UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

O Estudo do Setor de Gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido Acrescido de um Potencial do Tipo Higgs e a Generalização Supersimétrica do Tensor K_F

HUGO LEONARDO COSTA LOUZADA

VITÓRIA
2014

HUGO LEONARDO COSTA LOUZADA

O Estudo do Setor de Gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido Acrescido de um Potencial do Tipo Higgs e a Generalização Supersimétrica do Tensor K_F

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.
Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich Júnior.

Vitória
2014

HUGO LEONARDO COSTA LOUZADA

O Estudo do Setor de Gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido Acrescido de um Potencial do Tipo Higgs e a Generalização Supersimétrica do Tensor K_F

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.

Aprovada em 10 de Setembro de 2014

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Humberto Belich Júnior
UFES
Orientador

Prof. Dr. Fernando José Lira Leal
IFES

Prof. Dr. Marcelo Batista Hott
UNESP

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
UFPB

Prof. Dra. Denise da Costa Assafrão de Lima
UFES

Prof. Dr. Marcos Tadeu DAzeredo Orlando
UFES

A todas as pessoas esforçadas e perseverantes.

Agradecimentos

À minha família: minha mãe Marina, meu pai Hugo e minhas irmãs Fabiola e Jaqueline, por terem me proporcionado condições de ingressar na vida acadêmica.

Ao Humberto, por ter me aceitado como aluno.

Ao Fernando, por ter me auxiliado tanto em discussões de conteúdo, quanto em aspectos técnicos da elaboração desta tese.

Aos meus estimados companheiros de Kung Fu, que são a prova de que ainda existe gente boa nesse mundo, em especial: Ayrton Torres, Eduardo Rossi, Felipe Scardua, Hans Scneebeli, Jéssica Carolino Soares, Renan Brantes, Renan Margon e Thiago Caloti.

Aos meus companheiros de graduação, mestrado e doutorado, por terem partilhado comigo as mesmas dificuldades e ideais revolucionários nesses últimos 10 anos de fuleiragem, em especial a Gláuber Carvalho Dorsch, que mesmo em outro continente continuou mantendo contato e escutando as minhas besteiras, e a Ulysses Camara da Silva, que desde a época do mestrado sempre se mostrou disponível para me dar uma ajuda.

Aos meus companheiros de ensino médio, pelos muitos dias de diversão, que se estendem desde aquela época até hoje, em especial: Bernardo Carvalho, Davi Garcia e Rodolfo Carvalho.

Ao Carl Sagan e ao Richard Dawkins, cujos livros me divertiram tanto nesses anos. Combater a pseudociência, a superstição, o misticismo e as outras confusões dos nossos tempos é preferir as duras verdades às ilusões mais caras, e isso é o coração da ciência!

E também ao AC/DC, Black Sabbath, Cream, Deep Purple, Iron Maiden, Led Zeppelin, Rush, The Who, e outros (além daqueles que eu citei na minha dissertação) grandes grupos de rock'n roll, cujas músicas tornaram os incontáveis dias que eu passei fazendo contas mais divertidos (ou suportáveis...).

Esse trabalho foi realizado com o financiamento da Capes.

“Go ahead, make my day!”

Inspector Harry Callahan

Resumo

O setor de *gauge* CPT-par do Modelo Padrão Estendido (MPE) acrescido de um potencial do tipo Higgs é estudado. Condições sobre (a decomposição utilizada) o tensor violador da simetria de Lorentz são impostas para que este modelo seja uma teoria quântica de campos consistente e soluções do tipo vórtice sejam investigadas. É feita também uma generalização supersimétrica da decomposição (do tensor violador da simetria de Lorentz) utilizada, promovendo a decomposição usual, de um mero *ansatz*, a um caso particular de uma generalização deduzida por meio de argumentos de supersimetria.

Palavras-Chave: Supersimetria, Teoria Quântica de Campos e Violação da Simetria de Lorentz.

Abstract

The CPT-even gauge sector of the Standard Model Extension (SME) plus a Higgs-like potential is studied. Besides, conditions above (the decomposition used) the Lorentz symmetry violation tensor are imposed in such way that this model can be a consistent quantum field theory and vortexlike solutions can be investigated. A supersymmetric generalization of the decomposition (of Lorentz symmetry violation tensor) used is made too, promoting the usual decomposition, of a simple ansatz, to a special case of a generalization inferred by supersymmetry arguments.

Keywords: Supersymmetry, Quantum Field Theory and Lorentz-Violation.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Da tentativa de se incorporar a Relatividade Geral no cenário estabelecido pelo Modelo Padrão (MP) das partículas elementares, obtendo uma descrição unificada das quatro interações fundamentais da natureza, surge de forma natural a quebra (ou violação) da simetria de Lorentz [1]. Esta violação espontânea da simetria de Lorentz pode ocorrer em uma enorme variedade de modelos propostos. A idéia básica destes modelos é que a simetria de Lorentz é preservada em altíssimas energias, sendo tais modelos baseados em lagrangeanas invariantes de Lorentz e a quebra de simetria ocorre porque o estado fundamental da solução das equações de movimento não exibe invariância de Lorentz. Desse modo, alguns campos tensoriais adquirem valores esperados não nulos no vácuo, selecionando assim uma direção privilegiada no espaço-tempo, quebrando a isotropia.

Do ponto de vista teórico, o mecanismo de violação espontânea da simetria de Lorentz é muito atrativo, pois a simetria é quebrada por uma solução não trivial do estado fundamental das equações de movimento. Interações envolvendo campos vetoriais, similares àquelas do campo de Higgs no Modelo Padrão, requerem um valor do campo vetorial no vácuo, não nulo, no estado fundamental. O vácuo da teoria não permanece "vazio", mas ele possui uma estrutura (campos tensoriais que assumiram valores esperados não nulos) que privilegia uma direção, violando a invariância rotacional e assim a própria simetria de Lorentz.

Potenciais de interação levando à quebra espontânea da simetria de Lorentz podem ocorrer, por exemplo, em teorias de cordas, onde o estado fundamental das soluções das equações de movimento não é o estado com campo nulo, mas estados com valores esperados não nulos de campos tensoriais no vácuo [2–10].

A possibilidade de que violações conjuntas das simetrias de Lorentz e CPT, advindas de alguma teora mais fundamental da natureza, possam ser detectadas em escalas de energias já atingíveis, levou ao desenvolvimento do Modelo Padrão Estendido (MPE), por Colladay e Kostelecký na década de 90 [11, 12]. Motivados por um mecanismo de violação das simetrias de Lorentz e CPT em teoria de cordas eles desenvolveram um modelo que incorpora as possíveis violações dessas simetrias no Modelo Padrão.

Entretanto, não são apenas questionamentos teóricos que podem motivar a proposta da quebra da simetria de Lorentz. Na década passada, surgiram, por meio de observações astronômicas no espectro de estrelas [13], evidências de que a constante de estrutura fina $\alpha = e^2/\hbar c$, uma medida da intensidade da interação eletromagnética entre fótons e elétrons, está lentamente variando [14–16]. Anteriormente, Dirac já havia sugerido esta idéia [17]. Como α relaciona a carga elétrica e, a constante de Planck $\hbar$, e a velocidade de propagação da Luz no vácuo c, qual seria a "constante" que poderia variar? Sem dúvida a alteração de qualquer uma delas provocaria grandes mudanças nas propriedades da matéria.

Outro exemplo vem da observação de Raios Cósmicos além do limite (GZK)- Greisen-Zatsepin-Kuzmin ($E_{GZK} \approx 4 \cdot 10^{19}$eV [18–22]), levanta dúvidas sobre o conhecimento das leis que regem o tempo de vida dessas partículas que compõem estes raios. Seria esperado que estas partículas decaíriam antes de chegar à terra. Uma possível explicação é que estes raios desenvolvam uma velocidade superior a da luz para conseguir atingir o sistema solar[1].

Esta tese é dedicada ao estudo do setor de *gauge* CPT-par do Modelo Padrão Estendido acrescido de um potencial do tipo Higgs. Nossos objetivos principais são:

1. A análise da consistência desse modelo. Mais precisamente quais condições devem ser impostas à decomposição, do tensor violador da simetria de Lorentz, utilizada para que a consistência seja garantida.

2. A investigação da formação de soluções do tipo vórtice nesse cenário.

3. Propor uma generalização supersimétrica da decomposição utilizada.

A tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 será feita uma revisão sobre a violação da simetria de Lorentz [23]; no capítulo 3 será feita uma revisão sobre a simetria CPT, sua relação com a simetria Lorentz, e importantes propriedades dos setores de *gauge* CPT-par e CPT-ímpar [1, 24]; no capítulo 4 será feita a análise do setor de *gauge* CPT-par acrescido de um potencial do tipo Higgs [25]; no capítulo 5 será feita a generalização supersimétrica da decomposição do tensor violador da simetria

[1]Recentemente, um experimento realizado no observatório Pierre Auger em 2008 indicou de fato a existência do limite GZK [26]

de Lorentz; no capítulo 6 teremos as conclusões e propostas futuras. É interessante ressaltar que os capítulos 4 e 5 são contribuições originais desta tese.

Capítulo 2

Violação da Simetria de Lorentz

2.1 Introdução

O princípio de invariância de Galileu estabelece que as leis da natureza são independentes da velocidade do observador (suposta constante, pois aqui tratamos de referenciais inerciais), ou seja, as leis da mecânica clássica são invariantes sob transformações de Galileu. Esse princípio foi estabelecido experimentalmente e, embora possua um extenso domíno de validade, é limitado. A Teoria da Relatividade Restrita, formulada por Einstein, substituiu o princípio de invariância de Galileu pelo de invariância de Lorentz, que estabelece que as leis da física e a velocidade da luz no vácuo são as mesmas em qualquer referencial inercial, de modo que, em baixas energias, isto é, velocidades baixas comparadas à da luz no vácuo, o princípio de invariância de Galileu é uma boa aproximação.

A Teoria da Relatividade Restrita, como mencionado acima, foi fundamentada em dois postulados:

1. As leis da Física são idênticas em qualquer referencial inercial.
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer sistema de referência inercial.

As transformações que relacionam dois referenciais inercias de modo a respeitar a esses dois postulados são chamadas de transformações de Lorentz. A equivalência de descrições entre dois referenciais inerciais que se relacionam por meio das transformações de Lorentz é dita simetria de Lorentz.

A combinação da simetria de Lorentz com Mecânica Quântica leva à Teoria Quântica de Campos, que descreve as partículas elementares como excitações localizadas de um campo que está imerso no espaçø-tempo [27]. O desenvolvimento dessas idéias levou à formulação do Modelo Padrão da física de partículas, que descreve de maneira unificada as interações que regem as partículas elementares (eletromagnética, nuclear forte e fraca), mas não incorpora a interação gravitacional.

2.2 A Violação Espontânea da Simetria de Lorentz

As tranformações de Lorentz podem ser realizadas de dois pontos de vista distintos [28]:

1. Ponto de vista passivo - quando deixamos os pontos pertencentes ao espaço-tempo intactos e relacionamos as bases de dois sistemas de referência inerciais.

2. Ponto de vista ativo - quando deixamos nosso sistema de referência fixo e quem se movimenta são os pontos do espaço-tempo.

A não equivalência entre essas duas descrições é dita violação ou quebra da simetria de Lorentz.

Uma maneira de se implementar a quebra da simetria de Lorentz é por meio de um campo de fundo (um campo ao qual nós não temos acesso às suas fontes). Em função disso surgiram duas novas denominações para as transformações de Lorentz:

- Transformação de Lorentz de observador - para designar a transformação passiva em presença de um campo de fundo.

- Transformação de Lorentz de partícula - para designar a transformação ativa em presença de um campo de fundo.

A quebra de simetria realizada por um campo de fundo é chamada de quebra espontânea de simetria. A idéia da quebra espontânea da simetria de Lorentz surge naturalmente da tentativa de se incorporar a Relatividade Geral ao Modelo Padrão [23], para que assim possamos obter uma descrição unificada das quatro interações fundamentais da natureza. Esta idéia ganhou uma atenção especial devido ao fato de que, em um processo de transição de fase, é natural que apareça um campo de fundo não nulo resultante quando o sistema físico atinge o estado de mínima energia, como, por exemplo, na transição de fase do ferromagnetismo no modelo de Ising. Antes da transição temos uma cadeia linear de spins com movimento térmico e descorrelacionados [29, 30]. À medida que o sistema é resfriado os spins começam a ficar correlacionados e se orientam em uma determinada direção gerando como campo de fundo um campo magnético. Desta forma ocorre uma quebra de isotropia espacial pois este campo de fundo seleciona espontaneamente uma direção preferencial. Um processo de transição de fase semelhante a esse, no contexto do Modelo Padrão, vem explicar como as partículas fundamentais adquirem massa [31].

A idéia da ocorrência da quebra espontânea de simetria no contexto da teoria das Cordas e do Modelo Padrão Estendido foi lançada por Alan Kosteleský e Stuart Samuel [2,32] em 1989, e aos poucos foi ganhando adesão na comunidade como o procedimento mais usual para se introduzir a quebra da simetria de Lorentz.

2.3 O Mecanismo de Quebra Espontânea proposto por Kostelecký e Samuel

O que foi descoberto por Kostelecký e Samuel [32] é um mecanismo dentro da teoria de cordas que permite a violação da simetria de Lorentz na escala de energia de Planck [1]. Este mecanismo trata-se de uma quebra espontânea da simetria de Lorentz realizada através de tensores que adquirem valores esperados no vácuo diferentes de zero. Isto é o que chamamos aqui de "condensação" dos tensores no vácuo. Quebrar a simetria de Lorentz desta forma não significa deixar de usar a álgebra de Lorentz. Quebrar a simetria de forma espontânea significa construir uma ação que é invariante sob esta simetria, enquanto o vácuo da teoria não o é.

