UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Alex Mofardini Ramos

Números Reais: Conceitos e Representações

Vitória, ES
2014

Alex Mofardini Ramos

Números Reais: Conceitos e Representações

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da UFES, como requisito parcial para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Júlio Valentim

Vitória, ES
2014

Ramos, Alex Mofardini
Números Reais: Conceitos e Representações
109 páginas
Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Polo: Universidade Federal do Espírito Santo.

1. Conjuntos Numéricos
2. Números Reais
3. Cortes de Dedekind
4. Reta Numérica
5. Representação Decimal

I. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática

Comissão Julgadora:

Prof. Dra.
Julia Shaetzle Wrobel

Prof. Dra.
Adriana Neumann de Oliveira

Prof. Dr.
Fábio Júlio Valentim

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Números Reais: Conceitos e Representações"

Alex Mofardini Ramos

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 20/10/2014 por:

Fábio Júlio da Silva Valentim
Orientador - UFES

Julia Shaetzle Wrobel
Examinador Interno - UFES

Adriana Neumann de Oliveira
Examinador Externo - UFRGS

A minha querida esposa Samira pelo incentivo, apoio e paciência durante a execução deste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como foco principal a exploração do conceito de número real com ênfase na sua representação decimal e correspondência com a reta. Sua principal característica é a utilização de um processo construtivo para os conjuntos numéricos utilizando-se de definições e dos axiomas de Peano e de Dedekind. Além disso, em todo o texto, fica clara a busca pela motivação do leitor com uma vasta quantidade de exemplos, observações e sugestões para o uso de recursos computacionais antes, durante e depois da introdução de novos conceitos, definições e resultados.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos, Números Reais, Cortes de Dedekind, Representação Decimal, Reta Numérica

Abstract

This work is mainly focused on the exploration of the concept of real numbers with emphasis on its decimal representation and correspondence with the straight. Its main feature is the use of a constructive process for numerical sets using definitions and axioms of Peano and Dedekind. Moreover, throughout the text, there is a clear search for the reader motivation with a large amount of examples, observations and suggestions for the use of computing resources before, during and after the introduction of new concepts, definitions and results.

Keywords: Numerical Sets, Real Numbers, Dedekind cuts, Decimal Representation, Number Line.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Necessidades da vida atual, desde as mais simples como determinar as horas, até as mais complexas como o processo desenvolvido pelo GPS para determinar a posição de um ponto no globo terrestre, exigem o uso dos números. Entretanto, esses são apenas dois pequenos exemplos da importância desses objetos matemáticos para a vida do homem contemporâneo.

Na educação básica, o estudo dos números, suas operações e propriedades é desenvolvido em todas as séries. No entanto, uma análise dos livros didáticos desse nível de ensino, revela um déficit com relação à apresentação dos números reais, que são expostos de forma superficial e sem uma teoria convincente. Além disso, falta uma maior exploração dos números irracionais, principalmente na sua identificação e representação decimal.

Este estudo, desenvolvido para professores de matemática e alunos da educação básica, explora uma abordagem mais detalhada do conceito e das representações dos números reais, principalmente em relação a tópicos que são esquecidos ou até mesmo negligenciados por autores de livros didáticos. Podemos destacar ainda, o uso de muitos exemplos e planilhas eletrônicas para motivar e ilustrar conceitos e teoremas além de sutilizar teorias.

Nos capítulos que seguem, exploraremos uma visão resumida da origem dos números e da construção intuitiva das noções de números naturais e inteiros, visto que nosso objetivo principal é explorar o conceito e a representação dos números reais.

A seguir, construiremos, do ponto de vista algébrico, o conjunto dos números racionais e justificaremos os procedimentos desenvolvidos para efetuar cálculos de adição, subtração, multiplicação e divisão. Além disso, será esclarecida a relação do MMC com procedimentos de comparação, adição e subtração de frações.

Posteriormente, associaremos os números com medidas de segmentos. Observaremos, por meio da prova de que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis, que os racionais não são suficientes para determinar a medida de qualquer segmento. Assim, estender o conceito de número para além dos racionais será uma atitude necessária para validar resultados importantes como, por exemplo, o Teorema de Tales. Para tal será apresentado o conceito de Cortes de Dedekind, que incluirá novos números (os irracionais) ao conjunto dos números racionais, determinando o conjunto dos números reais, cujos elementos são suficientes para representar a medida de qualquer segmento. Essa relação entre número real e medidas de segmentos colaborará para dar uma visão geométrica desses números por meio da reta, a qual associaremos cada um de seus pontos a um número real (correspondência biunívoca). Tal relação será importante para resolvermos questões como ordenação e operações no campo real.

No capítulo seguinte apresentaremos uma forma alternativa de representar os números reais, que é a representação decimal. Serão trabalhados, entre outros, os conceitos de dízimas periódicas e representações decimais de irracionais. Além disso, determinaremos aproximações decimais de conhecidos e importantes números irracionais como π, e, $\sqrt{2}$ e φ, isto é, o número pi, o número de Euler, a raiz quadrada de 2 e o número de ouro. Para isso, utilizaremos padrões algébricos e uma planilha eletrônica, além de darmos uma visão geométrica para aqueles números que podem ser construídos com régua e compasso na reta real.

O último capítulo será dedicado à demonstração completa de alguns resultados apresentados na educação básica que necessitam dos números irracionais, apesar de serem evitados pelos autores da maioria dos livros didáticos de Matemática, como o teorema de Tales, a área do retângulo e a área do círculo. Para concluir, trataremos de outro tipo de classificação dos números reais, os transcendentes e os algébricos. Provaremos e utilizaremos um teorema que determina quando um número real algébrico é racional ou irracional e provaremos a irracionalidade de alguns números reais, como por exemplo, o número de ouro.

Capítulo 2

Um Pouco Sobre os Conjuntos dos Números Naturais e dos Inteiros

Neste capítulo trataremos resumidamente da construção do conceito de número com foco na evolução do sistema de numeração indo-arábico. Além disso, daremos um tratamento, também resumido, acerca da caracterização dos números naturais e inteiros, apresentando apenas questões básicas sobre esses dois conjuntos, uma vez que o objetivo principal desse trabalho é a exploração dos números racionais e irracionais que será vista nos capítulos que seguem.

2.1 Os Primeiros Contatos Com os Números

Os números, suas propriedades e operações, são alguns dos principais conceitos da Matemática. Isto fica evidente quando observamos sua utilização desde a pré escola, com seus jogos infantis que estimulam contagens; no ensino fundamental e médio com a introdução dos conjuntos numéricos; no ensino superior, em diversas disciplinas onde se aprofunda o entendimento destes conjuntos; até em áreas de pesquisa, como por exemplo, teoria dos números. Ademais, em praticamente todas a áreas do conhecimento empregam-se ou utilizam-se os números e situações onde é necessário contar, medir, comparar, etc. Atualmente, a Matemática desenvolveu progressos tão espantosos que o simples ato de contar tornou-se uma brincadeira de criança para o homem moderno. Talvez por esse motivo, seja difícil imaginar um tempo em que os homens não eram capazes sequer de contar.

Pouco progresso se fez no conhecimento de valores numéricos ou de relações numéricas entre grandezas no período em que o homem primitivo vivia em cavernas. Nesse período, o homem dedicava todo seu tempo e energia caçando, pescando ou recolhendo alimentos onde fosse possível encontrar. Em certo momento, talvez pelo crescimento da população, que influenciou na escassez de alimentos, a relação do homem com a natureza mudou de forma fundamental. Essa situação adversa levou o homem a buscar uma maneira de produzir seu próprio alimento através do cultivo de vegetais e da criação de animais. Essa mudança na relação entre o homem e a natureza influenciou diretamente no desenvolvimento da Matemática.

Pode-se dizer que tudo começou pelo artifício de corresponder unidade a unidade, ou seja, pelo processo de contagem que consistia, a princípio, em fazer corresponder os objetos a serem contados com os objetos de algum conjunto familiar, por exemplo, os dedos das mão, dos pés, pedras, etc. Segundo EVES(EVE04), é provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes em um pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. E mais tarde ainda, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números.

Em muitas sociedades, mesmo as mais rudimentares, pode-se encontrar algum conceito de número e, a ele associado, algum processo de contagem. Para tal, povos de diversas partes do mundo desenvolveram seus próprios sistemas de numeração as vezes influenciados por outros povos. Esses sistemas consistiam de um conjunto de símbolos, juntamente com algumas regras que permitiam contar, representar e enunciar os números. Trataremos aqui apenas do sistema de numeração Hindu, visto que este é o precursor do nosso sistema de numeração. Um estudo mais completo dos sistemas de numeração pode ser encontrado em referências como EVES(EVE04) ou BOYER(BOY96). Além disso, veremos como um sistema de numeração criado na Índia foi difundido, por meio dos Árabes, na Europa e depois no mundo.

2.1.1 Os Números Hindus

Não existem documentos Hindus que nos testemunhem, com exatidão, quando e como essa civilização chegou ao sistema de numeração decimal posicional. Entretanto, para BERLINGHOFF/GOUVÊA(BG10), atualmente existe uma concordância geral na comunidade científica quando se atribui aos hindus a proveniência do nosso sistema de numeração. Se os Hindus inventaram um sistema de numeração com a propriedade de ser decimal e posicional, a realidade é que, no decurso da sua história, nem sempre foi assim. Na verdade, esse sistema passou por constantes transformações até adquirir tal propriedade. Existem muitas incertezas sobre o período exato em que tal transformação ocorreu, mas acredita-se que tenha sido por volta do ano 600. Nesse período, os Hindus usavam nove símbolos diferentes para representar quantidades de 1 a 9. Além disso, diferentes posições na escrita de um mesmo símbolo conferiam a ele diferentes valores. Muitos matemáticos indianos dedicaram uma parte de suas obras para explicar esse sistema de numeração e desenvolver regras para cálculos. Perante a necessidade de marcar a ausência de unidades numa certa posição, os hindus recorreram a um novo símbolo, que posteriormente designaremos por zero.

2.1.2 O Sistema de Numeração Hindo-Arábico

Após a expansão do Islã sobre a Índia, muitos livros de Matemática gregos e indianos foram traduzidos e estudados pelos árabes. Segundo BERLINGHOFF/GOUVÊA(BG10), dentre os textos, um dos primeiros a ser traduzido foi "Os Elementos de Euclides". Essa obra influênciou significativamente os matemáticos árabes, que a partir daí passaram a formular teoremas com precisão e a demonstrá-los no estilo de Euclides. Mas foi Muhammad Ibn M$\bar{u}$sa Al-Khw$\bar{a}$rizm$\bar{i}$, um dos primeiros matemáticos árabes a ter seu nome consagrado. Al-Khw$\bar{a}$rizm$\bar{i}$ escreveu vários livros que foram enormemente influentes. Um deles era uma explicação do sistema decimal com valores posicionais para escrever números e fazer aritmética, que segundo ele se originou na Índia.

Os árabes aprenderam esse sistema no século IX e sua influência gradualmente se espalhou pela Europa nos dois ou três séculos seguintes. Os símbolos para cada dígito mudaram um pouco, mas os princípios permaneceram os mesmos. A figura 2.1 apresenta uma evolução da escrita dos algarismos indo-arábicos com relação ao tempo.

A partir da Europa, o sistema de numeração decimal e posicional criado pelos hindus e aperfeiçoado pelos árabes tomou o mundo. Segundo EVES(EVE04), como e quando os novos símbolos numerais entraram na Europa são questões ainda não decididas. Muito provavelmente eles foram levados por comerciantes e viajantes pela costa do Mediterrâneo. Atualmente, qualquer número inteiro pode ser escrito usando os símbolos imaginados pelos hindus que, após transformações durante séculos, tornaram-se os conhecidos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. A figura 2.1 exibe a evolução da escrita dos algarismos indo-arábicos através do tempo.

Um número inteiro positivo m qualquer pode ser representado no sistema de nume-

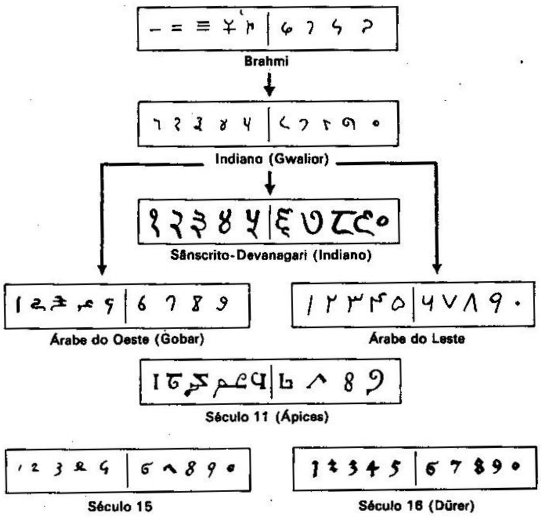


Figura 2.1: Evolução da escrita dos algarismos indo-arábicos segundo Karl Menninger, Zahlwort and Ziffer (BOYER(BOY96))

ração indo-arábico pela expressão:

$$\begin{aligned} m &= a_n a_{n-1} ... a_0 \\ &= 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10 a_1 + a_0 \end{aligned}$$

onde $a_i \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 9\}$ e $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$. Exemplos:

a) $1817 = 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7$.

b) $23 = 2 \cdot 10^1 + 3$.

2.2 O Conjunto dos Números Naturais

As atividades da vida cotidiana do homem moderno, inclusive as mais básicas, exigem um conhecimento mínimo de Matemática. Entre elas podemos citar, por exemplo, a marcação do tempo, qualquer tipo de transação comercial, o cálculo da conta de energia, um telefonema, etc. Nesse contexto, as atividades mais simples são aquelas que envolvem apenas contagens. Os números necessários para tais atividades são da forma 1, 2, 3, ... e são chamados de *Números Naturais*. Segundo LIMA(LCWM01), as necessidades provocadas por um sistema social cada vez mais complexo e as longas reflexões, possíveis graças a disponibilidade de tempo trazida pelo progresso econômico, conduziram, através dos séculos, ao aperfeiçoamento do extraordinário instrumento de avaliação que é o *Conjunto dos Números Naturais*.

Mas que números são esses? A sequência 1, 2, 3, ... tem fim? Como podemos definir tais números? O número 8317 é natural? Por quê? Não podemos responder esses questionamentos usando apenas nossa intuição. Para HEFEZ(HEF93), o grande desenvolvimento da Matemática a partir da criação do Cálculo Diferencial Integral no século XVII colocou diante dos matemáticos novos problemas que, para serem melhor compreendidos e solucionados, requeriam uma fundamentação mais rigorosa do conceito de número. Mas foi apenas no ano de 1889 que o matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932) apresentou uma forma mais simples de definir os números naturais. Sua teoria é baseada em quatro axiomas que caracterizam totalmente esses números.

Assim, definimos o conjunto dos números naturais e representamos com o símbolo $\mathbb{N}$ o conjunto caracterizado pelos axiomas de Peano listados abaixo.

i) Todo número natural tem um único sucessor. Por exemplo: o sucessor de 1 é 2, pois $1 + 1 = 2$, o sucessor de 2 é 3, pois $2 + 1 = 3$, e assim por diante;

ii) 1 é o menor número natural e, portanto, o único natural que não é sucessor de nenhum outro;

iii) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

iv) Seja X um conjunto contendo apenas números naturais, ou seja, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Tudo que se sabe sobre os números naturais, bem como suas operações e propriedades, pode ser demonstrado como consequência desses axiomas. Um estudo mais completo dessa teoria está disponível em LIMA(LIM13).

O sistema de numeração decimal permite escrever qualquer número natural usando apenas os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. De forma simples, podemos representar o conjunto dos números naturais por

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 45,\ ...,\ 8317,\ ...\}.$$

Observações:

1. As reticências ao final da sequência indicam que o conjunto é infinito. De fato, se o conjunto $\mathbb{N}$ fosse finito, então possuiria um elemento que é maior que todos os outros. Neste caso, seja $m \in \mathbb{N}$ o maior elemento do conjunto $\mathbb{N}$. Pelo axioma (2), m possui um único sucessor, que é $m+1$, tal que $m+1 \in \mathbb{N}$. Temos ainda, que $m+1 > m$. Isso é uma contradição, pois m é o maior elemento de $\mathbb{N}$. Sendo assim, podemos concluir que não existe maior elemento e o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito.

2. O fato de 0 (zero) ser ou não um número natural é uma questão de preferência, sendo assim, não se deve dar muita importância a essa questão.

3. Veremos adiante que o conjunto $\mathbb{N}$ permitirá construir os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Já para a construção de $\mathbb{R}$ será necessário um axioma adicional.

4. O axioma 4, também conhecido como *axioma da indução*, é um poderoso instrumento para demonstrar teoremas que envolvem os números naturais e também inteiros. Observe, por exemplo, o seguinte exercício extraído de HEFEZ(HEF93).

   Vamos provar que a seguinte sentença aberta $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

$$P(n):\ 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.1}$$

Para verificar que $P(n)$ é válida para todo n natural, consideremos o conjunto X de todos os naturais que tornam a sentença acima verdadeira. De acordo com o axioma 4, para um conjunto X contendo apenas números naturais, se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$. Ou seja, $P(n)$ será válida para todo n, se forem verificadas as duas hipóteses do axioma 4. Verifiquemos, então, tais hipóteses para $P(n)$:

i) $1 \in X$, pois $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

ii) Dado $n \in X$, devemos mostrar que $n+1 \in X$. Se $n \in X$, então $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, somando $n+1$ a ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad (2.2)$$

logo $P(n+1)$ é verdadeira.

Pelo axioma 4, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é válida para todo n natural.

5. A representação dos números naturais na reta numérica será tratada mais adiante no capítulo 4.

2.3 O Conjunto dos Números Inteiros

Atualmente, pode-se justificar a necessidade dos números inteiros para determinar medidas de temperatura, de altitude ou na expressão de lucro/prejuízo em atividades comerciais. Além dessas atividades, esses números também são essenciais nas manipulações algébricas, visto que, aparecem no cenário da Matemática na resolução de equações ou em problemas que podem ser expressos por equações.

Apesar de registros históricos mostrarem a necessidade dos números negativos desde a antiguidade, apenas no final do século XIX surgiram teorias com o objetivo de dar existência a estes números ou construir o conjunto dos números inteiros. Afinal, como uma quantidade pode ser menor que o nada? Não é de se surpreender que a ideia de números negativos, números menores que zero, tenha sido um conceito de difícil aceitação.

Em uma das teorias voltadas a construção dos números inteiros, a ideia era conceber um número negativo como diferença de dois naturais com o minuendo menor que o subtraendo. Tal teoria descreveremos a seguir.

Sejam m e n dois números naturais quaisquer. A diferença $m - n$ chamaremos número inteiro, que será positivo, nulo ou negativo, conforme $m > n$, $m = n$ ou $m < n$, respectivamente. Se $m > n$, o número inteiro coincidirá com um número natural. Se $m = n$, o número inteiro será o 0 (zero); se $m < n$, o número inteiro será o resultado da diferença $n - m$, precedido do sinal $-$ (menos). Por exemplo, determinemos o número inteiro a definido através da diferença entre os números naturais m e n em cada caso:

- $m = 5$ e $n = 3 \Rightarrow m > n \Rightarrow m - n = 5 - 3 = 2 \Rightarrow a = 2$;
- $m = 15$ e $n = 33 \Rightarrow m < n \Rightarrow n - m = 33 - 15 = 18 \Rightarrow a = -18$;
- $m = 10$ e $n = 10 \Rightarrow m = n \Rightarrow m - n = 10 - 10 = 0 \Rightarrow a = 0$.

Observe que os elementos novos que aparecem com as operações são o 0 (zero), caso este número não tenha sido considerado natural, e os números negativos, que nada mais são que números naturais precedidos do sinal $-$ (menos).

