações de calibre [28, 31, 32]. Usando as equações de Einstein na forma invariante e os potenciais de Bardeen (3.22), teremos

$$3\mathcal{H}(\Psi' + H\Phi) - \nabla^2\Psi = -\frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}a^2\delta T^{(\text{IC})}_0{}^0, \quad (3.34)$$

$$(\Psi' + H\Phi)_{,i} = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}a^2\delta T^{(\text{IC})}_i{}^0, \quad (3.35)$$

$$\left[\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{\nabla^2}{2}(\Phi - \Psi) \right] \delta_i{}^j - \frac{(\Phi - \Psi)_{,i}{}^j}{2} = -\frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}a^2\delta T^{(\text{IC})}_i{}^j. \quad (3.36)$$

Tanto o tensor momento-energia do fluido perfeito quanto do campo escalar não possuem termos não-diagonais, ou seja, $\delta T_i{}^j = 0$ quando $i \neq j$. Portanto, os termos não-diagonais da equação (3.36) nos levam a

$$(\Phi - \Psi)_{,i}{}^j = 0 \Rightarrow \Phi = \Psi, \quad (3.37)$$

o que irá simplificar as equações de movimento (3.34-3.36), e teremos

$$3\mathcal{H}(\Psi' + H\Psi) - \nabla^2\Psi = -\frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}a^2\delta T^{(\text{IC})}_0{}^0, \quad (3.38)$$

$$(\Psi' + H\Psi)_{,i} = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}a^2\delta T^{(\text{IC})}_i{}^0, \quad (3.39)$$

$$[\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi] \delta_i{}^j = -\frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}a^2\delta T^{(\text{IC})}_i{}^j. \quad (3.40)$$

Mais adiante iremos utilizar as equações (3.38-3.40) para estudarmos a formação de estruturas em um modelo de matéria escura. Neste caso, será necessário também estudar como

as perturbações na densidade evoluem. Para tanto, precisamos calcular as perturbações da conservação do tensor momento-energia, que, com ajuda das conexões calculadas no Apêndice A, encontramos

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) - 3(\rho + p)\Psi' + a(\rho + p)\delta u^i{}_{,i} = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{a^4} [a^5(\rho + p)\delta u^i{}_{,i}]' + \nabla^2\delta p + (\rho + p)\nabla^2\Psi = 0, \quad (3.42)$$

sendo que as equações acima se encontram na forma invariante de calibre e δu^i são as flutuações na velocidade do fluido.

3.3 Flutuações durante a inflação

Nesta seção nosso objetivo primário é calcular as perturbações na curvatura do espaço-tempo, que são as responsáveis pelas flutuações de temperatura na RCFM [27, 29, 32], causadas pelas flutuações (de origem quântica) no campo inflaton. Na literatura encontramos várias maneiras de fazer estes cálculos, com várias escolhas de calibre. Entre as mais comuns estão usar o calibre espacialmente plano, o calibre longitudinal e também a formulação invariante de calibre.

Neste caso vamos usar o tempo cósmico, trocar alguns sinais e escrever o elemento de linha perturbado como

$$ds^2 = -(1 + 2A)dt^2 + 2aB_{,i}dx^i dt + a^2[(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j. \quad (3.43)$$

Sendo assim, os potenciais de Bardeen serão

$$\Phi = A + (aB - a^2\dot{E}), \quad (3.44)$$

$$\Psi = \psi - H(aB - a^2\dot{E}), \quad (3.45)$$

que, como anteriormente, irão coincidir na ausência de termos não-diagonais do tensor momento-energia, ou seja, $\Phi = \Psi$.

Antes de assumirmos qualquer métrica, a equação de Klein-Gordon para o inflaton pode ser escrita como

$$\phi_{;\mu}^{\mu} - V_{,\phi} = 0, \quad (3.46)$$

que na forma perturbada, teremos

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\delta\phi + V_{,\phi\phi}\delta\phi = -2V_{,\phi}A + \dot{\phi} \left[\dot{A} + 3\dot{\psi} - \frac{\nabla^2}{a^2}(a^2\dot{E} - aB) \right]. \quad (3.47)$$

Em termos da variável de Sasaki-Mukhanov, $Q = \delta\phi + \dot{\phi}\psi/H$, e com ajuda das duas primeiras equações perturbadas de Einstein

$$3H(\dot{\psi} + HA) - \frac{\nabla^2}{a^2} \left[\psi + H(a^2\dot{E} - aB) \right] = -\frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2} \left[\dot{\phi}(\delta\dot{\phi} - \dot{\phi}A) + V_{,\phi}\delta\phi \right], \quad (3.48)$$

$$(\dot{\psi} + HA)_{,i} = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2} \dot{\phi}\delta\phi_{,i}, \quad (3.49)$$

encontramos, finalmente

$$\ddot{Q} + 3H\dot{Q} - \frac{\nabla^2}{a^2}Q + \left[V_{,\phi\phi} - \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{a^3} \left(\frac{a^3}{H}\dot{\phi}^2 \right) \right] Q = 0, \quad (3.50)$$

onde $M_{\text{Pl}}^{-2} = 8\pi G$. Como já visto anteriormente, a variável de Sasaki-Mukhanov se relaciona com a perturbação de curvatura através da expressão

$$\mathcal{R} = \frac{H}{\dot{\phi}}Q. \quad (3.51)$$

Para resolvermos a equação diferencial (3.50) vamos precisar fazer uma mudança de variável e também usar o tempo comóvel τ , que se relaciona com o tempo cósmico t via $dt = a(\tau)d\tau$. Para o caso da inflação de rolamento lento, a expansão do universo é aproximadamente exponencial, com parâmetro de Hubble constante. Portanto, podemos calcular a relação aproximada

$$\tau \approx -\frac{1 + \epsilon}{aH}, \quad (3.52)$$

onde a aproximação é feita até a primeira ordem dos parâmetros de rolamento lento. Com

a redefinição de variável

$$u \equiv aQ, \quad (3.53)$$

encontramos a equação de onda

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{(2 + 3(3\epsilon - \eta))}{\tau^2} \right) u_k \approx 0, \quad (3.54)$$

onde k é o número de onda da expansão de Fourier do campo u , de onde temos que

$$u(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} u_k(\tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (3.55)$$

Mais uma vez, vamos fazer uma mudança de variável, de maneira que definimos $u = \sqrt{-\tau}y(x)$, onde $x \equiv -k\tau$, e encontramos a equação de diferencial de Bessel, que é

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (3.56)$$

Usando as soluções de Hankel para a equação de Bessel, encontramos que

$$u_k = \sqrt{-\tau} [\alpha(k)\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x) + \beta(k)\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)], \quad (3.57)$$

onde $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ são constantes de integração, $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x)$ e $\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x)$ são as funções de Hankel de ordem $\nu \approx \sqrt{9/4 + 3(3\epsilon - \eta)}$.

Até aqui abordamos as perturbações de maneira clássica, mas muito provavelmente a origem das perturbações são flutuações quânticas do inflaton e das perturbações escalares no universo primordial. Precisamos, portanto, desenvolver o mecanismo que descreva essas flutuações.

O processo de quantização consiste, basicamente, em expandir os campos clássicos em operadores quânticos, quantiza-los e impor as condições de comutação que irão nos dar as condições de contorno da função de onda. Mais detalhes sobre a quantização a seguir podem ser vistos em [27, 29, 32].

Vamos expandir u e o momento conjugado u' como operadores quânticos

$$\hat{u} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[u_k(\tau) \hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + u_k^*(\tau) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]. \quad (3.58)$$

As componentes de Fourier u_k também podem ser expandidas em termos de operadores, segundo a decomposição

$$\hat{u}_k = u_k(\tau) \hat{a}_{\vec{k}} + u_{-k}(\tau) \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger, \quad (3.59)$$

onde os operadores criação e destruição $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ e $\hat{a}_{\vec{k}}$ satisfazem as relações de comutação

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{q}), \quad (3.60)$$

apenas se os modos oscilatórios do campo e do momento conjugado satisfizerem a seguinte condição de normalização

$$\langle u_k, u'_k \rangle \equiv \frac{i}{\hbar} (u_k^* u'_k - u_k'^* u_k) = 1, \quad (3.61)$$

que é a primeira condição de contorno para resolvermos a equação de onda completamente. A segunda vem da escolha do estado de vácuo. O estado de vácuo é aquele que satisfaz a condição

$$\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = 0. \quad (3.62)$$

Vamos escolher como estado fundamental, ou de menor energia, o estado que é conhecido como vácuo de Minkowski de um observador comóvel no passado distante, ou seja, $\tau \rightarrow -\infty$, quando todas as escalas comoveis estavam dentro do horizonte, o que equivale as condições $-k\tau \gg 1$ ou $k \gg aH$. Nestes limites a equação de onda (3.54) será aproximadamente a equação de um oscilador harmônico simples, isto é

$$u_k'' + k^2 u_k = 0. \quad (3.63)$$

A solução que satisfaz a normalização e também faz com que o estado de vácuo seja o estado de mínima energia é

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} u_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}, \quad (3.64)$$

que é conhecido vácuo de Bunch-Davies, onde fizemos $\hbar \equiv 1$ [27–32].

Portanto, o vácuo de Bunch-Davies nos permite fixar as constantes de integração da solução (3.57). Sabendo que no limite $-k\tau \rightarrow -\infty$ as funções de Hankel são

$$\mathcal{H}_\nu^{(1,2)} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi(-k\tau)}} e^{\pm i(-k\tau - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad (3.65)$$

encontramos que as constantes de integração devem ser

$$\alpha(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu+1/2)\pi/2}, \quad \beta(k) = 0, \quad (3.66)$$

e finalmente, teremos a solução

$$u_k(\tau, k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu+1/2)\pi/2} \sqrt{-\tau} \mathcal{H}_\nu^{(1)}(-k\tau). \quad (3.67)$$

Da função de correlação de dois pontos para as perturbações da curvatura \mathcal{R} encontramos o espectro de potência, que é dado pela relação

$$\langle \mathcal{R}(\vec{k})^* \mathcal{R}(\vec{k}') \rangle \equiv \langle 0 | \hat{\mathcal{R}}(\vec{k})^* \hat{\mathcal{R}}(\vec{k}') | 0 \rangle = \frac{(2\pi)^3}{4\pi k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.68)$$

onde $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é o espectro de potência das perturbações escalares. Em termos do escalar de curvatura clássico e das mudanças de variáveis que fizemos, podemos calcular o espectro de potência das flutuações na curvatura durante a inflação como sendo

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} k^3 |\mathcal{R}|^2 = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} k^3 |Q|^2 = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2 \epsilon} \right) k^3 \frac{|u_k|^2}{a^2}. \quad (3.69)$$

Estamos interessados no limite $-k\tau \ll 1$, ou seja, quando todos os modos oscilatórios estavam fora do horizonte partícula. No limite de pequenos argumentos, podemos

aproximar a função de Hankel

$$\mathcal{H}_\nu^{(1)} \approx \frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{-k\tau}{2} \right)^{-\nu}, \quad (3.70)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função especial gama. Portanto, quando os modos oscilatórios estão fora do horizonte, o espectro de potência é aproximadamente

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \approx \frac{2^\nu}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma^2(\nu)}{M_{\text{Pl}}^2} \frac{H^2}{\epsilon} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu}, \quad (3.71)$$

onde várias vezes usamos a aproximação $\tau \approx -1/aH$. A ordem da função de Hankel é aproximadamente $\nu \approx 3/2 + \mathcal{O}(\epsilon, \eta)$, e portanto não é difícil ver que a dependência do espectro de potência com a razão k/aH é muito fraca. Neste caso classificamos o espectro de potência como sendo aproximadamente invariante por escalas. Podemos medir o quanto o espectro de potência é invariante por escala calculando o índice espectral das perturbações de curvatura para os modos que voltam a estar dentro do horizonte, ou seja, quando $k = aH$. O índice espectral é definido como sendo

$$n_S - 1 = \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \right|_{k=aH}, \quad (3.72)$$

e no caso da inflação de rolamento lento encontramos que o índice espectral é

$$n_S - 1 \approx 2(\eta - 2\epsilon). \quad (3.73)$$

Como sabemos que os parâmetros de rolamento lento são muito pequenos durante a inflação, vemos que devemos ter $n_S \approx 1$. A medida mais recente do satélite Planck [33] nos dá um valor de $n_S = 0,9603 \pm 0,0073$. Outra importante previsão da inflação de rolamento lento é a existência de ondas gravitacionais. As mesmas ainda não foram detectadas, pelo menos não de forma direta [34], mas através das perturbações na curvatura é possível colocar um limite superior no valor da amplitude do espectro de potência das perturbações tensoriais. Definimos o número r como sendo a razão entre o espectro de potência das

perturbações tensorais e das perturbações escalares, e temos

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_R}, \quad (3.74)$$

onde \mathcal{P}_T é o espectro de potência das ondas gravitacionais primordiais. Na inflação de rolamento lento a razão tensorial-escalar é

$$r = 16\epsilon, \quad (3.75)$$

e o satélite Planck limita o valor de r em [34]

$$r < 0,11, \quad (3.76)$$

o que significa que as ondas gravitacionais têm uma amplitude grande o suficiente para serem observadas em um futuro não muito distante por um dos inúmeros experimentos em execução ou em projeto.

Capítulo 4

Oscilações no espectro de potência devido a excitações de campos pesados durante a inflação

Como vimos no capítulo anterior, o modelo inflacionário é capaz de prever as flutuações na RCFM. Além disso, quando comparamos as medidas da RCFM com os vários modelos de inflação disponíveis vemos que, estatisticamente, os melhores modelos são os de um único campo escalar [33], que produzem perturbações adiabáticas, Gaussianas e com ondas gravitacionais possíveis de serem observadas. Para respeitar as condições de rolamento lento o campo escalar tem de ser “leve”, no sentido de que a massa do campo escalar, que é a segunda derivada do potencial $V(\phi)$, deve obedecer a relação

$$m_\phi^2 \equiv V_{,\phi\phi} \ll H^2. \quad (4.1)$$

Essa relação é facilmente encontrada a partir da condição $\eta \ll 1$ da inflação de rolamento lento.

Mesmo assim, a teoria de cordas prevê a existência de modelos inflacionários onde mais de um campo escalar pode estar presente [35]. Em muitos casos é possível reescrever as equações de campo do modelo de múltiplos-campos em termos de uma teoria efetiva de

um único campo [36], mas, mesmo assim, entre os campos podem estar presentes campos pesados, ou seja, que violam a condição (4.1). Na literatura encontramos várias maneiras de excitar um campo pesado [37–40], mas a grande questão é: quanta energia pode ser transferida para o campo pesado ao mesmo tempo em que o modelo seja consistente com os dados observacionais da RCFM? O satélite Planck melhorou consideravelmente os limites das anomalias oscilatórias do espectro de potência [33]. Pequenas correções no espectro de potência invariante por escala não estão descartadas, mas adicionar mais três parâmetros (posição do primeiro pico de oscilação, amplitude e frequência) não melhora, estatisticamente, os valores dos parâmetros cosmológicos.

Dentre as várias maneiras de se excitar um campo pesado daremos destaque para o caso de um campo leve que, de maneira abrupta, ganha massa e se torna pesado [41–43]. Tais excitações provocam uma curva abrupta na trajetória dos campos na direção do campo que se tornou pesado quando olhamos no espaço de fase, junto com oscilações de alta frequência na mesma direção, que por sua vez irá produzir desvios oscilatórios no espectro de potência [21].

Em nosso modelo iremos considerar um universo preenchido por dois campos escalares, lembrando que, a teoria de cordas nos possibilitaria usar um número N de campos. Ambos os campos terão como potencial o chamado potencial quadrático¹, sendo que não haverá nenhum tipo de interação entre os campos, a não ser via a dependência em relação ao fator de escala. Sendo assim, escrevemos o potencial total

$$V = V_l + V_p, \quad (4.2)$$

onde l e p serão os índices para todas as quantidades correspondentes ao campo leve e pesado, respectivamente. Considerando o potencial caótico, teremos, em um intervalo de tempo $t_i \leq t \leq t_*$

$$V_l = \frac{m_l^2 \phi_l^2}{2}, \quad V_p = \frac{m_p^2 \phi_p^2}{2}, \quad (4.3)$$

¹Também conhecido pelo nome de potencial caótico. Qualquer potencial do tipo ϕ^p , sendo p uma potência qualquer, é dito caótico pois a inflação é uma consequência natural de condições iniciais caóticas no universo primordial [44].

onde t_i é o instante onde a inflação começa, t_* será o instante de transição, ϕ_l é o campo dito leve, ϕ_p é o campo dito pesado e m_l é a massa leve, que satisfaz a condição

$$m_l^2 \ll H^2. \quad (4.4)$$

No instante t_* o campo pesado ϕ_p , que até então é na verdade leve, ganhará uma massa pesada m_p , onde

$$m_p \gg m_l, \quad (4.5)$$

sendo que a massa é dita pesada no sentido de que

$$m_p \gg H. \quad (4.6)$$

Portanto, para qualquer tempo $t \geq t_*$ os potênciais serão

$$V_l = \frac{m_l^2 \phi_l^2}{2}, \quad V_p = \frac{m_p^2 (\phi_p - \tilde{\phi}_p)^2}{2}. \quad (4.7)$$

Daqui em diante, toda quantidade dependente do tempo levará o índice “-”, quando estivermos tratando da mesma no intervalo $t < t_*$ e o índice “+” para tempos $t > t_*$. Por exemplo,

$$\rho^- = \rho_l^- + \rho_p^- = \sum_{i=1,p} \left(\frac{(\dot{\phi}_i^-)^2}{2} + V_i^- \right), \quad (4.8)$$

$$p^- = p_l^- + p_p^- = \sum_{i=1,p} \left(\frac{(\dot{\phi}_i^-)^2}{2} - V_i^- \right), \quad (4.9)$$

são a densidade de energia e a pressão totais do universo para $t \leq t_*$ sendo que os

potenciais V_i^- são dados pela equação (4.3) e, para $t \geq t_*$ teremos

$$\rho^+ = \sum_{i=1,p} \left(\frac{(\dot{\phi}_i^+)^2}{2} + V_i^+ \right), \quad (4.10)$$

$$p^+ = \sum_{i=1,p} \left(\frac{(\dot{\phi}_i^+)^2}{2} - V_i^+ \right), \quad (4.11)$$

onde, dessa vez, os potênciais obedecem à expressão (4.7).

4.1 Equações de base

O nosso modelo de universo é, como sempre, homogêneo e isotrópico, de curvatura nula, e portanto descrito pela métrica FLRW, neste caso

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2, \quad (4.12)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e t o tempo cósmico. A evolução do universo é descrita pelas equações de Friedmann e pela equação de continuidade, que no caso de campo escalar é a equação de Klein-Gordon, e portanto temos

$$3H^2 = M_{\text{Pl}}^{-2} \sum_i \left(\frac{\dot{\phi}_i^2}{2} + V_i \right), \quad \dot{H} = -M_{\text{Pl}}^{-2} \sum_i \frac{\dot{\phi}_i^2}{2}, \quad (4.13)$$

$$\ddot{\phi}_i + 3H\dot{\phi}_i + V_i' = 0, \quad (4.14)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble e também introduzimos a notação $V_i' \equiv \partial_{\phi_i} V_i$.

Como veremos mais adiante, as oscilações no espectro de potência serão de ordem

$$\varepsilon \equiv \left. \frac{\rho_p}{\rho_l} \right|_{t_*}, \quad (4.15)$$

onde

$$\rho_i = V_i + \frac{1}{2}\dot{\phi}_i^2, \quad (4.16)$$

é a densidade de energia para cada um dos campos.

A amplitude das oscilações no espectro de potência são limitadas pelas observações mais recentes em menos de um por cento [33], e então vamos impor $\epsilon \lesssim \mathcal{O}(10^{-2}) \ll 1$. Esse parâmetro de valor pequeno não deve ser confundido com os parâmetros de rolamento lento, que para o caso de um universo preenchido por vários campos escalares canônicos e sem interação, são

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \sum_i \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2} \left(\frac{\dot{\phi}_i}{H} \right)^2 \equiv \sum_i \epsilon_i \quad , \quad \epsilon_{ij} = \sqrt{\epsilon_i \epsilon_j} \quad , \quad (4.17)$$

$$\delta_i \equiv -\frac{\ddot{\phi}_i}{H\dot{\phi}_i} \quad , \quad \delta_i + \delta_j = \epsilon - \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{2H\epsilon_{ij}} \quad , \quad \eta_{ij} \equiv M_{\text{Pl}}^2 \frac{V_{,\phi_i\phi_j}}{V} \quad . \quad (4.18)$$

Como já vimos anteriormente, para termos uma inflação do tipo rolamento lento, devemos impor $\epsilon \ll 1$, e então teremos a equação de Friedmann aproximada

$$3H^2 \simeq M_{\text{Pl}}^{-2} V_1 \quad , \quad (4.19)$$

e portanto é o campo ϕ_1 que domina a dinâmica de fundo durante a inflação.