Porém, nem todo termo violador da simetria Lorentz pode ser incorporado ao Modelo Padrão sem que antes sejam analisadas a regularização por contagem de potências e a invariância frente a simetria de *gauge* do Modelo Padrão. A quebra da simetria de Lorentz implementada desta forma não afeta a covariância da teoria, isto é, a física é a mesma para qualquer observador inercial. O que se altera são as transformações de Lorentz do ponto de vista de partícula.

Vejamos brevemente como isto ocorre [33]. Seja $\Phi(x)$ um campo onde os índices vetoriais ou espinoriais pertencentes a $SO(1,3)$ foram omitidos. Fazendo uma transformação de Lorentz sobre $\Phi(x)$ e, em seguida, tomando o seu valor esperado no vácuo, teremos[1]

[1]Devido à invariância por translação, $\langle 0|\,\Phi(x)\,|0\rangle = \langle 0|\,\Phi(0)\,|0\rangle$. Esta invariância implicará na conservação do tensor energia-momento.

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\Phi'(0)\,|0\rangle &= \langle 0|\,e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\Phi(0)\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\,(1-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}+\cdots)\Phi(0)\,|0\rangle \end{aligned} \tag{2.1}$$

ou

$$\langle 0|\,\Phi'(0)\,|0\rangle - \langle 0|\,\Phi(0)\,|0\rangle = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\,\langle 0|\,\Phi(0)\,|0\rangle + \mathcal{O}(\omega^2). \tag{2.2}$$

Se $\Phi(0)$ for um campo escalar, então $M_{\mu\nu} = 0$. Portanto mesmo que o campo adquira um valor esperado no vácuo diferente de zero ($\langle 0|\,\Phi(0)\,|0\rangle \neq 0$) a simetria de Lorentz é preservada, pois $\langle 0|\,\Phi'(0)\,|0\rangle = \langle 0|\,\Phi(0)\,|0\rangle$. Aqui está a idéia do mecanismo de Higgs. Desejamos aqui estender este mecanismo para os demais campos. Entretanto, para qualquer outro campo (tensorial ou espinorial) os geradores $M_{\mu\nu}$ são diferentes de zero e, consequentemente, $\langle 0|\,\Phi'(0)\,|0\rangle \neq \langle 0|\,\Phi(0)\,|0\rangle$, isto é, a simetria de Lorentz é quebrada (se $\langle 0|\,\Phi(0)\,|0\rangle \neq 0$). É neste sentido que falamos que a violação da simetria de Lorentz se dá do ponto de vista de partícula[2]; pois partículas e campos ao interagirem com um vácuo que não é invariante frente a rotações, $SO(1,3)$, produzem consequências físicas diferentes para cada direção escolhida. Por outro lado, escolhida uma dada orientação todo observador inercial irá se deparar com a mesma física (a covariância é preservada).

2.4 Considerações finais

Neste capítulo vimos os conceitos de simetria de Lorentz e de quebra espontânea dessa simetria. Vimos também que se qualquer outro campo, que não seja o escalar, adquirir no vácuo um valor esperado não nulo, necessariamente a simetria de Lorentz será violada, que é a idéia central do mecanismo de quebra proposto por Kostelecký e Samuel. Este mecanismo também promove a violação da simetria-CPT. Apesar de CPT ser uma simetria discreta, e, aparentemente, não ter relação alguma com a simetria de Lorentz; se a teoria for interagente, segundo Greenberg, violar a simetria CPT implica necessariamente violar a simetria de Lorentz [34]. Portanto, investigações sobre violação de CPT pode ser um caminho para se buscar vestígios da violação da simetria de Lorentz.

[2]Como mostramos, esta quebra pode ser vista como uma extensão do mecanismo de Higgs.

Capítulo 3

Setores de Gauge CPT-ímpar e CPT-par do Modelo Padrão Estendido

3.1 Introdução

Há três tipos de transformações discretas que são de fundamental importância para teorias de campo [1]: a inversão espacial ou paridade P, a conjugação de carga C e a reversão temporal T. Toda teoria de campos livre, isto é, não interagente, é invariante sob estas tranformações, porém interações podem quebrar estas simetrias, e hoje é sabido que todas as três simetrias discretas C, P e T são quebradas na natureza [35–37], entretanto a combinação destas três simetrias discretas leva a um dos resultados mais gerais e fundamentais da teoria quântica de campos. Este resultado é o teorema CPT que estabelece que qualquer teoria quântica de campos que satisfaça a algumas condições gerais tem que ser invariante sob esta simetria [38].

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma teoria de campos efetiva obtida do Modelo Padrão (o modelo que descreve de maneira unificada as interações que regem as partículas elementares, a saber, as interações eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte, mas não incorpora a gravitacional) pela adição de termos que incorporam as violações da simetria de Lorentz e CPT [11, 12]. Os termos acrescentados são construídos pela contração de operadores de campos do Modelo Padrão com constantes de acoplamento tensoriais que permeiam o espaço-tempo. Tais coeficientes tensoriais (ou constantes de acoplamento) têm suas origens em teorias mais fundamentais, onde ocorre a quebra espontânea da simetria de Lorentz, sendo as constantes de acoplamento utilizadas para se construir o MPE, o valor esperado no vácuo de tais campos tensoriais. Existe uma infinidade de termos que podem ser construídos dessa forma, inclusive termos não renormalizáveis, de dimensão arbitrariamente alta [39–43], porém, para investigar em escalas de baixas energias, como a escala do Modelo Padrão, é vantajoso trabalhar com um subconjunto, incluindo um número finito de termos. Um subconjunto de muito interesse, e denominado Modelo Padrão Mínimo Estendido (MPME), é obtido do anterior por restringir-se àqueles termos renormalizáveis por contagem de potências e que preservam a invariância de calibre, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, do Modelo Padrão usual. Aqui vamos trabalhar com o MPME e a partir desse ponto nos referiremos a ele simplesmente como Modelo Padrão Estendido (MPE).

Neste capítulo vamos discutir as transformações C, P e T, a conexão do teorema CPT com a simetria de Lorentz, e analisaremos algumas propriedades importantes [24] dos setores de *gauge* CPT-par e CPT-ímpar do Modelo Padrão Estendido.

3.2 Simetrias Discretas

3.2.1 Operação de Paridade

A operação de paridade é caracterizada por promover a inversão do sistema de coordenadas de tal forma que o vetor posição é revertido[1]:

$$\vec{r} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\vec{r}, \tag{3.1}$$

valendo $\partial_i \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\partial_i$ sobre o operador gradiente ($\nabla \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\nabla$), enquanto que $\partial_t \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad \partial_t$. Logo, vale:

$$\partial_\mu \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad \partial^\mu. \tag{3.2}$$

Vetores genuínos (velocidade, momento, aceleração, força, campo elétrico, vetor potencial) são revertidos perante o operador paridade $\mathcal{P}$, ou seja,

$$\vec{v} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\vec{v}; \quad \vec{p} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\vec{p}; \tag{3.3}$$

$$\vec{a} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\vec{a}; \quad \vec{f} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\vec{f}; \tag{3.4}$$

$$\vec{A} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\vec{A}; \quad \vec{E} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad -\vec{E}; \tag{3.5}$$

enquanto que pseudo-vetores (campo magnético, spin, momento angular) permanecem invariantes:

$$\vec{B} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad \vec{B}; \quad \vec{S} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad \vec{S}; \quad \vec{J} \quad \overset{\mathcal{P}}{\to} \quad \vec{J}. \tag{3.6}$$

[1]Nesta tese usamos c $= \hbar = 1$ e a assinatura $(+,-,-,-)$.

Quantidades escalares permanecem invariantes, $A_0 \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} A_0$, enquanto pseudo-escalares sofrem reversão de sinal. O quadripotencial e a quadricorrente alteram-se como

$$A_\mu \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} A^\mu; \quad J_\mu \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} J^\mu; \quad \partial_\mu \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \partial^\mu. \tag{3.7}$$

3.2.2 Operação de Inversão Temporal

A operação de reversão temporal é caracterizada por $t \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -t$, atuando da seguinte forma sobre os vetores:

$$\vec{r} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \vec{r}; \quad \vec{v} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\vec{v}; \quad \vec{a} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \vec{a}; \quad \vec{f} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \vec{f}; \tag{3.8}$$

onde usamos $\partial_t \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\partial_t, \quad \partial_i \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \partial_i$. Para manter a força de Lorentz invariante, $\vec{f} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$, o operador $\mathcal{T}$ atua da seguinte forma sobre o campo eletromagnético:

$$\vec{B} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\vec{B}; \quad \vec{E} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \vec{E}; \tag{3.9}$$

$$A_0 \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} A_0; \quad \vec{A} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\vec{A}; \tag{3.10}$$

$$A_\mu \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} A^\mu; \quad J_\mu \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} J^\mu; \quad \partial_\mu \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\partial^\mu. \tag{3.11}$$

3.2.3 Operação de Conjugação de Carga

A operação de conjugação de carga é caracterizada por reverter a carga do sistema $q \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -q$, ou levar o estado de partícula ao de anti-partícula em uma teoria quântica-relativística. Por reverter a quadricorrente, $J_\mu \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -J_\mu$, atua da seguinte forma sobre o quadripotencial:

$$A_0 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -A_0; \quad \vec{A} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -\vec{A}. \tag{3.12}$$

Ademais, não atua sobre o espaço-tempo, de modo que $\partial_\mu \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \partial_\mu$. Com isto resulta:

$$\vec{E} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -\vec{E}; \quad \vec{B} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -\vec{B}; \tag{3.13}$$

$$\vec{p} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \vec{p}; \quad \vec{a} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \vec{a}; \quad \vec{f} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \vec{f}. \tag{3.14}$$

3.2.4 Operador CPT, o Teorema CPT e sua Conexão com a Simetria de Lorentz

As três simetrias discretas discutidas são simetrias exatas para teorias de campos livres, porém elas podem ser violadas na presença de interações. Por exemplo, a paridade é violada nas interações fracas [35,36] e a combinação de paridade e conjugação de carga CP, é violada em decaimento de mésons K [36, 37]. Contudo pode-se esperar que as simetrias discretas sejam tão fundamentais para teorias de campo quanto a invariância de Lorentz dentre outras simetrias, e portanto elas devem valer em toda teoria física. Há uma simetria que é profundamente entrelaçada no formalismo da teoria de campos e satisfaz a este critério, ela consiste em uma transformação que combina as três simetrias discretas já discutidas anteriormente. Esta simetria é a CPT, ou seja, o produto das simetrias de conjugação de carga, paridade e reversão temporal.

O operador CPT ($\mathcal{CPT}$) é formado pelo produto dos operadores $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$. Atua da seguinte forma sobre o campo eletromagnético e sobre as derivadas espaço-temporais:

$$A_0 \quad \stackrel{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \quad -A_0; \quad \vec{A} \quad \stackrel{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \quad -\vec{A}; \tag{3.15}$$

$$A_\mu \quad \stackrel{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \quad -A_\mu; \quad \partial_\mu \quad \stackrel{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \quad -\partial_\mu; \tag{3.16}$$

$$\vec{E} \quad \stackrel{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \quad \vec{E}; \quad \vec{B} \quad \stackrel{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \quad \vec{B}. \tag{3.17}$$

O teorema CPT estabelece que qualquer teoria quântica de campos é invariante sob a simetria discreta CPT, se as seguintes condições forem satisfeitas:

- A teoria deve ser local.
- A teoria deve possuir um lagrangeano hermiteano.
- O lagrangeano da teoria deve ser invariante sob transformações de Lorentz próprias.
- A teoria deve respeitar a relação spin-estatística, isto é, campos com spin inteiro devem ser quantizados com comutadores e campos com spin semi-inteiro devem ser quantizados com anti-comutadores

Desse modo o teorema CPT estabelece que embora tais teorias quânticas possam violar as simetrias C, P e T separadamente, qualquer teoria quântica de campos satisfazendo às condições acima deve ser invariante sob CPT [38,44,45]. Uma demonstração rigorosa desse teorema é dada em [38].

Dessa discussão vemos que a invariância de Lorentz da teoria é uma suposição fundamental para a validade do teorema CPT. As lagrangeanas do MPE satisfazem a todos os critérios para a validade do teorema, exceto um, o de invariância sob transformações de Lorentz próprias.

A covariância de Lorentz de uma teoria teoria quântica de campos pode ser especificada em termos de covariância das funções de Wightman da teoria. As funções de Wightman são matrizes de elemento do produto de campos no vácuo [38] e tais funções compartilham das mesmas simetrias que a teoria. Greenberg mostrou [34] que a violação da simetria CPT de qualquer função de Wightman implica na violação da simetria de Lorentz da teoria. Isto ocorre porque se uma função de Wightman da teoria viola a simetria CPT então ela não obedece a uma condição chamada de comutatividade local fraca, o que acarreta em uma violação da simetria de Lorentz da teoria (mais detalhes sobre estes pontos podem ser vistos em [34, 38]). Este argumento de Greenberg não se aplica a teorias livres, assim nós podemos enunciar o teorema de Greenberg da seguinte maneira: *Se a invariância sob a simetria discreta CPT é violada em uma teoria quântica de campos interagente, então aquela teoria também viola a simetria de Lorentz.*

Estes resultados são relevantes para teorias de campos efetivas, onde a teoria quadridimensional surge de uma em altas dimensões, como o MPE discutido aqui. Se a teoria efetiva em quatro dimensões viola a simetria CPT, ela também viola a simetria de Lorentz, sendo a recíproca falsa.