O *Conjunto dos Números Inteiros* será representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$ e consistirá de todos os números originados da diferença de dois números naturais quaisquer. Portanto, podemos representá-lo por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{m - n;\ m,\, n \in \mathbb{N}\}, \text{ ou ainda} \\ \mathbb{Z} &= \{...,\ -3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2, 3, ...\}. \end{aligned}$$

Observações:

1. Podemos representar os números naturais precedidos do sinal +. Por exemplo, $1 = +1$ ou $113 = +113$;

2. Note que o 0 (zero) é o único elemento neutro da soma, ou seja, $a+b = a \Leftrightarrow b = 0$. Mais ainda, $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$;

3. Questões como "de onde surgiram as regras dos sinais da multiplicação de inteiros?" são constantemente citadas por alunos da educação básica. Na verdade, essas regras podem ser deduzidas das propriedades operatórias dos números naturais (distributiva, associativa e elemento neutro da adição e multiplicação). Observe que, dados os números naturais a e b, em particular tem-se:

$$\begin{aligned}
(+a)\cdot(+b) &= (0+a)\cdot(0+b) = 0\cdot(0+b) + [a\cdot(0+b)] \text{ (prop. distributiva)}\\
&= 0\cdot 0 + 0\cdot b + [a\cdot 0 + a\cdot b] = 0 + [0+ab] \text{ (distributiva/e. neutro)}\\
&= [0+0] + ab = 0 + ab = ab. \text{ (associativa/e. neutro)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-a)\cdot(+b) &= (0-a)\cdot(0+b) = 0\cdot(0+b) - [a\cdot(0+b)] \text{ (prop. distributiva)}\\
&= 0\cdot 0 + 0\cdot b - [a\cdot 0 + a\cdot b] = 0 - [0+ab] \text{ (distributiva/e. neutro)}\\
&= [0-0] - ab = 0 - ab = -ab. \text{ (associativa/e. neutro)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(+a)\cdot(-b) &= (0+a)\cdot(0-b) = 0\cdot(0-b) + [a\cdot(0-b)] \text{ (prop. distributiva)}\\
&= 0\cdot 0 - 0\cdot b + [a\cdot 0 - a\cdot b] = 0 + [0-ab] \text{ (distributiva/e. neutro)}\\
&= [0+0] - ab = 0 - ab = -ab. \text{ (associativa/e. neutro)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= (0-a)\cdot(0-b) = 0\cdot(0-b) - [a\cdot(0-b)] \text{ (prop. distributiva)}\\
&= 0\cdot 0 - 0\cdot b - [a\cdot 0 - a\cdot b] = 0 - [0-ab] \text{ (distributiva/e. neutro)}\\
&= [0-0] + ab = 0 + ab = +ab. \text{ (associativa/e. neutro)}
\end{aligned}
$$

Nas igualdades acima, usamos o fato de que 0 é elemento neutro da soma e $a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$ ou $b = 0$.

4. Todo número natural é dado pela diferença de seu sucessor por 1. Dessa forma, pode-se sempre escrever um número natural como diferença de dois naturais. Conclui-se desse fato que todo número natural também será número inteiro, ou seja,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

5. Embora tenhamos feito um tratamento resumido dos conjuntos dos números naturais e inteiros, existe uma ampla lista de propriedades e curiosidades sobre esses conjuntos que podem ser encontrados em referências como HEFEZ(HEF93), LIMA(LIM13), SHOKRANIAN(SSG98), entre outros.

6. A representação dos números inteiros na reta numérica será tratada mais adiante no capítulo 4.

Capítulo 3

O Conjunto dos Números Racionais

Além da necessidade de contar, medir também é uma atividade imprescindível para a realização de diversas tarefas do dia a dia de qualquer sociedade e, quanto maior o grau de complexidade dessas tarefas, que também estão associadas ao nível de desenvolvimento dessa sociedade, mais complexas estas medidas serão. Mas o que significa "medir"? Medir é o ato de comparar duas grandezas de mesma espécie tomando uma como medida padrão. O problema surge quando ao escolher uma determinada unidade padrão para medir, o resultado obtido não é um número inteiro. Percebe-se assim, que os números inteiros não são suficientes para suprir todas as necessidades de medição.

Com o objetivo de sanar o problema posto acima, deve-se buscar novos objetos matemáticos que expressem quantidades que podem ser inteiras ou não. A princípio, os objetos adotados para tal serão os números racionais. Posteriormente, no capítulo 4, veremos que os racionais também não são suficientes, sendo necessário ampliar o conceito de número para além dos destes.

Neste capítulo, apresentaremos uma definição algébrica do conjunto dos números racionais explorando algumas propriedades e suas principais operações.

3.1 Definição de Número Racional

Definimos como *Números Racionais* todos aqueles que podem ser colocados na forma fracionária $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e b não é zero. Representamos o conjunto dos números racionais pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Sendo assim, temos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}.$$

São exemplos de números racionais:

$$-\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, -\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, -\frac{1}{13}.$$

Observações:

1. A fração $\frac{a}{b}$ pode ser vista como uma razão entre os números inteiros a e b, e por esse motivo, tal número é chamado de *racional*.

2. A restrição $b \neq 0$ é necessária, uma vez que, como visto na observação anterior, a fração $\frac{a}{b}$ também representa o quociente $a \div b$ e não existe divisão por zero. Por outro lado, mais adiante, na seção 4.1, veremos que b é o número de vezes que a unidade é dividida, o que só faz sentido quando $b \neq 0$.

3. O símbolo $\mathbb{Q}$, que representa o conjunto dos números racionais, é a primeira letra da palavra *quociente*.

3.2 A Ordenação dos Números Racionais

O conjunto dos números racionais é ordenado. Isto significa que dados dois números racionais r e s, teremos uma e só uma das alternativas seguintes:

$$r = s \text{ ou } r < s \text{ ou } r > s.$$

Ou seja, r é igual a s, ou r é menor do que s, ou r é maior do que s. Nas subseções a seguir exploraremos cada um desses casos.

3.2.1 Igualdade

Dados dois números racionais $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d inteiros e b e d diferentes de zero, a igualdade desses números pode ser definida da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

São consequências da definição de igualdade:

- O fato de duas frações não terem os mesmos numerador e denominador não exclui a possibilidade de ambas serem iguais. Observe por exemplo as frações $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$. Como $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3$, pela definição, pode-se concluir que $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$. Frações com essa propriedade são denominadas *frações equivalentes*.

  De forma geral, dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ com a, b, c e d inteiros e b e d diferentes de zero, se existir um número inteiro k diferente de zero tal que $c = a \cdot k$ e $d = b \cdot k$, pode-se concluir que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. De fato,

$$a \cdot d = a \cdot b \cdot k = b \cdot a \cdot k = b \cdot c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

- Uma das vantagens das frações equivalentes é que, em algumas situações, podemos representar uma determinada fração $\frac{a}{b}$ de forma mais conveniente com objetivo de facilitar eventuais cálculos que a envolvam. As frações equivalentes podem ser simplificadas, isto é, ao notarmos que os termos de uma fração (numerador e denominador) possuem fatores em comum, podemos realizar a divisão por esses fatores, tornando a fração o mais simples possível. Por exemplo, o número racional $\frac{30}{18}$ poderia ser substituído por $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$, bastando dividir seus termos por 2 e 6, respectivamente. A substituição de uma fração por outra equivalente e mais simples é chamada de *simplificação de frações.* Quando não houver fatores comuns, dizemos que a fração é *irredutível.*

- A definição de número racional contém as palavras "um número que pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$". Por que não dizemos simplesmente "um número da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$"? O motivo é o seguinte: existem infinitas formas de se escrever um número racional, por exemplo, $\frac{2}{3}$ pode ser escrito como $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{2\pi}{3\pi}, \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, \ldots$ ou $\frac{-10}{-15}$, e não vamos querer que nossa definição de números racionais dependa da maneira particular escolhida para representá-lo. Quando dizemos "um número da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$", o número $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$, por exemplo, não será racional, mas se fizermos algumas manipulações aritméticas com a expressão, obteremos:

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1} = 2.$$

  Portanto, o número $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ é racional apesar de não estar escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$.

- Observe que, enquanto os termos *número racional* e *fração* são, as vezes, usados como sinônimos, a palavra fração, sozinha, é designada para expressar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador, como por exemplo:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{17}{x} \text{ ou } \frac{x^2 - y^3}{x^3 - y^2}.$$

Não se pode afirmar que as três expressões acima são racionais.

- Todo número inteiro é também racional, pois cada um deles pode sempre ser escrito na forma de fração. Observe, por exemplo, que existem infinitas formas de escrever o número 2 na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$.

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}.$$

Portanto, temos que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

- Sejam a e b números inteiros com $b \neq 0$, então $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$. De fato, pois $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. Por exemplo,

$$\frac{3}{-8} = \frac{-3}{8}.$$

3.2.2 Desigualdade

Sejam a e b números inteiros com $b \neq 0$. Devido a igualdade $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com $b > 0$. No que segue, iremos considerar todos os números racionais escritos dessa forma.

Sendo assim, dados $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais com $b > 0$ e $d > 0$, definimos:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c.$$

São consequências da definição de desigualdade:

- Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{a}{c}$, onde a, b e c são inteiros e b e c diferentes de zero, com numeradores iguais. Ao compararmos essas frações, surgem as seguintes possibilidades:

- se $a = 0$, então $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$, pois $0 \cdot c = 0 \cdot b \Rightarrow \frac{0}{b} = \frac{0}{c}$;
- se $a > 0$, então:
  * $b > c \Rightarrow a \cdot b > a \cdot c \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{a}{b}$;
  * $b < c \Rightarrow a \cdot b < a \cdot c \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{a}{b}$;

  Ou seja, quando o numerador for positivo, será maior a fração com denominador menor. Por exemplo: $\frac{3}{8} > \frac{3}{17}$, pois os numeradores são iguais e positivos;
- se $a < 0$, então:
  * $b > c \Rightarrow a \cdot b < a \cdot c \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{a}{b}$;
  * $b < c \Rightarrow a \cdot b > a \cdot c \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{a}{b}$.

  Ou seja, quando o numerador for negativo, será maior a fração com denominador maior. Por exemplo: $\frac{-2}{7} > \frac{-2}{5}$, pois os numeradores são iguais e negativos.

- Dadas duas frações com denominadores iguais, será maior aquela que tiver maior numerador. De fato, dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$ com $b \neq 0$, se $a > c$, então, como $b \neq 0$, podemos fazer $a \cdot b > b \cdot c$ e, pela definição de desigualdade, $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$ (a igualdade dar-se-á quando a=c). Por exemplo: $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$, pois os denominadores são iguais e o numerador da 1ª fração é maior que o numerador da 2ª fração.

- Sejam as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ com a, b, c e d inteiros e b e d diferentes de zero. Caso $a \neq c$ e $b \neq d$, pode-se proceder da seguinte forma para comparar tais frações:
  - Multiplicar os termos da 1ª fração $\frac{a}{b}$ pelo denominador da 2ª fração $\frac{c}{d}$.

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d}.$$

– Multiplicar os termos da 2ª fração $\frac{c}{d}$ pelo denominador da 1ª fração $\frac{a}{b}$.

$$\frac{c \cdot b}{d \cdot b}.$$

Comparar as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é o mesmo que comparar suas respectivas frações equivalentes, $\frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ e $\frac{c \cdot b}{d \cdot b}$. Dessa forma, o problema se reduz à comparação de duas frações com denominadores iguais, visto que, após as intervenções, os denominadores serão ambos iguais a $b \cdot d$. Portanto, será maior a fração equivalente que tiver maior numerador. Ou seja, $ad > cb$ ou $ad < cb$, significa que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Por exemplo, comparando as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{6}{7}$, temos:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{21}{56} \text{ e } \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{48}{56}.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{21}{56} < \frac{48}{56} \Leftrightarrow \frac{3}{8} < \frac{6}{7}.$$

- Muitas técnicas matemáticas usadas diariamente, como fazer operações, usam algoritmos simples e de fácil compreensão. Apesar disso, muitas pessoas usam esses algoritmos sem entender de fato o que estão fazendo. Um método muito comum usado para comparar duas frações com numeradores e denominadores diferentes é o que utiliza o MMC (Mínimo Múltiplo Comum) dos denominadores. A seguir iremos comparar as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{6}$ usando esse método.

  Em primeiro lugar, observe que os denominadores são diferentes e os numeradores também. Então, determinemos o menor denominador que seja comum a ambas as frações. Este denominador será o MMC dos denominadores 8 e 6:

$$M(8) = 0, 8, 16, \mathbf{24}, 32, 40, \mathbf{48}, 56, 64, ...$$

$$M(6) = 0, 6, 12, 18, \mathbf{24}, 30, 36, 42, \mathbf{48}, ...$$

O MMC de 6 e 8 será 24, ou seja, $MMC(8{,}6) = 24$ (o MMC deve ser diferente de zero). Os passos seguintes estão descritos na figura 3.1:

- Substitui-se os denominadores 8 e 6 por 24;
- divide-se o denominador obtido (24) pelo denominador da 1ª fração (8) e multiplica-se o resultado pelo numerador dessa fração (3). O número obtido será o numerador da nova fração;
- faz-se o mesmo com a 2ª fração;

$$\frac{3}{8} \text{ e } \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{}{24} \text{ e } \frac{}{24}$$

$$\frac{3}{8} \text{ e } \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{24} \text{ e } \frac{}{24}$$

$$\frac{3}{8} \text{ e } \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{24} \text{ e } \frac{20}{24}$$

Figura 3.1: Frações equivalentes com menor denominador comum.

- finalmente, como as frações possuem denominadores iguais, então será maior a que tiver maior numerador, ou seja,

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24} > \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

A questão que se coloca neste momento é: Por que usar o MMC?

Uma das formas vistas anteriormente para comparar duas frações foi que, se elas tivessem denominadores iguais, a maior seria a que tem maior numerador. Neste caso, dadas duas frações com numeradores e denominadores diferentes, podemos procurar frações equivalentes às duas que tenham mesmo denominador. Por exemplo, observe as frações equivalentes a $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{6}$:

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{24}} = \frac{12}{32} = \frac{15}{40} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{48}} = \frac{21}{56} = \frac{24}{64}.$$

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{24}} = \frac{25}{30} = \frac{30}{36} = \frac{35}{42} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{48}}.$$

Com apenas sete frações equivalentes às frações dadas, encontramos dois pares com denominadores iguais. Observe que os denominadores das frações equivalentes são múltiplos dos denominadores das frações originais e o mesmo acontece com os numeradores. Para compará-las, podemos escolher qualquer um dos pares; porém, a preferência será pela análise de frações que possuem termos menores, ou seja, comparar o par $\frac{9}{24}$ e $\frac{20}{24}$. Por esse motivo, a técnica exposta anteriormente utiliza o MMC dos denominadores, uma vez que, os termos menores corresponderão ao menor múltiplo comum dos denominadores.

Mas porque dividir e depois multiplicar o MMC pelo denominador e pelo numerador originais, respectivamente, para obter o novo numerador?

Porque após determinar o denominador, que é o MMC, precisamos determinar o numerador correspondente que torne a nova fração equivalente à original. Para tal, deve-se determinar por qual fator foi multiplicado o denominador original para obter o MMC. Este fator pode ser obtido dividindo-se o MMC pelo denominador original. O novo numerador será o produto do numerador original pelo fator encontrado (ver figura 3.2).

$$24 \div 6 = 4$$

$$\overset{\times ?}{\underset{\times ?}{\frac{5}{6}=\frac{}{24}}} \Rightarrow \overset{\times 4}{\underset{\times 4}{\frac{5}{6}=\frac{}{24}}} \Rightarrow \overset{\times 4}{\underset{\times 4}{\frac{5}{6}=\frac{20}{24}}}$$

Figura 3.2: Qual será o novo numerador?

3.3 Operações

A seguir justificaremos algebricamente os procedimentos utilizados para efetuar as quatro operações com números racionais.

3.3.1 Soma

Dados dois números racionais $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d inteiros e b e d diferentes de zero, a soma desses números pode ser definida da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Exemplo:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 8 \cdot 5}{8 \cdot 6} = \frac{18 + 40}{48} = \frac{58}{48} = \frac{29}{24}.$$

Observações:

1. Para somar duas frações com mesmo denominador, basta repetir o denominador e somar os numeradores. De fato, dadas duas frações $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{b}$, com a, b e c

inteiros e b diferente de zero, pela definição de soma, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a \cdot b + b \cdot c}{b \cdot b} = \frac{b \cdot (a + c)}{b \cdot b} = \frac{a + c}{b}.$$

Observe o exemplo:

$$\frac{3}{7} + \frac{7}{7} = \frac{3 + 7}{7} = \frac{10}{7}.$$

2. Pode-se usar o MMC também para a operação de adição. Por exemplo,

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \frac{9 + 20}{24} = \frac{29}{24}.$$

A justificativa para esse fato é análoga à apresentada na seção 3.2.2 para o caso de comparação de frações, uma vez que, determinadas duas frações equivalentes às originais (com mesmo denominador), o problema se resume ao caso da observação anterior.

3.3.2 Subtração

Dados dois números racionais $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d inteiros e b e d diferentes de zero, chama-se diferença $r - s$ entre eles a um terceiro número racional k tal que $s + k = r$. O número que satisfaz a definição é $k = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$. De fato, temos:

$$s + k = \frac{c}{d} + \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} + \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c + a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b} = r.$$

Pode-se, portanto, escrever:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Exemplo:

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6 - 8 \cdot 5}{8 \cdot 6} = \frac{18 - 40}{48} = \frac{-22}{48} = -\frac{11}{24}.$$

Observação:

Pode-se também usar o MMC para a operação de subtração. Por exemplo,

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{6} = \frac{9-20}{24} = -\frac{11}{24}.$$

A justificativa para esse fato é análoga ao caso da soma de frações.

3.3.3 Multiplicação e Divisão

Para facilitar o entendimento, dividiremos esta subseção em casos:

1. Multiplicação de um número racional por um número inteiro.

   Sejam a, b e n números inteiros e b diferente de zero. Temos:

$$\frac{a}{b} \cdot n = n \cdot \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + ... + \frac{a}{b}}_{\text{n vezes}} = \frac{\overbrace{a + a + ... + a}^{\text{n vezes}}}{b} = \frac{n \cdot a}{b}.$$

   Exemplo:

$$\frac{3}{8} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{8} = \frac{15}{8}.$$

   Em particular, $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}$.

2. Multiplicação de número racional por número racional.

   Dados dois números racionais $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d inteiros e b e d

diferentes de zero, o produto $r \cdot s$ pode ser desenvolvido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \quad \text{(Multiplica-se numerador e denominador de } \frac{c}{d} \text{ por } b) \\ &= \frac{1}{b} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{b \cdot d} \quad \text{(Use o caso 1 duas vezes)} \\ &= \frac{b}{b} \cdot \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{(Use o caso 1 duas vezes)} \\ &= 1 \cdot \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto, se efetua o produto de dois números racionais fazendo, termo a termo, o produto dos numeradores e denominadores. Exemplo:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 6} = \frac{15}{48}.$$

3. Divisão de número racional por número inteiro

   Dados um número racional $\frac{a}{b}$ com a, b inteiros e $b \neq 0$, e um número inteiro $n \neq 0$, seja r um número tal que $\frac{a}{b} \div n = r$. Por definição temos:

$$\frac{a}{b} \div n = r \Leftrightarrow n \cdot r = \frac{a}{b} \Leftrightarrow n \cdot r \cdot b = a \Leftrightarrow r = \frac{a}{n \cdot b} \text{ e } r \in \mathbb{Q}.$$

   Portanto, para dividir um número racional por um inteiro não nulo, mantém-se o numerador e multiplica-se o denominador por esse número.

4. Divisão de número racional por número racional

   Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com a, b, c e d inteiros e b e d diferentes de zero, dizemos que o número racional r é o resultado da divisão de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ e escrevemos $r = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ quando $\frac{c}{d} \cdot r = \frac{a}{b}$.

   O valor de r que satisfaz a igualdade é $r = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. De fato,

$$\frac{c}{d} \cdot r = \frac{c}{d} \cdot \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a \cdot c \cdot d}{b \cdot c \cdot d} = \frac{a}{b}.$$

Exemplo:

$$\frac{3}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Como afirmado no início deste capítulo, os números racionais ainda não são suficientes para suprir todas as necessidades de medição. No próximo capítulo, veremos as causas dessa insuficiência.

Capítulo 4

O Conjunto dos Números Reais

Nos Capítulos anteriores, foram introduzidos os números Naturais, Inteiros e Racionais e foi mostrada a necessidade de definir esses números associada ao desenvolvimento das ações do homem. No presente capítulo, exploraremos os conceitos de segmentos comensuráveis e incomensuráveis e concluiremos, por meio da prova de que a diagonal de um quadrado e seu lado são segmentos incomensuráveis, que os números racionais são insuficientes para representar a medida de um segmento qualquer tomando uma unidade padrão. A partir daí, definiremos os números reais como objetos necessários e suficientes para a determinação do comprimento de um segmento de reta qualquer utilizando o conceito dos *Cortes de Dedekind*, tendo como base a obra de CARAÇA(CAR02). Uma consequência dessa definição será a existência de uma correspondência biunívoca entre a reta e os números reais. Para LIMA(LCWM01), esta relação é tão significativa que o conjunto dos números reais é também conhecido como a *reta real* ou, simplesmente, a *reta*.

4.1 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis

Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta qualquer. Para medí-lo será necessário fixar um segmento padrão u, chamado *segmento unitário*. Por definição, a medida do segmento u é igual a 1. Para determinar a medida do segmento $\overline{AB}$ em relação a unidade u, buscamos a resposta para a pergunta: quantas vezes o segmento u cabe no segmento $\overline{AB}$? Na figura 4.1, o segmento u cabe cinco vezes no segmento $\overline{AB}$, portanto, a medida de $\overline{AB}$, que denotaremos por AB, é igual a 5, ou seja, $AB = 5$.