4.1.1 Antes da transição, $t \leq t_*$

Inicialmente, para tempos $t \leq t_*$, ambos os campos são leves, ou seja, têm massa $m_i = m_l \ll H$ e, portanto, podemos impor a segunda condição de rolamento lento $\delta_i \ll 1$ para ambos os campos, de onde vem

$$3H\dot{\phi}_i + V'_i \simeq 0 \quad , \quad (4.20)$$

que podemos substituir no primeiro parâmetro de rolamento lento ϵ , e então temos

$$\epsilon \simeq \sum_i \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V'_i}{3H^2} \right)^2 \quad . \quad (4.21)$$

Até primeira ordem, a razão entre as densidades de energia na transição irá satisfazer

$$\varepsilon \simeq \frac{\phi_{\text{p}}^{*2}}{\phi_1^{*2}} + \frac{1}{3}\epsilon_{\text{p}} \ll 1, \quad (4.22)$$

e as condições de rolamento lento combinadas com esta condição de energia irá limitar os valores dos campos em

$$\phi_{\text{p}}^* \ll \phi_1^* \quad , \quad \phi_1^* > M_{\text{Pl}}, \quad (4.23)$$

e, para sermos consistentes com as observações, vamos sempre usar

$$\phi_1^* \equiv 15M_{\text{Pl}}, \quad (4.24)$$

que, para o caso do potencial quadrático, é o valor necessário para que a inflação dure tempo suficiente.

Agora podemos resolver as equações de Klein-Gordon (4.20) no limite do rolamento lento, que nos levarão a

$$\phi_1 \approx \phi_1^* \left[1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi_1^*} \right) m_1 (t_* - t) \right], \quad (4.25)$$

$$\phi_{\text{p}} \approx \phi_{\text{p}}^* \left[1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi_1^*} \right) m_1 (t_* - t) \right], \quad (4.26)$$

Que se forem substituídas nas expressões para os parâmetros de rolamento lento teremos

$$\epsilon_{\text{p}} \simeq 2M_{\text{Pl}}^2 \frac{\phi_{\text{p}}^{*2}}{\phi_1^{*4}}, \quad (4.27)$$

$$\epsilon_1 \simeq 2M_{\text{Pl}}^2 \frac{1}{\phi_1^{*2}}, \quad (4.28)$$

sendo que, da condição de energia (4.22), concluímos que $\phi_{\text{p}}^* \ll \phi_1^*$ e, portanto

$$\epsilon_{\text{p}} \ll \epsilon_1, \quad (4.29)$$

o que nos motiva a tratar ϵ_{p} como uma quantidade de segunda ordem. Consequentemente,

a condição de energia (4.22) será simplificada em

$$\varepsilon \simeq \frac{\phi_p^{*2}}{\phi_1^{*2}} \ll 1. \quad (4.30)$$

4.1.2 Após a transição, $t \geq t_*$

No intervalo $t \geq t_*$ o campo ϕ_p ganha a massa m_p , que viola a condição de rolamento lento para δ_p . Mesmo assim, vimos que a energia é dominada pelo campo ϕ_1 , assim como o primeiro parâmetro de rolamento lento. O campo leve ϕ_1 continua com o mesmo comportamento inflacionário, ou seja, satisfaz as relações $\epsilon \ll 1$ e $\delta_1 \ll 1$, e portanto o universo continua a evolução aproximadamente inflacionária, exceto por pequenas correções que poderiam vir do comportamento do campo pesado.

Já que o campo pesado viola o comportamento inflacionário, que neste caso significa $\delta_p \gg 1$ para $m_p \gg H$, vamos definir um novo parâmetro, dado pela razão entre as massas

$$\epsilon_m = \frac{m_1^2}{m_p^2}, \quad (4.31)$$

e, portanto, a condição que define o campo pesado pode ser reescrita como

$$\epsilon_m \ll 3\epsilon_1, \quad (4.32)$$

de maneira que $(H/m_p)^2$ pode ser tratado como um parâmetro de segunda ordem, quando comparado com ϵ_1 e ε . Sob estas condições, as equações de fundo são

$$3H^2 \simeq M_{\text{Pl}}^{-2} V_1 \quad , \quad 3H\dot{\phi}_1 + V_1' \simeq 0 \quad , \quad \ddot{\phi}_p + 3H\dot{\phi}_p + V_p' = 0, \quad (4.33)$$

que podem ser resolvidas como

$$\phi_1 \simeq \phi_1^* \left[1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi_1^*} \right) m_1 (t - t_*) \right] \quad , \quad (4.34)$$

$$\phi_p - \tilde{\phi}_p \simeq C \left(\frac{a}{a_*} \right)^{-3/2} \sin [m_p (t - t_*) + \gamma] \quad , \quad (4.35)$$

onde $a(t_*) = a_*$, $\tilde{\phi}_p$, C e γ são constantes de integração.

No instante da transição temos de impor a continuidade do fator de escala e do parâmetro de Hubble

$$[a]^\pm = 0 \quad , \quad [H]^\pm = 0, \quad (4.36)$$

conforme é esperado das condições de junção de Israel/Deruelle-Mukhanov [45–47], que requerem a continuidade da curvatura e da métrica induzida na hiper-superfície que separa as duas fases da inflação. Aqui, introduzimos a notação

$$[F]^\pm \equiv F(t_*^+) - F(t_*^-), \quad (4.37)$$

que mede a mudança de uma quantidade no ponto de transição. Os campos não estão interagindo ou decaindo, portanto podemos impor a continuidade dos mesmos, assim como dos respectivos potenciais e das energias cinéticas, ou seja, $[\rho_i]_\pm = 0$ e $[\dot{\phi}_i]^\pm = 0$.

Substituindo as soluções (4.25) e (4.26) do intervalo de tempo anterior a transição e (4.34) e (4.35) do intervalo posterior a transição nas condições de junção, chegamos em

$$\cot \gamma = \frac{3}{2} \frac{H}{m_p} + \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi_1^*} \right)^2} \simeq \frac{1}{\sqrt{3\epsilon_1}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\epsilon_m} + \epsilon_1 \right) \ll 1, \quad (4.38)$$

de maneira que podemos fazer uma expansão de Taylor em $\cot \gamma$ ao redor de $\pi/2$ e aproximar

$$\gamma \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{3\epsilon_1}} \left(\epsilon_1 + \frac{3}{2} \sqrt{\epsilon_m} \right) \equiv \frac{\pi}{2} + \delta\gamma. \quad (4.39)$$

De maneira similar, teremos

$$C = \left(\frac{m_l}{m_p} \right) \frac{\phi_p^*}{|\sin \gamma|} \approx \sqrt{\epsilon_m} (1 + \delta\gamma) \phi_p^* \approx \sqrt{\epsilon_m} \phi_p^*, \quad (4.40)$$

e

$$\tilde{\phi}_p = \phi_p^* \left(1 - \frac{m_l}{m_p} \right) = \phi_p^* (1 - \sqrt{\epsilon_m}), \quad (4.41)$$

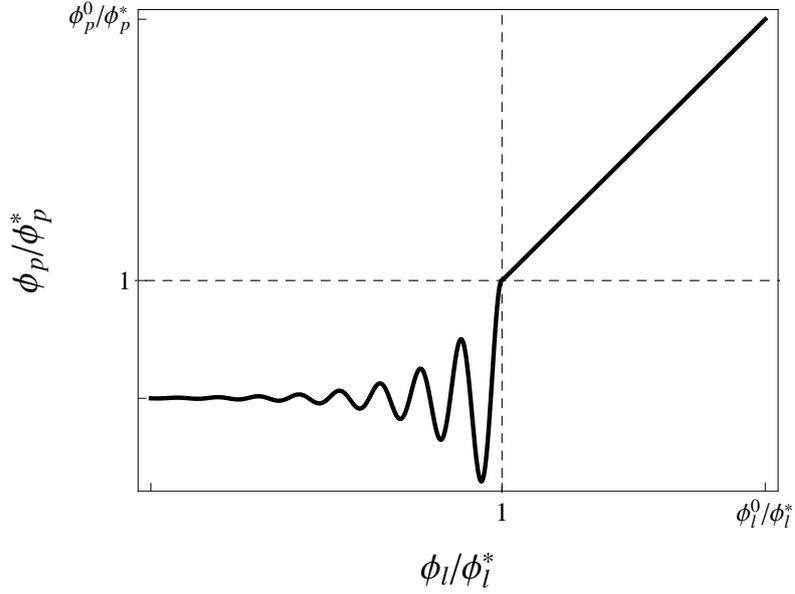


Figura 4.1: A evolução dos campos, com o momento de transição em t_* , quando ϕ_p evolui de um campo leve para um campo pesado, como é dado pelas soluções em (4.26) e (4.35). O potencial é contínuo durante a transição $\vec{\phi}^* \equiv (\phi_1^*, \phi_p^*)$, mas a segunda derivada faz um salto do valor $\partial^2 V / \partial \phi_p^2|_- = m_1$ para $\partial^2 V / \partial \phi_p^2|_+ = m_p$ em $\vec{\phi}^*$.

onde $\tilde{\phi}_p$ é a constante que garante a continuidade do potencial do campo pesado. A razão entre as densidades de energia (4.22) continuam sendo

$$\varepsilon \equiv \frac{\rho_p^*}{\rho_1^*} \simeq \frac{\phi_p^{*2}}{\phi_1^{*2}}, \quad (4.42)$$

tendo em vista que $[\rho_i]_{\pm} = 0$.

Como escolhemos potenciais quadráticos e tratamos a transição de $m_1 \rightarrow m_p$ para o campo ϕ_p como sendo instantânea, as amplitudes das oscilações do campo pesado são amortecidas e caem com $a^{-3/2}$ e, portanto a densidade de energia do mesmo desaparece muito rapidamente, em apenas alguns poucos tempos de Hubble $1/H$. Na Figura 4.1 é possível ver a evolução dos campos no espaço de fase.

Usando as definições da densidade de energia e da pressão (4.8) e (4.10) podemos

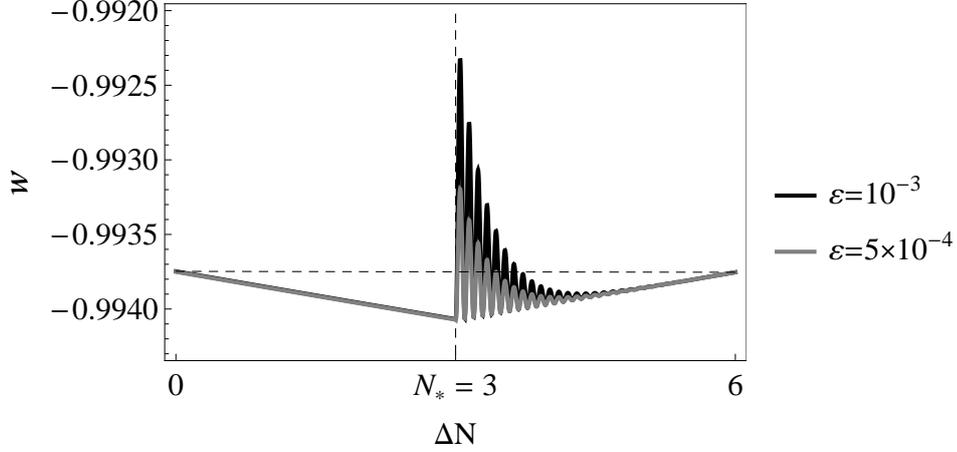


Figura 4.2: O parâmetro da equação de estado (4.43), como uma função do número de potências (ΔN) do fator de escala exponencial, para $m_1/m_p = \sqrt{\epsilon_m} = 5 \times 10^{-3}$, com dois valores diferentes para a razão entre as energias. O ponto de transição $N_* \equiv 3$ é fixado a mão, e a evolução da equação (4.43) não depende do mesmo.

calcular, para qualquer instante t , o parâmetro da equação de estado, de onde vem

$$1 + w = \frac{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_p^2}{3M_{\text{pl}}^2 H^2}, \quad (4.43)$$

que tem uma componente oscilatória após a transição, devido as oscilações em ϕ_p . Como podemos ver na Figura (4.2), essas oscilações desaparecem muito rapidamente.

4.1.3 Transição abrupta

Como vemos na Figura (4.1), após a transição a componente pesada desaparece muito rapidamente, e a inflação passa a ser totalmente dominada apenas pela componente leve. Devido a presença da componente pesada encontramos também oscilações no parâmetro da equação de estado (4.43) e, como vemos na Figura (4.2), essas oscilações desaparecem rapidamente, conforme a componente pesada, responsável pelas oscilações, desaparece. Em virtude do caráter transiente das oscilações somos motivados a ignorá-las. Fazemos isso ignorando o campo pesado ϕ_p após a transição, ou seja, em termos da equação (4.43)

podemos escrever, para $t \leq t_*$

$$1 + w_- \simeq \frac{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_p^2}{3M_{\text{pl}}^2 H^2} = \frac{2}{3}(\epsilon_1^- + \epsilon_p^-), \quad (4.44)$$

e, após a transição, ignorando as oscilações de ϕ_p^+ , teremos

$$1 + w_+ \approx \frac{\dot{\phi}_1^2}{3M_{\text{pl}}^2 H^2} \simeq \frac{2}{3}\epsilon_1^+. \quad (4.45)$$

Se mantivermos as oscilações, o parâmetro da equação de estado será contínuo, assim como as outras quantidades de fundo. Mas no caso da transição abrupta, ou seja, quando, após a transição, ignoramos o campo pesado ϕ_p (e conseqüentemente as oscilações), iremos criar uma descontinuidade em (4.43), que será

$$\frac{\Delta w}{1 + w_-} \equiv \frac{w_- - w_+}{1 + w_-} \approx \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \approx \epsilon, \quad (4.46)$$

onde usamos a relação $\epsilon_p/\epsilon_1 \simeq \epsilon$. Como ignoramos a contribuição do campo pesado nas equações de Friedmann desde o início, o parâmetro de Hubble, o fator de escala e o tempo conforme continuam sendo contínuos.

Apesar de termos criado o salto (4.46) em (4.43), iremos terminar com equações perturbativas mais simples, que nos permitirão estimar a amplitude das oscilações no espectro de potência.

4.2 Perturbações

Nosso objetivo é calcular o espectro de potência das perturbações de curvatura \mathcal{R} após a transição, quando as oscilações do campo pesado e o próprio campo pesado já tenham desaparecido. Vamos fazer os cálculos de duas maneiras: usando a aproximação abrupta, descrita na Seção 4.1.3, sendo que iremos também ignorar as perturbações do campo pesado, e também faremos os mesmos cálculos usando a descrição completa, com ambos os campos e ambas as perturbações.

Como já mostramos anteriormente, o elemento de linha com perturbações escalares pode ser escrito, de maneira mais geral, como

$$ds^2 = (1 - 2A)dt^2 + 2aB_{,i}dx^i dt - a^2[(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j. \quad (4.47)$$

Podemos fixar as variáveis invariantes de calibre

$$\Phi = A + (aB - a^2\dot{E}), \quad (4.48)$$

$$\Psi = \psi - H(aB - a^2\dot{E}). \quad (4.49)$$

que irão coincidir, isto é, $\Phi = \Psi$, no caso da perturbação do tensor momento-energia conter pressão anisotrópica nula, ou seja, apenas as componentes diagonais serem diferentes de zero ($\delta T^i_j = 0$ para $i \neq j$). Perturbando ambos os campos escalares, teremos

$$\phi_i(\mathbf{x}, t) \equiv \phi_i(t) + \delta\phi_i(\mathbf{x}, t). \quad (4.50)$$

Da mesma maneira que fizemos anteriormente, podemos calcular as equações de movimento das perturbações dos inflatons no espaço de Fourier, que serão acopladas, e teremos

$$\ddot{\delta\phi}_i + 3H\dot{\delta\phi}_i + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_i + \sum_j (\partial_{\phi_i\phi_j}^2 V)\delta\phi_j = -2(\partial_{\phi_i} V)A + \dot{\phi}_i \left[\dot{A} + 3\dot{\psi} + \frac{k^2}{a^2}(a^2\dot{E} - aB) \right]. \quad (4.51)$$

Novamente, podemos usar as variáveis de Sasaki-Mukhanov

$$Q_i = \delta\phi_i + \frac{\dot{\phi}_i}{H}\psi, \quad (4.52)$$

para simplificar as equações de movimento acopladas

$$\ddot{Q}_i + 3H\dot{Q}_i + \frac{k^2}{a^2}Q_i + \sum_j \left(\partial_{\phi_i\phi_j}^2 V - \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{a^3} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j \right) \right) Q_j = 0. \quad (4.53)$$

O acoplamento entre as equações perturbadas de ambos os campos, como visto em (4.53), irá tornar a resolução da mesma um pouco mais elaborada, quando comparada

com o caso de um único campo. A seguir, vamos fazer um descrição geral de como resolver a equação (4.53), para ambos os intervalos, antes e depois da transição. Primeiro, vamos usar o tempo conforme $dt = ad\tau$, para reescrevermos o lado esquerdo de (4.53)

$$Q_i'' + 2\mathcal{H}Q_i' + k^2Q_i = -a^2 \sum_j \left(\partial_{\phi_i\phi_j}^2 V - \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{a^3} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j \right) \right) Q_j. \quad (4.54)$$

Mantivemos o lado direito em função do tempo cósmico t pois as componentes da soma podem ser escritas em função do parâmetros de rolamento lento, que definimos anteriormente em função das derivadas de t . Agora, vamos redefinir as variáveis Q_i , e escrever

$$u_i \equiv aQ_i, \quad (4.55)$$

que então, irá nos dar a equação de onda acoplada

$$u_i'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) u_i = -\frac{1}{\tau^2} \sum_j M_{ij} u_j, \quad (4.56)$$

onde M_{ij} são as componentes da matriz de interação, ou matriz de massa, M . Essa matriz depende dos parâmetros de rolamento lento e, como esses parâmetros são diferentes antes e depois da transição vamos deixar para escrever as matrizes M^- e M^+ mais a frente. Podemos resolver a equação de onda para u_i se fizermos uma rotação na matriz de interação M de maneira que matriz rotacionada seja diagonal [48]. Essa rotação será dada pela matriz de rotação

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Aplicando a matriz de rotação (4.57) na matriz de interação obteremos a diagonalização,

$$U^T M U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

com auto-valores

$$\lambda_{p,l} = \frac{1}{2} \left[M_{pp} + M_{ll} \pm |M_{pp} - M_{ll}| \sqrt{1 + (\tan 2\theta)^2} \right], \quad (4.59)$$

e o ângulo θ da rotação é

$$\tan 2\theta = \frac{2M_{pl}}{M_{pp} - M_{ll}}. \quad (4.60)$$

Essa rotação é dependente da escala, ou seja, de k , e fixamos a escala como sendo aquela onde os modos perturbativos reentram no horizonte, isto é, $k = aH$ [48].

As variáveis de perturbação desacopladas v_i são dadas pela rotação

$$u_i = \sum_j U_{ij} v_j, \quad (4.61)$$

e satisfazem a equação de onda

$$v_i'' + \left(k^2 - \frac{(2 - \lambda_i)}{\tau^2} \right) v_i \approx 0. \quad (4.62)$$

4.2.1 Antes da transição, $t \leq t_*$

Antes do campo ϕ_p se tornar massivo podemos calcular a matriz de interação M^- em função dos parâmetros inflacionários

$$M_{ij}^- \simeq 3 \left(\eta_{ij}^- - 2\epsilon_{ij}^- - \epsilon^- \delta_{ij} \right), \quad (4.63)$$

até a primeira ordem dos parâmetros de rolamento lento. Podemos ainda simplificar

$$M^- \simeq -6\epsilon_1(1 - 2\epsilon) \begin{pmatrix} \epsilon & \sqrt{\epsilon} \\ \sqrt{\epsilon} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

de maneira que o ângulo de rotação θ_- será dado pela relação

$$\tan 2\theta_- \simeq -2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)} \simeq -2\sqrt{\varepsilon}, \quad (4.65)$$

até primeira ordem e, da mesma maneira, os auto-valores da matriz diagonal serão

$$\lambda_p^- \simeq \mathcal{O}(\epsilon_1\epsilon), \quad (4.66)$$

$$\lambda_1^- \simeq -6\epsilon_1 + \mathcal{O}(\epsilon_1\epsilon). \quad (4.67)$$

Agora a equação de onda para as variáveis desacopladas v_i podem ser facilmente resolvidas para $t \leq t_*$. Neste caso, vamos assumir o vácuo de Bunch-Davies, ou seja, $v_i \rightarrow e^{-ik\tau}/\sqrt{2k}$ para $\tau \rightarrow -\infty$, e vamos encontrar novamente

$$v_i^- = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\mu_i^- + 1/2)\pi/2} \sqrt{-\tau} \mathcal{H}_{\mu_i^-}^{(1)}(-k\tau) e_i(\vec{k}), \quad (4.68)$$

onde $\mathcal{H}_{\mu_i^-}^{(1)}(-k\tau)$ é a função de Hankel do primeiro tipo e ordem

$$\mu_i^- \equiv \sqrt{\frac{9}{4} - \lambda_i^-} \quad (4.69)$$

e $e_i(\vec{k})$ são variáveis Gaussianas independentes, que satisfazem as relações

$$\langle e_i(\vec{k}) \rangle = 0 \quad , \quad \langle e_i(\vec{k}) e_j(\vec{k}')^* \rangle = \delta_{ij} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (4.70)$$

e que foram introduzidas para podermos separar as contribuições das perturbações de cada um dos campos.