3.3 O Setor de Gauge do Modelo Padrão Estendido

A lagrangeana do setor de *gauge* do MPE é [11, 12]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^{\mu}A^{\nu}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} - A_{\mu}J^{\mu}, \tag{3.18}$$

sendo $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$ o tensor do campo eletromagnético construído a partir do 4-potencial $A^{\mu} = (A^0, \vec{A})$.

As violações da simetria de Lorentz aqui consideradas são as mais gerais que podem advir do setor de radiação do MPE. Elas são parametrizadas pelos campos tensoriais de fundo V^{μ} e $(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}$. Classicamente, estes termos podem assumir qualquer valor, porém como esperado da experiência com a eletrodinâmica de Maxwell, tais termos devem ser muito pequenos, ou até mesmo, se não nulos, incomensuráveis, pois as violações de simetrias parametrizadas por eles nunca foram detectadas na natureza.

Estes tensores são ditos campos de fundo pois permeiam todo o espaço-tempo e não temos acesso a suas fontes, ou seja, são campos tensoriais fixos que selecionam uma direção privilegiada no espaço-tempo, quebando a isotropia.

Termos que violam a simetria de Lorentz se dividem em dois grupos. Um sendo parametrizado por termos que também violam a simetria CPT, e outro que preserva esta simetria. O setor de *gauge* do MPE contém um termo que viola a simetria CPT, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^{\mu}A^{\nu}F^{\alpha\beta}$, chamado de CPT-ímpar, e outro termo que não viola esta simetria, $(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda}$, chamado de CPT-par. Em função desses termos o setor de *gauge* do MPE pode ser divido em CPT-ímpar e CPT-par, vamos agora estudar cada um deles individualmente.

3.4 A Lagrangeana do Setor de Gauge CPT-ímpar do Modelo Padrão Estendido

A lagrangeana do setor de *gauge* CPT-ímpar do MPE [24] é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^{\mu}A^{\nu}F^{\alpha\beta} - A^{\mu}J_{\mu}, \tag{3.19}$$

onde $V^{\mu} = (V_0, V^i)$ é um campo de fundo fixo responsável pela violação da simetria de Lorentz e que não se transforma como um quadrivetor. Esta lagrangeana foi primeiramente analisada por Carrol-Field-Jackiw [46]. Na ausência de fontes ela pode ser reescrita em uma forma explícita, lembrando que

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad F_{0i} = E^{i}, \quad F_{lm} = \epsilon_{lmk}B_{k}, \tag{3.20}$$

como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{1}{2}[V^0(\vec{A}\cdot\vec{B}) - A^0(\vec{V}\cdot\vec{B}) - \vec{V}\cdot(\vec{A}\times\vec{E})], \tag{3.21}$$

esta lagrangeana é conhecida como a lagrangena da eletrodinâmica de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw. Sob a atuação do operador CPT, (3.21) transforma-se como

$$\mathcal{L} \quad \stackrel{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{1}{2}[-V^0(\vec{A}\cdot\vec{B}) + A^0(\vec{V}\cdot\vec{B}) + \vec{V}\cdot(\vec{A}\times\vec{E})], \tag{3.22}$$

entretanto, os campos tensoriais de fundo com um número ímpar de índices de Lorentz, como V^{μ}, são quantidades que não sentem as transformações de CPT [1], o que acarreta a violação da simetria CPT, e é nesse sentido que o setor de *gauge* é dito CPT-ímpar.

3.4.1 Equações de Movimento

As equações de movimento da eletrodinâmica representada pela lagrangeana (3.19) podem ser obtidas por meio das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)} = 0, \tag{3.23}$$

nos dando

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\lambda\alpha\beta} V_\lambda F_{\alpha\beta} = J^\mu, \tag{3.24}$$

e por meio da identidade de Bianchi,

$$\partial_\nu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\nu} + \partial_\beta F_{\nu\alpha} = 0. \tag{3.25}$$

De (3.25) obtemos as equações de Maxwell homogêneas:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0. \tag{3.27}$$

Enquanto que (3.24) nos dá as equações de Maxwell não-homogêneas (modificadas pelo campo de fundo):

$$\nabla \cdot \vec{E} - \vec{V} \cdot \vec{B} = \rho; \tag{3.28}$$

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} + \vec{V} \times \vec{E} = \vec{J}. \tag{3.29}$$

3.4.2 Equações de Onda e Relações de Dispersão

Partindo das equações de Maxwell anteriormente obtidas, mediante manipulações algébricas, obtemos:

$$\Box \vec{B} + V_0(\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{E}) - \nabla \times \vec{j}; \tag{3.30}$$

$$\Box \vec{E} + \frac{\partial(\nabla \times \vec{E})}{\partial t} = \nabla(\vec{V} \cdot \vec{B}) + V_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla\rho + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \tag{3.31}$$

onde $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$.

Partindo de (3.24), usando o *gauge* de Lorentz $\partial^\sigma A_\sigma = 0$, obtemos

$$\Box A_\lambda + \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} V^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \tag{3.32}$$

daí, para o potencial escalar temos que

$$\Box A_0 + \vec{V} \cdot \vec{B} = \rho, \tag{3.33}$$

e para o potencial vetorial temos que

$$\Box \vec{A} - V^0 \vec{B} + (\vec{V} \times \vec{E}) = \vec{J}. \tag{3.34}$$

A equação (3.32) pode ser escrita como

$$M_{\lambda\beta} A^{\beta} = J_{\lambda}, \tag{3.35}$$

onde

$$M_{\lambda\beta} = \Box \eta_{\lambda\beta} + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} V^{\mu} \partial^{\alpha}. \tag{3.36}$$

Trabalhando no espaço de Fourier (dos momentos), podemos então escrever

$$A^{\beta} = \widetilde{A}^{\beta} exp(-ip \cdot x) = \widetilde{A}^{\beta} exp(-ip_0 t + i\vec{p} \cdot \vec{x}) \tag{3.37}$$

$$\partial_{\mu} \to -ip_{\mu}, \quad \partial_{\mu}\partial^{\mu} \to -p^2, \tag{3.38}$$

logo

$$M_{\lambda\beta}(p) = -p^2 \eta_{\lambda\beta} - i\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} V^{\mu} p^{\alpha}. \tag{3.39}$$

Por meio de extensas manipulações algébricas obtemos o determinante da matriz M, isto é

$$det(M) = p^4[-p^4 - p^2V^2 + (\vec{V} \cdot \vec{p})^2]. \tag{3.40}$$

A relação de dispersão é obtida fazendo $det(M) = 0$, ou seja

$$p^4 + p^2V^2 - (\vec{V} \cdot \vec{p})^2 = 0. \tag{3.41}$$

3.4.3 Análise da Relação de Dispersão e da Birrefringência

A birrefringência é usualmente a decomposição da luz propagando-se em um meio anisotrópico em duas diferentes componentes (raios ordinário e extraordinário). A birrefringência é também descrita como a propagação de diferentes modos de polarização com diferentes velocidades. Tal diferença de velocidade causa uma rotação no plano de polarização. A birrefringência possui similaridade com o efeito Faraday, em que a rotação do plano de polarização é causada por um campo magnético ao longo da direção de propagação. O efeito Faraday é uma ferramenta bastante utilizada por astrofísicos em busca de campos intergaláticos.

No caso das eletrodinâmicas com violação da simetria de Lorentz, é comum ter birrefringência no vácuo determinada pelo campo de fundo violador da simetria de Lorentz, tal como pode ser verificado na teoria de Carrol-Field-Jackiw. Como veremos, devido aos dados de polarização da luz advinda de galáxias distantes [19, 46–49], os teste de birrefringência acabam sendo os que levam aos limites mais restritivos na magnitude dos parâmetros de violação. A seguir ilustraremos como isso pode ser realizado dentro do contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw.

Como acabamos de ver, a relação de dispersão geral da eletrodinâmica de Carrol-Field-Jackiw é

$$p^4 + p^2V^2 - (\vec{V}\cdot\vec{p})^2 = 0, \tag{3.42}$$

onde $p^\mu = (\omega, \vec{p})$ é o quadrivetor de onda. Essa equação pode ser inicialmente resolvida para p^2, dando

$$p^2 = \frac{-V^2 \pm \sqrt{V^4 + 4(V\cdot p)^2}}{2}, \tag{3.43}$$

sendo $V\cdot p = V^\mu p_\mu$, que pode ser aproximada, $V^2 << 1$, por

$$p^2 = \frac{-V^2}{2} \pm (V\cdot p), \tag{3.44}$$

ou seja

$$(\omega^2 - \vec{p}^2) = \frac{-V^2}{2} \pm (V_0\omega - \vec{V}\cdot\vec{p}), \tag{3.45}$$

fornecendo

$$\omega^2 \mp V_0\omega - \vec{p}^2 + \frac{V^2}{2} \pm \vec{V}\cdot\vec{p} = 0. \tag{3.46}$$

Buscando um resultado em primeira ordem no campo de fundo violador ($V << 1$), fazemos

$$\omega^2 \mp V_0\omega - \vec{p}^2 \pm \vec{V}\cdot\vec{p} = 0, \tag{3.47}$$

e resolvemos para ω, obtendo

$$\omega = \pm\frac{V_0}{2} \pm |\vec{p}|\sqrt{1 \mp \frac{\vec{V}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|^2}}, \tag{3.48}$$

isto é

$$\omega \approx \pm\left[|\vec{p}| \pm \frac{1}{2}(\pm V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta)\right]. \tag{3.49}$$

Tomando somente o sinal superior em (3.47), ou seja tomando a equação $\omega^2 - V_0\omega -$

$\vec{p}^2 + \vec{V} \cdot \vec{p} = 0$, e levando em conta que ω deve ser positivo, ficamos com

$$\omega \approx \left[|\vec{p}| \pm \frac{1}{2}(V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta) \right], \tag{3.50}$$

e

$$|\vec{p}| \approx \omega \pm \frac{1}{2}(V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta). \tag{3.51}$$

Como já foi dito, ocorre birrefringência quando modos de polarização diferentes propagam-se com velocidades de fase diferentes, determinando uma rotação no plano de polarização à medida que a onda se propaga. Para verificar se a teoria em questão é ou não birrefringente, é necessário tomar os dois modos de polarização (*right* e *left*) propagando-se no mesmo sentido, de modo a constituir uma única frente de onda. Por convenção o modo *right* propaga-se para a direita (sentido positivo do eixo-x), enquanto que o modo *left* propaga-se para a esquerda (sentido negativo do eixo-x). A mudança na fase φ da onda circularmente polarizada, resultante da junção dos dois modos, é proporcional à distância L percorrida pela luz, ou seja,

$$\varphi = |\vec{p}|\, L. \tag{3.52}$$

Tomando-se a diferença entre os dois modos (*right* e *left*), representados respectivamente por $|\vec{p_+}|$ e $|\vec{p_-}|$, temos

$$\Delta\varphi = (|\vec{p_+}| - |\vec{p_-}|)L = (\Delta\,|\vec{p}|)L. \tag{3.53}$$

O ângulo de rotação do plano de polarização é metade da diferença de fase, ou seja

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = (\Delta\,|\vec{p}|)\frac{L}{2}. \tag{3.54}$$

Tomemos então o modo *right*, no seu sentido convencional, da eletrodinâmica de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw, descrito por

$$\omega_+(+\vec{p}) \approx \left[|\vec{p}| \pm \frac{1}{2}(V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta) \right], \tag{3.55}$$

e também o modo *left* propagando-se também para a direita (sentido oposto ao seu convencional), ou seja

$$\omega_-(-\vec{p}) \approx \left[|\vec{p}| \pm \frac{1}{2}(V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta) \right]. \tag{3.56}$$

Como essas equações envolvem $|\vec{p}|$, em vez de $\vec{p}$, não há mudança de sinal relativo quando a informação da reversão $\vec{p} \to -\vec{p}$ é implementada. Como consequência, temos velocidades de fase $(u_{ph} = p_0/|\vec{p}|)$ correspondentes diferentes para estes dois modos propagantes no mesmo sentido, isto é,

$$u_{ph+} \approx 1 + \frac{1}{2\,|\vec{p}|}(V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta), \tag{3.57}$$

e

$$u_{ph-} \approx 1 - \frac{1}{2\,|\vec{p}|}(V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta). \tag{3.58}$$

Neste caso verificamos que

$$(|\vec{p_+}| - |\vec{p_-}|) \approx 2(V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta), \tag{3.59}$$

logo

$$\alpha \approx L(V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta). \tag{3.60}$$

3.5 A Lagrangeana do Setor de Gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido

A lagrangeana do setor de *gauge* CPT-par do MPE [24] é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} - A^\mu J_\mu, \tag{3.61}$$

onde $(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}$ é um tensor de acoplamento adimensional e renormalizável responsável pela violação da simetria de Lorentz. Ele possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann, isto é

$$(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} = -(K_F)_{\nu\mu\kappa\lambda}, \quad (K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} = -(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}, \quad (K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} = (K_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}; \tag{3.62}$$

$$(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} + (K_F)_{\mu\kappa\lambda\nu} + (K_F)_{\mu\lambda\nu\kappa} = 0, \tag{3.63}$$

e duplo traço nulo

$$(K_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0. \tag{3.64}$$

Portanto o tensor $(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}$ possui 19 componentes independentes, das quais 9 não fornecem birrefringência.

Na ausência de fontes a lagrangeana pode ser reescrita em uma forma explícita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{4}\left[4(K_F)_{0i0j}E^iE^j + 4(K_F)_{oilm}\epsilon_{lmp}E^iB^p + (K_F)_{ablm}\epsilon_{abq}\epsilon_{lmp}B_qB_p\right]. \tag{3.65}$$

Com o mesmo argumento utilizado no caso da lagrangeana do setor de *gauge* CPT-ímpar, concluímos que $(K_F)_{0i0j}, (K_F)_{ablm}$ e $(K_F)_{oilm}$ são CPT-par.