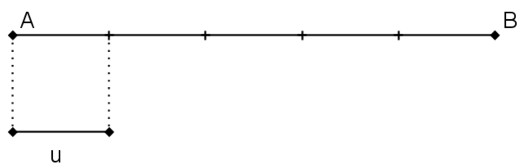


Figura 4.1: $AB = 5$

Generalizando, se o segmento unitário u cabe exatamente n vezes, com $n \in \mathbb{N}$, em um dado segmento $\overline{AB}$, a medida desse segmento será igual a n, ou seja, $AB = n$.

Caso aconteça do segmento unitário não caber um número inteiro de vezes no segmento $\overline{AB}$, a medida de tal segmento não será um número inteiro. Na figura 4.2, observe que u não cabe um número inteiro de vezes no segmento $\overline{AB}$. Pode-se observar que $3 < AB < 4$. Nesse caso, como determinar o comprimento desse segmento?

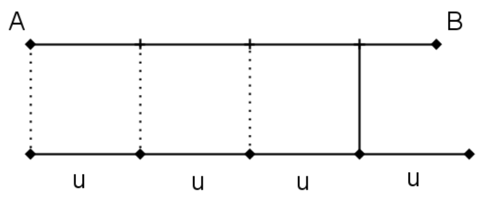


Figura 4.2: $AB =?$

Procuramos subdividir os segmentos $\overline{AB}$ e u com o objetivo de encontrar um pequeno segmento w que caiba um número inteiro de vezes tanto em $\overline{AB}$ quanto em u.

Caso encontremos tal segmento w, diremos que $\overline{AB}$ e u são *segmentos comensuráveis*. Na figura 4.3, existe um segmento w que cabe duas vezes em u e sete vezes em $\overline{AB}$. Nesse caso, a medida de w será $\frac{1}{2} \cdot u$ e, consequentemente,

$$AB = 7 \cdot w = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

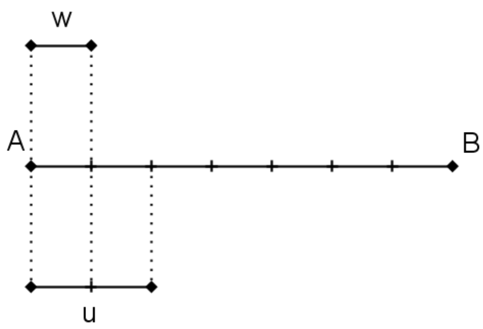


Figura 4.3: $AB = \frac{7}{2}$

De forma geral, caso encontremos o segmento w, podemos supor que este caiba n vezes em u e m vezes em $\overline{AB}$. Teremos, então, que a medida de w será a fração $\frac{1}{n}$ e a medida AB, consequentemente, será m vezes $\frac{1}{n}$, ou seja,

$$AB = m \cdot w = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Perceba que a medida AB é dada pelo número racional $\frac{m}{n}$, que só faz sentido se $n \neq 0$, pois n é o número de vezes em que a unidade u é dividida.

Observe que na construção descrita anteriormente admitimos que os segmentos $\overline{AB}$ e u eram comensuráveis, ou seja, podiamos sempre encontrar um pequeno segmento

w que coubesse um número inteiro de vezes tanto em $\overline{AB}$ quanto em u. Sendo $\overline{AB}$ e u comensuráveis, poderíamos expressar a medida de $\overline{AB}$ como uma fração, ou seja, a medida de $\overline{AB}$ seria um número racional. A questão que se põe no momento é: será que dado um segmento $\overline{AB}$ qualquer, ele é sempre comensurável com u? Apesar de nossa intuição dizer que sim, e talvez seja por isso que a crença da "comensurabilidade certa" tivesse perdurado até o quarto século antes de cristo, a resposta é não – nem sempre o segmento $\overline{AB}$ será comensurável com u. Quando dois segmentos não são comensuráveis, dizemos que eles são *incomensuráveis*.

A seguir, reproduziremos uma demonstração extraída de LIMA(LIM13), que, ao que tudo indica, foi usada pelos pitagóricos para mostrar que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. Na figura 4.4 representamos o quadrado $ABCD$ com diagonal $d = BD$ e lado $a = BC$.

Suponhamos por contradição que d e a sejam comensuráveis, ou seja, existe um segmento u e m e n inteiros tais que $a = m \cdot u$ e $d = n \cdot u$. Traçamos um arco

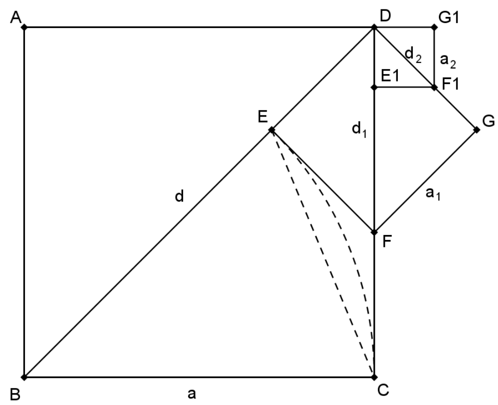


Figura 4.4: O problema da comensurabilidade.

de circunferência com centro no vértice B e raio BC e marcamos a interseção com a diagonal BD. Obtemos assim um ponto $E \in BD$ tal que $BE = BC = a$. Em seguida, marcamos um ponto $F \in CD$ tal que $EF \perp BD$. Observe ainda que o ângulo $D\widehat{E}F$ é reto e o ângulo $E\widehat{D}F$ mede 45^o, então, o ângulo $D\widehat{F}E$ também mede 45^o. Dessa forma, o triangulo DEF é retângulo e isósceles com base DF. Portanto, $DE = EF$. Marcando um ponto G conveniente, construímos um quadrado $DEFG$. Sejam, respectivamente, a_1 e d_1 as medidas do lado e da diagonal deste novo quadrado, observe que:

- $BC = BE$, então o triângulo BCE é isósceles, ou seja, $B\widehat{E}C = B\widehat{C}E$.
- $B\widehat{E}F = B\widehat{C}F$, então $B\widehat{E}C + C\widehat{E}F = B\widehat{C}E + E\widehat{C}F$, assim $C\widehat{E}F = E\widehat{C}F$.

Conclusão, o triângulo CEF também é isósceles e, portanto, $CF = EF = DE = a_1$.

Assim temos que:

$$a_1 = DE = BD - BE = d - a = n \cdot u - m \cdot u = (n - m) \cdot u.$$

$$d_1 = a - a_1 = m \cdot u - (n - m) \cdot u = (2m - n) \cdot u.$$

Portanto, a_1 e d_1 também são múltiplos inteiros de u.

Além disso, como $a = a_1 + d_1$ e $a_1 < d_1$ (pois a_1 e d_1 são, respectivamente, lado e diagonal de um mesmo quadrado), tem-se que:

$$2a_1 = a_1 + a_1 < a_1 + d_1 = a.$$

$$2a_1 < a.$$

Aplicando a mesma construção ao quadrado $DEFG$, obtemos um novo quadrado $DE_1F_1G_1$, com lado e diagonal medindo, repectivamente, a_2 e d_2 também múltiplos inteiros de u e sendo que $2a_2 < a_1$. Portanto, $4a_2 < 2a_1 < a$. Continuando este processo indefinidamente, obtemos uma sequência de quadrados $(DE_nF_nG_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, com lados a_{n+1} e diagonais d_{n+1}, todos múltiplos inteiros de u, tais que o lado de cada quadrado é menor que a metade do lado do quadrado anterior, isto é, $2a_n < a_{(n-1)}$. Portanto,

$$2^n a_n < a = m \cdot u.$$

Neste caso, para n suficientemente grande, a_n seria menor que u, contradizendo o fato de ser seu múltiplo inteiro.

Segundo LIMA(LCWM01), deve-se aos pitagóricos, uma seita filosófico-religiosa liderada por Pitágoras, provavelmente entre 450 e 400 a.C, a descoberta de grandezas incomensuráveis. Os pitagóricos descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis desencadeando uma enorme crise nos alicerces do pitagorismo e, por algum tempo, em toda estrutura da Matemática, pois baseado na definição e na certeza da comensurabilidade descrita anteriormente, fundamentou-se, por exemplo, o Teorema de Tales (ver seção 6.1.1) do qual depende toda teoria de semelhança entre figuras. Surgia, então, a necessidade de se criar uma teoria sobre razões envolvendo grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

4.2 A Contribuição de Eudoxo

Segundo GALARDA(GSR99), um discípulo de Platão chamado Eudoxo de Cnido (aprox. 408-355 a.C.) foi quem primeiro resolveu o problema das grandezas incomensuráveis. Eudoxo descobriu a teoria das proporções, usada por Euclides no seu livro V de Os Elementos, que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis como as grandezas incomensuráveis. A seguir exporemos tal teoria.

Na igualdade $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ temos dois casos a considerar: AD e DB comensuráveis ou incomensuráveis.

- AD e DB comensuráveis, então, $\frac{AD}{DB}$ é racional, ou seja, existem m, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$ e, consequentemente, $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$. Portanto, podemos escrever:

$$n \cdot AD = m \cdot DB \Rightarrow n \cdot AE = m \cdot EC.$$

- AD e DB incomensuráveis, então, dados m, $n \in \mathbb{N}$, se $\frac{m}{n} < \frac{AD}{DB}$, então $\frac{m}{n} < \frac{AE}{EC}$, senão, $\frac{m}{n} > \frac{AD}{DB}$, então $\frac{m}{n} > \frac{AE}{EC}$. Podemos então escrever:

$$n \cdot AD < m \cdot DB \Rightarrow n \cdot AE < m \cdot EC.$$

$$n \cdot AD > m \cdot DB \Rightarrow n \cdot AE > m \cdot EC.$$

Resumindo, dados os segmentos AD, DB, AE e EC comensuráveis ou não, dizer que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, significa dizer que para todo m, $n \in \mathbb{N}$ as condições a seguir eram verificadas:

$$n \cdot AD = m \cdot DB \Leftrightarrow n \cdot AE = m \cdot EC.$$

$$n \cdot AD < m \cdot DB \Leftrightarrow n \cdot AE < m \cdot EC.$$

$$n \cdot AD > m \cdot DB \Leftrightarrow n \cdot AE > m \cdot EC.$$

Com a definição de Eudoxo para segmentos proporcionais, pode-se verificar a validade, por exemplo, do teorema de Tales, que demonstraremos mais adiante na seção 6.1.1, sem a omissão do caso em que os segmentos são incomensuráveis, como é feito nos livros didáticos de Matemática.

Desde a crise provocada pelas grandezas incomensuráveis na antiga Grécia, constatou-se novamente a necessidade de ampliar o conceito de números para além daqueles que podem ser representados pela razão de dois inteiros (com denominador diferente de zero), surgindo assim, os números irracionais que são aqueles que expressam medidas incomensuráveis com a unidade. Segundo BONGIOVANNI(BON05), os matemáticos levaram vinte séculos até construir um objeto matemático que representasse os números irracionais. Eles sabiam que a diagonal de um quadrado podia ser construída por régua e compasso e, portanto, existia. Entretanto, eles não sabiam como definir e operar representações numéricas para tal. Foi somente no século XIX que a façanha de dar uma definição consistente para esses objetos matemáticos se concretizou. A definição de Eudoxo, válida para grandezas quaisquer, foi fonte de inspiração para a criação dos números reais, que representam as medidas de quaisquer segmentos comensuráveis ou não.

4.3 A Reta Real

Segmentos de reta são grandezas geométricas e a comparação entre esses segmentos é uma operação no campo geométrico. Trataremos aqui da representação numérica dessa comparação, ou seja, traduziremos a operação geométrica por meio de um objeto aritmético. Se os números definidos até então não são suficientes para representar todos os casos de comparação, então esse objeto aritmético não é suficientemente perfeito. Vimos na seção 4.1 que a existência de grandezas incomensuráveis é determinante para a impossibilidade de se traduzir numericamente, por meio de racionais, a medida de muitos segmentos. Apesar disso, os números racionais são suficientes quando tratamos de medidas de grandezas comensuráveis. Trata-se, portanto, de uma insuficiência dos racionais e, se pretendemos corrigir essa insuficiência, devemos iniciar definindo cuidadosamente uma correspondência entre os pontos da reta e o conjunto $\mathbb{Q}$ e, logo após, tentar verificar onde reside a tal insuficiência.

4.3.1 Os Racionais na Reta

Como um meio de visualizar todos os números até aqui definidos tendo por objetivo a análise, a princípio, das relações de igualdade e ordem, construiremos uma regra que permita associar estes números aos pontos de uma reta. Para tal, imaginemos uma reta, na qual foram fixados um ponto O, chamado de *origem*, e um ponto P, diferente de O. O segmento $\overline{OP}$ será definido como unidade de comprimento, portanto, sua medida será 1. A reta OP será chamada de *reta real* ou *eixo real*. A origem O divide a reta que passa por O e P em duas semirretas, a que contém P será a semirreta positiva, enquanto a que não contém P será a semirreta negativa (ver figura 4.5).

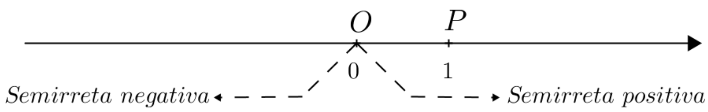


Figura 4.5: A reta real

Seja X um ponto qualquer da reta. Se o segmento $\overline{OP}$ couber um número exato n de vezes em $\overline{OX}$, diremos que a *abscissa* de X é o número natural n ou o número negativo $-n$, conforme X esteja na semirreta positiva OP ou não. Se o ponto X coincidir com O, teremos $n = 0$. Como o segmento $\overline{OP}$ é unitário, a abscissa do ponto P será o número 1. Na figura 4.6, representamos os casos em que X_1 e X_2 são os pontos de abscissas 3 e -5, respectivamente.

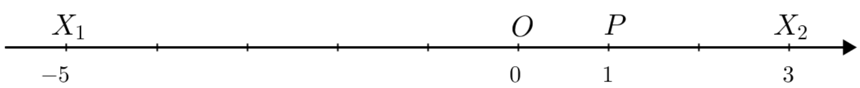


Figura 4.6: X_1 e X_2 são os pontos de abscissa 3 e -5, respectivamente.

De forma geral, se o ponto X pertencente à reta, é tal que o segmento $\overline{OX}$ é comensurável com o segmento unitário OP, então, existem m e n naturais e algum segmento u, tais que u cabe n vezes em $\overline{OP}$ e m vezes em $\overline{OX}$. Temos assim que,

$OP = n \cdot u$ e $OX = m \cdot u$. Se X está na semirreta positiva, diremos que sua abscissa é $\frac{m}{n}$, caso contrário, se X está na semirreta negativa, diremos que sua abscissa é $-\frac{m}{n}$. A Figura 4.7 ilustra o ponto X de abscissa $\frac{3}{8}$. Observe que existe um segmento u que cabe 8 vezes em $\overline{OP}$ e 3 vezes em $\overline{OX}$.

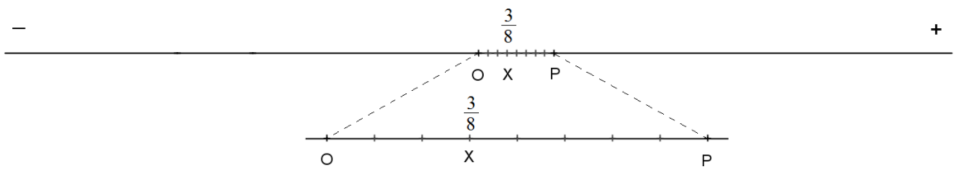


Figura 4.7: X é o ponto de abscissa $\frac{3}{8}$

Observe que todo racional corresponde a um único ponto da reta, mas, apesar disso, nem todo ponto da reta tem um correspondente número racional. A impossibilidade dessa correspondência reside no fato de $\mathbb{Q}$ não ser contínuo. Mas o que significa ser contínuo? E porque $\mathbb{Q}$ não é contínuo?

Podemos dizer que o tempo é contínuo, uma vez que ele decorre de maneira ininterrupta. O tempo não salta, digamos de 13h00min para 13h01min, deixando um lapso de um minuto. Ao deixarmos cair um objeto de uma ponte, encaramos seu movimento subsequente como contínuo, pois tal objeto passa por todas as altitudes entre sua posição inicial e sua posição final.

Intuitivamente, um processo contínuo é aquele que ocorre de forma gradual, sem interrupções ou mudanças abruptas. Atribuiremos, por exemplo, à reta a propriedade de ser contínua, visto que esta não possui "lacunas" ou "buracos". A seguir, trataremos da caracterização da continuidade por meio de um axioma. Tal teoria encontra-se na obra de CARAÇA(CAR02).

Em 1872, o matemático alemão Ricardo Dedekind publicou uma obra intitulada "Continuidade e Números Irracionais", onde encontra-se, pela primeira vez, um tratamento rigoroso do conceito de continuidade. Em sua obra, Dedekind caracteriza a continuidade por meio do seguinte princípio, que designaremos axioma ou postulado de Dedekind:

"Se uma repartição de todos os ponto da reta em duas classes é de tal natureza que todos os pontos de uma das classes está a esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida essa repartição de todos os pontos em duas classes, ou essa decomposição da reta em duas partes".

Em outras palavras, seja r uma reta e P um ponto sobre ela. É evidente que em relação ao ponto P, todos os pontos da reta se repartem em duas classes: a classe (A), dos pontos que estão à esquerda de P e a classe (B), dos pontos que estão a direita de P, conforme figura a seguir.

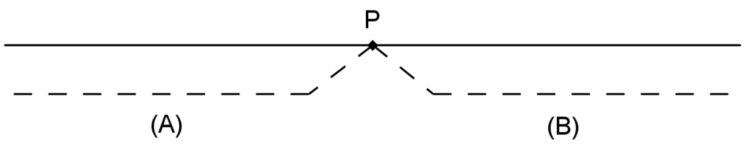


Figura 4.8: Conceito de corte

Sempre que, numa reta, se tem uma repartição dos seus pontos em duas classes (A) e (B) satisfazendo as duas condições,

i) nenhum ponto escapa da repartição;

ii) todo ponto da classe (A) está a esquerda de todo ponto da classe (B);

diz-se que se tem um corte, do qual (A) e (B) são as classes constitutivas; o corte constituído pelas duas classes representa-se por (A,B). Portanto, todo ponto P de uma reta produz nela um corte. Reciprocamente, sempre que se considere na reta um corte, haverá um ponto P dessa reta que produza esse corte, isto é, que separa as duas classes. Segundo Dedekind, pelo fato da reta possuir essa propriedade, pode-se afirmar que ela é contínua, ou seja, a reta satisfaz o axioma da continuidade de Dedekind.

Para determinar a continuidade do conjunto $\mathbb{Q}$, devemos verificar se os elementos desse conjunto satisfazem o axioma da continuidade de Dedekind. Para isso, vamos definir, no conjunto $\mathbb{Q}$, o conceito de corte.

Tem-se um corte no conjunto $\mathbb{Q}$ quando existirem duas classes (A) e (B) de números racionais tais que:

i) todo número racional está classificado ou em (A), ou em (B);

ii) todo número de (A) é menor que todo número de (B).

Vejamos alguns exemplos de cortes em $\mathbb{Q}$:

1. $A = \{r \in \mathbb{Q}; r < \frac{2}{3}\}$ e $B = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq \frac{2}{3}\}$ determinam o corte que define o número racional $\frac{2}{3}$, pois neste caso, ele é o elemento que separa as duas classes.

2. $A_1 = \{r \in \mathbb{Q}; r^2 < 2\}$ e $A_2 = \{r \in \mathbb{Q}; r^2 > 2\}$ determinam o corte que define o número cujo quadrado é igual a 2, ou seja, o número $\sqrt{2}$. Observe que esse número não é racional. De fato, se existisse $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$, teríamos que existem m, $n \in \mathbb{N}$ primos entre sí, tais que $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Então $m^2 = 2n^2$, ou seja, m^2 é par e, consequentemente, m é par, então, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2k$. Daí:

$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2.$$

Da última igualdade, observa-se que n^2 é par e, consequentemente, n é par, mas isso é uma contradição, pois, por hipótese, m e n são primos entre sí.

3. $A_1 = \{r \in \mathbb{Q}; r^3 < 5\}$ e $A_2 = \{r \in \mathbb{Q}; r^3 > 5\}$ determinam o corte que define o número que elevado a 3 resulta em 5. Não existe número racional que satisfaça essa condição. Na seção 6.2, definiremos ferramentas que possibilitam verificar que $\sqrt[3]{5}$ não é um número racional de forma mais simples que a justificativa apresentada para o caso do número $\sqrt{2}$; no momento, acreditemos que não existe tal racional.