4.2.2 Após a transição, $t \geq t_*$

Mesmo após a transição a equação de onda para a variável u_i tem o mesmo formato, mas, desta vez, a matriz de interação é

$$M_{ij}^+ \equiv 3(\eta_{ij}^+ + 2\epsilon_{ij}^+ - \epsilon^+ \delta_{ij}) + 6\epsilon_{ij}^+ \left(\frac{V_i'}{3H\dot{\phi}_i^+} + \frac{V_j'}{3H\dot{\phi}_j^+} \right), \quad (4.71)$$

onde $V_i' = \partial_{\phi_i^+} V_i$. Devido as oscilações em ϕ_p e da massa m_p a aproximação de rolamento lento não pode ser usada em $V_p'/(3H\dot{\phi}_p)$. Mesmo assim, até a maior ordem possível dos parâmetros pequenos, encontramos as componentes da matriz M^+

$$M_{ll}^+ \simeq -6\epsilon_1 - 9\epsilon F_{\text{osc}}^2, \quad (4.72)$$

$$M_{pl}^+ \simeq 6\epsilon_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_m}} \tilde{F}_{\text{osc}}, \quad (4.73)$$

$$M_{pp}^+ \simeq \frac{m_p^2}{H^2} - 3\epsilon_1 + 9\epsilon F_{\text{osc}}^2 + 12\epsilon \frac{m_p}{H} F_{\text{osc}} \tilde{F}_{\text{osc}}, \quad (4.74)$$

onde introduzimos as funções oscilatórias

$$F_{\text{osc}} \equiv \left(\frac{a}{a_*} \right)^{-3/2} \left(\frac{\cos(m_p(t - t_*) + \gamma) - \frac{3}{2} \frac{H}{m_p} \sin(m_p(t - t_*) + \gamma)}{\sin \gamma} \right), \quad (4.75)$$

$$\approx - \left(\frac{a_*}{a} \right)^{3/2} \sin(m_p(t - t_*)), \quad (4.76)$$

$$\tilde{F}_{\text{osc}} \equiv \left(\frac{a}{a_*} \right)^{-3/2} \left(\frac{\sin(m_p(t - t_*) + \gamma)}{\sin \gamma} \right) \approx \left(\frac{a}{a_*} \right)^{3/2} \cos(m_p(t - t_*)), \quad (4.77)$$

lembrando que, quando fizermos a diagonalização (rotação) iremos fixar o tempo t dessas funções para o momento onde os modos k reentram no horizonte, ou seja, $k = aH$. As aproximações das funções oscilatórias acima são feitas para o caso $\gamma \approx \pi/2$, de acordo com a equação (4.39), e mantemos apenas os termos de ordem zero em H/m_p .

Até primeira ordem, podemos aproximar

$$\tan 2\theta_+ \simeq \frac{4\sqrt{\epsilon_m \tilde{F}_{\text{osc}}}}{1 + \epsilon_m + 12\epsilon \frac{H}{m_p} F_{\text{osc}} \tilde{F}_{\text{osc}}}, \quad (4.78)$$

$$\approx 4\sqrt{\epsilon_m \tilde{F}_{\text{osc}}} \ll 1. \quad (4.79)$$

Portanto, sabendo que o ângulo de rotação é pequeno, também aproximamos

$$\lambda_p^+ \approx \frac{m_p^2}{H^2} \approx \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_m} \gg 1, \quad (4.80)$$

$$\lambda_1^+ \approx -6\epsilon_1 - 9\epsilon F_{\text{osc}}^2. \quad (4.81)$$

O campo ϕ_p torna-se pesado em t_* , e portanto λ_p^+ irá ganhar uma contribuição maior quando comparado com (4.66), enquanto λ_1 adquire uma contribuição oscilatória, mas passageira, quando comparado com (4.67). As soluções para os modos v_i são, novamente, dadas como combinações das funções de Hankel

$$v_i^+ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{-\tau_+} \left[A_i(k) \mathcal{H}_{\mu_i^+}^{(1)}(-k\tau_+) + B_i(k) \mathcal{H}_{\mu_i^+}^{(2)}(-k\tau_+) \right], \quad (4.82)$$

onde

$$\mu_i^+ \equiv \sqrt{\frac{9}{4} - \lambda_i^+}. \quad (4.83)$$

Como $u_i = aQ_i$ e $u_i = \sum_j U_{ij}v_j$, cada uma das variáveis de Sasaki-Mukhanov têm contribuição das perturbações de ambos os campos leve e pesado. As amplitudes A_i e B_i precisam ser determinadas através das condições de continuidade da curvatura antes da transição das perturbações.

4.2.3 Transição abrupta

Como ignoramos as breves oscilações das variáveis de fundo, como foi explicado na Seção 4.1.3, devemos também ignorar inteiramente a contribuição das perturbações do campo pesado. Isso significa que a única influência de ϕ_p aparece no salto do parâmetro da

equação de estado na transição, já que ρ_p decresce rapidamente para $t > t_*$. Podemos justificar essa aproximação se $\varepsilon \ll 1$, de maneira que a amplitude da excitação não seja tão grande após a transição. Uma condição necessária para isso é que, a amplitude de excitação, definida por

$$\Xi \equiv \phi_p^* - \tilde{\phi}_p = \frac{m_1}{m_p} \phi_1^* \sqrt{\varepsilon} = \phi_p^* \sqrt{\varepsilon_m} \approx C, \quad (4.84)$$

satisfaça a condição

$$\frac{\Xi}{M_{\text{Pl}}} \ll \frac{m_1}{m_p} = \sqrt{\varepsilon_m}. \quad (4.85)$$

Já que $\Xi = \phi_1^* \sqrt{\varepsilon_m} = 15 M_{\text{Pl}} \sqrt{\varepsilon_m}$, de acordo com (4.84), a condição (4.85) é satisfeita se $\varepsilon \ll 0.01$. Veremos que as correções no espectro de potência são de ordem ε , e portanto a aproximação da transição abrupta pode ser usada para encontrarmos correções de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ que sejam de no máximo 1%. Acidentalmente esse é o valor máximo que as observações nos dão para as correções do espectro de potência.

Nessa aproximação, a equação de movimento para a perturbação no campo leve (4.53) é

$$\ddot{Q}_1 + 3H\dot{Q}_1 + \frac{k^2}{a^2} Q_1 + \left(V_1'' - \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{a^3} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi}_1^2 \right) \right) Q_1 = 0, \quad (4.86)$$

que terá soluções

$$Q_1^- = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_1^- + 1/2)\pi/2} \sqrt{-\tau} \mathcal{H}_{\nu_1^-}^{(1)}(-k\tau) e_1(\vec{k}), \quad (4.87)$$

$$Q_1^+ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{-\tau} \left[\alpha(k) \mathcal{H}_{\nu_1^+}^{(1)}(-k\tau) + \beta(k) \mathcal{H}_{\nu_1^+}^{(2)}(-k\tau) \right] e_1(\vec{k}), \quad (4.88)$$

onde $\nu_1^+ = \nu_1^- \approx \sqrt{9/4 + 6\epsilon_1}$. Os coeficientes de Bogoliubov (α, β) devem ser determinados por aproximações das condições de continuidade das soluções em $t < t_*$ e $t > t_*$.

4.3 Condições de continuidade

Se admitirmos que a transição $m_l \rightarrow m_p$ é instantânea podemos usar, novamente, as condições de junção de Israel/Deruelle-Mukhanov [45–47], dessa vez para as perturbações, de maneira a relacionar as perturbações antes e depois da transição. A transição acontece em uma superfície onde ϕ_p é uniforme, e então as condições de junção se reduzem a continuidade de

$$[\mathcal{R}]^\pm = 0 \quad , \quad [\Phi]^\pm = 0, \quad (4.89)$$

onde Φ é o potencial de Bardeen (4.48), e a perturbação comóvel de curvatura está relacionada com o as variáveis de Sasaki-Mukhanov via

$$\mathcal{R} = \frac{H}{\left(\sum_j \dot{\phi}_j^2\right)} \left(\sum_i \dot{\phi}_i Q_i\right), \quad (4.90)$$

para o caso de múltiplos campos. Também podemos escrever o potencial de Bardeen Φ em função das variáveis de Sasaki-Mukhanov

$$-k^2\Phi = \frac{a^2}{2M_{\text{Pl}}^2} \sum_i \left(\dot{Q}_i \dot{\phi}_i + Q_i \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_i} + \frac{3}{2}(1-\omega)\dot{\phi}_i H \right) \right), \quad (4.91)$$

de maneira que as condições de continuidade para \mathcal{R} e Φ serão reduzidas a condições sobre Q_i e suas derivadas.

4.3.1 Transição abrupta

Vamos primeiro tratar do caso da transição abrupta, pois a ausência de perturbações na direção pesada ϕ_p simplificará os resultados em relação aquilo que iremos obter para o caso completo.

Ignorando as contribuições do campo pesado podemos verificar que as somas presentes em (4.90) e (4.91) irão contar apenas com a presença do campo leve ϕ_l e da perturbação,

expressa através de Q_1 , e então teremos

$$-k^2\Phi \approx a^2 \frac{\dot{\phi}_1 \dot{Q}_1}{2M_{\text{Pl}}^2}, \quad (4.92)$$

$$\mathcal{R} \approx \frac{\dot{\phi}_1 Q_1}{3(1+\omega)M_{\text{Pl}}^2 H}, \quad (4.93)$$

que se forem substituídas nas condições de continuidade (4.89), encontramos

$$[\dot{Q}_1]^\pm = 0 \quad , \quad \left[\frac{Q_1}{1+\omega} \right]^\pm = 0. \quad (4.94)$$

A primeira condição de (4.94) é a continuidade da derivada temporal da perturbação, enquanto a segunda condição de (4.94) não é tão trivial e muito menos evidente, já que temos o termo extra do parâmetro da equação de estado ω , que no caso da transição abrupta é descontínuo, como mostramos em (4.46). De posse das soluções (4.87) e (4.88) calculadas anteriormente, e juntando com as condições de continuidade (4.94), podemos calcular um sistema de duas equações, e então encontramos os coeficientes de Bogoliubov

$$\alpha = -\frac{\pi}{8} i e^{i(\nu_1+1/2)\pi/2} \left\{ 3 \frac{\Delta w}{1+w_-} \mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)} \mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)} + 2x \left[\mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)} \frac{d\mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)}}{dx} - \frac{1+w_+}{1+w_-} \mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)}}{dx} \right] \right\}, \quad (4.95)$$

$$\beta = \frac{\pi}{8} i e^{i(\nu_1+1/2)\pi/2} \left\{ 3 \frac{\Delta w}{1+w_-} \mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)} \mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)} + 2x \left[\mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)}}{dx} - \frac{1+w_+}{1+w_-} \mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)}}{dx} \right] \right\}, \quad (4.96)$$

onde $\nu_1^+ \approx \nu_1^- = \sqrt{9/4 + 6\epsilon_1}$ e todas as funções de Hankel dependem da variável adimensional

$$x \equiv -k\tau_*. \quad (4.97)$$

O efeito das perturbações do campo pesado não aparecem nos coeficientes do Bogoliubov, assim como os detalhes do mecanismo de excitação. A única maneira de observarmos algum efeito aqui é através do degrau $\Delta\omega$ do parâmetro da equação de estado. Portanto

podemos concluir que os coeficientes de Bogoliubov são genéricos, para qualquer mecanismo de excitação que provoque um salto $\Delta\omega$ na equação de estado. De fato, os mesmos coeficientes já foram encontrados em outros contextos [49, 50].

4.3.2 O caso completo: ambos os campos

Agora vamos calcular os coeficientes de Bogoliubov na presença de ambos os campos, tanto na base como na perturbação. Como as energias cinética e potencial de ambos os campos são contínuas, o parâmetro da equação de estado também é, ou seja

$$[w]_{\pm} = 0, \quad (4.98)$$

e apenas a descontinuidade $m_1 \rightarrow m_p$ na transição de ϕ_p pode gerar condições de junção não triviais.

Embora o ganho de massa em ϕ_p provoque uma guinada abrupta (veja Figura 4.1), todas as quantidades de fundo permanecem contínuas e suaves², ou seja

$$[a]^{\pm} = [H]^{\pm} = [\rho_i]^{\pm} = [V_i]^{\pm} = 0. \quad (4.99)$$

Para satisfazermos as condições de continuidade de Israel/Deruelle-Mukhanov, vamos assumir que cada componente das somas (4.90) e (4.91) sejam contínuas, já que os campos não interagem durante a mudança instantânea dos potenciais. Além disso, como não existe nenhuma mudança no campo leve ϕ_1 e as quantidades de base são contínuas, as perturbações do campo leve não devem ser afetadas pela transição, e portanto $[Q_1]^{\pm} = [\dot{Q}_1]^{\pm} = 0$ no calibre plano ($\psi = 0$) [21].

Já as perturbações no campo pesado são sensíveis a mudanças no potencial, mas como Q_1 , \mathcal{R} e $\dot{\phi}_i$ são contínuos, Q_p também deve ser contínuo, devido a relação (4.90). Portanto, a única quantidade que não obedece uma relação não-trivial de continuidade é \dot{Q}_p . As

²Exceto a segunda derivada de V_p .

relações de continuidade serão

$$[Q_1]^\pm = 0 \quad , \quad [Q_p]^\pm = 0, \quad (4.100)$$

$$[\dot{Q}_1]^\pm = 0 \quad , \quad \left[\dot{\phi}_p \dot{Q}_p + Q_p \left(\partial_{\phi_p} V + 3H \dot{\phi}_p \right) \right]^\pm = 0. \quad (4.101)$$

Se juntarmos as soluções (4.68) e (4.82) antes e depois da transição t_* nas variáveis de Sasaki-Mukhanov (4.61) com (4.68) e (4.82), temos

$$Q_p^\pm = \cos \theta_\pm \frac{v_p^\pm}{a} - \sin \theta_\pm \frac{v_1^\pm}{a}, \quad (4.102)$$

$$Q_1^\pm = \sin \theta_\pm \frac{v_p^\pm}{a} + \cos \theta_\pm \frac{v_1^\pm}{a}. \quad (4.103)$$

As soluções para $t > t_*$ em (4.82) têm coeficientes de Bogoliubov que devem ser expandidos em termos dos campos Gaussianos $e_i(\vec{k})$, ou seja,

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 e_1(\vec{k}) + \alpha_p e_p(\vec{k}) \quad , \quad A_p = \tilde{\alpha}_1 e_1(\vec{k}) + \tilde{\alpha}_p e_p(\vec{k}), \\ B_1 &= \beta_1 e_1(\vec{k}) + \beta_p e_p(\vec{k}) \quad , \quad B_p = \tilde{\beta}_1 e_1(\vec{k}) + \tilde{\beta}_p e_p(\vec{k}). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Temos apenas de usar (4.102) e (4.103) nas condições de continuidade (4.100) para, após longos cálculos, encontrarmos os coeficientes. Os mesmos, assim como parte do processo de cálculos são apresentados no Apêndice B.

4.4 Espectro de potência

Como já vimos anteriormente, na Seção 3.3, o espectro de potência $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ das perturbações de curvatura \mathcal{R} é definido como

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} \left\langle \mathcal{R}(\vec{k}')^* \mathcal{R}(\vec{k}) \right\rangle \quad , \quad (4.105)$$

que, devido as condições de junção, irá contar com uma correção, de onde também definimos o espectro total $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \equiv \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{SR}}(1 + \delta), \quad (4.106)$$

sendo que δ é a correção do espectro total em relação ao espectro de rolamento lento de um único campo $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{SR}}$. Podemos então, encontrar o desvio em relação ao espectro de rolamento lento de um único campo, que chamamos de

$$\Delta\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \equiv \delta = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{SR}}} - 1. \quad (4.107)$$

Em escalas onde $-k\tau \gg 1$, o espectro de potência de referência é

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{SR}} \equiv \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}_1} \frac{\Gamma(\mu_1^+)}{\Gamma(3/2)} \right)^2 \left| -\frac{k\tau_+}{2} \right|^{3-2\mu_1^+}. \quad (4.108)$$

4.4.1 Transição abrupta

No caso da transição abrupta, o termo $\beta \neq 0$ após a transição, irá criar pequenas oscilações, e no limite $-k\tau \gg 1$ encontramos as correções oscilatórias

$$\Delta\mathcal{P}_{\mathcal{R}} + 1 = \cos^2 \left[x + \left(\nu_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4} \right] + \left(\frac{1+w_+}{1+w_-} \right)^2 \sin^2 \left[x + \left(\nu_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4} \right] \quad (4.109)$$

$$\approx 1 - 2\varepsilon \sin^2 \left(-x + \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.110)$$

onde $\varepsilon = \rho_p/\rho_1$ é razão entre as energias na transição t_* .

4.4.2 O caso completo

Como já vimos, pouco tempo após a transição, a energia do campo pesado torna-se desprezível quando comparada com a do campo leve. Posteriormente, no final da inflação, o campo leve também decai e reaquece o universo. Como consequência, são as perturbações Q_1^+ que terão o papel mais importante na determinação das flutuações da RCFM, e portanto, para tempos mais tardios ($-k\tau \rightarrow 0$) na história inflacionária, podemos desprezar

Q_p^+ para o cálculo do espectro de potência, e então a perturbação de curvatura será

$$\mathcal{R} \approx \frac{H}{\dot{\phi}_1} Q_1. \quad (4.111)$$

Aproximando as funções de Hankel no limite $-k\tau \gg 1$ e usando (4.104), teremos

$$\begin{aligned} Q_1^+ \approx & -i \frac{\sqrt{-\tau_+} \Gamma(\mu_1^+)}{a \sqrt{\pi}} \left(-\frac{k\tau_+}{2} \right)^{-\mu_1^+} \\ & \times \left\{ \left[(\alpha_1 - \beta_1) \cos \theta_+ + (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1) \frac{\Gamma(\mu_p^+)}{\Gamma(\mu_1^+)} \left(-\frac{k\tau_+}{2} \right)^{\mu_1^+ - \mu_p^+} \sin \theta_+ \right] e_1 \right. \\ & \left. + \left[(\alpha_p - \beta_p) \cos \theta_+ + (\tilde{\alpha}_p - \tilde{\beta}_p) \frac{\Gamma(\mu_p^+)}{\Gamma(\mu_1^+)} \left(-\frac{k\tau_+}{2} \right)^{\mu_1^+ - \mu_p^+} \sin \theta_+ \right] e_p \right\}, \end{aligned} \quad (4.112)$$

onde α_i, β_i , sendo $i = l, h$, são dados por (B.9), (B.10), (B.13) e (B.14).

Dada a solução final (4.112), podemos encontrar o espectro de potência para o caso onde usamos as condições completas de continuidade, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \approx & \left(\frac{H^2}{2\pi \dot{\phi}_1} \frac{\Gamma(\mu_1^+)}{\Gamma(3/2)} \right)^2 \left| -\frac{k\tau_+}{2} \right|^{3-2\mu_1^+} \\ & \times \left(\left| (\alpha_1 - \beta_1) \cos \theta_+ + (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1) \frac{\Gamma(\mu_p^+)}{\Gamma(\mu_1^+)} \left(-\frac{k\tau_+}{2} \right)^{\mu_1^+ - \mu_p^+} \sin \theta_+ \right|^2 \right. \\ & \left. + \left| (\alpha_p - \beta_p) \cos \theta_+ + (\tilde{\alpha}_p - \tilde{\beta}_p) \frac{\Gamma(\mu_p^+)}{\Gamma(\mu_1^+)} \left(-\frac{k\tau_+}{2} \right)^{\mu_1^+ - \mu_p^+} \sin \theta_+ \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Quando comparamos com a expressão (4.110) para o caso da transição abrupta vemos que no caso completo (4.113) não podemos determinar a amplitude das oscilações do espectro de potência, a frequência, ou a fase apenas olhando para a equação. Teremos de analisar os resultados baseados nos gráficos que podemos traçar com (4.113) e, posteriormente, podemos fazer um paralelo entre este e o resultado de (4.110).

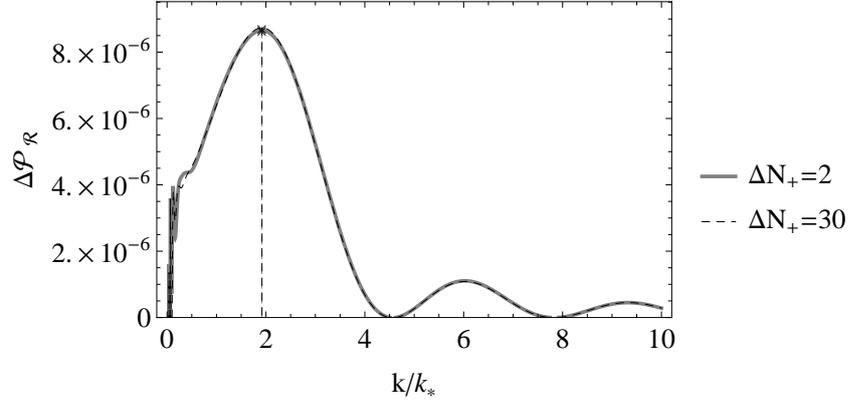


Figura 4.3: A correção do espectro de potência no caso completo, com a presença de ambos os campos, onde $\varepsilon = 10^{-6}$, $\epsilon_m = 10^{-3}$ e $\phi_1^* = 15M_{\text{Pl}}$, logo após a transição e também um pouco mais tarde. O primeiro pico está localizado em $k/k_* \approx 1.92$, com amplitude 8.66×10^{-6} para a curva cinza ($\Delta N_+ = 2$) e 8.74×10^{-6} para a curva tracejada ($\Delta N_+ = 30$).