Uma Primeira Parametrização Matricial

Uma parametrização útil para esta teoria é aquela [19, 20] em que as 19 componentes independentes do tensor (K_F) estão contidas em 4 matrizes 3×3: $(\kappa_{DE}), (\kappa_{HB}), (\kappa_{DB})$ e (κ_{HE}).

As componentes dessas matrizes são dadas por

$$(\kappa_{DE})^{jk} = -2(K_F)^{0j0k}, \quad (\kappa_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon^{jpq}\epsilon^{klm}(K_F)^{pqlm}, \tag{3.66}$$

$$(\kappa_{DB})^{jk} = -(\kappa_{HE})^{kj} = \epsilon^{kpq}(K_F)^{0jpq}. \tag{3.67}$$

De acordo com essa parametrização notemos que:

$(\kappa_{DE})^{jk} = (\kappa_{DE})^{kj} \quad \rightarrow \quad$ matriz simétrica $\quad \rightarrow \quad$ 6 componentes,

$(\kappa_{HB})^{jk} = (\kappa_{HB})^{kj} \quad \rightarrow \quad$ matriz simétrica $\quad \rightarrow \quad$ 6 componentes,

$(\kappa_{DB})^{jk} \quad \rightarrow \quad$ sem simetria $\quad \rightarrow \quad$ 9 componentes.

A propriedade (3.64) implica em

$$(\kappa_{HB})^j{}_j = -(\kappa_{DE})^j{}_j, \tag{3.68}$$

enquanto que a propriedade (3.63) implica em

$$(\kappa_{DB})^j{}_j = -(\kappa_{HE})^j{}_j = 0. \tag{3.69}$$

Portanto temos que:

(κ_{DE}) e (κ_{HE}) (6 componentes independentes cada, devido ao fato de cada uma ser simétrica, $6+6=12$, -1 componente, devido ao traço da soma $\kappa_{DE}+\kappa_{HB}$ ser nulo, $12-1=11$) $\quad\rightarrow\quad$ 11 componentes independentes,

$(\kappa_{DB}) = -(\kappa_{HE})^T$ (9 componentes independentes, devido ao fato de não ser simétrica, -1 componente, devido ao traço nulo, $9-1=8$) $\quad\rightarrow\quad$ 8 componentes independentes.

Totalizando 19 componentes independentes, logo esta parametrização é consistente.

Usando esta parametrização, (3.65) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\delta_i^j + (\kappa_{DE})_{ij}\right] E^i E^j - \frac{1}{2}\left[\delta_q^p + (\kappa_{HB})_{pq}\right] B^p B^q - (\kappa_{DB})_{ip} E^i B^p. \tag{3.70}$$

Da definição dessa parametrização vemos que $(\kappa_{DE})_{ij}$ e $(\kappa_{HB})_{pq}$ são P-par, enquanto que $(\kappa_{DB})_{ip}$ e $(\kappa_{HE})_{ip}$ são P-ímpar. Com isso podemos afirmar que nessa parametrização, com relação à paridade, o setor par possui 11 componentes independentes, enquanto que o setor ímpar possui 8 componentes independentes.

3.5.1 Uma Segunda Parametrização Matricial

Há uma outra parametrização em que ocorre a separação explícita das componentes de paridade par e paridade ímpar do setor CPT-par em termos das matrizes $(\tilde{\kappa}_{e+}), (\tilde{\kappa}_{e-}), (\tilde{\kappa}_{o+})$ e $(\tilde{\kappa}_{o-})$. Elas são tais que:

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} - \kappa_{HB})^{jk} - \delta^{jk}\kappa_{tr}, \tag{3.71}$$

$$(\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})^{jk}, \tag{3.72}$$

sendo

$$\kappa_{tr} = \frac{1}{3}tr(\kappa_{DE}) = \frac{1}{3}(\kappa_{DE})^{ii}, \tag{3.73}$$

onde $(\tilde{\kappa}_e)$ e $(\tilde{\kappa}_o)$ denotam matrizes de paridade par e ímpar respectivamente. Sabendo que (κ_{DE}) e (κ_{HB}) são matrizes simétricas, temos que:

$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = (\tilde{\kappa}_{e+})^{kj}$ $\rightarrow$ matriz simétrica $\rightarrow$ 6 componentes,

$(\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = (\tilde{\kappa}_{e-})^{kj}$ $\rightarrow$ matriz simétrica $\rightarrow$ 6 componentes.

Notemos também que as matrizes $(\tilde{\kappa}_{e+})$ e $(\tilde{\kappa}_{e-})$ têm traço nulo.

Lembrando que $(\kappa_{DB})^{jk} = (\kappa_{HE})^{kj}$, obtemos que:

$(\tilde{\kappa}_{0+})^{kj} = -(\tilde{\kappa}_{0+})^{jk}$ $\rightarrow$ matriz anti-simétrica $\rightarrow$ 3 componentes,

$(\tilde{\kappa}_{0-})^{kj} = (\tilde{\kappa}_{0-})^{kj}$ $\rightarrow$ matriz simétrica e de traço nulo $\rightarrow$ 5 componentes.

Portanto temos que:

$(\tilde{\kappa}_{e+})$ e $(\tilde{\kappa}_{e-})$ $\rightarrow$ matrizes simétricas de paridade par e traço nulo $\rightarrow$ $(6+6-1) =$ 11 componentes independentes,

$(\tilde{\kappa}_{0+})$ e $(\tilde{\kappa}_{0-})$ $\rightarrow$ matriz anti-simétrica de paridade ímpar e matriz simétrica de paridade ímpar e traço nulo $\rightarrow$ $(3+5) = 8$ componentes independentes.

Totalizando 19 componentes independentes, logo esta parametrização também é consistente.

Em termos desta parametrização podemos escrever

$$(\kappa_{DE})^{jk} = (\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} + (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} + \delta^{jk}\kappa_{tr}, \tag{3.74}$$

$$(\kappa_{HB})^{jk} = (\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} - \delta^{jk}\kappa_{tr}, \tag{3.75}$$

$$(\kappa_{DB})^{jk} = (\tilde{\kappa}_{0+})^{jk} + (\tilde{\kappa}_{0-})^{jk}, \tag{3.76}$$

$$(\kappa_{HE})^{jk} = (\tilde{\kappa}_{0+})^{jk} - (\tilde{\kappa}_{0-})^{jk}. \tag{3.77}$$

Utilizando esta parametrização, (3.65) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(1+\kappa_{tr})\vec{E}^2 - \frac{1}{2}(1-\kappa_{tr})\vec{B}^2 + \frac{1}{2}[((\tilde{\kappa}_{e+})_{ij} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ij})E^iE^j \\ &+ ((\tilde{\kappa}_{0+})_{ip} + (\tilde{\kappa}_{0-})_{ip})E^iB^p - ((\tilde{\kappa}_{e+})_{qp} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{qp})B^qB^p].\end{aligned} \tag{3.78}$$

3.5.2 Equações de Movimento, Equações de Onda e Birrefringência

Com procedimentos análogos aos utilizados no caso CPT-ímpar, obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\partial_\nu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\nu} + \partial_\beta F_{\nu\alpha} = 0; \tag{3.79}$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - (K_F)^{\mu\nu\rho\varphi}\partial_\nu F_{\rho\varphi} = J^\mu, \tag{3.80}$$

que fornecem, respectivamente, as equações de Maxwell homogêneas:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0, \tag{3.82}$$

e as não homogêneas:

$$\partial_i E^i + (\kappa_{DE})_{lj}\partial_l E^j + (\kappa_{DB})_{lk}\partial_l B_k = \rho; \tag{3.83}$$

$$\partial_t E_i - \epsilon_{ijk}\partial_j B_k + (\kappa_{DE})_{ij}\partial_t E_j - (\kappa_{DB})_{ik}\partial_t B_k -$$
$$(\kappa_{HB})_{jk}\epsilon_{jip}\partial_p B_k - \epsilon_{ipk}(\kappa_{DB})_{mk}\partial_p E_m = -J_i. \quad (3.84)$$

Por meio de manipulações algébricas obtemos a equação de onda modificada para o campo elétrico (na ausência de fontes):

$$[\delta_{jk} + (\kappa_{DE})_{kj}]\partial_t{}^2 E_j - [1 - (\kappa_{DE})_{aa}]\nabla^2 E_k + \partial_k(\partial_c E_c) + (\kappa_{DB})_{ka}\epsilon_{abc}\partial_t\partial_b E_c$$
$$-(\kappa_{DB})_{ab}\epsilon_{bkj}\partial_j\partial_t E_a + (\kappa_{HB})_{aa}\partial_k\partial_b E_b + (\kappa_{HB})_{ab}\partial_a\partial_b E_k - (\kappa_{HB})_{ka}\partial_a\partial_b E_b$$
$$+(\kappa_{HB})_{ka}\nabla^2 E_a - (\kappa_{HB})_{ab}\partial_a\partial_k E_b = 0. \quad (3.85)$$

Dada a complexidade dessa equação, é conveniente analisá-la em diferentes setores.

A. Equação de Onda para Parâmetros de Paridade Par

Focando nossa atenção no setor de paridade par, ou seja, tomando o setor de paridade ímpar como sendo nulo (fazendo $\kappa_{DB} = 0$), a equação de onda (3.85) fica:

$$[\delta_{jk} + (\kappa_{DE})_{kj}]\partial_t{}^2 E_j - [1 - (\kappa_{DE})_{aa}]\nabla^2 E_k + \partial_k(\partial_c E_c)$$
$$+(\kappa_{HB})_{aa}\partial_k\partial_b E_b + (\kappa_{HB})_{ab}\partial_a\partial_b E_k - (\kappa_{HB})_{ka}\partial_a\partial_b E_b$$
$$+(\kappa_{HB})_{ka}\nabla^2 E_a - (\kappa_{HB})_{ab}\partial_a\partial_k E_b = 0. \quad (3.86)$$

Para simplificarmos nossa análise, deveríamos trabalhar com somente uma matriz violadora da simetria de Lorentz (LV). Com este intuito façamos $\kappa_{DE} = -\kappa_{HB}$, implicando em

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = 0, \quad (3.87)$$

$$(\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = (\kappa_{DE})^{jk} - n\delta^{jk} = 0, \quad (3.88)$$

sendo

$$n = \frac{1}{3}tr(\kappa_{DE}); \quad (3.89)$$

ou seja

$$(\kappa_{DE})_{ab} = (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} + n\delta_{ab} = 0, \quad (\kappa_{HB})_{ab} = -(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} - n\delta_{ab} = 0. \quad (3.90)$$

Com isso (3.86) torna-se:

$$[(1+n)\delta_{jk}+(\tilde{\kappa}_{e-})_{kj}]\partial_t{}^2E_j-[(1-n)\delta_{ka}+(\tilde{\kappa}_{e-})_{ka}]\nabla^2E_k+$$
$$\partial_k(\partial_cE_c)-n\partial_k\partial_bE_b-(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab}\partial_a\partial_bE_k+$$
$$(\tilde{\kappa}_{e-})_{ka}\partial_a\partial_bE_b+(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab}\partial_a\partial_kE_b=0. \quad (3.91)$$

E a lei de Gauss (3.83) nesse caso ($\kappa_{DB}=0$ e $\rho=0$) fica:

$$(1+n)\partial_aE_a+(\tilde{\kappa}_{e-})_{ba}\partial_bE_a=0. \quad (3.92)$$

Vamos refinar ainda mais nossa análise estudando dois casos específicos:

1. **Caso isotrópico**: $(\tilde{\kappa}_{e-})=0$ e $n\neq 0$

   Neste caso muito particular, há somente um único parâmetro violador da simetria de Lorentz isotrópico, n. A equação de onda (3.91) é então reduzida a:

$$(1+n)\partial_t{}^2E_k-(1-n)\nabla^2E_k+\partial_k(\partial_cE_c)-n\partial_k\partial_bE_b=0, \quad (3.93)$$

   e a lei de Gauss (3.92) fica simplesmente:

$$(1+n)\partial_aE_a=0. \quad (3.94)$$

   Substituindo (3.94) em (3.93) obtemos:

$$[(1+n)\partial_t{}^2-(1-n)\nabla^2]E_k=0. \quad (3.95)$$

   No espaço de Fourier a expansão do campo elétrico é dada por:

$$\vec{E}=\tilde{\vec{E}}exp(-ip\cdot r), \quad (3.96)$$

   desse modo (3.95) fica:

$$[(1+n)p_0{}^2-(1-n)\vec{p}^2]\tilde{E}_k=0, \quad (3.97)$$

   que nos dá a relação de dispersão

$$[(1+n)p_0{}^2-(1-n)\vec{p}^2]=0, \quad (3.98)$$

ou seja,

$$p_0 = \pm\sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)}}\,|\vec{p}|\,. \tag{3.99}$$

Esta relação de dispersão nos dá velocidades de fase e de grupo iguais,

$$u_{ph} = \frac{p_0}{|\vec{p}|} = \sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)}}, \tag{3.100}$$

$$u_g = \frac{dp_0}{d\,|\vec{p}|} = \sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)}}. \tag{3.101}$$

Como os modos *right* e *left* propagam-se com a mesma velocidade de fase, isto representa uma eletrodinâmica não-birrefringente. Notemos que ela deveria valer para $0 \leq n \leq 1$ para assegurar uma velocidade de grupo menor ou igual que 1. Podemos mostrar que a relação de dispersão descreve a propagação de ondas eletromagnéticas em um meio dielétrico, onde a luz propaga-se com velocidade c/n_{index}, sendo n_{index} o índice de refração. Notemos também que o parâmetro violador da simetria de Lorentz pode ser escrito em termos do índice de refração:

$$\frac{1}{n_{index}} = \sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)}}, \tag{3.102}$$

ou seja,

$$n = \frac{n_{index}^2 - 1}{n_{index}^2 + 1}. \tag{3.103}$$

Neste caso, o efeito da violação da simetria de Lorentz é modificar a velocidade de propagação, tal como pode ocorrer em um meio dielétrico.