Portanto, concluímos que o conjunto $\mathbb{Q}$ não satisfaz ao axioma da continuidade de Dedekind, uma vez que, nos exemplos 2 e 3 acima, não existe número racional que determine os cortes definidos. Portanto, o conjunto $\mathbb{Q}$ não é contínuo e essa é a razão da impossibilidade da bijeção.

Observada a insuficiência de $\mathbb{Q}$, definiremos por *Conjunto dos Números Reais* e representaremos pelo símbolo $\mathbb{R}$, o conjunto de todos os elementos de separação de um corte qualquer no conjunto $\mathbb{Q}$. Se o elemento de separação do corte for racional, o número real coincidirá com esse racional, caso contrário, se o elemento de separação não for racional, o número real será chamado de Irracional. Portanto, por meio dos Cortes de Dedekind define-se o conjunto dos números reais introduzindo os números irracionais ao conjunto dos números racionais. Sendo assim, temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Observe que, para definir um número racional qualquer, bastam dois inteiros, enquanto a definição de número irracional é muito mais complexa, visto que, para tal são necessários dois conjuntos infinitos de racionais.

Através da construção acima, observa-se que qualquer ponto da reta será associado por um único número real e, reciprocamente, qualquer número real será associado a um único ponto da reta. Temos, portanto, uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e o conjunto dos números reais. Por esse motivo, a reta mencionada é chamada de *reta real*.

4.4 Operações e Ordem na Reta Real

Segundo LIMA(LIM13), o conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Esta interrelação entre Geometria e Aritmética, entre pontos e números, é responsável por grandes progressos da Matemática atual, pois, por um lado, cria representações geométricas para vários conceitos como, por exemplo, o de funções, por outro lado, torna possível representações analíticas para objetos geométricos como, por exemplo, a reta, o plano, as elipses, etc. Além disso, tal interpretação geométrica dos números reais fornece uma visão intuitiva bastante esclarecedora sobre temas como a relação de ordem, a soma e também o produto de números reais. A seguir, será apresentada a interpretação geométrica desses temas.

Consideremos X e Y pontos na reta real dos quais x e y, respectivamente, são as abscissas. Diz-se que x é menor do que y, e escreve-se $x < y$ quando o sentido de percurso de X para Y é o mesmo de O para P (figura 4.9).

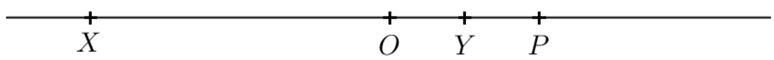


Figura 4.9: $x < y$

Quanto à soma, $x + y$ é a abscissa do ponto Z tal que o segmento XZ tem o mesmo comprimento e o mesmo sentido de percurso de OY (figura 4.10).

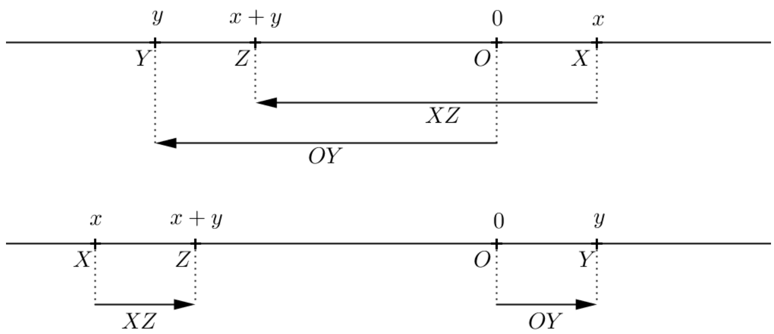


Figura 4.10: Z é o ponto de abscissa $x + y$

O produto xy dos números reais x, y pode ser definido geometricamente com base no Teorema de Tales, quando $x > 0$ e $y > 0$, como mostra a figura 4.11. Nos demais casos, é só mudar o sinal de xy convenientemente.

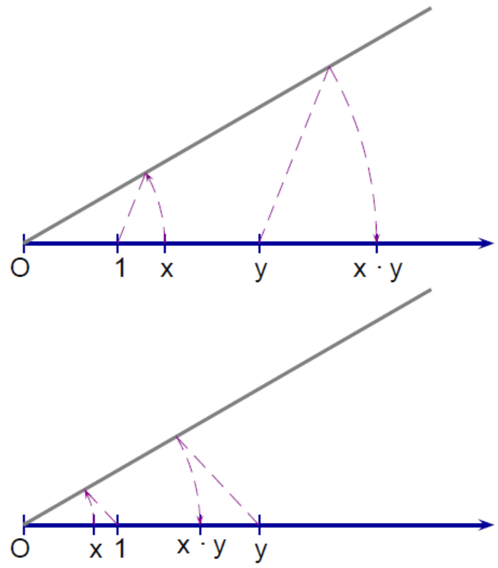


Figura 4.11: O produto de números reais.
Fonte: LIMA(LIM13)

Note que, como a determinação geométrica da soma é feita por simples justaposição, o processo depende da origem, mas não da unidade. Porém, para determinar geometricamente o produto devemos ter como referência o segmento unitário.

Exposições mais detalhadas sobre os números reais, suas propriedades e operações podem ser encontradas em referências como, NIVEN (NIV84), LIMA(LIM06)(LIM13)(LCWM01), CARAÇA(CAR02) e FIGUEIREDO(FIG02).

No que diz respeito aos conjuntos númericos, é importante salientar que além dos números reais, existem outros números de equivalente importância denominados números complexos. O *conjunto dos números complexos*, representado pelo símbolo $\mathbb{C}$, é o conjunto dos pares ordenados de números reais com as operações de igualdade, adição e multiplicação definidas da seguinte forma:

- Igualdade: $(a,b) = (c,d) \;\Leftrightarrow\; a = c \;\text{ e }\; b = d.$

- Adição: $(a,b) + (c,d) = (a + c,b + d)$.

- Multiplicação: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,ad + bc)$.

Observações:

- Dado um subconjunto R' de $\mathbb{C}$, da forma

$$R' = \{(a,b) \in \mathbb{C}/b = 0\},$$

verifica-se uma aplicação bijetora $f : \mathbb{R} \to R'$ que conserva as operações. Sendo assim, operar com $(x,0)$ leva a resultados análogos aos obtidos operando com x. Com isso, podemos considerar $\mathbb{R} = R'$, ou seja, o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

- Chamamos unidade imaginária e representamos por i o número complexo $(0,1)$.

Note que:

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = \underbrace{(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)}_{\text{Definição de multiplicação em } \mathbb{C}} = (-1,0) = -1.$$

Esta é a propriedade básica da unidade imaginária.

- Dado um número complexo $z = (x,y)$, temos:

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1,y \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (x,0) + (y,0) \cdot (0,1)\text{, isto é} \\ z &= x + y \cdot i. \end{aligned}$$

Assim, todo número complexo $z = (x,y)$ pode ser escrito sob a forma $z = x + y \cdot i$, chamada *forma algébrica*.

- Do ponto de vista geométrico, os números complexos são representados pelos pontos do plano cartesiano. Na figura 4.12, está representado o número complexo $z = (a,b) = a + b \cdot i$

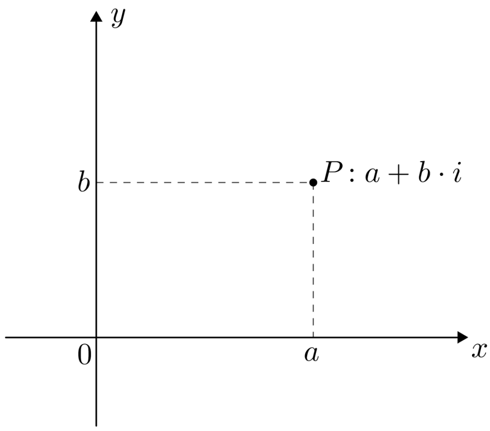


Figura 4.12: Representação geométrica do número complexo z

Um estudo mais completo do conjunto dos números complexos não faz parte dos objetivos desse trabalho, mas pode ser encontrado em IEZZI(IEZ93).

Capítulo 5

A Representação Decimal dos Números Reais

Neste capítulo exploraremos uma forma alternativa para representar os números reais denominada *representação decimal*. Essa representação é, em algumas situações, mais eficiente para efetuar cálculos, ordenar e obter propriedades gerais dos números reais. Além disso, definiremos e determinaremos aproximações decimais dos números irracionais $\sqrt{2}$, π, e e φ, isto é, a raiz quadrada de 2, pi, o número de Euler e o número de ouro, utilizando padrões algébricos e uma planilha eletrônica.

5.1 Expressão Decimal

Uma expressão decimal é um símbolo da forma:

$$\alpha = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots,$$

onde a_0 é um número inteiro e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ são algarismos, isto é, números inteiros compreendidos entre 0 e 9.

Essa sequência de algarismos precedida de um número inteiro representa, por definição, o número real

$$\alpha = a_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n} + ... \tag{5.1}$$

Observações:

1. O fato de a_0 ser um número inteiro nos permite escrevê-lo como $a_0 = \beta_m\beta_{m-1}...\beta_0$ ou $a_0 = \beta_m \cdot 10^m + \beta_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + \beta_0$, com isso o número real α pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta_m\beta_{m-1}...\beta_0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots \quad \text{ou} \\ \alpha &= \beta_m \cdot 10^m + \beta_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + \beta_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n} + ..., \end{aligned}$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

2. Dado um número racional fracionário qualquer, para determinar sua representação decimal, devemos dividir seu numerador pelo seu denominador. Por exemplo, para verificar que a representação decimal do número racional $\frac{29}{4}$ é 7,25, devemos dividir 29 por 4.

3. As reticências no final da igualdade (5.1) indicam que se trata de uma soma com infinitas parcelas, uma vez que existem números racionais ou irracionais com infinitas parcelas em sua representação decimal (ver seção 5.2.2). Por exemplo, o resultado da divisão de 4 por 11 é 0,363636...

4. Quando, na representação decimal de um número real $\alpha = \beta_m...\beta_0{,}\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = 0$ para todo $n > n_0$, simplificaremos a representação

para $\alpha = \beta_m\beta_{m-1}...\beta_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n$. Por exemplo, 43,12540000... = 43,1254.

São exemplos de representações decimais:

- $1{,}37 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} = \frac{137}{100}$;
- $0{,}003 = 0 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{3}{1000}$;
- $4{,}125 = 4 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{33}{8}$;
- $1{,}4141... = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{1}{10000} + ...$;
- $153{,}25 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{613}{4}$.

5.2 Representações Decimais Finitas e Infinitas

A seguir determinaremos quais propriedades devem ter as frações afim de que seu correspondente número decimal seja finito ou infinito. Além disso, deduziremos um método para determinar a fração correspondente para alguns números decimais específicos (decimais finitos e dízimas periódicas).

5.2.1 Representações Decimais Finitas

Algumas representações de números reais são finitas, como por exemplo:

$$0{,}75 \text{ ou } 4{,}2 \text{ ou } 0{,}3875$$

O resultado a seguir caracteriza os números decimais de representação finita.

Um número real tem representação decimal finita se, e somente se, é racional e pode ser escrito como fração cujo denominador é potência de 10.

De fato, seja α um número real cuja representação decimal é finita. Então, existem dígitos α_1,..., α_n e a_0 inteiro tais que, $\alpha = a_0{,}\alpha_1 \dots \alpha_n$, ou seja, $\alpha = a_0 + \frac{\alpha_1}{10} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\alpha = \frac{10^n a_0 + 10^{n-1}\alpha_1 + ... + \alpha_n}{10^n}.$$

Portanto, α é racional e o denominador de sua representação fracionária pode ser escrito como potência de 10. Por outro lado, sendo α um número racional cujo denominador de sua representação fracionária é uma potência de 10, ou seja, $\alpha = \frac{k}{10^n}$, onde n é um número inteiro não negativo e, por simplicidade, consideremos o caso em que k é um inteiro positivo. Existe m inteiro não negativo e dígitos β_m, β_{m-1}, ..., β_0 tais que $k = 10^m\beta_m + 10^{(m-1)}\beta_{(m-1)} + ... + \beta_0$. Obtemos assim que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{10^m\beta_m + 10^{(m-1)}\beta_{(m-1)} + ... + \beta_0}{10^n} = \\
&= \frac{10^m\beta_m}{10^n} + \frac{10^{(m-1)}\beta_{(m-1)}}{10^n} + ... + \frac{\beta_0}{10^n} = \\
&= 10^{(m-n)}\beta_m + 10^{(m-n-1)}\beta_{(m-1)} + ... + 10^{-n}\beta_0.
\end{aligned}$$

Consideremos os três casos possíveis:

- Caso $m = n$

  Neste caso, teremos:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 10^{(m-n)}\beta_m + 10^{(m-n-1)}\beta_{(m-1)} + ... + 10^{-n}\beta_0 \\
&= 10^0\beta_m + 10^{-1}\beta_{(m-1)} + ... + 10^{-n}\beta_0 = \\
&= \beta_m + \frac{\beta_{(m-1)}}{10} + ... + \frac{\beta_0}{10^n} = \\
&= \beta_m, \underbrace{\beta_{(m-1)} \cdots \beta_0}_{m\ algarismos}.
\end{aligned}$$

Então, se $m = n$ teremos um número decimal com m dígitos após a vírgula. Ou seja, α é um decimal finito.

- Caso $m > n$

  Neste caso, seja d um inteiro positivo tal que $d = m - n$. Teremos:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 10^{(m-n)}\beta_m + 10^{(m-n-1)}\beta_{(m-1)} + ... + 10^{-n}\beta_0 = \\
&= 10^d\beta_m + 10^{d-1}\beta_{(m-1)} + ... + 10^{(d-d)}\beta_{(n)} + 10^{-1}\beta_{(n-1)} ... + 10^{-n}\beta_0 = \\
&= 10^d\beta_m + 10^{d-1}\beta_{(m-1)} + ... + 10^0\beta_{(n)} + \frac{\beta_{(n-1)}}{10} + ... + \frac{\beta_0}{10^n} = \\
&= \beta_m\beta_{(m-1)}...\beta_{(n)}, \underbrace{\beta_{(n-1)}...\beta_0}_{n\ algarismos}.
\end{aligned}
$$

  Então, se $m > n$ teremos um número decimal com $n-1$ algarismos após a vírgula. Ou seja, α é um decimal finito.

- Caso $m < n$

  Neste caso, seja d um inteiro positivo tal que $d = n - m$. Teremos:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 10^{(m-n)}\beta_m + 10^{(m-n-1)}\beta_{(m-1)} + ... + 10^{-n}\beta_0 = \\
&= 10^{(-d)}\beta_m + 10^{-d-1}\beta_{(m-1)} + ... + 10^{-n}\beta_0 = \\
&= 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + ... + 0 \cdot 10^{(-d+1)} + 10^{(-d)}\beta_m + \\
&\quad +10^{-d-1}\beta_{(m-1)} + ... + 10^{(2m-n)}\beta_0 = \\
&= 0, \underbrace{00...0\beta_m\beta(m-1)...\beta_0}_{2m-n\ algarismos}.
\end{aligned}
$$

  Então, se $m < n$ teremos um número decimal com $2m - n$ algarismos após a vírgula. Ou seja, α é um decimal finito.

Portanto, um número real tem representação decimal finita se, e somente se, é racional e pode ser escrito como fração cujo denominador é potência de 10.

Observação: uma consequência do resultado anterior é que um número real na forma irredutível $\frac{p}{q}$, tem uma representação decimal finita se, e somente se, q não tiver outros fatores primos além de 2 e 5. De fato, essa condição também é válida, uma vez que, qualquer potência de 10 admite apenas fatores 2 e 5 na sua decomposição.

5.2.2 Representações Decimais Infinitas

Existem números reais cuja representação decimal é infinita. Observe alguns exemplos:

$$\alpha = 1{,}333... \text{ ou } \beta = 0{,}454545... \text{ ou } \pi = 3{,}141592...$$

Nos casos de α e β, está claro quais serão os próximos digitos que não foram explicitados, pois existe um padrão de repetição (periódico) entre eles. Expressões decimais infinitas e periódicas são chamadas de *Dízimas Periódicas*. Já no caso de π, que é a constante determinada pela razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro (ver seção 5.3.2), a expressão decimal apresentada não nos permite saber quais serão os dígitos subsequentes.

Neste trabalho, usaremos a notação habitual para indicar uma dízima periódica, isto é, uma barra sobre a parte que se repete:

$$1{,}333... = 1{,}\overline{3} \text{ ou } 0{,}454545... = 0{,}\overline{45} \text{ ou } 1{,}0232323... = 1{,}0\overline{23}$$

Mostraremos a seguir que *um número real tem representação decimal periódica se, e somente se, ele é racional.* Antes de verificar a primeira parte da afirmação, vejamos um caso particular. Considere a dízima periódica

$$\alpha = 129{,}1373737...$$

Vamos efetuar duas multiplicações onde os fatores serão escolhidos de tal modo que ao subtrairmos esses produtos, as partes periódicas infinitas se cancelarão. Neste exemplo, os fatores serão 10^1 e 10^3.

$$\begin{aligned} 10^3 \cdot \alpha &= 129137{,}3737... \\ 10^1 \cdot \alpha &= 1291{,}373737... \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} 10^3 \cdot \alpha - 10^1 \cdot \alpha &= (129137{,}3737...) - (1291{,}373737...) \\ 990 \cdot \alpha &= 127846 \\ \alpha &= \frac{127846}{990} \\ \alpha &= \frac{63923}{495}. \end{aligned}$$

Para verificar a afirmação acima, seja α um número real cuja representação decimal é periódica. Podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$\alpha = a_0{,}\alpha_1...\alpha_s\overline{\beta_1...\beta_t},$$

onde a_0 é um número inteiro qualquer, os dígitos α_1, ..., α_s representam os s algarismos consecutivos da parte não periódica e os dígitos β_1, ..., β_t representam os t algarismos da parte periódica. Assim, podemos representar α por

$$\alpha = a_0 + 0{,}\alpha_1...\alpha_s\overline{\beta_1...\beta_t}.$$

Multiplicaremos α pelos fatores 10^{s+t} e 10^s, em seguida subtrairemos os resultados determinando o valor de α.

$$\begin{aligned}
10^{s+t}\cdot\alpha &= 10^{s+t}a_0+\alpha_1...\alpha_s\beta_1...\beta_t,\overline{\beta_1...\beta_t}\\
10^{s}\cdot\alpha &= 10^{s}a_0+\alpha_1...\alpha_s,\overline{\beta_1...\beta_t}\\
10^{s+t}\cdot\alpha-10^{s}\cdot\alpha &= (10^{s+t}-10^{s})a_0+\alpha_1...\alpha_s\beta_1...\beta_t,\overline{\beta_1...\beta_t}-\alpha_1...\alpha_s,\overline{\beta_1...\beta_t}\\
(10^{s+t}-10^{s})\cdot\alpha &= (10^{s+t}-10^{s})a_0+\alpha_1...\alpha_s\beta_1...\beta_t-\alpha_1...\alpha_s\\
\alpha &= \frac{(10^{s+t}-10^{s})a_0+\alpha_1...\alpha_s\beta_1...\beta_t-\alpha_1...\alpha_s}{10^{s+t}-10^{s}}\\
\alpha &= a_0+\frac{\alpha_1...\alpha_s\beta_1...\beta_t-\alpha_1...\alpha_s}{10^{s+t}-10^{s}}.
\end{aligned}$$

Observe o número decimal α pode ser escrito como soma de um número inteiro com um número racional, consequentemente esse decimal é também racional. Portanto, qualquer número com representação decimal periódica é número racional. Por outro lado, deve-se observar que a representação decimal de um número racional é determinada a partir da divisão do numerador da representação fracionária pelo seu denominador. Como uma divisão de dois inteiros admite um número finito de restos, conclui-se que algum resto irá se repetir durante o processo de divisão fazendo com que os restos posteriores a este também se repitam causando a repetição dos quocientes correspondentes. Considere, por exemplo, a conversão da fração $\frac{1013}{990}$ para sua forma decimal. Como o divisor é 990, sabemos que os possíveis 990 restos são: 0, 1, 2,..., 989. Dessa forma, se o quociente for um número decimal infinito, sabemos que haverá repetição, pois o conjunto dos possíveis restos é finito. Veja na figura 5.1 que a repetição ocorre com o aparecimento, pela segunda vez, do resto 320.