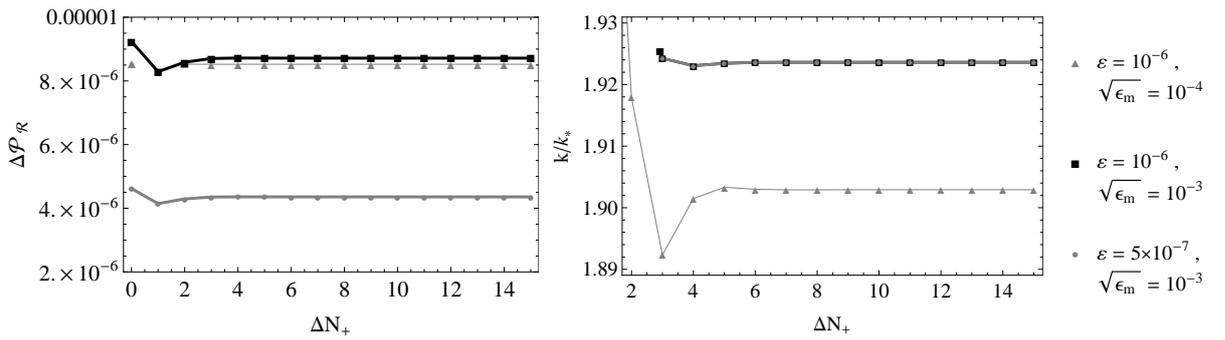


Figura 4.4: A correção do espectro de potência no primeiro pico e o primeiro pico como função de ΔN_+ após a transição, para várias combinações de ε e ϵ_m , com $\phi_1^* = 15M_{\text{Pl}}$.

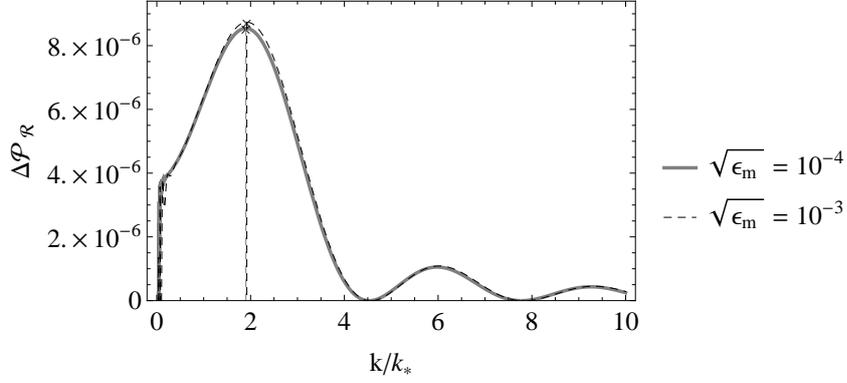


Figura 4.5: A correção do espectro de potência em $\Delta N_+ = 10$ e com $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\phi_1^* = 15 M_{\text{Pl}}$. O primeiro pico da curva cinza tem amplitude 8.54×10^{-6} e posição $k/k_* = 1.90$ ($\epsilon_m = 10^{-4}$), enquanto o primeiro pico da curva tracejada tem amplitude 8.74×10^{-6} e posição $k/k_* = 1.92$ ($\epsilon_m = 10^{-3}$). É evidente que existe uma pequena dependência entre a correção e ϵ_m .

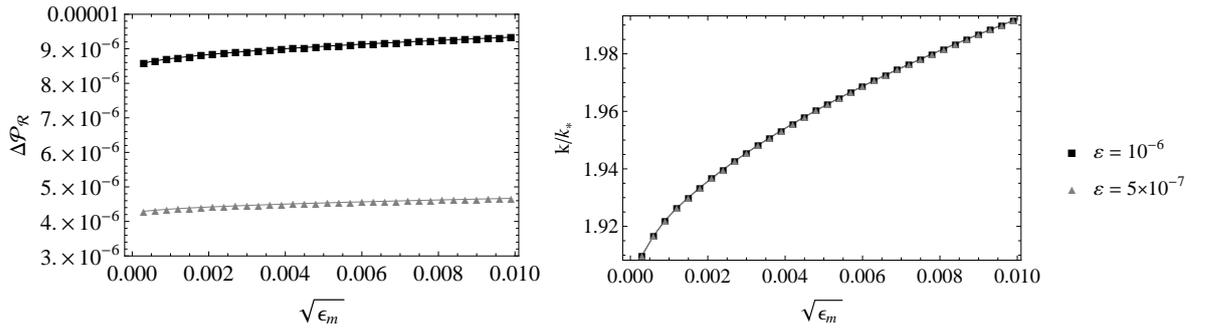


Figura 4.6: As amplitudes dos primeiros picos da correção do espectro de potência e suas posições, como funções de ϵ_m , para dois valores de ε , com $\Delta N_+ = 10$ e $\phi_1^* = 15 M_{\text{Pl}}$. É evidente que existe uma pequena dependência entre a correção e ϵ_m .

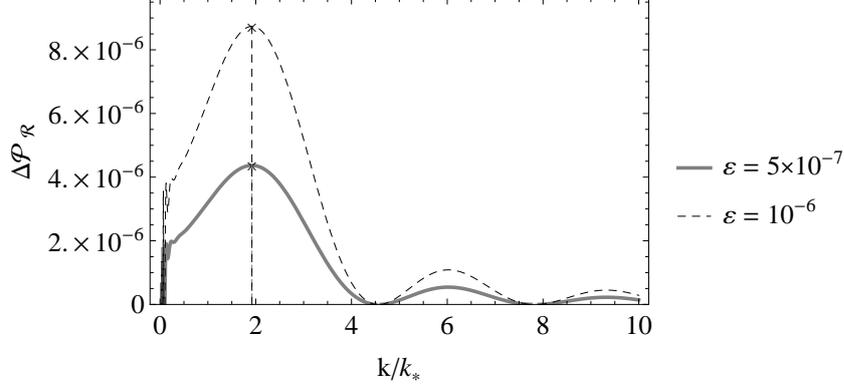


Figura 4.7: A correção do espectro de potência, com $\Delta N_+ = 10$, $\epsilon_m = 10^{-3}$ e $\phi_1^* = 15M_{\text{Pl}}$. O primeiro pico de ambas as curvas está posicionado em $k/k_* = 1.92$, com amplitude de 4.37×10^{-6} para a curva cinza ($\epsilon = 5 \times 10^{-7}$) e 8.74×10^{-6} para a curva tracejada ($\epsilon = 10^{-6}$). A dependência linear da correção com ϵ está em concordância com a aproximação da transição abrupta (4.110).

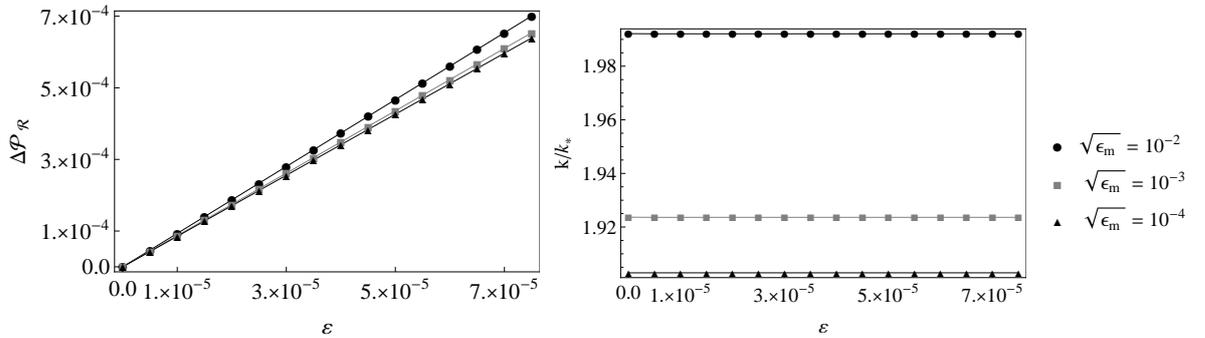


Figura 4.8: A correção do espectro de potência no primeiro pico e a posição do primeiro pico, como funções de ϵ para vários valores de ϵ_m , com $\Delta N_+ = 10$ e $\phi_1^* = 15M_{\text{Pl}}$. No painel a esquerda, as inclinações das curvas são 9.34, 8.72 e 8.52, de cima para baixo. A dependência linear em relação a ϵ está de acordo com a aproximação da transição abrupta em (4.110), embora diferenças pequenas estejam presente, tal como a pequena dependência da inclinação da curva com ϵ_m .

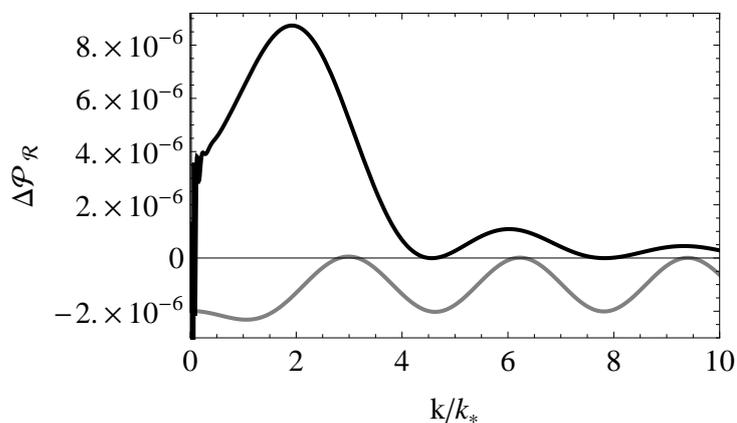


Figura 4.9: Uma comparação entre a transição abrupta (curva cinza) e o caso completo, com ambos os campos (curva preta), com $\Delta N_+ = 10$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $\epsilon_m = 10^{-3}$ e $\phi_1 = 15M_{\text{Pl}}$. A aproximação abrupta nos dá uma boa estimativa para a amplitude e frequência da correção do espectro de potência.

Capítulo 5

Matéria escura: condensação de Bose-Einstein

A matéria escura corresponde a aproximadamente 26,8% da densidade total do universo [16]. Como já vimos, as propriedades da matéria escura são medidas apenas através da interação gravitacional, ou seja, não existe nenhum tipo de interação eletromagnética conhecida, como absorção ou emissão de radiação. Existem vários candidatos hipotéticos a partículas de matéria escura, como, por exemplo, WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*), axions, neutrinos estéreis e gravitinos leves [51–53], só para citar alguns. Mesmo assim, até o presente momento, não existe nenhuma medida direta da matéria escura, e um grande esforço tem sido feito na tentativa de detectar as partículas que constituem essa componente.

Em temperaturas suficientemente baixas, grande parte das partículas em um gás de Bose (que é a versão quântica do gás ideal) podem ocupar um estado quântico de mais baixa energia, fazendo com que o condensado como um todo se comporte como se fosse uma única partícula e permitindo que efeitos quânticos sejam observados em escala macroscópica.

Se considerarmos apenas duas partículas, as interações de campo médio entre elas em um condensado de Bose-Einstein próximo a temperatura zero absoluto podem ser descritas por uma equação de Schrödinger não-linear com potencial externo, que é conhecida como

equação de Gross-Pitaevskii (GP) [54].

Podemos, então, propor a ideia de que as partículas de matéria escura, podem, em algum momento, formar condensados de Bose-Einstein [55–58]. Para descrever essa configuração vamos começar com a Hamiltoniana que descreve a interação entre vários bósons confinados por um potencial externo V_{ext} [54–58], que é

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{rot}}(\vec{r}) + V_{\text{ext}}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) + \\ & + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $\hat{\Psi}(\vec{r})$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$ são os operadores de campo do bóson que aniquilam e criam partículas na posição \vec{r} , respectivamente, $V_{\text{rot}}(\vec{r})$ é o potencial associado a rotação do condensado e $V(\vec{r} - \vec{r}')$ é o potencial interatômico de interação entre dois corpos. É muito difícil trabalhar com essa equação para o caso de um sistema com muitas partículas, mas alguns métodos aproximativos podem facilitar bastante o trabalho.

O método que vamos utilizar aqui é a descrição do campo médio do condensado, que consiste em separar do operador $\hat{\Psi}(\vec{r})$ as contribuições dos bósons e do condensado. De maneira geral, no caso de uma configuração não-uniforme e dependente do tempo, o operador na representação de Heisenberg é escrito

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) + \hat{\Psi}'(\vec{r}, t), \quad (5.2)$$

onde $\hat{\Psi}'(\vec{r}, t)$ é tratada como uma pequena perturbação e $\psi(\vec{r}, t)$ é a função de onda que descreve o condensado, que é dada pelo valor esperado do operador de campo, ou seja,

$$\psi(\vec{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rangle. \quad (5.3)$$

Este campo é clássico e o seu valor absoluto fixa a densidade do fluido, isto é,

$$\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2, \quad (5.4)$$

sendo que a condição de normalização é $N = \int \rho(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$. A equação de movimento da função de onda do condensado é dada pela equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = [\hat{\Psi}, \hat{H}] , \quad (5.5)$$

onde o Hamiltoniano \hat{H} é dado pela equação (5.1).

Se substituirmos o operador (5.2), que contém a função de onda ψ do condensado, na equação de Heisenberg podemos encontrar a aproximação de ordem zero desta equação. Embora para integral que contém o termo de interação entre as partículas $V(\vec{r} - \vec{r}')$ no Hamiltoniano (5.1) essa seja, em geral, uma aproximação ruim para pequenas distâncias de interação, em um gás frio e diluído apenas colisões binárias em baixas energias são importantes, essas colisões são independentes dos detalhes do potencial de interação e são descritas pelo comprimento de espalhamento da onda. Portanto podemos substituir a interação por uma interação efetiva

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = \lambda \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \text{onde } \lambda \equiv 4\pi\hbar^2 \frac{l_s}{m}, \quad (5.6)$$

sendo m a massa das partículas e l_s o comprimento de espalhamento.

Não vamos considerar aqui o caso com rotação, de maneira que V_{rot} será nulo. Portanto, a equação de Gross-Pitaevskii que descreve o comportamento do condensado de Bose Einstein é

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + \lambda |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t). \quad (5.7)$$

Como potencial externo vamos escolher o potencial gravitacional, que satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2 V_{\text{ext}}(\vec{r}) = 4\pi G \rho_m, \quad (5.8)$$

onde $\rho_m = m\rho$ é a densidade de massa do condensado.

Podemos entender mais facilmente as propriedades físicas do condensado de Bose-Einstein descritas pela equação de Gross-Pitaevskii (5.7) se usarmos a representação de

Madelung da equação de onda, que é

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t)}, \quad (5.9)$$

onde a função $S(\vec{r}, t)$ tem a dimensão de uma ação. Substituindo a representação de Madelung na equação (5.7) vamos encontrar um sistema de duas equações diferenciais, que são

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0, \quad (5.10)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p \left(\frac{\rho_m}{m} \right) - \rho_m \nabla \left(\frac{V_{\text{ext}}}{m} \right) - \nabla V_Q, \quad (5.11)$$

onde $V_Q = -(\hbar^2/2m)\nabla^2\sqrt{\rho_m}/\rho_m$ é chamado potencial quântico e $\vec{v} = \nabla S/m$ é a velocidade do fluido quântico. A pressão efetiva do fluido quântico de partículas condensadas é dada pela equação de estado

$$p = \frac{2\pi\hbar^2 l_s}{m^3} \rho_m^2, \quad (5.12)$$

ou seja, a dinâmica do fluido é determinada pelo comprimento de espalhamento l_s e pela massa m das partículas de matéria escura.

5.1 Dinâmica de fundo

De acordo com os dados mais recentes [16], vamos assumir um universo homogêneo e isotrópico, com geometria plana descrita pela métrica de FLRW, ou seja,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2, \quad (5.13)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, e o conteúdo material do universo é descrito pelo tensor momento-energia de um fluido perfeito, que é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

onde ρ , p , u^μ e $g_{\mu\nu}$ são a densidade, a pressão, a velocidade do fluido e o tensor métrico, respectivamente.

Vamos assumir um universo preenchido por matéria bariônica, radiação, matéria escura e energia escura na forma de uma constante cosmológica. Não iremos considerar nenhuma forma de interação entre essas componentes, de maneira que cada uma delas é conservada individualmente. Portanto, as equações de movimento que vamos usar são a equação de Friedmann e as equações de conservação

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_b + \rho_r + \rho_\chi + \rho_\Lambda), \quad (5.15)$$

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0, \quad (5.16)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble $i = b, r, \chi, \Lambda$ são os índices para matéria bariônica, radiação, matéria escura e energia escura, respectivamente.

5.1.1 Matéria escura não condensada

No nosso modelo [59] iremos assumir que no passado a matéria escura era formada por bósons de massa m_χ e temperatura T , que foram criados em equilíbrio térmico e desacoplaram a uma temperatura T_D . No regime não-relativístico a matéria escura não condensada tem pressão

$$p_\chi = \sigma^2 \rho_\chi, \quad (5.17)$$

onde $\sigma^2 = \langle \vec{v}^2 \rangle / 3$ é a dispersão de velocidade e $\langle \vec{v}^2 \rangle$ é a velocidade média quadrática da partícula. A aplicação da equação de estado (5.17) na equação de conservação (5.16) nos levará em

$$\rho_\chi = \frac{\rho_\chi^{(0)}}{(a/a_0)^{3(1+\sigma^2)}}, \quad (5.18)$$

onde $\rho = \rho_\chi^{(0)}$ quando $a = a_0$. É importante notar que para uma baixa dispersão de velocidade a pressão da matéria escura é pequena, e o comportamento da mesma é próximo àquele da matéria escura descrita no modelo padrão, onde $\sigma^2 = 0$.

Substituindo a equação de evolução da densidade (5.18) na equação de Friedmann

(5.15) encontramos que a evolução do universo é descrita por

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \left(\frac{\Omega_b^{(0)}}{(a/a_0)^3} + \frac{\Omega_r^{(0)}}{(a/a_0)^4} + \frac{\Omega_\chi^{(0)}}{(a/a_0)^{3(1+\sigma^2)}} + \Omega_\Lambda \right), \quad (5.19)$$

onde H_0 é o parâmetro de Hubble e $\Omega_i^0 = 8\pi G\rho_i^{(0)}/3H_0^2$ são os parâmetros de densidade, ambos em $a = a_0$. Os parâmetros de densidade satisfazem a relação $\Omega_b^{(0)} + \Omega_r^{(0)} + \Omega_\chi^{(0)} + \Omega_\Lambda = 1$ e a_0 pode ser considerado o valor do fator de escala hoje.

5.1.2 Matéria escura na forma de um condensado de Bose-Einstein

Como já vimos anteriormente, o condensado de Bose-Einstein obedece a equação de estado

$$p_\chi = \frac{2\pi\hbar^2 l_s}{m_\chi^3} \rho_\chi^2, \quad (5.20)$$

onde l_s é o comprimento de espalhamento e m_χ é a massa das partículas de matéria escura. Usando a equação de conservação da energia (5.16) e a equação de estado (5.20) da matéria escura condensada encontramos

$$\dot{\rho}_\chi + 3\rho_\chi(1 + \omega_\chi\rho_\chi) \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (5.21)$$

sendo $\omega_\chi = 2\pi\hbar^2 l_s/m_\chi^3$. Resolvendo a equação acima, encontramos que a evolução da densidade da matéria escura condensada é dada por

$$\rho_\chi = \frac{C}{(a/a_0)^3 - \omega_\chi C}, \quad (5.22)$$

onde C é uma constante de integração. Vamos fixar $\rho_\chi = \rho_\chi^{(0)}$ em $a = a_0$, para encontrarmos

$$\rho_\chi = \frac{1}{\omega_\chi} \frac{\rho_{0\chi}}{(a/a_0)^3 - \rho_{0\chi}}, \quad (5.23)$$

com

$$\rho_{0\chi} = \frac{\omega_\chi \rho_\chi^{(0)}}{1 + \omega_\chi \rho_\chi^{(0)}} = \frac{\omega_\chi \rho_{crit}^{(0)} \Omega_\chi^{(0)}}{1 + \omega_\chi \rho_{crit}^{(0)} \Omega_\chi^{(0)}}, \quad (5.24)$$

onde $\rho_{\text{crt}}^{(0)}$ é o valor da densidade crítica do universo hoje. Podemos facilmente encontrar a equação de Friedmann que descreve o comportamento do universo, que na presença de todas as componentes mencionadas anteriormente é

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_b^{(0)}}{(a/a_0)^3} + \frac{\Omega_r^{(0)}}{(a/a_0)^4} + \frac{1}{\omega_\chi} \frac{\Omega_{0\chi}}{(a/a_0)^3 - \rho_{0\chi}} + \Omega_\Lambda \right), \quad (5.25)$$

onde $\Omega_{0\chi} = \rho_{0\chi}/\rho_{\text{crt}}^{(0)}$.