2. **Caso anisotrópico**: $n = 0$ e $(\tilde{\kappa}_{e-}) \neq 0$

Neste caso, mantemos como não nulos os coeficientes matriciais $(\tilde{\kappa}_{e-})$, para que possamos introduzir a anisotropia na teoria. A equação de onda (3.91) torna-se então:

$$\begin{aligned}
&[\delta_{jk} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{kj}]\partial_t{}^2 E_j - [\delta_{ka} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ka}]\nabla^2 E_k \\
&+\partial_k(\partial_c E_c) - (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab}\partial_a\partial_b E_k + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ka}\partial_a\partial_b E_b \\
&+(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab}\partial_a\partial_k E_b = 0,
\end{aligned} \tag{3.104}$$

e a lei de Gauss (3.92) fica:

$$\partial_a E_a + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ba}\partial_b E_a = 0. \tag{3.105}$$

Substituindo (3.105) em (3.104), obtemos:

$$\{[\Box - (\tilde{\kappa}_{e-})_{cb}\partial_c\partial_b]\delta_{ka} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{kb}[\Box\delta_{ab} + \partial_b\partial_a]\} E_a = 0, \tag{3.106}$$

no espaço de Fourier ficamos com:

$$\left\{[p^2 - (\tilde{\kappa}_{e-})_{cb}p_c p_b]\delta_{ka} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{kb}[p^2\delta_{ab} + p_b p_a]\right\} E_a = 0. \tag{3.107}$$

Como a matriz $(\tilde{\kappa}_{e-})$ é simétrica e de traço nulo, ela pode ser parametrizada em termos de dois vetores tridimensionais, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, como:

$$(\tilde{\kappa}_{e-})_{jk} = \frac{1}{2}(a_j b_k + a_k b_j), \tag{3.108}$$

com $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ e $det(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0$. Com isso (3.107) pode ser reescrita como:

$$M_{kj}E_j = 0, \tag{3.109}$$

onde

$$M_{kj} = [p^2 - (\vec{a}\cdot\vec{p})(\vec{b}\cdot\vec{p})]\delta_{kj} + \frac{1}{2}(a_j b_k + a_k b_j)p^2 + \frac{1}{2}a_k p_j(\vec{b}\cdot\vec{p}) + \frac{1}{2}b_k p_j(\vec{a}\cdot\vec{p}). \tag{3.110}$$

As relações de dispersão são obtidas fazendo $detM = 0$. Por meio de algumas manipulações algébricas obtemos então que:

$$p^2 - (\vec{a}\cdot\vec{p})(\vec{b}\cdot\vec{p}) = 0, \tag{3.111}$$

isto é,

$$p_0 = \pm\left|\vec{p}\right|\sqrt{1 + \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| cos\theta_a cos\theta_b}, \tag{3.112}$$

ou seja, o modo *left* permanece igual ao modo *right* sob a operação $\vec{p}\to-\vec{p}$, o que assegura a não-birrefringência.

B. Equação de Onda para Parâmetros de Paridade Ímpar

Nesse caso vamos fazer $\kappa_{DE} = \kappa_{HB} = 0$ na equação de onda (3.85), mantendo somente os coeficientes de paridade ímpar ($(\kappa_{DB})_{ka} \neq 0$). Temos então que:

$$\partial_t{}^2 E_k - \nabla^2 E_k + \partial_k(\partial_c E_c) + (\kappa_{DB})_{ka}\epsilon_{abc}\partial_t\partial_b E_c$$
$$-(\kappa_{DB})_{ab}\epsilon_{bkj}\partial_j\partial_t E_a = 0. \tag{3.113}$$

Para facilitar ainda mais a nossa análise, escolhemos $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$, então:

$$\tilde{\kappa}_{o-} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE}), \tag{3.114}$$

$$\tilde{\kappa}_{o+} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE}) = \kappa_{DB}. \tag{3.115}$$

Substituindo (3.114) e (3.115) em (3.113), temos que:

$$\partial_t{}^2 E_k - \nabla^2 E_k + \partial_k(\partial_c E_c) + (\kappa_{o+})_{ka}\epsilon_{abc}\partial_t\partial_b E_c$$
$$-(\kappa_{o+})_{ab}\epsilon_{bkj}\partial_j\partial_t E_a = 0. \tag{3.116}$$

Notemos que a lei de Gauss (3.83) fica:

$$\partial_a E_a - (\tilde{\kappa}_{o+})_{ba}\partial_b B_a = 0. \tag{3.117}$$

A condição $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$ associada com $(\kappa_{DB})^{jk} = -(\kappa_{HE})^{kj}$, nos dá

$$(\kappa_{DB})^{jk} = -(\kappa_{DB})^{kj}, \tag{3.118}$$

ou seja, a matriz $\kappa_{DB} = (\tilde{\kappa}_{o+})$ é agora anti-simétrica e, consequentemente, de traço nulo, logo possui somente 3 componentes independentes, podendo então ser parametrizada em termos de um vetor tridimensional $\vec{\kappa}$, tal que:

$$(\tilde{\kappa}_{o+})_{jk} = \epsilon_{jki}\kappa_i, \tag{3.119}$$

e $det(\tilde{\kappa}_{o+}) = 0$. Usando (3.119) em (3.116) obtemos:

$$\partial_t{}^2 E_k - \nabla^2 E_k + \partial_k(\partial_c E_c) + \epsilon_{kai}\epsilon_{abc}\kappa_i\partial_t\partial_b E_c$$
$$-\epsilon_{abi}\epsilon_{bkj}\kappa_i\partial_j\partial_t E_a = 0. \tag{3.120}$$

No espaço de Fourier (3.120) é escrita como:

$$p_0^2 E_k - \vec{p}^2 E_k + p_k p_c E_c + \epsilon_{kai}\epsilon_{abc}\kappa_i p_0 p_b E_c$$
$$-\epsilon_{abi}\epsilon_{bkj}\kappa_i p_j p_0 E_a = 0, \tag{3.121}$$

que, mediante a alguma manipulações algébricas, assume a forma

$$M_{jk}E_j = 0, \tag{3.122}$$

onde

$$M_{jk} = [p^2 + 2p_0(\vec{\kappa}\cdot\vec{p})]\delta_{kj} + p_k p_j - p_0(\kappa_i p_k + \kappa_k p_j). \tag{3.123}$$

As relações de dispersão são obtidas fazendo $detM = 0$, realizando esse cálculo obtemos:

$$p^2 + 2p_0(\vec{\kappa}\cdot\vec{p}) = 0, \tag{3.124}$$

ou seja

$$p_0 = \pm\left[\sqrt{\vec{p}^2 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{p})^2} \mp (\vec{\kappa}\cdot\vec{p})\right]. \tag{3.125}$$

Com o intuito de investigarmos sobre a birrefringência, devemos comparar as velocidades de fase dos modos right e left, ambos movendo-se para a direita, isto é:

$$p_{0+}(+\vec{p}) = \left[\sqrt{\vec{p}^2 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{p})^2} - (\vec{\kappa}\cdot\vec{p})\right], \tag{3.126}$$

e

$$p_{0-}(-\vec{p}) = \left[\sqrt{\vec{p}^2 + (\vec{\kappa}\cdot\vec{p})^2} - (\vec{\kappa}\cdot\vec{p})\right]. \tag{3.127}$$

Esses dois modos fornecem a mesma velocidade de fase

$$u_{ph} = \sqrt{1 + \kappa^2 cos^2\theta_p} - |\kappa|\, cos\theta_p, \tag{3.128}$$

portanto, concluímos que os coeficientes κ são não-birrefringentes.

3.6 Considerações Finais

Neste capítulo discutimos a simetria de CPT e sua relação com a simetria de Lorentz, e analisamos propriedades importantes dos setores de gauge CPT-ímpar e CPT-par do MPE, em particular a birrefringência.

O estudo da birrefringência é muito importante porque produz rigorosas restrições aos coeficientes violadores de Lorentz. Carrol-Field-Jackiw [46] obtiveram, por meio da análise da luz advinda de galáxias muito distantes, a condição

$$\left|V_0 - \left|\vec{V}\right| cos\theta\right| < 4,4 \times 10^{-33} eV, \tag{3.129}$$

que representa um limite superior muito restritivo sobre a magnitude do parâmetro de violação da simetria de Lorentz. Dados também revelam os limites [19, 20]

$$(\kappa_{DE} + \kappa_{HB}) \leq 10^{-37} \quad e \quad (\kappa_{DB} - \kappa_{HE}) \leq 10^{-37}. \tag{3.130}$$

É importante lembrar que nenhum experimento ou observação astrofísica já feita, até o presente momento, fixou algum valor para tais parâmetros, o que sempre se obteve são limites superiores para a magnitude das componentes destes campos de fundo. O fato de tais estimativas serem muito pequenas, tanto para o caso CPT-par quanto para o CPT-ímpar, somente corrobora um fato amplamente verificado: de que não há quebra da simetria de Lorentz no Modelo Padrão. Tais violações de simetria podem ocorrer, por exemplo, em teorias de cordas, em escalas de energia muito além das usuais. O MPE aqui tratado descreve uma física além do Modelo Padrão, em que se esperaria obter algum rastro de quebra de simetria na escala do Modelo Padrão, mas até o presente momento este não parece ser o caso no setor eletrodinâmico.

O estudo do setor de gauge CPT-par aqui tratado será de importância fundamental para o desenvolvimento do próximo capítulo, que também é uma das contribuições principais dessa tese.

Capítulo 4

A investigação de Modelos de Gauge de Quebra de Simetria de Lorentz do Tipo K_F com Configurações do Tipo Vórtices

4.1 Introdução

Neste capítulo analisaremos a eletrodinâmica do setor de *gauge* CPT-par do MPE acrescido de um potencial do tipo Higgs e buscaremos quais os requisitos necessários para que esta seja uma teoria quântica de campos consistente. Isto será feito por meio de uma análise dos propagadores do modelo a partir da qual aspectos de causalidade, unitariedade e graus de liberdade propagados serão obtidos. Partindo desse estudo a formação de vórtices será investigada [25].

4.2 O Modelo de Gauge-Higgs

Propomos começar da nossa análise partindo da seguinte ação

$$\Sigma = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left(D_\mu\varphi\right)^* D^\mu\varphi - V\left(\varphi\right) + \mathcal{L}_\kappa \right\}, \tag{4.1}$$

onde $\mathcal{L}_\kappa$ é o termo violador da simetria de Lorentz

$$\mathcal{L}_\kappa = -\frac{1}{4}(K^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}). \tag{4.2}$$

O tensor $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ é CPT-par, ou seja, não viola a simetria CPT. Embora a violação da simetria CPT implique em violação da simetria de Lorentz, a recíproca não necessariamente é verdadeira. A ação acima é violadora da simetria de Lorentz no sentido que o tensor $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ assume um valor esperado não nulo no vácuo. Este tensor possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann, e uma condição adicional de duplo traço nulo, isto é:

$$K_{\mu\nu\kappa\lambda} = K_{[\mu\nu][\kappa\lambda]},\ K_{\mu\nu\kappa\lambda} = K_{\kappa\lambda\mu\nu},\ K^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0, \tag{4.3}$$

podemos reduzir seus graus de liberdade adotando o seguinte *ansatz* [50–53]:

$$K_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\kappa}\tilde{\kappa}_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\tilde{\kappa}_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\lambda}\tilde{\kappa}_{\mu\kappa} - \eta_{\nu\kappa}\tilde{\kappa}_{\mu\lambda}\right), \tag{4.4}$$

onde $\tilde{\kappa}_{\mu\nu}$ é o tensor de traço nulo

$$\tilde{\kappa}_{\mu\nu} = \kappa\left(\xi_\mu \xi_\nu - \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha \xi_\alpha/4\right), \tag{4.5}$$

sendo ξ_μ um quadrivetor de fundo constante e

$$\kappa = \frac{4}{3}\tilde{\kappa}^{\mu\nu}\xi_\mu \xi_\nu. \tag{4.6}$$

O potencial V é dado por [54]

$$V(\varphi) = m^2 |\varphi|^2 + \bar{\lambda}\,|\varphi|^4, \tag{4.7}$$

que é a forma mais geral de um potencial de Higgs em quatro dimensões, sendo $\bar{\lambda}$ e m parâmetros (m não é a massa). Por uma escolha apropriada dos parâmetros de modo que o campo φ adquira um valor esperado no vácuo não nulo, a saber, $\bar{\lambda} > 0$ e $m^2 < 0$, o espectro de massa do fóton será deslocado após a quebra espontânea da simetria de *gauge* local e do campo φ ter assumido tal valor esperado no vácuo. O campo de Higgs é minimamente acoplado ao eletromagnético por meio de sua derivada covariante sob a simetria de *gauge* local $U(1)$, a saber

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ieA_\mu \varphi. \tag{4.8}$$

Esta simetria é quebrada espontaneamente, e o novo vácuo será dado por

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = a, \tag{4.9}$$

onde

$$a = \left(-\frac{m^2}{2\bar{\lambda}}\right)^{1/2} \quad ; \quad m^2 < 0. \tag{4.10}$$

Adotamos a parametrização polar usual

$$\varphi = \left(a + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) e^{i\rho/\sqrt{2}a}, \tag{4.11}$$

onde σ e ρ são flutuações quânticas escalares. Como estamos realmente interessados na análise do espectro de excitações, escolhemos trabalhar no *gauge* unitário, que é obtido fazendo $\sigma = \rho = 0$. Então a ação de *gauge* bilinear será dada por:

$$\Sigma_g = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} 2\kappa \left(\left(g^{\mu\rho} \left(\xi^\nu \xi^\sigma - g^{\nu\sigma}\, \xi^e \xi_e/4 \right) \right) F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right) + \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu \right\}, \tag{4.12}$$

onde $M^2 = 2e^2 a^2$ é a massa (ao quadrado) adquirida pelo fóton.