Observações:

- 0,999... = 1. De fato, Considere o número

$$\alpha = 0{,}999....$$

$$
\begin{array}{l|l}
1013 & 990 \\ \cline{2-2}
\ \ 2300 & 1,0232323... \\
\ \ \ 3200 & \\
\ \ \ \ 2300 & \\
\ \ \ \ \ 3200 & \\
\ \ \ \ \ \ 2300 & \\
\ \ \ \ \ \ \ 3200 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 230 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots &
\end{array}
$$

Figura 5.1: 1013÷990

Multiplicando α por 10 e subtraindo o resultado por α, obtemos

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 10 \cdot \alpha & = & 9{,}999... \\
- & \alpha & = & 0{,}999... \\
 & 9\alpha & = & 9 \\
 & \alpha & = & 1.
\end{array}
$$

- *Todo número decimal finito pode ser escrito na forma de dízima periódica.*

  Podemos mostrar isso de uma maneira bem simples. Basta acrescentar uma fila com uma infinidade de zeros no final do número. Por exemplo, o número decimal finito 2,37 pode ser escrito como 2,3700000.... Além dessa, existe outra maneira. Com base na igualdade 0,999... = 1, dividindo-se a igualdade por 10, 100, 1000, 10000, etc, obtém-se uma série de resultados:

$$\begin{aligned} 0{,}1 &= 0{,}0999... \\ 0{,}01 &= 0{,}00999... \\ 0{,}001 &= 0{,}000999... \\ 0{,}0001 &= 0{,}0000999..., \text{ etc} \end{aligned}$$

Este resultado pode ser usado para transformar qualquer decimal finito em infinito. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 2{,}37 &= 2{,}36999... \\ 0{,}02 &= 0{,}01999... \\ 12{,}346 &= 12{,}345999... \end{aligned}$$

Até então, discutimos apenas sobre decimais finitos e decimais infinitos e periódicos, mas e quanto aos decimais infinitos e não periódicos, que tipo de número eles são?

Considere o seguinte número:

$$\alpha = 0{,}101001000100001...$$

Este número é formado por uma sequência de uns seguidos de zeros com inicialmente um zero, depois dois zeros, depois três zeros e assim por diante. Este número corresponde ao ponto da reta real para o qual converge a seguinte sequência de pontos:

0,1

0,101

0,101001

0,1010010001

0,101001000100001, etc.

O número α não é racional, pois sua representação decimal não é periódica. Dizemos, portanto que este número é irracional.

Pelas características de um número irracional, fica impossível expressar, na forma decimal, o seu valor exato. Quando trabalhamos com números irracionais na forma decimal usamos aproximações de seu valor, isto é, usamos aproximações por racionais. O número π, por exemplo, que é irracional pode ser aproximado por 3 ou 3,1 ou 3,14 ou 3,141 ou 3,1415 com erro de aproximação inferior a 1 ou $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{10^2}$ ou $\frac{1}{10^3}$ ou $\frac{1}{10^4}$, respectivamente. Deste modo, como veremos adiante, a sequência crescente de números racionais

$$3 < 3{,}1 < 3{,}14 < 3{,}141 < 3{,}1415 < ...$$

são valores cada vez mais próximos do valor de π.

De forma geral, um número real com representação decimal infinita sempre poderá ser aproximado por valores racionais. O número

$$\alpha = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,$$

quando aproximado por

$$\alpha_n = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

o erro cometido não será superior a $\frac{1}{10^n}$, isto é, $0 \leq \alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n}$.

A partir do que foi desenvolvido, podemos afirmar que os números reais constituem a coleção de todos os números que possuem representação decimal, finita ou infinita, ou seja, é o conjunto formado por números racionais ou irracionais. Do ponto de vista geométrico, $\mathbb{R}$ é a coleção de todas as possíveis medidas de segmentos sendo estes comensuráveis ou incomensuráveis com uma unidade pré-fixada.

5.3 Representações Decimais de Alguns Irracionais

O número racional $\frac{1}{3}$ facilmente localizado na reta real, corresponde a um dos pontos da trissecção do intervalo entre [0,1] (ver figura 5.2).

Figura 5.2: Localização de $\frac{1}{3}$

Com relação a representação decimal desse número, temos:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \ldots.$$

Essa igualdade expressa $\frac{1}{3}$ como uma soma de infinitos termos. Apesar de termos uma infinidade de parcelas, a soma tem valor bem definido, a saber, $\frac{1}{3}$. Marcando os pontos correspondentes às somas parciais

$$0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ \ldots.$$

na reta real, obteremos uma sequência de pontos que se aproxima cada vez mais de $\frac{1}{3}$. Se

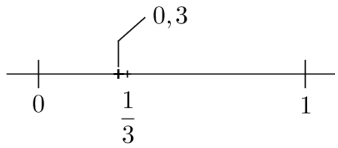


Figura 5.3: abscissa 0,3 na reta.

pudéssemos colocar uma lente de aumento sobre o intervalo entre 0,3 e $\frac{1}{3}$, enxergaríamos a situação representada nas figuras 5.3 e 5.4. De modo geral, note que qualquer número com representação decimal infinita está associado a algum ponto da reta.

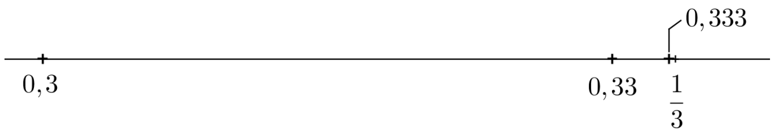


Figura 5.4: Convergindo para $\frac{1}{3}$.

Exploraremos a seguir, algumas representações decimais de números irracionais.

5.3.1 Representação Decimal de $\sqrt{2}$

Podemos determinar a localização do ponto de abscissa $\sqrt{2}$ na reta real através da seguinte construção.

Sobre a reta real, construiremos o quadrado $OPQR$ de lado $\overline{OP}$ de comprimento igual a 1. A medida da diagonal desse quadrado pode ser deduzida da seguinte forma. Seja $x \in \mathbb{R}$ a medida da diagonal do quadrado. Como $\overline{OP}$ é um dos lados desse quadrado e $OP = 1$, usando o teorema de pitágoras, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 \\ x^2 &= 2, \text{ assim,} \\ x &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Agora seja X um ponto da reta tal que $\overline{OX}$ é congruente a diagonal do quadrado construído (ver figura 5.5). Portanto, $\sqrt{2}$ é a abscissa do ponto X.

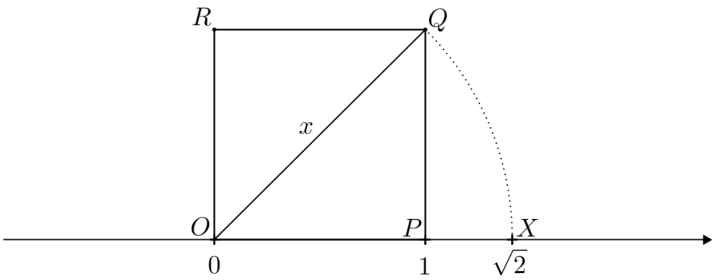


Figura 5.5: X é o ponto de abscissa $\sqrt{2}$

Com relação a representação decimal de $\sqrt{2}$, observe que $1 < \sqrt{2} < 2$, pois $1^2 < 2 < 2^2$. Dividindo-se o intervalo entre 1 e 2 em 10 partes, após devidos cálculos (ver figura 5.6), observa-se que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, pois $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$.

Note que, nesta etapa de obtenção da aproximação de $\sqrt{2}$ com um algarismo decimal, o erro para o valor exato cometido é de, no máximo, $0{,}1 = \frac{1}{10}$.

Agora, subdividiremos o intervalo entre 1,4 e 1,5 em 10 partes e, após os devidos cálculos (ver figura 5.7), observa-se que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, pois $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$. Já nesta etapa, o erro cometido é de, no máximo, $0{,}01 = \frac{1}{10^2}$.

Continuando o procedimento, subdividiremos o intervalo entre 1,41 e 1,42 em 10 partes e, após os devidos cálculos (ver figura 5.8), observa-se que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, pois $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$. Nesta etapa, o erro cometido é de, no máximo, $0{,}001 = \frac{1}{10^3}$.

x	x^2
1,0	1,00
1,1	1,21
1,2	1,44
1,3	1,69
1,4	1,96
1,5	2,25
1,6	2,56
1,7	2,89
1,8	3,24
1,9	3,61
2,0	4,00

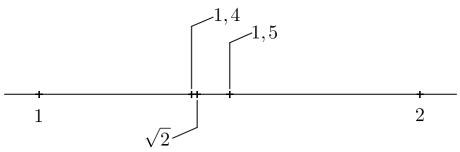


Figura 5.6: aproximação decimal de $\sqrt{2}$

x	x^2
1,40	1,9600
1,41	1,9881
1,42	2,0164
1,43	2,0449
1,44	2,0736
1,45	2,1025
1,46	2,1316
1,47	2,1609
1,48	2,1904
1,49	2,2201
1,50	2,2500

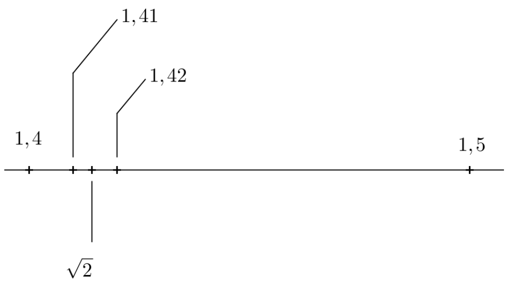


Figura 5.7: aproximação por centésimos de $\sqrt{2}$

x	x^2
1,410	1,988100
1,411	1,990921
1,412	1,993744
1,413	1,996569
1,414	1,999396
1,415	2,002225
1,416	2,005056
1,417	2,007889
1,418	2,010724
1,419	2,013561
1,420	2,016400

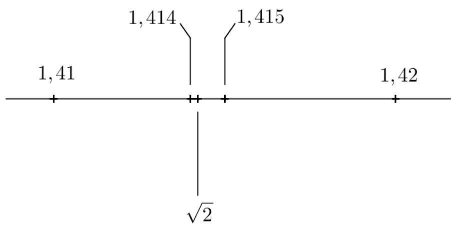


Figura 5.8: aproximação por milésimos de $\sqrt{2}$

Podemos continuar esse processo subdividindo cada intervalo encontrado sempre em 10 partes. Dessa forma, encontraremos os próximos termos de duas sequências, uma pela esquerda e outra pela direita, de números que se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$. Com isso, teremos aproximações cada vez melhores para o número $\sqrt{2}$ (ver figura 5.9).

$$1 < 1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < ... < \sqrt{2} < ... < 1{,}415 < 1{,}42 < 1{,}5 < 2.$$

Este processo não tem fim e a sequência de algarismos não terá nenhum padrão perió-

x	x^2
1,4140	1,99939600
1,4141	1,99967881
1,4142	1,99996164
1,4143	2,00024449
1,4144	2,00052736
1,4145	2,00081025
1,4146	2,00109316
1,4147	2,00137609
1,4148	2,00165904
1,4149	2,00194201
1,4150	2,00222500

x	x^2
1,41420	1,9999616400
1,41421	1,9999899241
1,41422	2,0000182084
1,41423	2,0000464929
1,41424	2,0000747776
1,41425	2,0001030625
1,41426	2,0001313476
1,41427	2,0001596329
1,41428	2,0001879184
1,41429	2,0002162041
1,41430	2,0002444900

x	x^2
1,414210	1,999989924100
1,414211	1,999992752521
1,414212	1,999995580944
1,414213	1,999998409369
1,414214	2,000001237796
1,414215	2,000004066225
1,414216	2,000006894656
1,414217	2,000009723089
1,414218	2,000012551524
1,414219	2,000015379961
1,414220	2,000018208400

Figura 5.9: sequência de aproximações de $\sqrt{2}$

dico, pois, se tivesse, a representação decimal de $\sqrt{2}$ seria finita ou periódica e, conforme provado na seção 5.2.2, ele seria racional. Portanto, a representação decimal de $\sqrt{2}$ é infinita e não-periódica. Uma aproximação decimal para $\sqrt{2}$ com 65 algarismos decimais será:

$$1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799.$$

5.3.2 Representação Decimal de π

O número π é uma das constantes mais importantes da Matemática. Esse número é, por definição, o quociente entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro.

$$\pi = \frac{C}{d}$$

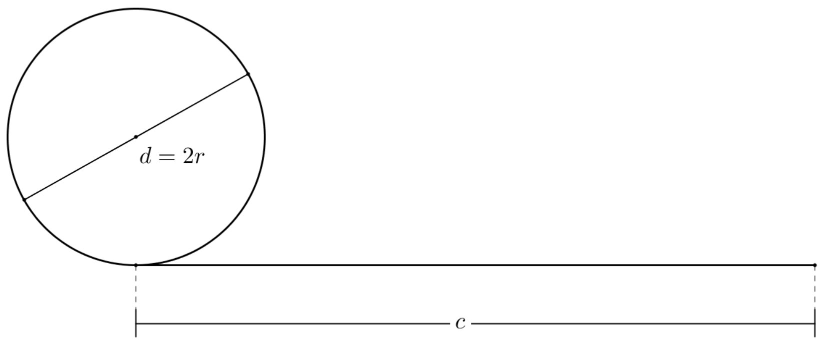


Figura 5.10: c é o comprimento da circunferência de diâmetro d

Segundo SILVEIRA(SIL01), o rolar das ondas numa praia, o trajeto aparente diário das estrelas no céu, o espalhamento de uma colônia de cogumelos, o movimento das engrenagens e rolamentos, a propagação dos campos eletromagnéticos e um sem número de fenômenos e objetos, do mundo natural e da Matemática, estão associados às ideias de simetria circular e esférica. Ora, o estudo e uso de círculos e esferas, de um modo quase que inexorável, acaba usando π, daí a ubiquidade desse número, que é uma das constantes mais importante e estudadas da Matemática. É importante chamarmos a atenção para o fato que também são frequentes as ocorrências de π em estudos onde aparentemente, principalmente para uma pessoa de pouca formação matemática, não estariam envolvidas simetrias circulares: na normalização da distribuição normal de probabilidades, na distribuição assintótica dos números primos, na construção de números primos próximos a inteiros dados, e mil e uma outras situações.

Mas qual é o valor de π? Um fato não elementar é que π é um número irracional. A justificativa para esse fato pode ser encontrada em OLIVEIRA(OLI13) e não será apresentada aqui, uma vez que requer teorias mais avançadas do que se pretende neste texto.

Dada a irracionalidade de π, não podemos determinar seu valor exato, sendo assim, daremos uma aproximação por meio de números racionais dessa importante constante através do método a seguir.

Dada uma circunferência de diâmetro unitário, se conseguirmos aproximar seu comprimento, aproximaremos também o valor de π, uma vez que:

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{1} = C$$

Determinaremos aproximações do comprimento dessa circunferência por meio dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a ela. Antes de expressar fórmulas gerais para tais perímetros, estudaremos um caso particular. Observe na figura 5.11 que o comprimento da circunferência é maior que o perímetro do octógono regular inscrito $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$ e menor que o perímetro do octógono regular circunscrito $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Uma aproximação do comprimento da circunferência e por sua vez de π, será dada através dos perímetros desses octógonos.

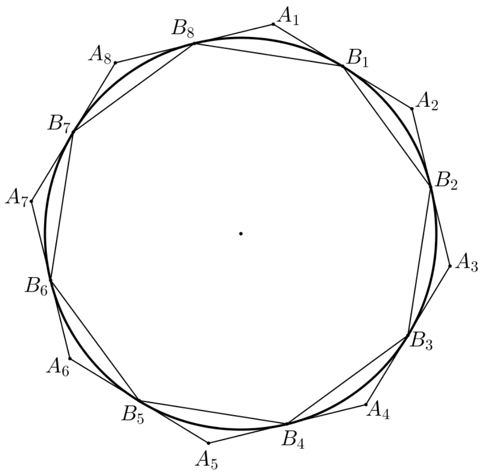


Figura 5.11: Aproximações por octógonos inscrito e circunscrito

- Para o octógono inscrito:

Devemos determinar a medida do lado $\overline{B_1B_2}$ do octógono, pois multiplicando tal segmento por 8, obtemos seu perímetro. Sendo assim, seja O o centro da circunferência. Observe na figura 5.12 que o triângulo B_1OB_2 é isósceles de base $\overline{B_1B_2}$ e lados congruentes $\overline{OB_1}$ e $\overline{OB_2}$. Além disso, o ângulo $B_1\hat{O}B_2$ mede $\frac{360^o}{8} = 45^o$. Seja M o ponto médio de $\overline{B_1B_2}$, temos que o segmento $\overline{OM}$ é perpendicular ao segmento $\overline{B_1B_2}$ e o ângulo $B_1\hat{O}M$ mede $\frac{45^o}{2} = 22{,}5^o$, pois o triângulo B_1OB_2 é isósceles. Portanto, usando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, obtemos:

$$\begin{aligned} sen\ 22{,}5^o &= \frac{B_1M}{B_1O} = \frac{B_1M}{\frac{1}{2}} \\ B_1M &= \frac{sen\ 22{,}5^o}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o perímetro do octógono regular inscrito mede

$$8 \cdot B_1B_2 = 8 \cdot 2 \cdot B_1M = 8 \cdot 2 \cdot \frac{sen\ 22{,}5^o}{2} = 8 \cdot sen\ 22{,}5^o.$$

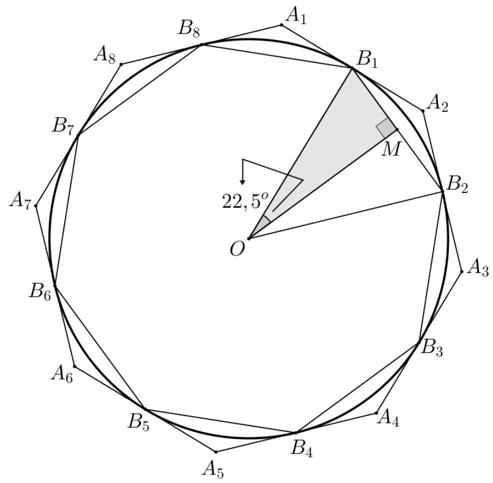


Figura 5.12: Octógono inscrito

- Para octógono circunscrito:

Devemos determinar a medida do segmento $\overline{A_1A_2}$, pois multiplicando tal segmento por 8 obtém-se o perímetro do octógono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Observe na figura 5.13 que, por construção, B_1 é o ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$, temos que o segmento $\overline{OB_1}$ é perpendicular ao segmento $\overline{A_1A_2}$ já que este é tangente à circunferência. O triângulo A_1OA_2 é isósceles de base $\overline{A_1A_2}$ e lados congruentes $\overline{OA_1}$ e $\overline{OA_2}$. Sendo assim, o ângulo $A_1\hat{O}B_1$ mede $\frac{45^o}{2} = 22{,}5^o$. Além disso, Como $\overline{OB_1}$ é o raio da circunferência, temos, $OB_1 = \frac{1}{2}$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} tan\ 22{,}5^o &= \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_1B_1}{\frac{1}{2}}, \text{ logo,} \\ A_1B_1 &= \frac{tan\ 22{,}5^o}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o perímetro do octógono regular circunscrito mede

$$8 \cdot A_1A_2 = 8 \cdot 2 \cdot A_1B_1 = 8 \cdot 2 \cdot \frac{tan\ 22{,}5^o}{2} = 8 \cdot tan\ 22{,}5^o.$$

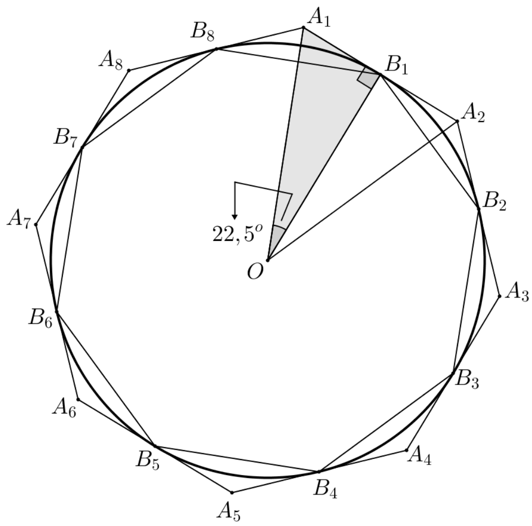


Figura 5.13: Octógono circunscrito

Concluímos que, o valor de π é tal que:

$$8 \cdot sen\ 22{,}5^o < \pi < 8 \cdot tan\ 22{,}5^o.$$

Usando uma planilha eletrônica, obtemos as seguintes aproximações, cujo número de casas decimais varia de acordo com a capacidade computacional:

$$3{,}06146745892072 < \pi < 3{,}31370849898476.$$

Podemos usar o mesmo raciocínio para um polígono regular de 9 lados, 10 lados, 11 lados, etc. O mais importante disso é que, quanto maior o número de lados do polígono inscrito ou circunscrito, mais próximos do comprimento da circunferência estaremos, ou seja, inscrevendo e circunscrevendo polígonos com quantidade de lados cada vez maiores, obteremos valores ainda mais próximos de π. Generalizando, vamos determinar expressões para o comprimento dos polígonos regulares inscrito e circunscrito na circunferência em função do número de lados.