5.1.3 Evolução cosmológica durante a transição de fase

Vamos supor que inicialmente a matéria escura está na forma não condensada, descrita pela equação de estado (5.17). Em algum momento as partículas de matéria escura irão condensar e assumir a forma de um condensado de Bose-Einstein [59], que é descrito pela equação de estado (5.12). Essa transição de fase será de primeira ordem e no instante de transição a pressão tem de ser contínua. Portanto, das equações de estado (5.17) e (5.20) podemos calcular a densidade crítica da matéria escura, ou seja, o valor da densidade quando as partículas começam a condensar, que é

$$\rho_\chi^{\text{crt}} = \frac{\sigma^2 m_\chi^3}{2\pi \hbar^2 l_s} = \frac{\sigma^2}{\omega_\chi}. \quad (5.26)$$

Podemos também substituir a densidade crítica (5.26) na equação (5.18) da evolução da matéria escura para encontrar o valor do fator de escala no começo da transição de fase, ou seja,

$$\frac{a_{\text{crt}}}{a_0} = \left(\frac{2\pi \hbar^2 l_s}{\sigma^2 m^3} \rho_{\text{crt}}^{(0)} \Omega_\chi^{(0)} \right)^{\frac{1}{3(1+\sigma^2)}}. \quad (5.27)$$

O desvio para o vermelho de origem cosmológico, ou seja, provocado pela expansão do universo é $1 + z = a^{-1}$, e portanto, o desvio para o vermelho crítico é

$$1 + z_{\text{crt}} = \left(\frac{2\pi \hbar^2 l_s}{\sigma^2 m^3} \rho_{\text{crt}}^{(0)} \Omega_\chi^{(0)} \right)^{\frac{-1}{3(1+\sigma^2)}}. \quad (5.28)$$

Durante todo o processo de transição de fase, ou seja, até que a última partícula

tenha condensado, a pressão da matéria escura será a pressão crítica, isto é, $p = p_{\text{crt}}$. No processo de transição de fase a densidade matéria escura na sua forma não-condensada, que vamos chamar de “normal”, irá decair de $\rho_{\chi}^{\text{norm}}$ até ρ_{χ}^{BEC} , quando todas as partículas fizerem parte de algum condensado de Bose-Einstein, que é quando termina a transição de fase. Portanto, vamos definir a fração de densidade de matéria escura

$$f(t) = \frac{\rho_{\chi}(t) - \rho_{\chi}^{\text{norm}}}{\rho_{\chi}^{\text{BEC}} - \rho_{\chi}^{\text{norm}}}, \quad (5.29)$$

que nos permite escreve-la a transição de fase como sendo

$$\rho_{\chi}(t) = \rho_{\chi}^{\text{norm}} (1 + n_{\chi} f(t)), \quad (5.30)$$

$$n_{\chi} = \frac{\rho_{\chi}^{\text{BEC}} - \rho_{\chi}^{\text{norm}}}{\rho_{\chi}^{\text{norm}}}. \quad (5.31)$$

Quando a condensação começa, no tempo $t = t_{\text{crt}}$, toda a matéria escura está na forma não-condensada, ou seja, $\rho_{\chi}(t_{\text{crt}}) = \rho_{\chi}^{\text{norm}}$ e $f(t_{\text{crt}}) = 0$. Ao final da condensação, toda a matéria escura estará condensada, de maneira que $\rho_{\chi}(t_{\text{BEC}}) = \rho_{\chi}^{\text{BEC}}$, e $f(t_{\text{BEC}}) = 1$. Com a ajuda da equação da conservação da energia (5.16) nós encontramos que

$$a(t) = a_{\text{crt}} (1 + r f(t))^{-1/3}, \quad (5.32)$$

$$r = \frac{n_{\chi}}{1 + p_{\text{crt}}/\rho_{\chi}^{\text{norm}}}, \quad (5.33)$$

onde $a(t_{\text{crt}}) = a_{\text{crt}}$ e a transição de fase termina em

$$1 + z_{\text{BEC}} = (1 + r)^{1/3} (1 + z_{\text{crt}}). \quad (5.34)$$

Para encontrarmos a evolução da fração de densidade (5.29) temos de substituir o fator de escala (5.32) na equação de Friedmann (5.15), de onde vem que

$$\frac{df}{d\tau} = -3 \left(\frac{1 + r f}{r} \right) \sqrt{\frac{\Omega_b^{(0)}}{(a_{\text{crt}}/a_0)^3} (1 + r f) + \frac{\Omega_r^{(0)}}{(a_{\text{crt}}/a_0)^4} (1 + r f)^{4/3} + \Omega_{\chi}^{(0)} (1 + n_{\chi} f) + \Omega_{\Lambda}}, \quad (5.35)$$

onde $\Omega_\chi^{(0)} = \rho_\chi^{\text{norm}}/\rho_{\text{crt}}^{(0)}$ e $\tau = H_0 t$. Na nossa configuração para a transição de fase temos que $\rho_\chi^{\text{BEC}} < \rho_\chi^{\text{norm}}$, e portanto $r \in (-1, 0)$ e $n_\chi < 0$. Por outro lado temos que $p_{\text{crt}}/\rho_\chi^{\text{norm}} = \sigma^2 \ll 1$ e, da equação (5.32) para o fator de escala durante a transição de fase, podemos aproximar $r \approx n_\chi$. Se descartarmos a contribuição da radiação, que é desprezível para a densidade total do universo, a equação de evolução (5.35) da fração de densidade tem solução

$$f(t) = \frac{\Omega_\Lambda^2}{r\Omega_g} \left[\frac{1 + \Omega_c e^{-3(\Omega_\Lambda/H_0^{-1})(t-t_{\text{crt}})}}{1 - \Omega_c e^{-3(\Omega_\Lambda/H_0^{-1})(t-t_{\text{crt}})}} \right]^2 - \frac{\Omega_\Lambda + \Omega_g}{r\Omega_g}, \quad (5.36)$$

onde H_0^{-1} é o tempo de Hubble, e definimos

$$\Omega_g \equiv \frac{\Omega_b^{(0)}}{(a_{\text{crt}}/a_0)^3} + \Omega_\chi^{(0)}, \quad (5.37)$$

$$\Omega_c \equiv \frac{\sqrt{\Omega_g + \Omega_\Lambda} - \Omega_\Lambda}{\sqrt{\Omega_g + \Omega_\Lambda} + \Omega_\Lambda}. \quad (5.38)$$

Como ainda não sabemos qual seria o comportamento do universo na presença dessa componente exótica podemos tentar descartar a existência da constante cosmológica com o intuito de fazer uma comparação mais adiante. Neste caso a evolução da fração de densidade é

$$f(t) = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2}{3} H_0 \sqrt{\Omega_g} (t - t_{\text{crt}}) \right)^{-2} - \frac{1}{r}, \quad (5.39)$$

e, como podemos ver das equações (5.36) e (5.39) para a evolução da fração de densidade, o fator de escala não depende da razão r , além disso, é importante frisar que, quando o processo de condensação chega ao fim, ou seja, para $t \geq t_{\text{BEC}}$, a evolução do universo é dada pela equação de Friedmann (5.25).

Com a equação (5.32) para o fator de escala durante a condensação, e a evolução (5.36) e (5.39) da fração de densidade podemos calcular o parâmetro de Hubble crítico para o modelo sem e com a presença de energia escura, ou seja,

$$H_{\text{crt}} = \frac{4}{9} H_0 \sqrt{\Omega_b^{(0)} (1 + z_{\text{crt}})^3 + \Omega_\chi^{(0)}}, \quad (5.40)$$

$$H_{\text{crt}} = H_0 \sqrt{\Omega_b^{(0)} (1 + z_{\text{crt}})^3 + \Omega_\chi^{(0)} + \Omega_\Lambda}, \quad (5.41)$$

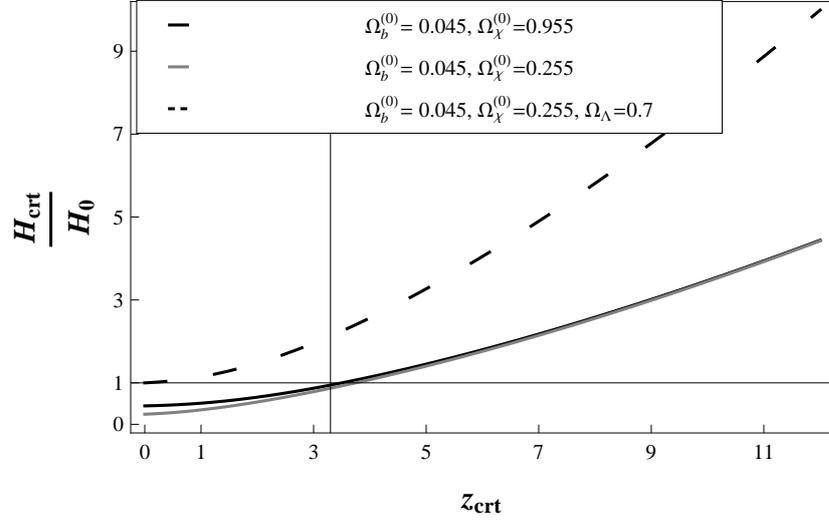


Figura 5.1: A razão entre o parâmetro de Hubble crítico e o parâmetro de Hubble hoje, para um universo com constante cosmológica (curva tracejada) e sem constante cosmológica (curva sólida).

respectivamente, que nos permite criar um vínculo para o desvio para o vermelho da transição de fase z_{crt} , já que o parâmetro de Hubble no ponto crítico deve ter um valor maior do que hoje. Na Figura 5.1 vemos a razão entre o parâmetro de Hubble no início da condensação e o parâmetro de Hubble hoje, como uma função do desvio para o vermelho z_{crt} . A condição de que $H_{\text{crt}}/H_0 > 1$ é satisfeita para $z_{\text{crt}} > 3.5$, $z_{\text{crt}} > 3.75$ e $z_{\text{crt}} > 0$, respectivamente.

O parâmetro da equação de estado efetiva ω é

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\sigma^2 \Omega_\chi^{(0)} (1 + z_{\text{crt}})^{-3} - \Omega_\Lambda R^3}{\Omega_b^{(0)} + \Omega_\chi^{(0)} (1 + z_{\text{crt}})^{-3} + \Omega_\Lambda R^3}, \quad (5.42)$$

onde definimos $R \equiv a/a_0$. Com a expressão (5.42) e a equação de conservação da energia (5.16) podemos encontrar a velocidade do som $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$ do fluido efetivo que preenche o universo, que é

$$c_s^2 = \frac{\sigma^2 \Omega_\chi^{(0)} (1 + z_{\text{crt}})^{-3}}{\Omega_b^{(0)} + \Omega_\chi^{(0)} (1 + z_{\text{crt}})^{-3} + \Omega_\Lambda R^3}, \quad (5.43)$$

que, por questões práticas, podemos aproximar a zero, já que $\sigma^2 \ll 1$.

5.2 Perturbações cosmológicas de densidade

Agora vamos aplicar o formalismo invariante de calibre, que descrevemos anteriormente no Capítulo 3, para estudarmos as perturbações escalares clássicas durante a condensação de Bose-Einstein [22]. Vamos escolher o calibre longitudinal, que é definido como sendo aquele onde fixamos os graus de liberdade $B = 0 = E$ e, para o caso de um tensor momento-energia diagonal, temos

$$ds^2 = a(\tau)^2 [(1 + 2\Phi)d\tau^2 - (1 - 2\Phi)d\vec{x}^2], \quad (5.44)$$

onde Φ é a perturbação escalar invariante de calibre, que pode ser interpretada como a generalização relativística do potencial Newtoniano e τ é o tempo conforme, que é relacionado com o tempo cósmico t via $cdt = ad\tau$. Das equações de Einstein perturbadas encontramos as equações de movimento para o campo escalar Φ , que são

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}a^2\delta\rho, \quad (5.45)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}a^2\delta p, \quad (5.46)$$

para o caso do tensor momento-energia do fluido perfeito, $f' = df/d\tau$ é a derivada em relação ao tempo conforme τ , $\mathcal{H} = a'/a$ é o parâmetro de Hubble no tempo conforme e $\delta\rho$ e δp são as perturbações de densidade e pressão invariantes de calibre, respectivamente.

Para o caso de uma equação de estado adiabática [28, 31], ou seja, onde a pressão depende apenas da densidade, é fácil encontrar a relação

$$\delta p = c_s^2\delta\rho, \quad (5.47)$$

que, combinada com as duas equações de movimento (5.45), onde $c_s^2 = \partial p/\partial\rho$ é a velocidade do som efetiva do fluido, encontramos

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s^2) + c_s^2k^2]\Phi = 0, \quad (5.48)$$

sendo $\nabla^2\Phi = -k^2\Phi$, onde k é o número de onda das perturbações. Usando a regra da cadeia, podemos escrever a equação de movimento em função do fator de escala a [22], e teremos

$$a^2 \frac{d^2\Phi}{da^2} + \left[4 + 3c_s^2 - \frac{1}{2} \left(1 + 3\frac{p}{\rho} \right) \right] a \frac{d\Phi}{da} + \left[1 + 3c_s^2 \left(1 + \frac{k^2}{M_{\text{Pl}}^{-2}} \rho a^2 \right) - \frac{3}{2} \left(1 + 3\frac{p}{\rho} \right) \right] \Phi = 0. \quad (5.49)$$

Para estudarmos as perturbações na densidade $\delta\rho$ temos de perturbar as equações de conservação do tensor momento-energia $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ até primeira ordem, para encontrarmos

$$\delta\rho' + \mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) - 3\Phi'(\rho + p) + a(\rho + p)\delta u^i_{;i} = 0, \quad (5.50)$$

$$a^{-4} [a^5(\rho + p)\delta u^i_{;i}]' + \nabla^2\delta p + (\rho + p)\nabla^2\Phi = 0, \quad (5.51)$$

onde δu^i são as perturbações na velocidade do fluido e $f^i_{;i}$ é a derivada espacial.

Nesse modelo bárions e matéria escura não interagem diretamente e descartamos a pequena contribuição da radiação. Desta maneira, cada componente satisfaz o par de equações de movimento (5.50) e (5.51) separadamente e, já que durante a transição de fase temos $p_{\text{crt}}/\rho_\chi = \sigma^2 \ll 1$, podemos fazer uma aproximação para mostrar que tanto bárions como matéria escura satisfazem a mesma equação diferencial

$$(\delta - 3\Phi)' + a\delta u^i_{;i} = 0, \quad (5.52)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho_b}{\rho_b} = \frac{\delta\rho_\chi}{\rho_\chi}, \quad (5.53)$$

onde $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ é chamado de contraste da densidade.

Combinando as equações de perturbação (5.51) e (5.52) e fazendo a mudança de variável para $R = a/a_0$ [22] podemos encontrar

$$\frac{d}{dR} \left[R^2 \mathcal{H} \frac{d}{dR} (\delta - 3\Phi) \right] - \frac{\nabla^2\Phi}{\mathcal{H}} = 0. \quad (5.54)$$

Devemos também aproximar o parâmetro da equação de estado (5.42) em

$$\omega \approx \begin{cases} 0 & , \quad \Omega_\Lambda = 0 & , \\ \frac{-\Omega_\Lambda R^3}{\Omega_m + \Omega_\Lambda R^3} & , \quad \Omega_\Lambda \neq 0 & , \end{cases} \quad (5.55)$$

onde $\Omega_m = \Omega_b^{(0)} + \Omega_\chi^{(0)}(1 + z_{\text{crt}})^{-3}$. Da mesma maneira, a velocidade efetiva do som (5.43) será aproximadamente

$$c_s^2 \approx 0, \quad (5.56)$$

já que consideramos $\sigma^2 \ll 1$.

5.2.1 Universo preenchido por bárions e matéria escura

Aplicando as aproximações (5.55) e (5.56), a equação de movimento (5.49) para as perturbações poderá ser escrita como

$$R^2 \frac{d^2 \Phi}{dR^2} + \frac{7}{2} R \frac{d\Phi}{dR} - \frac{1}{2} \Phi = 0, \quad (5.57)$$

que tem a solução simples

$$\Phi = C_+ R^{n_+} + C_- R^{n_-}, \quad (5.58)$$

$$n_\pm = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}. \quad (5.59)$$

Os modos crescentes e decrescentes do potencial Φ como função do tempo, dos vários parâmetros do modelo e também para o modelo padrão (Λ CDM, com $\Omega_b^0 = 0.045$, $\Omega_{dm}^0 = 0.255$ and $\Omega_\Lambda = 0.7$) podem ser vistos na Figura 5.2.

Agora basta aplicar a solução (5.58) na equação (5.54) para encontrarmos

$$\delta = 3\Phi(R) + \frac{k^2}{a_0^2 H_0^2 \Omega_m} \left[C_+ \frac{R^{(n_+-2)}}{n_+(n_+-2)} + C_- \frac{R^{(n_- -2)}}{n_-(n_- -2)} \right]. \quad (5.60)$$

Novamente, os modos crescentes e decrescentes do contraste de densidade em função do

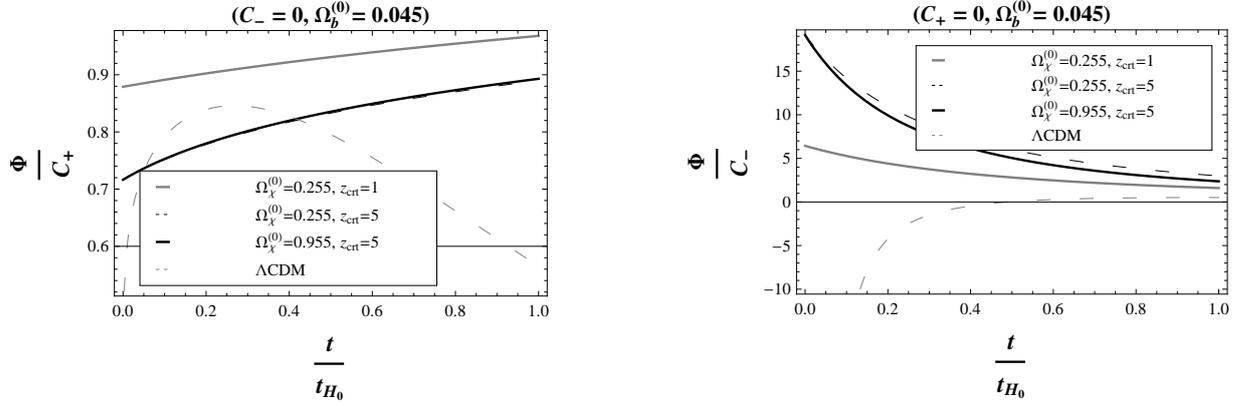


Figura 5.2: Modos crescentes e decrescentes do potencial Φ em função do tempo para o modelo de condensação de Bose-Einstein e também para o modelo padrão (Λ CDM), onde no modelo de condensação o universo é preenchido por bárions e matéria escura.

tempo para vários valores dos parâmetros do modelo e também para o modelo padrão podem ser vistos nas Figuras 5.3 e 5.4.

5.2.2 Universo preenchido por bárions, matéria escura e constante cosmológica

No caso de um universo com constante cosmológica, com parâmetro de densidade Ω_Λ , devemos usar as aproximações (5.55) e (5.56) do parâmetro da equação de estado efetiva e velocidade do som, respectivamente, e da equação de movimento (5.49) vem

$$R^2 \frac{d^2 \Phi}{dR^2} + \left[4 - \frac{1}{2} \left(1 - 3 \frac{\Omega_\Lambda R^3}{\Omega_m + \Omega_\Lambda R^3} \right) \right] R \frac{d\Phi}{dR} + \left[1 - \frac{3}{2} \left(1 - 3 \frac{\Omega_\Lambda R^3}{\Omega_m + \Omega_\Lambda R^3} \right) \right] \Phi = 0, \quad (5.61)$$

e se definirmos as novas variáveis

$$x \equiv - \frac{\Omega_\Lambda R^3}{\Omega_m + \Omega_\Lambda R^3}, \quad (5.62)$$

$$\Phi \equiv x^{\nu \pm} y(x), \quad (5.63)$$

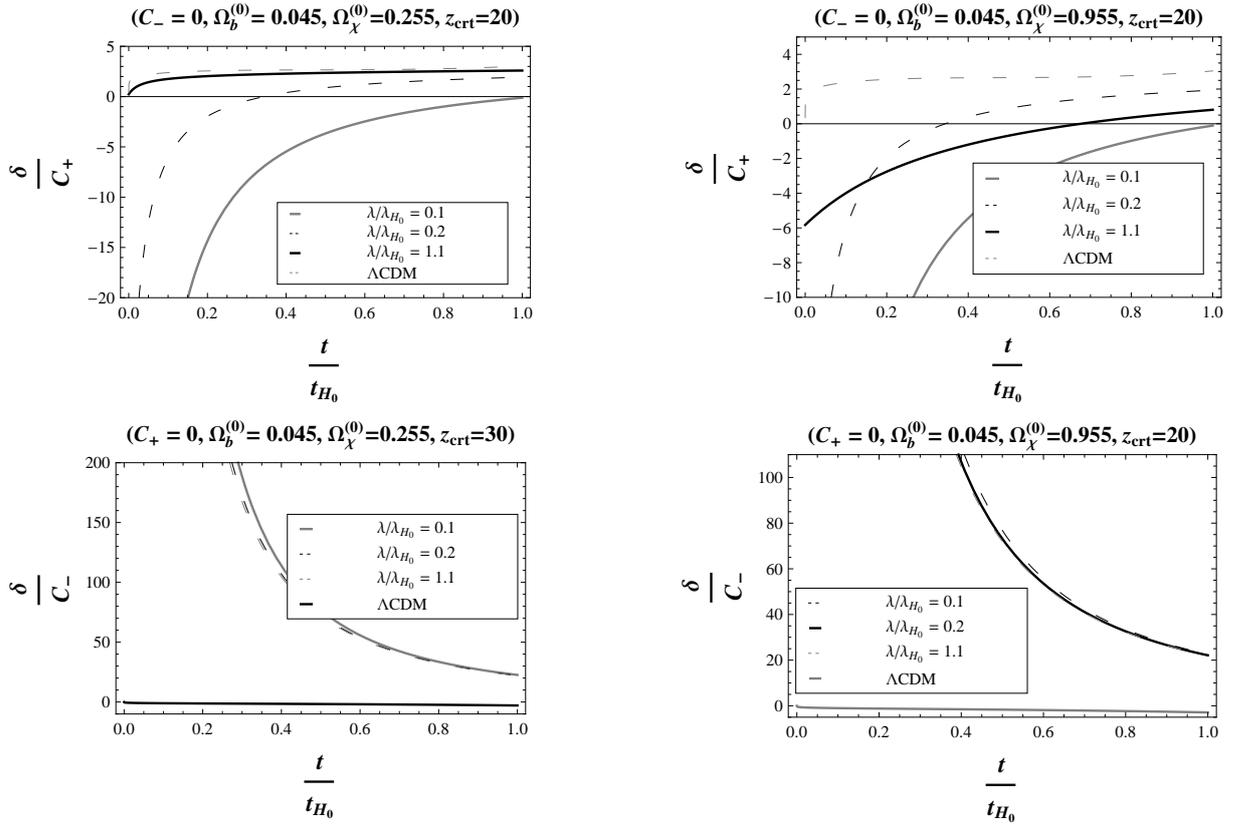


Figura 5.3: Modos crescentes e decrescentes do contraste δ em função do tempo para o modelo de condensação de Bose-Einstein e também para o modelo padrão (ΛCDM), onde no modelo de condensação o universo é preenchido por bárions e matéria escura. O comprimento de Hubble é $\lambda_{H_0} = H_0^{-1}$ e para o modelo padrão fixamos $\lambda/\lambda_{H_0} = 0.1$.