O propagador é uma função de Green da teoria definida a partir da parte quadrática da ação clássica do modelo. A partir dele obtêm-se informações sobre causalidade, unitariedade, graus de liberdade propagados, dentre outros. Para obtermos o propagador da teoria devemos reescrever sua ação da seguinte forma

$$\Sigma_g = \int d^4x \frac{1}{2} A^\mu \left\{ \mathcal{O}_{\mu\nu} \right\} A^\nu. \tag{4.13}$$

sendo que o operador diferencial $O_{\mu\nu}$ que aparece na parte quadrática da ação é chamado de operador de onda. O propagador de Feynman da teoria é dado pela inversa de seu operador de onda assim definido. O operador de onda pode ser escrito em termos dos operadores de projeção de spin como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mu\nu} = & \left((1 - \kappa\, \xi^e \xi_e/2)\, \Box + \kappa\lambda^2 + M^2 \right) \theta_{\mu\nu} + \\ & \left(\kappa\lambda^2 + M^2 \right) (\omega_{\mu\nu}) + \kappa \Box \xi_\mu \xi_\nu - \kappa\lambda \left(\xi_\mu \partial_\nu + \partial_\mu \xi_\nu \right), \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $\lambda \equiv \Sigma_\mu^{\ \mu} = \xi_\mu \partial^\mu$, e $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são respectivamente os operadores de projeção transverso e longitudinal:

$$\theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box} \ , \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}. \tag{4.15}$$

Com o intuito de inverter o operador de onda, precisamos adicionar dois novos operadores, visto que os já mencionados não formam uma álgebra fechada. São eles:

$$\Sigma_{\mu\nu} = \xi_\mu \partial_\nu \ , \quad \Lambda_{\mu\nu} = \xi_\mu \xi_\nu. \tag{4.16}$$

O propagador, que é o valor esperado no vácuo do produto de campos ordenado temporalmente [44, 45, 54] é dado em termos do operador de onda como

$$\langle 0 | T \left[A_\mu (x) A_\nu (y) \right] | 0 \rangle = -i \left(\mathcal{O}^{-1} \right)_{\mu\nu} \delta^4 (x - y) \, . \tag{4.17}$$

Sendo a álgebra dos operadores dada pela Tabela 1 .

	${\theta^\alpha}_\nu$	${\omega^\alpha}_\nu$	${\Lambda^\alpha}_\nu$	${\Sigma^\alpha}_\nu$	${\Sigma_\nu}^\alpha$
$\theta_{\mu\alpha}$	$\theta_{\mu\nu}$	0	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\nu\mu}$	$\Sigma_{\mu\nu} - \lambda\omega_{\mu\nu}$	0
$\omega_{\mu\alpha}$	0	$\omega_{\mu\nu}$	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\nu\mu}$	$\lambda\omega_{\mu\nu}$	$\Sigma_{\nu\mu}$
$\Lambda_{\mu\alpha}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\mu\nu}$	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\mu\nu}$	$\xi^2\Lambda_{\mu\nu}$	$\xi^2\Sigma_{\mu\nu}$	$\lambda\Lambda_{\mu\nu}$
$\Sigma_{\mu\alpha}$	0	$\Sigma_{\mu\nu}$	$\lambda\Lambda_{\mu\nu}$	$\lambda\Sigma_{\mu\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu}\Box$
$\Sigma_{\alpha\mu}$	$\Sigma_{\nu\mu} - \lambda\omega_{\mu\nu}$	$\lambda\omega_{\mu\nu}$	$\xi^2\Sigma_{\nu\mu}$	$\xi^2\Box\omega_{\mu\nu}$	$\lambda\Sigma_{\nu\mu}$

Tabela 1: Tabela multiplicativa. Os produtos obedecem à ordem "coluna vezes linha".

A forma final do propagador é então dada por (denotando por simplicidade $\langle 0 | T \left[A_\mu (x) A_\nu (y) \right] | 0 \rangle$ por $\langle A_\mu A_\nu \rangle$)

$$\begin{aligned} \langle A_\mu A_\nu \rangle \;\; &= \;\; \frac{i}{D} \left\{ \theta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{M^2} \left(\frac{\left(\left(1 - \kappa\,\xi^2/2\right)\Box + M^2 \right)^2 + \kappa\lambda^2 \left(1 + \kappa\,\xi^2/2\right)\Box}{E} \right) \right) \omega_{\mu\nu} \right. \\ &\left. - \left(\frac{\kappa\Box}{E} \right) \Lambda_{\mu\nu} + \left(\frac{\lambda\kappa}{E} \right) \Sigma_{\mu\nu} + \left(\frac{\lambda\kappa}{E} \right) \Sigma_{\nu\mu} \right\}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

As expressões em que os pólos do propagador aparecem são:

$$D = \left(1 - \kappa\,\xi^2/2\right)\Box + \kappa\lambda^2 + M^2, \tag{4.19}$$

$$E = \left(1 + \kappa\,\xi^2/2\right)\Box + M^2. \tag{4.20}$$

As expressões acima nos permitem iniciar nossa discussão sobre a natureza das excitações, que podem ser vistas como os pólos do propagador, presentes no espectro. A primeira vista, o produto dos denominadores D e E poderia originar múltiplos pólos que contaminariam o espectro quântico com fantasmas (estados com normas negativas). Por essa razão um estudo cuidadoso dessa questão se faz necessário, para isso é aconselhável dividir nossa discussão em dois casos: vetores ξ^μ tipo tempo e tipo espaço.

4.3 As Relações de Dispersão, Estabilidade e Causalidade

Aqui nosso ponto de partida é o propagador, cujos pólos estão associados às relações de dispersão, que por sua vez nos fornecem informações sobre a estabilidade e a causalidade do modelo. A análise da causalidade está relacionada à positividade dos pólos do propagador na variável p^2, devemos ter $p^2 \geq 0$ para preservar a causalidade (evitar táquions, ou seja partículas com velocidades superiores a da luz no vácuo). Enquanto que a estabilidade está diretamente associada à positividade da energia para cada um dos modos provenientes das relações de dispersão.

Nosso propagador apresenta duas famílias de pólos em p^2,

$$\begin{aligned} (i)D &= \left(1-\kappa\,\xi^2/2\right)(-p_\mu p^\mu)+\kappa\lambda^2+M^2, \\ (ii)E &= \left(1+\kappa\,\xi^2/2\right)(-p_\mu p^\mu)+M^2. \end{aligned}$$

Analisando as relações de dispersão, para o caso $\xi^\mu = (1;0,0,0)$, (i) nos dá os pólos $p^0 = \pm\sqrt{\frac{(2-\kappa)|\vec{p}|^2+2M^2}{2+\kappa}} = \pm m_t$, e (ii) $p^0 = \pm\sqrt{|\vec{p}|^2+\frac{M^2}{(1+\kappa/2)}}$, enquanto que, para o caso $\xi^\mu = (0;0,0,1)$, (i) fornece $p^0 = \pm\sqrt{\frac{2M^2+|p^3|^2(2-\kappa)}{2+\kappa}} = \pm m_s$, e (ii) $p^0 = \pm\sqrt{|p^3|^2+\frac{M^2}{(1-\kappa/2)}}$. A causalidade é então assegurada tomando $\kappa \in (-2,2)$, enquanto que a estabilidade é garantida tomando o sinal positivo de p^0. Notemos então que se fizermos $\vec{p} \to -\vec{p}$, as relações de dispersão continuam as mesmas, comportamento esse que implica em não birrefringência. Concluímos então que o intervalo $(-2,2)$ é o domínio de validade de κ no qual a teoria é causal, estável e não birrefringente.

4.4 A Análise da Unitariedade

Para a análise do modelo a nível clássico, adotamos o método de saturação do propagador com correntes externas [55–57]. O fato de nosso modelo ter dois setores (escalar e de *gauge*) implica que devemos saturar os propagadores escalar e de gauge separadamente. Entretanto, vamos nos concentrar somente no setor de gauge pois estamos interessados na interação eletromagnética. Escrevemos o propagador saturado como

$$SP_{\langle A_\mu A_\nu \rangle} = J^{*\mu} \langle A_\mu(k) A_\nu(k) \rangle J^\nu \tag{4.21}$$

e então, para cada pólo simples do propagador, vamos calcular os autovalores da matriz dos resíduos em cada um desses pólos, e analisar a positividade de cada um desses autovalores. A equação da continuidade $\partial_\mu J^\mu = 0$ (que toma a forma $k_\mu J^\mu = 0$ no espaço dos momentos) reduz o número de termos efetivos no cálculo do propagador saturado. O propagador efetivo toma a seguinte forma

$$B_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{D} \left\{ g_{\mu\nu} - \left(\frac{\kappa \Box}{E} \right) \Lambda_{\mu\nu} \right\}, \tag{4.22}$$

pois se ele apresentasse quaisquer operadores diferenciais, os mesmos se anulariam ao serem contraídos com a quadricorrente em função da equação da continuidade. Consequentemente o propagador saturado é dado por

$$SP_{\langle A_\mu A_\nu \rangle} = J^{*\mu}(k) \Big\{ B_{\mu\nu} \Big\} J^\nu(k). \tag{4.23}$$

Para realizarmos a análise da positividade dos autovalores da matriz dos resíduos é conveniente tomarmos, sem perda de generalidade, $p^\mu = (p^0; 0, 0, p^3)$ como momento linear, e dividir nossa análise em vetores ξ^μ tipo espaço e tipo tempo. Nossa tarefa consiste então em verificar o caráter dos pólos apresentados nas diferentes configurações de ξ^μ.

Com $\xi^\mu = (0; 0, 0, 1)$ (tipo espaço) e no pólo $p^0 = m_s$, temos

$$Res_{p^0=m_s} B_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{2m_s} \begin{bmatrix} -2/(2+\kappa) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/(2+\kappa) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/(2+\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(p^3)^2/\left[(2-\kappa)(p^3)^2 + 2M^2\right] \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

e observamos ambiguidade de sinal somente nos elementos de matriz $Res_{p^0=m_s} B_{ii}$ (visto que B_{00} é não físico), devemos então estudar a dependência do sinal com

κ. Para os elementos $Res_{p^0=m_s}B_{11}$ e $Res_{p^0=m_s}B_{22}$ devemos ter

$$\frac{2}{(2+\kappa)} > 0, \tag{4.25}$$

logo $\kappa > -2$. Já para o elemento $Res_{p^0=m_s}B_{33}$, devemos ter

$$\frac{2(p^3)^2}{(2-\kappa)(p^3)^2 + 2M^2} > 0. \tag{4.26}$$

Com o intuito de tornar nossa análise independente do momento, vamos tomar o limite $M \to 0$, que essencialmente é o limite em que o condensado começa a aparecer (ou seja, estamos deixando o vácuo não nulo, onde a simetria $U(1)$ é espontaneamente quebrada, rumando em direção a níveis energéticos superiores, onde reavemos a simetria $U(1)$), com isso obtemos

$$\frac{2}{(2-\kappa)} > 0, \tag{4.27}$$

logo $\kappa < 2$. Fazendo a intersecção entre esses dois intervalos obtemos $\kappa \in (-2, 2)$, que é o intervalo em que a positividade dos autovalores da matriz dos resíduos (para ξ^μ tipo espaço e no pólo $p^0 = m_s$) é garantida, juntamente com a ausência de modos taquiônicos.

Com um procedimento análogo obtemos que, para $\xi^\mu = (1; 0, 0, 0)$ (tipo tempo) e no pólo $p^0 = m_t$, o intervalo é também $\kappa \in (-2, 2)$. Portanto concluímos que esse domínio de validade de κ previne fantasmas e táquions.

4.5 Uma discussão sobre configurações do tipo vórtice

Uma vez que nossa discussão sobre a consistência das propriedades quânticas do modelo foi concluída, voltemos nossa atenção para uma questão de orientação clássica, a saber, a reavaliação das configurações do tipo vórtice na presença de um termo violador da simetria de Lorentz como o que utilizamos aqui.