- No polígono regular de n lados inscrito:

Devemos determinar a medida do segmento $\overline{B_1B_2}$, pois multiplicando tal segmento por n obtém-se o perímetro do polígono regular de n lados circunscrito. Para isso, seja O o centro da circunferência (ver figura 5.14). Como o raio dessa circunferência é $\frac{1}{2}$, o triângulo B_1OB_2 é isósceles de base $\overline{B_1B_2}$ e lados congruentes $\overline{OB_1}$ e$\overline{OB_2}$. Além disso, o ângulo central $B_1\hat{O}B_2$ mede $\frac{360^o}{n}$, pois trata-se de um polígono regular de n lados. Seja M o ponto médio de $\overline{B_1B_2}$, temos que o segmento $\overline{OM}$ é perpendicular ao segmento $\overline{B_1B_2}$ e o ângulo $B_1\hat{O}M$ mede

$$\frac{\frac{360^o}{n}}{2} = \frac{360^o}{2n} = \frac{180^o}{n},$$

pois o triângulo B_1OB_2 é isósceles. Portanto,

$$\begin{aligned} sen\left(\frac{180^o}{n}\right) &= \frac{B_1M}{B_1O} = \frac{B_1M}{\frac{1}{2}}. \text{ Assim,} \\ B_1M &= \frac{1}{2} \cdot sen\left(\frac{180^o}{n}\right). \end{aligned}$$

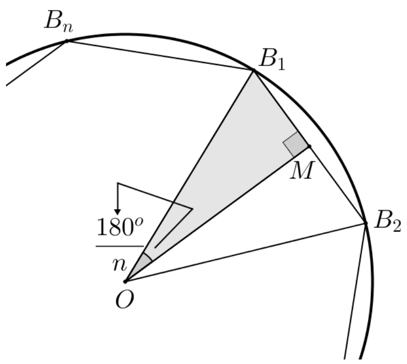


Figura 5.14: Polígono regular de n lados inscrito

Consequentemente, o perímetro do polígono regular inscrito mede:

$$n \cdot B_1B_2 = n \cdot 2 \cdot B_1M = n \cdot 2 \cdot \frac{sen\left(\frac{180^o}{n}\right)}{2} = n \cdot sen\left(\frac{180^o}{n}\right).$$

- No polígono regular de n lados circunscrito:

Devemos determinar a medida do segmento $\overline{A_1A_2}$, pois multiplicando tal segmento por n obtém-se o perímetro do polígono regular de n lados circunscrito. Seja N o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$ (ver figura 5.15). Temos que o segmento $\overline{ON}$ é perpendicular ao segmento $\overline{A_1A_2}$ já que este é tangente à circunferência. Temos que o triângulo A_1OA_2 é isósceles de base $\overline{A_1A_2}$ e lados congruentes $\overline{OA_1}$ e $\overline{OA_2}$. Sendo assim, o ângulo $A_1\hat{O}N$ mede

$$\frac{\frac{360^o}{n}}{2} = \frac{360^o}{2n} = \frac{180^o}{n}.$$

Além disso, Como $\overline{ON}$ é o raio da circunferência, então, $ON = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} tan\left(\frac{180^o}{n}\right) &= \frac{A1N}{ON} = \frac{A1N}{\frac{1}{2}}. \text{ Assim,} \\ A1N &= \frac{1}{2} \cdot tan\left(\frac{180^o}{n}\right) \end{aligned}$$

Consequentemente, o perímetro do polígono regular circunscrito mede:

$$n \cdot A_1A_2 = n \cdot 2 \cdot A_1N = n \cdot 2 \cdot \frac{tan\left(\frac{180^o}{n}\right)}{2} = n \cdot tan\left(\frac{180^o}{n}\right).$$

Concluímos que, o valor de π é tal que:

$$n \cdot sen\left(\frac{180^o}{n}\right) < \pi < n \cdot tan\left(\frac{180^o}{n}\right).$$

Aproximações cada vez melhores dessa constante podem ser obtidas aumentando sig-

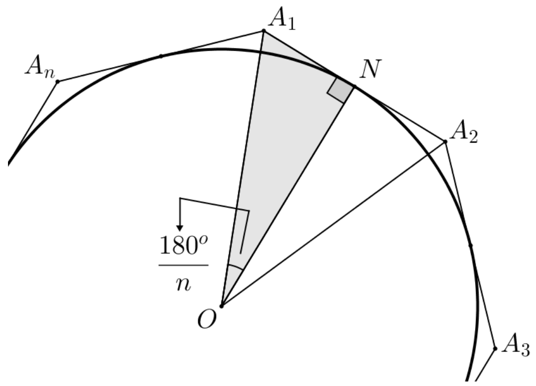
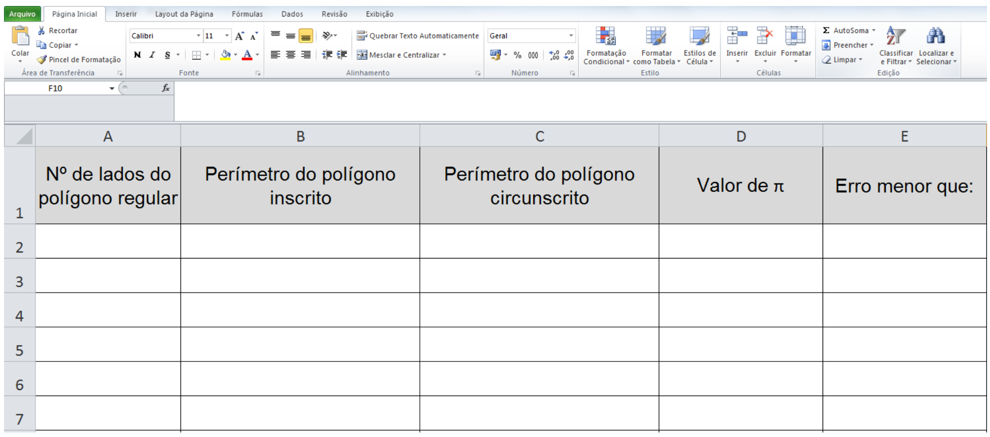


Figura 5.15: Polígono regular de n lados circunscrito

nificativamente o valor de n, isto é, quando n tende ao infinito.

Usando uma planilha eletrônica, podemos calcular algumas aproximações para o número π, através dos seguintes procedimentos:

1. Organize, numa planilha eletrônica, uma tabela de acordo com a figura 5.16;

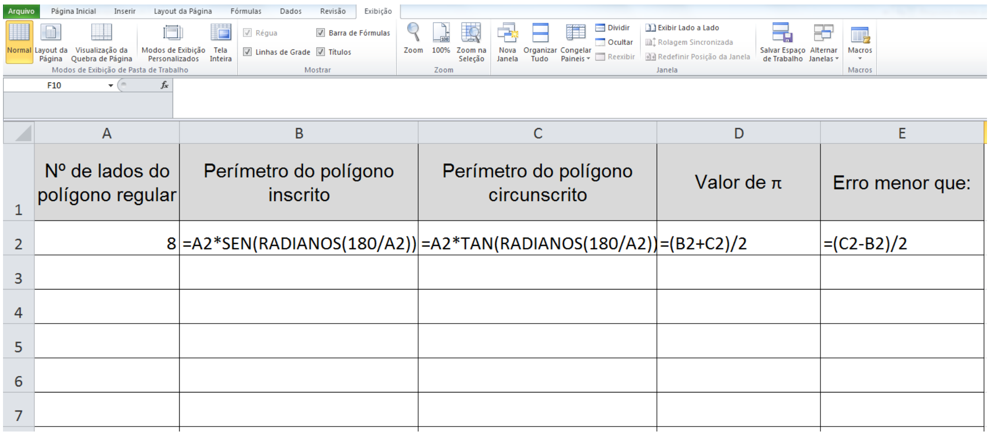


	A	B	C	D	E
1	Nº de lados do polígono regular	Perímetro do polígono inscrito	Perímetro do polígono circunscrito	Valor de π	Erro menor que:
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Figura 5.16: Aproximações para π

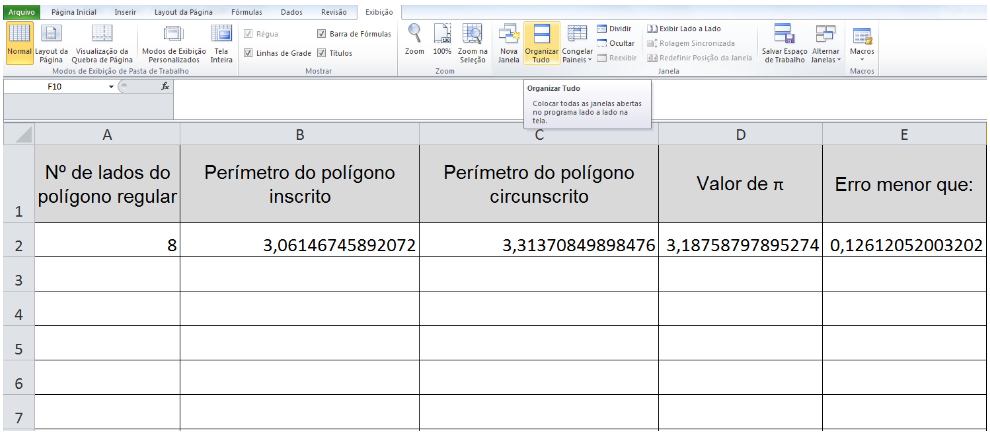
2. Preencha as células A2, B2, C2, D2 e E2 com as funções =8, =A2*sen(radianos(180/A2)), =A2*tan(radianos(180/A2)), =(B2+C2)/2 e =(C2-B2)/2, respectivamente (ver figura 5.17);

3. Os valores obtidos estão expressos na figura 5.18;



	A	B	C	D	E
1	Nº de lados do polígono regular	Perímetro do polígono inscrito	Perímetro do polígono circunscrito	Valor de π	Erro menor que:
2	8	=A2*SEN(RADIANOS(180/A2))	=A2*TAN(RADIANOS(180/A2))	=(B2+C2)/2	=(C2-B2)/2
3					
4					
5					
6					
7					

Figura 5.17: Aproximações para π



	A	B	C	D	E
1	Nº de lados do polígono regular	Perímetro do polígono inscrito	Perímetro do polígono circunscrito	Valor de π	Erro menor que:
2	8	3,06146745892072	3,31370849898476	3,18758797895274	0,12612052003202
3					
4					
5					
6					
7					

Figura 5.18: Aproximações para π

4. Digite a função =A2*2 na célula A3 e selecione as células B2, C2, D2 e E2 e arraste-as até a linha 3. Os resultados desse procedimento estão expostos na figura 5.19;

	A	B	C	D	E
1	Nº de lados do polígono regular	Perímetro do polígono inscrito	Perímetro do polígono circunscrito	Valor de π	Erro menor que:
2	8	3,06146745892072	3,31370849898476	3,18758797895274	0,12612052003202
3	16	3,12144515225805	3,18259787807453	3,15202151516629	0,03057636290824
4					
5					
6					
7					

Figura 5.19: Aproximações para π

5. Por fim, selecione as células A3, B3, C3, D3 e E3 e arraste-as até a linha 24. Observe na figura 5.20 que, após as iterações sugeridas obtemos o valor π = 3,14159265358980, que é uma aproximação com um erro menor do que 10^{-14}

	A	B	C	D	E
1	Nº de lados do polígono regular	Perímetro do polígono inscrito	Perímetro do polígono circunscrito	Valor de π	Erro menor que:
2	8	3,06146745892072	3,31370849898476	3,18758797895274	0,12612052003202
3	16	3,12144515225805	3,18259787807453	3,15202151516629	0,03057636290824
4	32	3,13654849054594	3,15172490742926	3,14413669898760	0,00758820844166
5	64	3,14033115695475	3,14411838524590	3,14222477110033	0,00189361414558
6	128	3,14127725093277	3,14222362994246	3,14175044043761	0,00047318950484
7					
23	8388608	3,14159265358972	3,14159265358994	3,14159265358983	0,00000000000011
24	16777216	3,14159265358977	3,14159265358983	3,14159265358980	0,00000000000003
25	33554432	3,14159265358979	3,14159265358980	3,14159265358980	0,00000000000001

Figura 5.20: Aproximações para π

Aproximações melhores para π podem ser determinadas aumentando significativamente o valor de n. Uma aproximação decimal para π com 50 algarismos decimais será:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510.$$

É importante observar que nas aplicações práticas não é preciso conhecer tantas casas decimais para π. Na maioria dos problemas, usa-se uma aproximação com apenas duas casas decimais, ou seja,

$$\pi \cong 3{,}14.$$

Por exemplo: se desejarmos determinar o comprimento da circunferência com centro no planeta Terra e raio igual a distância entre a Terra e a Lua, ou seja, $r = 384.400.000\ m$, uma aproximação de π com 12 algarismos decimais fornece uma precisão cujo erro é menor que a espessura de um fio de cabelo humano (aproximadamente $0{,}0008\ m$). Veja:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 2 \cdot 3{,}141592653589 \cdot 384.400.000 = 2.415.256.432{,}079223 \\
C_2 &= 2 \cdot 3{,}14159265359 \cdot 384.400.000 = 2.415.256.432{,}079992 \\
C_2 - C_1 &= 2.415.256.432{,}079992 - 2.415.256.432{,}079223 \\
&= 0{,}0007688\ m \ < \ 0{,}0008\ m
\end{aligned}$$

Ao longo dos séculos foram feitas diversas tentativas para conseguir melhores aproximações para π (ver cronologia de π em EVES(EVE04)). A esperança era encontrar um padrão de repetição na expansão decimal desse número, e assim atribuí-lo a propriedade de ser racional. Mas, em 1767, Johann Heinrich Lambert provou que π é irracional. Apesar disso, a expansão decimal de π continuou sendo fonte de pesquisa. Atualmente, já foram determinados mais de 2 bilhões de algarismos da expansão decimal desse número.

É importante dizer que a ideia apresentada anteriormente para o cálculo de π não é nova. Na verdade, segundo BOYER(BOY96), Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) usou esse método partindo de um hexágono regular inscrito e outro circunscrito à circunferência e calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados. Com isso, ele chegou a conclusão de que π estava compreendido entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, isto é, $3{,}14084 < \pi < 3{,}142858$.

5.3.3 Representação Decimal de e (Número de Euler)

Dentre os infinitos números irracionais, o número π, apresentado na seção anterior, e o Número de Euler e, são duas constantes de grande importância em diversas áreas científicas e, também, na própria Matemática. Existe uma relação muito estreita entre esses dois números, pois ambos são irracionais e transcendentes (ver seção 6.2), porém, tal relação não transparece no ensino básico, onde predomina a exploração de π, até porque, sua definição como a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, não apresenta grandes dificuldades. Por sua vez, o número de Euler é citado dentro do tópico logaritmos, como uma possível base, denominando-se estes de *logaritmos naturais*. Nos livros didáticos o número de Euler é apresentado como um irracional aproximado por 2,718281, e afirma-se que este valor é obtido através de uma calculadora eletrônica. Mas por que e apresenta o valor aproximado de 2,718281? De onde surgiu esse número? Existem aplicações práticas para ele?

É provável que a primeira vez que o número e apareceu na Matemática tenha sido no início do século XVII em problemas práticos sobre juros compostos. Entretanto, outras questões, como por exemplo, a área sobre o gráfico da hipérbole (ver figura 5.21) também conduziram ao mesmo número no passado, o que deixa sua origem exata um mistério. Um estudo mais detalhado sobre esse tema pode ser encontrado na referência MAOR(MAO08).

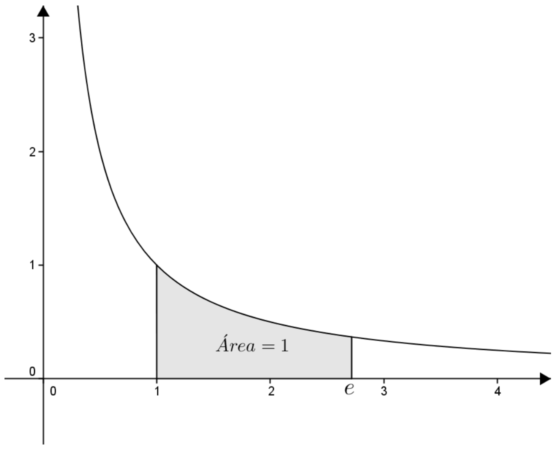


Figura 5.21: Área sob o gráfico da hipérbole.

Pelo fato do estudo da Matemática Financeira ser explorado na educação básica, definiremos o número e a partir de uma situação típica de acumulação capitalista.

Em problemas financeiros envolvendo juros compostos, o cálculo do valor futuro ou Montante (M) em função do capital inicial (C), aplicado a uma taxa de juros compostos (i), durante uma unidade de tempo (t) é dado por

$$M = C(1+i)^t.$$

Suponha um investimento de $C_0 = 1$ real em uma conta que paga uma taxa $i =$ 100% de juros compostos anualmente. No final de um ano o saldo será de $M_1 = C_0(1+1)^1 = 1 \cdot 2 = 2$. Na comunidade bancária pode-se encontrar todos os tipos de composição de juros, ou seja, anual, semestral, trimestral, semanal e até mesmo diário. Porém, se dividirmos o ano em dois semestres, é razoável considerar que a taxa de juros semestral será equivalente à metade da taxa de juros anual, ou seja, $i_2 = \dfrac{i_1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$. Consequentemente, em um ano teremos:

$$\begin{aligned} M &= 1 \cdot (1+0{,}5)^2 \\ M &= 2{,}25. \end{aligned}$$

A Tabela 5.1, fornece um demonstrativo dos resultados de composição em diversos períodos: De forma geral, o montante acumulado capitalizando-se n vezes durante um

Tabela 5.1: Cálculo do montante em diversos períodos.

Período de Conversão	Cálculo do Montante
Anual	$M_1 = (1+1)^1 = 2$
Semestral	$M_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$
Trimestral	$M_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2{,}441406$
Mensal	$M_{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}613035$
Semanal	$M_{52} = \left(1+\frac{1}{52}\right)^{52} \approx 2{,}692596$
Diário	$M_{365} = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}711456$

ano é dado por $M_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Essa capitalização seria quase instantânea para valores cada vez maiores de n, isto é, quando n tende ao infinito. Neste caso, o montante acumulado representará uma aproximação do número e. Em outras palavras, aproximações do valor de e podem ser determinadas atribuindo-se valores cada vez maiores a n. O comportamento desta fórmula para alguns valores crescentes de n estão expostos na tabela 5.2.

Alguém pode observar esses valores e achar que capitalizando em um número n cada vez maior de intervalos de tempo iguais, poderá aumentar ilimitadamente seu capital, mas isso não é verdade, pois a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é limitada. De fato, utilizando a

Tabela 5.2: O montante para valores crescentes de n.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815
100000	2,71827
1000000	2,71828
10000000	$2,71828$

fórmula binomial de Newton, podemos escrever essa sequência da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^0+\binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+...\\
&\quad+\binom{n}{n-1}\cdot 1^1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot 1^0\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1+n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n\,(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+...\\
&\quad+\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n\,(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{n^3}+...+\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+...+\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{n}{n}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{n}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n}-\frac{2}{n}\right)+...+\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\left(\frac{1}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Observe que quanto maior o valor de n, mais próxima de zero a expressão $\frac{1}{n}$ estará.

Dessa forma, quando n tende ao infinito, podemos dizer que $\frac{1}{n}$ tende a zero. Assim, para n tendendo ao infinito, temos::

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot(1-0)+\frac{1}{3!}\cdot(1-0)(1-0)+...+\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...\end{aligned}$$

Como para todo n natural, tem-se

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot...\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot...\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

então,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...}_{\text{P.G. infinita de razão } q=\frac{1}{2}}.$$

Na P.G. acima, temos:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Portanto, temos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=3,$$

ou seja,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Portanto, por maior que seja o valor atribuído a n, o montante $M_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ não será superior a 3. Como foi visto acima, esse montante converge para a constante e

cujo valor aproximado com 40 algarismos decimais é dado por

$$e \cong 2{,}7182818284590452353602874713526624977572.$$

Além do problema da capitalização instantânea, o número de Euler também aparece na modelagem do crescimento de colônias de bactérias, na decomposição de fósseis, no decaimento radioativo, na absorção de medicamentos no organismo, entre outros. Uma lista farta de propriedades envolvendo o número de Euler é usualmente apresentada em disciplinas de cálculo ofertadas nos cursos de graduação de matemática, engenharias e outras áreas de ciências exatas.