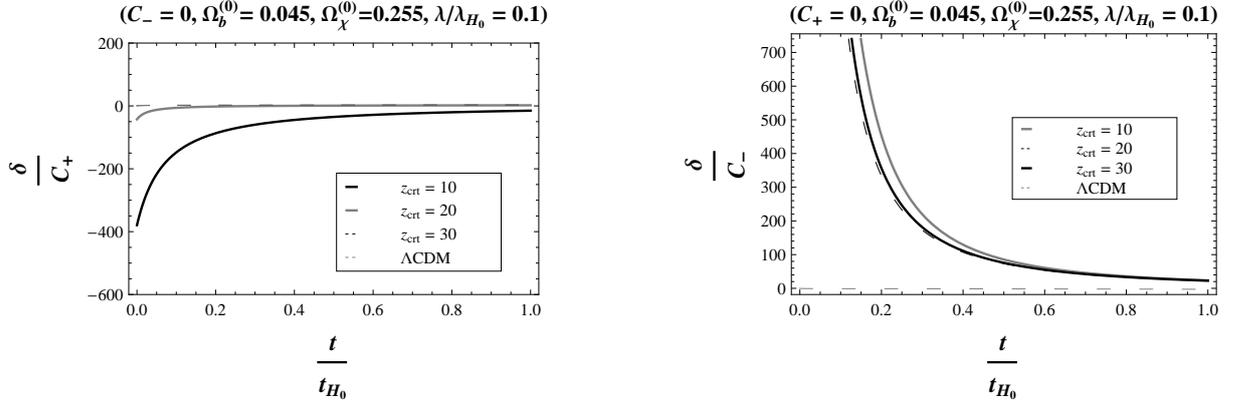


Figura 5.4: Modos crescentes e decrescentes do contraste δ em função do tempo e para vários valores do desvio para o vermelho crítico, para o modelo de condensação de Bose-Einstein e também para o modelo padrão (ΛCDM), onde no modelo de condensação o universo é preenchido por bárions e matéria escura. O comprimento de Hubble é $\lambda_{H_0} = H_0^{-1}$ e para o modelo padrão fixamos $\lambda/\lambda_{H_0} = 0.1$.

podemos calcular

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c_\pm - (a_\pm + b_\pm + 1)x]\frac{dy}{dx} - (a_\pm b_\pm)y = 0, \quad (5.64)$$

onde escrevemos

$$\nu_\pm \equiv \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{12}, \quad (5.65)$$

$$a_\pm \equiv \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{12}, \quad (5.66)$$

$$b_\pm \equiv a_\pm, \quad (5.67)$$

$$c_\pm \equiv 1 \pm \frac{\sqrt{33}}{6}. \quad (5.68)$$

A solução da equação de movimento (5.61) é

$$\Phi(R) = C_+ x^{\nu_+} {}_2F_1(a_+, b_+; c_+; x) + C_- x^{\nu_-} {}_2F_1(a_-, b_-; c_-; x) \quad , \quad (5.69)$$

onde ${}_2F_1(a, b; c; x)$ é a chamada função hipergeométrica. Os modos crescentes e decrescente do potencial Φ em função do tempo e para diferentes valores dos parâmetros do

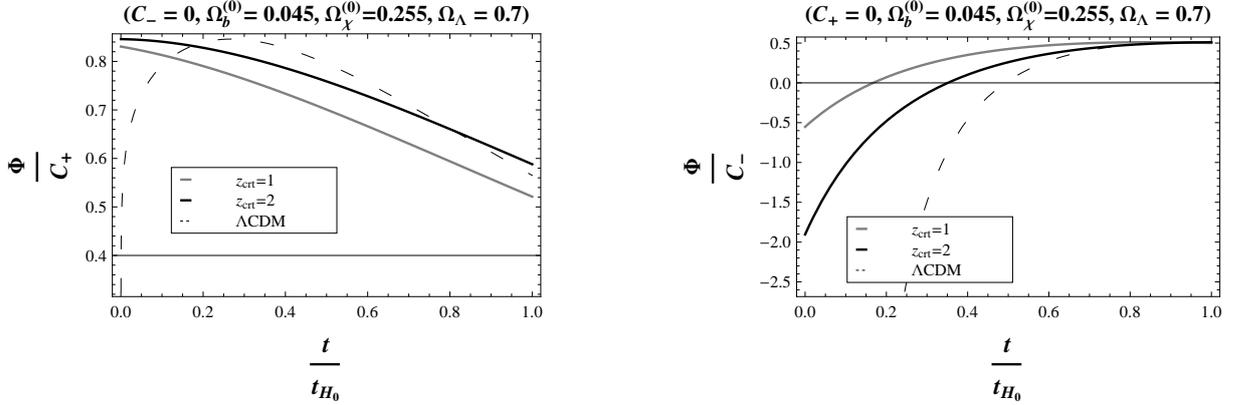


Figura 5.5: Modos crescentes e decrescentes do potencial Φ em função do tempo para o modelo de condensação de Bose-Einstein e também para o modelo padrão (ΛCDM), onde no modelo de condensação o universo é preenchido por bárions, matéria escura e constante cosmológica.

modelo e também para o modelo padrão podem ser vistos na Figura 5.5.

Usando a solução (5.69) na equação de movimento (5.54) não podemos encontrar uma solução analítica para a evolução do contraste δ . Podemos resolver a equação (5.54) numericamente, e o resultado pode ser observado na Figura 5.6 para os modos crescentes e decrescentes do contraste.

5.3 Equação de estado politrópica e o universo primordial

Como vimos, o comportamento do condensado de Bose-Einstein é descrito pela equação de GP (5.7). No caso em que há interações repulsivas de curto alcance e em baixas dimensões entre as partículas envolvidas, a equação (5.7) não é necessariamente a melhor descrição [60]. Portanto, o termo de interação entre as partículas na equação de GP (5.7) deve ser modificado e neste modelo as propriedades do estado fundamental do condensado de Bose-Einstein será descrito pela equação de GP generalizada

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + g' (|\psi(\vec{r}, t)|^2) \right] \psi(\vec{r}, t), \quad (5.70)$$

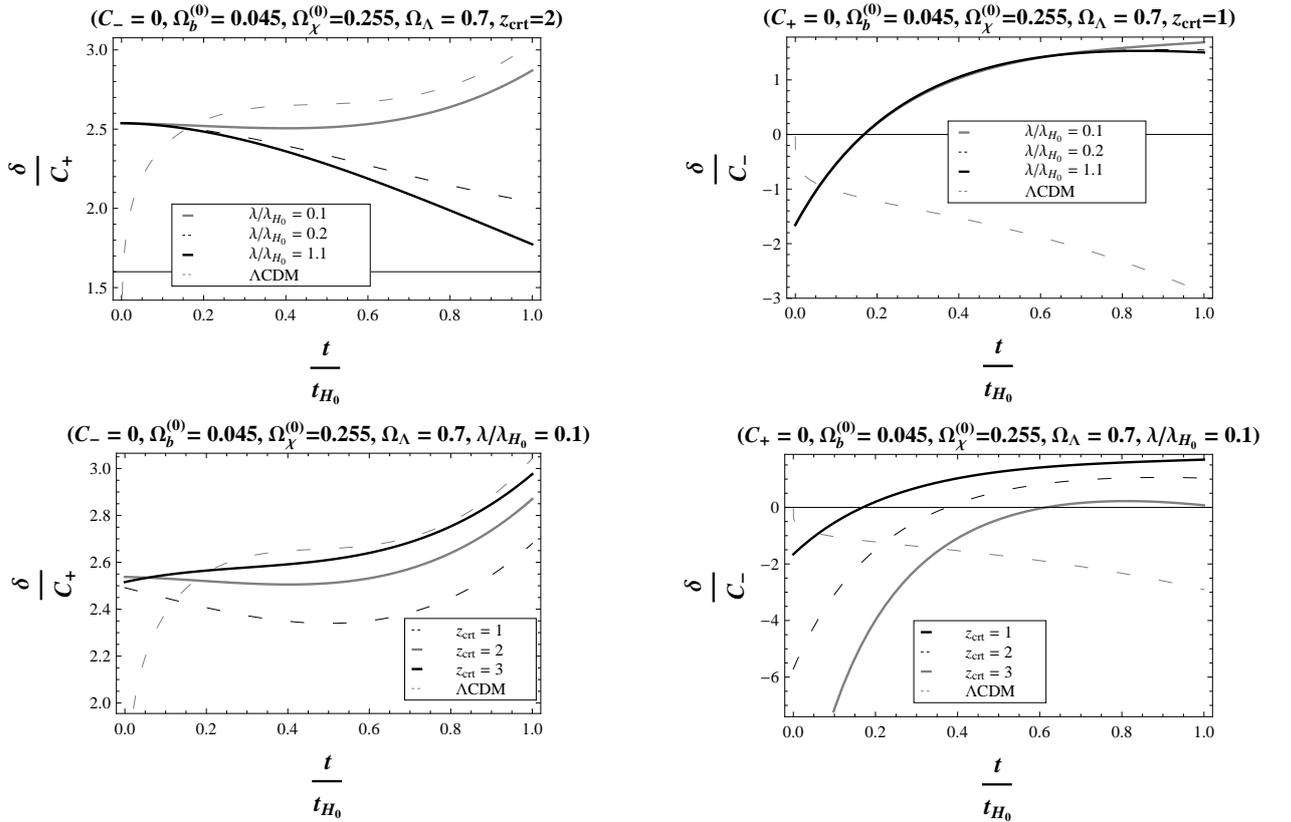


Figura 5.6: Modos crescentes e decrescentes do contraste δ em função do tempo para o modelo de condensação de Bose-Einstein e também para o modelo padrão (Λ CDM), onde no modelo de condensação o universo é preenchido por bárions, matéria escura e constante cosmológica. O comprimento de Hubble é $\lambda_{H_0} = H_0^{-1}$ e para o modelo padrão fixamos $\lambda/\lambda_{H_0} = 0.1$.

onde $\psi(\vec{r}, t)$ é a função de onda do condensado, m é a massa das partículas, $V_{\text{ext}}(\vec{r})$ é o potencial gravitacional que obedece a equação de Poisson e a modificação na interação entre as partículas é descrita pela função geral $g'(|\psi(\vec{r}, t)|^2) = dg/d\rho$, onde $\rho = |\psi(\vec{r}, t)|^2$.

Com fizemos anteriormente, podemos utilizar a representação de Madelung (5.9) para a equação de onda

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t)}, \quad (5.71)$$

para novamente encontrarmos as equações

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0, \quad (5.72)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p \left(\frac{\rho_m}{m} \right) - \rho_m \nabla \left(\frac{V_{\text{ext}}}{m} \right) - \nabla V_Q, \quad (5.73)$$

onde $V_Q = -(\hbar^2/2m)\nabla^2\sqrt{\rho_m}/\rho_m$ é o potencial quântico e $\vec{v} = \nabla S/m$ é a velocidade do fluido quântico. A pressão efetiva do fluido quântico de partículas condensadas no caso da interação generalizada é dada pela equação de estado

$$p \left(\frac{\rho_m}{m} \right) = g' \rho_m - g. \quad (5.74)$$

Podemos escrever a função g

$$g \propto \rho_m^\gamma, \quad (5.75)$$

e então calculamos a equação de estado generalizada

$$p = k \rho_m^\gamma, \quad (5.76)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade que pode ser relacionada com a massa das partículas e o comprimento de espalhamento no caso das interações de comprimentos de onda longo. Ainda, fazendo um paralelo entre este caso, mais geral, e o caso tradicional do condensado de Bose-Einstein, podemos escrever o índice politrópico γ

$$\gamma = 1 + 1/n, \quad (5.77)$$

que nos permite resgatar o caso tradicional se fizermos $n = 1$ e garantirmos que $k > 0$.

5.3.1 Dinâmica cósmica

Antes de estudarmos a dinâmica do universo neste modelo vamos generalizar ainda mais a equação (5.76) e adicionar um termo linear [61, 63]. Portanto, daqui em diante a equação de estado será

$$p = \alpha\rho + k\rho^{1+1/n}, \quad (5.78)$$

onde α é uma constante, e, para simplificarmos as equações, não usaremos mais os índices m para a densidade. O termo linear na equação (5.78) é adicionado a mão. Também não iremos mais chamar de matéria escura o fluido descrito pela equação de estado politrópica (5.78). Nos casos que vamos estudar aqui vamos ver que, para valores específicos das constantes α , k e n do modelo, o fluido pode ter o comportamento análogo de uma constante cosmológica [61, 63].

Se restringirmos os valores do índice politrópico para aqueles em que $n > 0$ (que inclui o caso do condensado de Bose-Einstein tradicional) vemos que o termo politrópico da equação de estado (5.78) domina a densidade total quando comparado com o termo linear. Para valores menores da densidade é o termo linear que domina. Já vimos que o universo primordial tinha uma densidade média muito grande. Se considerarmos que o universo primordial foi preenchido pelo fluido com equação de estado politrópica (5.83) podemos fazer com que o mesmo se comporte como uma constante cosmológica ($\alpha = -1$), matéria sem pressão ($\alpha = 0$) ou radiação ($\alpha = 1/3$) para tempos mais tardios em relação a singularidade inicial, quando a densidade for pequena o suficiente.

Neste cenário o universo primordial deve satisfazer a relação $(1 + \alpha + k\rho^{1/n}) \geq 0$, com $n > 0$ [62], sendo que, para termos um universo primordial com expansão acelerada ainda é necessário fazer $k < 0$. Caso $n < 0$ podemos usar a equação de estado politrópica (5.78) para descrevermos o universo atual, onde o termo politrópico irá dominar a densidade total para valores pequenos de ρ [64]. Para o caso da equação de estado satisfazer a relação $(1 + \alpha + k\rho^{1/n}) \leq 0$ teremos um universo do tipo *fantasma* [65].

A equação de conservação da energia para a equação de estado politrópica (5.78) é

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + \alpha + k\rho^{1/n}) = 0, \quad (5.79)$$

que, para o caso $\alpha \neq -1$, encontramos¹

$$\rho = \frac{\rho_*}{[\mathbf{R}^{3(1+\alpha)/n} \mp 1]^n}, \quad (5.80)$$

onde o sinal negativo corresponde a $k > 0$, o sinal positivo a $k < 0$, $\mathbf{R} = a/a_*$, sendo a_* uma constante de integração e $\rho_* = [(1 + \alpha)/|k|]^n$.

No caso da auto interação repulsiva ($k > 0$, que equivale ao condensado de Bose-Einstein tradicional para os casos $n = 1$ e $\alpha = 0$) a densidade é definida apenas no intervalo $a_* < a < \infty$ do fator de escala, e podemos calcular os limites

$$\frac{\rho}{\rho_*} \approx \begin{cases} \left(\frac{n}{3(1+\alpha)}\right)^n \frac{1}{(\mathbf{R}-1)^n} \rightarrow \infty & , \quad a \rightarrow a_* \\ \mathbf{R}^{-3(1+\alpha)} \rightarrow 0 & , \quad a \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (5.81)$$

No caso da auto interação atrativa ($k < 0$) a densidade é definida no intervalo $0 < a < \infty$ do fator de escala, e tem os limites

$$\frac{\rho}{\rho_*} \approx \begin{cases} 1 & , \quad a \rightarrow 0 \\ \mathbf{R}^{-3(1+\alpha)} \rightarrow 0 & , \quad a \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (5.82)$$

sendo que, nos mesmos limites, a pressão do fluido politrópico será $p \rightarrow -\rho_*$ e $p \rightarrow 0$, respectivamente. Dos limites (5.82) podemos concluir que o caso onde o modelo satisfaz as relações $(1 + \alpha + k\rho^{1/n}) \geq 0$, $k < 0$, $n > 0$ e $\alpha \neq -1$ a densidade inicial do universo é constante e tem pressão negativa, assim como no modelo inflacionário de rolamento lento. Durante a expansão do universo, mais exatamente para $a \gg a_*$, o fluido politrópico irá aproximar o comportamento da poeira, se $\alpha = 0$, ou da radiação, se $\alpha = 1/3$. A configuração que usamos para chegar nos limites (5.82) será a que usaremos para descrever

¹Não trataremos o caso $\alpha = -1$ aqui, mas o mesmo pode ser encontrado em [62].

o universo primordial.

Podemos também escrever a equação de estado politrópica (5.76) como

$$p = \omega(t)\rho, \quad (5.83)$$

onde o parâmetro efetivo da equação de estado $\omega(t)$ é

$$\omega(t) = \alpha \pm (\alpha + 1) \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{1/n} = \alpha \pm (\alpha + 1) (\mathbf{R}^{3(1+\alpha)/n} \mp 1)^{-1}. \quad (5.84)$$

Com o parâmetro (5.83) podemos calcular a velocidade do som no fluido, que é

$$c_s^2 = \left(\frac{n+1}{n} \right) \omega(t) - \frac{\alpha}{n}. \quad (5.85)$$

Novamente, podemos encontrar os limites para as auto interações repulsiva e atrativa.

Para $k > 0$, temos

$$\omega(t) \approx \begin{cases} \alpha + \frac{n}{3(\mathbf{R}-1)} \rightarrow \infty & , \quad a \rightarrow a_* \\ \alpha + \frac{\alpha+1}{\mathbf{R}^{-3(1+\alpha)/n}} \rightarrow \alpha & , \quad a \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (5.86)$$

e para $k < 0$, encontramos

$$\omega(t) \approx \begin{cases} -1 & , \quad a \rightarrow 0 \\ \alpha - \frac{\alpha+1}{\mathbf{R}^{-3(1+\alpha)/n}} \rightarrow \alpha & , \quad a \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (5.87)$$

e, portanto, a velocidade do som no fluido poderá ser aproximada por

$$c_s^2 \approx \begin{cases} -\left(\frac{1+\alpha+n}{n}\right) & , \quad a \rightarrow 0 \\ \alpha + \left(\frac{1+n}{n}\right) \left(\frac{1+\alpha}{\mathbf{R}^{-3(1+\alpha)/n}}\right) \rightarrow \alpha & , \quad a \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (5.88)$$

ou seja, na origem, para $n > 0$ teremos sempre $c_s^2 < -1$ para todo $\alpha > 0$.

Novamente, assumindo que o universo é preenchido pelo fluido com equação de estado

(5.76), onde fazemos $n > 0$ e $k < 0$, encontramos que a equação de Friedmann é

$$\frac{\dot{\mathbf{R}}^2}{\mathbf{R}^2} = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{3} \rho_* \left(1 + \mathbf{R}^{3(1+\alpha)/n}\right)^{-n}. \quad (5.89)$$

Para instantes próximos à singularidade, ou seja, $a \ll a_*$, temos que $\mathbf{R} \ll 1$ e então podemos expandir a equação de Friedmann (5.89) em série de Taylor, para o caso $x \equiv \mathbf{R}^{3(1+\alpha)/n} \ll 1$,

$$\left[1 + \frac{n}{2}x + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{n}{2} - 2\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right) \frac{n}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right] \frac{d\mathbf{R}}{\mathbf{R}} = \sqrt{\frac{M_{\text{Pl}}^{-2} \rho_*}{3}} dt. \quad (5.90)$$

Vamos também impor a condição $3(1 + \alpha)/n \geq 1$, de maneira que

$$n \leq 3(1 + \alpha). \quad (5.91)$$

Se mantivermos apenas o termo de ordem zero na expansão (5.91), podemos resolver a equação de Friedmann aproximada

$$\mathbf{R} \propto e^{tH_*}, \quad (5.92)$$

onde $H_* = \sqrt{\frac{M_{\text{Pl}}^{-2} \rho_*}{3}}$. Como vemos, sob as condições descritas acima o universo primordial é inflacionário e tem início em $a \rightarrow 0$ com uma densidade finita e aproximadamente constante, onde ρ_* define o valor máximo da densidade.