No nosso caso, com o termo $K_{\mu\nu\kappa\lambda}$ incluído, partindo da ação (4.1) chegamos às equações de movimento,

$$D^\mu D_\mu \varphi = -m^2\varphi - 2\lambda\varphi|\varphi|^2 \tag{4.28}$$

e

$$
\begin{aligned}
&\kappa\xi^{\nu}\xi^{\sigma}\partial^{\rho}F_{\rho\sigma}-\kappa g^{\nu\rho}\xi^{\mu}\xi^{\sigma}\partial_{\mu}F_{\rho\sigma}+ie\left(\varphi\partial^{\nu}\varphi^{*}-\varphi^{*}\partial^{\nu}\varphi\right)+\\
&2e^{2}A^{\nu}\varphi^{*}\varphi=-\left(1-\kappa\,\xi^{2}/2\right)\left(\partial_{\mu}F^{\mu\nu}\right), \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

então podemos derivar as equações de Maxwell modificadas,

$$
\begin{aligned}
-\left[\left(1-\kappa\,\xi^{2}/2+\kappa\left(\xi^{0}\right)^{2}\right)\nabla\cdot+\kappa\lambda\vec{\xi}\cdot\right]\vec{E} \;&=\; \kappa\xi^{0}\vec{\xi}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)+ie(\varphi\partial_{0}\varphi^{*}-\varphi^{*}\partial_{0}\varphi)\\
&\quad+2e^{2}\varphi^{*}\varphi\Phi, \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

$$
\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad (4.31)
$$

$$
\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad (4.32)
$$

e

$$
\begin{aligned}
-\left(1-\kappa\xi^{2}/2\right)\left[\partial_{0}\vec{E}+(\nabla\times\vec{B})\right] \;&=\; \kappa\left\{\vec{\xi}\left[\xi_{0}(\nabla\cdot\vec{E})-\vec{\xi}\cdot\partial_{0}\vec{E}+\vec{\xi}\cdot(\nabla\times\vec{B})\right]\right\}\\
&\quad-\kappa\xi^{0}\left[\xi_{0}\partial_{0}\vec{E}-(\vec{\xi}\times\partial_{0}\vec{B})\right]+\kappa\lambda\left[\xi_{0}\vec{E}-(\vec{\xi}\times\vec{B})\right]\\
&\quad-ie(\varphi\nabla\varphi^{*}-\varphi^{*}\nabla\varphi)+2e^{2}\varphi\varphi^{*}\vec{A}, \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

onde $\Phi=A^{0}$.

Devemos lidar com as equações de Maxwell modificadas ((4.30)-(4.33)) antes de analisarmos as configurações de vórtices, para entendermos a anisotropia gerada pelo tipo de violação de Lorentz que estamos considerando. A lei de Gauss modificada, no regime estacionário é

$$
-\left[\left(1-\kappa\,\xi^{2}/2+\kappa\left(\xi^{0}\right)^{2}\right)\nabla\cdot+\kappa\lambda\vec{\xi}\cdot\right]\vec{E}=\kappa\xi^{0}\vec{\xi}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)+2e^{2}\varphi^{*}\varphi\Phi. \quad (4.34)
$$

Na busca por soluções do tipo vórtice [54], vamos considerar um campo escalar no espaço bidimensional

$$\varphi = \chi(r)e^{in\theta}, \tag{4.35}$$

sendo n um número inteiro. A solução assintótica é proposta ser um círculo S^1

$$\varphi = ae^{in\theta}; \quad (r \to \infty). \tag{4.36}$$

Vamos considerar também que o campo de *gauge* assume a forma

$$\vec{A} = \frac{1}{e}\nabla (n\theta); \quad (r \to \infty), \tag{4.37}$$

ou, em termos de suas componentes

$$A_r \to 0, \quad A_\theta \to -\frac{n}{er}; \quad (r \to \infty), \tag{4.38}$$

o que nos fornece um campo magnético assintótico puramente na direção z (pois $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$). Com isso a Lei de Gauss modificada no regime estacionário fica

$$\left(1 - \kappa\,\xi^2/2 + \kappa\left(\xi^0\right)^2\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Phi}{dr}\right) + \kappa\lambda\,|\xi_r|\,\frac{d\Phi}{dr} - 2e^2a^2\Phi = 0, \tag{4.39}$$

essa equação diferencial não apresenta um termo independente de Φ, logo ela admite a solução trivial $\Phi = 0$, que é uma solução de vórtice não carregada (pois $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t = 0$), e é com ela que lidaremos daqui para frente.

Estudando a equação de Ampère-Maxwell modificada (4.33) no regime estacionário, e como nossa solução de vórtice não apresenta carga elétrica ($\vec{E} = 0$), temos que

$$\begin{aligned} -\left(1 - \kappa\xi^2/2\right)(\nabla \times \vec{B}) &= \kappa\left\{\vec{\xi}\left[\vec{\xi}\cdot(\nabla \times \vec{B})\right] - \lambda(\vec{\xi} \times \vec{B})\right\} \\ &\quad -ie(\varphi\nabla\varphi^* - \varphi^*\nabla\varphi) + 2e^2\varphi\varphi^*\vec{A}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Novamente vamos dividir nossa análise em vetores ξ^μ tipo tempo e tipo espaço. No caso $\xi^\mu = (1; 0, 0, 0)$ (tipo tempo), a equação (4.40) fica

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA)\right] - 2e\frac{\chi^2}{(1 - \kappa/2)}\left(eA - \frac{n}{r}\right) = 0; \tag{4.41}$$

no limite assintótico ($r \to \infty$) $\chi \approx a$, e com essa aproximação conseguimos resolver essa equação obtendo

$$A(r) = -\frac{n}{er} + \frac{c}{e} C K_1 \left(|e| \frac{a}{\sqrt{1-\kappa/2}} r \right), \tag{4.42}$$

e como a função de Bessel, no limite assintótico, tem um comportamento predominantemente exponencial, ficamos com

$$A(r)_{r \vec{\to} \infty} = -\frac{n}{er} + \frac{c}{e} \left(\frac{\pi}{2|e| \frac{a}{\sqrt{1-\kappa/2}} r} \right)^{\frac{1}{2}} exp \left(-|e| \frac{a}{\sqrt{1-\kappa/2}} r \right). \tag{4.43}$$

O comportamento da solução assintótica é governado por $a/\sqrt{1-\kappa/2} = a'(\kappa)$ no argumento da exponencial. No intervalo em que nossa teoria é livre de fantasmas e táquios, $\kappa \in (-2, 2)$, a' é positivo, e $lim_{\kappa \to 2^-} a'(\kappa) = \infty$, ou seja, a exponencial tende a zero. Isso significa que, a medida que $\kappa \to 2^-$, o vórtice, que é o defeito no condensado (campo de Higgs) descrito pela solução assintótica do campo de *gauge*, torna-se mais e mais confinado até desaparecer por completo. Fisicamente o condensado é incrementado (visto que agora $\varphi = a' e^{in\theta}; \quad (r \to \infty)$) forçando o vórtice a desaparecer.

No caso $\xi^\mu = (0; 0, 0, 1)$ (tipo espaço), (4.40) fica

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA) \right] - 2e \frac{\chi^2}{(1+\kappa/2)} \left(eA - \frac{n}{r} \right) = 0; \tag{4.44}$$

e a solução, no limite assintótico, é

$$A(r)_{r \vec{\to} \infty} = -\frac{n}{er} + \frac{c}{e} \left(\frac{\pi}{2|e| \frac{a}{\sqrt{1+\kappa/2}} r} \right)^{\frac{1}{2}} exp \left(-|e| \frac{a}{\sqrt{1+\kappa/2}} r \right), \tag{4.45}$$

que é análoga à solução anterior, só que agora o termo a' que governa o comportamento da solução é tal que, a medida que $\kappa \to 2^-$, o valor de a' diminui, ou seja, o valor da exponencial aumenta. Isso significa que, a medida que $\kappa \to 2^-$, a intensidade do vórtice aumenta, enquanto que a intensidade do condensado diminui, mas um não suprime o outro.

Para estudarmos a estabilidade da solução de vórtice calculamos a energia total associada a essa configuração e obtemos

$$E = \frac{1}{8}B^2(4-\kappa) + \frac{M^2}{2}A^2, \tag{4.46}$$

e como o domínio que estamos considerando é $\kappa \in (-2, 2)$, a energia é, de fato, positiva, nos dando portanto uma solução estável.

4.6 Considerações Finais

Vimos então que o setor de gauge CPT-par do MPE acrescido de um potencial do tipo Higgs é de fato uma teoria quântica de campos consistente, e também fornece soluções do tipo vórtice, desde que sejam impostas certas condições sobre a decomposição adotada do tensor violador da simetria de Lorentz. É interessante notar que se tivéssemos adotado qualquer outra decomposição, dificilmente teríamos obtido resultados semelhantes. Por que essa decomposição ao invés de qualquer outra? Haveria um argumento formal para deduzí-la ao invés de tomá-la como um simples *ansatz*? Esse é o ponto de partida do próximo capítulo.

Capítulo 5

Generalização Supersimétrica do Tensor Violador de Lorentz

5.1 Introdução

Em nossa abordagem, assumimos que a simetria de Lorentz é violada em energias além do MP [2], onde a supersimetria (que é a simetria que relaciona os férmions e bósons da física de partículas elementares, de modo que cada partícula tenha um parceiro supersimétrico de mesma massa mas estatística diferente) é esperada ser válida. Portanto esperamos que teorias que violem a simetria de Lorentz devam também conter vestígios de supersimetria. Diante deste ponto de vista, podemos esperar que, quando alguns tensores adquiriram no vácuo valores esperados diferentes de zero, os seus respectivos espinores relacionados via supersimetria também fizeram o mesmo. Logo, se o objeto que viola a simetria de Lorentz $\kappa_{\mu\nu}$ puder ser escrito em termos de vetores, a sua forma mais geral, ditada pela supersimetria, deve conter uma decomposição em termos de vetores e espinores que podem ser rearranjados para fornecer $\kappa_{\mu\nu}$ constante. Neste capítulo nosso objetivo é descobrir qual é a correção para o tensor $\kappa_{\mu\nu}$ ditada pela supersimetria. Para atingir nosso objetivo podemos usar o modelo de Wess-Zumino [58] com o acoplamento[1] $\kappa_{\mu\nu}\partial^\mu\varphi\,\partial^\nu\varphi*$ ou a eletrodinâmica escalar com este mesmo acoplamento. Após obter o tensor via supersimetria, podemos usar o *ansatz* que promove uma decomposição para o setor não birrefringente do fóton [52,53], $\kappa_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\kappa}\kappa_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\kappa_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\lambda}\kappa_{\mu\kappa} - \eta_{\nu\kappa}\kappa_{\mu\lambda}\right)$, para obter o tensor $\kappa_{\mu\nu\kappa\lambda}$. Esta

[1]Poderíamos também usar o acoplamento $\kappa_{\mu\nu}F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\lambda\nu}$ na teoria de Super-Maxwell. Entretanto, este acoplamento não está previsto no setor do fóton do Modelo Padrão Estendido (MPE) [11,12]

supersimetrização se baseia em reduzir os graus de liberdade escrevendo o objeto em sua decomposição mais fundamental possível. Esta redução dos graus de liberdade para promover a supersimetria é de fundamental importância, como explicaremos a seguir.

Para reproduzir em campos componentes os acoplamentos citados, iremos construir superações para cada um dos modelos. Entretanto, esperamos que a forma de $\kappa_{\mu\nu}$ independa do modelo em questão. Nossa abordagem consiste em acomodar o campo de fundo violador da simetria de Lorentz dentro de um supercampo. Nesta abordagem construímos a superação, realizamos os cálculos para expressá-la em campos componentes, para a partir daí identificar termos que possam assumir no vácuo valores diferentes de zero. Portanto é crucial tomarmos cuidado para não trazermos para a teoria campos com spin maiores que 2, isto é, tornar a teoria não causal. Este objetivo é atingido quando acomodamos os campos violadores da simetria de Lorentz dentro de um supercampo escalar quiral, pois a restrição $D\bar{S} = \bar{D}S = 0$ elimina spin maiores que 1/2, isto é, elimina graus de liberdade espúrios.

5.2 Supersimetria e Quebra da Simetria de Lorentz

Para reproduzir em campos componentes o acoplamento no modelo de Wess-Zumino ou na eletrodinâmica escalar, $\kappa_{\mu\nu}\partial^\mu\varphi\,\partial^\nu\varphi*$, devemos usar a superação

$$S = \int d^4x\; d^2\theta d^2\bar{\theta}\left\{\kappa\left(D^\alpha S\; D_\alpha\Phi\right)\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{S}\;\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}\right)\right\}, \tag{5.1}$$

onde

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = e^{i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}\left(\varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta^2 G(x)\right) \tag{5.2}$$

e

$$S(x,\theta,\bar{\theta}) = e^{i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}}\Big(s(x) + \sqrt{2}\theta\chi(x) + \theta^2 F(x)\Big)\,. \tag{5.3}$$

Nosso interesse é selecionar os termos que multiplicam $\partial^{\mu}\varphi\,\partial^{\nu}\varphi*$ e identificar, após simetrizado, com o tensor violador da simetria de Lorentz $\kappa_{\mu\nu}$. Esta identificação nos fornece[2]

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mu\nu} &= 4\kappa\Big(\partial_{\mu}s\partial_{\nu}s^* + \partial_{\nu}s\partial_{\mu}s^* + FF^*\eta_{\mu\nu}\Big) + \\
&+ \kappa\Big(i\chi\sigma^{\lambda}\partial_{\lambda}\bar{\chi}\;\eta_{\mu\nu} + i\partial_{\lambda}\chi\sigma^{\lambda}\bar{\chi}\;\eta_{\mu\nu} + \\
&+ i\chi\sigma_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\chi} + i\chi\sigma_{\nu}\partial_{\mu}\bar{\chi} + \\
&- i\partial_{\mu}\chi\sigma_{\nu}\bar{\chi} - i\partial_{\nu}\chi\sigma_{\mu}\bar{\chi}\Big).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Notamos que (5.4) é uma generalização da decomposição bosônica do $\kappa_{\mu\nu}$. Podemos identificar a parte bosônica de (5.4) com a decomposição corrente na literatura, $\kappa_{\mu\nu} = \kappa\Big(\xi_{\mu}\xi_{\nu} - \eta_{\mu\nu}\xi_{\lambda}\xi^{\lambda}/4\Big)$ [50, 51]. Isto é,

$$4\kappa\Big(\partial_{\mu}s\partial_{\nu}s^* + \partial_{\nu}s\partial_{\mu}s^* + FF^*\eta_{\mu\nu}\Big) = \kappa\Big(\xi_{\mu}\xi_{\nu} - \eta_{\mu\nu}\xi_{\lambda}\xi^{\lambda}/4\Big). \tag{5.5}$$

Impondo a condição adicional de traço nulo, ficamos com

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mu\nu} &= \widetilde{\kappa}_{\mu\nu} + \kappa\Big(\frac{i}{2}\partial_{\lambda}\chi\sigma^{\lambda}\bar{\chi}\;\eta_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\chi\sigma^{\lambda}\partial_{\lambda}\bar{\chi}\;\eta_{\mu\nu} + \\
&+ i\chi\sigma_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\chi} + i\chi\sigma_{\nu}\partial_{\mu}\bar{\chi} - i\partial_{\mu}\chi\sigma_{\nu}\bar{\chi} - i\partial_{\nu}\chi\sigma_{\mu}\bar{\chi}\Big),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

onde

$$\widetilde{\kappa}_{\mu\nu} = \kappa\Big(\xi_{\mu}\xi_{\nu} - \eta_{\mu\nu}\xi_{\lambda}\xi^{\lambda}/4\Big), \tag{5.7}$$

com $\kappa_{\mu\nu} = \kappa_{\nu\mu}$ e $\kappa_{\mu}{}^{\mu} = 0$.