5.3.4 Representação Decimal de φ, o Número de Ouro

O número de ouro é considerado por muitos estudiosos um símbolo da harmonia e é inegável que ele desperta curiosidade e admiração de quem o estuda. Apesar disso, existem conexões desse número com a natureza, a arte, a arquitetura, a música e nos seres humanos que são controversas. Um estudo mais aprofundado desse assunto está disponível na referência SODRÉ(SOD13) e não será tratado aqui, pois foge do objetivo desse trabalho.

O símbolo da escola pitagórica era uma estrela de cinco pontas construída traçando-se as cinco diagonais de uma face pentagonal de um dodecaedro regular. Esse símbolo não teria maior importância se não fosse um fato curioso, consequência de sua construção, como se vê na figura 5.22.

Considere o pentágono regular $ABCDE$, traçando-se as diagonais, suas intersecções formam um novo pentágono regular $A'B'C'D'E'$. Os vértice A', B', C', D' e E' dividem a diagonal do pentágono maior em dois segmentos com medidas diferentes, cuja razão de toda diagonal para o segmento maior é igual a razão deste para o segmento menor.

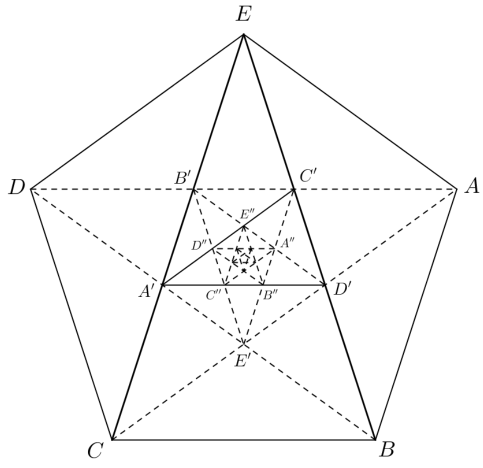


Figura 5.22: Pentagrama

Por exemplo, na figura 5.22, temos $\frac{EB}{ED'} = \frac{ED'}{D'B}$. Essa subdivisão era chamada de *divisão de um segmento em média e extrema razão*. Para justificar tal propriedade, fixemos, por exemplo, o vértice D'. Prova-se que D' divide o segmento EB em média e extrema razão da seguinte forma:

Os triângulos isósceles BCE e $D'A'E$ são semelhantes. Sendo assim, temos:

$$\frac{EB}{ED'} = \frac{CB}{A'D'} \text{ mas, } CB = CD' = ED' \quad \text{e} \quad A'D' = D'B \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{EB}{ED'} = \frac{ED'}{D'B}.$$

A prova para os demais vértices se faz de forma análoga.

Uma definição mais formal seria a seguinte: Dado um segmento AB qualquer, diz-se que o ponto P divide esse segmento em média e extrema razão, se:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}.$$

Podemos supor que $AB = 1$, pois trata-se de um problema de proporcionalidade, e

$PB = x$, ver figura 5.23. Sendo assim, temos:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{x}. \tag{5.2}$$

Quando temos a igualdade 5.2, a razão entre o todo e o segmento maior $\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ou a razão entre o segmento maior e o menor $\left(\frac{1-x}{x}\right)$ é denominada *razão áurea* ou *número de ouro* e a representaremos pela letra grega φ (fi). Observe que:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + \frac{1}{\varphi}, \quad \text{assim,} \\ \varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} \quad \text{o que resulta em:} \\ & \varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \end{aligned}$$

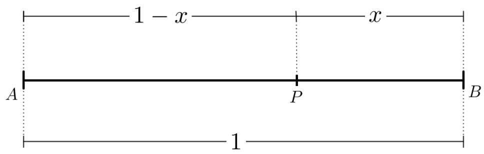


Figura 5.23: Divisão em média e extrema razão.

Resolvendo a equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ obtemos $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\varphi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Este segundo resultado é desconsiderado, pois trata-se de um número negativo. Portanto, o valor numérico de φ é dado por:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Veremos mais adiante na seção 6.2 que o número de ouro é irracional.

Pode-se determinar, na reta real, o ponto cuja abscissa é φ por meio da seguinte construção (ver figuras 5.24):

1. Sobre a reta real, construiremos o quadrado $OPQR$ de lado OP, onde P é ponto de abscissa 1;

2. Seja M o ponto médio do segmento OP. Trace o segmento MQ;

3. Considere o ponto X na semirreta OP tal que MX é congruente a MQ;

4. X é o ponto de abscissa φ.

De fato, na construção acima, o triângulo MPQ é retângulo de catetos $MP = \frac{1}{2}$ e $PQ = 1$, assim, pelo teorema de pitágoras, a hipotenusa $MQ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Como $OX = OM + MX$, então $OX = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

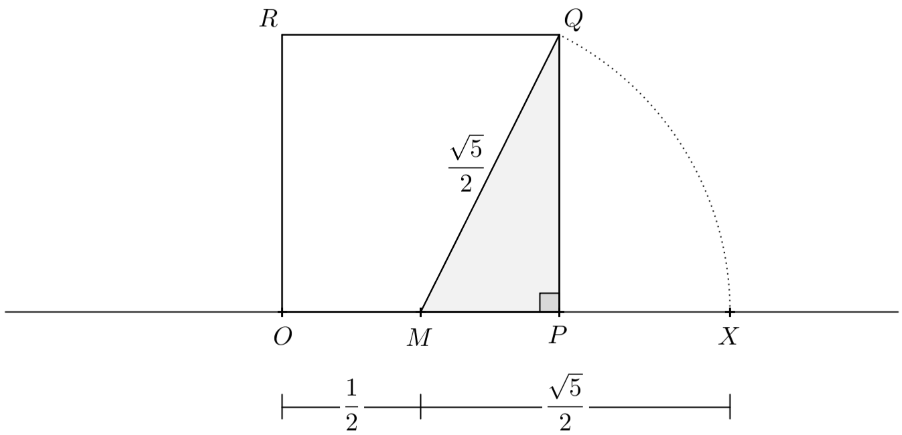


Figura 5.24: Pentagrama

Com relação a representação decimal de φ, podemos determiná-la utilizando a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}
\varphi^2-\varphi-1=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi^2=\varphi+1 \quad \Rightarrow \quad \varphi &= 1+\frac{1}{\varphi}\\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}\\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}\\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}}\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Podemos expressar esse resultado na forma da seguinte fração contínua:

$$\varphi = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

Ou seja, φ será o valor de convergência da seguinte sequência:

$$1+\frac{1}{1+1} \to 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} \to 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} \to 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} \to \cdots \to \varphi.$$

que corresponde a:

$$\frac{3}{2} \to \frac{8}{5} \to \frac{13}{8} \to \frac{21}{13} \to \cdots \to \varphi.$$

Pode-se usar uma planilha eletrônica para determinar aproximações racionais do número φ usando o seguinte procedimento:

1. Atribua a expressão $= 1 + 1/(1+1)$ a célula A1;

2. Atribua a fórmula $= 1 + 1/\text{A1}$ a célula A2;

3. Selecione a célula A2 e arraste para baixo para obter aproximações cada vez melhores do número φ.

Com essas iterações, a partir da célula A41, todos os valores serão 1,61803398874989 que é uma aproximação do número φ com 14 algarismos decimais (ver figuras 5.25, 5.26, 5.27). É importante salientar que aproximações ainda melhores de φ podem ser determinadas utilizando-se instrumentos de cálculo com melhor capacidade computacional.

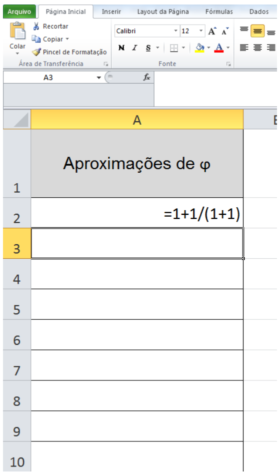


Figura 5.25: Etapa 1.

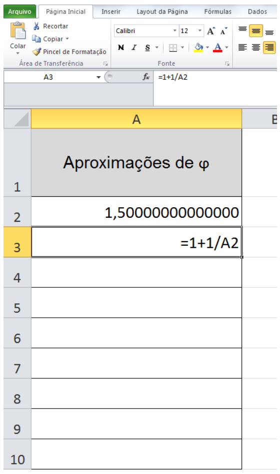


Figura 5.26: Etapa 2

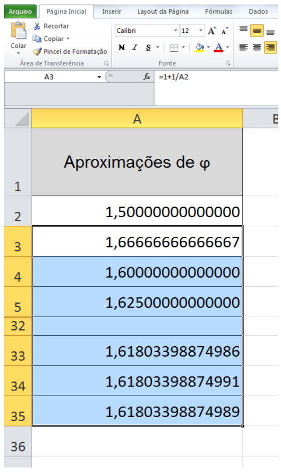


Figura 5.27: Etapa 3

Capítulo 6

Considerações Gerais Sobre Números Reais

Muitos textos matemáticos, principalmente os livros didáticos da educação básica, apresentam demonstrações incompletas quando estas envolvem números irracionais. A grande falha acontece quando a prova do resultado limita-se aos números racionais deixando o caso dos irracionais inacabado. Na seção 6.1 deste capítulo, demonstraremos, inclusive para o caso dos irracionais, três resultados usados na educação básica cujas demonstrações apresentam a falha citada acima - o Teorema de Tales, a área do retângulo e a área do círculo. Por sua vez, na seção 6.2 veremos que além de classificar os números reais em racionais ou irracionais, também podemos classificá-los como algébricos ou transcendentes. Além disso, chegaremos a um método que permita determinar se um dado número algébrico é ou não racional. Esse método é de extrema importância, uma vez que de posse dele poderemos verificar, por meio de um processo elementar, a irracionalidade de muitos números reais.

6.1 Teoremas envolvendo reais

A seguir serão demonstrados de forma completa três resultados usados na educação básica - o Teorema de Tales, a área do retângulo e a área do círculo.

6.1.1 O Teorema de Tales

Teorema 1 (Tales) *Se duas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra transversal.*

Prova:

Considere um feixe retas de paralelas a, b, c e d, duas transversais r e s e os pontos de intersecção A, B, C, D, A', B', C' e D', como indica a figura 6.1.

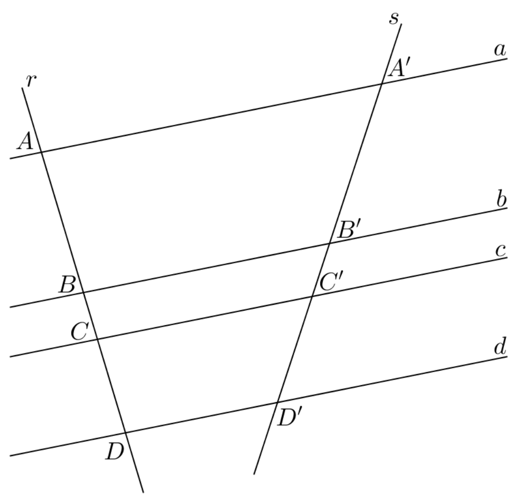


Figura 6.1: Teorema de Tales

Devemos provar que $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$. Para tal, vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ em m partes iguais a um certo segmento u, tal que $AB = m \cdot u$. Ao longo de CD marcam-se

n segmentos u perfazendo o segmento CV, isto é, $CV = n \cdot u$. Então

$$\frac{AB}{CV} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}.$$

ou seja, $n \cdot AB = m \cdot CV$.

Pelos pontos que dividem AB e CV em m e n partes, traçamos retas paralelas ao feixe. Seja V' o ponto correspondente de V no lado direito. Desse modo, os segmentos $A'B'$ e $C'V'$ ficam divididos em m e n partes iguais a u'. Temos:

$$\frac{A'B'}{C'V'} = \frac{m \cdot u'}{n \cdot u'} = \frac{m}{n}.$$

São três os casos a se considerar:

- V está entre C e D.

  Neste caso $CV < CD$, então,

$$\begin{aligned} n \cdot AB = m \cdot CV < m \cdot CD \quad &\Leftrightarrow \quad n \cdot AB < m \cdot CD \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{AB}{CD} < \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

  No entanto, na figura 6.2, observamos que $C'V' < C'D'$, então,

$$\begin{aligned} n \cdot A'B' = m \cdot C'V' < m \cdot C'D' \quad &\Leftrightarrow \quad n \cdot A'B' < m \cdot C'D' \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{A'B'}{C'D'} < \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

  Portanto:

$$\frac{AB}{CD} < \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{A'B'}{C'D'} < \frac{m}{n}. \tag{6.1}$$

- D está entre C e V.

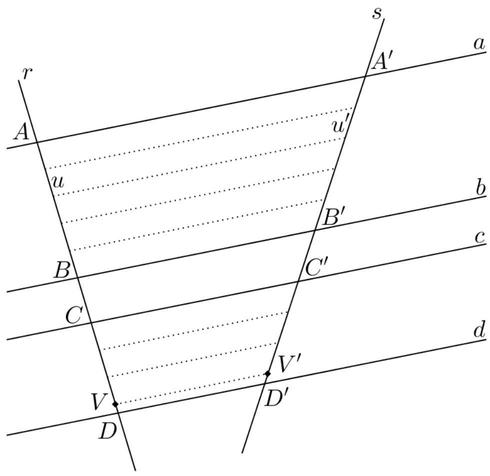


Figura 6.2

Neste caso $CV > CD$, então,

$$\begin{aligned} n \cdot AB = m \cdot CV > m \cdot CD \quad &\Leftrightarrow \quad n \cdot AB > m \cdot CD \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{AB}{CD} > \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

No entanto, na figura 6.3, observamos que $C'V' > C'D'$, então,

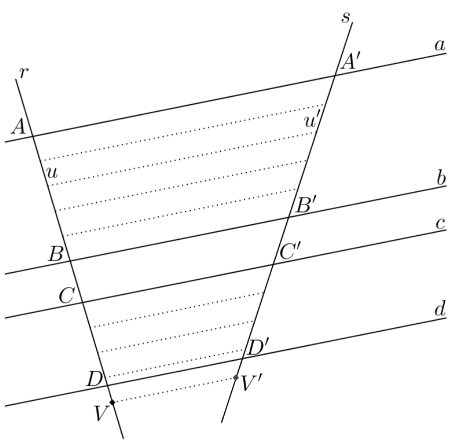


Figura 6.3

$$\begin{aligned} n \cdot A'B' = m \cdot C'V' > m \cdot C'D' &\Rightarrow n \cdot A'B' > m \cdot C'D' \\ &\Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} > \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{AB}{CD} > \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{A'B'}{C'D'} > \frac{m}{n}. \tag{6.2}$$

- $V = D$

  Neste caso,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{CV} = \frac{A'B'}{C'V'} = \frac{A'B'}{C'D'},$$

  ou seja,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{m}{n}. \tag{6.3}$$

Das expressões 6.1, 6.2 e 6.3, podemos concluir que dados m, n, p e q inteiros com n e q diferentes de zero,

$$\frac{m}{n} \leq \frac{AB}{CD} \leq \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{m}{n} \leq \frac{A'B'}{C'D'} \leq \frac{p}{q}. \tag{6.4}$$

Considere $\alpha = \dfrac{AB}{CD}$ e $\beta = \dfrac{A'B'}{C'D'}$. Assim, da equação 6.4, temos:

$$\frac{m}{n} \leq \alpha \leq \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{m}{n} \leq \beta \leq \frac{p}{q}. \tag{6.5}$$

Devemos mostrar que $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$, ou seja, $\alpha = \beta$. Para isso podemos escolher m, n, p e q tais que a diferença $\frac{p}{q} - \frac{m}{n}$ seja tão pequena quanto desejemos, basta considerar u suficientemente pequeno. Em particular, se $\alpha \neq \beta$, digamos $(\alpha < \beta)$, escolhemos m, n, p e q tais que $\frac{p}{q} - \frac{m}{n} < \beta - \alpha$. Neste caso temos uma contradição com 6.5, uma vez que α e β pertencem ao intervalo $\left[\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right]$. Portanto,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

6.1.2 Área do Retângulo

De modo geral, a área de uma figura fechada é a medida da superfície compreendida dentro de seu perímetro. Para determinar essa área, precisamos escolher uma unidade de medida e então comparar a figura com essa unidade, isto é, tratamos de responder "quantas" unidades precisamos para "compor" a figura. Para tal, podemos adotar como unidade de área um quadrado que, por definição, tem área igual a 1 $u.a.$ (uma unidade de área) e cujo lado será tomado com uma unidade de comprimento adequada. Nas figuras 6.4, 6.5 e 6.6, aproximamos a área (A) de uma figura por falta e por excesso por meio da área de quadrados com dimensões cada vez menores.

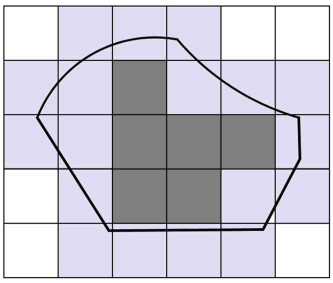


Figura 6.4: Quadrados de 1 cm de lado (área: 1 cm^2): 6 $cm^2 < A <$ 23 cm^2.

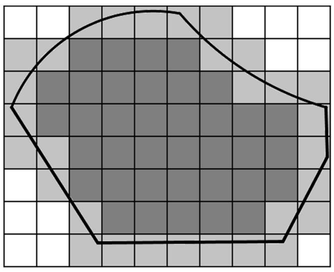


Figura 6.5: Quadrados de 0,5 cm de lado (área: 0,25 cm^2): 9,25 $cm^2 <$ $A <$ 16,75 cm^2.

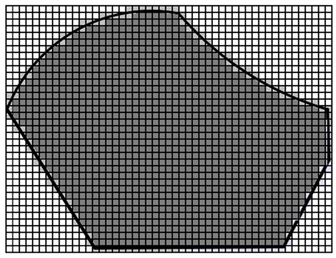


Figura 6.6: Quadrados de 0,1 cm de lado (área: 0,01 cm^2): 11,84 $cm^2 <$ $A <$ 13,24 cm^2.

A seguir, iremos deduzir uma expressão para o cálculo da área de um retângulo qualquer utilizando aproximações por quadrados.

Um retângulo é um quadrilátero que possui todos os ângulos internos retos e sua área é dada pelo produto de dois de seus lados consecutivos.

De fato, seja o retângulo $ABCD$ de dimensões x e y. Devemos mostrar que a área (A) desse retângulo é igual a $x \cdot y$. Para isso, consideremos os três casos seguintes:

- x e y são ambos inteiros.

  Se x e y são inteiros, podemos dividir cada lado do retângulo em segmentos de comprimento 1. O lado de medida x ficará decomposto em x segmentos de comprimento 1, enquanto o lado de medida y ficará decomposto em y segmentos de medida 1. Traçando paralelas aos lados por todos os pontos de divisão, o retângulo ficará dividido em $x \cdot y$ quadrados de área 1. Portanto, a área do retângulo será:

$$A = x \cdot y \cdot 1 = x \cdot y.$$

  Na figura 6.7, temos um retângulo de lados inteiros $x = 7$ e $y = 4$. Observe que neste caso tem-se 28 retângulos, ou seja, a área desse retângulo mede 28 $u.\ a.$.

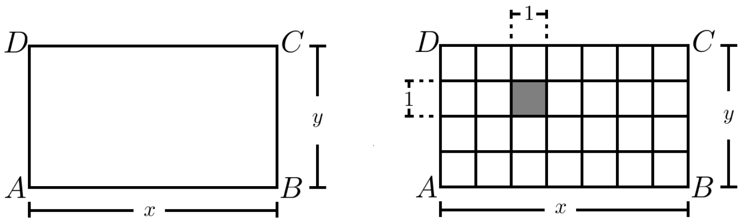


Figura 6.7: Retângulo de dimensões inteiras.

- x e y são racionais.

  Se x e y são racionais, podemos reduzí-los ao mesmo denominador e escrevê-los como $x = \dfrac{m}{n}$ e $y = \dfrac{p}{n}$ com m, n e p inteiros e $n \neq 0$. Com isso, podemos dividir cada lado do retângulo em segmentos de comprimento $\dfrac{1}{n}$. O lado de medida x ficará decomposto em m segmentos de medida $\dfrac{1}{n}$, enquanto o lado de medida y ficará decomposto em p segmentos de medida $\dfrac{1}{n}$, ver figura 6.8. Traçando paralelas aos lados por todos os pontos de divisão, o retângulo ficará dividido em $m \cdot p$ quadrados de área $\dfrac{1}{n^2}$. Portanto, a área do retângulo será:

$$\begin{aligned} A &= m \cdot p \cdot \frac{1}{n^2} \\ A &= \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \\ A &= x \cdot y. \end{aligned}$$

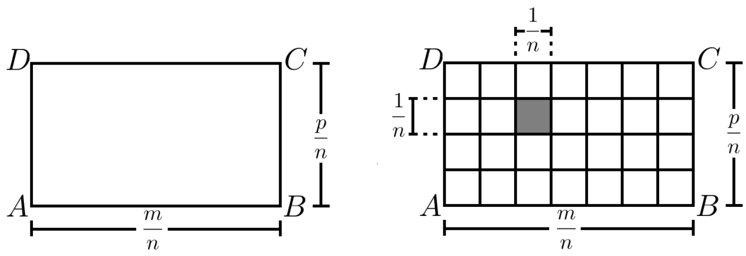


Figura 6.8: Retângulo de dimensões racionais.