Após o período inflacionário, ou seja, para $a \gg a_*$, o termo linear da equação de estado (5.76) irá dominar a densidade total.

Podemos também representar o fluido com equação de estado (5.76) usando um campo escalar. Para isso temos de determinar o potencial $V(\phi)$ que reproduza o comportamento do fluido politrópico. Começamos escrevendo a equação de Klein-Gordon,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (5.93)$$

onde $V_{,\phi} = dV/d\phi$, e definimos

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (5.94)$$

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (5.95)$$

A expansão acelerada irá acontecer se as seguintes condições forem satisfeitas

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V \propto H^2, \quad (5.96)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll 3H\dot{\phi} \approx |V_{,\phi}|.$$

Então combinamos as equações (5.94) e (5.95) para encontrarmos

$$\dot{\phi}^2 = (\omega(t) + 1)\rho, \quad (5.97)$$

$$V(\phi) = \frac{\rho}{2}(1 - \omega(t)). \quad (5.98)$$

Para encontrarmos como o fator de escala a varia com o campo escalar ϕ usaremos a regra da cadeia combinada com a equação (5.97) e com a equação de Friedmann, e então obtemos

$$\frac{d\phi}{da} = \sqrt{\frac{3}{M_{\text{Pl}}^{-2}} \frac{\sqrt{\omega + 1}}{a}}. \quad (5.99)$$

Podemos integrar a equação acima com ajuda da equação (5.84) para o parâmetro da equação de estado, e então invertemos a solução para encontrarmos

$$\mathbf{R}^{3(1+\alpha)/n} = \sinh^2(\psi), \quad (5.100)$$

onde ψ é definido como

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{4} M_{\text{Pl}}^{-2} \frac{1 + \alpha}{n^2}} \phi. \quad (5.101)$$

Se combinarmos as equações (5.98) e (5.100), iremos obter

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{\rho_*}{2} \left[\frac{1 - \alpha}{(1 + \mathbf{R}^{3(1+\alpha)/n})^n} + \frac{1 + \alpha}{(1 + \mathbf{R}^{3(1+\alpha)/n})^{n+1}} \right] = \\ &= \frac{\rho_*}{2} \left[\frac{(1 - \alpha)}{(\cosh \psi)^{2n}} + \frac{(1 + \alpha)}{(\cosh \psi)^{2(n+1)}} \right]. \end{aligned} \quad (5.102)$$

O primeiro parâmetro de rolamento lento, que está relacionado com a expansão acelerada durante a inflação, é

$$\epsilon(t) \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (5.103)$$

Como já vimos anteriormente, com as equações de fundo, a equação de estado (5.84), e a equação de Klein-Gordon (5.93) mostramos que

$$\epsilon(t) = \frac{3}{2}(1 + \omega(t)) = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \approx \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2. \quad (5.104)$$

Na Figura 5.7 podemos ver o comportamento do parâmetro (5.104) como uma função do fator de escala \mathbf{R} em duas situações diferentes, com $n = 1$ e $n = 2$.

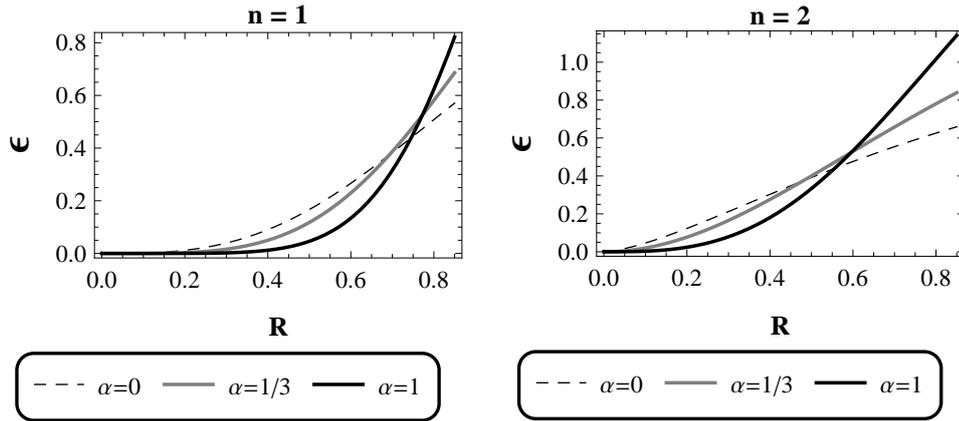


Figura 5.7: O parâmetro de rolamento lento ϵ como uma função do fator de escala.

O segundo parâmetro de rolamento lento nos diz o quão longo será o período inflacio-

nário, e é definido como

$$\eta(t) \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \epsilon - \frac{1}{2\epsilon} \frac{d\epsilon}{dN}, \quad (5.105)$$

onde $dN = Hdt$. Com ajuda da expressão de ϵ em termos do parâmetro da equação de estado ω podemos calcular neste modelo que

$$\eta = \frac{2}{3}\epsilon + \frac{1}{2}(1 + c_s^2) \approx \frac{2}{3}\epsilon - \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \alpha}{n} \right), \quad (5.106)$$

sendo que a aproximação é feita no limite $a \rightarrow 0$. Se olharmos para a condição (5.91) para n e α vamos ver que não podemos satisfazer a condição de rolamento lento $\eta \ll 1$, o que trará sérias implicações para o espectro de potência.

5.3.2 Perturbações escalares

Novamente podemos usar a equação de movimento para as perturbações escalares (5.48)

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s^2) + c_s^2 k^2]\Phi = 0, \quad (5.107)$$

onde k é o módulo do número de onda, sendo que $\nabla^2\Phi = -k^2\Phi$. Para obtermos a perturbação Φ no universo primordial preenchido pelo fluido politrópico vamos usar as transformações [23]

$$\Phi = a^\beta \mu, \quad (5.108)$$

$$\beta = -\frac{3}{2}(1 + c_s^2) = \frac{3}{2} \left(\frac{1 + \alpha}{n} \right), \quad (5.109)$$

e então encontramos

$$\mu'' + \mu [(k\tau c_s)^2 - (\beta^2 + \beta)] = 0. \quad (5.110)$$

Com ajuda da transformação $\mu = \sqrt{|\tau|}g$, vamos encontrar a equação diferencial de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 g}{dz^2} + z \frac{dg}{dz} + [z^2 - (\beta^2 + \beta + 1/4)]g = 0, \quad (5.111)$$

onde $z = k|\tau|c_s$. A solução é

$$g = C_1 \mathcal{H}_\nu^{(1)}(z) + C_2 \mathcal{H}_\nu^{(2)}(z), \quad (5.112)$$

onde $\mathcal{H}_\nu^{(i)}(z)$ são as funções de Hankel com ordem $\nu = \sqrt{\beta^2 + \beta + 1/4}$.

Novamente, podemos quantizar a equação (5.110), de maneira que a perturbação Φ será transformado em um campo quântico

$$\hat{\Phi} = a^\beta \hat{\mu}, \quad (5.113)$$

que irá nos permitir, usando a função de correlação de dois pontos $\langle \hat{\Phi}(\tau, \vec{x}) \hat{\Phi}^\dagger(\tau, \vec{y}) \rangle$, encontrar o espectro de potência quântico

$$P_\Phi(k, \tau) = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|\mu|^2}{a^{-2\beta}}, \quad (5.114)$$

onde $\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{|\tau|} \mathcal{H}_\nu^{(1)}(z)$.

Podemos também calcular o índice espectral das perturbações Φ , que é definido por

$$n_\Phi - 1 = \left. \frac{d \ln P_\Phi}{d \ln k} \right|_{aH=c_s k}, \quad (5.115)$$

onde $aH = c_s k$ garante que o mesmo será calculado quando os modos reentram no horizonte, e portanto teremos

$$n_\Phi - 1 = -2(\epsilon - \beta - 1)(1 - \epsilon)^{-1} \approx 2 + 2\beta(1 + \epsilon), \quad (5.116)$$

e, com a ajuda de (5.106) e (5.109) podemos encontrar que

$$n_\Phi - 1 = 2 + 2\epsilon - 6\eta(1 + \epsilon), \quad (5.117)$$

que mostra que o espectro de potência das perturbações escalares no modelo politrópico não são invarinates de escala.

Capítulo 6

Conclusão

Durante os séculos XX e XXI a humanidade acumulou inegáveis evidências da evolução de um universo dinâmico, homogêneo, isotrópico e extremamente antigo: a radiação emitida pelas galáxias são desviadas para o setor vermelho do espectro eletromagnético, a abundância de elementos leves como hidrogênio, hélio e lítio são confirmadas pelo modelo de nucleosíntese primordial, e a existência da radiação cósmica de fundo (RCFM) na frequência de microondas sugere um universo primordial extremamente quente e denso, que segue um processo contínuo de expansão e consequente esfriamento.

Até agora a hipótese da existência de uma breve fase de expansão acelerada e exponencial nos primórdios da história do universo mostrou ser a melhor maneira de explicar [16, 33] a homogeneidade das estruturas em grandes escalas e da RCFM, a razão da curvatura ser praticamente plana e, talvez a mais importante das explicações, a origem das minúsculas flutuações que foram o ponto de partida para o surgimento das estruturas em grande escalas que observamos hoje, além de podermos relacionar essas flutuações primordiais com os pequenos desvios de temperatura medidos na RCFM.

Os dados mais recentes [16] mostram que o universo é formado por radiação, bárions, matéria escura fria e energia escura (modelo Λ CDM), sendo que essa última componente, apesar da baixa densidade, domina a dinâmica do espaço-tempo em grandes escalas, já que corresponde a quase $2/3$ da densidade total do universo. Além disso, os mesmos dados [33] corroboram a existência da inflação primordial dirigida por um único campo escalar

neutro, fracamente acoplado à geometria do espaço-tempo, com termo cinético canônico, que decai lentamente com um potencial aproximadamente constante. Mesmo assim, foram medidas algumas propriedades da RCFM que não são estatisticamente consistentes com o modelo mais adequado (Λ CDM) [66].

Dentre essas anomalias vamos destacar as oscilações no espectro de potência [33], que propusemos explicar no Capítulo 4. Adotamos um modelo de dois campos, com potenciais quadráticos (também conhecido como caótico) e separáveis, onde um dos campos domina completamente a dinâmica, e o campo secundário sofre um ganho de massa instantâneo, o que faz com que ele viole a segunda condição de rolamento lento, que resultará em uma mudança abrupta na trajetória do campo secundário, seguida de oscilações amortecidas e o rápido desaparecimento deste campo [21].

As mesmas oscilações amortecidas são obtidas no parâmetro efetivo da equação de estado para os dois campos, como podemos observar na Figura 4.2. As oscilações no parâmetro efetivo da equação de estado desaparecem muito rapidamente devido a veloz diluição do campo oscilatório e, portanto, estudamos as perturbações escalares primordiais de duas maneiras.

Na primeira, desconsideramos o campo secundário após o mesmo sofrer o ganho extra de massa. Como resultado teremos uma pequena descontinuidade no parâmetro efetivo da equação de estado, que é medida pela equação (4.46), que mostra este salto sendo aproximadamente do tamanho da razão entre as energias dos campos no ponto de transição. Quando do cálculo das perturbações e do espectro de potência também descartamos a existência do campo secundário. Na segunda maneira mantemos a configuração completa, ou seja, consideramos ambos os campos, e conseqüentemente as oscilações, no nível do fundo e também para as perturbações. Apenas quando calculamos a expressão final para o espectro de potência consideramos instantes de tempo próximos ao final da inflação, quando o campo secundário não é mais importante.

No caso da transição abrupta, que provoca o salto (4.46) no parâmetro efetivo da equação de estado, vemos que, com as correções oscilatórias do espectro de potência, dadas pelas equações (4.109) e (4.110), é bem fácil identificar a frequência, a posição do primeiro

pico e a amplitude das oscilações, que é dada pela descontinuidade do parâmetro efetivo da equação de estado, sendo que, no nosso modelo, este saldo tem, aproximadamente o tamanho da razão entre as energias dos campos no ponto de transição. O mesmo resultado já havia sido encontrado em outros modelos [49, 67].

Já para o caso completo, não é nada simples visualizar as correções quando olhamos para o espectro de potência (4.113). Mesmo assim, a Figura 4.9 mostra que, salvo o sinal trocado das correções, o caso mais simples nos dá uma boa estimativa da amplitude e da frequência das oscilações no espectro de potência. Nas Figuras 4.3 e 4.4 vemos que, poucos instantes após a transição para o regime mais massivo, as oscilações atingem um estado estacionário. Além disso, tanto a amplitude das oscilações quanto a posição do primeiro pico não dependem da razão entre as massas, como mostram as Figuras 4.5 e 4.6, enquanto a amplitude do primeiro pico tem uma relação linear com a razão entre as energias dos campos, como podemos ver nas Figuras 4.7 e 4.8.

Portanto, baseados nos atuais limites para as oscilações no espectro de potência [33], chegamos no limite superior para a energia de um campo pesado

$$\frac{\rho_{\text{pesado}}}{\rho_{\text{inflaton}}} \lesssim \Delta\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \sim \mathcal{O}(10^{-2}). \quad (6.1)$$

A aproximação da transição abrupta é uma boa aproximação por duas razões: primeiro, a evolução do tipo rolamento lento do campo leve, que dirige a inflação, não é violada, de modo que quantidades como o fator de escala e o parâmetro de Hubble H sofrem apenas pequenas alterações. Segundo, como a razão entre as energias é pequena as aproximações são válidas também no nível perturbativo.

Embora propriedades adicionais nas oscilações do espectro de potência podem ser provocadas pelas ressonâncias causadas pelas oscilações do campo pesado, essas ressonâncias são suprimidas pelo campo leve, de maneira que a estimativa (6.1) e a aproximação abrupta são bons indícios, também em outros modelos, de se vale a pena ou não ir além da aproximação abrupta e incluir nos cálculos outras interações e ressonâncias, que são importantes para compararmos o modelo com as observações [21].

Não são apenas as observações da RCFM [16] que confirmam a existência da matéria

escura que, apesar de interagir gravitacionalmente, não emite e nem absorve radiação. Medidas locais do comportamento gravitacional da matéria [17, 18] também confirmam a existência desta componente até agora sem igual no modelo padrão de partículas [53].

Se as partículas de matéria escura fria forem compostas por partículas leves [55, 56] ou por algum campo bosônico [57], em algum momento da história cósmica, pode ocorrer uma condensação em forma de condensado de Bose-Einstein [58, 59]. No Capítulo 5 revimos a condensação cósmica e também estudamos as perturbações responsáveis pela formação de estruturas durante o processo de condensação [22].

Para analisarmos o comportamento das perturbações no modelo de condensação de Bose-Einstein não assumimos nenhum tipo de condição inicial. Portanto, traçamos os gráficos para os modos crescente e decrescente. No caso do potencial Newtoniano Φ , vemos na Figura 5.2, para o caso sem constante cosmológica, que ambos os modos são mais sensíveis a mudanças na quantidade de matéria escura do que no desvio para o vermelho crítico z_{crt} , que depende da massa das partículas e do comprimento de espalhamento, como mostra a equação (5.28). Quando comparado com o modelo padrão da cosmologia, vemos que os modos crescentes não conseguem reproduzir o comportamento do modelo Λ CDM, mas os modos decrescentes são favorecidos para os casos com uma pequena quantidade de matéria escura na forma de condensado e também valores pequenos de z_{crt} .

Já a Figura 5.5 mostra que, na presença de constante cosmológica, vemos que quanto menor o valor de z_{crt} , menor é o valor do potencial Φ . Quando comparado com o modelo padrão, vemos que valores maiores de z_{crt} serão favorecidos.

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram a evolução da função de contraste da densidade, que são necessárias para se encontrar o espectro de potência das perturbações de densidade. Vemos que em um universo sem constante cosmológica o contraste é sensível a quantidade de matéria escura. Mas em ambos os casos, com e sem constante cosmológica, mostrados nas Figuras 5.4 e 5.6 respectivamente, vemos que valores maiores de z_{crt} são favorecidos. Em [68] foi mostrado que, para o caso da matéria escura já condensada, valores maiores da massa das partículas também são favorecidos quando o modelo é comparado com o modelo padrão.

É importante notar que z_{crt} é o parâmetro mais relevante neste modelo, pois contém informações sobre as partículas de matéria escura e o processo de condensação, como podemos ver na equação (5.28). Para um comprimento de espalhamento fixo, que nas medidas experimentais feitas com matéria bariônica tem valores típicos entre 10^6 fm e 10^{10} fm, para obtermos valores grandes de z_{crt} precisamos de valores grandes para a massa da partícula, já que $1 + z_{crt} \sim m$. Considerando o intervalo de 10^6 fm e 10^{10} fm para o comprimento de espalhamento e fixando o valor máximo das massas das partículas de matéria escura em 1.87 eV encontramos que z_{crt} assume valores entre 17 and 400. Para grandes valores de z_{crt} é difícil distinguir o modelo [22,68], a não ser através das diferenças para grandes escalas no espectro de potência [68].

Também foi possível generalizar a equação (5.70) para encontrarmos a equação de estado politrópica (5.83) que, sob certas condições dos parâmetros do modelo, descreve também a matéria escura sob a forma de condensado de Bose-Einstein. Ainda sob certas condições para os parâmetros do modelo vimos que um universo preenchido pela equação de estado politrópica (5.83) pode ter uma origem com densidade constante e posteriormente passar por um processo de inflação. Exatamente o que precisamos para explicar várias características do universo primordial.

Apesar de conseguirmos obter neste modelo um universo sem singularidade, vemos que na equação (5.106) o segundo parâmetro de rolamento lento não satisfaz a condição $\eta \ll 1$. Mas, mais importante do que isso é que, quando calculamos as perturbações escalares neste modelo e o espectro de potência [23], vemos que este último não é invariante por escala, como prevêem os vários modelos de inflação de rolamento lento [29] e como também indicam as medidas da RCFM [33].

Mesmo com todos os avanços no modelo cosmológico e, principalmente, no nosso entendimento da formação de estruturas, existem ainda uma série de desafios a serem vencidos. Além da já citada anomalia oscilatória no espectro de potência da RCFM, podemos citar, entre outras [69], um valor menor para o espectro quando medido em grandes escalas.

Sendo assim, podemos considerar em trabalhos futuros o efeito de fases pré-inflacionárias, que podemos provocar oscilações no espectro de potência. Entre os candidatos a fonte de

matéria nessa fase podemos citar o fluido de equação politrópica, ou até mesmo um ou mais campos escalares do tipo *inflaton* que na origem tenham a energia dominada pelo termo cinético. É possível também nos perguntarmos como se comportaria um universo quântico preenchido pelo fluido politrópico.

No que diz respeito a matéria escura, é necessário que usemos a continuidade em todas as fases do modelo com condensado de Bose-Einstein para calcularmos o espectro de massa das perturbações afim de compararmos o modelo com os dados existentes.