---

[2]Existem termos do tipo $\chi\sigma\chi\Box\varphi\,\varphi^*$ que por integrações por partes dariam contribuição para o $\kappa_{\mu\nu}$. Entretanto, quando os objetos vetoriais e espinoriais se condensaram no vácuo as integrações por partes não poderão ser mais feitas.

A forma explícita de χ, tal que $\kappa_{\mu\nu}$ seja constante, é obtida por meio da matriz

$$\kappa_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \kappa_{00} & \kappa_{01} & \kappa_{02} & \kappa_{03} \\ \kappa_{10} & \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{20} & \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{30} & \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

mediante ao fato dela ser simétrica

$$\kappa_{\mu\nu} = \kappa_{\nu\mu}, \tag{5.9}$$

e ter traço nulo

$$\kappa_{00} + \kappa_{11} + \kappa_{22} + \kappa_{33} = 0. \tag{5.10}$$

A solução deste sistema de equações diferenciais é altamente não trivial e ficará como trabalho futuro [59]. Entretanto, consideremos a seguinte configuração do nosso campo de fundo violador da simetria de Lorentz

$$\begin{cases} s(x) = ix^{\mu}\xi_{\mu} + a; \\ F = constante; \\ \bar{\chi}(x^1) = \begin{pmatrix} ibx^1 \\ c \end{pmatrix}; \; x^1 = x; \; x^2 = y; \; x^3 = z; \\ \partial_{\mu}s(x) = constante; \end{cases} \tag{5.11}$$

onde a, b, c são constantes e ξ_{μ} é um vetor constante.

Obtendo então

$$\begin{aligned} \kappa_{\mu\nu} = \widetilde{\kappa}_{\mu\nu} \quad &+ \quad \kappa[(bc + cb)/2 + i\chi\sigma_{\mu}\partial_{\nu}\bar{\chi} + i\chi\sigma_{\nu}\partial_{\mu}\bar{\chi} \\ &- \quad i\partial_{\mu}\chi\sigma_{\nu}\bar{\chi} - i\partial_{\nu}\chi\sigma_{\mu}\bar{\chi}]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Explicitamente temos que

$$\kappa_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \widetilde{\kappa}_{00} + \kappa(bc + cb)/2 & \widetilde{\kappa}_{01} & \widetilde{\kappa}_{02} & \widetilde{\kappa}_{03} \\ \widetilde{\kappa}_{10} & \widetilde{\kappa}_{11} + 3\kappa(bc + cb)/2 & \widetilde{\kappa}_{12} - i\kappa(bc - cb) & \widetilde{\kappa}_{13} \\ \widetilde{\kappa}_{20} & \widetilde{\kappa}_{21} - i\kappa(bc - cb) & \widetilde{\kappa}_{22} - \kappa(bc + cb)/2 & \widetilde{\kappa}_{23} \\ \widetilde{\kappa}_{30} & \widetilde{\kappa}_{31} & \widetilde{\kappa}_{32} & \widetilde{\kappa}_{33} - \kappa(bc + cb)/2 \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

logo ficará claro o porquê da matriz estar escrita dessa forma. Há então três possibilidades para que esta matriz seja simétrica e de traço nulo:

- $b = 0$: Nesse caso o espinor é constante (solução trivial).
- $c = 0$: Nesse caso o espinor possui dependência apenas em x^1, e somente em uma de suas componentes, sendo a outra nula.
- $bc = -cb$: Nesse caso as componentes do espinor são anti-comutativas.

Dentre esses três caos, o terceiro é o mais rico conceitualmente, pois ele nos diz que o tensor violador da simetria de Lorentz K_F advém de um espaço-tempo não comutativo, ou seja, se antes havia duas formas distintas de se implementar a violação da simetria de Lorentz, por meio do tensor K_F e por meio de um espaço-tempo não comutativo [60, 61], agora vemos que talvez esses dois procedimentos sejam equivalentes. De qualquer forma essa idéia ainda é muito prematura, para ser melhor compreendida devemos encontrar a solução geral do sistema de equações diferenciais em questão, para que assim possamos ver se toda solução é obrigatoriamente advinda de um espaço-tempo não comutativo.

5.3 Considerações Finais

Por meio da supersimetria, que não deve ser desprezada na escala de energia onde a simetria de Lorentz é fortemente violada (isto é, altas energias), obtemos, por intermédio do modelo de Wess-Zumino, um objeto violador da simetria de Lorentz expresso em termos de vetores e espinores. Observamos então que esse objeto é constituído por uma parte bosônica, que é uma decomposição corrente na literatura (o que, em si, é um fato notável, visto que a mesma decomposição não foi obtida originalmente por argumentos de supersimetria), e uma parte fermiônica. A exigência de que esse objeto seja constante, aliado ao fato dele ser simétrico e de traço nulo, leva a um sistema de equações diferenciais cuja solução geral ainda não foi obtida, entretanto uma solução particular é estudada levantando o interessante questionamento de uma possível equivalência entre os métodos de se implementar a violação da simetria de Lorentz via o tensor K_F e via um espaço-tempo não comutativo. Uma proposta promissora para trabalhos futuros seria encontrar a solução geral do sitema de equações diferenciais e então revisitar cenários de violação da simetria de Lorentz levando em conta a contribuição fermiônica.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

Esta tese foi dedicada ao estudo do setor de gauge CPT-par do MPE acrescido de um potencial do tipo Higgs. Nossos resultados principais foram que a decomposição (do tensor violador da simetria de Lorentz) utilizada [50, 51], submetida a certas condições (a saber, a escolha dos vetores de fundo ξ^{μ} como sendo do tipo espaço ou tipo tempo, e o domínio da constante κ) faz com que este modelo seja uma teoria quântica de campos consistente, isto é, livre de fantasmas e táquions, e também que ele forneça soluções do tipo vórtice.

Outro objetivo desta tese foi propor uma generalização supersimétrica para a decomposição utilizada, este objetivo foi alcançado com êxito, promovendo a decomposição usual, de mero ansatz, a um caso particular de uma generalização deduzida por meio de argumentos de supersimetria.

Nossas perspectivas de trabalhos futuros seriam, como dito no capítulo 5, encontrar uma solução geral do sistema de equações diferenciais, esclarecendo se de fato há uma equivalência entre a implementação da violação da simetria de Lorentz via o tensor K_F e via um espaço-tempo não comutativo, e então utilizar essa generalização supersimétrica em trabalhos onde a decomposição fora utilizada, obtendo novamente os resultados, agora corrigidos por meio da contribuição fermiônica, o que sem dúvida promete resultados bem interessantes.

Uma aplicação particularmente interessante seria calcular o propagador do fóton e verificar a separação de massa do fotino, ou seja, verificar se o *gap* de massa aumenta. Isto poderia explicar a não detecção de partículas supersimétricas no LHC, uma vez que o ato de não encontrar a supersimetria está ligado a sua quebra. Para implementar este mecanismo de quebra de supersimetria, necessariamente devemos ter uma teoria mais fundamental, portanto, uma proposta promissora de trabalho futuro seria implementar a quebra da simetria de Lorentz na supergravidade.

Referências Bibliográficas

[1] J. M. Fonseca, *Algumas Peculiaridades da Radiação Associada a uma Eletrodinâmica que Viola a Simetria de Lorentz*, Dissertação de Mestrado, UFV (2009).

[2] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. **D 39**, 683 (1989).

[3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. **D 40**, 1886 (1989).

[4] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989).

[5] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Lett. **B 381**, 19 (1986).

[6] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **66**, 1811 (1991).

[7] V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. **B 359**, 545 (1991).

[8] V. A. Kostelecky and R. Potting, Phys. Rev. **D 51**, 3923 (1995).

[9] H. Belich et al., Phys.Rev. **D 68** (2003) 065030.

[10] H. Belich et al., Nucl. Phys. **B**- Supp. **127**, 105 -109 (2004).

[11] D. Colladay and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. **D 55**, 6760 (1997).

[12] D. Colladay and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. **D 58**, 116002 (1998).

[13] John D. Barrow, John K. Webb, Scientific American (Brasil) **38**, 28-35 (2005).

[14] A. Songaila and L. L. Cowie, Nature **398**, 667-668 (1999).

[15] P. C. W. Davies, T. M. Davies, and C. H. Lineweaver, Nature **418**, 602-603 (2002).

[16] A. Songaila and L. L. Cowie, Nature **428**, 132-133 (2004).

[17] P. M. A. Dirac, Nature **139**, 323 (1937).

[18] S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. **D 59**, 116008 (1999).

[19] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).

[20] V. A. Kostelecky and Matthew Mewes, Phys. Rev. **D 66**, 056005 (2002).

[21] J. W. Moffat, Int. J. Mod. Phys. **D 12**, 1279 (2003).

[22] O. Bertolami, hep-ph/0301191.

[23] H. Belich, Revis. Brasil. Ens. Fís **29**, 57 (2007).

[24] M. M. Ferreira Jr. e R. Casana, *Notas de Aula sobre os Setores de Gauge CPT-par e ímpar do Modelo Padrão Estendido.*

[25] H. Belich, F. J. L. Leal, H. L. C. Louzada, M. T. D. Orlando, Phys. Rev. **D 86**, 1250037 (2012).

[26] J. Abraham et al. Phys. Rev. Lett. **101**, 061101 (2008).

[27] J. J. Sakurai and S. Samuel, Modern Quantum Mechanics (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1994).

[28] G. F. R. Ellis and R. M. Williams, Flat and Curved Space Times (Claredon Press, Oxford, 1988).

[29] Ising. E, Z. Physik **31**, 253 (1925).

[30] Lisa Randall, Science, **296**, 1422-1427 (2002).

[31] Gordon Kane, Scientific American (Brasil), **39**, 100-107 (2005).

[32] V. A. Kostelecky, Scientific American (Brasil) **29**, 72-81 (2004).

[33] F. J. L. Leal, *Aspectos Particulares do Setor Fermiônico de Modelos Super-simétricos em Presença de Violação da Simetria de Lorentz,*Tese de Doutorado, CBPF (2011).

[34] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett **89**, 231602 (2002).

[35] T. D. Lee and C.N. Yang, Phys. Lett. Rev **104**, 254 (1956).

[36] D. J. Griffiths, Introduction to Elementary Particles (Wiley, New York, 1987).

[37] C. Amsler, et al., Phys. Lett. Rev **B 667**, 1 (2008).

[38] O. W. Greenberg, Found. of Phys. **36**, 1535 (2006).

[39] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr. and J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **41**, 421 (2005).

[40] H. Belich, L. P. Collato, T. Costa-Soares, J. A. Helayël-Neto and M. T. D. Orlando, Eur. Phys. J. C **62**, 425 (2009).

[41] K. Bakke and H. Belich, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **39**, 085001 (2012).

[42] K. Bakke, H. Belich and E. O. Silva, Ann. Phys. (Berlin) **523**, 910 (2011).

[43] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and F. M. O. Moucherek, Phys. Rev. **D 74**, 065009 (2006).

[44] C. Itzykson and J. B. Zuber, Quantum Field Theory (Dover, New York, 2005).

[45] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields (vol. 1, Cambridge Univ. Press, New York, 1995).

[46] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. **D 41**, 4, 1231 (1990).

[47] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **79**, 2394 (1997).

[48] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).

[49] V. A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **99**, 011601 (2007).

[50] G. Betschart, E. Kant, F. R. Klinkhamer. Nucl. Phys. **B**, 815: 198-214, (2009).

[51] E. Kant, F. R. Klinkhamer, M. Schreck, Phys. Lett. **B**, 682: 316-321 (2009).

[52] Q. G. Bailey, V. A. Kostelecký, Phys. Rev. **D 70**, 076006 (2004).

[53] Brett Altschul. Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007).

[54] L. H. Ryder, Quantum Field Theory (2^{nd}ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1995).

[55] A. B. Bâeta Scarpelli, et al., Phys. Rev. **D 67**, 085021 (2003).

[56] A. B. Bâeta Scarpelli and J. A. Helayël-Neto, Phys. Rev. **D 73**, 105020 (2006).

[57] C. Adam and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B 607**, 247 (2001).

[58] H. J. W. Müller-Kirsten and A. Wideman, Supersymmetry: An Introduction With Conceptual and Details (World Scientific, Singapure, 1987).

[59] H. L. C. Louzada, H. Belich and F. J. L. Leal, Trabalho em andamento.

[60] S. M. Carrol et al., Phys. Rev. Lett **87**, 141601 (2001).

[61] A. Anisimov, Phys. Rev. **D 65**, 085032 (2002).