- x e y são irracionais.

Deve-se mostrar que $A = x \cdot y$. Para isso, suponha por contradição que $A \neq x \cdot y$. Então, suponha $A < x \cdot y$. Seja o número real $\epsilon = x \cdot y - A$. Pode-se encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, ou seja, $\epsilon > \dfrac{1}{n}$. Pode-se encontrar, ainda, $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{m-1}{n} < A$ e $A < \dfrac{m}{n} < x \cdot y$, ver figura 6.9. Como $\dfrac{m}{n} < x \cdot y$, podemos encontrar

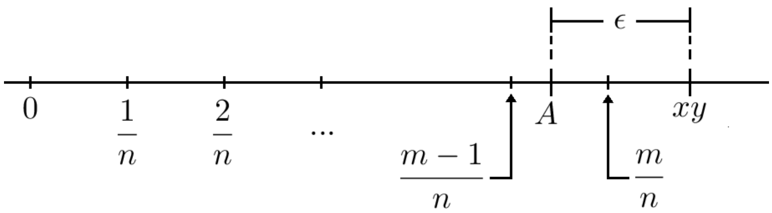


Figura 6.9: $\frac{m}{n}$ é um racional entre A e $x \cdot y$

dois racionais $r < x$ e $s < y$, tais que $r \cdot s = \dfrac{m}{n}$. Observe na figura 6.10 que dadas as condições acima, teremos $r \cdot s = \dfrac{m}{n} < A$. Mas isso é uma contradição, visto que, por hipótese, $\dfrac{m}{n} > A$. Portanto, A não pode ser menor que $x \cdot y$. O caso $A > x \cdot y$ pode ser tratado de forma análoga. Sendo assim, concluímos que $A = x \cdot y$.

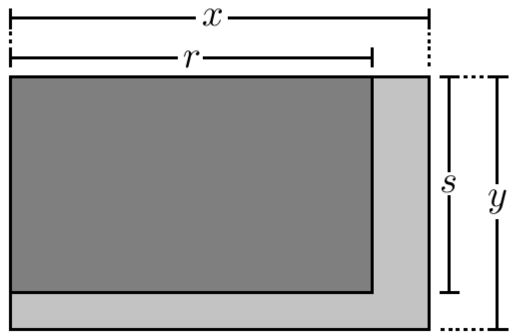


Figura 6.10: $r \cdot s < x \cdot y$

6.1.3 Área do Círculo

Discutimos na seção 6.1.2 o que se entende por área de uma figura e justificamos a expressão da área do retângulo em termos do produto de dois de seus lados consecutivos. A partir da expressão para a área do retângulo, podemos deduzir as áreas dos principais polígonos, como por exemplo, o paralelogramo, o triângulo, o trapézio, etc. A seguir, determinaremos uma expressão para a área de um círculo através de aproximações por excesso das áreas polígonos regulares circunscritos, cujas áreas podem ser determinadas por meio de sua decomposição em triângulos isósceles.

A área A de um círculo de raio r qualquer é dada pela expressão $A = \pi r^2$.

De fato, considere um polígono regular P_n de n lados circunscrito a um círculo de raio r. Observe na figura 6.11 que quanto maior o valor de n, mais próxima da área do círculo a área de P_n estará. Podemos descrever essa propriedade com a seguinte

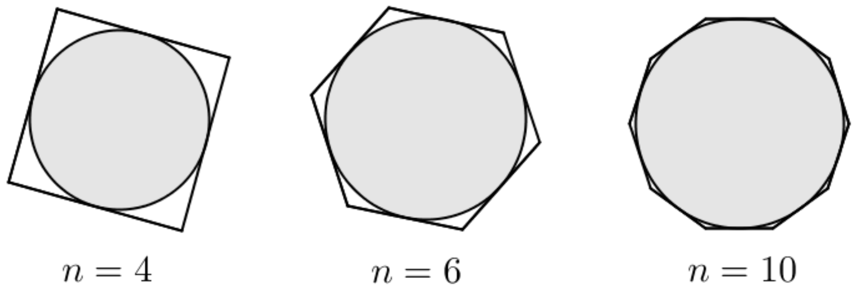


Figura 6.11: polígonos circunscritos no cículo

afirmação: Quando n tende ao infinito, a área do Polígono regular P_n converge para a área do círculo.

Para determinar a área de P_n, observe na figura 6.12 que a medida de seu lado é dada por l, onde

$$\begin{aligned} \tan \frac{180^o}{n} = \frac{\frac{l}{2}}{r} \quad &\Rightarrow \quad \frac{l}{2} = r \tan \frac{180^o}{n} \\ &\Rightarrow \quad l = 2r \tan \frac{180^o}{n}. \end{aligned}$$

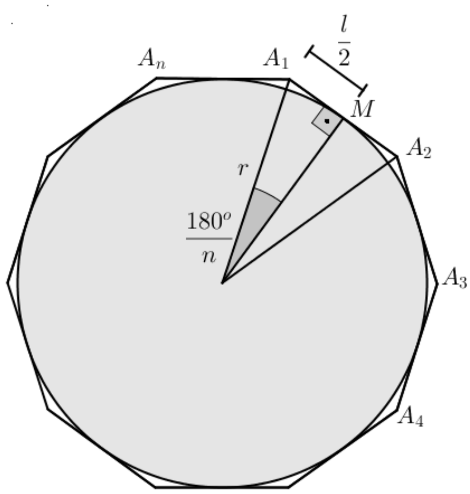


Figura 6.12: Área de P_n

Podemos concluir que a área de um dos n triângulos congruentes da decomposição de P_n é dada por:

$$\frac{l \cdot r}{2} = \frac{2r \tan \frac{180^o}{n} \cdot r}{2} = \tan \frac{180^o}{n} \cdot r^2.$$

Como P_n foi decomposto em n triângulos congruentes a esse, sua área será dada por:

$$n \cdot \tan \frac{180^o}{n} \cdot r^2.$$

Na seção 5.3.2, vimos que a expressão $n \cdot \tan \frac{180^o}{n}$ se aproxima π quando n tende ao infinito. Como a área de P_n também se aproxima da área do círculo quando n tende ao infinito, podemos deduzir que a área de um círculo de raio r qualquer é dada por:

$$\underbrace{n \cdot \tan \frac{180^o}{n}}_{\pi} \cdot r^2 = \pi r^2.$$

É importante salientar que a ideia básica do método aplicado anteriormente para o cálculo da área do círculo, foi também usada por Arquimedes. *A medida do círculo* é o nome do trabalho de Arquimedes onde encontra-se a prova de que a área de um círculo é igual à área de um triângulo retângulo com lados *comprimento* e *raio do círculo* (ver figura 6.13). Assim, dado um círculo de raio r e comprimento da circunferência C, sua área A será dada por $\dfrac{C \cdot r}{2} = \dfrac{2\pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi r^2$.

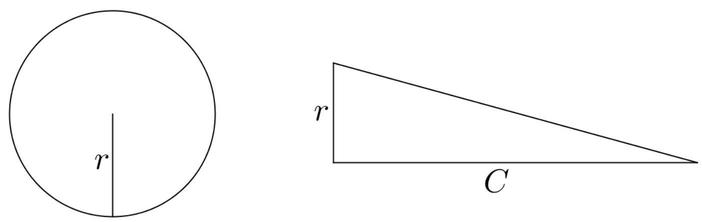


Figura 6.13: Área do círculo

Arquimedes conseguiu a área do círculo situando-a entre as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos com número de lados cada vez maior. Ele mostrou que a diferença entre o valor real e o valor apurado são tão pequenas que não seria possível imaginar um número, por menor que fosse, que conseguisse exprimí-la, pois sempre existirá uma diferença menor. Este processo de cálculo com um número infinito de repetições ficou conhecido como *método da exaustão*.

Segundo BOYER(BOY96), o método da exaustão, comumente creditado a Eudoxo, tem por base a seguinte proposição: *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.* De posse dessa proposição, Arquimedes mostrou que a diferença entre a área do círculo e a área do triângulo retângulo de catetos *raio* e *comprimento da circunferência do círculo*, será menor do que qualquer valor predeterminado.

6.2 Números Algébricos e Transcendentes

Existem diversas classificações dos números reais além das duas vistas até agora, racionais ou irracionais, dentre elas podemos destacar sua classificação em *algébricos* ou *transcendentes*.

Dizemos que um número é *algébrico* se ele for solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Se o número não satisfizer nenhuma equação desse tipo, dizemos que ele é *transcendente*. Os números algébricos podem ser reais ou complexos.

No presente trabalho, nos restringiremos a tratar apenas dos números reais.

Observe que dado um número racional qualquer $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros e $n \neq 0$, temos

$$x - \frac{m}{n} = 0 \Leftrightarrow nx - m = 0.$$

Ou seja, $\frac{m}{n}$ é solução da equação algébrica $nx - m = 0$ com m e n inteiros e $n \neq 0$. Portanto, qualquer número racional é também um número algébrico. Por exemplo: O número 5 é algébrico, pois $x = 5$ é solução da equação algébrica $x - 5 = 0$. Da mesma forma, podemos verificar que o número $-\frac{3}{2}$ é algébrico, pois é solução da equação algébrica $2x + 3 = 0$.

Quando o número não é algébrico ele será dito transcendente e, uma vez que todo número racional é algébrico, temos que todo número transcendente não é racional, ou seja, todos os números reais e transcendentes são irracionais. Apesar disso, nem todo número irracional é transcendente. Observe que $\sqrt{2}$ é algébrico. De fato, $\sqrt{2}$ é solução da equação algébrica $x^2 - 2 = 0$. Pode-se organizar as informações acima através de um esquema:

Racionais	Todos Algébricos
Irracionais	Algébricos ou Transcendentes

São exemplos de números transcendentes, e, $\log 2$ e π. Segundo NIVEN(NIV84), os números $\log n$ são todos transcendentes se n for qualquer número inteiro entre 1 e 1000, exceto $n = 1$, $n = 10$, $n = 100$ e $n = 1000$. Não provaremos aqui que esses números são transcendentes, pois tal demonstração foge dos objetivos desse trabalho.

6.2.1 Determinando se um Número Algébrico é ou Não Racional

O objetivo principal desta seção será deduzir um método que permita responder se é racional ou não um dado número algébrico. Para tal, vamos transferir a ênfase de um número algébrico dado para equações algébricas simples que tenham esse número como raiz.

Teorema 2 (Raízes racionais de equações algébricas) *Seja uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$

Se a fração irredutível $\frac{p}{q}$ for uma raiz dessa equação polinomial, então p será divisor de a_0 e q será divisor de a_n.

Prova:

Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial, sem perda de generalidade, podemos considerar p e q primos entre sí. Então, podemos escrever:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0, \text{ ou seja,}$$
$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \tag{6.6}$$

Multiplicando a equação 6.6 por q^n, obtemos

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \tag{6.7}$$
$$a_n p^n = -\left(a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n\right)$$
$$a_n p^n = -q\left(a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right). \tag{6.8}$$

Da igualdade 6.8, vemos que q é divisor de $a_n p^n$. Como p e q não têm fatores comuns, concluímos que q é divisor de a_n.

Por outro lado, dada a equação 6.7, podemos fazer,

$$-a_0q^n = a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} = p\left(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_1q^{n-1}\right).$$

Da última igualdade, vemos que p é divisor de a_0q^n. Como p e q não têm fatores comuns, concluímos que p é divisor de a_0. Isto conclui a prova do teorema.

Agora temos uma ferramenta extremamente útil para verificar a irracionalidade de alguns números. Faremos alguns exemplos:

1. Verifique se $\sqrt{3}$ é irracional.

$$x - \sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; x^2 = 3 \;\Rightarrow\; x^2 - 3 = 0.$$

Tem-se que $\sqrt{3}$ é raiz da equação $x^2 - 3 = 0$. Se um número racional $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $x^2 - 3 = 0$, então, pelo teorema provado anteriormente, p é divisor de -3 $(D(-3) = \{-1, -3, 1, 3\})$ e q é divisor de 1 $(D(1) = \{-1, 1\})$. Todas as possíveis raízes serão: $x = -1$, $x = 1$, $x = -3$ ou $x = 3$. Verificando:

$$x = -1 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (-1)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 1 - 3 = 0 \Rightarrow -2 = 0 \text{ (não)}.$$
$$x = 1 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (1)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 1 - 3 = 0 \Rightarrow -2 = 0 \text{ (não)}.$$
$$x = -3 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 9 - 3 = 0 \Rightarrow 6 = 0 \text{ (não)}.$$
$$x = 3 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (3)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 9 - 3 = 0 \Rightarrow 6 = 0 \text{ (não)}.$$

Conclui-se que a equação $x^2 - 3 = 0$ não possui raízes racionais, sendo assim, como $\sqrt{3}$ é raiz dessa equação, devemos tê-lo como um número irracional.

2. Verifique se $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

$$x - \sqrt[3]{5} = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{5} \;\Rightarrow\; x^3 = 5 \;\Rightarrow\; x^3 - 5 = 0.$$

Tem-se que $\sqrt[3]{5}$ é raiz da equação $x^3 - 5 = 0$. Se um número racional $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $x^3 - 5 = 0$, então, pelo teorema, p é divisor de -5 $(D(-5) = \{-1,-5,1,5\})$ e q é divisor de 1 $(D(1) = \{-1,1\})$. Todas as possíveis raízes serão: $x = -1$, $x = 1$, $x = -5$ ou $x = 5$. Verificando:

$$\begin{aligned}
x &= -1 \Rightarrow x^3 - 5 = 0 \Rightarrow (-1)^3 - 5 = 0 \Rightarrow -1 - 5 = 0 \Rightarrow -6 = 0 \text{ (não)}.\\
x &= 1 \Rightarrow x^3 - 5 = 0 \Rightarrow (1)^3 - 5 = 0 \Rightarrow 1 - 5 = 0 \Rightarrow -4 = 0 \text{ (não)}.\\
x &= -5 \Rightarrow x^3 - 5 = 0 \Rightarrow (-5)^3 - 5 = 0 \Rightarrow -125 - 5 = 0 \Rightarrow -130 = 0 \text{ (não)}.\\
x &= 5 \Rightarrow x^3 - 5 = 0 \Rightarrow (5)^3 - 5 = 0 \Rightarrow 125 - 5 = 0 \Rightarrow 120 = 0 \text{ (não)}.
\end{aligned}$$

Conclui-se que a equação $x^3 - 5 = 0$ não possui raízes racionais, sendo assim, como $\sqrt[3]{5}$ é raiz dessa equação, devemos tê-lo como um número irracional.

3. Verifique se $\sqrt[6]{5 - \sqrt{2}}$ é irracional.

$$\begin{aligned}
x - \sqrt[6]{5 - \sqrt{2}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = \sqrt[6]{5 - \sqrt{2}} \Rightarrow x^6 = 5 - \sqrt{2} \Rightarrow x^6 - 5 = -\sqrt{2}\\
&\Rightarrow \quad (x^6 - 5)^2 = (-\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^{12} - 10x^6 + 25 = 2\\
&\Rightarrow \quad x^{12} - 10x^6 + 23 = 0.
\end{aligned}$$

Tem-se que $\sqrt[6]{5 - \sqrt{2}}$ é raiz da equação $x^{12} - 10x^6 + 23 = 0$. Se um número racional $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $x^{12} - 10x^6 + 23 = 0$, então, pelo teorema anterior, p é divisor de 23 $(D(23) = \{-1, -23, 1, 23\})$ e q é divisor de 1 $(D(1) = \{-1,1\})$. Todas as possíveis raízes serão: $x = -1$, $x = 1$, $x = -23$ ou $x = 23$. Verifica-se por substituição que nenhuma delas é raiz da equação. Portanto, concluímos que $\sqrt[3]{5}$ é um número irracional.

4. Verifique que o número de ouro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é irracional.

Como foi visto na seção 5.3.4, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é raiz da equação algébrica $x^2 - x - 1 = 0$.

Nesse caso, Se um número racional $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$, então, pelo teorema anterior, p é divisor de -1 ($D(1) = \{-1{,}1\}$) e q é divisor 1 ($D(1) = \{-1{,}1\}$), Sendo assim, todas as possíveis raízes racionais serão: $x = -1$, $x = 1$. Verifica-se por substituição que nenhuma delas é raiz da equação. Portanto, concluímos que o número de ouro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é irracional.

Capítulo 7

Considerações Finais

Foi perceptível no desenrolar desse material que, apesar do conceito de número real não ser tão elementar quanto pareça, pode-se explorá-lo de forma simples utilizando-se de recursos como exemplos práticos e planilhas eletrônicas. Além desses, podemos citar também a simplificação de alguns conceitos, como os Cortes de Dedekind, para facilitar o entendimento dos alunos da educação básica.

O modelo construtivo utilizado para a definição dos conjuntos numéricos apresentado também favorece o entendimento e inter-relaciona cada conjunto numérico com os outros. Tal modelo foi essencial nesse trabalho, uma vez que humaniza a Matemática, cujo desenvolvimento se dá com a finalidade de suprir as necessidades do homem.

Por fim, cumpre-se os objetivos desse trabalho, uma vez que exploramos o conceito de número real de forma simples e convincente por meio de definições adequadas e enfatizando sua necessidade em situações que envolvem medidas. Além disso, com relação aos números irracionais, os últimos capítulos contribuíram para um novo olhar desses números, uma vez que, foram apresentadas algumas aplicações simples que não são encontradas em livros didáticos da educação básica. Isso faz desse material um complemento para professores de Matemática e alunos interessados no tema Números

Reais.

Gostaria ainda de acrescentar que este material foi aplicado numa sala de aula para alunos do 1º ano do ensino médio. Como tais alunos já estavam habituados com a linguagem das planilhas eletrônicas, desenvolvemos as partes mais consideráveis desse texto em 7 aulas. Caso alguém queira aplicá-lo, sugiro que apresente antecipadamente os recursos computacionais necessários. Nesta apresentação, o programa GEOGEBRA foi bastante útil, uma vez que sua estrutura dinâmica permitiu a produção de aulas mais esclarecedoras.

Referências Bibliográficas

[BG10] Willian P. BERLINGHOFF e Fernando Q. GOUVÊA. *A Matemática Através dos Tempos*. Editora Blücher Ltda, São Paulo, 2010.

[BON05] Vincenzo BONGIOVANNI. As duas maiores contribuições de eudoxo de cnido - a teoria das proporções e o método da exaustão. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (Número 2):páginas 91–110, 2005.

[BOY96] Carl Benjamin BOYER. *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1996.

[CAR02] Bento de Jesus CARAÇA. *Conceitos Fundamentos da Matemática*. Editora Gradiva, Lisboa, quarta edição, 2002.

[EVE04] Howard EVES. *Introdução a História da Matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

[FIG02] Djairo G. de FIGUEIREDO. *Números Irracionais e Transcendentes*. SBM, terceira edição, 2002.

[GSR99] Lilian J. GALARDA, Sophia E.E. SILVA e Suely M. M. ROSSI. *A Evolução do Cálculo através da História*. Editora Edufes, Vitória, 1999.

[HEF93] Abramo HEFEZ. *Curso de Álgebra*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, segunda edição, 1993.

[IEZ93] Gelson IEZZI. *Fundamentos da Matemática Elementar*, volume 6. Atual Editora, São Paulo, 1993.

[LCWM01] Elon Lages LIMA, Paulo Cezar Pinto CARVALHO, Eduardo WAGNER e Augusto César MORGADO. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1 of *Coleção do Professor de Matemática*. SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[LIM06] Elon Lages LIMA. *Análise Real: Funções de Uma Variável*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, oitava edição, 2006.

[LIM13] Elon Lages LIMA. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[MAO08] Eli MAOR. *e: A História de um Número*. Editora Record, Rio de Janeiro, quarta edição, 2008.

[NIV84] Ivan Morton NIVEN. *Números: Racionais e Irracionais*. SBM, Rio de Janeiro, 1984.

[OLI13] Joilton de OLIVEIRA. A irracionalidade e transcendência do número π. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, 2013.

[SIL01] J.F. Porto da SILVEIRA. Apresentando o número pi, 2001. Disponível em http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/aplcom1a.html, acesso em 23/05/2014.

[SOD13] Leandro de Oliveira SODRÉ. O número 142857 e o número de ouro: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

[SSG98] Salahoddin SHOKRANIAN, Marcus SOARES e Hemar GODINHO. *Teoria dos Números*. Editora UNB, segunda edição, 1998.