Apêndice A

Perturbações

Perturbando as conexões (2.12), encontramos a expressão geral

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \delta \left[\frac{g^{\alpha\lambda}}{2} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \right] \\ &= \frac{\delta g^{\alpha\lambda}}{2} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) + \frac{g^{\alpha\lambda}}{2} (\delta g_{\mu\lambda,\nu} + \delta g_{\nu\lambda,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\lambda}) ,\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

e então, aplicando a métrica perturbada (3.6), teremos as componentes

$$\delta\Gamma_{00}^0 = A' , \quad (\text{A.2})$$

$$\delta\Gamma_{0i}^0 = (A + \mathcal{H}B)_{,i} , \quad (\text{A.3})$$

$$\delta\Gamma_{00}^i = (A + B' + \mathcal{H}B)_{,i} , \quad (\text{A.4})$$

$$\delta\Gamma_{0i}^j = -\psi' \delta_i^j + \frac{D_i^j E'}{2} , \quad (\text{A.5})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = -(\psi' + 2\mathcal{H}\psi + 2\mathcal{H}A) \delta_{ij} - B_{,ij} + \frac{D_{ij} E'}{2} - \mathcal{H}D_{ij}E , \quad (\text{A.6})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^k = \psi_i \delta_j^k - \psi_j \delta_i^k + \psi_{,k} \delta_{ij} - \mathcal{H}B_{,k} \delta_{ij} + \frac{1}{2} (\partial_i D_j^k + \partial_j D_i^k - \partial^k D_{ij}) E . \quad (\text{A.7})$$

De maneira análoga às conexões, podemos calcular o tensor de curvatura perturbado

$\delta R_{\mu\nu}$, que terá componentes

$$\delta R_{00} = 3\psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + 3\mathcal{H}A'\nabla^2 A + \nabla^2 (B' + \mathcal{H}B), \quad (\text{A.8})$$

$$\delta R_{0i} = [2\psi' + 2\mathcal{H}A + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) B]_{,i} + \frac{\partial_k D_i^k E'}{2}, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \delta R_{ij} = & - \left[\psi'' + 5\mathcal{H}\psi' + 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\psi - \nabla^2\psi + \right. \\ & \left. + \mathcal{H}A' + 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)A - \mathcal{H}\nabla^2 B \right] \delta_{ij} + (\psi - A)_{,ij} + \\ & - (B' + 2\mathcal{H}B)_{,ij} + \frac{D_{ij}}{2} [E'' + 2\mathcal{H}E' + 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)E] + \\ & + \frac{1}{2} [\partial_k (\partial_i D_j^k + \partial_j D_i^k) - \nabla^2 D_{ij}] E, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

com as quais encontramos o escalar de curvatura perturbado $\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$, que é

$$\begin{aligned} \delta R = & -a^{-2} \left[6\psi'' + 18\mathcal{H}\psi' - 4\nabla^2\psi + 6\mathcal{H}A' + 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)A + 2\nabla^2 A + \right. \\ & \left. + 2\nabla^2 (B' + 3\mathcal{H}B) - \partial_k \partial^i D_i^k E \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, podemos calcular o tensor perturbado de Einstein, que terá componentes

$$\delta G_{00} = -6\mathcal{H}\psi' + 2\nabla^2\psi - 2\mathcal{H}\nabla^2 B + \frac{\partial_k \partial^i D_i^k E}{2}, \quad (\text{A.12})$$

$$\delta G_{0i} = [2\psi' + 2\mathcal{H}A - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')B]_{,i} + \frac{\partial_k D_i^k E'}{2}, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} = & [2\psi'' + 4\mathcal{H}\psi' + 2\mathcal{H}A' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)(A + \psi) + \nabla^2(A - \psi)] \delta_{ij} + \\ & + (\psi - A)_{,ij} + \left[\nabla^2 (B' + 2\mathcal{H}B) + \frac{\partial_k \partial^l D_l^k E}{2} \right] \delta_{ij} - (B' + 2\mathcal{H}B)_{,ij} + \\ & + D_{ij} \left[\frac{E''}{2} + \mathcal{H}E' - (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') \right] + [\partial_k \partial_i D_j^k + \partial_k \partial_j D_i^k - \nabla^2 D_{ij}] \frac{E}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Para o tensor momento-energia de um fluido perfeito, descrito pela equação (2.39),

não é difícil encontrar que

$$\delta T_0^0 = \delta\rho, \quad \delta T_i^0 = \frac{\rho + p}{a} \delta u_i, \quad \delta T_i^j = -\delta p \delta_i^j, \quad (\text{A.15})$$

onde δu_i são as flutuações na velocidade do fluido.

No caso de um campo escalar, o tensor momento-energia é dado pela equação (2.65), e as componentes perturbadas serão

$$\delta T_0^0 = A\phi'^2 - \phi' \delta\phi' - a^2 V_{,\phi} \delta\phi, \quad (\text{A.16})$$

$$\delta T_i^0 = -\phi' \delta\phi_{,i}, \quad (\text{A.17})$$

$$\delta T_i^j = -\left(A\phi'^2 - \phi' \delta\phi' + a^2 V_{,\phi} \delta\phi\right) \delta_i^j. \quad (\text{A.18})$$

Apêndice B

Coeficientes de Bogoliubov

Para calcularmos os coeficientes de Bogoliubov em (4.104), precisamos substituir as soluções (4.102) e (4.103) nas condições de continuidade (4.100), para encontrarmos

$$\alpha_1 \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} \cos \theta_+ + \beta_1 \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} \cos \theta_+ + \tilde{\alpha}_1 \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} \sin \theta_+ + \tilde{\beta}_1 \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} \sin \theta_+ = e^{i(\mu_1^- + 1/2)\pi/2} \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \cos \theta_-, \quad (\text{B.1})$$

$$\alpha_p \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} \cos \theta_+ + \beta_p \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} \cos \theta_+ + \tilde{\alpha}_p \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} \sin \theta_+ + \tilde{\beta}_p \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} \sin \theta_+ = e^{i(\mu_p^- + 1/2)\pi/2} \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \sin \theta_-, \quad (\text{B.2})$$

$$\alpha_1 \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} \sin \theta_+ + \beta_1 \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} \sin \theta_+ - \tilde{\alpha}_1 \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} \cos \theta_+ - \tilde{\beta}_1 \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} \cos \theta_+ = e^{i(\mu_1^- + 1/2)\pi/2} \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \sin \theta_-, \quad (\text{B.3})$$

$$\alpha_p \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} \sin \theta_+ + \beta_p \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} \sin \theta_+ - \tilde{\alpha}_p \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} \cos \theta_+ - \tilde{\beta}_p \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} \cos \theta_+ = -e^{i(\mu_p^- + 1/2)\pi/2} \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \cos \theta_-. \quad (\text{B.4})$$

Além disso, as condições (4.101) ainda nos dão

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)}}{dx} \right) \cos \theta_+ + \beta_1 \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)}}{dx} \right) \cos \theta_+ \\
 & + \tilde{\alpha}_1 \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)}}{dx} \right) \sin \theta_+ + \tilde{\beta}_1 \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)}}{dx} \right) \sin \theta_+ \\
 = & e^{i(\mu_1^- + 1/2)\pi/2} \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)}}{dx} \right) \cos \theta_-, \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_p \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)}}{dx} \right) \cos \theta_+ + \beta_p \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)}}{dx} \right) \cos \theta_+ \\
 & + \tilde{\alpha}_p \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)}}{dx} \right) \sin \theta_+ + \tilde{\beta}_p \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)}}{dx} \right) \sin \theta_+ \\
 = & e^{i(\mu_p^- + 1/2)\pi/2} \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)}}{dx} \right) \sin \theta_-, \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & -e^{i(\mu_1^-+1/2)\pi/2} \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)}}{dx} \right) \sin \theta_- = \\
 & \alpha_1 \left[\frac{3}{2} \left(1 + 2 \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)}}{dx} \right] \sin \theta_+ \\
 & + \beta_1 \left[\frac{3}{2} \left(1 + 2 \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)}}{dx} \right] \sin \theta_+ \\
 & - \tilde{\alpha}_1 \left[\frac{3}{2} \left(1 + 2 \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)}}{dx} \right] \cos \theta_+ \\
 & - \tilde{\beta}_1 \left[\frac{3}{2} \left(1 + 2 \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)}}{dx} \right] \cos \theta_+, \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e^{i(\mu_p^-+1/2)\pi/2} \left(\frac{3}{2} \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)}}{dx} \right) \cos \theta_- = \\
 & \alpha_p \left[\frac{3}{2} \left(1 + 2 \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)}}{dx} \right] \sin \theta_+ \\
 & + \beta_p \left[\frac{3}{2} \left(1 + 2 \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)}}{dx} \right] \sin \theta_+ + \\
 & - \tilde{\alpha}_p \left[\frac{3}{2} \left(1 + 2 \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)}}{dx} \right] \cos \theta_+ \\
 & - \tilde{\beta}_p \left[\frac{3}{2} \left(1 + 2 \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} + \frac{k}{aH} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)}}{dx} \right] \cos \theta_+ \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

Isolando os coeficientes do sistema de equações, encontramos, finalmente

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\pi}{4} i e^{i(\mu_1^- + 1/2)\pi/2} \left\{ \cos \theta_- \cos \theta_+ (1 + \tan \theta_- \tan \theta_+) \frac{k}{aH} \left[\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)}}{dx} - \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)}}{dx} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(1 + \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \sin \theta_+ \sin \theta_- \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\pi}{4} i e^{i(\mu_1^- + 1/2)\pi/2} \left\{ \cos \theta_- \cos \theta_+ (1 + \tan \theta_- \tan \theta_+) \frac{k}{aH} \left[\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)}}{dx} - \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)}}{dx} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(1 + \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \sin \theta_- \sin \theta_+ \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= -\frac{\pi}{4} i e^{i(\mu_1^- + 1/2)\pi/2} \left\{ \cos \theta_- \sin \theta_+ \left(1 - \frac{\tan \theta_-}{\tan \theta_+} \right) \frac{k}{aH} \left[\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)}}{dx} - \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)}}{dx} \right] + \right. \\ &\quad \left. - 3 \left(1 + \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \sin \theta_- \cos \theta_+ \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= \frac{\pi}{4} i e^{i(\mu_1^- + 1/2)\pi/2} \left\{ \cos \theta_- \sin \theta_+ \left(1 - \frac{\tan \theta_-}{\tan \theta_+} \right) \frac{k}{aH} \left[\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)}}{dx} - \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)}}{dx} \right] + \right. \\ &\quad \left. - 3 \left(1 + \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \sin \theta_- \cos \theta_+ \mathcal{H}_{\mu_1^-}^{(1)} \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \alpha_p &= -\frac{\pi}{4} i e^{i(\mu_p^- + 1/2)\pi/2} \cos \theta_- \sin \theta_+ \left\{ \left(1 - \frac{\tan \theta_-}{\tan \theta_+} \right) \frac{k}{aH} \left[\mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)}}{dx} - \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)}}{dx} \right] + \right. \\ &\quad \left. - 3 \left(1 + \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(2)} \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \beta_p &= \frac{\pi}{4} i e^{i(\mu_p^- + 1/2)\pi/2} \cos \theta_- \sin \theta_+ \left\{ \left(1 - \frac{\tan \theta_-}{\tan \theta_+} \right) \frac{k}{aH} \left[\mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)}}{dx} - \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)}}{dx} \right] + \right. \\ &\quad \left. - 3 \left(1 + \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_1^+}^{(1)} \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_p &= -\frac{\pi}{4} i e^{i(\mu_p^- + 1/2)\pi/2} \cos \theta_- \cos \theta_+ \left\{ (1 + \tan \theta_- \tan \theta_+) \frac{k}{aH} \left[\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)}}{dx} - \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)}}{dx} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \left(1 + \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(2)} \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \right\}, \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_p &= \frac{\pi}{4} i e^{i(\mu_p^- + 1/2)\pi/2} \cos \theta_- \cos \theta_+ \left\{ (1 + \tan \theta_- \tan \theta_+) \frac{k}{aH} \left[\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)}}{dx} - \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \frac{d\mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)}}{dx} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \left(1 + \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right) \mathcal{H}_{\mu_p^+}^{(1)} \mathcal{H}_{\mu_p^-}^{(1)} \right\}, \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

onde todas as quantidades dependentes do tempo são calculadas em t_* . No ponto de transição, temos $x \approx -k\tau_*$, e ambos os ângulos θ_{\pm} , assim como as funções de Hankel de índices μ_i^{\pm} são calculadas em $k_* \equiv a_* H_*$.

Ainda podemos aproximar $\gamma \approx \pi/2$ em todas as expressões, exceto na razão $V'_p/(3H\dot{\phi}_p)$, pois, devido a condição $\epsilon_m \ll 3\epsilon_1$, a razão $\epsilon_m/(3\epsilon_1)$ em (4.38) é de segunda ordem, quando comparada com ϵ_1 . Se fossemos usar a aproximação $\gamma \approx \pi/2$ em

$$\left. \frac{V'_p}{3H\dot{\phi}_p} \right|_{t=t_*} = 2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{3\epsilon_m}} \left(\frac{1}{2 \cot \gamma - \sqrt{3\epsilon_m/\epsilon_1}} \right), \tag{B.17}$$

estariamos ignorando termos de ordem maior, que cancelam quando fazemos a expansão em torno de $\gamma \approx \pi/2$. Portanto, usamos a expressão completa em (4.38) para todos os gráficos.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, *Covariance Properties of the Field Equations of the Theory of Gravitation Based on the Generalized Theory of Relativity*, Z. Math. Phys. **63**, 215 (1914).
- [2] A. Einstein, *On the General Theory of Relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915**, 778 (1915) [Addendum-ibid. **1915**, 799 (1915)].
- [3] A. Einstein, *The Field Equations of Gravitation*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915**, 844 (1915).
- [4] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [5] A. Einstein, *Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1917**, 142 (1917).
- [6] D. Goldsmith, *Einstein's Greatest Blunder? The Cosmological Constant and Other Fudge Factors in the Physics of the Universe*, Cambridge, USA: Harvard University Press (1997) 248 p.
- [7] A. Friedmann, *On the Possibility of a world with constant negative curvature of space*, Z. Phys. **21**, 326 (1924) [Gen. Rel. Grav. **31**, 2001 (1999)].
- [8] G. Lemaitre, *A homogeneous Universe of constant mass and growing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae*, Annales Soc. Sci. Brux. Ser. I Sci. Math. Astron. Phys. A **47**, 49 (1927).
- [9] G. Lemaitre, *The Expanding Universe*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **91**, 490 (1931).

- [10] S. Mitton, *Fred Hoyle: A Life in Science* Cambridge, UK: Univ. Pr. (2011) 384 p.
- [11] V. M. Slipher, *Nebulae*, Proc. Am. Phil. Soc. **56**, 403 (1917).
- [12] E. P. Hubble, *Extragalactic nebulae*, Astrophys. J. **64**, 321 (1926).
- [13] E. Hubble, *A Spiral Nebula as a Stellar System, Messier 31*, Astrophys. J. **69**, 103 (1929).
- [14] F. Hoyle, *A New Model for the Expanding Universe*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **108**, 372 (1948).
- [15] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s*, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).
- [16] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, [arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO]].
- [17] F. Zwicky, *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*, Astrophys. J. **86**, 217 (1937).
- [18] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*, Astrophys. J. **159**, 379 (1970).
- [19] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201].
- [20] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999) [astro-ph/9812133].
- [21] T. Battefeld and R. C. Freitas, *A Universal Bound on Excitations of Heavy Fields during Inflation*, JCAP **1409**, 029 (2014) [arXiv:1405.7969 [astro-ph.CO]].

- [22] R. C. Freitas and S. V. B. Gonçalves, *Cosmological perturbations during the Bose-Einstein condensation of dark matter*, JCAP **1304**, 049 (2013) [arXiv:1211.6701 [astro-ph.CO]].
- [23] R. C. Freitas and S. V. B. Gonçalves, *Polytropic equation of state and primordial quantum fluctuations*, [arXiv:1310.2917 [astro-ph.CO]].
- [24] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*, New York, US: Wiley (1972).
- [25] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491 p.
- [26] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*, San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004) 513 p.
- [27] S. Dodelson, *Modern cosmology*, Amsterdam, Netherlands: Academic Pr. (2003) 440 p.
- [28] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2005) 421 p.
- [29] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*, [arXiv:0907.5424 [hep-th]].
- [30] W. H. Kinney, *TASI Lectures on Inflation*, [arXiv:0902.1529 [astro-ph.CO]].
- [31] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions*, Phys. Rept. **215**, 203 (1992).
- [32] A. Riotto, *Inflation and the theory of cosmological perturbations*, [arXiv:hep-ph/0210162].
- [33] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], *Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation*, [arXiv:1303.5082 [astro-ph.CO]].

- [34] P. A. R. Ade *et al.* [BICEP2 Collaboration], *BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales*, [arXiv:1403.3985 [astro-ph.CO]].
- [35] D. Baumann and L. McAllister, *Inflation and String Theory*, [arXiv:1404.2601 [hep-th]].
- [36] V. Assassi, D. Baumann, D. Green and L. McAllister, *Planck-Suppressed Operators*, [arXiv:1304.5226 [hep-th]].
- [37] C. P. Burgess, M. W. Horbatsch and S. .P. Patil, *Inflating in a Trough: Single-Field Effective Theory from Multiple-Field Curved Valleys*, JHEP **1301**, 133 (2013) [arXiv:1209.5701 [hep-th]].
- [38] A. J. Tolley and M. Wyman, *The Gelaton Scenario: Equilateral non-Gaussianity from multi-field dynamics*, Phys. Rev. D **81**, 043502 (2010) [arXiv:0910.1853 [hep-th]].
- [39] A. Achucarro, J. -O. Gong, S. Hardeman, G. A. Palma and S. P. Patil, *Mass hierarchies and non-decoupling in multi-scalar field dynamics*, Phys. Rev. D **84**, 043502 (2011) [arXiv:1005.3848 [hep-th]].
- [40] X. Gao, D. Langlois and S. Mizuno, *Influence of heavy modes on perturbations in multiple field inflation*, JCAP **1210**, 040 (2012) [arXiv:1205.5275 [hep-th]].
- [41] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, *Towards the theory of reheating after inflation*, Phys. Rev. D **56**, 3258 (1997) [arXiv:hep-ph/9704452].
- [42] T. Battefeld and N. Shuhmaher, *Predictions of Dynamically Emerging Brane Inflation Models*, Phys. Rev. D **74**, 123501 (2006) [arXiv:hep-th/0607061].
- [43] T. Battefeld, A. Eggemeier and J. .Giblin, John T., *Enhanced Preheating after Multi-Field Inflation: On the Importance of being Special*, JCAP **1211**, 062 (2012) [arXiv:1209.3301 [astro-ph.CO]].
- [44] A. D. Linde, *Chaotic Inflation*, Phys. Lett. B **129**, 177 (1983).

- [45] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Nuovo Cim. B **44S10**, 1 (1966) [Erratum-ibid. B **48**, 463 (1967)] [Nuovo Cim. B **44**, 1 (1966)].
- [46] N. Deruelle and V. F. Mukhanov, *On matching conditions for cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **52**, 5549 (1995) [gr-qc/9503050].
- [47] J. Martin and D. J. Schwarz, *The Influence of cosmological transitions on the evolution of density perturbations*, Phys. Rev. D **57**, 3302 (1998) [arXiv:gr-qc/9704049].
- [48] C. T. Byrnes and D. Wands, *Curvature and isocurvature perturbations from two-field inflation in a slow-roll expansion*, Phys. Rev. D **74**, 043529 (2006) [arXiv:astro-ph/0605679].
- [49] D. Battefeld, T. Battefeld, H. Firouzjahi and N. Khosravi, *Brane Annihilations during Inflation*, JCAP **1007**, 009 (2010) [arXiv:1004.1417 [hep-th]].
- [50] X. Chen, *Primordial Features as Evidence for Inflation*, JCAP **1201**, 038 (2012) [arXiv:1104.1323 [hep-th]].
- [51] G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*, Phys. Rept. **405**, 279 (2005) [arXiv:hep-ph/0404175].
- [52] J. L. Feng, *Dark Matter Candidates from Particle Physics and Methods of Detection*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **48**, 495 (2010) [arXiv:1003.0904 [astro-ph.CO]].
- [53] L. Bergstrom, *Dark Matter Evidence, Particle Physics Candidates and Detection Methods*, Annalen Phys. **524**, 479 (2012) [arXiv:1205.4882 [astro-ph.HE]].
- [54] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [55] S. -J. Sin, *Late time cosmological phase transition and galactic halo as Bose liquid*, Phys. Rev. D **50**, 3650 (1994) [arXiv:hep-ph/9205208].
- [56] W. Hu, R. Barkana and A. Gruzinov, *Cold and fuzzy dark matter*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1158 (2000) [arXiv:astro-ph/0003365].

- [57] T. Fukuyama and M. Morikawa, *Relativistic gross-pitaevskii equation and the cosmological Bose Einstein condensation*, [arXiv:astro-ph/0509789].
- [58] C. G. Boehmer and T. Harko, *Can dark matter be a Bose-Einstein condensate?*, JCAP **0706**, 025 (2007) [arXiv:0705.4158 [astro-ph]].
- [59] T. Harko, *Cosmological dynamics of dark matter Bose-Einstein Condensation*, Phys. Rev. D **83**, 123515 (2011) [arXiv:1105.5189 [gr-qc]].
- [60] E. B. Kolomeisky, T. J. Newman, J. P. Straley and X. Qi, *Low-Dimensional Bose Liquids: Beyond the Gross-Pitaevskii Approximation*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1146 (2000).
- [61] P. -H. Chavanis, *A Cosmological Model Based on a Quadratic Equation of State Unifying Vacuum Energy, Radiation, and Dark Energy*, J. Grav. **2013**, 682451 (2013).
- [62] P. -H. Chavanis, *Models of universe with a polytropic equation of state: I. The early universe*, Eur. Phys. J. Plus **129**, 38 (2014) [arXiv:1208.0797 [astro-ph.CO]].
- [63] P. -H. Chavanis, *A simple model of universe with a polytropic equation of state*, [arXiv:1208.1192 [astro-ph.CO]].
- [64] P. -H. Chavanis, *Models of universe with a polytropic equation of state: II. The late universe*, [arXiv:1208.0801 [astro-ph.CO]].
- [65] P. -H. Chavanis, *Models of universe with a polytropic equation of state: III. The phantom universe*, [arXiv:1208.1185 [astro-ph.CO]].
- [66] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], *Planck 2013 results. XXIII. Isotropy and statistics of the CMB*, [arXiv:1303.5083 [astro-ph.CO]].
- [67] M. Konieczka, R. H. Ribeiro and K. Turzynski, *The effects of a fast-turning trajectory in multiple-field inflation*, JCAP **1407**, 030 (2014) [arXiv:1401.6163 [astro-ph.CO]].

- [68] H. Velten and E. Wamba, *Power spectrum for the Bose-Einstein condensate dark matter*, Phys. Lett. B **709**, 1 (2012) [arXiv:1111.2032 [astro-ph.CO]].
- [69] C. J. Copi, D. Huterer, D. J. Schwarz and G. D. Starkman, *Large angle anomalies in the CMB*, Adv. Astron. **2010**, 847541 (2010) [arXiv:1004.5602 [astro-ph.CO]].